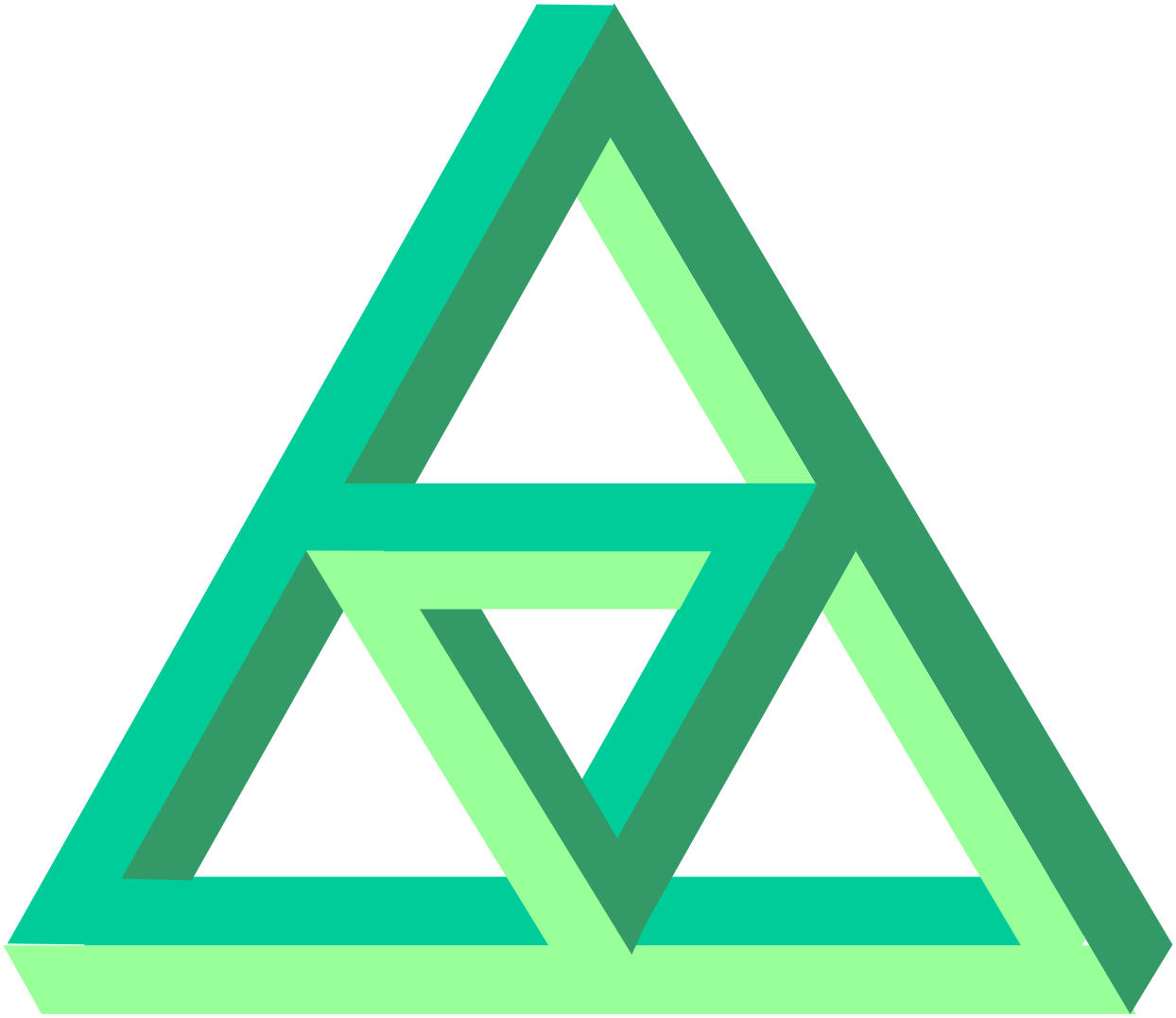
Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Sächsischen Landeskomitees
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 6 /2018 17. Jahrgang

Willkommen zum Korrespondenzzirkel im Schuljahr 2018/19

Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich interessierter und begabter Schüler bietet das gleichnamige Sächsische Landeskomitee den Korrespondenzzirkel „Mathematik“ ab der Klassenstufe 9 landesweit an. Der Zirkel orientiert sich an mathematischen Problemen, die neben der Vermittlung von Kenntnissen zu mathematischen Begriffen, Sätzen und Verfahren durch wettbewerbstypische Aufgabenstellungen die Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe (Mathematik-Olympiade, Bundeswettbewerb Mathematik) unterstützen. Jeder Interessierte kann in seiner (oder in einer höheren) Klassenstufe teilnehmen und ist hiermit herzlich dazu eingeladen.

Für die Teilnahme ist eine Anmeldung mit der vollständig ausgefüllten Teilnahmeerklärung (s. S. 15) erforderlich. Jeder Teilnehmer erhält im Verlaufe des Schuljahres 7 Serien zugesandt, die Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad umfassen. Das Spektrum reicht von „Einstiegsfragen“ über Wettbewerbsaufgaben bis zu komplexen Themen. Es wird empfohlen, zu allen Aufgaben Lösungsideen einzureichen, auch wenn keine vollständige Lösung erreicht wurde. Bereits geeignete Beispiele, die Bearbeitung von Spezialfällen oder erste Schritte zum Beweis werden wohlwollend bewertet!

Die eingereichten Lösungen werden korrigiert, für die Selbsteinschätzung kommentiert, mit Punkten bewertet und zusammen mit Lösungshinweisen zurückgegeben. Zu ausgewählten Aufgaben werden in den Heften methodische Einführungen oder weiterführende Ergänzungen gegeben. Diese sollen vor allem zur individuellen Beschäftigung anregen. Insbesondere wird diese Vertiefung durch die Wahlaufgaben gefördert.

Mehrmals im Schuljahr wird samstags zu Seminaren eingeladen, auf denen Aufgaben diskutiert und Anwendungsfälle für Mathematik vorgestellt werden. Ausgewählte Aspekte dieser Seminare werden in den darauffolgenden KZM-Heften zusammengefasst.

Zusätzlich wird der Zirkel durch Informationen wie Aufgaben, Lösungshinweisen und statistischen Auswertungen der Mathematik-Olympiade, des Bundeswettbewerbs Mathematik und anderer Wettbewerbe ergänzt. Anregungen zur inhaltlichen Gestaltung sind jederzeit willkommen. Interessante Themen, originelle Aufgaben oder Informationen rund um Mathematik werden gern in den KZM-Heften oder in den Seminaren aufgenommen.

Magische Quadrate für die Urlaubszeit [1]

Zu einem der ältesten Themen mathematischer Unterhaltung zählen **magische Quadrate**:

> *Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine n x n-Matrix, die die Zahlen 1 bis n^2 enthält und die Eigenschaft hat, dass die Summen der n Elemente in jeder Spalte, in jeder Zeile und in den beiden Diagonalen gleich sind.*

Der Summenwert *S* wird **magische Konstante** genannt und beträgt nach der Summenformel der ersten n^2 natürlichen Zahlen

$$S = \frac{n \cdot \left(n^2 + 1\right)}{2}.$$

Für $n = 1$ existiert trivialer Weise nur ein magisches Quadrat, nämlich das mit der Zahl 1. Leicht zeigt man, dass es kein magisches Quadrat zweiter Ordnung gibt. Bei der Suche nach der Anzahl der verschiedenen magischen Quadrate ab $n = 3$ ist es zunächst zweckmäßig, die magischen Quadrate als gleich zu betrachten, die durch Spiegelung (an einer der Symmetrieachsen der Matrix) oder Drehungen (um Vielfache von 90°) ineinander überführt werden können. Unter dieser Voraussetzung gibt es nur ein magisches Quadrat 3. Ordnung, das schon 4000 Jahre v.u.Z. in China bekannt war:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Für $n = 4$ existieren bereits 880 im oben genannten Sinne verschiedene magische Quadrate. Diese Zahl ist schon seit dem 17. Jh. bekannt und wurde erstmals von Bernard FRÉNICLE DE BESSY (1605 bis 1675) ermittelt. Das berühmteste derartige Quadrat ist sicherlich das von ALBRECHT DÜRER (1471 bis 1528) in seinem Stich „Melancholie“ von 1514:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

[1] Nach Devendran, T. (Hrsg.): Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlagsanstalt GmbH Stuttgart, 1990 und „Mathematik lehren“, Heft 57 (1990), S. 55-60.

Für $n = 5$ beträgt die Zahl der verschiedenen magischen Quadrate immerhin schon über 275 Millionen. Auch wenn dieser Wert bereits 1973 veröffentlicht wurde, war diese Fragestellung ein erfolgreiches Thema einer „Jugend forscht"-Arbeit. Heinrich Frank (damals Schüler am Humboldt-Gymnasium Werdau) erreichte mit seiner Computerlösung zur Ermittlung dieser Anzahl einen 2. Preis im sächsischen Landesausscheid 1995.

Verzichtet man auf die Bedingung, dass magische Quadrate die Zahlen 1 bis n^2 enthalten sollen und lässt eine beliebige Zahlenauswahl (ohne Wiederholung) zu, so kann die Frage nach **magischen Primzahlquadraten** gestellt werden, also nach solchen Quadraten, bei denen nur Primzahlen verwendet werden. Bereits HENRY ERNEST DUDENEY (1857 – 1930) entwarf 1900 ein solches – allerdings zählte er die 1 zu den Primzahlen:

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Die magische Konstante beträgt 111. Es ist beweisbar, dass für magische Primzahlquadrate 3. Ordnung kein kleinerer Summenwert existiert. Verwendet man nicht die Zahl 1, so findet man für $S = 177$ das nächste derartige Quadrat:

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Bezeichnet man die Zahl in der Mitte der Matrix als **Kernzahl**, so kann man feststellen, dass es kein (echtes, also ohne die Zahl 1 verwendendes) magisches Primzahlquadrat gibt, dass eine kleinere Primzahl als Kernzahl besitzt. Durch Vorgabe der Kernzahl und zwei weiterer Zahlen ist das Quadrat vollständig bestimmt. Es ist dann mit einem Computer recht einfach, systematisch zu probieren, ob es zu einer Kernzahl auch wirklich ein Primzahlquadrat gibt. Notwendig ist allerdings eine Abschätzung bis zu welchen Werten man das Probieren durchführen muss, um keine Möglichkeiten auszuschließen! Interessanterweise gibt es für die Kernzahl 127 erstmalig zwei verschiedene Primzahlquadrate, die sich nicht nur in der Anordnung, sondern auch in der Auswahl der Primzahlen unterscheiden. Bei 241 findet man bereits drei verschiedene Lösungen. Und wie weiter?

Eine weitere amüsante Variante der magischen Quadrate sind **bimagische Quadrate**: Zum Einen ist es ein ganz normales magisches Quadrat der Zahlen 1 bis n^2 mit der magischen Konstante S_1, zum Anderen ergeben die quadrierten

Zahlen (an den gleichen Plätzen belassen) ebenfalls ein magisches Quadrat mit der Konstanten S_2. Da sich S_2 als Summe der ersten n^2 Quadratzahlen berechnen lässt, ist das Verhältnis von S_2 und S_1 bekannt:

$$S_2 : S_1 = \frac{1}{3}\left(2n^2 + 1\right).$$

Solche bimagischen Quadrate gibt es wirklich, das kleinstmögliche wurde ebenfalls von H. E. DUDENEY gefunden. Es ist 8. Ordnung und besitzt die magische Konstante $S_1 = 260$.

Die Fortsetzung der Spielerei ist naheliegend: Gibt es auch **trimagische Quadrate**, also solche, bei denen zusätzlich auch die Kuben der Zahlen ein magisches Quadrat bilden? Ja, das kleinste bisher bekannte trimagische Quadrat besitzt die Ordnung 32 und wurde von WILLIAM H. BENSON gefunden.

Eine ganz andere Idee: Das Gegenstück zu magischen Quadraten nennt man **antimagische Quadrate**. Sie wurden erstmals von JAMES ALBERT LINDON (1914 – 1979) entdeckt. Bei diesen Gebilden sind die Summen der n Zeilen und n Spalten und 2 Diagonalen jeweils paarweise verschieden, wobei die $2n + 2$ Summen eine ununterbrochene Folge aufsteigender Zahlen bilden sollen. Antimagische Quadrate der Ordnung 1 bis 3 gibt es nicht, ein Beispiel vierter Ordnung ist hier angegeben:

11	14	1	4
5	2	16	10
15	3	8	9
6	12	7	13

Über antimagische Quadrate ist bislang wenig publiziert, Konstruktionsalgorithmen sollen noch nicht bekannt sein.

Es gibt noch weitere Sonderheiten mit magischen Quadraten. Zunächst mag beim folgenden magischen Quadrat nichts Besonderes auffallen:

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Doch man kann es um 180° drehen – und das neue Quadrat mit dem auf den Kopf stehenden Zahlen ist wieder magisch, wenn die gedrehte 96 und 11 wieder als 96 und 11, die 89 als 68 usw. gelesen wird.

Schreibt man die Zahlen in TR-Display-Art, gibt es viel mehr Möglichkeiten, weil dann auch ohne Probleme die Zahl 2 und die Zahl 5 auf den Kopf gestellt werden können:

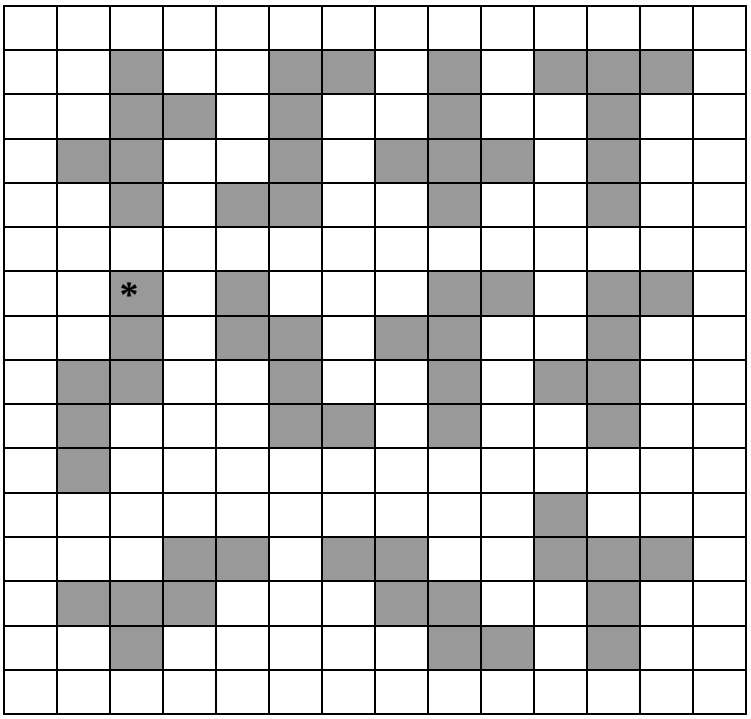
29	15	61	52
51	62	19	25
12	21	55	69
65	59	22	11

Wer findet weitere?

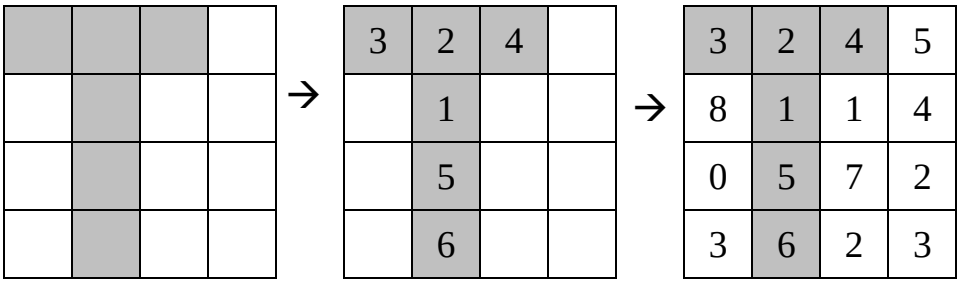
* *

Magische Quadrate als Einpersonenspiel

Man stelle sich ein Würfelnetz vor, also die 6 Quadrate der Würfeloberfläche als zusammenhängende Figur. Insgesamt gibt es 11 verschiedene Arten, die Oberfläche abzuwickeln (wenn man Drehungen und Spiegelungen nicht als verschieden ansieht):



Man nehme nun ein 4 x 4-Spielfeld und lege darauf eines der 10 Netze (das mit * gekennzeichnete Netz entfällt wegen seiner Ausdehnung). Nun stelle man sich die Augenzahlen eines Würfels auf dem Netz vor und übertrage diese auf die entsprechenden Felder. Gelingt es, das so begonnene Quadrat zu einem magischen zu ergänzen, wobei man beliebige Zahlen einsetzen darf und Zahlendopplungen zugelassen werden?



Gibt es für jedes der Netze und für jede mögliche Lage innerhalb der 4 x 4-Matrix eine Lösung? Wann genügen dafür die Zahlen von 1 bis 16? Können Zahlendopplungen vermieden werden?

Fragen über Fragen, die auf schlechtes Urlaubswetter zur Beantwortung warten. Aber wer will schon schlechtes Wetter im Urlaub?

* *

Approximation[2] von π

Es sind viele Möglichkeiten zur angenäherten Berechnung der Kreiskonstanten π bekannt. Ziel ist hierbei immer, eine hohe Genauigkeit der Näherung zu erreichen. Häufig wird zusätzlich diskutiert, wie schnell diese Annäherung erfolgt, d.h. beispielsweise, wie viele Summanden einer unendlichen Reihe oder Iterationen eines Verfahrens zur Berechnung notwendig sind.

Eine etwas ungewohnte Gütebewertung von Approximationen besteht im folgenden Ansatz:

> *Es sei X ein Term, der genau b Ziffern enthält und dessen numerischer Wert in den ersten c Nachkommastellen mit der Zahl π übereinstimmt. Dann bezeichnet der Quotient* $G = \frac{b}{c}$ *die Aufwandsgüte G von X für* π *.*

Je kleiner der Gütewert G ist, um so geringer ist also der Ziffernaufwand zur Annäherung von

$\pi \approx 3{,}1415926535\ 8979323846$.

Beispiele:

(1) Die bereits von ARCHIMEDES VON SYRAKUS (ca. 287 - 212 v.u.Z.) benutzte Näherung $P_1 = \frac{22}{7} = 3{,}14|285...$[3] erreicht mit 3 Ziffern eine Genauigkeit von 2 Nachkommastellen, also $G = 1{,}50$.

[2] Nach: Schwarz, St.: Aufgabe ι 28. In: Wurzel (2003), Heft 1, S. 16-20.

[3] Der Strich | steht nach der letzten mit π übereinstimmenden Nachkommastelle.

(2) Der Wert $P_2 = \sqrt{51} - 4 = 3{,}141|428...$ erreicht mit 3 Ziffern bereits die Übereinstimmung in 3 Nachkommastellen (G = 1,00).

(3) In China war um 500 u.Z. die Näherung $P_3 = \frac{355}{113} = 3{,}141592\,|920...$ bekannt. Mit 6 Ziffern wird eine Genauigkeit von 6 Nachkommastellen erreicht (G = 1,00). Den Gütewert kann man durch eine einfache Umformung verbessern: Stellt man den Bruch mittels $P_4 = \frac{355}{5! - 7}$ dar, genügen bereits 5 Ziffern und die Aufwandsgüte G sinkt auf 0,83.

(4) Auf SRINIVASA RAMANUJAN (1887 - 1920) geht die Näherung $P_5 = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3{,}14159265\,|258...$ zurück. Mit 9 Ziffern wird damit eine Genauigkeit von 8 Nachkommastellen erreicht (G = 1,13). Formt man den Term um zu $P_6 = \sqrt{\sqrt{97\frac{9}{22}}}$, so genügen dafür bereits 5 Ziffern (G = 0,63).

Bei den letztgenannten Umformungen zu P_4 bzw. P_6 erkennt man das Potenzial, durch einstellige Operatoren wie Wurzelzeichen oder Fakultäten Ziffern zu sparen. So findet man für

$$P_7 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}}}}}}^{\sqrt{9!}} = 3{,}141|603...$$

eine Aufwandsgüte von G = 0,67, oder für

$$P_8 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}}}}}}^{\sqrt{9! - \sqrt{\sqrt{4!}}}} = 3{,}1415926\,|308...$$

sogar eine Güte von G = 0,43.

Ob folgendes Verfahren zu Näherungen mit beliebig kleiner Aufwandsgüte führt, ist nicht bekannt: Man lege sich einen Fundus von Zahlen zwischen 2 und 4 an, die sich aus nur einer Ziffer bilden lassen. Das sind natürlich die Ziffern 2, 3 und 4. Hinzu kommen $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$. Mit zwei Wurzelzeichen gehören zum Fundus auch $\sqrt{\sqrt{4!}}, \sqrt{\sqrt{5!}}$. Dies setze man fort. Beispielsweise nimmt man dazu $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6!}}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!}}}}$, aber auch $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4!!}}}}}}$ usw. Wie sich solcherart konstruierte

Zahlen auf dem Intervall [2 ; 4] verteilen, ist noch nicht untersucht. Vielleicht kann man damit jede reelle Zahl beliebig genau annähern?

Hat man nun einen Term T_n, der n Ziffern enthält und mit π in mehr als n Nachkommastellen übereinstimmt, so bilde man für $T_n > \pi$ den Quotienten $q = \frac{T_n}{\pi} > 1$ (andernfalls bilde man den Kehrwert). Durch ausreichend häufiges Quadrieren erhält man einen Wert zwischen 2 und 4, etwa $2 \le q^{2^k} < 4$. Für diesen suche man aus dem Fundus die nächstgelegene Zahl w, zieht entsprechend oft daraus die Quadratwurzel und findet daraus eine neue Näherung $T_{n+1} = T_n / \underbrace{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{w}}}}_{k\ Wurze\ ln}$. Diese enthält $n + 1$ Ziffern. Doch erhöht sich hierbei die Anzahl der übereinstimmenden Nachkommastellen?

Wer findet mit diesem Verfahren (oder mit anderen Lösungsansätzen) eine Näherung mit besonders kleiner Aufwandsgüte?

Beim Anblick der obigen „Wurzeltürme“ erscheinen Zweifel an der Aufwandsbewertung berechtigt. Alternativ kann vereinbart werden, dass neben den Ziffern auch jedes Operationszeichen (einschließlich Wurzel-, Fakultätszeichen oder Bruchstrich) gezählt wird. Mit dieser neuen Zählweise benötigen zum Beispiel

P_1 insgesamt 4 Ziffern/Zeichen ($G^* = 2{,}00$),
P_4 insgesamt 8 Ziffern/Zeichen und ($G^* = 1{,}00$),
P_8 sogar 19 Ziffern/Zeichen ($G^* = 2{,}71$).

Damit werden die derart modifizierten Aufwandsgüten G^* wesentlich höher! Aber dennoch gelingen interessante Approximationen:

$P_9 = \sqrt[5]{306 + \frac{5}{254}} = 3{,}14159265\,|\,411...$ (11 Zeichen, 8 Stellen, G^*=1,38),

$P_{10} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3{,}14159265\,|\,258...$ (9 Zeichen, 8 Stellen, G^*=1,13),

$P_{11} = \sqrt[18]{888582403} = 3{,}1415926535\,|\,758...$ (12 Zeichen, 10 Stellen, G^*=1,20).

Wer findet für diese Zählweise Darstellungen mit einer Aufwandsgüte unter 1?

* *

Das Rechnen mit Summenzeichen

Das Summenzeichen Σ (aus dem griechischen Alphabet *S „Sigma“*) wird für alle ganzen Zahlen m und n mit $m \le n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$.

Die Verwendung des Summenzeichens kann helfen, mathematische Texte übersichtlicher und unmissverständlich zu formulieren. Ohne den (gedanklich immer richtigen) Übergang zur ausführlichen Summendarstellung kann mit folgenden Regeln auch mit dem Summenzeichen gerechnet werden:

(1) Freie Wählbarkeit des Summationsindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$

Beispiel: $\sum_{j=3}^{8} j = 3+4+5+6+7+8 = \sum_{k=3}^{8} k$

(2) Ausklammern eines konstanten Faktors: $\sum_{j=m}^{n} \left(c \cdot a_j\right) = c \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{k=2}^{5} \left(2 \cdot k\right) = 4+6+8+10 = 2 \cdot \left(2+3+4+5\right) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{5} k$

(3) Zerlegen in Teilsummen ($m < k < n$): $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{j=-4}^{4} j^2 = \sum_{j=-4}^{-1} j^2 + \sum_{j=0}^{0} j^2 + \sum_{j=1}^{4} j^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{4} j^2$

(4) Zusammenfassen von Summen: $\sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j = \sum_{j=m}^{n} \left(a_j + b_j\right)$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{4} \left(10+k\right) + \sum_{m=1}^{4} \left(10-m\right) = \sum_{j=1}^{4} \left(10+j\right) + \sum_{j=1}^{4} \left(10-j\right) =$

$= \sum_{j=1}^{4} \left(\left(10+j\right) + \left(10-j\right)\right) = \sum_{j=1}^{4} 20 = 20 \cdot \sum_{j=1}^{4} 1 = 80$

Dieses Beispiel überprüfe man durch die ausführliche Summendarstellung:

$$\sum_{k=1}^{4} \left(10+k\right) + \sum_{m=1}^{4} \left(10-j\right) = (11+12+13+14) + (9+8+7+6) = 80$$

(5) Umkehrungsregel: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j}$

Beispiel: $12345 = \sum_{k=1}^{5} k \cdot 10^{5-k} = \sum_{k=1}^{5} (6-k) \cdot 10^{5-(6-k)} = \sum_{k=1}^{5} \left(6-k\right) \cdot 10^{k-1}$

(6) Transformation des Summenindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$

Beispiel: $\sum_{j=4}^{8}(j+2) = 6+7+8+9+10 = \sum_{j=6}^{10} j$

Die bekannte Summenformel für die ersten *n* natürlichen Zahlen, die bereits im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (1492 - 1559) zu finden ist, aber meist mit dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855) in Verbindung gebracht wird, d.h.

$$S(n) = 1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

findet man unter Verwendung der Rechenregeln mit Summenzeichen auf folgende Weise:

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right) = \qquad (nach\ Regel\ 5)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k+(n+1-k)) = \qquad (nach\ Regel\ 4)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+1) = \frac{(n+1)}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n} 1 = \qquad (nach\ Regel\ 2)$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Hierbei wurde insbesondere die Umkehrungsregel, das Zusammenfassen und das Ausklammern eines Faktors angewandt.

Für allgemeinere Ausdrücke, wie etwa $S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d)$ ergeben sich nun deren Summenformeln als unmittelbare Folgerung:

$$S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d) = a\cdot\sum_{k=0}^{n} 1 + d\cdot\sum_{k=0}^{n} k = a\cdot(n+1) + d\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Aufgaben Serie 1 (2018/19)

(Einsendungen bitte bis 14. September 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [4])

Aufgabe 1-1: Man finde alle positiven ganzen Zahlen, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes sind? (5 Punkte)

Hinweis: Man beantworte ohne Verwendung von technischen Hilfsmitteln.

Aufgabe 1-2: Unter einem magischen Multiplikationsquadrat *n*-ter Ordnung versteht man eine Anordnung von n^2 paarweise verschiedenen natürlichen (nicht notwendig aufeinander folgenden) Zahlen auf einem *n x n*-Quadrat, so dass die Produkte der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich einer Konstante sind. Man untersuche, ob es für $n > 2$ magische Multiplikationsquadrate gibt! (5 Punkte)

Aufgabe 1-3: Jemand hat 55 Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste passt genau ein Ball, in die zweite passen genau zwei Bälle usw.
Zeigen Sie, dass es möglich ist, alle Bälle so in den Kisten zu verstauen, dass in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen. (6 Punkte)

Aufgabe 1-4: Gegeben sei ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, dass er zwei benachbarte Seiten des Quadrates berührt und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Quadrates geht. Man beschreibe die Konstruktion. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 1-5A: Gegeben sei für *S* die Summendarstellung $S = 1 + 3 + \ldots + 31$. Man könnte vermuten, dass unter *S* die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 31 gemeint ist, also $S = S_1(16) = \sum_{k=1}^{16} (2 \cdot k - 1)$.

(a) Man leite eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen her, also einen Ausdruck ohne Summenzeichen für S_1 in Abhängigkeit von *n*: $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)$. (2 Punkte)

[4] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Kommt diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(b) Es ist zu zeigen, dass die Darstellung von $S = 1 + 3 + ... + 31$ nicht eindeutig ist. Man gebe außer S_1 (mit 16 Summanden) zwei weitere Summen mit verschiedener Summandenzahl an, in denen die Summanden 1, 3 und 31 wie angegeben als erste, zweite bzw. letzte Summanden vorkommen, und verwende für die Summendarstellung das Summenzeichen. (2 Punkte)

(c) Man gebe unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für $S = 1 + 3 + ... + 31$ derart an, dass sich bei insgesamt 4 Summanden die Summe 45 ergibt. Man berechne die Summe der ersten 6 Zahlen gemäß dieser Darstellung. Kann man für jede vorgegebene Zahl A unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für S finden, so dass $S(4) = A$ gilt?
(4 Punkte)

Aufgabe 1-5B: Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$. Für $n = 4$ erscheint $d_4 = 1$ als naheliegend, aber dafür ist bereits ein Beweis notwendig.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel. (2 Punkte)

(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird. (2 Punkte)

(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht. (4 Punkte)

* *

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-bitterlich.de
Auflage:	120 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des **Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz -** VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

T E I L N A H M E B E D I N G U N G E N

(1) Die Teilnahme am Zirkel kann jederzeit angemeldet werden. Aus organisatorischen Gründen wird für die Vorbereitung des neuen Jahrgangs um eine frühzeitige Anmeldung gebeten.

(2) Für die Anmeldung ist die nachfolgende Teilnahmeerklärung (spätestens mit der Einsendung der Lösungen) an

Dr. N. Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

einzusenden. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung und – falls noch nicht erhalten – die Zusendung der aktuellen Materialien.

(3) Der Teilnehmer trägt einen jährlichen Unkostenbeitrag in Höhe von **20,00 EUR,** der in Form einer Überweisung unter Angabe des Namens und dem Kennwort **„KZM“ + Klassenstufe** auf das Konto

Kontoinhaber	Bezirkskomitee „Mathematik“
IBAN	DE90 8705 0000 3550 0030 55
SWIFT/BIC-Code	CHEKDE81XXX (Sparkasse Chemnitz)

einzuzahlen ist. Bei späterem Teilnahmebeginn wird ein anteilmäßiger Unkostenbeitrag erhoben.

(4) Die Aufgabenserien, organisatorische Informationen zum KZM-Ablauf und zu den Seminaren sowie die aktuellen Punktestände werden unter www.kzm-sachsen.de veröffentlicht. Zur Anonymisierung wird jedem Teilnehmer mit der Rücksendung seiner Einsendung ein Code-Wort mitgeteilt.

(5) Die Einsendetermine zu den Serien sind möglichst einzuhalten. Die korrigierten und teilweise kommentierten Einsendungen werden mit der übernächsten Serie zurückgegeben.

(6) Es besteht die Möglichkeit der elektronischen Einsendung, wobei für Anlagen das PDF-Format bevorzugt wird. Es erfolgt eine elektronische Eingangsbestätigung. Die korrigierten Einsendungen werden aber auch in diesem Fall in Papierform zurückgesandt. Per E-Mail können zusätzliche Infos verschickt und Anfragen gestellt werden.

(7) Die Rücksendung erfolgt für die Teilnehmer **kostenfrei** über die Fachlehrer der Schule. Man beachte allerdings, dass dieser Zustellungsweg gewöhnlich etwas länger dauert. Wer seiner Einsendung **2 Briefmarken der Deutschen Post á 0,70 €** beilegt, erhält die Rücksendung dieser Sendung auf direktem Weg an die Wohnanschrift.

T E I L N A H M E E R K L Ä R U N G *

Name, Vorname: . . . . . .

Wohnanschrift: . . . . . .

. . . . . .

E-Mail: . . . . . .

Name und Anschrift der Schule: . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Ich möchte im Schuljahr 2018/19 unter den angegebenen Bedingungen am Korrespondenzzirkel Mathematik der

Klassenstufe 9 ❑

Klassenstufe 10 ❑

(bitte Klassenstufe ankreuzen)

teilnehmen.

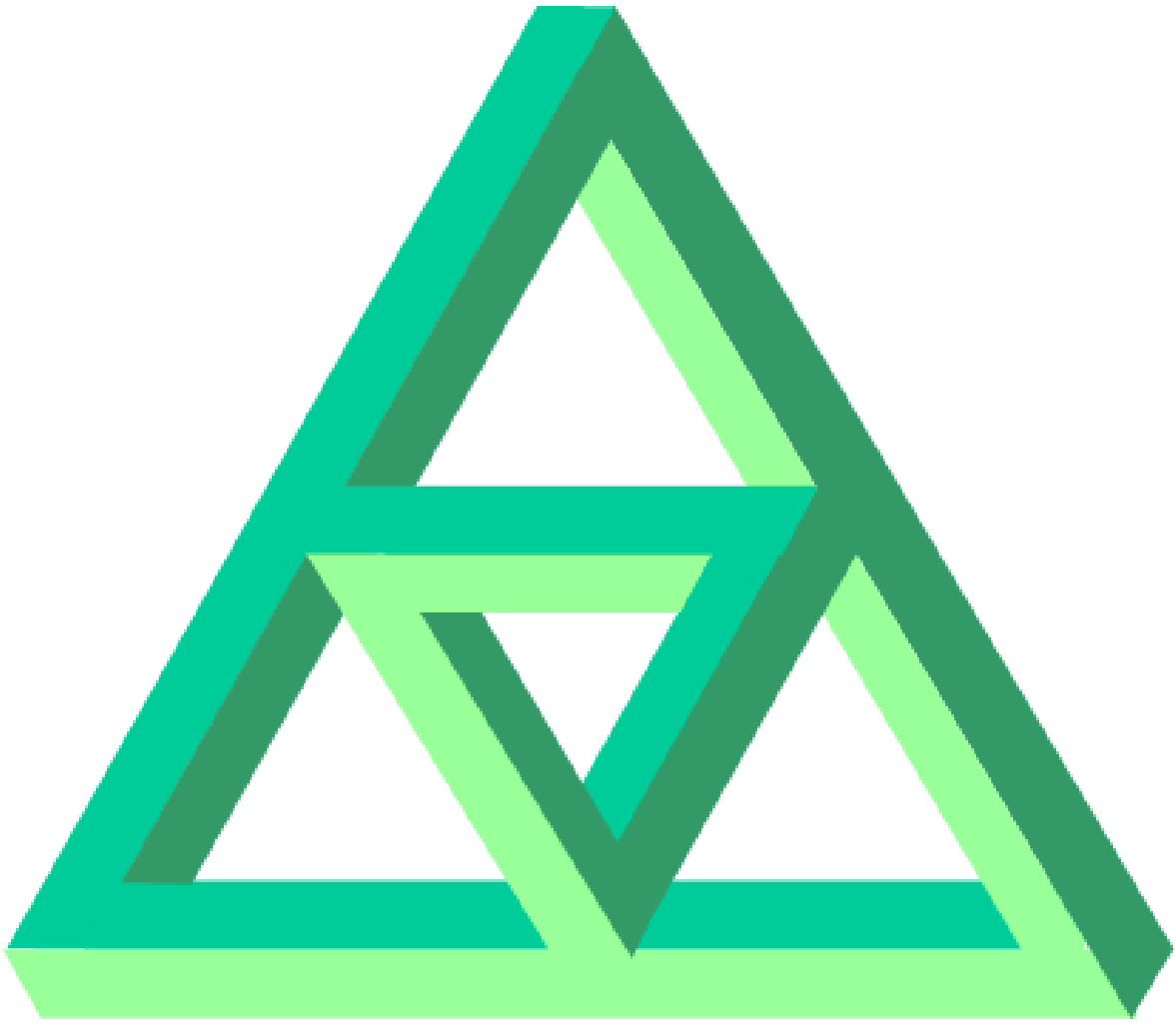
_____	_____	_____
Ort, Datum	Unterschrift des Schülers	Unterschrift eines Erziehungsberechtigten

* Die Personendaten werden nur für den direkten Kontakt verwendet und nicht an Dritte weitergegeben.

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 7 /2018 17. Jahrgang

Lösungsbeispiele für KZM-Aufgaben

Aufgabe. Welche Zahl ist größer: 2018^{2018} oder $(2018!)^2$?

Lösungsdiskussion. Auch wenn es programmtechnisch möglich ist – das zahlenmäßige Ausrechnen beider Terme ist keine geeignete (und seitens der Korrektur nicht anerkannte) Lösungsmethode. Vielmehr versuche man (da 2018^{2018} genau 2018 Faktoren besitzt) auch den zweiten Term in 2018 Faktoren zu zerlegen. Wegen $2018! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2018$ bietet sich folgender Faktorenvergleich an:

$$2018 \le k \cdot (2018 - k) \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, 2018$$

Diese Ungleichungen lassen sich leicht zeigen. Für $k = 1$ gilt das Gleichheitszeichen, sonst die Ungleichung, woraus die Behauptung folgt. ❑

Aufgabe. Man ermittle alle natürlichen Zahlen x und y, die die Gleichung

$$x^2 = y^2 + 111$$

erfüllen.

Lösungsdiskussion. Bemerkt man, dass wegen $(y+1)^2 - y^2 = 2y + 1$ der Abstand zweier benachbarter Quadratzahlen ab einer gewissen Zahl y_0 größer als 111 ist, so genügt es, für die Zahlen $y = 1, 2, ..., 55$ systematisch zu probieren, ob es jeweils passend eine geeignete natürliche Zahl x dafür gibt. Eine solche Lösungsdarstellung muss zwar als richtig anerkannt werden, wenn für alle diese Fälle die Rechnung nachvollziehbar angegeben ist – elegant ist eine solche Lösung aber nicht.[1] Um eine solche Lösungsmethode zu vermeiden, könnte man als Aufgabensteller den absoluten Term dieser Aufgabe drastisch erhöhen ($x^2 = y^2 + 1111$), aber mit entsprechendem (Aufschreibe-) Fleiß ließe sich auch diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Besser ist es aber, die Struktur dieser Aufgaben zu erkennen und damit die Rechnerei drastisch zu beschränken:

$$x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y) = 111 = 1 \cdot 3 \cdot 37, \quad \text{also} \quad x - y = 1,\ x + y = 111$$
$$\text{oder} \quad x - y = 3,\ x + y = 37$$

bzw. $x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y) = 1111 = 1 \cdot 11 \cdot 101,$

$$\text{also} \quad x - y = 1,\ x + y = 1111$$
$$\text{oder} \quad x - y = 11,\ x + y = 101$$

[1] Es sei darauf hingewiesen, dass die Nutzung von Rechentechnik zur Lösungsfindung bei KZM-Aufgaben natürlich zugelassen ist, aber nicht zur Lösungsdarstellung! Es genügt also im Rahmen des KZM nicht, den Quellcode eines Programms anzugeben oder zu formulieren, mit Hilfe eines Programms wurden die Lösungen gefunden.

Daraus lassen sich die jeweils zwei Lösungspaare ohne Schwierigkeit ermitteln und anhand der zugehörigen Proben bestätigen. ❑

Aufgabe. Man ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, bei denen die dritte Potenz in der Einer- und Zehnerstelle mit der Ausgangszahl übereinstimmen.

Lösungsdiskussion. Auch diese Aufgabenstellung verleitet zum systematischen Probieren. Man muss ja „nur“ für die Zahlen von 0 bis 99 die dritte Potenz berechnen und die Endziffern vergleichen. (Sollen führende Nullen bei n-stelligen Zahlen nicht zugelassen werden, wird meist die Formulierung „echt n-stellig“ verwendet.) Durch die einfache Vorüberlegung, dass nur bei Zahlen mit den Endziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9 deren dritten Potenzen in der Einerziffer übereinstimmen können, reduziert sich die Menge der zu probierenden Zahlen deutlich. Doch man kann auch weiter analysieren: Sei x die zweistellige Zahl, dann existiert nach Aufgabenstellung eine natürliche Zahl y mit $x^3 = 100y + x$. Nun gilt:

$$x^3 - x = (x-1)\cdot x \cdot (x+1) = 100y\,.$$

Das Produkt der drei aufeinander folgenden Zahlen $(x – 1)$, x und $(x + 1)$ muss durch 100 und deshalb durch $25 = 5^2$ teilbar sein. Da aber nur eine davon durch 5 teilbar sein kann, muss diese sogar durch 25 teilbar sein. Als Lösung können also nur die Zahlen $x = 0$, 1, 24, 25, 26, 49, 50, 51, 74, 75, 76 und 99 möglich sein. Da jedoch in jedem dieser Fälle das Produkt der drei Faktoren auch durch 4 teilbar ist, sind dies tatsächlich alles Lösungen. ❑

Im Einleitungstext der Aufgabe A1-5B wird zum maximalen Mindestabstand $d_4 = 1$ erwähnt, dass eigentlich ein Beweis erforderlich sei. Nimmt man an, die Punkte werden nicht auf die Eckpunkte des Quadrates verteilt, sondern befinden sich jeweils mit dem Abstand x vom Eckpunkt entfernt auf einer Quadratseite, so ist zu zeigen, dass der daraus resultierende Mindestabstand kleiner als 1 ist.

Geometrisch ist dies offensichtlich, da für $x < 1$ der umschlossene Flächeninhalt kleiner als der des Ausgangsquadrates ist und somit auch alle Abmessungen kleiner sind.

Analytisch lässt es sich – wie in geometrischen Aufgabenstellung häufig gern ausgeführt – ebenfalls leicht nachweisen. Offensichtlich wird der Mindestabstand durch die Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrates bestimmt, also (mittels Satz des Pythagoras) durch $\sqrt{x^2 + (1-x)^2}$. Wegen $x < 1$ gilt

$$x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2 = 1 - 2x\cdot(1-x) < 1,$$

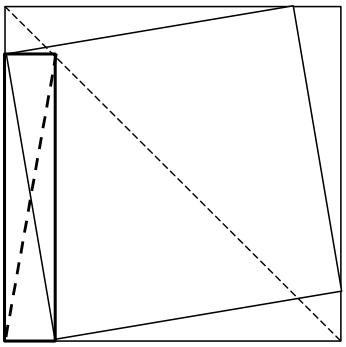
sodass diese Verteilung einen kleineren Mindestabstand als $d_4 = 1$ liefert.

Aus diesem Ansatz lässt sich auch die Frage beantworten, welches in ein Quadrat einbeschriebenes Quadrat den kleinsten Umfang hat. Offenbar muss dafür der obige Wurzelausdruck nur möglichst klein sein, also

$$x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2 = 2 \cdot \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) \to \min$$

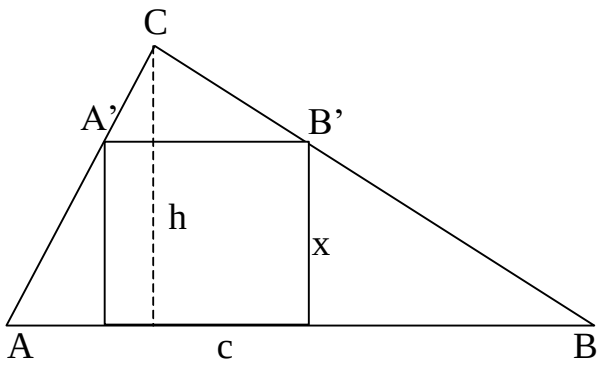
Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, wird das Minimum für $x = ½$ erreicht. Diese Aussage lässt sich mühelos auch geometrisch herleiten:

Zeichnet man als Hilfsfigur das Rechteck wie in der nebenstehenden Skizze ersichtlich ein, so entspricht dessen Diagonalenlänge der Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrates. Der im Innern des Quadrates liegende Eckpunkt dieses Rechtecks befindet sich auf der Diagonalen des Ausgangsquadrates (warum?). Damit ist die Rechteckdiagonale am kürzesten, wenn sie orthogonal auf der Quadratdiagonalen steht.



Aufgabe. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck *ABC*. Man konstruiere ein Quadrat, dessen eine Seite auf *AB* liegt und die beiden anderen Punkte auf *BC* bzw. auf *AC* liegen.

Lösungshinweise: Angenommen, man habe ein solches Quadrat gefunden. Bezeichnen *A*' und *B*' die Eckpunkte des einbeschriebenen Quadrates auf *AC* bzw. auf *BC*, so sind die Dreiecke *ABC* und *A'B'C* ähnlich (warum?).

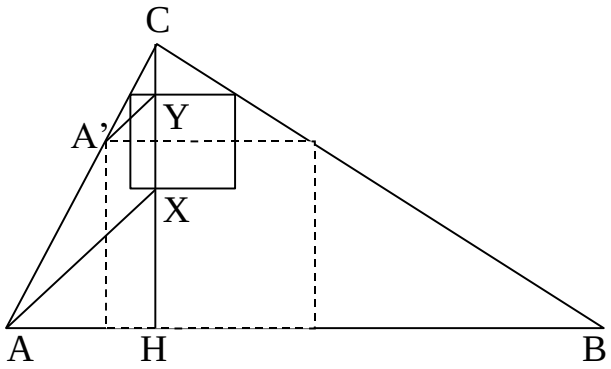


Also gilt (mit *x* als Länge der Quadratseite)

$$\frac{x}{h-x} = \frac{c}{h}\text{, woraus } x = \frac{ch}{c+h} \text{ folgt.}$$

Die Angabe des analytischen Ausdrucks für *x* beendet noch nicht die Konstruktion – es ist abschließend zu erklären, wie man die Länge *x* mit Zirkel und Lineal aus den Strecken *c* und *h* konstruieren kann (beispielsweise mit Hilfe des Strahlensatzes – wie?).

Doch auch diese Aufgabe lässt sich rein geometrisch lösen: Man zeichne ein beliebiges (kleines) Quadrat so in das Dreieck, dass die eine Quadratseite im Innern vom Dreieck *ABC* und parallel zu *AB* liegt und die beiden anderen Eckpunkte auf *BC* bzw. *AC* liegen.



Die Höhe *CH* habe mit den Quadratseiten die Punkte *X* und *Y* gemeinsam (s. Skizze). Man kann nun zeigen: Ist *A'Y* parallel zu *AX*, so ist *A'* ein Eckpunkt des gesuchten Quadrates (warum?). Die Konstruktion dieses Quadrates ist dann kein Problem.

Dirichletsches Schubfachprinzip

Das Dirichletsche Schubfachprinzip (engl. pigeon-hole principle) wurde zuerst von PETER GUSTAV DIRICHLET (1805 – 1859) explizit formuliert:

> *Werden $n \cdot k + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als k Objekte.*

So einfach dieses Prinzip auch erscheinen mag, es wird dennoch von Schülern nur selten vollständig zur Beweisführung bei Olympiade- und KZM-Aufgaben genutzt. Dabei ist seine Anwendungsvielfalt enorm, man muss „nur“ die geeigneten Objekte und Schubfächer definieren können, was sich aber durchaus als schwierig erweisen kann.

Häufig sind Aufgabenstellungen des Typs „Man zeige: Bei beliebiger Anordnung ... gibt es mindestens ...“ mit dem Schubfachprinzip lösbar, insbesondere dann, wenn eine vollständige Fallunterscheidung für die „beliebigen Anordnungen“ nicht möglich oder nur sehr komplex erscheint.

Aufgabe. Jede natürliche Zahl *n* hat ein Vielfaches der Form 1111...1100...0000.

Objekte: (unendlich viele) verschiedene Zahlen der Form 111...11

Schubfächer: Reste 0, 1, ..., *n* – 1 bei Division durch *n*

> → *unendlich viele (und damit mehr als n) Zahlen und n Reste*

Beweisidee: Wenigsten zwei Objekte (Zahlen dieser Form) befinden sich in einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch n), deren Differenz die geforderte Form hat und durch *n* teilbar ist.

Aufgabe. Gegeben seien 100 beliebige natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_{100}$. Man zeige, dass man aus diesen stets eine Auswahl treffen kann, sodass deren Summe durch 100 teilbar ist!

Objekte: 100 Summen der jeweils ersten *n* (*n* = 1, ..., 100) Zahlen, also

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_{100}$$

Schubfächer: Reste 1 bis 99 bei Division durch 100

→ *100 Summen und 99 Reste*

Beweisidee: Eines der Objekte (Summen) ist bereits durch 100 teilbar (dafür gibt es kein Schubfach) oder in einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 100) befinden sich 2 Objekte (Summen), deren Differenz wieder eine Summe gemäß der Aufgabenstellung ist.

Aufgabe. Man zeige: Wählt man aus den natürlichen Zahlen 1 bis 200 auf beliebige Weise 101 Zahlen aus, so sind unter diesen wenigstens zwei Zahlen, von denen die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Objekte: größte ungeradzahligen Teiler der ausgewählten Zahlen

Schubfächer: ungerade Zahlen 1, 3, .., 199

→ *101 Teiler und 100 ungerade Zahlen*

Beweisidee: In einem Schubfach (ungerade Zahl) sind mindestens 2 Objekte (Teiler), deren zugehörigen Zahlen sich folglich nur durch eine Zweierpotenz als Faktor unterscheiden.

Aufgabe. Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen stets 15 derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist?

Objekte: 100 Zahlen

Schubfächer: Reste 0, 1, ..., 6 bei Division durch 7

→ *100 Zahlen und 7 Reste*

Beweisidee: Wenigsten ein Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 7) muss wegen $14 \cdot 7 = 98 < 100$ mehr als 14 Objekte (Zahlen) enthalten, die bei Division durch 7 jeweils den gleichen Rest lassen, sodass deren paarweisen Differenzen stets durch 7 teilbar sind.

Das Schubfachprinzip findet auch oft in geometrischen Aufgabenstellungen Anwendung, beispielsweise wenn Punkte auf eine geometrische Figur verteilt werden.

Aufgabe. Von zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 LE haben mindestens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$.

(*Hinweis:* Bei Maßzahlen für Längen ohne Maßeinheit werde LE als Angabe in formalen Längeneinheiten verstanden.)

Objekte: 10 beliebig vorgegebene Punkte

Schubfächer: 9 Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$

→ *10 Punkte und 9 Teilflächen*

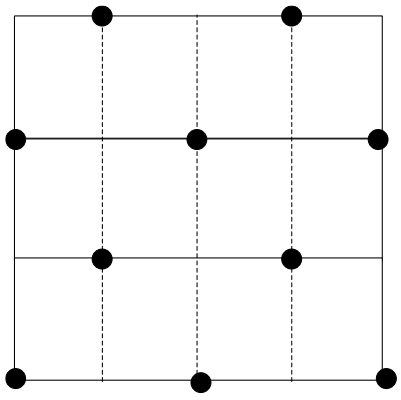
Beweisidee: Wenigsten zwei Objekte (Punkte) befinden sich in einem Schubfach (Teilfläche), deren Abstand die Diagonale des Teilquadrates nicht übersteigen kann.

Man beachte, dass hiermit nur eine obere Grenze des maximalen Mindestabstandes angegeben werden kann. Es lässt sich mit dem Schubfachprinzip zunächst nur schlussfolgern, dass der maximale Mindestabstand den angegebenen Wert nicht übersteigt. Ob es eine Verteilung gibt, die diese Grenze auch tatsächlich annimmt, muss zusätzlich gezeigt werden. Dafür genügt es jedoch, ein Beispiel anzugeben.

Aufgabe. Man finde eine Verteilung von $n = 10$ Punkten mit möglichst großem Mindestabstand.

Lösungshinweise: Wie eben gezeigt gilt $d_{10} \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471$.

Es gelingt aber nicht, die 10 Punkte so zu verteilen, dass dieser Grenzwert der maximale Mindestabstand ist (wieso?). Man kann aber zeigen, dass der maximale Mindestabstand mindestens mehr als 0,4 beträgt. Teilt man nämlich das Quadrat in 12 Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ und verteilt die 10 Punkte wie angegeben auf den Gitterpunkten, so beträgt der Mindestabstand



$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{5}{12} > 0{,}416.$$

Aufgabe. Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 LE seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkten bestehendes Punktepaar gibt, sodass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$ ist.

Objekte: 28 beliebig vorgegebene Punkte

Schubfächer: 27 Teilwürfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}$

→ *28 Punkte und 27 Teilwürfel*

Beweisidee: Wenigsten zwei Objekte (Punkte) befinden sich in einem Schubfach (Teilwürfel), deren Abstand die Raumdiagonale des Teilwürfels nicht übersteigen kann.

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal [2]

Zur Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene nutzt man **elementare** Konstruktionen (so genannte Grundkonstruktionen), die durch folgende Axiome (allgemeingültige, nicht zu beweisende Sätze) abgesichert sind. Es gilt also als vereinbart, dass mit Zirkel und Lineal in der Ebene folgende Konstruktionen ausgeführt werden können:

1. (Linealaxiom) Es ist stets möglich, durch 2 gegebene Punkte genau eine Gerade zu ziehen.
2. (Schnittpunktaxiom I) Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets konstruieren.
3. (Zirkelaxiom) Es lässt sich genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und wenigstens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind.
4. (Schnittpunktaxiom II) Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets durch Konstruktion die Schnittpunkte bestimmen.
5. (Schnittpunktaxiom III) Es ist stets möglich, die Punkte zu konstruieren, die zwei sich schneidenden Kreise gemeinsam haben.

Lässt sich eine Aufgabe nicht auf diese Axiome zurückführen, so heißt sie **nichtelementar**. Allerdings ist hierbei zwischen der Möglichkeit der Aufgabe und der Lösbarkeit der Aufgaben zu unterscheiden. Eine Aufgabe heißt möglich, wenn es eine Lösung gibt. Dabei kann es aber durchaus sein, dass diese Lösung nicht mit den oben genannten Axiomen ausführbar ist, aber mit speziellen Instrumenten wie *Einschiebelineal* oder *Spiegellineal* eine Lösung praktisch

[2] Nach: Hameister, E. Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970.

gelingt. Solche Aufgaben nennt man **elementar nicht lösbar**. Ein Beispiel ist die Dreiteilung des Winkels

Für eine Konstruktionsbeschreibung ist es streng genommen erforderlich, jeden (Konstruktions-) Schritt durch eines oder mehrere dieser Axiome zu begründen. Die **Halbierung eines Winkels** mit Zirkel und Lineal könnte ausführlich so beschrieben werden: Gegeben sei ein Winkel durch die zwei Halbgeraden (Schenkel des Winkels) mit dem gemeinsamen Anfangspunkt *S* (Scheitelpunkt).

- Im Scheitel *S* des gegebenen Winkels wird der Zirkel eingesetzt und mit einer beliebigen Öffnung ein Kreisbogen gezeichnet (Axiom 3),
- der jeden Schenkel in einem Punkte *A* bzw. *B* schneidet (Axiom 4).
- Dann schlägt man um jeden der Punkte *A* und *B* mit einem festen, ausreichend großen, aber beliebig gewählten Radius einen Kreis (Axiom 3).
- Beide Kreise schneiden sich in einem von *S* verschiedenen Punkt *T* (Axiom 5).
- Verbindet man *S* und *T* (Axiom 1),

so ist die Gerade *ST* die gesuchte **Winkelhalbierende**.

Nun ist es natürlich zur Verkürzung von Konstruktionsbeschreibungen zulässig, häufig wiederkehrende Konstruktionen als bekannt vorauszusetzen. Dazu gehören beispielsweise:

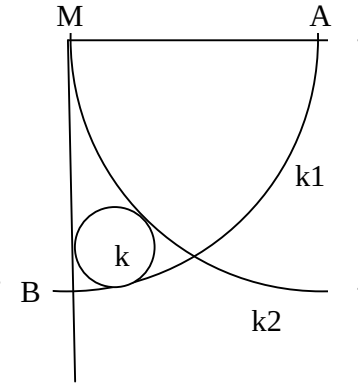
- Halbierung eines Winkels $\angle ASB$,
- Errichten der Mittelsenkrechten auf einer Strecke $\overline{AB}$,
- Fällen des Lotes von einem Punkt *P* auf eine Gerade *g*,
- Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden *g* durch einen Punkt *P*.

Von der platonischen Schule (PLATON, um 428 bis 348 v.u.Z.), an deren Eingangstür die Worte „μηδειζ αγεωμετρητοζ εισιτω“ [3] prangten, wurde die Methodik der Durchführung von Konstruktionsaufgaben streng vorgegeben. Jede, auch die einfachste Aufgabe sollte mit einer **Analyse** beginnen. Dazu wird die vorgelegte Aufgabe an einer angenommenen Figur unter Berücksichtigung der vorgegebenen Bestimmungsstücke so aufgelöst, dass die Konstruktionsschritte ersichtlich werden. Eine Skizze, in der alle benötigten Punkte eingetragen sind, ist eine hervorragende Grundlage für die Analyse. Hier schließt sich die eigentliche **Beschreibung** der Konstruktionsschritte an. Ist die Konstruktionsaufgabe gelöst, muss anschließend der **Beweis** geführt werden, dass die gefundene Figur tatsächlich die geforderte ist. Oft genügt es, hierbei auf die Analyse zu verweisen. Wenn aber gewisse Hilfskonstruktionen notwendig

[3] „Keiner soll ohne Kenntnisse der Geometrie hereinkommen“

sind, wird dies als Nachweis nicht ausreichen und ein gesonderter Beweis ist erforderlich. Abschließend ist stets die Diskussion zu führen, ob die Konstruktion bei jeder konkreten Wertvorgabe der gegebenen Bestimmungsstücke ausführbar ist (**Existenz**) bzw. welche Beschränkungen zu beachten sind (Nebenbedingungen). So kann man zwar die Konstruktion eines Dreiecks aus den gegeben Seitenlängen beschreiben, die Konstruktion ist aber nur ausführbar, wenn diese Seitenlängen die Dreiecksungleichung erfüllen. Schließlich ist auch die **Eindeutigkeit** zu untersuchen, also ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist. Ergeben sich beispielsweise in einem Schritt 2 Schnittpunkte und man muss zur Fortsetzung der Konstruktion einen davon auswählen, ist darzulegen, welche Konsequenzen sich aus der Auswahl für die Figur ergeben. Diese Elemente der Konstruktionsbeschreibung findet man auch in Wettbewerbsaufgaben wieder.

Aufgabe MO411032. Es sei ABC ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit dem gegebenen Radius r und Mittelpunkt M. Ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis k einbeschrieben werden, d.h. er soll die Strecke $\overline{MB}$ berühren, den Kreis k_1 von innen berühren und den Kreis k_2 von außen berühren.



a) Wie groß ist der Radius des Kreises k?
b) Konstruieren Sie den Kreis k nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Die Teilaufgabe a) ist die Aufforderung zur Analyse, denn wenn man den Radius r_k des Kreises k ermitteln kann (Lösungshinweis: $r_k = r/6$), findet man wesentliche Aussagen zur Lage des Kreises, auf denen dann die Konstruktionsbeschreibung beruht. Die Herleitung dieses Radius dient gleichzeitig dem Beweis, dass der gefundene Kreis der gesuchte ist. Die „Existenz genau eines Kreises“ – so ein Korrekturhinweis in der Musterlösung – musste erklärt werden, wurde aber aufgrund der Anschaulichkeit ohne Beweis akzeptiert.

Im Weiteren werden die Bestimmungsstücke für die zu konstruierende Figur (soweit Missverständnisse nicht zu erwarten sind) entsprechend der üblichen Bezeichnungsweisen benannt. Es sollten aber prinzipiell Skizzen oder Zeichnungen dargestellt und alle benannten Punkte, Strecken und Figuren eingetragen werden. So können Missverständnisse aus der textlichen Beschreibung vermieden werden.

Besteht die Aufgabenstellung darin, aus den gegebenen Seitenlängen *a, b* und *c* ein Dreieck zu konstruieren, so wird man auch ohne detaillierte Analyse eine geeignete Konstruktionsbeschreibung finden können. Die Eindeutigkeit ist leicht zu erklären (zwei spiegelbildliche, kongruente Lösungen) und für den Existenznachweis genügt der Hinweis auf die Dreiecksungleichungen. Auch die Aufgabe, ein Dreieck aus den Seiten *a* und *c* und dem Winkel $\alpha = 30°$ zu konstruieren, erscheint einfach. Die Diskussionen zur Eindeutigkeit (es können zwei verschiedene, nicht kongruente Dreiecke konstruiert werden) und zur Existenz (es muss $a \geq c/2$ gelten) müssen aber sorgfältig geführt werden.

Betrachtet man die Seitenlängen (a, b, c), Winkelgrößen (α, β, γ) sowie die Längen der Höhen (h_a, h_b, h_c), Seiten- (s_a, s_b, s_c), und Winkelhalbierenden (w_a, w_b, w_c) als möglich Bestimmungsstücke für Dreieckskonstruktionen, so lassen sich insgesamt $\binom{15}{3} = 455$ Aufgaben formulieren. Sollen Aufgaben, die durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen ineinander überführt werden können, als unwesentlich verschieden angesehen werden, verbleiben insgesamt 95 wesentlich verschiedene Konstruktionsaufgaben. Von diesen sind die Vorgaben (α, β, γ) und (a, β, h_c) unterbestimmt, d.h., bereits zwei der gegebenen Größen bestimmen die dritte Angabe eindeutig und somit lassen sich die Dreiecke nicht eindeutig konstruieren, d.h. es fehlt eine dritte unabhängige Bestimmungsgröße. Während 63 Aufgaben allein mit Zirkel und Lineal gelöst werden können, sind die restlichen 30 Aufgaben im Allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.

(wird fortgesetzt)

Bekannte Sätze der Mathematik

Sehnensatz. Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.

Beweisskizze: Bezeichnen wie in der Abbildung 1 ersichtlich *a*, *b*, *c* und *d* die Sehnenabschnitte, so ist die Gleichheit

$$a \cdot c = b \cdot d$$

zu zeigen. Nun sind aber die Winkel $\angle DBC$ und $\angle DAC$ gleich groß, da es beide Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne $\overline{CD}$ sind. Ebenso stimmen die Größen der Winkel $\angle BDA$ und $\angle BCA$ (Peripheriewinkel über $\overline{AB}$). Folglich sind die Dreiecke *ASD* und *BCS* ähnlich (www). Damit gilt die Verhältnisgleichung $a : d = b : c$, woraus die behauptete Gleichung unmittelbar folgt. ❑

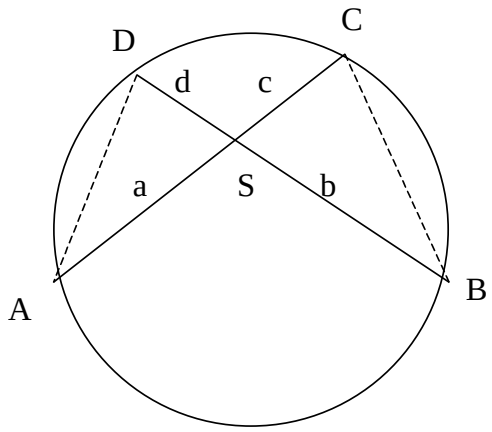


Abbildung 1

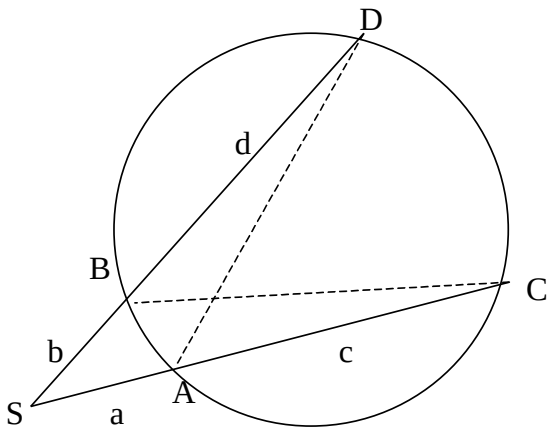


Abbildung 2

Sekantensatz. Schneiden sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich.

Beweisskizze: Mit der Bezeichnung wie in Abbildung 2 ist zu beweisen, dass gilt

$$a \cdot (a + c) = b \cdot (b + d).$$

Wie beim Sehnensatz beweist man die Ähnlichkeit der Dreiecke *SCB* und *SAD*. Während die Winkelgleichheit von $\angle ACB$ und $\angle ADB$ als Peripheriewinkel über $\overline{AB}$ unmittelbar folgt, sind die Winkel $\angle CBS$ und $\angle SAD$ als Nebenwinkel von $\angle DBC$ bzw. $\angle DAC$ (Peripheriewinkel über $\overline{CD}$) gleich groß. Also gilt die Verhältnisgleichung

$$a : (b + d) = b : (a + c),$$

woraus die Behauptung folgt. ❑

Sekantentangentensatz. Jede Tangente von einem Punkt an einem Kreis ist mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekantenabschnitten.

Beweisskizze: Um die Gleichung

$$b^2 = a \cdot (a + c)$$

zu beweisen, genügt es im obigen Sekantensatz die eine Sekante so zu verschieben, dass *B* und *D* zusammenfallen (s. Abbildung 3).

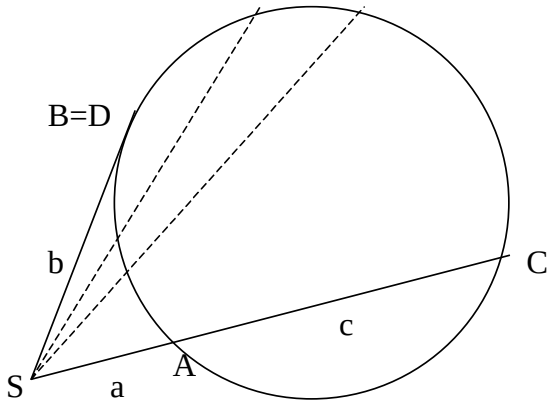


Abbildung 3

59. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 3. bis 14. Juli 2018 in Cluj-Napoca (Rumänien) statt. Mit 594 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern aus 107 Ländern ist sie die IMO mit dem bislang drittgrößtem Teilnehmerfeld (Rekord: 2017 mit 111 Ländern und 615 Startern).

Insgesamt wurden 289 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,7% aller Teilnehmer einen Preis. Mit einer Goldmedaille, zwei Silbermedaillen und einer Bronzemedaille schnitten die deutschen Teilnehmer ähnlich erfolgreich wie 2017 ab. Das Team konnte mit insgesamt 131 Punkten von 252 möglichen Punkten in der (inoffiziellen) Länderwertung den **31. Platz** erreichen (Vorjahr: 33. Platz). Angeführt wird diese Liste von den USA (212 Punkte) und Russland (201 Punkte), die jeweils 5 Gold- und eine Silbermedaille erragen.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 59. IMO

Hinweis: Die Aufgaben muss man nicht lösen können. Aber eine Skizze zur Verdeutlichung der Problematik zeichnen, einen Spezialfall analysieren oder ein passendes Zahlenbeispiel finden kann man schon einmal versuchen.

Aufgabe 1. Es sei Γ der Umkreis eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Punkte D und E liegen so auf den Strecken AB bzw. AC, dass $AD = AE$ gilt. Die Mittelsenkrechten der Strecken BD und CE schneiden die kürzeren Kreisbögen AB bzw. AC von Γ in den Punkten F bzw. G.

Man beweise, dass die Geraden DE und FG parallel oder gleich sind.

Aufgabe 2. Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die reelle Zahlen a_1, a_2, …, a_{n+2} existieren, sodass $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ und

$$a_i \cdot a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten.

Aufgabe 3. Ein *anti-Pascalsches Dreieck* ist eine gleichseitig dreieckige Anordnung von Zahlen in der, mit Ausnahme der Zahlen in der untersten Zeile, jede Zahl gleich dem Absolutbetrag der Differenz der beiden unmittelbar darunter stehenden Zahlen ist. Zum Beispiel ist die folgende Anordnung ein anti-Pascalsches Dreieck mit vier Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis 10 enthält.

			4			
		2		6		
	5		7		1	
8		3		10		9

Existiert ein anti-Pascalsches Dreieck mit 2018 Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis $1 + 2 + \ldots + 2018$ enthält?

Aufgabe 4. Ein Knoten ist ein Punkt $(x; y)$ in der Ebene, für den sowohl x als auch y positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 20 sind.

Zunächst ist jeder der 400 Knoten unbesetzt. Amy und Ben legen abwechselnd Steine auf die Knoten, wobei Amy beginnt. In jedem Zug von Amy legt sie einen neuen roten Stein so auf einen unbesetzten Knoten, dass der Abstand zwischen je zwei von roten Steinen besetzten Knoten ungleich $\sqrt{5}$ ist. In jedem Zug von Ben legt er einen neuen blauen Stein auf einen unbesetzten Knoten. (Ein Knoten, der von einem blauen Stein besetzt ist, darf einen beliebigen Abstand von jedem anderen besetzten Knoten haben.) Sie hören auf, sobald ein Spieler keinen Stein mehr legen kann.

Man bestimme das größte K, so dass Amy sicher mindestens K rote Steine legen kann, unabhängig davon, wie Ben seine blauen Steine legt.

Aufgabe 5. Es sei a_1, a_2, … eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen. Es sei angenommen, dass eine ganze Zahl $N > 1$ existiert, sodass für jedes $n \geq N$ die Zahl

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}$$

ganz ist. Man beweise, dass es eine positive ganze Zahl M gibt, so dass $a_m = a_{m+1}$ für alle $m \geq M$ gilt.

Aufgabe 6. Ein konvexes Viereck $ABCD$ erfülle die Bedingung $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Ein Punkt X liege so im Inneren von $ABCD$, dass

$$\angle XAB = \angle XCD \text{ und } \angle XBC = \angle XDA.$$

Man beweise, dass $\angle BXA + \angle DXC = 180°$ gilt.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [4]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, Henri Nannen, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[5] Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu 3 Schülern können Mädchen und Jungen bis 16 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 16 und 22 Jahre („Jugend forscht“) teilnehmen. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung der Forschungsergebnisse vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmern Rede und Antwort.
Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

[4] www.jugend-forscht.de
[5] Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2015/16	12.058	Heinz Nixdorf MuseumsForum Paderborn
2016/17	12.226	Siemens AG, Heinrich-Lades-Halle Erlangen
2017/18	12.069	Merck KGaA Darmstadt

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber bundesweit mit 907 Teilnehmern (7,5%) beinahe die geringste Resonanz, aber weiterhin hintereinander mit einem kleinen Plus an Teilnehmern! In Sachsen waren es immerhin 14,0% aller Teilnehmer, die sich mit Projekten in diesem Fachgebiet beschäftigen.

Der sächsische Landeswettbewerb[6] wurde vom 22. bis 24. März 2018 gemeinsam von den Patenfirmen Globalfoundries, Siemens AG und BMW Group in Leipzig bei BMW veranstaltet. Hier wurde das FG Mathematik/Informatik mit **5 Arbeiten** vertreten – das sind 22,7% aller Projekte (gesamt 22 Arbeiten).

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Partnersuche gegeben – aber jeder Mathematik- oder Informatik-Lehrer ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der Landeswettbewerbe den letzten drei Jahre gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik (alphabetisch geordnet):

Barylla, Philipp & Herrmann, Philipp (Rossbach-Schule, BSZ Leipzig) **Jugend forscht to go** *2. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, Sonderpreis futureSAX*	2016
Borodi, Vlad Samuel & Seibt, Annegret (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Analyse von Kartenmischtechniken** *2. Platz*	2018
Jandura, Sven (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse der Restfehlerwahrscheinlichkeiten zweier Decodierer von linearen Blockcodes** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis futureSAX*	2016

[6] www.jugend-forscht-sachsen.de

Juppe, Pascal (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Identifikation organischer Verbindungen mittels Infrarot-spektroskopie und neuronalen Netzen** *3. Platz, Sonderpreis Jahresabonnement „Spektrum der Wissenschaft“*	2018
Kandratavicius, Mantas (Goethe-Gymn. Chemnitz) *Lösungsansätze der Beal-Vermutung* *3. Platz, Sonderpreis Forschungspraktikum Leibnitz-Institut*	2018
Ketelsen, Margarete (Nexö-Gymn. Dresden) **Drei- und Vierdimensionale Fraktale** *2. Platz*	2017
König, Josie (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Das lineare Regressionsmodell in Theorie und Praxis** *3. Platz, Sonderpreis Studienseminar „Kerchensteiner Kolleg“*	2016
Krabbes, Felix (Ostwald-Gymn. Leipzig) **Praxisorientierter Steuerungsalgorithmus für ein autonomes RC-Segelboot** *Landessieger für interdisziplinäre Arbeit, Teilnahme am Bundesfinale*	2017
Loos, Felix (Freies Gymn. Borsdorf) **Entwicklung einer künstlichen Intelligenz für Industrieroboter** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2018
Meyer, Julian (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Simulationen von Strukturen aus Holz** *Sonderpreis Qualitätssicherung*	2018
Mogdans, Sarah (Freies Gymn. Penig) **Wurzelziehen – keine schmerzhafte Angelegenheit** *3. Platz*	2016
Schmidt, Conrad (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Erstellung einer Android App als smartes Hausaufgabenheft** *3. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus*	2017
Skaliks, Eric (Sächsisches Landesgymn.St. Afra Meißen) **Neural AMT** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2017

Das Bundesfinale des 52. Wettbewerbs „Jugend forscht“ wurde vom 24. bis 27. Mai 2018 von der Merck KGaA in Darmstadt ausgerichtet. Insgesamt 182 Finalisten hatten sich mit ihren 105 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt. Den 1. Preis im Fachgebiet Mathematik/Informatik errang **Robin Christ** (Lessing-Gymn. Lampertheim) mit der Arbeit ***„Wohltemperierte Mathematik – Entwicklung eines hochparallelen BEM-Solver“***. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de zu lesen:

Das Grundprinzip für den erfolgreichen Bau eines guten Lautsprechers lautet: ausprobieren! Auch Klangtüftler und Mathefan Robin Christ konstruierte seine Lautsprecher selbst. Trotz umfänglicher Erfahrung entstanden dabei zunächst viele Prototypen, bevor er ein Modell mit warmem Klang und „breiter Bühne", das heißt mit starkem, raumfüllendem Klang, präsentieren konnte. Um den Konstruktionsprozess zu beschleunigen, entwickelte der Jungforscher einen Algorithmus zur Lösung der Helmholtz-Gleichung nach der sogenannten Randelementmethode, den er zur Simulation von Schallwellen im dreidimensionalen Raum nutzte. Um auch aufwendige Simulationen für große Lautsprecher in überschaubarer Zeit zu bewerkstelligen, passte er seinen Algorithmus so an, dass er sich auf einem Rechencluster ausführen lässt.

Die Jury beeindruckte insbesondere, wie Robin Christ anspruchsvolle Theorie, effiziente Implementierung der Simulation akustischer Umgebungen und die Lösung von Problemen aus der Anwendung der Akustik kombinierte. Seine Forschungsarbeit kann über die Konstruktion von Lautsprechern hinaus helfen, Probleme im Bereich der Beschallung zu lösen.

MO – die Einstiegsaufgaben

Man kann erwarten, dass die erste Aufgabe einer Mathematik-Olympiade den Einstieg in eine erfolgreiche Bearbeitung erleichtern soll. Die Aufgabenstellungen sind häufig kurz und knapp. Die Musterlösungen für die Korrektoren sind es meist ebenso, woraus zu schließen ist, dass der Aufgabenerfinder keine wesentlichen Probleme erwartet. Ein Blick auf die Ergebnislisten der 3. Stufe in Sachsen bestätigt diesen Eindruck – zumindest für die Preisträger.

Aufgabe MO430931. Gegeben sei ein quadratisches Gitter aus 10 x 10 kongruenten Teilquadraten. Wie viele Quadrate gibt es, deren Seiten auf den Linien dieses Gitter liegen?

Von den 38 Teilnehmern der Klasse 9 erreichten 25 die volle Punktzahl, darunter bis auf einen alle Preisträger.

Aufgabe MO431031. Gegeben sei ein quadratisches Gitter aus 10 x 10 kongruenten Teilquadraten. Wie viele Rechtecke gibt es, deren Seiten auf den Linien dieses Gitter liegen?

Die 15 Teilnehmer der Klasse 10 erreichten durchschnittlich 65% der Punkte, alle Preisträger erhielten bei dieser Aufgabe die volle Punktzahl.

Aufgabe MO451031. Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

> Die 27 Teilnehmer der Klasse 10 erreichten durchschnittlich 75% der möglichen Punkte. Doch manche Preisträger zeigten Ungenauigkeiten und vergaben bis zu 5 Punkten!

Aufgabe MO460931. Die aufsteigende Folge (a_n) mit

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 10, \quad a_6 = 12, \quad a_7 = 13, \quad ...$$

besteht aus allen positiven ganzen Zahlen, welche eine Dreier-Potenz oder eine Summe von verschiedenen Dreierpotenzen sind.
Finden Sie das hundertste Glied a_{100} dieser Folge.

> Die 5 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 90,0% der möglichen Punkte. Die anderen 18 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 41,7% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO470931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele positiven ganze Zahlen *a* gibt, für welche die Zahl *a* + 0,25 das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

> Die 7 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 92,9% der möglichen Punkte. Die anderen 16 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 75,0% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO510931/511031. In einem regulären Fechtturnier tritt jeder Fechter gegen jeden anderen genau einmal zum Fechtkampf an.

a) Weisen Sie nach, dass in reguläres Turnier mit 6 Sportlern 9 Fechtkämpfe mehr erfordert als ein Turnier mit 4 Sportlern.
b) Ermitteln Sie die Anzahl der Fechtkämpfe bei einem regulären Turnier mit 8 Teilnehmern.
c) Nachdem in einem größeren Turnier alle Teilnehmer die ersten 10 Fechtkämpfe absolviert hatten, erkrankten zwei Sportler und konnten nicht mehr am Turnier teilnehmen. Im gesamten Turnier wurden (einschließlich der bisher von den Erkrankten bestrittenen Kämpfe) insgesamt 156 Fechtkämpfe ausgetragen.
Untersuchen Sie, ob der Fechtkampf zwischen den beiden erkrankten Sportlern noch stattgefunden hatte oder ob er ausgefallen war.

Die 9 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 90,7% der möglichen Punkte. Die anderen 22 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,0% der möglichen Punkte.
Die 6 Preisträger der Klassenstufe 10 erhielten jeweils 100% der möglichen Punkte. Die anderen 19 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,3% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO520931/521031. Über ein Wettschwimmen mit sechs Teilnehmern A, B, C, X, Y und Z, die alle unterschiedliche Zeiten erreichten, sind sehr widersprüchliche Informationen in Umlauf:

(1) X wurde nicht Fünfter und Y wurde Sechster.
(2) X wurde Fünfter und Z wurde Dritter.
(3) X wurde Fünfter und Y wurde Vierter.
(4) Z wurde Dritter oder Y wurde Zweiter.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, dass

a) alle vier,
b) genau zwei

dieser Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig zutreffen.

c) Bei der Einlaufreihenfolge C, Z, B, Y, X, A ist genau eine der vier Aussagen wahr, nämlich (3). Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Einlaufreihenfolgen, für die keine der vier Aussagen wahr ist.

Die 8 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 93,8% der möglichen Punkte. Die anderen 28 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,6% der möglichen Punkte.
Die 4 Preisträger der Klassenstufe 10 erhielten jeweils 100% der möglichen Punkte. Die anderen 16 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,2% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO540931/541031.
a) Ermitteln Sie alle paare (x, y) reeller zahlen, welche das Gleichungssystem

$$y = 12x - \frac{1}{9}; y = \frac{1}{12} - 9x$$

erfüllen.
b) Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $ab \neq 0$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a und b alle Paare reeller Zahlen (x,y), welche das Gleichungssystem

$$y = ax - \frac{1}{b}; y = \frac{1}{a} - bx$$

erfüllen.

> Die 11 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 75,0% der möglichen Punkte. Die anderen 24 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 53,3% der möglichen Punkte.
> Die 4 Preisträger der Klassenstufe 10 erhielten durchschnittlich 83,3% der möglichen Punkte. Die anderen 13 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 61,7% der möglichen Punkte.

Die Preisträger behaupteten sich also meist schon bei den Einstiegsaufgaben – man sollte also bei scheinbar einfachen Aufgaben keine Punkte verschenken! Aber eine Garantie auf den leichten Einstieg gibt es nicht. So erwies sich die erste Aufgabe der 3. Stufe der 40. MO überraschend als „Scharfrichter“:

Aufgabe MO400931/401031. Wenn zwei Personen einen Kuchen teilen sollen, so können sie das Prinzip „Der eine teilt, der andere wählt“ anwenden. Dabei kann jeder der beiden mit dem Ergebnis zufrieden sein. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem ein Kuchen auf fünf Personen aufgeteilt werden kann, und begründen Sie, dass jeder mit dem Ergebnis zufrieden sein kann!

> In der Klassenstufe 9 erreichten die 30 Teilnehmer einen Punktdurchschnitt von nur 28%, der Durchschnitt für die 25 Starter der Klassenstufe 10 betrug 29%. Die Preisträger konnten sich dabei nur wenig absetzen (Kl. 9: 38%, Kl. 10: 43%).

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Verlag von B.G. Teubner (Leipzig) erschien 1906 die 7. Auflage eines Buches von Dr. E. Bardeys: Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten. In dieser 232-seitigen Aufgabensammlung werden im zweiten Teil Bestimmungsaufgaben im Kapitel XVIII Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten behandelt. Der vorangestellte kurze Theorieteil beschreibt zunächst:

„Eine Gleichung mit zwei Unbekannten *x* und *y* heißt vom ersten Grad, wenn sie auf die Form gebracht werden kann $ax + by = c$. Aus einer einzigen derartigen Gleichung lassen sich die Unbekannten *x* und *y* nicht bestimmen. Man braucht hierzu vielmehr zwei Gleichungen zwischen denselben Unbekannten. Beide Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein, d.h. die eine Gleichung darf

keine bloße Folge der anderen sein. Zwei Gleichungen, durch welche zwei Unbekannte bestimmt werden können, heißen ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. [...] Um ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, sucht man aus demselben zunächst eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten. Man muss daher die eine Unbekannte fortschaffen oder eliminieren. Diesem Zwecke dienen drei Methoden: die Additionsmethode, die Einsetzungsmethode, die Gleichsetzungsmethode."

Nach kurzen Erklärungen dieser Methoden an einfachen Beispielen folgen 267 Aufgaben und weitere 159 Anwendungsaufgaben (Sachaufgaben). Darunter:

Aufgabe 35. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 120. Vermindert man jede um 5, so ist die Differenz der Quadrate 60. Wie heißen die Zahlen?

Aufgabe 47. Einem Dreieck mit den Seiten *a, b, c* und der Höhe *h* ist ein Rechteck eingezeichnet, welches doppelt so lang als breit ist. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

Aufgabe 94. Welche zweiziffrige Zahl gibt 11 Rest 1, wenn man sie durch die erste Ziffer, hingegen 9 Rest 4, wenn man sie durch die zweite Ziffer teilt?

Aufgabe 113. Um die Ecken *A, B* und *C* eines Dreiecks sind drei Kreise beschreiben, die sich von außen berühren. Es ist $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$. Wie groß sind die Radien der drei Kreise?

Man löse diese Aufgaben!

Aufgaben Serie 2 (2018/19)

(Einsendungen bis 5. November 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [7])

Aufgabe 2-1. Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten Seitenlängen konstruiert werden. Mit einem Spielwürfel werden die Seitenlängen ermittelt, wobei die jeweils geworfene Augenzahl die Länge einer Seite in cm angibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus drei nacheinander gewürfelten Zahlen *a, b* und *c* ein Dreieck mit den Seitenlängen *a* cm, *b* cm und *c* cm konstruiert werden kann.

[7] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Hinweis: Wir nehmen an, dass die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 gewürfelt werden.

(5 Punkte)

Aufgabe 2-2. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines Dreiecks. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

(5 Punkte)

Aufgabe 2-3. Es sei $s = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Man berechne s^2 und s^3. Man untersuche, ob s rational ist und gebe in diesem Fall den rationalen Wert an!

(Hinweis: Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

(6 Punkte)

Aufgabe 2-4. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höher erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 2-5A. Von einem Kreis sind zwei Punkte *A* und *B* und eine Tangente *g* gegeben. Man konstruiere den Kreis und gebe jeweils die Konstruktionsbeschreibung an, falls

(a) der Punkt *A* auf *g* liegt.

(2 Punkte)

(b) die Gerade durch *A* und *B* parallel zu *g* ist.

(2 Punkte)

(c) die Gerade durch *A* und *B* die Tangente *g* in einem Punkt *S* schneidet, der von *A* und *B* verschieden ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2-5B.

(a) Man zeige: Unter 52 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe oder deren Differenz durch 100 teilbar ist.

(2 Punkte)

(b) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius 1 liegen.

(2 Punkte)

(c) In einem regelmäßigen Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße rot bzw. grün, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind. Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Das 1. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 22. September 2018. Wir sind zu Gast an der Fakultät für Mathematik an der Technischen Universität Chemnitz. Bitte das beiliegende Seminarprogramm beachten.

* *

Impressum

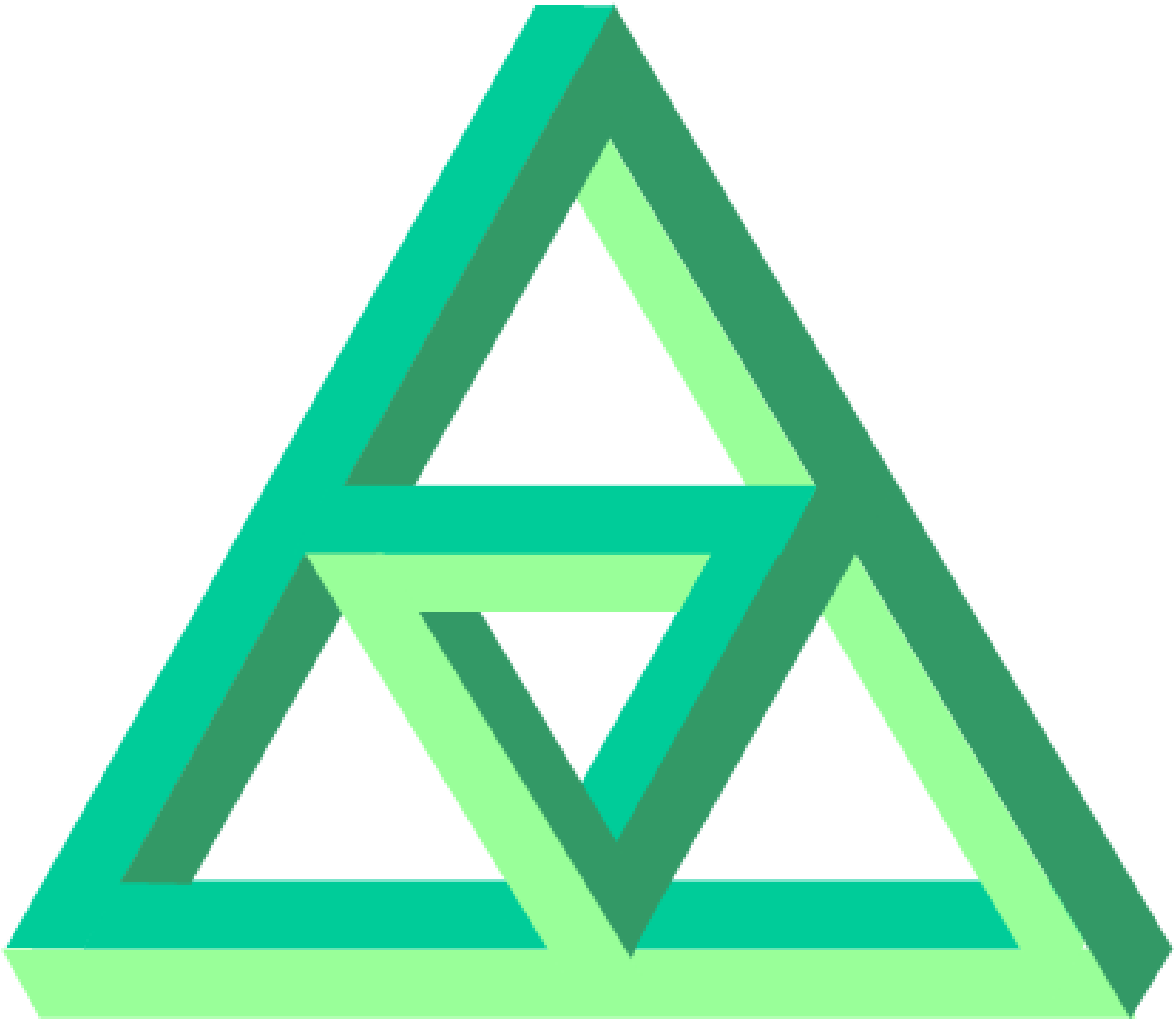
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 427545
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz,** VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 8 /2018 17. Jahrgang

Lösungsdiskussion Serie 1

Aufgabe 1-1: Man finde alle positiven ganzen Zahlen, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes sind?

Lösungshinweise: Es seien $QS(n)$ die Quersumme und $QP(n)$ das Querprodukt der natürlichen Zahl n. Gesucht sind alle also positiven ganzen Zahlen n mit $n = QS(n) + QP(n)$.

Für eine einstellige positive ganze Zahl n gilt $n = QS(n) = QP(n)$. Deshalb kann es für diese Zahlen keine Lösung geben.

Seien a ($a > 0$) und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl, dann lässt sich die Aufgabenstellung wie folgt darstellen:

$$10a + b = a + b + ab, \quad \text{also} \quad 9a = ab, \quad \text{d.h.} \quad b = 9.$$

Die Probe bestätigt, dass 19, 29, …, 99 bzw. allgemein $10a + 9$ ($a = 1, ..., 9$) Lösungen sind:

$$10a + 9 = a + 9 + 9a.$$

Seien nun a ($a > 0$), b und c die Ziffern einer dreistelligen Zahl, dann lässt sich die Aufgabenstellung wie folgt darstellen:

$$100a + 10b + c = a + b + c + abc,$$
$$\text{also} \qquad 99a + 9b = abc.$$

Teilt man in dieser Gleichung beide Seiten durch a, so ist die linke Seite größer oder gleich 99, die rechte Seite kann aber nicht größer als $b \cdot c \le 9 \cdot 9 = 81$ sein. Folglich kann es keine Lösungen für dreistellige Zahlen geben.

Anschauliche Fortsetzung der Lösung: Erhöht sich die Stellenzahl, so erhöht sich die linke Zahl um mehr als das 10-fache, die rechte Zahl jedoch höchstens um das 9-fache. Es kann also auch bei weiteren mehrstelligen Zahlen keine Lösung geben.

Allgemeine Lösung: Es soll gelten $\sum_{i=0}^{n} 10^i a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + \prod_{i=0}^{n} a_i$. Das ist äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{n} \left(10^i - 1\right) \cdot a_i = \prod_{i=0}^{n} a_i .$$

Nun gelten die Abschätzungen:

$$\left(10^n - 1\right) \cdot a_n \le \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - 1\right) \cdot a_i = \prod_{i=0}^{n} a_i \le a_n \cdot 9^n$$

Diese Ungleichungskette kann aber nur erfüllt werden, wenn $\left(10^n - 1\right) \leq 9^n$ gilt. Dies ist nur für $n \leq 1$ erfüllt. Damit ist gezeigt, dass nur die angegebenen zweistelligen Zahlen Lösung der Aufgabe sind. ❑

Aufgabe 1-2. Unter einem magischen Multiplikationsquadrat *n*-ter Ordnung versteht man eine Anordnung von n^2 natürlichen (nicht notwendig aufeinander folgenden) Zahlen auf einem *n* x *n*-Quadrat, so dass die Produkte der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich einer Konstante sind. Man untersuche, ob es magische Multiplikationsquadrate gibt!

Lösungshinweise: Aus jedem (additiven) magischen Quadrat lässt sich ein magisches Multiplikationsquadrat erzeugen, indem man die Zahlen des Additionsquadrates als Exponenten für eine feste Basis *a* (*a* verschieden von 0 und 1) wählt. Nach dem Potenzgesetz $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ reduziert sich die Eigenschaft der konstanten Produkte in den Zeilen, Spalten und Diagonalen zu der Eigenschaft konstanter Summen der Exponenten in den Zeilen, Spalten und Diagonalen. ❑

Aufgabe 1-3 (MO550934). Jemand hat 55 Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste passt genau ein Ball, in die zweite passen genau zwei Bälle usw.

Zeigen Sie, dass es möglich ist, alle Bälle so in den Kisten zu verstauen, dass in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen.

Lösungshinweise: Wegen $1 + 2 + ... + 10 = \frac{10 \cdot (10+1))}{2} = 55$ stimmt die Anzahl der Bälle mit der Anzahl der Plätze in den Kisten überein. Deshalb genügt es, die roten Bälle so zu verteilen, dass genutzte Kisten vollständig voll sind: Erst füllen wir die größte Kiste, dann die zweitgrößte Kiste usw. Irgendwann sind alle roten Bälle verstaut. Sind dabei alle Kisten voll, ist die Aufgabe gelöst. Ansonsten gibt es nur eine nichtvolle Kiste mit *p* Plätzen und *b* Bällen, $b < p$. Also nimmt man diese *b* Bälle heraus und legt sie in die Kiste mit genau *b* Plätzen, die ja noch nicht verwendet wurde.

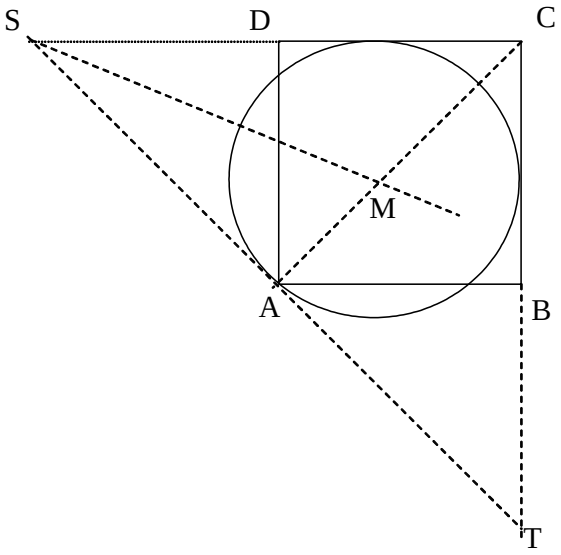
Lösungsvariante: Aufgrund der kleinen Zahlen kann man die Aufteilungen konkret angeben.

- Gibt es 1 bis 10 rote Bälle, so gibt es genau eine Kiste, die vollständig gefüllt werden kann.
- Gibt es 11 bis 19 rote Bälle, so fülle man die Kiste mit 10 Plätzen und es verbleibt eine Anzahl zwischen 1 und 9 übrig, für die es eine passende Kiste gibt.
- Gibt es 20 bis 27 rote Bälle, so fülle man die Kisten mit 9 und 10 Plätzen und es verbleibt eine Anzahl zwischen 1 und 8 übrig, für die es eine passende Kiste gibt.

Danach verteilt man die blauen Bälle auf die freien Plätze. Sind es mehr als 27 rote Bälle, teilt man erst die 1 bis 27 blauen Bälle wie oben auf. ❑

Hinweis: In Klassenstufe 10 wurde die Aufgabe MO551034 um die Teilaufgabe b) „n = 2016 Bälle und k = 63 Kisten“ ergänzt. Es war also erforderlich, eine verallgemeinerungsfähige Lösung für Teil a) zu erarbeiten.

Aufgabe 1-4. Gegeben sei ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, dass er zwei Nachbarseiten des Quadrates berührt und durch einen Eckpunkt des Quadrates geht. Man beschreibe die Konstruktion.



Lösungshinweise:
Analyse: Angenommen, man habe einen Kreis der geforderten Art gefunden. Er berühre die zwei benachbarten Seiten durch *B* und *C* bzw. durch *C* und *D*. Der gegenüberliegende Eckpunkt ist Punkt *A*. Dann muss der Mittelpunkt auf der Diagonalen durch *A* und *C* liegen, denn der Abstand zu den berührten Seiten ist gleich.

Man zeichne die Parallele zu *BD* durch *A*, und verlängere die Seiten *CD* über *D* hinaus bzw. *CB* über *B* hinaus und bezeichne die Schnittpunkte mit der Parallelen mit *S* bzw. *T*. Dann ist *STC* ein gleichschenkliges Dreieck, für das der gesuchte Kreis den Inkreis darstellt. Der Mittelpunkt des Inkreises fällt mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zusammen. Daraus ergibt sich die folgende

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiere das Dreieck *STC* mithilfe der Parallelverschiebung der Geraden durch *BD* durch den Punkt *A* und der Verlängerung der Seiten *CD* bzw. *CB*.
(2) Man zeichne die Diagonale *AC*, die mit der Winkelhalbierenden des Winkels *BCD* zusammenfällt.
(3) Man konstruiere die Winkelhalbierende des Winkels *CSA*.
(4) Der Schnittpunkt beider Winkelhalbierenden ergibt den Mittelpunkt *M* des gesuchten Kreises.

Beweis: Das Dreieck *STC* wurde so erzeugt, dass der zugehörige Inkreis die Aufgabenstellung erfüllt: Er berührt zwei Quadratseiten und geht durch einen Eckpunkt, da die gerade durch *S* und *T* die Tangente am Inkreis ist.

Existenz und Eindeutigkeit: Für jedes gegebene Quadrat ist die Konstruktion stets ausführbar und (bis auf Drehungen) eindeutig lösbar. ❑

Aufgabe 1-5A. Gegeben sei für *S* die Summendarstellung

(#) $S = 1 + 3 + \cdots + 31.$

Man könnte vermuten, dass unter *S* die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 31 gemeint ist, also

$$S = S_1(16) = \sum_{k=1}^{16} (2 \cdot k - 1).$$

(a) Man berechne die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen, also

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1).$$

(b) Es ist zu zeigen, dass die Darstellung (#) von *S* insbesondere wegen der fehlenden Angabe über die Anzahl der Summanden nicht eindeutig ist. Man gebe außer S_1 (mit 16 Summanden) zwei weitere Summen mit verschiedener Summandenzahl an, in denen die Summanden 1, 3 und 31 vorkommen, und verwende für die Summendarstellung das Summenzeichen.

(c) Man gebe unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für $S = 1 + 3 + ... + 31$ derart an, dass sich bei insgesamt 4 Summanden die Summe 45 ergibt. Man berechne die Summe der ersten 6 Zahlen gemäß dieser Darstellung. Kann man für jede vorgegebene Zahl *A* unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für *S* finden, so dass $S(4) = A$ gilt?

Lösungshinweise:
(a) Zur Berechnung der ersten *n* ungeraden Zahlen kann die bekannte Summenformel der ersten *m* natürlichen Zahlen $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$ durch folgende Umformung unmittelbar zur Lösungsfindung genutzt werden:

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n = n^2 .$$

Lösungsvariante: Auch ohne die Summenformel ist ein einfacher Beweis möglich. Dafür wird die Summe einmal aufsteigend und einmal absteigend angegeben,

$$2 \cdot S_1(n) = (1 + 3 + \ldots + 2n - 1) + (2n - 1 + \ldots + 3 + 1).$$

In jeder der beiden Klammern stehen genau *n* Summanden. Jeder Summand einer Klammer kann durch einen Summanden der zweiten Klammer zu $2n$ ergänzt werden. Also gilt:

$$2 \cdot S_1(n) = n \cdot (2n).$$ ❑

(b) Es lassen sich zahlreiche Beispiele angeben, in deren Summendarstellung wie gefordert die Zahlen 1, 3 und 31 auftreten:

$$S_1(16) = \sum_{k=1}^{16}(2\cdot k-1) = 1+3+\ldots+31$$

$$S_2(5) = \sum_{k=1}^{5}\left(2^k-1\right) = 1+3+7+15+31$$

$$S_3(6) = \sum_{k=1}^{6}\left(k^2-k+1\right) = 1+3+7+13+21+31$$

$$S_4(3) = \sum_{k=1}^{3}(13\cdot k^2-37\cdot k+25) = 1+3+31$$

$$S_5(4) = \sum_{k=1}^{4}((k-1)^3+k) = 1+3+11+31$$

$$S_6(30) = \sum_{k=1}^{30}\left(k+1-\left[0{,}5^{|k-1|}\right]\right) = 1+3+4+\ldots+31$$

$$S_7(7) = \sum_{k=1}^{7}\left(\left[\frac{(k+1)^2}{2}\right]-1\right) = 1+3+7+11+17+23+31$$

$$S_8(4) = \sum_{k=1}^{4}\left(3^{k-1}+2^{k-1}-k\right) = 1+3+10+31$$

$$S_9(4) = \sum_{k=1}^{4}\left[\sqrt{10^{k-1}}\right] = 1+3+10+31$$

$$S_{10}(4) = \sum_{k=1}^{4}\left(4\cdot k^2-10\cdot k+7\right) = 1+3+13+31$$

Hinweis: [x] bedeutet die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, z.B. [2,87] = 2. ❑

(c) Da die Summe von 4 Summanden 45 ergeben soll, nimmt der fehlende dritte Summand in der Darstellung S = 1 + 3 + ... + 31 den Wert 10 an.

Eine kubische Funktion f der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot x^k$ ist für alle x bei festen reellwertigen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 durch die Angabe von 4 Werten $f(x_k)$ (k = 0, 1, 2, 3) eindeutig bestimmt. Deshalb kann aus der Vorgabe von endlich vielen Folgegliedern eine Bildungsvorschrift ermittelt werden. Angenommen, die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot x^k$ erfülle die Bedingungen $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 10$ und $f(4) = 31$. Dann ergibt sich durch Einsetzen der Argumente folgendes Gleichungssystem für die Koeffizienten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 & = & 1 \\ 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 & = & 3 \\ 27a_3 & + & 9a_2 & + & 3a_1 & + & a_0 & = & 10 \\ 64a_3 & + & 16a_2 & + & 4a_1 & + & a_0 & = & 31 \end{array}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot x^3 - \frac{13}{2} \cdot x^2 + 11 \cdot x - 5 \ .$$

Die Probe bestätigt, dass die 4 vorgegebenen Werte erfüllt sind. Man findet weiterhin für $k = 5$ den Wert $f(5) = 75$ und für $f(6) = 151$. Folglich gilt

$$S(6) = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{3}{2}k^3 - \frac{13}{2}k^2 + 11k - 5 \right) = 1 + 3 + 10 + 31 + 75 + 151 = 271.$$

Da der 3. Summand aus der Summe $S(4)$ und damit die kubische Funktion eindeutig bestimmt ist, kann für jeden Wert A diese Aufgabe gelöst werden.

Wie die Beispiele S_8 und S_9 zeigen, kann es für $A = 45$ weitere Möglichkeiten geben, die sich in nachfolgenden Summanden unterscheiden. Die Summe der ersten 6 Summanden ist also nicht eindeutig bestimmt.

Lösungsvariante: Ohne das obige Gleichungssystem explizit auswerten zu müssen, kann folgende Darstellung gefunden werden:

$$S(k) = (k-2)(k-3)(k-4) \cdot \frac{-1}{6} + (k-1)(k-3)(k-4) \cdot \frac{3}{2} +$$
$$+ (k-1)(k-2)(k-4) \cdot \frac{-(A-35)}{2} + (k-1)(k-2)(k-3) \cdot \frac{31}{6}$$

Für $k = 1, 2, 3$ oder 4 ist stets nur ein Summand von 0 verschieden, der gleich dem für dieses k geforderten Wert entspricht. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man eine kubische Funktion in k, die als Summendarstellung genutzt werden kann. ❑

Aufgabe 1-5B[1]**.** Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ und $n = 4$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$ bzw. $d_4 = 1$.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an

[1] Nach: Claus, H. J.: Wie pflanzt man n Bäume in ein Quadrat? In: MNU - Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, 37. Jahrgang (1984), Heft 8, S. 468-475.

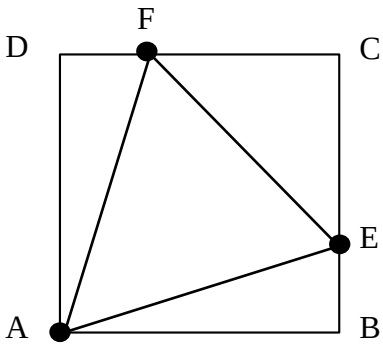
und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel.

(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird.

(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine weitere Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht.

Lösungshinweise:

(a) Man wird vermuten, dass der Mindestabstand besonders groß wird, wenn die 3 Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden und auf den Quadratseiten liegen. Dann ist die in der nebenstehenden Abbildung angegebene Lage möglich, wobei $\overline{DF} = \overline{BE}$ gelte.



Die Summe der Dreieckshöhen auf *EF* in den Dreiecken *AEF* $\left(\frac{1}{2} \cdot d_3 \cdot \sqrt{3}\right)$ und *CEF* $\left(\frac{1}{2} \cdot d_3\right)$ bildet die Diagonale des Quadrates *ABCD*.

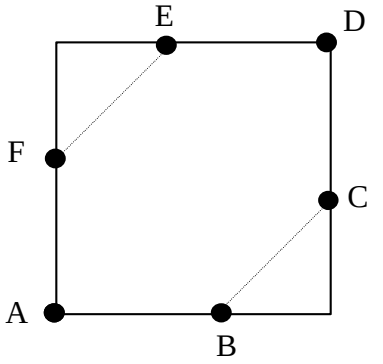
Mit dem Abstand $d_3 = \overline{EF} = \overline{AE} = \overline{AF}$ folgt daraus die Beziehung (falls die Seitenlänge des Quadrates mit 1 LE angenommen wird):

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot d_3 + \frac{1}{2} \cdot d_3 = \sqrt{2}$$

also $d_3 = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1{,}035$. ❑

Hinweis: Diese Verteilung realisiert den maximalen Mindestabstand, der Beweis dazu wurde aber nicht gefordert.

(b) Es genügt, eine Verteilung von 6 Punkten anzugeben, für die $d_6 > 0{,}58$ erfüllt ist. Dazu lege man beispielsweise die Punkte *A, B, C, D, E* und *F* wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich auf die Quadratseiten. Es seien dabei alle Seiten des (offensichtlich nicht regelmäßigen) Sechsecks gleichlang. Man findet leicht, dass in diesem Fall gilt:

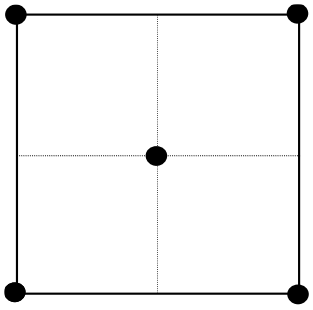


$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6 + d_6 = 1, \text{ also } d_6 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}585.$$

❑

Hinweis: Diese Anordnung realisiert allerdings nicht den maximalen Mindestabstand!

(c) Die 4 Eckpunkte des Quadrates und der Schnittpunkt seiner Diagonalen bilden eine Verteilung mit maximalem Mindestabstand für 5 Punkte. Zum Beweis unterteile man das Quadrat in 4 kongruente Teilquadrate. Nach dem Schubfachprinzip existiert davon mindestens ein Teilquadrat, in dem sich zwei (oder mehr) Punkte von den 5 befinden müssen. Der maximale Abstand dieser zwei kann aber die halbe Diagonallänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Da die beschriebene Verteilung von 5 Punkten den Mindestabstand von $d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ realisiert, ist bewiesen, dass es keine Verteilung mit größerem Mindestabstand geben kann. ❑



Ergänzende Lösungsdiskussionen zu Serie 1

Zu Aufgabe 2: Eine andere Konstruktionsvorschrift für magische Multiplikationsquadrate als die Übertragung der Additionseigenschaft in die Exponenten besteht in der Zerlegung in Faktoren. Für 3 x 3-Quadrate ordne man beispielsweise die Zahlen 0, 1 und 2 so an, dass in jeder Zeile, Spalte und Diagonale die Summe der drei Zahlen 3 ergibt, beispielsweise

2	0	1
0	1	2
1	2	0

oder

1	0	2
2	1	0
0	2	1

Nimmt man nun natürliche Zahlen x und y jeweils als Basis, so stimmen für die Quadrate

x^2	1	x
1	x	x^2
x	x^2	1

bzw.

y	1	y^2
y^2	y	1
1	y^2	y

die Produkte der Zeilen, Spalten und Diagonalen überein. Multipliziert man nun die Inhalte der entsprechenden Felder miteinander, entsteht für teilerfremde Zahlen x und y ein magisches Multiplikationsquadrat mit paarweise verschiedenen Zahlen:

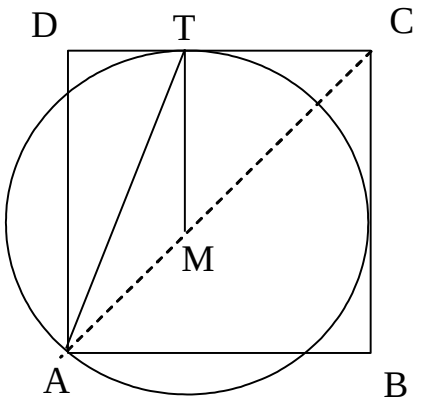
x^2y	1	xy^2
y^2	xy	x^2
x	x^2y^2	y

z.B. ($x = 2, y = 3$)

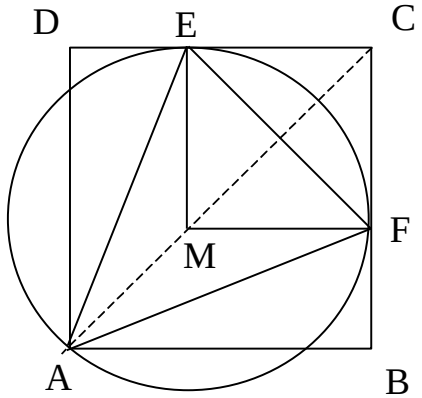
12	1	18
9	6	4
2	36	3

Zu Aufgabe 4: Die Konstruktion über die Betrachtung eines umschreibenden Dreiecks erscheint etwas trickreich. Für andere Lösungsansätze kann man aus Symmetriegründen davon ausgehen, dass sich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Diagonalen AC befindet.

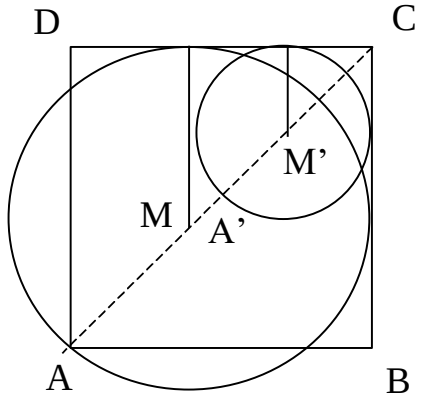
Ein direkter Zugang zur Lösung kann aus der Analyse gefunden werden, wenn man den Winkel $\angle TAM$ berechnet. Leicht findet man im gleichschenkligen Dreieck *TAM* für die Größe der Basiswinkel 22,5° (warum?). Also kann man den Punkt *T* mittels der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle DAC$ konstruieren. Die Senkrechte in *T* schneidet *AC* im gesuchten Mittelpunkt *M*.



Man kann aber auch die Skizze durch die Sehne *EF* ergänzen, wobei *E* und *F* die beiden Berührungspunkte des Kreises mit den Quadratseiten sind. Nun ist aber der Winkel $\angle EAF$ ein Peripheriewinkel über *EF* und $\angle EMF$ der zugehörige Zentriwinkel über *EF*. Also findet man ebenso $\angle EAM = 22{,}5°$ (wie begründet man es genau?).



Ein anderer Ansatz basiert auf der Ähnlichkeit. Man konstruiere zunächst einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt *M*' auf der Diagonalen *AC* liegt und der die Quadratseiten *BC* bzw. *CD* berührt. Der Schnittpunkt *A*' des Kreises mit der Diagonalen *AC* müsste zur Erfüllung der Aufgaben mit dem Eckpunkt *A* zusammenfallen. Wenn das nicht der Fall ist, kann dies durch eine Streckung des Kreises erfüllt werden (wie?).



Zu Aufgabe 1-5A: Die Verwendung von Summen und Produktzeichen kann die Schreibweise vereinfachen, sie muss aber nicht selbst angewandt werden. Ziel sollte aber sein, trotz der formalisierten Form den Inhalt einer Gleichung nicht zu „überlesen". Die Suche nach natürlichen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $0 \le a_i \le 9$ und $n \ge 0$ mit $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = \sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i$ lässt sich beispielsweise ganz einfach verbal beschreiben:

Aufgabe. Gibt es natürliche Zahlen, die gleich ihrer Quadratquersumme sind?

Lösungshinweise: Für $n = 0$ findet man die trivialen Fälle $a_0 = 0$ und $a_0 = 1$. Schreibt man für $n = 1$ die Gleichung ohne Summenzeichen, also

$$10 \cdot a_1 + a_0 = a_1^2 + a_0^2,$$

so kann es wegen $a_1 \cdot (10 - a_1) = a_0 \cdot (a_0 - 1)$ keine Lösung geben: Die rechte Seite der Gleichung ist als Produkt aufeinander folgender Zahlen stets geradzahlig.

Lösungen kann es deshalb nur für gerade Zahlen a_1 geben. Diese wenigen Fälle probiere man aus.

Für $n = 2$ lässt sich der Unmöglichkeitsbeweis finden, wenn man zunächst wegen $100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0 = a_2^2 + a_1^2 + a_0^2 \le 3 \cdot 9^2 = 243$ die Fälle $a_2 > 2$ ausschließt und nur die Fälle $a_2 = 1$ bzw. $a_2 = 2$ untersucht. Für $n > 2$ erkennt man, dass es keine weiteren Lösungen geben kann: $10^n > n \cdot 9^2$. ❑

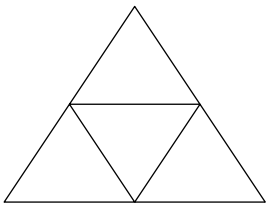
Ähnliche Fragen: Gibt es Lösungen für folgende Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i! \;\; ; \;\; \sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i^i \;\; ; \;\; \sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i^{n-i}$$

Zu Aufgabe 1-5B(c). Mit dem Schubfachprinzip kann man eine Schranke für den größten Mindestabstand finden. Ob aber tatsächlich eine Anordnung existiert, die diesen Mindestabstand auch realisiert, ist an einem Beispiel nachzuweisen.

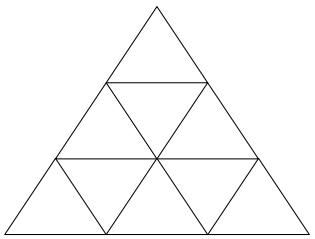
Aufgabe. Man finde den größten Mindestabstand, mit dem man 5 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck anordnen kann.

Lösungshinweise: Da man jedes gleichseitige Dreieck in 4 untereinander kongruente Dreiecke wie nebenstehend abgebildet zerlegen kann, sind nach dem Schubfachprinzip von den 5 Punkten mindestens 2 in einem dieser Teildreiecke. Deren Abstand kann also höchstens die Hälfte einer Seite des Ausgangsdreiecks sein. Leicht zeigt man, dass man sogar 6 Punkte mit diesem maximalen Mindestabstand anordnen kann.



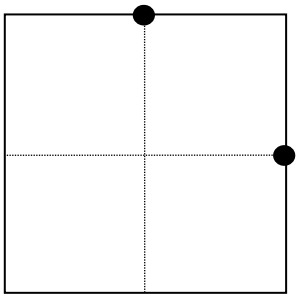
Aufgabe. Man finde den größten Mindestabstand, mit dem man 10 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck anordnen kann.

Da man jedes gleichseitige Dreieck in 9 untereinander kongruente Dreiecke wie nebenstehend abgebildet zerlegen kann, sind nach dem Schubfachprinzip von den 10 Punkten mindestens 2 in einem dieser Teildreiecke. Deren Abstand kann also höchstens ein Drittel einer Seite des Ausgangsdreiecks sein. Leicht zeigt man, dass man 10 Punkte mit diesem maximalen Mindestabstand anordnen kann.

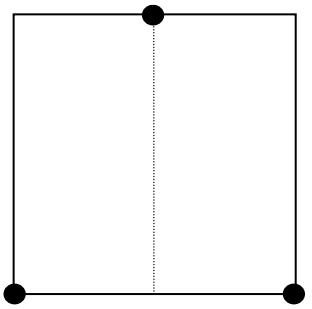


In Analogie folgt die Aufgabe: Man finde den größten Mindestabstand, mit dem man 17 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck anordnen kann. Was passiert aber? Die Argumentation mit dem Schubfachprinzip lässt sich für 17 Punkte und 16 Teildreiecke übertragen. Aber es lassen sich nur 15 Punkte mit diesem Mindestabstand anordnen.

In Aufgabe 1-5B(c) muss beachtet werden, dass man „geschickt“ beginnt, die Punkte zu verteilen. Die beiden Punkte in nebenstehender Abbildung erfüllen auch den Mindestabstand, aber so lassen sich nicht insgesamt fünf Punkte anordnen, bei denen dieser Mindestabstand erhalten bleibt.



Auch in Aufgabe 1-5B(a) könnte man das Schubfachprinzip versuchen: In einer der Quadrathälften müssen mindestens 2 Punkte liegen. Der Mindestabstand kann also nicht größer sein als $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Aber man findet keine Anordnung von drei Punkten im Quadrat, sodass dieser Mindestabstand realisiert wird.



Rechnen mit Produktzeichen

In Heft 6/2018 wurde das Rechnen mit dem Summenzeichen diskutiert. Leicht prüft man nach, dass man – bis auf Regel (2) – in jeder der angegebenen Regel die Addition durch die Multiplikation ersetzen kann.

Das Produktzeichen Π (aus dem griechischen Alphabet *P*) wird für alle nichtnegativen ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \le n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot ... \cdot a_n$.

In Analogie muss die Regel des Ausklammerns eines Faktors für das Produktzeichen lauten:

(2') $$\prod_{j=m}^{n} (c \cdot a_j) = c^{(n-m+1)} \cdot \prod_{j=m}^{n} a_j$$

Man beachte, dass Summen- und Produktzeichen im Allgemeinen nicht innerhalb eines Ausdruckes vertauscht werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, betrachte man folgende Berechnungen:

$$\sum_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2} 1 = \sum_{i=1}^{2}(1\cdot 1) = 1+1 = 2\ , \qquad \text{aber} \quad \prod_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} 1 = \prod_{j=1}^{2}(1+1) = 2\cdot 2 = 4\,.$$

Anwendungsbeispiel: Die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i = \prod_{i=0}^{n} a_i$ steht für die

Aufgabe. Gibt es (*n* + 1)-stellige natürliche Zahlen, die gleich ihrem Querprodukt (d.h. gleich dem Produkt ihrer Ziffern) sind?

Lösungshinweise: Für *n* = 0 und damit für alle einstelligen Zahlen ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Für *n* = 1 existiert keine Lösung, wie man leicht zeigen kann:

Aus $10 \cdot a_1 + a_0 = a_1 \cdot a_0$ folgt $a_0 = \frac{10a_1}{1 - a_1}$. Für keine Ziffer a_1 erhält man eine Ziffer a_0. Bevor man weitere Lösungen sucht, kann man überlegen, ob es unendlich oder höchstens endlich viele Lösungen geben kann. Aus $\sum_{i=0}^{n} 10^i \cdot a_i \geq 10^n$ und $9^{n+1} \geq \prod_{i=0}^{n} a_i$ folgert man, dass für ausreichend großes *n* keine Lösungen mehr existieren können, weil dann $9^{n+1} < 10^n$ gilt. Also gibt es nur endlich viele Lösungen. Eine detaillierte Analyse zeigt, dass es nur die trivialen einstelligen Lösungen gibt. ❑

Aufgabe. Gibt es natürliche Zahlen $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ mit $\sum_{i=0}^{n} a_i = \prod_{i=0}^{n} a_i$, d. h. Zahlen mit den Ziffern a_0 bis a_n, deren Quersumme mit dem Querprodukt übereinstimmt?

Lösungshinweise: Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft. Als Beispiel gebe man für jedes *k* eine Zahl mit *k* Ziffern 2 und ausreichend vielen Ziffern 1 an. Ausreichend bedeutet dabei, dass die Gleichung $k \cdot 2 + 1 + 1 + ... + 1 = 2^k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1$ erfüllt ist. Das sind also beispielsweise solche Zahlen wie 2, 22, 22211, 222211111111 usw. sowie die Zahlen, die aus Permutationen dieser Ziffern entstehen. ❑

Schubfachprinzip in Aufgaben[2]

Aufgabe. Gegeben seien eine Gerade und ein Dreieck *ABC*. Die Gerade geht durch keinen Punkt des Dreiecks. Man zeige, dass die Gerade nicht alle Seiten des Dreiecks schneidet.

Lösungshinweise: Die Gerade zerteilt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Objekte sind die drei Punkte und die zwei Schubfächer sind die Halbebenen. In einer Halbebene müssen nach dem Schubfachprinzip zwei Punkte liegen. Diese beiden Punkte bestimmen dann eine Seite des Dreiecks, welche nicht von der Geraden geschnitten wird.

Aufgabe. Gegeben sei ein 3 x 3-Quadrat. Auf jedem Feld steht eine der Zahlen -1, 0 oder 1. Man zeige, dass unter den Zeilen-, Spalten und Diagonalensummen mindestens zwei denselben Wert haben.

Lösungshinweise: Die möglichen Summen aus drei dieser Zahlen betragen -3, ..., 3, es gibt also 7 verschiedene Summen (Schubfächer). Insgesamt gibt es aber 8 Summen, die in den Zeilen, Spalten und Diagonalen gebildet werden können (Objekte). Folglich gibt es mindestens zwei Objekte in einem dieser Schubfächer. Diese haben dieselbe Summe.

[2] Diese Aufgaben wurden im Seminar am 22.09.2018 diskutiert.

Aufgabe. Unter n Personen kennen sich zwei Personen gegenseitig oder sie kennen sich nicht gegenseitig. Man zeige, dass es zwei Personen gibt, die gleich viele andere Personen kennen.

Lösungshinweise: Die n Personen sind die Objekte, die Anzahl der Paare, die sich gegenseitig kennen, sind die Schubfächer. Jede Person kann 0, 1, . . ., $n - 2$ oder n – 1 andere Personen kennen.

Kennt jemand bereits $n - 1$ Personen, so kann es niemanden geben, der keine Person kennt, also gibt es für n Personen nur (höchstens) $n - 1$ Schubfächer $(1, 2, \ldots, n - 1)$ und damit müssen zwei Personen nach dem Schubfachprinzip dieselbe Anzahl von Personen kennen.

Kennt jemand $n - 1$ Personen nicht, so gibt es ebenfalls (höchstens) $n - 1$ Schubfächer $(0, 1, 2, \ldots, n - 2)$ und wir erhalten wieder zwei, die die gleiche Zahl an Personen hat, die sie kennen.

Aufgabe. Wir wählen beliebige $n + 1$ Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Man zeige:

a) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, welche keinen gemeinsamen Teiler (größer als 1) haben.

b) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, sodass eine der Zahlen die andere teilt.

Lösungshinweise:

a) Zwei Zahlen, die sich um eins unterscheiden, sind relativ prim zueinander. Man betrachte die n Schubfächer $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots \{2n - 1, 2n\}$. Von den $n + 1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) befinden sich mindestens zwei in einem der Schubfächer.

b) Man schreibe die Zahlen in der Form $2^k \cdot u$, wobei k größtmöglich und u somit ungerade ist. u kann nur Werte zwischen 1 und $2n - 1$ annehmen, also maximal n verschiedene Werte (Schubfächer). Zwei der $n + 1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) haben also denselben ungeraden Anteil und erfüllen somit die Bedingung.

Aufgabe (IMO 1972). Aus einer Menge S von 10 höchstens zweistelligen verschiedenen Zahlen lassen sich immer zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 auswählen, deren Summe gleich ist.

Lösungshinweise: Es gibt $2^{10} - 1 > 1000$ Möglichkeiten (Objekte), eine nichtleere Teilmenge aus 10 Zahlen zu wählen, aber nur $99 + 98 + \ldots + 90 < 1000$ verschiedene Summen (Schubfächer) aus nicht mehr als 10 zweistelligen Zahlen. Somit kommt mindestens eine Summe zweimal vor. Entfernen der Summanden, die in beiden Summen vorkommen, liefert die disjunkten Teilmengen.

Aufgabe. Unter 6 Personen gibt es stets drei, die sich gegenseitig kennen, oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.

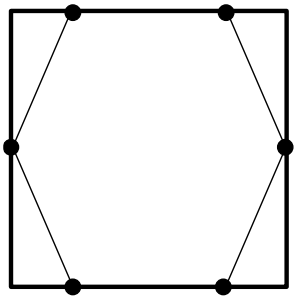
Lösungshinweise: Wir wählen eine Person *P* aus. Für jede der anderen 5 Personen (Objekte) gibt es eine von zwei Situationen (Schubfächer: „er kennt sie“ oder „er kennt sie nicht“). Somit kennt *P* mindestens 3 oder höchstens 2. Im zweiten Fall kennt *P* mindestens 3 andere NICHT und die Lösungsdarstellung erfolgt analog.

Nehmen wir also an, *P* kennt 3 der anderen, *Q, R* und *S*. Wenn sich 2 dieser 3 kennen, (ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien dies *Q* und *R*), haben wir 3 Personen gefunden, die sich gegenseitig kennen (*P, Q, R*). Andernfalls (d.h. keine 2 der 3 kennen sich) haben wir 3 Personen gefunden, die sich gegenseitig nicht kennen (*Q, R, S*).

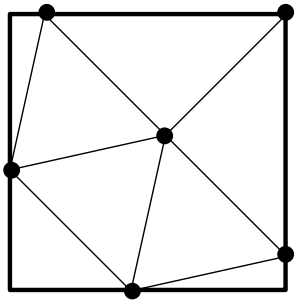
Aufgabe (IMO 1964). Jeder von 17 Mathematikern steht im Briefwechsel mit jedem anderen. Sie korrespondieren über drei Themen und je zwei Mathematiker behandeln untereinander genau ein Thema. Zeige, dass es mindestens drei Mathematiker gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

Lösungshinweise: Ein Mathematiker *P* hat Briefkontakt mit 16 anderen Mathematikern (Objekte) und schreibt über drei Themen (Schubfächer). Damit schreibt er mit mindestens 6 anderen Mathematikern über das gleiche Thema. Schreiben sich zwei der 6 über das gleiche Thema, haben wir 3 Personen mit demselben Thema gefunden. Andernfalls schreiben sich die 6 ausschließlich über die beiden anderen Themen. Benennt man diese Themen in „wir kennen uns“ bzw. „wir kennen uns nicht“ um, so entspricht die zu lösende Teilaufgabe der vorherigen Fragestellung.

Wie verteilt man *n* Punkte in einem Quadrat, so dass der Mindestabstand zweier Punkte möglichst groß wird?



Für die Anordnung von 6 Punkten kann man weitere als die in Aufgabe A1-5B(b) gezeigten Ansätze versuchen. In naheliegender Weise versuche man, die Punkte als Eckpunkte eines Sechsecks in das Quadrat zu legen. Auch wenn alle Seitenlängen gleich lang sind, ist das Sechseck bei nebenstehender Lage nicht regelmäßig, denn die horizontale Diagonale ist kürzer als die beiden anderen Diagonalen.



Auch eignet sich diese Lage nicht zur Lösung der Aufgabe A1-5B(b), denn es gilt:

$$2\sqrt{d_6^2 - \tfrac{1}{4}} + d_6 = 1, \quad \textit{also} \quad d_6 = \tfrac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{7} - 1\right) \approx 0{,}549$$

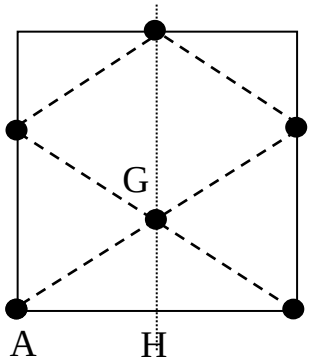
Für die nebenstehend gezeigte Verteilung, wobei alle

eingezeichneten Punktverbindungen gleichlang seien, findet man den dabei maximal möglichen Abstand von $d_6 \approx 0{,}597$ aus

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d_6 + \sqrt{d_6^2 - (1-\sqrt{2}\cdot d_6)^2} = 1$$

Der maximale Mindestabstand für 6 Punkte wird für die nebenstehende Konfiguration erreicht. Er berechnet sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $\overline{AH} = \frac{1}{2}$ und $\overline{HG} = \frac{1}{3}$, also

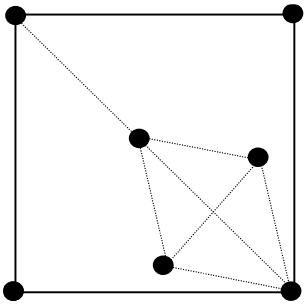
$$\overline{AG} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{13} \approx 0{,}601\,.$$



Diese Konfiguration hat eine alltägliche Realisierung: Wenn 5 fremde Personen in einem Fahrstuhl stehen, werden sie sich etwa wie in der Aufgabe 1-5B(c) aufstellen, um sich nicht gegenseitig zu belästigen. Tritt eine weitere Person herein (in der Abbildung von oben kommend), rücken die bereits im Fahrstuhl stehenden Personen ein Stück nach hinten und die hinzu gekommene Person bleibt an der Türmitte stehen.

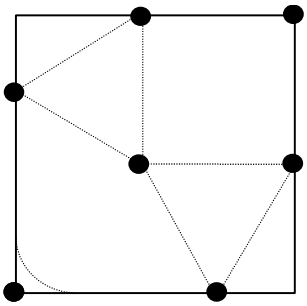
Dieses Beispiel zeigt, dass eine Argumentation „ausgehend von einer scheinbar optimalen Situation verschlechtert sich der maximale Mindestabstand, wenn man einen Punkt etwas verschiebt“ nicht ausreicht. Vermutet man nämlich, dass die optimale Konfiguration eingenommen wird, wenn die Punkte wie oben berechnet ein Sechseck bilden, so verschlechtert sich der Mindestabstand tatsächlich, wenn man nur wenig „stört“. Verändert man aber die Lage wesentlich, ist eine Verbesserung zu erreichen!

Betrachte man nun den Fall $n = 7$. Naheliegend ist eine Konstruktion der Anordnung von 7 Punkten, indem 4 Punkte in die Eckpunkte gelegt werden und die verbleibenden 3 Punkte im Innern ein gleichseitiges Dreieck bilden.



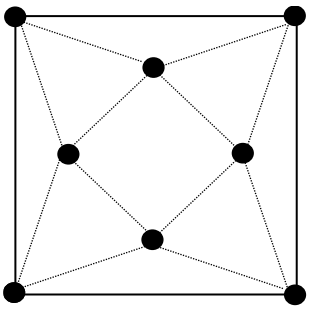
Doch das bringt nicht den maximal möglichen Mindestabstand!

Die Lage wie nebenstehend dagegen bietet eine beste Anordnung. Erstaunlicherweise kann der siebente Punkt in einer Umgebung des (linken unteren) Eckpunktes verschoben werden, ohne den Mindestabstand zu verkleinern. Aus der Skizze ist die Konstruktion leicht zu erkennen (die markierten Dreiecke sind gleichseitig) und die Berechnung des Mindestabstandes ist nicht schwer:



$$d_7 = 2\cdot(2-\sqrt{3}) \approx 0{,}536$$

Eine vermutlich beste Anordnung für 8 Punkte findet man durch Probieren, wenn man 4 Punkte in die Quadratecken legt und die verbleibenden 4 Punkte als Eckpunkte eines Quadrates im Inneren liegen. Es ergibt sich ein Mindestabstand von



$$d_8 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \approx 0{,}518$$

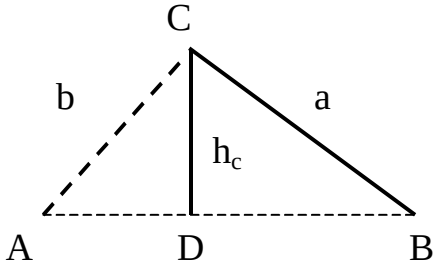
der als maximal möglicher Mindestabstand bewiesen werden kann. Man erkennt einen Zusammenhang zur Verteilung von 3 Punkten. Solche Konfigurationen lassen für höhere Punktzahlen *n* günstige Verteilungen mit großem Mindestabstand finden, ohne aber damit im Allgemeinen den größten Mindestabstand sicher zu können.

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

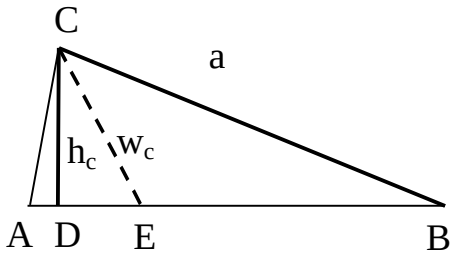
Im Folgenden seien Lösungsansätze für einige Konstruktionsaufgaben für Dreiecke vorgestellt. Zur Übung führe man die Konstruktionen aus und vervollständige die Darstellung mit der Analyse, der Konstruktionsbeschreibung, dem Beweis sowie der Diskussion zur Existenz und Eindeutigkeit.

Befinden sich Höhenangaben unter den Bestimmungsstücken, lassen sich häufig zunächst rechtwinklige Hilfsdreiecke aus der Höhe und einer weiteren Größe konstruieren, hier die Dreiecke *DBC* jeweils aus der Seitenlänge *a* und der Höhe h_c.

Aufgabe K1. (a, b, h_c)



Aufgabe K2. (a, h_c, w_c).



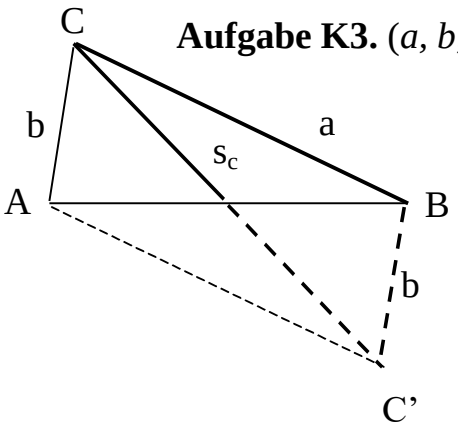
Für $a > h_c$ ist dieser Konstruktionsschritt (bis auf Kongruenz) stets eindeutig durchführbar. Nun lässt sich für $b \geq h_c$ bzw. $w_c \geq h_c$ die Konstruktion fortsetzen und die Punkte *A* bzw. *E* werden gefunden. Gilt die Gleichheit, fällt der Punkt *A* bzw. E mit D zusammen, andernfalls ist die Konstruktion nicht eindeutig, es existieren zwei verschiedene Lösungen mit einem Schnittpunkt rechts von *D* bzw. links von *D*.

Man beachte jedoch, dass in Aufgabe K1 für $b \geq a$ nur die linksseitige Lösung gültig ist, da sonst *A* rechts von *B* läge und damit der üblichen Bezeichnungsweise widerspricht.

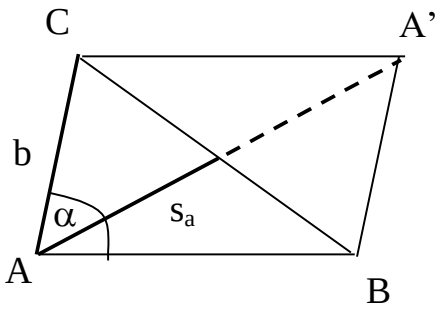
In Aufgabe K2 ist dies entsprechend für $w_c \geq a$ zu beachten. Liegt jedoch der Schnittpunkt *E* links von *D*, muss gewährleistet sein, dass der von *BC* und *EC* eingeschlossene Winkel spitz ist, da sonst kein Dreieck der geforderten Art konstruierbar wäre.

Sind Längen von Seitenhalbierenden gegeben, so führen oft die Verdopplung dieser Größen zu nützlichen Hilfsfiguren (Parallelogramme mit der doppelten Seitenhalbierenden als eine Diagonale), zum Beispiel bei

Aufgabe K3. (a, b, s_c)



Aufgabe K4. (b, s_a, α)



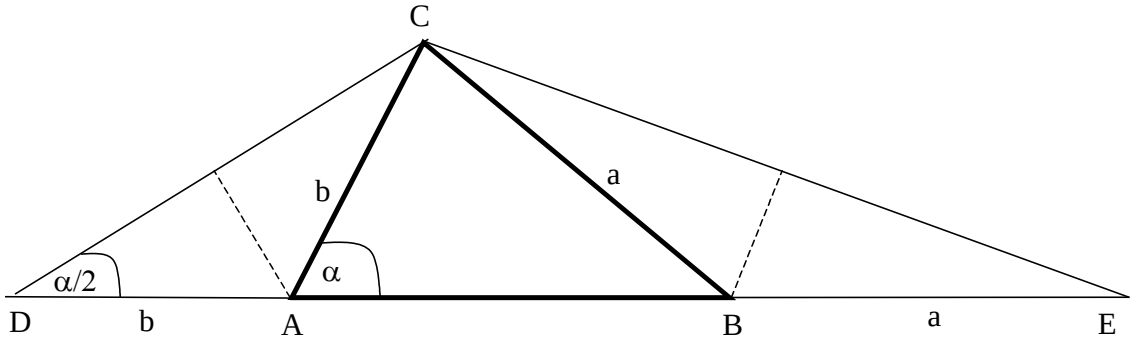
Man erkennt bei der Analyse, dass in den durch Verlängerung der Seitenhalbierenden entstehenden Parallelogrammen die Dreiecke $CC'B$ bzw. $AA'C$ leicht konstruierbar sind. Für die Existenz sind in K3 die Dreiecksungleichungen für die Seitenlängen (a, b, $2s_c$) zu erfüllen und muss in K4 die Ungleichung $2s_a > b$ gelten. Die Konstruktionen sind in diesen Fällen eindeutig.

Allerdings ist für beide Aufgaben ein Beweis (oder ein Hinweis in der Analyse) erforderlich: Man muss erläutern, dass die Hilfskonstruktion der Punkte C' bzw. A' tatsächlich zu Parallelogrammen führt und nicht nur anschaulich richtig ist. Dafür genügt die Anwendung des Satzes:

Wenn sich im Viereck die Diagonalen gegenseitig halbieren, genau dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Einen besonderen Reiz in der Wettbewerbsmathematik bieten Konstruktionsaufgaben mit Summen und Differenzen in den Vorgaben. Man vervollständige die Lösungsdarstellung bei folgenden Aufgaben mit der Diskussion zur Eindeutigkeit und Existenz.

Aufgabe K5. Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck (mit $\gamma = 90°$) aus den Bestimmungsstücken $a + b + c$ und α.

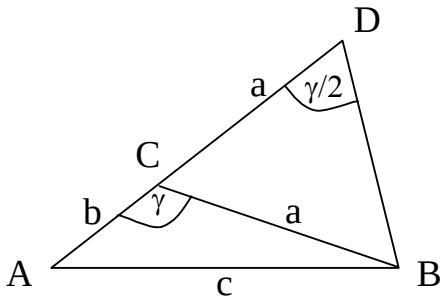


Lösungshinweise: Sei ABC das geforderte Dreieck (s. Skizze). Verlängert man AB über A hinaus um b zu Punkt D und über B hinaus um a zu Punkt E, so hat DE die

Länge $a + b + c$. Weil bei C ein rechter Winkel ist, beträgt der Winkel bei D wegen des Außenwinkelsatzes im gleichschenkligen Dreieck ACD $\alpha/2$ und bei E wegen der Innenwinkelsumme $45° - \alpha/2$. Damit kann das Dreieck DEC gezeichnet werden und A bzw. B findet man mittels der Mittelsenkrechten zu den Strecken CD bzw. CE. ❑

Aufgabe K6. Man konstruiere ein Dreieck aus der Winkelgröße γ, der Seitenlänge von c und der Summe $a + b$.

Lösungshinweise: Angenommen ABC sei das gesuchte Dreieck (s. Skizze). Verlängert man die Seite AC über C hinaus um a zum Punkt D, so ist das Dreieck BCD gleichschenklig und der Winkel bei D beträgt (wegen dem Außenwinkelsatz) $\gamma/2$. Damit ist das Dreieck ABD aus 2 gegebenen Seiten und einem anliegenden Winkel und schließlich C konstruierbar. ❑



Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Beweise:

(1) Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel:

Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$. Addiert man auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividiert beide Seiten durch 4, so findet man

$$ab \le \frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel:

Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachte man ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}.$$

Bildet man von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel:
Aus der für reellen Zahlen *a* und *b* gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Dividiert man beide Seiten durch 4 und radiziert, so erhält man die behauptete Ungleichung.

Folgerung. Die Ungleichungskette zwischen den Mitteln kann auf endlich viele positive reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ ($n > 1$) verallgemeinert werden:

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}\,.$$

Für den Beweis nutze man folgenden

Hilfssatz. Für positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ gilt stets

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1.$$

Beweis mittels der Methode der vollständigen Induktion.
(1) Induktions-Anfang: Für $n = 1$ gilt laut Voraussetzung $x_1 = 1$ und damit $x_1 \leq 1$
(2) Induktions-Schritt

Ind.-Voraussetzung: Es gelte für ein *n*:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Ind.-Behauptung: Es ist zu zeigen, dass dann gilt:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = n+1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1$$

Ind.-Beweis: O.B.d.A. sortiert man die Folge so, dass $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1}$ gilt. Dann ist $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = n+1$$
$$\Rightarrow \quad x_2 + x_3 + \ldots + x_n + (x_1 + x_{n+1} - 1) = n$$
$$\Rightarrow \quad x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

Außerdem gilt

$$(x_{n+1} - 1)(x_1 - 1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_{n+1} x_1 \leq x_{n+1} + x_1 - 1$$

Insgesamt folgt also:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \leq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

(3) Induktions-Schluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt somit die behauptete Gleichung für alle $n > 0$.

❑

Für den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung setze man nun

$$c = \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \quad ; \quad x_i = \frac{a_i}{c} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

dann gilt $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{c} = n$

Daraus folgt wegen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}{c^n} \le 1$$

unmittelbar die Behauptung der Folgerung.

Wettbewerbsvorbereitung durch Aufgabentraining?

In der MO-Bewegung findet man immer wieder einmal Beispiele von Aufgaben, die einen engen Bezug zu Aufgaben vorangegangener Olympiaden haben. Wer also in der Nachbereitung die Lösungsstrategie verinnerlicht hat, wird Vorteile beim Finden eines geeigneten Lösungsansatzes haben.

Aufgabe MO33XX44. Jemand findet die Angabe

22! = 11240007277**607680000 (XX = 09)
23! = 2585201673*8849*6640000 (XX = 10)

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserliche Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! Entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie. Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Zwei Jahre später findet man folgende Aufgabenstellung:

Aufgabe MO351033. Die Zahl 20! Ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechenausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten; darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikation mit zehn- und mehrstelligen Ziffern auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Verlag von August Stein (Potsdam) erschien 1895 die 4. Auflage eines Buches von Professor Dr. Th. Spieker: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Im Abschnitt XXI werden Diophantische Aufgaben behandelt. Der vorangestellt kurze Theorieteil beschreibt zunächst:

„Sind zur Bestimmung von mehreren Unbekannten weniger unabhängige Gleichungen gegeben, als Unbekannte vorhanden, so genügen diesen Gleichungen im allgemeinen unendlich viele zusammengehörige Werte der Unbekannten; die Aufgabe ist daher eine unbestimmte. ... Die Aufgabe, ein unbestimmtes Gleichungssystem unter der Bedingung zu lösen, dass die zusammengehörigen Wurzeln nur ganze positive Zahlen sind, nennt man ein Diophantisches Problem. (Diophantus, ein griechischer Mathematiker der 4. Jahrhunderts nach Chr., hat 6 Bücher solcher Aufgaben verfasst).“

Nach Erklärungen zur Lösung der Gleichungen 1. Grades (eine Gleichung mit zwei Unbekannten, zwei Gleichungen mit drei Unbekannten sowie eine Gleichung mit drei Unbekannten) und 2. Grades (Gleichungen mit quadratischen Termen) folgen 55 Aufgaben. Darunter:

Aufgabe 27. Die Zahl 159 in zwei Teile zu teilen, von denen der erste durch 8, der andere durch 13 teilbar ist,

Aufgabe 32. Jemand, der eine gewisse Anzahl Obstbäume zu pflanzen hat, die noch nicht 800 erreicht, pflanzt sie in Reihen von je 23. Dann bleiben ihm 2 übrig; hätte er sie aber zu je 25 gepflanzt, so wären ihm 21 übriggeblieben. Wie viele Bäume waren es?

Aufgabe 39. Den Bruch $\frac{2199}{1001}$ in drei Brüche zu zerlegen, deren Nenner 7, 11 und 13 sind.

Aufgabe 44. Für welche rationalen Werte von x wird der Ausdruck $\sqrt{5x^2+9}$ rational?

Man löse diese Aufgaben ohne Verwendung von Rechentechnik und ohne aufwändiges systematisches Probieren!

Aufgaben Serie 3 (2018/19)

Am 1. Dezember startet der Bundeswettbewerb Mathematik[3]. Für die Aufgaben dieser Serie wurden deshalb Aufgaben der vergangenen Jahre aus diesem Wettbewerb ausgewählt – gewissermaßen als Einstimmung auf die neue Auflage.

(Einsendungen bis 10. Dezember 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [4])

Aufgabe 3-1.
Bei einer 202-stelligen Quadratzahl $\underbrace{99...99}_{100\ \textit{Neunen}}\ z\ \underbrace{00...00}_{100\ \textit{Nullen}}\ 9$ ist die Ziffer z an der 102-ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermitteln Sie eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann

(5 Punkte)

Aufgabe 3-2.
Gegeben seien 2016 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2016 Zahlen kleiner als 1 sein?

(5 Punkte)

Aufgabe 3-3.
Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

(6 Punkte)

Aufgabe 3-4.
Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.
(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(2 Punkte)

[3] www.mathe-wettbewerbe.de/bwm
[4] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(2 Punkte)

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

(4 Punkte)

Aufgabe 3-5B. Es ist $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„S_n : *Ist* $\frac{a_n}{g_n}$ *eine natürliche Zahl, so ist* $x_1 = x_2 = ... = x_n$“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige:
Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, so dass für $x_1 = m$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(2 Punkte)

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

(4 Punkte)

Seminarhinweis

Das 2. Chemnitzer Seminar wird am Samstag, dem 8. Dezember 2018 am solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen (Neefestr. 88b, 09116 Chemnitz, www.solaris-fzu.de) stattfinden – bitte den Termin schon vormerken und die unter www.kzm-sachsen.de veröffentlichten oder mit Heft 9/2018 kurzfristig vorher verteilten Programmhinweise beachten.

Impressum

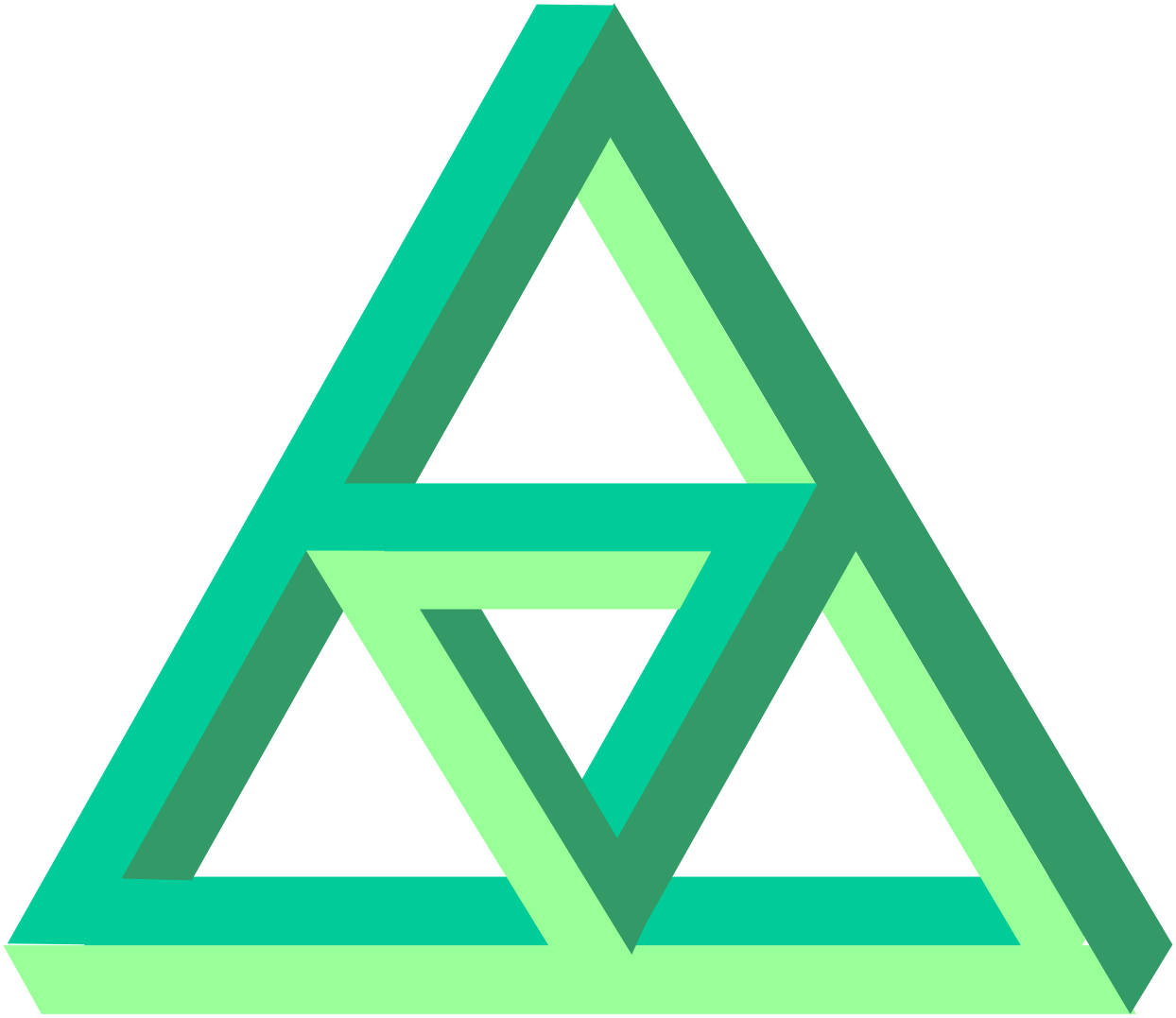
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 9 / 2018 17. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 2

Aufgabe 2-1[1]. Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten Seitenlängen konstruiert werden. Mit einem Spielwürfel werden die Seitenlängen ermittelt, wobei die jeweils geworfene Augenzahl die Länge einer Seite in cm angibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus drei nacheinander gewürfelten Zahlen *a, b* und *c* ein Dreieck mit den Seitenlängen *a* cm, *b* cm und *c* cm konstruiert werden kann.

Lösungshinweis: Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichseitigen Dreiecks zu würfeln: (1, 1, 1), ..., (6, 6, 6).

Es gibt unter Beachtung der Dreiecksungleichung genau folgende Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln:

für die Basislänge 1 sind alle Seitenlängen von 2, 3, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 2 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 3 sind alle Seitenlängen von 2, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 4 sind alle Seitenlängen von 3, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 5 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 6 möglich,
für die Basislänge 6 sind alle Seitenlängen von 4, 5 möglich.

Insgesamt sind es 5 + 4 + 4 + 3 +3 + 2 = 21 Kombinationen. Für ein Tripel (*a, b, b*) mit $a \neq b$ gibt es aber drei mögliche Wurffolgen, sodass es insgesamt $3 \cdot 21 = 63$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln.

Es bleiben noch die Möglichkeiten, bei denen die Seitenlängen paarweise verschieden sind. Dazu betrachte man zunächst die Tripel, bei denen die Zahlen der Größe nach aufsteigend angeordnet sind. Unter Beachtung der Dreiecksungleichung sind es 7 Tripel:

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6) und (4, 5, 6).

Für jedes der Tripel (a, b, c) gibt es aber 6 Wurffolgen, sodass es $6 \cdot 7 = 42$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines solchen Dreiecks zu würfeln.

Insgesamt liefern 6 + 63 + 42 = 111 Wurffolgen die Seitenlängen eines Dreiecks. Da es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschiedene Wurffolgen gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Erwürfeln der Seitenlängen eines Dreiecks

$$\frac{111}{216} = \frac{37}{72} \approx 51{,}39\% .$$ ❑

[1] Diese Aufgabe wurde in der 1. Stufe der 53. MO in Klassenstufe 9/10 gestellt: MO531016

Hinweis: Anstatt alle zulässigen Wurffolgen zu suchen, können natürlich auch die Wurffolgen angegeben werden, bei denen aus den entsprechenden Seitenlängen kein Dreieck gebildet werden kann, weil die Dreiecksungleichung nicht gilt. Auch hierbei bietet sich die Fallunterscheidung wie oben an, um die Vielfachheit der Zahlenkombinationen systematisch zu erfassen.

Alle 6 regelmäßigen Dreiecke sind konstruierbar.
Es gibt 9 Zahlenkombinationen, aus denen (wegen Verletzung der Dreiecksungleichung) kein Dreieck konstruiert werden kann:

(1, 1, 2), ..., (1,1,6), (2, 2, 4), ..., (2, 2, 6), (3, 3, 6)

Da jede dieser Kombination in 3 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $9 \cdot 3 = 27$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

Es gibt 13 Zahlenkombinationen aus paarweise verschiedenen Zahlen, aus deren Zahlen kein Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen konstruiert werden kann:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6),
(1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 6)

Da jede dieser Kombination in 6 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $13 \cdot 6 = 78$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

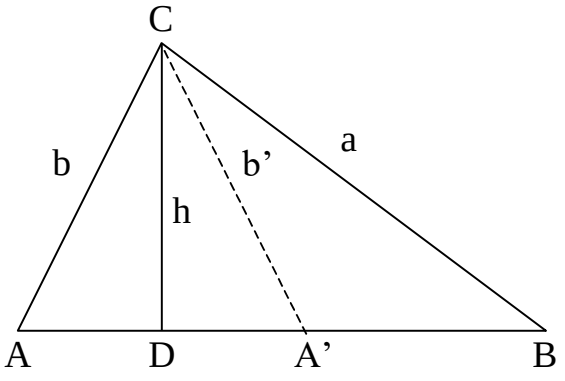
Insgesamt gibt es also $27 + 78 = 105$ Kombinationen mit dieser Eigenschaft, also

$$\frac{105}{216} = \frac{35}{72} \approx 48{,}61\%\,.$$

Aller möglichen Kombinationen beim Würfeln mit 3 Würfel.

Aufgabe 2-2. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines Dreiecks. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungshinweise: Es sei *ABC* ein geeignetes Dreieck und die Seiten *a* und *b* sowie die Höhe *h* von *C* auf *AB* haben die genannten Maßzahlen. Da sowohl im rechtwinkligen Teildreieck *ADC* als auch im rechtwinkligen Teildreieck *DBC* jeweils *h* eine Kathete ist, muss *h* in beiden Fällen kleiner sein



als die zugehörigen Hypotenusen *b* bzw. *a*. Folglich gilt für die Maßzahl der Höhe $h = 12$.

Sei nun o.B.d.A. $b = 13$. Dann gilt wegen des Satzes des Phytagoras im Dreieck *ADC* für die Länge $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ und im Dreieck *DCB* für die Länge $\overline{DB} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Also lautet die Maßzahl der dritten Seite für das Dreieck *ABC* (mit Höhe *h* innerhalb des Dreiecks) 9 + 5 = 14 und für das Dreieck *A'BC* (mit Höhe *h* außerhalb der Dreiecksfläche) 9 – 5 = 4. Damit gilt für die Maßzahl des gesuchten Flächeninhalt

$$A_{ABC} = \frac{12 \cdot 14}{2} = 84 \quad \text{bzw.} \quad A_{A'BC} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24. \qquad \square$$

Aufgabe 2-3[2]. Es sei $s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Man berechne s^2 und s^3 und gebe für *s* einen rationalen Wert an!

(*Hinweis:* Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Lösungshinweise: Man setze $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Wegen $14\sqrt{2} < 14 \cdot 1{,}42 < 20$ sind *u* und *v* positive Zahlen.

(*Hinweis:* Solche groben Abschätzungen sind zulässig, um ohne Taschenrechner die Ungleichungen zu bestätigen.) Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der binomischen Formel

$$u^3 \cdot v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 20^2 - (14\sqrt{2})^2 = 8.$$

Also gilt $u \cdot v = 2$ .Weiterhin gilt stets

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

Setzt man nun die angegebenen Beziehungen ein, so findet man die kubische Gleichung

$$s^3 - 6s - 40 = 0.$$

Eine Lösung $s_1 = 4$ findet man durch Probieren. Somit lässt sich die Gleichung durch Abspalten des Linearfaktors $(s - 4)$ umformen zu

$$s^3 - 6s - 40 = (s - 4) \cdot (s^2 + 4s + 10).$$

[2] MO-Klassiker: MO011043 (1961/62)

Aus der Lösungsformel für den quadratischen Term $s_{2,3} = -2 \pm \sqrt{-6}$ ist erkennbar, dass es keine weiteren reellwertigen Lösungen geben kann. Der gesuchte rationale Wert für *s* beträgt somit 4, die Potenzen entsprechend $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$. ❑

Hinweis: Es ist erforderlich, nach allen Lösungen der kubischen Gleichung zu suchen. Es ist zwar offensichtlich, dass es nur einen Wert für *s* geben kann. Infolge der Umformungen könnten aber Scheinlösungen entstehen, die erst durch eine Probe (hier im Sinne von Abschätzungen) ausgeschlossen werden können. Da aber nur eine reellwertige Lösung existiert, ist diese auch (ohne Probe) die Lösung der Aufgabe.

Aufgrund der speziellen Struktur der Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen kann man nach Werten für *a* und *b* suchen, für die gilt:

$$20 \pm 14\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^3 .$$

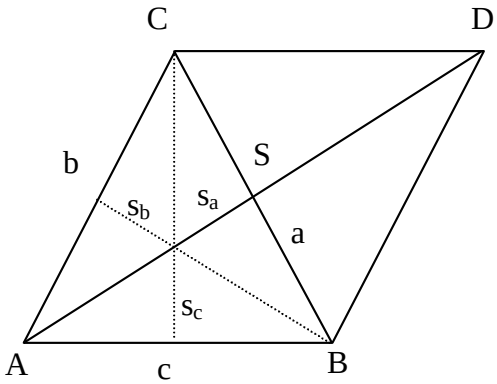
Nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich findet man *a* = 2 und *b* = 1.

Also gilt $s = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}$ **.**

Da die Ausdrücke in den Klammern positiv sind, ergibt sich unmittelbar die Lösung *s* = 4.

Aufgabe 2-4[3]. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Lösungshinweise: Sind *A, B, C* die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen der Seiten *a*, *b*, *c* und Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet (s. nebenstehende Skizze), so ist zu zeigen



$$s_a + s_b + s_c < a + b + c .$$

Diese Ungleichung würde unmittelbar aus den drei Ungleichungen

$$2 \cdot s_a < b + c \quad , \quad 2 \cdot s_b < c + a \quad , \quad 2 \cdot s_c < a + b$$

durch deren Addition und anschließender Division durch 2 folgen. Wegen der Symmetrie der Bezeichnungen genügt es, eine der drei Relationen zu beweisen, beispielsweise $2 \cdot s_a < b + c$.

[3] MO-Klassiker: MO021045 (1962/63)

Ist *D* der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch *C* mit der Parallelen zu g_{AC} durch *B* (der Punkt *D* existiert, weil die Seiten *c* und *b* nicht parallel sind), so ist das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm. Daher gilt $|BD| = |CA| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von *AD* als auch von *BC*. Folglich ist *AS* Seitenhalbierende von ΔABC und weil sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren, gilt:

$$|AD| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot s_a$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck ΔABD mit den Seitenlängen *c*, *b* und $2 \cdot s_a$ die zu beweisende Ungleichung. ❑

Ergänzung: Man findet in Formelsammlungen für allgemeine Dreiecke für die Seitenhalbierende s_c und die Seiten *a*, *b*, *c* den Zusammenhang $s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$. Durch einfaches Zusammenfassen der drei durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen entstehenden Gleichungen führt dies zur Formel:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Daraus wegen $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < a^2 + b^2 + c^2$ ohne weitere Argumentation auf die gesuchte Ungleichung zu schließen, kann nicht korrekt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zwar gilt $64 + 64 + 64 < 169 + 9 + 16$,
aber es ist $8 + 8 + 8 > 13 + 3 + 4$.

Man erkennt jedoch leicht, warum dieses Gegenbeispiel nicht passend ist: 3, 4 und 13 können (wegen der Verletzung der Dreiecksungleichung) nicht Seitenlängen eines Dreiecks sein. Geht man aber beispielsweise von der Ungleichung $b < a + c$ aus, so folgt nacheinander:

$$|b - a| < c$$

$$b^2 - 2ab + a^2 < c^2$$

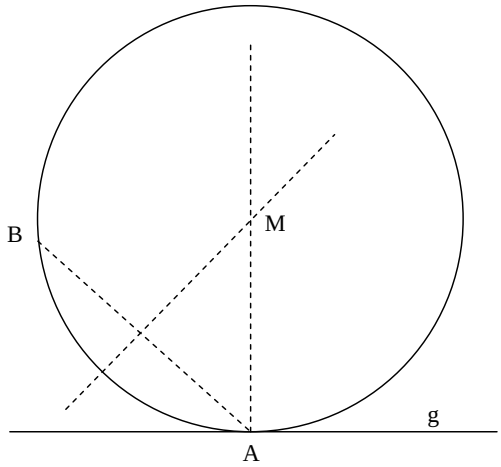
$$2 \cdot \left(b^2 + a^2\right) - c^2 < b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2$$

$$s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2} < \frac{a + b}{2}$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen zu s_a und s_b lässt sich nun unmittelbar auf die behauptete Ungleichung schließen.

Aufgabe 2-5A. Von einem Kreis sind zwei Punkte *A* und *B* und eine Tangente *g* gegeben. Man konstruiere den Kreis, falls

(a) der Punkt *A* auf *g* liegt.
(b) die Gerade durch *A* und *B* parallel zu *g* ist.
(c) die Gerade durch *A* und *B* die Tangente *g* in einem Punkt *S* schneidet, der von *A* und *B* verschieden ist.



Lösungshinweise

(a) *Analyse:* Liegt der Punkt *A* auf der Tangente *g*, so ist *A* der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente und der Mittelpunkt *M* liegt auf der Senkrechten in *A* zu *g*. Zudem befindet sich der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten der Sehne *AB*.

Konstruktionsbeschreibung:

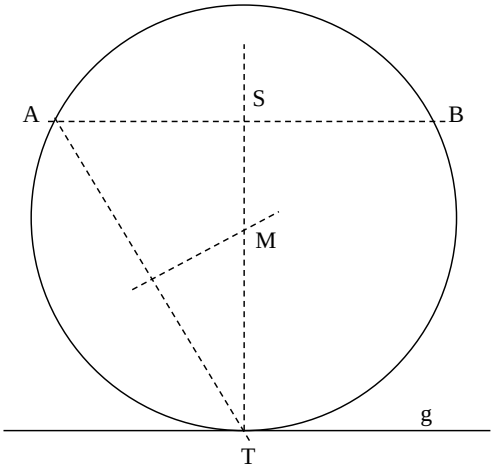
- Man errichte in *A* die Senkrechte zu *g*.
- Man verbinde *A* und *B* und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte.
- Der Schnittpunkt *M* beider so konstruierten Geraden ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius $r = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Liegt der Punkt *B* verschieden von *A* nicht gleichzeitig auf der Tangente, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar. Liegt dagegen der Punkt *B* auf der Tangente, existiert kein Kreis, der die Aufgabenstellung erfüllt.

(b) *Analyse:* Ist die Gerade durch *A* und *B* parallel zur Tangente *g*, so liegt der Kreismittelpunkt *M* auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, deren Schnittpunkt mit *g* der Punkt *T* sei. Da *T* ebenfalls ein Punkt auf der Kreisperipherie ist, liegt *M* auch auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AT}$.

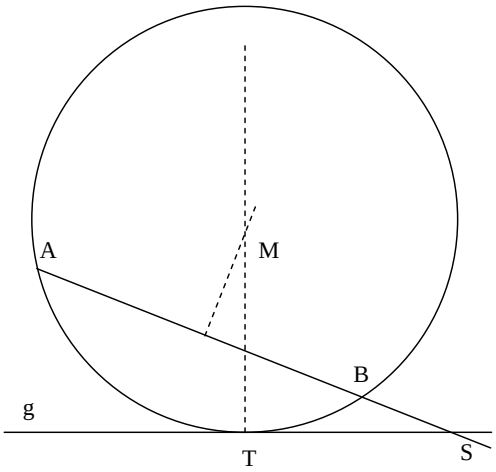
Konstruktionsbeschreibung:

- Man verbinde *A* und *B* und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Tangente sei *T*, ihr Fußpunkt sei *S*.
- Man verbinde *A* und *T* und errichte auf der Strecke $\overline{AT}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Geraden durch *S* und *T* sei *M*.
- Der Punkt *M* ist der gesuchte Kreismittelpunkt, sein Radius beträgt $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$.



Existenz und Eindeutigkeit: Da die Punkte *A* und *B* nicht auf der Tangente *g* liegen und voneinander verschieden sind, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar.

(c) *Analyse:* Angenommen, *T* sei der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente *g*. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Es genügt also, die Länge $\overline{ST}$ zu konstruieren (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes in rechtwinkligen Dreiecken). Ist *T* bekannt, so ist der Kreismittelpunkt *M* der Schnittpunkt der Senkrechten zu *g* in *T* und der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.



Konstruktionsbeschreibung:

- In einer Hilfskonstruktion ist auf einer Geraden *h* ein Punkt *S'* zu markieren, auf der einen Seite von *S'* auf *h* eine Strecke der Länge $\overline{SA}$ (man erhält den Punkt *A'*), auf der anderen Seite von *S'* auf *h* eine Strecke der Länge $\overline{SB}$ abzutragen (man erhält den Punkt *B'*). Um den Mittelpunkt *M'* der Strecke $\overline{A'B'}$ wird ein Kreis mit dem Radius $r' = \overline{M'A'} = \overline{M'B'}$ geschlagen (Thales-Kreis). Der Schnittpunkt der Senkrechten auf *h* in *S'* mit der Kreislinie sei *T'*.
- Mit dem Radius $r^* = \overline{S'T'}$ wird auf der Tangente *g* um *S* ein Kreisbogen geschlagen, der *g* in *T* schneidet. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf *g* in *T* und der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ ist der Schnittpunkt *M* des gesuchten Kreises.
- Der Radius des gesuchten Kreises ist $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$

Existenz und Eindeutigkeit: Liegen *A* und *B* auf verschiedenen Seiten von *g* oder schneidet die Gerade durch *A* und *B* die Tangente *g* rechtwinklig, so existiert kein Kreis, der die Bedingungen erfüllt.

Andernfalls ist die Konstruktion stets ausführbar, da *A* und *B* wegen der Voraussetzungen nicht auf *g* liegen können. Der Kreisbogen um *S* schneidet *g* in *2* Punkten (auf der Seite des spitzen Winkels und auf der Seite des stumpfen Winkels). Daraus resultieren zwei voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe.

Beweis: Wie die Analyse zeigte, erfüllt der in (a) bis (c) gefundene Mittelpunkt die jeweiligen Bedingungen der Aufgabenstellungen. ❑

Aufgabe 2-5B.

(a) Unter 52 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe oder deren Differenz durch 100 teilbar ist.

(b) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius 1 liegen.

(c) In einem regelmäßigen Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße rot bzw. grün, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind. Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt[4].

Lösungshinweise: Die Lösungen können mittels Schubfachprinzip gefunden werden.

(a) Man wähle 51 Schubfächer mit den Resten 0 bei Division durch 100, (Reste 1 oder 99) bei Division durch 100, (Reste 2 oder 98) bei Division durch 100 usw. bis Rest 50 bei Division durch 100. Sind 52 natürliche Zahlen gegeben, so werden mindestens 2 von diesen einem der Schubfächer zugeordnet. Haben beide den gleichen Rest, so ist deren Differenz durch 100 teilbar, haben sie dagegen einen unterschiedlichen Rest, so ist deren Summe durch 100 teilbar.

(b) Man zerlege das Quadrat in $5 \text{ x } 5 = 25$ kongruente Teilquadrate der Seitenlänge 1,4. Nach dem Schubfachprinzip befinden sich in mindestens einem dieser Teilquadrate mindestens 3 Punkte. Ein solches Teilquadrat hat eine Diagonale mit der Länge von $1{,}4 \cdot \sqrt{2} < 1{,}4 \cdot 1{,}42 = 1{,}988 < 2$. Folglich kann das Teilquadrat von einem Kreis mit dem Radius 1 vollständig überdeckt werden. Damit liegen auch die 3 Punkte im Innern dieses Kreises.

(c) Von den Ecken des regelmäßigen Neunecks haben bei Aufteilung auf zwei Farben nach dem Schubfachprinzip mindestens 5 dieselbe Farbe. Man betrachte 5 derartige Eckpunkte gleicher Farbe. Man kann mit diesen Ecken als Endpunkte $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Strecken bilden. Die Mittelsenkrechte zu jeder dieser 10 Strecken geht durch den Umkreismittelpunkt des Neunecks und durch eine weitere Ecke, weil das Neuneck regelmäßig und von ungerader Eckenzahl ist.

Nach dem Schubfachprinzip gehen also mindestens 2 der 10 Mittelsenkrechten durch den gleichen Eckpunkt. Die zugehörigen Endpunkte der Strecken (sie seien *A* und *B* bzw. *C* und *D*) bilden folglich die Ecken eines achsensymmetrischen Trapezes *ABCD* mit den parallelen Seiten *AB* und *CD*. Die beiden verschiedenen und gleichfarbigen Dreiecke *ABC* und *ABD* sind aufgrund der Symmetrie des Trapezes kongruent. Damit ist die Behauptung bewiesen. (Es

[4] Aufgabe 1 der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1993.

gibt sogar ein weiteres Paar von Dreiecken der geforderten Art, nämlich *ACD* und *BCD*.) ❑

Ergänzung zu (b): Es erscheint naheliegend, dass Quadrat zunächst in $7 \cdot 7 = 49$ Teilquadrate zu zerlegen. Jedes dieser Teilquadrate ist natürlich durch einen Kreis mit dem Radius 1 überdeckbar. Es müsste nun aber erst nachgewiesen werden, dass bei einer Überdeckung des Quadrates in jedem der verwendeten Kreise bereits mindestens 2 Punkte liegen. Für eine beliebige Lage der Punkte wird dies schwieriger sein als mit der oben dargestellten Anwendung des Schubfachprinzips.

Abstand eines Punktes zu den Dreieckseckpunkten

In der 50. Mathematik-Olympiade wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe MO501023. Im Innern eines Dreiecks *ABC* ist ein Punkt *D* beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit *x*, *y*, *z* und die Länge des Umfangs des Dreiecks *ABC* mit *u*. Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette $\frac{1}{2}u < x + y + z < u$ gilt.

Vorbemerkung: Wählt man für *D* den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt nach dieser Ungleichungskette stets

$$\frac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) < u,$$

also $s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}u$.

In Aufgabe 2-4 wurde eine strengere Ungleichung bewiesen. Damit stellt sich die Frage, ob der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ein Punkt mit besonders kleiner Summe der Abstände zu den Eckpunkten ist oder ob die Ungleichung der MO-Aufgabe sehr grob ist.

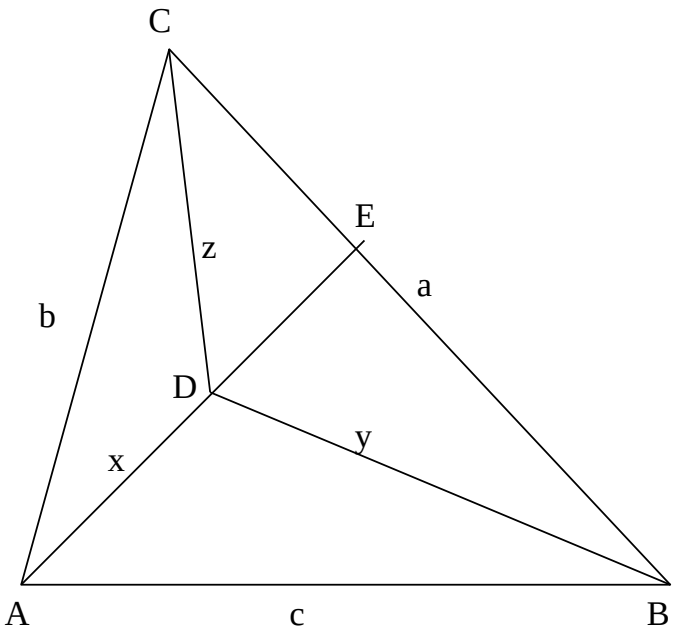
Betrachtet man beispielsweise ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge 1, so beträgt die Abstandsumme zu den Eckpunkten für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Wählt man dagegen einen Eckpunkt als Punkt aus, so ist dessen Abstandssumme 2. In beiden Fällen ist diese Abstandssumme deutlich kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Betrachtet man jedoch ein gleichschenkliges Dreieck *ABC*, dessen Grundseite *AB* sehr klein im Vergleich zu den Dreiecksschenkeln ist, und wählt man als Punkt den Eckpunkt *C*, so ist dessen Abstandssumme zu den Eckpunkten nur

wenig kleiner als der Dreiecksumfang. Man kann also die (rechte) Ungleichung aus Aufgabe MO501023 im Allgemeinen nicht verschärfen.

Nun gilt: Der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks hat von allen inneren Punkten eines Dreiecks die kleinste Abstandssumme zu den Eckpunkten.

Lösungshinweise: Es sei *D* ein innerer Punkt und die Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* werden (wie in der Skizze ersichtlich) mit *x*, *y* und *z* bezeichnet.



Dann gelten nach der Dreiecksungleichung:

$$a < y + z$$
$$b < x + z$$
$$c < x + y$$

Zusammenfassend erhält man die linke Seite der behaupteten Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{u}{2} < x + y + z\,.$$

Um die rechte Seite der Ungleichung zu zeigen, bezeichne man den Schnittpunkt der Geraden durch *A* und *D* mit der Seite *BC* mit *E*. Wieder mittels Dreiecksungleichung im Dreieck *AEC* folgt.

$$x + \left|\overline{DE}\right| < b + \left|\overline{CE}\right|$$

also $$x + \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{BE}\right| < b + \left|\overline{CE}\right| + \left|\overline{BE}\right| = b + a\,.$$

Wegen $y < \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{BE}\right|$ aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck *BED* ergibt sich die Ungleichung $x + y < a + b$. Analog können die Ungleichungen $x + z < a + c$ und $y + z < b + c$ gezeigt werden. In der Zusammenfassung dieser drei Ungleichungen folgt unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung. ❑

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [5].

Beweis: Man nehme an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen *m* und *n* mit *n* > 0 und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe und das Produkt zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2} \ , \ r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \ .$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind Summe und Produkt von rationalen Zahlen wieder rational. ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei *r* eine rationale und *t* eine irrationale Zahl. Man nehme an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, *s* sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Man nehme an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, *p* sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

---

[5] Eine reelle Zahl *r* heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen *m* und *n* mit *n* > 0 und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

$$\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4$$
$$\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=2$$

Satz. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert stets mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl.

Beweis: Seien r_1 und r_2 rationale Zahlen mit $r_1 < r_2$, dann gilt für die rationale Zahl $r=\frac{r_1+r_2}{2}$ die Ungleichung $r_1 < r < r_2$.

Die Zahl $t=r_1+\left(r_2-r_1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ stets

$$r_1 < r_1+\left(r_2-r_1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=t$$

und

$$t=r_1+\left(r_2-r_1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)< r_1+\left(r_2-r_1\right)\cdot 1=r_2\,.$$

Also gilt für die irrationale Zahl t die Ungleichung $r_1 < t < r_2$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, eine solche rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich werden.

Rationale Zahlen

Bei den folgenden Aufgabendiskussionen wird die Irrationalität der Wurzel $\sqrt{N}$ für jede positive ganzzahlige Nichtquadratzahl N als Verallgemeinerung von $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe. Es ist zu zeigen, dass $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ irrational ist.

Lösungshinweise: Man nehme an, x sei rational, und versuche, die gegebene Gleichung solange umzuformen, bis nur noch ein Wurzelausdruck in einer Gleichungsseite verbleibt und sonst nur Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von rationalen Zahlen auftreten.

$$x-\sqrt{7}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$$
$$x^2-2\cdot x\sqrt{7}+7=2+2\cdot\sqrt{10}+5$$
$$x^2-2\cdot x\sqrt{7}=2\cdot\sqrt{10}$$
$$x^2\left(x^2-4\cdot x\sqrt{7}+28\right)=40$$

$$\sqrt{7} = -\frac{\frac{40}{x^2} - x^2 - 28}{4x}$$

Ist x rational, dann ist die rechte Seite der Gleichung ebenfalls rational im Widerspruch zur Irrationalität der Quadratwurzel der linken Seite. ❑

Die Suche nach vollständigen Quadraten kann bei der Vereinfachung von Wurzelausdrücken hilfreich sein:

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = 2$.

Lösungshinweise: Selbstverständlich kann der Beweis nicht mittels Taschenrechner erbracht werden, denn die Gleichheit könnte aufgrund der endlich vielen Anzeigeziffern erzwungen sein! Wegen $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ sind die Wurzeln alle definiert und die linke Seite ist positiv, sodass quadriert werden darf. Man erhält:

$$3+\sqrt{8} - 2\cdot\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)} + 3 - \sqrt{8} = 4$$
$$6 - 2\cdot\sqrt{3^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2} = 4$$

❑

Die Richtigkeit der Behauptung folgt aber ebenso leicht aus der Beziehung

$$3 \pm \sqrt{8} = 2 \pm 2\cdot\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2.$$

Während bei dieser Aufgabe der Vorteil des zweiten Lösungsweges nur gering erscheint, ist der Beweis der Gleichheit

$$\sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}} = 18$$

ohne die Erkenntnis $1620 \pm 12\sqrt{17457} = \left(9 \pm \sqrt{33}\right)^3$ wohl nur sehr aufwendig lösbar!

In Gleichungen mit Quadratwurzeln lassen sich im Allgemeinen durch wiederholtes Quadrieren die Anzahl der auftretenden Wurzeln reduzieren, sodass sich die Ausdrücke vereinfachen. Dagegen „verschwinden“ Kubikwurzeln wie in Aufgabe 2-3 nicht so einfach. Hierfür kann der Binomische Lehrsatz geschickt ausgenutzt werden, wie auch folgendes Beispiel demonstriert:

Aufgabe. Man beweise die Gleichheit $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

Nochmals der Hinweis: Die Berechnung der Wurzelausdrücke mittels Rechentechnik ist kein Beweis!

Lösungshinweise: Man setze den linken Ausdruck der Gleichung gleich a und versuche, durch Umformungen den Wert von a einfacher berechnen zu können.

$$a^3 = \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3$$
$$= 5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right) - \left(5\sqrt{2}-7\right)$$

Diese Umformung erfolgte nach dem binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + 3xy\cdot(x+y) + y^3$$

Die Differenz der Kubikwurzeln in der mittleren Klammer stimmt aber gerade mit a überein, so dass man die kubische Gleichung $a^3 = 14 - 3a$ erhält. Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = 2$. Da wegen

$$a^3 + 3a - 14 = (a-2)\cdot\left(a^2 + a + 7\right)$$

keine weiteren reellwertigen Lösungen existieren können, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Es gilt $5\sqrt{2} \pm 7 = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^3$, woraus sich die Behauptung ohne Schwierigkeiten folgern lässt.

Algebraische und transzendente Zahlen

Für jede rationale Zahl $r = \frac{m}{n}$ (m, n ganzzahlig, $n > 0$) kann man ein Polynom

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n finden, sodass r eine Nullstelle von P ist (d.h. es gilt $P(r) = 0$). Dafür genügt bereits ein Polynom mit Grad 1 (lineare Funktion), denn $P(x) = n \cdot x - m$ erfüllt die Behauptung.

Verallgemeinernd heißt eine reelle Zahl z ***algebraisch***, wenn es ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass z Nullstelle von P ist. So sind $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ algebraisch, weil sie Lösungen der Gleichungen $x^2 - 2 = 0$ bzw. $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ sind. Ob algebraische Zahlen geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, hängt jedoch davon ab, ob die Gleichung allein durch die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen

aufgelöst werden kann. Bekanntermaßen ist die algebraische Zahl $\sqrt[3]{2}$ (als Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^3 - 2$) nicht auf diese Weise konstruierbar.

Reelle Zahlen, für die es kein solches Polynom gibt, heißen ***transzendent*** (quod algebrae vires transcendit – die Kräfte der Algebra übersteigend)[6]. Bereits LEONHARD EULER (1707 bis 1783) vermutete die Existenz transzendenter Zahlen, doch erst JOSEPH LIOUVILLE (1809 bis 1882) konnte dies nachweisen. Er bewies den Approximationssatz für algebraische Zahlen:

Satz. Ist γ eine algebraische Zahl und $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ein Polynom vom Grade *n* mit ganzzahligen Koeffizienten, für das die Zahl γ eine Nullstelle ist, dann gilt für alle ganzen Zahlen *p* und für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen *q* stets folgende Abschätzung:

$$\text{Wenn } \frac{1}{q} \geq \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \text{ ist, dann ist } \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Anschaulich bedeutet diese Aussage: Wenn man für die algebraische Zahl γ eine rationale Zahl mit hinreichend großem Nenner *q* als Näherung findet (erste Ungleichung), dann kann die rationale Zahl nicht beliebig nahe an γ kommen (zweite Ungleichung).

Als Anwendung des Approximationssatzes untersuche man die Zahl

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + ... = 0{,}11000100...00100...$$

Angenommen *z* sei algebraisch und das Polynom, das *z* als eine Nullstelle besitzt, sei vom Grad *n*. Setzt man im obigen Approximationssatz $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{A}{10^{m!}}$ für eine geeignete natürliche Zahl *A* und $m > n + 1$, dann ist die Differenz zwischen *z* und $\frac{p}{q}$ kleiner als $\frac{1}{10^{m!}}$. Diese Differenz müsste nun aber größer als $\frac{1}{10^{m! \cdot (n+1)}}$ sein, um den Approximationssatz zu erfüllen. Vergleicht man jedoch die Dezimalbruchentwicklung von *z* und $\frac{p}{q}$, so erkennt man, dass der Abstand beider Zahlen kleiner ist – somit kann *z* keine algebraische Zahl sein.

[6] vgl. Pfister, G.: Transzendente Zahlen. In. Wissenschaft und Fortschritt. Vol. 26 (1976), Heft 7, S. 304-308.

Dass π keine rationale Zahl ist, zeigte bereits 1761 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 bis 1777). Sein noch unvollständiger Beweis wurde von ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752 bis 1833) vervollständigt. Erst 1882 bewies FERDINAND LINDEMANN (1852 bis 1939), dass π nicht algebraisch, also transzendent ist. Damit war die Frage nach der Quadratur des Kreises endgültig beantwortet: Zu einem Kreis kann allein mit Zirkel und Lineal kein flächengleiches Quadrat konstruiert werden.

Wie schreibe ich das auf? [7]

Warum sich abmühen? Es ist wieder soweit, ich habe endlich die Aufgabe gelöst und nun sitze ich vor meinem leeren Blatt. Wie schreibe ich die Lösung auf? Und nicht nur wie, sondern auch: Warum eigentlich? Weil ich muss, weil es ja schließlich meine Aufgabe ist. Nein, eben nicht! Gut, vielleicht ein wenig auch darum. Aber vor allem ist das Aufschreiben ein Schritt in meiner Lösung der Aufgabe – und noch nicht einmal der letzte. Es ist der Schritt, in dem ich meine Gedanken endgültig klar strukturiere und noch einmal alles durchgehe. Es ist der Moment, in dem ich meine Lösung so festhalten möchte, dass ich sie später immer noch verstehe.
Habe ich es geschafft, mich so auf ehrliche Weise selbst zu überzeugen, wird es nun viel leichter, dass mein zu Papier Gebrachtes auch andere überzeugt, egal ob es ein Korrektor oder sonst ein interessierter Leser ist. Sicher werde ich vielleicht trotzdem manchmal noch einen Fehler übersehen, aber die Hoffnung, dass diese weniger werden, besteht.

Schreiben wie man spricht. Wenn ich die Lösung einer Aufgabe aufschreibe, hilft es mir ungemein zu überlegen, wie ich sie jemandem erklären würde. Auch wenn Mathematik viel mit Formeln und Zahlen zu tun hat, sollte meine Lösung immer die Form haben, dass ich sie auch vorlesen könnte. Aus diesem einfachen Vorsatz kann ich schon eine Menge Folgerungen ziehen.

Im Endeffekt ist die Lösung ein Text und als solcher soll sie auch verständlich sein. Natürlich will ich auch keinen Roman schreiben. Dennoch ist es ungünstig, die Kürze dadurch zu erreichen, dass ich die Hälfte meiner Überlegungen nicht aufschreibe („... weil es dann viel zu lang wird!“). Vielmehr sollte meine *Argumentation* schon knapp und präzise sein, so dass es gar nicht so viel *gibt*, was man aufschreiben könnte.

Gegeben, gesucht . . . Die Lösung zu einer Aufgabe beginne ich am besten damit, dass ich noch einmal kurz aufschreibe, worum es geht. Es geht ja meist auch gar nicht so sehr darum, dass ich die richtige Antwort (z.B. 40320) finde.

[7] Für KZM von Nadine Große und Andreas Nareike (Leipziger Schülergesellschaft Mathematik, lsgm.uni-leipzig.de)

Vielmehr ist der Sinn, dass ich erkläre, wie ich die Antwort gefunden habe. Im Idealfall kann ich meine Lösung auch dann noch verstehen, wenn der Zettel mit dem Aufgabentext verloren gegangen ist. Wenn meine Lösung aber z.B. nur aus der Zeile

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

besteht, brauche ich immer den Aufgabentext um zu verstehen, was ich da gemacht habe. Und auch wenn ich jemandem meine Lösung erklären soll, muss ich mir in diesem Fall erst *überlegen*, warum ich das gemacht habe – es steht ja nicht da.

Begriffe einführen. Bezeichnungen führe ich ein, damit der Text übersichtlicher und kürzer wird. Viele Dinge lassen sich auch nur umständlich sagen, wenn man keine zusätzlichen Bezeichnungen einführt. Das gilt noch mehr, wenn man etwas nur vorliest. Das sieht man sehr schön an folgendem mehr oder weniger bekannten Text:

> *When a twelfth century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too beautiful to live. He said he would step outside and see about it. And if, when he got out, he met a man and broke his head – the other man's head, I mean – then that proved that his – the first fellow's – girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head – not his own, you know, but the other fellow's – the other fellow to the second fellow, that is, because of course the other fellow would only be the other fellow to him, not the first fellow who – well, if he broke his head, than his girl – not the other fellow's, but the fellow who was the – Look here, if A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was.*
> (aus: M. Kline, „Mathematics in Western Culture")

Damit meine Bezeichnungen und Variablen aber wirklich nützlich sind, muss ich natürlich sagen, wofür genau sie stehen. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B. *„Sei n eine natürliche Zahl"* oder auch *„Die Menge aller roten Hüte bezeichnen wir mit R"*. Natürlich geht auch „*Sei* $n \in N$ *"*, aber auch dann sollte man beim Schreiben immer an einen gesprochenen Satz denken.

Manchmal kann es etwas aufwändig sein, eine Bezeichnung einzuführen, aber andererseits muss es auch nicht unbedingt so kompliziert und formal wie möglich sein. Dazu zwei Beispiele: eines, das zeigt, wie man es eher nicht machen sollte und eines, das zeigt, wie es besser geht.

Schlechtes Beispiel: Es sei $n \in N - \{0\}$. Seien $a_1,...,a_{n-1} \in \{0,1,...,9\} \subset N$ und $a_n \in \{1,...,9\} \subset N$. Weiter sei $m = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \cdot 10^i$.

Dann definieren wir $Q(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Aus mehreren Gründen erscheint diese Definition schwerfällig und eher verwirrend als erhellend. Manchmal benötigt man so eine Definition, wenn man z.B. die a_i noch verwenden will. Meist aber geht es wesentlich kürzer und trotzdem ist klar, was gemeint ist:

Gutes Beispiel: Für eine natürlich Zahl *m* bezeichne *Q*(*m*) die Summe ihrer Ziffern in Dezimaldarstellung.

Wenn schon klar ist, dass sowieso ausschließlich von Zahlen in Dezimaldarstellung die Rede ist, kann der Zusatz am Ende auch noch wegfallen.

In Geometrieaufgaben zeichne ich eine Skizze und beschrifte sie. Allerdings kann ich mittels einer Skizze keine Bezeichnungen einführen, sondern diese nur illustrieren. Zeichne ich einen Punkt *M* auf einer Strecke *AB*, so sieht es vielleicht so aus, also wäre es der Mittelpunkt. Doch wenn ich meine Lösung später anschaue, werde ich mich fragen: „Soll das jetzt ein beliebiger Punkt sein oder doch der Mittelpunkt?“ Da ich eine Skizze schlecht vorlesen kann, ist sie allein auch keine Lösung. Ich schreibe einen Text dazu, der erklärt, was in der Skizze zu sehen ist und was ich mir dabei gedacht habe. In einer Skizze kann ich später auch nicht sehen, was ich zuerst gezeichnet und was zuletzt konstruiert habe – ein erklärender Text muss also dabei sein.

Struktur geben. Ich möchte es also so einrichten, dass ich meine Lösung notfalls auch vortragen kann. Daher ist es besonders wichtig, dass ich nicht nur einzelne Formeln aneinanderreihe, sondern auch schreibe, was ich mache bzw. gleich machen werde und auch, warum ich dieses oder jenes mache.

Sehr selten beweise ich etwas mit nur einer Zeile, meist brauche ich schon mehrere Beweisschritte. Am besten sage ich also, was ich in einem bestimmten Schritt beweisen will und wann ich damit fertig bin, z.B. so:

Gutes Beispiel: „… also müssen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Objektes zeigen.

1. *Zur Existenz:*
   ...
   Damit ist die Existenz gezeigt.
2. *Zur Eindeutigkeit:*
   ...
   Wir sehen also, dass ein solches Objekt auch eindeutig ist.“

Es gibt in unserer Sprache viele kleine Wörter, die eine logische Struktur erzeugen. Solche Wörter lernt man auch kennen, wenn man in einer

Fremdsprache einen Kommentar oder eine Erörterung schreiben soll. Einige Beispiele für solche Wörter: somit / daher / folglich / dann / also / wenn ..., dann ... / aus ... folgt, dass ...

Je nach Sprachgefühl und Kontext kann ich eine Begründung lieber vor die zu begründende Aussage oder hinter diese stellen. Allerdings will ich lieber nicht beides gleichzeitig benutzen. Ich kann sagen: „*Nach dem Strahlensatz gilt ...“* oder „*Weil die linke Seite der Gleichung 0 ist, ...“* Wenn ich die Begründung nach der Aussage aufschreibe, dann z.B. so: „*..., weil p eine Primzahl ist“* oder „*..., da ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck ist“*. Ich vermeide aber so etwas:

Schlechtes Beispiel: „*Nach dem Satz des Pythagoras ist $\overline{AB}=5$, weil das Viereck einen rechten Winkel bei C hat.“*

So ein Satz verwirrt nur, weil schon die Reihenfolge der Voraussetzungen nicht klar ist. Man muss erst innerlich nach Voraussetzung und Schlussfolgerung sortieren, bevor man sich über die Richtigkeit Gedanken machen kann. Das stört den Lesefluss und lenkt somit vom Wesentlichen ab, dem Inhalt. Viel besser klingt:

Gutes Beispiel: „*Das Viereck hat einen rechten Winkel bei C und somit ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AB}=5$ “.*

Hier steht die Begründung vor der Aussage. Alternativ geht es auch so:

Gutes Beispiel: „*Es ist $\overline{AB}=5$, da das Viereck einen rechten Winkel bei C hat und sich daher der Satz des Pythagoras auf das Dreieck ABC anwenden lässt.“*

Endlich fertig? So jetzt habe ich sie aufgeschrieben, die Lösung. Aber das war – wie gesagt – noch nicht der letzte Schritt. Ich lese mir jetzt alles noch einmal durch und achte dabei nicht nur auf den mathematischen Inhalt.

Die ganze Zeit war ich damit beschäftigt, mir über die Richtigkeit meiner Aussagen, die Begründungen meiner Schlüsse und die Strukturierung meiner Lösung Gedanken zu machen. Da kann es schon einmal vorkommen, dass ich im Eifer des Gefechts vielleicht ein Subjekt, ein Prädikat oder gleich einen halben Satz unterschlagen habe. Am besten spreche ich meinen Text beim Lesen gedanklich mit und versuche, mir die Lösung selbst noch einmal zu erklären.

Es ist auch immer gut, wenn man noch jemanden hat, der alles noch einmal durchsieht. Da erhalte ich meine Lösung vielleicht auch einmal im roten Zustand zurück, aber das ist gut so. Denn: Meine Lösung ist immerhin so klar, dass der Leser sagen kann, was er noch nicht begriffen hat oder wo vielleicht noch ein Schritt in der Begründung fehlt. Habe ich mich unklar ausgedrückt, kann der

Leser nicht einmal mehr sagen, ob etwas falsch oder richtig ist und ich bekomme vielleicht nur ein riesiges Fragezeichen am Rand.

Bundeswettbewerb Mathematik 2019

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn; finanziell wird er gemeinsam vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert. Er steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein mathematischer Schülerwettbewerb für alle an Mathematik Interessierten. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen muss man zur Teilnahme vor allem auch etwas Ausdauer mitbringen.
In den beiden Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen jeweils in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen. In der dritten Runde, auch Kolloquium genannt, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit einem Mathematiker bzw. einer Mathematikerin aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessieger ausgewählt. Daneben gestalten die Teilnehmenden ein Rahmenprogramm mit ganz unterschiedlichen Beiträgen.“

Die Teilnehmerzahlen[8] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1017 (im Jahr 2010) und 1952 (im Jahr 2007).

[8] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/statistiken veröffentlicht.

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2015/16	1426	499 (35,0%)	68 (4,8%)	40 (58,8%)
2016/17	1142	398 (34,9%)	58 (5,1%)	25 (43,1%)
2017/18	1370	467 (34,1%)	53 (3,9%)	27 (50,9%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 liegt in Sachsen weit über dem Durchschnitt! Unter den 53 sächsischen Teilnehmern im Schuljahr 2017/18 wurden 4 erste, 5 zweiter und 13 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (41,5%, bundesweit 38,5%). Dazu kamen noch 20 Anerkennungsurkunden (37,7%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2015/16	261	80 (30,7%)	24 (9,2%)	11 (45,8%)
2016/17	155	48 (31,0%)	9 (5,8%)	3 (33,3%)
2017/18	255	76 (29,8%)	12 (4,7%)	3 (25,0%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2018 wurden 6 erste und 4 zweite Preise, an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 10 der 12 Starter!), darunter zwei Starter aus den Klassenstufen 9 und 10.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2019 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie beim Fachlehrer für Mathematik oder unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/bwm-wettbewerb-**1 erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler. Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015 – eine empfehlenswerte Lektüre. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Aufgaben Serie 4 (2018/19)

(Einsendungen bis 11. Februar 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de[9])

Aufgabe 4-1
Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2
Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-3
Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4
Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α. Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.

(6 Punkte)

(*Hinweis*: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8 Punkte, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 4-5A

(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+.....+2018}}}$ rational oder irrational ist. (2 Punkte)

(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

[9] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit „Re: KZM Serie 4“ bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

- unendlich viele Paare (x ; y) gibt, so dass z rational ist.
- unendlich viele Paare (x ; y) gibt, so dass z irrational ist. (2 Punkte)

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B

Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt. (2 Punkte)

(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt. (2 Punkte)

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt? (4 Punkte)

Seminarhinweis

Das 2. Chemnitzer Seminar findet am 8. Dezember 2018 statt. Gastgeber ist das solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen, Neefestr. 88b, 09116 Chemnitz (www.solaris-fzu.de). Bitte beiliegendes Programm beachten.

Impressum

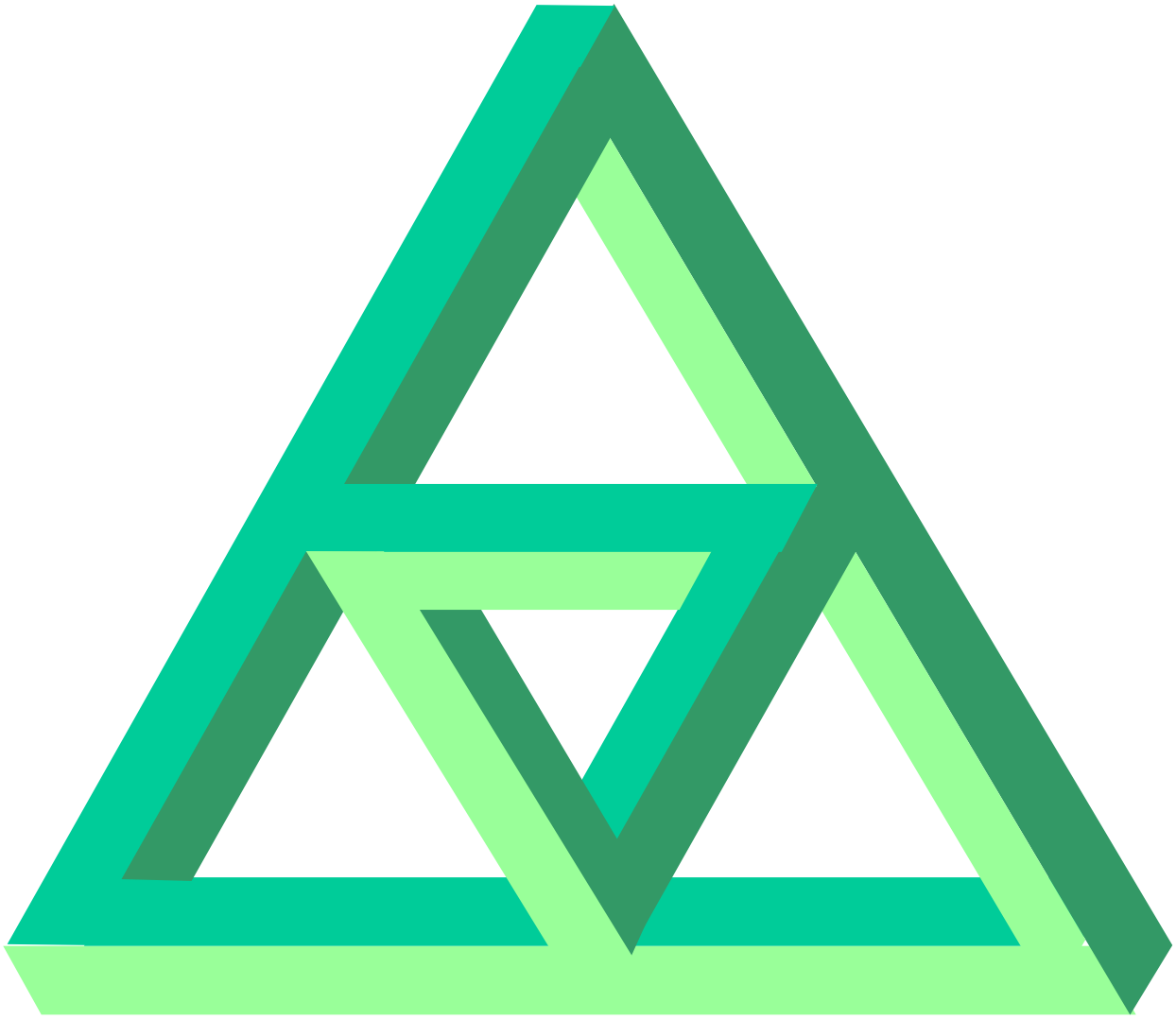
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, /www-user.tu-chemnitz.de/~peju/Verein.html VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 1 /2019 18. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 3

Aufgabe 3-1. Bei einer 202-stelligen Quadratzahl $\underbrace{99...99}_{100\ Neunen}\ z\ \underbrace{00...00}_{100\ Nullen}9$ ist die Ziffer z an der 102-ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermitteln Sie eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann

Lösungshinweise[1]*:* Es genügt, eine mögliche Ziffer anzugeben, z.B. z = 4. Es gilt nämlich

$$\underbrace{9...9}_{100}\underbrace{40...09}_{100} = \underbrace{10...0}_{202} - \underbrace{60...0}_{100} + 9 = 10^{202} - 6\cdot 10^{101} + 3^2 = \left(10^{101} - 3\right)^2 = \underbrace{9...9}_{100}7^2$$

Lösungsvariante: Man forme die 202-stellige Quadratzahl um

$$Z = \underbrace{9...9}_{100}z\underbrace{0...0}_{100}9 = \underbrace{10...0}_{202} - \underbrace{60...0}_{100} + 9 = 10^{202} - z\cdot 10^{101} + 9.$$

Diese Zahl ist offensichtlich kleiner als 10^{202} und größer als

$$Z > 10^{202} - 10\cdot 10^{101} = 10^{101}\cdot\left(10^{101} - 10\right) > \left(10^{101} - 10\right)^2.$$

Ist Z eine Quadratzahl, gibt es also eine natürliche Zahl *x* mit

$$\left(10^{101} - 10\right)^2 < Z = \left(100^{101} - x\right)^2 < \left(10^{101}\right)^2 \quad \text{und} \quad 0 < x < 10.$$

Wegen $\left(10^{101} - x\right)^2 = 10^{202} - 2\cdot x\cdot 10^{101} + x^2$ folgt unmittelbar $x = 3$. Eine Probe (wie oben) bestätigt, dass $z = 4$ eine Lösung ist. Der hier geführte Nachweis, dass es die einzige Möglichkeit ist, war nicht verlangt. ❑

Aufgabe 3-2. Gegeben seien 2016 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2016 Zahlen kleiner als 1 sein?

Lösungshinweise[2]*:* Man ordne die 2016 Zahlen aufsteigend. Da das Produkt der ersten 13 Zahlen größer als 1 ist, muss die 13. Zahl größer als 1 sein. Wegen der Monotonie der Folge sind dann alle weiteren Zahlen ebenfalls größer als 1. Somit ist sowohl das Produkt P_1 der ersten 13 als auch das Produkt P_2 der Zahlen von der 14. bis zur 2016. Zahl größer als 1 und auch das Produkt $P_1 \cdot P_2$ aller 2016 Zahlen.

Lösungsvariante: Wegen 2016 = 13 · 155 + 1 kann man aus den 2016 gegebenen Zahlen 155 Gruppen zu je 13 Zahlen bilden, deren Produkte laut Voraussetzung

[1] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 2009 (1. Runde) gestellt.

[2] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1991 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1988-1992. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1994, S. 91.3

sämtlich größer 1 sind. Ist die übrigbleibende 2016. Zahl ebenfalls größer oder gleich 1, so ist das Produkt aller 2016 Zahlen größer 1. Ist jedoch die 2016. Zahl kleiner als 1, so wähle man eine beliebige Gruppe aus 13 Zahlen aus. Weil das Produkt dieser 13 Zahlen größer als 1 ist, ist mindestens eine ihrer Zahlen größer 1. Tauscht man diese mit der 2016. Zahl aus, so hat man die Situation von oben: 155 Gruppe zu je 13 Zahlen, deren Produkte sämtlich größer als 1 sind und die 2016. Zahl, die ebenfalls größer als 1 ist. Somit ist das Produkt aller 2016 Zahlen stets größer als 1. ❑

Aufgabe 3-3. Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

Lösungshinweise[3]*:* Aus der Gaußschen Summenformel lassen sich folgende Gleichungen ableiten[4]:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1)$$
$$1 + 3 + 5 + ... (2n - 1) = (1 + 2 + 3 + ... + 2n) - (2 + 4 + ...+ 2n) = n^2$$

Zu a) Die Summe der 316 kleinsten geraden Zahlen ist nach der obigen Formel $316 \cdot 317 = 100172 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 316 geraden positive ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 315 gerade Zahlen vorkommen. Demnach müssen mindestens $335 - 315 = 20$ ungerade Summanden vorkommen. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 20 ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + ... + 37 + 99 + 2 + 4 + ... + 2 \cdot 315 = 19^2 + 99 + 315 \cdot 316$$
$$361 + 99 + 99540 = 100000$$

Zu b) Die Summe der 317 kleinsten ungeraden Zahlen ist nach obiger Formel $317^2 = 100489 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 317 ungeraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 316 ungerade Zahlen vorkommen. Die geforderte Summe kann aber nicht genau 316 ungerade Summenden haben: Denn die Summe der 316 kleinsten ungeraden Zahlen hat schon den Wert $316^2 = 99856$, die Summe der restlichen Summanden, also der geraden Summanden, (dies sind $335 - 316 = 19$ Summanden) dürfte dann höchstens den Wert $100000 - 99856 = 144$ haben. Die kleinstmögliche Summe mit 19 geraden positiven Summanden hat aber schon den Wert $19 \cdot 20 = 380 > 144$.

Die geforderte Summe kann aber auch nicht 315 ungerade Summanden haben: In diesem Fall käme in der Gesamtsumme eine ungerade Anzahl von ungeraden

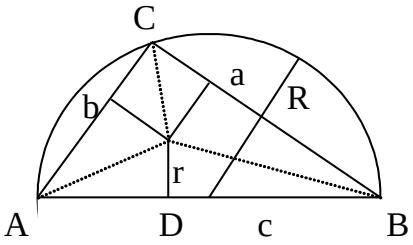
[3] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 2015 (1. Runde) gestellt.
[4] Im BWM wird hierzu eine ausführlichere Herleitung erwartet.

Summanden vor, der Wert der Summe wäre also ungerade und könnte insbesondere nicht den Wert 100000 annehmen.

Es können also nicht mehr als 314 ungerade Summanden sein. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 314 ungeraden Summanden, z.B.:

$$1 + 3 + 5 + ... (2 \cdot 314 - 1) + 2 + 4 + 6 + ...+ 40 + 984 =$$
$$314^2 + 20 \cdot 21 + 984 = 98596 + 420 + 984 = 10000.$$ ❑

Aufgabe 3-4. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.



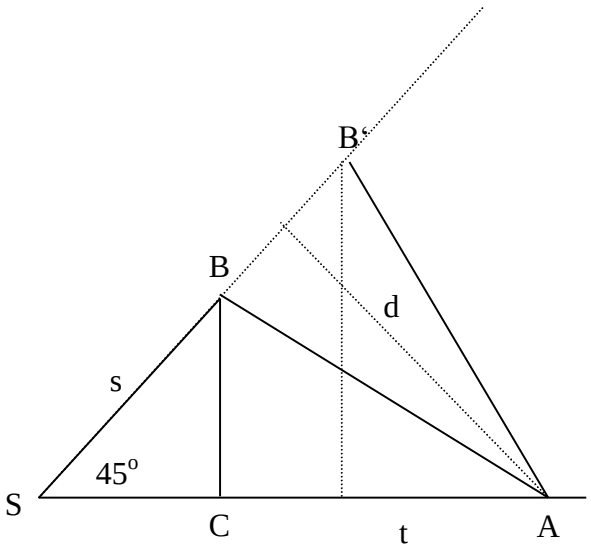
Lösungshinweise[5]*:* Die Bezeichnungen sind aus der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.

Analyse: Da der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks der Thale Skreis über der Hypotenuse *c* ist, gilt $R = \frac{c}{2}$.

Durch die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wird dessen Fläche in ein Quadrat und zwei Drachenvierecke zerlegt.

Wegen $(a-r)+(b-r) = 2 \cdot R$ findet man

(1) $a + b = 2 \cdot r + 2 \cdot R$.



Konstruktionsbeschreibung: (vgl. Abbildung) Man konstruiere (zum Beispiel über die Winkelhalbierende eines rechten Winkels) die Schenkel *s* und *t* eines Winkels der Größe 45° mit dem Scheitel *S*. Auf *t* trage man einen Punkt *A* mit $\overline{AS} = 2 \cdot (r + R)$ ein. Der Abstand *d*, den der Punkt *A* vom Schenkel *s* hat, beträgt $\sqrt{2} \cdot (r + R)$, denn als halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{AS}$ findet man $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{d}{2 \cdot (r+R)}$.

Der Kreis um *A* mit dem Radius 2*R* hat daher mit *s* einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der näher an *S* liegende Schnittpunkt werde mit *B* bezeichnet. Das Lot von *B* auf *t* schneidet *t* in einem Punkt, der *C* genannt werde.

[5] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1983 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983-1987. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1988, S. 83.5 bzw. 83.9.

Behauptung: Das Dreieck *ABC* besitzt die geforderten Eigenschaften.

Beweis: Das so erhaltene Dreieck ist nach Konstruktion rechtwinklig. Sein Umkreis hat den Radius *R*. Weiterhin gilt:

$$a+b=\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CS}=\overline{AS}=2\cdot(r+R).$$

Also hat der Inkreis vom Dreieck *ABC* den geforderten Radius. Das Dreieck besitzt somit die verlangten Eigenschaften.

Existenzbedingung: Wegen der Gleichheit von $a\cdot b$ und $c\cdot h$ (doppelter Flächeninhalt des Dreiecks) erhält man nach der binomischen Formel und dem Satz des Pythagoras

$$(a+b)^2=c^2+2\cdot c\cdot h$$

Da sich *h* nach oben durch *R* abschätzen lässt und wegen $c = 2 \cdot R$ folgt hieraus:

$(a+b)^2\le 8\cdot R^2$, also $a+b\le 2\sqrt{2}\cdot R$.

Zusammen mit (1) erhält man hieraus als notwendige Bedingung für die Existenz des Dreiecks

$$r\le\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot R$$

Da im Falle des gleichschenkligen Dreiecks Gleichheit vorliegt, ergibt sich, dass solche Dreiecke existieren und damit diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz des gesuchten Dreiecks ist. Eine untere Beschränkung für *r* gibt es nicht, da der Inkreismittelpunkt einen beliebig kleinen Abstand zur Grundseite haben kann.

Eindeutigkeit: Aus der Konstruktion ist (bei der Wahl des Punktes *B*) ersichtlich, dass zwei Dreiecke die Eigenschaften erfüllen. Man überzeugt sich leicht, dass diese aber kongruent sind. ❑

Weitere Lösungsansätze (Ausschnitte aus der Analyse):
(I) Die Länge des Abschnittes $\overline{AD}$ lässt sich zum Beispiel über Flächenvergleiche in Abhängigkeit von *R* und *r* ermitteln

$$x_{1/2}=R\pm\sqrt{R^2-\left(r^2+2Rr\right)}.$$

Da diese Größe aus den gegebenen Stücken konstruiert werden kann, ist die weitere Konstruktion des gesuchten Dreiecks unkompliziert.

(II) Ist M_i der Inkreismittelpunkt, so beträgt der Winkel $\angle AM_iB$ 135°. Es genügt also über der Strecke $\overline{AB}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln von 22,5° zu konstruieren. Der Umkreis um dieses Hilfsdreieck schneidet die im Abstand *r* zu $\overline{AB}$ Parallele im Inkreismittelpunkt.

(III) Nach dem Satz von Euler kann man den Abstand d zwischen In- und Umkreismittelpunkt berechnen: $d^2 = R \cdot (R - 2r)$. Auf der Grundlage des Höhensatzes in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten R und $(R - 2r)$ lässt sich der Abstand d aus den gegebenen Stücken konstruieren. Damit findet man leicht den Inkreismittelpunkt auf der im Abstand r zu $\overline{AB}$ Parallelen.

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.
(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Lösungshinweise:
(a) Es seien $z_x = 2x + 1$ und $z_y = 2y + 1$ zwei ungerade natürliche Zahlen (x, y nicht negative ganze Zahlen). Dann gilt

$$(2x+1)^2 - (2y+1)^2 = 4 \cdot (x^2 + x) - 4 \cdot (y^2 + y)$$

Ist x gerade, dann ist auch x^2 gerade und folglich auch die Summe $x^2 + x$. Ist x ungerade, dann ist auch x^2 ungerade und folglich ist die Summe $x^2 + x$ gerade. Also ist der Ausdruck $x^2 + x$ stets durch 2 teilbar und damit ist $4 \cdot (x^2 + x)$ durch 8 teilbar. Da dies auch für den zweiten Term gilt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Man ermittle die Reste bei Division durch 8, die eine ungerade Zahl haben kann.

z	z^2
$8m+1$	$64m^2 + 16m + 1 = 8(8m^2 + 2m) + 1$
$8m+3$	$64m^2 + 48m + 9 = 8(8m^2 + 6m + 1) + 1$
$8m+5$	$64m^2 + 80m + 25 = 8(8m^2 + 10m + 3) + 1$
$8m+7$	$64m^2 + 112m + 49 = 8(8m^2 + 14m + 6) + 1$

Somit lässt das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl bei Division durch 8 den Rest 1, woraus für die Differenz zweier solcher Quadratzahlen die Behauptung unmittelbar folgt.

(b) Angenommen, a sei nicht durch 3 teilbar. Dann lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit die Summe von $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, muss folglich b^2 den Rest 2 bei Division durch 3 lassen. Dies ist jedoch nicht möglich. Folglich ist a durch 3 teilbar und deshalb auch b durch 3 teilbar. ❑

(c) Wenn die Summe der Zahlen durch 6 teilbar ist, dann ist diese Summe sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar.

Die Summe der Zahlen ist gerade, wenn entweder alle 3 Zahlen gerade sind oder wenn genau eine der Zahlen gerade und die beiden anderen ungerade sind. Die dritte Potenz einer Zahl ist genau dann gerade (bzw. ungerade), wenn die Zahl selbst gerade (bzw. ungerade) ist. Folglich überträgt sich die Geradzahligkeit der Summe der Zahlen auf die Summe der Kuben dieser Zahlen. Ist die Summe der 3 Zahlen *a, b, c* durch 2 teilbar, dann ist es auch die Summe der Kuben dieser Zahlen.

Ausgehend von der Umformung

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+6abc+3\cdot\left(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2\right)$$

erkennt man: Ist die Summe der Zahlen *a, b, c* durch 3 teilbar, dann ist es auch die Summe ihrer Kuben, da alle weiteren Summanden durch 3 teilbar sind. ❑

Lösungsvariante: Man untersuche für Kubikzahlen die Reste bei Division durch 6.

z	z^3
$6m+0$	$6^3m^3+3\cdot6^2m^2\cdot0+3\cdot6m\cdot0^2+0^3=6M+0$
$6m+1$	$6^3m^3+3\cdot6^2m^2\cdot1+3\cdot6m\cdot1^2+1^3=6M+1$
$6m+2$	$6^3m^3+3\cdot6^2m^2\cdot2+3\cdot6m\cdot2^2+2^3=6M+6+2$
$6m+3$	$6^3m^3+3\cdot6^2m^2\cdot3+3\cdot6m\cdot3^2+3^3=6M+24+3$
$6m+4$	$6^3m^3+3\cdot6^2m^2\cdot4+3\cdot6m\cdot4^2+4^3=6M+60+4$
$6m+5$	$6^3m^3+3\cdot6^2m^2\cdot5+3\cdot6m\cdot5^2+5^3=6M+120+5$

Dabei wurde der Term $6^2m^3+3\cdot6m^2\cdot k+3\cdot m\cdot k^2$ jeweils zu *M* zusammengesetzt (jeweils für k = 0, ..., 5). Also lässt die Kubikzahl bei Division durch 6 den gleichen Rest wie ihre Basiszahl. Daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 3-5B. Es sind $a_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $g_n=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„*S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = ... = x_n$*“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

Lösungshinweise[6]*:*

(a) Es genügt, für $n = 3$ ein konkretes Beispiel anzugeben, das die Behauptung widerlegt. Für $x_1 = 27$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 1$ findet man als arithmetisches Mittel den Wert $a_3 = 12$ und für das geometrische Mittel den Wert $g_3 = 6$. Folglich ist S_3 eine ganze Zahl, jedoch folgt daraus nicht die Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3$. Also ist die Behauptung im Fall $n = 3$ im Allgemeinen falsch. ❑

(b) Setzt man $m = 81$, so ist S_4 eine ganze Zahl, denn es gilt für $x_1 = 81$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ für die Mittel $a_4 = 21$ und $g_4 = 3$, also $S_4 = 7$. ❑

Ergänzung: Setzt man allgemein für eine natürliche Zahl m voraus, dass das Verhältnis aus arithmetischen und geometrischen Mittel, also $v = \frac{m+1+1+1}{4 \cdot \sqrt[4]{m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}}$ eine ganze Zahl ist, so muss auch $\sqrt[4]{m}$ rational (und damit ganzzahlig) sein. Sei deshalb $m = y^4$ mit einer natürlichen Zahl y. Dann gilt:

$$v = \frac{y^4 + 3}{4y} = \frac{1}{4} \cdot \left(y^3 + \frac{3}{y} \right)$$

Ist v eine ganze Zahl, so ist der Zähler $y^4 + 3$ stets durch 4 teilbar. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, muss $y = 1$ oder $y = 3$ sein. Folglich ist $m = 81$ die einzige nichttriviale Lösung für diese Aufgabenstellung.

(c) Es sei $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v. Da a rational ist, ist folglich auch g rational und als Wurzel aus einem Produkt natürlicher Zahlen sogar ganzzahlig. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2a \cdot x + g^2 = 0 .$$

Die Diskriminante $D = 4a^2 - 4g^2 = 4g^2(v^2 - 1)$ ist aber nur für $v = 1$ eine Quadratzahl. Folglich ist wegen $D = 0$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ bewiesen. □

[6] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1975 (2. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

Ergänzende Lösungsdiskussion

Zu Aufgabe 2-2: Während bei dieser Aufgabe zu untersuchen war, wie die gegebenen Längen bzgl. Dreiecksseiten und Höhe angeordnet sein können, genügt es bei der folgenden Aufgabe, eine geschickte Anordnung zu wählen (und zu zeigen, dass diese realisiert werden kann).

Aufgabe MO381041. Wir betrachten alle dreiseitigen Pyramiden mit den Kantenlängen (in cm) 3, 4, 5, 6, $3\cdot\sqrt{5}$ und $2\cdot\sqrt{13}$. Gibt es unter diesen Pyramiden eine Pyramide, deren Volumen gemessen in cm^3 ganzzahlig ist?

Lösungshinweise: Da bei allgemeinen Pyramiden in der Grundfläche Wurzelausdrücke auftreten können, liegt es nahe, eine Grundfläche zu finden, die einen ganzzahligen Flächeninhalt hat. Weil die drei Seitenlängen 3, 4 und 5 (wegen Umkehrung des Satzes des Pythagoras) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, erfüllt diese Anordnung die Ganzzahligkeit: Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt 6 cm^2.

Nun findet man mit gleicher Argumentation, dass die beiden Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 6 und $3\cdot\sqrt{5}$ bzw. 4, 6 und $2\cdot\sqrt{13}$ ebenfalls rechtwinklige Dreiecke sind. Damit kann die Kante der Länge 6 gleichzeitig Höhe für die Pyramide sein. Das Volumen erweist sich mit 12 cm^3 als ganzzahlig. ❑

Zu Aufgabe 2-3: Bei Aufgaben mit Quadratwurzel kann durch wiederholtes Quadrieren die Anzahl der Wurzelausdrücke reduziert werden, bis eine einfach lösbare Gleichung erreicht wird oder in der Gegenüberstellung einer irrationalen Zahl und eines offenbar rationalen Terms ein Widerspruch vorliegt.

Aufgabe. Man zeige, dass die Zahl $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ nicht rational ist.

Vorbemerkung: Während die Irrationalität der Quadratwurzel einer Nicht-Quadratzahl (also beispielsweise $\sqrt{5}$ oder $\sqrt{7}$) mit Verweis auf den Beweis für $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist über Summen und Differenzen eine solche Aussage nicht ohne konkreten Nachweis möglich. Insbesondere kann die Summe von irrationalen Zahlen durchaus auch rational sein, wie solche „gekünstelte“ Beispiele zeigen: $(2 + \sqrt{2}) + (2 – \sqrt{2}) = 4$.

Lösungshinweise: Man nehme an, x sei rational. Dann forme man die Gleichung um, bis eine einzelnstehende Quadratwurzel auf einer Seite der Gleichung verbleibt:

$$x-\sqrt{7}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$$
$$x^2-2x\sqrt{7}+7=2+2\sqrt{10}+5$$
$$x^2-2x\sqrt{7}=2\sqrt{10}$$
$$x^4+4x^2\cdot 7-4x^3\sqrt{7}=40$$
$$\sqrt{7}=\frac{x^4+28x^2-40}{4x^3}$$

Wenn x rational ist, dann stellt die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls eine rationale Zahl dar – im Widerspruch zur (bekannten) Irrationalität von √7. ❑

Aufgabe. Man finde alle reellwertigen Zahlen x, für die die folgende Gleichung definiert und erfüllt ist:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}=2.$$

Lösungshinweise: Damit der erste Wurzelausdruck definiert ist, muss x ≥ -1 gelten. Damit der zweite Wurzelausdruck definiert ist, muss x ≥ 2 gelten. Somit umfasst der Definitionsbereich alle reellen Zahlen größergleich 2.

Umformung der Gleichung und beidseitiges Quadrieren führt zu

$$x+1=4+4\cdot\sqrt{2x-4}+2x-4$$
$$-x+1=4\cdot\sqrt{2x-4}$$

Mit der Kenntnis x ≥ 2 wird offensichtlich, dass die linke Seite der Gleichung negativ, die rechte Seite dagegen nichtnegativ ist. Es kann also keine Lösung in reellen Zahlen geben. ❑

Übersieht man diesen Aspekt, erscheint ein erneutes Quadrieren naheliegend (aber eigentlich nicht zulässig!):

$$x^2-2x+1=32x-64$$
$$x^2-34x+65=0$$
$$x_{1/2}=17\pm 4\cdot\sqrt{14}$$

Die erste Lösung nach Anwendung der Lösungsformel erfüllt die Bedingung x ≥ 2. Auf die Probe wird verzichtet, weil diese mit den Doppelwurzel schwierig erscheint – Aufgabe gelöst?

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Lösungshinweise: Auch ohne den nachgestellten Hinweis ist die Verwendung von Rechentechnik nicht zulässig. Natürlich kann man zur Lösungsfindung die Werte ausrechnen und der Vergleich 0,1451 < 0,1813 spricht für die Richtigkeit der Ungleichung. Der Abstand ist so groß, dass er nicht allein aus Rundungsfehlern resultieren wird – aber genau das wäre zu beweisen! Und wie sehe es bei den folgenden Zahlen aus:

$$\sqrt[3]{1.000.001}-\sqrt[3]{1.000.000}<\sqrt[3]{1.000.000}-\sqrt[3]{999.999}\ ?$$

Es wird also ein „technikfreier“ Beweis gesucht. Potenzieren – so die Erfahrung – reduziert nicht die Anzahl der Wurzeln. Man führe einen indirekten Beweis:

Angenommen, es gelte $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\geq\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. Potenziert man beide Seiten und fasst nach Ausmultiplizieren zusammen, erhält man

$$\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{36}<\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}$$

bzw. nach Division durch $\sqrt[3]{12}$

$$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{\frac{3}{2}}-1=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Da $\sqrt[3]{2}$ aber größer als 1 ist, kann die rechte Seite weiter abgeschätzt werden und man findet

$$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

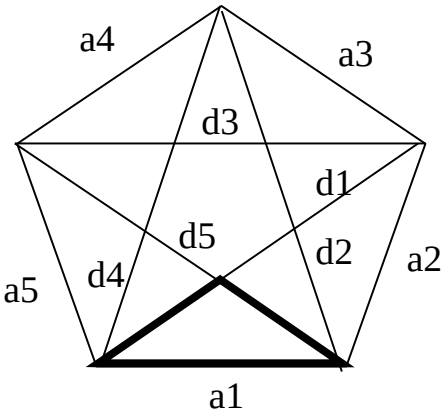
im Widerspruch zur Annahme, also war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. ❑

Summen von Diagonalenlängen

Aufgabe MO390933. Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gilt die Ungleichung

$$u < s < 2u.$$

Dabei bezeichnen u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.

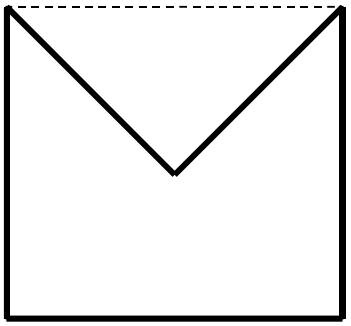


Lösungshinweise: Für jede Diagonale d_i gilt für die zwei anliegenden Fünfeckseiten a_i und a_{i+1} (i = 1, …, 5; i + 1= 6 entspricht i = 1) die Dreiecksungleichung

$$d_i < a_i + a_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, 5).$$

Summiert man diese 5 Ungleichungen, ergibt sich unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung.

Um die linke Ungleichung zu beweisen, betrachte man das in die Fünfeck-Figur fett eingezeichnete Dreieck. Wieder mittels Dreiecksungleichung sieht man, dass die Summe der beiden Diagonalenstücke größer als die anliegende Fünfeckseite ist. Da im konvexen Fünfeck stets das innere, aus Diagonalenabschnitten gebildete Fünfeck existiert und dessen Umfang zur Summe der anderen Diagonalenabschnitte zuzurechnen ist, ergibt sich unmittelbar die Behauptung.



Aus dieser Beweisidee erkennt man, das konkave Fünfecke die Ungleichung verletzen können. In dem Fünfeck, bei dem 4 Eckpunkte ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 bilden und der 5. Eckpunkt dessen Mittelpunkt darstellt, gilt

$$u = 3 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$$

und $$s = 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 3\sqrt{2} + 1$$

und folglich u > s. Die linke Ungleichung ist in diesem konkaven Fünfeck nicht erfüllt, die rechte Ungleichung gilt dagegen allgemein.

Der Beweis der linken Ungleichung kann aber auch erbracht werden, wenn man sich die konvexen Teilvierecke in dem Fünfeck betrachtet, die aus drei aufeinander folgenden Fünfeckseiten und der zugehörigen Diagonalen (z.B. a_1, a_2, a_3 und d_4) bestehen. Es gilt der Satz, dass in jedem konvexen Viereck die Summe der Diagonalenlängen größer als der halbe Umfang ist. Dies ist leicht nachweisbar, wenn man die Dreiecksungleichung auf die vier Teildreiecke anwendet, in die die zwei Diagonalen das Viereck zerlegen. Daraus lässt sich die behauptete Ungleichung für das Fünfeck leicht ableiten.

Flächenumwandlung – eine Aufgabe der 54. MO

Aufgabe MO541023. Gegeben sind zwei Rechtecke, das Rechteck *ABCD* mit dem Flächeninhalt A_1 sowie das Rechteck *EFGH* mit dem Flächeninhalt A_2.

Weisen Sie nach, dass man aus den beiden Rechtecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Rechteck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

Hinweis: Es ist nachzuweisen, dass das so konstruierte Rechteck die geforderte Eigenschaft auch wirklich besitzt.

Diese Aufgabe erwies sich als schwierig. Nur wenigen Teilnehmern gelang eine (fast) vollständige Lösung. In den Bewertungsvorschlägen wurden bereits für die Bearbeitung eines Spezialfalles Punkte vergeben: Wenn die Rechtecke jeweils eine gleichlange Seite haben, können die Rechtecke in einfacher Weise aneinandergefügt werden.

Als Spezialfall könnten aber auch zwei Quadrate (mit den Seitenlängen a und b) betrachtet werden. Die Flächensumme ist dann mit dem Satz des Pythagoras leicht zu ermitteln: Sind a und b Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für die Hypotenuse c die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$. Daraus lässt sich eine einfache Konstruktionsvorschrift zur Lösung der Aufgabe ableiten: Man konstruiere aus den Seitenlängen a und b ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b. Die Länge der zugehörigen Hypotenuse c ist die gesuchte Seitenlänge des Quadrates mit dem Flächeninhalt $a^2 + b^2$.

Diese Vorbemerkung führt zu einer einfach zu beweisenden Lösungsvariante: Es ist mit geometrischen Grundkonstruktionen möglich, ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Nach Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat mit der Höhe h als Seitenlänge flächengleich zum Rechteck mit den Hypotenusenabschnitten p und q als Seitenlängen, $h^2 = pq$.

Um aus zwei Rechtecken ein drittes Rechteck der geforderten Art zu konstruieren, genügt es deshalb, jedes der Rechtecke in einem ersten Schritt in ein jeweils flächengleiches Quadrat umzuwandeln. Im zweiten Schritt wird das Quadrat mit der Flächensumme dieser beiden Quadrate konstruiert. Da keine weiteren Forderungen an das zu konstruierende Rechteck gestellt wurden, ist dieses Quadrat eine Lösung der Aufgabe.

Pythagoras und Verwandte[7]

Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ wird wohl stets mit dem Satz von Pythagoras in Verbindung gebracht.

Zunächst untersuche man Teiler der Zahlen a, b und c unter der Voraussetzung, dass der größte gemeinsame Teiler aller drei Zahlen gleich 1. Andernfalls könnte man jede der Zahlen durch den größten gemeinsamen Teiler dividieren.

Offensichtlich ist genau eine der drei Zahlen geradzahlig. Wären zwei Zahlen geradzahlig, so wären auch deren Quadrate geradzahlig. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier geradzahligen Zahlen) geradzahlig und somit auch die Zahl selbst. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre

[7] Auszüge aus dem Seminar-Programm vom 8.12.2018

mindestens 2. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen ungeradzahlig sein, weil die Summe zweier ungeradzahligen Zahlen geradzahlig ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 3 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 3 teilbar, so wären deren Quadrate durch 9 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 9 teilbaren Zahlen) durch 9 teilbar und somit die Zahl selbst durch 3 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 3. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 3 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 3 jeweils den Rest 1 lassen. Aber die Summe $a^2 + b^2$ würde dann den Rest 2 lassen, was für eine ganze Zahl c^2 nicht möglich ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 5 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 5 teilbar, so wären deren Quadrate durch 25 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 25 teilbaren Zahlen) durch 25 teilbar und somit die Zahl selbst durch 5 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 5. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 5 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 5 jeweils den Rest 1 oder 4 lassen. Aber die Summe $a^2 + b^2$ würde dann den Rest 2 oder 3 lassen (was für eine ganze Zahl c^2 nicht möglich ist) oder eine durch 5 teilbare Zahl ergeben.

Um geometrische „Verwandte“ zu finden, verallgemeinere man den Exponenten, also $a^z + b^z = c^z$ (z reell) und untersuche, ob es für solche Gleichungen ebenfalls geometrische Interpretationen gibt[8].

(a) Für $z = 1$ erhält man die triviale Streckenaddition.

(b) Bezeichnet c die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck und h die darauf stehende Höhe, so gilt für die Hypotenusenabschnitte p und q:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{c + 2h}\,,$$ also eine verwandte Gleichung mit $z = \frac{1}{2}$.

Lösungshinweise: Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Beziehungen $c = p + q$ und $h^2 = p \cdot q$. Daraus folgt:

$$c + 2h = p + q + 2\sqrt{p \cdot q} = \left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist. ❑

[8] Windisch, G. Geometrische Interpretationen der Gleichung $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$. In: alpha 22 (1988) Heft 2, S. 30.

(c) Für die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks und dessen Höhe h auf c gilt

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}\text{, also eine verwandte Gleichung mit } z=-2.$$

Lösungshinweise: Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt nach Division durch a^2b^2

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}.$$

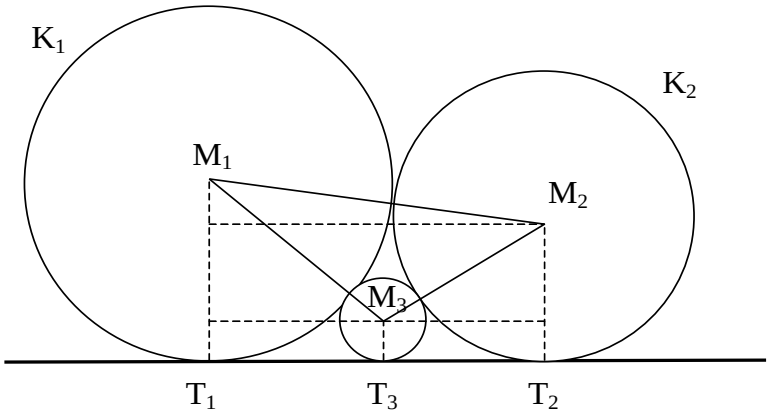
Mit Hilfe der Flächenformeln für das rechtwinklige Dreieck folgt aus $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$ unmittelbar die Behauptung. ❑

(d) Gegeben seien 3 Kreise K_1, K_2 und K_3 mit den Radien $r_3 < r_2 \le r_1$, für die eine Gerade g die Tangente ist. Die Kreise mögen sich wie in der Abbildung zu sehen paarweise berühren. Dann gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}\text{, also eine verwandte Gleichung mit } z=-\frac{1}{2}.$$

Lösungshinweise: Bezeichnen T_1, T_2 und T_3 die Berührungspunkte der Kreise mit der Tangente (s. Skizze), so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\overline{T_2T_1}^2+(r_2-r_1)^2=(r_2+r_1)^2$$
$$\overline{T_2T_3}^2+(r_2-r_3)^2=(r_2+r_3)^2$$
$$\overline{T_1T_3}^2+(r_1-r_3)^2=(r_1+r_3)^2$$



Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen findet man

$$\overline{T_1T_2}=2\cdot\sqrt{r_1r_2}\,,\ \overline{T_1T_3}=2\cdot\sqrt{r_1r_3}\,,\ \overline{T_2T_3}=2\cdot\sqrt{r_2r_3}\,.$$

Folglich gilt wegen $\overline{T_1T_3}+\overline{T_3T_2}=\overline{T_1T_2}$ die Gleichung $\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_3r_2}=\sqrt{r_1r_2}$. Nach Division durch $\sqrt{r_1r_2r_3}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ❑

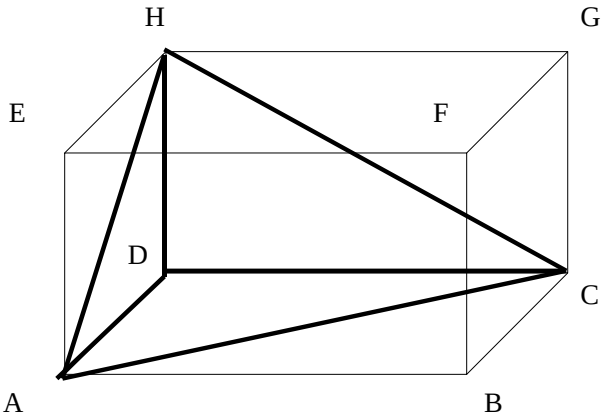
Für z = -1 sei auf den EULERschen Satz (LEONHARD EULER, 1707 bis 1783) verwiesen, der einen Zusammenhang zwischen den Radien des In- (r) und Umkreises (R) und dem Abstand der Mittelpunkte beider Kreise (d) beschreibt:

$d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R.$

Diese Gleichung lässt sich umstellen zu

$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$, also eine verwandte Gleichung mit $z = -1$.

Eine Verallgemeinerung anderer Art bildet die räumliche Version des Satzes von Pythagoras, die zur 41. Mathematik-Olympiade als Aufgabe gestellt wurde:



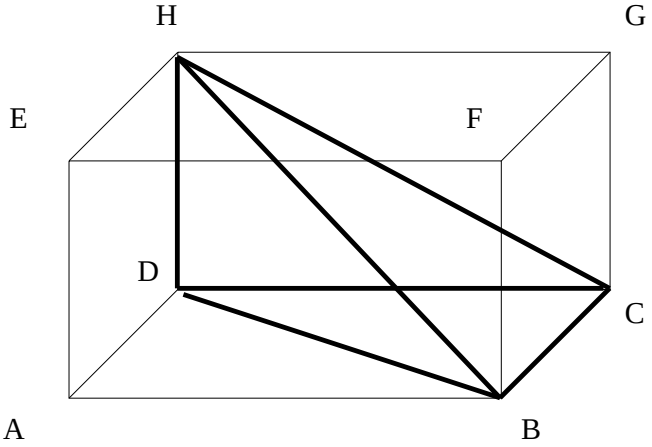
Aufgabe 411041. Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide *ABCD* gilt: Sind die Dreiecke *ABD*, *ACD* und *BCD* sämtlich bei *D* rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC*.

Lösungshinweise: Man betrachte die Quaderecke *ACDH* in nebenstehender Skizze. Insgesamt hat die „abgeschnittene“ Ecke drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen, deren Flächeninhalte sich jeweils als halbe Produkte der zugehörigen Quaderkanten bestimmen lassen. Laut obiger Aufgabe gilt dafür

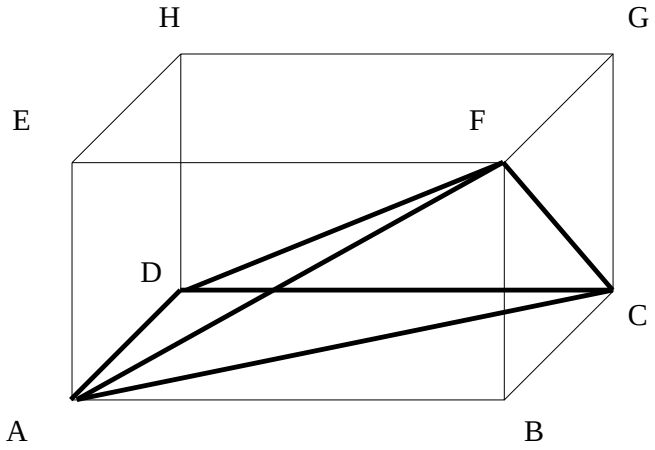
$$F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta ADH}^2 + F_{\Delta CDH}^2 = F_{\Delta ACH}^2 \cdot$$

Der Beweis ist leicht erbracht, wenn man zunächst die Höhe h_{AC} auf *AC* im rechtwinkligen Dreieck *ACD* aus den Quaderseiten *AD* und *CD* bestimmt und anschließend die Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *DH* und h_{AC} ermittelt. Dieser Zusammenhang wurde bereits 1622 vom Mathematiker JOHANNES FAULHABER (1580 bis 1635) publiziert.

Man kann aber weitere Körper mit drei rechten Winkeln herausschneiden:



Es gilt im BUBECK-Tetraeder: $F_{\Delta DBH}^2 - F_{\Delta DCH}^2 = F_{\Delta BCH}^2 - F_{\Delta BCD}^2$. HEINRICH BUBECK berichtete darüber 1992 in der Zeitschrift *Didaktik der Mathematik*.



Im derart schiefen Tetraeder gilt: $F_{\Delta ADF}^2 + F_{\Delta CDF}^2 = F_{\Delta ADC}^2 + F_{\Delta ACF}^2$.

Aufgabe zum Jahreswechsel 2018/19 [9]

Ein großes Quadrat ist in 2019 kleinere Quadrate zerteilt worden, sämtlich mit ganzzahligen Seitenlängen. Welches ist die kleinstmögliche Seitenlänge des großen Quadrates, wenn die kleinen Quadrate mindestens drei verschiedene Größen haben?

Lösungshinweise: Wenn das Quadrat in 2019 kleinere Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen zerlegt wurde, beträgt der Flächeninhalt mindestens 2019. Die nächstgrößere Quadratzahl ist $45^2 = 2025$. Man versuche nun, möglichst viele 1x1-Quadrate und wenige größere Quadrate auszuwählen, sodass deren Flächensumme 2025 beträgt.

Angenommen, man wähle 2017 kleine Quadrate, dann verbleiben 2025 – 2017 = 8 Kästchen. Jedoch lässt sich die Zahl 8 nicht in die Summe zweier Quadratzahlen größer 1 zerlegen. Dafür wären mindestens 4 + 9 = 13 Kästchen erforderlich. Also kann das Quadrat mit der Seitenlänge 45 nicht Lösung der Aufgabe sein.

Für das nächstgrößere Quadrat mit der Seitenlänge 46 und dem Flächeninhalt 2116 findet man Zerlegungen der geforderten Art, beispielsweise

1990 mal 1x1, 27 mal 2x2, 2 mal 3x3;
2005 mal 1x1, 3 mal 2x2, 11 mal 3x3;
2008 mal 1x1, 9 mal 2x2, 2 mal 6x6.

[9] am 30.12.2018 per E-Mail versandt, nach Aufgabe 26 im Känguru-Wettbewerb 2009 in Klassenstufe 11/13.

Es genügt die Angabe eines Beispiels. Systematisch nach geeigneten Beispielen kann man erfolgreich suchen, wenn man im Gleichungssystem

$$a + b \cdot x^2 + c \cdot y^2 = 2116$$
$$a + b + c = 2019$$

also in der Gleichung

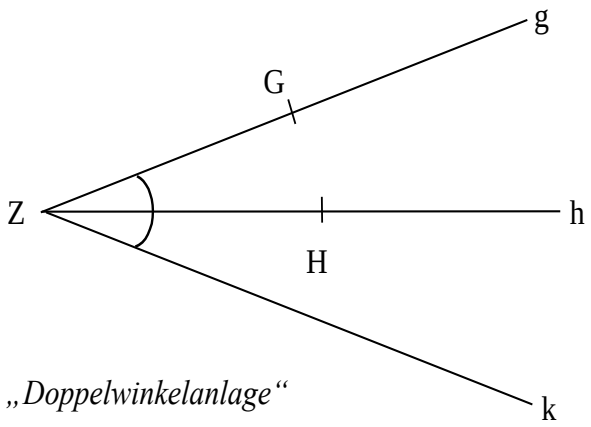
$$b \cdot (x^2 - 1) + c \cdot (y^2 - 1) = 97$$

mit ganzzahligen a, b, c, x und y systematisch probiert. Berücksichtigt man, dass x und y nicht größer als 9 sein können, lassen sich alle Lösungen für das Quadrat mit der Seitenlänge 46 finden. Aber dann kann es ja noch Lösungen mit mehr als drei Größen für die Quadrate geben.

Nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Eine nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbare Aufgabe kann dennoch eine Lösung haben. Unter den 30 nicht derart ausführbaren Konstruktionen ist zum Beispiel die Konstruktion eines Dreiecks aus (a, b, w_a). In der Analyse erkennt man, dass man wohl mindestens die Größe eines Dreieckswinkels kennen müsste. Man kann zeigen, dass die Größen der Innenwinkel aus den gegebenen Bestimmungsstücken über trigonometrische Formel ermittelt werden können. Die Zusammenhänge sind aber so komplex, dass sie nicht mittels Zirkel und Lineal realisiert werden können.

Nun kann man sich aber Hilfsmittel ausdenken, die dennoch eine solche Konstruktionsaufgaben lösen können. Man stelle sich eine „Doppelwinkelanlage“ vor, d.h. ein Konstruktionselement, bei dem von einem Zentrum (Z) drei Strahlen ausgehen (g, h, k). Verändert man den Winkel zwischen g und h, wird (durch eine geeignete Vorrichtung) gleichzeitig der Winkel zwischen h und k verändert, sodass beide Winkel stets gleich groß sind.

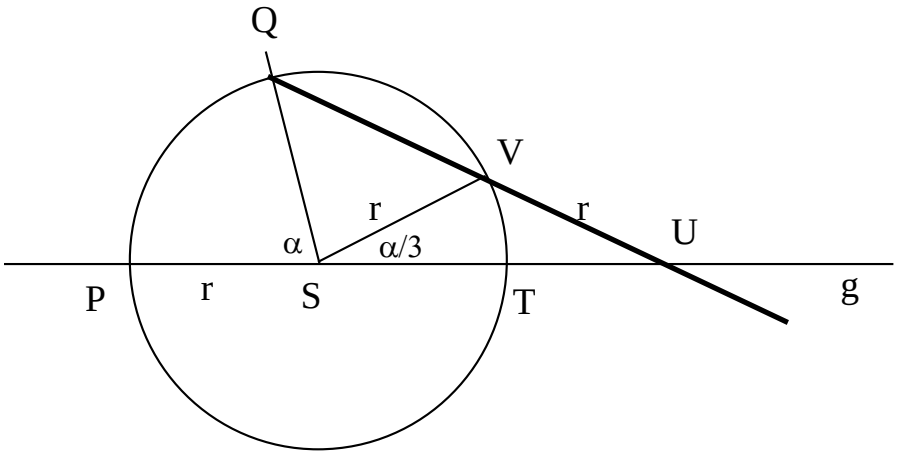


„Doppelwinkelanlage“

Markiert man nun auf g einen Punkt G mit $\left|\overline{GZ}\right| = b$ und auf h einen Punkt H mit $\left|\overline{HZ}\right| = w_a$, so findet man das gesuchte Dreieck in praktikabler Weise: Man zeichne eine Strecke $\overline{BC}$ mit der Länge a, legen den Punkt G auf C und variiert den Winkel zwischen g und h so, dass der Strahl k durch B geht, wobei der Punkt H auf BC liegt.

Bereits ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287 bis 212 v.u.Z.) nutzte zur konstruktiven Winkeldreiteilung ein *Einschiebelineal mit markierter Länge*: Man kann auf dem

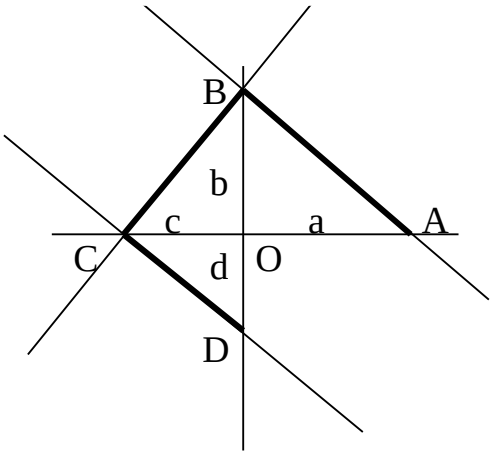
Einschiebelineal eine beliebige Strecke markieren, das Einschiebelineal an einem festen Punkt (beweglich) befestigen und solange verschieben oder drehen, bis sich die markierte Strecke in einer bestimmten Lage befindet. Es sei auf der Geraden g im Punkt *S* ein Winkel der Größe α abgetragen. Schlägt man um *S* einen Kreisbogen mit einem beliebig gewählten Radius *r*, so seien die Schnittpunkte mit *g* als *P* und *T* bezeichnet und der Schnittpunkt mit dem zweiten Winkelschenkel sei *Q*. Auf dem Einschiebelineal markiere man eine Strecke *VU* = *r* und lege es an *Q* an. Nun verschiebe man das Einschiebelineal so, dass *V* auf dem Kreisbogen und *U* auf der Geraden *g* liegt. Verbindet man *V* mit *S*, so schließt *VS* mit *g* einen Winkel der Größe $\alpha/3$ ein.



Die Konstruktion ist praktisch ausführbar. Man überzeugt sich leicht durch Ausprobieren, dass das Einschieben der Strecke *VU* zwischen Kreis und Gerade kein Problem darstellt. Die Konstruktion leistet auch das Geforderte. Mittels Außenwinkelsatz und Berücksichtigung, dass die Dreiecke *QSV* und *SUV* gleichschenklig sind, findet man:

$$\begin{aligned}\angle QSP &= \angle SQV + \angle QUS = \angle QVS + \angle VSU \\ &= 2 \cdot \angle VSU + \angle VSU = 3 \cdot \angle VSU\end{aligned}$$

Also ist die Winkeldreiteilung mit dem Einschiebelineal konstruktiv möglich, aber eben nicht mit Zirkel und Lineal.



Bekannt ist auch das *Rechte-Winkel-Element:* Man stelle sich eine mechanische Vorrichtung vor, bei der die Schenkel *AB* bzw. *DC* der rechten Winkel auf der „Schiene“ *BC* verschoben werden können.

Ist der Achsenabschnitt *a* gegeben und werden die Winkelelemente so verschoben, dass die rechten Winkel bei B und C auf den Achsen liegen und für den Abschnitt $d = 1$ gilt, so findet man folgenden Zusammenhang zwischen den Längen der Achsenabschnitte.

Die Dreiecke *ABO* und *BCO* sind ähnlich, folglich gilt die Verhältnisgleichung $a : b = b : c$. Ebenso ist das Dreieck *CDO* zum Dreieck *BCO* ähnlich mit $c : d = b : c$. Aus der ersten Gleichung folgt $a = \frac{b^2}{c} = \frac{b^3}{c \cdot b}$. Aus der zweiten Gleichung folgt mit $d = 1$ die Beziehung $b = c^2$. Setzt man dies ein, ergibt sich die Beziehung $a = \frac{b^3}{c^3}$. Also kann man mit dem Rechte-Winkel-Element die dritte Wurzel einer Zahl praktisch konstruieren: $\sqrt[3]{a} = \frac{b}{c}$.

Eine Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$

Mit der allgemeinen Ungleichung für geometrisches und arithmetisches Mittel lassen sich Wurzelausdrücke oft durch Summen abschätzen, wenn die Anzahl der Faktoren unter der Wurzel „passend“ ist. Man könnte also folgende Abschätzung anwenden ($n > 1$):

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)-mal} \cdot n} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + n}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Auch wenn das Ergebnis sehr einfach erscheint, so beschreibt es doch das Verhalten von $\sqrt[n]{n}$ für große n nicht angemessen. Während die Abschätzung nahe an 2 liegt und beispielsweise für $n = 100$ den Wert 1,99 ergibt, vermutet man aus Beispielen, dass sich der Wurzelausdruck an 1 annähert:

$$\sqrt[2]{2} \approx 1{,}4142 \quad \sqrt[3]{3} \approx 1{,}4423 \quad \sqrt[4]{4} \approx 1{,}4142 \quad \sqrt[10]{10} \approx 1{,}2589 \quad \sqrt[100]{100} \approx 1{,}0471$$

Diese Vermutung lässt sich bestätigen, wenn die Faktorenzerlegung unter der Wurzel modifiziert wird. Es gilt für $n > 2$:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)-mal} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) \cdot 1 + 2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Mit dieser Darstellung ist $\sqrt[n]{n} \approx 1$ für große n bereits erkennbar. Immerhin findet man für $n = 100$ den Wert 1,18. Noch übersichtlicher wird es für $n > 4$:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-4)-mal} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{(n-4) \cdot 1 + 4 + \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Mit 1,10 ist die Abschätzung für $n = 100$ schon recht praktikabel.

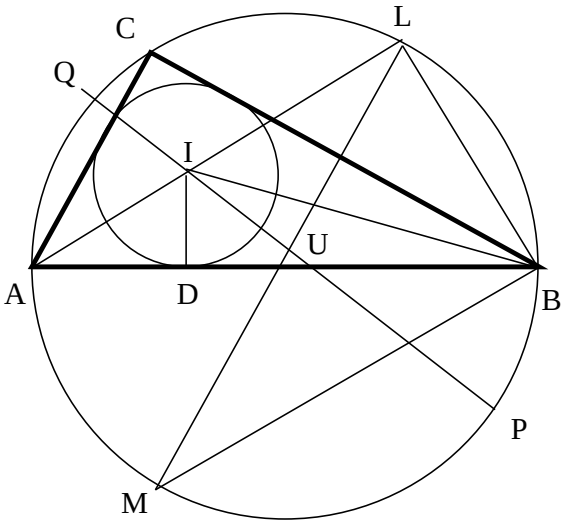
Bekannte Sätze der Mathematik

Südpolsatz. In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende durch die gegen-überliegende Ecke auf dem Umkreis[10].

Beweis: Man betrachte o.B.d.A. die Mittelsenkrechte m_c auf der Seite c und die Winkelhalbierende w_γ für den gegenüberliegenden Winkel ACB. S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_c mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C. Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist über der Sehne AS der Peripheriewinkel $\angle ACS$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle AUS$. Entsprechend ist der Winkel $\angle SCB$ halb so groß wie der Winkel $\angle SUB$. Da die Winkel $\angle AUS$ und $\angle SUB$ aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich groß sein. Folglich liegt die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ auf CS, woraus die Behauptung des Satzes folgt. ❑

Satz von Euler. Sind R der Umkreisradius und r der Inkreisradius eines Dreiecks, so gilt für den Abstand d zwischen den Mittelpunkten von Um- und Inkreis:

$$d^2 = R \cdot (r - 2r).$$



Beweis: Es seien U der Umkreismittelpunkt und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Gerade AI schneidet als Winkelhalbierende nach dem Südpolsatz den Umkreis in einem Punkt L, der auch auf der zugehörigen Mittelsenkrechten der Seite BC liegt. Der zweite Schnittpunkt dieser Mittelsenk-rechten (UL) mit dem Umkreis sei M. Das Dreieck MBL ist rechtwinklig (Umkehrung des Satz von Thales).

Bezeichnet man den Fußpunkt des von I aus gefällten Lotes zu AB mit D, dann gilt $\overline{ID} = r$. Wegen der Übereinstimmung in zwei Winkeln sind die Dreiecke ADI und MBL zueinander ähnlich. Daher gilt:

$$\frac{\left|\overline{ID}\right|}{\left|\overline{LB}\right|} = \frac{\left|\overline{AI}\right|}{\left|\overline{ML}\right|}, \text{ d.h. } \quad \left|\overline{ML}\right| \cdot \left|\overline{ID}\right| = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LB}\right|$$

[10] Der Schnittpunkt wird Südpol genannt.

Damit ist gezeigt: $2Rr = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LB}\right|$. Verbindet man *B* mit *I*, so gilt nach dem Außenwinkelsatz für den Winkel $\angle BIL$ am Dreieck *ABI*:

$$\angle BIL = \tfrac{1}{2} \cdot \angle BAI + \tfrac{1}{2} \cdot \angle IBA$$

Da zudem $\angle ILB = \angle ACB$ (Peripheriewinkel über der Sehne *AB*) und $\angle LBC = \angle LAC$ (Peripheriewinkel über der Sehne *CL*) gilt, findet man

$$\angle BIL = \angle LBI\,.$$

Das Dreieck *IBL* ist also gleichschenklig, d.h. es gilt $\left|\overline{LI}\right| = \left|\overline{LB}\right|$.

Nun seien *P* und *Q* die Schnittpunkte der Geraden *UI* mit dem Umkreis. Anwendung des Sehnensatzes ergibt $\left|\overline{PI}\right| \cdot \left|\overline{QI}\right| = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LI}\right|$. Die Streckenlängen auf der linken Seite lassen sich durch den Umkreisradius *R* und den Abstand *d* zwischen In- und Umkreismittelpunkt ausdrücken. Damit folgt:

$$(R + d) \cdot (R - d) = 2Rr$$

Durch einfaches Umformen erhält man die Gleichung aus der Behauptung. ❑

Aufgaben Serie 5 (2018/19)

Nicht vergessen: Am 4. März 2019 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik. Man findet die Aufgaben unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de und natürlich beim Mathematik-Lehrer.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

(Einsendungen bis 22. März 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [11])

Aufgabe 5-1.
In der Ebene seien 3*n* Punkte gegeben (*n* natürliche Zahl, *n* > 1), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) *n* Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

(5 Punkte)

[11] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 5-2.
Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde*)
Ein 8x8-Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1x2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt. Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2x2-Quadrat bilden.

(6 Punkte)

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde*)
Im Quadrat *ABCD* werden auf der Seite *BC* der Punkt *E* und auf der Seite *CD* der Punkt *F* so gewählt, dass $\angle EAF = 45°$ gilt und weder *E* noch *F* Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden *AE* und *AF* schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt *A* noch in den Punkten *G* bzw. *H*. Beweise, dass die Geraden *EF* und *GH* parallel sind.

(6 Punkte)

* Für die Einsendungen dieser Aufgaben (5.3 und 5.4) können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb verwandt werden. Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden. Bitte beachten: Bereits mit 3 richtig gelösten Aufgaben kann man einen Preis erreichen und Gruppenarbeit ist in Runde 1 ausdrücklich zugelassen!

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben.)

Aufgabe 5-5A.

(a) Man beweise die Ungleichung $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen *n*.

(2 Punkte)

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(2 Punkte)

(c) Man finde eine natürliche Zahle *n*, für die mit üblicher Rundungsregel gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2019 .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5-5B. (Nach einer Anregung des Ingenieurbüros Wuttke[12])
Vor der Entwicklung der elektronischen Distanzmessung wurden Vermessungen häufig im Rechtewinkelverfahren durchgeführt. Dafür wird durch die aufzunehmende Fläche eine Messungslinie (Messachse) gelegt und darauf die aufzumessenden Punkte (z.B. Grenzpunkte) rechtwinklig vermessen. Mit der GPS-basierten Messung können alle Punkte mit ihren Koordinaten (ausreichend) exakt bestimmt werden.

(a) Sind für ein Dreieck *ABC* die Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ bekannt, so gilt für den Flächeninhalt *F* dieses Dreiecks

$$2 \cdot F = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2). \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b) Gegeben sei ein konvexes Viereck *ABCD* mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, ..., 4$. Beweisen Sie die Trapezformel zur Berechnung des Flächeninhaltes *F*

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^{4} (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \text{wobei } x_5 = x_1 \text{ bzw. } y_5 = y_1 \text{ gelte.} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(c) Gegeben sei ein konvexes Polygon $A_1A_2...A_n$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, ..., n$. Beweisen Sie die Gaußsche Flächenformel zur Berechnung des Flächeninhaltes *F*

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \qquad \text{wobei } y_0 = y_n \text{ bzw. } y_{n+1} = y_1 \text{ gelte.} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Seminarankündigung

Das 3. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 23. März 2019 statt. Bitte den Termin schon vormerken. Informationen zum Veranstaltungsort und zum Programm folgen mit Heft 02/2019.

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

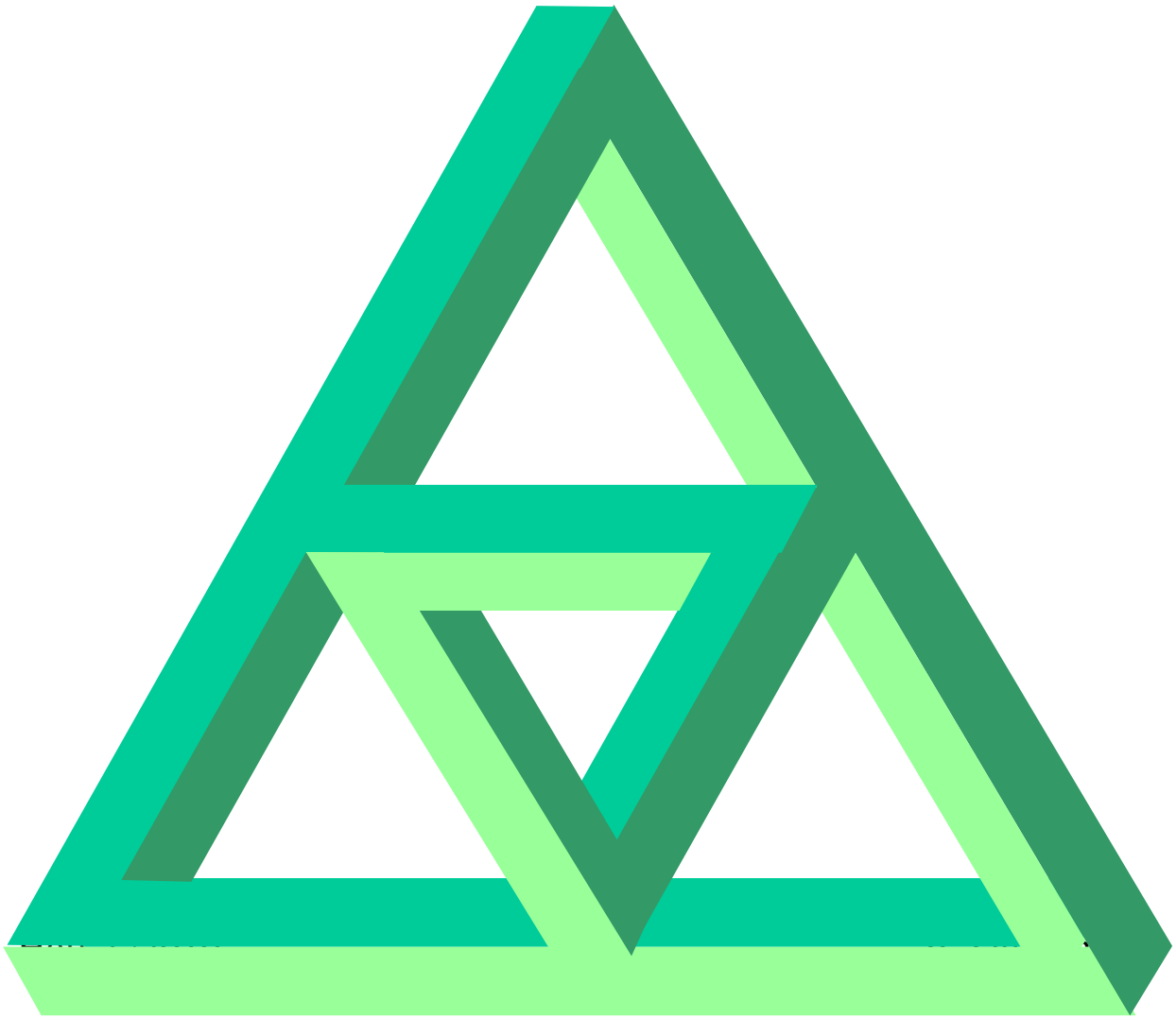
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Gastgeber des Trainingsseminars am 10.12.2018 (www.wuttke-geogroup.de)

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 2 /2019 18. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 4

Aufgabe 4-1[1]. Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Der größtmögliche in Frage kommende einstellige Teiler ist 9. Die Zahl 9 teilt aber tatsächlich jeder der möglichen 180-stelligen Zahlen, da deren Quersumme Q in folgender Weise ermittelt werden kann:

$$Q = (1+0)+(1+1)+...+(9+9) = 10\cdot(1+2+...+9)+9\cdot(0+1+2+...+9)$$
$$= 10\cdot 45 + 9\cdot 45 = 855$$

Diese Quersumme ist durch 9 teilbar. Der gesucht größte gemeinsame einstellige Teiler ist also gleich 9. ❑

Aufgabe 4-2[2]. Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

Lösungshinweise: Angenommen, es sei p eine Primzahl, für die $2p + 1$ eine Kubikzahl ist. Dann gibt es also eine natürliche Zahl z mit $z^3 = 2p+1$. Da $2p + 1$ ungerade ist, ist auch z ungerade, kann also in der Form $z = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n dargestellt werden. Somit gilt

$$2p+1 = (2n+1)^3 = 8n^3+12n^2+6n+1 \quad\rightarrow\quad p = n\cdot(4n^2+6n+3)$$

Da p eine Primzahl ist und der Faktor in der Klammer eine natürliche Zahl größer als 2 ist, muss $n = 1$ gelten.

Für $n = 1$ ist $p = 13$ tatsächlich eine Primzahl und man findet wie gefordert mit $2p+1 = 27$ eine Kubikzahl. Die einzige Primzahl p mit der geforderten Eigenschaft ist daher die Zahl 13. ❑

Hinweis: Dass z ungerade ist, muss nicht am Anfang untersucht werden. Man kann ebenso folgende Gleichungen betrachten.

$$2p+1 = n^3 \quad\rightarrow\quad p = \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(n^2+n+1)$$

Der letzte Klammerausdruck ist stets ungerade und größer als $n - 1$. Folglich kann p nur dann eine Primzahl sein, wenn $\frac{1}{2}\cdot(n-1) = 1$ gilt.

[1] Teil (a) der Aufgabe MO521041
[2] MO-Klassiker MO060931 (1966/67)

Aufgabe 4-3. Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgende Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

Lösungshinweise: Bezeichnet man die Ziffern von links nach rechts mit a_1, a_2, ..., a_8, so sieht man unmittelbar wegen der Teilbarkeit durch 5 oder durch eine gerade Zahl folgende Bedingungen:

(1) $a_5 = 5$; a_2 , a_4 , a_6 , a_8 sind geradzahlig; a_1 , a_3 , a_7 sind ungeradzahlig.

Wegen der Teilbarkeit durch 8 muss die Zahl, bestehend aus den 3 Ziffern $a_6a_7a_8$ durch 8 teilbar sein. Da a_6 geradzahlig ist, muss sogar die zweistellige Zahl a_7a_8 durch 8 teilbar sein. Da keine Ziffer doppelt auftreten darf, findet man nur folgende Möglichkeiten:

(2) 216 - 416 - 432 - 472 - 632 - 672 - 816 - 832 - 872

Weiterhin muss die Zahl a_3a_4 durch 4 teilbar sein. Mit den Bedingungen (1) können das nur die Zahlen

(3) 12 - 16 - 32 - 36 - 72 - 76

sein. In jeder dieser Zahlen kommt entweder die 2 oder die 6 vor. Deshalb kann man in (2) jene 3 unterstrichenen Kombinationen streichen, in denen sowohl die 2 als auch die 6 vorkommen. Es bleiben also noch folgende Möglichkeiten, die Ziffern a_3, a_4 sowie a_6, a_7, a_8 anzuordnen, wobei Zahlendopplungen nicht auftreten dürfen:

Nr.	$a_6\ a_7\ a_8$	$a_3\ a_4$	$a_4+a_5+a_6$	restl. Ziffern		$a_1+ a_2+ a_3$	Bemerkung
1	416	32	11	entfällt			
2	416	72	11	entfällt			
3	432	16	15	7	8	16	entfällt
4	432	76	15	7	8	16	entfällt
5	472	16	15	3	8	12	möglich
6	472	36	15	1	8	12	entfällt
7	816	32	15	4	7	14	entfällt
8	816	72	15	3	4	14	entfällt
9	832	16	19	entfällt			
10	832	76	19	entfällt			
11	872	16	19	entfällt			
12	872	36	19	entfällt			

Da sowohl $a_1a_2a_3$ als auch $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ durch 3 teilbar sind, muss auch die Summe $a_4 + a_5 + a_6$ durch 3 teilbar sein. Dies erfüllen nur die Möglichkeiten Nr. 3 bis Nr. 8 der Tabelle. Ergänzt man die Tabelle mit den verbleibenden 2 Ziffern ($a_5 = 5$ ist ja fest) und berücksichtigt die Teilbarkeit der Zahl $a_4a_5a_6$

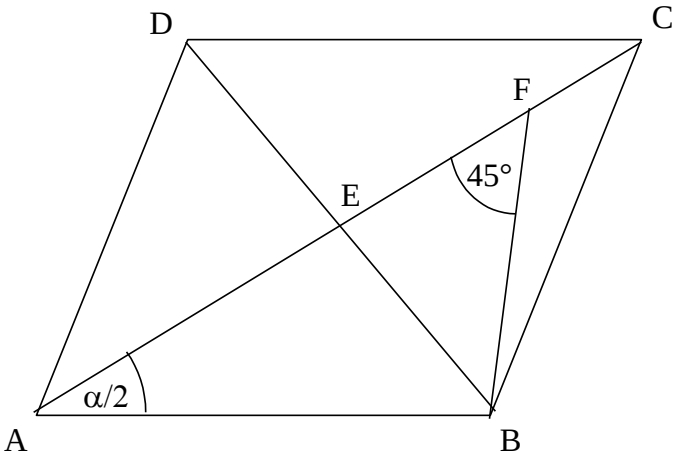
durch 3, so können nur noch die Zahlen 38165472 und 18365472 Lösung der Aufgabe sein. Von der zweiten Zahl sind die ersten 7 Ziffern als Zahl 1836547 nicht durch 7 teilbar. Deshalb entfällt diese Zahl als Lösung.

Eine Probe bestätigt, dass die Zahl 38165472 alle Bedingung erfüllt. ❑

Aufgabe 4-4[3]. Konstruieren Sie einen Rhombus *ABCD* aus $e + f$ und α. Dabei bedeutet *e* die Länge der Diagonalen *AC*, *f* die Länge der Diagonalen *BD* und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.

Lösungshinweise:
Analyse: Im Rhombus gilt für die Diagonalen stets:

- sie halbieren einander,
- sie stehen senkrecht aufeinander und
- sie halbieren je zwei Innenwinkel.



Ist *E* der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus *ABCD*, so gilt also

$$\overline{AE} = \frac{e}{2}; \quad \overline{EB} = \frac{f}{2}; \quad \angle EAB = \frac{\alpha}{2}; \quad \angle AEB = 90°.$$

Das Dreieck *ABE* ist also rechtwinklig und die Summe seiner Kathetenlängen ist gleich $\frac{1}{2}\cdot(e+f)$. Ist *F* der Punkt auf dem von *A* ausgehenden Strahl durch *E* mit $\overline{AF} = \frac{1}{2}\cdot(e+f)$, so ist das Dreieck *BEF* ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse *BF*, da $\left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{EB}\right| = \frac{1}{2}\cdot f$. Daher gilt $\angle EFB = 45°$.

Konstruktion: Man konstruiert ein Dreieck *AFB* aus der Seite *AF* der Länge $\frac{1}{2}\cdot(e+f)$ und den Winkeln $\angle BFA = 45°$ und $\angle FAB = \frac{1}{2}\cdot\alpha\ (<90°)$. Danach konstruiert man die Spiegelpunkte *D* von *B* an der Geraden g_{AF} und *C* von *A* an der Geraden g_{BD}.

Beweis: Jedes derart konstruierte Viereck *ABCD* ist ein Rhombus der verlangten Art, denn wegen der Konstruktion gilt

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AD}\right|, \quad \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| \quad \textit{und} \quad \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right|,$$

[3] MO-Klassiker – MO051033 (1965/66)

also ist *ABCD* ein Rhombus. Es sei weiterhin *E* der Fußpunkt des Lotes von *B* auf g_{AC}. Wegen $\angle BAF < 90°$ liegt *E* auf *AF*. Wegen $\angle BFE = \angle BFA = 45°$ ist auch $\angle EBF = 45°$ und daher $\left|\overline{BE}\right| = \left|\overline{EF}\right|$. Da *E* der Diagonalenschnittpunkt im Rhombus *ABCD* ist und wegen

$$\frac{1}{2}\cdot(e+f) = \left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AE}\right| + \left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{EB}\right|$$

ist $e + f$ die Summe der Diagonalenlängen in *ABCD*. Wegen

$$\angle BAD = \angle BAF + \angle FAD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

ist auch die Bedingung $\angle DAB = \alpha$ erfüllt.

Existenz und Eindeutigkeit: Die Konstruktion ist für jeden positiven Wert von $e + f$ und für jede Winkelgröße $\alpha < 180°$ stets auf genau eine Weise ausführbar. Für $\alpha \geq 180°$ ist die Konstruktion nicht ausführbar. Es gibt dann keinen Rhombus, der allen geforderten Bedingungen genügt. ❑

Aufgabe 4-5A.

(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+.....+\sqrt{2018}}}}$ rational oder irrational ist[4].

(b) Für beliebige natürliche Zahlen *x* und *y* sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

- unendlich viele Paare (*x*; *y*) gibt, so dass *z* rational ist.
- unendlich viele Paare (*x*; *y*) gibt, so dass *z* irrational ist[5].

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen *t* gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen *t* gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen *t* gibt[6].

Lösungshinweise:
(a) Sind *x* eine rationale Zahl und *y* eine irrationale Zahl, so ist die Zahl $z = x + \sqrt{y}$ irrational. Wäre nämlich *z* rational, dann wäre auch $(z-x)^2$ rational im Widerspruch zu $(z-x)^2 = y$. Da nun 2017 rational und $\sqrt{2018} = \sqrt{2\cdot 1009}$ irrational sind, ist deshalb $z_{2017} = 2017 + \sqrt{2018}$ irrational. Setzt man nun

[4] Nach Aufgabe MO291031
[5] Nach Aufgabe MO221042
[6] Nach Aufgabe MO331042

$z_k = k + \sqrt{z_{k+1}}$, so sind alle Zahlen z_k für $k = 1, \ldots, 2017$ irrational und insbesondere auch $x = \sqrt{z_1}$. ❑

Lösungsvariante: Durch fortgesetzte Umformungen der Art

$$x^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{2018}}}$$
$$\left(x^2 - 1\right)^2 - 2 = \sqrt{3 + \sqrt{4 + \ldots + \sqrt{2018}}}$$

gelangt man zu einer Gleichung, auf deren rechten Seite $\sqrt{2018}$ steht. Wäre die Zahl *x* eine rationale Zahl, so wäre der Ausdruck auf der linken Seite ebenfalls rational, da hier nur die Operationen Subtrahieren und Quadrieren angewandt werden – im Widerspruch zur Irrationalität des Wurzelausdrucks auf der rechten Seite.

Hinweis: Es darf nicht umgeformt werden, bis kein Wurzelausdruck mehr enthalten ist. Dann führt die Annahme, *x* sei rational, nicht zum Widerspruch. Die Umformung erfolgt also nur so lange, bis die Irrationalität der rechten Seite leicht gezeigt werden kann.

Ergänzung: Im Aufgabentext fehlte leider ein Wurzelzeichen für die Zahl 2018, $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots.. + 2018}}}$. Unter Anwendung der Gaußschen Summenformel reduziert sich die Aufgabe zu $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2037168}}}$. Da 2037168 ebenfalls keine Quadratzahl ist, kann die obige Argumentation in gleicher Weise angewandt werden.

(b) Es genügt, Paare der geforderten Art anzugeben. Setzt man $x = 9n^2$ und $y = 16n^2$, so gilt für alle natürlichen Zahlen *n* die Beziehung $x + y = 25n^2$. Dann sind alle Zahlen *z* mit

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x + y} = 12n$$

rational.
Setzt man $x = y = n^2$, so gilt $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x + y} = 2n + n\sqrt{2}$. Wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist somit für jede natürliche Zahl *n* ($n > 0$) die Zahl *z* irrational. ❑

Bemerkung: Da in der Aufgabenstellung die Zahl 0 nicht ausdrücklich ausgeschlossen wurde, vereinfacht sich die Argumentation für $x = 0$, indem für y im ersten Teil Quadratzahlen bzw. im zweiten Teil Nichtquadratzahlen einzusetzen sind.

(c) Es genügt auch hier, ein Beispiel anzugeben: $t = \frac{1}{\left(n^2-1\right)^2}$ (n = 2, 3, …).

Es gilt tatsächlich für alle $n > 1$:

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{\left(n^2-1\right)^2} + \frac{1}{\left(n^2-1\right)}} = \sqrt{\frac{1+\left(n^2-1\right)}{\left(n^2-1\right)^2}} = \frac{n}{\left(n^2-1\right)} \text{ ist rational.}$$

❑

Hinweis: Um solche geeigneten Zahlen t zu finden, versuche man den Wurzelausdruck zu analysieren. Man kann vermuten, dass es sicher günstig für die Zielstellung ist, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also $t = \frac{p^2}{q^2}$, weil dann die innere Wurzel rational bleibt.

Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p + q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p = 1$ und $q = n^2 – 1$ erhält man die oben angegebene Zahlenfolge.

Ergänzend sei nun gefragt, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ irrational ist. Auch wenn dies „gefühlsmäßig“ sicherlich positiv zu beantworten ist, wird auch dafür als Beweis die Angabe geeigneter Beispiele erwartet. Betrachtet man die Zahlen $t = \frac{1}{n^4}$ (n = 1, 2, ...), so erkennt man aus

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n > 0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Die Aufgabe hat einen Vorgänger – **Aufgabe MO301043**: Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t+k\cdot\sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Auch hier genügt es, eine Folge von geeigneten Zahlen anzugeben.

$$k = 2^{2m+1} \; ; \; t_i = \left(2^{2m-i} - 2^i\right)^4 \quad i = 0,\ldots,m+1$$

oder

$$k = \left(2^2 - 1\right)\left(3^2 - 1\right)\cdot\ldots\cdot\left((m+1)^2 - 1\right)$$

$$t_1 = 0$$

$$t_i = \frac{k^2}{\left(i^2 - 1\right)^2} \quad i = 2,\ldots,m+1$$

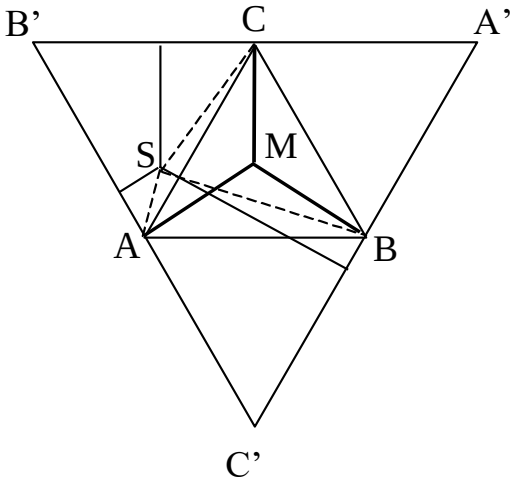
Aufgabe 4-5B. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, sodass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da Fermat[7] die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.

(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt.

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt?

Lösungshinweise:
(a) Der Schnittpunkt *M* der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der FERMAT-Punkt.



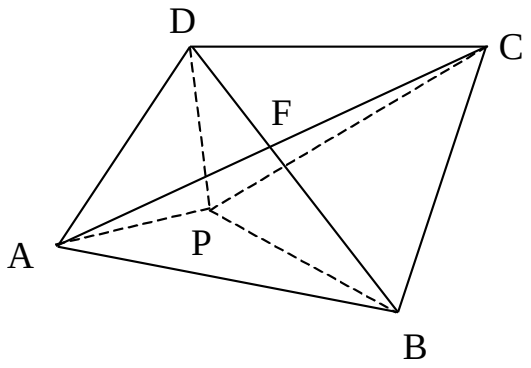
Betrachtet man das gleichseitige Dreieck *A'B'C'*, das aus *ABC* durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist *M* auch der Höhenschnittpunkt von *A'B'C'*.

Im gleichseitigen Dreieck *A'B'C'* ist aber die Summe der Abstände eines inneren Punktes *S* zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant, und zwar gleich der Höhe des Dreiecks *A'B'C'*.

(Für *M* stimmt die gesuchte Summe mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein.) Die Abstände von *S* zu den Eckpunkten *A*, *B* und *C* sind aber jeweils nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten. Liegt dagegen *S* außerhalb des Dreiecks *A'B'C'*, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die doppelte Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von *M* aus.

[7] Pierre de Fermat (französischer Mathematiker; 1601 bis 1665)

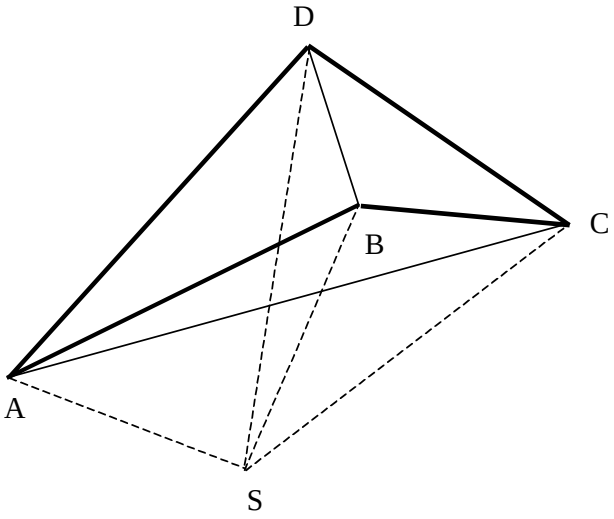
(b) Es sei *F* der Schnittpunkt der Diagonalen und *P* ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken *APC* bzw. *DPB*:



$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{CP}\right| \geq \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FC}\right|$$
$$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PD}\right| \geq \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{FD}\right|$$

Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von *P* zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalenschnittpunktes zu allen Eckpunkten.

(c) Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (in der Skizze *B*) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist dieser Eckpunkt der FERMAT-Punkt. Es sei *S* ein beliebiger, von *B* verschiedener Punkt der Ebene.



Die drei Dreiecke *ASC*, *CSD* und *DAS* überdecken das Dreieck *ACD* und somit das konkave Viereck *ABCD*. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt *B*. Es sei dies das Dreieck *SCD*. Dann liegt der Streckenzug *CBD* vollständig innerhalb des Dreiecks *SCD* und somit gilt:

$$\left|\overline{CS}\right| + \left|\overline{SD}\right| \geq \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BD}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.) Im Dreieck *ABS* gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls *S* zwischen *AB* liegt. Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von *S* zu allen 4 Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von *B* zu den Eckpunkten *A, C* und *D*. Der Punkt *B* ist somit der FERMAT-Punkt des konkaven Vierecks. ❑

Ergänzende Lösungshinweise

Die **Aufgabe MO521041** wurde mit Teil (b) fortgesetzt: Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller diejenigen 178-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunundachtzig zweistelligen Zahlen 11, 12, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Wie aus Teil (a) folgt, beträgt die Quersumme 854 und ist somit nicht durch 3 teilbar. Wir nehmen an, es gibt einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Ein solcher Teiler ist auch Teiler von 99, da er auch Teiler der Differenz der beiden ausgewählten Zahlen ...1211 und ...1112 ist (wobei ... eine beliebige, aber für beide Zahlen gleich Ziffernfolge ist). Somit könnte die Zahl 11 der größte gemeinsame Teiler sein.

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme *A* jeder der betrachteten Zahlen ist gleich

$$A = (1-1)+(1-2)+...+(9-9) =$$
$$= 9\cdot 1 + 10\cdot 2 + ...10\cdot 9 - 9\cdot(1+2+...+9) = 2+3+...+9 = 44$$

Folglich ist der größte gemeinsame Teiler gleich 11.

Die Aufgabe 4-5A1 findet in der **Aufgabe MO521142** eine Fortsetzung:

Die Zahlenfolge (a_n) sei durch $a_n = 1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+.....+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}}$ für alle positiven ganzen Zahlen *n* definiert. Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl *C* gibt, mit der die Ungleichung $a_n < C$ für alle positiven ganzen Zahlen *n* erfüllt ist.

Lösungshinweise: Der gegebene Ausdruck für a_n wird schrittweise unter Ausnutzung der Monotonie der Wurzelfunktion abgeschätzt, beginnend mit der am weitesten innenstehenden Wurzel.

Für jedes k > 0 gilt nämlich: $\sqrt{k+\sqrt{k+1}+1} < \sqrt{k+2\sqrt{k}+1} = \sqrt{k}+1$.

Damit lässt sich a_n schrittweise zu $a_n < 1+\sqrt{2}+1$ vereinfachen. Also ist mit $C = 2+\sqrt{2} < 3{,}42$ eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft gefunden. Die kleinste Schranke liegt bei 3,09....

zu Aufgabe 4-2. Für Aufgaben dieses Typs – insbesondere wenn hierbei Primzahlen verwendet werden – sollte für einen ersten Lösungsansatz immer nach einer geeigneten Faktorisierung gesucht werden. Dies führte auch in anderen MO-Aufgaben zum Erfolg.

Aufgabe MO481032.
(a) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für welche 2^n+1 eine Quadratzahl ist!

Lösungshinweise: Leicht findet man, dass *n* = 3 zu einer Quadratzahl führt. Für die allgemeine Lösung schreibe man die Aufgabe zunächst um, indem eine natürliche Zahl *m* verwendet wird:

$$2^n+1=m^2$$
also $$2^n=m^2-1=(m-1)\cdot(m+1).$$

Da auf der linken Seite dieser Gleichung eine Zweierpotenz steht, müssen auch beide Faktoren der rechten Seite jeweils eine Zweierpotenz sein. Also gibt es Zahlen $a < b$ mit $2^a = m - 1$ und $2^b = m + 1$. Das bedeutet:

$$2^b-2^a=2^a\cdot\left(2^{b-a}-1\right)=2.$$

Diese Gleichung kann aber nur für $a = 1$ erfüllt werden, woraus $m = 3$ folgt. ❑

(b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für welche 2^n+1 eine Kubikzahl oder eine noch höhere Potenz einer ganzen Zahl ist!

(*Hinweis:* Es ist nachzuweisen, dass es keine solche Zahl *n* gibt.)

Aufgabe MO511023. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (*p* ; *z*) aus einer Primzahl *p* und einer positiven ganzen Zahl *z*, für welche die Beziehung $z^2=25p+9$ gilt.

Lösungshinweise: Anhand von Beispielen wird man wohl kaum die Lösungsmenge erschließen können. Naheliegend ist wiederum eine Faktorisierung.

$$25p=z^2-9=(z-3)\cdot(z+3)\ .$$

Der Term 25*p* lässt sich auf sechs verschiedene Arten in zwei Faktoren zerlegen: 25 und *p*, *p* und 25, 25*p* und 1, 1 und 25*p*, 5 und 5*p* sowie 5*p* und 5. Für jeden dieser Fälle soll die Differenz beider Faktoren $(z+3)-(z-3)=6$ betragen. Prüft man dies nach, so ergeben sich die Paare (19 ; 22) und (31 ; 28) als Lösungen.❑

Aufgabe MO501035. Man bestimme alle Paare (p ; q) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Schreibt man den Term als $(p-1)(p+1)-3q$, so wird ersichtlich, dass für $p \neq 3$ dieser Term stets durch 3 teilbar ist (weil p – 1, p und p + 1 drei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind). Wenn der Term also eine Primzahl ist, kann dieser ebenfalls nur 3 sein.

Aus $p^2 - 3q - 1 = 3$ folgt $3q = p^2 - 4 = (p-2)(p+2)$.

Hieraus kann nun gefunden werden, dass $p - 2 = 3$ und $p + 2 = q$ gelten muss (wie?), so dass (5 ; 7) ein Lösungspaar ist. Dies wird durch die Probe bestätigt, denn $5^2 – 21 –1 = 3$.

Nun muss noch der Fall $p = 3$ untersucht werden. Hieraus ergibt sich als eine weitere Lösung das Paar (3 ; 2) mit $3^2 – 6 – 1 = 2$. ❑

Aufgabe MO501044. Bestimmen Sie sämtliche Paare (n ; t) ganzer Zahlen, für die $n^2 = 2^t + 5$ gilt!

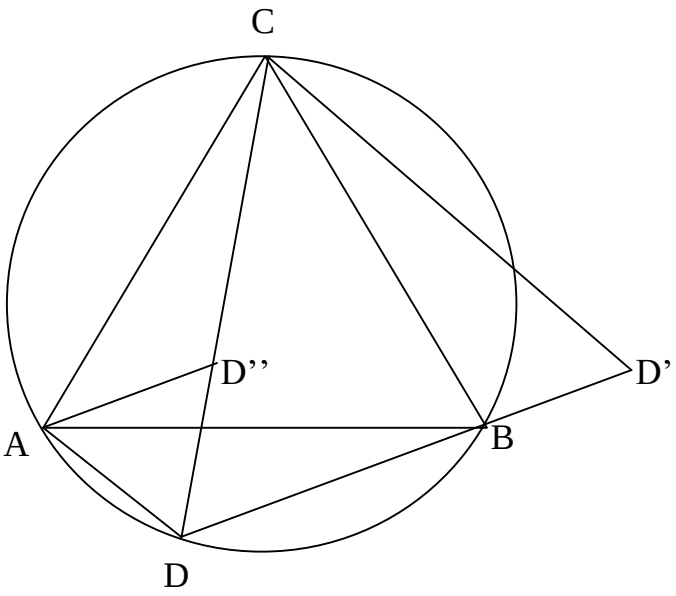
Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren für $t = 0, 1, 2$ findet man das Paar (3 ; 2) als Lösung, denn es gilt $3^2 = 2^2 + 5 = 9$. Weiteres Probieren lässt die Vermutung zu, dass es keine weiteren Lösungspaare gibt, was natürlich zu beweisen ist. Obwohl die Zahl 5 nicht zur Faktorisierung „einlädt“, ist der Lösungsansatz dennoch erfolgreich.

$$2^t + 4 = (n-1)(n+1).$$

Für $t > 2$ ist n offenbar ungerade. Damit sind beide Faktoren der rechten Seite durch 2 und einer sogar durch 4 teilbar. Das Produkt ist also immer durch 8 teilbar. Jedoch ist für $t > 2$ die linke Seite stets durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Aus diesem Widerspruch folgt, dass es keine weiteren Lösungspaare für $t > 2$ geben kann. ❑

Aufgaben über Summen geometrischer Abstände

Aufgabe. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und D ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis dieses Dreiecks, der auf dem Bogenstück zwischen A und B liegt. Dann gilt für die Streckenlängen: $|\overline{AD}| + |\overline{DB}| = |\overline{CD}|$.



Beweisskizze: (*Variante 1*) Satz von **Ptolemäus[8]:** Die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks *ABCD* ist gleich dem Produkt der Diagonalen, also

$$\left|\overline{AD}\right| \cdot \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{DB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{CD}\right| \cdot \left|\overline{AB}\right|.$$

Da aber $CB = AC = AB$ gilt, kann die Gleichung vereinfacht werden und man erhält die Behauptung.

(*Variante 2*, Hilfspunkt *D*') Es werde *DB* über *B* hinaus verlängert und es gelte $\left|\overline{BD'}\right| = \left|\overline{AD}\right|$. Dann ist das Dreieck *CAD* kongruent zum Dreieck *CBD*', da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel $\angle CBD'$ als Nebenwinkel zum Winkel $\angle DBC$ gleich groß zum Winkel $\angle CAD$ als gegenüberliegender Winkel zum Winkel $\angle DBC$ im Sehnenviereck *ADBC* ist. Dann gilt aber auch die Winkelgleichheit $\angle D'CB = \angle DCA$ und somit $\angle D'CD = \angle BCA = 60°$ sowie als Peripheriewinkel über der Sehne *CB* auch $\angle CDB = \angle CAB = 60°$.

Damit ist das Dreieck *DD'C* ebenfalls gleichseitig und es gilt wie behauptet

$$\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{DD'}\right| = \left|\overline{DB}\right| + \left|\overline{BD'}\right| = \left|\overline{DB}\right| + \left|\overline{AD}\right| .$$

(*Variante 3*, Hilfspunkt *D*'') Es sei *D*'' auf der Strecke *CD*, so dass der Winkel $\angle D''AD = 60°$ sei. Da wegen der Peripheriewinkel über der Sehne *AC* auch der Winkel $\angle ADC = 60°$ gilt, ist das Dreieck *ADD''* gleichseitig und es gilt

$$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AD''}\right| = \left|\overline{DD''}\right|.$$

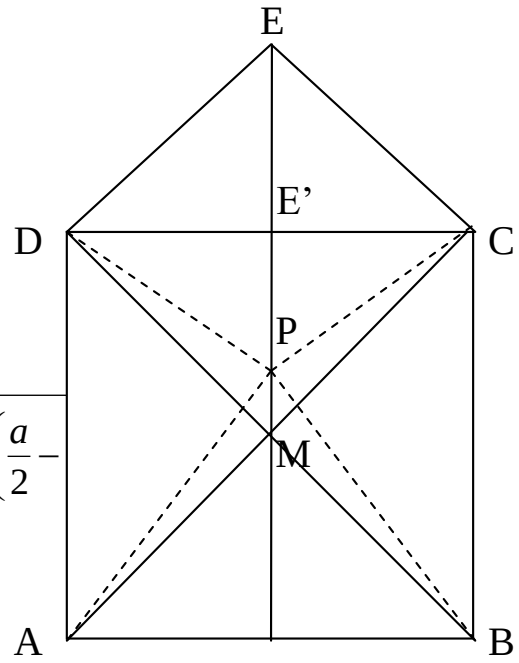
Außerdem sind die Dreiecke *AD''C* und *ADB* kongruent (da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen). Damit gilt aber:

$$\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{DD''}\right| + \left|\overline{D''C}\right| = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{DB}\right|. \qquad \square$$

[8] Klaudius von Alexandra Ptolemäus (griechischer Mathematiker und Astronom; etwa 85 bis 165)

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge *a* und mit einem auf *CD* aufgesetzten Dreieck *CDE*. Man bestimme die Lage des Punktes *P*, für den die Summe der Abstände zu den 5 Eckpunkten dieser Figur minimal wird.

Beweisskizze: Aus Symmetriegründen liegt der Punkt *P* auf der Verbindung des Mittelpunktes *M* des Quadrates *ABCD* und *E*. Sei der Abstand des gesuchten Punkte *P* zum *M* gleich *x*. Es genügt zunächst, die Summe *S*(*x*) der Abstände von *P* zu den Quadratecken und dem Schnittpunkt *E*' von *ME* mit *CD* zu ermitteln. Dafür gilt:



$$S(x) = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} -$$

Man findet ein Minimum für *S*(*x*) bei $x \approx 0{,}3122 \cdot a$. Da der Punkt *P* im Innern des Quadrates liegt, ist *P* auch der FERMAT-Punkt des Fünfecks *ABCDE*. ❑

Aufgabe. Es sei *ABCD* eine gerade dreiseitige Pyramide mit der gleichseitigen Grundfläche *ABC* (Seitenlänge *a*) und der Spitze *D* (Höhe *h*). Man finde den Punkt *F*, so dass die Summe der Abstände von *F* zu den Eckpunkten minimal wird.

Beweisskizze: Wieder aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Punkt *F* auf der Höhe der Pyramide. Es sei sein Abstand zur Grundfläche *x*. Da die Höhe auf dem Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche steht, gilt für die Summe der Abstände *S*(*x*):

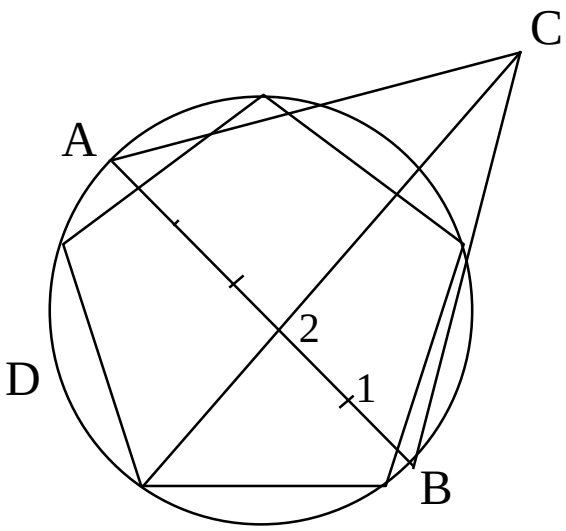
$$S(x) = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + x^2} + (h - x).$$

Man findet das Minimum für *S*(*x*) bei $x = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Damit *F* der FERMAT-Punkt ist, darf *h* nicht kleiner als *x* sein, andernfalls ist *D* der FERMAT-Punkt.

Näherungskonstruktionen für reguläre n-Ecke [9]

Im Jahre 1778 erschien in Göttingen ein Buch von Johann Nikolaus Müller mit dem Titel „Vorbereitung zur Geometrie für Kinder“. Darin beschreibt der Privatlehrer an der Universität Göttingen ein Verfahren, mit dem man näherungsweise einem Kreis regelmäßige *n*-Ecke beliebiger Seitenzahl einbeschreiben kann:

„*Ein reguläres n-Eck in einem Kreis mit dem Durchmesser AB zu beschreiben: Theilet den Durchmesser AB desselben bey den Puncten 1, 2, ..., n-1 in n gleiche Theile. Nehmet den ganzen Durchmesser AB mit dem Zirkel ab und machet aus seinen Endpuncten a und b, aufwärts zween Bogen, die sich im Punct C schneiden. Von den Puncten A und B ziehet nach dem Durchschnittspunct C die geraden Linen AC und BC; so entstehet das gleichseitige Dreyeck ABC. Aus seiner Spitze C und durch den Theilungspunct „2“ ziehet die gerade Linie CD, die dem Kreis in dem Punct D begegnet (D und C liegen auf verschiedenen Seiten von AB). Aus dem Endpunct B ziehet hierauf nach dem Punct D die gerade Linie BD, welche sich sicher in dem Kreiß n-mal herumtragen lässt. Unterlasset ihr nicht sie wirklich n-mal herumzutragen und die Puncte mit geraden Linien zusammenzuziehen, so habt ihr das reguläre n-Eck im Kreiße gezeichnet.“* [10]



Die Skizze erläutert die Konstruktions-beschreibung für das im Kreis einbeschriebene reguläre Fünfeck. Beim Ausprobieren der Methode stellt man fest, dass dieses Verfahren für $n = 3, 4, 6$ das exakte *n*-Eck liefert. Um die Genauigkeit des Verfahrens für andere *n* zu untersuchen, suche man die Abhängigkeit der Seitenlänge $\overline{BD}$ vom Radius $r = \overline{AB}$.

Erstaunlich, dass mit diesem einfachen Verfahren der relative Fehler für $n < 11$ unter 1% bleibt. Für das 17-Eck errechnet sich ein relativer Fehler der konstruierten zur exakten Seitenlänge von weniger als 3%. Man kann zeigen, dass sich für wachsendes *n* der relative Fehler 10% nur geringfügig übersteigt.

[9] Nach Kühl, J.: Eine Näherungskonstruktion für reguläre n-Ecke in einem Geometriebuch für Kinder von 1778. In: MNU 50/5 (1997), S. 277-279.
[10] Zitat leicht geändert

Schritt für Schritt – rekursive Zahlenfolgen

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in der Menge M ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen N in M (auch Startwert $n = 0$ ist möglich). Ist M die Menge der natürlichen, rationalen oder reellen Zahlen, so heißt die Folge Zahlenfolge. Ihre Elemente a_n heißen Glieder der Folge. Besonders interessant sind Zahlenfolgen mit einem Bildungsgesetz.

Sind die Folgenglieder als unmittelbare Funktion f des Index n bestimmt,

$a_n = f(n)$, für alle $n > 0$ (oder $n \geq 0$),

so nennt man das Bildungsgesetz explizit. Beinhaltet die Zuordnungsvorschrift F vorhergehende Folgenglieder,

$a_n = F(n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$ mit Anfangsgliedern $a_1 = A_1, ..., a_k = A_k$ (#)

so nennt man sie rekursiv. Ein explizites Bildungsgesetz kann in trivialer Weise in eine rekursive Schreibweise umgewandelt werden, denn für $a_n = f(n)$ ist auch für alle $n > 1$

$a_n = a_{n-1} + f(n) - f(n-1)$ mit $a_1 = f(1)$

erfüllt.

Beispiel: $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$; $n > 1$

Eine rekursive Darstellung ist aber nicht eindeutig bestimmt. Für das obige Beispiel gilt ebenso:

$$a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}} \text{ ; } n > 1.$$

Umgekehrt ist das explizite Bildungsgesetz aus der rekursiven Zuordnungsvorschrift im Allgemeinen nicht so einfach zu ermitteln.

Aufgabe MO391323. Gegeben sie die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit der rekursiven Bildungsvorschrift

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) \cdot x_n^2 - \frac{n^3}{3} + 1.$$

Bestimmen Sie x_{2015}.

Lösungshinweise: Man berechne zunächst einige Glieder mit Hilfe der Rekursionsvorschrift:

$$n=1 \quad \rightarrow \quad x_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)\cdot 1^2-\frac{1^3}{3}+1=2$$

$$n=2 \quad \rightarrow \quad x_3=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^2-\frac{2^3}{3}+1=3$$

$$n=3 \quad \rightarrow \quad x_4=\left(\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot 3^2-\frac{3^3}{3}+1=4$$

Daraus leitet sich die Vermutung $x_n = n$ ab. Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion ist die Richtigkeit der Vermutung für *n* = 1, 2, 3, 4 bereits bewiesen (*Induktionsanfang*). Man kann also als *Induktionsvoraussetzung* für *n* = *k* die Richtigkeit der Vermutung annehmen. Dann ist die *Induktionsbehauptung* zu zeigen, dass die Vermutung auch für *n* = *k* + 1 richtig ist:

Induktionsbeweis: $x_{k+1}=\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{k}\right)\cdot x_k^2-\frac{k^3}{3}+1=\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{k}\right)\cdot k^2-\frac{k^3}{3}+1=k+1.$

Damit folgt im *Induktionsschluss*, dass die Vermutung für alle natürlichen Zahlen *n* > 0 richtig ist. Insbesondere gilt x_{2015} = 2015. ❑

Wir wollen nun folgende Aufgabe mit Hilfe rekursiver Zahlenfolgen lösen:

Aufgabe. Man ermittle den Wert der Ziffer links vorm Komma für den Ausdruck $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Lösungshinweise: Eine der bekanntesten rekursiven Zahlenfolgen basiert auf der nach FIBONACCI[11] benannten Bildungsvorschrift: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (n = 0, 1, ...) mit den Startwerten $f_0 = 0;\ f_1 = 1$. Nimmt man an, dass sich diese Folge durch eine explizite Bildungsvorschrift $G_n = x^n$ mit geeignet gewählter reellen Zahl *x* beschreiben lässt, so muss entsprechend der rekursiven Bildungsvorschrift gelten: $x^2 = x + 1$. Damit sind aber die Startwerte $G_0 = 0; G_1 = 1$ nicht erfüllbar. Hat man aber zwei Folgen $\{G_n\}$ und $\{H_n\}$, die der rekursiven Bildungsvorschrift folgen, so erfüllt auch jede Linearkombination beider Folgen $\{a \cdot G_n + b \cdot H_n\}$ diese Bildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= a \cdot G_{n+2} + b \cdot H_{n+2} = a \cdot (G_{n+1} + G_n) + b \cdot (H_{n+1} + H_n) = \\ &= (a \cdot G_{n+1} + b \cdot H_{n+1}) + (a \cdot G_n + b \cdot H_n) = J_{n+1} + J_n \end{aligned}$$

[11] LEONARDO DA PISA, auch FIBONACCI genannt (um 1170 – nach 1240), Rechenmeister in Pisa, einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Da $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $x^2 = x + 1$ sind, erfüllt der Ansatz $F_n = a \cdot x_1^n + b \cdot x_2^n$ die rekursive Bildungsvorschrift. Um auch die Anfangsbedingungen zu erfüllen, muss gelten

für $n = 0$: $F_0 = a + b = 0$,

für $n = 1$: $F_1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1.$

Daraus folgt $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ sowie $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit hat man für die Fibonacci-Folge eine explizite Bildungsvorschrift gefunden:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Da der rechte Klammerausdruck kleiner als 1 ist, ist auch jede Potenz dieses Ausdrucks kleiner als 1. Somit wird der Wert der Ziffer links vorm Komma allein durch den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ bestimmt.

Dieser Zusammenhang wird als Lösungsidee für die eingangs gestellte Aufgabe genutzt. Statt $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$ betrachten wir eine Folge $\{a_n\}$ mit der expliziten Bildungsvorschrift

$$a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

Die gesuchte Ziffer stimmt mit der Ziffer links vorm Komma von a_{2017} überein, da der zweite Term kleiner als 1 ist. Das charakteristische Polynom mit den Nullstellen $\left(2+\sqrt{3}\right)$ und $\left(2-\sqrt{3}\right)$ lautet $x^2 - 4x + 1 = 0$. Folglich passt dazu die rekursive Bildungsvorschrift $a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - a_n$ mit $a_0 = 2$ und $a_1 = 4$.

Da beide Anfangswerte ganzzahlig sind, sind alle Folgenglieder ganzzahlig. Die Einerziffer wird also durch den Rest bei Division durch 10 bestimmt. Zur Beantwortung der Fragestellung genügt es deshalb, für alle Folgenglieder die Reste bei Division durch 10 zu ermitteln. Für $n = 0$ und $n = 1$ sind diese Reste mit 2 bzw. 4 schon bekannt. Weiter gilt

$$a_2 = 4 \cdot a_1 - a_0 = 14 \equiv 4 (10),$$

$$a_3 \equiv 4 \cdot a_2 - a_1 \equiv 2(10); \quad a_4 \equiv 4(10); \quad a_5 \equiv 4 \equiv (10);$$
$$a_{3k} \equiv 2(10); \quad a_{3k+1} \equiv 4(10); \quad a_{3k+2} \equiv 4(10)$$

Da 2017 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, lautet die gesuchte Ziffer 4.

Schritt für Schritt – weitere Aufgaben zu rekursiven Zahlenfolgen

Aufgabe MO411334. Finde alle Zahlen a_1, a_2, a_3, zu denen eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$a_1 + a_3 = 10$$
$$a_6 + a_8 = 100$$
$$a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} + a_k - 2k^2 + 4 \quad (\textit{für alle } k \geq 1)$$

Lösungshinweise: Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die ersten drei Folgenglieder mit *x, y* und *z*. Offenbar muss man die Folgenglieder bis a_8 ermitteln. Diese erhält man mit Hilfe der Rekursionsgleichung nacheinander:

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad a_4 = z + y + x - 2 \cdot 1^2 + 4 = x + y + z + 2$$
$$k = 2 \quad \rightarrow \quad a_5 = (x + y + z + 2) + z + y - 2 \cdot 2^2 + 4 = x + 2y + 2z - 2$$
$$k = 3 \quad \rightarrow \quad a_6 = (x + 2y + 2z - 2) + (x + y + z + 2) + z - 2 \cdot 3^2 + 4 = 2x + 3y + 4z - 14$$
$$k = 4 \quad \rightarrow \quad a_7 = 4x + 6y + 7z - 42$$
$$k = 5 \quad \rightarrow \quad a_8 = 7x + 11y + 13z - 88.$$

Also findet man

$$a_6 + a_8 = 9x + 14y + 17z - 102 = 9 \cdot (x + z) + 14y + 8z - 102 = 100$$
$$14y + 8z = 112 \quad .$$
$$z = 14 - y - \frac{y}{6}$$

Damit *z* eine natürliche Zahl ($z > 0$) ist, muss *y* durch 6 teilbar und kleiner als 14 sein:
Für $y = 12$ erhält man $z = 0$ (entfällt).
Für $y = 6$ erhält man mit $z = 7$ und $x = 10 - z = 3$ die einzige Lösung. ❑

Aufgabe. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$a_0 = 0\,; \quad a_1 = 1\,; \quad a_2 = 1$$
$$a_{n+2} + a_{n-1} = 2 \cdot (a_{n+1} + a_n) \quad (\textit{für alle } k > 0)$$

Zeige, dass für alle *k* jedes Folgenglied a_k eine Quadratzahl ist.

Lösungshinweise: Wieder berechne man zunächst einige Folgenglieder:

$$n = 1 \;\rightarrow\; a_3 = 2 \cdot (a_2 + a_1) - a_0 = 2 \cdot (1+1) - 0 = 4 = 2^2$$
$$n = 2 \;\rightarrow\; a_4 = 2 \cdot (a_3 + a_2) - a_0 = 2 \cdot (4+1) - 1 = 9 = 3^2$$
$$n = 3 \;\rightarrow\; a_5 = 2 \cdot (9+4) - 1 = 25 = 5^2$$
$$n = 4 \;\rightarrow\; a_6 = 2 \cdot (25+9) - 4 = 64 = 8^2$$

Nun lässt sich bereits die Vermutung ableiten (und ggf. durch weitere Beispiele bekräftigen), dass die Zahlenfolge durch die Quadrate der Glieder einer Fibonacci-Folge gebildet wird ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$). Gilt also $a_n = F_n^2$ für alle $n \geq 0$?

Setzt man die Rekursionsvorschrift der Fibonacci-Folge in die linke Seite der Gleichung

$$F_{n+2}^2 = 2 \cdot \left(F_{n+1}^2 + F_n^2\right) - F_{n-1}^2$$

ein, so erhält man durch äquivalente Umformung

$$\left(F_{n+1} + F_n\right)^2 = F_{n+1}^2 + 2 \cdot F_{n+1}F_n + F_n^2 = 2 \cdot F_{n+1}^2 + 2 \cdot F_n^2 - F_{n-1}^2$$
$$2 \cdot F_{n+1}F_n = F_{n+1}^2 + F_n^2 - F_{n-1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 + F_n^2 - F_{n-1}^2 = 2 \cdot \left(F_n^2 + F_n F_{n-1}\right)$$

also $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. ❑

In folgenden Aufgaben werden beschränkte Folgen betrachtet, also Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, für die eine Zahl *C* mit $|a_n| < C$ für alle $n \geq 1$ existiert.

Aufgabe. Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge ganzzahliger Zahlen mit

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a_n & \textit{falls } a_n \textit{ geradzahlig} \\ a_n^2 - 5 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Für welche Startwerte a_0 ist die Folge beschränkt?

Lösungshinweise: Ist a_n eine ungerade Zahl, so lässt $a_n^2 - 5$ bei Division durch 8 den Rest 4.

$$\left(2a'_n+1\right)^2 - 5 = 4a'^2_n + 4a'_n - 4 = 4 \cdot a'_n \cdot \left(a'_n + 1\right) - 4$$

Der erste Summand ist durch 8 teilbar, sodass der Rest 4 bleibt. Außerdem lässt sich folgender Zusammenhang erkennen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(2a'_n+1\right)^2 - 5 = 4 \cdot \left(a'^2_n + a'_n\right) - 4 \\ a_{n+2} &= 2 \cdot \left(a'^2_n + a'_n\right) - 2 \\ a_{n+3} &= a'^2_n + a'_n - 1 = 2a'_n + 1 + \left(a'^2_n - a'_n - 2\right) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, wenn der Term in der Klammer positiv ist, so ist a_{n+3} wieder ungeradzahlig und es gilt $a_{n+3} > a_n$, d.h. die Folge wächst.

Ist $k \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$, so gilt leicht nachprüfbar $\frac{k^2 - 5}{4} \le k$. Für alle anderen ungeraden Zahl gilt dies nicht. Folglich ist die Folge beschränkt für alle a_0 der Form $2^m \cdot k$ mit einer natürlichen Zahl m und einer Zahl k wie angegeben. ❑

Aufgabe. Für jede natürliche Zahl m bezeichne $K(m)$ die größte Kubikzahl, die nicht größer als m ist. Weiter sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge ganzzahliger Zahlen mit

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot K(a_n).$$

Für welche Startwerte a_0 ist die Folge beschränkt?

Lösungshinweise: Wegen $K(m) \le m$ gilt $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot K(a_n) \ge a_n$, wobei die Gleichheit erfüllt ist, wenn a_n eine Kubikzahl ist. Daraus leitet sich die Vermutung ab: Ist a_0 eine Kubikzahl, so ist die Folge beschränkt.

Für den Beweis benutze man das Extremalprinzip: Man nehme an, es gibt einen Index N, für den a_{N+1} eine Kubikzahl ist (d.h. es existiert eine natürliche Zahl k mit $a_{N+1} = k^3$), aber a_N keine Kubikzahl ist. Also gibt es eine Zahl m mit

$$m^3 < a_N < (m+1)^3,\ K(a_N) = m$$

Eingesetzt in die Rekursionsvorschrift führt dies zu:

$$a_{N+1} = 3 \cdot a_N - 2 \cdot K(a_N) = 3 \cdot a_N - 2 \cdot m^3 > m^3$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} a_{N+1} &= 3 \cdot a_N - 2 \cdot m^3 < 3 \cdot (m+1)^3 - 2 \cdot m^3 \\ &= 3 \cdot \left(m^3 + 3m^2 + 3m + 1\right) - 2 \cdot m^3 \\ &= m^3 + 9m^2 + 9m + 3 < m^3 + 9m^2 + 27m + 27 = (m+3)^3 \end{aligned}$$

Folglich lässt sich a_{N+1} durch $m^3 < a_{N+1} < (m+3)^3$ abschätzen.

Fall 1: $a_{N+1} = (m+1)^3$

$$(m+1)^3 = 3 \cdot a_N - 2m^3 \quad \rightarrow \quad 3m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 3 \cdot a_N$$

Diese Gleichung kann aber nicht erfüllt werden, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht.

Fall 2: $a_{N+1} = (m+2)^3$

$$(m+2)^3 = 3 \cdot a_N - 2m^3 \quad \rightarrow \quad 3m^3 + 3 \cdot 2m^2 + 3 \cdot 4m + 8 = 3 \cdot a_N$$

Auch diese Gleichung kann nicht erfüllt werden, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht.

Zusammengefasst bedeutet dies: Ist kein Folgenglied eine Kubikzahl, dann wächst die Folge unbeschränkt. Gibt es jedoch ein Folgenglied, das eine Kubikzahl ist, dann ist bereits a_0 eine Kubikzahl. ❑

Aufgaben Serie 6 (2018/19)

Einsendungen bis 14. Mai 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [12].

Aufgabe 6-1.
Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen *n* mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von *n* durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen *a* und *b* entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von *a* und *b* gleich *n*.

(5 Punkte)

[12] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Aufgabe 6-2.
Jede konvexe Viereckfläche wird durch ihre Diagonalen in vier Dreiecksflächen zerlegt. Man beweise, dass ein konvexes Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei beliebige der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-3.
Es sei *ABCD* ein Rechteck, und es sei *P* ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. *P* habe vom Eckpunkt *A* den Abstand *a*, vom Punkt *B* den Abstand *b* und von *C* den Abstand *c*.

Man berechne den Abstand *d* des Punktes *P* vom Eckpunkt *D* und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes *d* die Kenntnis der drei Abstände *a, b, c* ausreicht.

(6 Punkte)

Aufgabe 6-4.
Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten *a, b, c* sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

(6 Punkte)

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 6-5A.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(2 Punkte)

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(2 Punkte)

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges *n*-Eck ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6-5B.
Ein *n*-Tupel von natürlichen Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i > 0, i = 1, \ldots, n, n \geq 3$ heißt *Pythagoreisches Zahlen-n-Tupel* (kurz *P-n-Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(2 Punkte)

(b) Man untersuche, ob ein *P*-102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen a_{101} und a_{102} existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ die ersten 100 natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 100 sind!

(2 Punkte)

(c) Gegeben sei ein *P-n*-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ mit ungeradzahligem a_n ($1 < k < n$) Man gebe ein *P*-(n+1)-Tupel an, das ebenfalls mit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beginnt?

(4 Punkte)

Seminarhinweis

Das 4. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 22. Juni 2019 statt – zu Gast in der Chemnitzer Filiale der Deutschen Bank (Falkeplatz 2, 09112 Chemnitz). Bitte Termin bereits vormerken.

Impressum

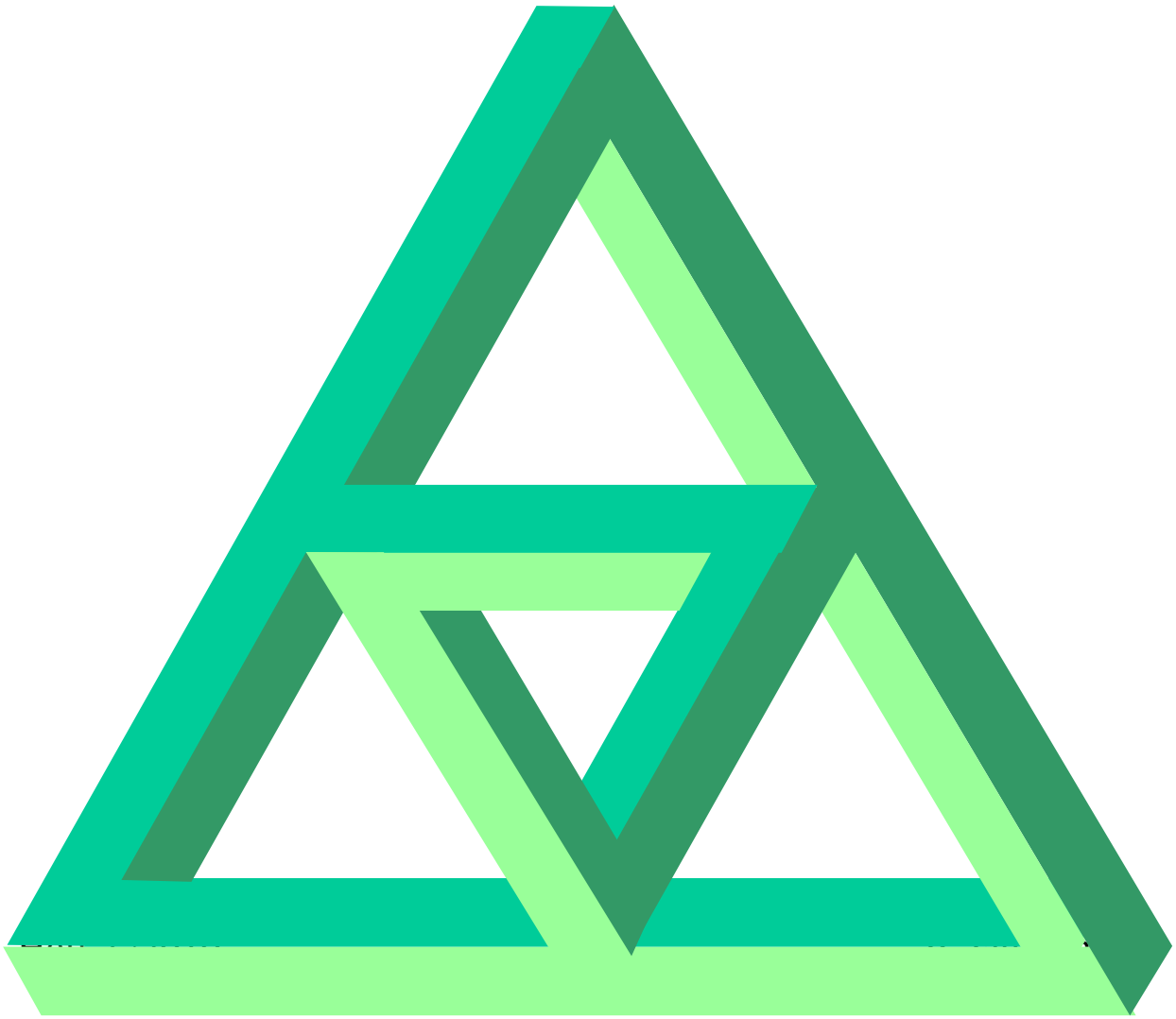
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 3/2019 18. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 5

Aufgabe 5-1. In der Ebene seien 3*n* Punkte gegeben (*n* natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) *n* Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

Lösungshinweise: Da es für 3*n* Punkte nur endlich viele Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten gibt, gibt es eine Gerade *g*, die zu keiner dieser Strecken parallel ist. Da zudem die Punktmenge endlich ist, kann man die Gerade *g* derart verschieben, dass sich alle Punkte auf einer Seite von *g* befinden. Ausgehend von einer solchen Lage verschiebe man die Gerade in Richtung der Punkte. Dabei liegt in jeder Lage maximal 1 Punkt auf der Gerade. Man kann folglich die Punkte in eindeutiger Weise von 1 bis 3*n* nummerieren. Jeweils die Punkte $3k-2$, $3k-1$ und $3k$ ($k = 1, ..., n$) lassen sich zu einem Dreieck verbinden, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. ❑

Aufgabe 5-2. Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 .$$

Lösungshinweise: Da alle Primzahlen mindestens gleich 2 sind, gilt

$$p_1 \geq \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20} > 4.$$

Insbesondere ist p_1 verschieden von 3 und somit lässt p_1^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Daraus folgt, dass mindestens eine der Primzahlen $p_2, ..., p_6$ gleich 3 ist (es sei dies $p_6 = 3$), denn andernfalls würde die Summe der Quadrate der fünf Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Jedoch ist es nicht möglich, dass genau vier der fünf Primzahlen gleich 3 sind ($p_3 = ... = p_6 = 3$), denn die daraus resultierende Gleichung

$$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 4 \cdot 3^2 = 36$$

hat keine Lösung in Primzahlen, wie eine Analyse über die Faktorenzerlegung von 36 zeigt.

Nach Aufgabe 3-5A(a) ist die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlichen Zahlen stets durch 8 teilbar. Somit ist die Summe

$$p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = p_1^2 - p_6^2$$

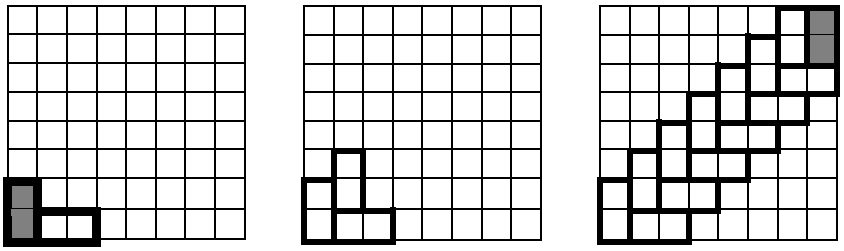
durch 8 teilbar. Da aber das Quadrat jeder Primzahl größer als 2 bei Division durch 8 den Rest 1 lässt, muss $p_2 = ... = p_5 = 2$ gelten.

Eine Probe zeigt, dass das Tupel {5; 2; 2; 2; 2; 3) tatsächlich Lösung der Aufgabe ist und wie die Herleitung zeigt, keine weiteren Lösungen (bis auf Permutationen von p_2, ..., p_6) existieren können:

$$5^2 = 25 = 4 + 4 + 4 + 4 + 9 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$$ ❑

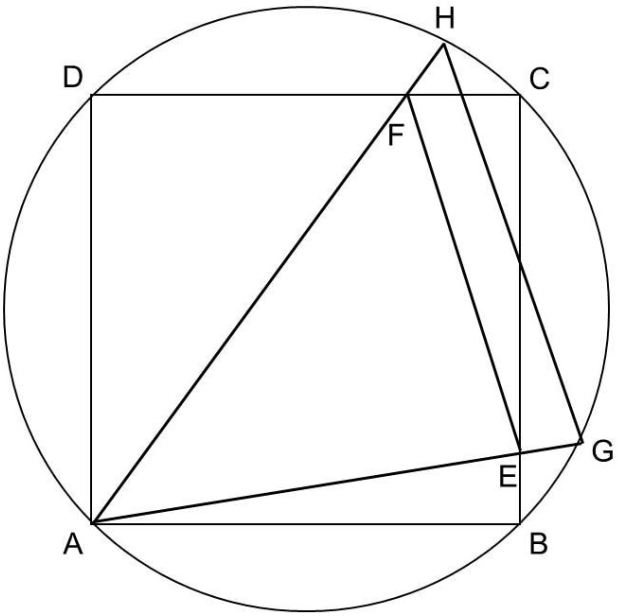
Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde)
Ein 8x8-Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1x2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt. Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2x2-Quadrat bilden.

Lösungshinweise: Man zeige anhand einer konkreten Bedeckungsvorschrift, dass zur Vermeidung eines solchen 2x2-Quadrates die Bedeckung eindeutig erfolgen muss und letztlich doch zu einem 2x2-Quadrat führt. Dazu lege man beispielsweise einen Dominostein vertikal in die untere linke Ecke. (Bei horizontaler Lage ist diese Situation durch Spiegelung an der Diagonalen erreichbar.) Um im nächsten Schritt kein 2x2-Quadrat zu erzeugen, muss der nächste Dominostein horizontal rechts daneben angelegt werden (s. Abbildung, links).



Um ein 2x2-Quadrat im nächsten Schritt zu vermeiden, ist die Lage des dritten Dominosteins bereits festgelegt (s. Abbildung, Mitte). Schrittweise muss die Bedeckung so fortgesetzt werden, bis die obere rechte Ecke erreicht wird. Hier besteht jedoch nur noch eine Möglichkeit, einen Dominostein anzulegen und ein 2x2-Quadrat ist nicht vermeidbar (s. Abbildung, rechts). Damit ist gezeigt: Wenn nicht bereits an anderer Stelle ein 2x2-Quadrat erzeugt wurde, entsteht ein solches in der oberen rechten Ecke. ❑

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde)
Im Quadrat *ABCD* werden auf der Seite *BC* der Punkt *E* und auf der Seite *CD* der Punkt *F* so gewählt, dass $\angle EAF = 45°$ gilt und weder *E* noch *F* Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden *AE* und *AF* schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt *A* noch in den Punkten *G* bzw. *H*. Beweise, dass die Geraden *EF* und *GH* parallel sind.



Lösungshinweise: Nach Voraussetzung gilt $\angle BAC = \angle GAH = 45°$. Damit gilt auch $\angle BAG = \angle CAH = \angle CAF$. Außerdem gilt auch nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne *AB* die Gleichheit $\angle AGB = \angle ACB$. Damit haben die Dreiecke *ABG* und *AFC* gleiche Innenwinkel, sind also ähnlich und es gilt:

$$\frac{|\overline{AF}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AG}|}.$$

Nach analoger Argumentation sind auch die Dreiecke *ADH* und *AEC* ähnlich, also gilt $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AC}|}$.

Multiplikation der linken Seiten und der rechten Seiten führt mit $|\overline{AD}| = |\overline{AB}|$ zu

$$\frac{|\overline{AF}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AG}|}.$$

Mit Umkehrung des Strahlensatzes an den Strahlen *AE* und *AF* folgt *EF* || *GH*. ❑

Aufgabe 5-5A

(a) Man beweise die Ungleichung $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen *n*.

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(c) Man finde natürliche Zahlen *n*, für die näherungsweise gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2019$.

Lösungshinweise:
(a) Nach der Ungleichung des geometrischen und arithmetrischen Mittels gilt für alle $n > 0$: $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k} \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k$.

Die Summe in der rechten Seite ist nach der Gaußschen Summenformel $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, folglich gilt: $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k} \le \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. Durch Potenzieren findet man die gesuchte Ungleichung. ❑

(b) Es gilt für $n > 1$ nach Anwendung der geometrischen-arithmetischen Mittelungleichung für $\sqrt{k \cdot 1} \le \frac{k+1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2n + n \cdot (n+1)}{4} = \frac{n \cdot (n+3)}{4}$$

❑

(c) Jeden Summanden der Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ kann man wie folgt umformen:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2 \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right), \text{ also}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}\right)$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2 \cdot \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right), \text{ also}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = 2\sqrt{n} - \sqrt{0} = 2\sqrt{n}\,.$$

Somit gilt:

$$2 \cdot \left(\sqrt{n+1} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}\,.$$

Also lassen sich folgende Grenzen für *n* feststellen:

$n > 1018585$ wegen $2\sqrt{n} \le 2018{,}5$ für $n \le 1018585$

und $n < 1021615$ wegen $2\sqrt{n+1} - 2 \ge 2019{,}5$ für $n \ge 1021615$. ❑

Aufgabe 5-5B.

(a) Sind für ein Dreieck *ABC* die Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ bekannt, so gilt für den Flächeninhalt *F* dieses Dreiecks

$$2 \cdot F = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2).$$

(b) Gegeben sei ein konvexes Viereck *ABCD* mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, ..., 4$. Beweisen Sie die Trapezformel zur Berechnung des Flächeninhaltes *F*

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^{4} (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \text{wobei } x_5 = x_1 \text{ bzw. } y_5 = y_1 \text{ gelte.}$$

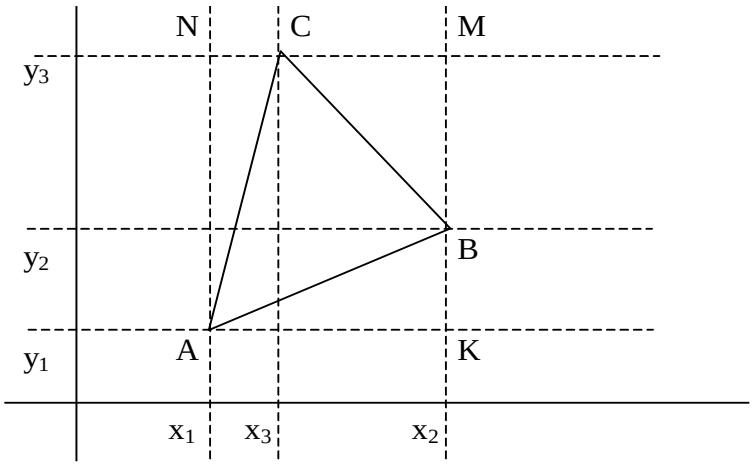
(c) Gegeben sei ein konvexes Polygon $A_1A_2...A_n$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, ..., n$. Beweisen Sie die Gaußsche Flächenformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_{i+1} - y_{i-1} \right), \text{ wobei } y_0 = y_n \text{ bzw. } y_{n+1} = y_1 \text{ gelte.}$$

Lösungshinweise:
(a) In der Literatur findet man für die Flächenberechnung eines Dreiecks mittels ihrer Koordinaten $(x_i ; y_i)$, $i = 1, 2, 3$, die Determinantengleichung

$$2 \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)$$

Man beweist es vorteilhaft über Flächenberechnung mit Polarkoordinaten. Demonstrativ lässt sich der Beweis auch elementargeometrisch führen:



Man berechnet die Rechteckfläche *AKMN* und subtrahiert davon die Dreiecksflächen *AKB*, *CMB* und *CNA* (um den Faktor ½ zu vermeiden, berechnet man die doppelte Fläche):

$$\begin{aligned} 2 \cdot A &= 2 \cdot \left((x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) \right) - (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) - \\ &\quad - (x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_2) - (x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) \\ &= 2x_2y_3 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 + 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 - x_2y_3 \\ &\quad + x_2y_3 + x_3y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_1 + x_1y_3 - x_1y_1 \end{aligned}$$

Viele Terme heben sich auf, so dass man zusammengefasst folgende Gleichung findet:

$$2 \cdot A = x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 =$$
$$= x_3 \cdot (y_1 - y_2) + x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_1 - y_3)$$
oder $$= y_1 \cdot (x_2 - x_3) + y_2 \cdot (x_3 - x_1) + y_3 \cdot (x_1 - x_2)$$

(Eine vollständige Fallunterscheidung der Lage der Punkte wird hier nicht verlangt.) ❑

(b) Zerlegt man das Viereck *ABCD* in die zwei Dreiecke *ABC* und *ACD*, so gilt nach (a):

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)$$
$$2 \cdot A_{\Delta ACD} = x_1 \cdot (y_3 - y_4) + x_3 \cdot (y_4 - y_1) + x_4 \cdot (y_1 - y_3)$$

Summation beider Seiten führt zu

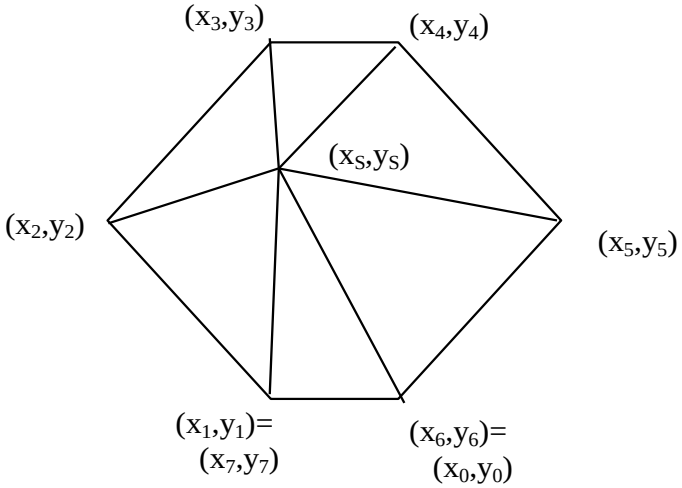
$$2 \cdot A_{ABCD} = x_1 \cdot (y_2 - y_4) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_4 - y_2) + x_4 \cdot (y_1 - y_3)$$

Andererseits gilt

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^{4} (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i)$$
$$= (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_3) + (x_4 + x_1)(y_1 - y_4)$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ist erkennbar, dass beide Formeln übereinstimmen. ❑

(c) Hat man ein beliebiges konvexes Vieleck, dann kann man darin einen inneren Punkt wählen, so dass sich das Vieleck in innere Dreiecke zerlegen lässt (s. Skizze, die Punkte „7“ und „0“ werden nur für die Summation definiert),



Dann gilt nach Gleichung in (a) für ein Dreieck für die Gesamtfläche:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot A &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot (y_{i+1} - y_S) + x_{i+1} \cdot (y_S - y_i) + x_S \cdot (y_i - y_{i+1}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i \right) + y_S \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i+1} - x_i \right) + x_S \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{i+1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot \left(y_{i+1} - y_{i-1} \right) + x_i \cdot y_{i-1} - x_{i+1} \cdot y_i \right) + 0 + 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(y_{i+1} - y_{i-1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} \cdot y_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(y_{i+1} - y_{i-1} \right) + 0
\end{aligned}
$$

Die zwei Nullen in der 3. Zeile ergeben sich, weil in der Summe die Differenz der *x*- bzw. *y*-Werte „reihum“ addiert werden. Die Null in der letzten Zeile entsteht, weil sich beide Summen nur in der Nummerierung unterscheiden, was „reihum“ zum gleichen Ergebnis führt. Die 3. Zeile hätte man auch fortsetzen können zu:

$$
\ldots = \sum_{i=1}^{n} \left(- y_i \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) - y_i \cdot x_{i-1} + y_{i+1} \cdot x_i \right),
$$

sodass die Flächenformel mit Vertauschung von *x* und *y* in Analogie entsteht. ❑

Ergänzende Lösungsdiskussionen[1]

Zu Aufgabe 3-5A(a): Bei Untersuchungen auf Teilbarkeit bilden Faktorisierungen einen erfolgversprechenden Lösungsansatz. Sind zwei ungerade Zahlen gegeben, also $2x + 1$ und $2y + 1$ mit $x > y$, so lässt sich die Differenz ihrer Quadrate nach binomischer Formel wie folgt darstellen:

$$
\begin{aligned}
(2x+1)^2 - (2y+1)^2 &= (2x+1+2y+1) \cdot (2x+1-2y-1) \\
&= 2 \cdot (x+y+1) \cdot 2 \cdot (x-y) \\
&= 4 \cdot (x+y+1) \cdot (x+y-2y)
\end{aligned}
$$

Der zweite Faktor enthält den Nachfolger des um eine gerade Zahl verschobenen dritten Faktors. Also ist genau einer dieser Faktoren durch 2 teilbar.

[1] Aus dem Seminarprogramm vom 23.03.19

In ähnlicher Weise kann man folgende Aussage beweisen: Ist die Summe von drei Quadraten von natürlichen Zahlen durch 5 teilbar, so ist mindestens eine dieser Zahlen durch 5 teilbar.

Lösungsidee: Das Quadrat einer nicht durch 5 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 5 den Rest –1 oder +1. Wären alle drei Zahlen nicht durch 5 teilbar, so lassen sich die drei Reste ihrer Quadrate nicht so konfigurieren, dass deren Summe 0 ergibt.

Aufgabe MO481032(b). Man zeige, dass keine natürliche Zahl n gibt, sodass $2^n + 1$ eine Kubikzahl oder eine höhere Potenz einer ganzen Zahl ist.

Lösungshinweise: Man nehme an, es gäbe eine ganze Zahl m mit $2^n + 1 = m^k$ ($k \geq 3$). Wäre k eine gerade Zahl, also $k = 2 \cdot k'$, so reduziert sich die Aufgabe auf die Suche nach einer Quadratzahl auf der rechten Seite: $2^n + 1 = (m^{k'})^2$. Es wurde bereits gezeigt (s. Heft 2/2019, S. 11), dass dann $m^{k'} = 3$ gelten muss. Dies ist nicht für ganze Zahlen erfüllbar.

Also ist k eine ungerade Zahl. Dann gilt aber

$$2^n = m^k - 1 = (m-1) \cdot \left(m^{k-1} + m^{k-2} + ... + m + 1\right).$$

Da aber der rechte Klammerausdruck eine ungerade Anzahl von Summanden darstellt, von denen einer gleich 1 ist, ist der Ausdruck ebenfalls ungerade, aber größer als 1. Das ist aber ein Widerspruch, da links vom Gleichheitszeichen eine Zweierpotenz steht.

Aufgabe MO471034(a). Zeigen Sie, dass es keine positive ganze Zahl n gibt, sodass $2^n + 1$ durch 7 teilbar ist.

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren findet man für alle n = 1, 2, 3, 4, ... nacheinander die Reste 3, 5, 2, 3, ... bei Division durch 7. Darauf aufbauend lässt sich im Sinne der Methode der vollständigen Induktion argumentieren, dass keine dieser Zahlen durch 7 teilbar sein kann. Es geht aber auch auf direktem Weg:

Für $n = 0$, $n = 1$ oder $n = 2$ ist der Nachweis durch Ausrechnen leicht erbracht. Es sei nun $n = 3 \cdot m + a$ mit $a < 3$. Dann gilt:

$$2^n + 1 = 2^{3 \cdot m + a} + 1 = 8^m \cdot 2^a + 1$$

Mit dem Binomischen Lehrsatz folgt, dass $8^m = (7 + 1)^m$ bei Division durch 7 den Rest 1 lässt. Damit stimmen die Reste von $2^n + 1$ und $2^a + 1$ überein und die Behauptung ist bewiesen.

Zu Aufgabe 3-5B: In der originalen Aufgabenstellung des Bundeswettbewerbs Mathematik (1975, 2. Runde) wurde der Beweis verlangt, dass die Aussage S_n für alle $n > 2$ falsch ist. Man kann dies durch Angabe geeigneter Zahlentupel nachweisen.

n	$x_1, x_2, ..., x_n$	arithm. Mittel a_n	geom. Mittel g_n	a_n / g_n
4	81, 1, 1, 1	21	3	7
3	27, 8, 1	12	6	2
5	27, 24, 6, 2, 1	12	6	2
7	36, 18, 18, 6, 4, 1, 1	12	6	2

In jedem der angegebenen Fälle ist der Quotient S_n eine natürliche Zahl, obwohl die zugehörigen reellen Zahlen nicht alle gleich sind. Also ist S_n jeweils eine falsche Aussage.

Nun kann man jede natürliche Zahl $m > 5$ in der Form $i + 3n$ mit $i = 3, 5, 7$ mit passendem n darstellen (warum?). Wählt man nun die für S_i benutzten Zahlen und ergänzt diese durch n-mal die für S_3 genommenen Zahlen, so ist deren arithmetisches Mittel stets 12 und deren geometrisches Mittel stets 6 (Nachweis?), also ist S_m für jedes $m > 2$ falsch.

Die Aussage S_n lässt sich für geradzahlige n in einfacher Weise allgemein beweisen. Man setze nur (in Anlehnung an das in der Tabelle angegebene Beispiel für $n = 4$)

$$x_1 = (n-1)^n,\ x_2 = x_3 = ... = x_n = 1.$$

Dann gilt

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{(n-1)\cdot 1 + (n-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{(n-1)^n}} = \frac{1 + (n-1)^{n-1}}{n}.$$

Beim Ausmultiplizieren der binomischen Formel entstehen Summanden mit dem Faktor n und der Summand $(-1)^{n-1} = -1$. Also ist der Zähler im letzten Bruch ohne Rest durch n teilbar und damit der Quotient eine ganze Zahl.

Weiter kann man – etwas aufwendiger als eben – Primzahlen n und danach zusammengesetzte Zahlen untersuchen, um die Behauptung allgemein zu beweisen.

Man betrachte zu **Aufgabe 5-5A** ähnliche Fragestellungen, wie zum Beispiel

Aufgabe. Man beweise für alle natürlichen Zahlen $n\,(n \geq 2)$ die Ungleichung

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

Lösungshinweise:
Variante 1: Für jede natürliche Zahl $k\,(k \geq 2)$ gilt

$$1+\sqrt{\frac{k-1}{k}}>1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

Setzt man diese Beziehung für jeden Summanden in der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung ein, folgt unmittelbar deren Richtigkeit.

Variante 2: Für alle $k\,(0<k\leq n)$ gilt $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $k=n$ richtig ist. Also findet man für $n \geq 2$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$ ❑

Aufgabe. Man beweise die folgende Ungleichung für natürliche Zahlen $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \frac{n}{2}\cdot\sqrt{2(n+1)}$$

Lösungshinweise: So wie der junge CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) bei der Berechnung der Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen, fasse man je zwei Summanden der Summe zusammen:

$$\begin{aligned} 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} &= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \\ &\quad + \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \ldots + \sqrt{1} \\ &= \left(\sqrt{1}+\sqrt{n}\right) + \left(\sqrt{2}+\sqrt{n-1}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n}+\sqrt{1}\right) \end{aligned}$$

Nun ist also nur noch zu zeigen, dass für jeden dieser in Klammern zusammengefassten Terme gilt

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ (*a* und *b* natürliche Zahlen mit $a+b=n+1$) ❑

Analog kann man ähnliche Formel herleiten, wie z.B. $\sum_{j=1}^{n} k^{j} \leq \frac{n}{2}\cdot(n+1)^{j}$.

Die Aufgabe 5-5A(c) hat ihren Ursprung in der

Aufgabe MO371045. Man beweise folgende Ungleichung:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} = \sum_{k=1}^{1.000.000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1999 .$$

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2002}{2003} < (0{,}2003)^2$$

Lösungshinweise: Man bezeichne das Produkt auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung mit *x* und betrachte ein weiteres Produkt dieser Art, nämlich

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2003}{2004}$$

Da für alle von Null verschiedenen Zahlen *n* wegen $4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1$

$$\frac{2n-2}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n}$$

gilt, ist $x < y$. Damit erhält man auch $x^2 < x \cdot y$. Nun ist aber *y* gerade so gewählt, dass $x \cdot y = \frac{2}{2004}$ ist. Also findet man die Abschätzung:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2004}} = \frac{1}{\sqrt{1002}} < \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} < 0{,}04 = 0{,}2^2 < 0{,}2003^2 . \qquad \square$$

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{54} .$$

Lösungshinweise: Man könnte wie oben ein geeignetes Produkt definieren und in Analogie eine Abschätzung suchen. Setzt man wieder das abzuschätzende Produkt mit *x* und bilde man $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2010}{2011}$, so folgt mit ähnlicher Argumentation wie oben

$$x < \sqrt{\frac{1}{2011}} < \frac{1}{\sqrt{1936}} = \frac{1}{44}$$

Dies genügt aber nicht, da $\frac{1}{54} < \frac{1}{44}$ gilt. Man findet aber für alle $k \geq 2$

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}.$$

Daraus kann man für jedes *k* die Ungleichung $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k-1}}$ ableiten, also speziell für k = 1005:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2010} < \frac{1}{\sqrt{3016}} < \frac{1}{\sqrt{2916}} = \frac{1}{54}$$

Bei der **Aufgabe MO541035**

> Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen *x*, für welche die Gleichung $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}=2$ erfüllt ist.

wurde ausdrücklich hingewiesen, dass zunächst zu untersuchen sei, für welche reellen Zahlen die angegebenen Wurzeln definiert sind. Damit die Terme unter den Wurzeln nichtnegativ sind, muss offenbar $x \geq 2$ gelten. Dies ist wesentlich, um nach einmaligem Quadrieren aus der Gleichung

$$-x+1 = 4\cdot\sqrt{2x-4}$$

zu erkennen, dass es keine Lösung geben kann, weil die linke Seite negativ, die rechte Seite aber stets positiv ist. Also ist die Lösungsmenge leer.

Nochmaliges Quadrieren führt zwar weiter zu der „vernüftigen“ quadratischen Gleichung $x^2-34x+65=0$ mit den Nullstellen $x_{1,2}=17\pm4\sqrt{14}$, aber eine Probe zeigt, dass sie keine Lösung sind (obwohl beide Zahlen größer als 2 sind)! Allerdings ist die Probe wesentlich aufwendiger als die Diskussion über den Definitionsbereich.

Davor wurde in der 29. MO letztmalig eine Wurzel-Ungleichung gestellt:

Aufgabe MO291034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen *x*, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1.$$

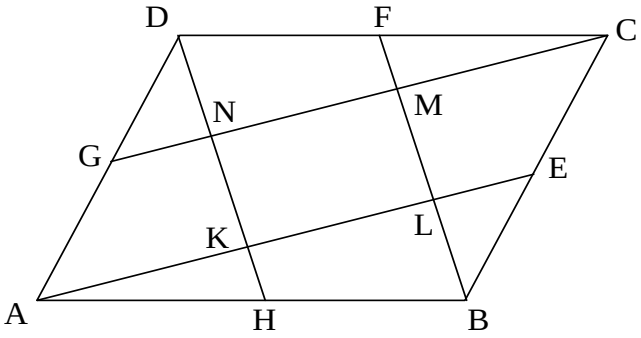
Lösungshinweise: Die Lösungsmenge lässt sich zunächst durch Diskussion des Definitionsbereiches eingrenzen. Die Zahl *x* muss größer als -5 sein (damit der Wurzelausdruck definiert und positiv ist). Die Zahl *x* kann nicht –1 sein (weil sonst der Nenner gleich 0 wäre). Außerdem muss *x* größer als –1 sein (damit der

Bruch positiv ist). So vorbereitet kann die Ungleichung äquivalent umgeformt werden und man erhält $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{17}{4}$. Daraus folgt letztlich die gesuchte Lösungsmenge für *x*: $-1 < x < \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)$.

Flächenberechnung durch Flächenzerlegung

Flächeninhalte – insbesondere wenn nur Verhältnisse von Flächen gefragt sind – kann man häufig ohne direkte Berechnung der zu vergleichenden Flächeninhalte bestimmen.

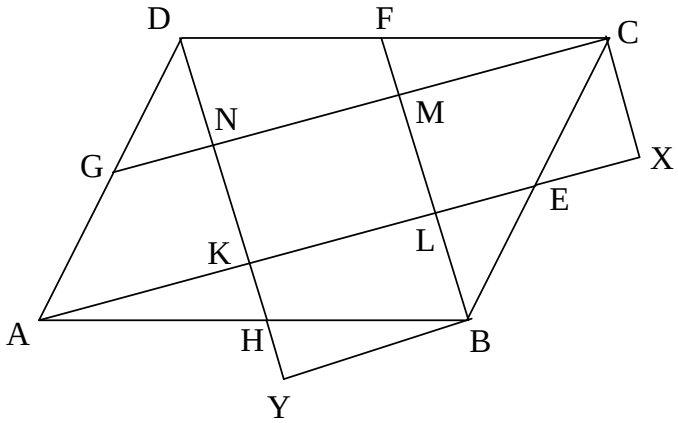
MO431024[2]. Gegeben sei ein Parallelogramm *ABCD*. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit *E*, *F*, *G* bzw. *H* bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck *KLMN* aus.



(a) Zeigen Sie, dass *KLMN* ein Parallelogramm ist.

(b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms *KLMN* zu dem des Parallelogramms *ABCD*.

Lösungshinweise: Fertigt man eine Skizze an, erkennt man die prinzipielle Möglichkeit, alle notwendigen Maße in Abhängigkeit der Seitenlängen des Parallelogramms *ABCD* ermitteln zu können.



Durch Vergleich von Teilflächen kann aber der Beweis fast ohne Berechnungen erfolgen. Aufgrund der Konstruktionsvorschrift zeigt man nämlich leicht, dass die Dreiecke *BEL* und *EXC* sowie *AKH* und *HYB* kongruent sind und die entstandenen Vierecke *LXCM* bzw. *KYBL* jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm *KLMN* sind.

[2] Vergleiche Heft 02/2018

Ergänzt man in analoger Weise die Figur über *DF* und *AG* wird unmittelbar ersichtlich, dass sich die Gesamtfläche des Parallelogramms *ABCD* aus 5 Parallelogrammen der Größe *KLMN* zusammensetzt. ❑

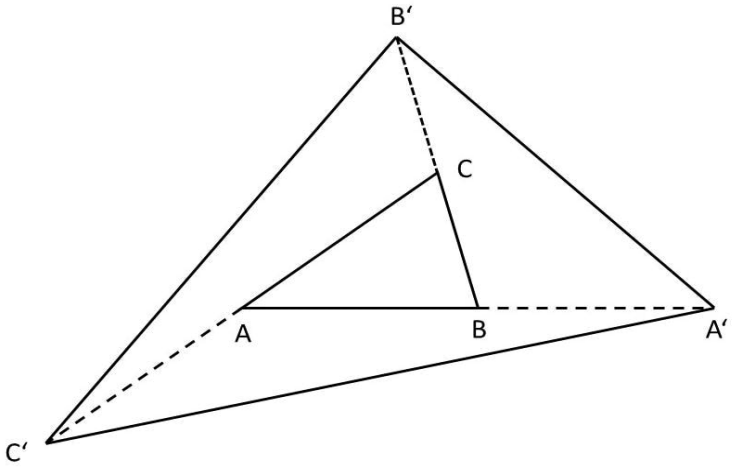
Aufgabe MO530835. Über ein spitzwinkliges Dreieck *ABC* und Punkte *A′*, *B′* und *C′* wird vorausgesetzt:

(1) Der Punkt *C′* ist der Bildpunkt von Punkt *C* bei Spiegelung am Punkt *A*.
(2) Der Punkt *A′* ist der Bildpunkt von Punkt *A* bei Spiegelung am Punkt *B*.
(3) Der Punkt *B′* ist der Bildpunkt von Punkt *B* bei Spiegelung am Punkt *C*.

Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks *A′B′C′* zum Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

Lösungshinweise: Wir berechnen die Flächeninhalte der Teildreiecke *AC'A'*, *BA'B'* und *CB'C'* in Abhängigkeit vom Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

Für das Dreieck *AC'A'* sei *D* der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt *C* auf die Gerade *AB*. Da nach Voraussetzung das Dreieck *ABC* spitzwinklig ist, liegt der Punkt *D* im Innern der Strecke $\overline{AB}$. Der Punkt *D'* sei der Bildpunkt von *D* bei Spiegelung am Punkt *A*.



Dann ist $\overline{CD}$ eine Höhe im Dreieck *ABC*. Für den Inhalt *F* des Dreiecks *ABC* folgt nach der Flächeninhaltsformel $F = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$.

Da Winkelgrößen und Streckenlängen bei einer Punktspiegelung erhalten bleiben, ist $\overline{C'D'}$ eine Höhe im Dreieck *AC'A'* und es gilt $|C'D'| = |CD|$.

Aus Voraussetzung (2) und da Streckenlängen bei einer Punktspiegelung erhalten bleiben, folgt $|AB| = |BA'|$, also

$$|AA'| = 2 \cdot |AB|.$$

Für den Flächeninhalt *F'* des Dreiecks *AC'A'* folgt nach der Flächeninhaltsformel

$$F = \frac{1}{2} \cdot |AA'| \cdot |C'D'|.$$

Zusammenfassend folgt $F' = 2 \cdot F$.

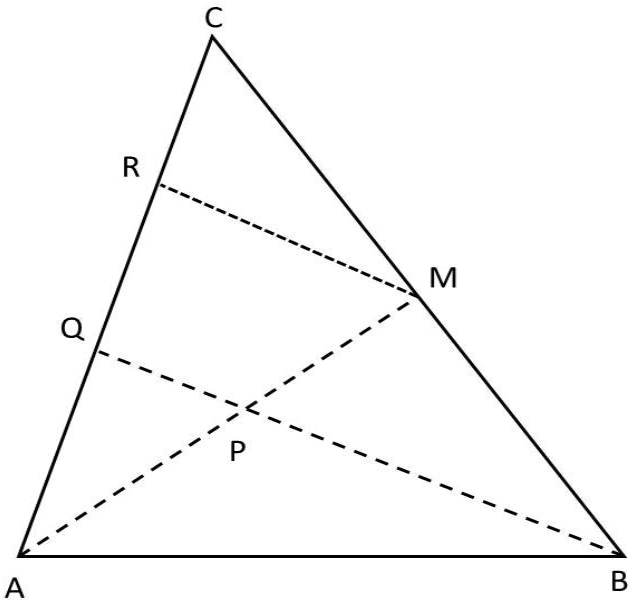
Analog folgt, dass die Dreiecke *BA'B'* und *CB'C'* ebenfalls einen doppelt so großen Flächeninhalt besitzen wie das Dreieck *ABC*.

Da sich das Dreieck *A'B'C'* aus den Dreiecken *ABC, AC'A', BA'B'* und *CB'C'* zusammensetzt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks *A'B'C'* daher stets das (1 + 2 + 2 + 2 =) 7-fache des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC*.

Folglich ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks *A'B'C'* zum Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* stets 7 : 1. ❑

Aufgabe MO570935. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei *M* der Mittelpunkt von *BC* und *P* der Mittelpunkt von *AM*. Weiter schneide die Gerade *BP* die Seite *AC* in einem Punkt *Q*.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks *MCQP*.



Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Vierecks ist die Differenz aus dem Flächeninhalt des Dreiecks A_{AMC} und dem Dreieck A_{APG}. Da der Flächeninhalt des Dreiecks *AMC* die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks *ABC* ist, genügt es, den Flächeninhalt des Dreiecks *APG* zu bestimmen.

Ist *R* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$, dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck *QBC* und folglich *MR* || *BQ*. Da *P* auf der Strecke *BQ* liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck *AMR*, also gilt $|AQ|=|QR|=|RC|$.

Damit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks *ABQ* ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks *ABC*, da die Längen der Grundseiten $\overline{AQ}$ und $\overline{AC}$ zur selben Höhe im Verhältnis 1 : 3 stehen. Da *P* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist zudem der Flächeninhalt des Dreiecks *ABP* halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks *ABM*. Da *M* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ is, ist auch der Flächeninhalt des Dreiecks *ABM* halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*. Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks *APQ*:

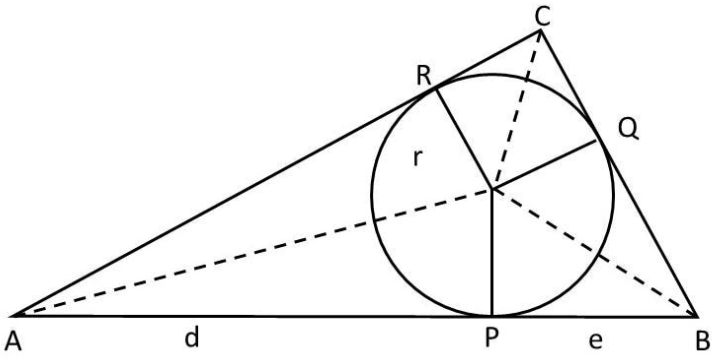
$$A(APQ) = A(ABQ) - A(ABP) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Wir erhalten deshalb für den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks *MCQP*:

$$A(MCQP) = A(AMC) - A(APQ) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$ ❑

Aufgabe MO391044. In einem rechtwinkligen Dreieck *ABC* sei *P* der Berührungspunkt des Innkreises mit der Hypotenuse *AB*. Die Längen der Strecken *AP* und *BP* seien *d* und *e*.

Beweisen Sie, dass dann für den Flächeninhalt *F* des Dreiecks $F = d \cdot e$ gilt.



Lösungshinweise: Bezeichnen wir die Fußpunkte der Lote vom Innkreismittelpunkt auf die Seiten BC und CA mit Q bzw. R, so lässt sich die Dreiecksfläche mittels

$$2 \cdot F = (r + e) \cdot (r + d) =$$
$$= r^2 + r \cdot e + r \cdot d + e \cdot d$$

berechnen. Andererseits ist die Dreiecksfläche gleich der Summe der Inhalte der drei Vierecke RMQC, APMR und PBQM, also

$$F = r^2 + r \cdot e + r \cdot d.$$

Die Subtraktion beider Gleichungen führt zur Behauptung $F = d \cdot e$. ❑

Sind wir alle miteinander verwandt?[3]

Jeder Mensch hat zwei Eltern, vier Großeltern, acht Urgroßeltern usw. Gehen wir *g* Generationen zurück, so beträgt die Zahl der Vorfahren eines Menschen 2^g. Vor zehn Generationen hätten wir demnach mehr als 1000 Vorfahren, vor 20 Generationen mehr als eine Million, vor 40 Generationen über eine Billion. Da stimmt wohl etwas nicht, denn es haben niemals eine Billion Menschen auf der Erde zur gleichen Zeit gelebt. Die Zahl der so errechneten Vorfahren verringert sich, wenn beispielsweise Cousine und Cousin ein gemeinsames Kind hätten. Dieses Kind hätte nur sechs Urgroßeltern und nicht acht. Um auf realistische

[3] Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 23.03.19

Zahlen unserer Vorfahren zu kommen, müssen diese also mehr oder weniger miteinander verwandt gewesen sein.

Folgendes Gedankenexperiment hilft, Regeln zu erkennen: In einer Gruppe zusammenlebender Menschen bestehe jede Generation aus 200 Personen, und zwar aus 100 Frauen und 100 Männern. In der Sprache der Biologie: Wir betrachten eine Population konstanter Größe. Die Population lebe seit vielen Generationen isoliert und habe ihre Größe nicht verändert.

Wählen wir nun eine Person der jüngsten Generation aus, z.B. einen Jungen namens Paul. Fritz gehöre der Generation vor Paul an. Kennt man die Verwandtschaftsbeziehung von Fritz und Paul nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz der Vater von Paul ist, $1/100$. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz nicht der Vater von Paul ist, gleich $99/100$. Gehen wir nun noch eine Generation zurück und betrachten Heinrich. Mit der Wahrscheinlichkeit von $99/100$ ist Heinrich nicht der Vater von Pauls Mutter, ebenso ist er mit Wahrscheinlichkeit von $99/100$ nicht der Vater von Pauls Vater. Also ist Heinrich mit der Wahrscheinlichkeit von $(99/100)^2$ nicht der Großvater von Paul.

Gehen wir nun g Generationen zurück und betrachten irgendeinen Menschen dieser Generation, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nicht Vorfahre von Paul ist,

$$p = p(g) = \left(\frac{99}{100}\right)^{2^{g-1}}$$

Gehen wir beispielsweise neun Generationen zurück, so ist jeder Mensch dieser Generation mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,6% nicht Vorfahre von Paul – oder anders herum: 92,4% aller Menschen dieser Generation sind mit Paul verwandt! In der Generation davor sind es schon 99,4%. In der Generation davor ist nahezu jeder ein Vorfahre von Paul. Das bedeutet aber auch: geht man elf Generationen zurück, so sind die Vorfahren der betrachteten 200 Menschen dieselben.

Wie groß ist die damit verbundene Zeitspanne? Wie viele Generationen muss man zurückgehen, bis alle dieselben Vorfahren haben? Selbstverständlich ist die Zeitspanne von der Populationsgröße abhängig. Sei die Populationsgröße allgemein $2 \cdot 10^n$ Menschen (statt wie oben 200 mit $n = 2$), so lautet die Formel

$$p = p(n; g) = \left(\frac{10^n - 1}{10^n} \right)^{2^{g-1}}$$

Für $n = 6$ findet man $p(6; 20) = 59{,}2\%$ oder $p(6; 23) = 1{,}5\%$.

Für $n = 9$ verlangsamt es sich noch mehr:

$p(9; 20) = 99{,}95\%$, $p(9; 30) = 58{,}5\%$ und $p(9; 33) = 1{,}4\%$.

Leicht zeigt man den Zusammenhang

$$p(n; g+1) = (p(n; g))^2$$

Unabhängig von n erhält man deshalb: Gilt für ein g die Abschätzung $p(n; g) < 60\%$, dann ist in der nächsten Generation die Wahrscheinlichkeit schon $p(n; g+1) < 36\%$. Doch wie viele Generationen g sind in Abhängigkeit von n erforderlich, um diese Werte zu unterschreiten?

Behauptung. Für die Populationsgröße $2 \cdot 10^n$ gilt für $n \geq 2$

$$p\left(n; \frac{10 \cdot n}{3} + 1 \right) < 36\%.$$

Beweis: Nach obiger Formel gilt

$$p\left(n; \frac{10 \cdot n}{3} + 1 \right) = \left(\frac{10^n - 1}{10^n} \right)^{2^{10 \cdot n / 3}}$$

Wir verwenden für die Abschätzung die wachsende Monotonie der Funktion

$$f(m) = \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m,$$

die sich dem Wert $1/e$ annähert. Diese Monotonie ist eine Folgerung der Ungleichung von BERNOULLI: Die Behauptung $f(m) < f(m+1)$ lässt sich umformen zu

$$\left(1 - \frac{1}{m} \right)^m < \left(1 - \frac{1}{m+1} \right)^{m+1} \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{m^2 - 1} \right)^m > \frac{m+1}{m}.$$

Mit Hilfe der Ungleichung von BERNOULLI gilt weiter:

$$\left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m^2-1}\right)^m \geq 1+m\cdot\frac{1}{m^2-1} = \frac{m^2+m-1}{m^2-1} >$$

$$> \frac{m^2-1+m-1}{m^2-1} = \frac{m+2}{m+1} > \frac{m+1}{m}$$

womit die Monotonie nachgewiesen ist.

Rechnet man solche Funktionswerte aus, so findet man beispielsweise

$f(2) = 0{,}25$, $f(5) < 0{,}33$, $f(10) < 0{,}35$ oder $f(40) < 0{,}36$.

Dann ist aber für $n \geq 2$

$$\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)^{2^{10\cdot n/3}} = \left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{10^n\cdot\frac{2^{10\cdot n/3}}{10^n}} < 0{,}36^{\frac{2^{10/3\cdot n}}{10^n}} < 0{,}36^{1{,}00794\cdot n} < 0{,}36$$

Für eine Population mit anfangs $2 \cdot 10^6$ Personen ist also die Wahrscheinlichkeit 36% ungefähr nach 21 Generationen erreicht, für $2 \cdot 10^9$ Personen nach 31 Generationen. Rechnet man grob 25 Jahre für eine Generation, entspricht das einem Zeitraum von über 500 Jahren bzw. fast 800 Jahren.

Sicherlich ist das Gedankenexperiment für eine Gruppe von Menschen realitätsfern. Im Zusammenhang mit Zucht von Tieren, insbesondere für die Erhaltung von Tierarten in zoologischen Gärten und Tierparks, sind die einschränkenden Bedingungen weitgehend erfüllt: Oft ist die Ausgangspopulation – verteilt auf alle am Zuchtprogramm beteiligten Einrichtungen – nicht allzu groß und die Populationsgröße soll über die Generationen hinweg entsprechend der verfügbaren Kapazitäten ungefähr gleich groß sein. Da die Verwandtschaft untereinander im dargestellten Sinne schnell um sich greift, ist es eine besondere Herausforderung der Zuchtführung, dem optimal entgegenzuwirken.

Diskrete Wachstumsmodelle

Mittels diskreten Wachstumsmodellen wird im Allgemeinen das zeitliche Verhalten von Messgrößen mathematisch beschrieben. Dies muss sich nicht auf biologische Systeme beschränken. Hierbei geht es aber um Populationsgrößen, ohne die Verwandtschaftsbeziehungen im obigen Sinne zu berücksichtigen. Ausgehend von einer Startsituation W_0 zum Zeitpunkt t_0 ist eine

Berechnungsvorschrift für den Wert W_1 zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ anzugeben. Der Zusatz „diskret“ bedeutet dabei, dass die Zeit als eine Folge von (äquidistanten) Zeitpunkten betrachtet wird. Da im Folgenden die (Zeit-) Einheiten weggelassen werden, durchlaufe die Zeit t die natürlichen Zahlen.

Das *lineare Wachstum* wird durch die Wachstumskonstante k charakterisiert. In der rekursiven Darstellung gilt für eine Populationsgröße B_t zum Zeitpunkt t

$$B_{t+1} = B_t + k.$$

Die explizite Wachstumsfunktion ist für den Anfangsbestand B_0 zur Zeit $t = 0$ problemlos angebbar:

$$B_t = k \cdot t + B_0.$$

Die Populationsgröße nimmt also gleichmäßig zu, unabhängig vom aktuellen Bestand kommt in gleichen Zeitabschnitten ein gleicher Zuwachs hinzu. Anders beim *exponentiellen Wachstum*: Hier hängt der Zuwachs vom aktuellen Bestand ab,

$$B_{t+1} = B_t + k \cdot B_t .$$

Fasst man $(1 + k) = a$ als Wachstumsfaktor zusammen, so lautet die Berechnungsvorschrift des exponentiellen Wachstums

$$B_{t+1} = a \cdot B_t \qquad \text{bzw.} \quad B_t = a^t \cdot B_0.$$

Das exponentielle Wachstum scheint besser für die Modellierung biologischer Systeme geeignet zu sein, denn bei einem hohen Bestand ist sicherlich die Anzahl der Nachkommen größer als bei kleinen Populationen. Allerdings spricht das „maßlose“ Wachstum gegen die Erfahrung – mit zunehmender Population verringert sich oft die Anzahl der Nachkommen, beispielsweise wegen des beschränkten Nahrungs- und Platzangebotes.

Dem kommt das Modell des *beschränkten Wachstums* entgegen. Hierbei beschränkt eine Sättigungsgrenze S das Wachstum, indem das Wachstum proportional zum Sättigungsmanko ist – je näher die Populationsgröße an die Sättigungsgrenze S kommt, umso geringer findet Wachstum statt:

$$B_{t+1} = B_t + k \cdot (S - B_t) = (1 - k) \cdot B_t + k \cdot S$$

Setzt man $(1 – k) = q < 1$, so erkennt man aus der expliziten Wachstumsfunktion

$$B_t = S - (S - B_0) \cdot q^t,$$

dass sich der Sättigungsgrenze nach ausreichender langer Zeit t beliebig nahe angenähert wird, aber S tatsächlich nie überschritten wird. Allerdings

verlangsamt sich die Wachstumsgeschwindigkeit von Beginn an, wie man am Kurvenverlauf erkennen kann. Außerdem ist die Interpretation „Anzahl von Individuen einer Population“ verloren gegangen, da die Ganzzahligkeit von B_t nicht mehr gegeben ist.

Als eine Kombination von exponentiellen und beschränkten Wachstum wird das *logistische Wachstum* modelliert:

$$B_{t+1} = \frac{B_t \cdot S}{B_t + (S - B_t) \cdot e^{-k \cdot S}} \quad \text{bzw.} \quad B_t = S \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot S \cdot t}\left(\frac{S}{B_0} - 1\right)}$$

Da $S > B_0$ strebt B_t für große t gegen S. In der Darstellung nicht ganz so offensichtlich: Zunächst dominiert das exponentielle Wachstum und die Populationsgröße wächst in dieser Weise. Bis es eine Trendwende gibt (in der Funktion als Wendepunkt erkennbar) – dann dominiert das beschränkte Wachstum, um sich der Sättigungsgrenze zu nähern.

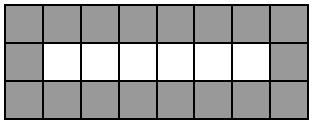
Obwohl formal die linke Berechnungsvorschrift eine rekursive Darstellung zeigt, geht das „Gefühl“ verloren, aus B_t in einfacher Weise B_{t+1} berechnen zu können. Als Näherungsformel wird die so genannte quadratische Rekursion vorgeschlagen:

$$B_{t+1} = (1 + k \cdot S) \cdot B_t - k \cdot B_t^2 .$$

Man prüfe die Genauigkeit dieser Näherungsformel!

Aufgaben Serie 7 (2018/19)

Einsendungen bitte bis 22. Juni 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [4].



Aufgabe 7-1. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind, während alle übrigen (im Innern gelegenen Quadratflächen) weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der Anzahl der weißen Quadratflächen sein.

[4] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Man gebe alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden kann.

(5 Punkte)

Aufgabe 7-2. Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die jeweils mit voneinander verschiedenen Ziffern und ohne Ziffer 0 dargestellt werden.

(5 Punkte)

Aufgabe 7-3. Es sei A der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c. Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$. Für welche Dreiecke wird es angenommen?

(6 Punkte)

Aufgabe 7-4. Man ermittle alle geordneten Paare (x ; y) jeweils zweistelliger Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes (gleichzeitig) gilt:

(*) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.

(**) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 7-5A

(a) Man gebe für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x

$$f(x) = f(x+1) - a$$

gilt. (2 Punkte)

(b) Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) = f(-x)$$

erfüllen. (2 Punkte)

(c) Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaft hat: Für alle x gilt

$$f(x) = x \cdot f(x+1)$$
$$f(1) = 1$$

Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 7-5B

Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(2 Punkte)

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Das 4. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 22. Juni 2019 statt – zu Gast in der Chemnitzer Filiale der Deutschen Bank (Falkeplatz 2, 09112 Chemnitz). Bitte Termin bereits vormerken.

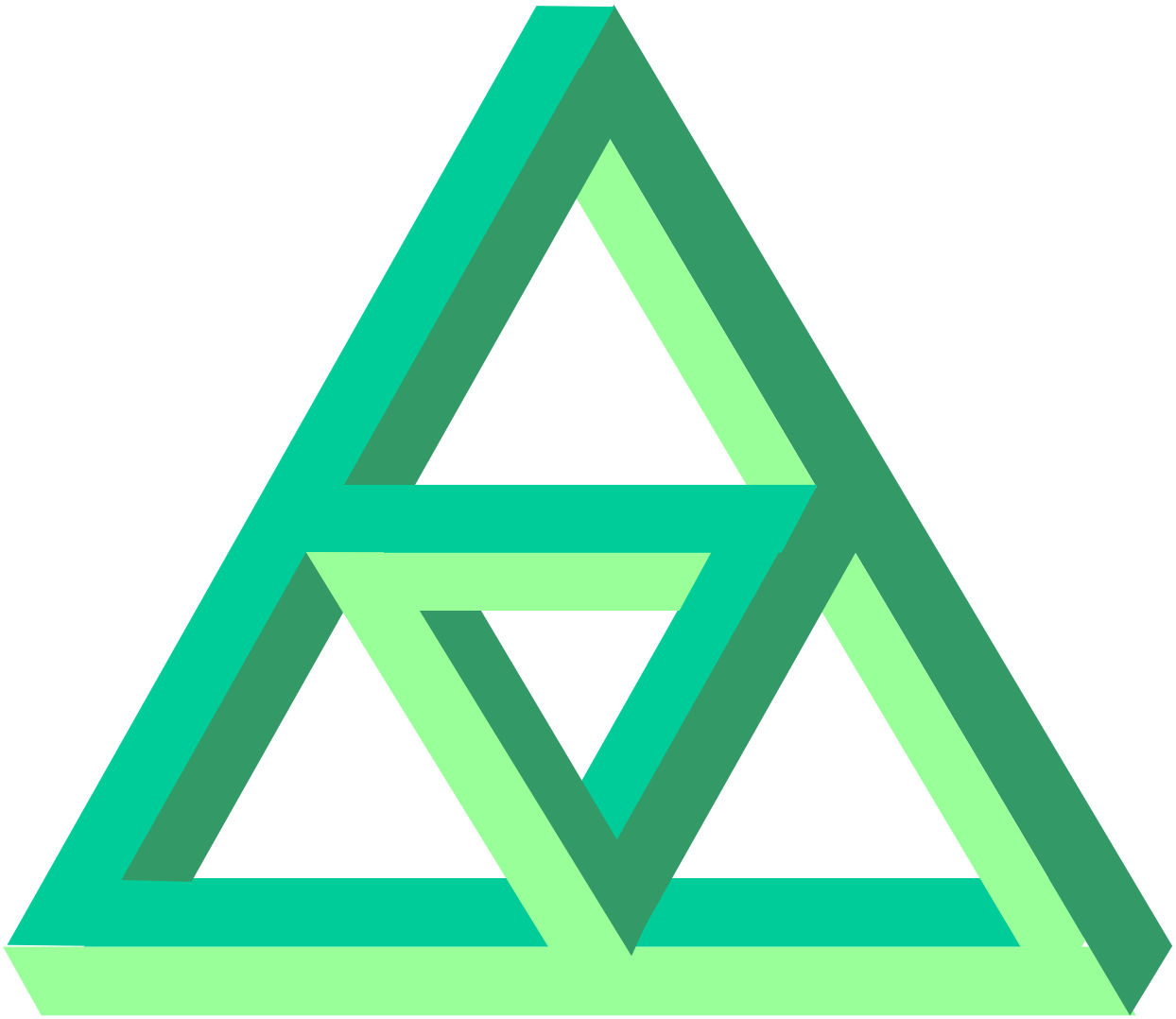
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 4 /2019 18. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 6

Aufgabe 6-1.
Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen *n* mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von *n* durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen *a* und *b* entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von *a* und *b* gleich *n.*

Lösungshinweise: Nach den gestellten Bedingungen muss die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = 100a + b = n$$

mit natürlichen Zahlen a und b mit $10 \le a \le 99, 10 \le b \le 99$ gelten. Durch äquivalente Umformung erhält man daraus

$$a^2 + 2a \cdot (b - 50) + b^2 - b = 0 .$$

Wendet man auf diese quadratische Gleichung die bekannte Lösungsformel an, folgt

$$a_{1,2} = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 99b} .$$

Damit die Lösung für a eine natürliche Zahl ist, muss es eine natürliche Zahl t ($t \le 50$) mit $2500 - 99b = t^2$ geben. Dies ist gleichbedeutend mit

$$99b = 2500 - t^2 = (50 + t) \cdot (50 - t) .$$

Wegen der Faktorenzerlegung $99 = 9 \cdot 11$ muss der Faktor 11 in den Faktoren $(50 + t)$ oder $(50 - t)$ enthalten sein. Das kann nur für $t = 5, 16, 27, 38, 49$ bzw. $t = 6, 17, 28, 39, 50$ sein. Da das Produkt beider Faktoren durch 9 teilbar sein muss, scheiden davon 6, 16, 17, 27, 28, 38 und 39 aus, so dass nur $t = 5, 49, 50$ als mögliche Lösung verbleiben. Aus diesen Werten folgen für $b = 25, 1$ bzw. 0. Aus der obigen Lösungsformel findet man für a die Werte

$$a = 25 \pm 5,\ a = 49 \pm 49 \text{ bzw. } a = 50 \pm 50.$$

Unter Beachtung der Wertebeschränkung für a können folglich nur $a = 30$ und $a = 20$ zu einer Lösung führen. Tatsächlich erfüllen die Zahlen $n = 3025$ und $n = 2025$ die Bedingungen der Aufgabe.

Lässt man für b auch eine zweistellige Zahl mit führender Null zu (also $0 \le b \le 99$), so findet man für $b = 1$ die Zahl $a = 98$. Tatsächlich erfüllt auch $n = 9801$ die Bedingungen der Aufgabe.

Lässt man auch nicht echt vierstellige Zahlen zu (d.h. $0 \leq a \leq 99$), so ist $a = 0$ als Lösung zulässig, was zu den weiteren Lösungen $n = 0000$ und $n = 0001$ führt.

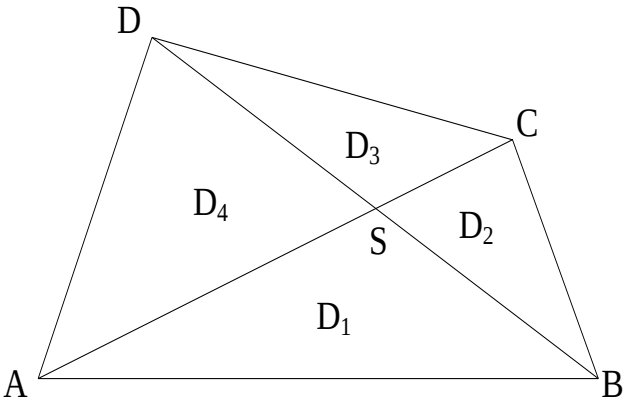
(Die Schreibweise mit vier Ziffern ist dabei notwendig, um den Schnitt gemäß Aufgabenstellung ausführen zu können.) ❑

Hinweis: Eine Liste aller Quadratzahlen von 32^2 bis 99^2 und Prüfung der geforderten Eigenschaft ist eine (wenn auch nicht elegante) vollständige Lösungsdarstellung. Sie ist ohne technische Hilfsmittel zu erstellen und der Korrektor kann die Rechnungen nachvollziehen. Die Nutzung von Rechentechnik ist für die Lösungsfindung in einer Hausarbeit stets zulässig, die Argumentation darf sich aber nicht auf die Ausführung eines Programmes begründen, weil der Korrektor dies nicht nachprüfen kann. Insbesondere reicht es nicht, nur die Lösungsmenge anzugeben, da auf diese Weise nicht nachgewiesen wurde, dass es keine weiteren Lösungen gibt (aufgrund eines Programmierfehlers könnten Lösungen übersehen werden).

Aufgabe 6-2.

Jede konvexe Viereckfläche wird durch ihre Diagonalen in vier Dreiecksflächen zerlegt. Man beweise, dass ein konvexes Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

Lösungshinweise: Die Fläche des Vierecks *ABCD* möge durch ihre Diagonalen *AC* und *BD* (deren Schnittpunkt sei *S*) in die von den vier Dreiecken D_1, D_2, D_3 und D_4 berandeten Flächen zerlegt werden. Die Nummerierung sei so gewählt, dass die Dreiecke D_1 und D_2 eine gemeinsame Seite besitzen, die auf *BD* liegt (vgl. Skizze).



Hinweis: Unter „je zwei der vier“ ist „je zwei beliebig aus den vier ausgewählt“ zu verstehen.

(I) Es ist die Höhe von D_1, die auf der *AC* enthaltenen Geraden senkrecht steht, auch die Höhe von D_2. Wenn D_1 und D_2 flächengleich sind, so sind die Strecken *AS* und *SC* gleich lang, d.h. *S* ist der Mittelpunkt von *AC*. Entsprechend folgt aus der Flächengleichheit von D_2 und D_3, dass *S* auch Mittelpunkt der Diagonalen *BD* ist.

Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm.

(II) Ist das Viereck ein Parallelogramm, so halbieren sich deren Diagonalen. Betrachtet man die Dreiecke D_1 und D_2. Deren Seiten *AS* und *SC* sind gleichlang. Zudem haben beide Dreiecke die gemeinsame Höhe. Damit stimmen sie im Flächeninhalt überein. In Analogie zeigt man $D_2 = D_3$ und $D_3 = D_4$.

Damit haben alle vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.

Aus (I) und (II) folgt: Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben. ❑

Ergänzung: Es genügt, die Flächengleichheit der gegenüberliegenden Dreiecke vorauszusetzen. Aus $D_2 = D_4$ folgt nämlich die Flächengleichheit der Dreiecke *ABC* und *ABD*. Da diese beiden Dreiecke die gemeinsame Grundseite *AB* haben, sind auch deren Höhen gleich lang. Damit ist *CD* parallel zu *AB*. Analog zeigt man auch, dass *BC* parallel *AD* ist.

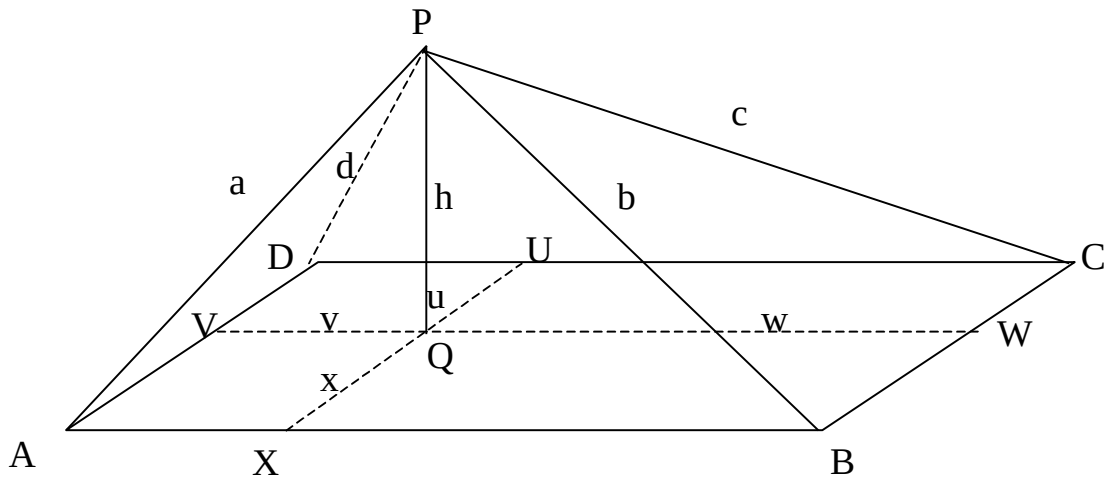
Aufgabe 6-3 (MO-Klassiker MO083093, 1968/69).
Es sei *ABCD* ein Rechteck, und es sei *P* ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. *P* habe vom Eckpunkt *A* den Abstand *a*, vom Punkt *B* den Abstand *b* und von *C* den Abstand *c*.

Man berechne den Abstand *d* des Punktes *P* vom Eckpunkt *D* und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes *d* die Kenntnis der drei Abstände *a, b, c* ausreicht.

Lösungshinweise: Der Abstand des Punktes *P* von *D* sei *d*. Es sei *PQ* das Lot von *P* auf die Ebene des Rechtecks. Die Parallele durch *Q* zu *AD* bzw. *AB* schneide die Gerade durch *AB* bzw. *AD* in *X* bzw. *Y*, die Gerade durch *DC* bzw. *BC* in *U* bzw. *W*. Es sei

$$\left|\overline{PQ}\right| = h, \left|\overline{QX}\right| = x, \left|\overline{QU}\right| = u, \left|\overline{QV}\right| = v, \left|\overline{QW}\right| = w.$$

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Satzes von Pythagoras die Gleichungen



- im Dreieck AXQ mit der Hypotenuse AQ und nachfolgend im Dreieck AQP mit der Hypotenuse AP: $a^2 = v^2 + x^2 + h^2$;

- im Dreieck BXQ mit der Hypotenuse BQ und nachfolgend im Dreieck BQP mit der Hypotenuse BP: $b^2 = w^2 + x^2 + h^2$;

- im Dreieck CXQ mit der Hypotenuse CQ und nachfolgend im Dreieck CQP mit der Hypotenuse CP: $c^2 = u^2 + w^2 + h^2$ und

- im Dreieck DXQ mit der Hypotenuse DQ und nachfolgend im Dreieck DQP mit der Hypotenuse DP: $d^2 = u^2 + v^2 + h^2$.

Daraus folgt durch entsprechende Addition

und $\begin{aligned} a^2 + c^2 &= u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \\ b^2 + d^2 &= u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \end{aligned}$.

Somit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit $d^2 = a^2 + c^2 - b^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geq b^2$). Der Abstand des Punktes *P* von *D* beträgt folglich

$$d = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}\,.$$ ❑

Aufgabe 6-4 (MO-Klassiker MO094102, 1969/70).
Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten *a*, *b*, *c* sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

Lösungshinweise: Angenommen, die gegebene Gleichung mit ungeraden *a*, *b* und *c* besitzt eine rationale Lösung x_1. Dann lässt sich x_1 in der Form $x_1 = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei *p* und *q* ganze teilerfremde Zahlen mit $q > 0$ sind. Damit gilt:

$$a \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{p}{q}\right) + c = 0, \text{ also } ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Fall 1: p und *q* sind ungerade.

Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade und die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind sowie die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite dieser Gleichung eine ungerade Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: Einer der beiden Zahlen *p*, *q* ist gerade, die andere ungerade.

Dann ist *bpq* eine gerade Zahl und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist eine gerade und die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

Fall 3: p und *q* sind gerade.

Dann sind beide Zahlen im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.

Da es keine weitere Möglichkeit gibt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Man wende auf die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ die Lösungsformel an und erhält

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}\,.$$

Damit *x* rational wird, muss der Radikand $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl sein. Für die ungeradzahligen Koeffizienten schreiben wir $2a' + 1$, $2b' + 1$ bzw. $2c' + 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2b'+1)^2 - 4 \cdot (2a'+1)(2c'+1) \\ &= 4b'^2 + 4b' + 1 - 16a'c' - 8 \cdot (a'+c') - 4 \end{aligned}$$

Weil $b'^2+b'=b'\cdot(b'+1)$ als Produkt zweier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets durch 2 teilbar ist, gibt es eine ganze Zahl Z mit

$$b^2-4ac=8\cdot Z-3.$$

Angenommen, es gäbe eine ganz Zahl k mit $8\cdot Z-3=k^2$, dann ist wegen

$$4\cdot(2\cdot Z-1)=8\cdot Z-4=k^2-1=(k-1)(k+1)$$

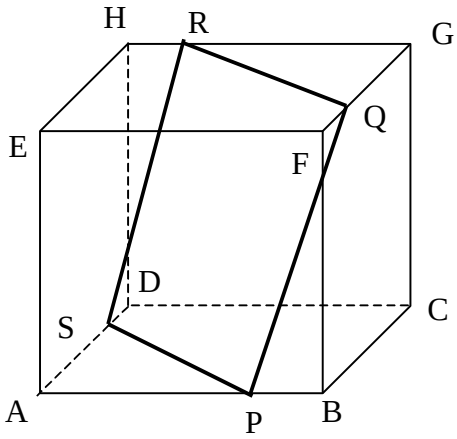
die rechte Seite dieser Gleichung durch 8 teilbar (k muss ungerade sein und von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen $k-1$ und $k+1$ ist eine mindestens durch 4 und die andere durch 2 teilbar), aber die linke Seite ist nicht durch 8 teilbar (weil der Ausdruck in der Klammer eine ungerade Zahl darstellt). Also kann es eine solche Zahl k nicht geben.

Aufgabe 6-5A.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.



Lösungshinweise:
(a) Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit Kantenlänge 1 mit den in der Skizze markierten Punkten *P*, *Q*, *R*, *S*, so dass gilt *PB* = *FQ* = *HR* = *DS* = ¼ (Skizze nicht maßstabsgerecht). Die Länge der Strecke *PS* beträgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck *APS* mit dem rechten Winkel bei *A*,

$$\overline{PS}=\sqrt{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2+\left(\tfrac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{18}{16}}.$$

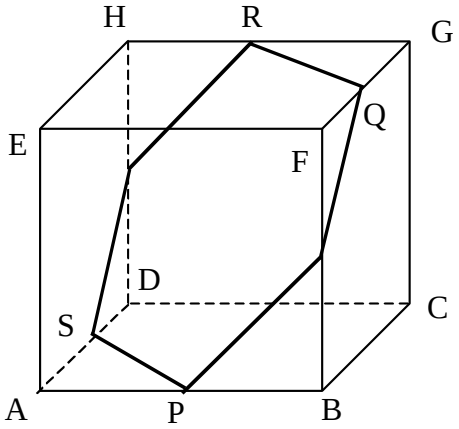
Laut Konstruktion ist *RQ* parallel zu *SP* und gleich lang. Die Strecke *PQ* lässt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen (im

Dreieck *PBF* mit dem rechten Winkel bei *B* und anschließend im Dreieck *PFQ* mit dem rechten Winkel bei *F*) und es gilt

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{18}{16}}\,.$$

Ebenfalls nach Konstruktion ist *RS* parallel zu *QP* und gleich lang. Also liegen *P, Q, R* und *S* in einer Ebene. Aus Symmetriegründen sind auch die Diagonalen *RP* und *QS* gleich lang und somit ist das Viereck *PQRS* ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\frac{18}{16} = 1{,}125\,(\text{m}^2)$, das vollständig im Innern der Schnittfläche liegt.

(b) Wählt man die Punkte *P*, *Q*, *R* und *S* so, dass sie die entsprechenden Würfelkanten halbieren, so sind die Strecken *SP* und *QR* parallel und gleich lang. Die zusätzlichen Schnittpunkte auf *BF* und *DH* halbieren ebenfalls diese Kanten. Damit sind alle Seitenkanten der Schnittfläche gleich lang. Weil die Hauptdiagonalen jeweils in ihrer Länge einer Flächendiagonalen entsprechen, ist das entstandene Sechseck regelmäßig.

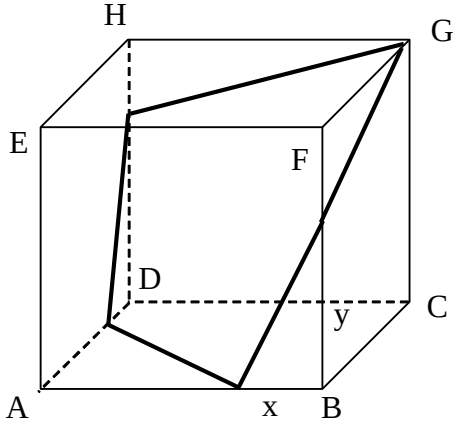


(c) Man kann ein gleichseitiges Dreieck (regelmäßiges 3-Eck) erhalten: Legt man beispielsweise die Schnittebene durch die Punkte *B, D* und *G* fest, so entsteht als Schnittfläche ein Dreieck mit jeweils Flächendiagonalen als Seiten.

Man kann kein regelmäßiges 5-Eck als Schnittfläche erhalten, denn wenigsten zwei Seiten der Schnittfigur müssten auf gegenüberliegenden Würfelseiten liegen. Ein Ebene schneidet aber die parallelen Würfelseiten so, dass die Schnittgeraden ebenfalls parallel zueinander sind. Dies ist aber bei einem regelmäßigen Fünfeck nicht möglich.

Da verschiedene Kanten einer Schnittfigur auf verschiedenen Würfelseiten liegen, kann es kein regelmäßiges *n*-Eck mit $n > 6$ geben. Somit sind für ungerade *n* nur für $n = 3$ regelmäßige *n*-Ecke als Schnittfläche möglich. ❑

Ergänzende Diskussion: Man könnte versuchen, wie in nebenstehender Abbildung einen Streckenzug aus fünf gleichlangen Strecken in den Würfel einzuzeichnen. Die Skizze lässt bereits vermuten, dass dies nicht möglich ist, was nun zu beweisen ist. Bezeichnet man die Abschnitte vom Punkt *B* bis zu den



Schnittpunkten des Streckenzuges mit *AB* und *BF* mit *x* bzw. mit *y*, so gilt mit $\left|\overline{AB}\right| = 1$ wegen der geforderten Streckengleichheit

$$2 \cdot (1-x)^2 = x^2 + y^2 = (1-y)^2 + 1$$

Nutzt man zunächst die rechte Gleichung $x^2 + y^2 = (1-y)^2 + 1$ aus und stellt nach *y* um, also $2 \cdot y = 2 - x^2$, so erhält man aus der linken Gleichung $2 \cdot (1-x)^2 = x^2 + y^2$ eine Gleichung vierten Grades:

$$x^4 - 8 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 4 = 0.$$

Diese lässt sich auch als

$$\left(x^2 - 4\right)^2 + 16 \cdot (x-1) - 4 = 0.$$

schreiben. Um Nullstellen des Polynoms abzuschätzen, genügt folgende Argumentation:

- Für $x = 0$ ist der Polynomwert –4 und für $x = 1$ beträgt der Polynomwert 5. Deshalb existiert für $0 < x < 1$ mindestens eine Nullstelle. Sie ist jedoch nicht Lösung des geometrischen Problems, da dafür $x > 1$ gelten muss.

- Für $1 < x \leq \sqrt{2}$ findet man die Abschätzung $\left(x^2 - 4\right)^2 \geq \left(\sqrt{2}^2 - 4\right) = 4$, der Polynomwert ist also größer als 0.

- Für $\sqrt{2} < x$ gilt $16 \cdot (x-1) > 16 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) > 16 \cdot 0{,}25 > 4$, der Polynomwert ist also ebenfalls größer als 0.

Somit kann es keine Lösung geben, einen Streckenzug der angegebenen Art mit 5 gleichlangen Strecken zu bilden.

Aufgabe 6-5B.
Ein *n*-Tupel von natürlichen Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i > 0, i = 1, \ldots, n, n \geq 3$ heißt *Pythagoreisches Zahlen-n-Tupel* (kurz *P-n-Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(b) Man untersuche, ob ein P-102-Tupel existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ die ersten 100 natürlichen Zahlen sind!

(c) Gegeben sei ein P-*n*-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit ungeradzahligem a_n. Man gebe ein P-(*n*+1)-Tupel an, dass ebenfalls mit $a_1, a_2, \ldots$ beginnt?

Lösungshinweise:
(a) Es sei $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ geradzahlig. Dann ist mindestens einer der Faktoren geradzahlig. Angenommen $(a+b)$ sei durch 2 teilbar, dann sind beide Summanden *a* und *b* entweder geradzahlig oder ungeradzahlig. Stets ist aber dann auch die Differenz $(a-b)$ durch 2 teilbar.

In analoger Weise führt die Annahme, $(a-b)$ sei geradzahlig, zu der Feststellung, dass in diesem Fall $(a+b)$ durch 2 teilbar ist. Folglich ist das Produkt stets durch 4 teilbar.

(b) Mittels der Summenformel für Quadrate von natürlichen Zahlen findet man:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 = \frac{1}{6}\cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338350.$$

Nimmt man nun an, es gäbe zwei natürliche Zahlen *a* und *b*, so dass (1, 2, ..., 100, *a*, *b*) ein Pythagoreisches Zahlen-102-Tupel ist, so müsste gelten

$$338350 + a^2 = b^2$$

Da 338350 zwar durch 2, nicht aber durch 4 teilbar ist, die geradzahlige Differenz $b^2 - a^2$ jedoch nach Aufgabe (a) stets durch 4 teilbar wäre, kann es kein P-102-Tupel der geforderten Art geben.

(c) Es sei $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein P-*n*-Tupel mit ungeradzahligem a_n. Dann gilt also

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$$

Da a_n ungeradzahlig ist, sind $\frac{a_n^2 - 1}{2}$ und $\frac{a_n^2 + 1}{2}$ beide ganzzahlig. Weiter gilt

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2 + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n^2 - 1}{2}\right)^2.$$

Folglich ist das Quadrat einer ungeraden Zahl stets als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar. Daraus kann man unmittelbar erkennen, dass das (*n*+1)-Tupel

$$\left(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \frac{a_n^2 - 1}{2}, \frac{a_n^2 + 1}{2} \right)$$

ein P-(n+1)-Tupel ist. ❑

Ergänzung: Ist im P-n-Tupel die Zahl a_n geradzahlig, kann man in ähnlicher Weise wie unter A6-5B(c) ein P-(n+1)-Tupel konstruieren. Offensichtlich sind $\frac{a_n^2}{4} - 1$ und $\frac{a_n^2}{4} + 1$ ganze Zahlen, die die Gleichung

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2}{4} + 1 \right)^2 - \left(\frac{a_n^2}{4} - 1 \right)^2$$

erfüllen.

Pythagoreische 4-Tupel [1]

Quadrupel (a, b, c, d) von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ nennt man *Pythagoreische Zahlenquadrupel* oder kurz P-4-Tupel (vgl. Aufgabe 6-5B).

Es interessieren hier nur Quadrupel ohne gemeinsamen Teiler (da man andernfalls alle 4 Zahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren könnte). Ein teilerfremdes P-4-Tupel, also mit ggT(a ; b ; c ; d) = 1, kann höchstens zwei Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler enthalten und wird aus geraden und ungeraden Zahlen bestehen. Es sind folglich folgende Fälle denkbar:

(1) Alle Zahlen eines P-4-Tupel sind geradzahlig. Dann enthalten alle Zahlen den Faktor 2 und das P-4-Tupel ist nicht teilerfremd.

(2) Die Zahlen a, b und c sind ungerade und folglich auch d. Somit gibt es ganze Zahlen a', b', c' und d', so dass die Gleichung

$$(2a'+1)^2 + (2b'+1)^2 + (2c'+1)^2 = (2d'+1)^2$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

[1] Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173

$$4\cdot\left(a'^2+b'^2+c'^2+a'+b'+c'\right)+2=4\cdot d'\cdot\left(d'+1\right)$$

erkennt man, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (2), in dem alle Zahlen des P-4-Tupel ungeradzahlig sind, ist also nicht möglich.

(3) Zwei der Zahlen *a, b* und *c* sind ungerade, die dritte und folglich auch *d* sind gerade. Man betrachte also o.B.d.A. den Fall

$$\left(2a'+1\right)^2+\left(2b'+1\right)^2+\left(2c'\right)^2=\left(2d'\right)^2.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4\cdot\left(a'^2+b'^2+a'+b'\right)+2=4\cdot\left(d'^2-c'^2\right)$$

erkennt man ebenso, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (3) ist also ebenfalls nicht möglich.

Da es P-4-Tupel gibt, z.B. (1 ; 4 ; 8 ; 9), gilt wegen (1) bis (3): In einem P-4-Tupel ist genau eine der Zahlen *a, b* und *c* ungerade, die anderen beiden Zahlen sind gerade. Dann ist *d* ungeradzahlig.

Satz. In einem teilerfremden P-4-Tupel (*a ; b ; c ; d*) ist mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar.

Beweis: Ist *a, b* oder *c* durch 3 teilbar, wäre nichts zu beweisen. Man nehme also an, keine der drei Zahlen *a, b* und *c* sei durch 3 teilbar. Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 3 stets den Rest 1. Wenn jede Quadratzahl a^2, b^2 und c^2 den Rest 1 lässt, dann lässt deren Summe den Rest 3 bei Division durch 3. Folglich ist d^2 und damit auch *d* durch 3 teilbar.

Satz. Ist eine der geraden Zahlen eines P-4-Tupel durch 4 teilbar, so ist auch die andere gerade Zahl des P-4-Tupel durch 4 teilbar.

Beweis: Seien $a=4a'\pm1$ und $d=4d'\pm1$ die ungeraden Zahlen des P-4-Tupels, dann ist wegen

$$\begin{aligned}b^2+c^2=d^2-a^2&=16d'^2\pm8d'+1-\left(16a'^2\pm8a'+1\right)\\&=8\cdot\left(2\left(d'^2-a'^2\right)\pm d'\mp a'\right)\end{aligned}$$

die Summe der beiden geradzahligen Quadrate des PQ durch 8 teilbar. Ist eine dieser Zahlen durch 4 teilbar, dann ist deren Quadrat durch 16 teilbar und

folglich muss auch das Quadrat der anderen Zahl mindestens durch 8 (und deshalb durch 16) teilbar sein. Damit ist auch die zweite gerade Zahl durch 4 teilbar. ❑

Sucht man nun ein Verfahren zur Erzeugung aller P-4-Tupel in einem vorgegebenen Zahlenbereich, so kann man sich aufgrund der Umformung $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$ auf solche Zwischenwerte beschränken, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Nicht jede natürliche Zahl hat diese Eigenschaft. Durch Probieren findet man schnell, dass beispielsweise 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 - 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Allgemein gilt:

Satz. Eine natürliche Zahl *m* lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

(a) $m = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\,a_j}$ (wobei die Faktoren p_j Primzahlen der Form $4n + 1$ und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)

(b) $m = 2 \cdot a^2$

(c) $m = n^{2r} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$

(d) $m = 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)$ (mit natürlichen Zahlen *n*, *r*, *a*, *b*)

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$

$$n^{2r} \cdot \left(a^2 + b^2\right) = \left(n^r \cdot a\right)^2 + \left(n^r \cdot b\right)^2$$

$$2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

❑

Satz. Eine natürliche Zahl *m* lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder
(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Beweisskizze: Leicht sieht man den Fall (a), denn ist $2k+1$ eine ungerade natürliche Zahl, so gilt: $2k+1=(k+1)^2-k^2$. Der Teil (b) erweist sich als wesentlich komplexer und sei hier ohne Beweis angegeben.

Unter Anwendung beider Aussagen findet man durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen und somit zu P-4-Tupeln führen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt findet man also 38 P-4-Tupel. Ordnet man diese P-4-Tupel nach der Größe der vierten Zahl *d*, so stellt man fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätte das Suchverfahren bis $1^2+12^2=8^2+9^2=17^2-12^2=145$ geführt werden müssen!

Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d<50$ zu finden? Wegen $m=d^2-c^2=(d+c)\cdot(d-c)$ wird m in zwei Faktoren $d+c=t_1, d-c=t_2, t_1 \geq t_2$, zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit (m; 1) und $(\sqrt{m};\sqrt{m})$ gegeben. Die Zahl *d* erhält man daraus als $d=\frac{t_1+t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller P-4-Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen m bis 2401 zu untersuchen.

Analogiebetrachtungen zwischen Ebene und Raum

„In Analogie“ wird häufig und im Allgemeinen zweifelsfrei benutzt. Dabei ist in der Mathematik nicht genau definiert, was unter „analog“ zu verstehen ist. Oft meint man Beschreibungen der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen. Solche Wortpaare sind beispielsweise „Ebene/Raum“, „Gerade/Ebene“ oder „Punkt/Gerade“. Daraus lassen sich Sätze formulieren wie:

Wenn zwei Geraden in der Ebene nicht parallel sind, dann haben sie einen Punkt gemeinsam.
Wenn zwei Ebenen im Raum nicht parallel sind, dann haben sie eine Gerade gemeinsam.

oder

In der Ebene existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
Im Raum exstieren drei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Aber auch folgende Analogie ist möglich:

Im Raum existieren vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Oft gelingt es in der Analogiebetrachtung für geometrische Sätze die Beweisideen übertragbar zu gestalten.

Aufgabe: In einer Ebene sind drei Punkte *A, B, C* gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden gibt es in dieser Ebene, so dass die drei Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?

Lösungshinweis: Man muss folgende Fälle unterscheiden.

(1) Die Punkte *A, B, C* liegen in ein und derselben Halbebene bezüglich einer Geraden *g*. Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von *g* haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Geraden.

(2) Genau einer der drei Punkte wird durch *g* von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei *C*. Damit *A* und *B* den gleichen Abstand zu *g* haben, muss *g* parallel zur Geraden g_{AB} durch *A* und *B* liegen. Außerdem muss *g* das Lot von *C* auf g_{AB} halbieren. Folglich ist *g* eindeutig bestimmt. Da jeder der drei Punkte durch eine Gerade von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 3 Geraden der Ebene entsprechend der Aufgabenstellung. ❑

Analoge Aufgabe im Raum: Im Raum sind vier Punkte *A, B, C, D* gegeben, die nicht auf einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so dass die 4 Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?

Lösungshinweise: In Analogie zu obigem Beweis führe man eine Fallunterscheidung.

(1) Alle vier Punkte liegen in ein und demselben Halbraum bezüglich einer Ebene ε. Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von ε haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Ebene.

(2) Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei *D*. Damit *A*, *B*, *C* den gleichen Abstand zu ε haben, muss ε parallel zur Ebene ε_{ABC} durch *A*, *B* und *C* liegen. Außerdem muss ε das Lot von *D* auf ε_{ABC} halbieren. Folglich ist ε eindeutig bestimmt. Da jeder der vier Punkte durch eine Ebene von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 4 Ebenen entsprechend der Aufgabenstellung.

Im Raum gibt es aber nun noch den Fall (3): In jedem Halbraum einer Ebene ε liegen genau zwei der vier Punkte, etwa *A* und *B* in einem und *C* und *D* im anderen Halbraum. Dann sind die Geraden g_{AB} durch *A* und *B* sowie g_{CD} durch *C* und *D* windschief zueinander (weil sonst die vier Punkte in einer Ebene liegen würden). Zu zwei windschiefen Geraden gibt es aber genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch die Geraden g_{AB} und g_{CD}. Dann gibt es auch eine dazu parallele Ebene, den deren Abstand gerade halbiert. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, von 4 Punkten 2 Punkte auszuwählen, existieren im Fall (3) folglich 3 Ebenen der geforderten Art.

Insgesamt gibt es also 7 Ebenen des Raumes, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen. ❑

Bekannt ist sicherlich die **Aufgabe:** Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände eines Punktes im Innern eines gleichseitigen Dreiecks (regelmäßigen Tetraeders) zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseiten) nicht von der Lage des Punktes abhängt.

Lösungshinweis: Sowohl im ebenen als auch im räumlichen Problem wird der Beweis analog geführt: Man betrachte die drei Teilflächen (vier Teilkörper), die durch die Verbindung des inneren Punktes mit je zwei Eckpunkten (drei Eckpunkten) entstehen. Der Vergleich der Summe der zugehörigen Flächeninhalte (Volumina) mit dem Flächeninhalt des Dreiecks (Tetraeders) zeigt, dass die Summe der Abstände des inneren Punktes zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseiten) gleich der Höhe des Dreiecks (Tetraeders) ist. ❑

Aufgabe. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks, so gilt $R \geq 2r$.

Lösungshinweis: Ausgehend vom gegebenen Dreieck konstruiere man ein Dreieck mit vierfachem Flächeninhalt, indem zu jeder Seite eine parallele Gerade durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gezeichnet wird. Der Inkreis des größeren Dreiecks ist doppelt so groß wie der Inkreis des Ausgangsdreiecks. Der Umkreis des Ausgangsdreiecks ist aber mindestens so groß wie der Inkreis des größeren Dreiecks, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

❑

In Analogie beweise man die zugehörige räumliche **Aufgabe.** Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Tetraeders, so gilt $R \geq 3r$.

Beispiele weiterer Analogien zwischen ebenen und räumlichen Fragestellungen sind:

Aufgabe. In jedem Parallelogramm gilt, dass die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Diagonallängen ist.

Analoge Aufgabe im Raum. In jedem Parallelepiped gilt, dass die Summe der Quadrate aller Kantenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Raumdiagonallängen ist.

Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks und den drei Punkten des Dreiecks kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einem anderen Punkt der Ebene und den drei Eckpunkten des Dreiecks.

Analoge Aufgabe im Raum. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines regelmäßigen Tetraeders und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einem anderen Punkt des Raumes und den vier Eckpunkten des Tetraeders.

Aufgabe. Gegeben seien in der Ebene drei voneinander verschiedene parallele Geraden. Man zeige, dass ein gleichseitiges Dreieck existiert, welches auf jeder der gegebenen Geraden einen Eckpunkt hat.

Analoge Aufgabe im Raum. Gegeben seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen. Man zeige, dass ein regelmäßiger Tetraeder existiert, welches auf jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

Aufgabe. In einer Ebene seien drei Kreise so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch die gemeinsamen Sehnen zweier Kreise bestimmt sind, in genau einem Punkt schneiden.

Analoge Aufgabe im Raum. Im Raum seien drei Kugeln so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Ebenen, die jeweils durch die gemeinsamen Schnittkreise zweier Kugeln bestimmt sind, in genau einer Geraden schneiden.

Nicht immer ist der analoge Begriff so offensichtlich. Man betrachte beispielsweise den

Satz. Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 2 : 1.

Nun ergibt sich die Frage, was in Analogie zur Seitenmitte einer Dreiecksseite die Flächenmitte einer Tetraederfläche ist. Da in jeder Dreiecksseite die Seitenhalbierenden die Flächen in zwei flächengleiche Hälften teilt, könnte man an eine Ebene denken, die ausgehend von einem Eckpunkt den Tetraeder in zwei volumengleiche Teilkörper teilt. Davon gibt es aber drei verschiedene, die sich alle in einer gemeinsamen Geraden schneiden, der so genannten Schwerlinie. Deren Schnittpunkt mit der Tetraederfläche ist der Schwerpunkt. Es gilt

Satz. Die vier Schwerelinien eines Tetraeders schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 3 : 1.

PELLsche Gleichung

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ mit dem ganzzahligen Faktor A ist in natürlichen Zahlen x und y zu lösen, wobei die triviale Lösung (1 ; 0) nicht in die weitere Diskussion einbezogen wird. Die Gleichung wurde nach dem britischen Mathematiker JOHN PELL (1611 – 1685) benannt, der sich u.a. mit Diophantischen Gleichungen beschäftigte.

Zunächst betrachte man A. Es können negative Zahlen ausgeschlossen werden, denn die diesem Fall ließe sich die Gleichung als $x^2 + |A| \cdot y^2 = 1$ schreiben, die nur für $|A| > 1$ nur die triviale Lösungen hat. Ist A eine Quadratzahl einer ganzen Zahl, gibt es außer der trivialen Lösung auch keine weiteren Lösungen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz zweier Quadratzahlen, die den Wert 1 annehmen soll. Folglich sind für A nur Nichtquadratzahlen interessant.

Man kann für ein vorgegebenes A durch systematisches Suchen eine Lösung $(x ; y)$ finden. So ist offensichtlich (3 ; 2) eine Lösung von $x^2 - 2y^2 = 1$, aber auch (17 ; 12) ist eine Lösung. Kann man alle Lösungen angeben?

Ist $(x_0 ; y_0)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$, so gilt nach Binomischer Formel

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)(x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0) = 1$$

und folglich findet man wegen

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n \cdot (x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0)^n = 1$$

neue Lösungen mit

$$x_n + \sqrt{A} \cdot y_n = (x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n,$$

wenn man nur alle Summanden der Binomischen Formel ohne $\sqrt{A}$ zu x_n und die anderen mit $\sqrt{A}$ zu y_n zusammenfasst. Man findet

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n \right)$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \left(\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n \right)$$

Nun kann man aber aus der Bildungsvorschrift eine Rekursionsvorschrift herleiten:

$$x_{n+1} + \sqrt{A} \cdot y_{n+1} = \left(x_n + \sqrt{A} \cdot y_n\right)\left(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0\right)$$
$$= \left(x_n x_0 + A \cdot y_n y_0\right) + \sqrt{A} \cdot \left(x_n y_0 + y_n x_0\right)$$

Am Beispiel der Lösung (3 ; 2) für $A = 2$ führt dies zu

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

Aus diesem Gleichungssystem wird zunächst y_n eliminiert und man erhält

$$3x_{n+1} - 4y_{n+1} = x_n$$

Setzt man nun für $4y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - 3x_{n+1}$ ein, erhält man die Rekursion:

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$$

Nun wird x_n eliminiert. Man erhält

$$3y_{n+1} - 2x_{n+1} = y_n$$

Setzt man nun für $2x_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $y_{n+2} - 3y_{n+1}$ ein, erhält man die Rekursion:

$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$$

Sind damit alle Lösungen gefunden? Um dies zu untersuchen, definiere man:

Eine Lösung (x_0 ; y_0) der Pellschen Gleichung wird minimale Lösung genannt, wenn für alle Lösungen (x ; y) die Ungleichung $x_0 + y_0\sqrt{A} \le x + y\sqrt{A}$ *erfüllt ist.*

Die minimale Lösung ist eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei minimale Lösungen (x_{01} ; y_{01}) und (x_{02} ; y_{02}), so wäre

$$x_{01} + y_{01}\sqrt{A} = x_{02} + y_{02}\sqrt{A}$$
$$x_{01} - x_{02} = \sqrt{A} \cdot (y_{02} - y_{01})$$

Auf der rechten Seite steht aber für $y_{01} \neq y_{02}$ eine irrationale Zahl, im Widerspruch zur rationalen Zahl auf der linken Seite, folglich müssen $y_{01} = y_{02}$ übereinstimmen und damit auch $x_{01} = x_{02}$.

Wenn nun (x^* ; y^*) eine weitere, nicht nach obigen Konstruktionsprinzip auffindbare Lösung der Pellschen Gleichung wäre, gilt also für alle natürlichen Zahlen *n*

$$x^* + y^*\sqrt{A} \neq \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n$$

Aus der Minimalität von (x_0 ; y_0) folgt

$$1 < x_0 + y_0\sqrt{A} < x^* + y^*\sqrt{A},$$

also gibt es einen Exponenten *k* mit

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^k < x^* + y^*\sqrt{A} < \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^{k+1}.$$

Multipliziert man diese Ungleichungskette mit $\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^k$ findet man eine weitere Lösung (x' ; y'), wenn man in folgender Ungleichungskette das mittlere Produkt ausmultipliziert und die rationalen und irrationalen Summanden wieder entsprechend zusammenfasst.

$$1 < x' + y'\sqrt{A} = (x^* + y^*\sqrt{A})\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^k < 1 \cdot \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right).$$

Leicht überzeugt man sich, dass (x' ; y') tatsächlich die Pellsche Gleichung erfüllt. Sind x' und y' positiv, so ist aus der letzten Ungleichung bereits ein Widerspruch zur Minimalität von (x_0 ; y_0) gegeben.

Keine der Zahlen kann 0 sein, weil daraus entweder $-Ay'^2 > 0$ oder $x'^2 = 1$ folgen würde. Beide Zahlen können aber auch nicht gleichzeitig negativ sein

(wegen der linken Seite der letzten Ungleichungskette), so dass noch folgende Fälle analysiert werden müssen:

$$x' < 0 < y' \quad \Rightarrow \quad x' + y'\sqrt{A} < -x' + y'\sqrt{A}$$
$$y' < 0 < x' \quad \Rightarrow \quad x' + y'\sqrt{A} < x' - y'\sqrt{A}$$

also

$$1 < x' + y'\sqrt{A} < \left| x' - y'\sqrt{A} \right| \quad \Rightarrow \quad 1 < \left| \left(x' + y'\sqrt{A}\right) \cdot \left(x' - y'\sqrt{A}\right) \right| = 1$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass das Paar (x' ; y') aus positiven ganzen Zahlen tatsächlich alle Bedingungen einer Lösung der Pellschen Gleichung erfüllt und zudem eine neue minimale Lösung wäre. Also hat man mit dem obigen Verfahren, ausgehend von der minimalen Lösung, alle unendlich vielen Lösungen gefunden.

Hinweis: Für jede positive Nichtquadratzahl A existieren Lösungen, und diese kann man mittels Kettenbrüchen konstruktiv angeben.

Verallgemeinert man die Pellsche Gleichung zu $x^2 - Ay^2 = C$ mit ganzahliger Konstanten C, so hängt die Existenz von Lösungen vom Wert C ab. Während beispielsweise (10 ; 7) eine Lösung der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 2$, gibt es für $x^2 - 2y^2 = 3$ keine Lösungen. Die Unlösbarkeit folgt aus den Restklassen bei Division durch 3:

- Wären nämlich x und y beide durch 3 teilbar, so ist die linke Seite – im Widerspruch zur rechten Seite – sogar durch 9 teilbar.

- Wäre nur eine Zahl x oder y durch 3 teilbar, muss auch die andere Zahl durch 3 teilbar sein. Sind aber beide Zahlen nicht durch 3 teilbar, so ergibt sich ein Widerspruch, weil deren Quadrate dann jeweils den Rest 1 bei Division durch 3 lassen.

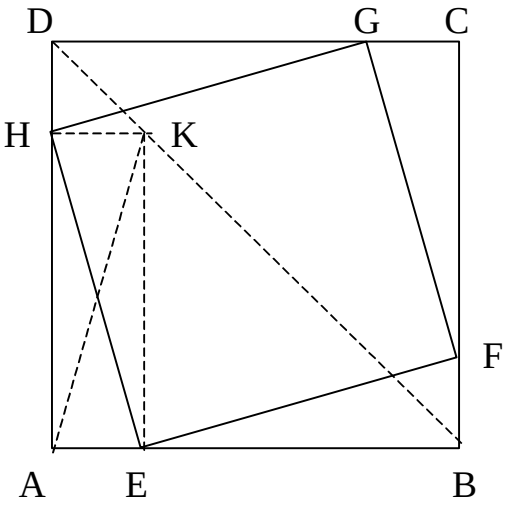
Wenn es aber eine Lösung gibt, so findet man sogar unendlich viele Lösungen, indem man die spezielle Lösung (x_C ; y_C) der Gleichung $x^2 - Ay^2 = C$ mit den allgemeinen Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ kombiniert:

$$\left(x_C + y_C\sqrt{A}\right) \cdot \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n .$$

Für jede natürliche Zahl n findet man nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rationalen und irrationalen Summanden eine Lösung der verallgemeinerten Pellschen Gleichung. Mathematisch besonders interessant ist der Fall $C = -1$.

Einbeschriebene Figuren

Aufgabe. Einem Quadrat soll ein Quadrat mit minimalem Umfang einbeschrieben werden.



Lösungshinweise (geometrisch):
Ein einbeschriebenes Quadrat entsteht, wenn die Punkte *E*, *F*, *G* und *H* die Quadratseiten im gleichen Verhältnis teilen. Setzt man $a = \left|\overline{AB}\right|$ und $x = \left|\overline{AE}\right|$, dann wird der Umfang *u* minimal, wenn $\left|\overline{HE}\right|$ minimal wird.

Ergänzt man die Punkte *A*, *E* und *H* zum Rechteck *AEKH*, dann liegt *K* immer auf der Diagonalen *BD*, da das Dreieck *KHD* gleichschenklig rechtwinklig ist. Weiterhin gilt $\left|\overline{AK}\right| = \left|\overline{HE}\right|$. Hieraus folgt: Der Umfang wird minimal, wenn *AK* das Lot auf *BD* ist und damit gilt $\left|\overline{AH}\right| = \left|\overline{HE}\right| = \frac{a}{2}$.

(analytisch) Man findet mit dem Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck *AEH* die Gleichung $\left|\overline{HE}\right|^2 = x^2 + (a-x)^2$. Aus der Umformung

$$x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

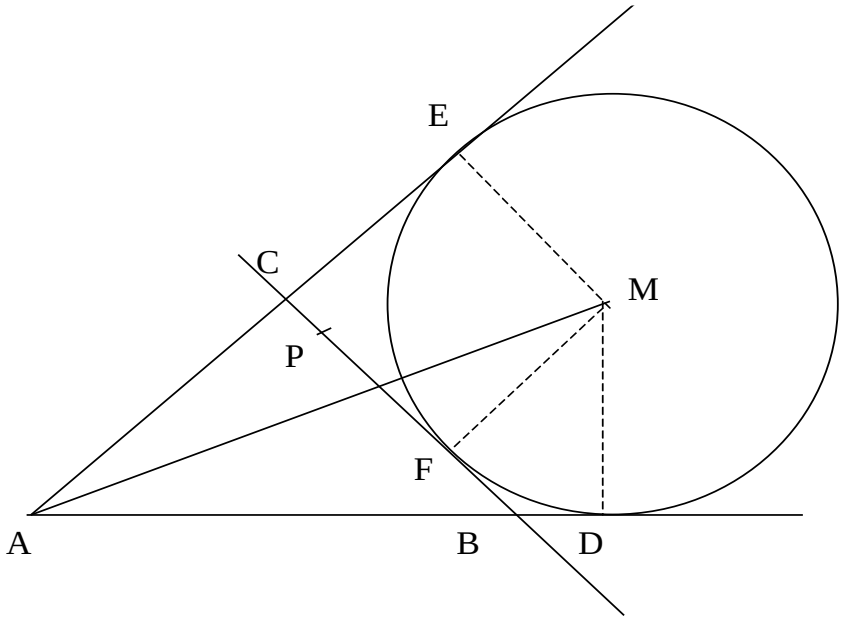
folgt, dass $\left|\overline{HE}\right|$ minimal wird, wenn $x = \frac{a}{2}$ gilt. ❑

Man beachte: Ersetzt man in der Aufgabestellung für die einzubeschreibende Figur „Quadrat“ durch „Rechteck“, entartet das einbeschriebene Rechteck zur Diagonalen.

Aufgabe. Gegeben ist ein Winkel α mit dem Scheitel *A* und ein Punkt *P* im Winkelfeld von α. Eine Gerade g durch den Punkt *P* schneidet die Schenkel des Winkels α in den Punkten *B* und *C*. Wie muss man die Gerade *g* wählen, damit das Dreieck *ABC* minimalen Umfang besitzt?

Lösungshinweise: Man zeichne durch den Punkt *P* eine beliebige Gerade und den Ankreis des Dreiecks *ABC* zur Seite *BC*. Der Ankreis berührt die Seiten (oder deren Verlängerungen) in den Punkten *D, E* und *F*. Für den Umfang *u* des Dreiecks *ABC* gilt dann

$$u = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{AE}\right|.$$



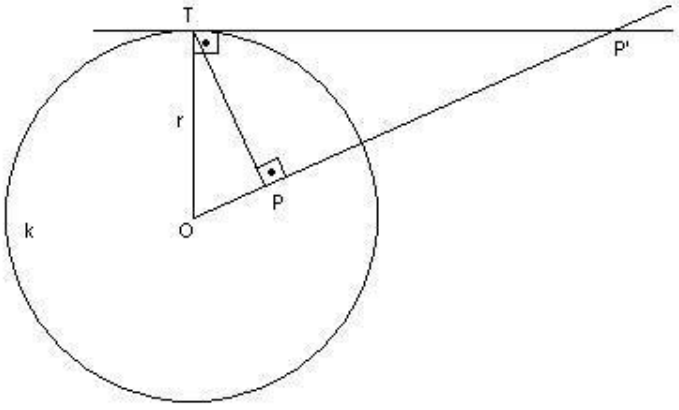
Der Umfang wird folglich minimal, wenn der Radius des Ankreises möglichst klein wird. Dies ist der Fall, wenn *PM* Radius des Umkreises ist. Für die vollständige Lösung ist die folgende Konstruktionsaufgabe zu lösen.

Aufgabe. Man konstruiere zu einem gegebenen Winkel α in *A* und einem im Winkelfeld gegebenen Punkt *P* das Dreieck *ABC* mit minimalen Umfang, wobei *B* und *C* auf den Winkelschenkeln und *P* auf der Seite *BC* liegen.

Inversion am Kreis

Definition: Die Inversion an einem Kreis *k* mit Mittelpunkt *O* und Radius *r* ist die Abbildung, die jeden Punkt *P* der Ebene außer *O* auf den Punkt *P*' mit $P' \in \overline{OP}$ abbildet und $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

Dem Punkt *O* wird ein „unendlich ferner Punkt“ zugeordnet.



<u>*Konstruktion*</u> Es sei *P* ein von *O* verschiedener Punkt im Innern des Kreises *k*.

- Man zeichne die Gerade durch *O* und *P*.
- Die Senkrechte *s* in *P* zu *OP* schneidet *k* in *T*.
- Die Tangente an *k* in *T* schneidet *OP* in *P*'.

Existenz und Eindeutigkeit (!) sind leicht gezeigt; ebenso dass P' tatsächlich der gesuchte Punkt ist. Wie verändert sich die Konstruktion von P' für einen Punkt P außerhalb von k?

<u>*Eigenschaften*</u> (die sich leicht beweisen lassen)

- Die Inversion ist umkehrbar eineindeutig (bijektiv), d.h. aus dem Bild einer Inversion erhält man durch erneute Inversion wieder das Ausgangsbild.

- Geraden durch O sind Fixgeraden, sie werden also auf sich selbst abgebildet. Auch der Kreis k wird auf sich (sogar punktweise) abgebildet.

- Kreise senkrecht zu k sind Fixkreise, Kreise, die O nicht enthalten, werden wieder zu Kreisen, die O nicht enthalten und Kreise, die O enthalten, werden zu Geraden, die O nicht enthalten.

- Die Inversion am Kreis ist winkeltreu, das heißt die Größen von Winkeln bleiben bei Inversion an einem Kreis erhalten.

<u>Eine interessante Anwendungsaufgabe</u>

Gegeben seien ein Punkt A, zu A nicht kollineare Punkte M und N sowie Radien r_M und r_N. Man konstruiere denjenigen Kreis durch A, der die Kreise $k_M(M, r_M)$ und $k_N(N, r_N)$ jeweils senkrecht schneidet.

Lösungsidee: Man spiegle A an k_M und erhalte A_M sowie an k_N und erhalte A_N. Der gesuchte Kreis ist der Umkreis des Dreiecks AA_NA_M.

Seminarhinweis

Das 4. Chemnitzer Seminar findet, wie bereits angekündigt, am Samstag, dem 22. Juni 2019 statt. Wir sind zu Gast bei der Filiale der Deutschen Bank in Chemnitz (Falkeplatz). Bitte beiliegendes Programm beachten.

Impressum

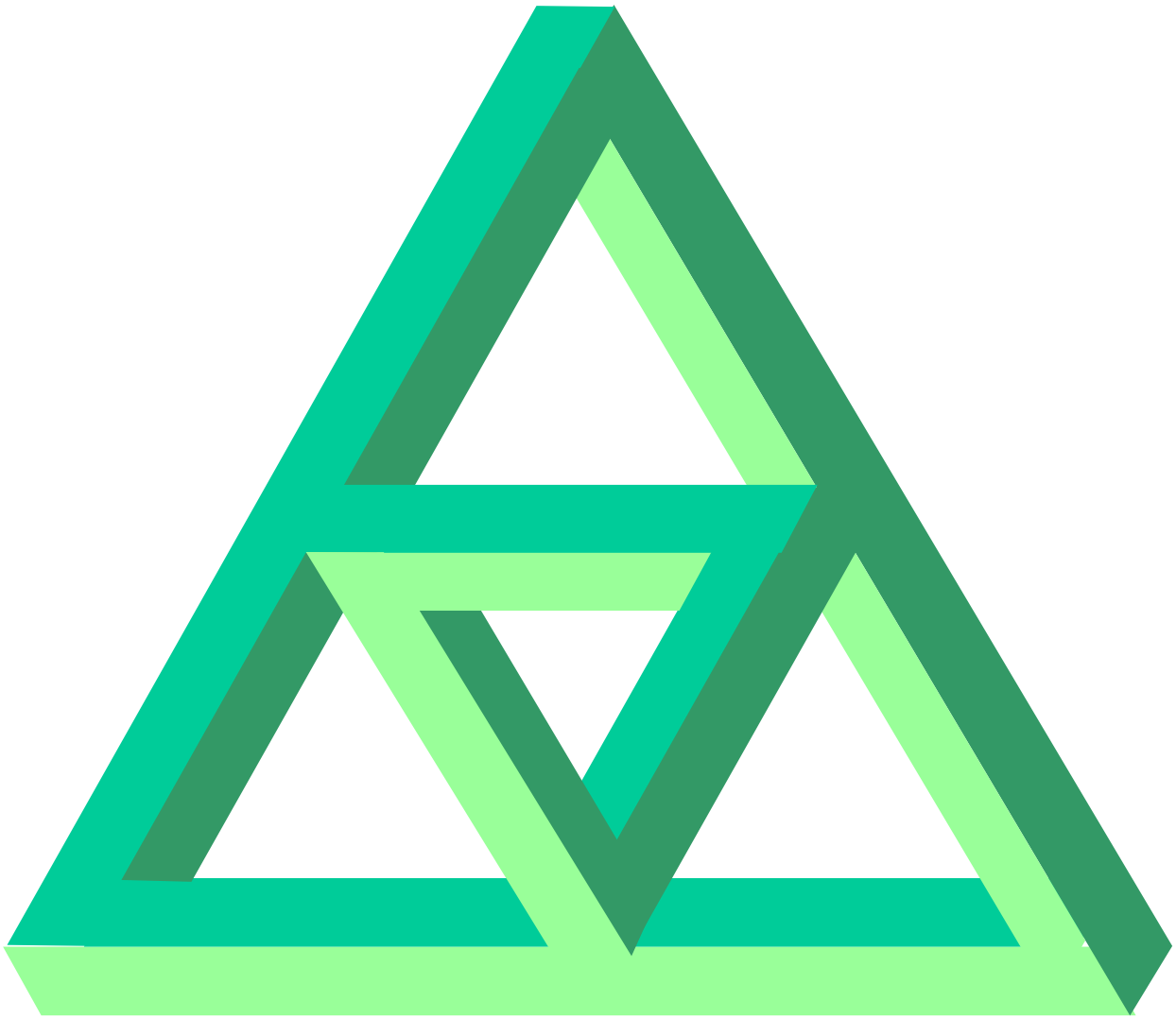
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

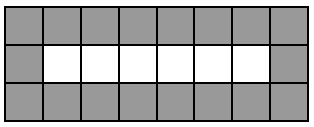
Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 5 /2019 18. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 7

Aufgabe 7-1. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind, während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der Anzahl der weißen sein.



Man gebe (durch Angabe der Anzahlen der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden kann.

Lösungshinweise: Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus a und jede Spalte aus b Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a > 2$ und $b > 2$, da sonst keine weißen Quadratflächen auftreten. Die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt $2a + 2b - 4$, die Anzahl der weißen Quadratflächen $(a-2)(b-2) = ab - 2a - 2b + 4$. Somit gilt

$$2a + 2b - 4 = ab - 2a - 2b + 4,$$

also $$a \cdot (b-4) = 4b - 8.$$

Wäre $b = 3$, so folgt $a = -4$, wäre $b = 4$, so folgt $0 = 8$, was jeweils einen Widerspruch darstellt. Also gilt sogar $b > 4$, d.h.

$$a \cdot (b-4) = 4b - 8 = 4 \cdot (b-4) + 8.$$

Somit ist 8 durch $(b - 4)$ teilbar. Deshalb kann $(b - 4)$ nur eine der Zahlen 1, 2, 4 oder 8 sein. Daraus ergeben sich als Möglichkeiten für die Paare $(a\,;\,b)$

$$(12\,;\,5)\,,\ (8\,;\,6)\,,\ (6\,;\,8)\,,\ (5\,;\,12).$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit, denn

- im Fall (12 ; 5) gibt es 60 Quadratflächen, davon $2 \cdot 12 + 2 \cdot 5 - 4 = 30$ rote Randflächen und
- im Fall (8 ; 6) gibt es 48 Quadratflächen, davon $2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 - 4 = 24$ rote Randflächen. ❑

Aufgabe 7-2. Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die jeweils mit voneinander verschiedenen Ziffern und ohne 0 dargestellt werden.

Lösungshinweise: Da die Ziffern voneinander verschieden sein sollen, hat man für die erste Stelle 9, für die zweite Stelle 8 und für die dritte Stelle 7

Möglichkeiten der Wahl, wenn man eine der beschriebenen Zahlen bilden will. Also gibt es insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ derartige Zahlen.

Da die 9 Ziffern an jeder Stelle gleich häufig auftreten, ist jede Ziffer an jeder Stelle $\frac{504}{9} = 56$ mal zu finden. Demnach gilt für die gesuchte Summe *S*:

$$S = 100 \cdot 56 \cdot \sum_{k=1}^{9} k + 10 \cdot 56 \cdot \sum_{k=1}^{9} k + 56 \cdot \sum_{k=1}^{9} k$$

$$= 111 \cdot 56 \cdot \sum_{k=1}^{9} k = 111 \cdot 56 \cdot 45 = 279720$$

Dabei gilt für die Summe der ersten 9 Zahlen nach Gaußscher Summenformel $\sum_{k=1}^{9} k = 1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$. Die gesuchte Summe beträgt folglich 279720. ❑

Aufgabe 7-3. Es sei *A* der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen *a*, *b* und *c*. Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$. Für welche Dreiecke wird es angenommen?

Lösungshinweise: Nach der Heronischen Dreiecksformel gilt für den Flächeninhalt *A* eines Dreiecks

$$A^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$$

mit *s* als Abkürzung für die Hälfte des Umfangs *u*, $u = 2s$. Nach dem Satz über das geometrische und arithmetische Mittel gilt

$$\sqrt[3]{\frac{A^2}{s}} = \sqrt[3]{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \le \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} = \frac{s}{3}.$$

Daraus folgt $\frac{A^2}{s} \le \frac{s^3}{27}$, also $A^2 \le \frac{s^4}{27} = \frac{u^4}{16 \cdot 27}$. Durch einfaches Umformen findet man: $\frac{A}{u^2} \le \frac{\sqrt{3}}{36}$.

Da in der Mittelungleichung die Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c$ ist, wird das Maximum höchstens beim gleichseitigen Dreieck angenommen. Wegen $u = 3a$ und $A = \frac{1}{4} a^2 \cdot \sqrt{3}$ in einem solchen Dreieck gilt in diesem Fall tatsächlich

$$\frac{A}{u^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}}{9a^2} = \frac{\sqrt{3}}{36}.$$ ❑

Aufgabe 7-4. Man ermittle alle geordneten Paare (x ; y) jeweils zweistelliger Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:

(*) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.
(**) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x ; y), das den Bedingungen (*) und (**) genügt. Setzt man $x = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen $1 \le a,b \le 9$, dann ist wegen (*) $y = 10b + a$ und es gilt $a > b$.
Das Quadrat einer zweistelligen Zahl ist entweder drei- oder vierstellig.

Fall 1: x^2 ist dreistellig. Wegen $40^2 > 1000$ gilt dann $a \le 3$. Da aber bereits $32^2 = 1024$ vierstellig ist, können nur die Zahlen 31 oder 21 die Aufgabe erfüllen. Tatsächlich gilt $21^2 = 441$ und $12^2 = 144$ bzw. $31^2 = 961$ und $13^2 = 169$.

Fall 2: x^2 ist vierstellig. Dann gilt für die Ziffern a und b

$$(10a + b)^2 = 1000c + 100d + 10e + f$$
$$(10b + a)^2 = 1000f + 100e + 10d + c$$

(mit geeigneten Ziffern c, d, e und f). Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$11 \cdot (a^2 - b^2) = 111c + 10d - 10e - 111f\,.$$

Da die linke Seite durch 11 teilbar ist, muss auch die rechte Seite durch 11 teilbar sein. Addiert man zu $111c + 10d - 10e - 111f$ die durch 11 teilbare Zahl $1111f + 110e - 110c$, dann erhält man

$$1000f + 100e + 10d + c = (10b + a)^2,$$

und auch diese Zahl muss durch 11 teilbar sein. Daher muss 11 ein Teiler der zweistelligen Zahl $10b + a$ sein, was wegen $a \ne b$ nicht sein kann.

Somit gibt es nur die im Fall 1 gefundenen Lösungen (31 ; 13) und (21 ; 12), die alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen. ❑

Aufgabe 7-5A.
(a) Man gebe für jede reelle Zahl *a* alle diejenigen linearen Funktionen *f*(*x*) an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle *x* die Gleichung $f(x) = f(x+1) - a$ gilt.

(b) Man gebe alle quadratischen Funktionen *f*(*x*) an, die für alle reellen *x* die Gleichung $f(x+1) = f(-x)$ erfüllen.

(c) Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und die folgende Eigenschaft hat: Für alle *x* gilt

$$f(x) = x \cdot f(x+1)$$
$$f(1) = 1$$

Man ermittle alle ganzen Zahlen *n*, für die $f(n) = 0$ gilt.

Lösungshinweise:
(a) Für die lineare Funktion setze man $f(x) = mx + n$ mit reellen Koeffizienten *m* und *n*. Nach der angegebenen Funktionalgleichung gilt für alle x:

$$f(x) = m \cdot x + n = f(x+1) - a = m \cdot (x+1) + n - a, \quad \text{also } 0 = m - a.$$

Folglich erfüllen alle linearen Funktionen der Form $f(x) = ax + n$ (*n* beliebig reell) die Bedingung, denn es gilt tatsächlich für alle reellen Zahlen *x*:

$$f(x+1) - a = a \cdot (x+1) + n - a = ax + n = f(x) \qquad \square$$

(b) Für die quadratische Funktion setze man $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit reellen Koeffizienten *a, b, c*. Nach der angegeben Funktionalgleichung gilt für alle *x*:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a \cdot (x+1)^2 + b \cdot (x+1) + c \\ &= a \cdot x^2 + (2a+b) \cdot x + a + b + c, \\ &= f(-x) = ax^2 - bx + c \end{aligned}$$

also muss gelten $2ax + a + 2bx + b = (a+b) \cdot (2x+1) = 0$.

Da die letzte Gleichung für alle *x* gelten soll, muss $a + b = 0$ gelten. Folglich erfüllen alle quadratischen Funktionen der Form $f(x) = ax^2 - ax + c$ (*a, c* beliebig reell) die Bedingung, denn es gilt tatsächlich für alle reellen Zahlen *x*:

$$f(x+1) = a\cdot(x+1)^2 - a\cdot(x+1) + c$$
$$= ax^2 + 2ax + a - ax - a + c = ax^2 + ax + c$$
$$= a\cdot(-x)^2 - a\cdot(-x) + c = f(-x.)$$

❑

(c) Wegen $f(1)=1$ folgt aus $f(0)=0\cdot f(0+1)=0$. Ist nun $f(-n)=0$ (was eben für $n = 0$ bewiesen wurde), so gilt auch

$$f(-n-1)=(-n-1)\cdot f(-n)=0.$$

Folglich sind alle nichtpositiven ganzen Zahlen 0, -1, -2, … Nullstellen der Funktion *f*.

Wegen $f(1)=1$ folgt aus $f(1)=1\cdot f(1+1)=1$ auch $f(2)=1$. Ist nun $f(n+1)=\frac{1}{n!}$ (was eben für $n = 1$ bewiesen wurde), so gilt auch

$$f(n+1)=(n+1)\cdot f(n+2),$$

also $$f(n+2)=\frac{f(n+1)}{(n+1)}=\frac{1}{n!\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Folglich sind alle positiven ganzen Zahlen 1, 2, … keine Nullstellen der Funktion *f*. ❑

Aufgabe 7-5B. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

Lösungshinweise:
(a) Man betrachte zunächst den ebenen Fall. Für zwei Gitterpunkte $(x_1 ; y_1)$ und $(x_2 ; y_2)$ berechnet sich der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke mittels

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Dieser Mittelpunkt ist genau dann selbst ein Gitterpunkt, wenn sowohl x_1 und x_2 als auch y_1 und y_2 jeweils denselben Rest bei Division durch 2 lassen.

Da es für jede Koordinate des Gitterpunktes 2 Möglichkeiten bezüglich des Restes bei Division durch 2 gibt, können insgesamt $2^2 = 4$ Kombinationen der Reste bei Division durch 2 vorkommen. Hat man nun 5 Gitterpunkte, so stimmen nach dem Schubfachprinzip mindestens 2 dieser 5 Gitterpunkte in den Resten bei Division durch 2 in beiden Koordinaten überein. Für dieses Paar von Gitterpunkten ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

In Analogie beweist man die Behauptung für den räumlichen Fall, da sich auch hier der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke koordinatenweise als Mittelwert der Koordinaten ergibt. Die Zahl der Kombinationen erhöht sich bei 3 Koordinaten auf $2^3 = 8$. Nach dem Schubfachprinzip findet man deshalb unter 9 Gitterpunkten stets ein Paar von Gitterpunkten, die koordinatenweise im Rest bei Division durch 2 übereinstimmen. Für dieses Paar ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

(b) In einem Würfel mit der Grundfläche *ABCD* und der Deckfläche *EFGH* (mit der Kante *AE*) bildet der Körper mit den Eckpunkten *ACFH* einen regelmäßigen Tetraeder, da alle Seitenkanten dieses Körpers als Flächendiagonalen des Würfels gleichlang sind. Es gibt unendlich viele Würfel, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind und somit existieren auch unendlich viele Tetraeder der geforderten Art.

(c) Angenommen, es existiert in einem ebenen Gitter ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art. Dann kann man einerseits den Flächeninhalt A dieses Dreiecks durch Addition und Subtraktion von Teilflächen von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecksflächen mit rationalen Ergebnissen erhalten. Dazu bilde man das kleinste achsenparallele Rechteck, das das Dreieck vollständig enthält. Die Ecken dieses Rechtecks sind ebenfalls Gitterpunkte.

Andererseits ist das Quadrat einer Seitenlänge a stets rational, da es mittels des Satzes von Pythagoras als Summe zweier Quadrate ganzzahliger Längen dargestellt werden kann. Dann ist aber der Flächeninhalt nach der Flächenformel $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ stets irrational.

Mit diesem Widerspruch zwischen rationalen und irrationalen Flächenwert ist bewiesen, dass es kein solches Dreieck geben kann. ❑

Ergänzende Lösungsdiskussion

Die Suche nach Nullstellen auf der Basis von Funktionalgleichungen der Form wie in Aufgabe 7-5A(c) lässt sich oft iterativ erfolgreich lösen:

Nach **Aufgabe MO271042.** Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1)$$

Man zeige, dass die Funktion f unendlich viele Nullstellen hat.

Lösungshinweise: Für $x_1 = x_2 = 0$ gilt

$$f(0) = f(0+0) = f(0^3) + f(0^3) = 2 \cdot f(0), \qquad \text{also } f(0) = 0.$$

Außerdem gilt für $x_1 = x_2 = 1$

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1),$$

also $f(1) = 0$.

Damit findet man für alle reellen Zahlen *x*

$$f(x) = f(x+0) = f(x^3) + f(0^3) = f(x^3).$$

Somit vereinfacht sich die erste Gleichung der Aufgabenstellung zu

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Setzt man nun $x_1 = x$ und $x_2 = 1$, so ergibt sich die Gleichheit

$$f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x).$$

Folglich sind wegen $f(0) = f(1) = 0$ alle natürlichen Zahlen Nullstellen der gegebenen Funktion. ❑

Aufgabe MO290935(a). Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion *f*, die für alle reellen Zahlen *x* die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2 - 1) \cdot f(x+1)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen *x* mit $f(x) = 0$ gibt!

Lösungshinweise: Beginnt man mit $x = 1$ und setzt dann mit $x = -1, -3, \ldots$ fort, so findet man

$$f(0) = f(1-1) = \left(1^2 - 1\right) \cdot f(1+1) = 0 \cdot f(2) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$
$$f(-2) = f(-1-1) = \left((-1)^2 - 1\right) \cdot f(-1+1) = 0 \cdot f(0) = 0$$
$$f(-4) = f(-3-1) = \left((-3)^2 - 1\right) \cdot f(-3+1) = 8 \cdot f(-2) = 0$$
$$\ldots$$
$$f(-2k) = f\left((-2k+1)-1\right) = K \cdot f\left((-2k+1)+1\right) = K \cdot f(-2k+2) = 0$$

Dabei wird abkürzend $K = (-2k+1)^2 - 1$ gesetzt. Somit sind (mindestens) die Zahlen 0, -2, -4, …, -2*k*, … Nullstellen der Funktion *f*. ❑

Aufgabe. Es sei f eine nichtkonstante Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* definiert ist und die Gleichung

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$$

erfüllt. Man zeige: Existiert eine reelle von 0 verschiedene Zahl *p* mit $f(p) = 0$, so hat f unendlich viele Nullstellen.

Lösungshinweise: Setzt man $x = y = 0$, so findet man auch $f(0) = 0$ wegen $(f(0))^2 = f(0)^2 - f(0)^2 = 0$. Setzt man nun $x = 2p$ und $y = p$, so gilt

$$f(2p+p) \cdot f(2p-p) = 0 = f(2p)^2 - f(p)^2 = f(2p)^2 .$$

Also ist auch $f(2p) = 0$. Setzt man diese Untersuchung in dieser Art fort, findet man im nächsten Schritt:

$$f(3p+2p) \cdot f(3p-2p) = 0 = f(3p)^2 - f(2p)^2 = f(3p)^2$$

Iterativ folgt daraus für alle positiven ganzen Zahlen *k*:

$$f(k \cdot p) = 0$$ ❑

Nachträge zu den Lösungsdiskussionen[1] zur Serie 6

Aufgaben wie **A6-1** lassen sich durch systematisches Probieren lösen. Man müsste lediglich in der Gleichung $a^2 + 2ab + b^2 = 100a + b$ nacheinander die zweistelligen Zahlen $a = 10, 11, \ldots, 99$ einsetzen und prüfen, ob sich eine ganze Zahl b mit $0 \le b \le 99$ ergibt. Ohne Verwendung von rechentechnischen

[1] Aus dem Seminarprogramm vom 22.06.19

Hilfsmitteln ist dies zumindest aufwändig und nicht elegant. Ähnliche Fragestellungen lassen sich ableiten: Gibt es Lösungen zu

$$100a + b = (a - b)^2$$

$$100a + b = a^2 + b^2 \qquad 100a + b = a^2 - b^2 \qquad 100a + b = b^2 - a^2$$

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, sollte zunächst die mögliche Lösungsmenge eingegrenzt werden. Dazu kann man zunächst auch den einfacheren Fall analysieren, wenn a und b einstelligen Zahlen 0, 1, ..., 9 sind.

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise: Laut Aufgabenstellung sind einstellige Zahlen *a* und *b* zu suchen, die die Gleichung $10a + b = a^2 + b^2$ erfüllen. Natürlich ist es kein Problem, für die zehn Fälle *a* = 0, 1, ..., 9 auszuprobieren, ob es eine passende ganze Zahl *b* gibt. Doch zunächst soll die Zahl der Fälle reduziert werden:

Die Ausgangsgleichung ist äquivalent zu

$$a \cdot (10 - a) = b \cdot (b - 1)$$

Die rechte Seite ist als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen stets geradzahlig. Da *a* und 10 – *a* bzgl. Division durch 2 den gleichen Rest lassen, muss *a* ebenfalls geradzahlig sein. Die Anzahl der zu probierenden Fälle hat sich damit bereits halbiert.

Für *a* = 8 (oder *a* = 2) ist die linke Seite durch 16 teilbar – im Widerspruch zur rechten Seite, die nicht durch 16 teilbar sein kann.

Folglich verbleiben die Fälle *a* = 0, 4, 6, doch nur *a* = 0 führt zu den trivialen Lösungen 01 bzw. 00.

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen der Form $10 \cdot a + b$ mit einstelligen Zahlen *a* und *b*, die die Bedingung $10a + b = b^2 - a^2$ erfüllen.

Lösungshinweise: In analoger Weise wie oben lässt sich die Ausgangsgleichung umformen zu

$$a \cdot (10 + a) = b \cdot (b - 1)$$

Wieder muss a geradzahlig sein. Weiter weiß man, dass die rechte Seite für einstelligen Zahlen b nicht größer als $9 \cdot 8 = 72$ sein kann. Damit kann *a* nicht größer als 5 sein. Folglich muss man nur die Zahlen *a* = 0, 2, 4 probieren. Außer den trivialen Lösungen 00 und 01 findet man noch die Lösung 48, denn es gilt $8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$.

Oft gelingt dies durch Faktorisierung mit anschließender Diskussion der zulässigen Teiler. So auch bei der

Aufgabe MO520941(a). Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen *z*, die größer als ihre Spiegelzahl *u* sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungshinweise: Setzt man $z = 10a + b$ mit den Ziffern *a* und *b*, so sind also die Zahlen *z* gesucht, für die es eine ganze Zahl *k* gibt mit

$$\begin{aligned} k^2 &= (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = (10a+b-10b-a)(10a+b+10b+a) \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung eine Quadratzahl wird, muss 11 ein Teiler von $a + b$ sein und folglich gilt $a + b = 11$. Damit ist die Lösungsmenge schon so stark eingeschränkt, dass nun ein systematisches Probieren praktikabel erscheint. (Lösung: $z = 65$) ❑

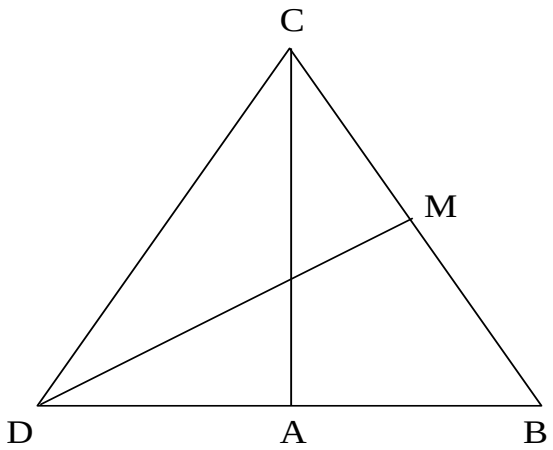
Auch die Suche nach allen zweistelligen Zahlen, deren Quadrat gleich der 3. Potenz ihrer Quersumme ist, kann durch eine Vorüberlegung drastisch eingeschränkt werden. Sind wieder *a* und *b* die Ziffern der Zahl, so soll also gelten: $(10a+b)^2 = (a+b)^3$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{10a+b}{a+b}\right)^2 = a+b.$$

Also muss die Quersumme eine Quadratzahl sein, und dafür kommen für zweistellige Zahlen nur 1, 4, 9 oder 16 in Frage. Dann ist aber $(10a + b)^2$ eine der Zahlen 1, 4^3, 9^3 bzw. 16^3 und damit genügt es, die Fragestellung für die Zahlen 1, 2^3, 3^3 und 4^3 zu prüfen. Nur 27 ist Lösung, wie eine Probe bestätigt. ❑

Die **Aufgabe A6-2** zeigte Probleme in der Interpretation der Beweisstruktur bei Sätzen mit „... genau dann, wenn ...“. Hier sind prinzipiell zwei Beweisschritte auszuführen! Dabei werden solche Aufgaben in den Mathematik-Olympiaden häufig gestellt.

Aufgabe MO410923. Es sei *ABC* ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei *A*, der Winkel $\angle ABC$ sei größer als der Winkel $\angle ACB$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$ schneide die Verlängerung der Seite $\overline{BA}$ in *D*.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck *BCD*



genau dann gleichseitig ist, wenn $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert.
Lösungshinweise: Eine Skizze hilft dem Aufgabenverständnis. Der Beweis schließt nun zwei Behauptungen ein:

(1) Wenn das Dreieck *BCD* gleichseitig ist, dann ist $\overline{AC}$ die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BCD$.

(2) Wenn $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert, dann ist das Dreieck gleichseitig.

Zu (1): Wenn das Dreieck *BCD* gleichseitig ist, dann sind die Dreiecke *ABC* und *ADC* kongruent (Kongruenzsatz ssw mit Verwendung des größten Innenwinkels). Damit folgt unmittelbar, dass $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert.

Zu (2): Wenn $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert, so sind die Dreiecke *ACD* und *ABC* kongruent (Kongruenzsatz wsw) und folglich gilt $|BC| = |DC|$. Da ferner D auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ liegt, gilt auch $|DB| = |DC|$. Also ist das Dreieck *DBC* gleichseitig. ❑

Die logische Verknüpfung „genau dann wenn“ kann natürlich im Beweis konsequent fortlaufend verwendet werden.

Aufgabe MO420923. Bei einem Viereck bezeichnen wir die beiden Strecken, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten verbinden, als Mittellinien. Beweisen Sie: Die Mittellinien eines Vierecks sind genau dann gleich lang, wenn seine Diagonalen senkrecht zueinander sind.

Lösungshinweise: Die Mittellinien liegen aufgrund ihrer Definition parallel zu den entsprechenden Diagonalen. Deshalb ist das Viereck *PQRS* stets ein Parallelogramm. Damit findet man: Die Mittellinien sind (als Diagonalen eines Parallelogramms) genau dann gleich lang, wenn das Parallelogramm ein Rechteck ist, also genau dann, wenn die Diagonalen des Vierecks *ABCD* senkrecht zueinander sind. ❑

Die Umformung der Summendarstellung in eine Summe von Differenzen in Aufgabe 5-5Ac) führt zu einer einfachen Ungleichung, weil sich viele Terme auslöschen. Dieser Ansatz hat viele vergleichbare Anwendungen.

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Lösungshinweise: Gleich vorweg – die Berechnung des Produktes mittels Taschenrechner oder Computer gilt nicht als Beweis! Man setze das Produkt der linken Seite der Ungleichung gleich *x* und definiere eine Zahl *y* durch

$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101}$. Dann ist offensichtlich $x < y$, denn jeder Faktor von y ist größer als der entsprechende Faktor von x. Die Struktur von y ist gerade so gewählt, dass folgende Ungleichung gilt:

$$x^2 < x \cdot y = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

woraus, die Behauptung unmittelbar folgt. ❑

Rückblick auf Olympiade-Aufgaben

Aufgabe MO540934. Gegeben sind drei positive Zahlen *g, b* und *f*, für die

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

gilt.

(a) Geben Sie zwei Beispiele für je drei positive ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft an.
(b) Beweisen Sie, dass für positive reelle Zahlen *g*, *b* und *f*, die diese Gleichung erfüllen, stets auch $g + b \geq 4f$ gilt.

Lösungshinweise: Es ist nicht schwierig, Beispiele für die angegebene Gleichung zu finden, so z.B. (2; 2; 1) oder (6; 3; 2).

Für Teil b) forme man die Gleichung um zu

$$f = \frac{gb}{g+b}.$$

Weil *g* und *b* positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zu $(g+b)^2 \geq 4gb$. Dies wiederum ist gleichbedeutend zu $(g-b)^2 \geq 0$, was für alle reelle Zahlen *g* und *b* erfüllt ist. ❑

Aufgabe MO561024. Gegeben sind zwei positive rationale Zahlen *a* und *b* mit $a + b = 2$. In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{3+a} + \frac{2}{3+b}$$

untersucht werden.

(a) Gibt es positive rationale Zahlen a und b, für welche die Werte der linken und der rechten Seite der Ungleichung gleich sind?

(b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung?

Lösungshinweise: Für $a = b = 1$ findet man eine Antwort auf den Teil a). Um die Ungleichung zu beweisen, forme man äquivalent um (unter Beachtung, dass die Nenner jeweils positive Zahlen sind), bis man die Ungleichung

$$(3+a)\cdot(3+b)\geq 4\cdot(1+a)\cdot(1+b)$$

erhält. Nun gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, den Beweis abzuschließen.

(1) Man ersetze a + b = 2 die Variable b durch 2 – a und erhält die quadratische Ungleichung $3a^2-6a+3=3\cdot(a-1)^2\geq 0$. Diese ist für alle rationalen Zahlen *a* erfüllt.
(2) Man gehe von einem Zahlenpaar aus, für das die Gleichheit gilt und schreibe $a = 1 + m$ und $b = 1 – m$ mit einer beliebigen rationalen Zahl *m*. Offenbar gilt weiterhin $a + b = 1 + m + 1 – m = 2$. Damit vereinfacht sich die Ungleichung zu $3\cdot m^2\geq 0$. Dies ist für alle rationalen Zahlen *m* erfüllt. ❑

Hinweis: In der Musterlösung wird ausdrücklich erwähnt, dass die Einschränkung auf rationale Zahlen nur vorgenommen wurde, um nicht dem Schulstoff vorzugreifen. Selbstverständlich gilt diese Ungleichung auch für positive reelle Zahlen.
Diese beiden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade motivieren einmal mehr, sich mit Ungleichungen zu beschäftigen.

Ungleichungen[2]

Der Nachweis von Ungleichungen in mathematischen Wettbewerben wird in den Musterlösungen häufig durch trickreiche Herleitungen geführt.

Aufgabe 381043. Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets größer oder gleich 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen *x, y* und *z* stets

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2\geq 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2+y^2+z^2-10\cdot(x+y+z)+75\geq 0$$

Setzt man nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt unmittelbar die Behauptung.

[2] Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 22.06.19

❑

Dieser Lösungsansatz setzt voraus, dass man die Struktur der Ungleichung „durchschaut“ hat und das Lösungstripel, dass die Gleichheit erzeugt, errät.

Lösungsvariante: Geht man von der Gültigkeit der Abschätzung $(a + b)^2 \geq 2ab$ für beliebige reelle Zahlen aus, findet man zunächst

(1) $$2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 2 \cdot (xy + yz + xz).$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + yz + xz) = 225.$$

Die Addition von (1) und (2) führt zur Behauptung. ❑

Gewusst wie – wenn man solche Beispiele kennt, kann man derartige Lösungswege finden. Diskutiert werden sollen hier aber Aufgabenbeispiele, für die allgemeinere Lösungsansätze versucht werden können.

Eine häufig einsetzbare Methode für den Beweis von Ungleichungen ist das Folgern aus der Behauptung: Man forme die zu beweisende Ungleichung solange um, bis die Gültigkeit der entstehenden Ausdrücke aufgrund bekannter Sachverhalte leicht zu erläutern ist. Hierbei ist auf die ausdrücklichen Hinweise zur Äquivalenz der Umformungen zu achten. Besser ist es deshalb, den eben beschriebenen Weg zur Lösungsfindung als Konzept aufzufassen und in der Lösungsdarstellung von den offensichtlichen Sachverhalten ausgehend die Behauptung herzuleiten. Beispiel:

Aufgabe. Man zeige für alle reellen Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0 .$$

Die Lösungsfindung gelingt nach Multiplikation mit 2 und „geschicktem Gruppieren“:

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = \\ &\quad a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = \\ &\quad (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Umformung ist offensichtlich, weil die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind. Die verwendeten Umformungen sind äquivalent, also sind die Schritte auch umkehrbar, so dass man die Lösungsdarstellung vorteilhaft mit der letzten Zeile beginnt: Für reelle Zahlen a, b, c gilt stets

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$. Durch Ausmultiplizieren der Quadrate, Zusammenfassen gleicher Summanden und Division durch 2 gelangt man zur behaupteten Ungleichung, wodurch diese bewiesen ist. ❑

Lassen sich Sonderfälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt, leicht angeben, kann man darauf eine erfolgsversprechende Substitution anwenden: Offensichtlich gilt für $a = b = c$ das Gleichheitszeichen. Betrachtet man den Fall $a \neq b = c$, so lautet die zu beweisende Ungleichung

$$a^2+2\cdot b^2-2\cdot ab-b^2 \geq 0.$$

Jetzt wird $a^2-2\cdot ab+b^2=(a-b)^2 \geq 0$ offensichtlich und vielleicht gelingt es damit, den Lösungsansatz von oben zu vermuten.

Von besonderem Interesse sind die Situationen, die von dieser Gleichheit abweichen. Es seien deshalb x und y reelle Zahlen mit $b = a + x$ und $c = a + y$. Substituiert man nun damit b und c in der behaupteten Ungleichung, so findet man

$$a^2+(a+x)^2+(a+y)^2-a(a+x)-a(a+y)-(a+x)(a+y)=x^2+y^2-xy$$

Aus der Aufgabenstellung mit drei Variablen wurde ein zweidimensionales Problem! Wenn nachgewiesen wird, dass die rechte Seite für alle reellen x und y nichtnegativ ist, wäre auch das ursprüngliche Problem gelöst. Es gilt wirklich:

$$x^2+y^2-xy \geq x^2+y^2-2\cdot|xy|=(|x|-|y|)^2 \geq 0.$$

Ungleichungen mit quadratischen Termen lassen sich oftmals sogar auf ein eindimensionales Problem zurückführen, wenn man den Ausdruck als Funktion einer der Variablen auffasst, beispielsweise

$$f(a)=a^2-a\cdot(b+c)+b^2+c^2-bc$$

Um die Lösungen dieser quadratischen Funktion zu analysieren, betrachte man deren Diskriminante $D=-3(b-c)^2$. Ist b von c verschieden, so ist die Diskriminante negativ und es gibt folglich keine Nullstellen. Da aber für große a der Funktionswert $f(a)$ positiv ist, gilt also für alle a: $f(a) > 0$. Ist dagegen $b = c$, so findet man genau eine Nullstelle und es gilt folglich für alle a: $f(a) \geq 0$. Insgesamt ist die Ungleichung damit bewiesen.

Für Wettbewerbsaufgaben werden solche Beweise interessanter, wenn man bekannte Ungleichungen anwenden kann. So ist die Aufgabe

MO450922/451022 für positive a und b äquivalent zu

$$4 \le \left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right) = ab+\frac{1}{ab}+2\,.$$

Für positive reelle Zahlen x kann die Ungleichung $x+\frac{1}{x} \ge 2$ als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, womit die behauptete Ungleichung für positive a und b bereits bewiesen ist. Um diese Hilfsaussage zu beweisen, genügt deren Multiplikation mit x, um ein vollständiges Quadrat zu erkennen. Gleichwertig dazu kann man auch die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel anwenden: Für alle positiven reellen Zahlen gilt

$$\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} \le \frac{x+\frac{1}{x}}{2}\,.$$

Eine Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes führt zu folgender Aussage:

$$2^n \le \left(a_1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\left(a_2+\frac{1}{a_n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+\frac{1}{a_1}\right)$$

Eine andere Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes liefert folgender Aussage:

Aufgabe. Man beweise: Für positive Zahlen a, b und c gilt stets $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3$.

Lösungshinweise: Für $a = b = c$ ist nicht zu beweisen und für $b = c$ ergibt sich gerade der Hilfssatz für $x=\frac{a}{b}$. Der allgemeine Fall führt zu der Behauptung:

$$3 \le \frac{a^2b+b^2c+ac^2}{abc}\,.$$

Mit Hilfe der Mittelungleichung erweist sich diese Ungleichung als einfache Folgerung:

$$abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = \sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a} \le \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} \qquad \square$$

Natürlich hätte man auch gleich die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel auf die Ungleichung anwenden können:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} \le \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}$$

Nun sollte es nicht schwerfallen, diese Ungleichung auf mehr als 3 Summanden zu erweitern, d.h. es gilt auch für positive reelle Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* bzw, a_1, a_2, ... a_n ($n > 1$)

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4; \qquad \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}\geq n$$

Diese Aufgaben bestätigen wieder einmal, dass die intensive Nachbereitung von Aufgaben vergangener Olympiaden hilfreich ist. Denn wer sich die Lösungsmethode erarbeitet hat, wird mit folgender Aufgabe (bei der linken Ungleichung) keine Probleme haben:

Aufgabe MO480935. Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen *a*, *b*, *c* mit $a + b + c = 1$ stets $\frac{1}{3}\leq a^2+b^2+c^2\leq 1$ gilt.

Das Finden von quadratischen Ergänzungen erweist sich oft als zielführende Lösungsstrategie.

Aufgabe MO480923(b). Zeigen Sie, dass für beliebige Paare (a ; b) reeller Zahlen stets $a+b\leq a^2+b^2+\frac{1}{2}$ gilt.

Lösungshinweise: Die Behauptung wird äquivalent zu $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ umgeformt und die Gültigkeit wird offensichtlich. ❑

Aufgabe. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left(1+a+a^2\right)^2\leq 3\cdot\left(1+a^2+a^4\right)$$

Für alle reellen Zahlen *a*.

Lösungshinweise: Durch (äquivalentes) Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gelangt man zu der Ungleichung

$$a^4-a^3-a+a\geq 0.$$

Nun erkennt man die Faktorisierungsmöglichkeit:

$$(a-1)\cdot\left(a^3-1\right)\geq 0.$$

Diese Ungleichung ist für jede reelle zahl a erfüllt:

- Ist a < 1, dann sind beide Faktoren negativ und deren Produkt ist positiv.
- Ist a > 1, dann sind beide Faktoren positiv und deren Produkt ist positiv.
- Ist a = 1, dann sind beide Faktoren gleich Null und die Gleichheit gilt.

❑

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$ für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen *x*.

Lösungshinweise: Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit x^4 führt zu einem Polynom, für das wieder eine Faktorisierung gelingt. Die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu

$$\left(x^9 - 1\right) \cdot \left(x^3 - 1\right) \geq 0 .$$

Nun schließt man den Beweis wie eben ab. ❑

Kleine Änderungen in der Aufgabenstellung können zu ganz unterschiedlichen Ergebnissen führen:

Aufgabe MO301231. Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen *a, b, c, d* stets folgende Ungleichungen gelten:

(1) $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$,
(2) $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$.

Lösungshinweise:
zu (1) Man nehme an, es gelte $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} > \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$. Da beide Seiten positiv sind, darf quadriert werden und man erhält

$$ac + 2\sqrt{abcd} + bd > (a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

also

$$2\sqrt{abcd} > ad + bc .$$

Doch diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu $0 > \left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2$, was offenbar einen Widerspruch darstellt. Also gilt die Behauptung.

zu (2) Setzt man $a = b = 2$ und $c = d = 1$, so wird die Ungleichung widerlegt.❑

Gewusst wo – die Suche nach geometrischen Örtern[3]

[3] Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 22.06.2019

In der 52. MO wurde in zwei Aufgaben nach einem *geometrischen Ort* gefragt, d.h. nach der Menge aller Punkte, die gewisse Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe MO520936. Es sei k ein Halbkreis über einem Durchmesser AB. Auf k werde ein weiterer von A und B verschiedener Punkt C gewählt. Wir betrachten den aus den Strecken AC und CB bestehenden Streckenzug und bezeichnen mit X denjenigen Punkt, welcher diesen Streckenzug in zwei Teile gleicher Länge zerlegt.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Punkte X, wenn C die von A und B verschiedenen Punkte auf dem Halbkreis k durchläuft.

Hinweis: Der geometrische Ort der Punkte X bezeichnet hier die Menge all dieser Punkte bei allen möglichen Wahlen des Punktes C.

Aufgabe MO520946. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Bestimmen Sie die Menge aller derjenigen Punkte P im Inneren des Dreiecks ABC, für die es einen Punkt X auf der Geraden BC und einen Punkt Y auf der Geraden CA derart gibt, dass folgende drei Bedingungen simultan erfüllt sind:

(1) Der Punkt X ist vom Punkt C verschieden.
(2) Die Gerade XY ist parallel zur Geraden AB.
(3) Die Winkel $\angle XPC$ und $\angle CPY$ sind gleich groß.

Hinweis: Zwei Geraden sind auch dann parallel, wenn sie zusammenfallen.

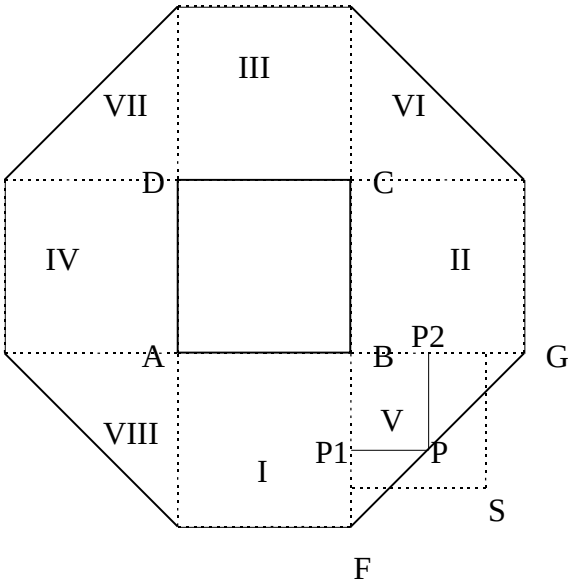
Der einfachste geometrische Ort ist der Kreis (Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben). Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Ellipse sind weitere Beispiele von bekannten geometrischen Orten. Bei der Suche nach den geometrischen Orten sind stets die folgenden vier Aspekte explizit darzustellen:

- eindeutige Beschreibung der gesuchten Menge,
- Nachweis, dass ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, in dieser Menge enthalten ist,
- Nachweis, dass alle Punkte außerhalb dieser Menge nicht allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen,
- Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Vorschrift erzeugt werden kann.

An folgenden Beispielen können diese vier Schritte demonstriert werden.

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Man ermittle den geometrischen Ort aller Punkte in der Ebene des Quadrates, für die die Summe der Abstände von den Geraden *AB*, *BC*, *CD* und *DA* gleich 4 ist!

Lösungshinweise: Die Geraden *AB*, *BC*, *CD*, *DA* zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder (in der Abbildung mit I, ..., VIII bezeichnet), wobei die Punkte der Trennungsgeraden zu allen ihnen anliegenden Feldern gehörig betrachtet werden. Weiterhin bezeichne $d(P,XY)$ den Abstand des Punktes *P* von der Geraden *XY*.



Man betrachte zunächst Feld I. Wenn *P* ein Punkt aus dem Feld I ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

(1) $d(P;AB)+d(P;BC)+d(P;CD)+d(P;DA)=4$

Weil *P* zwischen den parallelen Geraden *BC* und *AD* liegt, gilt

(2) $d(P;BC)+(P;DA)=1.$

Da AB zu CD parallel ist und P in der durch AB begrenzten Halbebene liegt, in der CD nicht liegt, gilt weiterhin

(3) $d(P;CD)=d(P;AB)+1$

Wegen (1) bis (3) findet man die Aussage $d(P;AB)=1$. Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf der Parallelen zu *AB* im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Man betrachte nun das Feld V. Wenn *Q* ein Punkt aus dem Feld V ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

(4) $d(Q;AB)+d(Q;BC)+d(Q;CD)+d(Q;DA)=4$

Analog zu den Untersuchungen im Feld I findet man:

(5) $d(Q;CD)=d(Q;AB)+1$; $d(Q;DA)=d(Q;BC)+1$

Man zeige nun: Ist *P* ein Punkt der Strecke *FG*, dann gilt:

$d(P;AB)+d(P;BC)=1$

Da *FG* parallel zu *AC* verläuft, beträgt der Winkel $\angle GFB = 45^o$. Seien nun P_1 der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *BC* und P_2 der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *AB*. Das Dreieck FPP_1 ist nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, d.h., es gilt: $\overline{PP_1} = \overline{P_1F}$. Da weiterhin *AB* senkrecht auf *BC* steht, ist P_1PP_2B ein Rechteck, also gilt:

$$\overline{BP_1} = \overline{P_2P}$$

also $$\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = \overline{BF}$$

Wegen der vorangegangen Betrachtungen erhält man wie behauptet:

$$\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = d(P;AB) + d(P;BC) = \overline{BF} = 1$$

Über Dreiecksungleichungen zeigt man nun leicht, dass für jeden Punkt *S*, der im Feld V, aber nicht auf der Strecke *FG* liegt, die Abstandssumme von 1 verschieden ist. Die Betrachtungen im Feld V beweisen, dass *Q* auf der zu *AC* parallelen Diagonalen des Quadrates liegt, das durch Spiegelung aus *ABCD* an *B* entsteht.

Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der bereits gefundenen Geraden in I bis IV übereinstimmen. Im Innern des Quadrates können offenbar keine gesuchten Punkte liegen, da hier die Summe der Abstände dieser Punkte von den Quadratseiten genau den Wert 2 annimmt.

Somit besteht der gesuchte geometrische Ort aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte sämtlich auf einem Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates liegen und von dessen Seite jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates parallel und kongruent ist. ❑

Aufgabe. Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit der Grundfläche *ABCD* und der Kante *AE*. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken *XY*, wobei *X* ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale *AC* und *Y* ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale *FH* ist.

Lösungshinweise: Durch Auswahl spezieller Situationen findet man eine Vermutung über den gesuchten geometrischen Ort. Wählt man zum Beispiel *X = A* und *Y = F*, so fällt *XY* mit der Flächendiagonalen der Seitenfläche *ABFE* zusammen und der Mittelpunkt ist von *XY* ist der Flächenmittelpunkt M_{ABFE}. Leicht sieht man, dass auch die Flächenmittelpunkte M_{BCGF}, M_{CDHG} und M_{DAEH} in der gesuchten Menge enthalten sind. Somit liegt die Vermutung nahe, dass das Quadrat mit diesen vier Flächenmittelpunkten mit allen seinen inneren und Randpunkten der geometrische Ort sein könnte.

Wählt man die Punkte X und Y entsprechend der Aufgabenstellung, so liegt der Mittelpunkt der Verbindung XY in der Ebene, in der die genannten Flächenmittelpunkten liegen. Mittels Strahlensatz ist nachweisbar, dass der Mittelpunkt von XY nicht außerhalb der beschriebenen Fläche liegen kann.

Wählt man einen beliebigen Punkt P außerhalb der beschriebenen Menge aus, so zeigt man, dass bei jeder Auswahl eines Punktes X auf AC die Verbindung XP die Gerade FH nicht schneiden kann.

Wählt man einen beliebigen Punkt P der Menge aus, so schneidet die Ebene durch die Punkte A, C und P die Gerade FH in einem Punkt P'. Die Gerade $P'P$ schneidet wiederum die Gerade AC, da $P'P$ nicht parallel zu AC liegt. Somit gibt es zu jedem Punkt P die Punkte $X = P''$ und $Y = P'$, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. ❑

Aufgabe. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller von einem festen Punkt A ausgehenden Sehnen in einem Kreis K.

Lösungshinweise: Wählt man den Durchmesser als ausgehende Sehne mit den Endpunkten A und B, so ist der Mittelpunkt M_K des Kreises Element des geometrischen Ortes. „Wandert“ der von A verschiedene Endpunkt entlang der Kreisperipherie in Richtung A, so erzeugen die Mittelpunkte eine „gewölbte“ Bahn, sodass die Vermutung aufgestellt werden kann, dass der geometrische Ort der Kreis durch A und M_K mit halben Radius des gegebenen Kreises K ist.

Wir wählen einen beliebigen von A verschiedenen Punkt S auf dem Kreis. Nach Satz des Thales das Dreieck ABS rechtwinklig. Die Verbindung des Mittelpunktes der Sehne M_{AS} mit dem Mittelpunkt des Kreises M_K verläuft nach Strahlensatz parallel zur Sehne BS. Somit ist das Dreieck AM_KM_{AS} ebenfalls rechtwinklig. Also liegt M_{AS} auf dem Thaleskreis über AM_K.

Wählen wir einen anderen Punkt P der Ebene, zeichnen die Gerade AP über P hinaus und markieren den Punkt S' mit $|AP| = |PS'|$, so liegt dieser Punkt entweder außerhalb oder innerhalb des beschriebenen Kreises. Dann liegt aber der Punkt S' entsprechend außerhalb oder innerhalb des Kreises K, d.h. P gehört nicht zum gesuchten geometrischen Ort.

Wählt man dagegen einen beliebigen Punkt P der beschriebenen Menge aus, so findet man mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von AP über P hinaus und der Kreisperipherie den zugehörigen Punkt S, der P gemäß der Aufgabenstellung definiert. ❑

Aufgabe MO410946. Es sei *P* innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen *AP* bzw. *BP*, die beide auf derselben Seite der Geraden *AB* liegen.

Bestimmen Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn *P* die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.

Lösungshinweise: Wählen wir *P* = *A*, so entartet das Dreieck AO_1P zum Punkt *A* und das Dreieck BO_2P fällt mit dem Dreieck *ABC* zusammen. Der Mittelpunkt der Seite *AC* gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir *P* = B, so entartet das Dreieck BO_2P zum Punkt *B* und das Dreieck AO_1P fällt mit dem Dreieck *ABC* zusammen. Der Mittelpunkt der Seite *BC* gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir schließlich den Mittelpunkt der Seite AB als Punkt P, so liegt der Mittelpunkt von $\overline{O_1O_2}$ ebenfalls auf der Mittellinie des Dreiecks ABC. Damit können wir vermuten, dass die Mittellinie des Dreiecks ABC der gesuchte geometrische Ort ist. Der Beweis ist nun recht einfach zu vollenden. ❑

Zum Abschluss des KZM-Jahres noch eine Ungleichung zur mathematischen Unterhaltung: Man beweise

$$4 < \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}}_{2019\,Wurzeln} + \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}}_{2019\,Wurzeln} < 5$$

Seminarhinweis

Das 1. Chemnitzer Seminar im Schuljahr 2019/20 findet am Samstag, dem 21. September 2019 statt. Alle Teilnehmer des diesjährigen und des neuen KZM der Klassen 9/10 sind dazu hiermit bereits herzlich eingeladen. Wir werden zu Gast an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz sein. Die organisatorischen Hinweise und das Programm werden mit Heft 7/2019 Mitte August zugesandt.

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de

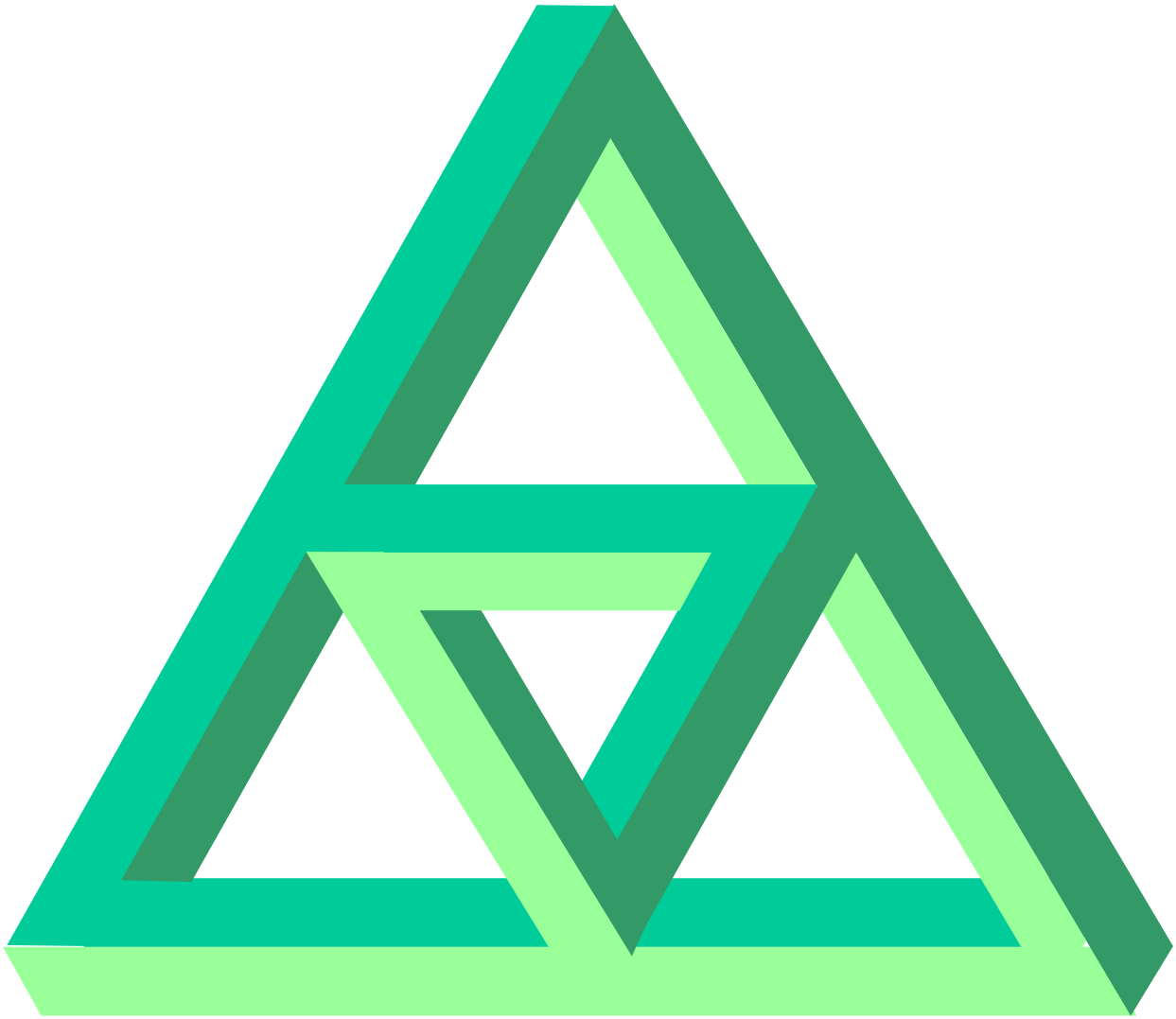
Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz °

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 6/2019 18. Jahrgang

Willkommen zum Korrespondenzzirkel im Schuljahr 2019/20

Zur individuellen Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler bietet das Bezirkskomitee Chemnitz „Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich interessierter und begabter Schüler“ den Korrespondenzzirkel „Mathematik“ ab der Klassenstufe 9 sachsenweit an. Der Zirkel orientiert sich an mathematischen Problemen, die neben der Vermittlung von Kenntnissen zu mathematischen Begriffen, Sätzen und Verfahren durch wettbewerbstypische Aufgabenstellungen die Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe (Mathematik-Olympiaden und Bundeswettbewerb „Mathematik“) unterstützen. Jeder Interessierte kann in seiner (oder in einer höheren) Klassenstufe teilnehmen und ist hiermit herzlich dazu eingeladen.

Für die Teilnahme ist eine Anmeldung mit der vollständig ausgefüllten Teilnahmeerklärung (s. S. 11) erforderlich. Jeder Teilnehmer erhält im Verlaufe des Schuljahres 7 Serien zugesandt, die Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad umfassen. Das Spektrum reicht von „Einstiegsfragen“ über typische Wettbewerbsaufgaben bis zu komplexen Themen. Es wird empfohlen, zu allen Aufgaben Lösungsideen einzureichen, auch wenn nach eigenem Empfinden keine vollständige Lösung erreicht wurde. Bereits geeignete Beispiele, die Bearbeitung von Spezialfällen oder erste Schritte zum Beweis werden nicht nur wohlwollend bewertet, sondern dienen auch der Übung einer teamfähigen Problemlösung – nur was man an Lösungsansätzen formulieren kann, lässt sich in eine Diskussion einbringen!

Die eingereichten Lösungen werden korrigiert, für die Selbsteinschätzung kommentiert, mit Punkten bewertet und zusammen mit Lösungshinweisen zurückgegeben. Zu ausgewählten Aufgaben werden in den Heften methodische Einführungen oder weiterführende Ergänzungen gegeben. Diese sollen vor allem zur individuellen Beschäftigung anregen. Insbesondere wird diese Vertiefung durch die Wahlaufgaben gefördert.

An vier Sonnabenden wird in Chemnitz zu Seminaren eingeladen, auf denen Aufgaben diskutiert und Anwendungsfälle für Mathematik vorgestellt werden. Bitte die (meist kurzfristigen) Seminareinladungen beachten! Für alle, denen der Weg zu den Veranstaltungsorten zu weit ist, werden ausgewählte Aspekte der Seminare in diesen Heften zusammengefasst. Zusätzlich wird der Zirkel durch Informationen wie Aufgaben, Musterlösungen und statistischen Auswertungen der Mathematik-Olympiade, des Bundeswettbewerbs Mathematik und anderer Wettbewerbe sowie durch historische Bezüge oder Literaturhinweise ergänzt.

Anregungen der Teilnehmer zur inhaltlichen Gestaltung sind jederzeit willkommen. Interessante Themen, originelle Aufgaben oder Informationen rund um Mathematik werden gern aufgenommen und weitergegeben.

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [1]

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form haben wie das große Polygon selbst.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen: Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“ Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

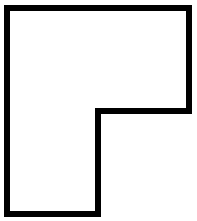


Abbildung 1a

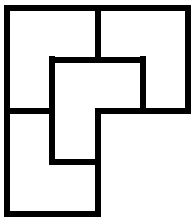


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil man die Ausgangsfigur in 4 Stücke zerlegen muss.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem zweiteiligen Gerücht hat man ständig zu tun: Wenn man ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten zusammenfaltet und dann aufschneidet, erhält man zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden. Bezeichnet *a* die Länge der langen Seite und *b* die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a/2}{b}, \qquad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst.

Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht.

[1] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990.

Von den dreiteiligen Gerüchten sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn man die Seitenlängen geeignet wählt – aber wie?

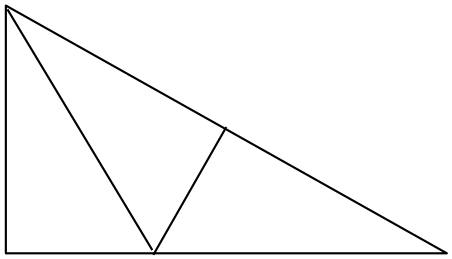
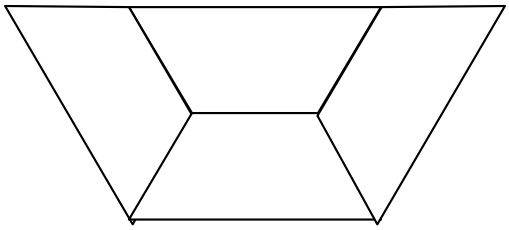
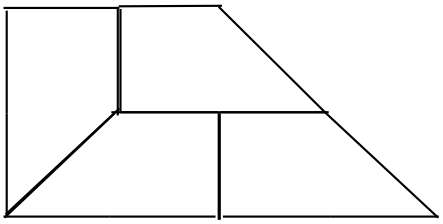


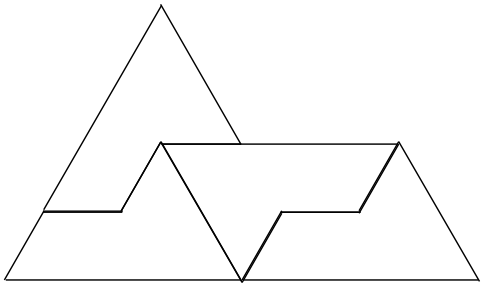
Abbildung 2

Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck und jedes Parallelogramm (sogar auf zwei verschiedene Weisen) gehören dazu. Aber auch andere Vierecke lassen sich beispielsweise entsprechend zerlegen:

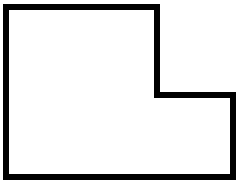


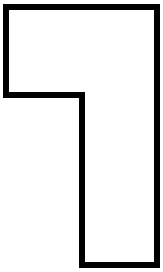


Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:



Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert (man finde diese):

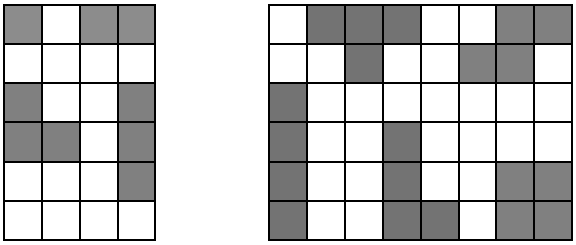




Für jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich ein Parallelogramm angeben, dass sich als ein n-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Kann man dagegen bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es für jedes vorgegebene n ein n-teiliges Gerücht wird? Für $n = 3$ und $n = 4$ wurden oben die Lösungen besprochen. Auch $n = 2$ lässt sich einfach lösen. Aber für $n = 5$ oder größere n?

Hat man ein n-teiliges Gerücht, kann man daraus schnell ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder entsprechend zerlegen.

Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn man sich auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegt. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), kann man den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jedes natürliche n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn man beispielsweise fordert, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es 2 verschiedene Triominos und 5 verschiedene Tetrominos.



n-minos für n = 1, 2, 3, 4

Welche Polyminos sind geometrische Gerüchte, d.h. welche Form kann man vergrößern, indem man nur Polyminos der gleichen Form zusammensetzt?

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten kann man ein großes Quadrat zusammensetzen.
- Aus 4 Domino-Steinen kann man ein 2 x 4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.
- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht.
- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigt man bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern. Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden (warum nicht?).

Setzt man 5 Quadrate zusammen, erhält man Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur 4 davon sind Gerüchte.

So könnte man die Reihe der n-minos fortsetzen. Da es aber bereits 35 verschiedene Formen von Hexominos gibt ($n = 6$), sollte man diese Vielfalt wieder einschränken. So sind 11 dieser Hexominos Würfelnetze, d.h., diese könnte man zu einem Würfel falten und zusammenkleben. Damit ergibt sich folgende interessante Frage: Wie viele der Würfelnetze sind geometrische Gerüchte?

Ungeordnete Reihenfolgen [2]

Man betrachte unterschiedliche Reihenfolgen der Ziffern 1 bis 9. Insgesamt gibt es 9! = 362880 verschiedene Möglichkeiten, diese Ziffern anzuordnen. Die natürliche Reihenfolge des Abzählens 1 2 3 4 5 6 7 8 9 weckt sicher wenig Aufmerksamkeit. Für die Anordnung 1 3 5 7 9 2 4 6 8 findet man leicht eine Beschreibung. Reihenfolgen wie 1 9 2 8 3 7 4 6 5 heißen alternierend, und zwar in dem Sinne, dass es in dieser Anordnung keine drei aufeinanderfolgende Ziffern *a, b, c* gibt, für die $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt. Merkwürdig sieht folgende Reihenfolge aus: 8 3 1 5 9 6 7 4 2; man finde eine Beschreibung[3]!

Man kann nun folgende Fragen stellen: Was ist vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet die „unnatürlichste“ Reihenfolge? Für welche Reihenfolge ist die „Unordnung“ am größten?

Um die größte Unordnung zu finden, ist ein Maß notwendig, mit der die (Un-) Ordnung gemessen werden kann. Man untersuche folgenden Ansatz:

Gegeben sei eine Reihenfolge *F* der Ziffern 1 bis 9, geschrieben als $F = F(a_1,...,a_9)$. Man bestimme in dieser Folge von jedem Paar aufeinanderfolgender Ziffern den Betrag der Differenz (d.h. $|a_i - a_{i+1}|$ für *i* = 1, ..., 8) und bilde die Summe *S(F)* aller acht Beträge:

$$S(F) = \sum_{i=1}^{8} |a_i - a_{i+1}| = |a_1 - a_2| + ... + |a_8 - a_9|$$

S(F) sei der Unordnungswert der Reihenfolge *F*, je höher diese Summe, desto größer die Unordnung der Folge.

Die natürliche Reihenfolge hat die Unordnung 8. Es gibt offensichtlich keine Reihenfolge mit kleinerer Unordnung, denn jeder der acht Summanden ist größer oder gleich 1. Diese einfache Folgerung motiviert die Begriffswahl: Die natürliche Ordnung besitzt die geringste Unordnung. Auch die Umkehr der natürlichen Reihenfolge führt zu einer Reihenfolge mit Unordnung 8. Weitere Möglichkeiten kann es aber für die minimale Unordnung nicht geben.

Da es nur endlich viele Anordnungen der 9 Ziffern gibt, gibt es mindestens eine Reihenfolge mit maximaler Unordnung. Eine grobe obere Abschätzung über den maximalen Wert kann man mit $8 \cdot 8 = 64$ angeben, denn jeder der 8 Beträge kann 8 nicht übersteigen. Aber diese Schätzung ist sicherlich viel zu hoch. Wie groß ist aber nun die maximale Unordnung, welche Reihenfolgen haben diese und wie viele derartige gibt es?

[2] Nach Engelhaupt, H. Aufgaben mit Ziffern. In: alpha (1996) 9, S. 22f
[3] Die Ziffern sind alphabetisch geordnet: acht, drei, eins, ...

Ohne Schwierigkeiten erkennt man, dass für eine gegebene Reihenfolge *F* die Umkehrung der Ziffernfolge den Wert der Unordnung *S(F)* nicht ändert. Ebenso einfach findet man, dass das Ersetzen jeder Ziffer *z* einer gegebenen Reihenfolge durch die Ziffer $z' = (10 - z)$ die Unordnung nicht verändert. Sind nämlich *a* und *b* zwei benachbarte Ziffern, so beträgt deren Beitrag zur Summenbildung nach dem Ersetzen

$$|(10-a)-(10-b)| = |b-a| = |a-b|,$$

d.h. alle acht Beträge und damit deren Summe ändern ihren Wert nicht.

Satz. Jede Folge mit maximaler Unordnung ist alternierend.

Der *Beweis* basiert auf dem Extremalprinzip: Es sei *F* eine Folge mit maximalem Unordnungswert *S(F)* und *F* sei nicht alternierend. Dann enthält *F* drei aufeinanderfolgende Ziffern (hier *a, b* und *c* genannt) für die $a < b < c$ (oder $a > b > c$) gilt. Dann ist der Unordnungswert der Folge *F'*, die aus *F* entsteht, wenn *b* weggelassen wird und damit aus 8 Ziffern besteht[4], ebenfalls *S(F)*, denn die Differenz der in *F'* benachbarten Ziffern *a* und *c* beträgt $c-a=(c-b)+(b-a)$. Setzt man nun *b* an den Anfang der Folge *F'*, so hat diese neue neungliedrige Folge einen größeren Ordnungswert als *F'*, da ja ein positiver Summand zur Zahl *S(F')* hinzukommt. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass *F* eine (neungliedrige) Folge mit maximaler Unordnung ist. ❑

Man betrachte nun eine alternierende Reihenfolge $F = F(a_1,...,a_9)$ mit $a_1 < a_2$. Dann findet man für die Unordnung unter Beachtung der Größenverhältnisse von benachbarten Ziffern den Wert

$$\begin{aligned} S(F) &= (a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_8 - a_9) = \\ &= 2 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7 + a_9) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Unordnung am größten, wenn im ersten Klammerausdruck für die Variablen möglichst große Ziffern gewählt werden (also 6, 7, 8 und 9) und im zweiten Ausdruck die doppelt gezählten Ziffern möglichst klein sind (1, 2, 3). Die maximale Unordnung beträgt dann 39. Beispielsweise realisiert die Reihenfolge 4 9 3 8 2 7 1 6 5 dieses Maximum. Insgesamt gibt es 576 verschiedene Anordnungen der neun Ziffern mit dem Unordnungswert 39 (warum?).

Wie verändert sich die Aufgabe, wenn man die 9 Ziffern im Kreis anordnet? Wie lauten unter diesen Bedingungen der kleinste und der größte

[4] Der Unordnungswert *S(F)* lässt sich in Analogie auf Reihenfolgen mit *n* Zahlen ($n > 1$) verallgemeinern.

Unordnungswert. Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es jeweils, die diese Extremwerte realisieren. (Dabei sollen zwei Anordnungen, von denen sich eine aus der anderen durch eine Drehung erzeugen lässt, nicht als verschieden angesehen werden.)

Man suche nach anderen Definitionen für Unordnung und versuche, dafür die gleichen Fragestellungen nach Extremwerten und Anzahl der möglichen Anordnungen zu beantworten!

Aufgaben Serie 1 (2019/20)

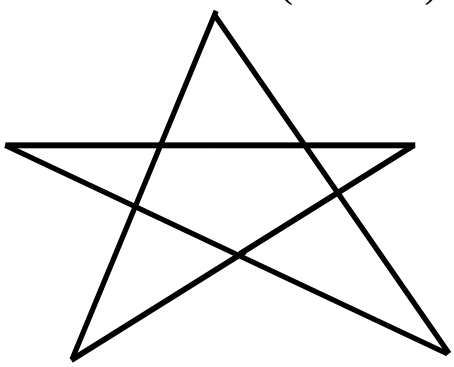
(Einsendungen bis 17. September 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [5])

Aufgabe 1-1.
Zwei Freunde A und B sitzen im Café, A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel (gleicher Größe) voll seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von A. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

(5 Punkte)

Aufgabe 1-2.
Man ermittle die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des dargestellten fünfzackigen Sterns!

(5 Punkte)



Aufgabe 1-3.
Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck DEF mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

(Hinweis: Es ist nachzuweisen, dass das konstruierte Dreieck die geforderte Eigenschaft besitzt). (6 Punkte)

[5] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 1-4.
Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck *ABC*, dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck *ABC* ähnliche Dreiecke zerlegen lässt (d.h. *ABC* ist ein fünfteiliges Gerücht). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 1-5A.
Gegeben sei eine Reihe von 9 nummerierten Plätzen (Platznummern 1 bis 9). Schreibt man auf diese Plätze die Ziffern 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge *F* (jede Ziffer genau einmal) und bezeichnet die Summe aus den neun absoluten Differenzen von Platznummer und Ziffer auf dem Platz mit *U(F)*, so definiert *U(F)* einen Wert der Unordnung von *F*.

(a) Man finde eine Reihenfolge mit dem Unordnungswert 26.

(2 Punkte)

(b) Man beweise: Der Wert der Unordnung U ist stets eine gerade Zahl.

(2 Punkte)

(c) Man finde den maximalen Wert der Unordnung *U*, die unter diesen Bedingungen erreichbar ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1-5B.
Für das Produkt der ersten *n* natürlichen Zahlen schreibt man *n*! („*n*-Fakultät“):

$$n! = 1 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

(a) Man finde die größte ganze Zahl *k*, sodass 2019! durch 2019^k teilbar ist?

(2 Punkte)

(b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a > b > 1$ keine Lösungen *c* besitzt.

(2 Punkte)

(c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

(4 Punkte)

T E I L N A H M E B E D I N G U N G E N

(1) Die Teilnahme am Zirkel kann jederzeit angemeldet werden. Die Teilnahmeerklärung ist möglichst frühzeitig (möglichst **zum Schuljahresende 2018/19**), spätestens aber mit der **ersten Einsendung von Lösungen** an

Dr. N. Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

einzusenden. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung und – falls noch nicht erfolgt – die Zusendung der aktuellen Materialien.

(2) Der Teilnehmer trägt einen jährlichen Unkostenbeitrag in Höhe von **20,00 EUR,** der in Form einer Überweisung unter Angabe des Namens und dem Kennwort **„KZM“ + Klassenstufe** auf das Konto

Kontoinhaber	Bezirkskomitee „Mathematik“
IBAN	DE90 8705 0000 3550 0030 55
SWIFT/BIC-Code	CHEKDE81XXX (Sparkasse Chemnitz)

einzuzahlen ist. Bei späterem Teilnahmebeginn wird ein anteilmäßiger Unkostenbeitrag erhoben.

(3) Die Einsendetermine zu den Serien sind möglichst einzuhalten. Die korrigierten und kommentierten Einsendungen werden mit der übernächsten Serie zurückgegeben.

(4) Bitte bei Lösungseinsendung jedes Blatt mit Namen versehen!

(5) Es besteht die Möglichkeit der elektronischen Einsendung an

norman.bitterlich@t-online.de,

wobei für Anlagen das pdf-Format bevorzugt wird. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung. Die korrigierten Einsendungen werden aber auch in diesem Fall in Papierform zurückgesandt. Per E-Mail können jederzeit Anfragen zum KZM gestellt werden.

(6) Die Rücksendung erfolgt für die Teilnehmer **kostenfrei** über die Fachlehrer der Schule – manchmal dauert das allerdings etwas länger! Wer seiner Einsendung einen ausreichend **frankierten Rückumschlag** (1,45 EUR) oder eine **Briefmarke der Deutschen Post á 1,45 EUR** beilegt, erhält die Postsendung auf direktem Weg an die Wohnanschrift.

T E I L N A H M E E R K L Ä R U N G *

Name, Vorname : . . . . . .

Wohnanschrift : . . . . . .

. . . . . .

E-Mail: . . . . . .

Name der Schule : . . . . . .

. . . . . .

Ich möchte im Schuljahr 2019/20 unter den angegebenen Bedingungen am Korrespondenzzirkel Mathematik der

Klassenstufe 9 ❑

(bitte Klassenstufe ankreuzen)

Klassenstufe 10 ❑

teilnehmen.

Ort, Datum	Unterschrift des Schülers	Unterschrift eines Erziehungsberechtigten

* Die Personendaten werden nur für den direkten Kontakt verwendet und nicht an Dritte weitergegeben.

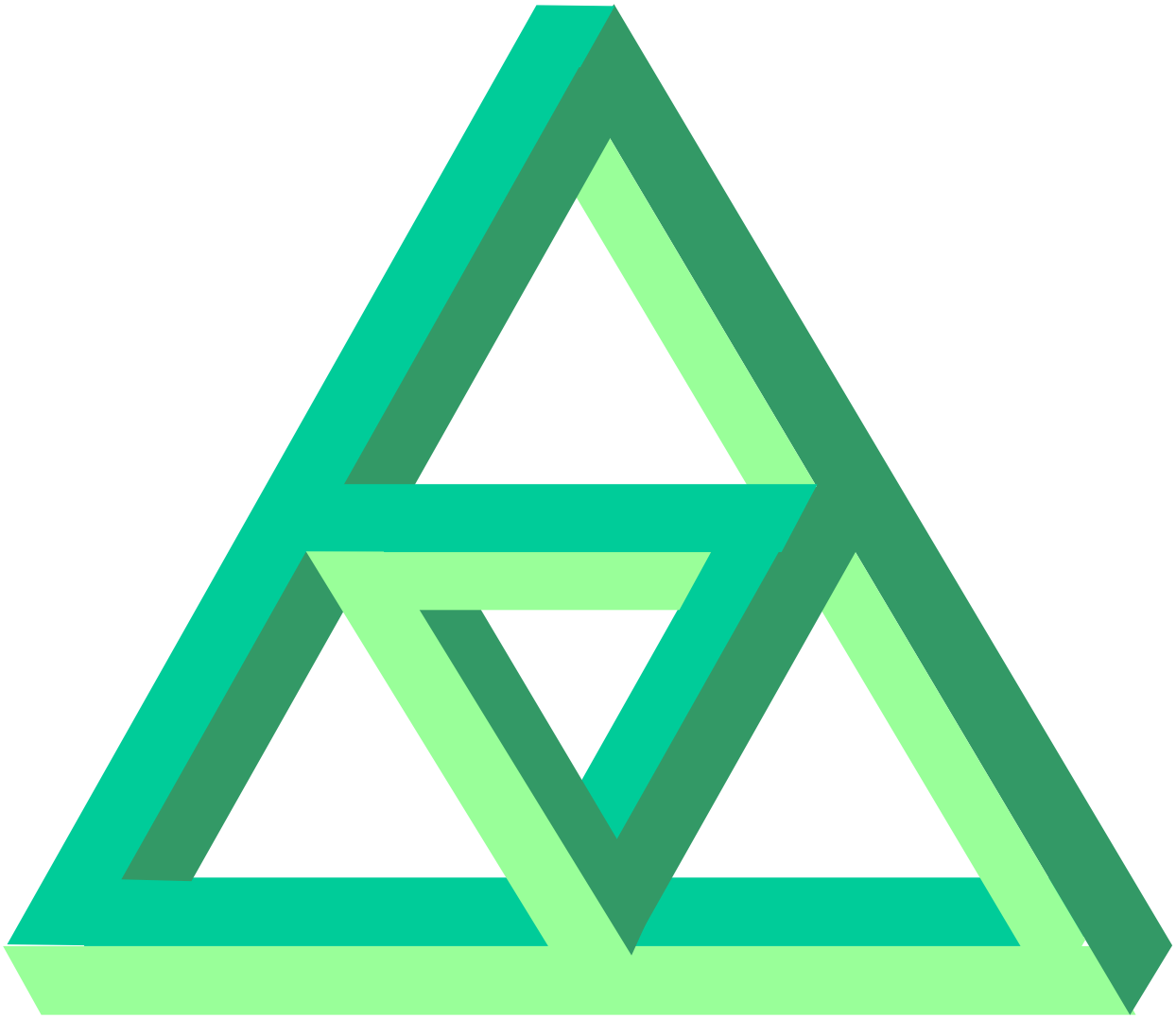
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 150 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **„Mathematik zu Chemnitz“ e.V.** an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 7 /2019 18. Jahrgang

Das Extremalprinzip

Das Extremalprinzip ist eine der wichtigsten heuristischen Prinzipien zur Lösung mathematischer Aufgaben. Es ist an keine spezielle Thematik gebunden und kann in allen Zweigen der Mathematik Anwendung finden, wenn es zum Beispiel darum geht, die Existenz eines Objektes mit bestimmten Eigenschaften innerhalb einer Menge zu beweisen. Kurz gefasst lautet es: *Man untersuche extremale Elemente einer Menge!* „Extremal“ bedeutet hierbei, sich herauszuheben aus den übrigen Elementen, z. B. ein größtes oder ein kleinstes Element, ein Anfangs- oder Endpunkt, größter Flächeninhalt, kleinster Umfang und vieles andere mehr. Das Extremalprinzip nutzt dabei folgende Eigenschaften:

- Unter endlich vielen reellen Zahlen findet sich immer eine kleinste Zahl (Minimum; min) und eine größte Zahl (Maximum; max).
- Jede beliebige nichtleere Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

Eine beliebige Menge M von reellen Zahlen hat im Allgemeinen weder ein kleinstes noch ein größtes Element. Man betrachte zum Beispiel die Menge der ganzen Zahlen. Ist die Menge jedoch nach oben beschränkt (d.h. es gibt eine Zahl *C*, so dass für alle Elemente $x \in M$ die Beziehung $x \le C$ erfüllt ist), so hat sie eine kleinste obere Schranke (Supremum; sup). Diese muss nicht selbst zu *M* gehören. Ist sie aber in *M* enthalten, so gilt sup *M* = max *M*. In Analogie gibt es für Mengen, die nach unten beschränkt sind, eine größte untere Schranke (Infinum; inf).

Beispiel: Gegeben sei die Menge $M = \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in N, n > 0\right\}$.

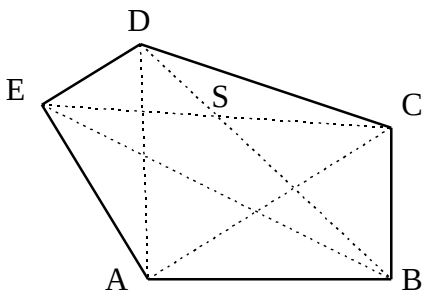
Für das Minimum der Menge *M* gilt min *M* = 0, das für *n* = 1 angenommen wird. Es gibt jedoch kein Maximum, denn zu jedem Element von *M* gibt es ein größeres Element, das auch zu *M* gehört. *M* ist aber nach oben beschränkt, weil jedes Element beispielsweise kleiner als 2 ist. Es gibt aber kleinere obere Schranken als 2 und es gilt sup *M* = 1.

Sind in einer Menge mehrere extremale Elemente der gleichen Art vorhanden (Längen von Strecken, Flächeninhalte von Figuren ...), dann ist es im Allgemeinen gleichgültig, welches man nimmt.

Das Extremalprinzip wird im Folgenden an einigen Beispielen demonstriert.

Aufgabe 1. Man beweise, dass man in jedem konvexen Fünfeck stets drei Diagonalen so auswählen kann, dass sich aus ihnen ein Dreieck konstruieren lässt!

Lösungshinweise: Man wähle unter den fünf Diagonalen eine ***längste*** aus. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies die Diagonale $\overline{BE}$ (s. Skizze). Gesucht sind nun zwei Diagonalen, deren Summe ihrer Längen größer ist als die Länge $\overline{BE}$. Weil damit die Dreiecksungleichungen erfüllt sind, wäre die Aufgabe gelöst.



Es sei *S* der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$, dann gilt

$$\overline{EC} + \overline{BD} = \overline{ES} + \overline{SC} + \overline{BS} + \overline{SD}$$

sowie

$\overline{ES} + \overline{BS} > \overline{BE}$ (Dreiecksungleichung für Dreieck *EBS*)
$\overline{SC} + \overline{SD} > \overline{CD}$ (Dreiecksungleichung für Dreieck *CDS*)

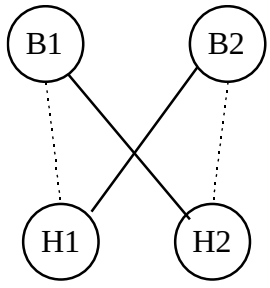
Hieraus folgt dann $\overline{EC} + \overline{BD} > \overline{BE} + \overline{CD} > \overline{BE}$ Also kann man aus den Diagonalen $\overline{EC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ ein Dreieck konstruieren.

❑

Aufgabe 2. In einer Ebene seien *n* Brunnen und *n* Höfe gegeben, von denen keine drei Objekte auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass es dann stets eine Möglichkeit gibt, *n* einander nicht schneidende Wege anzulegen, die jeweils einen Brunnen mit einem Hof geradlinig verbinden.

Lösungshinweise: Man betrachte alle Möglichkeiten, die Brunnen mit den Höfen durch gerade Wege zu verbinden. Das sind endlich viele. Ferner betrachte man für jede dieser Möglichkeiten die Summe der *n* Weglängen. Es gibt darunter mindestens eine Variante mit ***minimaler*** Summe der Weglängen. Nun lässt sich zeigen, dass sich in diesem extremalen Fall keine der *n* Wege schneiden.

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, zwei solche Wege würden sich schneiden, zum Beispiel die Wege B1-H2 und B2-H1. Wie man mit Hilfe der Dreiecksungleichung zeigen kann, ergäbe sich dann aber eine kleinere Summe der Weglängen, wenn man die Wege B1-H1 und B2-H2 verwenden würde. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, bereits die minimale Summe aller Weglängen gefunden zu haben.



❑

Aufgabe 3. In der Ebene seien *n* Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass es dann einen Kreis gibt, der durch drei dieser Punkte geht und in dessen Inneren keine weiteren Punkte liegen.

Lösungshinweise: Betrachtet man alle möglichen Kreise durch drei der gegebenen Punkte, so führt die Auswahl eines Kreises mit *kleinstem Radius* nicht zum Ziel. Dies kann man sich bereits mit vier Punkten veranschaulichen.

Aber unter den Kreisen, die durch das Punktepaar mit ***kleinstem Abstand*** gehen, findet man denjenigen, der die Bedingung der Aufgabe erfüllt. (Welcher ist es?)

Aufgabe 4. In der Ebene sei eine Menge von Punkten gegeben. Jeder Punkt aus dieser Menge (die *A* genannt sei) sei Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zweier anderer Punkte aus *A*. Man zeige, dass *A* aus unendlich vielen Elementen besteht!

Lösungshinweise: Den Beweis führe man indirekt, indem man zeigt, dass die Annahme einer endlichen Punktmenge zu einem Widerspruch führt. Man könnte einen Punkt aus *A* mit extremaler Eigenschaft finden, wenn man sich einen geeigneten Bezugspunkt der Ebene auswählt und dann den entferntesten Punkt untersucht (wie kann dieser Bezugspunkt definiert werden?). Einfacher erscheint, wie in Aufgabe 3 alle Punktepaare zu betrachten. Während ein Punktepaar mit minimalem Abstand nicht zum Ziel führt, kann man zeigen, dass für ein Punktepaar mit ***maximalem Abstand*** ein Endpunkt nicht Mittelpunkt der Verbindungslinie zweier anderer Punkte sein kann. (Warum nicht?)

Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen [1]

Die Anzahl der Ziffern von *n!* wächst mit zunehmenden *n* schnell an. Während 6! noch eine dreistellige Zahl ist, besitzt 10! bereits 7 Ziffern und 20! gar 19 Stellen. Dies war Inhalt der

Aufgabe MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an.

Zwei Jahre vorher wurden bereits ähnliche Problemstellungen mit gleichartigem Fragetext in der 4. Stufe gestellt:

Aufgabe MO330944. 22! = 11240007277**607680000
Aufgabe MO331044. 23! = 2585201673*8849*6640000

Lösungshinweise: In diesen beiden Aufgaben ist es ein nahe liegender Lösungsansatz, die fehlenden Ziffern anhand von Teilbarkeitsregeln zu

[1] vgl. Gardner, M. Mathematische Hexereien. Verlag Ullstein GmbH Berlin 1990.

ermitteln. Die Division durch 9 und durch 11 liefert hierfür ausreichende Argumente. In der Aufgabe der 35. MO war zudem zunächst die Anzahl der Endnullen zu ermitteln. Dann verbleiben wiederum nur zwei Ziffern, die es zu finden gilt.

Will man abschätzen, wie viele Stellen 1000! besitzt, so könnte man zunächst so vorgehen: In 1000! trägt jeder Faktor, der kleiner als 1000 ist, höchstens 3 Stellen zu 1000! bei. Folglich ist die Abschätzung $1000! < 10^{3000}$ sicherlich richtig.

Eine Verbesserung der Abschätzung ist wie folgt möglich: Aus der bekannten Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels von *n* Zahlen und der Summenformel der ersten *n* natürlichen Zahlen weiß man, dass auch folgende Abschätzung gilt:

$$\sqrt[1000]{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 1000} \le \frac{1+2+\ldots+1000}{1000} = \frac{500\cdot 1001}{1000} = 500{,}5 \ .$$

Also ist

$$1000! < 501^{1000} < \left(2^9\right)^{1000} < \left(2^{13}\right)^{693} < 10000^{693} = 10^{2772} \ .$$

Dabei beinhalten die mittleren Abschätzungen lediglich Umformungen, die eine Berechnung ohne Taschenrechner erleichtern, denn die Zweierpotenzen $501 < 512 = 2^9$ und $2^{13} = 8\cdot 2^{10} = 8\cdot 1024 < 10000$ sind bekannt (bzw. leicht ermittelbar). Mit TR geht es auch so:

$$1000! < 501^{1000} < \left(10^{2{,}7}\right)^{1000} = 10^{2700} \ .$$

Die Güte der Abschätzung lässt sich nur schwer bewerten. Hilfreich ist da die Stirlingsche Formel[2], die die Fakultät mit den beiden mathematischen Konstanten *e* und π in Verbindung bringt: Es gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi\cdot n} \ .$$

Diese Abschätzung liefert praktikable Aussagen zur Stellenzahl:

$$lg(\,n!\,) \sim n\cdot lg\left(\frac{n}{e}\right) + 0{,}5\cdot lg(\,2\pi\cdot n\,).$$

Für $n = 20$ findet man auf diese Weise $\lg(n!) \approx 18{,}38$. Der daraus resultierende Wert $n! \approx 2{,}39\cdot 10^{18}$ stimmt recht gut mit dem wirklichen Wert überein. Verlässt man sich (hier ohne weiteren Beweis) darauf, dass die Güte dieser Abschätzung auch bei großen *n* gilt, erhält man für $n = 1000$:

$$lg(1000!\,) \sim 2566{,}61$$

[2] JAMES STIRLING, schottischer Mathematiker (1692 bis 1770)

so dass 1000! insgesamt 2567 Ziffern umfassen könnte. Es kann bewiesen werden, dass der relative Fehler der Stirlingschen Formel mit wachsendem n kleiner wird, so dass die Formel eine verlässliche Abschätzung liefert. Für Werte über $n = 20$ beträgt der Fehler weniger als 0,5%.

Wenn man auch im Alltag kaum etwas mit solchen Zahlenriesen anfangen kann, dem Mathematiker fällt immer etwas ein. So suchte man alle Fakultäten, die man als Pyramide schreiben kann, also in einer solchen Zifferanordnung, dass in jeder folgenden Zeile zwei Ziffern mehr stehen. Wird die Pyramide mit n vollständigen Zeilen geschrieben, werden insgesamt $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1)$ Ziffern benötigt. Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen führt auf die Quadratzahl n^2. Jede Fakultätszahl, für die die Anzahl ihrer Ziffern der Dezimaldarstellung eine Quadratzahl ist, kann folglich in einer solchen Pyramiden- oder Dreiecksform aufgeschrieben werden. So lässt sich 7! = 5040 in der beschriebenen Weise darstellen:

5
040

Die nächste Fakultätszahl mit dieser Eigenschaft ist 12! = 479001600:

4
790
01600

Aber nicht für jede Quadratzahl existiert eine Fakultät mit entsprechender Ziffernzahl. So gibt es keine Fakultätszahl mit 25 Ziffern, wie man leicht aus den obigen Angaben zu 23! nachprüfen kann. Die Zahl 105! wird mit 169 Ziffern geschrieben, die unterste Zeile der Pyramide besteht genau aus den 25 Endnullen der Zahl. Dass man nun in ähnlicher Weise auch Darstellungsformen als Sechseck (z.B. 477! mit 1073 Ziffern) oder Achteck (z.B. 2206! mit 6421 Ziffern) fand, verwundert wohl nicht.

Sternfiguren [3]

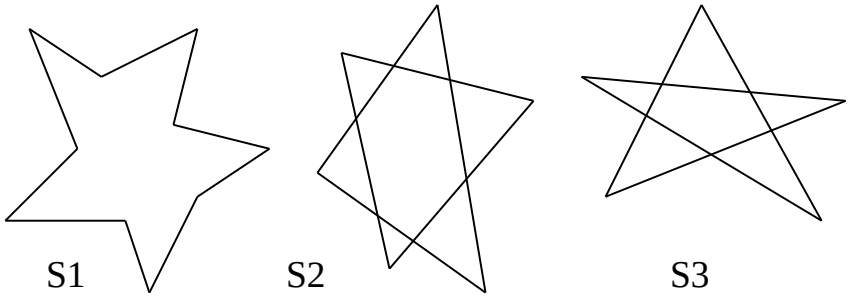
In Aufgabe A1-2 ist eine so genannte Sternfigur zu sehen. Um diesen Begriff genauer zu definieren, sei zunächst an folgende Anschauung erinnert:

- Ein Vieleck, das die Ebene in zwei Gebiete („innen“ und „außen“) teilt, heißt ***einfaches Vieleck***.

[3] Nach Heinrich, F.: Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren – ein Angebot zur Förderung mathematischer Begabungen. In: Mathematikinformationen, Heft 42 (2005), S. 40 bis 58.

- Enthält die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten im Innern des einfachen Vielecks nur Punkte dieses Gebiets, so heißt dieses Vieleck ***konvex***, andernfalls ***konkav***.

Man kann verschiedene Vielecke zeichnen, die ein sternförmiges Aussehen haben.



S1 S2 S3

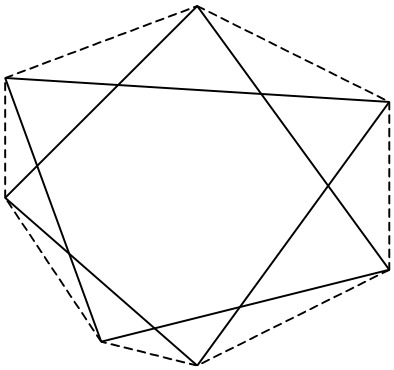
Offensichtlich unterscheiden sich diese Typen. Einen „Stern“ wie S1 bezeichnet man als ***einfache Sternfigur***, wenn spitze und überstumpfe Innenwinkel wechselseitig aufeinander folgen. Üblicherweise ist S1 also ein Zehneck. Die Abbildung S2 und S3 zeigen dagegen ***nicht einfache Sternfiguren***, auch ***normale Sternfiguren*** genannt. Dabei sind die Schnittpunkte der Seiten keine Eckpunkte, sondern nur die „Sternspitzen“. Man erkennt in der Skizze, dass man S1 nicht als normale Sternfigur zeichnen kann.

Das Adjektiv ***normal*** drückt aus, dass keine Spitze innerhalb der Figur liegt und dass alle Ecken zugleich Eckpunkte eines konvexen Vielecks sind, das entsteht, wenn entsprechende Verbindungsstrecken gezeichnet würden. Ferner lässt sich feststellen, dass die Seiten des Sterns dann Diagonalen in diesem konvexen (umhüllenden) Vielecks sind.

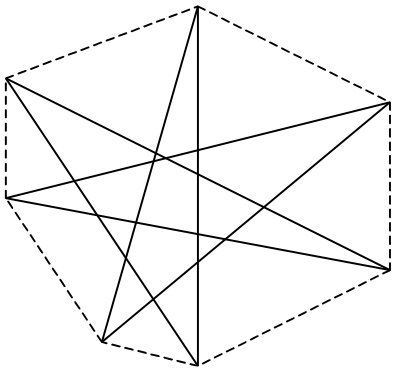
Im Gegensatz zu einfachen Sternfiguren werden in normalen Sternfiguren zwei Strecken, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, von wenigstens noch einer anderen Strecke geschnitten. Der Name einer Sternfigur wird durch die Anzahl der Ecken geprägt, S2 ist also ein ***Sechsstern*** und S3 ein ***Fünfstern***.

Aber auch zwischen S2 und S3 findet man einen wesentlichen Unterschied: Wählt man sich nämlich einen beliebigen Eckpunkt aus und verfolgt die aneinander gereihten Seiten von Eckpunkt zu Eckpunkt, so erreicht man in S3 den Ausgangspunkt, nachdem alle Eckpunkte passiert wurden („in einem Zug gezeichnet“). In S2 jedoch benötigt man zwei Anfänge, um alle Ecken zu erreichen. Deshalb heißt eine Sternfigur wie S2 ***zerfallende*** Sternfigur, während man S3 ***nicht zerfallend*** nennt.

Versucht man nun normale Sternfiguren zu zeichnen, ist folgende Vorgehensweise praktikabel: Um einen Siebenstern zu konstruieren, erzeugt man zunächst ein konvexes Siebeneck (gestrichelt gezeichnet). Von jedem Eckpunkt aus wird nun zu seinem übernächsten Eckpunkt eine Strecke gezeichnet.

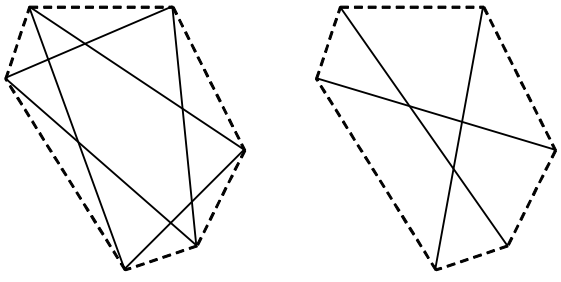


Man erkennt aber, dass die Konstruktion nicht eindeutig ist. Man könnte ja auch beim Verbinden von Eckpunkten stets zwei Eckpunkte überspringen (s. nebenstehende Abbildung).



Man muss also auch diese Typen unterscheiden. In naheliegender Weise könnte man dafür die Begriffe ***Sternfiguren erster Art*** bzw. ***zweiter Art*** wählen. Setzt man diese Idee fort und überspringt nun drei Eckpunkte, so entsteht eine Sternfigur, die im Wesentlichen mit der Sternfigur zweiter Art übereinstimmt. Deshalb ist die Art der Sternfigur durch die kleinste Zahl der übersprungenen Eckpunkte festzulegen: Obwohl man also 3 Eckpunkte überspringt, erhält man eine Sternfigur der zweiten Art!

Nun wende man diese Konstruktion auf ein konvexes 6-Eck an. Beim Überspringen von einem Eckpunkt erhält man einen zerfallenden Sechsstern. Überspringt man aber stets zwei Eckpunkte, entsteht ein Gebilde, was weder ein zerfallender noch ein nicht zerfallender Stern ist. Es bietet sich an, dies eine ***entartete Sternfigur*** zu nennen.



Nach der anschaulichen Begriffseinführung kann man nun die Sternfigur formal definieren:

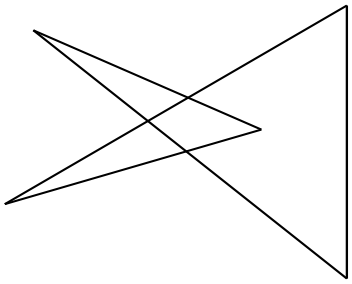
Gegeben sei ein konvexes n-Eck (n > 3). Die Figur, die entsteht, wenn jeder Eckpunkt mit der k-ten darauffolgenden Ecke (k natürlich, 1 < k < n – 1) durch eine Strecke verbunden wird, heißt nicht einfache Sternfigur, auch normale Sternfigur genannt.

Eine nicht einfache Sternfigur heißt

- *nicht zerfallend, wenn sie ein (überschlagenes) Vieleck repräsentiert,*
- *zerfallend, wenn sie aus mehreren sich überschneidenden Vielecken einer Sorte besteht,*
- *entartet, wenn sie weder zerfallend noch nicht zerfallend ist.*

Eine nicht einfache Sternfigur ist von m-ter Art (m = k – 1), wenn bei ihrer Erzeugung jeder Eckpunkt des konvexen Ausgangs-n-Ecks mit der k-ten darauffolgenden Ecke $\left(1 < k \le \frac{n}{2}\right)$ *durch eine Strecke verbunden wird.*

Es gibt auch andere Möglichkeiten, solche Figuren zu konstruieren und darauf aufbauend die Begriffe zu definieren. Beispielsweise gehe man von einem geeigneten Fünfeck aus und verlängere die Seiten. Führt dies in jedem Fall zu einer Sternfigur im obigen Sinne?



Die nebenstehende Abbildung zeigt eine nicht normale Sternfigur, da die Eckpunkte nicht zu einem konvexen 5-Eck ergänzt werden können. Gibt es dennoch eine ähnliche Konstruktionsvorschrift wie oben, und wenn ja, wie sieht die Ausgangsfigur aus?

Die Aufgabe A1-2 lässt sich nun allgemein formulieren: Was kann man über die Summe der Innenwinkel an den Ecken einer nicht einfachen Sternfigur aussagen? *(…wird fortgesetzt)*

Abstand von Zahlenfolgen

Angeregt durch die „ungeordneten Reihenfolgen“ in Heft 6/2019 und die Aufgabe 1-5A lassen sich weitere Unordnungen festlegen. Meist möchte man damit eine anschauliche Interpretation formal umsetzen. Die Definition von U geht von der „natürlichen“ Ordnung der Platzziffern aus und charakterisiert das Maß der Abweichung. Man könnte sich auch vorstellen, dass eine Unordnung eine Abweichung von der „natürlichen“ Symmetrie in der Folge sei. Dafür kann man folgende Definition verwenden:

Für eine Zahlenfolge $F = (a_1, a_2, ..., a_9)$, in der a_1 bis a_9 paarweise verschieden sind und die Ziffern 1 bis 9 in einer beliebigen Reihenfolge repräsentieren, sei U_1 eine Unordnung mit

$$U_1(F) = |a_1 - a_9| + |a_2 - a_8| + |a_3 - a_7| + |a_4 - a_6| + |a_5 - a_5|$$

Der letzte Summand wird lediglich wegen der Vollständigkeit angegeben, auch wenn er keinen Beitrag zur Unordnung bringt. Die natürliche Reihenfolge der Ziffern (im Weiteren mit $F_0 = (1, 2, 3, ..., 9)$ abgekürzt) liefert die Unordnung

$U_1(F_0) = 20$. Für alle Folgen F gilt sicherlich $U_1(F) \geq 4$, da aufgrund der Verschiedenheit der Folgenglieder jeder Betrag (bis auf den letzten Term) nicht kleiner als 1 sein kann. Mit (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2) findet man auch eine Folge, die dieses Minimum annimmt.

Damit widerspricht die Definition aber der natürlichen Erwartung, dass F_0 die beste Ordnung sei. Sucht man den größten Wert für U_1, so kann man zunächst die Abschätzung $U_1(F) \leq 8+7+6+5 = 26$ angeben. Doch leicht sieht man, dass sich der Wert der Unordnung nicht ändert, wenn man die Folgenglieder so anordnet, dass die Differenzen in den Betragszeichen positiv sind. Damit findet man eine bessere Abschätzung, da die Summanden nun beliebig vertauscht werden können:

$$U_1(F) \leq 9+8+7+6+5-5-4-3-2-1 = 20$$

Dieser Wert wird aber durch die natürliche Reihenfolge erreicht. Offensichtlich wurde also eher eine „Ordnung“ als eine „Unordnung“ charakterisiert.

Wie ändert sich der Unordnungsbegriff, wenn anstelle der Differenzen Produkte gewählt werden, also

$$U_2(F) = a_1 \cdot a_9 + a_2 \cdot a_8 + a_3 \cdot a_7 + a_4 \cdot a_6 + a_5^2$$

Hierbei findet man $U_2(F_0) = 95$. Man kann weitere Beispiele ausprobieren, so für die oben untersuchte Folge $U_2(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2) = 181$. Sind das bereits die Grenzen G_u und G_o, für die gilt $G_u \leq U_2(F) \leq G_o$ für alle Folgen F?

60. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 11. bis 22. Juli 2019 in Bath (Vereinigtes Königreich) statt. Mit 621 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern aus 112 Ländern wurden wieder eine Rekord-Teilnahme verzeichnet.

Insgesamt wurden 302 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,6% aller Teilnehmer einen Preis. Mit einer Gold- und vier Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer vergleichbar erfolgreich wie in den letzten Jahren ab, konnten mit insgesamt 126 Punkten von 252 möglichen Punkten (50,0%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **32. Platz** erreichen. Angeführt wird diese Länderliste von der Volksrepublik China und von den USA (beide jeweils insgesamt 227 Punkte (90,1%) und sechs Goldmedaillen), gefolgt von der Republik Korea (insgesamt 226 Punkte (89,7%), ebenfalls sechs Goldmedaillen). Der Abstand zur viertplatzierten Nation (Demokratische Volksrepublik Korea) mit insgesamt 187 Punkte (74,2%) ist bereits deutlich.

Als besonders schwierig erwiesen sich die Aufgaben 3 und 6 – im Mittel der Teilnehmer wurden 0,57 bzw. 0,40 Punkte von möglichen 7 Punkten erreicht. Zum Vergleich: Für Aufgabe 1 wurden im Mittel 5,18 Punkte vergeben und 382 Teilnehmer schafften hier volle Punktzahl (7 Punkte).

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 60. IMO

Aufgabe 1. Es sei Z die Menge der ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f : Z \Rightarrow Z$, so dass $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$ für alle ganze Zahlen a und b gilt.

Aufgabe 2. Im Dreieck ABC liegt ein Punkt A_1 auf der Seite BC und ein Punkt B_1 auf der Seite AC. Es seien P und Q Punkte auf den Strecken AA_1 bzw. BB_1, so dass PQ parallel zu AB ist. Es sei P_1 ein Punkt auf der Geraden PB_1, so dass B_1 im Inneren der Strecke PP_1 liegt und $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$ gilt. Analog, sei Q_1 ein Punkt auf der Geraden QA_1, so dass A_1 im Inneren der Strecke QQ_1 liegt und $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$ gilt.

Man beweise, dass die Punkte P, Q, P_1 und Q_1 auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 3. Ein soziales Netzwerk hat 2019 Nutzer, von denen einige paarweise befreundet sind. Immer wenn der Nutzer A mit dem Nutzer B befreundet ist, dann ist auch der Nutzer B mit dem Nutzer A befreundet. Ereignisse der folgenden Art können wiederholt nacheinander stattfinden:

> Drei Nutzer A, B und C, von denen A mit B und C befreundet ist, aber B und C nicht befreundet sind, wechseln den Status ihrer Freundschaften so, dass jetzt B und C befreundet sind, aber A nicht mehr mit B befreundet ist und auch nicht mehr mit C befreundet ist. Der Status aller anderen Freundschaften bleibt unverändert.

Anfangs sind 1010 Nutzer mit jeweils genau 1009 Nutzern befreundet und 1009 Nutzer mit jeweils genau 1010 Nutzern befreundet. Man beweise, dass es eine Folge solcher Ereignisse gibt, nach der jeder Nutzer höchstens mit einem anderen Nutzer befreundet ist.

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare $(k; n)$ positiver ganzer Zahlen, so dass

$$k! = (2^n - 1)\cdot(2^n - 2)\cdot(2^n - 4)\cdot \ldots \cdot(2^n - 2^{n-1}).$$

Aufgabe 5. Die Bank of Bath prägt Münzen mit einem H auf der einen Seite und einem T auf der anderen. Harry hat n dieser Münzen von links nach rechts aufgereiht. Er führt wiederholt die folgende Operation durch: Zeigen genau

$k > 0$ Münzen ein *H*, dann dreht er die k-te Münze von links um; falls alle Münzen ein *T* zeigen, hört er auf. Zum Beispiel wäre für $n = 3$ mit Anfangskonfiguration *THT* der Prozess *THT* → *HHT* → *HTT* → *TTT*, welcher nach 3 Operationen endet.

(a) Man zeige, dass Harry für jede Anfangskonfiguration nach einer endlichen Anzahl von Operationen aufhört.
(b) Für jede Anfangskonfiguration *C* sei $L(C)$ die Anzahl der Operationen bis Harry aufhört. Beispielsweise sind $L(THT) = 3$ und $L(TTT) = 0$. Man bestimme den Durchschnittswert von $L(C)$ über alle 2^n möglichen Anfangskonfigurationen *C*.

Aufgabe 6. Es sei *I* der Inkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks *ABC* mit $AB \neq AC$. Der Inkreis ω von *ABC* berühre die Seiten *BC*, *CA* und *AB* in *D*, *E* bzw. *F*. Die Gerade durch *D* senkrecht zu *EF* schneide ω außerdem in *R*. Die Gerade *AR* schneide ω außerdem in *P*. Die Umkreise der Dreiecke *PCE* und *PBF* schneiden sich außerdem in *Q*.

Man beweise, dass sich die Geraden *DI* und *PQ* auf derjenigen Geraden durch *A* schneiden, die senkrecht zu *AI* ist.

Hinweis: Die Arbeitszeit beträgt zweimal 4 Stunden und 30 Minuten.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen gelingen werden. Dennoch könnte man sich mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1:	Man finde eine Aussage über $f(0)$ und gebe mindestens eine Lösung an.
zu Aufgabe 2:	Man löse die Aufgabe für ein gleichseitiges Dreieck *ABC*.
zu Aufgabe 3:	Man betrachte die analog formulierten Probleme für 3, 5, ... Nutzer.
zu Aufgabe 4:	Man finde durch systematisches Suchen einige Lösungspaare und stelle eine Vermutung über die Lösungsmenge auf.
zu Aufgabe 5:	Man probiere einige Beispiele und formuliert einen Lösungsansatz für Teilaufgabe a).
zu Aufgabe 6:	Man veranschauliche die Aufgabenstellung in einer sorgfältig durchgeführten Konstruktion.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [4]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, Henri Nannen, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um

[4] www.jugend-forscht.de

der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[5] Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu 3 Schülern können Mädchen und Jungen bis 16 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 16 und 22 Jahre („Jugend forscht“) teilnehmen. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung der Forschungsergebnisse vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmern Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2015/16	12.058	Heinz Nixdorf MuseumsForum Paderborn
2016/17	12.226	Siemens AG, Heinrich-Lades-Halle Erlangen
2017/18	12.069	Merck KGaA Darmstadt
2018/19	12.150	Fraunhofer-Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik Chemnitz

Gesamt-Teilnehmerzahl (Anmeldungen) und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber bundesweit mit 879 Teilnehmern (7,2%) neben dem FG Geo- und Raumwissenschaft eine sehr geringe Resonanz – schade! (Zum Vergleich: Biologie: 2799 Anmeldungen.) Ein schwacher Trost: In Sachsen konnten unter den 231 Anmeldungen immerhin 11,7% im FG Mathematik/Informatik gezählt werden.

[5] Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Der sächsische Landeswettbewerb[6] wurde vom 4. bis 6. April 2019 gemeinsam von den Patenfirmen Globalfoundries, Siemens AG und BMW Group in Chemnitz im Industriemuseum Chemnitz veranstaltet.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Partnersuche gegeben – aber jeder Mathematik- oder Informatik-Lehrer ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik (alphabetisch geordnet). Leider sind ab 2019 Wettbewerbsdaten des Sächsischen Landeswettbewerbs „Jugend forscht“ und „Schüler experimentieren“ auf der Grundlage der DSGVO (Datenschutz) und des Datenverarbeitungsvertrages mit den Patenfirmen nicht verfügbar.

Es wurde im Fachgebiet Mathematik/Informatik 2019 in Sachsen kein 1. Preis (und damit auch keine Qualifikation für das Bundesfinale) vergeben.

Barylla, Philipp & Herrmann, Philipp (Rossbach-Schule, BSZ Leipzig) **Jugend forscht to go** *2. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, Sonderpreis futureSAX*	2016
Borodi, Vlad Samuel & Seibt, Annegret (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Analyse von Kartenmischtechniken** *2. Platz*	2018
Jandura, Sven (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse der Restfehlerwahrscheinlichkeiten zweier Decodierer von linearen Blockcodes** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis futureSAX*	2016
Juppe, Pascal (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Identifikation organischer Verbindungen mittels Infrarot-spektroskopie und neuronalen Netzen** *3. Platz, Sonderpreis Jahresabonnement „Spektrum der Wissenschaft“*	2018
Kandratavicius, Mantas (Goethe-Gymn. Chemnitz) *Lösungsansätze der Beal-Vermutung* *3. Platz, Sonderpreis Forschungspraktikum Leibnitz-Institut*	2018
Ketelsen, Margarete (Nexö-Gymn. Dresden) **Drei- und Vierdimensionale Fraktale** *2. Platz*	2017

[6] www.jugend-forscht-sachsen.de

König, Josie (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Das lineare Regressionsmodell in Theorie und Praxis** *3. Platz, Sonderpreis Studienseminar „Kerchensteiner Kolleg“*	2016
Krabbes, Felix (Ostwald-Gymn. Leipzig) **Praxisorientierter Steuerungsalgorithmus für ein autonomes RC-Segelboot** *Landessieger für interdisziplinäre Arbeit, Teilnahme am Bundesfinale*	2017
Loos, Felix (Freies Gymn. Borsdorf) **Entwicklung einer künstlichen Intelligenz für Industrieroboter** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2018
Meyer, Julian (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Simulationen von Strukturen aus Holz** *Sonderpreis Qualitätssicherung*	2018
Mogdans, Sarah (Freies Gymn. Penig) **Wurzelziehen – keine schmerzhafte Angelegenheit** *3. Platz*	2016
Schmidt, Conrad (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Erstellung einer Android App als smartes Hausaufgabenheft** *3. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus*	2017
Skaliks, Eric (Sächsisches Landesgymn.St. Afra Meißen) **Neural AMT** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2017

Das Bundesfinale des 54. Wettbewerbs „Jugend forscht“ wurde vom 16. bis 19. Mai 2019 gemeinsam mit dem Fraunhofer-Institut IWU in Chemnitz ausgerichtet. Zur Preisverleihung waren der Bundespräsident, Frank-Walter Steinmeier, und der Ministerpräsident des Freistaates Sachsen, Michael Kretschmer, anwesend. Insgesamt 190 Finalisten hatten sich mit ihren 111 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt. Den 1. Preis im Fachgebiet Mathematik/Informatik errang **Constantin Tilman Schott**, Paul-Gerhardt-Schule Dassel, Holzminden (Niedersachsen) mit seiner Arbeit ***„Auf den Punkt gebracht - Einsatz von Methoden künstlicher Intelligenz in der kephalometrischen Röntgen-diagnostik“***. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre zu lesen:

Bisweilen müssen Mediziner den Schädel eines Patienten genau vermessen, etwa für chirurgische Eingriffe am Kiefer. Zu diesem Zweck fertigen sie Röntgenbilder des Kopfes an. Früher wurden diese Aufnahmen zumeist manuell ausgewertet. Mittlerweise erfolgt dieser Arbeitsschritt immer häufiger automatisiert per Computer. Um die Analyse der Röntgenbilder weiter zu vereinfachen, entwickelte Constantin Tilman Schott eine innovative Software,

die einen wichtigen Bezugspunkt auf der Schädelbasis – die Sella turcica – mittels künstlicher Intelligenz (KI) identifiziert. Sein Programm nutzt dafür selbstlernende Algorithmen. Versorgt man es mit ausreichend vielen Daten, kann es den Sella-Punkt mit großer Treffsicherheit berechnen, im Durchschnitt bis auf einen halben Millimeter genau.

Die Jury überzeugte insbesondere (ebenda nachzulesen), dass der Jungforscher nicht nur gängige Fachliteratur nutzte, sondern sich systematisch in das Forschungsgebiet einarbeitete. Er testete viele Varianten, modifizierte die Topologie des neuronalen Netzes und schuf damit eine neuartige und hochwertige Lösung des Problems.

Metriken[7]

Während des 4. Chemnitzer Seminars 2019 wurden *geometrische Örter* diskutiert, also Mengen von Punkten, die gewisse Eigenschaften erfüllen. Der einfachste geometrische Ort ist der Kreis (Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben). Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Ellipse sind weitere Beispiele von bekannten geometrischen Orten. Bei der Suche nach den geometrischen Orten sind stets die folgenden vier Aspekte explizit darzustellen:

- eindeutige Beschreibung der gesuchten Menge,
- Nachweis, dass ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, in dieser Menge enthalten ist,
- Nachweis, dass alle Punkte außerhalb dieser Menge nicht allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen,
- Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Vorschrift erzeugt werden kann.

Der in solchen Aufgaben verwendete *Begriff des Abstandes* soll nun näher betrachtet werden. Eine *Metrik* ist eine mathematische Funktion, die je zwei Elementen einen nicht negativen Wert zuordnet, der als Abstand der beiden Elemente voneinander aufgefasst werden kann. Formal definiert betrachte man eine beliebige Menge X und eine Abbildung $d : X \times X \to R$ mit den Eigenschaften ($x, y, z \in X$)

$$d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

[7] Nachtrag zum Seminarprogramm vom 22.06.2019

Dann nennt man *d* Metrik auf *X*. Aus der Identität, der Symmetrie und der Dreiecksungleichung folgt bereits, dass eine Metrik nur nicht negative Werte annimmt:

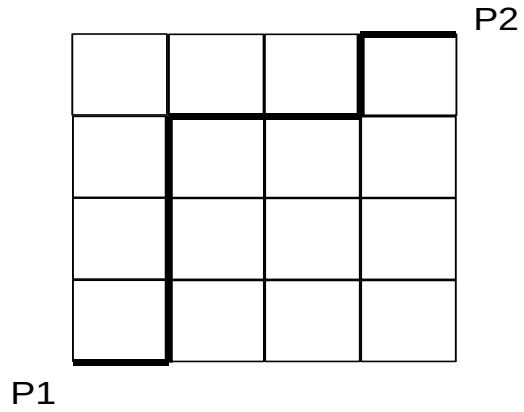
$$2 \cdot d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) = d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x) = 0.$$

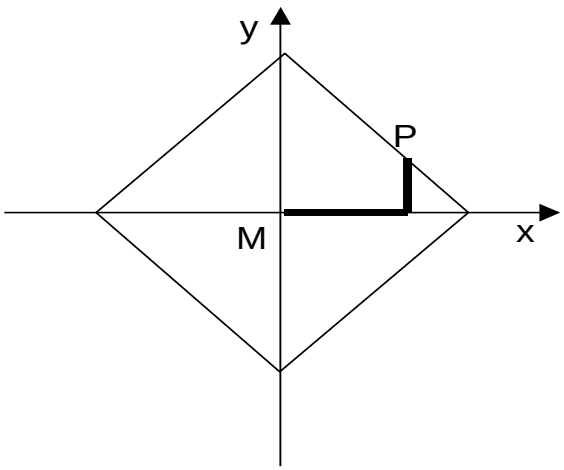
Im Weiteren werden hier nur Metriken in der Ebene untersucht, wobei Punkte *P* durch Angabe ihrer Koordinaten *x* und *y* charakterisiert werden, *P*(*x*,*y*). Die bekannte Abstandsfunktion für zwei Punkte der Ebene

$$d(x,y) = d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

heißt Euklidische Norm (2-Norm) und liefert (mit Hilfe des Satzes von Pythagoras) die übliche geometrische Länge des Abstandes zweier Punkte. Ein Kreis als der geometrische Ort aller Punkte, die zu einem fest vorgegebenen Punkt *M*, dem Mittelpunkt des Kreises, einen festen Abstand *r* haben, ist die bekannte geometrische Figur.

Die Funktion $d(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ erfüllt ebenfalls die Eigenschaften einer Metrik. Sie wird als Manhatten-Metrik (auch 1-Norm) bezeichnet, weil sie die Entfernung zweier Punkte (P_1, P_2) in Manhatten beschreibt, wo die Straßen schachbrettartig in „horizontaler“ und „vertikaler“ Richtung verlaufen.



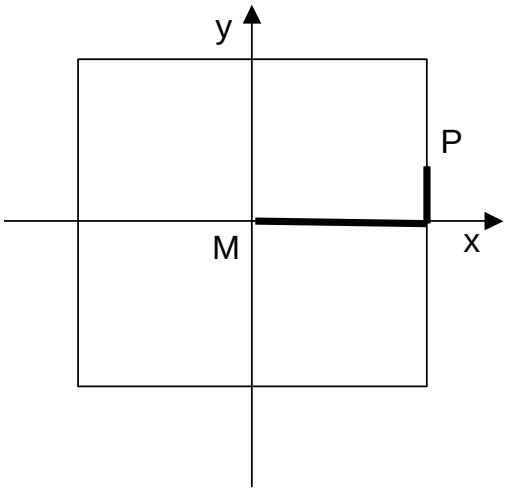


Der Kreis (wie oben als geometrischer Ort definiert) erscheint mit dieser Metrik als ein auf der Spitze stehendes Quadrat. Leicht prüft man nach, dass die Punkte *P* auf dem Umfang einer solchen Figur nach der Manhatten-Metrik einen konstanten Abstand vom Mittelpunkt *M* haben.

Auch die Funktion

$$d(x,y) = max\{|x_1 - x_2|;|y_1 - y_2|\}$$

erfüllt die Eigenschaften einer Metrik. Sie wird Maximum-Metrik (auch ∞-Norm) bezeichnet. Der Kreis ist bei der Maximum-Metrik ein Quadrat.



Für solcherart definierter Metriken ist die Bezeichnung *p*-Norm üblich. Dies begründet sich in der verallgemeinerten Darstellung für die Abstandsberechnung

$$d_p(x,y)=\sqrt[p]{|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p}$$

Für $p = 2$ erhält man die Euklidische Metrik, für $p = 1$ die Manhatten-Metrik und für sehr großes *p* nähert sich die Metrik der Maximum-Metrik. Man schreibt auch $d(x,y)=\|x-y\|$.

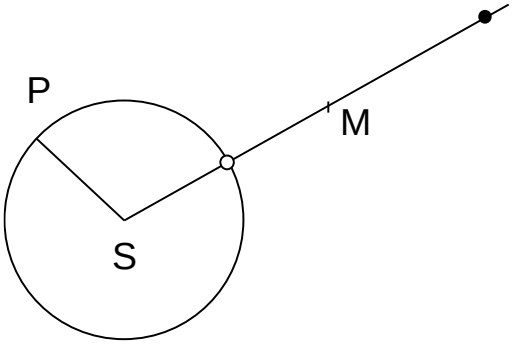
Man prüfe nach, dass auch folgende Funktion eine Metrik definiert:

$$\|x-y\|=\begin{cases}0 & falls \quad x=y\\ 1 & falls \quad x\neq y\end{cases}.$$

Als weiteres Beispiel einer Metrik ist die Französische Eisenbahn-Metrik bekannt. Man stelle sich ein Eisenbahnnetz vor, bei der alle Linien über einen zentralen Bahnhof *S* verlaufen (auf dem man ggf. umsteigen muss, um sein Ziel zu erreichen). Dies war früher in Frankreich mit dem Zentrum Paris tatsächlich so. Dann ist auch diese Abstandsfunktion eine Metrik:

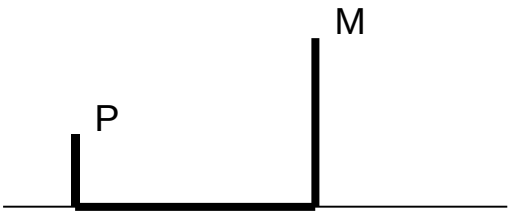
$$d(x,y)=\begin{cases}d_2(x,y) & falls \quad x, y\ und\ S\ \ auf\ einer\ Gerade\ liegen\\ d_2(x,S)+d_2(S,y) & sonst\end{cases}.$$

Ein Kreis hängt nun von der gegenseitigen Lage des Zentrums *S* und des Kreismittelpunkts *M* ab. Gilt für den Radius $r<\|M-S\|$, so kommt man anschaulich gar nicht bis zum Zentrum *S* und der Kreis besteht nur aus zwei Punkten auf der Geraden durch *M* und *S*, die von *M* den gleichen Abstand *r* haben.



Für $r\geq\|M-S\|$ ist der Kreis um *M* nach der Eisenbahn-Metrik ein Kreis um *S* nach der Euklidischen Metrik mit dem Radius $r-\|M-S\|$ mit Ausnahme des Pheripherie-punktes auf der Geraden durch *M* und *S*. Anstelle dieses Punktes gehört der Punkt zum Kreis, der auf dieser Geraden über *M* hinaus im Abstand

von *r* liegt. Jeder Punkt *P* gehört zum Kreis, weil der Abstand von *M* und *P* über *S* gemessen wird.



Die Eisenbahn-Metrik kann man aber auch modifizieren, indem anstelle eines Zentrums eine Hauptlinie genutzt wird (auch Urwald-Metrik genannt, wenn man die Hauptlinie als Fluss interpretiert: die günstigste Verbindung zweier Orte führt im Urwald zunächst auf kürzesten Weg zum Fluss, dann entlang des Flussufers und schließlich wieder auf kürzesten Weg zum Zielpunkt). Auch hierbei wird der Abstand zweier Punkte auf einer Senkrechten direkt gemessen. Wie sieht nun der Kreis um *M* aus, wenn *P* ein Punkt der Kreislinie ist?

Die besondere MO-Aufgabe: Achtung – Falle Taschenrechner!

Aufgabe MO441021. Es seien *x* und *y* positive ganze Zahlen

mit dem harmonischen Mittel $h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = 4$ und

dem quadratischen Mittel $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = 24$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetrischen Mittels $a = \dfrac{x+y}{2}$.

Lösungshinweise: Wegen $h = 4$ folgt durch Multiplikation mit $(x + y)$

$$2xy = 4(x+y).$$

Wegen $q = 24$ folgt durch Quadrieren und anschließende Multiplikation mit 2

$$x^2 + y^2 = 1152.$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 1152 + 4(x+y),$$

also nach Definition von *a*

$$(2a)^2 = 1152 + 8a.$$

Dies führt zu einer quadratischen Gleichung, von deren beiden Lösungen $a_{1,2} = 1 \pm 17$ die negative auszuschließen ist, da *x* und *y* positiv sind. Daher folgt $a = 18$. ❑

An dieser Aufgabe nebst Lösungsdarstellung erscheint nichts auffällig. Man könnte aber auch in ebenso naheliegender Weise die gegebenen Gleichungen für *h* und *q* so umzuformen, dass man zunächst eine Gleichung in *x* (bzw. in *y*) erhält, nämlich

$$\frac{2}{1-\frac{2}{x}} = \sqrt{1152 - x^2},$$

deren Lösung mittels Taschenrechner bestimmt werden kann: $x_1 \approx 33{,}87450787$ und daraus folgt (beispielsweise über die Gleichung zu *h*) $y_1 \approx 2{,}125492134$. Da hier nur Rundungswerte verarbeitet werden, ist auch das Ergebnis nur angenähert bestimmbar (auch wenn sich „zufällig“ auf dem TR $a = 18$ ergibt). Rundet man dagegen x_1 als Zwischenergebnis auf weniger Stellen, wird *a* immer ungenauer. Dabei bleibt aber das Ergebnis im Prinzip in der Nähe von 18.

Doch Glück gehabt! Würde man aus Symmetriegründen von der Lösung $x_2 \approx 2{,}125492134$ ausgehen und damit über die Gleichung des harmonischen Mittels den Wert von y_2 ermitteln, nämlich

$$y_2 = \frac{2x}{x-2},$$

haben Rundungseffekte gravierende Auswirkungen: man erhält mittels Taschenrechner

für $x_2 \approx 2{,}125$: $y_2 = 34{,}00$, d.h. $a \approx 18{,}06$,
für $x_2 \approx 2{,}13$: $y_2 \approx 32{,}77$, d.h. $a \approx 17{,}45$.

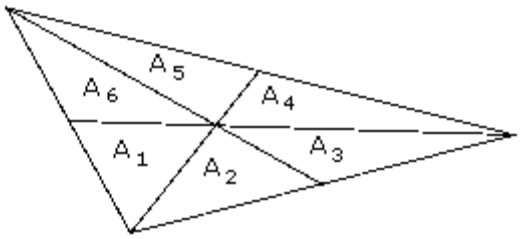
Damit wäre die Lösung $a = 18$ nicht mehr zu begründen!

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden in Abschnitte mit dem Längenverhältnis 1:2

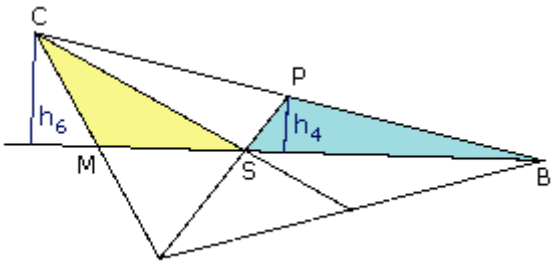
Beweis: Durch die drei Seitenhalbierenden wird das Dreieck in sechs Teildreiecke geteilt. Je drei davon besitzen zusammen denselben Flächeninhalt, denn die Seitenhalbierenden teilen das Dreieck in zwei flächengleiche Teile:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6$$
$$A_2 + A_3 + A_4 = A_5 + A_6 + A_1$$
$$A_3 + A_4 + A_5 = A_6 + A_1 + A_2$$



Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten so ergibt sich $A_1 - A_4 = A_4 - A_1$. Daraus folgt die Gleichheit $A_1 = A_4$. In analoger Weise kann man die dritte von der ersten Gleichung subtrahieren sowie die dritte von der zweiten und erhält so insgesamt, dass die Flächeninhalte gegenüberliegender Dreiecke untereinander jeweils gleich sind. Die jeweils benachbarten Dreiecke $A_2|A_3$, $A_4|A_5$ und $A_1|A_6$ besitzen ebenfalls paarweise denselben Flächeninhalt, da sie jeweils gleiche Grundseiten haben (die Hälfte einer großen Dreiecksseite) und identische Höhen. Damit besitzen alle sechs kleinen Dreiecke denselben Flächeninhalt, d.h.

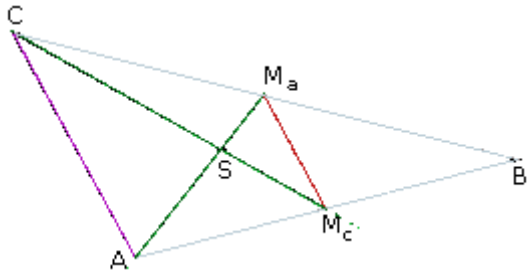
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6.$$



Betrachte man nun die vierte und die sechste Dreiecksfläche. Die Höhen dieser Dreiecke sind parallel, da sie beide senkrecht auf der Seitenhalbierenden MB stehen. Weil P die Strecke BC halbiert, ist $|BC|:|BP| = 2:1$ und folglich nach dem Strahlensatz auch $h_6 : h_4 = 2 : 1$.

Weiterhin besitzen die Dreiecke BPS und MSC besitzen den gleichen Flächeninhalt. Wenn aber die Höhe h_6 doppelt so groß ist wie h_4, muss gelten: $|BS| : |MS| = 2$, und damit teilt der Schwerpunkt S die Seitenhalbierende MB in zwei Abschnitte mit dem Längenverhältnis $2 : 1$.

Analog kann man je zwei Teildreiecke betrachten, die an den anderen Seitenhalbierenden anliegen und kommt zu entsprechenden Ergebnissen für die Lage von S auf diesen Strecken. □ ❑



Beweisvariante: Man verbinde die Seitenmittelpunkte M_a und M_c. Dann gilt

$|AB| : |M_cB| = 2 : 1$
und $|CB| : |M_aB| = 2 : 1$.

Damit sind die beiden Strecken M_aM_c und AC parallel. Weiter folgt, dass auch $|AC| : |M_aM_c| = 2 : 1$ gilt. Für die beiden Seitenhalbierenden AM_a und CM_c lässt sich daraus – wieder auf der Grundlage des Strahlensatzes – ableiten:

Wegen $|AC| : |M_aM_c| = 2 : 1$ muss gelten: $|AS| : |SM_a| = 2 : 1$ und für die andere Seitenhalbierende $|CS| : |SM_c| = 2 : 1$. ❑

Folgerung. Nicht jede Gerade durch den Schwerpunkt teilt die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teilfiguren.

Beweis: Man betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a (und dem Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$) und wähle als Schnittgerade eine Parallele zu einer Dreiecksseite durch den Schwerpunkt. Dann beträgt der Flächeninhalt des „abgeschnittenen“ Dreiecks $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2\sqrt{3}$, also $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Verlag von B.G. Teubner (Leipzig) erschien 1906 die 7. Auflage eines Buches von Dr. E. Bardeys: Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten. In dieser 232-seitigen Aufgabensammlung werden im zweiten Teil Bestimmungsaufgaben im Kapitel XXII „Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten“ behandelt. Der vorangestellte kurze Theorieteil beschreibt zunächst:

„Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Aus zwei derartigen voneinander unabhängigen Gleichungen kann man unter Anwendung der in Kapitel XVIII „Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten“ erläuterten Methoden die eine Unbekannte eliminieren und sich zunächst eine Gleichung mit einer Unbekannten verschaffen. Im Allgemeinen wird man jedoch hierdurch auf eine Gleichung vom vierten Grad geführt, deren Lösung nicht in den Bereich unserer Betrachtungen gehört. In gewissen Spezialfällen gelangen wir aber wieder auf eine Gleichung vom zweiten Grad, was immer der Fall ist, wenn eine der gegebenen Gleichungen vom ersten Grad ist.“

Man löse folgende Aufgaben!

Aufgabe 39. Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit dem Umfang 200 cm ist ebenso groß wie der eines Quadrates, dessen Umfang 192 cm ist. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

Aufgabe 40. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei 10 m. Die Höhe zur Hypotenuse ist gleich der Differenz der Hypotenusenabschnitte. Wie groß sind die Hypotenusenabschnitte?

Aufgabe 47. Welche zwei Zahlen haben folgende Eigenschaft: Dividiert man die Differenz ihrer Quadrate durch die erste Zahl, so erhält man 5 Rest 5. Dividiert man sie durch die zweite Zahl, so erhält man 13 Rest 1.

Aufgabe 49. Ein Bruch verwandelt sich seinem Wert nach in den umgekehrten Bruch, wenn man vom Zähler 2, vom Nenner 5 abzieht, oder wenn man zum Zähler 6, zum Nenner 1 addiert. Wie heißt der Bruch?

Aufgabe 60. Die Zahl 900 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass die Summe ihrer Kuben gleich 370 ist.

Aufgaben Serie 2 (2019/20)

(Einsendungen bis 25. Oktober 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [8])

Aufgabe 2-1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als auch die Quersumme $Q(n + 1)$ des Nachfolgers $(n + 1)$ durch 11 teilbar sind. (5 Punkte)

Aufgabe 2-2. Jemand hat für einen Einkauf die Hälfte seines verfügbaren Geldes ausgegeben und danach genauso viele Cent wie vorher Euro und halb so viele Euro wie vorher Cent in seinem Portemonnaie. Wie viel Geld hat er nach dem Einkauf? (5 Punkte)

Aufgabe 2-3. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von BC und P der Mittelpunkt von AM. Weiter schneide die Gerade BP die Seite AC in einem Punkt Q. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$. (6 Punkte)

Aufgabe 2-4. Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf AB ein Punkt D. Man konstruiere einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, dass DE die Dreieckfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben bzw. mehr als 12 Punkte zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 2-5A. In der Ebene seien endlich viele Punkte gegeben. Jeden von diesen verbinde man mit seinem nächstgelegenen Punkt durch eine Gerade. Alle Abstände seien verschieden, daher ist es eindeutig, welcher Punkt jedem Punkt am nächsten liegt.

[8] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(a) Man zeige: die entstehende Figur enthält keine sich schneidende Strecken. (2 Punkte)

(b) Man zeige: die entstehende Figur enthält kein geschlossenes Polygon. (2 Punkte)

(Hinweis: Ein ebenes Polygon stellt einen Streckenzug $P_1, P_2, .. P_n$ dar. Ist $P_1 = P_n$, so heißt das Polygon geschlossen.)

(c) Man beweise: Bilden je drei Punkte der gegebenen Menge ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 Flächeneinheit (FE) ist, so gibt es ein Dreieck mit der Fläche von 4 FE, das alle gegebenen Punkte enthält. (4 Punkte)

Aufgabe 2-5B.

(a) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Tripel natürlicher Zahlen *(k, m, n)* mit $n > m > 1$ gibt, die die Gleichung $m! \cdot n! = k^2$ erfüllen. (2 Punkte)

(b) Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 24$ endet die Zahl *n!* auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen. (2 Punkte)

(c) Man zeige, dass die Dezimalzahl 0,(1!)(2!)(3!)... (also nach dem Komma die Aneinanderreihung der Ziffern der Fakultäten, d.h. 0,1 2 6 24 120...) irrational ist. (4 Punkte)

(Hinweis: Eine rationale Zahl hat entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung.)

Seminarankündigung

Am ***Sonnabend, dem 21. September 2019,*** findet von 09:00 Uhr bis gegen 12:30 Uhr, das ***1. Chemnitzer Seminar*** zum KZM statt. Traditionell laden wir dazu zu Beginn des Schuljahres an die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz ein. Alle Interessenten (auch ohne Teilnahme am KZM) sind herzlich willkommen!

Impressum

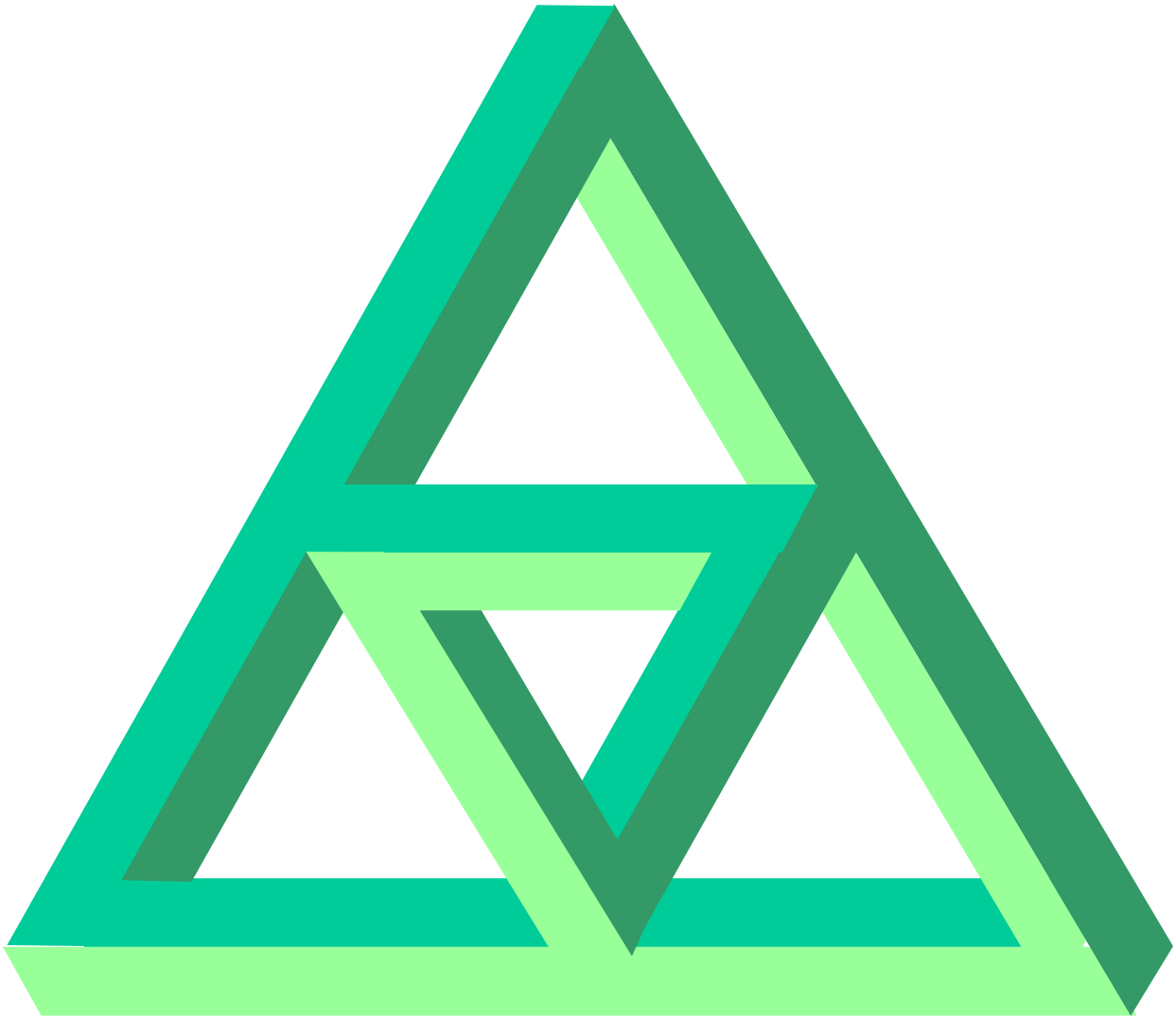
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des **Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 8/2019 18. Jahrgang

Lösungsdiskussion Serie 1

Aufgabe 1-1[1]**.** Zwei Freunde A und B sitzen im Café. A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel (gleicher Größe) voll seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von A. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

Lösungshinweise: Nach dem Mischen befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleichen Flüssigkeitsmengen wie vorher. Daher fehlt B am Ende gegenüber dem Anfangszustand in seiner Tasse genau soviel Kaffee, wie er Milch in der Tasse hat. Genau diese Menge Kaffee muss A im Glas haben. Somit hat B genau so viel Milch in der Tasse Kaffee wie A Kaffee im Glas Milch.

Lösungsvariante: Es sei M die Menge Milch und k die Menge Kaffee, die A nach dem Tausch in seinem Glas hat, und m die Menge Milch, die B in seiner Tasse hat. Da A nach dem Tausch die gleiche Menge Flüssigkeit in seinem Glas hat wie vor dem Tausch, gilt $M + k = M + m$, also $k = m$. ❑

Geht man allgemein von einer Menge Milch m, einer Menge Kaffee k und einem Fassungsvermögen des Löffels l aus, wobei keine Bedingungen an diese Mengen zu stellen sind (außer $l < m$, d.h. man kann tatsächlich einen Löffel voll Milch nehmen), so befindet sich nach dem ersten Tauschvorgang $k + l$ Flüssigkeit in der Tasse. Nach dem Umrühren entnimmt man davon wieder eine Menge l, die nun aber $l \cdot \frac{l}{k+l}$ Milch und Kaffee $l \cdot \frac{k}{k+l}$ Kaffee enthält. Dies gilt, weil wie in der Tasse das Verhältnis von Milch zu Kaffee auch auf dem Löffel wie $l : k$ sein muss und die Gesamtmenge auf dem Löffel l ist. Also befindet sich nach dem zweiten Tausch die Menge $\frac{l \cdot k}{k+l}$ Kaffee in der Milch. An Milch verbleibt im Kaffee aber

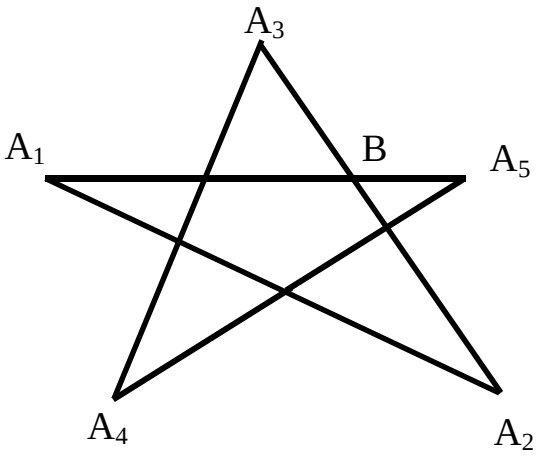
$$l - l \cdot \frac{l}{k+l} = \frac{l \cdot (k+l) - l^2}{k+l} = \frac{l \cdot k}{k+l}.$$

Diese Mengen sind also gleich.

Aufgabe 1-2[2]**.** Man ermittle die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des dargestellten fünfzackigen Sterns!

[1] Diese Aufgabe wurde 1963/64 in der 1. Stufe der MO (Kl. 11/12) gestellt.
[2] Diese Aufgabe wurde 1966/67 in der 1. Stufe der MO (Kl. 9) gestellt.

Lösungshinweise: Es seien A_1, A_2, ..., A_5 die Scheitelpunkte der Winkel an den Spitzen des Sterns und α_i (i = 1, ..., 5) die Größen der Innenwinkel mit dem Scheitel A_i. Verfolgt man von A_1 aus die Strecken A_1A_2, A_2A_3, ... bis A_5A_1 und dreht sich an den Spitzen jeweils gegen den Uhrzeigersinn, sodass man anschließend wieder in Richtung A_2 blickt, so hat man sich in der Ebene insgesamt zweimal um sich selbst gedreht, also einen Drehwinkel von $2 \cdot 360^o$ ausgeführt.



Andererseits dreht man sich in jedem Scheitelpunkt A_i um $180^o - \alpha_i$. Somit gilt:

$$\sum_{i=1}^{5}\left(180^o - \alpha_i\right) = 5 \cdot 180^o - \sum_{i=1}^{5}\alpha_i = 2 \cdot 360^o,$$

also $$\sum_{i=1}^{5}\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^o.$$

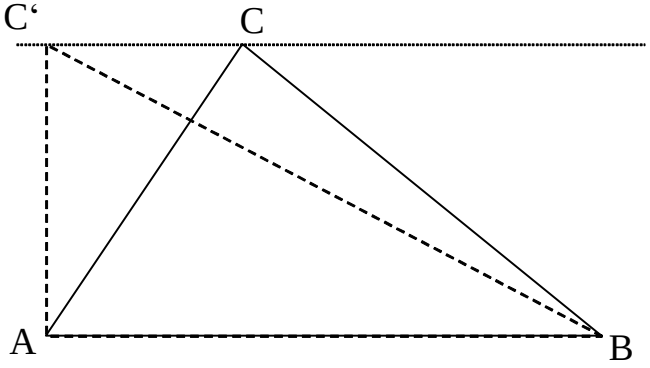
Folglich beträgt die Summe der Innenwinkel an den Spitzen 180°. ❑

Weitere Lösungsvarianten werden in diesem Heft im Abschnitt Sternfiguren diskutiert.

Aufgabe 1-3[3]. Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck *ABC* mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck *DEF* mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

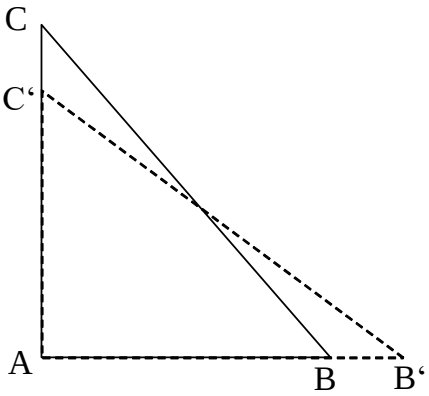
Lösungshinweise: Als Spezialfall erkennt man, dass zwei rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathetenlänge in einfacher Weise zu einem Dreieck der geforderten Art zusammengefügt werden können. Es ist nun zu zeigen, dass zwei beliebige Dreiecke zu einem solchen Spezialfall transformiert werden können.

Schritt 1: Jedes Dreieck kann mittels geometrischer Grundkonstruktionen in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck transformiert werden (mittels Scherung). Man errichte auf der Strecke *AB* im Punkt *A* eine Senk-



[3] Nach Aufgabe MO541023

rechte und ziehe durch den Punkt *C* eine Parallele zur Strecke *AB*. Der Schnittpunkt beider Geraden sei *C*‘. Dann gilt: Das Dreieck *ABC‘* ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt *A*. Außerdem haben die Dreiecke *ABC* und *ABC‘* den gleichen Flächeninhalt aufgrund der gemeinsamen Grundseite *AB* und der gemeinsamen Höhe.

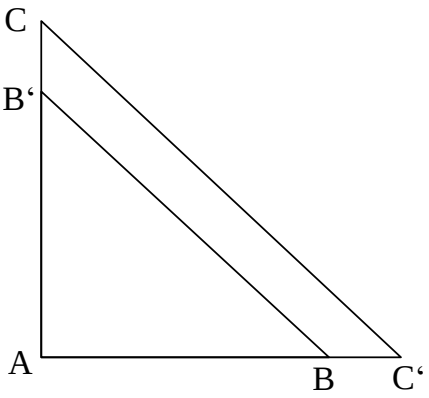


Schritt 2: Jedes rechtwinklige Dreieck kann in ein rechtwinkliges Dreieck mit einer vorgegebenen Kathetenlänge transformiert werden.

Damit die Dreiecke *ABC* und *AB’C‘* flächengleich sind, muss gelten:

$$\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB'}\right| \cdot \left|\overline{AC'}\right|,$$

gleichbedeutend zu $\left|\overline{AB}\right| : \left|\overline{AB'}\right| = \left|\overline{AC'}\right| : \left|\overline{AC}\right|$.

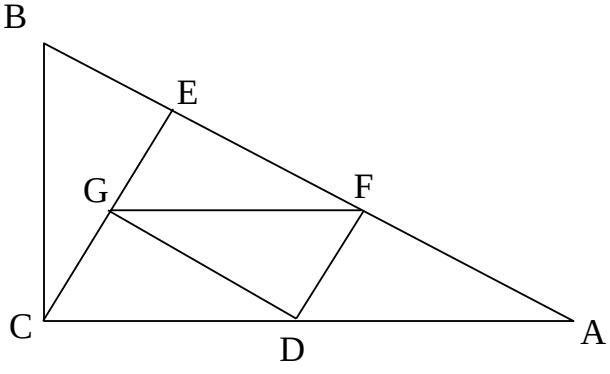


Ein solches Verhältnis kann beispielsweise durch Konstruktion ähnlicher Dreiecke realisiert werden. Sind die Geraden *BB‘* und *CC‘* parallel, so sind die Dreiecke *ABB‘* und *ACC‘* zueinander ähnlich (weil sie in den Winkelgrößen übereinstimmen). Deshalb sind die Verhältnisse einander entsprechender Seitenpaare gleich.

Mit Schritt 1 und 2 lassen sich zwei beliebig gegebene Dreiecke in zwei rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Katheterlänge transformieren. Diese transformierten Dreiecke lassen sich an dieser Kathete zu einem Dreieck zusammenfügen, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte der Ausgangsdreiecke ist. ❑

Aufgabe 1-4. Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck *ABC,* dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck *ABC* ähnliche Dreiecke zerlegen lässt (d.h. das Dreieck *ABC* ist ein fünfteiliges Gerücht, vgl. Heft 06/2017). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an.

Lösungshinweise: Laut Aufgabenstellung genügt es, ein konkretes geeignetes Dreieck *ABC* mit einem rechten Winkel in *C* und eine Zerlegung der geforderten Art anzugeben.
Ist *E* der Fußpunkt des Lotes von *C* auf *AB* und sind *D, F, G* jeweils die Mittelpunkte der Strecken *AC, AE* bzw. *CE* und schneiden die Geraden *CE* und



DF die Hypotenuse *AB* im rechten Winkel, so sind alle 5 Teildreiecke untereinander ähnlich, denn aus der Gleichheit der entsprechenden Stufen- und Wechselwinkel folgt die Ähnlichkeit nach (www). Die Teilung im Dreieck *AEC* führt bekanntermaßen zu vier kongruenten Teildreiecken.

Es ist noch zu zeigen, dass auch das Dreieck *BCE* kongruent zu diesen Teildreiecken ist. Dies ist erfüllt, wenn (mit den Bezeichnungen *BA = c*, *BC = a* und *AC = b* und den entsprechenden Seitenlängen *a', b'* und *c'* für die Teildreiecke) gilt *c' = a, 2c' = b*. Folglich erhält man $2a = b$ und damit $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{5}$.

Setzt man o.B.d.A. $a = 1$, so sind für eine Zerlegung wie in der Skizze Dreiecksseiten mit den Maßzahlen $(1; 2; \sqrt{5})$ notwendig. Wegen der Ähnlichkeit der Teildreiecke zum Ausgangsdreieck haben diese Seitenlängen mit den Maßzahlen (a'; $2a$'; $a'\sqrt{5}$). Wegen $a'\sqrt{5} = c' = a = 1$ gilt $a' = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Damit gilt auch für die Strecke *AB*: $\sqrt{5} = c = a' + 2b' = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$.

D.h., die Zerlegung ist vollständig und überschneidungsfrei. Das Dreieck *ABC* mit den angegebenen Maßen kann folglich wie gefordert in fünf Teildreiecke zerlegt werden. ❑

Aufgabe 1-5A[4]. Gegeben sei eine Reihe von 9 nummerierten Plätzen (1 bis 9). Schreibt man auf diese Plätze die Ziffern 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge *F* (jede Ziffer genau einmal) und bezeichnet die Summe aus den neun absoluten Differenzen von Platznummer und Ziffer auf dem Platz mit *U(F)*, so definiert *U(F)* eine Unordnung von *F*.

(a) Man finde eine Reihenfolge mit dem Unordnungswert 26.
(b) Man beweise: Der Wert der Unordnung *U* ist stets eine gerade Zahl.
(c) Man finde den maximalen Wert der Unordnung *U*, der unter diesen Bedingungen erreichbar ist.

Lösungshinweise:
(a) Beispielsweise hat die Zahlenfolge *F* = (8, 3, 1, 5, 9, 6, 7, 4, 2) nach der angegebenen Definition den Unordnungswert 26, denn für die Summe der absoluten Differenzen aus Platznummer und Ziffer auf diesem Platz gilt:

$$|1 - 8| + |2 - 3| + |3 - 1| + |4 - 5| + |5 - 9| + |6 - 6| + |7 - 7| + |8 - 4| + |9 - 2| =$$
$$= 7 + 1 + 2 + 1 + 4 + 0 + 0 + 4 + 7 = 26.$$ ❑

(b) Für eine Zahl gilt entweder $a = |a|$ oder $a = |a| - 2a$. Die Summe von Zahlen unterscheidet sich deshalb von der Summe ihrer Beträge stets um eine gerade

[4] Nach Engelhaupt, H.: Aufgaben mit Ziffern (Teil I) – Ungeordnete Reihenfolgen. In: alpha Heft 9 (1996), S. 22-23.

Zahl. Da die Summe der Differenzen aus Platznummer und Ziffer den Wert 0 ergibt (sowohl die Platznummern als auch die Ziffern auf den Plätzen sind in beliebiger Reihenfolge jeweils genau die Ziffern 1 bis 9) und somit geradzahlig ist, ist auch die Summe deren absoluten Differenzen geradzahlig.

In einer Formel ausgedrückt: Bezeichnet man mit *u(i)* die Ziffer auf der Platzziffer *i*, so gilt also $0 = \sum_{i=1}^{9} u(i) - \sum_{i=1}^{9} i = \sum_{i=1}^{9} \big(u(i) - i\big)$. Sortiert man nun die rechte Summe um und fasst die nichtnegativen und negativen Summanden zusammen, kann man fortsetzen:

$$0 = \sum_{i=1,u(i)-i\geq 0}^{9} \big(u(i)-i\big) + \sum_{i=1,u(i)-i<0}^{9} \big(u(i)-i\big) = \sum_{i=1,u(i)-i\leq 0}^{9} |u(i)-i| - \sum_{i=1,u(i)-i<0}^{9} |u(i)-i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{9} |u(i)-i)| - 2 \cdot \sum_{i=1,u(i)-i<0}^{9} |u(i)-i)|$$

Folglich ist die Summe der Betragsdifferenzen eine gerade Zahl. ❑

(c) Nach (a) ist der Unordnungswert mindestens 26. Es seien für $i = 1, ..., 9$ mit p_i die Platznummern und mit z_i die Ziffern auf diesen Plätzen bezeichnet. Sie seien so geordnet, dass für die Differenzen gilt:

$$p_1 - z_1 \leq p_2 - z_2 \leq ... \leq p_9 - z_9$$

Es gibt sicher ein i_0 mit $1 \leq i_0 < 9$, so dass alle Differenzen $p_i - z_i$ mit $i \leq i_0$ negativ sind. Wären nämlich alle Differenzen nichtnegativ, könnte man in der Summe der absoluten Differenzen $\sum_{i=1}^{9} |p_i - z_i|$ die Betragszeichen vernachlässigen und als Wert würde sich 0 ergeben (siehe (b)). Wären dagegen alle Differenzen negativ, könnte man Platznummer und Ziffer auf dem Platz vertauschen und hätte eine Reihenfolge, bei der alle Differenzen positiv wären. Wegen

$$\sum_{i=1}^{9} |z_i - p_i| = \sum_{i=1}^{i_0} (z_i - p_i) + \sum_{i=i_0+1}^{9} (p_i - z_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{i_0} (z_i - p_i) + \sum_{i=1}^{9} (p_i - z_i)$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{i_0} (z_i - p_i)$$

hängt der Wert der Unordnung nur von den Platzierungen ab, bei denen die Ziffern größer sind als ihre Platznummern. Dieser wird offensichtlich maximal, wenn die Summe der betreffenden z_i möglichst groß und die der zugehörigen p_i möglichst klein wird. Dies ist für $z_i = 9, 8, 7, 6$ und entsprechend $p_i = 1, 2, 3, 4$ erreichbar. In diesem Fall beträgt die Unordnung

$2 \cdot (9 + 8 + 7 + 6 – 4 – 3 – 2 – 1) = 40.$

Für jedes andere i_0 und jede andere Belegung wird die Unordnung nicht größer, folglich ist die maximale Unordnung höchstens 40. Da die Reihenfolge F = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) den Unordnungswert 40 annimmt, ist die gefundene Größe das Maximum. ❑

Aufgabe 1-5B. Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$ („n-Fakultät“): $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$

(a) Man finde die größte ganze Zahl k, sodass 2019! durch 2019^k teilbar ist.
(b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a > b > 1$ keine Lösungen besitzt.
(c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise:
(a) Für die Zahl 2019 findet man die Primfaktorenzerlegung $2019 = 3 \cdot 673$. Da der Faktor 3 häufiger als der Faktor 673 auftritt, genügt es den Faktor 673 zu untersuchen. Unter den Zahlen von 1 bis 2019 sind 3 Zahlen durch 673 teilbar (673, 1346, 2019). Somit tritt im Produkt der Fakultät die Zahl 673 insgesamt nur dreimal als Faktor auf. Also ist 2019! für $k = 3$ durch 2019^k teilbar, nicht aber für $k = 4$. ❑

(b) Es sei $1 < b < a$ und $a! + b! = c!$ und deshalb $a < c$. Folglich gibt es zwei ganze Zahlen $k = a - b > 0$ und $m = c - b > k$. Die Fakultätengleichung lässt sich somit schreiben als:

$$b! + b! \cdot (b+1) \cdot \ldots (b+k) = b! \cdot (b+1) \cdot \ldots \cdot (b+m)$$

Dies kann nach Division durch $b!$ umgeformt werden zu

$$1 = (b+1)\ldots(b+k) \cdot ((b+k+1) \cdot \ldots \cdot (b+m) - 1)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist durch $(b + 1)$ teilbar, da $(b + k + 1)$ mindestens den Wert 3 annimmt und somit die Differenz in der Klammer von Null verschieden ist. Die linke Seite ist dagegen offenbar nicht durch $(b + 1)$ teilbar. Also kann die Summe zweier Fakultäten keine Fakultätszahl sein. ❑

(c) Für eine einstellige Zahl n ($n > 2$) gilt stets: $n < n!$ Folglich kann es unter den einstelligen Zahlen nur die trivialen Lösung 1 = 1! und 2 = 2! geben.

Es seien a ($a > 0$) und b Ziffern, so dass für $n = 10a + b$ gilt: $n = a! + b!$ Keine der Ziffern ist größer als 4, da sonst n mindestens dreistellig wäre. Wäre eine Ziffer 1, so muss für ein zweistelliges n die andere Ziffer 4 sein, doch weder 14 noch 41 erfüllen die Forderung, denn 1! + 4! = 25. Gleiches gilt für die Ziffer 2,

da die Zahlen 24 und 42 ebenfalls nicht die Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind (2! + 4! = 26). Somit bleiben nur noch die Zahlen 33, 34, 43, 44 zu prüfen, die aber ebenfalls als Lösung entfallen. Es gibt folglich keine zweistelligen Zahlen der geforderten Art.

Es seien a ($a > 0$), b und c Ziffern, so dass für $n = 100a + 10b + c$ gilt: $n = a! + b! + c!$ Mindestens eine der drei Ziffern ist größer als 4, da sonst $n \le 3 \cdot 4! = 72$ nicht dreistellig wäre. Keine der Ziffern ist dagegen größer als 6, da in diesem Fall n mindestens vierstellig würde. Auch die Ziffer 6 kann nicht auftreten, da dann $n \ge 6! = 720$ gelten würde und somit wenigsten eine Ziffer 7 oder größer wäre. Dies wurde bereits ausgeschlossen.

Folglich ist mindestens eine Ziffer gleich 5. Alle drei Ziffern können wegen $555 \ne 3 \cdot 5!$ nicht 5 sein. Auch zwei Fünfen sind nicht möglich, weil wegen $2 \cdot 5! = 240 \le n \le 2 \cdot 5! + 4! = 264$ nur die Zahl 255 möglich wäre, aber offensichtlich $255 \ne 2! + 2 \cdot 5! = 242$ gilt.

Folglich ist genau eine Ziffer gleich 5. Wegen $n \le 3 \cdot 5! = 360$ kann nicht die Hunderterstelle 5 sein. Wegen $120 = 5! \le n \le 5! + 2 \cdot 4! = 168$ folgt deshalb $a = 1$. Somit bleiben die Möglichkeiten:

$b = 5$: $150 + c = 1! + 5! + c! = 121 + c!$, also
$29 = c! - c = c\,((c-1)! - 1)$

oder

$c = 5$: $105 + 10b = 1! + b! + 5! = 121 + b!$, also
$10b - b! = b\,(10 - (b-1)!) = 16$

Wegen der Primzahleigenschaft von 29 müsste jedoch im ersten Fall $c = 1$ oder $(c - 1)! = 2$ sein. Dies führt zu keiner Lösung.

Im zweiten Fall muss b ein Teiler von 16 sein, also $b = 1$, 2, 4 oder 8. Nur $b = 4$ erfüllt die gegebene Gleichung. Folglich kann nur $n = 145$ die Aufgabe erfüllen.

Die Probe 145 = 1 + 24 + 120 = 1! + 4! + 5! bestätigt diese Zahl als Lösung. ❑

Bemerkung 1: Die Zahlen 1, 2, 145 und 40585 sind die einzigen natürlichen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Bemerkung 2: Auch wenn durch die Einschränkung der Suche nach allen höchstens dreistelligen Zahlen die systematische Untersuchung aller Zahlen von 0 bis 999 praktisch und ohne rechentechnische Hilfsmittel möglich ist, sollte dies als Lösungsweg vermieden werden. Wie gezeigt, geht es darum, durch Vorüberlegung zunächst die Anzahl der zu probierenden Fälle zu reduzieren. Bleiben am Ende dann doch noch einige Fälle übrig, ist eine tabellarische Übersicht für die Korrektur zulässig.

Ergänzende Lösungsdiskussionen[5]

Für die **Aufgabe 1-1** genügt es nicht, ein einzelnes Beispiel vorzurechnen. Für die Lösungsfindung kann man aber konkrete Zahlenbeispiele betrachten. Angenommen, die Tasse und das Glas haben jeweils 90 ml Flüssigkeit vorm ersten Tausch und der Löffel kann 10 ml aufnehmen. Dann lassen sich die Tauschvorgänge tabellarisch beschreiben.

	Inhalt Glas	Inhalt Löffel	Inhalt Tasse
Ausgangszustand	90 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee
1. Tausch	80 ml Milch	10 ml Milch	90 ml Kaffee
1. Mischung	80 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee, 10 ml Milch*
2. Tausch	80 ml Milch	9 ml Kaffee, 1 ml Milch*	81 ml Kaffee, 9 ml Milch
2. Mischung	81 ml Milch, 9 ml Kaffee	0 ml	81 ml Kaffee, 9 ml Milch

* Verhältnis jeweils 9 : 1

Man erkennt, dass die absoluten Mengen Kaffee und Milch gleich sind. Auch die prozentualen Mengen sind gleich (jeweils 9 ml von 90 ml, also 10%). Allerdings sollte der Verdacht aufkommen, diese Gleichheit könnte an der Gleichheit der Ausgangsmengen liegen. Es lohnt also, ein zweites Beispiel zu betrachten:

	Inhalt Glas	Inhalt Löffel	Inhalt Tasse
Ausgangszustand	200 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee
1. Tausch	190 ml Milch	10 ml Milch	90 ml Kaffee
1. Mischung	190 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee, 10 ml Milch*
2. Tausch	190 ml Milch	9 ml Kaffee, 1 ml Milch*	81 ml Kaffee, 9 ml Milch
2. Mischung	191 ml Milch, 9 ml Kaffee	0 ml	81 ml Kaffee, 9 ml Milch

* Verhältnis jeweils 9 : 1

Wieder sind die absoluten Mengen gleich, im Glas sind jetzt aber 4,5% Kaffee (9 : 200), in der Tasse dagegen wieder 10% Milch (9 : 90). Man darf zwar daraus die Vermutung ableiten, die absoluten Mengen seien immer gleich, bewiesen werden muss es aber allgemein.

Mischungsverhältnisse waren erst im vergangenen Jahr wieder Inhalt einer

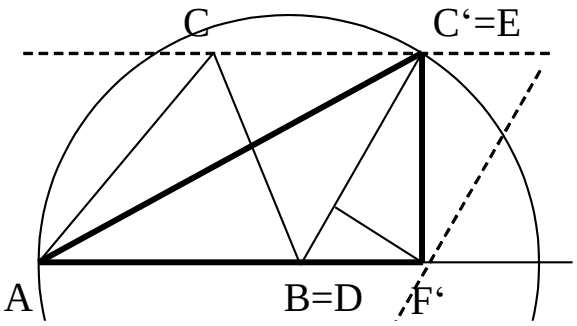
[5] Mit Auszügen aus dem Seminarprogramm vom 21.09.19

Aufgabe 580921. Peggy hält für die Gäste ihrer Party eine volle 2-Liter-Kanne mit dem Getränk „KiBa“ bereit. KiBa ist eine Mischung aus Kirsch- und Bananensaft.

Der erste Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt sofort die entnommene Menge, indem sie in gleicher Menge reinen Bananensaft nachfüllt. Der zweite Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt die entnommene Menge diesmal mit reinem Kirschsaft. (Wir gehen davon aus, dass die beiden Saftsorten in der gesamten Kanne überall gleichmäßig vermischt sind.)

a) Angenommen, am Anfang waren es 1200 ml Kirschsaft und 800 ml Bananensaft. Berechnen Sie den prozentualen Kirschsaftanteil
   – im Becher des ersten Gastes,
   – im Becher des zweiten Gastes,
   – in der Kanne nach dem zweiten Wiederauffüllen.
b) Ermitteln Sie das erforderliche Verhältnis Ki : Ba (Kirschanteil zu Bananenanteil) in der Ausgangsmenge, wenn der zweite Gast nach dem Auffüllen durch Bananensaft KiBa im Mischungsverhältnis 1 : 1 erhalten soll.

Zur **Aufgabe 1-3**: Die Konstruktion eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks kann auch auf direktem Weg erfolgen: Seien g_1 und g_2 die Grundseiten und h_1 und h_2 die Höhen des gegebenen Dreiecks *ABC* mit dem Flächeninhalt A_1 und des Dreiecks *DEF* mit dem Flächeninhalt A_2:



Ausgehend vom Dreieck *ABC* schlage man einen Kreisbogen um *B* mit dem Radius $r = g_2$. Die Parallele zu *AB* durch den Punkt schneide den Kreisbogen im Punkt *C*‘. Die Dreiecke *ABC* und *ABC*‘ sind flächengleich (gleiche Grundseite und gleiche Höhe). Die Parallele zu *BC*‘ im Abstand von h_2 schneidet die Gerade durch *A* und *B* im Punkt *F*‘. Die Dreiecke *DEF* und *BC*’*F*‘ sind flächengleich (gleiche Grundseite und gleiche Höhe). Damit ist *AF*’*C*‘ ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft.

Die Aufgabe **MO541023** forderte, aus zwei gegebenen Rechtecken mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A_1 + A_2$ mittels geometrischen Grundkonstruktionen zu erzeugen. In den Lösungshinweisen werden als Spezialfall zwei Rechtecke diskutiert, die in einer Seitenlänge übereinstimmen – die Aufgabe ist dafür einfach durch Nebeneinanderlegen beider Rechtecke lösbar. Mit dem Lösungsansatz aus Aufgabe A1-3 kann die allgemeine Lösung beschrieben werden: Man transformiere eines der Rechtecke so zu einem flächengleichen Rechteck um, dass das transformierte Rechteck in einer Seitenlänge mit dem anderen Rechteck übereinstimmt.

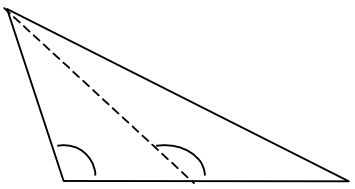
Auch folgende Überlegung führt zum Ziel: Man kann stets (mit Hilfe des Satzes des Pythagoras) zu zwei Quadraten ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte beider Quadrate ist. Also genügt es nachzuweisen, dass jedes rechtwinklige Dreieck in ein flächengleiches Quadrat transformiert werden kann (mit Hilfes des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck).

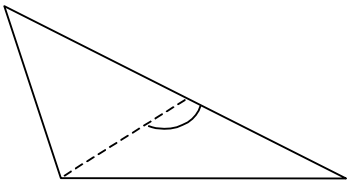
Ergänzungen zur **Aufgabe 1-4.** Jedes Dreieck ist ein vierteiliges Gerücht. Verbindet man die Mittelpunkte der Dreiecksseiten miteinander, entstehen 4 kongruente und zum Ausgangsdreieck ähnliche Teildreiecke. Teilt man die Dreiecksseiten jeweils in n gleichlange Strecken und verbindet die Teilungspunkte mittels Parallelen zu einer Dreiecksseite, findet man n^2 kongruente Teildreiecke, so dass jedes Dreieck auch allgemein ein n^2-teiliges Gerücht ist.

Aufgabe. Man beweise, dass ein nicht-rechtwinkliges Dreieck kein zweiteiliges Gerücht sein kann.

Beweisidee: Will man ein Dreieck in zwei Dreiecke teilen, so verläuft die Schnittgerade durch einen Eckpunkt (da andernfalls das Dreieck in ein Dreieck und ein Viereck geteilt würde). Dann schneidet diese Trennlinie die gegenüberliegende Seite entweder senkrecht oder sie bildet einen stumpfen Winkel. Da das entstehende Teildreieck ähnlich dem Ausgangsdreieck sein soll, ist ein rechter Winkel nicht möglich. Also hat ein Teildreieck einen stumpfen Winkel – und damit auch das Ausgangsdreieck.

Wird der stumpfe Winkel nicht durch die Schnittgerade geteilt, können die stumpfen Winkel nicht gleich groß sein (Abbildung links). Aber auch wenn er geteilt wird, müsste ein Teilwinkel (für das zweite Teildreieck) so groß wie der stumpfe Winkel im anderen Teildreieck werden (Abbildung rechts). Dies ist unmöglich (warum?).





❑

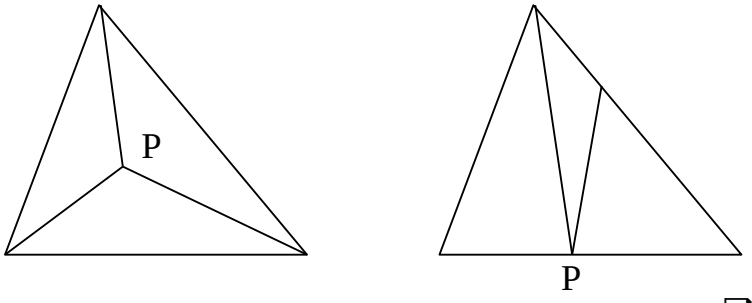
Man zeige, dass nur rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke zweiteilige Gerüchte sind.

Aufgabe MO451014. Peter versucht spitzwinklige Dreiecke zu finden, mit denen sich ein weiteres Dreieck zusammenlegen lässt. Nach vielen Versuchen meint er: „Mit 4 Dreiecken kann man die Aufgabe lösen, mit weniger als 4 Dreiecken aber nicht.“ Hat Peter recht?

Beweisidee: Dass es mit 4 Dreiecken geht, ist bekannt. Um zu zeigen, dass es mit 3 Dreiecken nicht geht, unterscheidet man zwei Fälle.

Fall 1: Wenn ein zusätzlicher Punkt *P* im Innern des Dreiecks entsteht, dann ergänzen sich die drei Winkel an *P* zu 360°. Das ist aber nicht möglich, denn es sind drei Innenwinkel von den spitzwinkligen Teildreiecken.

Fall 2: Wenn ein zusätzlicher Punkt *P* auf einer Dreiecksseite entsteht, dann ergänzen sich die Winkel bei *P* zu 180°. Da sie Innenwinkel der spitzwinkligen Dreiecke sind, müssen also zwei Teilungslinien von *P* ausgehen. Mindestens eine davon schneidet eine andere Dreieckslinie. An diesem Schnittpunkt können nicht beide Winkel spitz sein.



❑

Aufgabe. Ist eine Zahl *n* als Summe zweier Fakultätszahlen $n = a! + b!$ mit positiven Zahlen *a* und *b* darstellbar, so ist diese Darstellung eindeutig.

Beweisidee: Eindeutigkeitsnachweise werden häufig indirekt geführt. Man nehme also an, es gäbe zwei Paare $(a_1 ; b_1)$ und $(a_2 ; b_2)$ mit $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$ und

$$a_1! + b_1! = a_2! + b_2!$$

Weiter nehme man an, es gelte $a_1 < a_2$. Dann ist $a_1 < b_1$, denn bei Gleichheit wäre die linke Seite der Gleichung wegen $a_1 = b_1 < a_2 \le b_2$ kleiner als die rechte Seite. Folglich kann man die geforderte Gleichung auf beiden Seiten durch $a_1!$ dividieren und erhält

$$1 = (a_2 – a_1+1) \cdot \ldots \cdot a_1 + (b_2 – a_1+1) \cdot \ldots \cdot b_2 – (b_1 – a_1+1) \cdot \ldots \cdot b_1$$

Jedes der Produkte enthält mindestens den Faktor 2. Also ist die rechte Seite eine gerade Zahl im Widerspruch zur linken Seite. Deshalb gilt $a_1 = a_2$, woraus unmittelbar $b_1 = b_2$ folgt. ❑

Aufgabe. Es bezeichne $\overline{n}$ die Stellenanzahl von *n*, beispielsweise $\overline{524} = 3$. Kann es natürliche Zahlen *n* mit $\overline{n!} = n$ geben? Und wenn ja, gibt es endlich oder unendlich viele solche Zahlen?

Lösungshinweise: Zunächst untersuche man die ersten natürlichen Zahlen und erkennt, dass die Stellenzahl langsamer steigt als *n*, denn es gilt $\overline{2!} = 1$, $\overline{3!} = 1$, $\overline{4!} = 2$ usw. Ab einem hinreichend großen n_0 (mindestens ab $n_0 = 100$) erhöht sich aber in der Fakultät mit jeder Multiplikation die Stellenzahl um mehr als eine Stelle. Offensichtlich ist $\overline{n!} > n$ für $n > 200$, denn die letzten 100 Faktoren in 200! liefern bereits mindestens 200 Stellen. Damit ist nach-

gewiesen: Es gibt höchstens endlich viele Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

Ob es aber eine Zahl gibt, kann nicht ohne Weiteres angegeben werden. Es könnte nämlich ein n_0 mit $\overline{n_0!} < n_0$ und $\overline{(n_0+1)!} > (n_0+1)$ geben, d.h. die entscheidende Stellenzahl könnte gerade übersprungen werden. Da bleibt wohl doch nur der Taschenrechner oder der Computer, um es herauszufinden: Es gilt $\overline{22!} = 22$, $\overline{23!} = 23$, $\overline{24!} = 24$. Die Zahlen 22! und 23! traten bereits in MO-Aufgaben auf.

Über die Anzahl der Teiler einer Zahl

Man kann die Anzahl der Teiler einer Zahl formelmäßig ermitteln:

$$T\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}\right) = (1+k_1)\cdot(1+k_2)\cdot\ldots\cdot(1+k_n)$$

Wie viele Teiler kann eine dreistellige Zahl maximal haben. Durch systematische Untersuchung der möglichen Fälle (was ist eine geeignete Systematik?) findet man, dass $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ mit 32 Teilern das Maximum erreicht. Unter den vierstelligen Zahlen besitzen übrigens die Zahlen 7560 und 9240 die meisten Teiler (jeweils 64). Man überprüfe, dass es unter den drei- bzw. vierstelligen nicht mehr Teiler sein können!

Olympiade-Aufgaben, die sich durch Anwendung der allgemeinen Formel über die Anzahl der Teiler vorteilhaft lösen lassen, waren beispielsweise:

Aufgabe MO301035. Man untersuche, ob es eine Menge *M* von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Keine Zahl aus *M* enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus *M* ist eine Quadratzahl.

Lösungshinweise: Es gibt eine solche Menge. Mit allen elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 kann man folgende zusammengesetzte Zahlen bilden:

$$2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \ldots \cdot 31^{k_{11}} \quad (k_i = 0 \; oder \; 1)$$

Das sind $2^{11} = 2048$ verschiedene Zahlen. Keine hat einen Primfaktor größer als 31. Unter diesen Zahlen ist keine mit einer Quadratzahl als Teiler. Folglich erfüllt jede Teilmenge mit 1991 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe. ❑

Aufgabe MO391041. *M* sei die Menge aller derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von fünf aufeinander folgenden positiven geraden Zahlen darstellen lassen.

(a) Ermittle die größte ganze Zahl *t*, die ein Teiler aller dieser Zahlen aus *M* ist.

(b) Ermittle die größte natürliche Zahl *m*, für die gilt, dass jede Zahl aus *M* mindestens *m* positive Teiler hat.
(c) Ermittle die kleinste Zahl aus *M*, die mehr als 200 positive Teiler hat.

Lösungshinweise: Der größte ganze Teiler kann nicht größer sein als jedes Element der Menge *M*. Folglich gilt $t \le 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$. Nun zeige man, dass jede der Zahlen aus *M* diesen Teiler besitzt. *t* besitzt 36 Teiler. Alle Zahlen aus *M* haben mindestens diese 36 Teiler, *m* kann aber nicht größer sein, weil 3840 als kleinstes Element genau diese 36 Teiler hat. Um (c) zu beantworten, genügt es mittels der Primfaktorzerlegung der ersten Elemente von *M* die erste Zahl der geforderten Art zu finden. Es ist $14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ mit insgesamt $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ Teilern. ❑

Ohne den Formelansatz zur Berechnung der Anzahl aller Teiler einer Zahl wäre dies eine kaum lösbare Aufgabe. In der Musterlösung für die Korrektur wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Satz über die Anzahl der Teiler einer Zahl vom Schüler als bekannt vorausgesetzt und zitiert werden darf.

Extremalprinzip in Aufgaben [6]

Die Idee des Extremalprinzips kann man an der bekannten **Aufgabe** erläutern, die Irrationalität von $\sqrt{2}$ nachzuweisen: Man nehme an, es gebe ganze Zahlen *p* und *q* (*q* > 0) mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Dann gibt es ein Paar solcher ganzen Zahlen mit **minimalem** Wert *q*, (p_0; q_0), für das gilt: $2 \cdot {q_0}^2 = {p_0}^2$. Folglich ist ${p_0}^2$ und damit auch p_0 durch 2 teilbar, also $p_0 = 2 \cdot p_1$. Wegen $2 \cdot {q_0}^2 = {p_0}^2 = 4 \cdot {p_1}^2$ gilt $2 \cdot {p_1}^2 = {q_0}^2$ mit $p_1 < q_0$. Dann ist aber auch $\sqrt{2} = \frac{q_0}{p_1}$ - ein Widerspruch zum minimal gewählten Nenner q_0.

(Hinweis: Meist führt man jedoch den Beweis zum Widerspruch in der Primfaktorenzerlegung von p und q bzgl. des Primfaktors 2).

Aufgabe. Man zeige, dass der Ausdruck $n \cdot \sqrt{2}$ für keine ganze Zahl *n* mit *n* > 0 eine ganze Zahl ist.

Hinweis: Diese Fragestellung ist gleichbedeutend zur Aussage, $\sqrt{2}$ sei nicht rational. Wäre nämlich $\sqrt{2}$ rational, so gäbe es zwei natürliche Zahlen *p* und *q* mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, insbesondere gäbe es also eine ganze Zahl *q*, so dass $q \cdot \sqrt{2} = p$ eine ganze Zahl wäre.

[6] Aufgabenbeispiele aus dem 1. Chemnitzer Seminar vom 21.09.19

Beweisidee: Man nehme an, es gäbe Zahlen, für die das Produkt mit $\sqrt{2}$ ganzzahlig ist. In dieser Zahlenmenge gibt es ein kleinstes Element (es sei dies die Zahl *k*, „**kleinste Zahl**“ als Extremaleigenschaft). Dann ist auch $k_0 = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot k < 0{,}5\cdot k$ ganzzahlig und kleiner als *k*. Zudem hat $k_0 < k$ wegen $k_0 \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot k \cdot \sqrt{2} = 2\cdot k - k\cdot\sqrt{2}$ auch die Eigenschaft, dass ihr Produkt mit $\sqrt{2}$ ganzzahlig ist – im Widerspruch zur Extremaleigenschaft von *k*. ❑

Aufgabe. Auf einem Kreis seien *n* Zahlen a_1, ..., a_n verteilt mit $a_n \le \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ mit $a_{n+1} = a_1$, d.h. jeder Wert ist der arithmetische Mittelwert seiner zwei Nachbarn. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind.

Lösungshinweise: Wenn die Zahlen nicht alle gleich seien, dann gibt es eine **kleinste** Zahl *m* (Extremaleigenschaft). Für die zwei Nachbarzahlen *b* und *c* gilt also $m \le b;c$ und $m \le \frac{b+c}{2}$. Das ist aber nur erfüllbar für $m = b = c$. Damit sind alle Zahlen gleich. ❑

Aufgabe. Mittags um zwölf Uhr – *n* Cowboys (*n* ungerade) treffen sich zum Duellieren. Jeder Cowboy hat genau einen Schuss. Um die Treffsicherheit zu erhöhen, schießt jeder Cowboy auf den ihm am nächsten stehenden Cowboy. (Dabei seien alle Abstände zwischen zwei Cowboys paarweise verschieden, so dass stets eindeutig der am nächsten stehende Cowboy bestimmt werden kann.) Man zeige, dass mindestens ein Cowboy überlebt.

Lösungshinweise: Da alle der endlich vielen Abstände verschieden sind, gibt es genau zwei Cowboys, die den kleinsten Abstand voneinander haben (**minimaler Abstand** als Extremaleigenschaft). Sie schießen gegenseitig auf sich (und überleben im ungünstigen Fall beide nicht).

Angenommen, weitere der anderen (n – 2) Cowboy zielen auf einen dieser beiden, weil dieser jeweils am nächsten steht. Dann verbleiben aber nur noch höchstens n – 3 Kugeln für die n – 2 Cowboys – mindestens ein Cowboy kann also nicht durch eine Kugel getroffen werden. Andernfalls kann die Aufgabe auf ein Problem mit (n – 2) Cowboys reduziert werden, ggf. bis ein Cowboy übrig bleibt (weil *n* ungerade ist).

Aufgabe. Gegeben sei ein Rundkurs, der von einem Auto befahren wird. Entlang der Strecke befinden sich Kanister mit gewisser Menge Benzin. Diese können zum Auffüllen des Tankes benutzt werden, der Tank kann stets den Kanisterinhalt aufnehmen. Die an der Strecke verteilt befindliche Gesamtmenge an Benzin reicht aus, um mit dem Auto den Rundkurs vollständig zu befahren. Man zeige, dass es einen Startpunkt auf diesem Rundkurs gibt, von dem aus das Auto den Rundkurs vollständig befahren kann.

Lösungshinweise: Man durchfahre den Rundkurs „theoretisch“ und lasse dabei auch negative Tankinhalte zu, wenn der Tank vor Erreichen des nächsten Kanisters leer sein sollte. Dann gibt es auf diesem Rundkurs mindestens eine Stelle, bei der der Tank den geringsten Füllstand hat (**„geringster Füllstand“** als Extremaleigenschaft). Dies ist der gesuchte Startpunkt. ❑

Aufgabe. Gegeben seien endlich viele rote und blaue Punkte in der Ebene, von jeder Farbe gleich viele. Die Punkte werden durch einen Linienzug verbunden, immer gradlinig abwechselnd rote und blaue Punkte. Man zeige, dass dieser Linienzug stets so ausgeführt werden kann, dass diese Verbindungslinien überschneidungsfrei sind. (Diese Aufgabe entspricht dem Höfe-Brunnen-Problem aus Heft 7/2019).

Aufgabe 450935. Vor langer Zeit gab es im alten China viele Familien von Flugdrachen. Die Drachen dieser Familien transportierten gerne Briefe. Die Fürsten des Landes planten ein landesweites Postsystem. Bei der Ausschreibung zu diesem Projekt erhielten zwei Drachenfamilien gemeinsam den Zuschlag, die anboten, jedes der vielen kleinen chinesischen Städtchen durch Flugdrachen mit jedem anderen direkt zu verbinden.

Zur Umsetzung des Projektes wurde jede Direktverbindung genau einer der beiden Drachenfamilien zugeteilt. Jedoch gerieten die Drachen wegen der Aufteilung derart in Streit, dass die beiden Familien danach gänzlich verfeindet waren. Nun waren die Fürsten in einer verzwickten Lage: Zum Ersten wollten sie die Ausschreibung des hohen Verwaltungsaufwandes wegen nicht wiederholen, zum Zweiten beharrte jede Drachenfamilie auf alleinige Bedienung der ihr zugeteilten Direktverbindungen, zum Dritten konnte aber keinem Städtchen zugemutet werden, sich von beiden Drachenfamilien anfliegen zu lassen. Hätten sich nämlich zwei Drachen aus unterschiedlichen Familien bei der Postzustellung in einem der Städtchen getroffen, also in Ausübung gerade der Tätigkeit, die die Feindschaft ausgelöst hatte, hätte schnell wieder ein Streit entbrennen können, bei dem womöglich das Städtchen in Schutt und Asche gelegt worden wäre.

Also setzten sich die klugen Fürsten zusammen und beratschlagten, ob die Post mit nur einer Drachenfamilie transportiert werden und dennoch Briefkontakt zwischen beliebigen Städtchen möglich sein könnte. Man zeige, dass es möglich war, mit einer der beiden Drachenfamilien alle Orte des Landes untereinander zu verbinden, wobei nur die dieser Familie ursprünglich zugeteilten Direktverbindungen verwendet wurden. (Umwege über solche Direktverbindungen waren natürlich zugelassen.)

Lösungshinweise: Man betrachte eine maximale Auswahl von Ortschaften, die mit einer der Drachenfamilien (*A* und *B* genannt) alle untereinander auf die in der Aufgabe beschriebene Art erreichbar sind (o.B.d.A. sei *A* die betrachtete Familie). Sind in der Auswahl alle Ortschaften enthalten, so ist nichts mehr zu beweisen. Andernfalls gibt es eine Ortschaft *X*, die nicht in der Auswahl enthal-

ten ist. Der Ort *X* ist von keinem der Orte in der betrachteten Auswahl mittels *A* erreichbar, denn sonst wäre er von allen Orten der Auswahl erreichbar und die Auswahl wäre nicht maximal. Folglich fliegt ein Drache der Familie *B* von *X* zu jedem Ort in der Auswahl. Daher sind alle bisher betrachteten Ortschaften untereinander erreichbar, wenn die Post lediglich mit *B* fliegt, indem die Post – jeweils falls notwendig – vom Ausgangsort zunächst zu *X* und dann zu ihrem Bestimmungsort fliegt. Diese neue Menge von Ortschaften wäre aber größer als die maximale Auswahl und das ist ein Widerspruch. ❑

Das Extremalprinizip ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von Wettbewerbsaufgaben, auch wenn es selten als Lösungsstrategie in „Reinform“ wie in Aufgabe 450935 angewandt werden kann. Ein weiteres Beispiel dieser Art:

Aufgabe 530946/531046. Seien positive ganze Zahlen m und n mit $m < n$ so gewählt, dass weder m noch n noch $m + n$ durch 3 teilbar sind. Kann man die Menge Z der ganzen Zahlen für jede derartige Wahl von m und n so in unendlich viele Teilmengen zu je drei Zahlen zerlegen, dass in jeder Teilmenge die drei Zahlen die drei Abstände m, n bzw. $m + n$ voneinander haben?

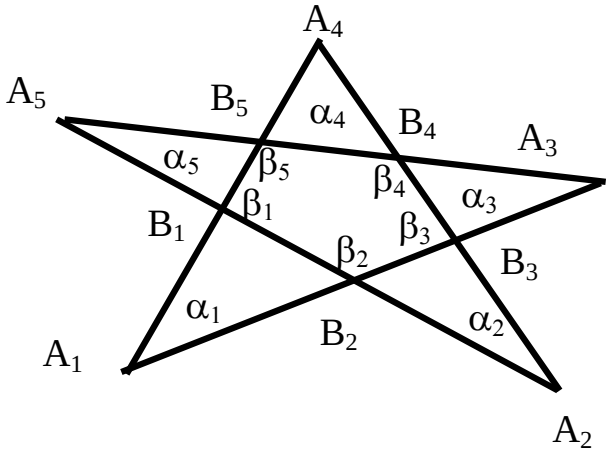
(Hinweis: „Zerlegung“ bedeutet, dass jede ganze Zahl in genau einer Teilmenge enthalten sein soll. Die Abstände der drei Zahlen a, b, c sind $|a - b|$, $|a - c|$ und $|b - c|$.)

Abschließend nicht ganz ernst gemeinte **Aufgabe**, die das Extremalprinzip noch einmal verdeutlicht: Eine Zahl heißt *interessant*, wenn sie eine interessante Eigenschaft aufweist. Beispielsweise ist die Zahl 2 die kleinste Primzahl, die Zahl 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die Zahl 4 ist die kleinste gerade Quadratzahl u.s.w.[7] Zeigen Sie, dass alle natürlichen Zahlen interessant sind.

Lösungshinweise: Angenommen, es gibt Zahlen, die nicht interessant sind. Dann gibt es unter den Zahlen, die nicht interessant sind, eine kleinste Zahl. Doch dass ist ja bereits eine interessante Eigenschaft, „kleinste Zahl der nicht-interessanten Zahlen“ zu sein! ❑

Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren [8]

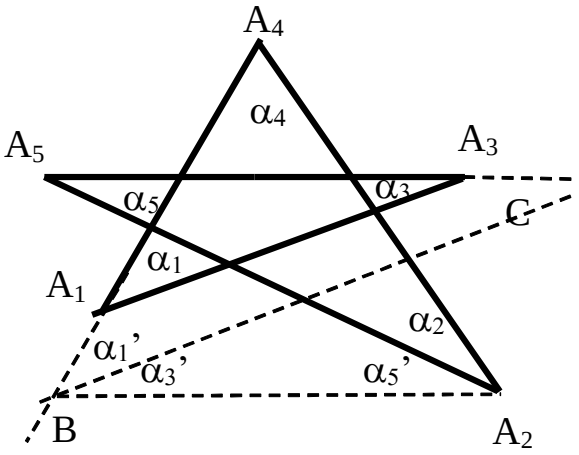
Unter der Innenwinkelsumme einer Sternfigur versteht man (wie in **Aufgabe A1-2**) die Summe der Innenwinkel an den Sternspitzen. Es seien in einem n-Stern die Winkel an den Sternspitzen A_i mit α_i und an den Ecken B_i des im Inneren sichtbaren n-Ecks mit β_i ($i = 1, ..., n$) bezeichnet (s. Abbildung des Fünfsterns).



[7] www2.stetson.edu/~efriedma/numbers.html: What's Special About This Number?

[8] Fortsetzung zu Sternfiguren aus Heft 07/2017, aus dem Seminarprogramm vom 21.09.19

Die Innenwinkelsumme lässt sich durch Parallelverschiebung von A_3A_5 zu BA_2 und von A_1A_3 zu BC finden. Über Stufen- und Wechselwinkel entsprechen die gestrichen bezeichneten Winkel in ihrer Größe den Winkeln mit den zugehörigen nichtgestrichenen Bezeichnungen. Im Dreieck BA_2A_4 besteht die Innenwinkelsumme aus genau den Größen der 5 Winkel an den Spitzen!



Dieser konstruktive Beweis ist aber sicherlich schwierig zu verallgemeinern. Man betrachte deshalb besser die fünf Dreiecke $A_iB_{i+4}A_{i+2}$ (i = 1, ..., n, wobei für einen Index j größer als 5 der Index j – 5 einzusetzen ist). In jedem dieser Dreiecke gilt die Innenwinkelsumme $\alpha_i + \alpha_{i+2} + \beta_{i+4} = 180°$ (i = 1, ..., 5).

Durch Addition der fünf verschiedenen Gleichungen erhält man für die Innenwinkelsumme $S_{Fünfstern(1)}$

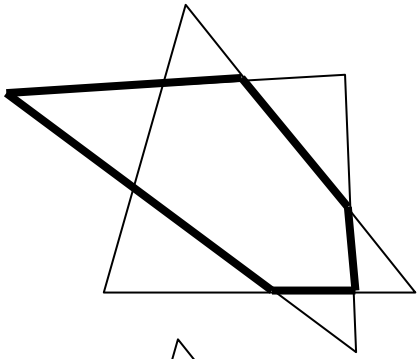
$$2 \cdot S_{Fünfstern(1)} + S_{Fünfeck} = 5 \cdot 180°$$

Weil das konvexe Fünfeck eine Innenwinkelsumme von 540° hat, folgt daraus unmittelbar der Wert $S_{Fünfstern(1)} = 180°$.

Dieses Verfahren lässt sich auf beliebige n-Sterne erster Art (deshalb „(1)“ im Index) übertragen, so dass man für die Innenwinkelsumme die allgemeine Formel $S_{n-Stern(1)} = (n-4) \cdot 180°$ findet.

Allerdings scheint die Suche nach geeigneten Teilfiguren mit bekannten Innenwinkelsummen für jedes n zu verschiedenen Lösungen zu führen.

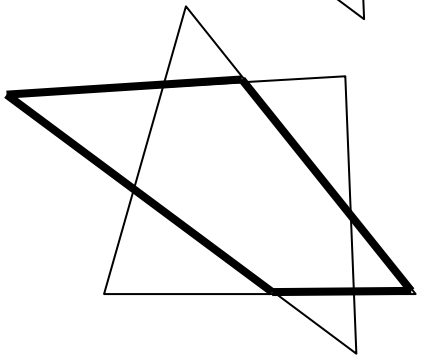
Betrachtet man beispielsweise den Sechsstern. Man könnte die stark umrandete fünfeckige Teilfigur nehmen und damit aus den 6 resultierenden Gleichungen die folgende Beziehung ableiten:



$$S_{6-Stern(1)} + 4 \cdot S_{6-Eck} = 6 \cdot 540°$$

woraus unmittelbar $S_{6\text{-}Stern(1)} = 360°$ folgt.

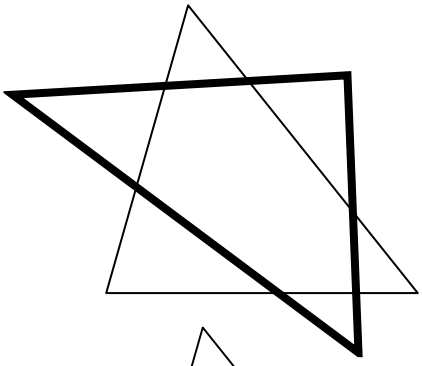
Aber auch die Betrachtung von viereckigen Teilfiguren führt zum Erfolg. Man findet nämlich aus 3 möglichen Gleichungen die Beziehung



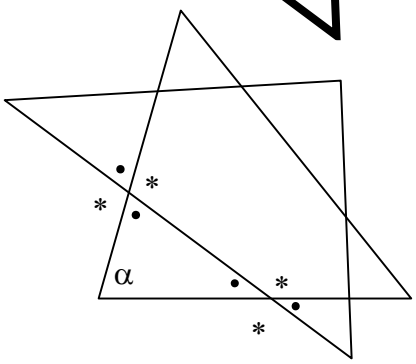
$$S_{6-Stern(1)} + S_{6-Eck} = 3 \cdot 360°.$$

Hieraus folgt wiederum $S_{6\text{-}Stern(1)} = 360°$.

Leichter findet man allerdings dieses Ergebnis, wenn man der 6-Stern in zwei sich überlappende Dreiecke zerlegt.



Betrachtet man die „äußeren“ Dreiecksspitzen und bezeichnet die Winkel mit der in nebenstehender Abbildung angedeuteten Symbolik sowie mit S^* bzw. $S^\bullet$ die Summe aller derart analog gekennzeichneten Winkel in allen äußeren Dreiecken, so erkennt man für den n-Stern folgende Beziehungen für die Winkelsummen:



$$S^* = 2 \cdot S_{n\text{-}Eck}$$
$$S^* + S^\bullet = n \cdot 360°$$
$$S_{n\text{-}Stern(1)} + S^\bullet = n \cdot 180°$$

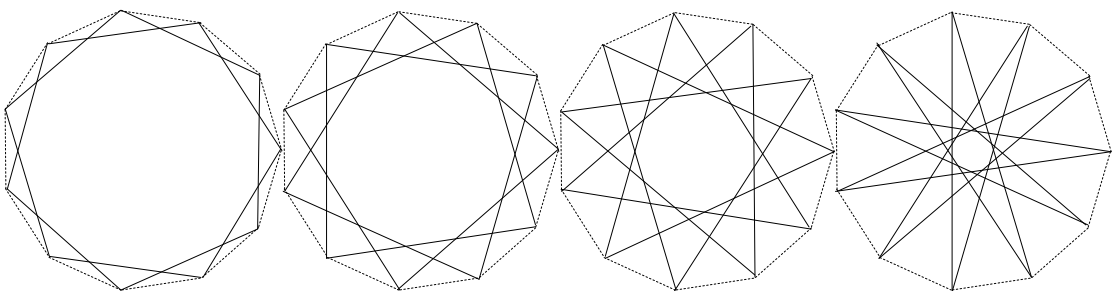
Für $n = 6$ folgt damit wegen $S_{6\text{-}Eck} = 720°$ unmittelbar $S^* = 1440°$, $S^\bullet = 720°$ und $S_{6\text{-}Stern(1)} = 360°$. Dieses Verfahren hat den Vorteil, verallgemeinerungsfähig für alle n-Sternfiguren erster Art anwendbar zu sein!

Die obigen Berechnungen gelten nur für Sternfiguren erster Art. Um auch andere Sternfiguren zu berücksichtigen, sei an die Definition erinnert:

Eine nicht einfache Sternfigur ist von m-ter Art ($m = k - 1$), wenn bei ihrer Erzeugung jeder Eckpunkt des konvexen Ausgangs-n-Ecks mit der k-ten darauf folgenden Ecke $\left(1 < k \le \frac{n}{2}\right)$ *durch eine Strecke verbunden wird.*

Man schreibt abkürzend für einen n-Stern m-ter Art: $\left\{\frac{n}{k}\right\}$-Stern mit $k = m + 1$.

Die Sinnhaftigkeit für die Verwendung von k anstelle von m in der Symbolik wird deutlich, wenn man in einem regelmäßigen Stern vom Mittelpunkt eine Halbgerade zeichnet, die keine Ecke der Figur trifft. So eine Halbgerade schneidet genau k der n Seiten, wie man an Beispielen leicht nachprüft. Nachfolgend sind die regelmäßigen Sterne $\left\{\frac{11}{2}\right\}, \left\{\frac{11}{3}\right\}, \left\{\frac{11}{4}\right\}$ und $\left\{\frac{11}{5}\right\}$ skizziert:



Beim Vergleichen dieser Figuren erkennt man, dass ein $\left\{\frac{n}{k}\right\}$-Stern als Teilfigur im $\left\{\frac{n}{k+1}\right\}$-Stern vorkommt. Man kann deshalb erwarten, dass sich die Innenwinkelsumme von solchen Sternfiguren durch die Innenwinkelsummen der vorausgehenden Sternfiguren ermitteln lässt. Tatsächlich gilt für die Innenwinkelsumme $S_{n(k+2)}$ des $\left\{\frac{n}{k+2}\right\}$-Sterns $S_{n(k+2)} = 2 \cdot S_{n(k+1)} - S_{n(k)}$.

Dabei bezeichnet $S_{n(0)}$ die Innenwinkelsumme des n-Ecks. Wegen $S_{11(0)} = 1620°$ und $S_{11(1)} = 1260°$ folgt somit $S_{11(2)} = 900°$, $S_{11(3)} = 540°$ und $S_{11(4)} = 180°$.

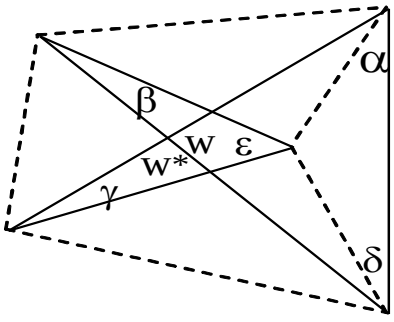
$n \setminus k$	0	1	2	3	4
5	540°	180°	-	-	-
6	720°	360°	0°	-	-
7	900°	540°	180°	-	-
8	1080°	720°	360°	0°	-
9	1260°	900°	540°	180°	-
10	1440°	1080°	720°	360°	0°
11	1620°	1260°	900°	540°	180°

Innenwinkelsummen von Sternfiguren

Aus der rekursiven Berechnungsvorschrift leitet man ohne Schwierigkeiten eine direkte Formel ab. Es gilt

$$S_{n(k)} = 180° \cdot (n - 2 \cdot k - 2).$$

Beschränkt man sich auf regelmäßige Sternfiguren (die durch Konstruktion aus regelmäßigen Vielecken entstehen), vereinfacht sich die Berechnung der Innenwinkelsumme enorm, da die Winkel in den Sternspitzen direkt bestimmt werden können (wie?).



Die in Heft 07/2017 angegebene Sternfigur lässt sich aus einem nicht-konvexen Fünfeck (Seiten gestrichelt dargestellt) konstruieren. Die Innenwinkelsumme dieser Figur beträgt ebenfalls 180°. Dies ergibt sich aus den Teilsummen

Innenwinkelsumme im Dreieck: $\alpha + \delta + w = 180°$
Innenwinkelsumme im Viereck: $\beta + \gamma + \varepsilon + 2 \cdot w^* + w = 360°$

Wegen $2 \cdot (w + w^*) = 360°$ lässt sich daraus die Behauptung leicht zeigen.

Abstand von Zahlenfolgen

Möchte man den Abstand zweier Folgen bestimmen, erinnere man sich an den Abstand von Zahlen: Man definiert den Abstand *d* zweier reeller Zahlen *x* und *y* durch den Betrag ihrer Differenz ihrer Werte, also $d(x;y) = |x - y|$. In Analogie könnte man versuchen, den Abstand zweier Zahlenfolgen durch den Betrag der Differenzen ihrer Unordnungswerte zu definieren. Offensichtlich hängt dann der Abstand von der Definition ab. Für *S* gemäß Heft 06/2017 findet man beispielsweise mit $F_0 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ für eine zweite Folge $F = (2,1,3,4,5,6,7,8,9)$

$$d_S(F_0;F) = |S(F_0) - S(F)| = |8 - 9| = 1$$

ein plausibles Ergebnis. Die Anwendung für U_2 führt ebenfalls auf den Wert 1, denn es gilt:

$$d_{U_2}(F_0;F) = |U_2(F_0) - U_2(F)| = |95 - 96| = 1$$

Für den Unordnungswert *U* aus Aufgabe 1-5A findet man dagegen

$$d_U(F_0;F) = |S(F_0) - S(F)| = |0 - 2| = 2$$

Sind das alles „vernünftige“ Abstandswerte? Man verwendet dafür den Begriff der Metrik. Eine Funktion *d*, die jedem Paar *(x ; y)* aus der zugrunde liegenden Menge eine reelle Zahl zuordnet, heißt Metrik, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(1) $d(x ; x) = 0$	Nichtnegativität
(2) $d(x ; y) = d(y ; x)$	Symmetrie
(3) $d(x ; y) \leq d(x ; z) + d(z ; y)$	Dreiecksungleichung

Die Eigenschaft (3) entspricht der üblichen Abstandsidee: Der Umweg über einen dritten Punkt *z* soll nicht kürzer als die direkte Verbindung zwischen *x* und *y* sein. Aus (1), (2) und (3) folgt unmittelbar, dass die Metrik stets nichtnegativ ist:

$$2 \cdot d(x;y) = d(x;y) + d(x;y) \overset{(2)}{=} d(x;y) + d(y;x) \overset{(3)}{\geq} d(x;x) \overset{(1)}{=} 0.$$

Definiert man also den Abstand zweier Folgen durch den Betrag der Differenz ihrer Unordnungswerte, dann erfüllen diese Definitionen stets die Eigenschaften (1) und (2). Ob man tatsächlich eine Metrik erhält, ist also an der Eigenschaft (3) zu untersuchen. Ist beispielsweise mit $d(F_1;F_2) = |U_2(F_1) - U_2(F_2)|$ tatsächlich eine Metrik definiert? Da die Unordnungswerte von einander unabhängig gebildet werden, wird letztlich nur mit reellen Zahlen gearbeitet, die stets die Dreiecksungleichung erfüllen.

Man kann aber die Abstandsfunktion auch gliedweise festlegen. Die Definition für den Unordnungswert *U* aus **Aufgabe 1-5A** lässt sich formulieren als

$$U(F) = \sum_{k=1}^{9} |a_k - k| .$$

Weil für F_0 die Beziehung $a_k = k$ gilt, ist die gleichbedeutend zu

$$U(F) = \sum_{k=1}^{9} \left| a_k - a_k^{(0)} \right| ,$$

wobei $a_k^{(0)}$ die Glieder der Folge F_0 sind. Damit erscheint es naheliegend, den Abstand zweier Folgen F_1 und F_2 gliedweise zu ermitteln, nämlich mittels

$$d\left(\left(a_1^{(1)},...,a_9^{(1)}\right);\left(a_1^{(2)},...,a_9^{(2)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{9} \left| a_k^{(1)} - a_k^{(2)} \right| .$$

Damit erhält man eine Metrik nach obiger Definition, da die Eigenschaften der Betragsbildung auf die Folgenglieder übertragen werden. Man prüfe, ob in ähnlicher Weise aus den anderen Unordnungsmaßen eine Metrik gebildet werden kann.

Abschließend seien zwei weitere Metriken angegeben:

(a) $$d(F_1;F_2) = \begin{cases} 0 & falls\ F_1 = F_2 \\ 1 & falls\ F_1 \neq F_2 \end{cases}$$ (so genannte triviale Metrik)

Diese triviale Metrik lässt sich immer angeben, sie unterscheidet nur zwischen „Gleichheit“ und „Ungleichheit“. Die Metrik-Eigenschaften (1) und (2) sind erfüllt und leicht prüft man auch die Eigenschaft (3) nach.

(b) $$d(F_1;F_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & falls\ a_N^{(1)} \neq a_N^{(2)}\ und\ a_i^{(1)} = a_i^{(2)}\ für\ alle\ i < N \\ 0 & falls\ F_1 = F_2\ (und\ damit\ N = 0) \end{cases}$$

In diesem Beispiel wird der Abstand zweier Folgen allein dadurch bestimmt, ab welchem Folgenglied sie sich unterscheiden. Je mehr Glieder beider Folgen am Beginn übereinstimmen, um so geringer erscheint ihr Abstand – eine plausible Definition. Der maximale Abstand beträgt 1, wenn sich die Folgen bereits im ersten Glied unterscheiden.

Die Eigenschaften (1) und (2) sind wiederum erfüllt. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, betrachte man mit F_1 und F_2 zwei Folgen mit $d(F_1; F_2) = 1/N$ $(0 < N)$, d.h. die Folgen stimmen in den ersten $N - 1$ Gliedern überein. Betrachtet man eine beliebige andere Folge F_3, so sind für die Eigenschaft (3) drei Fälle zu untersuchen:

(I) Stimmt F_3 mit F_1 überein, so gilt die Dreiecksungleichung unmittelbar.

(II) F_3 stimmt mit den ersten $0 < M \leq N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1 ; F_3) = 1/M$. Dann gilt stets

$$d(F_1;F_2) = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{M} = d(F_1;F_3) \leq d(F_1;F_3) + d(F_3;F_2)$$

(III) F_3 stimmt mit den ersten $M > N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1 ; F_3) = 1/M$. Da sich F_2 aber von F_1 an der Stelle N unterscheidet, muss sich auch F_3 an der Stelle N von F_2 unterscheiden, also $d(F_3 ; F_2) = 1/N$. Damit gilt

$$d(F_1;F_2) = \frac{1}{N} \leq d(F_1;F_3) + d(F_3;F_2) = \frac{1}{M} + \frac{1}{N}.$$

In jedem Fall ist die Dreiecksungleichung erfüllt und somit ist diese Definition eine Metrik.

Aufgaben Serie 3 (2019/20)

(Einsendungen bitte bis 17.12.2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder per E-Mail an norman.bitterlich@t-online.de [9])

Aufgabe 3-1. Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen dieser Teilmenge ist? (5 Punkte)

Aufgabe 3-2. Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken, wenn keinerlei Einschränkung an die Lage dieser Quadrate gegeben wird? (5 Punkte)

Aufgabe 3-3. Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2017 stehen an der Tafel. Amalie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris.
Wer kann den Gewinn erzwingen? (6 Punkte)

Aufgabe 3-4. Es sei Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind. (6 Punkte)

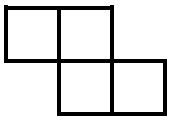
(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt bzw. bei mehr als 12 werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

[9] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

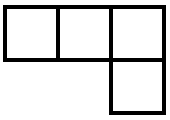
Aufgabe 3-5A. (a) Zum vollständigen Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2 x 2 und solche des Formates 4 x 1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man für das erneute Auslegen von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will. (2 Punkte)

(b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann. (2 Punkte)

F1



F2



(c) Man gebe Bedingungen für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers an, so dass der Fußboden nur mit Platten der Form F2 ausgelegt werden kann. (4 Punkte)

Aufgabe 3-5B. Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

(a) Man zeige, die Zahlen a, b, c sind paarweise teilerfremd. (2 Punkte)

(b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$. (2 Punkte)

(c) Man finde alle Lösungen für die Zahlen a, b und c, die die beschriebene Eigenschaft haben.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Am Sonnabend, dem **14. Dezember 2019**, findet das **2. Chemnitzer Seminar** statt – bitte den Termin schon vormerken. Das Seminarprogramm wird mit der nächsten Sendung kurz vorher detailliert mitgeteilt bzw. unter www.kzm-sachsen.de ausgewiesen.

Impressum

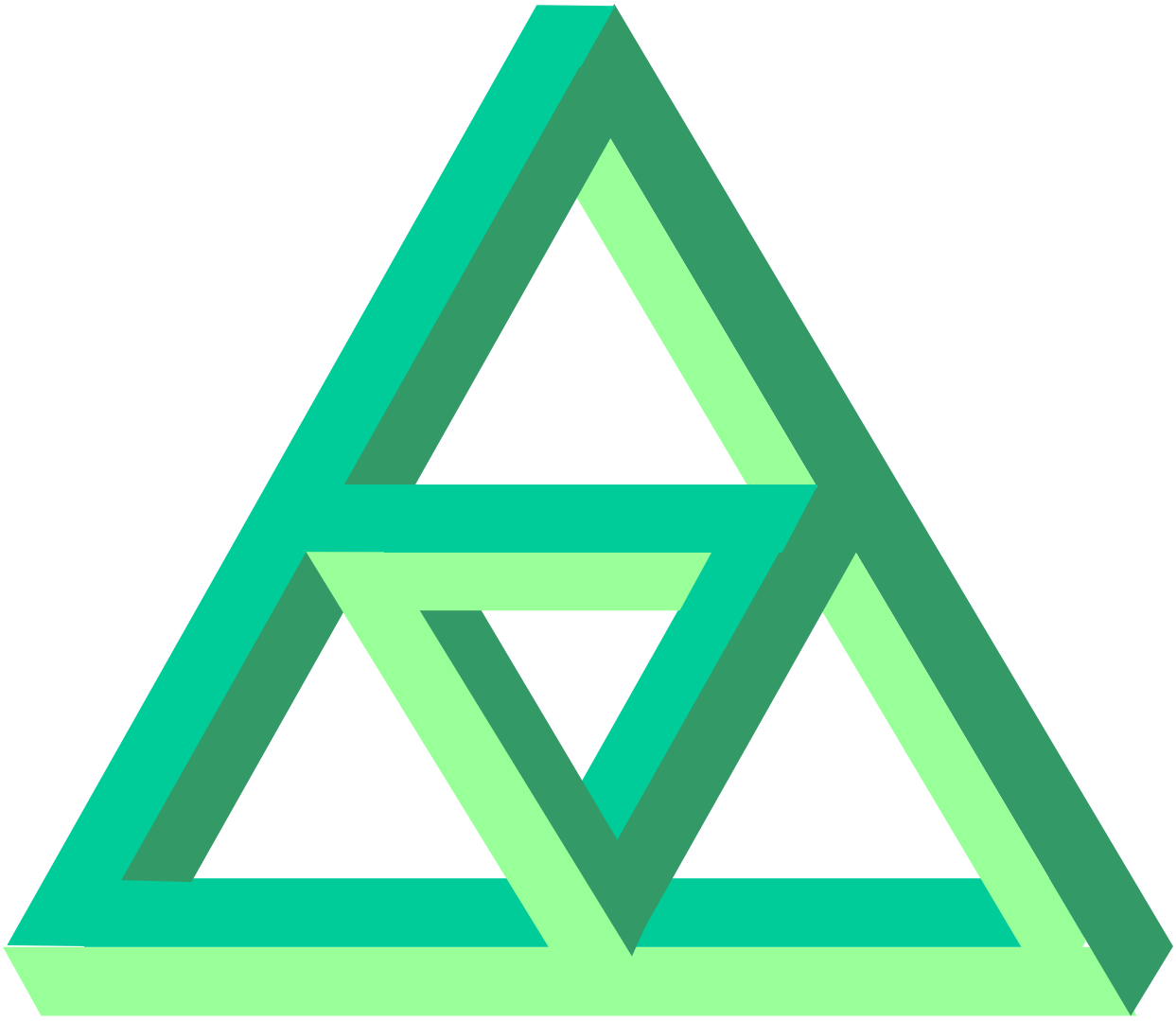
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 9 /2019 18. Jahrgang

Lösungsdiskussion Serie 2

Aufgabe 2-1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl *n*, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als auch die Quersumme $Q(n+1)$ des Nachfolgers $(n+1)$ durch 11 teilbar ist.

Lösungshinweise: Die gesuchte Zahl *n* muss auf wenigstens eine Ziffer 9 enden, da sich andernfalls die Quersumme beim Übergang von *n* auf $(n+1)$ um 1 ändern würde und damit nicht beide Quersummen durch 11 teilbar wären. Man kann *n* also in der Form

$$n = a \cdot 10^m + \sum_{k=0}^{m-1} 9 \cdot 10^k$$

schreiben, wobei *a* und *m* natürliche Zahlen mit $m > 0$ sind. Dann gilt für die Quersummen

$$Q(n+1) = Q(n) - 9 \cdot m + 1$$

Soll nun $Q(n)$ und $Q(n+1)$ gleichzeitig durch 11 teilbar sein, muss auch $9 \cdot m - 1$ durch 11 teilbar sein. Die kleinste Zahl *m*, die dies leistet, ist $m = 5$. Wegen $9 \cdot 5 - 1 = 44$ und $Q(a) > 0$ gilt also $Q(n) = Q(a) + 9 \cdot 5 \geq 55$. Somit muss $Q(a)$ mindestens 10 betragen.

Die kleinste geeignete Zahl ist $a = 19$. Dann wäre $n = 1.999.999$ und $n+1 = 2.000.000$, was die Bedingung nicht erfüllt.

Die nächste in Frage kommende Zahl *a* ist $a = 28$. Mit ihr ergibt sich $n = 2.899.999$ und $n+1 = 2.900.000$. Wegen $Q(n) = 55$ und $Q(n+1) = 11$ erfüllt diese Zahl *n* die Bedingungen und ist – wie der Lösungsweg zeigt – die kleinste derartige Zahl. ❑

Aufgabe 2-2. Jemand hat für einen Einkauf die Hälfte seines verfügbaren Geldes ausgegeben und danach genauso viele Cent wie vorher Euro und halb so viele Euro wie vorher Cent in seinem Portemonnaie. Wie viel Geld hat er nach dem Einkauf?

Lösungshinweise: Es seien E_1 und C_1 die Euro- bzw. Cent-Beträge, die vor dem Kauf im Portemonnaie waren, und E_2 und C_2 die Euro- bzw. Cent-Beträge, die nach dem Kauf im Portemonnaie waren. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$100 \cdot E_1 + C_1 = 2 \cdot (100 \cdot E_2 + C_2),$$

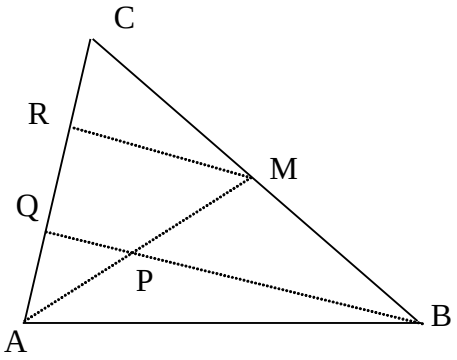
$$C_2 = E_1 \text{ und } E_2 = \tfrac{1}{2} \cdot C_1.$$

Also gilt

$$100 \cdot E_1 + C_1 = 2 \cdot (50 \cdot C_1 + E_1), \text{ d.h. } \quad 98 \cdot E_1 = 99 \cdot C_1$$

Da 98 und 99 teilerfremd sind und C_1 (im üblichen Sprachgebrauch) kleiner als 100 ist, folgt unmittelbar $E_1 = 99$ und $C_1 = 98$. Also hat er nach dem Kauf 49 Euro und 99 Cent im Portemonnaie.

Aufgabe 2-3[1]. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei *M* der Mittelpunkt von *BC* und *P* der Mittelpunkt von *AM*. Weiter schneide die Gerade *BP* die Seite *AC* in einem Punkt *Q*. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks *MCQP*.



Lösungshinweise: Der gesuchte Flächeninhalt lässt sich als die Differenz

$$A_{MCQP} = A_{AMC} - A_{APQ}$$

berechnen. Da *M* der Mittelpunkt der Dreieckseite $\overline{BC}$ ist, gilt $A_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABC}$.

Es sei nun *R* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$. Dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck *QBC* und folglich gilt $MR \parallel BQ$. Da *P* auf der Geraden *BQ* liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{MA}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck *AMR*. Also ist $|AQ| = |QR| = |RC|$.

Damit gilt für die Flächeninhalte $A_{ABQ} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} = \frac{1}{3}$, da die Längen der Grundseiten zur selben Höhe im Verhältnis 1 : 3 stehen.

Da *M* der Mittelpunkt der Dreieckseite $\overline{BC}$ ist, gilt $A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABC}$. Da *P* im Dreieck ABM der Mittelpunkt der Dreieckseite $\overline{AM}$ ist, gilt $A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABM}$, also $A_{ABP} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABC}$. Daraus folgt $A_{APQ} = A_{ABQ} - A_{ABP} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
Nach der eingangs aufgestellten Formel gilt also:

$$A_{MCQP} = A_{AMC} - A_{APQ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$ ❑

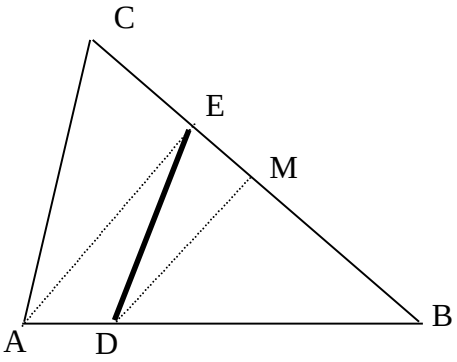
Aufgabe 2-4[2]. Gegeben sei ein Dreieck *ABC* und auf *AB* ein Punkt *D*. Man konstruiere einen Punkt *E* auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, dass *DE* die Dreieckfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren.

[1] Aufgabe MO570935
[2] Nach einer Aufgabe der 9. Mathematik-Olympiade (1969/70, Stufe 3), Klassenstufe 10

Lösungshinweise: Es sei o.B.d.A. $|AD| \le |DB|$ vorausgesetzt. Der Mittelpunkt von *BC* sei *M*. Dann hat das Dreieck ΔABM einen halb so großen Flächeninhalt wie das Dreieck ΔABC, denn: Beide Dreiecke stimmen in der Seite *AB* überein, die zu dieser Seite gehörende Höhe des Dreiecks ΔABM ist nach einem der Strahlensätze halb so groß wie die entsprechende Höhe des Dreiecks ΔABC.

(a) Analyse: Kein von *C* verschiedener Punkt *E*’ auf *AC* kann der Aufgabenstellung genügen. Denn für jeden solchen Punkt ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta ADE'$ kleiner als der von ΔADC und somit kleiner als die Hälfte des Flächeninhaltes von ΔABC. Also kann es höchstens auf der Seite *BC* einen Punkt der geforderten Art geben.

Angenommen, ein Punkt *E* auf *BC* habe die verlangte Eigenschaft. Dann sind ΔABM und ΔDBE flächengleich, also liegt *M* zwischen *E* und *B*. Zusätzlich sind auch ΔADM und ΔDME flächengleich. Hieraus folgt $AE \| DM$.



(b) Konstruktion: Ein Punkt *E* genügt der Aufgabenstellung, wenn er durch folgende Konstruktionsbeschreibung bestimmt wird:

Man konstruiere den Mittelpunkt *M* von *BC*. Die Parallele zu *DM* durch *A* schneidet die Strecke *BC* in dem gesuchten Schnittpunkt *E*.

(c) Beweis, dass diese Konstruktion zu einem Punkt *E* der gesuchten Art führt, besteht in der Umkehrung der in (a) genannten Schlüsse.

(d) Determination: Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Ist nämlich *E* als der (stets existierende) Schnittpunkt der Parallelen zu *DM* durch *A* mit dem von *B* durch *C* gehenden Strahl definiert, so gilt

$$|EM| : |MB| = |AD| : |DB| \le 1$$

Also liegt *E* auf der Strecke *BC*. Im Fall $|AD| = |DB|$ und nur in diesem fällt *E* mit *C* zusammen. ❑

Aufgabe 2-5A[3]**.** In der Ebene seien endlich viele Punkte gegeben. Jeden von diesen verbinde man mit seinem nächstgelegenen Punkt durch eine Gerade. Alle Abstände seien verschieden, daher ist es eindeutig, welcher Punkt jedem Punkt am nächsten liegt.

(a) Man zeige, die entstehende Figur enthält keine sich schneidende Strecken.

[3] nach Steinhaus, H. Studentenfutter – 100 Aufgaben für Mathe-Feinschmecker. Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin 1991

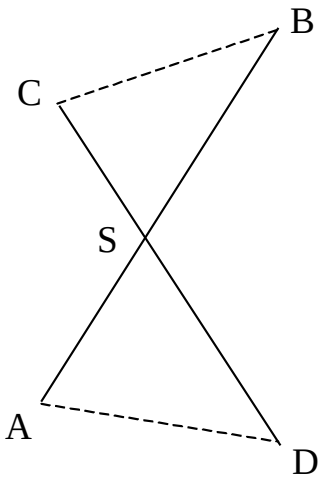
(b) Man zeige, die entstehende Figur enthält kein geschlossenes Polygon.

(Hinweis: Ein ebenes Polygon stellt einen Streckenzug $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dar. Ist $P_1 = P_n$, so heißt das Polygon geschlossen)

(c) Man beweise: Bilden je drei Punkte der gegebenen Menge ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 Flächeneinheit (FE) ist, so gibt es ein Dreieck mit der Fläche von 4 FE, das alle gegebenen Punkte enthält.

Lösungshinweise:

(a) Die gezeichnete Figur möge zwei sich schneidende Strecken *AB* und *CD* enthalten. Aus der Annahme, die Punkte *A* und *B* seien verbunden, folgt, dass *B* der zu *A* nächstgelegene Punkt ist und *D* der zu *C* nächstgelegene. Dann ist also



$AB < AD$ und $CD < CB$,
also $AB + CD < AD + CB$.

Aus den Dreiecksungleichungen in den Dreiecken *ADS* und *BCS* folgt aber unmittelbar

$$AD + CB < (AS + SD) + (CS + SB) = AB + CD.$$

Folglich führte die Annahme der überschneidenden Strecken zu einem Widerspruch, damit ist die Behauptung bewiesen. ❑

(b) Die Figur möge ein geschlossenes Polygon mit den Eckpunkten *ABC...MN* enthalten. Wir nehmen an, es sei $AB > AN$, d.h., der Punkt *N* ist der zu *A* nächstgelegenen Punkt. Dann ist aber auch $AB < AC$, damit *A* mit *B* verbunden wird. Weil auch die Punkte *B* und *C* durch eine Strecke verbunden ist, gilt ebenfalls $BC < CD$. Durch Fortsetzung dieser Überlegung gilt insgesamt $NA < AB < BC < \ldots < MN < NA$. Folglich findet man $AB < NA$ im Widerspruch zur Annahme $AB > NA$.

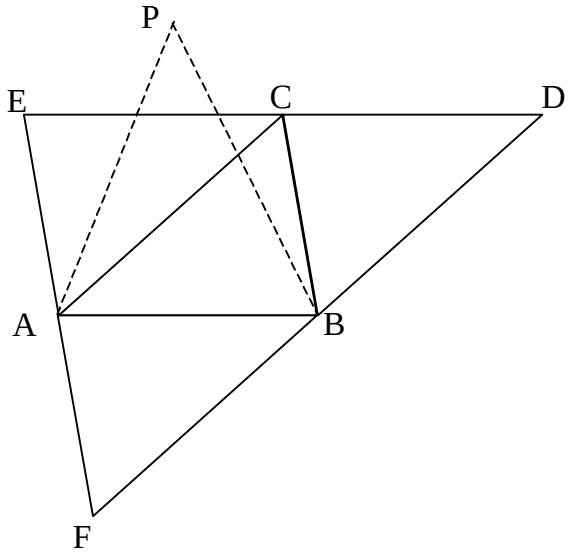
In ähnlicher Weise führt die Bedingung $AB < AN$ zu einem Widerspruch. Also kann die Figur kein geschlossenes Polygon enthalten. ❑

(c) Unter allen Tripeln von Punkten wähle man ein Tripel *A, B, C* so aus, dass das Dreieck *ABC* den maximalen Flächen-inhalt unter allen möglichen Dreiecken hat. Laut Aufgabenstellung gilt für diese Fläche: $F_{\Delta ABC} \leq 1$. Man konstruiert nun ein Dreieck *DEF* mit $F_{\Delta DEF} = 4 \cdot F_{\Delta ABC} \leq 4$, indem man durch die Punkte *A, B* und *C* die Parallelen zu den Gegenseiten zeichnet (s. Skizze auf folgender Seite). Es ist nun zu zeigen, dass alle Punkte der gegebenen Punktmenge im Dreieck *DEF* liegen.

Man nehme an, dass ein Punkt *P* der gegebenen Menge außerhalb des Dreiecks *DEF* liegt, und zwar so, dass *P* und das Dreieck *ABC* auf verschiedenen Seiten von *DE* liegen. Dann gilt wegen gleicher Grundseite *AB* und verschiedener Höhen von *C* bzw. *P* zu *AB*:

$$F_{\Delta ABC} < F_{\Delta ABP}.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass das Dreieck *ABC* den maximalen Flächeninhalt hat.



Analog argumentiert man, falls der Punkt *P* und das Dreieck *ABC* auf verschiedenen Seiten von *DF* bzw. *EF* liegen. Daraus folgt, dass alle Punkte unter den gegebenen Bedingungen im Dreieck *DEF* liegen und somit von einem Dreieck mit dem Flächeninhalt 4 überdeckt werden können. (Ist $F_{\Delta ABC} < 1$, so kann das Dreieck *DEF* durch Streckung zu einem Dreieck mit Flächeninhalt 4 FE vergrößert werden.) ❑

Aufgabe 2-5B.

(a) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Zahlentripel *(k, m, n)* mit $n > m > 1$ gibt, die die Gleichung $m! \cdot n! = k^2$ erfüllen.

(b) Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 24$ endet die Zahl *n!* auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen.

(c) Man zeige, dass die Dezimalzahl 0,(1!)(2!)(3!)... (also nach dem Komma die Aneinanderreihung der Ziffern der Fakultäten, d.h. 0,1 2 6 24 120...) irrational ist.

(Hinweis: Eine rationale Zahl hat entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung.)

Lösungshinweise:

(a) Setzt man für eine natürliche Zahl $a > 1$ für $n = a^2$ und $m = n - 1$, dann gilt

$$m! \cdot n! = \left(a^2 - 1\right)! \cdot \left(a^2\right)! = \left(a^2 - 1\right)! \cdot \left(\left(a^2 - 1\right)! \cdot a^2\right) =$$
$$= \left(\left(a^2 - 1\right)!\right)^2 \cdot a^2 = \left(\left(a^2 - 1\right)! \cdot a\right)^2$$

Es gibt also unendlich viele Zahlen *k*, deren Quadrat sich als Produkt zweier Fakultätszahlen darstellen lässt. ❑

Für $a = 2$ und $a = 3$ findet man folgende Beispiele

$$3! \cdot 4! = (3! \cdot 2)^2 = 12^2 ; \quad 8! \cdot 9! = (8! \cdot 3)^2 = 120960^2 .$$

(b) Hinweis: „auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen“ bedeutet für nicht durch 5 teilbare Zahlen n, dass die nächstgroße ganze Zahl an Nullen gemeint ist.

Die Anzahl $A(n!)$ der Endnullen einer Zahl $n!$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$A(n!) = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{25}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{5^p}\right] = \sum_{q=1}^{p} \left[\frac{n}{5^q}\right] \quad mit \quad 5^p \le n < 5^{p+1}$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Somit gilt für alle $n > 0$: $\left[\frac{n}{5}\right] \ge \frac{n}{5} - 1$. Da der zweite Summand in oben angegebener Summe für $n > 24$ mindestens den Wert 1 besitzt, gilt wie behauptet $A(n!) \ge \left(\frac{n}{5} - 1\right) + 1 = \frac{n}{5}$. ❑

(c) Jede rationale Zahl lässt nur abbrechende oder periodische Dezimaldarstellungen zu. Man nehme an, die angegebene Zahl sei rational.

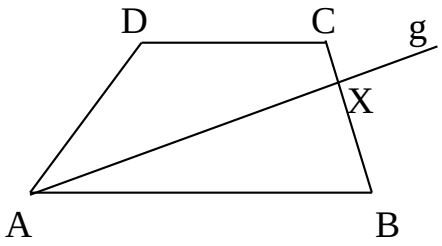
Offensichtlich bricht die Dezimaldarstellung nicht ab, da andernfalls ab einer gewissen Stelle nur noch die Ziffer 0 auftritt und es ein n_0 geben müsste mit $n! = 0$ für alle $n > n_0$.

Also muss die Dezimaldarstellung periodisch sein und sie habe die Periodenlänge p. Betrachtet man nun $(10^p)!$ Diese Zahl besitzt mindestens p Endnullen, da in der Fakultät die Zahl 10^p auftritt. Folglich müsste die gesamte Periodenlänge aus Nullen bestehen und der Dezimalbruch abbrechen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die angegebene Zahl irrational ist. ❑

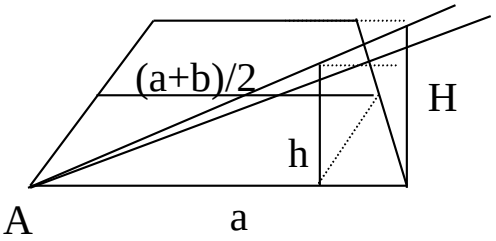
Hinweis: Im **Bundeswettbewerb Mathematik 1989** (1. Runde) [4] wurde die Dezimaldarstellung in der Form 0, f(1) f(2) f(3) ... mit $f(x) = x^n$ untersucht. Es zeigt sich, dass die Irrationalität einer solchen Zahl zum Beispiel für alle nichtkonstanten ganzrationalen Funktionen mit natürlichen Koeffizienten gilt. Aber es gibt auch Funktionen f mit (trivialer) rationaler Dezimaldarstellung, beispielsweise für $f(x) = (10^x - 1)/3$.

[4] Bundeswettbewerb Mathematik 1989, 1. Runde; K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1988-1992. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1994, S. 89,3.

Flächenhalbierung



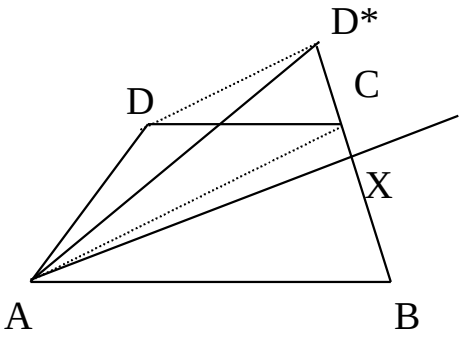
In Anlehnung an Aufgabe 2-4 sei die Flächenhalbierung eines Trapezes *ABCD* diskutiert [5], wobei die Teilungsgerade g durch den Punkt *A* verlaufen soll. Für die Konstruktion des Punktes *X* sind mehrere Lösungsvarianten möglich:



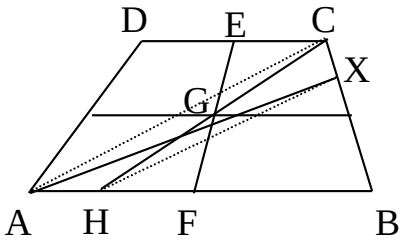
(1) Da es genügt, die Höhe h des Dreiecks *ABX* zu ermitteln, kann man unter Ausnutzung der Parallelität für die Höhe *h* und die Trapezhöhe *H* und die Seitenlängen *AB = a* und *CD = b* die Gleichung über die Flächeninhalte

$$\tfrac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \cdot H \right) \quad \text{umformen zu } h : H = \frac{a+b}{2} : a$$

Diese Verhältnisgleichung kann unmittelbar in der Trapezfigur wiedergefunden werden. Dazu projiziere man die Mittellinie (wie in der Skizze angedeutet) auf die Grundseite, zeichne zudem die Höhe *H* im Punkt *B* ein und erhält *h*.



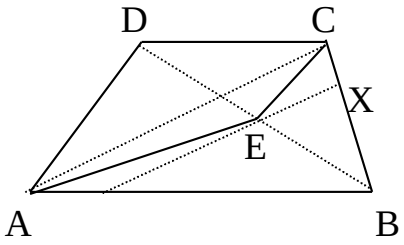
(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks *ACD*. Geschieht dies nämlich so, dass das entstehende Dreieck *ABD** (mit *C* auf *BD**) flächengleich zum Trapez *ABCD* wird, so ist *X* offensichtlich die Seitenhalbierende von *BD**.



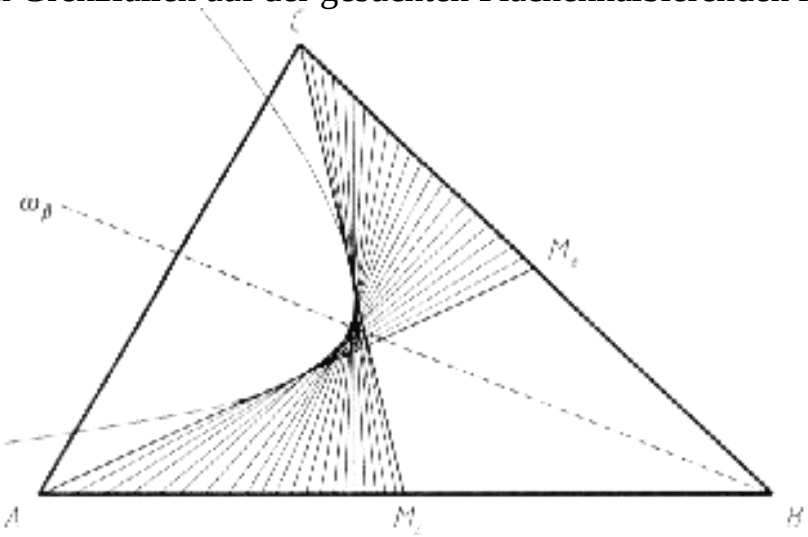
(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte *E* und *F* der parallelen Seiten. Diese Gerade schneidet die Mittellinie in *G*. Dreht man *EF* um *G*, so sind die Dreiecke *HEG* und *CFG* inhaltsgleich (sogar kongruent). Somit teilt *HC* die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks *AHC* bzgl. *AC* in das (inhaltsgleiche) Dreieck *AXC* ist der gesuchte Punkt gefunden.

[5] nach MNU Vol. 47 (1994) Heft 6, S. 348-352

(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Man suche überhaupt eine Halbierung und versuche, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist *E* der Mittelpunkt der Diagonale *BD*, dann halbiert der Streckenzug *AEC* die Trapezfläche, weil die Teildreiecke *ABD* und *BCD* jeweils halbiert werden. Durch Scherung des Dreiecks *AEC* bzgl. *AC* zum Dreieck *AXE* findet man den gesuchten Punkt.



Die beiden letzten Lösungsvarianten legen die Frage nahe, wie sich die Lagen der Flächenhalbierenden in Aufgabe 2-4 ändern, wenn sich die Position des Punktes D ändert. Die folgende Abbildung möge Anregungen für eigene Untersuchungen geben. Man erkennt beispielsweise, dass der Schwerpunkt des Dreiecks nur in Grenzfällen auf der gesuchten Flächenhalbierenden liegt.



Bundeswettbewerb Mathematik 2019

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn; finanziell wird er gemeinsam vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert. Er steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik: *Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein mathematischer Schülerwettbewerb für alle an Mathematik Interessierten. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen*

Schulwissen muss man zur Teilnahme vor allem auch etwas Ausdauer mitbringen.

In den beiden Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen jeweils in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. In der ***ersten Runde*** *ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der* ***zweiten Runde*** *sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen. In der* ***dritten Runde****, auch Kolloquium genannt, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit einem Mathematiker bzw. einer Mathematikerin aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessieger ausgewählt. Daneben gestalten die Teilnehmenden ein Rahmenprogramm mit ganz unterschiedlichen Beiträgen. Mit dem Kolloquium haben die Teilnehmenden zudem ein integriertes Auswahlverfahren zur Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes durchlaufen.*

Die Teilnehmerzahlen[6] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1017 (im Jahr 2010) und 1651 (im Jahr 2011).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2014/15	1405	420 (29,9%)	61 (4,3%)	25 (41,0%)
2015/16	1426	499 (35,0%)	68 (4,8%)	40 (58,8%)
2016/17	1142	398 (34,9%)	58 (5,1%)	25 (43,1%)
2017/18	1370	467 (34,1%)	53 (3,9%)	27 (50,9%)
2018/19	1479	485 (32,8%)	46 (3,1%)	24 (52,2%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Einsenderzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 liegt in Sachsen deutlich über dem Durchschnitt! Unter den 46 sächsischen Teilnehmern im Schuljahr 2018/19 wurden 11 erste, 3 zweiter und 11 dritte Preise vergeben – über die Hälfte der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (54,3%, bundesweit 40,5%). Dazu kamen noch 13 Anerkennungsurkunden.

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

[6] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/statistiken veröffentlicht.

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2014/15	204	65 (31,9%)	18 (8,8%)	5 (27,8%)
2015/16	261	80 (30,7%)	24 (9,2%)	11 (45,8%)
2016/17	155	48 (31,0%)	9 (5,8%)	3 (33,3%)
2017/18	255	76 (29,8%)	12 (4,7%)	3 (25,0%)
2018/19	***	***	14	1 (7,1%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen
*** noch nicht veröffentlicht

In der 2. Runde 2019 wurden vier 1. Preise, zwei 2. Preise und fünf 3. Preise an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 11 der 14 Starter!), darunter ein 3. Preis an den Starter aus der Klassenstufe 9.

Deshalb - Mitmachen lohnt!
Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2020 teil.

Der Wettbewerb startete am 1. Dezember 2019. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie beim Fachlehrer für Mathematik oder im Internet unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler. In „Bundeswettbewerb Mathematik – die schönsten Aufgaben“ wurde von Hanns-Heinrich Langmann u.a. im Springer-Verlag GmbH Berlin-Heidelberg eine lesenswerte Auswahl von BWM-Aufgaben von 1970 bis 2015 herausgegeben.

Abstand von Zahlenfolgen

Möchte man den Abstand zweier Folgen bestimmen, erinnere man sich an den Abstand von Zahlen: Man definiert den Abstand *d* zweier reeller Zahlen *x* und *y* durch den Betrag ihrer Differenz ihrer Werte, also $d(x;y) = |x - y|$. In Analogie könnte man versuchen, den Abstand zweier Zahlenfolgen durch den Betrag der Differenzen ihrer Unordnungswerte zu definieren. Offensichtlich hängt dann der Abstand von der Definition ab. Für *S* gemäß Heft 06/2019 findet man beispielsweise mit $F_0 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ für eine zweite Folge $F = (2,1,3,4,5,6,7,8,9)$

$$d_S(F_0;F) = |S(F_0) - S(F)| = |8 - 9| = 1$$

ein plausibles Ergebnis. Die Anwendung für U_2 führt ebenfalls auf den Wert 1, denn es gilt:

$$d_{U_2}(F_0;F) = |U_2(F_0) - U_2(F)| = |95 - 96| = 1$$

Für den Unordnungswert *U* aus Aufgabe 1-5A findet man dagegen

$$d_U(F_0;F) = |S(F_0) - S(F)| = |0 - 2| = 2$$

Sind das alles „vernünftige“ Abstandswerte? Man verwendet dafür den Begriff der Metrik. Eine Funktion *d*, die jedem Paar *(x ; y)* aus der zugrunde liegenden Menge eine reelle Zahl zuordnet, heißt Metrik, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(1) $d(x ; x) = 0$	Nichtnegativität
(2) $d(x ; y) = d(y ; x)$	Symmetrie
(3) $d(x ; y) \le d(x ; z) + d(z ; y)$	Dreiecksungleichung

Die Eigenschaft (3) entspricht der üblichen Abstandsidee: Der Umweg über einen dritten Punkt *z* soll nicht kürzer als die direkte Verbindung zwischen *x* und *y* sein. Aus (1), (2) und (3) folgt unmittelbar, dass die Metrik stets nichtnegativ ist:

$$2 \cdot d(x;y) = d(x;y) + d(x;y) \overset{(2)}{=} d(x;y) + d(y;x) \overset{(3)}{\ge} d(x;x) \overset{(1)}{=} 0.$$

Definiert man also den Abstand zweier Folgen durch den Betrag der Differenz ihrer Unordnungswerte, dann erfüllen diese Definitionen stets die Eigenschaften (1) und (2). Ob man tatsächlich eine Metrik erhält, ist also an der Eigenschaft (3) zu untersuchen. Ist beispielsweise mit $d(F_1;F_2) = |U_2(F_1) - U_2(F_2)|$ tatsächlich eine Metrik definiert? Da die Unordnungswerte von einander unabhängig gebildet werden, wird letztlich nur mit reellen Zahlen gearbeitet, die stets die Dreiecksungleichung erfüllen.

Man kann aber die Abstandsfunktion auch gliedweise festlegen. Die Definition für den Unordnungswert *U* aus **Aufgabe 1-5A** lässt sich formulieren als

$$U(F) = \sum_{k=1}^{9} |a_k - k|.$$

Weil für F_0 die Beziehung $a_k = k$ gilt, ist die gleichbedeutend zu

$$U(F) = \sum_{k=1}^{9} \left| a_k - a_k^{(0)} \right|,$$

wobei $a_k^{(0)}$ die Glieder der Folge F_0 sind. Damit erscheint es nahe liegend, den Abstand zweier Folgen F_1 und F_2 gliedweise zu ermitteln, nämlich mittels

$$d\left(\left(a_1^{(1)},...,a_9^{(1)}\right);\left(a_1^{(2)},...,a_9^{(2)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{9} \left| a_k^{(1)} - a_k^{(2)} \right|.$$

Damit erhält man eine Metrik nach obiger Definition, da die Eigenschaften der Betragsbildung auf die Folgenglieder übertragen werden. Man prüfe, ob in ähnlicher Weise aus den anderen Unordnungsmaßen eine Metrik gebildet werden kann.

Abschließend seien zwei weitere Metriken angegeben:

(a) $$d(F_1;F_2)=\begin{cases}0 & falls\ F_1=F_2\\ 1 & falls\ F_1\neq F_2\end{cases}$$ (triviale Metrik)

Diese triviale Metrik lässt sich immer angeben, sie unterscheidet nur zwischen „Gleichheit“ und „Ungleichheit“. Die Metrik-Eigenschaften (1) und (2) sind erfüllt und leicht prüft man auch die Eigenschaft (3) nach.

(b) $$d(F_1;F_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & falls\ a_N^{(1)}\neq a_N^{(2)}\ und\ a_i^{(1)}=a_i^{(2)}\ für\ alle\ i<N\\ 0 & falls\ F_1=F_2\ (und\ damit\ N=0)\end{cases}$$

In diesem Beispiel wird der Abstand zweier Folgen allein dadurch bestimmt, ab welchem Folgenglied sie sich unterscheiden. Je mehr Glieder beider Folgen am Beginn übereinstimmen, um so geringer erscheint ihr Abstand– eine plausible Definition. Der maximale Abstand beträgt 1, wenn sich die Folgen bereits im ersten Glied unterscheiden.

Die Eigenschaften (1) und (2) sind wiederum erfüllt. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, betrachte man mit F_1 und F_2 zwei Folgen mit $d(F_1 ; F_2) = 1/N$ $(0 < N)$, d.h. die Folgen stimmen in den ersten $N – 1$ Gliedern überein. Betrachtet man eine beliebige andere Folge F_3, so sind für die Eigenschaft (3) drei Fälle zu untersuchen:

(I) Stimmt F_3 mit F_1 überein, so gilt die Dreiecksungleichung unmittelbar.

(II) F_3 stimmt mit den ersten $0 < M \leq N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1 ; F_3) = 1/M$. Dann gilt stets

$$d(F_1;F_2)=\frac{1}{N}\leq\frac{1}{M}=d(F_1;F_3)\leq d(F_1;F_3)+d(F_3;F_2)$$

(III) F_3 stimmt mit den ersten $M > N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1 ; F_3) = 1/M$. Da sich F_2 aber von F_1 an der Stelle N unterscheidet, muss sich auch F_3 an der Stelle N von F_2 unterscheiden, also $d(F_3 ; F_2) = 1/N$. Damit gilt

$$d(F_1;F_2)=\frac{1}{N}\leq d(F_1;F_3)+d(F_3;F_2)=\frac{1}{M}+\frac{1}{N}.$$

In jedem Fall ist die Dreiecksungleichung erfüllt und somit ist diese Definition eine Metrik.

Rechnen mit Polynomen

Ein (reellwertiges) Polynom ist eine Funktion der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^k + ... + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (\#)$$

mit reellen Koeffizienten a_0, ..., a_n, die für alle reellen Zahlen x definiert ist. Polynome können addiert, subtrahiert und multipliziert werden, indem punktweise die Addition, Subtraktion oder Multiplikation ausgeführt wird:

$$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)\,, (P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)\,.$$

Das Ergebnis ist stets wieder ein Polynom, da es offensichtlich wieder in der beschriebenen Form (#) zusammengefasst werden kann. Die Division eines Polynoms durch ein anderes führt dagegen im Allgemeinen nicht wieder zu einem Polynom.

Der Grad *grad(P)* eines Polynoms *P(x)* wie in (#) ist definiert als der höchste Exponent *n* von *x*, dessen zugehöriger Koeffizient von Null verschieden ist, also grad*(P)* = *n*, falls $a_n \neq 0$. Der Grad des Nullpolynoms wird als $-\infty$ definiert.

Sind *P* und Q Polynome mit *grad(P)* = *n* und *grad(Q)* = *m*, so gilt:

$$grad(P \pm Q) \leq max\{n; m\}\,, grad(P \cdot Q) = n + m$$

Bemerkung: Der Grad des Nullpolynoms 0 ordnet sich sinnvoll in die Graddefinition ein, denn man erhält:

$$grad(P) = grad(P \pm 0) \leq max\{-\infty; n\} = n$$
$$grad(0) = grad(P \cdot 0) ='' n + (-\infty)'' = -\infty$$

Satz. Für zwei nichttriviale Polynome *P* und *Q* gibt es Polynome *T* und *R*, sodass die Gleichung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen Zahlen *x* gilt. Das (Rest-)Polynom *R* kann so gewählt werden, das *grad(R)* < *grad(Q)* ist. In diesem Fall sind *T* und *R* eindeutig bestimmt.

Beweis: Man betrachte die Menge $M = \{P - T \cdot Q \mid T \text{ beliebige Polynome}\}$. Enthält diese Menge das Nullpolynom, dann gilt der Satz offenbar, denn es gibt ein *T* mit $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen *x*, wobei $R(x) \equiv 0$ selbst das Nullpolynom ist. Wenn *M* jedoch das Nullpolynom nicht enthält, dann gibt es in *M* Polynome mit kleinstem Grad (da der Grad eines Polynoms eine nichtnegative Zahl ist). Davon wähle man ein Polynom *R* mit minimalem Grad (es sei *grad(R)* = *k*) aus, das mit einem geeigneten (Teiler-)Polynom *T* die folgende Gleichung erfüllt:

$$R(x) = P(x) - T(x) \cdot Q(x)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass *grad(R) < grad(Q)* gewählt werden kann. Um dies zu beweisen, nehme man indirekt an, dass $m = grad(Q) \le grad(R) = k$ sei. Mittels der Koeffizienten bei den jeweils höchsten Exponenten von Q und R (q_m bzw. r_k) bilde man die Polynome

$$T^*(x) = T(x) + \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \;,\; R^*(x) = R(x) - \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \cdot Q(x)$$

Leicht sieht man, dass T^* und R^* ebenfalls die Gleichung $P(x) = T^*(x) \cdot Q(x) + R^*(x)$ erfüllen. Außerdem ist R^* gerade so konstruiert, dass der Grad von R^* mindestens um 1 geringer als der Grad von R ist. Dies widerspricht aber der Auswahl von R mit minimalem Grad. Folglich ist die behauptete Ungleichung *grad(R) < grad(Q)* erfüllt.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen, nehme man an, es gäbe Polynome T_1, T_2, R_1 und R_2 mit $grad(R_1)$, $grad(R_2) < grad(Q)$ und mit der Eigenschaft

$$P(x) = T_1(x) \cdot Q(x) + R_1(x) = T_2(x) \cdot Q(x) + R_2(x)$$

Durch einfache Umformung findet man daraus die Beziehung

$$(T_1(x) - T_2(x)) \cdot Q(x) = R_2(x) - R_1(x)$$

Die rechte Seite ergibt ein Polynom, dessen Grad kleiner als *grad(Q)* beträgt. Sind T_1 und T_2 voneinander verschieden, so wäre der Grad des Polynoms auf der linken Seite mindestens *grad(Q)*. Da dies zu einem Widerspruch führt, muss $T_1 = T_2$ und daraus folgend $R_1 = R_2$ gelten. ❑

Der Divisionsalgorithmus für Polynome wird als bekannt vorausgesetzt. Damit ist es keine Schwierigkeit, die Division von $x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ durch $x^2 + 2x + 1$ auszuführen:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+1) \cdot (x^2 + 2x + 1) + x + 3$$

(Wie häufig bei solchen Aufgaben kann man die aufwändige Division durch geschicktes Zusammenfassen vereinfachen, denn es gilt

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+1)^3 + x + 3 \;,\; x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

woraus die obige Zerlegung unmittelbar folgt.)

Bei den folgenden Aufgabenstellungen wird man aber die Diskussion des Restpolynoms dem Divisionsalgorithmus oder der trickreichen Umformungen vorziehen (müssen):

Aufgabe. Welchen Rest lässt das Polynom $(x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x)$ bei der Division durch (x^3-x)?

Lösungshinweis: Da das Restpolynom höchstens vom Grad 2 ist, gilt

$$x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x=T(x)\cdot(x^3-x)+(ax^2+bx+c)$$

Setzt man nun für x nacheinander die drei Nullstellen des Polynoms (x^3-x) ein, also -1, 0 und 1, so findet man ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die Unbekannten $a = 0$, $b = 5$ und $c = 0$. ❑

Aufgabe. Ein Polynom lasse bei Division durch $(x-1)$ den Rest 1, bei Division durch $(x-2)$ den Rest 2 und bei Division durch $(x-3)$ den Rest 3. Zeigen Sie, dass P bei Division durch $(x-1)(x-2)(x-3)$ den Rest $R(x) = x$ lässt.

Lösungshinweis: Es sei P das Polynom, dessen Zerlegung $P(x)=T(x)\cdot Q(x)+R(x)$ gesucht wird. Laut Voraussetzung gilt:

$$P(x)=(x-1)\cdot Q_1(x)+1$$
$$P(x)=(x-2)\cdot Q_2(x)+2$$
$$P(x)=(x-3)\cdot Q_3(x)+3$$

Also findet man $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ und $P(3) = 3$. Betrachtet man nun

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot Q(x)+R(x)$$

so kann man nacheinander für x die Werte 1, 2 und 3 einsetzen. Außerdem ist $R(x)$ ein Polynom höchstens vom Grad 2, also $R(x)=ax^2+bx+c$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem für die Unbekannten a, b und c, dessen Lösung zu $R(x) = x$ führt. ❑

Mittelungleichungen als Beweismethode

Die bekannten Mittelungleichungen für positive reelle Zahlen x_1 bis x_n ($n > 0$) zwischen dem harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

lassen sich oft für Abschätzung nutzen und eignen sich damit zur Beweisführung bei Ungleichungen.

Aufgabe: Für positive reelle Zahlen *x, y, z* mit $x + y + z = 6$ folgt stets $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Beweisidee: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Mittelungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = 2$$

❑

Aufgabe: Es seien *a, b, c* positive reelle Zahlen. Es gilt stets

$$a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Beweisidee: Mit Hilfe der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel findet man folgende Abschätzungen:

$$a^2\sqrt{bc} = \sqrt{a^4bc} = \sqrt[6]{(a^4)^3b^3c^3} \leq \frac{4a^3 + b^3 + c^3}{6}$$

oder

$$a^2\sqrt{bc} = \sqrt{a^4bc} \leq \frac{a^3 + abc}{2}.$$

Wendet man diese Beziehungen analog für die anderen zwei Summanden der behaupteten Ungleichung an und addiert man die insgesamt drei Ungleichungen, erhält man die Behauptung, wobei für den zweiten Lösungsansatz noch einmal die Mittelungleichung zur Anwendung kommt:

$$abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$ ❑

Aufgabe: Für alle reelle Zahlen *x, y, z* mit $0 \leq x, y, z \leq 1$ und $x + y + z = 1$ gilt

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Beweisidee: O.B.d.A. sei $z \geq y \geq x$. Ist $z < ½$, dann gilt $1 - 2x > 0$, $1 - 2y > 0$ und $1 - 2z > 0$. Aus der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel folgt:

$$\sqrt[3]{(1-2x)(1-2y)(1-2z)} \leq \frac{3 - 2(x + y + z)}{3} = \frac{1}{3},$$

also $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27}$.

Wegen $(1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1 - 2(x + y + z) + 4(xy + yz + zx) - 8xyz$ erhält man mit der Voraussetzung $x + y + z = 1$ daraus die gesuchte Ungleichung.

Ist $z \geq ½$, gilt trivialerweise $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq 0 < \frac{1}{27}$ und die Behauptung kann wie eben bewiesen werden. ❑

Aufgabe: Es seien *a, b, c* die Seitenlängen eines (nicht zu einer Strecke entarteten) Dreiecks und *p* der halbe Umfang dieses Dreiecks. Man beweise:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}.$$

Beweisidee: Wegen der gültigen Dreiecksungleichungen sind die Nenner jeweils positiv, beispielsweise gilt $p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}>0$. Setzt man nun $x=\frac{1}{p-a}, y=\frac{1}{p-b}, z=\frac{1}{p-c}$, so folgt aus der Mittelungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{3}{p-a+p-b+p-c} = \frac{3}{p}$$

❑

Aufgabe: Man finde für die natürliche Zahl *n* ($n > 0$) eine Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$.

In naheliegender Weise nutze man die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-1)-mal}\cdot n} \leq \frac{(n-1)\cdot 1+n}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2-\frac{1}{n}.$$

Mit wachsendem *n* nähert sich die Grenze der Zahl 2. Für $n = 4$ findet man 1,75 und für $n = 100$ erhält man 1,99.

Setzt man jedoch einige Werte für *n* in den Wurzelausdruck ein, erkennt man ein anderes Verhalten:

$$n=2 \Rightarrow \sqrt[2]{2} \approx 1{,}4142 \quad ; \quad n=3 \Rightarrow \sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422$$
$$n=4 \Rightarrow \sqrt[4]{4} \approx 1{,}4142 \quad ; \quad n=5 \Rightarrow \sqrt[5]{5} \approx 1{,}3797$$
$$n=10 \Rightarrow \sqrt[10]{10} \approx 1{,}2589 \quad ; \quad n=100 \Rightarrow \sqrt[100]{100} \approx 1{,}0471$$

Die gefundene Abschätzung ist offensichtlich nicht in der Lage, diese Beobachtung richtig zu beschreiben. Für $n \geq 2$ lässt sich obige Idee der Mittelungleichung aber besser ausnutzen:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-2)-mal}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} \le \frac{(n-2)\cdot 1+2\sqrt{n}}{n} = 1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}.$$

Nun ergibt sich für $n = 4$ der Wert 1,5 und für $n = 100$ erhält man 1,18.

Durch einen Trick lässt sich für $n \ge 4$ die Abschätzung weiter verbessern:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-4)-mal}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}} \le \frac{(n-4)\cdot 1+2+2+2\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}}{n} = 1+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Das Ergebnis sieht nun nicht nur einfacher aus, es beschreibt zudem übersichtlicher das Verhalten der Werte für wachsendes n. Man erhält beispielsweise für $n = 4$ wiederum 1,5, für $n = 100$ dagegen 1,1.

Bekannte Sätze der Mathematik: Bernoulli-Ungleichung

Satz. Für reelle Zahlen y und z mit $y > -1$ und $z < 1$ gilt stets $(1+y)^z \le 1+z\cdot y$.

Diese nach JACOB BERNOULLI (1654 bis 1705) benannte Ungleichung kann für rationale Zahlen z auf die Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel zurückgeführt werden.

Beweis: Dazu setze man $z = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen n und m ($m < n$) und erhält wegen $1 + y > 0$:

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+y)^m} = \sqrt[n]{(1+y)^m\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-m)-mal}} \le$$

$$\le \frac{m\cdot(1+y)+(n-m)\cdot 1}{n} = \frac{n+m\cdot y}{n} = 1+\frac{m}{n}\cdot y$$

Da man jede irrationale Zahl beliebig genau zwischen zwei rationale Zahlen „einschachteln“ kann, gilt die Ungleichung auch für irrationale Zahlen $z < 1$. ❑

Die Gleichheit gilt offensichtlich wegen der Mittelungleichung nur für $y = 0$. Für $z = 1$ ist die Aussage der Ungleichung trivial, es gilt das Gleichheitszeichen. Für reelle Zahlen $z > 1$ lautet die Ungleichung:

Folgerung. Für reelle Zahlen y und z mit $y > -1$ und $z > 1$ gilt stets $(1+y)^z \ge 1+z\cdot y$.

Beweis: Man setze $z^* = \frac{1}{z} < 1$. Dann gilt wegen der bereits bewiesenen Bernoulli-Ungleichung

$$(1+z\cdot y)^{z^*} \le 1+z^*\cdot zy = 1+y, \quad also$$
$$(1+y)^{\frac{1}{z^*}} = (1+y)^z \ge 1+z\cdot y$$

.

❑

Der Goldene Schnitt

LEONHARD EULER (1707 – 1783) formulierte den Goldenen Schnitt so: Er entsteht, wenn man eine gegebene Strecke so schneidet, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

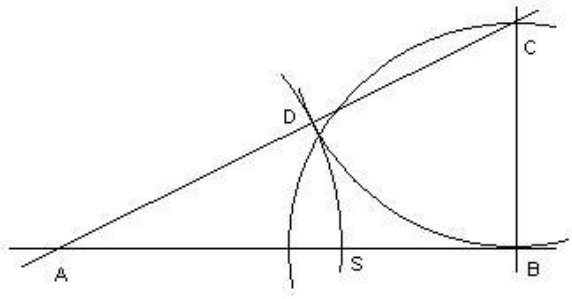
Mögen die Abschnitte der Strecke die Längen a und b haben. Es soll gelten:

$$b\cdot(a+b) = a^2$$

Somit gilt für das Verhältnis $a : b$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

also $\Phi := \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



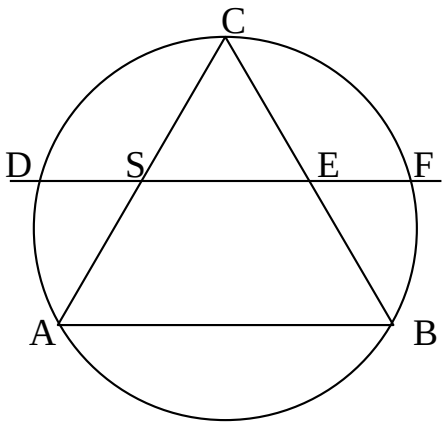
(Die zweite Lösung entfällt, da Φ positiv sein soll).

Konstruktionsbeschreibung: Eine gegebene Strecke *AB* der Länge *c* soll im Goldenen Schnitt geteilt werden.

1) Kreis um *B* mit Radius *c*/2 schneidet das Lot auf *AB* mit Fußpunkt *B* in *C* (der zweite Schnittpunkt liefert dasselbe Ergebnis).
2) Kreis um *C* mit Radius *c*/2 schneidet Strecke *AC* im Punkt *D*.
3) Kreis um *A* mit Radius *AD* schneidet Strecke *AB* im gesuchten Punkt *S*.

Leicht prüft man, dass $\frac{AS}{AB} = \Phi$ gilt.

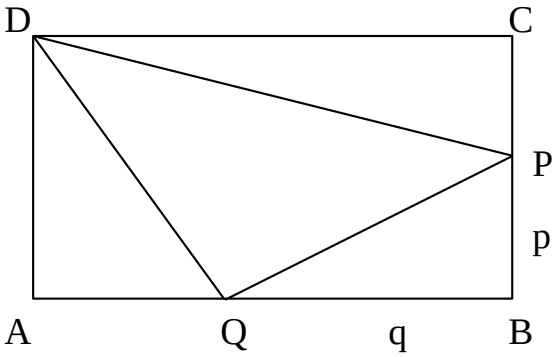
Aufgabe 1. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit Umkreis. Die Gerade durch die Seitenmitten von *AC* und *BC* schneiden den Kreis und das Dreieck in den Punkten *D*, *S* und *E* und *F* (von links nach rechts, s. nebenstehende Skizze).



Man zeige: Dann teilt *S* die Strecke *DE* im Goldenen Schnitt.

Beweisidee: Über der Sehne *CD* sind die Peripheriewinkel $\angle DAC$ und $\angle DFC$ gleich groß. Folglich sind die Dreiecke *ASD* und *CSF* ähnlich (www) und es gilt $AS : DS = SC : SF$. Formt man diese Gleichung unter Beachtung von $SF = DE$ um, so findet man die Behauptung bestätigt. ❑

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Rechteck *ABCD* mit den Seitenlängen $AB = a$ und $BC = b$. Gesucht sind Punkte *P* auf *BC* und *Q* auf *AB* so, dass die Dreiecke *AQD*, *QBP* und *PCD* denselben Flächeninhalt haben.



Beweisskizze: Man setze $QB = q$ und $PB = p$ und vergleiche die Flächeninhalte der genannten 3 Dreiecke:

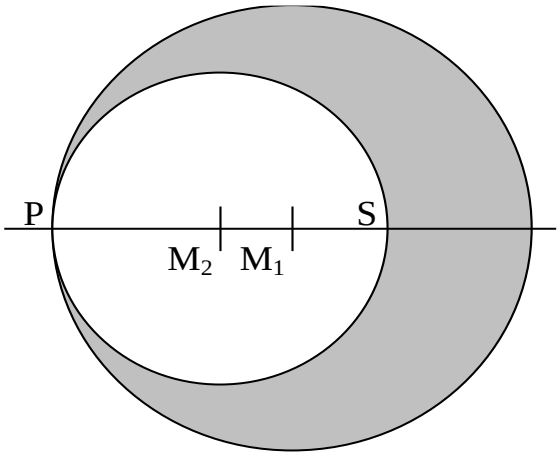
$$(a-q)\cdot b = (b-p)\cdot a = p\cdot q$$

Durch einfaches Umformen findet man

$a\,(a-q) = q^2$
und $b\,(b-p) = p^2$,

d.h. die Punkte *P* und *Q* teilen die entsprechenden Rechteckseiten im Goldenen Schnitt. ❑

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Kreis K_1 mit Mittelpunkt M_1 und Peripheriepunkt *P*. Gesucht ist ein K_1 von innen in *P* berührender Kreis K_2 mit Mittelpunkt M_2 so, dass der Schwerpunkt *S* des Halbmondes K_1 ohne K_2 (graue Fläche) genau der Schnittpunkt des Durchmessers durch *P* mit K_2 ist.



Beweisidee: Man betrachte die „Waage“ mit Drehpunkt M_1 und Armen M_1M_2 sowie M_1S. Auf die „Waagschalen“ kommen die Flächeninhalte des Kreises K_2 über M_2 bzw. des Halbmondes über *S*, d.h. es gilt (unter Vernachlässigung des Faktors π auf beiden Seiten):

$$M_1M_2 \cdot r_2^2 = M_1S \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

Wegen $M_1M_2 = r_1 - r_2$ und $M_1S = 2r_2 - r_1$ gilt $r_2^2 = (2r_2 - r_1)\cdot(r_1 + r_2)$. Die letzte Gleichung ist äquivalent zu $r_1^2 = r_2 \cdot (r_1 + r_2)$. Folglich verhalten sich r_2, r_1 und deren Summe nach dem Goldenen Schnitt. ❑

Nachtrag: Die Zahl Φ erfüllt folgende zahlentheoretisch interessanten Gleichungen:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}} \qquad \text{weil } \Phi = \sqrt{1+\Phi}$$

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}} \qquad \text{weil } \Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$$

Aufgaben Serie 4 (2019/20)

(Einsendungen bis 11. Februar 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [7])

Aufgabe 4-1.
Man bestimme alle Paare *(n ; k)* mit natürlichen Zahlen *n* und *k*, die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2.
Für welche positiven ganzen Zahlen *n* gibt es eine Quadratzahl, deren letzten *n* Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

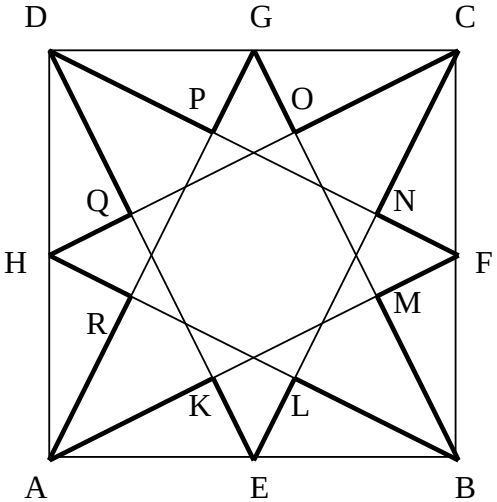
(5 Punkte)

Aufgabe 4-3.
Man finde alle Paare (*p* ; *q*) von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen *x* und *y* gibt, so dass gilt:

$$p = x^2 - y$$
$$q = y^2 + 3x - 7$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4.
In einem Quadrat *ABCD* seien die Mittelpunkte der Seiten *AB, BC, CD* und *DA* mit *E, F, G* bzw. *H* bezeichnet. In dem Streckenzug *AFDECHBGA* auftretende Schnittpunkte seien so mit *K, L, M, N, O, P, Q, R* bezeichnet, dass *AKELBMFNCO GPDQHR* ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze).



[7] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechszehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates *ABCD*.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, mehr als 12 Punkte, werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 4-5A.

Es sei P ein Polynom vom Grad n ($n > 0$) mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ... a_n, also

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + ... + a_1 \cdot x + a_0 .$$

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Ist x eine rationale Nullstelle des Polynomes P, also $P(x) = 0$, und gilt $a_n = 1$, so ist x ganzzahlig.

(2 Punkte)

(c) Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt P keine ganzzahlige Nullstelle.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0, a_1, ..., a_k$ bestehe. Unter der *Quadratquersumme QQS von n* verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i^2 \ .$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n = n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n*“, also $n_0, n_1, ...$ mit

$$n_{j+1} = QQS(n_j) \quad ; \quad j = 0,1,2,...$$

(a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2019 und 2020.

(2 Punkte)

(b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!

(2 Punkte)

(Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.)

(c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.

(4 Punkte)

Seminarhinweis

Das **2. Chemnitzer Seminar** findet wie bereits angekündigt am Samstag, dem 14. Dezember 2019, bei der scia System GmbH im Technologie-Center Chemnitz (TCC, Annaberger Str. 240, 09125 Chemnitz) – bitte beiliegende Programmhinweise beachten.

Impressum

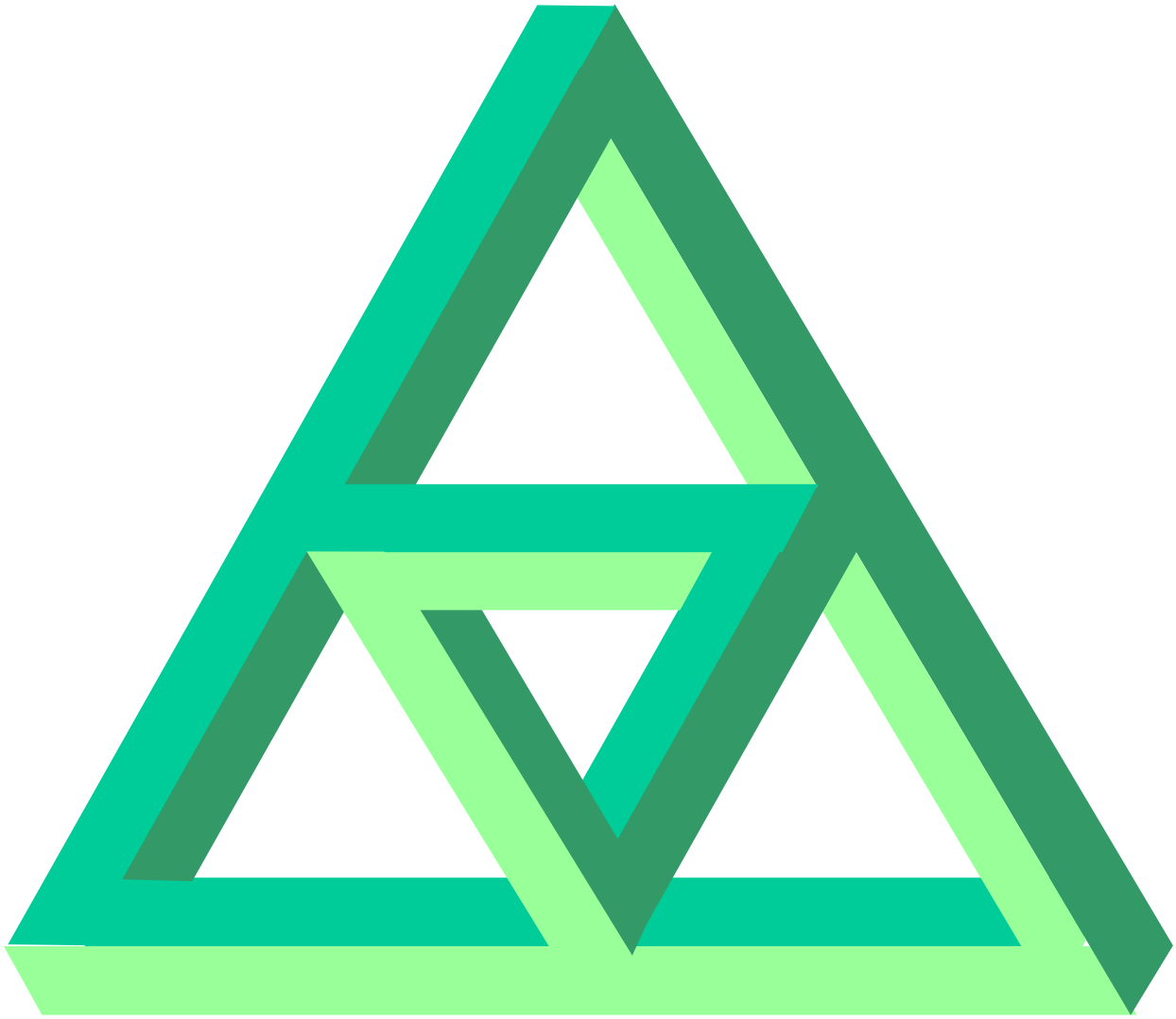
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	50 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz
VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 1/2020 19. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 3

Alle Aufgaben der Serie 3 entstammen dem Bundeswettbewerb Mathematik. Die Lösungshinweise sind der angegebenen Literatur entnommen und zeigen damit das Erwartungsbild für die Lösungseinsendung beim BWM.

Aufgabe 3-1 (BWM 2013, 1. Runde). Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen ist?

Lösungshinweise – Variante 1: Die Gesamtsumme der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 beträgt nach der Gaußschen Summenformel $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 22 = 231$. Dies ist eine ungerade Zahl. Wäre nun eine solche Zerlegung in Teilmengen möglich, dann wäre in jeder solcher Teilmenge die Summe der Zahlen das Doppelte der größten Zahl in dieser Teilmenge. Insbesondere wäre in jeder Teilmenge die Summe aller Zahlen gerade. Da jede der Zahlen 1, 2, ..., 21 in genau einer der Teilmengen vorkommt, ist die Gesamtsumme aller Zahlen identisch mit der Summe über die Summe in allen Teilmengen, also eine Summe gerader Zahlen und somit selbst eine gerade Zahl.

Dies steht aber im Widerspruch zu obiger Feststellung über die ungerade Summe der Zahlen von 1 bis 21. ❑

Lösungshinweise - Variante 2: Man nehme an, es sei eine zulässige Aufteilung der Zahlen auf Teilmengen gegeben. Dann gilt:

- Ist die größte Zahl in einer dieser Teilmengen ungeradzahlig, so befinden sich unter den anderen Zahlen dieser Teilmenge einen ungerade Anzahl ungeradzahliger Zahlen. Insgesamt sind also eine gerade Anzahl von ungeradzahligen Zahlen in der Teilmenge.
- Ist die größte Zahl in einer dieser Teilmengen geradzahlig, so befinden sich unter den anderen Zahlen dieser Teilmenge einen gerade Anzahl ungeradzahliger Zahlen. Insgesamt sind also eine gerade Anzahl von ungeradzahligen Zahlen in der Teilmenge.

Wenn es also eine Aufteilung der geforderten Art gibt, wird eine gerade Anzahl ungeradzahliger Zahlen benötigt.

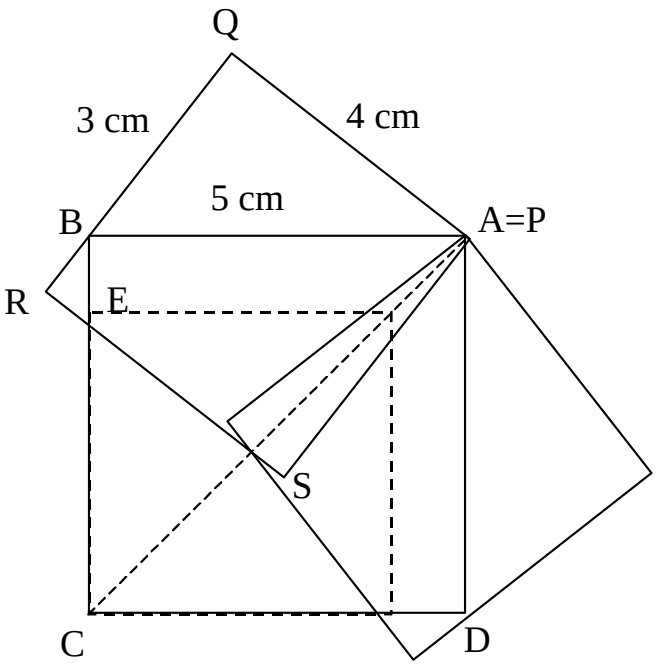
Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass unter den Zahlen 1 bis 21 insgesamt elf ungerade Zahlen vorkommen, also eine ungerade Anzahl. ❑

Aufgabe 3-2 (BWM 1996, 1. Runde [1]). Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken?

[1] K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1993-1997. Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1998, S. 96.4

Lösungshinweise: Das Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 5 cm wird schrittweise mit Quadraten der Seitenlänge 4 cm (nachfolgend „kleine Quadrate“ genannt) überdeckt. Zunächst wird ein kleines Quadrat *PQRS* derart auf *ABCD* gelegt, dass *P* mit *A* zusammenfällt, *Q* auf *AB* und *S* auf *DA* liegt. Nun dreht man unter Beibehaltung der Eckenbezeichnungen das kleine Quadrat so um das Zentrum *A*, dass *B* auf der Geraden durch *Q* und *R* zu liegen kommt. Wegen $5^2 - 4^2 = 3^2$ liegt *B* dann auf der Quadratseite *QR* mit $\overline{RB} = 1\text{cm}$.

Da das kleine Quadrat um weniger als 45° gedreht wurde (der Winkel $\angle$BAQ ist kleiner als 45°, weil er der kürzeren Kathete gegenüberliegt), liegt *S* in der gleichen Halbebene von *AC* wie *D*. Zur weiteren Überdeckung mit einem zweiten kleinen Quadrat wird das Quadrat *PQRS* an der Geraden durch *AC* gespiegelt. Die beiden kleinen Quadrate überlappen sich; *AC* ist die Symmetrieachse des Überlappungsgebietes.

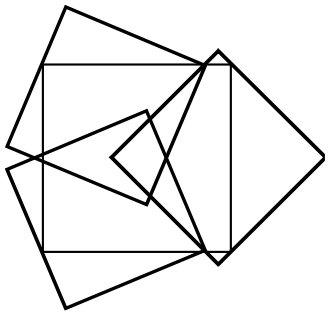


Das dritte Quadrat legt man nun so, dass ein Eckpunkt mit *C* zusammenfällt, die Kanten parallel zu denen des Quadrates *ABCD* sind und in dessen Inneren der zu *C* gegenüberliegende Eckpunkt liegt. Von diesem kleinen Quadrat sei die auf *CB* liegende Ecke mit *E* bezeichnet. Wegen $\overline{BR} = 1\text{cm}$ liegt *E* im Innern des Quadrates *PQRS* (weil *E* auf der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel in *R* liegt). Folglich überdeckt das dritte kleine Quadrat den noch freien (drachenförmigen) Teil des Quadrates *ABCD*. ❑

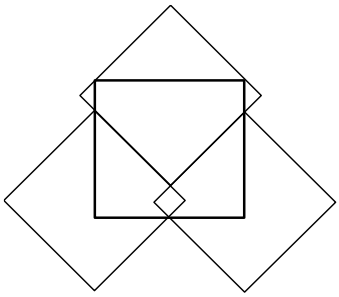
Hinweise: Man kann zeigen, dass die Überdeckung mit Quadraten der Seitenlänge

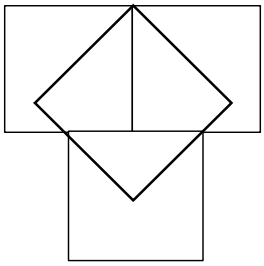
$$\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{5} - 2} \approx 3{,}93$$

gelingt. Auch andere Anordnungen sind möglich (s. nebenstehende Skizze).



Weitere anschaulich naheliegende symmetrische Überdeckungen sind mit den vorgegebenen Maßen jedoch nicht möglich, auch wenn die „leichtfertig gezeichneten“ Skizzen einen anderen Eindruck erwecken:





In der Lösungsdiskussion zum BWM wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass eine Argumentation bei Verwendung von Näherungswerten ohne ausreichende Fehlerdiskussion unvollständig ist. So darf man zwar angeben, dass wegen $0{,}75 < 1$ und aufgrund der Monotonie der Arctan-Funktion die Ungleichung $\arctan(0{,}75) < \arctan(1) = 45°$ gilt, aber schon die Verwendung eines Näherungswertes der Form $\arctan(0{,}75) \approx 36{,}78° < 45°$ ist nicht zulässig. Dabei spielt es keine Rolle, ob man der Rechengenauigkeit aufgrund des großen Abstandes beider Werte oder vieler Kommastellen „vertrauen“ kann. Die Verwendung von Näherungswerten kann immer zu Fehlern führen, so dass deren Einfluss abgeschätzt werden muss. Als Beispiel wird der Bruch $\dfrac{1}{5 \cdot \sqrt{2} - 7{,}07}$ angegeben. Das Einsetzen von $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ erscheint ausreichend exakt. Der sich daraus ergebende Wert 1000 ist aber vom Taschenrechnerwert 936,4945… weit entfernt.

Aufgabe 3-3 (BWM 2017, 1. Runde). Die Zahlen 1, 2, 3, ... 2017 stehen an der Tafel. Amelie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris. Wer kann den Gewinn erzwingen?

Lösungshinweise: Man kann die Zahlen von 1 bis 2016 in Paare der Form (1008 – i, 1008 + i) für i = 1, 2, 3, ... 1007 und in das Paar (1008, 2016) aufteilen. Die Summe beider Zahlen jedes dieser Paare ist durch 8 teilbar.

Amelie beginnt und wischt die Zahl 2017 weg. Nun wischt Boris eine beliebige Zahl weg. Amelie wählt danach diejenige Zahl aus, die dem Paar angehört, das die von Boris weggewischte Zahl enthält. Wenn Amelie diese Zahl weggewischt hat, stehen wieder nur vollständige Paare der genannten Art an der Tafel. Wenn Amelie diese Strategie befolgt, bilden die beiden letzten Zahlen ein Paar der obigen Festlegung – also ist die Summe der beiden letzten Zahlen stets durch 8 teilbar und Amelie gewinnt.

Aufgabe 3-4 (BWM 2014, 1. Runde). Es sei eine Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetischer Mittelwert enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, es gäbe eine zulässige Menge der Zahlen, die nicht alle gleich sind. Dann gibt es mindestens ein Paar verschiedener Zahlen. Unter allen Paaren verschiedener Zahlen gibt es Paar a_1 und a_2 mit minimalen positiven Abstand $d := |a_1 - a_2| > 0$.

Nun betrachten wir zwei beliebige weitere Zahlen a_3 und a_4 aus dieser Menge und bilden die arithmetischen Mittel

$$m_1 := \frac{a_1 + a_3 + a_4}{3} \text{ und } m_2 := \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}.$$

Weil $a_1 \neq a_2$ gilt, sind auch m_1 und m_2 verschieden. Gemäß der Definition der Menge gehören beide Werte zu dieser Menge. Für die Differenz beider Werte gilt

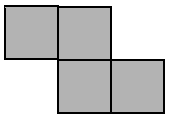
$$0 < |m_2 - m_1| = \left| \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} - \frac{a_1 + a_3 + a_4}{3} \right| = \frac{|a_2 - a_1|}{3} = \frac{d}{3} < d.$$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass d die minimale Differenz zweier Zahlen aus der gegebenen Menge ist. ❑

Aufgabe 3-5A (nach BWM 1972, 1. Runde [2]).
(a) Zum Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2 x 2 und solche des Formates 4 x 1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

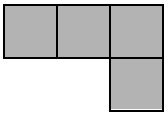
(b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.

F1

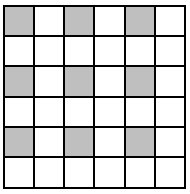


(c) Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich jeweils für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers, wenn zum Auslegen jeweils nur Platten der Form F2 verwendet werden soll.

F2

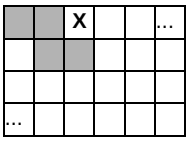


Lösungshinweise: (a) Färbt man das in Quadrate (des Formats 1 x 1) eingeteilte Rechteck gemäß der nebenstehenden Abbildung, so überdeckt jede 2 x 2-Quadratplatte genau ein schwarzes Feld, eine 4 x 1-Rechteckplatte dagegen entweder 2 oder 0 schwarze Felder. Ein Tausch zweier Platten gemäß der Aufgabenstellung würde also bedeuten, dass sich die Anzahlen der jeweils überdeckten schwarzen Felder unterscheiden. Damit kann nach dem Tausch keine vollständige oder korrekte Überdeckung mehr vorliegen.

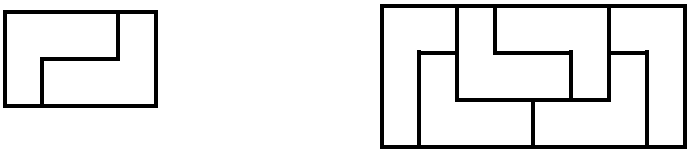


[2] K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1987, S. 72.15.

(b) Eine Parkettierung einer rechteckigen Fläche mit den angegebenen Teilen ist nicht möglich. Um die linke obere Ecke zu überdecken, ist ein Teil beispielsweise wie in nebenstehender Abbildung anzulegen. Um das mit „X“ markierte Feld zu überdecken, ist die Lage des nächsten Teils bereits festgelegt. Erreicht man beim Auslegen den rechten Rand, kann kein vollständiges Teil mehr dazugefügt werden.



(c) Die auszulegende Rechteckfläche möge die Seitenlängen a, b ($a, b \geq 2$, ganzzahlig) haben. Notwendig und hinreichend ist die Bedingung $8 \mid a \cdot b$. Diese Bedingung ist hinreichend, denn jedes Rechteck mit dieser Eigenschaft lässt sich in Teile der Größe 4 x 2 und der Größe 3 x 8 zerlegen, die jeweils mühelos mit den vorgegebenen Platten ausgelegt werden können:



Die Bedingung $8 \mid a \cdot b$ ist auch notwendig. Um dies zu beweisen, markiere man die Teilquadrate der rechteckigen Fläche mit den Vorzeichen „+1“ oder „-1“ in folgender Weise:

1	1	1	1	1	1	1	...
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	
...							

Legt man auf dieses Muster eine Platte der geforderten Form, so ist das Produkt der 4 überdeckten Felder stets -1. Die Anzahl der kleinen Quadrate ist durch 4 teilbar, da sonst keine vollständige Überdeckung durch die Platten möglich wäre.

Man nehme nun an, dass diese Anzahl der Teilquadrate als Produkt $4 \cdot n$ mit ungeradem *n* darstellbar sei. Da jede Platte das Produkt -1 trägt, ist das Produkt der Zeichen aller Platten ebenfalls -1.

Man überzeugt sich nun, dass bei $4 \cdot n$ Platten die Anzahl der Zeichen „-1“ gerade ist. Somit muss das Produkt über alle Teilquadrate +1 ergeben. Aus diesem Widerspruch wird offensichtlich, dass die Annahme falsch ist und somit 8 ein Teiler des Produkts $a \cdot b$ sein muss. ❑

Aufgabe 3-5B (nach BWM 1990, 2. Runde[3]). Gegeben seien drei natürliche Zahlen *a, b, c*, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

(a) Man zeige, die Zahlen *a, b, c* sind paarweise teilerfremd.
(b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$.
(c) Man finde alle Lösungen für die Zahlen *a, b* und *c*.

Lösungshinweise:
(a) Angenommen, es hätten zwei der Zahlen, z.B. *a* und *b*, einen gemeinsamen Teiler $g > 1$. Dann existieren ganze Zahlen *x* und *y* mit $a = xg$ und $b = yg$. Dann wäre *g* wegen

$ac = zb + r$,
d.h. $xg \cdot c - z \cdot yg = g \cdot (xc - zy) = r$,

auch ein Teiler des Restes *r* bei der Division von $a \cdot c$ durch *b*. Der Rest wäre also größer als 1. Die Zahlen müssen folglich paarweise teilerfremd sein.

(b) Alle Zahlen *a, b* und *c* sind größer als 1. Wäre nämlich eine Zahl gleich 1, so würde das Produkt der beiden anderen Zahlen ohne Rest durch 1 teilbar sein. Aufgrund der genannten Eigenschaften der Zahlen *a, b* und *c* folgt die Existenz von ganzen Zahlen *A, B* und *C* mit

(#) $ab - 1 = Cc,\ bc - 1 = Aa,\ ac - 1 = Bb$.

Nach Multiplikation der drei Gleichungen (#) erhält man

$$ABCabc = (ab-1)(bc-1)(ac-1) =$$
$$= a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 + ab + ac + bc - 1$$

Durch Umformung führt dies zu

$$abc(\,ABC - abc + a + b + c\,) = ab + ac + bc - 1.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung positiv ist, ist der Term in der Klammer nicht 0, d.h. das Produkt *abc* teilt die Summe $ab + ac + bc - 1$. Damit ist $abc \le ab + ac + bc - 1$ und es gilt somit die behauptete Ungleichung.

(c) Da die Zahlen *a, b* und *c* paarweise teilerfremd sind, sind sie verschieden und es kann o.B.d.A. $a < b < c$ angenommen werden. Aus der Ungleichung in (b) folgt damit $abc < 3bc$, also $a < 3$, d.h. $a = 2$.

[3] K.R. Löffler (Hrsgb): Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen 1988 – 1992, Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1994, S. 90.14.

Setzt man $a = 2$ in die Ungleichung ein, findet man $2bc < 2b + bc + 2c$, also $bc < 4c$ und damit $b < 4$, d.h. $b = 3$.

Setzt man auch diesen Wert in die Ungleichung ein, erhält man $6c < 6 + 3c + 2c$, also $c < 6$. Weil c teilerfremd zu a ist, muss $c = 5$ sein.

Das Tripel (2, 3, 5) ist tatsächlich eine Lösung, denn es gilt:

$$2 \cdot 3 - 1 = 1 \cdot 5, 3 \cdot 5 - 1 = 7 \cdot 2, 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 3.$$

Da die Anordnung $a < b < c$ willkürlich gewählt wurde, sind alle Tripel aus den Zahlen 2, 3 und 5 Lösung der Aufgabe, also

$$L = \{(2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2)\} \qquad \square$$

Hinweis: Aus der Ungleichung (b) folgt unmittelbar $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Daraus findet man ebenfalls die Lösungsmenge, weil diese Ungleichung für große Zahlen nicht erfüllbar ist und somit systematisches Probieren schnell zum Ergebnis führt: Nehmen wir $a < b < c$ an.

Dann gibt es für $a > 2$ für die Ungleichung $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ keine Lösung in natürlichen Zahlen, weil die rechte Seite höchstens $^{57}/_{60}$ werden kann. Also gilt a = 2.

Dann gibt es für $b > 3$ für die Ungleichung $\frac{1}{2} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ keine Lösung in natürlichen Zahlen, weil die rechte Seite höchstens $^{9}/_{20}$ werden kann. Also gilt $b = 3$.

Schließlich kann für die Ungleichung $\frac{1}{6} < \frac{1}{c}$ nur $c = 4$ oder $c = 5$ gelten.

Quersummen in Wettbewerbsaufgaben[4]

Zu Aufgabe 2-1. Diese Aufgabenstellung wurde in der Mathematik-Olympiade allgemeiner formuliert.

Aufgabe MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) - q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Lösungshinweise: Wie zu Aufgabe 2-1 diskutiert führt die Analyse der Quersummen zweier benachbarter natürlicher Zahl auf die möglichen Differenzen der Quersummen von 1 oder der Form $9k - 1$ mit ganzer Zahl k.

[4] Aus dem Seminarprogramm vom 14. Dezember 2019.

Aufgabe. Man beweise für alle natürlichen Zahlen m und n die Ungleichung $Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$ (mit $Q(x)$ als Quersumme der natürlichen Zahl x).

Lösungshinweise: Anschaulich scheint die Behauptung einfach: Man beobachtet (ähnlich wie in Aufgabe 2-1) die Eigenschaft $Q(m + 1) = Q(m) +1$, falls für den Nachfolger von m kein Übertrag in der Einerstelle entsteht. Bei einem Übertrag verringert sich die Quersumme. Folglich wird es gelingen, die Behauptung durch n-malige Addition von 1 schrittweise zu beweisen.

Dagegen wird in den Lösungshinweisen zur MO-Aufgabe ein algorithmischer Weg vorgeschlagen: Es seien $a_0, ..., a_k$ die Ziffern der Zahl m und $b_0, ..., b_k$ die Ziffern der Zahl n und $c_0, ..., c_{k+1}$ die Ziffern der Summe $m + n$ (wobei führende Nullen zugelassen sind). Entsprechend des Algorithmus der Addition gilt

$$c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0$$
$$c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1$$
$$...$$
$$c_{k+1} = u_k$$

Dabei sind u_i die bei der zifferweisen Addition entstehenden Überträge, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Addiert man alle Zeilen wird die Behauptung bestätigt:

$$Q(m+n) = c_0 + ... + c_{k+1} =$$
$$= a_0 + ... + a_k + b_0 + ... + b_k - 9 \cdot (u_0 + \ldots + u_k) \leq Q(m) + Q(n). \quad \square$$

Oft lassen sich in Aufgaben mit Quersummen die Terme nicht auf die Zifferndarstellung umformulieren. Dann hilft meist nur eine Abschätzung.

Aufgabe MO450944. Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen n, die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 = Q(Q(n)).$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler abgekürzt.

Lösungshinweise: Da der ggT zweier Zahlen mindestens 1 ist, gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16.$$

Somit gilt $Q(Q(n)) \geq 16$. Da n neunstellig ist, gilt $Q(n) \leq 81$. Die Zahl zwischen 1 und 81 mit der größten Quersumme ist 79. Für alle neunstelligen Zahlen n gilt folglich $1 \leq Q(Q(n)) \leq 16 = Q(79)$. Insgesamt erhält man daraus

$$Q(Q(n)) = 16.$$

Daher kommen nur neunstellige Zahlen mit $Q(n) = 79$ als Lösung in Frage. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich:

a) Achtmal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 7.
b) Siebenmal die Ziffer 9 und zweimal die Ziffer 8.

Bei a) lassen sich genau 9 und bei b) genau (9 · 8 : 2 =) 36 solche neunstellige Zahlen bilden. Es gibt also 45 neunstellige Zahlen mit der Quersumme 79.

Zur Lösung der Aufgabe muss aber zusätzlich $ggT(n; 90) = 1$ gelten. Die Primteiler von 90 sind 2, 3 und 5. Keine der gefundenen neunstelligen Zahlen ist durch 3 oder 5 teilbar. Es müssen somit nur diejenigen Zahlen eliminiert werden, die durch 2 teilbar sind. Das sind die 8 Zahlen aus b), die auf 8 enden. Also ergibt sich als Anzahl (45 – 8 =) 37. ❑

Aufgabe MO440924. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihrer Quersumme $Q(n)$ beträgt 2004.

Lösungshinweise: Die Aufgabenstellung verleitet zum Probieren. Sicher ist n kleiner als 2004. Also probiere man die Zahlen 2003, 2002, ..., bis man sicher sein kann, dass es für kleinere als die probierten Zahlen keine Lösung mehr geben kann.

Doch wie immer sollte man durch Vorüberlegungen die Menge der zu probierenden Zahlen einschränken.

Fall 1: Es gelte $n \geq 2000$. Also gibt es eine Einerziffer e mit $Q(n) = 2+ e$ und damit $(2000 + e) + (2 + e) = 2004$, also $2002 + 2 \cdot e = 2004$. Folglich kann nur $e = 1$ gelten. Tatsächlich erfüllt 2001 die Gleichung $2001 + Q(2001) = 2004$.

Fall 2: $n < 2000$. Weil die Quersumme von n höchsten 1 + 9 + 9 + 9 = 28 sein kann, ist n größer als 1975. Laut Lösungshinweise der MO ist ein vollständiges Probieren der Zahlen 1976, ..., 1999 zulässig.

Aber es geht auch ganz ohne Probieren: Für $n > 1975$ gibt es also eine Zehnerziffer z (mit $z = 7$, 8 oder 9) und eine Einerziffer e mit $Q(n) = 1 + 9 + z + e$ und $1900 + 10 \cdot z + e + 1 + 9 + z + e = 2004$, also $11 \cdot z + 2 \cdot e = 94$. Damit muss z eine gerade Zahl sein, $z = 8$, und deshalb $e = 3$. Die Probe $1983 + Q(1983) = 1983 + 21 = 2004$ bestätigt die Lösung. ❑

Bei der **Aufgabe MO551024** genügte es in den Teilen a) und b) gültige Beispiele zu nennen. Dabei wäre es einfach, alle Lösungen der gegebenen Gleichungen zu ermitteln. Der Lösungsansatz ist jeweils gleich: Faktorisierung!

Aufgabe MO551024(a). Man finde (alle) Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen x, y und z mit $y = z^2 – x^2$.

Lösungshinweise: Es gilt $y = z^2 – x^2 = (z – x)(z + x)$. Damit y eine Primzahl ist, muss $z – x = 1$ gelten. Die einzigen Primzahlen mit Abstand 1 sind $z = 3$ und $x = 2$. Mit $y = z + x = 3 + 2 = 5$ ist y tatsächlich wie gefordert eine Primzahl. Weitere Lösungen kann es nicht geben.

Aufgabe MO551024(b). Man finde (alle) Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen x, y und z mit $y = z^4 – x^2$.

Lösungshinweise: Es gilt $y = z^4 – x^2 = (z^2 – x)(z^2 + x)$. Damit y eine Primzahl ist, muss $z^2 – x = 1$ gelten. Dies ist gleichwertig zu $x = z^2 – 1 = (z – 1)\cdot(z + 1)$. Weil x eine Primzahl ist, muss $z – 1 = 1$ gelten, also $z = 2$. Daraus folgt $x = 3$ und $y = 16 – 9 = 7$, sodass y tatsächlich wie gefordert eine Primzahl ist. Weitere Lösungen kann es nicht geben.

Ein Überdeckungsproblem

Eine Punktmenge C der Ebene (oder des Raumes) heißt *konvex*, wenn sie zu jedem beliebigen Punktepaar x, y auch die zugehörige Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ vollständig enthält. Die Menge wird *beschränkt* genannt, wenn man sie in einem Kreis (bzw. in einer Kugel) unterbringen kann. Ein Punkt b soll *Randpunkt* von C heißen, wenn jeder noch so kleine Kreis (bzw. Kugel) um b sowohl Punkte von C als auch solche, die nicht zu C gehören, enthält. Die Gesamtheit aller Randpunkte von C wird *Rand* genannt. Schließlich soll eine beschränkte konvexe Punktmenge in der Ebene (oder im Raum) *konvexe Figur* (bzw. konvexer Körper) genannt werden, wenn sie ihren gesamten Rand und alle Punkte des Inneren enthält.

Jedes Quadrat Q kann durch vier (etwas) kleinere Quadrate mit Seiten parallel zu denen von Q vollständig überdeckt werden, während drei solche Quadrate in seitenparalleler Lage nicht ausreichen. Ein Kreis K kann dagegen mit drei (etwas) kleineren Kreisen vollständig überdeckt werden, mit zwei dagegen nicht. Die Mathematiker HUGO HADWIGER (1908 – 1981) und FRIEDRICH WILHELM DANIEL LEVI (1888 – 1966) untersuchten die allgemeine Frage nach der kleinsten Zahl $L(C)$ solcher kleineren Kopien[5] einer konvexen Figur (bzw. eines konvexen Körpers) von C, mit denen C vollständig überdeckbar ist. Wie oben gesehen, gilt $L(Q) = 4$ und $L(K) = 3$. Im Jahre 1955 bewies LEVI die Aussage, dass jede ebene Figur durch maximal 2^2 kleinere Kopien überdeckt werden kann: Für jede konvexe und beschränkte Figur, die kein Parallelogramm ist, gilt $L(C) = 3$; für jedes Parallelogramm P gilt $L(P) = 4$. (Man veranschauliche sich die Aussage beispielsweise am Fünf- oder Sechseck.)

[5] Unter kleineren Kopien sollen Figuren oder Körper verstanden werden, die durch eine zentrische Streckung mit einem Faktor kleiner als 1 erzeugt werden können.

Zwei Jahre später vermutete HARDWIGER, dass für jeden *n*-dimensionalen Körper maximal 2^n kleinere Kopien benötigt werden. Im dreidimensionalen Raum ist offensichtlich diese Grenze $2^3 = 8$ nicht zu verkleinern, da jede kleinere Kopie eines Würfels nur höchstens einen Eckpunkt des Ausgangswürfels überdecken kann (falls die entsprechenden Würfelkanten parallel bleiben). Ob aber alle konvexen und beschränkten Körper *C* mit maximal 8 Kopien überdeckt werden können, ist noch ungelöst. Kurz nach der Veröffentlichung der Vermutung bewies man, dass im dreidimensionalen Raum $L(C) < 149$ gilt. Bislang ist es gelungen, diese obere Schranke auf 21 zu verringern! Allerdings ist für zentralsymmetrische Körper 1984 nachgewiesen wurden, dass hierbei 8 Kopien zur Überdeckung genügen.

Parkettierungen und Färbungen [6]

Typische Wettbewerbsaufgaben zur Parkettierung beinhalten die Überdeckung von Figuren mit Domino-Steinen. Es ist offensichtlich, dass sich eine Fläche, die aus (8 × 8)-Quadraten besteht, mit Domino-Steinen parkettieren lässt. Aber geht dies auch, wenn man zwei gegenüberliegende Eckfelder entfernt? Klar ist, dass die auszufüllende Fläche notwendigerweise eine gerade Anzahl an Teilquadraten besitzen muss; dies erfüllt die aus 62 Quadraten bestehende Fläche. Nach einigem systematischen Probieren kann man sich sicherlich davon überzeugen, dass es dennoch keine solche Parkettierung gibt. Im Gegensatz zum Existenznachweis für eine Parkettierung, den man lediglich konstruktiv durch Angabe eines Beispiels führen kann, ist der Nachweis, dass es keine solche Parkettierung geben kann, nicht durch „misslungene“ Beispiele führbar.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei das geschickte Einfärben der Fläche. Im genannten Fall ist es z.B. nützlich, das (8 × 8)-Quadrat wie ein Schachbrett einzufärben. Man erkennt, dass es nach Entfernen von zwei (gleichfarbigen) Eckfeldern 32 schwarze und 30 weiße Felder (oder umgekehrt) auf dem Brett gibt. Wie man leicht sieht, überdeckt ein Domino-Stein, der ja aus zwei Quadraten besteht, immer genau ein weißes und ein schwarzes Feld, nie zwei gleichfarbige Felder. Daraus folgt, dass sich die Fläche nicht mit Domino-Steinen parkettieren lässt. ❑

Aufgabe 1. Man untersuche, ob ein (10 x 10)-Quadrat mit (1 x 4)-Steinen vollständig ausgelegt werden kann.

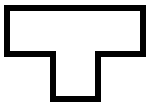
Lösungshinweise: Man färbe das Quadrat mit vier Farben (durch Ziffern dargestellt) wie in der Skizze:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
...									

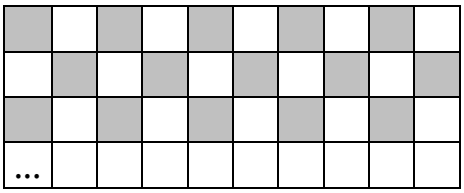
[6] Aus dem Seminarprogramm vom 14. Dezember 2019

Beim Auszählen der Felder erkennt man, dass die Farben unterschiedlich häufig auftreten, im Widerspruch dazu, dass ein (1 x 4)-Stein stets alle vier Farben bedeckt. ❑

Aufgabe 2. Man untersuche, ob ein (10 x 10)-Quadrat mit Tetris-Steinen (s. nebenstehende Abbildung) vollständig ausgelegt werden kann.



Lösungshinweise: Während ein (4 x 4)-Quadrat ausgelegt werden kann, wird man vermuten, dass es beim (10 x 10)-Quadrat nicht gelingt. Um den Unmöglichkeitsbeweis zu führen, färbe man das Quadrat mit 2 Farben wie ein Schachbrett (vgl. Skizze):



Diese Färbung ergibt 50 weiße und 50 schwarze Felder. Ein Tetris-Stein überdeckt stets drei Felder einer Farbe und ein Feld der anderen Farbe. Somit sind für eine vollständige Überdeckung gleich viele Tetris-Steine mit drei weißen Felder und mit drei schwarzen Feldern notwendig, im Widerspruch dazu, dass eine ungerade Anzahl der Tetris-Steine (25) zur Überdeckung der 100 Felder erforderlich ist. ❑

Aufgabe 3. Es wurde ein (7 x 7)-Quadrat mit (3 x 1)-Steinen überdeckt. Es bleibt ein (1 x 1)-Feld frei. Wo kann dieses liegen?

Lösungshinweise: Man färbe das (7 x 7)-Quadrat mit drei Farben (als Ziffern dargestellt):

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
...						

In der nebenstehenden Färbung stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Da aber ein (3 x 1)-Stein stets drei Farben überdeckt, kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen.

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
...						

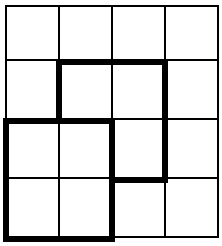
Nun erfolgte die Färbung willkürlich. Auch die nebenstehende Färbung wäre möglich. Auch hier stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Wiederum kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen – aber insgesamt nur an solchen Stellen, die bei beiden Färbungen eine „1“ tragen. Welche sind es? Es ist nun noch zu zeigen, dass es tatsächlich Überdeckungen der geforderten Art gibt. □

Aufgabe 4. Für welche n lassen sich (n x n)-Spielfelder mit Spielsteinen der nebenstehenden Form so bedecken, dass genau ein (beliebig vorgegebenes) Feld frei bleibt?

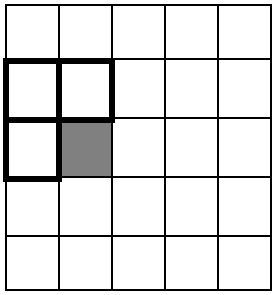


Lösungshinweise: Mit der Methode der vollständigen Induktion zeigt man zunächst, dass sich alle (2^k x 2^k)-Felder wie gefordert bedecken lassen. Dies ist für $k = 1$ trivial.

Sei nun $k > 1$. Dann befindet sich das freibleibende Feld in genau einem Viertel des Feldes (o.B.d.A. unten links). Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion kann dieses Viertel als (2^{k-1} x 2^{k-1})-Feld wie gefordert bedeckt werden. In der Mitte des Feldes wird ein Spielstein wie skizziert angeordnet. Er bedeckt in jedem der anderen drei Viertel genau ein Feld. Doch ein (2^{k-1} x 2^{k-1})-Feld mit einem freien Feld kann stets wie gefordert bedeckt werden.



Allgemein sind nur solche n möglich, die nicht durch 3 teilbar sind. Für $n = 5$ ist es nicht bei beliebiger Lage des freibleibenden Feldes möglich. Befindet sich dieses Feld wie in der Abbildung angegeben (grau), so muss ein Spielstein zur Bedeckung des benachbarten Randsteines so (oder spiegelbildlich nach unten) eingefügt werden. Dann kann das Eckfeld nicht mehr bedeckt werden.



Für $n = 7$ lässt sich die Bedeckung stets zeigen. Es ist nicht schwer, dann auch für $n = 7 + 6 = 13$ die Bedeckung zu zeigen.

Schließlich lässt sich auch für $n = 11$ stets die Bedeckung zeigen. Auch hier ist es nicht schwer, daraus die Bedeckung für $n = 11 + 6 = 19$ herzuleiten.

Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion kann dies vervollständigt werden: Es gilt für $n = 4, 7, 8, 10, 11$ und wenn für $n = k$ dann auch für $n = k + 6$, also für alle nicht durch 3 teilbaren Zahlen $n > 3$ und verschieden von 5.

Aufgabe 5. Auf einem 11 x 11-Spielfeld befinden sich auf allen Feldern je ein Käfer. Jeder Käfer verlässt sein Feld und begibt sich auf ein diagonal benachbartes

Feld. Dabei können sich danach auf einem Feld mehrere Käfer befinden. Wie viele Felder bleiben mindestens frei, wenn sich alle Käfer wie beschrieben bewegt haben?

Lösungshinweise: Um sich zu verdeutlichen, ob Felder frei bleiben, betrachte man zunächst kleinere Spielfelder. Bei einem 2 x 2-Spielfeld bleiben offenbar keine Felder frei, denn jeder Käfer wechselt von einer Ecke in die gegenüberliegende Ecke. Bei einem 3 x 3-Spielfeld müssen die vier Käfer der Eckfelder auf das mittlere Feld wechseln. Der anfangs auf dem Mittelfeld befindliche Käfer muss in eine Ecke wechseln. Die restlichen Käfer könnten jeweils mit einem diagonal benachbarten Käfer die Plätze tauschen. Es bleiben also mindestens drei (Eck-) Felder frei.

Für eine verallgemeinerungsfähige Beweisidee markiere man in einem n x n-Spielfeld die Felder wie in der Abbildung. Jeder auf einer „1“ befindliche Käfer wechselt zu einer „2“, und jeder auf einer „2“ befindliche Käfer wechselt zu einer „1“. Da es aber n Felder „1“ mehr als Felder „2“ gibt, müssen mindestens n Felder „1“ frei bleiben. Dass es eine solche Veränderung mit anschließend n freien Feldern tatsächlich geben kann, lässt sich problemlos mit einem Beispiel zeigen.

1	1	1	1	...
2	2	2	2	
1	1	1	1	
2	2	2	2	
1	1	1	1	
...				

❑

Einführung zur Methode der vollständigen Induktion

Induktion (lat. induction – *hinführen*) ist der Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen. Die Bedeutung von Verallgemeinerungen der Ergebnisse von einzelnen Beobachtungen und Experimenten, also von Induktionen, ist für das experimentelle Arbeiten wohlbekannt und unstrittig. Dagegen gilt die Mathematik schon von alters her als klassisches Beispiel der Anwendungen rein deduktiver Methoden, weil hierbei stets die Auffassung besteht, dass sich alle mathematischen Sätze (außer den Grundannahmen, den Axiomen) beweisen lassen und dass die konkreten Anwendungen dieser Sätze aus den auf die allgemeinen Fälle zugeschnittenen Beweisen hergeleitet (deduziert) werden.

Die Induktion, d.h. das Hinführen auf eine Idee, auf eine Vermutung oder auf eine Hypothese besitzt in der Mathematik aber dennoch eine große, wenn auch lediglich heuristische Rolle: Sie erlaubt darauf zu kommen, wie die Lösung vermutlich beschaffen sein muss. Zu beweisen sind mathematische Sätze stets deduktiv, so

auch Verallgemeinerungen von Beispielen. Folgende mathematische Probleme demonstrieren die Notwendigkeit des Beweises[7] von Vermutungen.

(1) Untersucht man die Funktion $f(x)=x^2+x+41$, so findet man für $x = 0$ die Primzahl $f(0) = 41$. Auch für $x = 1, 2, 3$ liefert die Funktion mit 43, 53, 61 Primzahlen. Weitere Test mit $x = 4, 5, ...$ ergeben immer wieder Primzahlen. Führt $f(n)$ vielleicht für alle natürlichen Zahlen n auf eine Primzahl (nach LEONHARD EULER (1707 – 1783))?

Leicht sieht man, dass für $x = 41$ der Ausdruck $f(41)$ keine Primzahl sein kann, aber auch $x = 40$ ergibt wegen $40^2 + 40 + 41 = (40 + 1)^2$ eine zusammengesetzte Zahl.

(2) Es ist n^3-n für jede natürliche Zahl n durch 3 teilbar, ebenso ist n^5-n durch 5 teilbar. Man kann auch zeigen, dass 7 ein Teiler von n^7-n ist. Gilt vielleicht für jede ungerade natürliche Zahl k die Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen n ist n^k-n durch k teilbar (nach GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716))?

Für $k = 3$ gilt $n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$. Die Teilbarkeit durch 3 ist für ein Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen stets gültig.

Für $k = 5$ findet man die Zerlegung $n^5-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$. Ist einer der Zahlen $(n-1)$, n oder $(n+1)$ durch 5 teilbar, ist 5 auch ein Teiler von n^5-n. Andernfalls lässt n bei Division durch 5 den Rest ±2. Für eine solche Zahl ist aber der Ausdruck (n^2+1) durch 5 teilbar.

Welche Zerlegung findet man für n^7-n und warum ist dies stets durch 7 teilbar?

Für $k = 9$ ergibt sich bereits für $n = 2$ ein Widerspruch, da $2^9 – 2 = 510$ nicht durch 9 teilbar ist.

Die obige Vermutung gilt auch allgemein nicht für gerade Zahlen k. Zwar ist 2 für jedes n ein Teiler von n^2-n (warum?). Aber schon für $k = 4$ ist für $n = 2$ die Vermutung widerlegt: $2^4 – 2 = 14$ ist nicht durch 4 teilbar.

In den folgenden Beispielen lassen sich die Vermutungen durch systematisches Probieren nur sehr aufwendig widerlegen:

(3) Berechnet man für Primzahlen $p = 2, 3, 5, ...$ den Ausdruck $2^{p-1}-1$, so könnte man vermuten, dass dieser stets nicht durch p^2 teilbar ist. Man benötigt schon

[7] Sominskij, I.S.; Golovina, L.I.; Jaglom, I.M.: Die vollständige Induktion. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

viel Geduld, um das Gegenbeispiel zu finden, denn erst für $p = 1093$ teilt 1093^2 die Zahl $2^{1092} – 1$ (nach DIMITRY A. GRAVE (1863 – 1939)).

(4) Ganz aussichtslos erscheint der Versuch, die Vermutung *„Für alle natürlichen Zahlen n ergibt $991n^2 + 1$ niemals eine Quadratzahl“* mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen. Die kleinste natürliche Zahl, die der Vermutung widerspricht, lautet

$n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.$

Diese vier Beispiele erlauben den einfachen, aber wichtigen Schluss: Eine Aussage kann in vielen speziellen Fälle richtig, aber dennoch allgemein falsch sein.

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Vollständige Induktion ist ein Prinzip, um eine Aussage für unendliche viele natürliche Zahlen zu beweisen. Es ist eine wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen und Inhalt des 5. Axioms des PEANOschen Axiomen-Systems, das zur Beschreibung der natürlichen Zahlen durch den italienischen Mathematiker GIUSEPPE PEANO (1858-1932) aufgestellt wurde:

> „*Wenn eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 1 enthält und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, dann ist diese Teilmenge gleich der Menge aller natürlichen Zahlen*“ [8].

Man kann also dieses Prinzip nicht beweisen, es sei denn, man stützt sich auf ein anderes gleichwertiges Axiom wie z.B. „*Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element*“.

Die Methode der vollständigen Induktion funktioniert nach dem Domino-Prinzip: Man wirft den ersten Stein einer Reihe um, mit dem umkippenden Stein fallen auch der darauffolgende und nacheinander alle Steine um.

In den Musterlösungen der 2. Stufe der 47. MO wird zu den Aufgaben MO470924 und MO471022 erklärt: *Die Lösungen lassen sich mit dem Schema der vollständigen Induktion formulieren. Dies darf aber von Schülerlösungen nicht verlangt werden.* Wenn man jedoch die Methode beherrscht, erweist sie sich oft als hilfreich. Dabei sollte der Beweis stets folgender Form entsprechen:

Ind.-Anfang:	Man zeigt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt.
Ind.-Schritt:	
Voraussetzung:	Man nimmt an, dass die Aussage für ein $n = k$ wahr ist.
Behauptung:	Man behauptet, die Aussage sei für $n = k + 1$ wahr.

[8] In der späteren und heute gültigen Fassung wird anstelle der Zahl 1 die Zahl 0 eingesetzt.

Beweis: Man zeigt, dass die Aussage für $n = k + 1$ folgt, wenn sie für $n = k$ gilt.

Ind.-Schluss: Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist.

Aufgabe MO471022. Gegeben ist eine positive reelle Zahl a. Es wird eine Folge von Zahlen x_1, x_2, x_3 ... aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet. Weisen Sie nach,

(a) dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_{n+1} > x_n$ für $n \geq 1$ gilt, und
(b) dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

Lösungshinweise:

(a) Ind.-Anfang: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, denn es gilt

$$x_2 = \sqrt{a^2 + a + x_1} = \sqrt{a^2 + a} > 0 = x_1 \text{ und } x_1 = 0 < a + 1$$

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte für $n = k$: $x_{k+1} > x_k$ und $x_k < a + 1$.

Behauptung: Die Aussage gelte auch für $n = k + 1$, also $x_{k+2} > x_{k+1}$ und $x_{k+1} < a + 1$.

Beweis: Es gilt: $x_{k+2}^2 = a^2 + a + x_{k+1} > a^2 + a + x_k = x_{k+1}^2$.

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung $x_{k+2} > x_{k+1}$.

Es gilt zudem: $x_{k+1}^2 = a^2 + a + x_k < a^2 + a + a + 1 = (a+1)^2$.

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung $x_{k+1} < a + 1$.

Ind.-Schluss: Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt, dass die Aussage für alle $n \geq 1$ gilt. ❑

Aufgabe. Man zeige, dass die Summe der Kuben dreier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen stets durch 9 teilbar ist.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die kleinste der drei aufeinander folgenden Zahlen mit n und beweisen die Aussage für alle $n > 0$.

Ind.-Anfang: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, denn es gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 9 \cdot 4.$$

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte für $n = k$: $9 \mid \left(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right)$

Behauptung: Die Aussage gelte auch für $n = k + 1$.

Beweis: Es gilt: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$
$$\left(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right) + 9 \cdot \left(k^2 + 3k + 3\right)$$

Die Summe der drei Kuben ist laut Ind.-Voraussetzung durch 9 teilbar, der letzte Summand ist offensichtlich ein Vielfaches von 9. Damit ist die Ind.-Behauptung richtig.

Ind.-Schluss: Nach dem Ind.-Prinzip gilt die Aussage für alle n > 0. ❑

Hinweis: Diese Aufgaben muss man nicht mit der Methode der vollständigen Induktion lösen.

Variante 1: Betrachtet man die Summe $S = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, so erhält man nach Ausmultiplizieren

$$S = 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 = 3 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) - 9 \cdot \left(n^2 + 2n + 1\right).$$

Da aber eine der Zahlen (n – 1), n oder (n + 1) stets durch 3 teilbar ist, ist 9 ein Teiler von S.

Variante 2: Betrachtet man die Summe $S = (m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3$, so erhält man nach Ausmultiplizieren

$$S = 3m^3 + 6m = 3 \cdot m \cdot \left(m^2 + 2\right).$$

Da aber entweder m oder $\left(m^2 + 2\right)$ stets durch 3 teilbar ist, ist 9 ein Teiler von S.

Aufgabe. Man zeige, dass 7 für alle natürlichen Zahlen n ($n > 0$) ein Teiler von $8^n - 1$ ist.

Lösungshinweise:

Ind.-Anfang: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, denn 7 ist ein Teiler von $8^1 - 1 = 7$.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte für $n = k$: $7 \mid \left(8^k - 1\right)$.

Behauptung: Es gelte auch für $n = k+1$: $7 \mid \left(8^{k+1} - 1\right)$.

Beweis: Es gilt $8^{k+1} - 1 = 8 \cdot \left(8^k - 1\right) + 7$. Da der Klammerausdruck aufgrund der Ind.-Voraussetzung durch 7 teilbar ist, ist der gesamte Ausdruck der rechten Seite durch 7 teilbar.

Ind.-Schritt: Nach dem Ind.-Prinzip gilt die Aussage für alle $n > 0$. ❑

Hinweis: Auch diese Aufgabe kann leicht ohne die Methode der vollständigen Induktion gelöst werden. Wegen $8^n = (7+1)^n$ erkennt man beim Ausmultiplizieren mittels binomischer Formel, dass alle Summanden bis auf den letzten durch 7 teilbar sind und der letzte Summand gleich 1 ist. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Manchmal soll eine Aussage nur für alle n ab einem bestimmten Startwert n_0 gezeigt werden. Dann muss man im Induktionsanfang natürlich zeigen, dass die Aussage für n_0 gilt.

Aufgabe. Man finde alle natürlichen Zahlen n, für die die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ erfüllt ist.

Lösungshinweise:

Ind.-Anfang: Für $n = 1$ und für $n = 2$ ist die geforderte Ungleichung wegen $2^{1-1} = 2^0 = 1 > 0 = (1-1)^2$ bzw. $2^{2-1} = 2^1 = 2 > 1 = (2-1)^2$ erfüllt.

Damit erscheint der Induktionsanfang korrekt. Da Terme mit Exponenten im Allgemeinen schneller wachsen als quadratische Terme, kann man die Gültigkeit für alle $n > 0$ vermuten.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung:	Es gelte die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ für $n = k$.
Behauptung:	Die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ sei auch für $n = k+1$ richtig.
Beweis:	Es gilt $2^k = 2 \cdot 2^{k-1} > 2 \cdot (k-1)^2 = k^2 + (k^2 - 4k + 2)$.
	Ist $k^2 - 4k + 2 = (k-2)^2 - 2 \geq 0$, so wäre der Beweis erbracht.

Aber diese Ungleichung gilt offenbar nicht für alle k! Man muss den Induktionsanfang deshalb noch einmal prüfen und stellt überraschenderweise fest, dass die geforderte Ungleichung nicht für $n = 3, 4, 5$ gilt. Die Ungleichung kann also nur für alle $n > 5$ richtig sein.

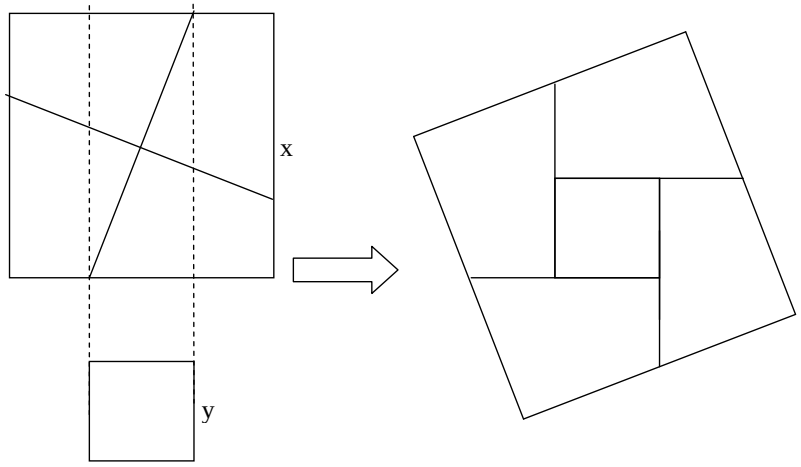
Korrigierter Ind.-Anfang: Für $n = 6$ ist die geforderte Ungleichung wegen $2^{6-1} = 2^5 = 32 > 25 = (6-1)^2$ erfüllt. Der oben dargestellte Induktionsschritt ist für $n > 5$ gültig.

Ind.-Schluss: Nach der Methode der vollständigen Induktion folgt aus dem (korrigierten) Induktionsanfang und dem Induktionsschritt, dass die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ für alle $n > 5$ richtig ist. □

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann auch zur Lösung geometrischer Problemstellungen erfolgreich eingesetzt werden.

Aufgabe. Es seien *n* beliebige Quadratflächen gegeben. Man beweise, dass man sie so in Teile zerlegen kann, dass sich aus sämtlichen Teilen eine neue Quadratfläche zusammensetzen lässt.

Lösungsidee: Bei Anwendung der Methode der vollständigen Induktion genügt es, den Fall zweier Quadratflächen zu analysieren. Gelingt dies nämlich, so kann man bei $n = k + 1$ Quadratflächen zunächst *k* beliebig auswählen, diese zerlegen und wieder zu einer Quadratfläche zusammensetzen. Das Ergebnis und die $(k+1)$-te Quadratfläche lassen sich dann ebenso wie gefordert zerlegen und zusammensetzen. Für den Fall *n* = 2 seien zwei Quadrate mit den Seitenlängen *y* und *x* gegeben ($y \leq x$). Wie in der Skizze angedeutet, kann das größere Quadrat so zerlegt werden, dass sich die Teile um das kleinere Quadrat anordnen lassen. Für einen vollständigen Beweis sind die Zerlegung und das Zusammenlegen aber korrekt zu beschreiben.



Aufgabe zum Weihnachtsfest 2019

Es sei $\{a_n\}$ n = 1, 2, ... eine Folge von ganzen Zahlen. Die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen ist 55. Weiter gelte a_{40} = 24 und a_{80} = 12. Bestimmen Sie die ersten drei Folgeglieder a_1, a_2 und a_3.

Lösungshinweise: Aufgrund der Bedingung $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 55$ für alle natürlichen Zahlen *n* = 1, 2, ... gilt insbesondere

$$a_{38} + a_{39} + a_{40} = 55 = a_{37} + a_{38} + a_{39}, \text{ also } a_{40} = a_{37}.$$

Setzt man dies fort, gilt ebenso für jede ganze Zahl $k \geq 0$ die Beziehung $a_{40} = a_{3 \cdot k+1} = 24$.

In gleicher Weise findet man

$$a_{78} + a_{79} + a_{80} = 55 = a_{77} + a_{78} + a_{79}, \text{ also } a_{80} = a_{77},$$

woraus $a_{80} = a_{3 \cdot k+2} = 12$ folgt. Insbesondere gilt damit a_1 = 24, a_2 = 12 und a_3 = 55 – 24 – 12 = 19.

Die Lösung lautet passend zum Weihnachtsfest (24, 12, 19).

Näherungskonstruktionen für reguläre n-Ecke [9]

Im Jahre 1778 erschien in Göttingen ein Buch von Johann Nikolaus Müller mit dem Titel „Vorbereitung zur Geometrie für Kinder“. Darin beschreibt der Privatlehrer an der Universität Göttingen ein Verfahren, mit dem man näherungsweise einem Kreis regelmäßige *n*-Ecke beliebiger Seitenzahl einbeschreiben kann. Beispielsweise heißt es für das regelmäßige Fünfeck:

„*Ein reguläres n-Eck in einem Kreis mit dem Durchmesser AB zu beschreiben: Theilet den Durchmesser AB desselben bey den Puncten 1, 2, ..., n-1 in n gleiche Theile. Nehmet den ganzen Durchmesser AB mit dem Zirkel ab und machet aus seinen Endpuncten a und b, aufwärts zween Bogen, die sich im Punct C schneiden. Von den Puncten A und B ziehet nach dem Durchschnittspunct C die geraden Linen AC und BC; so entstehet das gleichseitige Dreyeck ABC. Aus seiner Spitze C und durch den Theilungspunct „2“ ziehet die gerade Linie CD, die dem Kreis in dem Punct D begegnet (D und C liegen auf verschiedenen Seiten von AB). Aus dem Endpunct B ziehet hierauf nach dem Punct D die gerade Linie BD, welche sich sicher in dem Kreiß n-mal herumtragen lässt. Unterlasset ihr nicht sie wirklich n-mal herumzutragen und die Puncte mit geraden Linien zusammenzuziehen, so habt ihr das reguläre n-Eck im Kreiße gezeichnet.“* [10]

Beim Ausprobieren der Methode stellt man fest, dass dieses Verfahren für $n = 3, 4, 6$ das exakte *n*-Eck liefert. Um die Genauigkeit des Verfahrens für andere *n* zu untersuchen, suche man die Abhängigkeit der Seitenlänge $\overline{BD}$ vom Radius $r = \overline{AB}$. Erstaunlich, dass mit diesem einfachen Verfahren der relative Fehler für $n < 11$ unter 1% bleibt. Für das 17-Eck errechnet sich ein relativer Fehler der konstruierten zur exakten Seitenlänge von weniger als 3%. Man kann zeigen, dass für wachsendes *n* der relative Fehler 10% nur geringfügig übersteigt.

Aufgaben Serie 5 (2019/20)

Am 2. März 2020 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des diesjährigen Bundeswettbewerbs Mathematik. Eine Kopie der Aufgaben liegt dem Heft bei. Aufgaben und Ausschreibung sind unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de oder beim Mathematik-Lehrer erhältlich.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

Bereits die Einsendung einer richtig gelösten Aufgabe wird mit einer Anerkennung belohnt. Mit drei richtig gelösten Aufgaben qualifiziert man sich für die 2. Runde. Es ist Gruppenarbeit mit bis zu drei Gruppenmitglieder zugelassen.

[9] Nach Kühl, J.: Eine Näherungskonstruktion für reguläre n-Ecke in einem Geometriebuch für Kinder von 1778. In: MNU 50/5 (1997), S. 277-279.
[10] Zitat leicht geändert

In dieser Serie sind zwei Aufgaben aus dem aktuellen BWM. Für die Einsendungen dieser Aufgaben können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden (also kein zusätzlicher Aufwand). Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können natürlich keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden.

(Einsendungen zur Serie 5 bitte bis 17. März 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [11])

Aufgabe 5-1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $(Q(Q(n))$ beträgt 2019.
(5 Punkte)

Aufgabe 5-2. Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10.000.000.000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischen Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischen Darstellung keine 5 auftritt. (5 Punkte)

Aufgabe 5-3 (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.
(6 Punkte)

Aufgabe 5-4 (Aufgabe 4 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2018, 1. Runde). Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k. Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C, die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D.
Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E.
(6 Punkte)

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höher erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, bei mehr als 12 Punkte werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 5-5A. Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mit der Methode der vollständigen Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl n größer als 7 existieren ganzzahlige positive Zahlen r und s, so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$. (2 Punkte)

[11] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$. (2 Punkte)

(c) In der Ebene seien n Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind? (4 Punkte)

Aufgabe 5-5B

(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Ungleichung $F \leq \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$. (2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Gleichung $F = \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$ gilt. (2 Punkte)

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl p gibt, so dass für jedes Dreieck für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b und c die Ungleichung $F \leq p \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ gilt. Man ermittle diesen Wert von p. (4 Punkte)

Hinweis: Für jedes Dreieck gilt zwischen dem Flächeninhalt F und dem Umfang U die Beziehung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} U^2$.

Seminarankündigung

Das **3. Chemnitzer Seminar** wird am Samstag, dem **21. März 2020** durchgeführt. Bitte vormerken - das Programm und die organisatorischen Hinweise werden mit Heft 2/2020 verteilt und auf www.kzm-sachsen.de veröffentlicht.

Impressum

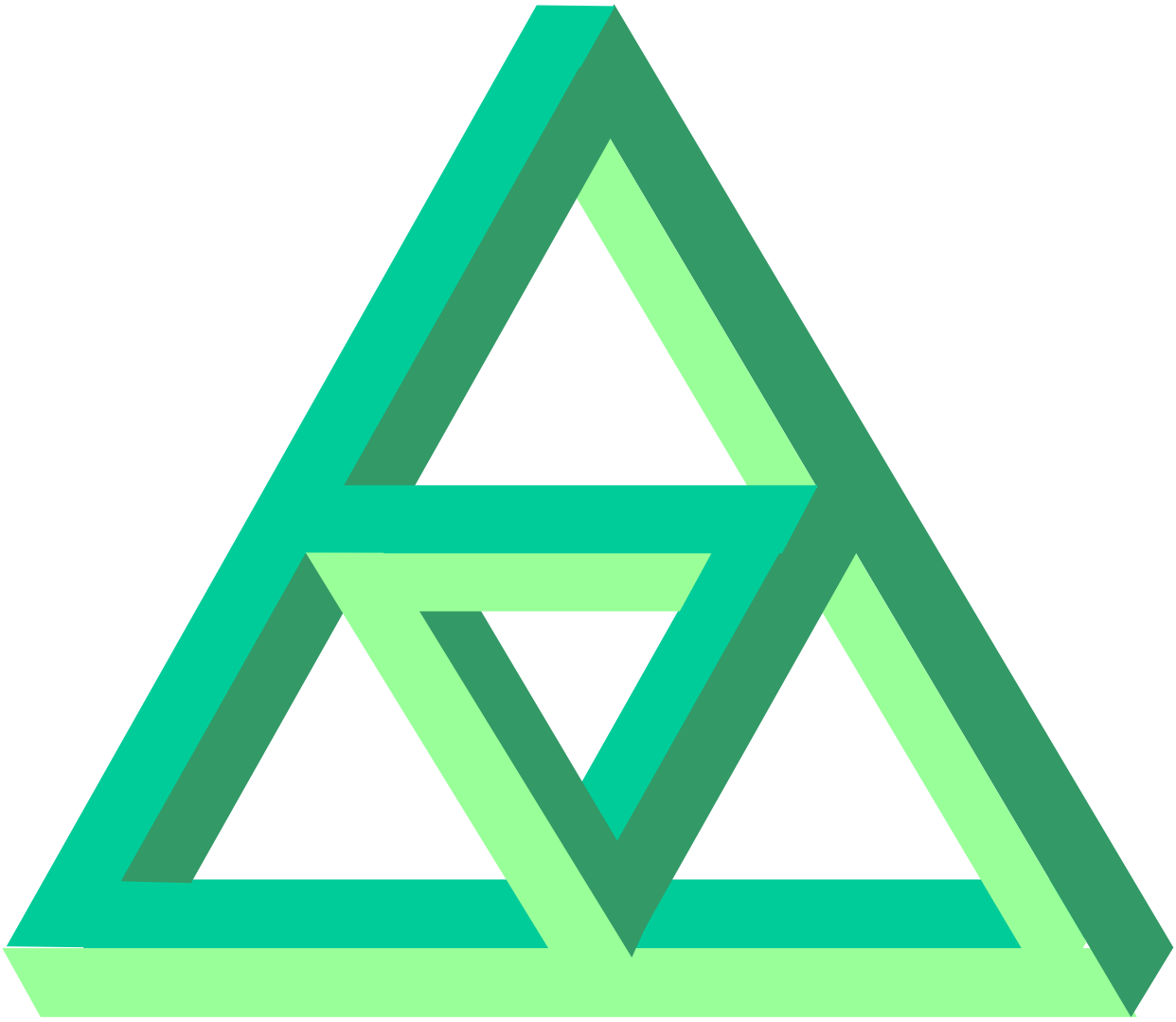
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-bitterlich.de
Auflage:	55 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (**VR1380 am Amtsgericht Chemnitz)

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 2 /2020 19. Jahrgang

Lösungsdiskussion Serie 4

Aufgabe 4-1. Man bestimme alle Paare *(n ; k)* mit natürlichen Zahlen *n* und *k*, die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

Lösungshinweise: Weil $56 \cdot k$ durch 7 teilbar ist, muss auch $n! + 10^n$ durch 7 teilbar sein. Da 10^n für jede natürliche Zahl *n* nicht durch 7 teilbar ist, darf auch $n!$ nicht durch 7 teilbar sein. Daraus folgt unmittelbar die Beschränkung $n < 7$.

Durch systematisches Probieren der verbleibenden Zahlen für $n = 0, 1, \ldots, 6$ findet man alle Lösungen der Aufgabe. Dabei prüfe man zur Verringerung des Rechenaufwandes zunächst die Teilbarkeit durch $56 = 7 \cdot 8$:

n	$n!$	$Z = n! + 10^n$	$56 \cdot k$
0	1	1	entfällt, da Z ungerade
1	1	11	entfällt, da Z ungerade
2	2	102	Z nicht durch 8 teilbar
3	6	1006	Z nicht durch 8 teilbar
4	24	10024	$k = 179$
5	120	100120	Z nicht durch 7 teilbar
6	720	1000720	$k = 17870$

Somit sind nur die Paare (4; 179) und (6; 17870) Lösungen der Aufgabe. Es gilt tatsächlich

$$4! - 56 \cdot 179 + 10^4 = 24 - 10.024 + 10.000 = 0$$

$$6! - 56 \cdot 17870 + 10^6 = 720 - 1.000.720 + 1.000.000 = 0$$

❑

Aufgabe 4-2[1]. Für welche positiven ganzen Zahlen *n* gibt es eine Quadratzahl, deren letzten *n* Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

Lösungshinweise: Es gilt $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Somit gilt die Aussage mindestens für $n = 1, 2, 3$.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2, deren letzte 4 Ziffern gleich 4 sind, also $k^2 = 10^4 \cdot a + 4444$ mit einer ganzen Zahl *a*. Weil 10^4 durch 16 teilbar ist und 4444 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt, lässt auch k^2 bei Division durch 16 den Rest 12. Somit ist k^2 durch 4, nicht aber durch 8 teilbar und das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $k = 2 \cdot (2 \cdot b + 1)$. Daraus folgt

$$k^2 = (4 \cdot b + 2)^2 = 16 \cdot b^2 + 16 \cdot b + 4.$$

[1] Diese Aufgabe stammt aus der 56. MO (2016/17), Stufe 2 der Klassenstufe 12.

Dies steht im Widerspruch dazu, dass k^2 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt. Die Aussage gilt also nicht für $n = 4$ und somit auch nicht für alle $n \geq 4$. ❑

Aufgabe 4-3[2]. Man finde alle Paare $(p\,;\,q)$ von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen x und y gibt, sodass

$$p = x^2 - y \qquad q = y^2 + 3x - 7$$

gilt.

Lösungshinweise: Es sei zunächst $p = 2$. Damit folgt $y = x^2 - p = x^2 - 2$ und somit

$$\begin{aligned} q &= \left(x^2 - 2\right)^2 + 3x - 7 = x^4 - 4x^2 + 3x - 3 \\ &= x^4 - x^2 - 3x^2 + 3x - 3 = x^2(x-1)(x+1) - 3\left(x^2 - x + 1\right). \end{aligned}$$

Also ist q durch 3 teilbar (weil im ersten Summanden unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen stets eine durch 3 teilbare Zahl ist) und somit gilt $q = 3$. Die daraus resultierende Gleichung

$$0 = x^4 - 4x^2 + 3x - 6 = x^2\left(x^2 - 4\right) + 3(x-2) = (x-2)\left(x^2(x+2) + 3\right)$$

hat nur die positive Lösung $x = 2$, woraus $y = 2$ folgt.

Es sei nun p ungerade. Aus $y = x^2 - p$ erhält man

$$q = y^2 + 3x - 7 = x^4 - 2x^2 p + p^2 + 3x - 7 = x\left(x^3 - 2xp + 3\right) + p^2 - 7,$$

Somit ist q geradzahlig, also gilt $q = 2$. Dann ist aber $3x = q + 7 - y^2 = 9 - y^2$. Da aber x und y positive Zahlen sind, kann y nur 1 oder 2 sein. In keinem der beiden Fälle ist jedoch x ganzzahlig.

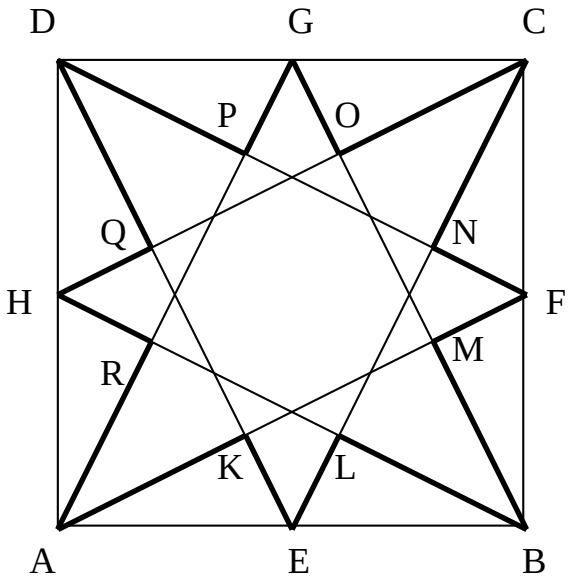
Somit ist $x = y = 2$; $p = 2$; $q = 3$ die einzige Lösung, die in der Probe bestätigt wird. ❑

Aufgabe 4-4[3]. In einem Quadrat *ABCD* seien die Mittelpunkte der Seiten *AB*, *BC*, *CD* und *DA* mit *E*, *F*, *G* bzw. *H* bezeichnet. In dem Streckenzug *AFDECHBGA* auftretende Schnittpunkte seien so mit *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, *R* bezeichnet, dass *AKELBMFNCOGPD QHR* ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze).

Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechszehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates *ABCD*.

[2] Diese Aufgabe stammt aus der 45. MO (2005/06), Stufe 4 der Klassenstufe 9.
[3] Diese Aufgabe stammt aus der 10. MO (1970/71), Stufe 3 der Klassenstufe 9.

Lösungshinweise: Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt a^2 des Quadrates *ABCD* die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke *AKE*, *BLE*, *BMF*, *CNF*, *COG*, *DPG*, *DQH* und *ARH* subtrahiert. Nach Konstruktion sind diese 8 Dreiecke untereinander kongruent, denn sie stimmen sämtlich in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein.



Aus Symmetriegründen ist das Viereck *KMOQ* ein Quadrat. Deshalb ist das Dreieck *AKE* rechtwinklig und zudem ähnlich dem Dreieck *ABF* (www). Außerdem ist *KE* || *BM*. Aus dem Strahlensatz mit den Strahlen *AB* und *AF* sowie den Parallelen *KE* und *BM* folgt deshalb:

$$|KE| : |MB| = |AE| : |AB| = 1 : 2$$

d.h. wegen |*AK*| = |*MB*| gilt $|AK| = 2 \cdot |KE|$.

Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck *AKE* mit dem rechten Winkel im Eckpunkt *K*, ergibt sich

$$|KE|^2 + \left(2 \cdot |KE|\right)^2 = |AE|^2 \quad \text{d.h.} \quad 5 \cdot |KE|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks *AKE* beträgt folglich

$$\frac{|KE| \cdot 2|KE|}{2} = |KE|^2 = \frac{a^2}{20}.$$

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt $a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5} \cdot a^2$ und für das Verhältnis der Flächeninhalte gilt $A_{\text{Quadrat}} : A_{\text{Sechszehneck}} = 5 : 3$. ❑

Aufgabe 4-5A. Es sei *P* ein Polynom vom Grad *n* (*n* > 0) mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$, also $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$.

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig *P*(2015) = 2017 und *P*(2019) = 2019 gelten kann.

(b) Ist *x* eine rationale Nullstelle von *P* (also *P*(*x*) = 0) und gilt $a_n = 1$, so ist *x* ganzzahlig.

(c) Ist sowohl *P*(2019) als auch *P*(2020) ungerade, so besitzt *P* keine ganzzahlige Nullstelle.

Lösungshinweise:

(a) Angenommen, ein Polynom $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + ... + a_1 \cdot x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten habe die Funktionswerte $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$. Dann gilt $P(2019) - P(2015) = 2$. Für die Differenz zweier Funktionswerte findet man aber allgemein

$$P(x)-P(y)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(x^k - y^k\right)$$

Für $k = 0$ ist der entsprechende Summand gleich Null, für $k = 1$ steht $a_1 \cdot (x-y)$, für $k = 2$ findet man $\left(x^2 - y^2\right)=(x-y)\cdot(x+y)$ und für $k > 2$ kann man ebenfalls stets den Faktor $(x – y)$ ausklammern:

$$\left(x^k - y^k\right)=(x-y)\cdot\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + ... + xy^{k-2} + y^{k-1}\right)$$

Folglich kann man in jedem Summanden der obigen Summe den Faktor $(x – y)$ ausklammern und man erhält mit geeignet gewählten Konstanten C_k:

$$P(x)-P(y)=(x-y)\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot C_k \,.$$

Setzt man nun $x = 2019$ und $y = 2015$, so steht auf der linken Seite dieser Gleichung die Zahl 2 und auf der rechten Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $2019 – 2015 = 4$, was sich widerspricht. Folglich können die angegebenen Funktionswerte nicht richtig sein.

(b) Ist x eine rationale Nullstelle von $P(x)$, dann existieren teilerfremde ganze Zahlen r und s ($s > 0$) mit $x=\frac{r}{s}$. Eingesetzt in die Gleichung findet man

$$0=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^k = \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\cdot\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + ... + a_1 \cdot \frac{r}{s} + a_0 .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit s^n und formt äquivalent um, so erhält man

$$r^n = s\cdot\left(a_{n-1}\cdot r^{n-1} + a_{n-2}\cdot r^{n-2}\cdot s + ... + a_1 \cdot r \cdot s^{n-2} + a_0 \cdot s^{n-1}\right).$$

Damit ist s ein Teiler von r^n und somit sind entweder r und s nicht teilerfremd oder es gilt $s = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

(c) Ist $P(x)$ für ein ganzzahliges Argument x ungeradzahlig, so ist auch $P(y)$ mit $y = x + 2\cdot m$ (m ganzzahlig) ungeradzahlig, da nach (a) für zwei Zahlen x und y die Gleichung

$$P(x)-P(y)=(x-y)\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot C_k$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k und ganzzahligen Konstanten C_k (k = 1, ..., n) gilt. Da der Faktor (x – y) geradzahlig ist, ist auch die Differenz P(x) – P(y) geradzahlig. Wäre nun $P(z)$ = 0 für ein ganzzahliges z, so ist entweder die Differenz (2020 – z) oder die Differenz (2019 – z) durch 2 teilbar. Da der Wert 0 geradzahlig ist, müsste demnach entweder P(2020) oder P(2019) auch geradzahlig sein. Da dies in beiden Fällen laut Voraussetzung nicht der Fall ist, kann es keine derartige Zahl z geben. ❑

Aufgabe 4-5B. Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0,a_1,...,a_k$ bestehe. Unter der *Quadratquersumme QQS* von n verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n)=\sum_{i=0}^{k}a_i^2\ .$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n=n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n*“, also $n_0,n_1,...$ mit

$$n_{j+1}=QQS(n_j)\quad ;\quad j=0,1,2,...$$

(a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2019 und 2020.

(b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!

(*Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.)*

(c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.

Lösungshinweise:
(a)

$$n_0=QQS(2018)=2^2+0^2+1^2+9^2=86$$

$$n_1=QQS(86)=8^2+6^2=100\quad ;\quad n_2=QQS(100)=1^2=1$$

Damit sind alle Folgenglieder mit Index n ≥ 2 gleich 1.

$$n_0 = QQS(2020) = 2^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 = 8$$

$$n_1 = QQS(8) = 8^2 = 64 \quad ; \quad n_2 = QQS(64) = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$n_3 = QQS(52) = 5^2 + 2^2 = 29 \quad ; \quad n_4 = QQS(29) = 2^2 + 9^2 = 85$$

$$n_5 = QQS(85) = 8^2 + 5^2 = 89 \quad ; \quad n_6 = QQS(89) = 8^2 + 9^2 = 145$$

$$n_7 = QQS(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \; ; \quad n_8 = QQS(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$n_9 = QQS(20) = 2^2 + 0^2 = 4 \quad ; \quad n_{10} = QQS(4) = 4^2 = 16$$

$$n_{11} = QQS(16) = 1^2 + 6^2 = 37 \quad ; \quad n_{12} = QQS(37) = 3^2 + 7^2 = 58$$

$$n_{13} = QQS(58) = 5^2 + 8^2 = 89$$

Da n_{13} mit dem Folgenglied n_5 übereinstimmt, ist die weitere Folge der Quadratquersummen von 2020 periodisch mit der Periode 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58.

(b) Trivialerweise erfüllt $n = 100$ die Bedingung. Andere Lösungen findet man davon ausgehend durch systematisches Probieren hinsichtlich der Zerlegbarkeit einer Zahl in die Summe von Quadratzahlen einstelliger Zahlen, z. B.

$QQS(100) = 1$ $\quad 100 = 8^2 + 6^2 + 0^2$ also: $QQS(860) = 100$

$QQS(860) = 100 = QQS(68)$ $\quad 68 = 8^2 + 2^2$ also: $QQS(820) = 68$

$QQS(820) = 68 = QQS(82)$ $\quad 82 = 9^2 + 1^2$ also: $QQS(910) = 82$

Mit 910; 820; 860 und 100 sind somit bereits 4 wesentlich verschiedene Zahlen der geforderten Art gefunden.

Alle wesentlich verschiedenen dreistelligen Zahlen, in deren Folge der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt, sind:

100 310 320 331 440 622 632 644 653 655 665 700 761 763 820
833 860 863 874 881 888 910 921 931 932 940 964 970 973 998

(c) Für jede mindestens vierstellige Zahl n mit den Ziffern $a_0, a_1, ..., a_k$ ($k > 2$), d.h. $n = \sum_{i=0}^{k} 10^i \cdot a_i$ gilt stets

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i^2 \le (k+1) \cdot 9^2 < 10^k < n$$

d. h., die Folge der Quadratsummen ist bis zum Erreichen einer dreistelligen Zahl monoton abnehmend. Die Quadratquersumme einer dreistelligen Zahl ist selbst höchstens dreistellig,

$$QQS\left(\sum_{i=0}^{2} a_i \cdot 10^i\right) = \sum_{i=0}^{2} a_i^2 < 3 \cdot 9^2 = 243\,.$$

Damit sind ab einem bestimmten Index alle Folgeglieder höchstens dreistellig. Da es nur endlich viele höchstens dreistellige Zahlen gibt, existiert eine Zahl, die mindestens zweimal auftritt (Schubfachprinzip). Daraus folgt unmittelbar die Periodizität der Folge. ❑

Die harmonische Reihe und Verwandte

Man betrachte die Summe $S_a(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$ für $a \geq 1$. Für $a = 1$ beschreibt $S_1(n)$ die so genannte *n-te Partialsumme* der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

Für diese harmonische Reihe kann man für jede noch so große positive Zahl C ein n_0 finden, sodass für alle $n > n_0$ die Ungleichung $S_1(n) > C$ gilt. (Eine unendliche Reihe mit dieser Eigenschaft heißt *divergent*.) Ist dagegen $a > 1$, so findet man für ein fixiertes a unabhängig von n eine Zahl C, die jede Summe $S_a(n)$ nach oben beschränkt, also $S_a(n) < C$ für alle n. Man setze $q = \frac{1}{2^{a-1}} < 1$. Dann ist folgende Abschätzung richtig:

$$S_a\left(2^m - 1\right) - S_a\left(2^{m-1} - 1\right) = \underbrace{\frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^a} + ... + \frac{1}{\left(2^m - 1\right)^a}}_{2^{m-1}\ Summanden} <$$

$$< \frac{2^{m-1}}{2^{(m-1)\cdot a}} = \frac{1}{2^{(m-1)\cdot(a-1)}} = q^{m-1}$$

Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion überzeugt man sich leicht von folgender Beziehung:

$$S_a\left(2^m - 1\right) < 1 + q + ... + q^{m-1} = \frac{1 - q^m}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}$$

Damit ist die Summe $S_a(n)$ unabhängig von n nach oben beschränkt. Für $a = 2$ gilt also stets $S_a(n) < 2$. Rechnet man jedoch für große n diese Summen aus, stellt man fest, dass dabei der Wert 1,644934... = $\frac{\pi^2}{6}$ angenähert und nicht überschritten wird (die Reihe *konvergiert* für $a = 2$ gegen diesen Wert.) Für $a = 4$ gilt

entsprechend $S_4(n) < \frac{8}{7}$. Als Grenzwert, der für jedes noch so große *n* nicht überschritten wird, kann man den Wert $\frac{\pi^4}{90} \approx 1{,}0823$ nachweisen.

Ausgehend von der harmonischen Reihe bedarf es weitreichender mathematischer Methoden, um zu erkennen, dass sich für große *n* die *alternierenden Partialsummen* $S_1^*(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ...$ dem Wert ln 2 ≈ 0,6931 annähern. Dagegen kann man sich den Grenzwert für die alternierenden Summen $S_2^*(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k^2}$ leicht erklären, wenn man für $n = 2 \cdot m$ folgenden Zusammenhang betrachtet:

$$S_2(2m) - S_2^*(2m) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{2}{4} \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \cdot S_2(m).$$

Somit wird sich $S_2^*(n)$ für große *n* dem Wert $\frac{\pi^2}{12}$ annähern. Auch die nach LEIBNIZ[4] benannte Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

liefert einen mit der Kreiszahl π in Zusammenhang stehenden Wert[5]. Beginnt man jedoch, dies nachzurechnen, wird man enttäuscht sein. Man benötigt etwa 300 Glieder, um π auf zwei Stellen nach dem Komma genau zu berechnen! Andere interessante Berechnungsmöglichkeiten sind:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right)$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + ...$$

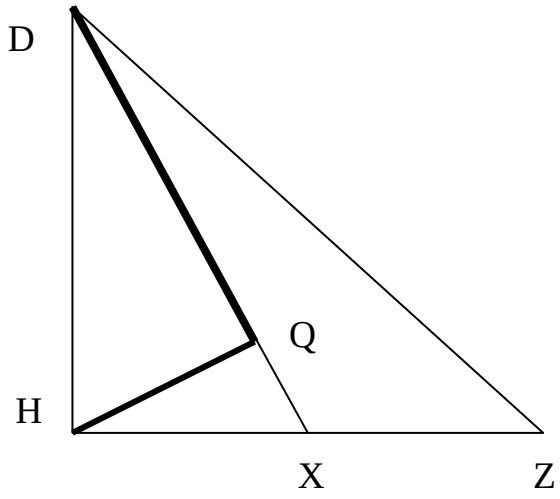
Hilfsgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben

Verhältnisse von Flächeninhalten wie in **Aufgabe A4-4** kann man häufig ohne direkte Berechnung der zu vergleichen-den Flächeninhalte bestimmen.

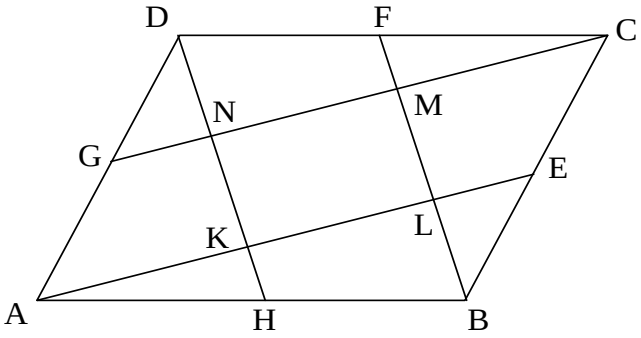
[4] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716)

[5] Nach Miller, M. Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1973.

Betrachtet man beispielsweise nur einen Ausschnitt der Figur mit dem 16-Eck wie in nebenstehender Abbildung, so gehört das Dreieck *DHQ* nicht zur Fläche des 16-Ecks. Man kann zeigen, dass die Gerade durch *D* und *Q* die dargestellte Fläche halbiert (gleiche Höhe, halbe Grundseite). Außerdem erkennt man aufgrund der Seitenlängen (nach Aufgabe A1-5), dass das Dreieck *DHX* ein fünfteiliges Gerücht ist. Damit beträgt der Flächenanteil des Dreiecks *HXQ* ein Fünftel des Dreiecks *DHX*. Also ist der Anteil, der zum 16-Eck zählt, genau $\frac{6}{10}$ der Ausgangsfläche.



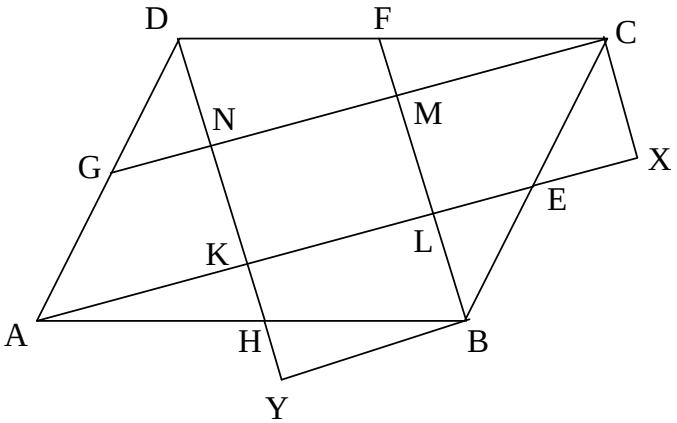
MO431024. Gegeben sei ein Parallelogramm *ABCD*. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit *E*, *F*, *G bzw. H* bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck *KLMN* aus.



(a) Zeigen Sie, dass *KLMN* ein Parallelogramm ist.

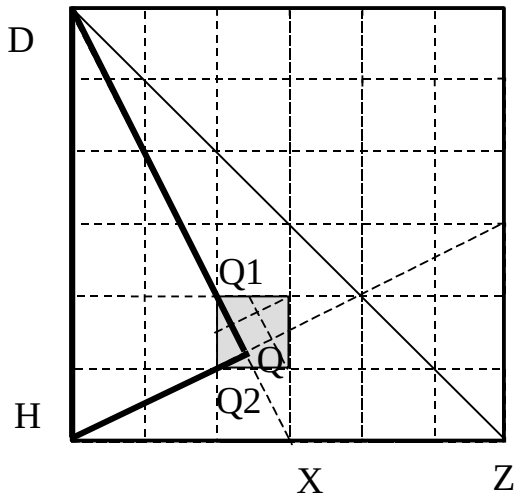
(b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms *KLMN* zu dem des Parallelogramms *ABCD*.

Lösungshinweise: Fertigt man eine Skizze an, erkennt man die prinzipielle Möglichkeit, alle notwendigen Maße in Abhängigkeit der Seitenlängen des Parallelogramms *ABCD* ermitteln zu können.



Durch Vergleich von Teilflächen kann aber der Beweis fast ohne Berechnung erfolgen. Aufgrund der Konstruktionsvorschrift zeigt man nämlich leicht, dass die Dreiecke *BEL* und *EXC* sowie *AKH* und *HYB* kongruent sind und die entstandenen Vierecke *LXCM* bzw. *KYBL* jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm *KLMN* sind.

Ergänzt man in analoger Weise die Figur über *DF* und *AG*, so wird unmittelbar ersichtlich, dass sich die Gesamtfläche des Parallelogramms *ABCD* aus 5 Parallelogrammen der Größe *KLMN* zusammensetzt. ❑

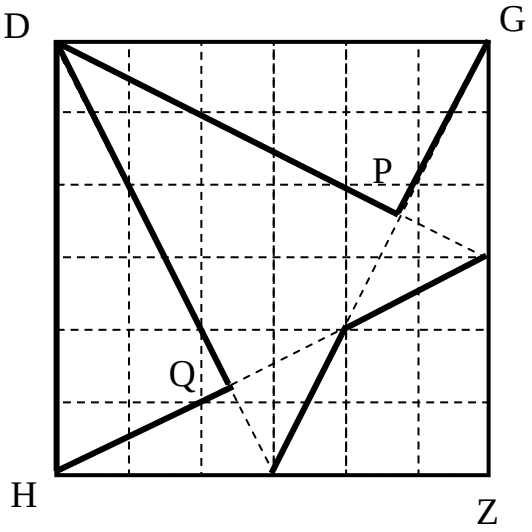


Diese Lösungsidee der Flächenzerlegung lässt sich auf die Aufgabe A4-4 übertragen. Legt man ein Quadratgitter von 12 x 12 Quadraten über diese Figur (in der Abbildung ist das linke obere Viertel dargestellt), so ist der Flächeninhalt des Trapezes DHQ_2Q_1 auszählbar: 4 vollständige Teilquadrate und 3 Mal zwei Stücke, die sich zu je einem Teilquadrat zusammensetzen lassen. Zur Fläche, die nicht zum Sechszehneck gehört, ist noch das Dreieck Q_1Q_2Q hinzuzuzählen.

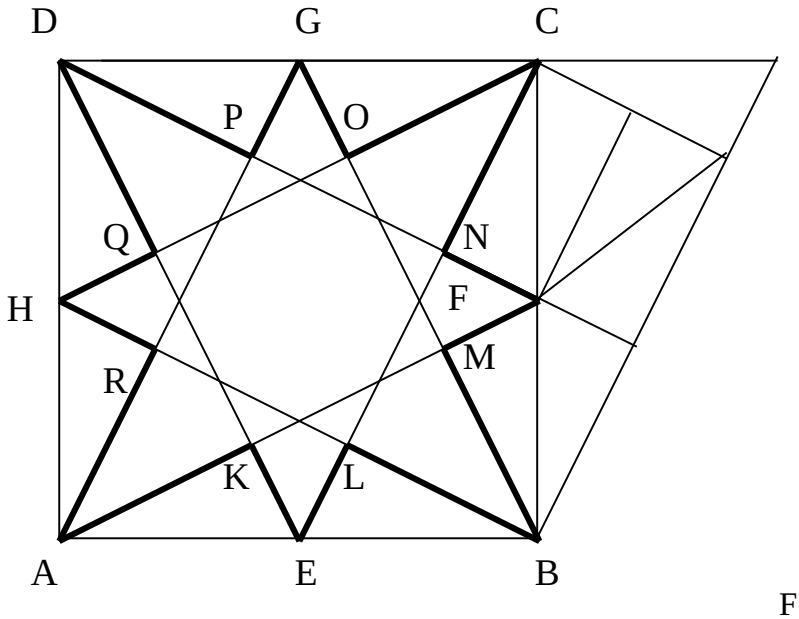
Dessen Flächeninhalt kann aber nach obiger Aufgabe bestimmt werden und beträgt deshalb ein Fünftel eines Teilquadrates. Da 8 Dreiecke der Größe *DHQ* nicht zum Sechszehneck gehören, bedeckt letzteres $144 - 8 \cdot (7 + 0{,}2) = 86{,}4$ Flächen der Teilquadrate, d.h. 60% (von 144 Teilquadraten).

Diese Methode ist aber auch geeignet, den Flächeninhalt des in der Mitte des Sechszehnecks erkennbaren Achtecks in einfacher Weise zu bestimmen. Wie in der Abbildung des linken oberen Viertels der Figur zu erkennen, nimmt die zu diesem Achteck gehörende Fläche genau 6 Teilquadrate der insgesamt 36 dargestellten Teilquadrate ein.

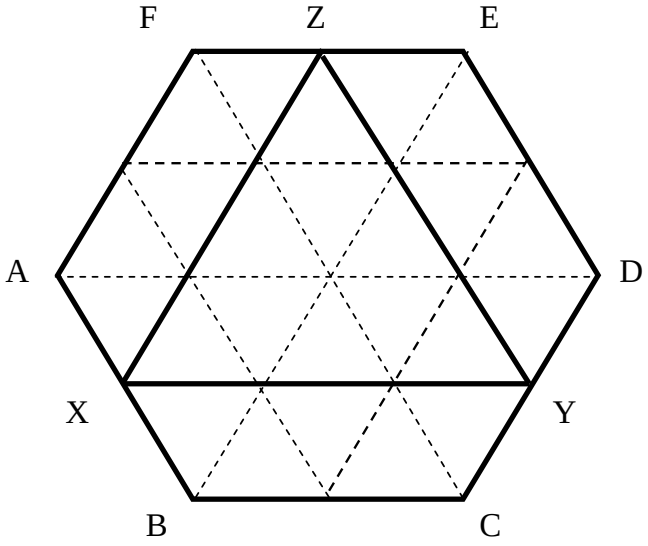
Also beträgt der Anteil des Flächeninhaltes des inneren Achtecks $\frac{1}{6}$ der Quadratfläche.



Zudem erkennt man, dass dieses Achteck zwar 8 gleichlange Seiten hat (die Länge der Verbindung gegenüberliegender Ecken zweier benachbarter Teilquadrate), aber nicht regelmäßig ist (weil die Winkel nicht alle gleich groß sind).



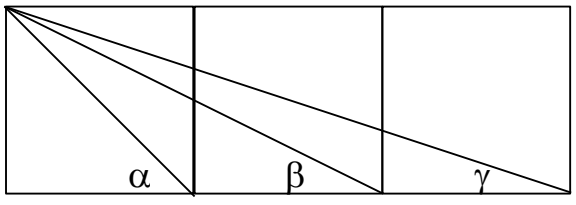
Der Flächenvergleich ist auch ohne Rechnung möglich, wenn man das Dreieck BCG an der Seite BC spiegelt. Man erkennt fünf zum Dreieck BFM kongruente Dreiecke (fünfteiliges Gerücht). Somit beträgt der Flächeninhalt von fünf solcher Dreiecke genau ein Viertel der Quadratfläche.



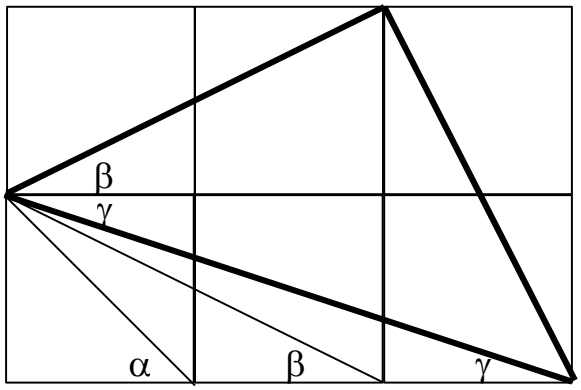
Aufgabe. Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks *ABCDEF* seien *X, Y* und *Z* die Mittelpunkte der Seiten *AB, CD* und *EF*. Gesucht ist das Verhältnis $A_S : A_D$, wenn A_S der Flächen-inhalt des Sechsecks und A_D der Flächeninhalt des Dreiecks *XYZ* ist.

Lösungshinweise: Eine Skizze weist bereits den Lösungsweg durch „Auszählen“ geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegt man das Sechseck in 24 kongruente Teildreiecke, von denen 9 zum Dreieck *XYZ* gehören.

Aufgabe. Drei Einheitsquadrate liegen aneinander und der linke obere Eckpunkt sei mit den Punkten der Grundseite verbunden (s. Skizze). Man bestimme die Summe der Winkel α, β und γ.

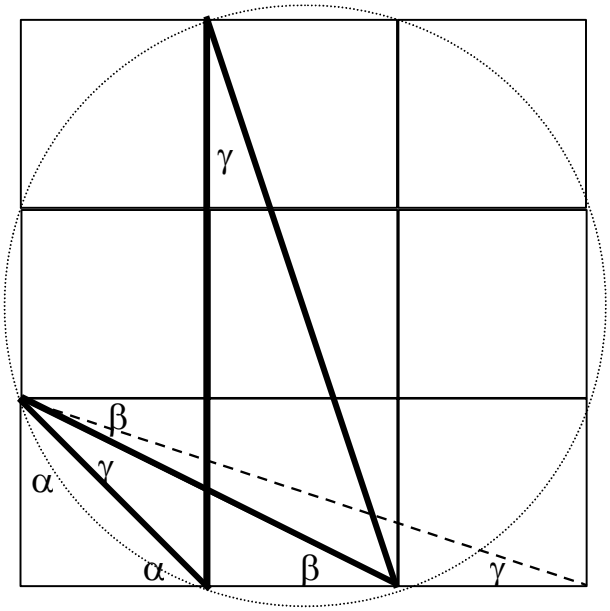


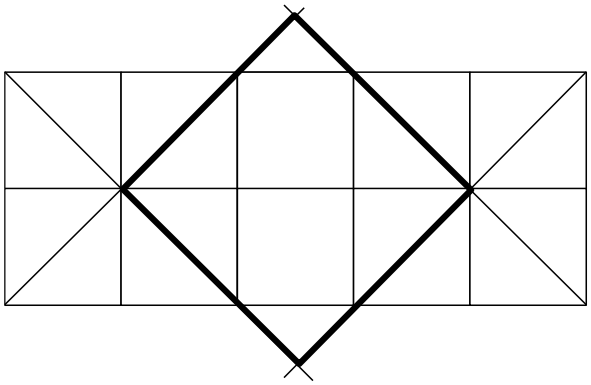
Lösungshinweise: Es ist naheliegend, die Größe der Winkel zu berechnen, da $\alpha = 45°$ unmittelbar abgelesen werden kann und für die Winkel β und γ ebenfalls einfache Dreiecksbeziehungen erkennbar sind. Aber durch Erweiterung des Quadratgitters kann das Ergebnis ohne Rechnung ermittelt werden: Das hervorgehobene Dreieck ist gleichschenklig-rechtwinklig.



Dessen Basiswinkel ist die Summe der Winkel β und γ (Wechselwinkel an den parallelen Gitterlinien). Mit $\alpha = 45°$ folgt daraus unmittelbar, dass die Summe der drei Winkel 90° beträgt.

Der Beweis gelingt aber auch mit nebenstehender Skizze. Man kann leicht zeigen, dass die gleich bezeichneten Winkel auch tatsächlich gleich sind (wie?). Damit ist die Summe der drei Winkel aber im linken unteren Teilquadrat unmittelbar ablesbar: 90°.





Aufgabe. Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen *m* und *n* (*m*, *n* natürliche Zahlen, bei Längenangabe wird hier stets das Vielfache der zugrundeliegenden Längeneinheit verstanden, die hier aber nicht näher bezeichnet wird).

Die vier Winkelhalbierenden beschreiben ein Viereck (s. Skizze, die Gitterlinien entsprechen der Längeneinheit). Gibt es Zahlen *m* und *n*, sodass dieses Viereck flächengleich zum Rechteck ist?

Lösungshinweise: Spezialfälle lassen sich leicht auszählen. In der Skizze gilt $m = 5$ und $n = 2$, die Rechteckfläche beträgt 10 (Flächeneinheiten) und das resultierende Viereck ist ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 4,5.

Das resultierende Viereck ist wegen der Symmetrie ein Quadrat. Dessen Flächeninhalt *F* lässt sich aus seiner Diagonalen *d* ermitteln, wobei stets $d = |m - n|$ gilt (warum?), $F = \frac{1}{2} \cdot d^2$. Sind Quadrat und Rechteck flächengleich, so muss gelten:

$\frac{1}{2}\cdot(m-n)^2 = mn$.

Dies führt zur quadratischen Gleichung $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 4\cdot\frac{m}{n} + 1 = 0$ mit den Nullstellen $\frac{m}{n} = 2 \pm \sqrt{3}$. Da dieses Verhältnis nicht rational ist, kann die Flächengleichheit unter den Bedingungen der Aufgabe nicht erreicht werden. ❑

Man kann die Flächengleichheit jedoch beispielsweise mit

- $m = 15$ und $n = 4$ (das Verhältnis der Rechteckfläche zur Quadratfläche beträgt in diesem Fall 60,0 : 60,5 = 0,9917) oder
- $m = 41$ und $n = 11$ (451,0 : 450,0 = 1,0022)

in praktikabler Genauigkeit erreichen.

Folgerungen aus der Bernoulli-Ungleichung[6]

Satz. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gelten die Ungleichungen

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ und } \quad 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Lösungshinweise: Für jedes $n \geq 2$ gilt wegen $-\frac{1}{n^2} > -1$ nach der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\left(n^2-1\right)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n} \quad \text{und wegen } n^2 - 1 = (n-1)\cdot(n+1)$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} > \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)^n}, \text{ also } \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < \frac{(n+1)^n}{n^n},$$

woraus die erste angegebene Ungleichung unmittelbar folgt. Wegen $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \geq 2$ findet man bei Anwendung der Bernoulli-Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2$$

[6] s. Heft 9/2019, S. 19

Um auch die Abschätzung nach oben zu zeigen, nutze man zunächst den binomischen Lehrsatz und erhält

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

Jeder Summand mit einem Binomialkoeffizienten kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} \le \frac{1}{k!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

Deshalb gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \qquad \square$$

Aufgabe. Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion $x^\alpha - a\cdot x$ ($a > 0$, $\alpha > 1$) für nichtnegative reelle Zahlen x.

Lösungshinweise: Für jede positive reelle Zahl c gilt nach der Folgerung aus der Bernoulli-Ungleichung

$$(cx)^\alpha = (1+(cx-1))^\alpha \ge 1+\alpha\cdot(cx-1),$$

also $(cx)^\alpha - \alpha\cdot cx \ge 1-\alpha$.

Dies ist nach Division durch c^α äquivalent zu

$$x^\alpha - \alpha\cdot c^{1-\alpha}\cdot x \ge (1-\alpha)\cdot c^{-\alpha}.$$

Nun wähle man c so, dass $a = \alpha\cdot c^{1-\alpha}$ gelte, also $c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Damit findet man die Abschätzung

$$x^\alpha - a\cdot x \ge (1-\alpha)\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $cx = 1$, also $x = \frac{1}{c} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. $\square$

Beispiel. Um den kleinsten Wert der Funktion $x^6 - 6x^2 + 5$ zu ermitteln, wähle man $\alpha = 3$ und $a = 6$. Weil x^2 stets nicht negativ ist, gilt

$$\left(x^2\right)^3 - 6x^2 \geq (1-3)\cdot\left(\frac{6}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = -4\sqrt{2}\,.$$

Der minimale Wert wird für $x = \pm\sqrt[4]{2}$ angenommen (Probe!).

Aufgabe. Es seien *m* und *n* natürliche Zahlen mit $0 < m < n$. Für welche reellen Zahlen $x > 0$ ist der Abstand von x^n und x^m am kleinsten?

Lösungshinweise: Gesucht ist das Minimum der Funktion $f(x) = x^n - x^m$. Mit Hilfe der obigen Abschätzung findet man für $\alpha = \frac{n}{m} > 1$ und $a = 1$

$$x^n - x^m = \left(x^m\right)^{\frac{n}{m}} - x^m \geq \left(1 - \frac{n}{m}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}-1}} = -\frac{n-m}{m}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n-m}}.$$

Das Minimum wird an der Stelle $x = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{n}{m}-1}\cdot\frac{1}{m}}$ angenommen. ❑

Beispiel. Der minimale Abstand der Funktionswerte von x^3 und x^2 beträgt

$$-\frac{3-2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3-2}} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{4}{27}$$

und wird an der Stelle $x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ angenommen.

Aus der Bernoulli-Ungleichung lässt sich nun eine Verallgemeinerung der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel herleiten.

Satz. Sind *p* und *q* positive reelle Zahlen mit $p + q = 1$ und *x* und *y* beliebige positive reelle Zahlen, so gilt

$$x^p \cdot y^q \leq p\cdot x + q\cdot y\,.$$

Beweisidee: Es gilt wegen $x > 0$, $y > 0$ und $p < 1$ unter Anwendung der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p = \left(1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)\right)^p \leq 1 + p\cdot\left(\frac{x}{y} - 1\right) = \frac{p\cdot x}{y} + (1-p)$$

also nach Multiplikation mit *y*

$$y\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^p = y^{1-p}\cdot x^p \leq p\cdot x + (1-p)\cdot y\ .$$

Ersetzt man $(1 - p)$ wegen $p + q = 1$ durch q, ist der Beweis erbracht. ❑

Für $p = q = ½$ erkennt man die bekannte Mittelungleichung. Die Verallgemeinerung gilt auch für n positive reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$ und $p_1, ..., p_n$ mit $p_1 + ... + p_n = 1$:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \le \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \,.$$

Der VIETAsche Wurzelsatz als Lösungsansatz

Für ein Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ gilt für die n Nullstellen des Polynoms $x_1, x_2, ..., x_n$ der VIETAsche[7] Wurzelsatz, der im Falle $n = 2$ und $n = 3$ wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a_1 \\ x_1 \cdot x_2 &= a_0 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_2 \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 &= a_1 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -a_0 \end{aligned}$$

Diese Zusammenhänge bieten oft einen hilfreichen Zugang zur Lösung von Polynomgleichungen und (nichtlinearen) Gleichungssystemen. Sucht man etwa reelle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ xy + yz + zx &= a^2 \\ xyz &= a^3 \end{aligned}$$

und betrachtet die Variablen x, y und z als Lösungen einer Polynomgleichung 3. Grades, so ist die Unlösbarkeit für $a \neq 0$ schnell gezeigt: Nach dem Wurzelsatz lässt sich die zugehörige Polynomgleichung darstellen als

$$P(u) = u^3 - a \cdot u^2 + a^2 \cdot u - a^3 = (u - a) \cdot \left(u^2 + a^2\right)$$

Offensichtlich kann P nicht drei reelle Nullstellen haben und somit existiert auch kein reelles Lösungstripel für das Gleichungssystem.

In gleicher Weise findet man für das Gleichungssystem

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27$$

das dazugehörige Polynom. Es gilt nämlich

[7] Francois Vieta (1540 bis 1603)

$$xyz = xyz \cdot 1 = xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = yz + xz + xy = 27 .$$

Damit sind über den Wurzelsatz die Koeffizienten des Polynoms bekannt:

$$P(u) = u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = (u-3)^3 .$$

Folglich gibt es nur die (ohnehin leicht erratbare) Lösung $x = y = z = 3$.

Für den Beweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + r$ für alle reellen Zahlen r nur eine reelle Nullstelle besitzt, schreibe man die Gleichungen des Wurzelsatzes auf. Gäbe es nämlich drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3, so gilt für diese:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(-1)$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$$

Dann folgt aber daraus der Widerspruch

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

Damit ist gezeigt, dass es keine drei reellen Nullstellen geben kann. Leicht argumentiert man nun, dass es deshalb – wie behauptet – für das kubische Polynom nur eine reelle Nullstelle geben kann.

Einige interessante Eigenschaften von Primzahlen

CHRISTIAN GOLDBACH (1690 bis 1764) zeigte 1752: Sei $P(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann können nicht alle Glieder der Folge $|P(0)|$, $|P(1)|$, $|P(2)|$, ... Primzahlen sein.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe ein solches Polynom. Es kann in der Form $P(x) = P(0) + x \cdot Q(x)$ mit einem geeigneten Polynom $Q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden. Ist $|P(0)|$ eine Primzahl p, so ist der Ausdruck $P(py) = P(0) + py \cdot Q(py)$ für alle positiven ganzen Zahlen y durch p teilbar. Somit gilt $P(py) = p$ für alle diese y. Ein Polynom ist aber für ausreichend große Argumente stets monoton, sodass nicht an unendlich vielen ganzzahligen Argumenten der Wert p auftreten kann. ❑

LEONHARD EULER (1707 bis 1783) gab das Polynom $P(x) = x^2 + x + 41$ an, dass für $x = 0, 1, ..., 39$ Primzahlen liefert. Für das Polynom $P(x) = x^2 - 79x + 1601$ findet man für $x = 0, 1, ..., 79$ Primzahlen.

Aufgabe. Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $3k + 2$.

Lösungshinweise: Man nehme an, es gäbe nur endlich viele Primzahl der angegebenen Form. Dann bilde man das Produkt

$$M = \sum_{p_k = 3k+2} p_k^2 .$$

Die Zahl $M + 1$ ist wieder von der Form $3k + 2$ und offenbar größer als jede der Primzahlen p_k. Sie kann also nicht selbst eine solche Primzahl sein. Da sie aber auch zu jeder der im Produkt berücksichtigten Primzahlen teilerfremd ist, kann ihre Primfaktorenzerlegung nur Primfaktoren der Form $3k + 1$ enthalten. Damit ist aber $M + 1$ nicht zu erhalten. ❑

Aufgabe. Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ mit nichtnegativen Zahlen k.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen der geforderten Form. Dann seien N das Produkt aller dieser Primzahlen,

$$N = \sum_{p_k = 4k+3} p_k$$

und die Zahl $M = 4N + 3$. Weil M eine ungerade Zahl ist, ist M entweder selbst eine Primzahl oder durch eine Primzahl teilbar, die nicht N teilt. Eine Primzahl kann M nicht sein, weil M sicher größer als jeder Faktor von N ist, aber selbst die Form $4k + 3$ hat. Das ist ein Widerspruch dazu, dass es keine größeren Primzahlen dieser Form als die N im Produkt enthaltenen Primzahlen existieren. Primzahlen, die N nicht teilen, haben die Form $4k + 1$. Wenn nur solche Primzahlen Teiler von M sind, müsste m selbst die Form $4k + 1$ haben. Damit ist die Annahme widerlegt und es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$. ❑

In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $6k + 5$ gibt. Dagegen gelingt es auf elementare Weise nicht zu beweisen, dass diese Eigenschaft auch die Zahlen der Form $3k + 1$, $4k + 1$ oder $6k + 1$ haben. PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 bis 1859) bewies 1837, dass in jeder arithmetischen Folge a, $a + d$, $a + 2d$, ... mit teilerfremden natürlichen Zahlen a und d unendlich viele Primzahlen enthalten sind (**Dirichletscher Primzahlsatz**). Insbesondere gibt es also jeweils unendlich viele Primzahlen, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden.

Wilsonscher[8] Satz. Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn die Zahl $(n – 1)! + 1$ durch n teilbar ist.

Lösungshinweise: Ist n eine zusammengesetzte Zahl, also $n = a \cdot b$ mit $1 < a < b <$ n, so sind a und b als Faktoren in $(n – 1)!$ enthalten. Ist n eine Quadratzahl, also $n = a^2$, so gilt $2a < n$. Damit sind sowohl a als auch $2a$ Faktoren in $(n – 1)!$ Folglich ist in beiden Fällen n Teiler von $(n – 1)!$ und folglich kein

[8] benannt nach JOHN WILSON (1741 bis 1793), jedoch stammt der Satz nicht von ihm und wurde auch nicht von ihm bewiesen

Teiler von $(n-1)!+1$. Daraus folgt die eine Richtung des Satzes: Wenn $(n-1)!+1$ durch n teilbar ist, dann ist n eine Primzahl.

Für die andere Richtung des Beweises kann man für jede Primzahl p zeigen, dass sich die Zahlen von 2 bis $p-2$ paarweise gruppieren kann, sodass deren Produkt bei Division durch p den Rest 1 lässt (wie?). Damit lässt auch das Produkt $(p-2)!$ bei Division durch p den Rest 1. Folglich ist $(p-2)!-1$ durch p teilbar, damit aber auch $(p-1)!+p-1$ (wegen der Teilerfremdheit von $(p-1)$ und p) sowie $(p-1)!+1$. ❑

Postulat von Bertrand[9]. Ist p eine Primzahl, so liegt zwischen p und $2p$ mindestens eine weitere Primzahl.

Hinweis: Diese Aussage erscheint beinahe trivial – dennoch ist der Beweis recht langwierig. Man kann die Ungleichungskette

$$\frac{4^n}{2n} \le \binom{2n}{n} \le \prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \le 2n} p$$

beweisen[10]. Dabei werden die Produkte über alle Primzahlen in den angegebenen Intervallen gebildet, das leere Produkt hat den Wert 1. Existiert nun keine Primzahl p im letzten Produkt, so führt dies zu einem Widerspruch für alle $n > 4000$. Für die Zahlen bis 4000 lässt sich aber durch systematische Prüfung zeigen, dass das Postulat stets erfüllt ist.

Über Primzahlen der Form $2^n + 1$ und $2^n - 1$

Carl Friedrich GAUSS (1777 bis 1855) zeigte, dass für eine Primzahl p die Konstruktion des regelmäßigen p-Ecks mit Zirkel und Lineal genau dann ausführbar ist, wenn p die Form $p = 2^n + 1$ hat.

Man beweist leicht, dass in diesem Fall der Exponent n eine Zweierpotenz sein muss. Ist nämlich n keine Zweierpotenz, so besitzt n eine ungerade Zahl $a > 1$ als Teiler, also $n = a \cdot b$ (b eine natürliche Zahl). Es ist aber bekannt, dass sich der Ausdruck $2^{a \cdot b} + 1 = \left(2^b\right)^a + 1$ ohne Rest durch $2^b + 1$ teilen lässt.

Folglich kommen nur Primzahlen der Form $p = 2^{2^k} + 1$ als Eckenzahl regelmäßiger (mit Zirkel und Lineal konstruierbarer) Vielecke in Frage. Für $k = 0$ findet man das Dreieck, für $k = 1$ das Fünfeck. Mit $k = 2$ erhält man das 17-Eck, dessen Konstruierbarkeit GAUSS bereits 1796 bekannt war. Für $k = 3$ (also für das 257-Eck) existiert eine 80-seitige Konstruktionsbeschreibung in der Literatur. In

[9] JOSEPH LOUIS FRANÇOIS BERTRAND (1822 bis 1900)
[10] Winzenick, J. Das Postulat von Bertrand. Proseminararbeit, Universität Paderborn, 2005.

der Göttinger Universität liegt in einem Handkoffer ein Manuskript mit der Konstruktionsbeschreibung für $k = 4$ (also für das 65537-Eck), das in mehrjähriger Arbeit von HERMES erstellt wurde. Für $k = 5$ ergibt sich keine Primzahl, bereits 1732 fand EULER für $2^{2^5} + 1$ den Teiler 641.

Wie viele Primzahlen der genannten Form überhaupt existieren, ist bislang nicht geklärt, man kennt noch keine für $k > 4$! Primzahlen der Form $p = 2^{2^k} + 1$ heißen auch Fermatsche Primzahlen, benannt nach PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665), der 1640 noch vermutete, dass Zahlen dieser Form stets Primzahlen sind.

In Analogie kann man Zahlen der Form $2^n - 1$ betrachten. Bereits im alten Griechenland wurden solche Zahlen auf der Suche nach vollkommenen Zahlen[11] untersucht, aber erst MARIN MERSENNE (1588 bis 1648) hat grundlegende Aussagen ableiten können. So nennt man heute in Erinnerung an seine mathematische Leistung Primzahlen der Form $2^n - 1$ *Mersennesche Zahlen.*

Leicht sieht man, dass $2^n - 1$ nicht für jedes n eine Primzahl sein kann. Ist beispielsweise 4 ein Teiler von n, so ist $2^n - 1$ stets durch 5 teilbar. Ebenso ist $2^n - 1$ keine Primzahl, wenn n geradzahlig ist, da in diesem Fall stets durch 3 teilbar. Und schließlich ist auch der Beweis nicht schwierig, dass für zusammengesetzte Zahlen n (also Zahlen, die sich in zwei Faktoren größer als 1 zerlegen lassen) auch $2^n - 1$ als Produkt zweier Faktoren größer 1 geschrieben werden kann.

Aus der letzten Aussage folgt unmittelbar der Satz: Die Zahl $2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn n eine Primzahl ist. Doch schon für $n = 11$ findet man ein Gegenbeispiel für die Hoffnung, den Satz durch „genau dann, wenn" verschärfen zu können.

Im Jahre 1644 veröffentlichte MERSENNE sein Werk *Cogitata Physico-Mathematica.* Darin behauptet er, für alle Primzahlen bis 257 sei der Ausdruck $2^n - 1$ nur in elf Fällen selbst wieder prim. War diese Liste vollständig und richtig? Diese Frage sollte die Mathematik der nächsten drei Jahrhunderte beschäftigen. Erst 225 Jahre nach der Veröffentlichung wurde der erste Fehler entdeckt: Es fehlte eine Zahl. Der russische Mathematiker IVAN MIKHEEVICH PERVUSHIN (1827 bis 1900) konnte beweisen, dass die Mersennesche Zahl mit der Basis 61 eine Primzahl ist. Zwanzig Jahre später wurde der nächste Fehler gefunden: FRANK N. COLE (1861 bis 1926) zerlegte die Zahl $2^{67} - 1$ in zwei Faktoren.

Mersennesche Zahlen stehen in engen Zusammenhang mit den vollkommenen Zahlen. Schon EUKLID VON ALEXANDRIA (etwa 360 bis 290 v.u.Z.) bewies: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, so ist $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ eine vollkommene Zahl. LEONHARD

[11] Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, z.B. 6 = 1 + 2 +3.

EULER (1707 bis 1783) konnte zeigen, dass alle geraden vollkommenen Zahlen genau diese Struktur haben.

Eine besondere MO-Primzahl

Aufgabe MO370941/371041. Beweisen Sie folgende Aussage:

Sind $p = n^{n^n} + n^n + n + 1$ und n Primzahlen, so ist auch $q = n^{n^n} - n^n + n - 1$ eine Primzahl.

Beweisidee: Man untersuche, für welchen n die Zahl p überhaupt prim sein kann und ermittle dann die Zahl q.

Aufgaben Serie 6 (2019/20)

(Einsendungen bis 25. April 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [12])

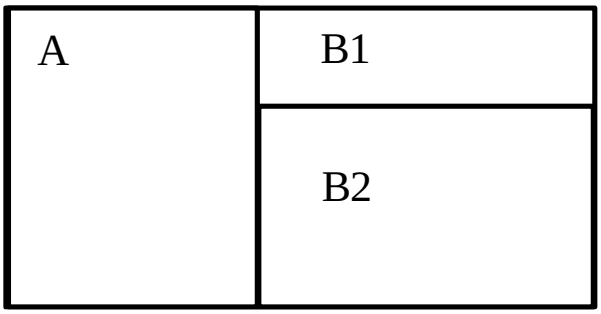
Aufgabe 6-1.
Man bestimme den Umfang eines Dreiecks mit folgenden Eigenschaften:

(a) alle Seitenlängen sind ganzzahlig,
(b) eine der Seitenlängen ist 13,
(c) das Produkt der beiden anderen Seitenlängen ist 105.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-2.
Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt.

Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch einen vollständigen geraden Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der Teilrechtecke erneut in zwei Rechtecke usw. In der nebenstehenden Abbildung kann man mit einem ersten Schnitt das Rechteck *A* abteilen und dann in einem zweiten Schnitt die Rechtecke *B*1 und *B*2 erhalten.



Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird *sequentiell* genannt. Gibt es für eine Zerlegung jedoch keine solche Schnittfolge

[12] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(lassen sich also die Teilrechtecke nicht sequentiell mit vollständigen geraden Schnitten erzeugen, d.h. durch Abteilen jedes der Rechtecke entsteht eine Figur die kein Rechteck ist), heißt die Zerlegung *primär*.

(a) Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechtecks in drei Teilrechtecke gibt (d.h. dass jede Zerlegung eines Rechtecks in drei Teilrechtecke sich durch eine sequentielle Zerlegung erzeugen lässt).

(b) Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke existiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-3.
Man finde alle reellwertigen Lösungen (x ; y ; z) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 6-4.
Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke F des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch F senkrecht steht und die Raumdiagonale im Verhältnis 1 : 2 teilt.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, bei mehr als 12 zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 6-5A.
Das HERONsche Verfahren[13] dient zur Approximation der Quadratwurzel einer reellen Zahl a ($a > 0$): Es sei x_0 ein „Schätzwert“ für $\sqrt{a}$. Im ersten Schritt berechnet man x_1 durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

Im n-ten Schritt ergibt sich aus x_n ein „besserer“ Näherungswert durch

[13] Heron von Alexandria (im 1. Jh. n. Chr.)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \qquad (n = 1, 2, ...)$$

(a) Man berechne mit dem HERONschen Verfahren einen Wert für $\sqrt{2020}$.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Für $\sqrt{a} < x_n$ gilt $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$.

(2 Punkte)

(c) Man beweise. Beim HERON-Verfahren gilt für alle $n > 0$ die Ungleichung:

$$\left| \sqrt{a} - x_{n+1} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \sqrt{a} - x_n \right| \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 6-5B

(a) Welchen Polynomrest lässt $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$ bei Division durch $x^2 + x + 1$?

(2 Punkte)

(b) Man beweise: Wenn im Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a, b und c sämtlich ungerade Zahlen sind, so hat P keine rationale Lösung.

(2 Punkte)

(c) Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ (mit einer reellen Zahl c) habe drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1 \le x_2 \le x_3$. Man zeige: $x_3 - x_1 > 6$.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Das **3. Chemnitzer Seminar** findet wie angekündigt am Samstag, dem **21. März 2020** statt. Bitte bis 13. März 2020 formlos anmelden.

Impressum

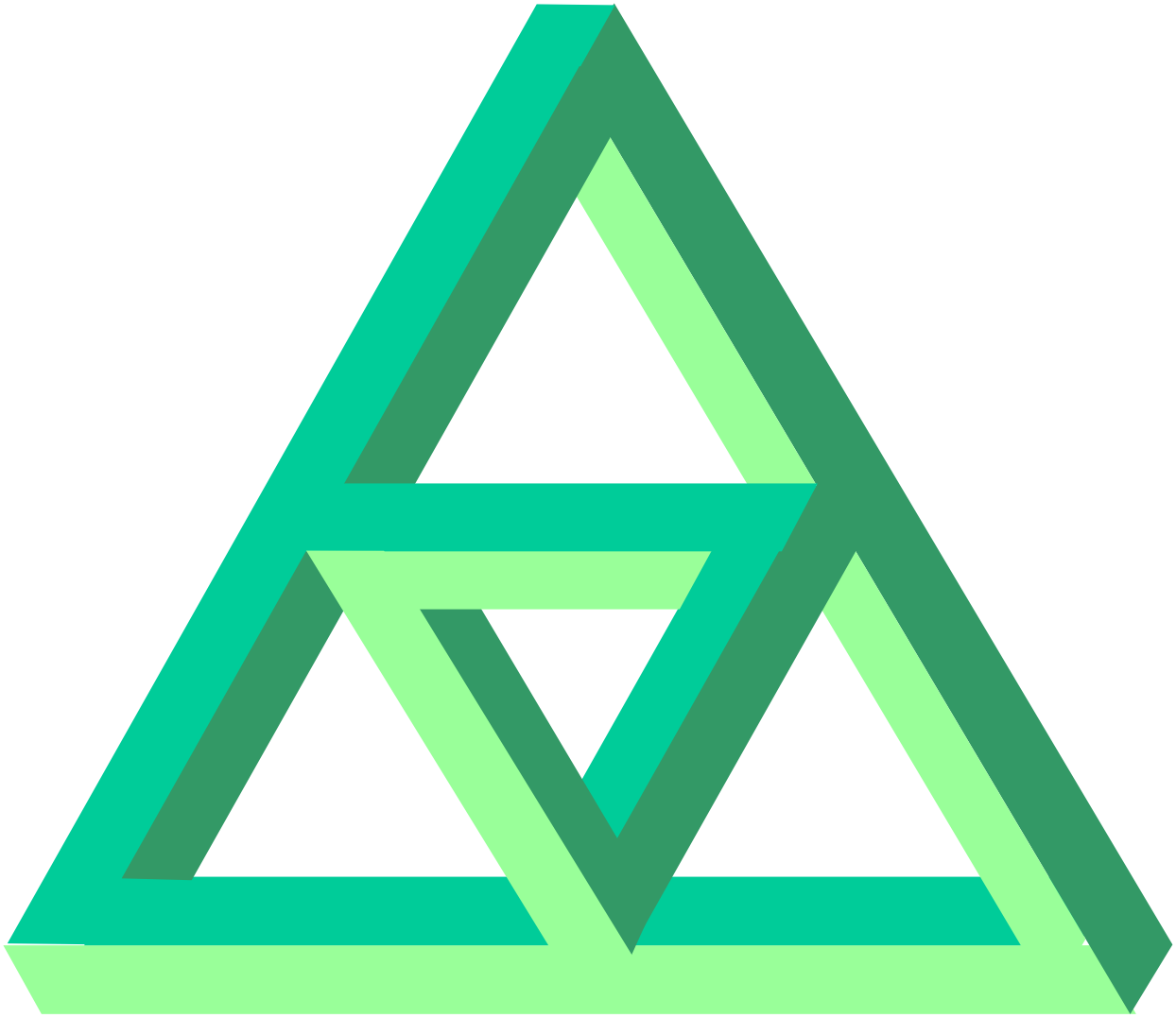
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 3/2020 19. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 5

Aufgabe 5-1[1].

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen *n*, für die gilt: Die Summe aus *n*, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme ($Q(Q(n))$ beträgt 2019.

Lösungshinweise: Für jede Zahl $n \leq 1979$ ist deren Quersumme höchstens (1 + 9 + 7 + 9 =) 26. Die größte Quersumme der Zahlen von 1 bis 26 beträgt (1 + 9 =) 10. Folglich kann die geforderte Summe den Wert (1979 + 26 + 10 =) 2015 nicht übersteigen. Außerdem ist für jede Zahl $n \geq 2017$ die Quersumme mindestens 2 und die Quersumme der Quersumme mindestens 1, sodass die geforderte Summe mindestens (2017 + 2 +1 =) 2020 beträgt.

In Anbetracht der erforderlichen einfachen (Kopf-) Rechnungen erscheint es vertretbar, die Summenbildung auf die Zahlen von 1980 bis 2016 anzuwenden und somit die Lösungsmenge zu ermitteln. Ausdrücklich soll dieses systematische Probieren hier nicht angewandt werden. Während die Quersumme einer Zahl bei Kenntnis ihrer Ziffern ermittelt werden kann, ist bei der wiederholten Quersumme das Auftreten eines Übertrags zu berücksichtigen. Deshalb werden folgende Abschnitte untersucht:

1980 bis 1981:	$1980 + a$ $(a = 0, 1)$	
	$(1980 + a) + (18 + a) + (9 + a) = 2007 + 3 \cdot a$	$a = 4 > 1$
1982 bis 1989:	$1980 + a$ $(a = 2, \ldots, 9)$	
	$(1980 + a) + (18 + a) + (2 + (a - 2)) = 1998 + 3 \cdot a$	$\boldsymbol{a = 7}$
1990:	$1990 + 19 + 10 = 2019$	
1991 bis 1999:	$1990 + a$ $(a = 1, \ldots, 9)$	
	$(1990 + a) + (19 + a) + (2 + (a - 1)) = 2010 + 3 \cdot a$	$\boldsymbol{a = 3}$
2000 bis 2007:	$2000 + a$ $(a = 0, \ldots, 7)$	
	$(2000 + a) + (2 + a) + (2 + a) = 2004 + 3 \cdot a$	$\boldsymbol{a = 5}$
2008 bis 2009:	$2000 + a$ $(a = 8, 9)$	
	$(2000 + a) + (2 + a) + (a - 7) = 1995 + 3 \cdot a$	$\boldsymbol{a = 8}$
2010 bis 2016:	$2010 + a$ $(a = 0, \ldots, 6)$	
	$(2010 + a) + (3 + a) + (3 + a) = 2016 + 3 \cdot a$	$\boldsymbol{a = 1}$

Somit gibt es sechs Zahlen mit der geforderten Eigenschaft:

$1987 + 25 + 7 = 2019$	$1990 + 19 + 10 = 2019$
$1993 + 22 + 4 = 2019$	$2005 + 7 + 7 = 2019$
$2008 + 10 + 1 = 2019$	$2011 + 4 + 4 = 2019$ ❑

[1] Nach der Aufgabe MO441024 im Jahre 2004: $n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2004$.

Aufgabe 5-2.
Es sei *M* die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10.000.000.000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen aus *M*, bei deren dekadischen Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus *M*, bei deren dekadischen Darstellung keine 5 auftritt.

Lösungshinweise: Die Anzahl aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt, ist gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen von 0 bis $10^{10} - 1$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. Die Menge der letztgenannten Zahlen ist die Menge aller Zahlen

$$a_9 \cdot 10^9 + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

wobei jedes a_j eine der neun (von der Ziffer 5 verschiedenen) Ziffern ist. Die Anzahl dieser Zahlen ist folglich 9^{10}. Die Anzahl der übrigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} ist somit

$$10^{10} - 9^{10} = (10-9) \cdot \left(10^9 + 10^8 \cdot 9^1 + ... + 10^1 \cdot 9^8 + 9^9\right)$$
$$> 9^9 + 9^8 \cdot 9^1 + ... + 9^1 \cdot 9^8 + 9^9 = 10 \cdot 9^9 > 9^{10}$$

Daher ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen aus *M*, in deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer als die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, in deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. ❑

Da die Anzahl der Zahlen aus *M*, in deren dekadischen Darstellung keine Ziffer 5 vorkommt, gleich 9^{10} ist, beträgt deren Anteil unter allen Zahlen aus *M* $\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0{,}348$. Mit wachsender Stellenzahl nimmt dieser Anteil ab. Während unter den einstelligen Zahlen 90% aller Zahlen keine Ziffer 5 haben, sind es bei 6-stelligen Zahlen etwas über 50% und ab 28-stelligen Zahlen weniger als 1%.

Beim Vergleich $10^{10} - 9^{10}$ und 9^{10} ist die Angabe der Zahlenwerte keine elegante Lösung, auch wenn man in einer schriftlichen Nebenrechnung die Multiplikation explizit ausführen kann. Ein Verweis auf ein TR-Ergebnis genügt nicht, auch wenn hierbei eine ausreichende Genauigkeit erreicht würde.

Aufgabe 5-3[2] (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind *m* und *n* positive ganze Zahlen.

[2] Ausführliche Lösungshinweise sind veröffentlicht unter

Lösungshinweise: Man wähle $n = 2 \cdot k$ und $m = 2 \cdot k + 1$. Dann gilt für jede positive ganze Zahl k:

$$50^m - 50^n = 50^{2\cdot k+1} - 50^{2\cdot k} = 50^{2\cdot k} \cdot (50 - 1) = (50^k)^2 \cdot 49 = (50^k \cdot 7)^2$$

Also gibt es unendlich viele Quadratzahl der geforderten Form.

Wegen $2020 = 3 \cdot 673 + 1$ lässt 2020 bei Division durch 3 den Rest 1. Somit lässt auch jede Potenz 2020^k mit einer natürlichen Zahl k bei Division durch 3 den Rest 1. Es sei nun o.B.d.A. $m \geq n$ (andernfalls wären die Exponenten umzubenennen). Dann gilt

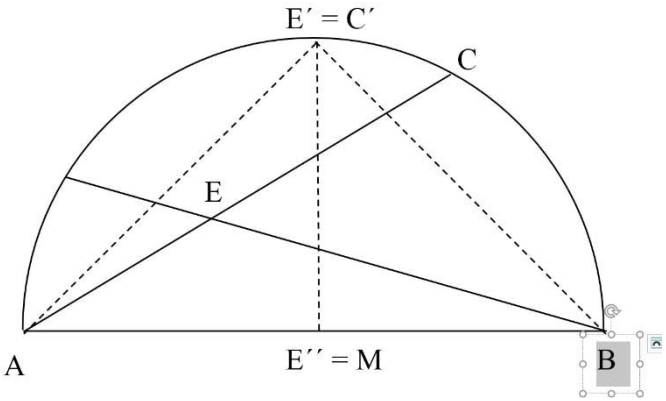
$$2020^m + 2020^n = 2020^n \cdot (2020^{m-n} + 1)$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt bei Division durch 3 den Rest 1, der zweite Faktor den Rest 2. Also lässt die Summe in der geforderten Form bei Division durch 3 den Rest 2.

Es ist jedoch bekannt, dass eine Quadratzahl bei Division durch 3 nur den Rest 0 oder 1 haben kann, denn $(3 \cdot k)^2 = 9 \cdot k^2$ ist stets durch 3 teilbar und $(3 \cdot k \pm 1)^2 = 3 \cdot (3 \cdot k^2 \pm 2 \cdot k) + 1$ lässt bei Division durch 3 den Rest 1. Somit kann eine Zahl der geforderten Form keine Quadratzahl sein. ❑

Aufgabe 5-4 (Aufgabe 4 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k. Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C, die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D. Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E.

Lösungshinweise: Es ist hilfreich, zunächst Spezialfälle zu untersuchen, um den zu erwartenden unabhängigen Wert zu bestimmen. Wählt man E' als Mittelpunkt des Kreisbogens über AB, so fällt C und D jeweils mit E' zusammen und es gilt aufgrund des Satzes des Pythagoras



$$\overline{AC} \cdot \overline{AE'} + \overline{BD} \cdot \overline{BE'} = \overline{AE'}^2 + \overline{BE'}^2 = \overline{AB}^2 .$$

Wählt man dagegen E'' als den Mittelpunkt der Strecke AB, so fallen C und D mit B bzw. A zusammen und es gilt:

www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/aufgaben.

$$\overline{AC}\cdot\overline{AE''}+\overline{BD}\cdot\overline{BE''}=2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{AB}=\overline{AB}^2.$$

Mit jedem dieser Spezialfälle ist die Konstante – wenn es diese gibt – bereits bestimmt.

Für die allgemeine Lage des Punktes *E* kann der Sehnensatz angewandt werden. Demnach gilt für die Sehnen *AC* und *BD* mit ihrem Schnittpunkt *E*: $\overline{AE}\cdot\overline{EC}=\overline{BE}\cdot\overline{ED}$. Diese Ausgangsgleichung kann nun wie folgt umgeformt werden

$$\overline{BE}\cdot\overline{ED}=\left(\overline{BD}-\overline{ED}\right)\cdot\overline{ED}=\left(\overline{AC}-\overline{AE}\right)\cdot\overline{AE}$$
$$\overline{BD}\cdot\overline{ED}-\overline{ED}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}-\overline{AE}^2$$

Weil der Winkel $\angle BEA$ ein rechter Winkel ist, kann nach Satz des Pythagoras im Dreieck *AED* die Umformung fortgesetzt werden:

$$\overline{BD}\cdot\overline{ED}-\left(\overline{AE}^2-\overline{AD}^2\right)=\overline{AC}\cdot\overline{AE}-\overline{AE}^2$$
$$\overline{BD}\cdot\overline{ED}+\overline{AD}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$$
$$\overline{AD}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}-\overline{BD}\cdot\overline{ED}$$

Unter Berücksichtigung des Satzes des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck *ABD* folgt nach Addition von $\overline{BD}^2$ auf beiden Seiten:

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}-\overline{BD}\cdot\overline{ED}+\overline{BD}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}+\overline{BD}\cdot\left(\overline{BD}-\overline{ED}\right)$$

Also gilt unabhängig von der Lage des Punktes *E*

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}+\overline{BD}\cdot\overline{BE}$$ ❑

Aufgabe 5-5A.
(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl *n* größer als 7 existieren ganzzahlige ***nichtnegative*** Zahlen *r* und *s*, so dass gilt: $n = 3\cdot r + 5\cdot s$.

Lösungshinweise:
Induktionsanfang: Für $n = 8$ ist die Aussage richtig, denn es gilt $1\cdot 3 + 1\cdot 5 = 8$.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Die Aussage sei für eine Zahl $n = k$ richtig ($k \geq 8$).
Behauptung: Die Zerlegung einer Zahl in der geforderten Art ist auch für $n = k + 1$ möglich.

Beweis: Man unterscheide zwei Fälle.
(1) Die Zahl k sei ein ganzzahliges Vielfaches von 3, d.h. sie lässt sich in der Form $k = r \cdot 3 + 0 \cdot 5$ (wegen $k > 7$ gilt stets $r \geq 3$) darstellen. Dann gilt stets auch die Zerlegung für $k + 1$ in der Form mit nicht negativen Koeffizienten: $k + 1 = (r - 3) \cdot 3 + 2 \cdot 5$

(2) Es sei k kein ganzzahliges Vielfaches von 3. Laut Voraussetzung existiert eine Zerlegung der geforderten Art, d.h. $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$ (mit $s > 0$, denn sonst wäre k durch 3 teilbar*)*. Dann ist aber für $k + 1$ die folgende Zerlegung richtig: $k + 1 = (r + 2) \cdot 3 + (s - 1) \cdot 5$
Diese Zerlegung entspricht ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$ erfüllt. ❑

Die Lösung ist auch ohne die Methode der vollständigen Induktion möglich. Es gilt: $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$, $9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$; $10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$.

Jede natürliche Zahl $n > 10$ lässt sich als $n = 3 \cdot k + a$ ($k \geq 0$ und $a = 8$, 9 oder 10) darstellen. Damit findet man die geforderte Zerlegung.

Hinweis: Die Formulierung im Heft 1/2020 mit „***positiven*** Zahlen“ ist leider falsch, weil für die Zahlen 9 und 10 eine Darstellung mit positiven Koeffizienten nicht gelingt. Da es auch für 12 und 15 die geforderte Darstellung nur mit Koeffizienten 0 gibt, ist die Aussage erst für alle n > 15 richtig, denn:

Es gilt: $16 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$, $17 = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5$; $18 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5$. Jede natürliche Zahl $n > 15$ lässt sich nun als $n = 3 \cdot k + a$ ($k \geq 0$ und $a = 16$, 17 oder 18) darstellen.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$.

Lösungshinweise:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9$.

Induktionsschritt:
Voraussetzung: Für $n = k$ existiert eine ganze Zahl m, so dass die Gleichung $7^k + 3 \cdot k - 1 = 9 \cdot m$ gilt.

Behauptung: Für $n = k + 1$ gibt es eine ganze Zahl m^*, so dass die Gleichung $7^{k+1} + 3 \cdot (k+1) - 1 = 9 \cdot m^*$ gilt.

Beweis: Durch Ausmultiplizieren bestätigt man die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$7^{k+1} + 3 \cdot (k+1) - 1 = 7 \cdot \left(7^k + 3 \cdot k - 1\right) - 18 \cdot k + 9.$$

Da laut Voraussetzung der Ausdruck in der Klammer durch 9 teilbar ist, ist der gesamte Ausdruck offensichtlich durch 9 teilbar.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt. ❑

Die Lösung ist auch ohne die Methode der vollständigen Induktion möglich. Man ermittle beispielsweise für die Summanden und daraus für die Summe in Abhängigkeit von *n* die Reste bei Division durch 9 und trage die Ergebnisse tabellarisch zusammen. Da sich die Reste periodisch wiederholen, ist die Teilbarkeit durch 9 für alle *n* erkennbar:

n	7^n	$3n$	$7^n + 3n - 1$		n	7^n	$3n$	$7^n + 3n - 1$
1	7	3	9		4	7	3	9
2	4	6	9		5	4	6	9
3	1	0	0		6	1	0	0

(c) In der Ebene seien *n* Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes *n* bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

Lösungshinweise:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Es sei möglich, die Schnittflächen von $n \geq 1$ Kreisen so mit zwei Farben zu färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

Behauptung: Man kann die Schnittflächen von $n + 1$ Kreisen so mit zwei Farben färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

Beweis: In der Ebene seien $n + 1$ Kreise gegeben. Entfernt man einen dieser Kreise, so können die Schnittflächen der verbleibenden n Kreise gemäß der Voraussetzung wie gefordert gefärbt werden. Danach fügt man den zuvor entfernten Kreis wieder hinzu und vertauscht im Innern dieses Kreises die Farbe jeder Schnittfläche mit der anderen der beiden verwendeten Farben. Leicht sieht man, dass dadurch eine Färbung entsteht, die den Bedingungen gerecht wird:

In dem Teil der Ebene, der außerhalb des hinzugenommenen Kreises liegt, verändern sich die Farben von sich berührenden Schnittflächen nicht, so dass sie die Bedingungen laut Voraussetzung erfüllen.

Im Innern des hinzugenommenen Kreises werden die Farben getauscht, damit haben sich berührenden Schnittflächen wie vorher unterschiedliche Färbungen.

Entstehen durch die Kreislinie neue Berührungslinien zweier Schnittflächen durch ein vorher gleichfarbiges Gebiet, so liegt eine dieser Schnittflächen außerhalb und die andere innerhalb des Kreises. Aufgrund der Umkehrung der Färbung im Inneren wird auch in diesem Fall die Bedingung erfüllt.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt. ❑

Aufgabe 5-5B

(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt *F* und dessen Seitenlängen *a*, *b*, *c* und d die Ungleichung

$$F \leq \tfrac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right).$$

Lösungshinweise: Das Viereck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, dabei habe o.B.d.A. ein Dreieck diese Diagonale und die Viereckseiten *a* und *b* und das andere Dreieck diese Diagonale und die Viereckseiten *c* und *d* als Seiten. Für den Flächeninhalt *F* gilt damit: $F \leq \dfrac{ab}{2} + \dfrac{cd}{2}$.

Für alle reellen Zahlen *x* und *y* ist wegen $(x-y)^2 \geq 0$ die Abschätzung $2xy \leq x^2 + y^2$ richtig. Damit lässt sich der Flächeninhalt *F* weiter abschätzen:

$$F \leq \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{c^2 + d^2}{4}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ❑

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt *F* und dessen Seitenlängen *a*, *b*, *c* und *d* die Gleichung $F = \tfrac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$ gilt.

Lösungshinweise: Es genügt ein Beispiel anzugeben. Ist das Viereck ein Quadrat mit der Seitenlänge *a* (= *b* = *c* = *d*), so gilt trivialerweise

$$F = a^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right).$$

Folglich existieren tatsächlich Vierecke mit der geforderten Eigenschaft. ❑

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl *p* gibt, so dass für jedes Dreieck für dessen Flächeninhalt *F* und dessen Seitenlängen *a*, *b* und *c* die Ungleichung $F \le p \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ gilt. Man ermittle diesen Wert von *p*.

Lösungshinweise: Unter Berücksichtigung der angegebenen Ungleichung gilt für *U* = *a* + *b* + *c*:

$$F \le \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2 + \left(2 \cdot ab + 2 \cdot bc + 2 \cdot ca\right)\right)$$

Mit der Abschätzung wie unter Teilaufgabe (a) lässt sich dies weiter fortsetzen zu:

$$F \le \frac{\sqrt{3}}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2 + \left(\left(a^2 + b^2\right) + \left(b^2 + c^2\right) + \left(c^2 + a^2\right)\right)\right),$$

woraus die Ungleichung $F \le \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ folgt. Für *p* gilt also $p \le \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Betrachtet man das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge *a*, so beträgt sein Flächeninhalt bekanntlich $F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(3a^2\right)$. Folglich kann der Wert *p* nicht kleiner gewählt werden und es gilt $p = \frac{\sqrt{3}}{12}$. ❑

Hinweis: Die Ungleichung $F \le \frac{\sqrt{3}}{36}u^2$ wurde als zu verwendende Ungleichung angegeben (dabei bezeichnen *F* den Flächeninhalt und *u* den Umfang des Dreiecks). Offenbar wird die Schwierigkeit der eigentlichen Aufgabenstellung dadurch reduziert. Leicht erkennt man, dass in dieser Ungleichung für ein gleichseitiges Dreieck das Gleichheitszeichen gilt. Nutzt man die Lösungsidee aus Aufgabe A5-5B(a), so findet man für die Seiten *a, b, c*

$$F \le \frac{1}{2}ab;\ F \le \frac{1}{2}ac;\ F \le \frac{1}{2}bc \quad \Rightarrow \quad F^3 \le \frac{1}{8}(abc)^2$$

Um auf der rechten Seite der Ungleichung auf den Faktor $u^2 = (a+b+c)^2$ zu gelangen, bietet sich die Anwendung der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel an (da die Seitenlängen positive Zahlen sind). So gilt

also $F \le \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 \le \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \cdot u^2$.

Prinzipiell wurde damit die erwartete Struktur der Ungleichung erreicht, aber die Abschätzung ist noch zu grob. Dies ist nachvollziehbar, denn die dreifache Abschätzung des Flächeninhaltes durch das Produkt zweier benachbarter Seiten kann in keinem Fall das Gleichheitszeichen zulassen. Dies wäre nämlich nur gültig, wenn je zwei Dreieckseiten einen rechten Winkel einschließen.

Ausgehend von der HERONschen Flächenformel mit $s = \frac{1}{2}u$ findet man wiederum mit Anwendung der Mittelungleichung (man beachte, dass alle Faktoren stets nichtnegativ sind – warum?):

$$\sqrt{F} = \sqrt[4]{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \le \frac{s+s-a+s-b+s-c}{4} = \frac{1}{4}u,$$

also $F \le \frac{1}{16}u^2$ und somit wieder eine zu grobe Abschätzung. Aber auch in diesem Fall kann der Lösungsansatz nicht zur richtigen Ungleichung führen, denn das Gleichheitszeichen kann in keinem Fall gelten, da die Faktoren nicht gleich groß werden können. Folgender Trick führt aber zum Beweis: Ausgehend von der HERONschen Flächenformel gilt:

$$\sqrt[3]{\frac{F^2}{s}} = \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \le \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{u}{6},$$

woraus ohne Probleme die zu beweisende Ungleichung gefunden werden kann.

Zug um Zug – Spielstrategien

Wir beschäftigen uns mit Spielen für zwei Spieler, wobei jeder gewinnen will. Ziel ist es herauszufinden, ob einer der Spieler seinen Gewinn erzwingen kann (unabhängig wie sein Gegenspieler spielt), also eine optimale Gewinnstrategie besitzt und wie diese gegebenenfalls aussieht. Die Spiele sollen folgende Regeln erfüllen:

1. Es gibt nur eine endliche Anzahl möglicher Stellungen.
2. Das Spiel endet in jedem Fall nach einer endlichen Anzahl von Zügen.
3. Es gibt am Ende immer einen Sieger, ein Spiel kann also nicht unentschieden enden.
4. Die möglichen Züge in einer bestimmten Situation sind für beide Spieler dieselben.

Beispiel: Zwei Spieler haben eine Schokoladentafel mit 6 x 10 quadratischen Stücken, wobei das Stück in der linken unteren Ecke verschimmelt ist. Abwechselnd brechen sie nun Teile entlang der geraden Vertiefungen ab und essen die abgebrochenen Teile. Verlierer ist der Spieler, der das verdorbene Stück essen muss.

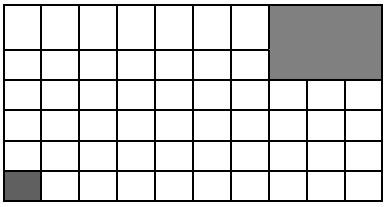
Es bietet sich bei dieser Art von Spielen stets an, vom Ende des Spiels aus rückwärts zu arbeiten. Wir wissen: Der Verlierer muss das letzte Stück nehmen. Er darf also keine Möglichkeit eines anderen Zugs haben, d.h. nur ein Quadrat blieb übrig, als er am Zug war. Aufgrund der Spielregeln muss zuvor ein 1 x n großes Stück verblieben sein. Eine solche Situation bezeichnen wir als **Gewinnposition** (G), weil der Spieler, der am Zug ist, eine **Verlustposition** (V) für seinen Mitspieler herbeiführen kann. Als Verlustposition bezeichnen wir eine Situation, in der jeder mögliche Zug den Gegner in eine Gewinnposition bringt.

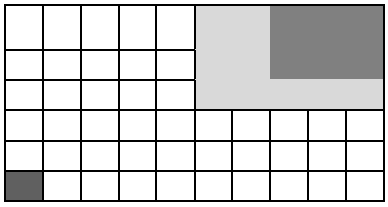
Es ergibt sich folgendes Schema von Gewinn- und Verlustpositionen für unsere Schokoladentafel:

G	G	G	G	G	V	G	G	G	G
G	G	G	G	V	G	G	G	G	G
G	G	G	V	G	G	G	G	G	G
G	G	V	G	G	G	G	G	G	G
G	V	G	G	G	G	G	G	G	G
V	G	G	G	G	G	G	G	G	G

Als Strategie erhalten wir: immer auf Quadrat abbrechen. Damit kann in unserem Fall der Spieler, der beginnt, auch stets gewinnen.

Mampf ist ein Beispiel für ein Spiel, bei dem man beweisen kann, dass es einen Spieler gibt, der eine Gewinnstrategie besitzt, aber man weiß nicht genau, wie diese aussieht. Als Ausgangspunkt dient wieder unsere Schokoladentafel mit dem verdorbenen Stück. Nun dürfen rechteckige Stücke abgebrochen werden, wobei einer der 4 Eckpunkt stets mit der rechten oberen Ecke unserer ursprünglichen Tafel übereinstimmen muss.





Beweis mittels „Strategieklau“ (indirekter Beweis): Wir nehmen an, dass der beginnende Spieler in einer Verlustposition ist. Er wählt den im linken Bild rechts oben grau markierten Zug aus. Nun müsste sich sein Gegenspieler in einer Gewinnposition befinden. Er bricht das im rechten Bild hellgrau markierte Stück heraus. Wäre die entstehende Situation eine Verlustposition für den ersten Spieler, so hätte er diese Situation bereits im vorhergehenden Zug herbeiführen können, d.h. der beginnende Spieler ist bereits am Anfang in einer Gewinnposition, allerdings ohne genauer beschreiben zu können wie ein solche Gewinnstrategie aussehen könnte.

Nim-Spiel für zwei Spieler: Zu Beginn liegen auf einem Haufen 15 Hölzchen. Abwechselnd darf jeder Spieler 1 bis 3 Hölzchen wegnehmen. Verloren hat, wer das letzte Hölzchen nehmen muss.

Wir untersuchen die Spielsituationen hinsichtlich Gewinn- und Verlustpositionen. Liegt nur noch ein Hölzchen, so ist dies für den Spieler eine Verlustposition, denn er muss diese Hölzchen nehmen. Liegen noch 2 bis 4 Hölzchen, so ist dies für den Spieler eine Gewinnposition: Er kann so viele Hölzchen entnehmen, dass nur noch 1 Hölzchen liegen bleibt und damit seinem Gegenspieler eine Verlustposition übergeben. Liegen 5 Hölzchen, so ist dies eine Verlustposition, denn er kann nur auf 2 bis 4 verbleibende Hölzchen ziehen, was den Gegenspieler in eine Gewinnposition bringt.

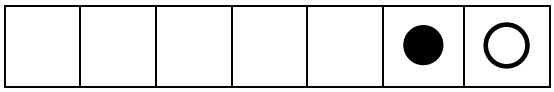
Verallgemeinernd ist jede Menge der Form $4k + 1$ eine Verlustposition, denn entweder muss man das letzte Hölzchen nehmen ($k = 0$) oder man kann nur eine Situation der Form $4k – 2$, $4k – 1$ oder $4k$ herbeiführen. Dann kann aber der Nachziehende durch Wegnahme von 1, 2 oder 3 Hölzchen wieder die Situation $4k‘ + 1$ erreichen.

Wegen $15 = 4 \cdot 3 + 3$ kann der Spieler, der das Spiel beginnt, mit Wegnahme von 2 Hölzchen für seinen Gegenspieler eine Verlustposition erreichen – der Anziehende kann also stets gewinnen.

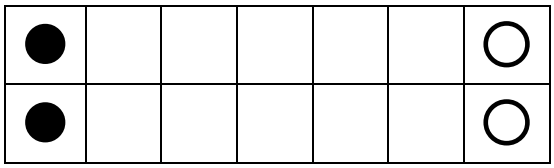
Wir betrachten ein Spielfeld, bestehend aus einem Streifen von *n* Spielfeldern. An den Enden des Streifens befinden sich zu Spielbeginn für jeden Spieler je einen Spielstein. Ein Zug besteht für einen Spieler darin, seinen Spielstein um beliebig viele freien Felder zu bewegen (ohne den gegnerischen Stein überspringen zu dürfen). Wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann, hat verloren.



Es ist offensichtlich, dass der beginnende Spieler (hier: schwarz) stets gewinnen kann – er bewegt seinen Spielstein bis unmittelbar vor den Spielstein des Gegenspielers.



Wir betrachten wir nun ein Spielfeld, bestehend aus zwei Streifen von *n* Spielfeldern. In einem Zug kann jeder Spieler nur einen seiner beiden Spielsteine bewegen. Verloren hat, wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann.



Nun kehrt sich die Gewinnmöglichkeit um: Egal wie der beginnende Spieler spielt, es gewinnt immer der Gegenspieler. Dazu muss der Gegenspieler lediglich den Zug, den der beginnende Spieler auf einem Streifen ausführte, auf dem anderen Streifen kopieren.

Bei einem Spielfeld, bestehend aus drei Streifen, kann der beginnende Spieler mit dem ersten Zug einen Streifen „ausschalten“. Damit beginnt das Spiel für den Gegenspieler wie ein Spiel auf einem zweistreifigen Spielfeld und er steht als Verlierer bereits fest. In ähnlicher Weise lässt sich nun ein Spiel auf einem Spielfeld aus *m* Streifen mit je *n* Spielfeldern diskutieren.

Anna und Bernd spielen folgendes Spiel: Beginnend mit 1998 subtrahieren sie abwechselnd von der vorliegenden Zahl eine Quadratzahl ihrer Wahl. Wer als Ergebnis 0 erhält, hat gewonnen. Anna beginnt. Man beweise, dass Anna stets gewinnen kann.

Zunächst betrachte man für kleine Zahlen die Gewinn- (G) und Verlustpositionen (V). Offenbar ist 1 eine Gewinnposition, denn man kann stets mit 1^2 auf 0 kommen. Dagegen ist 2 eine Verlustposition, denn es besteht nur die Möglichkeit,

mit 1^2 auf 1 zu ziehen und bringt den Gegenspieler in eine Gewinnposition. Fortfahrend findet man:

3 = G → -1^2 führt zu 2 = V
4 = G → -2^2 führt direkt zum Sieg
5 = V → -1^2 führt zu 4 = G oder -2^2 führt zu 1 = G
6 = G → -2^2 führt zu 2 = V
7 = V → -1^2 führt zu 6 = G oder -2^2 führt zu 3 = G
8 = G → -1^2 führt zu 7 = V
9 = G → -3^2 führt direkt zum Sieg
10 = V → -1^2 führt zu 9 = G; -2^2 führt zu 6 = G oder -3^2 führt zu 1 = G
11 = G → -1^2 führt zu 10 = V
12 = V → -1^2 führt zu 11 = G; -2^2 führt zu 8 = G oder -3^2 führt zu 3 = G

So könnte man die Analyse fortsetzen. Während es für eine Gewinnposition genügt, einen Zug zu finden, der in eine Verlustposition für den Gegenspieler führt, müssen bei einer Verlustposition alle möglichen Züge untersucht werden. Es wird also immer umfangreicher.

Beginnen wir nun mit 1998 und nehmen an, Anna kann – egal welche Quadratzahlen Bernd subtrahiert – immer gewinnen. Wir versuchen zunächst, die erste Differenz möglichst klein werden zu lassen und subtrahieren 44^2 und kommen auf 1998 – 1936 = 62. Nun ist Bernd am Zug:

-7^2 → 13 = G, weil $13 - 1^2 = 12$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
-6^2 → 26 = G, weil $26 - 4^2 = 10$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
-5^2 → 37 = G, weil $37 - 5^2 = 12$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
-4^2 → 46 = G, weil $46 - 6^2 = 10$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
-3^2 → 53 = ?
-2^2 → 58 = ?
-1^2 → 61 = G, weil $61 - 7^2 = 12$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.

Wir untersuchen 53 genauer. Offenbar wird Anna nicht 7^2 subtrahieren, da dies auf 4 und somit auf eine Gewinnposition für Bernd führt. Subtrahiert Anna 6^2, wird 17 erreicht. Diese Zahl ist für Bernd eine Verlustposition, denn

-1^2 → 16 = G: -4^2 führt direkt zum Sieg,
-2^2 → 13 = G: -1^2 führt auf 12 = V,
-3^2 → 8 = G,
-4^2 → 1 = G.

Wir untersuchen auch 58 genauer. Offenbar wird Anna nicht 7^2 subtrahieren, da dies auf 9 und somit auf eine Gewinnposition für Bernd führt. Subtrahiert Anna 6^2, wird 22 erreicht. Diese Zahl ist für Bernd eine Verlustposition, denn

$-1^2 \rightarrow 21$ = G: -3^2 führt auf 12 = V,
$-2^2 \rightarrow 18$ = G: -1^2 führt auf 17 = V,
$-3^2 \rightarrow 13$ = G: -1^2 führt auf 17 = V,
$-4^2 \rightarrow 6$ = G.

Somit kann Anna tatsächlich immer gewinnen.

Wettbewerbsaufgaben mit Spielstrategien treten häufig auf, auch in der MO:

MO561143. General Tilly und Herzog von Wallenstein spielen „Teile und herrsche“. Dazu gruppieren sie N Zinnsoldaten in M Kompanien und kommandieren abwechselnd. Jeder muss, wenn er an der Reihe ist, ein Kommando geben und sofort ausführen.

Es sind nur zwei Kommandos möglich: Auf das Kommando „Teile!“ wird eine Kompanie ausgewählt und in zwei Kompanien aufgeteilt, deren Größe der jeweils Kommandierende frei wählen kann; es muss lediglich jede Kompanie mindestens einen Zinnsoldaten umfassen. Wird aber das Kommando „“Herrsche!“ gegeben, so wird aus jeder Kompanie ein Zinnsoldat entfernt und eingeschmolzen. Verloren hat, wessen Kommando zum Verlust einer Kompanie führt. Wallenstein beginnt mit dem Kommandieren.

a) Kann Wallenstein erzwingen, dass Tilly verliert, wenn am Anfang sieben Kompanien mit je sieben Zinnsoldaten zur Verfügung stehen?
b) Wer verliert, wenn am Anfang M Kompanien mit insgesamt N Zinnsoldaten zur Verfügung stehen?

Lösungshinweise
Zu a) Wallenstein kann den Sieg nicht erzwingen. Wenn er im ersten Zug „teilt“, kann Tilly in seinem ersten Zug eine beliebige Kompanie so teilen, dass eine Kompanie mit genau einem Zinnsoldaten entsteht. Da danach jedes „herrsche“ zum Auflösen einer Kompanie führt, werden die Spieler nur noch „teilen“. Die Anzahl der 49 Zinnsoldaten bleibt also erhalten. Nach 40 = 49 – 7 – 2 Zügen gibt es nur Kompanien mit genau einem Zinnsoldaten. Der nächste Zug führt also zum Verlust einer Kompanie – diesen Zug muss Wallenstein ausführen.

Reduziert jedoch Wallenstein in seinem ersten Zug alle sieben Kompanien um einen Zinnsoldaten (es verbleiben also 42 Zinnsoldaten), kann Tilly eine beliebige Kompanie so teilen, dass eine Kompanie mit genau einem Zinnsoldaten entsteht. Nun gilt das Gleiche wie oben: Nach 34 = 42 – 7 – 1 Zügen gibt es nur Kompanien mit genau einem Zinnsoldaten. Der nächste Zug führt also zum Verlust einer Kompanie – diesen Zug muss Wallenstein ausführen.

Zu b) Nach einer umfangreichen Fallunterscheidung findet man heraus: Wallenstein verliert genau dann, wenn eine ungerade Anzahl von Zinnsoldaten auf eine ungerade Anzahl von Kompanien verteilt sind oder wenn bei einer geraden Anzahl von Zinnsoldaten und einer geraden Anzahl von Kompanien die kleinste Kompaniestärke ungerade ist. In jedem anderen Fall kann Wallenstein den Sieg erzwingen.

Würfelpoker spielt man zu zweit. Der erste Spieler dreht eine beliebige Seite des Würfels nach oben und die Zahl wird aufgeschrieben. Der nächste Spieler darf den Würfel nur um eine Vierteldrehung bewegen (er kann also alle Seiten des Würfels nach oben drehen außer die, die gerade nach unten zeigte und die, die gerade nach oben zeigte). Die Augenzahl der neuen oben liegenden Seite wird zur Gesamtsumme addiert. Verlierer ist derjenige, der zuerst die Zahl 17 in der Summe überschreitet. Gibt es für einen der Spieler eine Gewinnstrategie? Wie sieht diese dann aus?

	1/6	2/5	4/3
17			
16			
15			
14			
13			
12			
11			
10			
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1	V	1	1
0	V	V	V
-1	G	G	G
-2	G	G	G
-3	G	G	G
-4	G	G	G
-5	G	G	G

Wir wollen eine Tabelle erstellen, die alle möglichen Züge erfasst. Dazu betrachten wir die Differenz der aktuellen Summe zu 17 (linke Spalte der nebenstehenden Tabelle). Dabei ist wichtig, die aktuelle Situation nach der oben bzw. unten liegenden Seite zu unterscheiden, da diese die möglichen Züge für den Spieler bestimmen. Ob jedoch beispielsweise eine 1 oder eine 6 oben liegt, ist dabei völlig gleich.

Es ist einsichtig, dass alle negativen Felder Summen repräsentieren, die bereits größer als 17 sind und deshalb bereits Gewinnpositionen anzeigen, da der andere Spieler schon verloren hat. Die Differenz 0 ist hingegen eine Verlustposition, da man nun mit jedem möglichen Zug die Summe 17 überschreitet.

Angenommen, die Differenz zu 17 beträgt 1 und oben liegt eine 1 oder 6. Dies ist offensichtlich eine Verlustposition, denn mit dem nächsten Zug wird die Summe 17 überschritten. Liegt aber ein 2, 3, 4 oder 5 oben, kann man im nächsten Zug stets die 1 nach oben legen und man hat damit eine Gewinnposition.

Um alle möglichen Züge zu erfassen, werden die folgenden Schablonen erstellt.

Position			Züge			Position			Züge			Position			Züge
1/6							2/5							3/4	
			←						←						←
									1						1
			2												2
			3						3						
			4						4						
			5												5
									6						6

Eine Spielsituation wird eindeutig durch die Differenz der Summe zu 17 und durch die beim Würfel oben liegende Zahl beschrieben. Um für eine solche Spielsituation einen Gewinnzug zu ermitteln, lege man eine passende Schablone auf, so dass das auszufüllende Kästchen in der Zeile mit dem Pfeil liegt. Um ein Kästchen auszufüllen müssen die durchsichtigen Felder der Schablone in der Tabelle bereits ausgefüllt sein. Ist eins der Felder mit einem V für Verlustposition gekennzeichnet, so ist die auszufüllende Situation eine Gewinnposition und man trägt alle Zahlen ein, die rechts neben einem V stehen. Diese sind dann die möglichen Züge in der Gewinnstrategie.

Ist jedoch in keinem der Felder ein V zu sehen, so ist das aktuell auszufüllende Feld eine Verlustposition und man trägt ein V ein.

- Beträgt die Differenz 2 und liegt eine 5 oben, so ist die mittlere Schablone anzulegen und eine Verlustposition ist für den Nachziehenden zu erreichen, wenn man die 1 nach oben legt (links).

- Beträgt die Differenz 4 und liegt eine 1 oben, so ist die rechte Schablone anzulegen und eine Verlustposition ist für den Nachziehenden zu erreichen, wenn man die 4 nach oben legt (Mitte).

- Auf diese Weise können alle Felder ausgefüllt werden und man erhält das Schema wie rechts.

	1/6	2/5	3/4	
17				
16				
15				
14				
13				
12				
11				
10				
9				
8				
7				
6				
5				
4				
3				
2		?		←
1	V	1	1	1
0	V	V	V	
-1	G	G	G	3
-2	G	G	G	4
-3	G	G	G	
-4	G	G	G	6
-5	G	G	G	

	1/6	2/5	3/4	
17				
16				
15				
14				
13				
12				
11				
10				
9				
8				
7				
6				
5				
4	?			←
3				
2		1		2
1	V	1	1	3
0	V	V	V	4
-1	G	G	G	5
-2	G	G	G	
-3	G	G	G	
-4	G	G	G	
-5	G	G	G	

	1/6	2/5	3/4
17	4	4	V
16	234	34	2
15	3	36	6
14	5	V	5
13	4	4	V
12	34	34	V
11	23	3	2
10	5	1	15
9	V	V	V
8	4	4	V
7	234	346	26
6	3	36	6
5	5	V	5
4	4	4	V
3	3	3	V
2	2	1	12
1	V	1	1
0	V	V	V
-1	G	G	G
-2	G	G	G
-3	G	G	G
-4	G	G	G
-5	G	G	G

Aufgaben in allgemeinen Zahlensystemen

Unter einer Zahl *z* mit den Ziffern $a_n, a_{n-1}, ... a_1, a_0$ versteht man im Zahlensystem mit der Basis *B*

$$z = \left[\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}\right]_B = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + ... + a_1 \cdot B + a_0 .$$

Für *B* = 10 erhält man die übliche Dezimaldarstellung einer Zahl. Als Ziffern stehen alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, …, B – 1 zur Verfügung. Ist *B* > 10, so werden die weiteren Ziffern ab 10, 11, … im Allgemeinen durch alphabetisch geordnete Großbuchstaben A, B, … beschrieben. So gilt beispielsweise

$$[\,AB\,]_{13} = 11 \cdot 13 + 12 = 155 = [\,155\,]_{10} .$$

Es gibt zahlreiche Wettbewerbsaufgaben, in denen Zahlen in verschiedenen Stellenwertsystemen betrachtet werden. Eine der ersten Aufgaben dieser Art war

Aufgabe MO261031.
Von einer natürlichen Zahl *x* sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Im Zweiersystem geschrieben hat *x* genau sieben Stellen.
(2) Schreibt man *x* im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
(3) Im Fünfersystem geschrieben hat *x* genau vier Stellen.

Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl *x* gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Lösungshinweise: Anhand der Angaben zur Stellenzahl folgt aus Bedingung (1) $2^6 = 64 \le x < 2^7 = 128$ und aus Bedingung (3) $5^3 = 125 \le x < 5^4 = 625$. Prüft man nun die verbleibenden Zahlen 125, 126 und 127, so erfüllt nur

$$x = 126 = [126]_{10} = [1111110]_2 = [11200]_3 = [1001]_5$$

alle Bedingungen der Aufgabe. ❑

Aufgabe MO301031.
Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, dass es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge …01 endet; beispielsweise hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.

Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge …10 endet?

Lösungshinweise: Solche Zahlen gibt es nicht. Für das Zweiersystem bedeutet die Ziffernfolge …10, dass es eine Zahl *M* gibt mit $[...10\,]_2 = M \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0$.

Entsprechend gibt es eine Zahl N mit $[...10]_4 = N \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 0$. Setzt man beide Ausdrücke gleich, ist eine Seite durch 4 teilbar, die andere jedoch nicht. ❑

Gibt es aber andere Stellenwertsysteme, bei denen die Frage positiv beantwortet werden kann? Gibt es also Basen m und n, so dass

$$[...10]_m = M \cdot m^2 + 1 \cdot m + 0 = N \cdot n^2 + 1 \cdot n + 0 = [...10]_n$$

erfüllbar wird?

Durch Probieren findet man beispielsweise $30 = [110]_5 = [1010]_3$.

Für welche weiteren Basen gilt die Eigenschaft mit der Ziffernfolge […01]? Nutzt man die Summendarstellung, so bedeutet diese Eigenschaft

$$[...01]_m = M \cdot m^2 + 0 \cdot m + 1 = N \cdot n^2 + 0 \cdot n + 1 = [...01]_n .$$

Dies ist gleichbedeutend mit $M \cdot m^2 = N \cdot n^2$, so dass für alle $n \mid m$ die Eigenschaft gilt, also zum Beispiel $37 = [101]_6 = [1101]_3$.

In späteren Wettbewerbsaufgaben diente die Verwendung von Zahlensystemen eher der „Verkomplizierung“ der Aufgabenstellung. Letztlich ging es immer um die Untersuchung von Polynomgleichungen.

Aufgabe.
Es ist nachzuweisen, dass es kein Zahlensystem geben kann, in dem die Rechnung $12 \cdot 17 = 3132$ gilt.

Lösungshinweise: Es sei $B > 7$ (weil die Ziffern bis mindestens 7 verwendet werden) eine geeignete Basis, so dass gilt

$$(B+2) \cdot (B+7) = B^2 + 9 \cdot B + 14 = 3 \cdot B^3 + B^2 + 3 \cdot B + 2 .$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$B^3 - 9 \cdot B - 4 = 0 .$$

Wenn es aber ganzzahlige Lösungen für B gäbe, müssten diese Teiler vom Absolutglied der kubischen Gleichung sein. Das ist aber für $B > 7$ nicht möglich. Also kann es keine Basis B für diese Gleichung geben. ❑

Aufgabe MO381042.
In einem Zahlensystem mit der Basis a ($a \in N, a > 1$) sei $z = 100000004$ gegeben. Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl a gibt, für die z eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Die Zahl z lässt sich im Zahlensystem der Basis a als $z = a^8 + 4$ darstellen. Es kommt also darauf an, diesen Ausdruck als ein Produkt von Faktoren schreiben zu können. Es gilt:

$$a^8 + 4 = a^8 + 4a^4 + 4 - 4a^4$$
$$= \left(a^4 + 2\right)^2 - \left(2a^2\right)^2 = \left(a^4 + 2 - 2a^2\right) \cdot \left(a^4 + 2 + 2a^2\right)$$

Zeigt man nun noch, dass jeder der beiden Faktoren größer als 1 ist (wie?), ist die Behauptung bewiesen. ❑

Aufgabe MO360945.
Untersuchen Sie, ob es ein Stellenwertsystem der Basis B gibt, in dem $17^3 = 71^2$ gilt? Geben Sie im Falle der Existenz alle derartigen Basen B an!

Lösungshinweise: Die Fragestellung ist gleichbedeutend, ob es ganzzahlige positive Lösungen der Gleichung

$$(B+7)^3 = (7 \cdot B + 1)^2$$

gibt. Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht also in der Lösung der kubischen Gleichung

$$B^3 - 28 \cdot B^2 + 133 \cdot B + 342 = 0,$$

die nur für $B = 9$ erfüllt wird. Es gilt $\left([17]_9\right)^3 = 16^3 = 64^2 = \left([71]_9\right)^2$. ❑

Aufgabe. Gibt es (in der Dezimaldarstellung) echt-zweistellige Zahlen, die gleich dem Vierfachen ihrer Spiegelzahl ist?

Lösungshinweise: Sei $n = 10a + b$ eine Zahl der geforderten Art mit den Ziffern a und b, also mit

$10a + b = 4 \cdot (10b + a)$, d.h. $13b = 2a$.

Solche Zahlen kann es aber nicht geben, da 13 ein Teiler der Ziffer a sein müsste. ❑

Wie lautet die Antwort, wenn man beliebige Zahlensysteme zulässt? Setzt man anstelle der 10 eine Basis B ein, findet man die Gleichung

$$(4B - 1) \cdot b = (B - 4) \cdot a$$

Durch Probieren findet man eine Lösung: $B = 9$: $[71]_9 = 64 = 4 \cdot 16 = 4 \cdot [17]_9$.

Aufgaben Serie 7 (2019/20)

(Einsendungen bis 23. Juni 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de[3])

Aufgabe 7-1.
Gibt es außer der Zahl 9 noch weitere Quadratzahlen unter den Zahlen, die nur mit der Ziffer 9 geschrieben werden, also unter den Zahlen 9, 99, 999, 9999, ...?

(5 Punkte)

Aufgabe 7-2.
In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt.

Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Viereckfläche?

(5 Punkte)

Aufgabe 7-3.
Auf einer Party mit 21 Personen kennt jede Person höchstens vier andere. Man zeige, dass es auf dieser Party mindestens fünf Menschen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen.

(Hinweis: Wenn Person A die Person B kennt, dann kennt auch B die Person A.)

(6 Punkte)

Aufgabe 7-4.
Fünf Kreisscheiben mit Radius 1 seien so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden und ihre Kreislinien alle durch den Mittelpunkt des Fünfecks gehen.

Man berechne den Radius der größten Kreisscheibe, die von den fünf Kreisscheiben bedeckt wird!

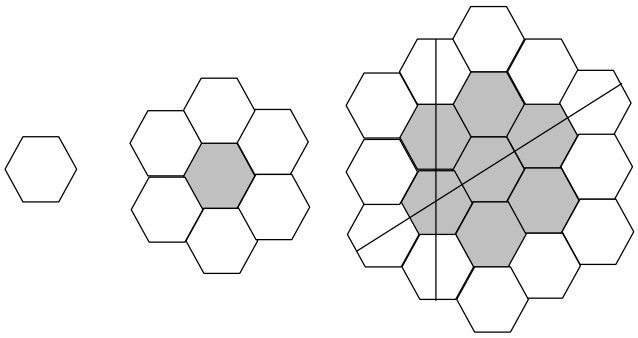
(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkte, zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 7-5A.
In Analogie zu Magischen Quadraten kann man Magische Sechsecke konstruieren: Um ein einzelnes regelmäßiges Sechseck (dies sei ein Sechseck 1. Ordnung) kann man einen Ring von sechs weiteren gleichgroßen regelmäßigen Sechsecken legen, wobei die Figuren (wabenförmig) mit den Kanten

[3] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

aneinanderstoßen. Dieses Gebilde aus 7 Sechsecken wird Sechseck 2. Ordnung genannt. Ordnet man um dieses Gebilde in analoger Weise zwölf weitere Sechsecke, so erhält man ein Sechseck 3. Ordnung usw. (s. Skizze).



Besteht ein Sechseck *n*-ter Ordnung aus *m* Teilsechsecken und beschreibt man jedes dieser Teilsechsecke mit genau einer der natürlichen Zahlen 1 bis *m*, so wird das Sechseck magisch genannt, wenn die Summen auf allen „geraden Reihen" (zwei dieser Reihen sind im Sechseck 3. Ordnung durch die Strecken markiert) jeweils den gleichen Wert annehmen. Im Sechseck 2. Ordnung gibt es 9 solcher „geraden Reihen", im Sechseck 3. Ordnung 15.

(a) Man ermittle für jede Zahl *n* die Anzahl der Teilsechsecke, die für ein Sechseck *n*-ter Ordnung benötigt werden. (2 Punkte)

(b) Man zeige, dass es kein Magisches Sechseck 2. Ordnung geben kann, dass man also die Zahlen 1 bis 7 nicht so auf die Teilsechsecke verteilen kann, dass die Summen auf den 6 zweiteiligen Seitenreihen und den 3 dreiteiligen Mittelreihen jeweils gleich sind. (2 Punkte)

(c) Man untersuche, für welche $n > 2$ es keine Magischen Sechsecke *n*-ter Ordnung geben kann. (4 Punkte)

Aufgabe 7-5B.
Es sei *QP(n)* das Querprodukt von *n*, also das Produkt aller Ziffern der Dezimalschreibweise der natürlichen Zahl *n* (in Analogie zur Quersumme). Gegeben sei die Gleichung

(1) $n^2 - 16n + 42 = QP(n)$

(a) Man ermittle die kleinste echt-zweistellige Zahl *n*, die die Gleichung (1) erfüllt. (2 Punkte)

(b) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $QP(n) \le n$. (2 Punkte)

(c) Man finde alle natürliche Zahlen *n*, die die Gleichung (1) erfüllen. (4 Punkte)

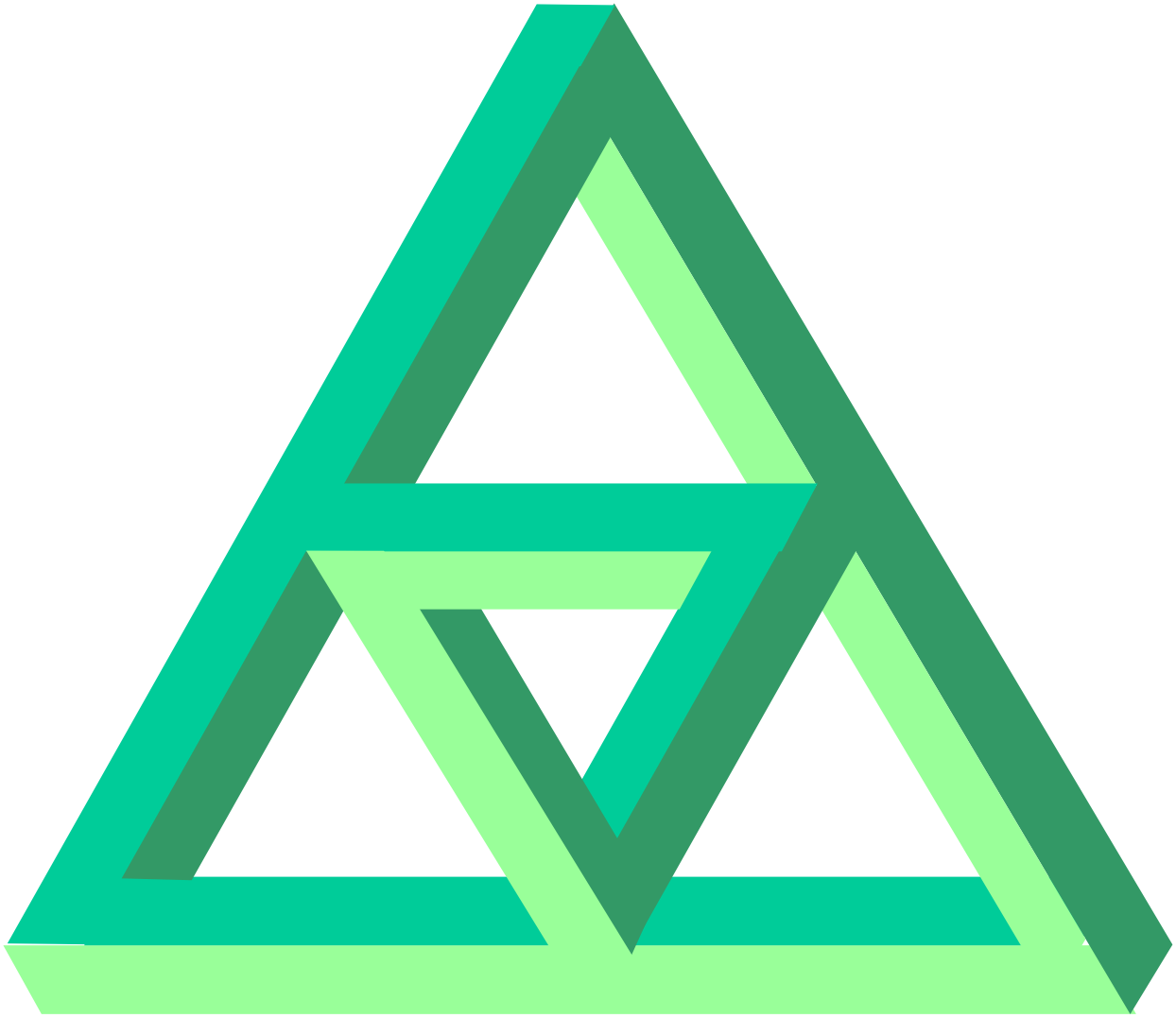
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 50 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 4/2020 19. Jahrgang

Lösungsdiskussion Serie 6

Aufgabe 6-1 [1]

Man bestimme den Umfang eines Dreiecks mit folgenden Eigenschaften:

(a) alle Seitenlängen sind ganzzahlig,
(b) eine der Seitenlängen ist 13,
(c) das Produkt der beiden anderen Seitenlängen ist 105.

Lösungshinweise: Es gilt laut Aufgabenstellung für die Seitenlänge einer Dreiecksseite $a = 13$ LE [2] und für die beiden anderen Seitenlängen $b \cdot c = 105$. Da b und c natürliche Zahlen sind, müssen sie Teiler von $105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sein. Somit sind für b und c nur folgende Paare möglich: {1 ; 105}, {3 ; 35}, {5 ; 21} und {7 ; 15}, wobei o.B.d.A. $b < c$ gelten soll.

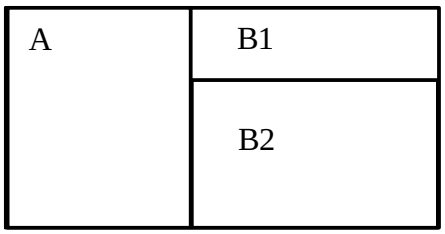
Zudem müssen für 13, b und c die Dreiecksungleichungen erfüllt sein. Folglich kann die kleinste Seitenlänge nicht 1, 3 oder 5 sein, da in diesen Fällen wegen $1 + 13 < 105$, $3 + 13 < 35$ und $5 + 13 < 21$ die Dreiecksungleichungen verletzt wären.

Im Fall $b = 7$ sind dagegen alle drei Dreiecksungleichungen erfüllt: $7 + 15 > 13$, $7 + 13 > 15$ und $13 + 15 > 7$. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt $(7 + 13 + 15 =)$ 35. Die Lösung ist eindeutig. ❑

Aufgabe 6-2 [3]

Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt. Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch genau einen Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der Teilrechtecke erneut in zwei Rechtecke usw.

In der nebenstehenden Abbildung kann man annehmen, dass man mit einem ersten Schnitt das Rechteck *A* abteilte und in einem zweiten Schnitt die Rechtecke *B*1 und *B*2 erhielt. Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird *sequentiell* genannt. Gibt es jedoch keine solche Schnittfolge, heißt die Zerlegung primär.

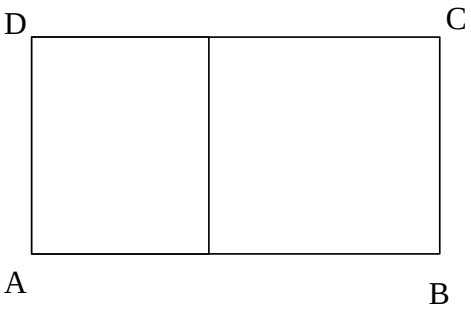


[1] Nach einer Aufgabe des Wettbewerbs „Känguru der Mathematik“, Kl. 9/10, 2010.
[2] LE ... Längeneinheit - die Maßeinheiten werden im Weiteren weggelassen.
[3] Die Aufgabe stammt aus: Steinhaus, H. Studentenfutter. Uraniaverlag Leipzig, 1991, S. 35 und 142ff.

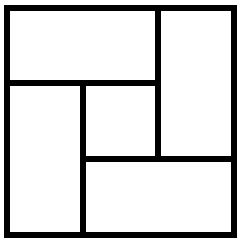
Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechteckes in 3 Teilrechtecke gibt (d.h. dass jede Zerlegung eines Rechtecks in 3 Teilrechtecke eine sequentielle Zerlegung ist).

Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke existiert.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe eine primäre Zerlegung in 3 Teilrechtecke. Da diese Teilrechtecke die 4 Eckpunkte des Ausgangsrechtecks überdecken, gibt es mindestens ein Teilrechteck, das zwei dieser Eckpunkte umfasst (Schubfachprinzip). Das können jedoch nur benachbarte Eckpunkte sein (o.B.d.A. seien dies *A* und *D*). Folglich kann dieses Teilrechteck mittels einer Trennungslinie abgeschnitten werden. Das verbleibende Rechteck kann nur mittels eines Schnittes in zwei Teilrechtecke zerlegt werden. Folglich ist die Zerlegung nicht primär ist.



Um zu zeigen, dass es eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke gibt, genügt die Angabe eines Beispiels:



Offensichtlich lässt sich aus den Teilrechtecken keine Auswahl vornehmen, die selbst (bei Festhalten ihrer Lage) ein Rechteck bilden. Somit kann die Zerlegung nicht schrittweise erfolgt sein.

❑

Aufgabe 6-3
Man finde alle reellwertigen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Wegen

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$$

findet man

$$xy + yz + zx = -1.$$

Außerdem gilt $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + zx + xy}{xyz}$, also $xyz = -1$. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind somit x, y und z die Nullstellen des Polynoms 3. Grades der Form

$$P(s) = s^3 - s^2 - s + 1$$

Man erkennt die Zerlegung

$$P(s) = (s-1)^2(s+1),$$

woraus sich die Nullstellen $x = 1$, $y = 1$ und $z = -1$ (sowie wegen der Symmetrie der Gleichungen alle Vertauschungen) ergeben.

Die Probe bestätigt, dass dies tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems sind. ❑

Ergänzende Hinweise: (a) Auch ohne die explizite Anwendung des VIETAschen Wurzelsatzes lässt sich das Gleichungssystem lösen. Beispielsweise führt die Eliminierung von z zur Gleichung

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(xy+1),$$

woraus mit der Fallunterscheidung $x + y = 0$ bzw. $x + y \neq 0$ die Lösungen gefunden werden.

(b) Aus $xyz = -1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\sqrt[3]{|x| \cdot |y| \cdot |z|} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

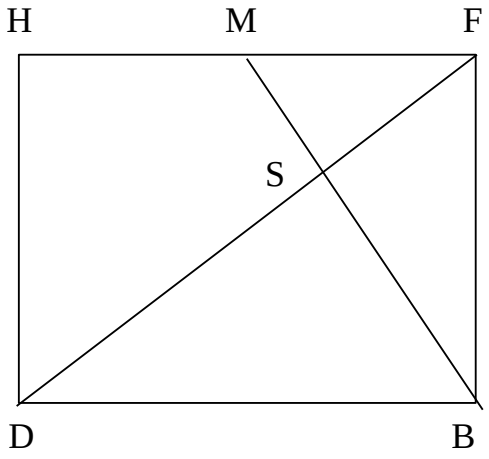
Dies ist eine (verallgemeinerte) Mittelungleichung, für die das Gleichheitszeichen nur für $|x| = |y| = |z|$ (= 1) gilt. Die Diskussion um die Betragszeichen bereitet abschließend keine Schwierigkeiten.

(c) Die Verwendung von rechentechnischen Hilfsmitteln ist natürlich zur Lösungsfindung bei Aufgaben für die Hausarbeit erlaubt (z.B. auch im Bundeswettbewerb Mathematik). Die Resultate sind aber als „irgendwie“ gefundene Ergebnisse zu interpretieren, die durch eine explizit anzugebene Probe als Lösung zu bestätigen sind. „Irgendwie“ könnte in dieser Aufgabe auch Erraten einer Lösung heißen. Ob man alle Lösungen gefunden hat, ist zusätzlich zu beweisen, auch wenn man die Vollständigkeit voraussetzen darf.

Aufgabe 6-4 [4]

Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke *F* des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch *F* senkrecht steht und diese im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Lösungshinweise: Es seien *FB*, *FE* und *FG* die ausgewählten Würfelkanten und *S* der Schnittpunkt der Raumdiagonalen *FD* mit der Ebene durch *B*, *E* und *G*. Diese Ebene schneidet die Flächendiagonale *FH* in deren Mittelpunkt *M*. Man betrachte nun die Schnittfläche durch *D*, *B*, *F* und *H*, wobei *DB* parallel zu *FH* ist (s. Skizze). Die Dreiecke *DBS* und *SFM* sind ähnlich (www), also gilt für die Streckenlängen *SD* : *SF* = *DB* : *MF* = 2 : 1.



Somit teilt die Ebene die Raumdiagonale wie behauptet im Verhältnis von 1 : 2. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt zusätzlich *SB* : *MS* = 2 : 1. Aus der Rechtwinkligkeit der Dreiecke *MBF* und *DBF* folgt:

$$MS^2 + SF^2 = \frac{1}{9}\cdot MB^2 + \frac{1}{9}\cdot FD^2 =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(MF^2 + FB^2\right) + \frac{1}{9}\cdot\left(DB^2 + FB^2\right) = \frac{1}{9}\cdot\left(MF^2 + 2\cdot FB^2 + DB^2\right)$$

[4] Diese Aufgabe stammt aus der 9. MO (1969/70) in der 2. Stufe der Klasse 11/12

Nun ist aber wegen der Würfeleigenschaften $2 \cdot MF = DB$ und $MF \cdot \sqrt{2} = FB$. Dies in die obige Gleichung eingesetzt, führt zur Gleichung $MS^2 + SF^2 = MF^2$, also steht *SF* wegen der Umkehrung des Satzes des Pythagoras senkrecht auf *MB*.

Wegen der Symmetrieeigenschaften lassen sich die Betrachtungen auch in die Schnittfläche *EBHC* und *BGAH* übertragen. Dabei erhält man, dass *FS* auch senkrecht zu *ES* bzw. zu *GS* steht. Damit steht *FS* senkrecht auf der Ebene durch *EBG*.

❑

Aufgabe 6-5A

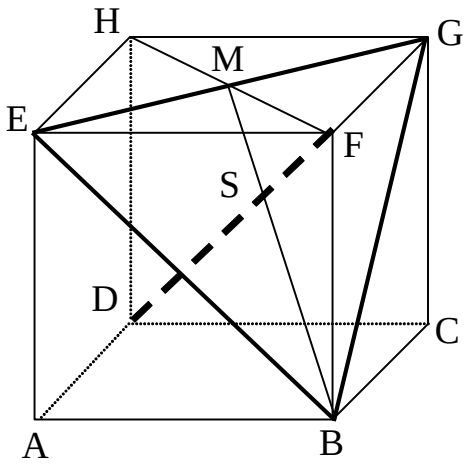
Das HERONsche Verfahren[5] dient zur Approximation der Quadratwurzel einer reellen Zahl a ($a > 0$): Es sei x_0 ein „Schätzwert“ für $\sqrt{a}$. Im ersten Schritt berechnet man x_1 durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

Im n-ten Schritt ergibt sich aus x_n ein „besserer“ Näherungswert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

($n = 1, 2, ...$)



(a) Man berechne mit dem HERONschen Verfahren einen Wert für $\sqrt{2020}$.

(b) Man zeige: Für $\sqrt{a} < x_n$ gilt $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$.

(c) Man beweise. Beim HERON-Verfahren gilt für alle $n > 0$ die Ungleichung:

$$\left| \sqrt{a} - x_{n+1} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \sqrt{a} - x_n \right|$$

Lösungshinweise:

(a) Kennt man die Quadratzahl $45^2 = 2025$, so erscheint die Verwendung des Startwertes $x_0 = 45$ sinnvoll. Nach dem HERONschen Verfahren für $\sqrt{2020}$ findet man bereits mit einem einfachen Taschenrechner:

$$x_1 \approx 44{,}94444444 \quad ; \quad x_2 \approx 44{,}94441011$$

und die weiteren Werte erscheinen konstant.

[5] HERON von ALEXANDRIA (im 1. Jh. n. Chr.)

(b) Es ist:

$$0 < \frac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{\sqrt{a}}\right) < \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right),$$
$$= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_n - x_{n+1}$$

also $x_{n+1} < x_n$. Außerdem gilt für $x_n > \sqrt{a}$ wegen

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} \cdot \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2$$

stets

$$x_{n+1} - \sqrt{a} > 0\,.$$

Hinweis: In der zweiten Abschätzung wird $x_n > \sqrt{a}$ nicht genutzt. Die Ungleichung $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$ gilt also für alle $n > 0$ mit $x_0 \neq \sqrt{a}$.

(c) Aus der Abschätzung in (b) erhält man die Aussage

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| = x_{n+1} - \sqrt{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right) \cdot \left(x_x - \sqrt{a}\right)$$

Nun beachte man für $n > 0$ die Beziehungen

$$x_n > \sqrt{a} \quad d.h. \quad x_n - \sqrt{a} > 0 \quad und \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} > 0$$

bzw. $$x_n > 0 \quad d.h. \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

Setzt man dies oben ein, findet man die behauptete Ungleichung.

❑

Aufgabe 6-5B

(a) Welchen Polynomrest lässt $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$ bei Division durch $x^2 + x + 1$?

(b) Man beweise: Wenn im Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a, b und c sämtlich ungerade Zahlen sind, so hat P keine rationale Lösung.

(c) Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ (mit einer reellen Zahl c) habe drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1 \le x_2 \le x_3$. Man zeige: $x_3 - x_1 > 6$.

Lösungshinweise

(a) Es gilt $P(x)=\sum_{k=1}^{100}x^k=(x^{100}+x^{99}+x^{98})+...+(x^4+x^3+x^2)+x$. Da jeder Klammerausdruck der rechten Seite durch x^2+x+1 teilbar ist, bleibt der Polynomrest $R(x) = x$.

(b) Es sei $r=\frac{m}{n}$ eine rationale Lösung des Polynoms, d.h. m und n sind ganze Zahlen mit $n > 0$ und ggT(m ; n) = 1. Weil r eine Nullstelle ist, gilt $P(r)=0=ar^2+br+c$ bzw. $am^2+bmn+cn^2=0$.
Wir betrachten nun folgende Fälle:

Fall 1: Die Zahlen m und n seien beide ungeradzahlig. Dann sind aber alle drei Summanden der letzten Gleichung ungeradzahlig, sodass auch deren Summe ungeradzahlig wird – im Widerspruch zur 0 auf der rechten Seite der Gleichung.

Fall 2: Eine der Zahlen m und n ist ungeradzahlig, die andere ist geradzahlig. Dann sind die beiden Summanden, die die geradzahlige Zahl enthalten, ebenfalls geradzahlig. Der dritte Summand ist ungeradzahlig, sodass auch die Summe der drei Summanden ungeradzahlig wird – im Widerspruch zur 0 auf der rechten Seite der Gleichung.

Fall 3: Die Zahlen m und n sind beide geradzahlig. Dies steht im Widerspruch zu ggT(m ; n) = 1.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine rationale Lösung bei ungeradzahligen Koeffizienten *a, b* und *c* geben.

(c) Für die Nullstellen des Polynoms gilt nach dem Wurzelsatz des VIETA

$$x_1+x_2+x_3=-7 \quad ; \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=4.$$

Also ist

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

Daraus folgt

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-7)^2-2\cdot 4=41,$$

aber auch

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2\cdot\left(\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\right)=74$$

Annahme: Es sei $(x_3 - x_1) \leq 6$. Dann gibt es eine positive Zahl $y \leq 6$ mit $x_2 - x_1 = y$ und $x_3 - x_2 = x_3 - x_1 - (x_2 - x_1) \leq 6 - y$. Also kann die Summe der Quadrate der Differenzen wie folgt abgeschätzt werden:

$$74 \leq y^2 + (6-y)^2 + 36 = 2y^2 - 12y + 72 .$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu

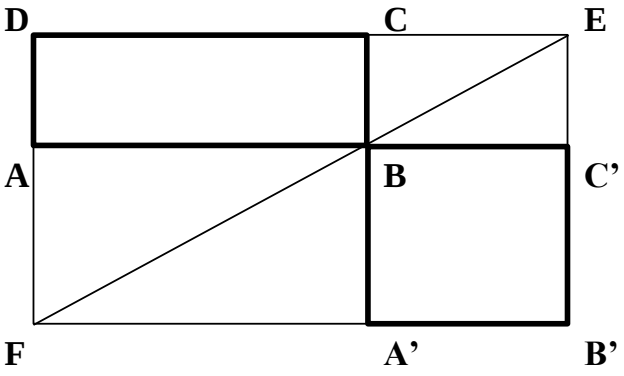
$$10 \leq 9 - 6y + y^2 = (y-3)^2 .$$

Wegen $y \leq 6$ kann diese Ungleichung aber nicht gelten. Folglich ist die Annahme falsch und es gilt $(x_3 - x_1) > 6$.

Geometrisches Wurzelziehen mit dem HERON-Verfahren [6]

Die Vorgehensweise beim HERON-Verfahren lässt sich so interpretieren: Geht man von einem beliebigen positiven Startwert x_0 aus, so hat das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und $\frac{a}{x_0}$ den Flächeninhalt a. Man möchte dieses Rechteck nun iterativ „quadratischer“ machen, also schrittweise eine solche Seitenlänge x_n finden, für die schließlich $x_n \approx \sqrt{a}$ gilt.

Über den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusen-Abschnitten x_0 und $\frac{a}{x_0}$ ist diese Aufgabe in einem Schritt lösbar. Dieser Weg sei hier nicht beschritten. Vielmehr betrachte man folgende Abbildung:

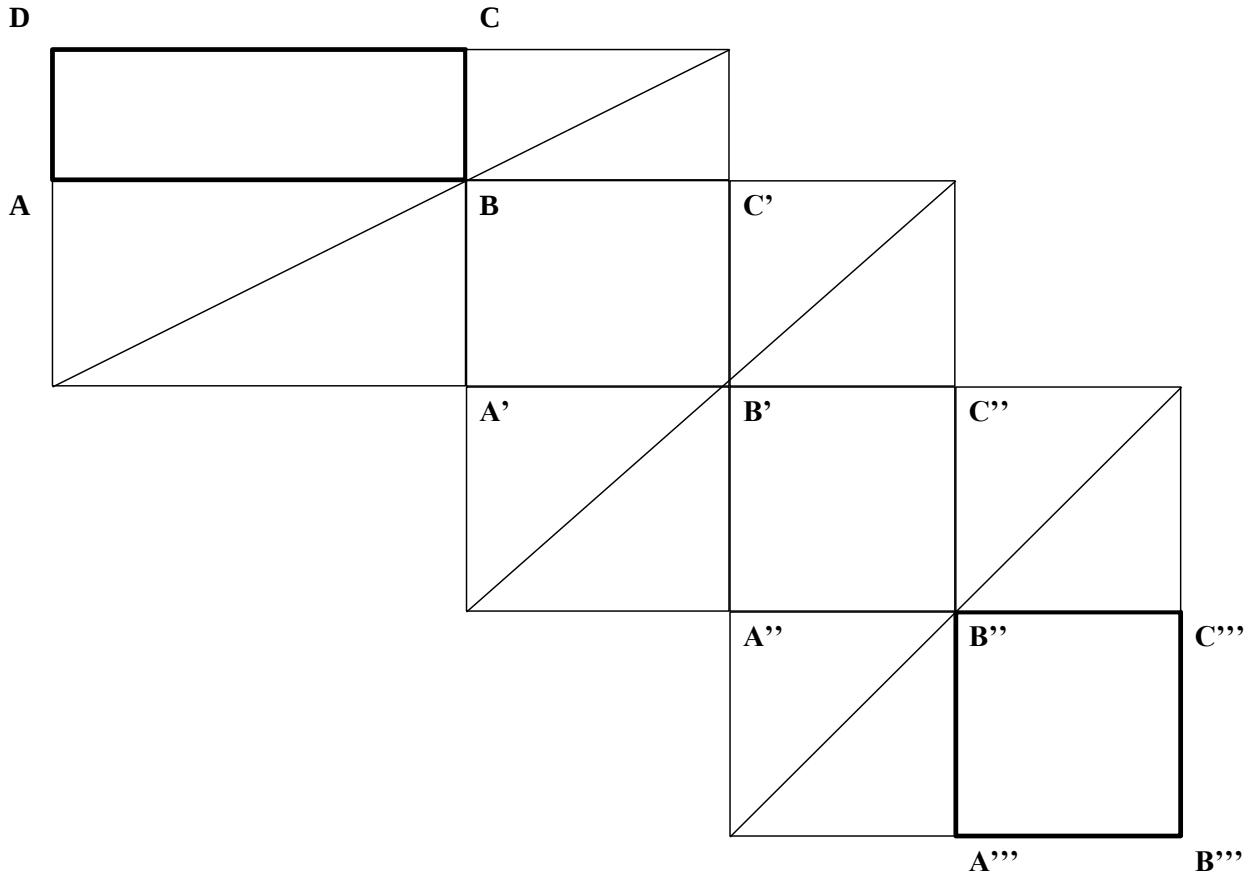


Liegt der Punkt *B* auf der Diagonale *FE* des Rechtecks *FB’ED*, so sind die Rechtecke *ABCD* und *A’B’C’D* flächengleich. Der Beweis ist einfach: Da die

[6] Nach dem gleichnamigen Beitrag von B. Artmann und H. Puhlmann in MNU 55/1 (2002), Seite 16-19.

Dreiecke *FBA* und *BC'E* ähnlich sind (warum?), gilt $\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'E}}$, also $\overline{AB} \cdot \overline{C'E} = \overline{BC'} \cdot \overline{AF}$. Wegen $\overline{C'E} = \overline{BC}$ und $\overline{AF} = \overline{A'B}$ ergibt sich unmittelbar die Flächengleichheit. Schon EULER kannte diese Eigenschaft und benutzte sie, um für ein gegebenes Rechteck *ABCD* und eine Strecke $\overline{BC'}$ ein flächengleiches Rechteck „anzulegen“, dessen eine Seite genau die Länge $\overline{BC'}$ hat (Konstruktionsbeschreibung?).

Ist eine Zahl[7] $a > 1$ gegeben, so setze man $x_0 = a$ und $y_0 = 1$. Das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und y_0 hat damit den Flächeninhalt a. Man wähle nun eine Strecke $\overline{BC'}$ der Länge $\overline{BC'} = x_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + y_0)$, die geometrisch sehr einfach zu konstruieren ist. Nach obiger Konstruktion erhält man damit ein flächengleiches Rechteck, dessen andere Seitenlänge mit y_1 bezeichnet werde. Dieses Verfahren lässt sich nun beliebig fortsetzen. Bereits nach 3 Schritten sieht das resultierende Rechteck schon wie ein Quadrat aus!



Wegen $a = x_0 y_0 = x_1 y_1 = ... = x_n y_n$ gilt laut Konstruktionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + y_n) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

also die Iterationsformel des HERONschen Verfahrens.

[7] Es wird im Folgenden auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet.

Eine Verallgemeinerung des HERONschen Verfahrens[8]

Zur Ermittlung der *n*-ten Wurzel ($n > 2$) einer Zahl kann man folgendes Verfahren untersuchen: Es seien $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, ..., x_n^{(j)}$ positive reelle Zahlen und $A^{(j)}$ das arithmetische Mittel, $G^{(j)}$ das geometrische Mittel und $H^{(j)}$ das harmonische Mittel dieser *n* Zahlen. Bekanntlich gilt

$$H^{(j)} \le G^{(j)} \le A^{(j)}$$

Findet man Zahlen $x_i^{(j)} \approx \sqrt[n]{x}$, so können deren harmonisches und arithmetisches Mittel untere bzw. obere Grenzen von $\sqrt[n]{x}$ sein. Dazu starte man mit

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = ... = x_{n-1}^{(0)} = 1, \quad x_n^{(0)} = x$$

und setze

$$x_1^{(j)} = H^{(j-1)}, \quad x_2^{(j)} = A^{(j-1)}$$

$$x_3^{(j)} = ... = x_{n-1}^{(j)} = y^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot \left(H^{(j-1)} + A^{(j-1)} \right) \qquad \text{für alle } j > 0$$

$$x_n^{(j)} = \frac{1}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)} \cdot \left(y^{(j)} \right)^{n-3}}$$

Hinweis: Für $n = 3$ entfällt die mittlere Definitionsgleichung und man setze

$$x_3^{(j)} = \frac{x}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)}}$$

Auf diese Weise erhält man eine wachsende Folge für $x_1^{(j)}$ und eine fallende Folge für $x_2^{(j)}$, die sich zudem (von unten bzw. von oben) an den Wert $\sqrt[n]{x}$ annähern. Beispielsweise erhält man für $n = 3$ und $x = 2$ für

$j = 1$: $\quad (1{,}200000 =) \quad \frac{6}{5} \le \sqrt[3]{2} \le \frac{4}{3} \quad (\approx 1{,}333333)$

$j = 2$: $\quad (1{,}258741 \approx) \quad \frac{180}{143} \le \sqrt[3]{2} \le \frac{227}{180} \quad (\approx 1{,}261111)$

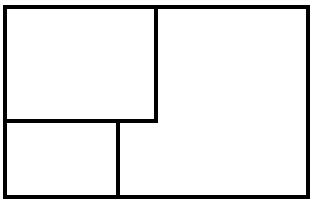
[8] Nach W. Dörband: Ein allgemeiner Wurzelalgorithmus. In: WURZEL 01/2001, S. 16-19.

$j = 3$: $\quad (1{,}259921 \approx) \quad \frac{17528940}{13912733} \le \sqrt[3]{2} \le \frac{22085087}{17528940} \quad (\approx 1{,}259921)$

Für $n = 5$ findet man nach 3 Schritten die Näherung $\sqrt[5]{2} \approx 1{,}148698$.

Ergänzende Diskussion zu Aufgabe A6-2

Ähnlich wie bei der Teilung in 3 Rechtecke untersucht man, ob es primäre Zerlegung in 4 Rechtecke gibt. Offensichtlich darf keines der Rechtecke in zwei Eckpunkten mit dem Ausgangsrechteck übereinstimmen, weil dann dieses Rechteck mit einem Schnitt abgetrennt werden könnte und für das verbleibende Rechteck keine primäre Zerlegung in 3 Rechtecke existiert. Folglich liegt ein Rechteck in einer „Ecke“ des Ausgangsrechtecks und ein anliegendes Rechteck darf nicht die gleiche Breite haben.



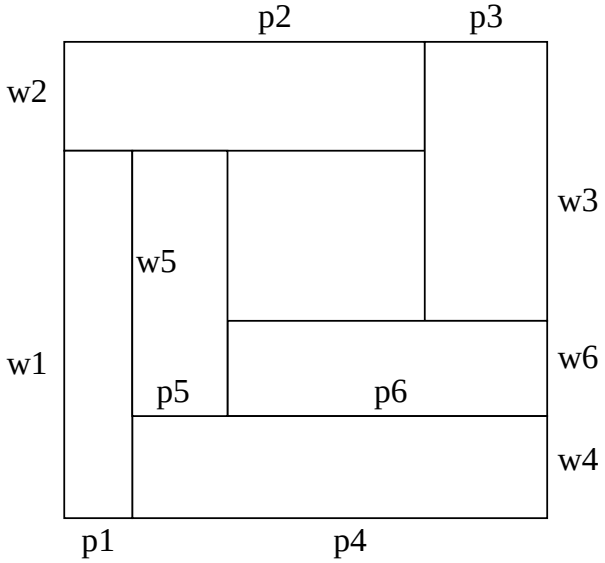
Die Restfläche (die dann kein Rechteck ist!) lässt sich nur so in zwei Rechtecke zerlegen, wenn eine bereits bestehende Schnittlinie durchgezogen wird. Die Verlängerung der senkrechten Linie in dem dargestellten Beispiel führt zu einer sequentiellen Teilung. Dagegen führt die Verlängerung der waagerechten Linie zu einer primären Teilung, weil mit dem ersten geraden Schnitt kein einzelnes Rechteck abgeschnitten werden kann.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, die primäre Teilung in 5 Rechtecke so vorzunehmen, dass alle Teilrechtecke untereinander flächengleich sind. Da in diesem Fall das mittlere Quadrat ein Fünftel des Flächeninhaltes des großen Quadrates einnehmen muss, findet man (falls die Ausgangsseitenlänge 1 beträgt) für die Seitenlänge des kleinen Quadrates $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ und für die Seitenlängen der Teilrechtecke $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{5}$. Eine primäre Teilung eines Quadrates in 5 deckungsgleiche Teilrechtecke gelingt dagegen nicht!

Natürlich kann man aus einer primären Teilung in 5 Rechtecke eine primäre Teilung in 6 Rechtecke erzeugen. Allerdings gelingt es nicht, ein Quadrat in 6 flächengleiche Rechtecke primär zu zerlegen.

Eine sequentielle Zerlegung in *n* Rechtecke ist trivialer Weise stets möglich, wenn man das Ausgangsrechteck in *n* parallele Streifen zerlegt. Im Folgenden sollen die Zerlegungen nicht in dieser einfachen Art erfolgen.

Die Zerlegung in mehr als 6 Rechtecke ist jeweils auf verschiedene Weisen möglich. Um beispielsweise eine Zerlegung eines Quadrates in 7 flächengleiche Rechtecke zu quantifizieren, gebe man sich eine geometrisch mögliche Zerlegung vor, unabhängig davon, ob dies tatsächlich für diese Konfiguration flächengleich gelingt. Nun bezeichne man die Teilstrecken wie in der Skizze ersichtlich.



Setzt man $w_1 = x$, so ist $p_1 = \frac{1}{7x}$, um eine Fläche von $\frac{1}{7}$ der Ausgangsfläche einzunehmen. Nacheinander ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$w_2 = 1 - x \quad , \quad p_2 = \frac{1}{7 \cdot (1-x)}$$

$$p_3 = 1 - p_2 = \frac{6-7x}{7 \cdot (1-x)} \quad , \quad w_3 = \frac{1}{7 p_3} = \frac{7x-1}{7x}$$

$$p_4 = 1 - p_1 = \frac{7x-1}{7x} \quad , \quad w_4 = \frac{1}{7 p_4} = \frac{x}{7x-1}$$

$$w_5 = w_1 - w_4 = \frac{x \cdot (7x-2)}{7x-1} \quad , \quad p_5 = \frac{1}{7 w_5} = \frac{7x-1}{7x \cdot (7x-2)}$$

$$p_6 = p_4 - p_5 = \frac{(7x-1)(7x-3)}{7x \cdot (7x-2)} \quad , \quad w_6 = \frac{1}{7 p_6} = \frac{x \cdot (7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}$$

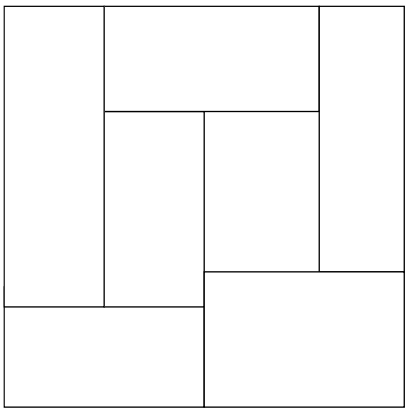
Nun gilt $w_3 + w_4 + w_6 = 1$. Setzt man die oben gefundenen Terme ein und formt um, findet man die kubische Gleichung

$$196 \cdot x^3 - 294 \cdot x^2 + 128 \cdot x - 15 = 0$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $x = \frac{1}{2}$. Daraus folgt zunächst $w_1 = w_2$ und $p_1 = p_2$ und damit ist die Teilung nicht sequentiell, weil sich keines der zugehörigen Teilrechtecke mit einem geraden Schnitt abtrennen lassen.

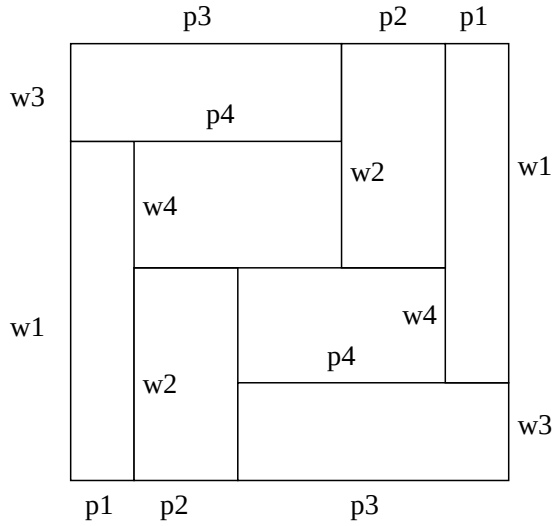
Die anderen Lösungen der kubischen Gleichung lauten $\frac{7 \pm \sqrt{19}}{14}$. Allerdings muss $x > \frac{3}{7}$ gelten, denn anderenfalls wäre p_6 negativ. Wenn es also eine Zerlegung der geforderten Art gibt, so gilt $x = \frac{7 + \sqrt{19}}{14} \approx 0{,}81$. Damit gelingt tatsächlich die geforderte Zerlegung, wie eine Probe bestätigt.

Für folgende Zerlegung gibt es ebenfalls keine sequentielle Zerlegung des Quadrates in 7 Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt. Die nahe liegende Symmetrie der Figur bestätigt sich nämlich, d.h. die beiden unteren Rechtecke werden unter den Voraussetzungen kongruent und damit wird die Zerlegung primär.



Diese Beispiele provozieren die Frage, ob die Einteilung in „primär“ und „sequentiell“ geeignet ist, die möglichen Fälle ausreichend zu differenzieren. Eine Erweiterung könnte in der „sequentiellen Zerlegung *k*-ter Ordnung“ bestehen, wobei mit einem geraden Schnitt maximal *k* zusammenhängende Rechtecke abgeschnitten werden dürfen.

Für die Zerlegung eines Quadrates in 8 inhaltsgleiche Rechtecke kann man eine symmetrische Lage der Teilrechtecke versuchen.



Dafür genügen bereits 4 Höhen- und Breitenangaben. Aufgrund der Symmetrie gilt bereits (falls die Quadratseite die Länge 1 hat) $w_2 = \frac{1}{2}$ und damit $p_2 = \frac{1}{4}$. Setzt man nun $w_1 = x$, so ergibt sich nacheinander:

$$p_1 = \frac{1}{8x}$$

$$w_3 = 1 - x \quad , \quad p_3 = \frac{1}{8 \cdot (1-x)}$$

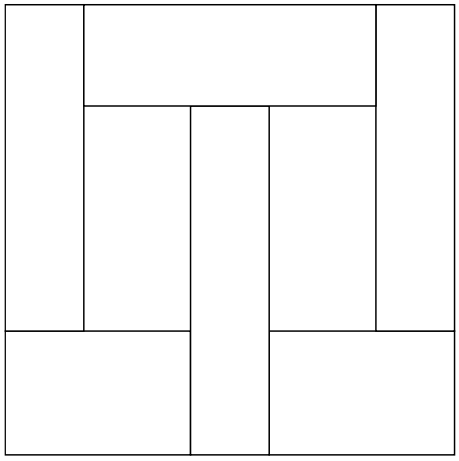
$$w_4 = x - \frac{1}{2} \quad , \quad p_4 = \frac{1}{8 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right)}$$

Nun ist aber $p_4 = p_3 - p_1$. Setzt man hier die gefundenen Ausdrücke ein und formt um, so findet man die quadratische Gleichung

$$6 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

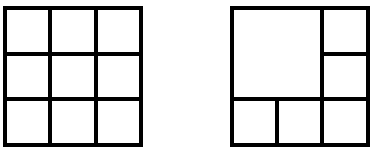
Von den beiden Lösungen dieser Gleichung, nämlich $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$, kann wegen $x > \frac{1}{2}$ nur die größere die gesuchte Lösung sein. Rechnet man damit alle Rechteckseiten aus, wird die Lösung bestätigt.

Auch die folgende Zerlegung des Quadrates ist in 8 inhaltsgleiche Rechtecke möglich.

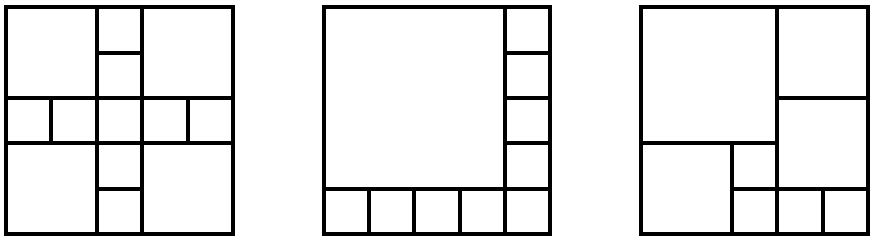


Zerlegung von Quadraten [9]

Natürliche Zahlen x, y, z, die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, heißen pythagoreische Zahlen. Es gibt unendlich viele Tripel derartiger Zahlen. Sieht man jedoch von dem trivialen Fall $x = 0$ oder $y = 0$ ab, ist es unmöglich, ein (figürliches) Quadrat der Seitenlänge z unmittelbar in zwei Quadrate der Seitenlänge x bzw. y zu zerlegen. Andererseits kann jedes Quadrat, dessen Seitenlänge z eine natürliche Zahl größer 1 ist, in endlich viele Quadrate mit ganzzahliger Seitenlänge zerlegt werden. Eine solche Zerlegung ist beispielsweise die in z^2 Quadrate, deren Seitenlänge jeweils die Seitenlänge 1 besitzen. Für $z = 3$ ist links die Zerlegung in 9 Teilquadrate dargestellt. Aber die Teilquadrate müssen nicht gleich groß sein. Die rechte Zerlegung benötigt nur 6 Teilquadrate für eine vollständige Zerlegung in Teilquadrate.



Für $z = 5$ findet man neben der trivialen Zerlegung in 25 Teilquadrate weitere Möglichkeiten mit 13, 10 und 8 Teilquadraten.



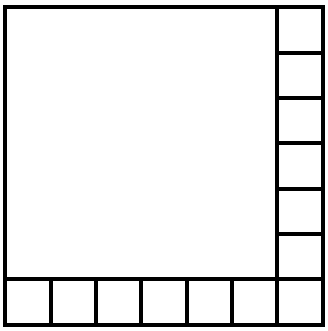
Es sei z eine natürliche Zahl größer 1. Man bezeichne nun mit *Q(z) die kleinste Anzahl von Quadraten* mit ganzzahligen Seitenlängen (kleiner als z), in die ein Quadrat der Seitenlänge z zerlegt werden kann. Offensichtlich ist $Q(2) = 4$, $Q(3) =$

[9] Nach: Schmidt, W.H.: Parkette und Packungen. In: alpha (1995), Heft 7, S. 8-10.

6 und $Q(5) \leq 8$. Kann man für jedes $z > 2$ den Wert $Q(z)$ ermitteln oder wenigstens abschätzen?

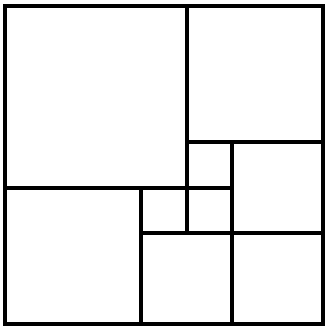
Wenn z eine gerade Zahl ist (also $z = 2n$ mit einer natürlichen Zahl n), so ist $z^2 = 4n^2$ und daher gilt $Q(2n) \leq 4$. Da es aber keine Zerlegung in weniger als 4 Teilquadrate geben kann (weil ja jeder Eckpunkt des Ausgangsquadrates in einem Teilquadrat liegen muss und kein Teilquadrat zwei Eckpunkte gleichzeitig umfasst), gilt sogar $Q(2n) = 4$.

Sei nun z ungeradzahlig. In jedes Quadrat der Seitenlänge z lässt sich ein Quadrat der Seitenlänge $z - 1$ einzeichnen. Die verbleibenden Streifen umfassen $2z - 1$ Teilquadrate mit der Seitenlänge 1. Somit gilt $Q(z) \leq 2z$. (Für $z = 3$ ist das Gleichheitszeichen erfüllt.)



Man kann aber auch für ungerades $z > 2$ zunächst ein Quadrat mit der Seitenlänge $z - 2$ abspalten. Der nun verbleibende Rest kann in $z - 2$ Quadrate mit der Seitenlänge 2 und in 4 Quadrate mit der Seitenlänge 1 zerlegt werden (man begründe dies!). Somit findet man als Abschätzung $Q(z) \leq z + 3$. Wiederum gilt für $z = 3$ das Gleichheitszeichen und für $z = 5$ wird die oben gefundene Abschätzung bestätigt.

Die Ungleichung $Q(z) \leq z + 3$ ist aber bereits für $z = 7$ mit $Q(7) \leq 10$ zu grob, denn wie in folgender Abbildung zu erkennen, gilt $Q(7) \leq 9$. (Mittels einer vollständigen Fallunterscheidung kann man sogar $Q(7) = 9$ zeigen, d.h., es gibt keine Zerlegung mit weniger als 9 Teilquadraten.)



Angewandt auf $z = 11$ sind für eine optimale Zerlegung eines Quadrates mit der Seitenlänge 11 höchstens 14 Teilquadrate notwendig. Gelingt es auch mit weniger Teilquadraten? Wer findet die kleinste obere Schranke für $Q(11)$?

Wenn z eine zusammengesetzte Zahl ist, etwa $z = k \cdot n$, so kann man das Quadrat mit der Seitenlänge z in ebenso viele Quadrate zerlegt werden wie ein Quadrat der Seitenlänge n, nur sind dabei die Seitenlängen der Teilquadrate das k-fache – es entstehen ähnliche Zerlegungen. Folglich gilt

$$Q(k \cdot n) \le min\{Q(k); Q(n)\},$$

also zum Beispiel $Q(9) \le Q(3) = 6$.

Eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes auf Primfaktorenzerlegung ist möglich, sodass es genügt, sich bei der Suche nach optimalen Zerlegungen auf Primzahlen z zu beschränken. Es überrascht vielleicht, dass damit $Q(111) = 6$ in sehr einfacher Weise ermittelt werden kann.

Zur weiteren Abschätzung sei z nun eine Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 3 lasse ($z = 4k + 3$). Beginnt man die Zerlegung „links oben“ mit einem Quadrat der Seitenlänge $\frac{1}{2} \cdot (z+1)$ und „rechts oben“ bzw. „links unten“ mit je einem Teilquadrat der Seitenlänge $\frac{1}{2} \cdot (z-1)$, bleibt eine Restfigur, bei der lediglich ein Einheitsquadrat zum vollständigen Quadrat fehlt. Man zeigt nun (wie?), dass diese Restfigur so zerlegt werden kann, dass insgesamt höchstens $\frac{33+z}{4}$ Teilquadrate notwendig sind. Für $z = 19$ werden folglich nicht mehr als 13 Teilquadrate benötigt. Geht es auch mit weniger? Wie viele Teilquadrate sind für $z = 17$ höchstens notwendig?

Größter gemeinsamer Teiler

MO120931.
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $z = n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist.

Lösungshinweise. Wegen $10 = 2 \cdot 5$ genügt es nachzuweisen, dass die Zahl durch 2 und durch 5 teilbar ist. Da n^6 und n^2 beide geradzahlig oder beide ungeradzahlig sind, falls n gerade bzw. ungerade ist, ist die Differenz stets durch 2 teilbar. Für die Teilbarkeit durch 5 betrachte man die Faktorenzerlegung $z = n^2(n^2-1)(n^2+1)$.

Eine Quadratzahl lässt bei Division durch 5 jedoch nur die Reste 0, 1 oder 4. Folglich ist für jedes n einer der 3 Faktoren stets durch 5 teilbar. ❑

Betrachtet man nun aber für kleine n einige Zahlenbeispiele:

$n = 1 \qquad z = 1 - 1 \quad = 0$
$n = 2 \qquad z = 64 - 4 \quad = 60$
$n = 3 \qquad z = 729 - 9 \quad = 720$
$n = 4 \qquad z = 4096 - 16 = 4080$

so kann man vermuten, dass 10 nicht der größte gemeinsame Teiler (*ggT*) T aller Zahlen der Art $z(n) = n^6 - n^2$ ($n > 0$) ist. Da T aber nicht größer als jede der Zahlen $z(n)$ sein kann, gilt $T \le 60$. Man untersuche also, ob für jedes n die Zahl $z(n)$ durch $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ teilbar ist.

- Die Teilbarkeit durch 5 ist bereits beantwortet.
- Die Teilbarkeit durch 3 ist offensichtlich, da die Faktoren drei aufeinander folgende Zahlen sind.
- Schließlich ist für gerade n das Quadrat n^2 durch 4 teilbar bzw. für ungerade n jeder der Faktoren $n^2 - 1$ und $n^2 + 1$ durch 2 teilbar, also ihr Produkt durch 4 teilbar.

Aufgabe MO420922.
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$ durch 120 teilbar ist.

Lösungshinweise: Es gilt $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$.

- Die beiden Faktoren sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen, also sind sie beide jeweils durch 2 und eine davon sogar durch 4 teilbar. Somit ist 8 ein Teiler von $p^4 - 1$.
- Da p nicht durch 3 teilbar ist, ist es auch p^2 nicht. Folglich ist eine der zu p^2 benachbarten Zahlen $p^2 - 1$ oder $p^2 + 1$ und somit auch $p^4 - 1$ durch 3 teilbar.
- Da p größer als 5 ist, endet p auf die Ziffer 1 oder 9 bzw. auf 3 oder 7. Dann endet aber $p^2 - 1$ bzw. $p^2 + 1$ auf 0, sodass $p^4 - 1$ durch 5 teilbar ist.

Folglich ist $p^4 - 1$ durch $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ teilbar. ❑

Die Lösung zeigt, dass 120 ein gemeinsamer Teiler aller Zahlen der Form $p^4 - 1$ mit Primzahlen $p > 5$ ist. Rechnet man aber einige Beispiele aus,

$$7^4 - 1 = 20 \cdot 120; \quad 11^4 - 1 = 122 \cdot 120; \quad 13^4 - 1 = 238 \cdot 120; \quad ...$$

würde man vermuten, dass ein weiterer Faktor 2 zum gemeinsamen Teiler gehört. Tatsächlich ist für eine ungerade Primzahl p der Faktor $p^2 + 1$ durch 2 teilbar. Für

den Faktor $p^2-1=(p-1)(p+1)$ findet man mit gleicher Argumentation wie oben, dass er durch 8 teilbar ist. Also ist p^4-1 sogar stets durch 16 und somit insgesamt durch 240 teilbar. Dies ist auch der größte gemeinsame Teiler, wie man für $p = 11$ erkennt.

Die Lösungsmethode solcher Aufgaben beruht im Wesentlichen auf der Analyse der Teilbarkeit durch die notwendigen Faktoren aus der Primfaktorzerlegung des ggT. Durch geschickte Umformung der gegebenen Ausdrücke in Produkte lassen sich die Teilbarkeitseigenschaften meist ohne Fertigkeiten im Umgang mit Restklassen nachweisen.

Es gilt für reelle Zahlen x, y und jede natürliche Zahl $n > 1$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

also speziell für $n = 2$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y).$$

Außerdem gilt stets

$$x^n + y^n = (x-y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} - y^{n-1}) \quad \text{(n ungerade)}$$

$$x^{n+m} + x^n + x^m + 1 = (x^n + 1)(x^m + 1)$$

Beispiel. Man findet für den Ausdruck $z = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ die Produktdarstellung

$$z = \left(n^8 - 1\right)\left(n^4 - 1\right) = \left((n-1)(n+1)\right)^2\left(n^2+1\right)^2\left(n^4+1\right).$$

Aus dieser Zerlegung erkennt man beispielsweise: Ist n ungerade, so ist $n – 1$ und $n + 1$ jeweils durch 2 und eine davon sogar durch 4 teilbar. Ebenso ist $n^2 + 1$ und $n^4 + 1$ geradzahlig. Somit ist für jedes ungerade n die Zahl z durch $2^{3\cdot 2}\cdot 2^2\cdot 2^1 = 512$ teilbar.

Um die Faktorenzerlegung zu systematisieren, betrachte man nun für natürliche Zahlen $n > 0$ folgende Teilbarkeitsaussagen:

Es gilt $2 \mid \left(n^2 - n\right)$, denn wegen $n^2 - n = (n-1)\cdot n$ ist das Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen stets durch 2 teilbar. Es gibt aber keinen größeren gemeinsamen Teiler, denn für jede natürlich Zahl $k > 2$ ist beispielsweise für $n = k + 2$ der Ausdruck $n^2 - n = (k+1)(k+2)$ nicht durch k teilbar.

Es gilt $6 \mid \left(n^3 - n\right)$, denn wegen $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ ist das Produkt dreier aufeinander folgender Zahlen stets durch 3 teilbar. Außerdem ist mindestens einer der Faktoren durch 2 teilbar, so dass 6 ein gemeinsamer Teiler aller Zahlen der Form $n^3 - n$ ist. Es gibt aber keinen größeren gemeinsamen Teiler, denn für jede natürliche Zahl $k > 3$ ist beispielsweise für $n = k + 2$ der Ausdruck $n^3 - n = (k+1)(k+2)(k+3)$ nicht durch k teilbar.

Aufgabe MO421022.
Wir betrachten alle diejenigen Zahlen $u^3 - u$, bei denen u eine ungerade Zahl mit $u > 1$ ist.

a) Beweisen Sie, dass jede dieser Zahlen gerade ist.
b) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller dieser Zahlen.

Lösungshinweise: Setzt man $u = 3$ ein, so erhält man 24. Folglich kann der ggT dieser Zahlen höchstens 24 sein. Ist u ungerade, enthält die Faktorenzerlegung nicht nur den Faktor 2, sondern sogar den Faktor 8, weil sowohl $n-1$ als auch $n+1$ gerade Zahlen sind, von denen eine sogar durch 4 teilbar ist (als eine von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen).

Es gilt $30 \mid \left(n^5 - n\right)$, denn wegen $n^5 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \left(n^2 + 1\right)$ ist die Teilbarkeit durch 2, 3 und 5 nachweisbar. Ist n ungeradzahlig, ist der Ausdruck statt durch 2 sogar durch 16 teilbar, also insgesamt durch 240.

Will man diese drei Beispiel verallgemeinern, könnte man vermuten:

Für alle natürlichen Zahlen n und k gilt: $k \mid \left(n^k - n\right)$.

Offenbar ist diese Aussage aber bereits für $k = 4$ im Allgemeinen falsch, denn $2^4 - 2 = 14$ ist nicht durch 4 teilbar. Deshalb untersuche man nur die Fälle mit ungeradzahligem k.

Aus der Faktorenzerlegung $n^7 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \left(n^2 - n + 1\right) \cdot \left(n^2 + n + 1\right)$ kann man für $k = 7$ den gemeinsamen Teiler 7 nachweisen (wie?).

Aber schon für $k = 9$ ist die Aussage falsch, wie man am Beispiel $2^9 - 2 = 510$ erkennt.

Aufgabe MO411043.
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $n^8 - n^2$ mit $n \in \{1,2,3,...\}$.

Lösungshinweise: Für $n = 2$ ergibt sich $2^8 - 2^2 = 252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$. Der gesuchte ggT kann also höchsten 252 sein. Man zeige nun, dass 4, 7 und 9 tatsächlich Teiler aller dieser Zahlen sind. Es gilt

$$n^8 - n^2 = (n-1)\cdot n^2 \cdot (n+1)\cdot \left(n^4 + n^2 + 1\right).$$

- Ist n gerade, so ist n^2 durch 4 teilbar. Ist n ungerade, so sind sowohl $n-1$ als auch $n+1$ gerade Zahlen, ihr Produkt also durch 4 teilbar.
- Ist n durch 3 teilbar, so ist n^2 durch 9 teilbar. Ist n nicht durch 3 teilbar, so sind sowohl $n^2 - 1$ als auch $n^4 + n^2 + 1$ durch 3 teilbar (Begründung?), ihr Produkt also durch 9 teilbar.
- Schließlich ist auch 7 ein Teiler. Lässt nämlich n bei Division durch 7 den Rest 0 oder ±1, so ist einer der ersten drei Faktoren durch 7 teilbar. Lässt dagegen n bei Division durch 7 den Rest ±2 oder ±3, so ist $n^4 + n^2 + 1$ durch 7 teilbar (warum?). ❑

Aufgabe MO410943.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $n^4 - 4n^2$ mit $n \in \{1,2,3,...\}$, welche auf Null enden.

Lösungshinweise: Es gilt $n^4 - 4n^2 = (n-2)\cdot n^2 \cdot (n+2)$. Daraus folgt

- alle diese Zahlen sind durch 3 teilbar, weil $n-2$, n und $n+2$ drei aufeinander folgenden gerade Zahlen sind;
- alle diese Zahlen sind durch 5 teilbar, weil sie auf Null enden;
- wenn diese Zahlen auf Null enden, ist n gerade;
- alle diese Zahlen sind durch $2^2 \cdot 4^2$ teilbar, denn entweder ist die gerade Zahl durch 4 teilbar, dann ist n^2 durch 4^2 und jede der Zahlen $n-2$ und $n+2$ zusätzlich durch 2 teilbar oder n ist nur durch 2 und damit n^2 durch 2^2 teilbar und jede der Zahlen $n-2$ und $n+2$ zusätzlich durch 4 teilbar.

Insgesamt ist also $2^2 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 5 = 960$ ein Teiler aller dieser Zahlen. Dass der ggT nicht größer als 960 sein kann, ergibt sich aus den Faktorenzerlegungen für die Fälle $n = 8, 10, 12$. Diese drei Werte $6 \cdot 8^2 \cdot 10$, $8 \cdot 10^2 \cdot 12$ und $10 \cdot 12^2 \cdot 14$ haben 960 als größten gemeinsamen Teiler. ❑

Aufgabe MO430945.

Untersuchen Sie, ob es unendliche viele natürliche Zahlen n gibt, für die $2^n - 3$ und $3^n - 2$ einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben.

Lösungshinweise: Ist T ein gemeinsamer Teiler von $2^n - 3$ und $3^n - 2$, dann ist T auch ein Teiler der Summe $\left(3^n - 2\right) + \left(2^n - 3\right) = \left(3^n + 2^n\right) - 5$.

Für ungerade Zahlen n ist $3^n + 2^n$ durch $(3 + 2) = 5$ teilbar. Anhand einer tabellarischen Übersicht kann man eine Periode in den Resten bei Division durch 5 erkennen.

n	1	2	**3**	4	5	6	**7**	8
$2^n - 3$	-1	1	**5**	13	29	61	**125**	253
Rest bei Divison durch 5	4	1	**0**	3	4	1	**0**	3
$3^n - 2$	1	7	**25**	79	241	727	**2185**	6559
Rest bei Divison durch 5	1	2	**0**	4	1	2	**0**	4

Somit haben für alle n mit $n = 4k + 3$ beide Zahlen den gemeinsamen Teiler 5 und somit gibt es unendlich viele solche Zahlen. ❑

Abschließend die etwas andere Olympiade-Aufgabe mit ggT:

Aufgabe MO450944.
Bestimmen Sie die Anzahl[10] aller neunstelligen natürlichen Zahlen, die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$\left(1 + ggT(n;90)\right)^4 = Q\left(Q(n)\right).$$

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt neunstellig, wenn sie mit 9 Ziffern im Zehnersystem dargestellt werden kann, wobei die erste Ziffer ungleich Null ist. $Q(n)$ bezeichnet die Quersumme der natürlichen Zahl n (und damit $Q(Q(n))$ die Quersumme der Quersumme von n).

Seminarhinweis

Das im Juni vorgesehene **4. Chemnitzer Seminar** fällt aufgrund der noch bestehenden Beschränkungen infolge der Corona-Pandemie ersatzlos aus.

[10] Es gibt genau 37 neunstellige Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

Impressum

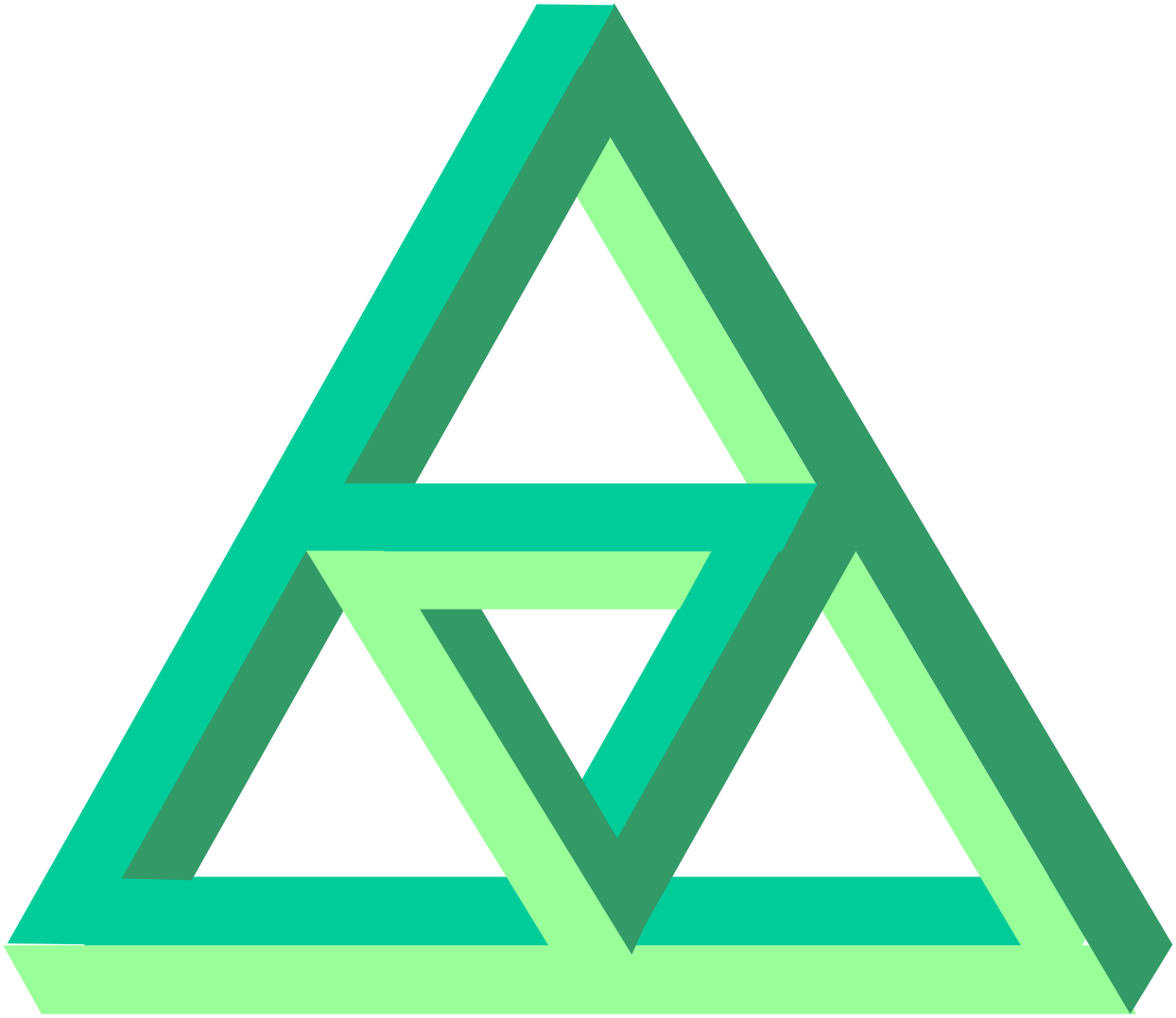
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	50 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 5/2020 19. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 7

Aufgabe 7-1. Gibt es außer der Zahl 9 noch weitere Quadratzahlen unter den Zahlen, die nur mit der Ziffer 9 geschrieben werden, also unter den Zahlen 9, 99, 999, 9999, ...?

Lösungshinweise: Weil 10^n für jede natürliche Zahl $n > 1$ durch 4 teilbar ist, gilt für eine Zahl, die nur aus n Ziffern 9 geschrieben wird, dass sie bei Division durch 4 wegen $9 \ldots 9 = 10^n - 1$ den Rest 3 lässt. Eine ungerade Quadratzahl (als Quadrat einer ungeraden Zahl) lässt aber bei Division durch 4 stets den Rest 1:

$$(4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 4 \cdot (4k^2 \pm 2k) + 1.$$

Folglich kann es (außer 9) keine Zahl der geforderten Art geben, die eine Quadratzahl ist. ❑

Lösungsvariante: Das Quadrat der n-stelligen Zahl $a = 100x + 10y + z$, wobei y und z einstellige Zahlen 0, 1, …, 9 sind und x eine $(n - 2)$-stellige Zahl ist, lautet

$$a^2 = 100 \cdot (100x^2 + y^2 + 20xy + 2xz) + 10 \cdot (2yz) + z^2.$$

Es ist ersichtlich, dass die Einerstelle von a^2 ausschließlich durch die Einerstelle von a bestimmt wird. Außerdem hat die Zahl x keinen Einfluss auf die letzten beiden Stellen von a^2. Ob eine Quadratzahl auf 99 endet, kann also allein aus der Analyse der zweistelligen Zahlen beantwortet werden.

Damit folgt $z = 3$ oder $z = 7$, da unter den einstelligen Zahlen nur deren Quadrate auf 9 enden. Es genügt also, die Quadratzahlen von 3, 13, 23, …, 93 und 7, 17, 27, …, 97 zu berechnen – dies ist ohne Einsatz von Rechnern möglich und in einer Tabelle mit allen 20 Quadratzahlen übersichtlich darstellbar: Es gibt keine Quadratzahl, die auf 99 endet.

Um das systematische Probieren einzuschränken, betrachte man

$$(10y + 3)^2 = 100y^2 + 60y + 9 = 100y^2 + 10 \cdot 6y + 9$$

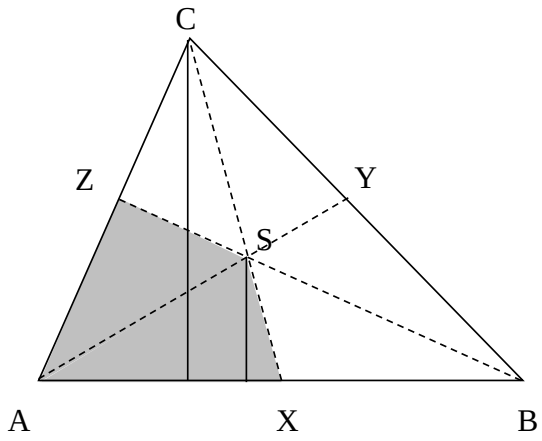
bzw.

$$(10y + 7)^2 = 100y^2 + 140y + 49 = 100y^2 + 10 \cdot (14y + 4) + 9$$

Die Zehnerstelle wird also durch die Einerstelle der Ausdrücke $6y$ bzw. $14y + 4$ gebildet – doch dies ist in beiden Fällen eine gerade Zahl und endet somit nicht auf 9. ❑

Hinweis: Da die Teilbarkeit durch 4 durch die letzten beiden Ziffern einer Zahl bestimmt wird, lässt sich die Aussage verschärfen: Es gibt keine Quadratzahl, die auf ...99 endet.

Aufgabe 7-2. In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt. Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Viereckfläche?



Lösungshinweise: Verbindet man den Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden mit den Ecken des Dreiecks, so entstehen sechs Teildreiecke (vgl. Skizze).

Jede Seitenhalbierende teilt das Dreieck in zwei flächengleiche Dreiecke (ΔAXC und ΔXBC). Die Höhen in den Dreiecken ΔAXC und ΔAXS verhalten sich (nach dem Strahlensatz mit den Strahlen XA und XC und den parallelen Höhen) wie die Abschnitte der Seitenhalbierenden. Bekanntlich dritteln sie sich einander. Somit beträgt die Fläche des ΔAXS ein Sechstel der Fläche des Dreiecks ΔABC. In Analogie zeigt man, dass alle sechs Teildreiecke flächengleich sind.

Die gesuchte Fläche des Vierecks setzt sich aus zwei solchen Teildreiecken zusammen und beträgt somit ein Drittel der Gesamtfläche. ❑

Lösungsvariante: Wir zerlegen das Dreieck ABC in die sechs Teildreiecke AXS, XBS, BYS, YCS, CZS, ZAS, deren Flächeninhalte wir in dieser Reihenfolge mit A_1, A_2, …, A_6 bezeichnen. Paarweise sind die Flächeninhalte benachbarter Teildreiecke gleich groß, weil sie jeweils eine halbe Dreiecksseite zur Grundseite haben und die zugehörigen Höhen gleich groß sind, $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$, $A_5 = A_6$. Weil zudem eine Seitenhalbierende das Dreiecke ABC in zwei flächengleiche Dreiecke teilt, gilt beispielsweise:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6$$

sowie $A_1 + A_6 + A_5 = A_2 + A_3 + A_4$

also $A_1 = A_4$.

In analoger Weise lassen sich $A_2 = A_5$ und $A_3 = A_6$ nachweisen. Somit sind alle sechs Teildreiecke flächenmäßig gleich groß.

Aufgabe 7-3. Auf einer Party mit 21 Personen kennt jede Person höchstens vier andere. Man zeige, dass es auf dieser Party mindestens fünf Menschen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen.

Lösungshinweise: Die 21 Personen seien mit P_1, P_2, ... P_{21} bezeichnet. P_1 kennt höchstens vier Personen, dies seien P_2, P_3, P_4 und P_5. Damit kennt P_1 mindestens die Personen P_6, ..., P_{21} nicht. Auch P_6 kennt höchstens 4 Personen.

Diese Bekannten können unter P_2, ..., P_5 sein, im ungünstigen Fall sind es 4 andere, zum Beispiel P_7, P_8, P_9 und P_{10}. Somit kennen P_1 und P_6 mindestens die Personen P_{11}, ..., P_{21} nicht.

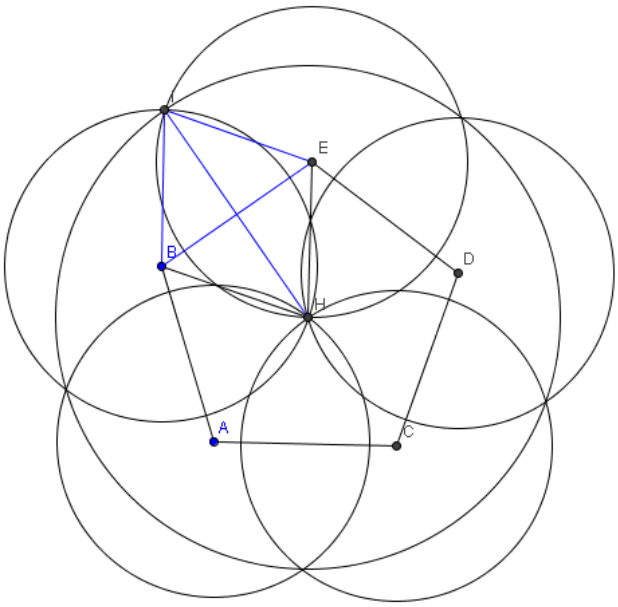
Analog schließt man, dass P_{11} beispielsweise die Personen P_{16}, ..., P_{21} nicht kennt und P_{16} kennt P_{21} nicht. Damit ergibt sich, dass sich P_1, P_6, P_{11}, P_{16} und P_{21} gegenseitig nicht kennen.

Lösungsvariante: Man nehme an, es gibt genau 4 Personen, die sich gegenseitig nicht kennen. Dann kann man alle anderen 17 Personen diesen 4 Personen als Bekannte zuordnen. Gäbe es nämlich noch eine weitere Gruppe sich untereinander kennenden Personen, würden sich mehr als 4 Personen nicht kennen. Nach dem Schubfachprinzip müssen nun einer dieser 4 Personen mindestens 5 Personen zugeordnet werden – im Widerspruch dazu, dass jede Person nur höchsten 4 weitere Personen kennt. Die Annahmen, es gäbe nur drei oder zwei Personen, die sich nicht gegenseitig kennen, führen ebenso zum Widerspruch. Also gibt es mindestens 5 Personen, die sich gegenseitig nicht kennen. ❑

Hinweis: Wie als Zusatz zur Aufgabe hingewiesen wird angenommen, dass aus „A kennt B“ auch „B kennt A“ folgt. Ohne diese Voraussetzung ist die Behauptung im Allgemeinen nicht erfüllt.

Aufgabe 7-4. Fünf Kreisscheiben mit Radius[1] 1 seien so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden und ihre Kreislinien alle durch den Mittelpunkt des Fünfecks gehen.

Man berechne den Radius der größten Kreisscheibe, die von den fünf Kreisscheiben bedeckt wird!

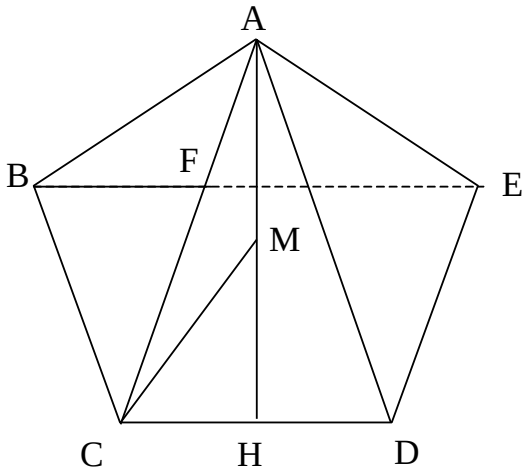


Lösungshinweise: Anhand nebenstehender Skizze kann man sich leicht klar machen, dass der gesuchte Radius der Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten zweier benachbarter Kreise ist (Argumentation beispielsweise über Zentralsymmetrie), also die Diagonale in einem Rhombus (mit Seitenlänge 1) mit den Mittelpunkten B und E dieser Kreise als weitere Eckpunkte.

[1] Auf die Angabe einer Längeneinheit wird verzichtet.

Da diese Mittelpunkte *B* und *E* gleichzeitig Eckpunkte des regulären Fünfecks sind, ist die gesuchte Länge der doppelte Inkreisradius r_i des regulären Fünfecks.

In einem solchen Fünfeck mit dem Mittelpunkt *M* mögen die Seiten die Länge 2*s* haben. Das Lot von der Ecke *A* auf die gegenüberliegende Seite *CD* (Fußpunkt *H*) ist die Höhe *h* des Fünfecks. Offenbar gilt $h = 1 + r_i$.



Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck *CHM*, so ist $\angle HMC = 36°$ (halber Mittelpunktwinkel). Wegen der Hypotenuse mit Länge 1 folgt daraus unmittelbar:

$$|\overline{HM}| = \cos(36°).$$

Jedoch ist ein Zahlenwert für dieses Ergebnis nicht ohne Rechner oder weiterführende Überlegungen angebbar.

Ohne Verwendung der trigonometrischen Funktion kann der Innenkreisradius des regelmäßigen Fünfecks wie folgt ermittelt werden. Der Schnittpunkt der Diagonalen $d = \overline{AC}$ mit *BE* sei *F*. Die Dreiecke *ACD* und *BCF* sind gleichschenklig und zueinander ähnlich (www). Also gilt $d : 2s = 2s : |\overline{BF}|$. Da auch das Dreieck *AFE* gleichschenklig ist, gilt $|\overline{BF}| = |\overline{BE}| - 2s = d - 2s$. Somit vereinfacht sich das Verhältnis zu

$$\frac{d}{2s} = \frac{2s}{d-2s}, \text{ also } d^2 - 2s \cdot d - 4s^2 = 0$$

und man findet als (positive) Lösung dieser quadratischen Gleichung:

$$d = s \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right).$$

Für die Höhe *h* gilt nach dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck *ACH* mit dem rechten Winkel im Punkt H: $d^2 = s^2 + h^2$. Nach Einsetzen des Ergebnisses zu *d* ist dies gleichbedeutend mit

$$h = s \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Im rechtwinkligen Dreieck *CHM* mit dem rechten Winkel im Punkt H gilt schließlich nach dem Satz des Pythagoras wegen $|\overline{CM}| = 1$:

$$1^2 = s^2 + r_i^2 \text{, also } 1 = \frac{h^2}{\left(5+2\sqrt{5}\right)} + r_i^2 = \frac{\left(1+r_i\right)^2}{\left(5+2\sqrt{5}\right)} + r_i^2 .$$

Gesucht ist also die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$5+2\sqrt{5} = 1+2r_i + r_i^2 + \left(5+2\sqrt{5}\right)\cdot r_i^2 \ ,$$
$$r_i^2 \cdot \left(6+2\sqrt{5}\right) + 2\cdot r_i - 4 - 2\sqrt{5} = 0 ,$$

d.h.

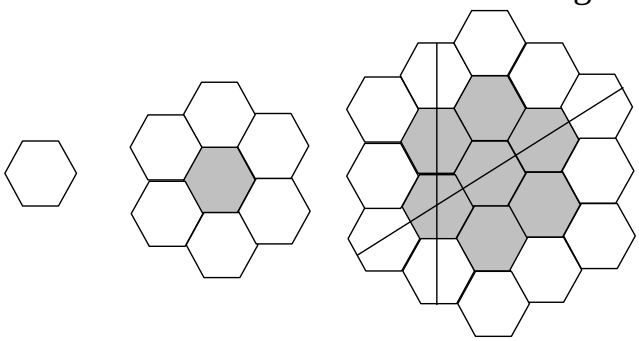
$$r_i = \frac{1}{\left(6+2\sqrt{5}\right)} \cdot \left(-1+\sqrt{1+\left(4+2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}\right)$$
$$r_i = \frac{1}{\left(6+2\sqrt{5}\right)} \cdot \left(-1+\sqrt{45+20\sqrt{5}}\right) = \frac{2+\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)} \ .$$

Also gilt $r_i = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)$ und der gesuchte Radius beträgt $2r_i \approx 1{,}62$.

❑

Hinweis: Der Zahlenwert 1,62 kann ohne technische Hilfsmittel errechnet werden: Wegen $2{,}23^2 = 4{,}9729$ und $2{,}24^2 = 5{,}0176$ liegt der gesuchte Wert zwischen 1.615 und 1.620. Dabei ist es zulässig, mit einem Taschenrechner den Wert von $\sqrt{5}$ zunächst berechnet zu haben, wenn dann die umgekehrte Richtung ohne Hilfsmittel durchführbar (und vom Korrektor nachvollziehbar) ist.

Aufgabe 7-5A. In Analogie zu Magischen Quadraten kann man Magische Sechsecke konstruieren: Um ein einzelnes regelmäßiges Sechseck (dies sei ein Sechseck 1. Ordnung) kann man einen Ring von sechs weiteren gleichgroßen regelmäßigen Sechsecken legen, wobei die Figuren (wabenförmig) mit den Kanten aneinanderstoßen. Dieses Gebilde aus sieben Sechsecken wird Sechseck 2. Ordnung genannt. Ordnet man um dieses Gebilde in analoger Weise zwölf weitere Sechsecke, so erhält man ein Sechseck 3. Ordnung usw. (s. Skizze).



Besteht ein Sechseck *n*-ter Ordnung aus *m* Teilsechsecken und beschreibt man jedes dieser Teilsechsecke mit genau einer der natürlichen Zahlen 1 bis *m*, so wird das Sechseck magisch genannt, wenn die Summen auf allen „geraden Reihen“ (zwei dieser Reihen sind im Sechseck 3. Ordnung durch die Strecken

markiert) jeweils den gleichen Wert annehmen. Im Sechseck 2. Ordnung gibt es neun solcher „geraden Reihen“, im Sechseck 3. Ordnung 15.

(a) Man ermittle für jede Zahl n die Anzahl der Teilsechsecke, die für ein Sechseck n-ter Ordnung benötigt werden.

(b) Man zeige, dass es kein Magisches Sechseck 2. Ordnung geben kann, dass man also die Zahlen 1 bis 7 nicht so auf die Teilsechsecke verteilen kann, dass die Summen auf den 6 zweiteiligen Seitenreihen und den 3 dreiteiligen Mittelreihen jeweils gleich sind.

(c) Man untersuche, für welche $n > 2$ es keine Magische Sechsecke n-ter Ordnung geben kann.

Lösungshinweise:
(a) Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion findet man anhand obiger Abbildung den Anfang:

$n = 1$: 1 Sechseck
$n = 2$: 7 Sechsecke
$n = 3$: 19 Sechsecke

Als allgemeines Konstruktionsprinzip erkennt man folgende Struktur: Ein Sechseck n-ter Ordnung besteht aus $(2n - 1)$ Reihen, deren erste und letzte Reihe aus genau n Sechsecken und deren mittlere Reihe aus $(2n - 1)$ Sechsecken besteht. Damit ergibt sich für die Gesamtanzahl die Summe $A(n)$:

$$A(n) = 2 \cdot \left(n + \left(n+1\right) + \ldots + \left(2n-2\right)\right) + \left(2n-1\right)$$

Aus der bekannten Gaußschen Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen folgt:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n-2} k - \sum_{k=1}^{n-1} k \right) + \left(2n-1\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\left(2n-2\right) \cdot \left(2n-1\right)}{2} - \frac{\left(n-1\right) \cdot n}{2} \right) + \left(2n-1\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\left(4n^2 - 6n + 2\right) - \left(n^2 - n\right)}{2} + \left(2n-1\right) = 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

Lösungsvariante: Um aus einem Sechseck n-ter Ordnung ein Sechseck $(n + 1)$-ter Ordnung zu erhalten, wird ein Ring von $6n$ Teilsechsecken ergänzt. Damit gelangt man ebenfalls über die Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen zu obiger Gleichung.

(b) Gäbe es ein Magisches Sechseck 2. Ordnung, müssten die zweiteiligen Randreihen jeweils die gleiche Summe besitzen. Da aber zwei benachbarte

Randreihen ein gemeinsames Feld haben, ist dies nur möglich, wenn die Zahlen in den nicht gemeinsamen Feldern übereinstimmen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu den Eigenschaften der Magischen Sechsecke. Es kann also kein solches geben.

Lösungsvariante: Insgesamt stehen die Zahlen 1 bis 7 auf den Teilsechsecken, in der Summe ergeben diese 28. Die Gesamtsumme setzt sich aber aus 3 Teilsummen zusammen, wenn man beispielsweise die 3 senkrechten Linien betrachtet. Da 28 nicht durch 3 teilbar ist, können diese Summen nicht untereinander gleich groß sein.

(c) Verteilt man die Zahlen 1 bis $m = 3n^2 - 3n + 1$ auf die Felder eines Sechsecks n-ter Ordnung, erhält man nach der Gaußschen Summenformel für die natürlichen Zahlen von 1 bis m eine Gesamtsumme von

$$S(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(3n^2 - 3n + 1\right) \cdot \left(3n^2 - 3n + 2\right)$$

Da es $(2n - 1)$ parallele Reihen gibt (die alle die gleiche Summe tragen), muss $S(n)$ durch $(2n - 1)$ teilbar sein. Mittels Polynomdivision findet man:

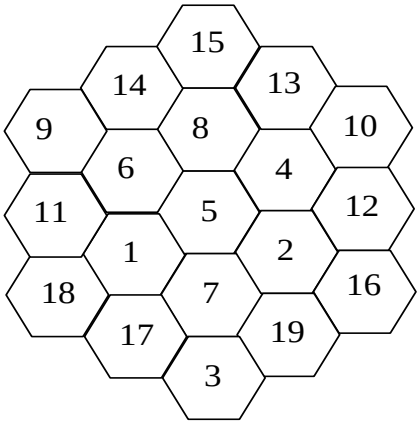
$$\frac{S(n)}{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(4n^3 - 7n^2 + 5n - 2 + \frac{n^2 \cdot \left(n^2 + 1\right)}{2n-1} \right)$$

Damit bei dieser Division eine ganze Zahl entsteht, muss der verbleibende Bruch ganzzahlig sein. Da n (und somit auch n^2) und $(2n - 1)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, muss $(n^2 + 1)$ durch $(2n - 1)$ teilbar sein. Da der Nenner ungeradzahlig ist, beeinflusst es die Teilbarkeit nicht, wenn der Zähler mit 4 multipliziert wird. Man erhält:

$$\frac{4n^2+4}{2n-1} = 2n + 1 + \frac{5}{2n-1}.$$

Dieser Ausdruck ist jedoch im Bereich der natürlichen Zahlen nur für $n = 1$ oder $n = 3$ ganzzahlig. Folglich kann es höchstens das (triviale) Magische Sechseck 1. Ordnung und Magische Sechsecke 3. Ordnung geben. Für alle anderen $n > 0$ lassen sich die Bedingungen eines Magischen Sechsecks nicht erfüllen. ❑

Hinweis: Es gibt (bis auf Drehung und Spiegelung) nur ein Magisches Sechseck (mit der Ordnung 3)! Dieses hat der Stralsunder Stadtbaurat ERNST VON HASELBERG (1827 bis 1905) bereits 1887 gefunden.



Aufgabe 7-5B. Es sei $QP(n)$ das Querprodukt von n, also das Produkt aller Ziffern der Dezimalschreibweise der natürlichen Zahl n (in Analogie zur Quersumme). Gegeben sei die Gleichung

$$n^2 - 16n + 42 = QP(n) \qquad (1)$$

(a) Man finde die kleinste echt-zweistellige Zahl n, die die gegebene Gleichung erfüllt.

(b) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $QP(n) \leq n$.

(c) Man finde alle natürliche Zahlen n, die die Gleichung (1) erfüllen.

Lösungshinweise:

(a) Um die kleinste echt-zweistellige Lösung zu finden, kann man mit 10 beginnend den Verlauf der quadratischen Gleichung der linken Seite von (1) untersuchen. Man findet:

n	$n^2 - 16n + 42$	$QP(n)$
10	-18	0
11	-13	1
12	-6	2
13	3	3

Somit ist $n = 13$ die gesuchte Lösung. Dieser Lösungsweg ist aber nur deshalb geeignet, weil die Lösung ohne lange Rechnungen gefunden werden kann.

Lösungsvariante: Da zweistellige Zahlen gesucht sind, setze man $n = 10a + b$ mit nichtnegativen einstelligen Zahlen a und b. Also gilt:

$$(10 \cdot a + b)^2 - 16 \cdot (10 \cdot a + b) + 42 = a \cdot b$$

$$100 \cdot a \cdot a + 19 \cdot a \cdot b + b^2 + 42 = 160 \cdot a + 16 \cdot b$$

Ist $a > 1$, so ist die linke Seite größer als $200 \cdot a + 38 \cdot b$, also viel größer als die rechte Seite dieser Gleichung. Somit muss $a = 1$ gelten.

Damit kann man n als $n = 10 + b$ mit einer Ziffer b schreiben. Setzt man dies in die Gleichung ein, führt dies zu einer quadratischen Gleichung:

$$(10 + b)^2 - 16 \cdot (10 + b) + 42 = 1 \cdot b$$

$$b^2 + 3 \cdot b - 18 = 0$$

Über die bekannte Lösungsformel findet man für b

$$b_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 18} = \frac{-3 \pm 9}{2}.$$

Da b eine positive Zahl sein muss, kann nur $b = 3$ eine Lösung sein, was durch eine Probe bestätigt wird.

(b) Man führe den Beweis mit der Methode der vollständigen Induktion über die Stellenzahl s.

Ind.-Anfang: Für einstellige Zahlen n ($s = 1$) gilt trivialerweise $PQ(n) = n$.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gilt für alle s-stelligen Zahlen n_s die Ungleichung

$$PQ(n_s) \le n_s.$$

Behauptung: Es gelte für $(s + 1)$-stellige Zahlen n_{s+1} die Ungleichung

$$PQ(n_{s+1}) \le n_{s+1}$$

Beweis: Es sei n_{s+1} eine $(s + 1)$-stellige Zahl der Form $n_{s+1} = a \cdot 10^s + n_s$ mit einer Ziffer a und einer s-stelligen Zahl n_s. Unter Berücksichtigung der Induktions-Voraussetzung und der Beziehung $n_s \le 10^s$ gilt

$$QP(n_{s+1}) = a \cdot QP(n_s) \le a \cdot n_s < a \cdot 10^s \le a \cdot 10^s + n_s = n_{s+1}.$$

Somit ist die Behauptung für $s + 1$ richtig.

Ind.-Schluss: Aus Induktionsanfang und –schritt folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung für alle natürlichen Stellenzahlen s.

Lösungsvariante: Sei $n = \overline{a_1 a_2 ... a_s}$ die s-stellige natürliche Zahl mit den Ziffern $a_1, a_2, ..., a_s$. Dann gilt für $s > 1$

$$\prod_{i=1}^{s} a_i = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{s-1} a_i \le a_1 \cdot 10^{s-1} \le \overline{a_1 a_2 ... a_s}$$

Hinweis: Aus beiden Lösungsvarianten folgt für $s > 1$ die strenge Ungleichung $QP(n) < n$.

(c) Wegen (b) folgt für die Gleichung (1)

$$n^2 - 16n + 42 \le n \quad \Rightarrow \quad (n-3) \cdot (n-14) \le 0$$

Dies ist nur für $3 \le n \le 14$ erfüllt. Für einstellige Zahlen gilt sogar das Gleichheitszeichen und deshalb kann nur $n = 3$ eine Lösung sein, was eine Probe

bestätigt. Weil die Gleichung (1) für $n = 14$ nicht erfüllt ist, gibt es nach (a) nur die weitere Lösung $n = 13$. ❑

Ergänzende Lösungsdiskussionen zur Serie 6

zu Aufgabe A6-3. Hat man aus den gegebenen Gleichungen das Produkt $xyz = -1$ gefunden, so gilt wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ auch:

$$1 = |xyz| = |xyz|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \le \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = 1$$

Also gilt in der bekannten Mittelungleichung das Gleichheitszeichen, woraus unmittelbar $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ folgt.

Aufgabe. Man ermittle alle Tripel $(x\,;\,y;\,z)$ reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & a^2 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & a^3 \end{array}$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

Lösungshinweise: Man kann $(a\,;\,0;\,0)$ und deren Vertauschungen als Lösung erkennen. Mittels Abschätzung lässt sich nun die Existenz weiterer Lösungen ausschließen: Sei $(x;\,y;\,z)$ eine Lösung. Wegen der Gleichung mit den Quadraten sind die Beträge von x, y und z nicht größer als der Betrag von a. Nimmt man an, dass $0 < |x| < |a|$ gelte, so findet man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left|a^3\right| = \left|x^3 + y^3 + z^3\right| &\le \left|x^3\right| + \left|y^3\right| + \left|z^3\right| = |x| \cdot x^2 + |y| \cdot y^2 + |z| \cdot z^2 \\ &< |a| \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = |a| \cdot a^2 = \left|a^3\right| \end{aligned}$$

Das ist aber Widerspruch, also gibt es keine derartige Zahl x. ❑

Aufgabe. Man finde alle Tripel $(a;\,b;\,c)$ reeller Zahlen, die folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & bc & = & 1 \\ b & + & ca & = & 1 \\ c & + & ab & = & 1 \end{array}$$

Lösungshinweise: Die Lösung (1; 1; 0) und deren Vertauschungen kann man erraten. Weiterhin kann es eine Lösung der Form $(x;\,x;\,x)$ geben, die über die

quadratische Gleichung $x+x^2=1$ ermittelt werden kann. Angenommen, es gäbe weitere Lösungen der Form (1 + *x* ; 1 + *y* ; *z*) mit reellen Zahlen *x*, *y* und *z*. Dann folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcl} 1+x & + & (1+y)\cdot z & = & 1 \\ 1+y & + & (1+x)\cdot z & = & 1 \end{array}, \qquad \text{d.h.} \quad x-y=z\cdot(x-y)$$

Daraus folgt entweder *z* = 1 (was zu den Lösungen (0; 1; 1) oder (1; 0; 1) führt oder *x* = *y* (was zu den Lösungen (1; 1; 0) oder (*a*; *b*; *c*) mit *a* = *b* = *c* führt). ❑

Aufgabe. Man löse das folgende Gleichungssystem in reellen Zahlen *x*, *y* und *z*:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 9 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & 1 \\ xy & + & yz & + & xz & = & 27 \end{array}$$

Lösungshinweise: Nach Heft 02/2020 lässt sich dieses Gleichungssystem mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes in eine kubische Gleichung überführen:

$$0=w^3-9w^2+27w-27=(w-3)^3$$

Also gilt *x* = *y* = *z* = 3. Diese Lösung hätte man aber auch erraten (und durch eine Probe bestätigen) können. Um davon ausgehend zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt, nehme man reelle Zahlen *a*, *b* und *c* an, so dass auch (*a* +3; *b* + 3; *c* + 3) eine Lösung ist. Zunächst erscheinen die damit entstehenden Gleichungen sehr komplex, sie vereinfachen sich aber schnell. Es gilt nämlich für die erste und dritte Gleichung:

$$(a+3)+(b+3)+(c+3)=9 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=0$$

$$\begin{aligned} &(a+3)(b+3)+(a+3)(c+3)+(b+3)(c+3)=27 \quad \Rightarrow \\ &\qquad ab+bc+ac+6(a+b+c)+27=27 \quad \Rightarrow \quad ab+bc+ac=0 \end{aligned}$$

Erinnern wir uns, dass für das Produkt gilt: *xyz* = 27. Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} &(a+3)(b+3)(c+3)=27 \quad \Rightarrow \\ &\qquad abc+3(ab+bc+ac)+9(a+b+c)+27=27 \quad \Rightarrow \quad abc=0 \end{aligned}$$

Also muss *a* = *b* = *c* = 0 gelten und (3; 3; 3) ist die einzige Lösung in reellen Zahlen. ❑

Ergänzungen zu Aufgaben mit Quersummen und Querprodukten

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, sodass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $Q(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren findet man die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: Es gilt $Q(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form

12; 1212; 12121212; 1212121212121212; ...

diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhält man durch Multiplikation mit einem Faktor der Form 100...001 die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch $100...001 \cdot t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. ❑

Aufgabe. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q?

Lösungshinweise: Man suche zunächst Beispiele für solche Zahlen n.

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr.

Kommt man mit diesen Beispielen schon auf folgenden Ansatz? Für $p^2 = q$ erfüllt die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^{p} 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Man muss nun „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p-mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$ -mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. ❑

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n, deren Querprodukt und Quersumme übereinstimmen?

Lösungshinweise: Da für zwei Ziffern $a, b > 1$ stets $a \cdot b \geq 2 \cdot max\{a,b\} \geq a + b$ gilt, kann man jede Zahl, deren Querprodukt größer als die Quersumme ist, durch weitere Stellen „1“ erweitern, bis die Quersumme den Wert des (unveränderlichen) Querproduktes erreicht. Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z.B. betrachte man für $n > 0$ die Zahlen

$$\underbrace{11...11}_{k-mal}\underbrace{22..22}_{n-mal}.$$

Wählt man $k = 2^n - 2n$, so ist das Querprodukt gleich 2^n und die Quersumme ebenfalls $k \cdot 1 + n \cdot 2 = 2^2 - 2n + 2n = 2^n$. ❑

Primzahlen in Wettbewerbsaufgaben

Aufgabe MO081012. Gesucht sind alle Primzahlen *p*, sodass 50 + *p* und 50 – *p* Primzahlen sind.

Lösungshinweise: Durch Probieren mit verschiedenen Primzahlen *p* stellt man schnell fest, dass für *p* > 3 entweder 50 + *p* oder 50 – *p* durch 3 teilbar sind. Tatsächlich, lässt *p* bei Division durch 3 den Rest 1 (*p* = 3 · *p´* + 1), so ist

$$50 + p = 50 + 3 \cdot p' + 1 = 3 \cdot (p' + 17)$$

durch 3 teilbar. Lässt dagegen *p* bei Division durch 3 den Rest 2 (*p* = 3 · *p´* + 2), so ist

$$50 - p = 50 - 3 \cdot p' - 2 = 3 \cdot (16 - p')$$

durch 3 teilbar. Also muss 50 – *p* selbst durch 3 teilbar sein, d.h. *p* = 47. Wegen 50 + *p* = 97 sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. ❑

Aufgabe MO420922. Man beweise, dass für jede Primzahl *p* > 5 die Zahl $p^4 - 1$ durch 120 teilbar ist.

Lösungshinweise: Es gilt

$$p^4 - 1 = \left(p^2 - 1\right)\left(p^2 + 1\right) = (p-1)(p+1)\left(p^2 + 1\right).$$

Da *p* eine ungerade Primzahl ist, sind $p - 1$ und $p + 1$ geradzahlig und eine davon sogar durch 4 teilbar, also ist 8 ein Teiler von $p^4 - 1$.
Da *p* nicht durch 3 teilbar ist, ist *p* – 1 oder *p* + 1 durch 3 teilbar.
Da *p* nicht durch 5 teilbar ist, gilt entweder $p = 5k \pm 1$ oder $p = 5k \pm 2$ (mit geeigneter ganzzahliger Zahl *k*). Im ersten Fall ist 5 ein Teiler von $p^2 - 1$, im zweiten Fall von $p^2 + 1$.

Also ist $p^4 - 1$ durch $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ teilbar. ❑

Hinweis: Diese Aufgabe hat thematisch einen frühen Vorgänger in **MO081036**. Es seien $p > q > 3$ zwei Primzahlen. Man zeige: Die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch 24 teilbar.

Lösungshinweise: Man forme die Differenz zweier Quadratzahlen zu einem Produkt um:

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$$

Beide Primzahlen sind ungerade, also ist sowohl die Differenz als auch die Summe durch 2 teilbar. Weil p und q bei Division durch 4 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 3) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 3), so ist sogar die Differenz bzw. die Summe durch 4 teilbar. Also ist das Produkt insgesamt durch 8 teilbar.

Weil p und q bei Division durch 3 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 2) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 2), so ist die Differenz bzw. die Summe durch 3 teilbar. Also ist das Produkt stets durch 3 teilbar.
Insgesamt ist die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch $8 \cdot 3 = 24$ teilbar. ❑

Aufgabe 261222. Es seien $p > q > r$ drei aufeinanderfolgende Primzahlen. Die Summe ihrer Quadrate sei ebenfalls eine Primzahl. Ermitteln Sie alle $(p; q; r)$ mit dieser Eigenschaft.

Lösungshinweise: Für eine nicht durch 3 teilbare Zahl lässt deren Quadrat den Rest 1 bei Division durch 3. Sind also alle drei Primzahlen nicht durch 3 teilbar, so ist die Summe ihrer Quadrate durch 3 teilbar. Folglich muss sich unter den Primzahlen die Zahl 3 befinden, um die Bedingungen der Aufgabe erfüllen zu können:

(2; 3; 5): $4 + 9 + 25 = 38$, keine Primzahl
(3; 5; 7): $9 + 25 + 49 = 83$, Primzahl.

Damit ist das Tripel (3; 5; 7) einzige Lösung der Aufgabe. ❑

Aufgabe MO460934. Es seien p und q zwei Primzahlen mit $2 < p < q$, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt. Man zeige, dass sich $p + q$ in ein Produkt von mindestens drei echten Faktoren zerlegen lässt.

Lösungshinweise: Weil $p + q$ eine gerade Zahl ist, ist $\frac{p+q}{2}$ eine natürliche Zahl, die zwischen p und q liegt. Da sie damit wegen der Voraussetzung selbst

keine Primzahl sein kann, kann sie in ein Produkt von mindestens zwei Faktoren zerlegt werden. Der dritte Faktor von $p + q$ ist dann noch die Zahl 2. ❑

Werden in Aufgaben aus Primzahlen weitere Primzahlen „konstruiert“, so können in einen ersten Lösungsansatz zunächst die Primzahlen 2 und 3 gesondert betrachtet werden, die sich im Gegensatz zu allen anderen Primzahlen nicht in der Form $6k \pm 1$ darstellen lassen.

Oft lohnt es auch, die Primzahl 5 als Sonderfall zu behandeln, um dann zu zeigen, dass die Aufgabe für Primzahlen größer 5 keine weiteren Lösungen hat.

Aufgabe MO500936. Man bestimme alle Paare (p; q) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Es sei $r = p^2 - 3q - 1$. Wäre $p = 2$, dann ist $r = 3 - 3q > 0$ für $q > 1$ nicht möglich. Für $p = 3$ findet man die Lösung $q = 2$. Auch für $p = 5$ findet man eine Lösung: $q = 7$.

Es sei nun (p; q) ein Lösungspaar mit $p > 5$. Dann ist p nicht durch 3 teilbar und p^2 lässt bei Division durch 3 den Rest 1. Dann ist aber die Zahl r durch 3 teilbar und folglich muss $r = 3$ gelten. Also gilt

$$3q = p^2 - 4 = (p - 2)(p + 2).$$

Da 3 und q beides Primzahlen sind und keiner der beiden rechten Faktoren 1 ist, muss der eine Faktor gleich 3 und der andere Faktor gleich q sein. Da $p + 2 > 3$ ist, gilt $p - 2 = 3$, also $p = 5$ im Widerspruch zu $p > 5$.

Somit sind die Paare (3; 2) und (5; 7) die einzigen Lösungen der Aufgabe. ❑

Analogiebetrachtungen zwischen Ebene und Raum

„In Analogie“ wird häufig und im Allgemeinen zweifelsfrei benutzt. Dabei ist in der Mathematik nicht genau definiert, was unter „analog“ zu verstehen ist. Meist meint man Beschreibungen der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen. Solche Wortpaare sind beispielsweise „Ebene/Raum“, „Gerade/Ebene“ oder „Punkt/Gerade“. Daraus lassen sich Sätze formulieren wie:

> *Wenn zwei Geraden/Ebenen in der Ebene/im Raum nicht parallel sind, dann haben sie einen Punkt/eine Gerade gemeinsam.*

oder

> *In der Ebene/Im Raum existieren drei Punkte/Geraden, die nicht auf einer Geraden/Ebene liegen.*

aber auch folgende Analogie ist möglich:

> *In der Ebene/im Raum existieren drei/vier Punkte, die nicht auf einer Geraden/in einer Ebene liegen.*

Ein anschauliches Beispiel Ziel solcher Analogiebetrachtungen ist es, die Problemstellung zu veranschaulichen, Beweisideen zu übertragen oder neue Fragestellungen zu finden.

Aufgabe. In einer Ebene sind drei Punkte *A, B, C* gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden gibt es in dieser Ebene, so dass die drei Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?

Lösungshinweis: Man muss folgende Fälle unterscheiden.
(1) Die Punkte *A, B, C* liegen in ein und derselben Halbebene bezüglich einer Geraden *g*. Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von *g* haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Geraden.

(2) Genau einer der drei Punkte wird durch *g* von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei *C*. Damit *A* und *B* den gleichen Abstand zu *g* haben, muss *g* parallel zur Geraden g_{AB} durch *A* und B liegen. Außerdem muss *g* das Lot von *C* auf g_{AB} halbieren. Folglich ist *g* eindeutig bestimmt. Da jeder der drei Punkte durch eine Gerade von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 3 Geraden der Ebene entsprechend der Aufgabenstellung. ❑

Analoge Aufgabe im Raum: Im Raum sind vier Punkte *A, B, C, D* gegeben, die nicht auf einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so dass die 4 Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?

Lösungshinweise: In Analogie zum obigen Beweis führe man eine Fallunterscheidung.

(1) Alle vier Punkte liegen in ein und demselben Halbraum bezüglich einer Ebene ε. Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von ε haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Ebene.

(2) Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei *D*. Damit *A, B, C* den gleichen Abstand zu ε haben, muss ε parallel zur Ebene ε_{ABC} durch A, B und C liegen. Außerdem muss ε das Lot von D auf ε_{ABC} halbieren. Folglich ist ε eindeutig bestimmt. Da jeder der vier Punkte durch eine Ebene von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 4 Ebenen entsprechend der Aufgabenstellung.

Im Raum gibt es aber nun noch den Fall (3): In jedem Halbraum einer Ebene ε befinden sich genau 2 der vier Punkte, etwa A und B in einem und C und D im anderen Halbraum. Dann sind die Geraden g_{AB} durch A und B sowie g_{CD} durch C und D windschief zueinander (weil sonst die 4 Punkte in einer Ebene liegen würden). Zu zwei windschiefen Geraden gibt es aber genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch die Geraden g_{AB} und g_{CD}. Dann gibt es auch eine dazu parallele Ebene, den deren Abstand gerade halbiert. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, von 4 Punkten 2 Punkte auszuwählen, existieren im Fall (3) folglich 3 Ebenen der geforderten Art.

Insgesamt gibt es also 7 Ebenen des Raumes, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen. ❑

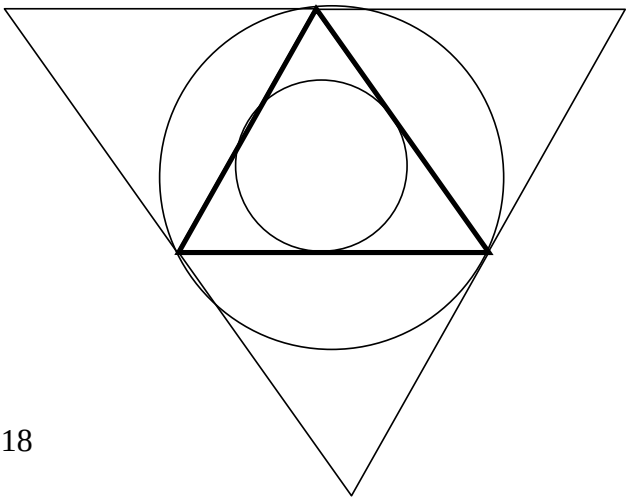
Die Betrachtung des ebenen Problems hilft also nicht, alle Fälle des räumlichen Problems zu erkennen. In folgender Variante ist aber die Analogie „perfekt“:

Aufgabe. In der Ebene (im Raum) sind vier (fünf) Punkte gegeben, die weder auf einer Geraden (in einer Ebene) noch auf einem Kreis (einer Kugel) liegen. Wie viele verschiedene Geraden oder Kreise (Ebenen oder Kugeln) gibt es, so dass die vier (fünf) Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden (Ebenen) oder einem solchen Kreis (einer solchen Kugel) haben?

Bekannt ist sicherlich die folgende **Aufgabe.** Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände eines Punktes im Innern eines gleichseitigen Dreiecks (regelmäßigen Tetraeders) zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseitenflächen) nicht von der Lage des Punktes abhängt.

Lösungshinweis: Sowohl im ebenen als auch im räumlichen Problem wird der Beweis analog geführt: Man betrachte die drei Teilflächen (vier Teilkörper), die durch die Verbindung des inneren Punktes mit je zwei Eckpunkten (drei Eckpunkten) entstehen. Der Vergleich der Summe der zugehörigen Flächeninhalte (Volumina) mit dem Flächeninhalt (Volumen) des Dreiecks (Tetraeders) zeigt, dass die Summe der Abstände des inneren Punktes zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseitenflächen) gleich der Höhe des Dreiecks (Tetraeders) ist. ❑

Aufgabe. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks, so gilt $R \geq 2r$.



Lösungshinweise: Ausgehend vom Dreieck konstruiere man ein Dreieck mit vierfachem Flächeninhalt, indem zu jeder Seite eine parallele Gerade

durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gezeichnet wird. Der Inkreis des größeren Dreiecks ist doppelt so groß wie der Inkreis des Ausgangsdreiecks. Der Umkreis des Ausgangsdreiecks ist aber mindestens so groß wie der Inkreis des größeren Dreiecks, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

❑

In Analogie beweise man die zugehörige räumliche Aussage.

Aufgabe. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Tetraeders, so gilt $R \geq 3r$.

Weitere Analogien zwischen ebenen und räumlichen Fragestellungen:

Aufgabe. In jedem Parallelogramm gilt, dass die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Diagonallängen ist.

Analoge Aufgabe im Raum. In jedem Parallelepiped gilt, dass die Summe der Quadrate aller Kantenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Raumdiagonallängen ist.

Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks und den drei Eckpunkten des Dreiecks kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einen anderen Punkt der Ebene und den drei Eckpunkten des Dreiecks.

Analoge Aufgabe im Raum. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen Mittelpunkt der Umkugel eines regelmäßigen Tetraeders und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einen anderen Punkt des Raumes und den vier Eckpunkten des Tetraeders.

Aufgabe. Gegeben seien in der Ebene drei voneinander verschiedene parallelen Geraden. Man zeige, dass ein gleichseitiges Dreieck existiert, welches auf jeder der gegebenen Geraden einen Eckpunkt hat.

Analoge Aufgabe im Raum. Gegeben seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen. Man zeige, dass ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches auf jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

Aufgabe. In einer Ebene seien drei Kreise so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch die gemeinsamen Sehnen zweier Kreise bestimmt sind, in genau einem Punkt schneiden.

Analoge Aufgabe im Raum. Im Raum seien drei Kugeln so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer

Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Ebenen, die jeweils durch die gemeinsamen Schnittkreise zweier Kugeln bestimmt sind, in genau einer Geraden schneiden.

Nicht immer ist der analoge Begriff so offensichtlich. Man betrachte beispielsweise den

Satz. Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 2 : 1.

Nun ergibt sich die Frage, was in Analogie zur Seitenmitte einer Dreiecksseite die Flächenmitte einer Tetraederfläche ist. Da in jeder Dreiecksseite die Seitenhalbierenden die Flächen in zwei flächengleiche Hälften teilt, könnte man an eine Ebene denken, die ausgehend von einem Eckpunkt den Tetraeder in zwei volumengleiche Teilkörper teilt. Davon gibt es aber drei verschiedene, die sich alle in einer gemeinsamen Geraden schneiden, der so genannten Schwerlinie. Deren Schnittpunkt mit der Tetraederfläche ist der Schwerpunkt. Es gilt

Satz. Die vier Schwerelinien eines Tetraeders schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 3 : 1.

Gleichungspyramiden

Gib es unendlich viele Gleichungsbeispiele der folgenden Art?

$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 + ... + 14 = 15 + 16 + ... + 20$$

Die Gleichung wird durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$1 + 2 + ... + m = (m + 1) + (m + 2) + ... + n$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen kann man dies zusammenfassen zu

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} .$$

Löst man dies nach n auf, also

$$n = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8m(m+1)+1} \ ,$$

so ist *n* nur dann wie gefordert ganzzahlig, wenn der Radikant eine Quadratzahl ist, also wenn es eine ganze Zahl *x* gibt mit $x^2 = 8m(m+1)+1$. Setzt man nun noch $y = (2m + 1)$, so gibt es offensichtlich unendlich viele Gleichung der geforderten Art, wenn es unendlich viele Lösungen $(x\,;y)$ der Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$ gibt.

Mit (1 ; 1) findet man eine erste Lösung. Auch (7 ; 5) erfüllt die Gleichung. Dieses Lösungspaar führt zur ersten Gleichung der Pyramide:

$$m = \frac{y-1}{2} \quad ; \quad n = \frac{x-1}{2}$$

Das nächste, durch systematisches Probieren zu findende Lösungspaar (41 ; 29) passt zur 2. Gleichung.

Ein ähnliches Beispiel – man betrachte folgende Gleichungspyramide:

$$3+4+5+6=3\cdot 6$$
$$15+16+...+34+35=15\cdot 35$$

Die Gleichung wird ebenfalls durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$m+(m+1)+...(n-1)+n=m\cdot n$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen kann man dies zusammenfassen zu

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{m\cdot(m+1)}{2} = m\cdot n$$

d.h.

$$m^2 + 2mn - m - n - n^2 = 0$$

also $$m = -\frac{2n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4} + n^2 + n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-(2n-1) \pm \sqrt{8n^2+1} \right)$$

Wieder gibt es nur ganzzahlige Lösungen, wenn der Radikant eine Quadratzahl ist, also wenn eine natürliche Zahl *x* existiert mit $x^2 = 8n^2 + 1$. Setzt man nun $y = 2n$, so lässt sich die Frage nach der Existenz unendlich vieler Gleichungen der geforderten Art bejahend beantworten, wenn es unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ gibt.

Mit (3 ; 2) findet man leicht eine Lösung (sie führt zu der trivialen Gleichung $1=1\cdot1$) und daraus mittels Rekursion unendlich viele weitere Lösungen.
Auch folgende Fragestellung führt auf die Gleichung $x^2 - 2y^2 = \pm1$:

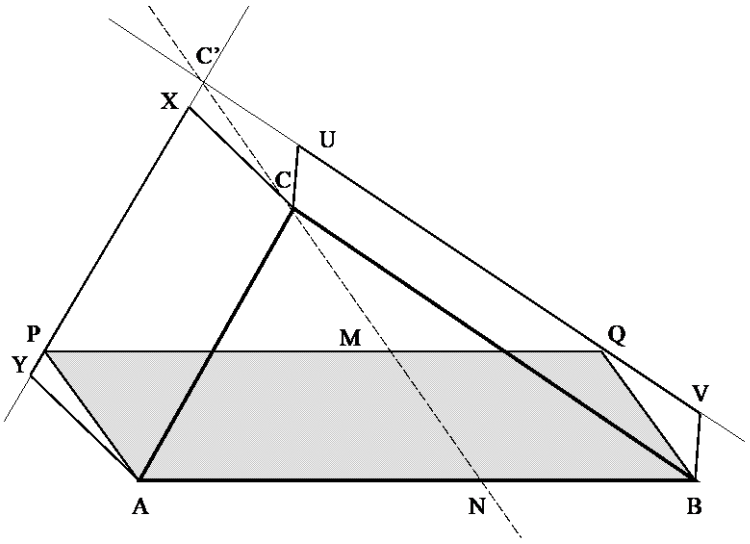
Bekanntlich gibt es keine gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen (warum?). Man nennt rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen fast gleichschenklig, wenn sich zwei Seitenlängen nur um 1 Längeneinheit (LE) unterscheiden (Beispiel: 3 ; 4 ; 5).

Leicht zeigt man (wie?), dass es unendlich viele fast gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke gibt, bei denen die Hypotenuse um 1 LE länger als eine Kathete ist (Beispiel: 5 ; 12 ; 13). Gibt es auch unendlich viele fast gleichschenklige Dreiecke, bei denen sich die Katheten um 1 LE unterscheiden?

Bekannte Sätze der Mathematik: SATZ VON PAPPOS[2].

Es sei *ABC* ein beliebiges Dreieck und *ABPQ* ein beliebiges Parallelogramm über der Dreieckseite *AB*, das von der Geraden *AB* aus auf derselben Seite liegt wie der Punkt *C*.

Dann ist der Flächeninhalt des Parallelogramms *ABPQ* gleich der Summe der Flächeninhalte zweier Parallelogramme *BCUV* und *ACXY*, die über den anderen beiden Dreieckseiten liegen, und deren *BC* bzw. *AC* gegenüberliegende Seiten durch die Eckpunkte *P* bzw. *Q* des Parallelogramms *ABPQ* verlaufen.

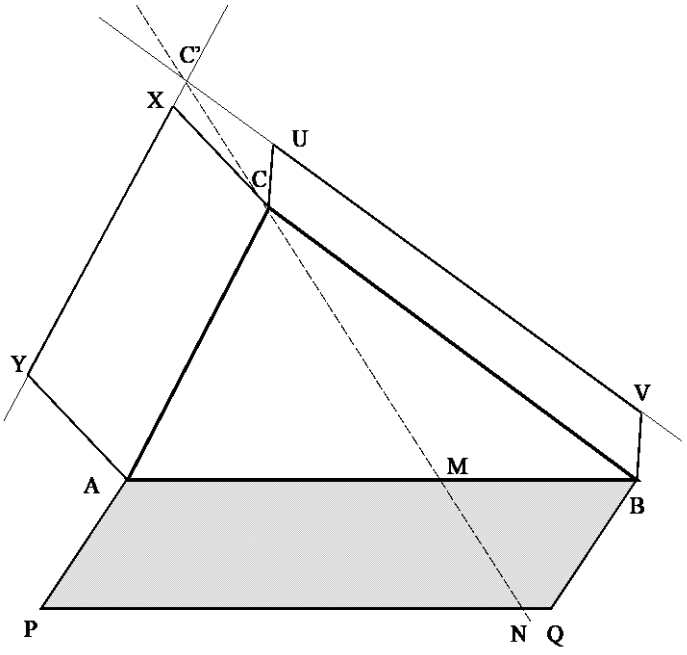


Beweis: Die Parallelen zu *AC* durch *P* und zu *BC* durch *Q* schneiden sich in einem Punkt *C*'. Die Gerade durch *C*' und *C* schneidet die Seite *PQ* des Parallelogramms in *M* und die Seite *AB* in *N*. Diese Gerade durch *MN* ist parallel zu *PA* bzw. *BQ* und insbesondere sind deshalb *PA* und *BQ* auch parallel zu *CC*'.

Damit sind das Parallelogramm *ACC'P* flächengleich zum Parallelogramm *ACXY* (gleiche Grundseite *AC* und gleiche Höhe) und das Parallelogramm *ANMP* flächengleich zum Parallelogramm *ACC'P* (gleiche Grundseite *AP* und

[2] PAPPOS VON ALEXANDRIA (um 300 n.d.Z.) war ein griechischer Geometer.

gleiche Höhe). Also ist das Parallelogramm *ACXY* flächengleich zum Parallelogramm *ANMP*.



In Analogie zeigt man, dass das Parallelogramm *BCUV* flächengleich zum Parallelogramm *BQMN* ist. Da die Parallelogramme *ANMP* und *BQMN* zusammen das Parallelogramm *ABQP* ergeben, folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Hinweis: Ist das Dreieck *ABC* bei *C* rechtwinklig und werden als spezielle Parallelogramme Quadrate betrachtet, so geht der SATZ VON PAPPOS in den SATZ DES PYTHAGORAS über.

Die Ausrichtung des Parallelogramms *ABQP* dient nur der Konstruktions-beschreibung. Beginnt man die Konstruktion mit zwei beliebigen Parallelo-grammen über den Seiten *AC* bzw. *BC*, so bezeichne man den Schnittpunkt der Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die Seiten der Parallelogramme mit *C'*. Die Gerade durch *CC'* schneide *AB* in einem Punkt *M*. Nun trage man in *M* die Länge der Strecke *CC'* ab und markiere den Punkt *N*. Konstruiert man ein Parallelogramm über *AB* so, dass *N* auf der zu *AB* parallelen Seite des Parallelogramms liegt, so gilt der SATZ VON PAPPOS für die drei derart konstruierten Parallelogramme.

Vorläufige Seminarankündigung

Es ist vorgesehen, das 1. Chemnitzer Seminar am Samstag, dem 26. September 2020 (09:00 Uhr bis gegen 12:30 Uhr), an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz durchzuführen – natürlich vorausgesetzt, derartige Seminare sind zugelassen und mit Hygienekonzept unter Beachtung der öffentlichen Vorgaben. Bitte Termin vormerken und die Einladung im Heft 07/2020 beachten.

Impressum

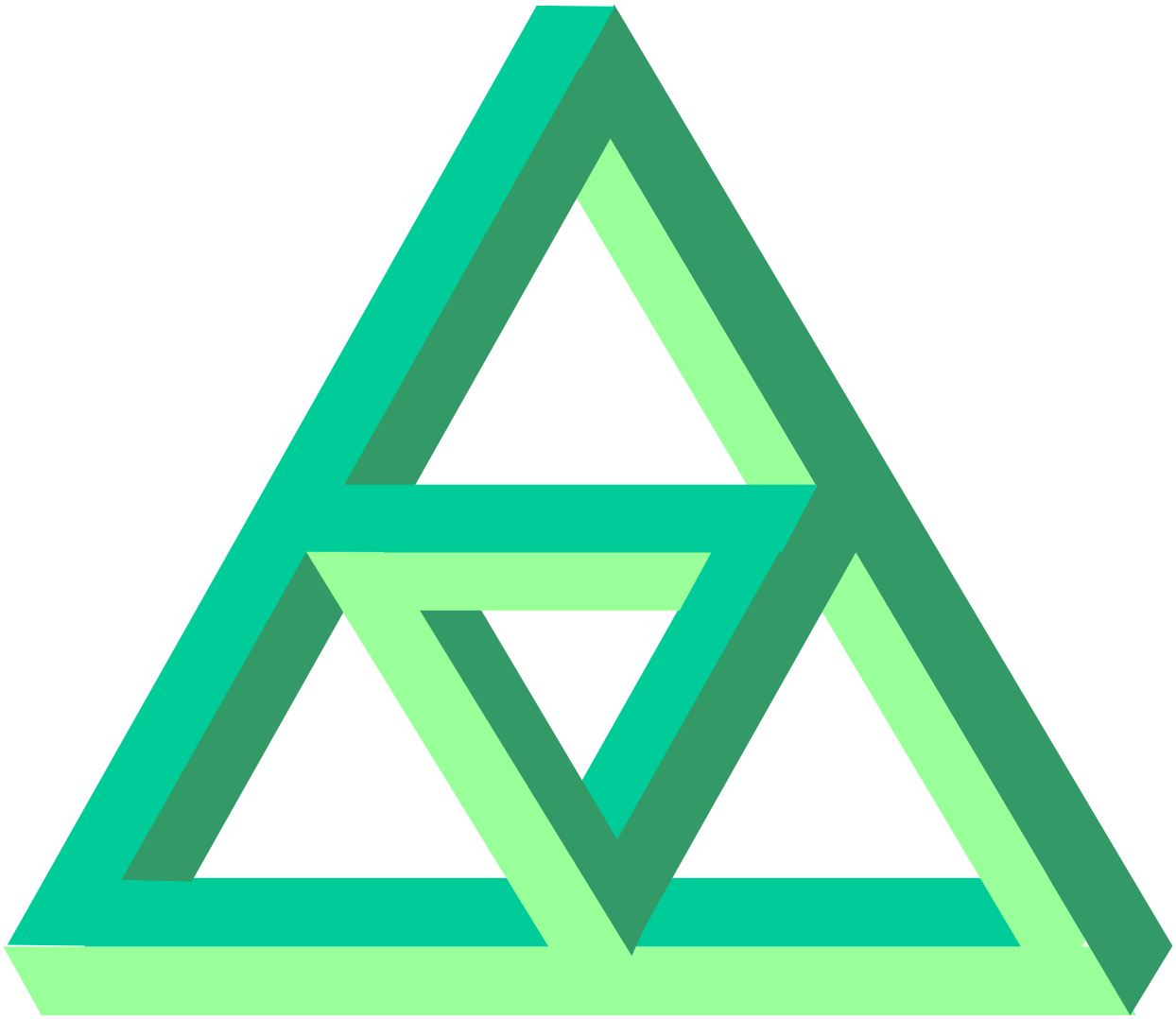
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **Mathematik zu Chemnitz e.V.** an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 2 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 9 / 2020 19. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 2

Aufgabe 2-1[1]. Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten Seitenlängen konstruiert werden. Mit einem Spielwürfel werden die Seitenlängen ermittelt, wobei die jeweils geworfene Augenzahl die Länge einer Seite in cm angibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus drei nacheinander gewürfelten Zahlen *a, b* und *c* ein Dreieck mit den Seitenlängen *a* cm, *b* cm und *c* cm konstruiert werden kann.

Lösungshinweis: Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichseitigen Dreiecks zu würfeln: (1, 1, 1), ..., (6, 6, 6).

Es gibt unter Beachtung der Dreiecksungleichung genau folgende Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln:

für die Basislänge 1 sind alle Seitenlängen von 2, 3, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 2 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 3 sind alle Seitenlängen von 2, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 4 sind alle Seitenlängen von 3, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 5 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 6 möglich,
für die Basislänge 6 sind alle Seitenlängen von 4, 5 möglich.

Insgesamt sind es 5 + 4 + 4 + 3 +3 + 2 = 21 Kombinationen. Für ein Tripel (*a, b, b*) mit $a \neq b$ gibt es aber drei verschiedene Wurffolgen, sodass es insgesamt $3 \cdot 21 = 63$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln.

Es bleiben noch die Möglichkeiten, bei denen die Seitenlängen paarweise verschieden sind. Dazu betrachte man zunächst die Tripel, bei denen die Zahlen der Größe nach aufsteigend angeordnet sind. Unter Beachtung der Dreiecksungleichung sind es 7 Tripel:

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6) und (4, 5, 6).

Für jedes der Tripel (*a, b, c*) gibt es aber 6 verschiedene Wurffolgen, sodass es $6 \cdot 7 = 42$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines solchen Dreiecks zu würfeln.

Insgesamt liefern 6 + 63 + 42 = 111 Wurffolgen die Seitenlängen eines Dreiecks. Da es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschiedene Wurffolgen gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Erwürfeln der Seitenlängen eines Dreiecks

$$\frac{111}{216} = \frac{37}{72} \approx 51{,}4\% .$$ ❑

[1] Diese Aufgabe wurde in der 1. Stufe der 53. MO in Klassenstufe 9/10 gestellt: MO531016

Hinweis: Anstatt alle zulässigen Wurffolgen zu suchen, können natürlich auch die Wurffolgen angegeben werden, bei denen aus den entsprechenden Seitenlängen kein Dreieck gebildet werden kann, weil die Dreiecksungleichung nicht gilt. Auch hierbei bietet sich die Fallunterscheidung wie oben an, um die Vielfachheit der Zahlenkombinationen systematisch zu erfassen.

Alle 6 regelmäßigen Dreiecke sind konstruierbar.
Es gibt 9 Zahlenkombinationen, aus denen (wegen Verletzung der Dreiecksungleichung) kein Dreieck konstruiert werden kann:

(1, 1, 2), ..., (1,1,6), (2, 2, 4), ..., (2, 2, 6), (3, 3, 6)

Da jede dieser Kombination in 3 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $9 \cdot 3 = 27$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

Es gibt 13 Zahlenkombinationen aus paarweise verschiedenen Zahlen, aus deren Zahlen kein Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen konstruiert werden können:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6),
(1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 6)

Da jede dieser Kombination in 6 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $13 \cdot 6 = 78$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

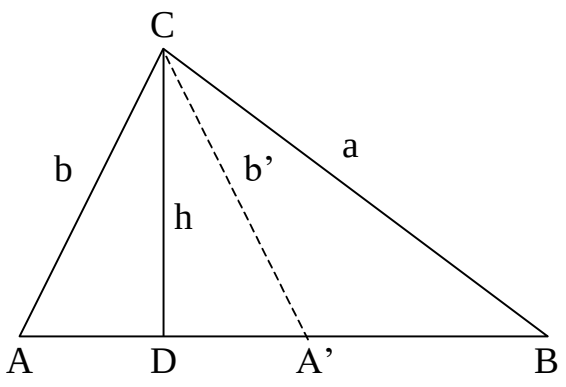
Insgesamt gibt es also $27 + 78 = 105$ Kombinationen mit dieser Eigenschaft, also

$$\frac{105}{216} = \frac{35}{72} \approx 48{,}6\% \,.$$

aller möglichen Kombinationen beim Würfeln mit 3 Würfel.

Aufgabe 2-2. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines Dreiecks. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungshinweise: Es sei *ABC* ein geeignetes Dreieck und die Seiten *a* und *b* sowie die Höhe *h* von *C* auf *AB* haben die genannten Maßzahlen. Da sowohl im rechtwinkligen Teildreieck *ADC* als auch im rechtwinkligen Teildreieck *DBC* jeweils *h* eine Kathete ist, muss *h* in beiden Fällen kleiner sein als die zugehörigen Hypotenusen *b* bzw. *a*.



Folglich gilt für die Maßzahl der Höhe $h = 12$.

Sei nun o.B.d.A. $b = 13$. Dann gilt wegen des Satzes des Phytagoras im Dreieck *ADC* für die Länge $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ und im Dreieck *DCB* für die Länge $\overline{DB} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Also lautet die Maßzahl der dritten Seite für das Dreieck *ABC* (mit Höhe *h* innerhalb des Dreiecks) 9 + 5 = 14 und für das Dreieck *A'BC* (mit Höhe *h* außerhalb der Dreiecksfläche) 9 – 5 = 4. Damit gilt für die Maßzahl des gesuchten Flächeninhalts

$$A_{ABC} = \frac{12 \cdot 14}{2} = 84 \quad \text{bzw.} \quad A_{A'BC} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24. \qquad \square$$

Aufgabe 2-3[2]. Es sei $s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Man berechne s^2 und s^3 und gebe für *s* einen rationalen Wert an!

(*Hinweis:* Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Lösungshinweise: Man setze $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Wegen $14\sqrt{2} < 14 \cdot 1{,}42 < 20$ sind *u* und *v* positive Zahlen.

(*Hinweis:* Solche groben Abschätzungen sind zulässig, um ohne Taschenrechner die Ungleichungen zu bestätigen.) Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der binomischen Formel

$$u^3 \cdot v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 20^2 - (14\sqrt{2})^2 = 8.$$

Also gilt $u \cdot v = 2$ .Weiterhin gilt stets

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

Setzt man nun die ermittelten Werte ein, so findet man die kubische Gleichung

$$s^3 - 6s - 40 = 0.$$

Eine Lösung $s_1 = 4$ findet man durch Probieren. Somit lässt sich die Gleichung durch Abspalten des Linearfaktors $(s - 4)$ umformen zu

$$s^3 - 6s - 40 = (s - 4) \cdot (s^2 + 4s + 10).$$

Wegen $s^2 + 4s + 10 = (s + 2)^2 + 6 \geq 6 > 0$ ist erkennbar, dass es keine weiteren reellwertigen Lösungen geben kann. Der gesuchte rationale Wert für *s* beträgt somit 4, die Potenzen entsprechend $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$. $\square$

[2] MO-Klassiker: MO011043 (1961/62)

Hinweis: Es ist erforderlich, nach allen Lösungen der kubischen Gleichung zu suchen. Es ist zwar offensichtlich, dass es nur einen Wert für *s* geben kann. Infolge der Umformungen könnten aber Scheinlösungen entstehen, die erst durch eine Probe (hier im Sinne von Abschätzungen) ausgeschlossen werden können. Da aber nur eine reellwertige Lösung existiert, ist diese auch (ohne Probe) die Lösung der Aufgabe.

Lösungsvariante: Aufgrund der speziellen Struktur der Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen kann man nach Werten für *a* und *b* suchen, für die gilt:

$$20 \pm 14\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^3.$$

Nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich findet man das Gleichungssystem:

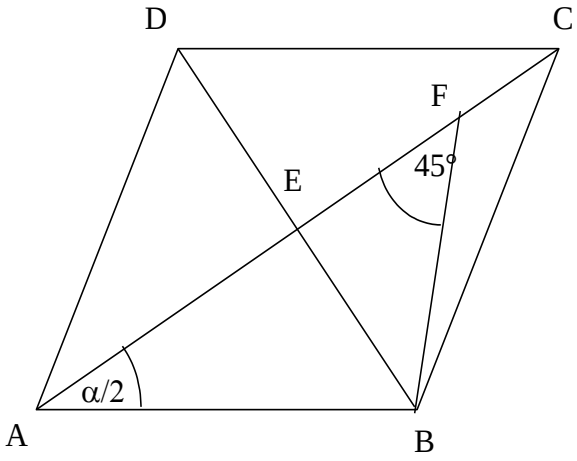
$$a^3 + 6 \cdot a \cdot b^2 = 20$$
$$3 \cdot a^2 \cdot b + 2 \cdot b^3 = 14$$

Für die Lösungsfindung durch Probieren suche man zunächst positive ganzzahlige Werte für *a* und *b*. Wegen $2 \cdot b^3 \geq 16$ für $b \geq 2$ kann nur $b = 1$ gelten. In diesem Fall ist $a = 2$ zu erkennen. Also gilt

$$s = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{2}\right)^3}.$$

Da die Ausdrücke in den Klammern positiv sind, ergibt sich unmittelbar die Lösung $s = 4$.

Aufgabe 2-4[3]. Konstruieren Sie einen Rhombus *ABCD* aus $e + f$ und α. Dabei bedeutet *e* die Länge der Diagonalen *AC*, *f* die Länge der Diagonalen *BD* und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.



Lösungshinweise:
Analyse: Im Rhombus gilt für die Diagonalen stets:

- sie halbieren einander,
- sie stehen senkrecht aufeinander
- sie halbieren je zwei gegenüber liegende Innenwinkel.

Ist *E* der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus *ABCD*, so gilt also

[3] MO-Klassiker – MO051033 (1965/66)

Das Dreieck *ABE* ist also rechtwinklig und die Summe seiner Kathetenlängen ist gleich $\frac{1}{2}\cdot(e+f)$. Ist *F* der Punkt auf dem von *A* ausgehenden Strahl durch *E* mit $\overline{AF}=\frac{1}{2}\cdot(e+f)$, so ist das Dreieck *BEF* ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse *BF*, da $\left|\overline{EF}\right|=\left|\overline{EB}\right|=\frac{1}{2}\cdot f$. Daher gilt $\angle EFB=45°$.

Konstruktion: Man konstruiert ein Dreieck *AFB* aus der Seite *AF* der Länge $\frac{1}{2}\cdot(e+f)$ und den Winkeln $\angle AFB=45°$ und $\angle BAF=\frac{1}{2}\cdot\alpha\,(<90°)$. Danach konstruiert man die Spiegelpunkte *D* von *B* an der Geraden g_{AF} und *C* von *A* an der Geraden g_{BD}.

Beweis: Jedes derart konstruierte Viereck *ABCD* ist ein Rhombus der verlangten Art, denn wegen der Konstruktion gilt

$$\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}\right|,\quad \left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BC}\right| \text{ und } \left|\overline{BC}\right|=\left|\overline{CD}\right|.$$

Also ist *ABCD* ein Rhombus. Es sei weiterhin *E* der Fußpunkt des Lotes von *B* auf g_{AC}. Wegen $\angle BAF<90°$ liegt *E* auf *AF*. Wegen $\angle EFB=\angle AFB=45°$ ist auch $\angle EBF=45°$ und daher $\left|\overline{BE}\right|=\left|\overline{EF}\right|$. Da *E* der Diagonalenschnittpunkt im Rhombus *ABCD* ist und wegen

$$\frac{1}{2}\cdot(e+f)=\left|\overline{AF}\right|=\left|\overline{AE}\right|+\left|\overline{EF}\right|=\left|\overline{AE}\right|+\left|\overline{EB}\right|$$

ist $e+f$ die Summe der Diagonalenlängen in *ABCD*. Wegen

$$\angle BAD=\angle BAF+\angle FAD=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$$

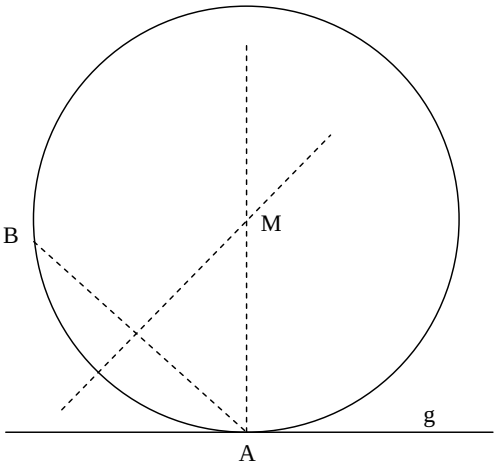
ist auch die Bedingung $\angle BAD=\alpha$ erfüllt.

Existenz und Eindeutigkeit: Die Konstruktion ist für jeden positiven Wert von $e+f$ und für jede Winkelgröße $\alpha < 180°$ stets auf genau eine Weise ausführbar. Für $\alpha\geq 180°$ ist die Konstruktion nicht ausführbar. Es gibt dann keinen Rhombus, der allen geforderten Bedingungen genügt. ❑

Aufgabe 2-5A. Von einem Kreis sind zwei Punkte *A* und *B* und eine Tangente *g* gegeben. Man konstruiere den Kreis, falls

(a) der Punkt *A* auf *g* liegt.
(b) die Gerade durch *A* und *B* parallel zu *g* ist.
(c) die Gerade durch *A* und *B* die Tangente *g* in einem Punkt *S* schneidet, der von *A* und *B* verschieden ist.

(*Hinweis:* Aus den Teilaufgaben (b) und (c) ist ersichtlich, dass *A* und *B* voneinander verschiedene Punkte sind, weil sonst keine Gerade definiert wäre. Es wäre aber besser gewesen, im Aufgabentext explizit von "zwei voneinander verschiedenen Punkten *A* und *B*" zu schreiben.)



Lösungshinweise

(a) *Analyse:* Liegt der Punkt *A* auf der Tangente *g*, so ist *A* der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente und der Mittelpunkt *M* liegt auf der Senkrechten in *A* zu *g*. Zudem befindet sich der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten der Sehne *AB*.

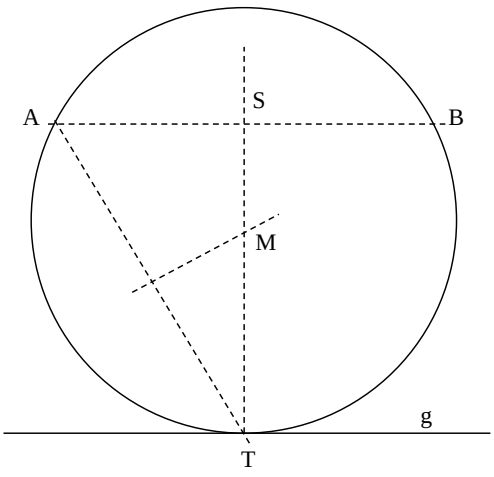
Konstruktionsbeschreibung:

- Man errichte in *A* die Senkrechte zu *g.*
- Man verbinde *A* und *B* und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte.
- Der Schnittpunkt *M* beider so konstruierten Geraden ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius $r = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Liegt der Punkt *B* nicht ebenfalls auf der Tangente, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar. Liegt dagegen der Punkt *B* auf der Tangente, hätte der Kreis zwei verschiedene Berührungspunkte mit dieser Tangente, d.h. in diesem Fall existiert kein Kreis, der die Aufgabenstellung erfüllt.

(b) *Analyse:* Ist die Gerade durch *A* und *B* parallel zur Tangente *g*, so liegt der Kreismittelpunkt *M* auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, deren Schnittpunkt mit *g* der Punkt *T* sei. Da *T* ebenfalls ein Punkt auf der Kreisperipherie ist, liegt *M* auch auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AT}$.

Konstruktionsbeschreibung:

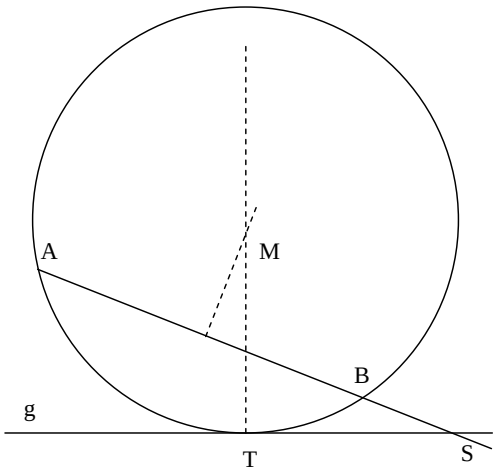


- Man verbinde *A* und *B* und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Tangente sei *T*, ihr Fußpunkt sei *S*.
- Man verbinde *A* und *T* und errichte auf der Strecke $\overline{AT}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Geraden durch *S* und *T* sei *M*.
- Der Punkt *M* ist der gesuchte Kreismittelpunkt, sein Radius beträgt $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$.

-

Existenz und Eindeutigkeit: Da die Punkte *A* und *B* nicht auf der Tangente *g* liegen, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar.

(c) *Analyse:* Angenommen, *T* sei der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente *g*. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Es genügt also, die Länge $\overline{ST}$ zu konstruieren (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes in rechtwinkligen Dreiecken). Ist *T* bekannt, so ist der Kreismittelpunkt *M* der Schnittpunkt der Senkrechten zu *g* in *T* und der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.



Konstruktionsbeschreibung:

- In einer Hilfskonstruktion ist auf einer Geraden *h* ein Punkt *S'* zu markieren, auf der einen Seite von *S'* auf *h* eine Strecke der Länge $\overline{SA}$ (man erhält den Punkt *A'*), auf der anderen Seite von *S'* auf *h* eine Strecke der Länge $\overline{SB}$ abzutragen (man erhält den Punkt *B'*). Um den Mittelpunkt *M'* der Strecke $\overline{A'B'}$ wird ein Kreis mit dem Radius $r' = \overline{M'A'} = \overline{M'B'}$ geschlagen (Thales-Kreis). Der Schnittpunkt der Senkrechten auf *h* in *S'* mit der Kreislinie sei *T'*.
- Mit dem Radius $r^* = \overline{S'T'}$ wird auf der Tangente *g* um *S* ein Kreisbogen geschlagen, der *g* in *T* schneidet. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf *g* in *T* und der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ ist der Schnittpunkt *M* des gesuchten Kreises.
- Der Radius des gesuchten Kreises ist $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$

Existenz und Eindeutigkeit: Liegen *A* und *B* auf verschiedenen Seiten von *g*, so existiert kein Kreis, der die Bedingungen erfüllt, da in diesem Fall die Tangente den Kreis schneiden würde.

Andernfalls ist die Konstruktion stets ausführbar, da die Punkte *A* und *B* wegen der Voraussetzungen nicht auf *g* liegen können. Der Kreisbogen um *S* schneidet *g* in *2* Punkten („links“ und „rechts“ von S). Daraus resultieren zwei voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe. Verläuft die Gerade durch A und B senkrecht zur Geraden g, so sind diese beiden Lösungen spiegelbildlich.

Beweis: Wie die Analyse zeigte, erfüllt der in (a) bis (c) gefundene Mittelpunkt die jeweiligen Bedingungen der Aufgabenstellungen. ❑

Aufgabe 2-5B.

(a) Unter 52 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe oder deren Differenz durch 100 teilbar ist.
(b) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius 1 liegen.
(c) In einem regelmäßigen Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße rot bzw. grün, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind. Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt[4].

Lösungshinweise: Die Lösungen können mittels Schubfachprinzip gefunden werden.

(a) Man wähle 51 Schubfächer mit den Resten 0 bei Division durch 100, (Reste 1 oder 99) bei Division durch 100, (Reste 2 oder 98) bei Division durch 100 usw. bis Rest 50 bei Division durch 100. Sind 52 natürliche Zahlen gegeben, so werden mindestens 2 von diesen einem der Schubfächer zugeordnet. Haben beide den gleichen Rest, so ist deren Differenz durch 100 teilbar, haben sie dagegen einen unterschiedlichen Rest, so ist deren Summe durch 100 teilbar.

(b) Man zerlege das Quadrat in $5 \text{ x } 5 = 25$ kongruente Teilquadrate der Seitenlänge 1,4. Nach dem Schubfachprinzip befinden sich in mindestens einem dieser Teilquadrate mindestens 3 Punkte. Ein solches Teilquadrat hat eine Diagonale mit der Länge von $1{,}4 \cdot \sqrt{2} < 1{,}4 \cdot 1{,}42 = 1{,}988 < 2$. Folglich kann das Teilquadrat von einem Kreis mit dem Radius 1 vollständig überdeckt werden. Damit liegen auch die 3 Punkte im Innern dieses Kreises.

(c) Von den Ecken des regelmäßigen Neunecks haben bei Aufteilung auf zwei Farben nach dem Schubfachprinzip mindestens 5 dieselbe Farbe. Man betrachte 5 derartige Eckpunkte gleicher Farbe. Man kann mit diesen Ecken als Endpunkte $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Strecken bilden. Die Mittelsenkrechte zu jeder dieser 10 Strecken geht durch den Umkreismittelpunkt des Neunecks und durch eine weitere Ecke, weil das Neuneck regelmäßig und von ungerader Eckenzahl ist.

Nach dem Schubfachprinzip gehen also mindestens 2 der 10 Mittelsenkrechten durch den gleichen Eckpunkt. Die zugehörigen Endpunkte der Strecken (sie seien *A* und *B* bzw. *C* und *D*) bilden folglich die Ecken eines achsensymmetrischen Trapezes *ABCD* mit den parallelen Seiten *AB* und *CD*. Die beiden verschiedenen und gleichfarbigen Dreiecke *ABC* und *ABD* sind aufgrund

[4] Aufgabe 1 der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1993.

der Symmetrie des Trapezes kongruent. Damit ist die Behauptung bewiesen. (Es gibt sogar ein weiteres Paar von Dreiecken der geforderten Art, nämlich *ACD* und *BCD*.) ❑

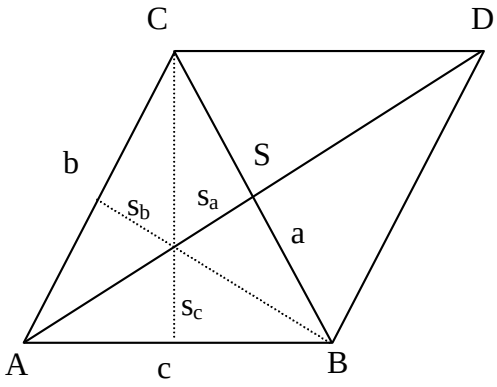
Ergänzung zu (b): Es erscheint naheliegend, dass Quadrat zunächst in $7 \cdot 7 = 49$ Teilquadrate zu zerlegen. Jedes dieser Teilquadrate ist natürlich durch einen Kreis mit dem Radius 1 überdeckbar. Es müsste nun aber erst nachgewiesen werden, dass bei einer Überdeckung des Quadrates in jedem der verwendeten Kreise bereits mindestens 2 Punkte liegen. Für eine beliebige Lage der Punkte wird dies schwieriger sein als mit der oben dargestellten Anwendung des Schubfachprinzips.

Abstand eines Punktes zu den Dreieckseckpunkten

Zur 2. Mathematik-Olympiade 1962/63 wurde in der 4. Runde der Klassenstufe 10 folgende Aufgabe gestellt:

MO021045. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Lösungshinweise: Sind *A*, *B*, *C* die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen der Seiten *a*, *b*, *c* und Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet (s. nebenstehende Skizze), so ist zu zeigen



$$s_a + s_b + s_c < a + b + c\,.$$

Diese Ungleichung würde unmittelbar aus den drei Ungleichungen

$$2 \cdot s_a < b + c \quad , \quad 2 \cdot s_b < c + a \quad , \quad 2 \cdot s_c < a + b$$

durch deren Addition und anschließender Division durch 2 folgen. Wegen der Symmetrie der Bezeichnungen genügt es, eine der drei Relationen zu beweisen, beispielsweise $2 \cdot s_a < b + c$.

Ist *D* der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch *C* mit der Parallelen zu g_{AC} durch *B* (der Punkt *D* existiert, weil die Seiten *c* und *b* nicht parallel sind), so ist das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm. Daher gilt $|BD| = |CA| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von *AD* als auch von *BC*. Folglich ist *AS* Seitenhalbierende von ΔABC und weil sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren, gilt:

$$|AD| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot s_a$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck ΔABD mit den Seitenlängen *c*, *b* und $2 \cdot s_a$ die zu beweisende Ungleichung. ❑

Ergänzung: Man findet in Formelsammlungen über Zusammenhänge in allgemeinen Dreiecken für die Seitenhalbierende s_c und die Seiten *a*, *b*, *c* die Gleichung $s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$. Durch einfaches Zusammenfassen der drei durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen entstehenden Gleichungen führt dies zur Formel:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Daraus wegen $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < a^2 + b^2 + c^2$ ohne weitere Argumentation auf die gesuchte Ungleichung zu schließen, kann nicht korrekt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zwar gilt $64 + 64 + 64 < 169 + 9 + 16$,
aber es ist $8 + 8 + 8 > 13 + 3 + 4$.

Man erkennt jedoch leicht, warum dieses Gegenbeispiel nicht passend ist: 3, 4 und 13 können (wegen der Verletzung der Dreiecksungleichung) nicht Seitenlängen eines Dreiecks sein. Geht man aber beispielsweise von der Ungleichung $b < a + c$ aus, so folgt nacheinander:

$$|b - a| < c$$
$$b^2 - 2ab + a^2 < c^2$$
$$2 \cdot \left(b^2 + a^2\right) - c^2 < b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2$$
$$s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2} < \frac{a + b}{2}$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen zu s_a und s_b lässt sich nun unmittelbar auf die behauptete Ungleichung schließen.

In der 50. Mathematik-Olympiade wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe MO501023. Im Innern eines Dreiecks *ABC* ist ein Punkt *D* beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit *x*, *y*, *z* und die Länge des Umfangs des Dreiecks *ABC* mit *u*. Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette $\frac{1}{2}u < x + y + z < u$ gilt.

Vorbemerkung: Wählt man für *D* den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt nach dieser Ungleichungskette stets

$\frac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) < u$,

also $s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}u$.

In Aufgabe MO021045 wurde aber ja bereits eine strengere Ungleichung bewiesen. Damit stellt sich die Frage, ob die Ungleichung dieser MO-Aufgabe sehr grob ist.

Betrachtet man beispielsweise ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge 1, so beträgt die Abstandsumme zu den Eckpunkten für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Wählt man dagegen einen Eckpunkt als Punkt aus, so ist dessen Abstandssumme 2. In beiden Fällen ist diese Abstandssumme deutlich kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Betrachtet man jedoch ein gleichschenkliges Dreieck *ABC*, dessen Grundseite *AB* sehr klein im Vergleich zu den Dreiecksschenkeln ist, und wählt man als Punkt den Eckpunkt *C*, so ist dessen Abstandssumme zu den Eckpunkten nur wenig kleiner als der Dreiecksumfang. Man kann also die (rechte) Ungleichung aus Aufgabe MO501023 im Allgemeinen nicht verschärfen.

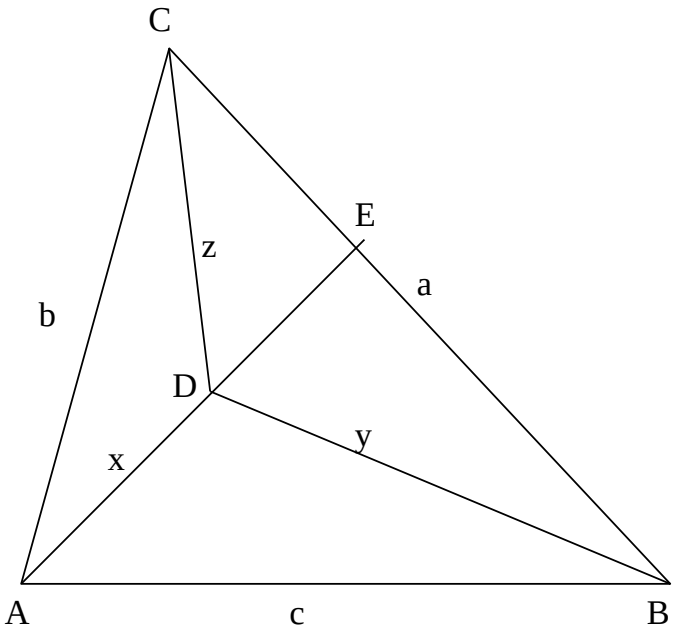
Lösungshinweise: Es sei *D* ein innerer Punkt und die Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* werden (wie in der Skizze ersichtlich) mit *x*, *y* und *z* bezeichnet.

Dann gelten nach der Dreiecksungleichung:

$a < y + z$
$b < x + z$
$c < x + y$

Zusammenfassend erhält man die linke Seite der behaupteten Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{u}{2} < x + y + z.$$



Um die rechte Seite der Ungleichung zu zeigen, bezeichne man den Schnittpunkt der Geraden durch *A* und *D* mit der Seite *BC* mit *E*. Wieder mittels Dreiecksungleichung im Dreieck *AEC* folgt.

$x + |\overline{DE}| < b + |\overline{CE}|$

also $x + |\overline{DE}| + |\overline{BE}| < b + |\overline{CE}| + |\overline{BE}| = b + a$.

Wegen $y < |\overline{DE}| + |\overline{BE}|$ aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck *BED* ergibt sich die Ungleichung $x + y < a + b$. Analog können die Ungleichungen $x + z < a + c$ und $y + z < b + c$ gezeigt werden. In der Zusammenfassung dieser drei Ungleichungen folgt unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung. ❑

Thema 1 – Funktionalgleichungen[5]

In der 1. Runde der diesjährigen Mathematik-Olympiade wurde folgende Aufgabe gestellt:

MO601016. Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen *x* und *y* eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür *z* = *x#y*. (Die Zahl *z* wird also mit Hilfe einer Formel aus *x* und *y* berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung

$$a + (b\#c) = (a\#b) + (a\#c) \qquad (1)$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für *x#y* an, die nur die vier Grundrechenarten +, −, ·, : als Rechenarten verwendet, sodass (1) erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.

b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von # die Formel aus a).

Statt des allgemeinen Symbols # hätte auch eine Funktion *f* verwendet werden können[6], die zwei rationalen Zahlen *x* und *y* einer rationalen Zahl *z* zuordnet. Dann sind alle Funktionen *f* mit $f(x,y) = z$ für rationale Zahlen *x, y, z* gesucht, die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$a + f(b,c) = f(a,b) + f(a,c).$$

Gibt es eine Lösungsstrategie für solche Aufgaben?

[5] Wir beginnen eine Themenreihe, die sich jeweils an aktuellen Aufgaben der Mathematik-Olympiade orientieren. Ziel wird es sein, mit ähnlichen Aufgabenstellungen die Nachbereitung des Wettbewerbs zu fördern und somit das Finden erfolgversprechender Lösungsstrategien zu trainieren.

[6] Mit der Umschreibung der Rechenvorschrift durch das Symbol # wird die Diskussion um mathematische Hintergründe zum Funktionsbegriff umgangen, der auch hier nicht dargestellt werden soll.

Als die bekannteste Gleichung dieser Art gilt die Cauchysche Funktionalgleichung, für die für alle rationalen Zahlen *x* und *y* gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Durch Einsetzen spezieller Argumente gelingt es, Eigenschaften der Funktion *f* zu finden, die schließlich zu Lösungen führen.

Setzt man in die Funktionalgleichung $x = y = 0$, so folgt daraus, dass $f(0) = 2 \cdot f(0)$ gilt, also *f*(0) = 0.

Für $y = -x$ ergibt sich $f(x) = -f(-x)$ und wir sehen, dass alle Lösungen der Funktionalgleichung ungerade Funktionen sind.

Für $x = y$ ergibt sich $f(2 \cdot x) = 2 \cdot f(x)$. Setzt man jetzt $y = 2 \cdot x$ so ergibt sich $f(3 \cdot x) = f(2 \cdot x) + f(x) = 3 \cdot f(x)$. Man vermutet schnell, dass wohl $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ für alle natürlichen Zahlen *n* gilt und überprüft dies mit der Methode der vollständigen Induktion. Da wir wissen, dass die gesuchten Funktionen alle ungerade sind, kann man diese Beziehung auch auf alle ganzen Zahlen ausweiten. Damit wissen wir also, dass $f(z) = f(1) \cdot z$ für alle $z \in Z$. Es wäre schön, wenn man diese Beziehung auch auf noch größere Zahlenbereiche ausdehnen kann. Für rationale Zahlen $x = p/q$ mit $p, q \in Z, q \neq 0$ gilt, $q \cdot x = p \cdot 1$ und somit $f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$ oder nach Umformen $f(x) = f(1) \cdot x$ Setzt man $f(1) = c$ (*c* beliebig reell), so gilt für alle Lösungen der Funktionalgleichung für alle rationalen Zahlen *x*:

$$f(x) = c \cdot x$$

Eine Probe bestätigt, dass diese Funktion die geforderte Funktionalgleichung erfüllt :

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) = c \cdot x + c \cdot y = f(x) + f(y).$$

Aufgabe. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* definiert sind und folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x+y) + 2 \cdot f(x-y) + f(x) + 2 \cdot f(y) = 4 \cdot x + y.$$

Lösunghinweise: Zunächst setze man $x = y = 0$. Dann reduziert sich die gegebene Gleichung zu $6 \cdot f(0) = 0$, also *f*(0) = 0. Setzt man nun lediglich $y = 0$ und lässt *x* beliebig, so findet man $4 \cdot f(x) = 4 \cdot x$, also *f*(*x*) = *x* für alle reellen *x*. Die Probe bestätigt diese Funktion als Lösung. ❑

Erhält man durch spezielle Belegungen einen „Lösungskandidaten“, so ist eine Probe unbedingt notwendig, denn die Erfüllung der Funktionalgleichung muss für alle *x* und *y* gelten.

Aufgabe. Man finde alle Funktionen *f* mit

a) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2+y^2$

b) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2\cdot xy+y^2$

Lösungshinweise: Die Substitution $y = 0$ führt unmittelbar sowohl in Aufgabe (a) als auch in Aufgabe (b) für alle reellen Zahlen x zur Gleichung

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2}.$$

In Aufgabe (a) bestätigt die Probe die Richtigkeit. Dagegen erfüllt diese Funktion nicht die Bedingung (b), d.h. es gibt keine Lösung zu (b).

Natürlich führen solche einfachen Substitutionen nicht immer zum sofortigen Erfolg. Geringe Änderungen in der Funktionalgleichung können beträchtliche Wirkungen haben!

Aufgabe. Man finde alle Funktionen *f* mit

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)-2\cdot f(y)=y-2$$

Lösungshinweise: Setzt man $x = y = 0$, findet man $f(0) = 1$. Allerdings führt $y = 0$ und x beliebig ebenfalls „nur“ zu $f(0) = 1$. Versucht man dagegen $x = 0$ und y beliebig, so erhält man

$$-2\cdot f(-y)-f(y)=y-3.$$

Noch immer treten zwei verschiedene Argumente auf! Ersetzt man nun y durch $-y$ (da die Gleichung ja für alle Zahlen gelten muss), so führt dies zu

$$-2\cdot f(y)-f(-y)=-y-3.$$

Damit ist ein Gleichungssystem mit den zwei Variablen $f(y)$ und $f(-y)$ gegeben, deren Lösung $f(y) = y + 3$ lautet. (Probe!)

Versuchen wir nun die Substitutionsmethode bei der Gleichung (1)

$$a+f(b,c)=f(a,b)+f(a,c).$$

Aus $a = b = c = 0$ folgt $0 + f(0,0) = f(0,0) + f(0,0)$ und somit $f(0,0) = 0$.

Aus $a = b = c$, aber beliebig, folgt $a + f(a,a) = f(a,a) + f(a,a)$, also $f(a,a)=a$.

Aus $b = c$ finden wir für beliebiges a die Gleichung $a + f(b,b) = f(a,b) + f(a,b)$ und somit wegen $f(b,b) = b$ die Lösung

$$f(a,b)=\frac{a+b}{2}.$$

Es muss nun noch in einer Probe gezeigt werden, dass diese Funktion die Rechenvorschrift erfüllt:

$$a + f(b,c) = a + \frac{b+c}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} = f(a,b) + f(a,c).$$

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [7].

Beweis: Man nehme an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen *m* und *n* mit *n* > 0 und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}\ ,\ r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}\ ,\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}\ .$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind die Ergebnisse selbst wieder rationale Zahlen ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei *r* eine rationale und *t* eine irrationale Zahl. Man nehme an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, *s* sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.

[7] Eine reelle Zahl *r* heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen *m* und *n* mit *n* > 0 und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

Man nehme an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, *p* sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Wird die Differenz als Summe mit einem negativen Summanden und der Quotient als Produkt mit dem Reziproken des Faktors interpretiert, ist der Nachweis auch für Differenz und Quotient erbracht.
Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

$$\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4$$
$$\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=2$$

Satz. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert stets mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl.

Beweis: Seien r_1 und r_2 rationale Zahlen mit $r_1 < r_2$, dann gilt für die rationale Zahl $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ die Ungleichung $r_1 < r < r_2$.

Die Zahl $t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ stets

$$r_1 < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = t$$

und

$$t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot 1 = r_2 .$$

Also gilt für die irrationale Zahl t die Ungleichung $r_1 < t < r_2$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, eine solche rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich werden.

Rationale Zahlen

Bei den folgenden Aufgabendiskussionen wird die Irrationalität der Wurzel $\sqrt{N}$ für jede positive ganzzahlige Nichtquadratzahl *N* als Verallgemeinerung von $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe. Es ist zu zeigen, dass $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ irrational ist.

Lösungshinweise: Man nehme an, *x* sei rational, und versuche, die gegebene Gleichung solange umzuformen, bis nur noch ein Wurzelausdruck in einer

Gleichungsseite verbleibt und sonst nur Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von rationalen Zahlen auftreten.

$$x-\sqrt{7}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$$
$$x^2-2\cdot x\sqrt{7}+7=2+2\cdot\sqrt{10}+5$$
$$x^2-2\cdot x\sqrt{7}=2\cdot\sqrt{10}$$
$$x^2\left(x^2-4\cdot x\sqrt{7}+28\right)=40$$
$$\sqrt{7}=-\frac{\frac{40}{x^2}-x^2-28}{4x}$$

Ist x rational, dann ist die rechte Seite der Gleichung ebenfalls rational im Widerspruch zur Irrationalität der Quadratwurzel der linken Seite. ❑

Die Suche nach vollständigen Quadraten kann bei der Vereinfachung von Wurzelausdrücken hilfreich sein:

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=2$.

Lösungshinweise: Selbstverständlich kann der Beweis nicht mittels Taschenrechner erbracht werden, denn die Gleichheit könnte aufgrund der endlich vielen Anzeigeziffern erzwungen sein! Wegen $\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ sind die Wurzeln alle definiert und die linke Seite ist positiv, sodass quadriert werden darf. Man erhält:

$$3+\sqrt{8}-2\cdot\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)}+3-\sqrt{8}=4$$
$$6-2\cdot\sqrt{3^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=4$$

❑

Die Richtigkeit der Behauptung folgt aber ebenso leicht aus der Beziehung

$$3\pm\sqrt{8}=2\pm2\cdot\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\pm1\right)^2.$$

Während bei dieser Aufgabe der Vorteil des zweiten Lösungsweges nur gering erscheint, ist der Beweis der Gleichheit

$$\sqrt[3]{1620+12\sqrt{17457}}+\sqrt[3]{1620-12\sqrt{17457}}=18$$

ohne die Erkenntnis $1620\pm12\sqrt{17457}=\left(9\pm\sqrt{33}\right)^3$ wohl nur sehr aufwendig lösbar!

In Gleichungen mit Quadratwurzeln lassen sich im Allgemeinen durch wiederholtes Quadrieren die Anzahl der auftretenden Wurzeln reduzieren, sodass sich die Ausdrücke vereinfachen. Dagegen „verschwinden“

Kubikwurzeln wie in Aufgabe 2-3 nicht so einfach. Hierfür kann der Binomische Lehrsatz geschickt ausgenutzt werden, wie auch folgendes Beispiel demonstriert:

Aufgabe. Man beweise die Gleichheit $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

Nochmals der Hinweis: Die Berechnung der Wurzelausdrücke mittels Rechentechnik ist kein Beweis!

Lösungshinweise: Man setze den linken Ausdruck der Gleichung gleich *a* und versuche, durch Umformungen den Wert von *a* einfacher berechnen zu können.

$$a^3=\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3$$
$$=5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)-\left(5\sqrt{2}-7\right)$$

Diese Umformung erfolgte nach dem binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+3xy\cdot(x+y)+y^3$$

Die Differenz der Kubikwurzeln in der mittleren Klammer stimmt aber gerade mit *a* überein, sodass man die kubische Gleichung $a^3=14-3a$ erhält. Eine Lösung dieser Gleichung ist *a* = 2. Da wegen

$$a^3+3a-14=(a-2)\cdot\left(a^2+a+7\right)$$

und $a^2+a+7=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+6\frac{3}{4}>0$ keine weiteren reellwertigen Lösungen existieren können, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Es gilt $5\sqrt{2}\pm7=\left(\sqrt{2}\pm1\right)^3$, woraus sich die Behauptung ohne Schwierigkeiten folgern lässt.

Algebraische und transzendente Zahlen

Für jede rationale Zahl $r=\frac{m}{n}$ (*m*, *n* ganzzahlig, *n* > 0) kann man ein Polynom

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n finden, sodass *r* eine Nullstelle von *P* ist (d.h. es gilt *P*(*r*) = 0). Dafür genügt bereits ein Polynom mit Grad 1 (lineare Funktion), denn $P(x)=n\cdot x-m$ erfüllt die Behauptung.

Verallgemeinernd heißt eine reelle Zahl *z* ***algebraisch***, wenn es ein Polynom $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass *z* Nullstelle von *P*

ist. So sind $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ algebraisch, weil sie Lösungen der Gleichungen $x^2-2=0$ bzw. $x^4-4x^2+1=0$ sind. Ob algebraische Zahlen geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, hängt jedoch davon ab, ob die Gleichung allein durch die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen aufgelöst werden kann. Bekanntermaßen ist die algebraische Zahl $\sqrt[3]{2}$ (als Nullstelle des Polynoms $P(x)=x^3-2$) nicht auf diese Weise konstruierbar.

Reelle Zahlen, für die es kein solches Polynom gibt, heißen ***transzendent*** (quod algebrae vires transcendit – die Kräfte der Algebra übersteigend)[8]. Bereits LEONHARD EULER (1707 bis 1783) vermutete die Existenz transzendenter Zahlen, doch erst JOSEPH LIOUVILLE (1809 bis 1882) konnte dies nachweisen. Er bewies den Approximationssatz für algebraische Zahlen:

Satz. Ist γ eine algebraische Zahl und $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ein Polynom vom Grade *n* mit ganzzahligen Koeffizienten, für das die Zahl γ eine Nullstelle ist, dann gilt für alle ganzen Zahlen *p* und für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen *q* stets folgende Abschätzung:

$$\text{Wenn } \frac{1}{q} \geq \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \text{ ist, dann ist } \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Anschaulich bedeutet diese Aussage: Wenn man für die algebraische Zahl γ eine rationale Zahl mit hinreichend großem Nenner *q* als Näherung findet (erste Ungleichung), dann kann die rationale Zahl nicht beliebig nahe an γ kommen (zweite Ungleichung).

Als Anwendung des Approximationssatzes untersuche man die Zahl

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{24}}+\ldots=0{,}11000100\ldots00100\ldots$$

Angenommen *z* sei algebraisch und das Polynom, das *z* als eine Nullstelle besitzt, sei vom Grad *n*. Man setze im obigen Approximationssatz $\frac{p}{q}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{10^{k!}}=\frac{A}{10^{m!}}$ mit $m>n+1$ und *A* als Abkürzung des Zählers beim Zusammenfassen der *m* Brüche. Da es beim Addieren der Brüche im Zähler keinen Übertrag gibt, gilt $A<0{,}2$. Die Differenz zwischen *z* und $\frac{p}{q}$ ist kleiner als $\frac{1}{10^{m!}}$. Diese Differenz müsste nun aber größer als $\frac{1}{10^{m!\cdot(n+1)}}$ sein, um den

[8] vgl. Pfister, G.: Transzendente Zahlen. In. Wissenschaft und Fortschritt. Vol. 26 (1976), Heft 7, S. 304-308.

Approximationssatz zu erfüllen. Vergleicht man jedoch die Dezimalbruchentwicklung von z und $\frac{p}{q}$, so erkennt man, dass der Abstand beider Zahlen kleiner ist – somit kann z keine algebraische Zahl sein.

Dass π keine rationale Zahl ist, zeigte bereits 1761 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 bis 1777). Sein noch unvollständiger Beweis wurde von ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752 bis 1833) vervollständigt. Erst 1882 bewies FERDINAND LINDEMANN (1852 bis 1939), dass π nicht algebraisch, also transzendent ist. Damit war die Frage nach der Quadratur des Kreises endgültig beantwortet: Zu einem Kreis kann allein mit Zirkel und Lineal kein flächengleiches Quadrat konstruiert werden.

Bundeswettbewerb Mathematik 2021

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn; finanziell wird er gemeinsam vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert. Er steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein mathematischer Schülerwettbewerb für alle an Mathematik Interessierten. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen muss man zur Teilnahme vor allem auch etwas Ausdauer mitbringen.
In den beiden Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen jeweils in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen. In der dritten Runde, auch Kolloquium genannt, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp

einstündiges Fachgespräch mit einem Mathematiker bzw. einer Mathematikerin aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessieger ausgewählt. Daneben gestalten die Teilnehmenden ein Rahmenprogramm mit ganz unterschiedlichen Beiträgen."

Die Teilnehmerzahlen[9] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1651 (im Jahr 2010/11).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2017/18	1370	467 (34,1%)	53 (3,9%)	27 (50,9%)
2018/19	1479	485 (32.8%)	46 (3.1%)	24 (52.2%)
2019/20	1178	417 (35.4%)	55 (4.7%)	30 (54.5%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 liegt in Sachsen weit über dem Durchschnitt! Unter den 55 sächsischen Teilnehmern im Schuljahr 2019/20 wurden 12 erste, 2 zweiter und 6 dritte Preise vergeben – fast zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (36.4%, bundesweit 41.5%). Dazu kamen noch 12 Anerkennungsurkunden (21.8%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2017/18	255	76 (29,8%)	12 (4,7%)	3 (25,0%)
2018/19	265	69 (26.0%)	14 (5.3%)	6 (42.9%)
2019/20	277	99 (35.7%)	10 (3.6%)	4 (40.0%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2019/20 wurden 1 erster und 6 dritte Preise an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 7 der 10 Starter!), darunter 3 Starter aus den Klassenstufen 9 und 10.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2021 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe liegt als Kopie bei bzw. können Sie beim Fachlehrer für Mathematik oder unter **https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** erhalten.

[9] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/statistiken veröffentlicht.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler. Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1). Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. Specht, E. Quaisser und P. Bauermann herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

Aufgaben Serie 4 (2020/21)

(Einsendungen bis 20. Februar 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de[10])

Aufgabe 4-1. Bestimmen Sie die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2. Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form 2p + 1, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-3. Bestimmen Sie alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)=6\cdot xy-y^2$$ (6 Punkte)

(*Hinweis*: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8 Punkte, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

[10] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit „Re: KZM Serie 4“ bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Aufgabe 4-5A

(a) Entscheiden Sie, ob die Zahl $x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+.....+2020}}}$ rational oder irrational ist, und begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

(b) Für beliebige natürliche Zahlen *x* und *y* sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Zeigen Sie, dass es

- unendlich viele Paare (*x ; y*) gibt, so dass *z* rational ist.
- unendlich viele Paare (*x ; y*) gibt, so dass *z* irrational ist. (2 Punkte)

(c) Untersuchen Sie, ob es positive rationale Zahlen *t* gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen *t* gibt, geben Sie an, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen *t* gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Zeigen Sie, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt. (2 Punkte)

(b) Beweisen Sie: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt. (2 Punkte)

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt? (4 Punkte)

Seminarhinweis

Im Dezember ist wegen der Corona-Beschränkungen kein KZM-Seminar möglich. Auch für März sind wir derzeit nicht zuversichtlich und bereiten deshalb kein KZM-Seminar vor.

Impressum

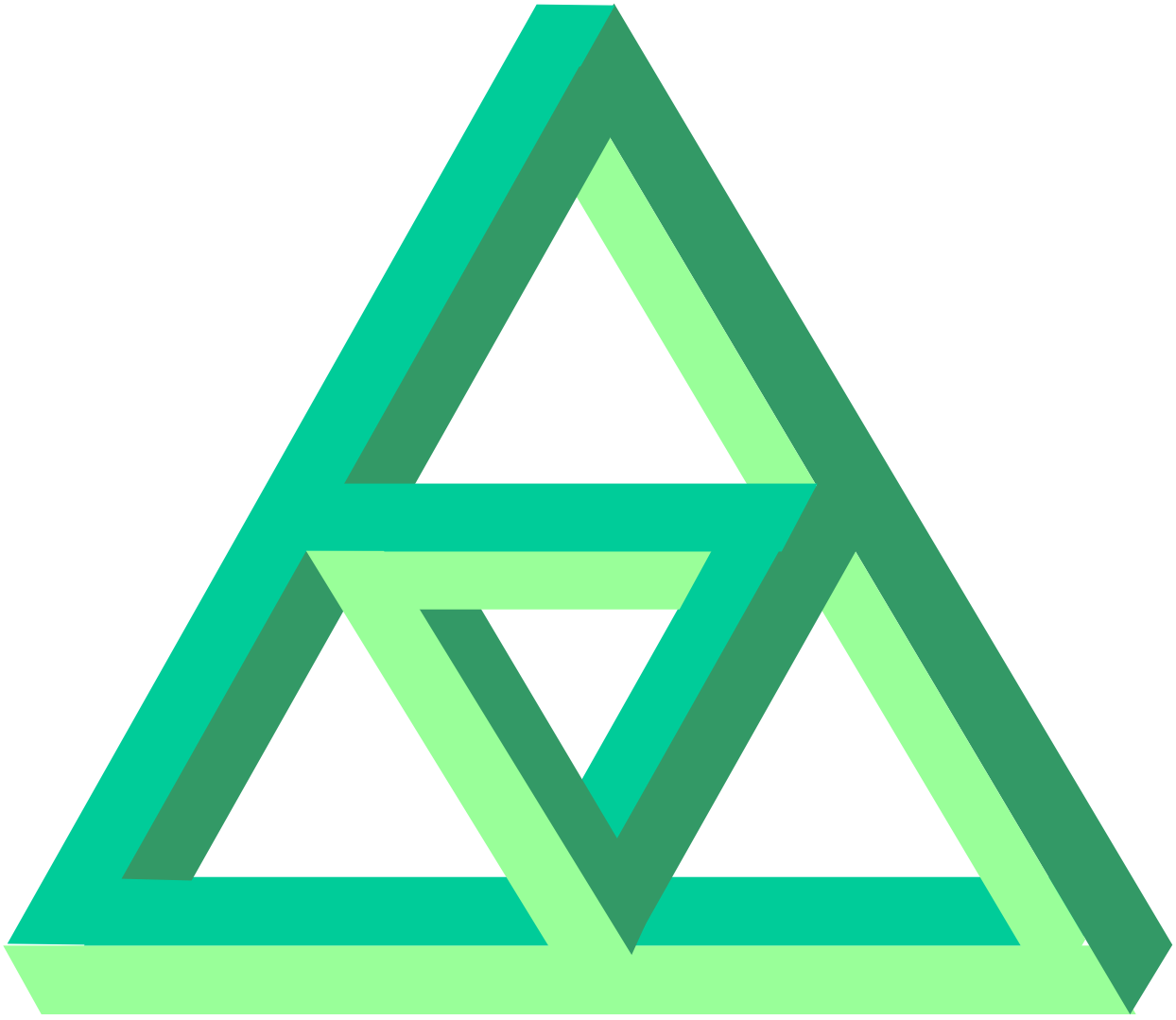
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, /www-user.tu-chemnitz.de/~peju/Verein.html VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 3 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 1 /2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 3

Aufgabe 3-1. Wie viele spitze Innenwinkel kann ein überschneidungsfreies ebenes 2021-Eck höchstens haben?

Lösungshinweise[1]*:* Bekanntlich hat ein n-Eck eine Innenwinkelsumme von $(n-2)\cdot 180°$. Wenn von den n Innenwinkeln s Innenwinkel spitz sind (d.h., wenn s Innenwinkel kleiner als 90° sind), dann können wir abschätzen:

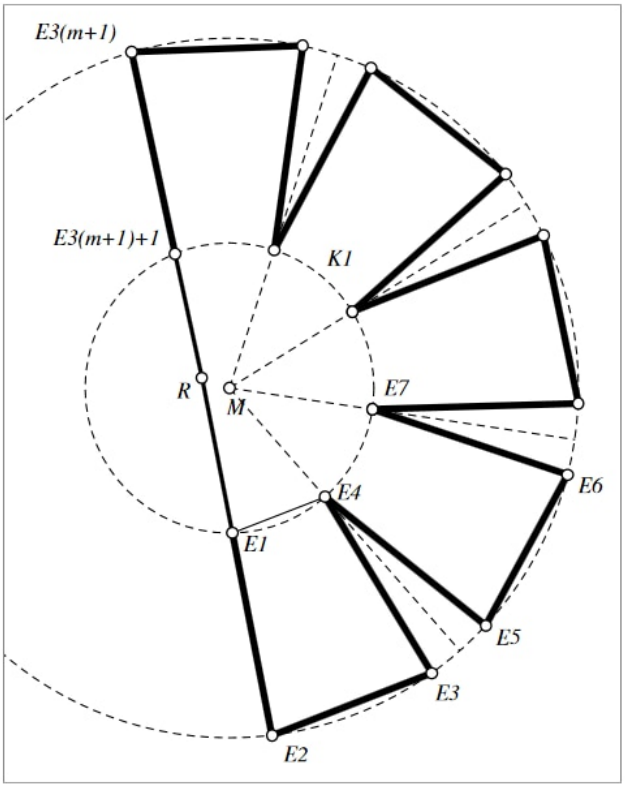
$$\begin{aligned} & (n-2)\cdot 180° < s\cdot 90° + (n-s)\cdot 360° \\ \Leftrightarrow\quad & 2\cdot(n-2) < s + 4\cdot(n-s) \\ \Leftrightarrow\quad & s < \frac{2}{3}\cdot(n+2) \end{aligned}$$

Für $n = 2021$ ergibt sich also

$$s < \tfrac{2}{3}\cdot(2021+2) < 1348{,}7.$$

Somit gilt $s \le 1348$.

Nun müssen wir zeigen, dass diese Schranke scharf ist, d.h., dass wir die Zahl nicht durch eine kleinere Zahl ersetzen können. Nebenstehende Abbildung zeigt ein Konstruktionsprinzip für ein geeignetes 2021-Eck. Gezeichnet ist es für ein 14-Eck mit den Ecken E_2, E_3, ... E_{15} (also $m = 4$)[2]. Die Punkte der Abbildung $E_{3(m+1)} = E_{15}$, $E_{3(m+1)+1} = E_{16}$, R, E_1 und E_2 liegen auf einer Geraden.



Wählen wir nun $m = 673$, so können wir uns die zugehörige Figur vorstellen. Für diese gilt dann (in Analogie zu $m = 4$): Von den $2021 = 3\cdot 673 + 2$ Innenwinkeln sind 673 Winkel überstumpf ($E4$, $E7$, ...) und $2\cdot 673 + 2 = 1348$ Winkel spitz.

❑

[1] Diese Aufgaben wurde im Bundeswettbewerb 2017 (1. Runde) gestellt. Die Lösungshinweise wurden aus https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/aufgaben entnommen und insbesondere die Abbildung kopiert (dort findet man weitere Lösungsvarianten).

[2] Mit der Variablen m wurde der Beweis in der angegebenen Quelle allgemein geführt und insbesondere dabei für die Eckenzahl eine Fallunterscheidung $3m$, $3m + 1$ und $3m + 2$ geführt. Für ein 2021-Eck ist also der dritte Fall mit $m = 673$ (weil $2021 = 3\cdot 673 + 2$) zu betrachten. Die in der Abbildung scheinbar überflüssigen Punkte E_{16}, R, E_2 werden in den anderen zwei Fällen berücksichtigt.

Aufgabe 3-2. Gegeben seien 2020 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2020 Zahlen kleiner als 1 sein?

Lösungshinweise[3]*:* Wir ordnen die 2020 Zahlen aufsteigend. Da das Produkt der ersten 13 Zahlen größer als 1 ist, muss die 13. Zahl größer als 1 sein. Wegen der Monotonie der Folge sind dann alle weiteren Zahlen ebenfalls größer als 1. Somit ist sowohl das Produkt P_1 der ersten 13 als auch das Produkt P_2 der Zahlen von der 14. bis zur 2020. Zahl größer als 1 und auch das Produkt $P_1 \cdot P_2$ aller 2020 Zahlen. ❑

Aufgabe 3-3. Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

Lösungshinweise[4]*:* Aus der GAUßschen Summenformel lassen sich folgende Gleichungen ableiten[5]:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1)$$
$$1 + 3 + 5 + ... (2n - 1) = (1 + 2 + 3 + ... + 2n) - (2 + 4 + ...+ 2n) = n^2$$

Zu a) Die Summe der 316 kleinsten geraden Zahlen ist nach der obigen Formel $316 \cdot 317 = 100172 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 316 geraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 315 gerade Zahlen vorkommen. Demnach müssen mindestens $335 - 315 = 20$ ungerade Summanden vorkommen. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 20 ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + ... + 37 + 99 + 2 + 4 + ... + 2 \cdot 315 = 19^2 + 99 + 315 \cdot 316$$
$$361 + 99 + 99540 = 100000$$

Zu b) Die Summe der 317 kleinsten ungeraden Zahlen ist nach obiger Formel $317^2 = 100489 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 317 ungeraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 316 ungerade Zahlen vorkommen. Die geforderte Summe kann aber nicht genau 316 ungerade Summenden haben: Denn die Summe der 316 kleinsten ungeraden Zahlen hat schon den Wert $316^2 = 99856$, die Summe der restlichen Summanden, also der geraden Summanden, (dies sind $335 - 316 = 19$ Summanden) dürfte dann höchstens den Wert $100000 - 99856 = 144$ haben. Die kleinstmögliche Summe mit 19 geraden positiven Summanden hat aber schon den Wert $19 \cdot 20 = 380 > 144$.

[3] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1991 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1988-1992. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1994, S. 91.3

[4] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 2015 (1. Runde) gestellt.

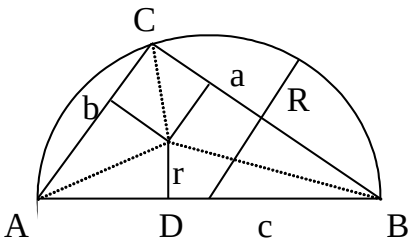
[5] Im BWM wird hierzu eine ausführlichere Herleitung erwartet.

Die geforderte Summe kann aber auch nicht 315 ungerade Summanden haben: In diesem Fall käme in der Gesamtsumme eine ungerade Anzahl von ungeraden Summanden vor, der Wert der Summe wäre also ungerade und könnte insbesondere nicht den Wert 100000 annehmen.

Es können also nicht mehr als 314 ungerade Summanden sein. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 314 ungeraden Summanden, z.B.:

$1 + 3 + 5 + ... (2 \cdot 314 - 1) + 2 + 4 + 6 + ...+ 40 + 984 =$
$314^2 + 20 \cdot 21 + 984 = 98596 + 420 + 984 = 10000.$ ❑

Aufgabe 3-4. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.



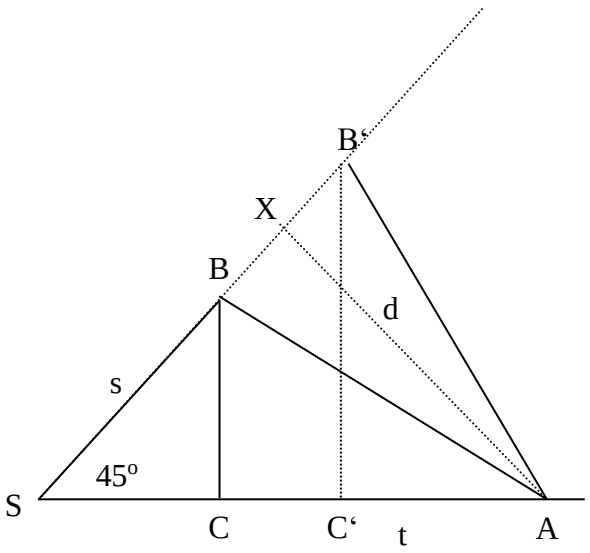
Lösungshinweise[6]*:* Die Bezeichnungen sind aus der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.

Analyse: Da der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks der Thaleskreis über der Hypotenuse *c* ist, gilt $R = \frac{c}{2}$.

Durch die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wird dessen Fläche in ein Quadrat und zwei Drachenvierecke zerlegt.

Wegen $(a-r)+(b-r) = 2 \cdot R$ findet man

(1) $a + b = 2 \cdot r + 2 \cdot R$.



Konstruktionsbeschreibung: (vgl. Abbildung) Man konstruiere (zum Beispiel über die Winkelhalbierende eines rechten Winkels) die Schenkel *s* und *t* eines Winkels der Größe 45° mit dem Scheitel *S*. Auf *t* trage man einen Punkt *A* mit $\overline{AS} = 2 \cdot (r + R)$ ein. Der Abstand $d = |\overline{AX}|$, den der Punkt *A* vom Schenkel *s* hat, beträgt $\sqrt{2} \cdot (r + R)$, denn als halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{AS}$ wissen wir

$$d \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot (r + R)$$

[6] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1983 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983-1987. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1988, S. 83.5 bzw. 83.9.

Der Kreis um *A* mit dem Radius 2*R* hat daher mit *s* einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der näher an *S* liegende Schnittpunkt bezeichnen wir mit *B*. Das Lot von *B* auf *t* schneidet *t* in einem Punkt, der *C* genannt wird. Den anderen Punkt nennen wir B‘. Das Lot von *B‘* auf *t* schneidet *t* in einem Punkt, der *C‘* genannt wird.

Behauptung: Das Dreieck *ABC* besitzt die geforderten Eigenschaften.

Beweis: Das so erhaltene Dreieck ist nach Konstruktion rechtwinklig. Sein Umkreis hat den Radius *R*. Weiterhin gilt:

$$a+b=\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CS}=\overline{AS}=2\cdot(r+R).$$

Also hat der Inkreis vom Dreieck *ABC* den geforderten Radius. Das Dreieck besitzt somit die verlangten Eigenschaften.

Existenzbedingung: Wegen der Gleichheit von $a\cdot b$ und $c\cdot h$ (jeweils doppelter Flächeninhalt des Dreiecks) erhalten wir nach der binomischen Formel und nach dem Satz des Pythagoras

$$(a+b)^2=c^2+2\cdot c\cdot h$$

Da sich *h* nach oben durch *R* abschätzen lässt, folgt wegen $c = 2 \cdot R$ hieraus:

$$(a+b)^2\le 8\cdot R^2, \text{ also } a+b\le 2\sqrt{2}\cdot R.$$

Zusammen mit (1) erhalten wir hieraus als notwendige Bedingung für die Existenz des Dreiecks

$$r\le\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot R$$

Da im Falle des gleichschenkligen Dreiecks Gleichheit vorliegt, ergibt sich, dass solche Dreiecke existieren und damit diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz des gesuchten Dreiecks ist. Eine untere Beschränkung für *r* gibt es nicht, da der Inkreismittelpunkt einen beliebig kleinen Abstand zur Grundseite haben kann.

Eindeutigkeit: Aus der Konstruktion ist (bei der Wahl des Punktes *B*) ersichtlich, dass zwei Dreiecke die Eigenschaften erfüllen. Wir überzeugen uns leicht, dass diese aber kongruent sind: Aus Symmetriegründen gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AB'}|$ und $\angle BAX = \angle XAB'$. Mit der Gleichheit dieser Winkel finden wir aber auch:

$$\angle C'B'A = 90° - \angle B'AC' = 45° - \angle XAB' = 45° - \angle BAX = \angle CAB$$

Also sind die rechtwinkligen Dreiecke *ABC* und *AB’C‘* kongruent. ❑

Weitere Lösungsansätze (Ausschnitte aus der Analyse):
(I) Die Länge des Abschnittes $\overline{AD}$ lässt sich über Flächenvergleiche in Abhängigkeit von *R* und *r* ermitteln

$$x_{1/2}=R\pm\sqrt{R^2-\left(r^2+2Rr\right)}.$$

Da diese Größe aus den gegebenen Stücken konstruiert werden kann, ist die weitere Konstruktion des gesuchten Dreiecks unkompliziert.

(II) Ist M_i der Inkreismittelpunkt, so beträgt der Winkel $\angle AM_iB$ 135°. Es genügt also über der Strecke $\overline{AB}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln von 22,5° zu konstruieren. Der Umkreis um dieses Hilfsdreieck schneidet die im Abstand r zu $\overline{AB}$ Parallele im Inkreismittelpunkt.

(III) Nach dem Satz von EULER (siehe dieses Heft S. 21) können wir den Abstand d zwischen In- und Umkreismittelpunkt berechnen: $d^2 = R \cdot (R - 2r)$. Auf der Grundlage des Höhensatzes in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten R und $(R - 2r)$ lässt sich der Abstand d aus den gegebenen Stücken konstruieren. Damit finden wir den Inkreismittelpunkt auf der im Abstand r zu $\overline{AB}$ parallelen Geraden.

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.
(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Lösungshinweise:
(a) Es seien $z_x = 2x + 1$ und $z_y = 2y + 1$ zwei ungerade natürliche Zahlen (x, y nicht negative ganze Zahlen). Dann gilt

$$(2x+1)^2 - (2y+1)^2 = 4 \cdot (x^2 + x) - 4 \cdot (y^2 + y)$$

Ist x gerade, dann ist auch x^2 gerade und folglich auch die Summe $x^2 + x$. Ist x ungerade, dann ist auch x^2 ungerade und folglich ist die Summe $x^2 + x$ gerade. Also ist der Ausdruck $x^2 + x$ stets durch 2 teilbar und damit ist $4 \cdot (x^2 + x)$ durch 8 teilbar. Da dies auch für den zweiten Term gilt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Man ermittle die Reste bei Division durch 8, die eine ungerade Zahl haben kann.

z	z^2
$8m+1$	$64m^2 + 16m + 1 = 8(8m^2 + 2m) + 1$
$8m+3$	$64m^2 + 48m + 9 = 8(8m^2 + 6m + 1) + 1$
$8m+5$	$64m^2 + 80m + 25 = 8(8m^2 + 10m + 3) + 1$
$8m+7$	$64m^2 + 112m + 49 = 8(8m^2 + 14m + 6) + 1$

Somit lässt das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl bei Division durch 8 den Rest 1, woraus für die Differenz zweier solcher Quadratzahlen die Behauptung unmittelbar folgt. ❑

(b) Für jede ganze Zahl k gilt

$$(3k)^2 = 9 \cdot k^2$$
$$(3k+1)^2 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$$
$$(3k+2)^2 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 1) + 1$$

Somit ist das Quadrat einer ganzen Zahl entweder durch 3 teilbar oder es lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Angenommen, a sei nicht durch 3 teilbar. Dann lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit die Summe von $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, muss folglich b^2 den Rest 2 bei Division durch 3 lassen. Dies ist jedoch nach obiger Aussage nicht möglich. Folglich ist a durch 3 teilbar und deshalb ist auch b durch 3 teilbar. ❑

(c) Wenn die Summe der Zahlen durch 6 teilbar ist, dann ist diese Summe sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar.

Die Summe der Zahlen ist gerade, wenn entweder alle 3 Zahlen gerade sind oder wenn genau eine der Zahlen gerade und die beiden anderen ungerade sind. Die dritte Potenz einer Zahl ist genau dann gerade (bzw. ungerade), wenn die Zahl selbst gerade (bzw. ungerade) ist. Folglich überträgt sich die Geradzahligkeit der Summe der Zahlen auf die Summe der Kuben dieser Zahlen. Ist die Summe der 3 Zahlen a, b, c durch 2 teilbar, dann ist es auch die Summe der Kuben dieser Zahlen.

Ausgehend von der Umformung

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3 \cdot \left(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2\right)$$

erkennt man: Ist die Summe der Zahlen a, b, c durch 3 teilbar, dann ist es auch die Summe ihrer Kuben, da alle weiteren Summanden durch 3 teilbar sind. ❑

Lösungsvariante: Man untersuche für Kubikzahlen die Reste bei Division durch 6.

z	z^3
$6m + 0$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 0 + 3 \cdot 6m \cdot 0^2 + 0^3 = 6M + 0$
$6m + 1$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6m \cdot 1^2 + 1^3 = 6M + 1$
$6m + 2$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 2 + 3 \cdot 6m \cdot 2^2 + 2^3 = 6M + 6 + 2$
$6m + 3$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 3 + 3 \cdot 6m \cdot 3^2 + 3^3 = 6M + 24 + 3$
$6m + 4$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 4 + 3 \cdot 6m \cdot 4^2 + 4^3 = 6M + 60 + 4$
$6m + 5$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 5 + 3 \cdot 6m \cdot 5^2 + 5^3 = 6M + 120 + 5$

Dabei wurde der Term $6^2m^3 + 3 \cdot 6m^2 \cdot k + 3 \cdot m \cdot k^2$ jeweils zu *M* zusammengefasst (k = 0, ..., 5). Also lässt die Kubikzahl bei Division durch 6 den gleichen Rest wie ihre Basiszahl. Daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 3-5B. Es sind $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„*S_n : Ist* $\frac{a_n}{g_n}$ *eine natürliche Zahl, so ist* $x_1 = x_2 = ... = x_n$“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

Lösungshinweise[7]*:*

(a) Es genügt, für $n = 3$ ein konkretes Beispiel anzugeben, das die Behauptung widerlegt. Für $x_1 = 27$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 1$ finden wir

- für das arithmetische Mittel $a_3 = \frac{27+8+1}{3} = \frac{36}{2} = 12$ und
- für das geometrische Mittel $g_3 = \sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6.$

Folglich ist $\frac{a_3}{g_3} = \frac{12}{6} = 2$ eine ganze Zahl, jedoch gilt nicht die Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3$. Also ist die Behauptung im Fall $n = 3$ im Allgemeinen falsch. ❑

(b) Setzt man $m = 81$, so ist der Quotient eine ganze Zahl, denn es gilt für $x_1 = 81$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$

- für das arithmetische Mittel $a_4 = \frac{81+1+1+1}{4} = \frac{84}{4} = 21$ und
- für das geometrische Mittel $g_4 = \sqrt[4]{81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt[4]{3^4} = 3,$

also ist der Quotient $\frac{a_4}{g_4} = \frac{21}{3} = 7$ eine natürliche Zahl. ❑

[7] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1975 (2. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

Ergänzung: Setzen wir allgemein für eine natürliche Zahl m voraus, dass das Verhältnis aus arithmetischen und geometrischen Mittel, also $v = \frac{m+1+1+1}{4 \cdot \sqrt[4]{m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}}$ eine ganze Zahl ist, so muss auch $\sqrt[4]{m}$ rational (und damit ganzzahlig) sein. Sei deshalb $m = y^4$ mit einer natürlichen Zahl y. Dann gilt:

$$v = \frac{y^4 + 3}{4y} = \frac{1}{4} \cdot \left(y^3 + \frac{3}{y} \right)$$

Weil v laut Voraussetzung eine ganze Zahl ist, ist der Zähler $y^4 + 3$ durch 4 teilbar. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, muss $y = 1$ oder $y = 3$ sein. Folglich ist $m = 81$ die einzige nichttriviale Lösung für diese Aufgabenstellung.

(c) Es sei $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v. Da a rational ist, ist folglich auch g rational und als Wurzel aus einem Produkt natürlicher Zahlen sogar ganzzahlig. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2a \cdot x + g^2 = 0 .$$

Die Diskriminante D dieser quadratischen Gleichung

$$D = a^2 - g^2 = (v \cdot g)^2 - g^2 = g^2 \cdot (v^2 - 1)$$

ist aber nur dann eine Quadratzahl, wenn der Klammerausdruck eine Quadratzahl ist. Dies kann aber nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, da für größere Werte von v der Abstand zweier Quadratzahlen größer als 1 ist. Folglich ist wegen $D = 0$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Auch ohne die etwas trickreiche Anwendung des Satzes von VIETa gelingt der Nachweis, wenn wir $x_2 = x_1 + 2 \cdot z$ mit einer geeignet gewählten Zahl z festlegen. Dann bedeutet die Aussage, dass aus einem ganzzahligen Quotienten aus arithmetrischen und geometrischen Mittel $z = 0$ folgt.

Ausgehend von $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v folgt

$$x_1 + z = v \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_1 + 2z)}$$

also $x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z + z^2 = v^2 \cdot (x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z)$

Betrachten wir die letzte Gleichung als Funktion der Variablen z, so können wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach z auflösen:

$$z^2 + 2 \cdot (1 - v^2) \cdot x_1 \cdot z + (1 - v^2) \cdot x_1^2 = 0$$

$$z_{1/2} = -(1 - v^2) \cdot x_1 \pm \sqrt{(1 - v^2)^2 \cdot x_1^2 - (1 - v^2) \cdot x_1^2}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann zu $x_1^2 \cdot v^2 \cdot (v^2 - 1)$ zusammengefasst werden. Wie oben bereits diskutiert, kann dies nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, was aber $z = 0$ bedeutet.

Ergänzende Lösungsdiskussion

Zu Aufgabe 2-2: Während bei dieser Aufgabe zu untersuchen war, wie die gegebenen Längen bzgl. Dreiecksseiten und Höhe angeordnet sein können, genügt es bei der folgenden Aufgabe, eine geschickte Anordnung zu wählen (und zu zeigen, dass diese realisiert werden kann).

Aufgabe MO381041. Wir betrachten alle dreiseitigen Pyramiden mit den Kantenlängen (in cm) 3, 4, 5, 6, $3 \cdot \sqrt{5}$ und $2 \cdot \sqrt{13}$. Gibt es unter diesen Pyramiden eine Pyramide, deren Volumen gemessen in cm³ ganzzahlig ist?

Lösungshinweise: Da bei allgemeinen Pyramiden in der Grundfläche irrationale Werte auftreten können, liegt es nahe, eine Grundfläche zu finden, die einen ganzzahligen Flächeninhalt hat. Weil die drei Seitenlängen 3, 4 und 5 (wegen Umkehrung des Satzes des Pythagoras) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, erfüllt diese Anordnung die Ganzzahligkeit: Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt 6 cm².

Nun findet man mit gleicher Argumentation, dass die beiden Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 6 und $3 \cdot \sqrt{5}$ bzw. 4, 6 und $2 \cdot \sqrt{13}$ ebenfalls rechtwinklige Dreiecke sind. Damit kann die Kante der Länge 6 gleichzeitig Höhe für die Pyramide sein. Das Volumen erweist sich mit 12 cm³ als ganzzahlig. ❑

Zur Aufgabe 2-3 sei nachgetragen, dass bei Gleichungen oder Ungleichungen mit Wurzelausdrücken in einem ersten Schritt der Definitionsbereich untersucht werden sollte. Die Äquivalenz von Umformungen ist dann stets anhand dieses Definitionsbereiches zu überprüfen.

Aufgabe. Man finde alle reellwertigen Zahlen *x*, für die die folgende Gleichung definiert und erfüllt ist:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2.$$

Lösungshinweise: Damit der erste Wurzelausdruck definiert ist, muss $x \geq -1$ gelten. Damit der zweite Wurzelausdruck definiert ist, muss $x \geq 2$ gelten. Somit umfasst der Definitionsbereich alle reellen Zahlen größer oder gleich 2.

Umformung der Gleichung und beidseitiges Quadrieren führt zu

$$x + 1 = 4 + 4 \cdot \sqrt{2x-4} + 2x - 4$$
$$-x + 1 = 4 \cdot \sqrt{2x-4}$$

Mit der Kenntnis $x \geq 2$ wird offensichtlich, dass die linke Seite der Gleichung negativ, die rechte Seite dagegen nichtnegativ ist. Es kann also keine Lösung in reellen Zahlen geben. ❑

Übersieht man jedoch an dieser Stelle diesen Aspekt, erscheint ein erneutes Quadrieren naheliegend (aber unzulässig, weil die linke Seite der Gleichung negativ, die rechte Seite dagegen positiv ist!):

$$x^2 - 2x + 1 = 32x - 64$$

Für die daraus resultierende quadratische Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$ finden wir mit der bekannten Lösungsformel die Nullstellen $x_{1/2} = 17 \pm 4 \cdot \sqrt{14}$.

Die erste Lösung erfüllt offensichtlich die Bedingung $x \geq 2$. Für die zweite Lösung nutzt man $\sqrt{14} < 3{,}75$ (wegen $3{,}75^2 = 14{,}0625$, auch ohne Rechentechnik ermittelbar) und findet $17 - 4 \cdot \sqrt{14} > 17 - 4 \cdot 3{,}75 = 2$. Also liegt auch die zweite Lösung im Definitionsbereich. Auf die Probe wird verzichtet, weil diese mit den Doppelwurzel schwierig erscheint – Aufgabe gelöst?

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Lösungshinweise: Auch ohne den nachgestellten Hinweis ist die Verwendung von Rechentechnik nicht zulässig. Natürlich kann man zur Lösungsfindung die Werte ausrechnen und der Vergleich 0,1451 < 0,1813 spricht für die Richtigkeit der Ungleichung. Der Abstand ist so groß, dass er nicht allein aus Rundungsfehlern resultieren wird – aber genau das wäre zu beweisen! Und wie sehe es bei den folgenden Zahlen aus:

$$\sqrt[3]{1.000.001} - \sqrt[3]{1.000.000} < \sqrt[3]{1.000.000} - \sqrt[3]{999.999}\ ?$$

Es wird also ein „technikfreier“ Beweis gesucht. Potenzieren – so die Erfahrung – reduziert nicht die Anzahl der dritten Wurzeln. Wir führen einen indirekten Beweis:

Angenommen, es gelte $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. Potenzieren wir beide Seiten und fassen nach Ausmultiplizieren zusammen, erhalten wir

$$\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36} < \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$$

bzw. nach Division durch $\sqrt[3]{12}$

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Da $\sqrt[3]{2}$ aber größer als 1 ist, kann die rechte Seite weiter abgeschätzt werden und wir finden

$$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

im Widerspruch zur Annahme, also war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. ❑

Thema 1 – Funktionalgleichungen (Teil II)[8]

Aufgabe MO201033. Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Es ist $f(1)=1$. (1)
Für jedes $x\neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$. (2)
Für alle x_1, x_2 mit $x_1, x_2, x_1+x_2\neq 0$ gilt $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. (3)

Man beweise, dass für jede Funktion *f*, die diese Voraussetzungen erfüllt, $f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}$ gilt.

Lösungshinweise: Wenn wir den Funktionswert für $x=\frac{1}{7}$ kennen würden, könnten wir mit Voraussetzung (3) den Beweis vollenden. Mittels der Voraussetzung (2) kann dieser Funktionswert aber berechnet werden, wenn wir den Wert für $f(7)$ kennen. Den wiederum finden wir unter Anwendung von Voraussetzungen (1) und (3):

Aus (3) folgt für alle reellen Zahlen $x\neq 0$ und natürliche Zahlen $n>0$

$$f(n\cdot x)=n\cdot f(x). \quad (4)$$

Den Nachweis dafür können wir mit der Methode der vollständigen Induktion führen.

Induktionsanfang: Die Gleichung (4) gilt in trivialer Weise für $n=1$

$$f(1\cdot x)=f(x)=1\cdot f(x),$$

aber auch für $n=2$

$$f(2\cdot x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2\cdot f(x)$$

Induktionsvoraussetzung: Die Gleichung (4) gilt für $n=k$.
Induktionsbehauptung: Die Gleichung (4) gelte auch für $n=k+1$.
Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned} f\big((k+1)\cdot x\big) &= f(k\cdot x+x)=f(k\cdot x)+f(x)=k\cdot f(x)+f(x)\\ &= (k+1)\cdot f(x)\end{aligned}$$

[8] Teil I in Heft 09/2020.

Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang, -voraussetzung und -schritt folgt, dass die Gleichung (4) für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt.

Die Gleichung (4) muss natürlich zur Lösung der Aufgabe nicht so allgemein bewiesen werden. Es genügt durch mehrmalige Anwendung der Voraussetzung (3) die Gültigkeit für $n = 7$ nachzuweisen.

Nach dieser Vorbereitung lassen sich folgende Gleichungen bilden:

(1) $f(7) = f(7 \cdot 1) = 7 \cdot f(1) = 7$ wegen (1) und (4)

(2) $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7}$ wegen (2) und (7)

(3) $f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(5 \cdot \frac{1}{7}\right) = 5 \cdot f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{7}$ wegen (4) und (6). ❑

Der Beweis zur Gültigkeit der Gleichung (4) lässt vermuten, dass die Voraussetzung (3) einen sehr tiefgründigen Zusammenhang beschreibt. Sie ist als **CAUCHYsche Funktionalgleichung** bekannt: Für alle Funktionen, die für alle rationalen Zahlen x und y die Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ erfüllen, gilt für alle rationalen Zahlen r die Gleichung $f(r) = c \cdot r$ mit $c = f(1)$.

Lösungshinweise: Für den Beweis dieser Aussage setzen wir spezielle Argumente ein und finden auf diese Weise Eigenschaften der Funktion *f*, die schließlich zur Lösung führen.

Setzen wir zunächst in die Funktionalgleichung $x = y = 0$, so folgt daraus, dass $f(0) = 2 \cdot f(0)$ gilt, also finden wir $f(0) = 0$.

Für $y = -x$ ergibt sich $f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, also $f(x) = -f(-x)$ und wir sehen, dass alle Lösungen der Funktionalgleichung ungerade Funktionen sind.

Mit Gleichung (4) gilt für natürliche Zahlen n die Gleichung $f(n \cdot 1) = n \cdot f(1)$. Da wir wissen, dass die gesuchten Funktionen ungerade Funktionen sind, können wir diese Beziehung auch auf alle ganzen Zahlen ausweiten. Damit wissen wir also, dass $f(z) = f(1) \cdot z$ für alle $z \in Z$. Es wäre schön, wenn wir diese Beziehung auch auf noch größere Zahlenbereiche ausdehnen können. Für rationale Zahlen $x = p/q$ mit $p, q \in Z, q \neq 0$ gilt $q \cdot x = p \cdot 1$ und somit $f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$ oder nach Umformen

$$q \cdot f(x) = p \cdot f(1), \text{ also } f(x) = f(1) \cdot x.$$

Setzen wir $f(1) = c$, so gilt für alle Lösungen der Funktionalgleichung für alle rationalen Zahlen r: $f(r) = c \cdot r$

Eine Probe bestätigt, dass diese Funktion die geforderte Funktionalgleichung erfüllt:

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) = c \cdot x + c \cdot y = f(x) + f(y).$$

Um die Lösung auf alle reellen Zahlen zu erweitern, bedarf es erstaunlicherweise weitere Voraussetzungen an die Funktionen *f*. Es erscheint anschaulich verständlich,

dass monotone Funktionen *f*, die der CAUCHYschen Funktionalgleichung genügen, für alle reellen Zahlen der Form $f(x) = c \cdot x$ genügen.

Es genügt bereits, dass für die Funktionen gefordert wird, dass sie auf jedem Intervall es Definitionsbereiches beschränkt ist. Andererseits gibt es ohne einschränkende Bedingungen reellwertige Funktionen, die der CAUCHYschen Funktionalgleichung genügen, für rationale Argumente der linearen Funktion folgen, aber für irrationale Argumente in jedem Abschnitt des Definitionsbereiches unbeschränkt sind. So eine Funktion wie eine unendlich ausgedehnte Staubwolke ist nur noch schwer vorstellbar – aber es gibt sie tatsächlich.

Aufgabe MO271042. Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \quad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \quad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Lösungshinweise: Zunächst folgt aus $x_1 = x_2 = 0$ wegen Voraussetzung (1) die Beziehung

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0^3) + f(0^3) = 2 \cdot f(0), \text{ also } f(0) = 0.$$

Weiter folgt aus $x_1 = x_2 = 1$ wegen Voraussetzung (2) die Beziehung

$$f(1) = 1 \cdot f(1^3) + 1 \cdot f(1^3) = 2 \cdot f(1), \text{ also } f(1) = 0.$$

Setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = 0$, so folgt aus Voraussetzung (1) auch

$$f(x + 0) = f(x^3) + f(0^3) = f(x^3) \quad (3).$$

Damit reduziert sich die Voraussetzung (1) zu $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Es erscheint nun einfach, auf die Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung zu verweisen und wegen $f(1) = 0$ zu schlussfolgern, es gelte $f(x) = 0$ für alle reellen *x*. Jedoch wird in der Aufgabenstellung keine Beschränkung an *f* gestellt. Es ist also nicht gesichert, wie der Funktionswert für das irrationale Argument $2 + \sqrt{5}$ zu berechnen ist. Aber natürlich dürfen wir $f(n) = 0$ für alle natürlichen Zahlen n feststellen.

Setzen wir $x_1 = x_2 = \sqrt{5}$ so erhalten wir wegen (2) und (3)

$$0 = f(5) = f\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} \cdot f\left(\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \cdot f\left(\sqrt{5}\right), \text{ also } f\left(\sqrt{5}\right) = 0.$$

Nochmals Voraussetzung (1) anwendend finden wir abschließend

$$f\left(2 + \sqrt{5}\right) = f(2) + f\left(\sqrt{5}\right) = 0. \qquad \square$$

Während oben die CAUCHYsche Funktionalgleichung nur als Zwischenergebnis genutzt werden konnte, gibt es zahlreiche Aufgaben, die sich direkt auf diese grundlegende Gleichung beziehen.

Aufgabe. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für die für alle reellen Zahlen *x* und *y* gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1 \text{ mit } f(0) = 1.$$

Lösungshinweise: Wir definieren eine Funktion g durch $g(x) = f(x) - 1$. Die Monotonie der Funktion f überträgt sich auf g. Außerdem gilt:

$$g(x+y) = f(x+y) - 1 = f(x) + f(y) - 1 - 1 = g(x) + g(y).$$

Damit erfüllt g die CAUCHYsche Funktionalgleichung und es gilt $g(x) = c \cdot x$ für alle reellen Zahlen x. Die daraus resultierende Funktion $f(x) = c \cdot x + 1$ erfüllt tatsächlich die Angaben der Aufgabenstellung:

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) + 1 = c \cdot x + 1 + c \cdot y + 1 - 1 = f(x) + f(y) - 1$$
mit $f(0) = c \cdot 0 + 1 = 1$ ❑

Aufgabe. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen *f*, die für alle positiven reellen Zahlen definiert sind und für beliebige positive reelle Zahlen *x* und *y* die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Lösungshinweise: Gäbe es ein Argument $x \neq 0$ mit $f(x) = 0$, so wäre die Funktion *f* konstant 0, denn für jede reelle Zahl *y* gilt in diesem Fall

$$f(y) = f\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

Wegen $f(x) = f\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 > 0$ können wir für alle positiven reellen Zahlen die Funktion g durch die Beziehung $g(z) = ln(f(e^z))$ definieren. Es gilt:

$$g(x+y) = ln\left(f(e^{x+y})\right) = ln\left(f(e^x \cdot e^y)\right) =$$
$$ln(f(e^x) \cdot f(e^y)) = ln(f(e^x)) + ln(f(e^y)) = g(x) + g(y)$$

Da sich die Monotonie von f auf g überträgt, gilt $g(x) = c \cdot x$ als Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung und somit $ln(f(e^z)) = c \cdot z$, gleichbedeutend zu $f(e^z) = e^{cz}$ für alle positiven reellen Zahlen z. Setzen wir abschließend $x = e^z$, finden wir als Lösung die Funktion $f(x) = x^c$ mit einer festen Zahl c.

Probe: $f(x \cdot y) = (x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c = f(x) \cdot f(y)$ ❑

Thema 2 – Ungleichungen mit vollständigen Quadraten

In der 2. Runde der 60. Mathematik-Olympiade (Schuljahr 2020/21) wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe MO601024.

(a) Ermitteln Sie alle Paare positiver Zahlen (x, y), für welche die folgende Gleichung gilt

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} = x + y.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle positiven Zahlen x und y die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} = x + y.$$

(c) Zeigens Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} > \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x+y}\right)$$

für alle positiven Zahlen x und y.

Lösungshinweise: Zur Lösung der Aufgabe (a) erscheint es naheliegend, solange äquivalent umzuformen, bis die Gültigkeit der erhaltenen Gleichung erkennbar ist. Da die Summe der rechten Seite positiv ist, dürfen wir beide Seiten quadrieren und erhalten:

$$(x^2+1)\cdot(y^2+1) = (x+y)^2.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen führt zu

$x^2\cdot y^2 - 2xy + 1 = 0$, gleichbedeutend zu $(xy-1)^2 = 0$.

Folglich ist die geforderte Gleichung genau dann erfüllt, wenn $y = \frac{1}{x}$ gilt. ❑

Für die Lösung von Aufgabe (b) erkennen wir, dass wir alle Gleichheitszeichen durch das Relationszeichen ≥ ersetzen können. Für die Beweisführung beginnen wir mit einer wahren Aussage: da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, gilt für alle positiven Zahlen

$$(xy-1)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

also $x^2\cdot y^2 - 2xy + 1 \geq 0 \qquad |+x^2+2xy+y^2$

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq x^2 + 2xy + y^2$$

Beide Seiten lassen sich als Produkte darstellen:

$$(x^2+1)\cdot(y^2+1) \geq (x+y)^2.$$

Beide Seiten der Ungleichung sind nichtnegativ. Somit dürfen wir weiter umformen und finden die Behauptung:

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} \geq x+y.$$

Hinweis: Teilaufgaben (a) und (b) könnte man auch zusammenfassen zu „Zeigen Sie die Ungleichung ... Für welche Zahlen *x* und *y* gilt die Gleichheit?“. Die hier gewählte Formulierung hat den Vorteil, im einfacheren Teil (a) die Struktur der (Un-)Gleichung bereits untersuchen zu können, und dabei Fehler mit der Richtung der Relationszeichen zu vermeiden.

Kern der Lösung ist die grundlegende Aussage (1), dass vollständige Quadrate nichtnegativ sind. Die etwas überraschende Struktur der Ungleichung in Teilaufgabe (c) lässt vermuten, dass auch hierbei vollständige Quadrate für den Beweis verwendet werden können. Dafür multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit den positiven Faktoren $9 \cdot x \cdot y \cdot (x+y)$ und erhalten

$$9\cdot y\cdot(x+y)+9\cdot x\cdot(x+y) > 4\cdot(2\cdot y\cdot(x+y)+3\cdot x\cdot y)$$

d.h. $9\cdot x^2+y^2-2\cdot x\cdot y>0$

also $8\cdot x^2+(x-y)^2>0$ (2)

Die letzte Ungleichung ist als Summe vollständiger Quadrate nicht negativ und – da $x \neq 0$ – sogar positiv. Für die Beweisführung beginnen wir vorteilhafterweise mit Ungleichung (2) und formen um, bis wir die Behauptung finden. ❑

Der Nachweis von Ungleichungen mit Hilfe vollständiger Quadrate kann häufig in Wettbewerbsaufgaben angewandt werden.

Aufgabe MO381043. Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets mindestens 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen *x*, *y* und *z* stets

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \geq 0. \quad (3)$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2+y^2+z^2-10\cdot(x+y+z)+3\cdot 25 \geq 0.$$

Setzt man nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt die Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Da für beliebige reelle Zahlen a und b stets die Ungleichung $(a+b)^2 \geq 2ab$ gilt, finden wir für x, y, z zunächst

$$2\cdot(x^2+y^2+z^2) \geq 2\cdot(xy+yz+xz) \quad (4)$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

$$(x^2+y^2+z^2)+2\cdot(xy+yz+xz)=225 \quad (5)$$

Die Addition von (4) und (5) führt zur Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Die Gleichung (3) können wir formulieren, wenn wir ein Zahlentripel (x, y, z) erraten, für das das Gleichheitszeichen gilt. Dann können wir die Lösung aber auch so fortsetzen: Wir untersuchen solche Tripel, die von (5,5,5) variieren und schreiben dafür $(5 + a, 5 + b, 5 + c)$ mit Variablen a, b, c, für die laut Voraussetzung $a + b + c = 0$ gelten muss. Dann finden wir

$$(5 + a)^2 + (5 + b)^2 + (5 + c)^2 = 75 + 10 \cdot (a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2$$

Wegen $(a + b + c) = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ folgt aus dieser Ungleichung unmittelbar die Behauptung. ❑

Aufgabe MO480923/MO481023.

(a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (a, b), für die die Ungleichung $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass für beliebige Paare (a, b) reeller Zahlen stets die Ungleichung $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt?
(c) Wann gilt in (b) das Gleichheitszeichen?

Lösungshinweise zu (b): Wir können das Zahlenpaar $a = b = \frac{1}{2}$ als Lösung für das Gleichheitszeichen in (b) erraten. Deshalb ist der Lösungsansatz

$$\left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \qquad (6)$$

eine erfolgsversprechende Ausgangsungleichung. Tatsächlich finden wir nach Ausmultiplizieren und Umordnen

$$a^2 - a + \tfrac{1}{4} + b^2 - b + \tfrac{1}{4} \geq 0 \qquad |+ a + b$$

also $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. ❑

Lösungsvariante: Die Ungleichung (6) können wir auch durch Umformung der Behauptung in Teilaufgabe (b) erhalten:

$$a + b \leq a^2 + b^2 + \tfrac{1}{2} \qquad |-a - b$$
$$0 \leq a^2 - a + \tfrac{1}{2} + b^2 - b + \tfrac{1}{2}$$
$$0 \leq \left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$ ❑

Lösungsvariante: Haben wir mit $a = b = \frac{1}{2}$ eine spezielle Lösung gefunden, können wir jedes Lösungspaar auch in der Form $\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y\right)$ schreiben. Setzen wir diese in die Ungleichung der Behauptung ein, so erhalten wir:

$1 + x + y \leq 1 + x + x^2 + y + y^2$, also $0 \leq x^2 + y^2$.

Da die letzte Ungleichung für alle reellen Zahlen erfüllt ist, kann die Gültigkeit der Behauptung gezeigt werden, wobei das Gleichheitszeichen nur für $x = y = 0$ gilt. ❑

Aufgabe MO400942. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, von denen das System der beiden Ungleichungen

$$x^2 \leq \frac{2000 \cdot y^2 + 2x - 1}{2001},\ y^2 \leq \frac{2000 \cdot x^2 - 2y - 1}{2001}$$

erfüllt wird.

Lösungshinweise: Wenn (x, y) das System der Ungleichungen erfüllen, dann erfüllen (x, y) auch die Ungleichung, die durch Addition beider Ungleichungen und Multiplikation mit 2001 entsteht:

$$x^2 + y^2 \leq 2x - 2y - 2, \text{ also } (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 0.$$

Da die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind, gilt die letzte Ungleichung nur für $x = 1$ und $y = -1$. Die Probe $1 \leq \frac{2000 \cdot 1 + 2 - 1}{2001} = 2001$ bestätigt, dass die gegebenen Ungleichungen für diese (x, y) gelten. ❑

Die Eigenschaft der Quadrate von reellen Zahlen können wir auch zur Lösung von Gleichungen einsetzen.

Aufgabe MO411045. Ermitteln Sie alle rationalen Zahlen x, für die gilt:

$$4^x + 9^x + 16^x = 6^x + 8^x + 12^x.$$

Lösungshinweise: Mit der Idee von vollständigen Quadraten kommen wir auf folgenden Ansatz, indem wir die gegebene Gleichung geschickt umformen:

$$\begin{aligned} &(2^x)^2 + (3^x)^2 + (4^x)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 4^x + 3^x \cdot 4^x \qquad |\cdot 2 \\ &2^{x^2} - 2 \cdot 2^x 3^x + 3^{x^2} + 2^{x^2} - 2 \cdot 2^x 4^x + 4^{x^2} + 3^{x^2} - 2 \cdot 3^x 4^x + 4^{x^2} = 0 \\ &(2^x - 3^x)^2 + (2^x - 4^x)^2 + (3^x - 4^x)^2 = 0 \end{aligned}$$

Eine Summe von drei Quadraten reeller Zahlen kann nur dann gleich 0 sein, wenn jeder der Summanden gleich 0 ist. Also finden wir $2^x = 3^x = 4^x$. Dies ist jedoch nur für $x = 0$ möglich. Eine Probe bestätigt, dass $x = 0$ auch tatsächlich Lösung der gegebenen Gleichung ist. ❑

Aufgabe zum Jahreswechsel 2020/21[9]

Gibt man einen Zeitpunkt sekundengenau in der Form

$T_1T_2.M_1M_2.\ h_1h_2 : m_1m_2 : s_1s_2$ (Tag.Monat. Stunde:Minute:Sekunde)

[9] am 31.12.2020 per E-Mail versandt.

an, benötigt man genau 10 Ziffern (einschließlich eventuell auftretenden führenden Nullen). Der Jahreswechsel lädt nun gleichermaßen zu Rück- und Ausblick ein:

Wann war 2020 der letzte Zeitpunkt und wann wird 2021 der erste Zeitpunkt sein, bei denen in der Darstellung jede der Ziffern 0, ..., 9 genau einmal vorkommt? Wie viele solcher Zeitpunkte gibt es in einem Kalenderjahr überhaupt?

Man löse die Aufgabe ohne Verwendung von Rechentechnik, d.h. in der Lösungsdarstellung darf nicht auf Ergebnisse eines Rechenprogramms verwiesen werden.

Lösungsfindung: Wir ermitteln zunächst die Anzahl aller Zeitpunkte und führen folgende Fallunterscheidung durch. Dabei gilt einschränkend:

$M_1 \in \{0; 1\}$; $h_1 \in \{0; 1; 2\}$; $m_1, s_1 \in \{0 ; 1; 2; 3; 4; 5\}$;

(1) $T_1 = 0$. Dann muss $M_1 = 1$ und $h_1 = 2$ gelten. Nun gibt es keine zulässige Ziffer für M_2, d.h. in diesem Fall kann es keine Zeitpunkte geben, die sich mit zehn verschiedenen Ziffern darstellen lassen.

(2) $T_1 = 1$. Dann muss $M_1 = 0$, $h_1 = 2$ und $h_2 = 3$ gelten. Damit gibt es die zwei Möglichkeiten $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ bzw. umgekehrt $m_1 = 5$ und $s_1 = 4$. Auf den vier noch nicht besetzten Stellen können die verbleibenden Ziffern 6 bis 9 beliebig verteilt werden. Dafür gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $2 \cdot 24 =$ **48 Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

(3) $T_1 = 2$ und $M_1 = 0$. Dann muss $h_1 = 1$ gelten. Nun gibt es sechs Möglichkeiten, m_1 und s_1 aus den verbleibenden zulässigen Ziffern 3 bis 5 auszuwählen. Hat man diese Auswahl getroffen, verbleiben 5 Ziffern zur Verteilung auf die noch fünf nicht besetzten Stellen. Jede Verteilung führt zu einer gültigen Darstellung, also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $6 \cdot 120 =$ **720 Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

(4) $T_1 = 2$ und $M_1 = 1$. Dann muss $h_1 = 0$ gelten. Damit lässt sich M_2 mit den verbleibenden Ziffern nicht belegen.

(5) $T_1 = 3$ und $T_2 = 0$. Daraus folgt zwingend $M_1M_2 = 12$, womit aber h_1 nicht mehr korrekt belegt werden kann.

(6) $T_1 = 3$ und $T_2 = 1$. Daraus folgt zwingend $M_1 = 0$ und $h_1 = 2$, womit aber h_2 nicht mehr korrekt belegt werden kann.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Somit gibt es $48 + 720 =$ **768 Zeitpunkte**, die mit zehn verschiedenen Ziffern dargestellt werden können.

Nun lässt sich der erste Zeitpunkt eines Jahres dieser Art leicht ermitteln. Im Fall (2) kann der kleinste Wert den Monat 04 anzeigen. Da im Fall (3) der Monat 03 möglich ist, gilt es zunächst diesen Ansatz zu verfolgen. Da die Ziffern 0 bis 3 bereits vergeben sind, muss $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ gewählt werden. Daraus folgt: Das erste Mal in einem Jahr werden am **26.03. 17:48:59** alle zehn Ziffern verwendet.

Nach der Falluntersuchung kann es keinen Zeitpunkt mit $M_1 = 1$ geben. Wir verfolgen deshalb den Ansatz $M_1M_2 = 09$. Als Tag kann nicht $T_1T_2 = 30$ gewählt werden, weil die Ziffer 0 bereits gesetzt wurde. Auch $T_1T_2 = 29$ kann nicht gewählt werden, weil die Ziffer 9 bereits gesetzt wurde. Der Versuch $T_1T_2 = 28$ kann schließlich zu einer Zeitangabe der geforderten Art ergänzt werden: **28.09. 17:66:43.**

Bekannte Sätze der Mathematik

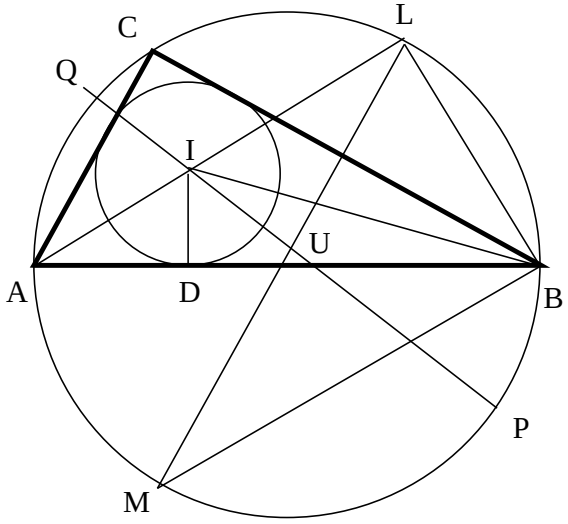
Südpolsatz. In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende durch die gegen-überliegende Ecke auf dem Umkreis[10].

Beweis: Man betrachte o.B.d.A. die Mittelsenkrechte m_c auf der Seite c und die Winkelhalbierende w_γ für den gegenüberliegenden Winkel ACB. S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_c mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C. Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist über der Sehne AS der Peripheriewinkel $\angle ACS$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle AUS$. Entsprechend ist der Winkel $\angle SCB$ halb so groß wie der Winkel $\angle SUB$. Da die Winkel $\angle AUS$ und $\angle SUB$ aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich groß sein. Folglich liegt die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ auf CS, woraus die Behauptung des Satzes folgt. ❑

Satz von Euler. Sind R der Umkreisradius und r der Inkreisradius eines Dreiecks, so gilt für den Abstand d zwischen den Mittelpunkten von Um- und Inkreis:

$$d^2 = R \cdot (r - 2r).$$

Beweis: Es seien U der Umkreismittelpunkt und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Gerade AI schneidet als Winkelhalbierende nach dem Südpolsatz den Umkreis in einem Punkt L, der auch auf der zugehörigen Mittelsenkrechten der Seite BC liegt. Der zweite Schnittpunkt dieser Mittelsenk-rechten (UL) mit dem Umkreis sei M. Das Dreieck MBL ist rechtwinklig (Umkehrung des Satz von Thales).



[10] Der Schnittpunkt wird Südpol genannt.

Bezeichnet man den Fußpunkt des von *I* aus gefällten Lotes zu *AB* mit *D*, dann gilt $\overline{ID} = r$. Wegen der Übereinstimmung in zwei Winkeln sind die Dreiecke *ADI* und *MBL* zueinander ähnlich. Daher gilt:

$$\frac{\left|\overline{ID}\right|}{\left|\overline{LB}\right|} = \frac{\left|\overline{AI}\right|}{\left|\overline{ML}\right|}, \text{ d.h. } \quad \left|\overline{ML}\right| \cdot \left|\overline{ID}\right| = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LB}\right|$$

Damit ist gezeigt: $2Rr = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LB}\right|$. Verbindet man *B* mit *I*, so gilt nach dem Außenwinkelsatz für den Winkel $\angle BIL$ am Dreieck *ABI*:

$$\angle BIL = \tfrac{1}{2} \cdot \angle BAI + \tfrac{1}{2} \cdot \angle IBA$$

Da zudem $\angle ILB = \angle ACB$ (Peripheriewinkel über der Sehne *AB*) und $\angle LBC = \angle LAC$ (Peripheriewinkel über der Sehne *CL*) gilt, findet man

$$\angle BIL = \angle LBI .$$

Das Dreieck *IBL* ist also gleichschenklig, d.h. es gilt $\left|\overline{LI}\right| = \left|\overline{LB}\right|$.

Nun seien *P* und *Q* die Schnittpunkte der Geraden *UI* mit dem Umkreis. Anwendung des Sehnensatzes ergibt $\left|\overline{PI}\right| \cdot \left|\overline{QI}\right| = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LI}\right|$. Die Streckenlängen auf der linken Seite lassen sich durch den Umkreisradius *R* und den Abstand *d* zwischen In- und Umkreismittelpunkt ausdrücken. Damit folgt:

$$(R + d) \cdot (R - d) = 2Rr$$

Durch einfaches Umformen erhält man die Gleichung aus der Behauptung. ❑

Aufgaben Serie 5 (2020/21)

Nicht vergessen: Am 8. März 2021 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik. Man findet die Aufgaben unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de und natürlich beim Mathematik-Lehrer.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

(Einsendungen bis 22. März 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [11])

[11] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 5-1.
In der Ebene seien 3*n* Punkte gegeben (*n* natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) *n* Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

(5 Punkte)

Aufgabe 5-2.
Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde*)
Ein Würfel mit Kantenlänge 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.

Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen. (6 Punkte)

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde*)
In einem Dreieck *ABC* sei $\angle ACB = 120°$, und die Innenwinkelhalbierenden durch *A*, *B* und *C* schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in *A'* bzw. *B'* bzw. *C'*. Wie groß ist der Winkel <A'C'B'?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen. (6 Punkte)

* Für die Einsendungen dieser Aufgaben (5.3 und 5.4) können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb verwandt werden. Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden. Bitte beachten: Bereits mit 3 richtig gelösten Aufgaben kann man einen Preis erreichen und Gruppenarbeit ist in Runde 1 ausdrücklich zugelassen!

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben.)

Aufgabe 5-5A.
(a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen *n*.

(2 Punkte)

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(2 Punkte)

(c) Man finde eine natürliche Zahle *n*, für die mit üblicher Rundungsregel gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2021$$ (4 Punkte)

Aufgabe 5-5B.
Ein *n*-Tupel von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißt *Pythagoreisches Zahlen-n-Tupel* (kurz *P-n-Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(2 Punkte)

(b) Man untersuche, ob ein *P*-102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen a_{101} und a_{102} existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die ersten 100 natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 100 sind!

(2 Punkte)

(c) Gegeben sei ein *P-n*-Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ mit ungeradzahligem a_n (mit $1 < k < n$). Man gebe ein *P*-(*n*+1)-Tupel an, das ebenfalls mit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beginnt?

(4 Punkte)

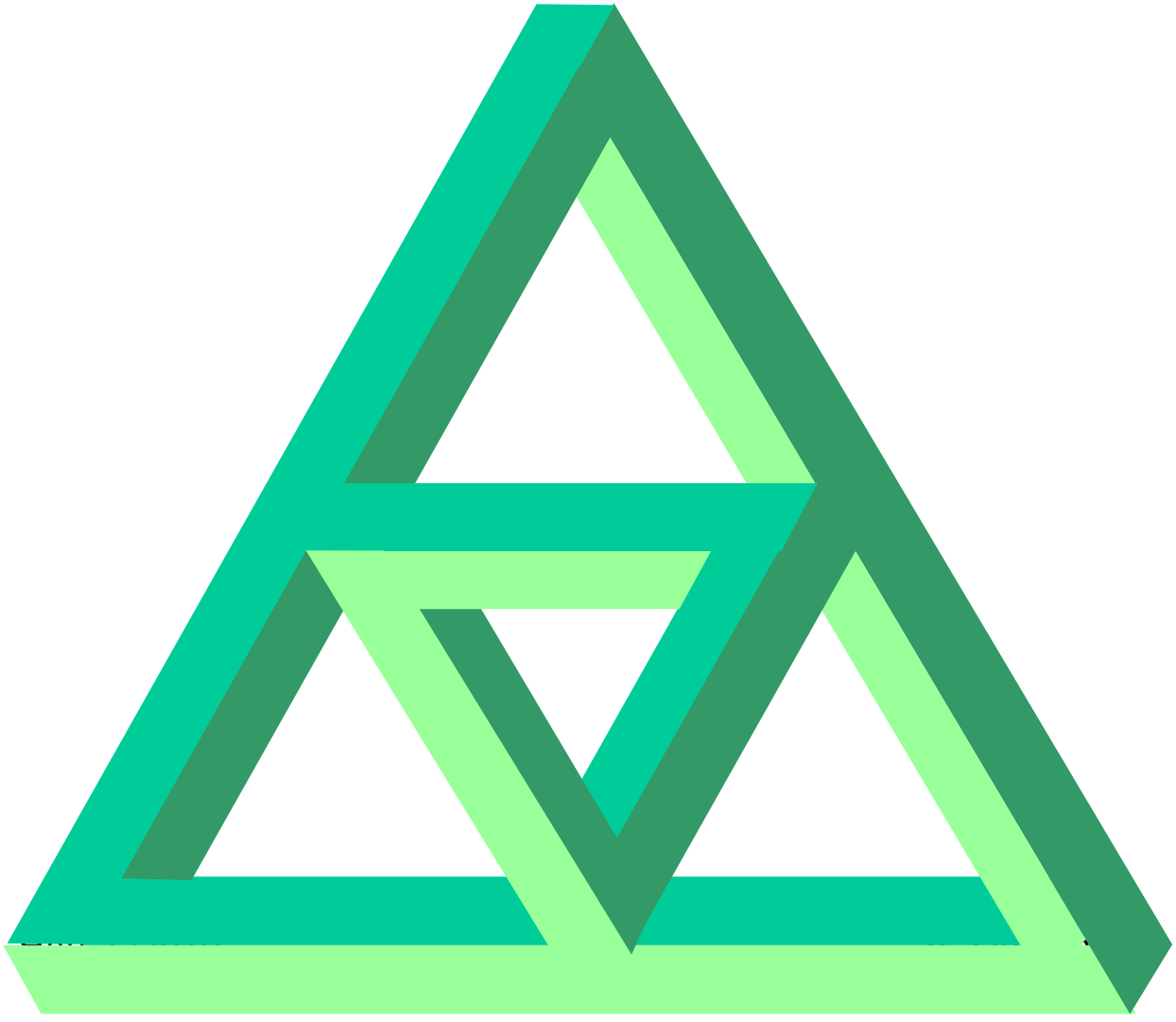
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 4 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 2 /2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 4

Aufgabe 4-1[1]. Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Der größtmögliche in Frage kommende einstellige Teiler ist 9. Die Zahl 9 teilt aber tatsächlich jeder der möglichen 180-stelligen Zahlen, da deren Quersumme *Q* in folgender Weise ermittelt werden kann:

$$Q = (1+0)+(1+1)+\ldots+(9+9) = 10\cdot(1+\ldots+9)+9\cdot(0+1+\ldots+9)$$
$$= 10\cdot 45 + 9\cdot 45 = 855$$

Diese Quersumme ist durch 9 teilbar. Der gesucht größte gemeinsame einstellige Teiler ist also gleich 9. ❑

Aufgabe 4-2[2]. Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei *p* eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

Lösungshinweise: Angenommen, es sei *p* eine Primzahl, für die $2p + 1$ eine Kubikzahl ist. Dann gibt es also eine natürliche Zahl *z* mit $z^3 = 2p + 1$. Da $2p + 1$ ungerade ist, ist auch *z* ungerade, kann also in der Form $z = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl *n* dargestellt werden. Somit gilt

$$2p + 1 = (2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$

also

$$p = n\cdot(4n^2 + 6n + 3)$$

Da *p* eine Primzahl ist und der Faktor in der Klammer eine natürliche Zahl größer als 2 ist, muss $n = 1$ gelten.

Für $n = 1$ ist $p = 13$ tatsächlich eine Primzahl und man findet wie gefordert mit $2p + 1 = 27$ eine Kubikzahl. Die einzige Primzahl *p* mit der geforderten Eigenschaft ist daher die Zahl 13. ❑

Hinweis: Dass z ungerade ist, muss nicht am Anfang untersucht werden. Man kann ebenso folgende Gleichungen betrachten.

$$2p + 1 = n^3$$

also

$$p = \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(n^2+n+1)$$

Der letzte Klammerausdruck ist stets ungerade und größer als $n - 1$. Folglich kann p nur dann eine Primzahl sein, wenn $\frac{1}{2}\cdot(n-1) = 1$ gilt.

[1] Teil (a) der Aufgabe MO521041
[2] MO-Klassiker MO060931 (1966/67)

Aufgabe 4-3. Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgende Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

Lösungshinweise: Bezeichnet man die Ziffern von links nach rechts mit a_1, a_2, ..., a_8, so sieht man unmittelbar wegen der Teilbarkeit durch 5 oder durch eine gerade Zahl folgende Bedingungen:

(1) $a_5 = 5$; a_2 , a_4 , a_6 , a_8 sind geradzahlig; a_1 , a_3 , a_7 sind ungeradzahlig.

Wegen der Teilbarkeit durch 8 muss die Zahl, bestehend aus den 3 Ziffern $a_6a_7a_8$ durch 8 teilbar sein. Da a_6 geradzahlig ist, muss sogar die zweistellige Zahl a_7a_8 durch 8 teilbar sein. Da keine Ziffer doppelt auftreten darf, findet man nur folgende Möglichkeiten:

(2) 216 - 416 - 432 - 472 - 632 - 672 - 816 - 832 - 872

Weiterhin muss die Zahl a_3a_4 durch 4 teilbar sein. Mit den Bedingungen (1) können das nur die Zahlen

(3) 12 - 16 - 32 - 36 - 72 - 76

sein. In jeder dieser Zahlen kommt entweder die 2 oder die 6 vor. Deshalb kann man in (2) jene 3 unterstrichenen Kombinationen streichen, in denen sowohl die 2 als auch die 6 vorkommen. Es bleiben also noch folgende Möglichkeiten, die Ziffern a_3, a_4 sowie a_6, a_7, a_8 anzuordnen, wobei Zahlendopplungen nicht auftreten dürfen:

Nr.	$a_6\ a_7\ a_8$	$a_3\ a_4$	$a_4+a_5+a_6$	restl. Ziffern		$a_1+ a_2+ a_3$	Bemerkung
1	416	32	11	entfällt			
2	416	72	11	entfällt			
3	432	16	15	7	8	16	entfällt
4	432	76	15	7	8	16	entfällt
5	472	16	15	3	8	12	möglich
6	472	36	15	1	8	12	entfällt
7	816	32	15	4	7	14	entfällt
8	816	72	15	3	4	14	entfällt
9	832	16	19	entfällt			
10	832	76	19	entfällt			
11	872	16	19	entfällt			
12	872	36	19	entfällt			

Da sowohl $a_1a_2a_3$ als auch $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ durch 3 teilbar sind, muss auch die Summe $a_4 + a_5 + a_6$ durch 3 teilbar sein. Dies erfüllen nur die Möglichkeiten Nr. 3 bis Nr. 8 der Tabelle. Ergänzt man die Tabelle mit den verbleibenden 2 Ziffern ($a_5 = 5$ ist ja fest) und berücksichtigt die Teilbarkeit der Zahl $a_4a_5a_6$ durch 3, so können nur

noch die Zahlen 38165472 und 18365472 Lösung der Aufgabe sein. Von der zweiten Zahl sind die ersten 7 Ziffern als Zahl 1836547 nicht durch 7 teilbar. Deshalb entfällt diese Zahl als Lösung.

Eine Probe bestätigt, dass die Zahl 38165472 alle Bedingung erfüllt. ❑

Aufgabe 4-4[3]. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+y) - 2 \cdot f(x-y) + f(x) = 6 \cdot xy - y^2$$

Lösungshinweise: Setzen wir $y = x$, so erhalten wir:

$$f(2 \cdot x) - 2 \cdot f(0) + f(x) = 5 \cdot x^2$$

Setzen wir nun $y = -x$, so finden wir

$$f(0) - 2 \cdot f(2 \cdot x) + f(x) = -7 \cdot x^2$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 2 und addieren dazu die zweite Gleichung, so führt dies zu:

$$3 \cdot f(x) - 3 \cdot f(0) = 3 \cdot x^2$$

d.h.

$$f(x) = x^2 + c$$

mit einer beliebigen Konstanten $c = f(0)$. Wenn es eine Lösung der Funktionalgleichung gibt, muss sie diese Form haben. Eine Probe bestätigt f als Lösung:

$$(x+y)^2 + c - 2 \cdot (x-y)^2 - 2 \cdot c + x^2 + c =$$
$$x^2 + 2 \cdot xy + y^2 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot xy - 2 \cdot y^2 + x^2 = 6 \cdot xy - y^2$$

❑

Aufgabe 4-5A.

(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots . + \sqrt{2020}}}}$ rational oder irrational ist[4].

(b) Für beliebige natürliche Zahlen *x* und *y* sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

- unendlich viele Paare (*x*; *y*) gibt, so dass *z* rational ist.
- unendlich viele Paare (*x*; *y*) gibt, so dass *z* irrational ist[5].

[3] MO-Klassiker – MO051033 (1965/66)
[4] Nach Aufgabe MO291031
[5] Nach Aufgabe MO221042

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen *t* gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen *t* gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen *t* gibt[6].

Lösungshinweise:
(a) Sind *x* eine rationale Zahl und *y* eine irrationale Zahl, so ist die Zahl $z = x + \sqrt{y}$ irrational. Wäre nämlich *z* rational, dann wäre auch $(z-x)^2$ rational im Widerspruch zu $(z-x)^2 = y$. Da nun 2019 rational und $\sqrt{2020} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101}$ irrational sind, ist deshalb $z_{2019} = 2019 + \sqrt{2020}$ irrational. Setzt man nun $z_k = k + \sqrt{z_{k+1}}$, so sind alle Zahlen z_k für $k = 1, \ldots, 2019$ irrational und insbesondere auch $x = \sqrt{z_1}$. ❑

Lösungsvariante: Durch fortgesetzte Umformungen der Art

$$x^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3+\ldots+\sqrt{2020}}}$$

$$(x^2-1)^2 - 2 = \sqrt{3 + \sqrt{4+\ldots+\sqrt{2020}}}$$

gelangt man zu einer Gleichung, auf deren rechten Seite $\sqrt{2020}$ steht. Wäre die Zahl *x* eine rationale Zahl, so wäre der Ausdruck auf der linken Seite ebenfalls rational, da hier nur die Operationen Subtrahieren und Quadrieren angewandt werden – im Widerspruch zur Irrationalität des Wurzelausdrucks auf der rechten Seite.

Hinweis: Es darf nicht umgeformt werden, bis kein Wurzelausdruck mehr enthalten ist. Dann führt die Annahme, *x* sei rational, nicht zum Widerspruch. Die Umformung erfolgt also nur so lange, bis die Irrationalität der rechten Seite leicht gezeigt werden kann.

Ergänzung: Im Aufgabentext fehlte leider ein Wurzelzeichen für die Zahl 2020, $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3+\ldots.+2020}}}$. Unter Anwendung der Gaußschen Summenformel reduziert sich wegen

$$3 + 4+\ldots+2020 = (1 + 2 + 3\ldots+2020) - (1 + 2) = ½ \cdot 2020 \cdot 2021 - 3$$
$$=2041210 - 3 = 2041207$$

die Aufgabe zu $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2041207}}}$. Da $2041207 = 7 \cdot 17^2 \cdot 1009$ ebenfalls keine Quadratzahl ist, kann die obige Argumentation in gleicher Weise angewandt werden.

[6] Nach Aufgabe MO331042

(b) Es genügt, Paare der geforderten Art anzugeben. Setzt man $x = 9n^2$ und $y = 16n^2$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n die Beziehung $x + y = 25n^2$. Dann sind alle Zahlen z mit

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y} = 3n + 4n + 5n + 12n$$

rational.
Setzt man $x = y = n^2$, so gilt $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y} = 2n + n\sqrt{2}$. Wegen der Irrationalität von$\sqrt{2}$ ist somit für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) die Zahl z irrational. ❑

Bemerkung: Da in der Aufgabenstellung die Zahl 0 nicht ausdrücklich ausgeschlossen wurde, vereinfacht sich die Argumentation für $x = 0$, indem für y im ersten Teil Quadratzahlen bzw. im zweiten Teil Nichtquadratzahlen einzusetzen sind.

(c) Es genügt auch hier, ein Beispiel anzugeben: $t = \frac{1}{(n^2-1)^2}$ ($n = 2, 3, \ldots$).
Es gilt tatsächlich für alle $n > 1$:

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{1}{(n^2-1)}} = \sqrt{\frac{1+(n^2-1)}{(n^2-1)^2}} = \frac{n}{(n^2-1)} \text{ ist rational.}$$

❑

Hinweis: Um solche geeigneten Zahlen t zu finden, versuche man den Wurzelausdruck zu analysieren. Man kann vermuten, dass es sicher günstig für die Zielstellung ist, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also $t = \frac{p^2}{q^2}$, weil dann die innere Wurzel rational bleibt. Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p + q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p = 1$ und $q = n^2 – 1$ erhält man die oben angegebene Zahlenfolge.

Ergänzend sei nun gefragt, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ irrational ist. Auch wenn dies „gefühlsmäßig“ sicherlich positiv zu beantworten ist, wird auch dafür als Beweis die Angabe geeigneter Beispiele erwartet. Betrachtet man die Zahlen $t = \frac{1}{n^4}$ ($n = 1, 2, ...$), so erkennt man aus

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n > 0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Die Aufgabe hat einen Vorgänger – **Aufgabe MO301043**: Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl *m* derart gibt, dass es zu jeder positiven Zahl *k* höchstens *m* natürliche Zahlen *t* gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Auch hier genügt es, eine Folge von geeigneten Zahlen anzugeben.

$$k = 2^{2m+1} \; ; \; t_i = \left(2^{2m-i} - 2^i\right)^4 \quad i = 0, \ldots, m+1$$

oder

$$k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \ldots \cdot ((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \quad i = 2, \ldots, m+1$$

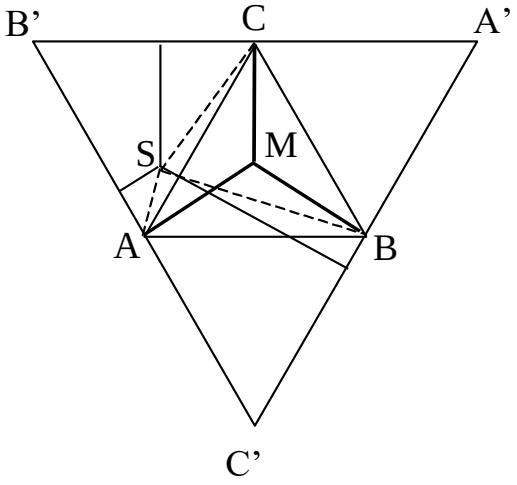
Aufgabe 4-5B. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, sodass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker, 1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.

(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt.

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt?

Lösungshinweise:



(a) Der Schnittpunkt *M* der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der FERMAT-Punkt. Betrachtet man das gleichseitige Dreieck *A'B'C'*, das aus *ABC* durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist *M* auch der Höhenschnittpunkt von *A'B'C'*.

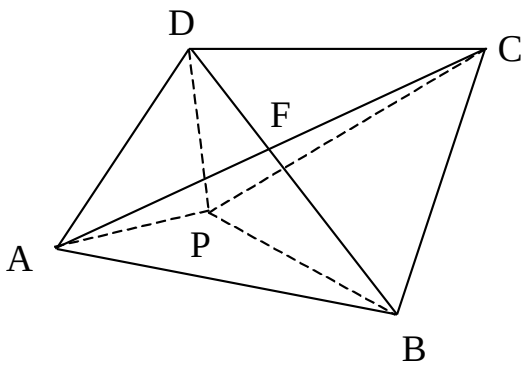
Im gleichseitigen Dreieck A'B'C' ist nach dem Satz von VIVIANI[7] die Summe der Abstände eines inneren Punktes *S* zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant und gleich der Höhe des

[7] VINCENZO VIVIANI, italienischer Mathematiker, 1622–1703

Dreiecks *A'B'C'*. Der Beweis dieser Aussage ist einfach: Man betrachte die Dreiecke *A'B'S*, *B'C'S* und *A'C'S*. Die Summe der drei Flächeninhalte ist so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks *A'B'C'*. Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks als das halbe Produkt von Grundseite und Höhe berechnet und in den Teildreiecken die Grundseiten jeweils der Grundseite des Gesamtdreiecks entsprechen, folgt die Behauptung, dass die Summe der Höhen der Teildreiecke gleich der Höhe im Gesamtdreieck ist.

(Für *M* stimmt die gesuchte Summe mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein.) Die Abstände von *S* zu den Eckpunkten *A*, *B* und *C* können aber nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten sein. Liegt dagegen *S* außerhalb des Dreiecks *A'B'C'*, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von *M* aus.

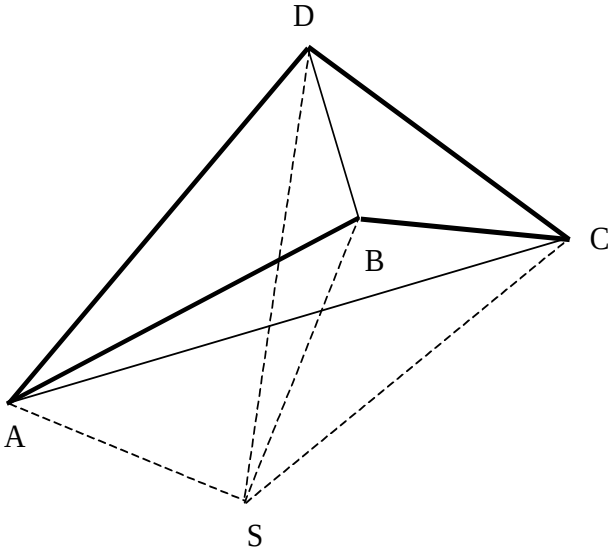
(b) Es sei *F* der Schnittpunkt der Diagonalen und *P* ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken *APC* bzw. *DPB*:



$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{AC}| = |\overline{AF}| + |\overline{FC}|$$
$$|\overline{BP}| + |\overline{PD}| \geq |\overline{BD}| = |\overline{BF}| + |\overline{FD}|$$

Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von *P* zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalenschnittpunktes zu allen Eckpunkten.

(c) Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (in der Skizze *B*) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist dieser Eckpunkt der FERMAT-Punkt. Es sei *S* ein beliebiger, von *B* verschiedener Punkt der Ebene.



Die drei Dreiecke *ASC*, *CSD* und *DAS* überdecken das Dreieck *ACD* und somit das konkave Viereck *ABCD*. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt *B*. Es sei dies das Dreieck *SCD*. Dann liegt der Streckenzug *CBD* vollständig innerhalb des Dreiecks *SCD* und somit gilt:

$$\left|\overline{CS}\right| + \left|\overline{SD}\right| \geq \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BD}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.)
Im Dreieck *ABS* gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt, falls *S* zwischen *AB* liegt.)
Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von *S* zu allen 4 Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von *B* zu den Eckpunkten *A*, *C* und *D*. Der Punkt *B* ist somit der FERMAT-Punkt des konkaven Vierecks. ❑

Ergänzende Lösungshinweise

Die **Aufgabe MO521041** wurde mit Teil (b) fortgesetzt: Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller diejenigen 178-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunundachtzig zweistelligen Zahlen 11, 12, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Wie aus Teil (a) folgt, beträgt die Quersumme 854 und ist somit nicht durch 3 teilbar. Wir nehmen an, es gibt einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Ein solcher Teiler ist auch Teiler von 99, da er auch Teiler der Differenz der beiden ausgewählten Zahlen ...1211 und ...1112 ist (wobei ... eine beliebige, aber für beide Zahlen gleich Ziffernfolge ist). Somit könnte die Zahl 11 der größte gemeinsame Teiler sein.

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme *A* jeder der betrachteten Zahlen ist gleich

$$\begin{aligned} A &= (1-1) + (1-2) + \ldots + (9-9) = \\ &= 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \ldots 10 \cdot 9 - 9 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 2 + 3 + \ldots + 9 = 44 \end{aligned}$$

Folglich ist der größte gemeinsame Teiler gleich 11. ❑

Die Aufgabe 4-5A1 findet in der **Aufgabe MO521142** eine Fortsetzung:

Die Zahlenfolge (a_n) sei durch $a_n = 1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \ldots . + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}}}$ für alle positiven ganzen Zahlen *n* definiert. Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl *C* gibt, mit der die Ungleichung $a_n < C$ für alle positiven ganzen Zahlen *n* erfüllt ist.

Lösungshinweise: Der gegebene Ausdruck für a_n wird schrittweise unter Ausnutzung der Monotonie der Wurzelfunktion abgeschätzt, beginnend mit der am Weitesten innenstehenden Wurzel.

Für jedes k > 0 gilt nämlich: $\sqrt{k+\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+2\sqrt{k}+1} = \sqrt{k}+1$.

Damit lässt sich a_n schrittweise zu $a_n < 1+\sqrt{2}+1$ vereinfachen. Also ist mit $C = 2+\sqrt{2} < 3{,}42$ eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft gefunden. Die kleinste Schranke liegt bei 3,09....

zu Aufgabe 4-2. Für Aufgaben dieses Typs – insbesondere, wenn hierbei Primzahlen verwendet werden – sollte für einen ersten Lösungsansatz immer nach einer geeigneten Faktorisierung gesucht werden. Dies führte auch in anderen MO-Aufgaben zum Erfolg.

Aufgabe MO481032. (a) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für welche $2^n + 1$ eine Quadratzahl ist!

Lösungshinweise: Leicht findet man, dass *n* = 3 zu einer Quadratzahl führt. Für die allgemeine Lösung schreibe man die Aufgabe zunächst um, indem eine natürliche Zahl *m* verwendet wird:

$$2^n + 1 = m^2$$
also $$2^n = m^2 - 1 = (m-1)\cdot(m+1).$$

Da auf der linken Seite dieser Gleichung eine Zweierpotenz steht, müssen auch beide Faktoren der rechten Seite jeweils eine Zweierpotenz sein. Also gibt es Zahlen $a < b$ mit $2^a = m - 1$ und $2^b = m + 1$. Das bedeutet:

$$2^b - 2^a = 2^a \cdot (2^{b-a} - 1) = 2.$$

Diese Gleichung kann aber nur für $a = 1$ erfüllt werden, woraus $m = 3$ folgt. ❑

(b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für welche $2^n + 1$ eine Kubikzahl oder eine noch höhere Potenz einer ganzen Zahl ist!

(*Hinweis:* Es ist nachzuweisen, dass es keine solche Zahl *n* gibt.)

Aufgabe MO511023. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (*p* ; *z*) aus einer Primzahl *p* und einer positiven ganzen Zahl *z*, für welche die Beziehung $z^2 = 25p + 9$ gilt.

Lösungshinweise: Anhand von Beispielen wird man wohl kaum die Lösungsmenge erschließen können. Naheliegend ist wiederum eine Faktorisierung:

$$25p = z^2 - 9 = (z-3)\cdot(z+3)\ .$$

Der Term 25*p* lässt sich auf sechs verschiedene Arten in zwei Faktoren zerlegen:

z – 3	z + 3	(z + 3) – (z – 3) = 6	p	z
1	25p	25p – 1	nicht ganzzahlig	
25p	1	1 – 25p	nicht ganzzahlig	
25	p	P - 25	31	28
p	25	25 – p	19	22
5	5p	5p – 5	nicht ganzzahlig	
5p	5	5 – 5p	nicht ganzzahlig	

Folglich können nur die Paare (19 ; 22) und (31 ; 28) Lösungen sein, was durch Proben bestätigt wird. ❑

Aufgabe MO501035. Man bestimme alle Paare (*p* ; *q*) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Schreibt man den Term als $(p-1)(p+1) - 3q$, so wird ersichtlich, dass für $p \neq 3$ dieser Term stets durch 3 teilbar ist (weil *p* – 1, *p* und *p* + 1 drei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind). Wenn der Term also eine Primzahl ist, kann dieser ebenfalls nur 3 sein.

Aus $p^2 - 3q - 1 = 3$ folgt $3q = p^2 - 4 = (p-2)(p+2)$.

Hieraus kann nun gefunden werden, dass *p* – 2 = 3 und *p* + 2 = *q* gelten muss (wie?), so dass (5 ; 7) ein Lösungspaar ist. Dies wird durch die Probe bestätigt, denn $5^2 – 21 –1 = 3$.

Nun muss noch der Fall *p* = 3 untersucht werden. Hieraus ergibt sich als eine weitere Lösung das Paar (3 ; 2) mit $3^2 – 6 – 1 = 2$. ❑

Aufgabe MO501044. Bestimmen Sie sämtliche Paare (*n* ; *t*) ganzer Zahlen, für die $n^2 = 2^t + 5$gilt!

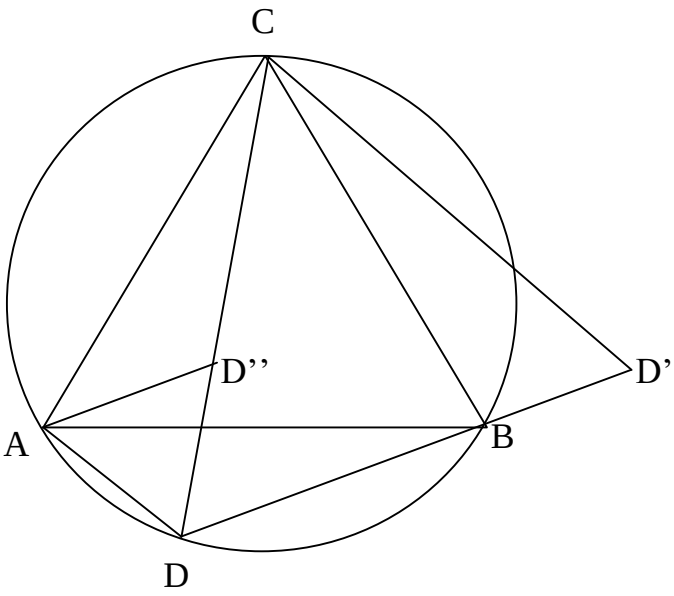
Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren für *t* = 0, 1, 2 findet man das Paar (3 ; 2) als Lösung, denn es gilt $3^2 = 2^2 + 5 = 9$. Weiteres Probieren lässt die Vermutung zu, dass es keine weiteren Lösungspaare gibt, was natürlich zu beweisen ist. Obwohl die Zahl 5 nicht zur Faktorisierung „einlädt“, ist der Lösungsansatz dennoch erfolgreich:

$$2^t + 4 = (n-1)(n+1).$$

Für *t* > 2 ist *n* offenbar ungerade. Damit sind beide Faktoren der rechten Seite durch 2 und einer sogar durch 4 teilbar. Das Produkt ist also immer durch 8 teilbar. Jedoch ist für *t* > 2 die linke Seite stets durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Aus diesem Widerspruch folgt, dass es keine weiteren Lösungspaare für *t* > 2 geben kann. ❑

Aufgaben über Summen geometrischer Abstände

Aufgabe. Es sei *ABC* ein gleichseitiges Dreieck und *D* ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis dieses Dreiecks, der auf dem Bogenstück zwischen *A* und *B* liegt. Dann gilt für die Streckenlängen: $|\overline{AD}| + |\overline{DB}| = |\overline{CD}|$.



Beweisskizze: (*Variante 1*) Satz von PTOLEMÄUS[8]: Die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks *ADCB* ist gleich dem Produkt der Diagonalen, also

$$|\overline{AD}| \cdot |\overline{CB}| + |\overline{DB}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}|.$$

Da aber *CB* = *AC* = *AB* gilt, kann die Gleichung vereinfacht werden und man erhält die Behauptung.

(*Variante 2*, Hilfspunkt *D*') Es werde *DB* über *B* hinaus verlängert und es gelte $|\overline{BD'}| = |\overline{AD}|$. Dann ist das Dreieck *CAD* kongruent zum Dreieck *CBD*', da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel ∠*CBD*' als Nebenwinkel zum Winkel ∠*DBC* gleich groß zum Winkel ∠*CAD* als gegenüberliegender Winkel zum Winkel ∠*DBC* im Sehnenviereck *ADBC* ist. Dann gilt aber auch die Winkelgleichheit ∠*D'CB* = ∠*DCA* und somit ∠*D'CD* = ∠*BCA* = 60° sowie als Peripheriewinkel über der Sehne *CB* auch ∠*CDB* =∠*CAB* = 60°.

Damit ist das Dreieck *DD'C* ebenfalls gleichseitig und es gilt wie behauptet

$$|\overline{CD}| = |\overline{DD'}| = |\overline{DB}| + |\overline{BD'}| = |\overline{DB}| + |\overline{AD}| .$$

(*Variante 3*, Hilfspunkt *D*'') Es sei *D*'' auf der Strecke *CD*, so dass der Winkel ∠*D''AD* = 60° sei. Da wegen der Peripheriewinkel über der Sehne *AC* auch der Winkel ∠*ADC* = 60° gilt, ist das Dreieck *ADD''* gleichseitig und es gilt

$$|\overline{AD}| = |\overline{AD''}| = |\overline{DD''}|.$$

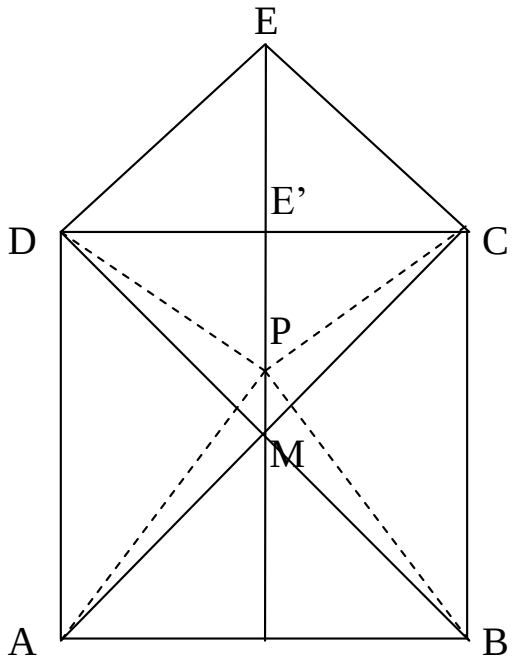
Außerdem sind die Dreiecke *AD''C* und *ADB* kongruent (da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen). Damit gilt aber:

$$|\overline{CD}| = |\overline{DD''}| + |\overline{D''C}| = |\overline{AD}| + |\overline{DB}|.$$ ❑

[8] KLAUDIUS VON ALEXANDRA PTOLEMÄUS (griechischer Mathematiker und Astronom; etwa 85 bis 165)

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge *a* und mit einem auf *CD* aufgesetzten Dreieck *CDE*. Man bestimme die Lage des Punktes *P*, für den die Summe der Abstände zu den 5 Eckpunkten dieser Figur minimal wird.

Beweisskizze: Aus Symmetriegründen liegt der Punkt *P* auf der Verbindung des Mittelpunktes *M* des Quadrates *ABCD* und *E*. Sei der Abstand des gesuchten Punkte *P* zum *M* gleich *x*. Es genügt zunächst, die Summe *S*(*x*) der Abstände von *P* zu den Quadratecken und dem Schnittpunkt *E*' von *ME* mit *CD* zu ermitteln. Dafür gilt:



$$S(x) = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} + \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

Man findet ein Minimum für *S*(*x*) bei $x \approx 0{,}3122 \cdot a$. Da der Punkt *P* im Innern des Quadrates liegt, ist *P* auch der FERMAT-Punkt des Fünfecks *ABCDE*. ❑

Aufgabe. Es sei *ABCD* eine gerade dreiseitige Pyramide mit der gleichseitigen Grundfläche *ABC* (Seitenlänge *a*) und der Spitze *D* (Höhe *h*). Man finde den Punkt *F*, so dass die Summe der Abstände von *F* zu den Eckpunkten minimal wird.

Beweisskizze: Wieder aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Punkt *F* auf der Höhe der Pyramide. Es sei sein Abstand zur Grundfläche *x*. Da die Höhe auf dem Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche steht, gilt für die Summe der Abstände *S*(*x*):

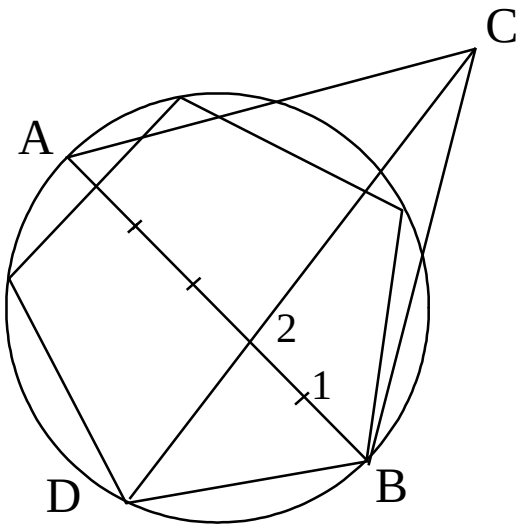
$$S(x) = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + x^2} + (h - x).$$

Man findet das Minimum für *S*(*x*) bei $x = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Damit *F* der FERMAT-Punkt ist, darf *h* nicht kleiner als *x* sein, andernfalls ist *D* der FERMAT-Punkt.

Näherungskonstruktionen für reguläre n-Ecke

Im Jahre 1790 erschien in Göttingen ein Buch von JOHANN NIKOLAUS MÜLLER (1754 – 1797) mit dem Titel „Anweisungen zur Geometrie für Anfänger“[9]. Darin beschreibt der Privatlehrer an der Universität Göttingen im 35. Kapitel ein Verfahren, mit dem man näherungsweise einem Kreis regelmäßige *n*-Ecke beliebiger Seitenzahl einbeschreiben kann:

„*Theilet den Durchmesser AB desselben bey den Puncten 1, 2, ..., n-1 in n gleiche Theile. Nehmet den ganzen Durchmesser AB mit dem Zirkel ab und machet aus seinen Endpuncten, A und B, aufwärts zween Bogen, die sich im Punct C schneiden. Von den Puncten, A und B, ziehet nach dem Durchschnittspunct C, die geraden Linien AC und BC; so entstehet das gleichseitige Dreyeck ABC. Aus seiner Spitze C und durch den Theilungspunct 2 ziehet die gerade Linie CD, die dem Kreis in dem Punct D begegnet. Aus dem Endpunct B ziehet hierauf nach dem Punct D, die gerade Linie BD, welche sich sicher in dem Kreis n-mal herumtragen lässt. Unterlasset ihr nicht sie wirklich n-mal herumzutragen und die Puncte mit geraden Linien zusammenzuziehen, so habt ihr das reguläre n-Eck im Kreise gezeichnet.*“



Die Skizze erläutert die Konstruktionsbeschreibung für das im Kreis einbeschriebene reguläre Fünfeck. Beim Ausprobieren der Methode stellt man fest, dass dieses Verfahren für $n = 3, 4, 6$ das exakte *n*-Eck liefert. Um die Genauigkeit des Verfahrens für andere n zu untersuchen, beschreibe man die Abhängigkeit der Seitenlänge $\overline{BD}$ vom Radius $r = \overline{AB}$.

Erstaunlich, dass mit diesem einfachen Verfahren der relative Fehler für $n < 11$ unter 1% bleibt. Für das 17-Eck errechnet sich ein relativer Fehler der konstruierten zur exakten Seitenlänge von weniger als 3%. Man kann zeigen, dass sich für wachsendes *n* der relative Fehler 10% nur geringfügig übersteigt.

[9] http://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18

Thema 3 – Lineare Gleichungssysteme

Angeregt durch die folgende Aufgabe des 59. MO-Jahrgangs wollen wir über lineare Gleichungssysteme diskutieren:

Aufgabe MO590934. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$ax + 9y = 5$$
$$x + ay = 1$$

in den Variablen x, y mit Parameter a.

(a) Für welche Werte für a hat das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x; y)$? Geben Sie in diesen Fällen die Lösung in Abhängigkeit von a an.
(b) Gibt es ein Wertepaar $(x; y)$, welches für mehrere Werte a eine Lösung des Gleichungssystems ist?

Vorbemerkung: Ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme der Form

(I) $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$
(II) $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

besteht bekanntlich darin, eine Variable zu eliminieren[10]. Dazu multiplizieren wir zum Beispiel die erste Gleichung mit a_2 und die zweite Gleichung mit $-a_1$. Nach Addition der beiden resultierenden Gleichungen erhalten wir

(III) $(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \cdot y = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2$

Ist der erste Faktor der linken Seite der Gleichung (III) von Null verschieden, gibt es eine eindeutige Lösung für y:

(IV) $y = \frac{a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}$

Setzen wir diese in die Gleichung (I) ein, finden wir für $a_1 \neq 0$ eine eindeutige Lösung für x:

(V) $x = \frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$

Ist dagegen der erste Faktor der linken Seite der Gleichung (III) gleich Null, kann es keine Lösung für $a_2 \cdot c_1 \neq a_1 \cdot c_2$ geben bzw. sind für $a_2 \cdot c_1 = a_1 \cdot c_2$ alle reellen Zahlen y Lösung.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (a): Aufgrund der Vorbemerkung ist der Ausdruck $1 \cdot 9 - a \cdot a = 9 - a^2$ hinsichtlich seiner Nullstellen zu untersuchen. Da genau eine Lösung gesucht wird, muss a verschieden von 3 und -3 sein. Dann können wir die Lösungen gemäß (III) und (IV) unmittelbar angeben:

[10] Sonderfälle, bei denen Koeffizienten von x oder y gleich Null sind, wollen wir hier nicht diskutieren.

$$y = \frac{1\cdot 5 - a\cdot 1}{1\cdot 9 - a\cdot a} = \frac{5-a}{9-a^2} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{5 - 9\cdot\left(\frac{5-a}{9-a^2}\right)}{a} = \frac{5\cdot(9-a^2) - 9\cdot(5-a)}{a\cdot(9-a^2)} = \frac{9-5\cdot a}{9-a^2}\,.$$

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (b): Aus der zweiten gegebenen Gleichung erhalten wir für $y \neq 0$ die Gleichung $a = \frac{1-x}{y}$. Wir erkennen, dass es für $y \neq 0$ nur genau eine Lösung für a gibt. Ist dagegen $y = 0$, erhalten wir aus der zweiten Gleichung $x = 1$ und somit aus der ersten Gleichung den eindeutigen Wert $a = 5$. Also ist die Frage zu verneinen: Es gibt kein Wertepaar $(x; y)$, dass für mehrere Zahlen a Lösung des Gleichungssystems ist.

Lösungsvariante: In den offiziellen Lösungshinweisen zur Aufgabe wird eine allgemeinere Lösungsstrategie vorgeschlagen. Mit der Vermutung, dass die Frage aus Aufgabenteil zu verneinen ist, nehmen wir an, es gäbe mindestens zwei verschiedenen Zahlen a_1 und a_2, für die das Gleichungssystem eine Lösung $(x_0; y)$ hat. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$a_1 \cdot x + 9 \cdot y = 5 = a_2 \cdot x + 9 \cdot y, \text{ also } (a_1 - a_2) \cdot x = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung finden wir

$$x + a_1 \cdot y = 1 = x + a_2 \cdot y, \text{ also } (a_1 - a_2) \cdot y = 0.$$

In beiden Fällen folgt (wegen der Annahme $a_1 \neq a_2$) $x = 0$ bzw. $y = 0$. Wir überzeugen uns jedoch davon, dass das Paar $(0; 0)$ keine Lösung des Gleichungssystem ist. ❑

Wettbewerbsaufgaben mit Gleichungssystemen bieten sich offenbar an, im Schwierigkeitsgrad zwischen den Klassenstufen 9 und 10 zu differenzieren. So lautete die zugehörige

Aufgabe MO591034. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$a \cdot x + (5 \cdot a + 9) \cdot y = 1$$
$$(5 \cdot a + 9) \cdot x + a \cdot y = -1$$

in den Variablen x, y mit Parameter a.

(a) Bestimmen Sie für jede reelle Zahl a die Anzahl der Lösungen $(x; y)$ des linearen Gleichungssystems. Geben Sie für diejenigen Werte a, für welche das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x; y)$ hat,

(b) Gibt es ein Wertepaar $(x; y)$, welches für mehrere Werte a eine Lösung des Gleichungssystems ist?

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (a): Wir könnten die allgemeine Lösungsstrategie von linearen Gleichungssystemen wie in der Aufgabe MO590934 anwenden. Die aufwändige Rechnung wird in den offiziellen Lösungshinweisen gezeigt. Als Lösungsvariante wird aber auch darauf verwiesen, dass die spezielle

Form des Gleichungssystems eine wesentlich einfachere Lösung ermöglicht: Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$(6 \cdot a + 9) \cdot (x + y) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

- Für $a = -\frac{2}{3}$ gibt es unendlich viele Lösungspaare (x, y).
- Ist $a \neq -\frac{2}{3}$, so folgt $y = -x$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir $x = \frac{-1}{4 \cdot a + 9}$. Für $a = -\frac{9}{4}$ kann es also keine Lösung des Gleichungssystems geben.
- Ist dagegen $a \neq -\frac{9}{4}$ erhalten wir $y = \frac{1}{4 \cdot a + 9}$ und für das Gleichungssystem gibt es genau eine Lösung $\left(-\frac{1}{4 \cdot a + 9}; \frac{1}{4 \cdot a + 9}\right)$.

Damit ist Aufgabenteil vollständig beantwortet. ❑

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (b): Wir lösen die erste Gleichung nach *a* auf und erhalten für $x + 5 \cdot y \neq 0$ nach äquivalenter Umformung

$$a = \frac{1 - 9 \cdot y}{x + 5 \cdot y}$$

Es kann also in diesem Fall nur eine Lösung für a geben (oder keine Lösung, wenn für dieses a die zweite Gleichung widersprüchlich wird). Nehmen wir dagegen $x + 5 \cdot y = 0$ an und substituieren wir in der zweiten Gleichung $x = -5 \cdot y$, so erhalten wir

$$a = \frac{1 - 45 \cdot y}{24}$$

Es kann also auch in diesem Fall nur eine Lösung für a geben (oder keine Lösung, wenn für dieses a die erste Gleichung widersprüchlich wird).

Die Frage des Aufgabeteils (b) ist also zu verneinen. ❑

Diese Aufgaben haben in der Mathematik-Olympiade einen Vorgänger:

Aufgabe MO571045. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$a^2 \cdot x + y = a$$
$$x + a^2 \cdot y = a$$

in den reellen Variablen a, x und y.

Bestimmen Sie die Menge M aller Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung a hat. Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Aufgaben mit Gleichungssystemen wurden wiederholt in den Mathematik-Olympiaden gestellt. Da die Lösung solcher linearen Systeme eher eine technische Fertigkeit erfordert, werden sie „versteckt“, wie zum Beispiel in

Aufgabe MO580941. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$|x + y| + z = 4 \;\; ; \;\; |y + z| + x = 5 \;\; ; \;\; |z + x| + y = 6$$

Lösungshinweise: Mit Fallunterscheidung sind die Betragszeichen aufzulösen. In jedem dieser Fälle entstehen einfach zu lösende lineare Gleichungssysteme.

Aufgabe MO570934. Drei Mähdrescher A, B und C besitzen unterschiedliche Mähleistungen. Folgendes ist bekannt:

(1) Wird ein Feld 9 Stunden von A und 2 Stunden von B bearbeitet, ist es komplett abgeerntet.
(2) Würde das gleiche Feld 4 Stunden von A und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{2}{3}$ des Feldes abgeerntet.
(3) Würde das gleiche Feld 2 Stunden von B und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{7}{12}$ des Feldes abgeerntet.

Ermitteln Sie, wie lange jeder einzelne der drei Mähdrescher brauchen würde, um das komplette Feld allein abzuernten.

Anmerkung: In den Aussagen (1) bis (3) wird vorausgesetzt, dass die Mähdrescher stets mit voller Leistung arbeiten.

Lösungshinweise: Es sei a die Stundenleistung des Mähdreschers A. Die Zahl a gibt dabei an, welchen Anteil des betrachteten Feldes A innerhalb einer Stunde bearbeiten kann. Analog seien die Stundenleistungen der anderen beiden Mähdrescher mit b und c bezeichnet. Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$9 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \qquad 4 \cdot a + 3 \cdot c = \frac{2}{3} \qquad 2 \cdot b + 3 \cdot c = \frac{7}{12}$$

Formen wir die erste Gleichung nach b und die zweite Gleichung nach c um und substituieren wir mit den resultierenden Gleichungen in der dritten Gleichung b und c, so erhalten wir eine lineare Gleichung in a. Mit deren Lösung $a = \frac{1}{12}$ finden wir aus der ersten und zweiten Gleichung $b = \frac{1}{8}$ bzw. $c = \frac{1}{9}$.

(*Hinweis:* Die genannten Umformungen müssen natürlich in der Lösungsdarstellung vollständig angegeben sein!)

Somit gilt: Mähdrescher A benötigt 12 Stunden, um das Feld allein abzuernten, Mähdrescher, B benötigt dafür 8 Stunden und Mähdrescher C benötigt dafür 9 Stunden.

Gleichungssysteme und der Satz von VIETA

Die Anwendung des Satzes von VIETA[11] als Lösungsstrategie für Gleichungssysteme schien in Vergessenheit geraten zu sein. Doch in Aufgabe MO591044 wird dieser Ansatz verwendet. Dazu betrachten wir zunächst Gleichungssysteme mit zwei Variablen. Es sollte der Zusammenhang bekannt sein: Besitzt eine quadratische Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ die reellen Nullstellen x_1 und x_2, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 + x_2 = -a \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = b$$

Diese Aussage ist eine einfache Folgerung des Fundamentalsatzes der Algebra, nach dem sich ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in den komplexen Zahlen als Produkt von n Linearfaktoren darstellen lässt, hier also

$$x^2 + a \cdot x + b = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Nach Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x erhalten wir die behaupteten Gleichungen.

Aufgabe MO591044. Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare $(a; b)$, für welche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$g(x) = x^2 + (2a + 1) \cdot x + (2b + 1)$$

die Nullstellen $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ besitzt.

Lösungshinweise: Nach Satz von VIETA folgt für die Koeffizienten der Funktionen f und g

$$b = x_1 \cdot x_2 \quad \text{bzw.} \quad 2b + 1 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}$$

Nach Multiplikation beider Gleichungen erhalten wir $b \cdot (2b + 1) = 1$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten $b_1 = -1$ und $b_2 = \frac{1}{2}$. Außerdem folgt aus dem Satz von VIETA auch

[11] FRANCISCUS VIETA (1540 bis 1603)

$$-a = x_1 + x_2 \quad \text{bzw.} \quad (-2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Führen wir diese beiden Gleichungen zusammen, finden wir

$$-(2a + 1) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{a}{b}$$

Für $b = \frac{1}{2}$ erhalten wir den Widerspruch $-(2a + 1) = -2a$. Für $b = -1$ erhalten wir dagegen $-(2a + 1) = a$, also $a = -\frac{1}{3}$. Somit kann nur $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$ das Lösungstupel für diese Aufgabe sein. Dies lässt sich nun durch eine Probe bestätigen, die ausführlich zu diskutieren ist. ❑

In den Aufgaben vorangegangener Jahre finden wir in den Lösungshinweisen zu Olympiade-Aufgaben bereits einen direkten Bezug zum Satz von VIETA in der

Aufgabe MO461035. Auf einem Zettel sind zwei verschiedene Zahlen notiert. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen x und y gibt, sodass eine der beiden notierten Zahlen $x + y$ und die andere gleich $x \cdot y + 1$ ist.

Lösungshinweise: Sind a und b die notierten Zahlen, so soll also eines der folgenden Gleichungssysteme gelten:

(I) $a = x + y$ (II) $b = x \cdot y + 1$

oder

(I‘) $a = x \cdot y + 1$ (II‘) $b = x + y$

Das obere Gleichungssystem (I), (II) ist nach dem Satz von VIETA genau dann lösbar in reellen Zahlenpaaren $(x; y)$, wenn die Gleichung

$$t^2 - a \cdot t + (b - 1) = 0$$

reelle Lösungen in t hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminate $a^2 - 4(b - 1)$ nicht negativ ist, also $a^2 \geq 4(b - 1)$ gilt. In Analogie finden wir auch, dass das untere Gleichungssystem (I‘), (II‘) genau dann reelle Lösungen hat, wenn $b^2 \geq 4(a - 1)$ gilt.

Nehmen wir nun aber an, keines der beiden Gleichungssysteme habe reelle Lösungen. Dann müsste offenbar $a^2 + b^2 < 4(b - 1) + 4(a - 1)$ gelten. Da diese Ungleichung gleichbedeutend zu $(a - 2)^2 + (b - 2)^2 < 0$ ist, kann dies nicht möglich sein. Also hat wenigstens eines der genannten Gleichungssysteme ein reelles Zahlenpaar $(x; y)$ als Lösung. ❑

Aufgabe MO440921. Es seien x und y positive reelle Zahlen mit

dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und

dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{x \cdot y} = 6$.

Bestimmen Sie das arithmetrische Mittel $a = \frac{x+y}{2}$.

Lösungshinweise: Formulieren wir die Gleichung des harmonischen Mittels zu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ um und multiplizieren wir diese Gleichung mit $x \cdot y$, so erhalten wir

$$x + y = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{g^2}{2} = 18$$

woraus das arithmetische Mittel $a = 9$ unmittelbar folgt. ❑

Dieser kurzen Lösungsdarstellung folgt die *Bemerkung*, dass aus $x + y = 18$ und $x \cdot y = 36$ mit Hilfe des Satzes von VIETA die Zahlen x und y explizit angegeben werden können, nämlich als Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 - 18z + 36 = 0$. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \geq y$ an, finden wir $x = 9 + \sqrt{45}$ und $y = 9 - \sqrt{45}$. Aber diese Angaben sind für die Lösungsdarstellung zur Aufgabe nicht erforderlich.

Der Satz von VIETA gilt für Polynome beliebigen Grades. Besitzt eine kubische Gleichung $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ drei reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a; \quad x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = b; \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c$$

Wieder erhält man aus der Darstellung mit Linearfaktoren

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x die behaupteten Gleichungen. Eine Anwendung des Satzes von VIETA mit drei Variablen finden wir in der

Aufgabe MO460941/MO461041. Finden Sie alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x + y + z = 1 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Lösungshinweise: Zunächst ist festzustellen, dass $x, y, z \neq 0$ gelten muss. Nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit dem Hauptnenner xyz erhalten wir nach Addition der resultierenden und der ersten Gleichungen

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = (x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0.$$

Somit muss mindestens eine der drei Zahlen gleich 1 sein. Setzen wir $z = 1$, so gilt $x + y = 0$, also $y = -x$. Eine Probe bestätigt, dass $(x; -x; 1)$ für jede reelle Zahl $x \neq 0$ eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wegen der Symmetrie der

gegebenen Gleichungen sind auch alle Vertauschungen des Lösungstripels wiederum Lösungen des Gleichungssystems. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems gegeben durch

$$L = \{(1, t, -t), (t, 1, -t), (t, -t, 1), t \neq 0. \text{beliebig reell}\} \qquad \square$$

Für eine Variante der Lösung nehmen wir nun an, dass das obige Gleichungssystem eine Lösung in reellen Zahlen besitzt. Dann können wir die drei Zahlen x, y, z als Nullstellen eines kubischen Polynoms

$$s^3 + a \cdot s^2 + b \cdot s + c = 0$$

betrachten, für dessen Koeffizienten nach dem Satz von VIETA gilt

$$-a = x + y + z = 1$$
$$b = xy + yz + zx = xyz = -c$$

Wir nehmen weiter an, c sei positiv, und substituieren $c = t^2$ mit einer beliebigen reellen Zahl t. Damit suchen wir die Nullstellen des kubischen Polynoms

$$s^3 - s^2 - t^2 s - t^2 = 0$$
also $(s^2 - t^2)s - (s^2 - t^2) = (s - 1)(s^2 - t^2) = 0.$

Daraus können wir die obige Lösungsmenge ebenfalls ermitteln.

Die Schwierigkeit bei der Lösungsfindung besteht demnach in der Umformung der Gleichungen zu einer Struktur, die den Gleichungen im Satz von VIETA entsprechen.

Aufgabe. Ermitteln Sie alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem mit dem reellen Parameter a erfüllt wird:

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

Lösungshinweise: Wegen $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ gilt $xy + yz + zx = \frac{(a^2 - a^2)}{2} = 0$. Weiter können wir $(x + y + z)^3$ umformen zu

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3xy(x + y) + 3yz(y + z) + 3xz(x + z)$$

Verwenden wir die erste Gleichung, können wir dies weiterhin umformen zu

$$(x + y + z)^3 =$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + 6 \cdot xyz + 3 \cdot xy(a - z) + 3 \cdot yz(a - x) + 3 \cdot xz(a - y)$$
also
$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot xyz + 3a \cdot (xy + yz + xz)$$

Deshalb finden wir $xyz = 0$. Somit suchen wir die Nullstellen des Polynoms $s^3 - a \cdot s^2 = 0$. Dieses Polynom ist gleichbedeutend zu $s^2 \cdot (s - a) = 0$ mit dem Lösungstripel $(0; 0; a)$ und allen Vertauschungen. ❑

Aufgaben Serie 6 (2020/21)

Einsendungen bis 18. Mai 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [12].

Aufgabe 6-1.
Gesucht sind alle echt vierstelligen natürlichen Zahlen *n* mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von *n* durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen *a* und *b* entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von *a* und *b* gleich *n*.

(5 Punkte)

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt „echt n-stellig“, wenn die erste (linke) Ziffer in der n-stelligen Dezimaldarstellung ungleich Null ist.

Aufgabe 6-2.
Beweisen sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-3.
Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y, und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 6-4.
Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten *a, b, c* sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

(6 Punkte)

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

[12] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Aufgabe 6-5A.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(2 Punkte)

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(2 Punkte)

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 2$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6-5B.
Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(2 Punkte)

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

(4 Punkte)

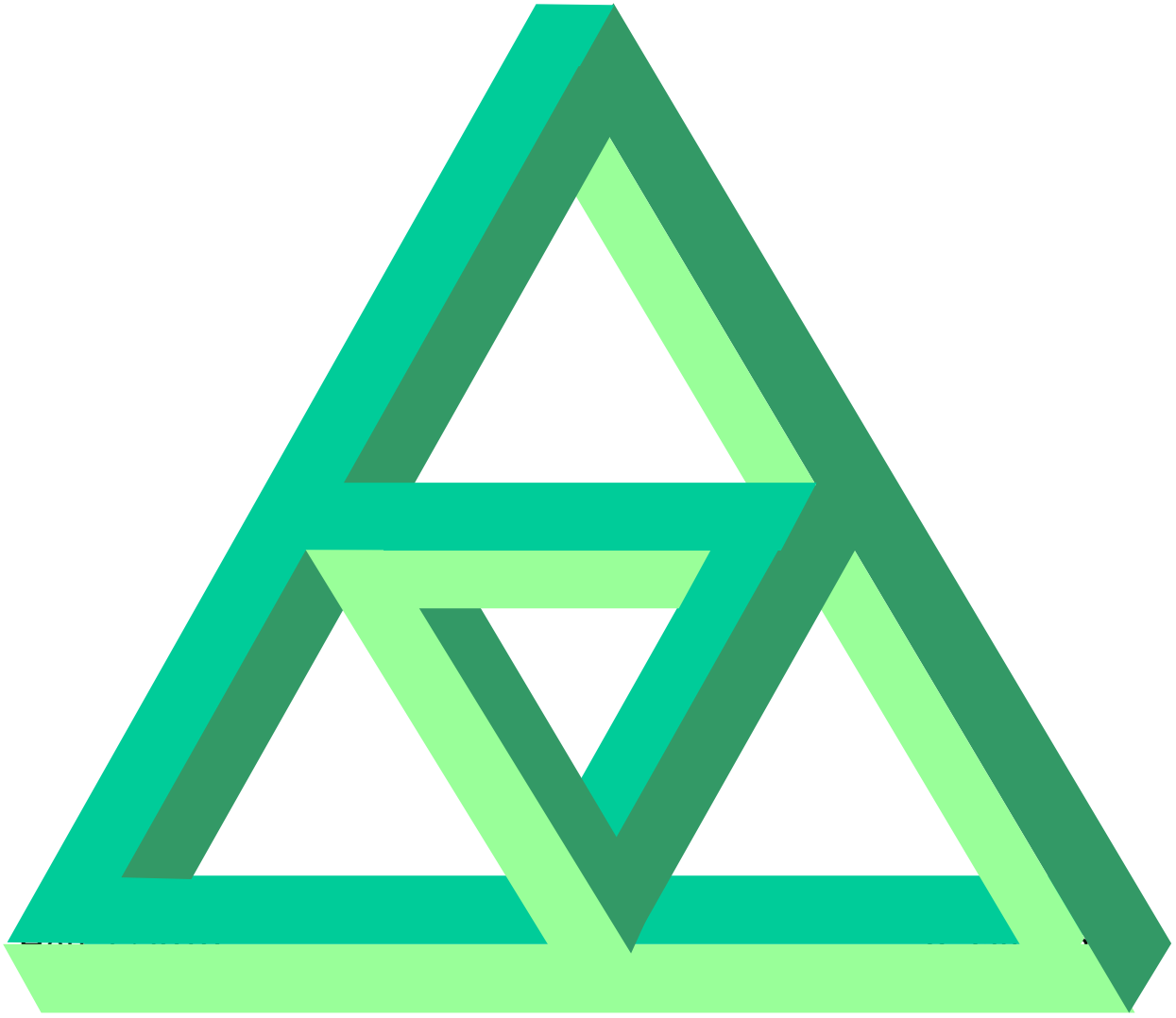
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon: (0371) 4660751
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 5 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 3/2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 5

Aufgabe 5-1. In der Ebene seien 3*n* Punkte gegeben (*n* natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) *n* Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

Lösungshinweise: Da es für 3*n* Punkte nur endlich viele Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten gibt, gibt es eine Gerade *g*, die zu keiner dieser Strecken parallel ist. Da die Punktmenge endlich ist, kann man die Gerade *g* derart verschieben, dass sich alle Punkte auf einer Seite von *g* befinden. Ausgehend von einer solchen Lage verschiebe man die Gerade in Richtung der Punkte. Dabei liegt in jeder Lage maximal 1 Punkt auf der Gerade. Man kann folglich die Punkte in eindeutiger Weise von 1 bis 3*n* nummerieren. Jeweils die Punkte $3k-2$, $3k-1$ und $3k$ ($k = 1, ..., n$) lassen sich zu einem Dreieck verbinden, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. ❑

Aufgabe 5-2. Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

Lösungshinweise: Da alle Primzahlen größer 1 sind, gilt

$$p_1 \geq \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20} > 4.$$

Deshalb ist p_1 verschieden von 3 und somit lässt p_1^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Daraus folgt, dass mindestens eine der Primzahlen $p_2, ..., p_6$ gleich 3 ist (es sei dies $p_6 = 3$), denn andernfalls würde die Summe der Quadrate der fünf Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Jedoch ist es nicht möglich, dass genau vier der fünf Primzahlen gleich 3 sind ($p_3 = ... = p_6 = 3$), denn die daraus resultierende Gleichung

$$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 4 \cdot 3^2 = 36$$

hat keine Lösung in Primzahlen, wie eine Analyse über die Faktorenzerlegung von 36 zeigt.

Nach Aufgabe 3-5A(a) ist die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlichen Zahlen stets durch 8 teilbar. Somit ist die Summe

$$p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = p_1^2 - p_6^2$$

durch 8 teilbar. Da aber das Quadrat jeder Primzahl größer als 2 bei Division durch 8 den Rest 1 lässt, muss $p_2 = ... = p_5 = 2$ gelten.

Eine Probe zeigt, dass das Tupel (5; 2; 2; 2; 2; 3) tatsächlich Lösung der Aufgabe ist und wie die Herleitung zeigt, keine weiteren Lösungen (bis auf Permutationen von p_2, ..., p_6) existieren können:

$$5^2 = 25 = 4 + 4 + 4 + 4 + 9 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 \qquad \square$$

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde)
Ein Würfel mit Kantenlänge 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.

Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?

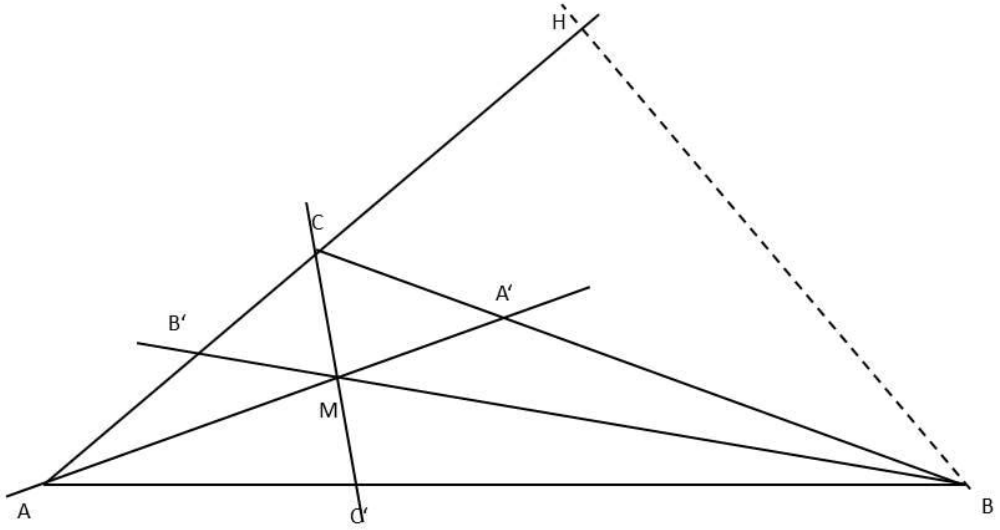
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise: Wird der Würfel in drei Quader geteilt, hat der größte Quader ein Volumen von mindestens 333. Mit dem ersten Schnitt entstehen zwei Quader mit Grundflächen 10 x 10 und ganzzahliger Höhe. Ist für einen dieser Quader die Länge der Höhe 4 oder mehr, so hat der größte Quader mindestens ein Volumen von 400. Ist dagegen für einen dieser Quader die Länge der Höhe höchsten 2, so hat der andere Quader ein Volumen von mindestens 800 – eine Teilung des großen Teilquaders führt zu einer Situation, bei der der größte Quader ebenfalls mindestens ein Volumen von 400 aufweist.

Wir betrachten deshalb den Fall, dass mit dem ersten Schnitt ein Quader mit dem Volumen 300 abgetrennt wurde. Durch Teilung des restlichen Quaders entstehen zwei Quader, von denen ein Quader ein Volumen von mindestens 350 besitzt. Da durch Halbierung des Quaders das Volumen 350 realisiert werden kann, ist 350 das kleinstmögliche Volumen, das der größte Quader haben kann.

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde)
In einem Dreieck ABC sei $\angle ACB = 120°$, und die Innenwinkelhalbierenden durch A, B und C schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in A' bzw. B' bzw. C'. Wie groß ist der Winkel $\angle A'C'B'$?

Lösungshinweise: Entsprechend der Aufgabenstellung werden die Winkelhalbierende in das Dreieck ABC eingezeichnet und die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten mit A', B' und C' bezeichnet. Der gemeinsame Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden wird M genannt. Zudem wird vom Eckpunkt B das Lot auf die Verlängerung der Seite $\overline{AC}$ gefällt, der Fußpunkt sei H.



Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Streckenlängen festgelegt:

$$|\overline{AB}| = c;\ |\overline{AC'}| = c_1; |\overline{C'B}| = c_2$$
$$|\overline{AC}| = b;\ |\overline{B'C}| = b_1; |\overline{AB'}| = b_2$$
$$|\overline{BC}| = a;\ |\overline{BA'}| = a_1; |\overline{A'C}| = a_2$$
$$|\overline{CC'}| = w$$

Es gilt der Winkelhalbierendensatz, nämlich dass eine Winkelhalbierende eines Innenwinkels im Dreieck die gegenüberliegende Dreieckseite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten teilt. (Dieser Satz darf zitiert werden).

Ziel ist es zu zeigen, dass die Gerade *C'B'* die Winkelhalbierende im Dreieck $AC'C$ für den Winkel ∠AC'C ist. Nach Umkehrung des Satzes über die Winkelhalbierenden wäre dies erfüllt, wenn die Gleichung $\frac{b_1}{b_2} = \frac{w}{c_1}$ gilt.

Nach dem Winkelhalbierendensatz gilt im Dreieck ABC mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle ABC$ die Gleichung $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c}$.

Außerdem gilt im Dreieck *ABC* mit der Winkelhalbierenden des Winkels ∠*ACB* die Gleichung $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}$. Wegen $c = c_1 + c_2$ lässt sich diese Gleichung umformen zu $\frac{c}{c_2} = \frac{b+a}{a}$, woraus $c_2 = \frac{ac}{a+b}$ und $c_1 = \frac{bc}{a+b}$ folgt.

Um die Länge der Winkelhalbierenden *w* des Winkels ∠*ACB* zu bestimmen, ermittelt man einerseits den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* als Summe der Flächeninhalte der Dreiecke *AC'C* und *C'BC*, durch $A_{AC'C} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot w \cdot \sin 60°$ bzw. $A_{C'BC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot w \cdot \sin 60°$, also $A_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot (a + b) \cdot w \cdot \sqrt{3}$. Der Flächeninhalt lässt sich aber andererseits auch aus dem halben Produkt aus der

Dreiecksseite *b* und zugehöriger Höhe h_b ermitteln. Diese Höhe verläuft als Höhe im gleichseitigen Dreieck *BC"C* (mit C" auf der Geraden durch A und C mit $|\overline{CH}| = \left|\overline{HC"}\right|$) mit der Seitenlänge *a*, also gilt $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{3}$. Folglich ist $w = \frac{ab}{a+b}$. Mit diesen Vorbereitungen erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{w}{c_1} = \frac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a}{c} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Die Gerade durch *C´* und *B´* halbiert also den Winkel $\angle CC´A$. In gleicher Weise zeigt man nun, dass auch die Gerade durch *C´* und *A´* den Winkel $\angle BC´C$. Deshalb gilt:

$$\angle CC´B´ + \angle A´C´C = \frac{1}{2} \cdot (\angle CC´A + \angle BC´C) = \frac{1}{2} \cdot \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90$$

❑

Aufgabe 5-5A

(a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen *n*.

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für *n* > 1.

(c) Man finde natürliche Zahlen *n*, für die näherungsweise gilt: $\sum_{k}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2021$.

Lösungshinweise:

(a) Nach der Ungleichung des geometrischen und arithmetrischen Mittels gilt für alle *n* > 0: $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k$.

Die Summe in der rechten Seite der Ungleichung ist nach der Gaußschen Summenformel $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, folglich gilt: $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. Durch Potenzieren finden wir die gesuchte Ungleichung. ❑

(b) Es gilt für jede positive ganze Zahl *k* nach Anwendung der geometrischen-arithmetischen Mittelungleichung für $\sqrt{k \cdot 1} \leq \frac{k+1}{2}$ (wobei für alle k > 1 die Kleiner-Beziehung erfüllt ist):

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \cdot 1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2n + n \cdot (n+1)}{4}$$
$$= \frac{n \cdot (n+3)}{4}$$

❑

(c) Jeden Summanden der Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ können wir wie folgt umformen:

$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2 \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$, also

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}\right)$$

bzw.

$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2 \cdot \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$, also

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = 2\sqrt{n} - \sqrt{0} = 2\sqrt{n}.$

Somit gilt:

$2 \cdot \left(\sqrt{n+1} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$

Also lassen sich folgende Grenzen für *n* feststellen:

n > 1020605 wegen $2\sqrt{n} \leq 2020{,}5$ für $n \leq 1020605$

und *n* < 1023638 wegen $2\sqrt{n+1} - 2 \geq 2021{,}5$ für $n \geq 1023638$. ❑

Aufgabe 5-5B. Ein *n*-Tupel von natürlichen Zahlen $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ heißt *Pythagoreisches Zahlen-n-Tupel* (kurz *P-n-Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $\boldsymbol{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = a_n^2}$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(b) Man untersuche, ob ein *P*-102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen a_{101} und a_{102} existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die ersten 100 natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 100 sind!

(c) Gegeben sei ein *P-n*-Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ mit ungeradzahligem a_n (mit $1 < k < n$). Man gebe ein *P*-(*n*+1)-Tupel an, das ebenfalls mit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beginnt.

Lösungshinweise:
(a) Es sei $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ geradzahlig. Dann ist mindestens einer der Faktoren geradzahlig.

Angenommen $(a+b)$ sei durch 2 teilbar, dann sind beide Summanden *a* und *b* entweder geradzahlig oder ungeradzahlig. Stets ist aber dann auch die Differenz $(a-b)$ durch 2 teilbar.

In analoger Weise führt die Annahme, $(a-b)$ sei geradzahlig, zu der Feststellung, dass in diesem Fall $(a+b)$ durch 2 teilbar ist. Folglich ist das Produkt stets durch 4 teilbar.

(b) Mittels der Summenformel für Quadrate von natürlichen Zahlen findet man:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338350.$$

Nimmt man nun an, es gäbe zwei natürliche Zahlen *a* und *b*, so dass (1, 2, ..., 100, *a*, *b*) ein Pythagoreisches Zahlen-102-Tupel ist, so müsste gelten

$$338350 + a^2 = b^2$$

Da 338350 zwar durch 2, nicht aber durch 4 teilbar ist, die geradzahlige Differenz $b^2 - a^2$ jedoch nach Aufgabe (a) stets durch 4 teilbar wäre, kann es kein *P*-102-Tupel der geforderten Art geben.

(c) Es sei $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein *P*-*n*-Tupel mit ungeradzahligem a_n. Dann gilt also

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$$

Da a_n ungeradzahlig ist, sind $\frac{a_n^2-1}{2}$ und $\frac{a_n^2+1}{2}$ beide ganzzahlig. Weiter gilt

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n^2-1}{2}\right)^2.$$

Folglich ist das Quadrat einer ungeraden Zahl stets als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar. Daraus können wir unmittelbar erkennen, dass das (*n*+1)-Tupel

$$\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \frac{a_n^2 - 1}{2}, \frac{a_n^2 + 1}{2}\right)$$

ein *P*-(*n*+1)-Tupel ist. ❑

Ergänzung: Ist im *P*-*n*-Tupel die Zahl a_n geradzahlig, können wir in ähnlicher Weise wie unter A5-5B(c) ein *P*-(*n*+1)-Tupel konstruieren. Offensichtlich sind $\frac{a_n^2}{4} - 1$ und $\frac{a_n^2}{4} + 1$ ganze Zahlen, die die Gleichung

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2}{4} + 1\right)^2 - \left(\frac{a_n^2}{4} - 1\right)^2$$

erfüllen.

Ergänzende Lösungsdiskussionen

Wir betrachten zu **Aufgabe 5-5A** ähnliche Fragestellungen, wie zum Beispiel

Aufgabe. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n\,(n \geq 2)$ die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

Lösungshinweise:
Variante 1: Für jede natürliche Zahl $k\ (k \geq 2)$ gilt

$$1+\sqrt{\frac{k-1}{k}}>1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

Setzen wir diese Beziehung für jeden Summanden in der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung ein, folgt unmittelbar deren Richtigkeit.

Variante 2: Für alle $k\ (0<k\leq n)$ gilt $\sqrt{k}\leq\sqrt{n}$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $k=n$ richtig ist. Also finden wir für $n\geq 2$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n} \qquad \square$$

Aufgabe. Beweisen Sie die folgende Ungleichung für natürliche Zahlen $n\geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\frac{n}{2}\cdot\sqrt{2(n+1)}$$

Lösungshinweise: So wie der junge CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) bei der Berechnung der Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen, fassen wir je zwei Summanden der Summe zusammen:

$$\begin{aligned} 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} &= \sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \\ &\quad +\sqrt{n}+\sqrt{n-1}+\ldots+\sqrt{1} \\ &= \left(\sqrt{1}+\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{n-1}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}+\sqrt{1}\right) \end{aligned}$$

Nun ist also nur noch zu zeigen, dass für jeden dieser in Klammern zusammengefassten Terme gilt

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)} \qquad (a \text{ und } b \text{ natürliche Zahlen mit } a+b=n+1) \quad \square$$

Analog können wir ähnliche Formel herleiten, wie z.B. $\sum_{j=1}^{n}k^{j}\leq\frac{n}{2}\cdot(n+1)^{j}$.

Die Aufgabe 5-5A(c) hat ihren Ursprung in der

Aufgabe MO371045. Man beweise folgende Ungleichung:

$$1998<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1.000.000}}=\sum_{k=1}^{1.000.000}\frac{1}{\sqrt{k}}<1999\,.$$

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2002}{2003}<(0{,}2003)^{2}$$

Lösungshinweise: Wir bezeichnen das Produkt auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung mit *x* und betrachten ein weiteres Produkt dieser Art, nämlich

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2003}{2004}$$

Da für alle von Null verschiedenen Zahlen *n* wegen $4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1$

$$\frac{2n-2}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n}$$

gilt, ist $x < y$. Damit erhalten wir $x^2 < x \cdot y$. Nun ist aber *y* gerade so gewählt, dass $x \cdot y = \frac{2}{2004}$ ist. Also finden wir die Abschätzung:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2004}} = \frac{1}{\sqrt{1002}} < \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} < 0{,}04 = 0{,}2^2 < 0{,}2003^2 . \qquad \square$$

Aufgabe. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{54} .$$

Lösungshinweise: Wir könnten wie oben ein geeignetes Produkt definieren und in Analogie eine Abschätzung suchen. Setzen wir deshalb wieder das abzuschätzende Produkt als *x* und bilden wir $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2010}{2011}$, so folgt mit ähnlicher Argumentation wie oben

$$x < \sqrt{\frac{1}{2011}} < \frac{1}{\sqrt{1936}} = \frac{1}{44}$$

Dies genügt aber nicht, da $\frac{1}{54} < \frac{1}{44}$ gilt. Wir finden aber für alle $k \geq 2$

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}} .$$

Daraus können wir für jedes *k* die Ungleichung $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k-1}}$ ableiten, also speziell für $k = 1005$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{\sqrt{3016}} < \frac{1}{\sqrt{2916}} = \frac{1}{54}$$

Bei der **Aufgabe MO541035**

> Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen *x*, für welche die Gleichung $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}=2$ erfüllt ist.

wurde ausdrücklich hingewiesen, dass zunächst zu untersuchen sei, für welche reellen Zahlen die angegebenen Wurzeln definiert sind. Damit die Terme unter den Wurzeln nichtnegativ sind, muss offenbar $x \geq 2$ gelten. Dies ist wesentlich, um nach einmaligem Quadrieren aus der Gleichung

$$-x+1=4\cdot\sqrt{2x-4}$$

zu erkennen, dass es keine Lösung geben kann, weil die linke Seite negativ, die rechte Seite aber stets positiv ist. Also ist die Lösungsmenge leer.

Nochmaliges Quadrieren führt zwar weiter zu der „vernüftigen" quadratischen Gleichung $x^2-34x+65=0$ mit den Nullstellen $x_{1,2}=17\pm 4\sqrt{14}$, aber eine Probe zeigt, dass sie keine Lösung sind (obwohl beide Zahlen größer als 2 sind)! Allerdings ist die Probe wesentlich aufwendiger als die Diskussion über den Definitionsbereich.

Davor wurde in der 29. MO letztmalig eine Wurzel-Ungleichung gestellt:

Aufgabe MO291034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen *x*, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1}>1.$$

Lösungshinweise: Die Lösungsmenge lässt sich zunächst durch Diskussion des Definitionsbereiches eingrenzen. Die Zahl *x* muss größer als -5 sein (damit der Wurzelausdruck definiert und positiv ist). Die Zahl *x* kann nicht –1 sein (weil sonst der Nenner gleich 0 wäre). Außerdem muss *x* größer als –1 sein (damit der Bruch positiv ist). So vorbereitet kann die Ungleichung äquivalent umgeformt werden und man erhält $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{17}{4}$. Daraus folgt letztlich die gesuchte Lösungsmenge für *x*: $-1<x<\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)$.

Pythagoreische 4-Tupel [1]

Quadrupel (*a, b, c, d*) von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $a^2+b^2+c^2=d^2$ nennt man *Pythagoreische Zahlenquadrupel* oder kurz P-4-Tupel (vgl. Aufgabe 5-5B).

[1] Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173

Es interessieren hier nur Quadrupel ohne gemeinsamen Teiler (da wir andernfalls alle 4 Zahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren könnten). Ein teilerfremdes P-4-Tupel, also mit ggT(*a;b;c;d*) = 1, kann höchstens zwei Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler enthalten und wird aus geraden und ungeraden Zahlen bestehen. Es sind folglich folgende Fälle denkbar:

(1) Alle Zahlen eines P-4-Tupel sind geradzahlig. Dann enthalten alle Zahlen den Faktor 2 und das P-4-Tupel ist nicht teilerfremd.

(2) Die Zahlen *a, b* und *c* sind ungerade und folglich auch *d*. Somit gibt es ganze Zahlen *a', b', c'* und *d'*, so dass die Gleichung

$$(2a'+1)^2+(2b'+1)^2+(2c'+1)^2=(2d'+1)^2$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4\cdot\left(a'^2+b'^2+c'^2+a'+b'+c'\right)+2=4\cdot d'\cdot(d'+1)$$

erkennen wir, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (2), in dem alle Zahlen des P-4-Tupel ungeradzahlig sind, ist also nicht möglich.

(3) Zwei der Zahlen *a, b* und *c* sind ungerade, die dritte und folglich auch *d* sind gerade. Wir betrachten also o.B.d.A. den Fall

$$(2a'+1)^2+(2b'+1)^2+(2c')^2=(2d')^2.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4\cdot\left(a'^2+b'^2+a'+b'\right)+2=4\cdot\left(d'^2-c'^2\right)$$

erkennen wir ebenso, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (3) ist also ebenfalls nicht möglich.

Da es P-4-Tupel gibt, z.B. (1 ; 4 ; 8 ; 9), gilt wegen (1) bis (3): In einem P-4-Tupel ist genau eine der Zahlen *a, b* und *c* ungerade, die anderen beiden Zahlen sind gerade. Dann ist *d* ungeradzahlig.

Satz. In einem teilerfremden P-4-Tupel (*a;b;c;d*) ist mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar.

Beweis: Ist *a, b* oder *c* durch 3 teilbar, wäre nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, keine der drei Zahlen *a, b* und *c* sei durch 3 teilbar. Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 3 stets den Rest 1. Wenn jede Quadratzahl a^2, b^2 und c^2 den Rest 1 lässt, dann lässt deren Summe den Rest 3 bei Division durch 3. Folglich ist d^2 und damit auch *d* durch 3 teilbar.

Satz. Ist eine der geraden Zahlen eines P-4-Tupel durch 4 teilbar, so ist auch die andere gerade Zahl des P-4-Tupel durch 4 teilbar.

Beweis: Seien $a = 4a' \pm 1$ und $d = 4d' \pm 1$ die ungeraden Zahlen des P-4-Tupels, dann ist wegen

$$b^2 + c^2 = d^2 - a^2 = 16d'^2 \pm 8d' + 1 - \left(16a'^2 \pm 8a' + 1\right)$$
$$= 8 \cdot \left(2\left(d'^2 - a'^2\right) \pm d' \mp a'\right)$$

die Summe der beiden geradzahligen Quadrate des PQ durch 8 teilbar. Ist eine dieser Zahlen durch 4 teilbar, dann ist deren Quadrat durch 16 teilbar und folglich muss auch das Quadrat der anderen Zahl mindestens durch 8 (und deshalb durch 16) teilbar sein. Damit ist auch die zweite gerade Zahl durch 4 teilbar. ❑

Wir suchen nun ein Verfahren zur Erzeugung aller P-4-Tupel in einem vorgegebenen Zahlenbereich. Aufgrund der Umformung $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$ können wir uns auf solche Zwischenwerte beschränken, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Nicht jede natürliche Zahl hat diese Eigenschaft. Durch Probieren finden wir schnell, dass z.B. 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 – 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Allgemein gilt:

Satz. Eine natürliche Zahl *m* lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

(a) $m = \prod_{j=1}^{k} {p_j}^{a_j}$ (wobei die Faktoren p_j Primzahlen der Form $4n + 1$ und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)
(b) $m = 2 \cdot a^2$
(c) $m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$
(d) $m = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ (mit natürlichen Zahlen *n, r, a, b*)

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$
$$n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) = (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2$$
$$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$ ❑

Satz. Eine natürliche Zahl *m* lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder
(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Beweisskizze: Leicht sehen wir den Fall (a), denn ist $2k + 1$ eine ungerade natürliche Zahl, so gilt: $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Der Teil (b) erweist sich als wesentlich komplexer und sei hier ohne Beweis angegeben.

Unter Anwendung beider Aussagen finden wir durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen und somit zu P-4-Tupeln führen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 38 P-4-Tupel. Ordnen wir diese P-4-Tupel nach der Größe der vierten Zahl *d*, so stellen wir fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätte wir das Suchverfahren bis $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$ führen müssen!

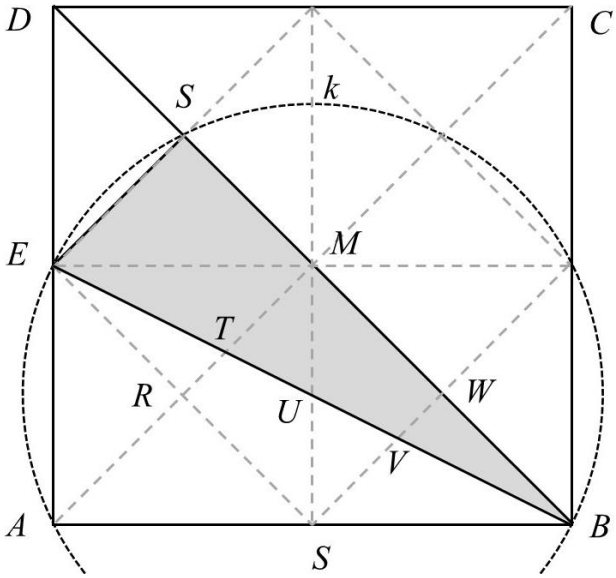
Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d < 50$ zu finden? Wegen $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$ wird m in zwei Faktoren $d + c = t_1, \quad d - c = t_2, \quad t_1 \geq t_2,$ zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit (m; 1) und $\left(\sqrt{m}; \sqrt{m}\right)$ gegeben. Die Zahl *d* erhalten wir daraus als $d = \frac{t_1 + t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller P-4-Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen m bis 2401 zu untersuchen.

Thema 4 – Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung

Vorbemerkungen: Anstelle der Bestimmung von Streckenlängen, die zur Berechnung des Flächeninhaltes benötigt werden, kann die Zerlegung der Grundfigur in kongruente Teilflächen zum Ergebnis allein durch Auszählen der betroffenen Teilflächen gelingen.

Aufgabe MO601023. Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Es sei *E* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises *k*. Der Kreis *k* schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in *S*.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *EBS*.

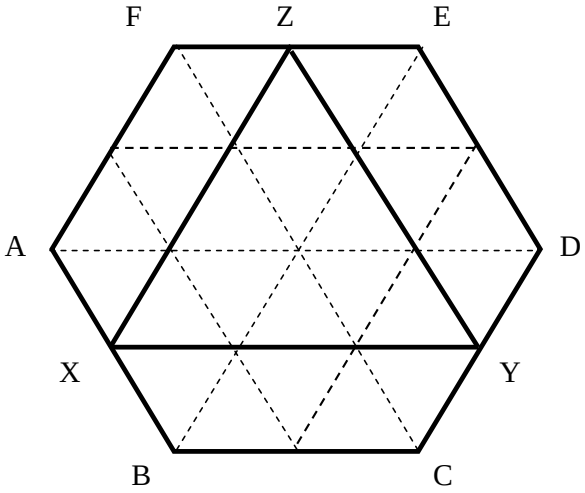
Lösungshinweise: Aufgrund der Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck *EBS* nach dem Satz von THALES rechtwinklig mit dem rechten Winkel am Punkt *S*. Weiter gilt wegen $\sphericalangle DSE = 90°$ und $\sphericalangle EDS = 45°$ gemäß Innenwinkelsummensatzes gilt auch $\sphericalangle SED = 45°$. Das Dreieck *ESD* ist folglich gleichschenklig-rechtwinklig. So können wir das Quadrat *ABCD* mit 16 zum Dreieck *ESD* kongruenten Dreiecken vollständig und überschneidungsfrei überdecken.



Wir beschreiben nun die gesuchte (in der Abbildung grau hinterlegte) Fläche mittels dieser Teildreiecke. Offensichtlich stimmt der Flächeninhalt des Dreiecks *EMS* mit dem eines Überdeckungsdreiecks überein. Weiterhin ist das Dreieck *ERT* kongruent zum Dreieck *BWV*, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|BW| = |ER|$ überein. Also gilt $A_{ETM} + A_{BWV} = A_{ETM} + A_{ERT} = A_{ERM}$ und damit stimmt auch dies mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Schließlich ist das Dreieck *MTU* kongruent zum Dreieck *SVU*, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|SU| = |MU|$ überein. Also stimmt die Summe $A_{MTU} + A_{MUVW} = A_{SVU} + A_{MUVW} = A_{MSW}$ mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Somit entspricht der gesuchte Flächeninhalt genau dem Dreifachen des Flächeninhalts eines solchen Überdeckungsdreieck und damit $\frac{3}{16}$ der Quadratfläche. ❑

Aufgabe. In einem regelmäßigen Sechsecks *ABCDEF* seien *X*, *Y* und *Z* die Mittelpunkte der Seiten *AB*, *CD* und *EF*.
Gesucht ist das Verhältnis $A_S : A_D$, wenn A_S der Flächeninhalt des Sechsecks und A_D der Flächeninhalt des Dreiecks *XYZ* ist.

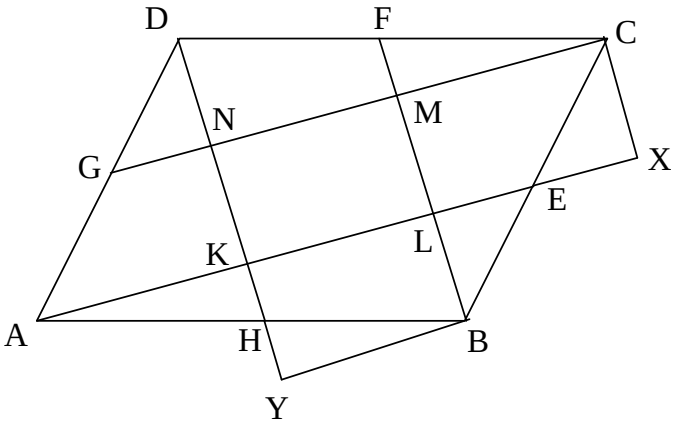
Lösungshinweise: Eine Skizze verweist bereits auf den Lösungsansatz durch „Auszählen“ geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegen wir das regelmäßige Sechseck *ABCDEF* in 24 kongruente Teildreiecke, von denen das Dreieck *XYZ* insgesamt 9 dieser Teildreiecke umfasst.



Aufgabe MO431024. Gegeben sei ein Parallelogramm *ABCD*. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit *H*, *E*, *F* bzw. *G* bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck *KLMN* aus.

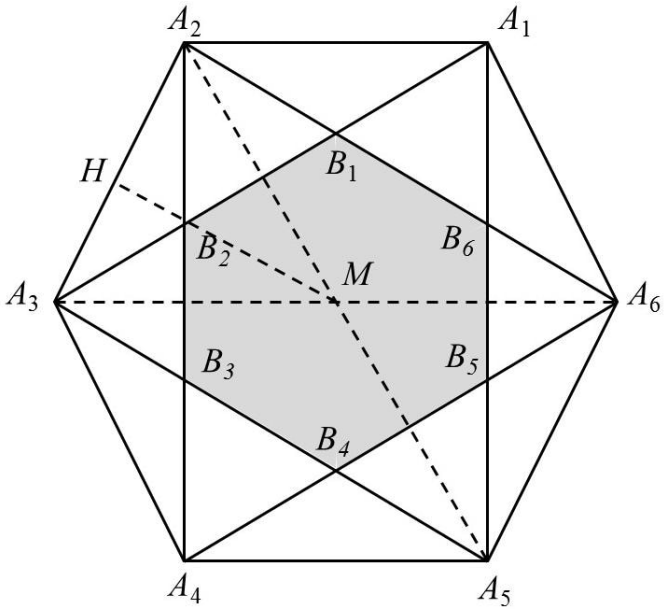
(a) Zeigen Sie, dass *KLMN* ein Parallelogramm ist.
(b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms *KLMN* zu dem des Parallelogramms *ABCD*.

Lösungshinweise: Wieder bereitet die Teilaufgabe (a) die Lösung für (b) vor. Fertigen wir eine Skizze an und beachten die in (a) zu zeigenden Streckenabschnitte, so erkennen wir die prinzipielle Möglichkeit, das Parallelogramm *ABCD* ermitteln mit zu *KLMN* kongruenten Parallelogrammen zu überdecken, wobei allerdings Eckpunkte wie *X* und *Y* außerhalb der Fläche von *ABCD* liegen.



Wir sehen, dass die Dreiecke *BEL* und *EXC* sowie *AKH* und *HYB* kongruent sind und die entstandenen Vierecke *LXCM* bzw. *KYBL* jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm *KLMN* sind.
Ergänzen wir in analoger Weise die Figur über *DF* und *AG* wird unmittelbar ersichtlich, dass die Gesamtfläche des Parallelogramms *ABCD* aus 5 Parallelogrammen der Größe *KLMN* zusammensetzt werden kann. Somit ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Parallelogramms *KLMN* zu dem des Parallelogramms *ABCD* wie 1 : 5. ❑

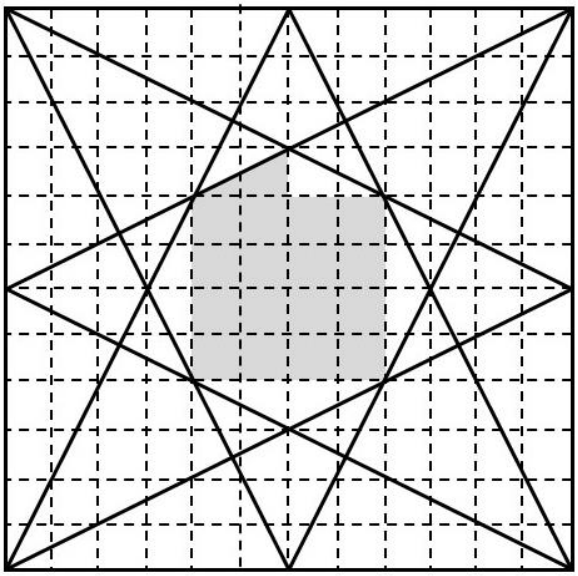
Aufgabe MO450924. In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2...A_6$ mit dem Flächeninhalt *A* schneiden die sechs Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_6}$, $\overline{A_5A_1}$ und $\overline{A_6A_2}$ ein kleineres Sechseck $B_1B_2...B_6$ mit dem Flächeninhalt *B* aus. Berechnen Sie den Flächeninhalt *B* in Abhängigkeit von *A*.



Lösungshinweise: Zeichnen wir in die Skizze zusätzlich die Geraden A_2A_5, A_3A_6 und MB_2 ein, so erkennen wir, dass das Dreieck A_2A_3M gleichseitig ist und durch die (Hilfs-) Linien in sechs flächengleiche Teildreiecke zerlegt

wird. Davon gehören zwei der sechs Teildreiecke zur gesuchten Fläche *B*. Also nimmt im Dreieck A_2A_3M die Fläche von *B* genau $\frac{1}{3}$ der zu *A* gehörenden Fläche ein. Da diese Argumentation für jedes Paar benachbarter Eckpunkte von *A* ebenso richtig ist, finden wir $B = \frac{1}{3} \cdot A$. ❑

Aufgabe. Die Seitenlänge eines Quadrates beträgt 10 cm. Wir verbinden jeden Eckpunkt des Quadrates mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Dadurch wird im „Inneren" ein konvexes Achteck gebildet. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Achtecks?



Lösungshinweise: Der Lösungsansatz durch ein Quadratgitter erscheint im Kontext dieser Aufgaben als sinnvoll. Jedoch gelingt es anstatt mit einem 10 x 10 - Netz deutlich einfacher mit einem 12 x 12 - Netz. In diesem Fall liegen nämlich die Eckpunkte des Achtecks auf Gitterpunkten und der Flächeninhalt kann allein durch Auszählen ermittelt werden: 4 x 4 dieser Gitterquadrate in der Mitte und 8 rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 2 x 1 (d.h. mit dem Flächeninhalt eines Gitterquadrates), also insgesamt 24 Gitterquadrate.
Da jedes dieser Gitterquadrate einen Flächeninhalt von $\frac{100}{144}$ cm² hat, beträgt der Flächeninhalt des Achtecks $24 \cdot \frac{100}{144} = \frac{50}{3}$ cm². ❑

Für die Zerlegung von Flächen muss mitunter erst ein „passendes" Gitternetz gefunden werden.

Literatur: Ambrus A, Berta T. Zur Verwendung von Quadrat- Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben. In: Mathematikinformation, Heft Nr. 45, TU Braunschweig, klartext GmbH print- & medienservice, Göttingen, 2006. (s. http://www.mathematikinformation.info/pdf/MI45Ambrus.pdf, 10.04.21)

Pythagoras und Verwandte

Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ wird wohl stets mit dem Satz von Pythagoras in Verbindung gebracht.

Zunächst untersuchen wir Teiler der Zahlen a, b und c unter der Voraussetzung, dass der größte gemeinsame Teiler aller drei Zahlen gleich 1. Andernfalls könnten wir jede der Zahlen durch den größten gemeinsamen Teiler dividieren.

Offensichtlich ist genau eine der drei Zahlen geradzahlig. Wären zwei Zahlen geradzahlig, so wären auch deren Quadrate geradzahlig. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier geradzahligen Zahlen) geradzahlig und somit auch die Zahl selbst. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 2. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen ungeradzahlig sein, weil die Summe zweier ungeradzahligen Zahlen geradzahlig ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 3 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 3 teilbar, so wären deren Quadrate durch 9 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 9 teilbaren Zahlen) durch 9 teilbar und somit die Zahl selbst durch 3 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 3. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 3 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 3 jeweils den Rest 1 lassen. Aber die Summe $a^2 + b^2$ würde dann den Rest 2 lassen, was für eine ganze Zahl c^2 nicht möglich ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 5 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 5 teilbar, so wären deren Quadrate durch 25 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 25 teilbaren Zahlen) durch 25 teilbar und somit die Zahl selbst durch 5 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 5. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 5 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 5 jeweils den Rest 1 oder 4 lassen. Aber die Summe $a^2 + b^2$ würde dann den Rest 2 oder 3 lassen (was für eine ganze Zahl c^2 nicht möglich ist) oder eine durch 5 teilbare Zahl ergeben.

Um geometrische „Verwandte“ zu finden, verallgemeinern wir den Exponenten, also $a^z + b^z = c^z$ (z reell) und untersuche, ob es für solche Gleichungen ebenfalls geometrische Interpretationen gibt[2].

(a) Für $z = 1$ erhalten wir die triviale Streckenaddition.

(b) Bezeichnet c die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck und h die darauf stehende Höhe, so gilt für die Hypotenusenabschnitte p und q:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{c + 2h}\,, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = \frac{1}{2}.$$

[2] Windisch, G. Geometrische Interpretationen der Gleichung $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$. In: alpha 22 (1988) Heft 2, S. 30.

Lösungshinweise: Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Beziehungen $c = p + q$ und $h^2 = p \cdot q$. Daraus folgt:

$$c + 2h = p + q + 2\sqrt{p \cdot q} = \left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist. ❑

(c) Für die Katheten *a* und *b* eines rechtwinkligen Dreiecks und dessen Höhe *h* auf *c* gilt

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$, also eine verwandte Gleichung mit $z = -2$.

Lösungshinweise: Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt nach Division durch a^2b^2

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2}{a^2 b^2}.$$

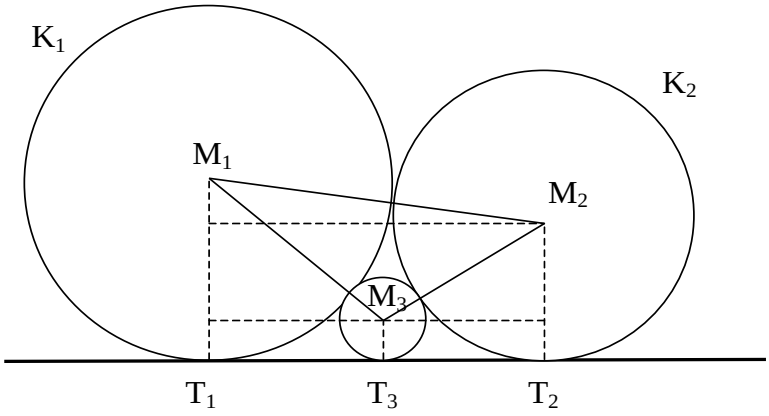
Mit Hilfe der Flächenformeln für das rechtwinklige Dreieck folgt aus $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$ unmittelbar die Behauptung. ❑

(d) Gegeben seien 3 Kreise K_1, K_2 und K_3 mit den Radien $r_3 < r_2 \le r_1$, für die eine Gerade *g* die Tangente ist. Die Kreise mögen sich wie in der Abbildung zu sehen paarweise berühren. Dann gilt:

$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$, also eine verwandte Gleichung mit $z = -\frac{1}{2}$.

Lösungshinweise: Bezeichnen T_1, T_2 und T_3 die Berührungspunkte der Kreise mit der Tangente (s. Skizze), so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\overline{T_2T_1}^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$$
$$\overline{T_2T_3}^2 + (r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$
$$\overline{T_1T_3}^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$



Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen finden wir

$$\overline{T_1T_2} = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}\ ,\ \overline{T_1T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_3}\ ,\ \overline{T_2T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_2 r_3}\ .$$

Folglich gilt wegen $\overline{T_1T_3} + \overline{T_3T_2} = \overline{T_1T_2}$ die Gleichung $\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_3r_2} = \sqrt{r_1r_2}$. Nach Division durch $\sqrt{r_1r_2r_3}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ❑

Für $z = -1$ sei auf den EULERschen Satz[3] verwiesen, der einen Zusammenhang zwischen den Radien des In- (r) und des Umkreises (R) und dem Abstand der Mittelpunkte beider Kreise (d) beschreibt:

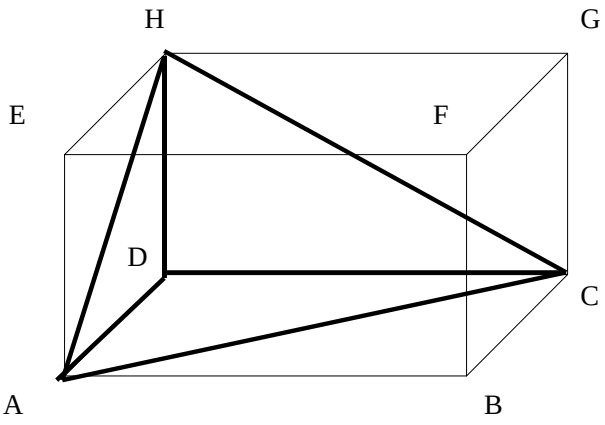
$$d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R.$$

Diese Gleichung lässt sich umstellen zu

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r},$$ also eine verwandte Gleichung mit z = -1.

Eine Verallgemeinerung anderer Art bildet die räumliche Version des Satzes von Pythagoras, die zur 41. Mathematik-Olympiade als Aufgabe gestellt wurde:

Aufgabe 411041. Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide *ABCD* gilt: Sind die Dreiecke *ABD*, *ACD* und *BCD* sämtlich bei *D* rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC*.



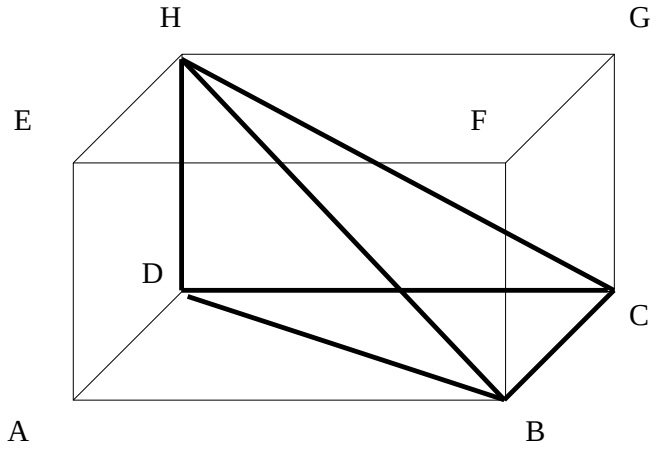
Lösungshinweise: Man betrachte die Quaderecke *ACDH* in nebenstehender Skizze. Insgesamt hat die „abgeschnittene“ Ecke drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen, deren Flächeninhalte sich jeweils als halbe Produkte der zugehörigen Quaderkanten bestimmen lassen. Laut obiger Aufgabe gilt dafür

$$F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta ADH}^2 + F_{\Delta CDH}^2 = F_{\Delta ACH}^2 .$$

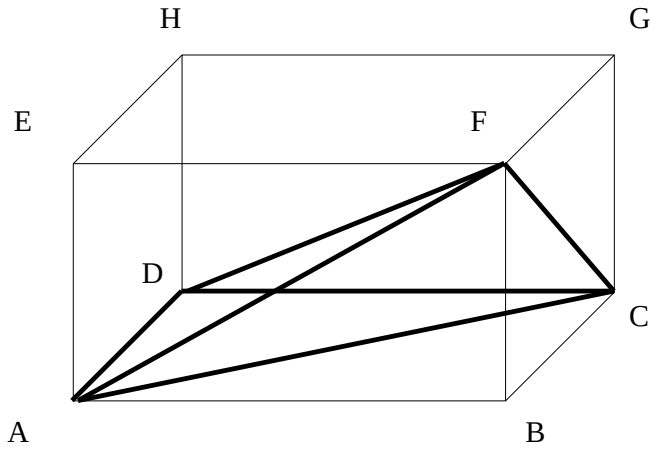
Der Beweis ist leicht erbracht, wenn man zunächst die Höhe h_{AC} auf AC im rechtwinkligen Dreieck *ACD* aus den Quaderseiten *AD* und *CD* bestimmt und anschließend die Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten *DH* und h_{AC} ermittelt. Dieser Zusammenhang wurde bereits 1622 vom Mathematiker JOHANNES FAULHABER (1580 bis 1635) publiziert.

Man kann aber weitere Körper mit drei rechten Winkeln herausschneiden:

[3] LEONHARD EULER, 1707 bis 1783



Es gilt im BUBECK-Tetraeder: $F_{\Delta DBH}^2 - F_{\Delta DCH}^2 = F_{\Delta BCH}^2 - F_{\Delta BCD}^2$. HEINRICH BUBECK berichtete darüber 1992 in der Zeitschrift *Didaktik der Mathematik*.



Im derart schiefen Tetraeder gilt: $F_{\Delta ADF}^2 + F_{\Delta CDF}^2 = F_{\Delta ADC}^2 + F_{\Delta ACF}^2$.

Bekannte Sätze der Mathematik

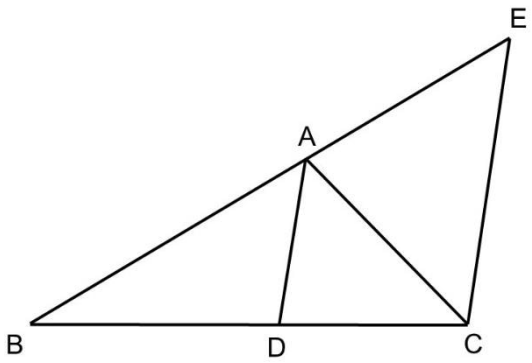
Winkelhalbierendensatz. In EUKLIDs „Elemente, fünfzehn Bücher“[4] wird in der Übersetzung von JOHANN FRIEDRICH LORENZ[5], Halle 1781, im Sechsten Buch auf Seite 88 als 3. Satz der Winkelhalbierendensatz angegeben:

> *„Wenn in einem Triangel, ABC, eine gerade Linie, AD, einen seiner Winkel, BAC, halbirt: so schneidet sie die Gegenseite solches Winkels, BC, den beyden andern Seiten, BA, AC, proportionirt. Und wenn sie die eine Seite, BC, den beyden übrigen Seiten, BA, AC, proportionirt schneidet, so halbirt sie den Gegenwinkel solcher Seite, BAC.“*

[4] In den Büchern der Elemente des griechischen Mathematikers EUKLID VON ALEXANDRIA (3. Jh. v. Chr.) wurde die Arithmetik und Geometrie seiner Zeit zusammenfasst

[5] (1737 – 1807), deutscher Mathematiker und Pädagoge

Den anschließend geführten *Beweis* können wir im heutigen Sprachgebrauch nachvollziehen: Es sei *ABC* ein beliebiges Dreieck. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels ∢*CAB* mit der gegenüberliegenden Dreieckseite *BC* sei *D*. Im Punkt *C* ziehen wir die Parallele zu *AD*, deren Schnittpunkt mit der Verlängerung von *AB* sei E.



Dann sind ∢*ECA* und ∢*DAC* Wechselwinkel an den Parallelen *AD* und *CE* und folglich gleich groß. Weiterhin sind ∢*AEC* und ∢*BAD* Stufenwinkel an diesen Parallelen und folglich gleich groß.

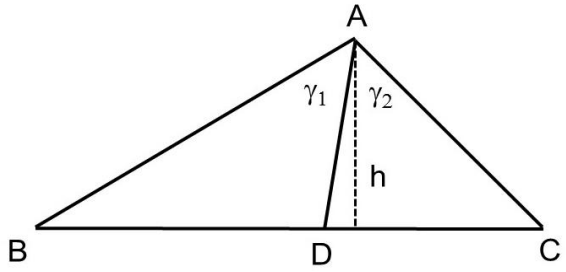
Da gemäß der Konstruktion die Winkel ∢BAD und ∢CAD gleich groß sind, sind auch die Winkel ∢ECA und ∢AEC gleich groß. Deshalb ist das Dreieck *ACE* gleichschenklig und es gilt $|AC| = |AE|$.

Nun gilt nach Strahlensatz mit dem Zentrum *B* und den Parallelen *AD* und *CE* die Verhältnisgleichung $|BD| : |DC| = |BA| : |AE|$, also wie behauptet

$$|BD| : |DC| = |AB| : |AC|.$$ ❑

Der Beweis der Umkehrung nutzt die gleichen geometrischen Prinzipien: Aus der angegebenen Verhältnisgleichung wird über die Umkehrung des Strahlensatzes auf die Parallelität der Strecken *AD* und *CE* geschlossen. Durch Winkelvergleiche wird *AD* als Winkelhalbierende erkannt.

Beweisvariante: Ist die Flächenberechnung für ein Dreieck mithilfe des Sinus eines eingeschlossenen Winkels bekannt, können wir folgenden kurzen Beweis des Winkelhalbierendensatzes führen:



Wir berechnen die Flächeninhalte der Dreiecke ABD und ADC einerseits über die Grundseite und zugehöriger Höhe und andererseits über den halben Winkel und die anliegenden Seiten. Somit gilt:

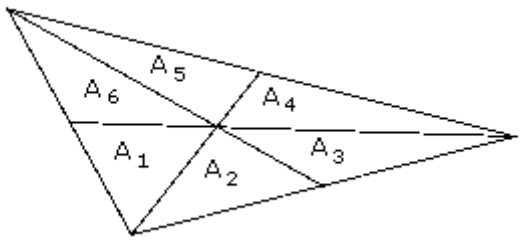
$$\frac{A_{ABD}}{A_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|BD|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|DC|\cdot h} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\gamma_1}{\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|AC|\cdot\sin\gamma_2}$$

Nach Kürzen in der rechten Gleichung der Gleichungskette finden wir die behauptete Verhältnisgleichung. ❑

Schwerpunktsatz im Dreieck. Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden in Abschnitte mit dem Längenverhältnis 1:2

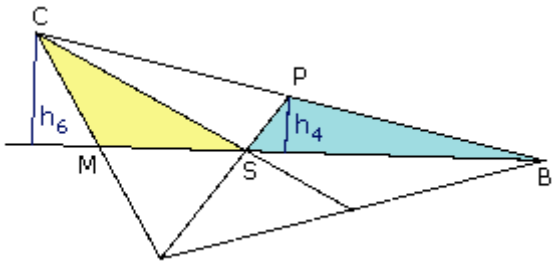
Beweis: Durch die drei Seitenhalbierenden wird das Dreieck in sechs Teildreiecke geteilt. Je drei davon besitzen zusammen den selben Flächeninhalt, denn die Seitenhalbierenden teilen das Dreieck in zwei flächengleiche Teile:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6$$
$$A_2 + A_3 + A_4 = A_5 + A_6 + A_1$$
$$A_3 + A_4 + A_5 = A_6 + A_1 + A_2$$



Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten so ergibt sich $A_1 - A_4 = A_4 - A_1$. Daraus folgt die Gleichheit $A_1 = A_4$. Analog kann man die dritte von der ersten Gleichung subtrahieren sowie die dritte von der zweiten und erhält so insgesamt, dass die Flächeninhalte gegenüberliegender Dreiecke untereinander jeweils gleich sind. Die jeweils benachbarten Dreiecke $A_2|A_3$, $A_4|A_5$ und $A_1|A_6$ besitzen ebenfalls paarweise denselben Flächeninhalt, da sie jeweils gleiche Grundseiten haben (die Hälfte einer großen Dreiecksseite) und identische Höhen. Damit besitzen alle sechs kleinen Dreiecke denselben Flächeninhalt, d.h.

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6.$$



Betrachte man nun die vierte und die sechste Dreiecksfläche. Die Höhen dieser Dreiecke sind parallel, da sie beide senkrecht auf der Seitenhalbierenden *MB* stehen. Weil P die Strecke BC halbiert, ist $|BC|:|BP| = 2:1$ und folglich nach dem Strahlensatz auch $h_6 : h_4 = 2 : 1$.

Weiterhin besitzen die Dreiecke *BPS* und *MSC* besitzen den gleichen Flächeninhalt. Wenn aber die Höhe h_6 doppelt so groß ist wie h_4, muss gelten: $|BS| : |MS| = 2$, und damit teilt der Schwerpunkt *S* die Seitenhalbierende *MB* in zwei Abschnitte mit dem Längenverhältnis $2 : 1$.

Analog kann man je zwei Teildreiecke betrachten, die an den anderen Seitenhalbierenden anliegen und kommt zu entsprechenden Ergebnissen für die Lage von *S* auf diesen Strecken. ❑

Aufgaben Serie 7 (2020/21)

Einsendungen bitte bis 22. Juni 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [6].

Aufgabe 7-1.
Gibt es Polyeder mit einer ungeraden Anzahl von Flächen, wobei jede Fläche ein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Seiten ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung! (5 Punkte)

Aufgabe 7-2.
Beweisen Sie: Wenn *a* und *b* ganzzahlig sind, dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + 10 \cdot a \cdot x + 5 \cdot b + 3 = 0$$

keine ganzzahlige Lösung. (5 Punkte)

Aufgabe 7-3.
Ermitteln Sie alle ungeordneten Paare $(x; y)$ aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die Folgendes gilt:

Das arithmetrische Mittel von $\boldsymbol{x}$ und *y* ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von *x* und *y*. (6 Punkte)

Aufgabe 7-4.
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 7-5A

(a) Wenn die Summe zweier Quadratzahlen natürlicher Zahlen ein Vielfaches von 7 ist, so ist jede der Zahlen selbst durch 7 teilbar. (2 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, ob es ein Zahlentrupel $(w; x; y; z)$ natürlicher Zahlen $(w > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 5(y^2 + z^2).$$ (2 Punkte)

[6] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(c) Beweisen Sie, dass es kein Zahlentrupel $(w; x; y; z)$ natürlicher Zahlen $(w > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$w^2 + x^2 = 7(y^2 + z^2)$ erfüllt. (4 Punkte)

Aufgabe 7-5B. In der Ebene sei $P_1P_2P_3P_4$ ein beliebiges Viereck E. Zu untersuchen ist folgende Aussage:

Sind Q_1, Q_2 ,Q_3 und Q_4 vier Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von E liegen, so dass $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ein zu E kongruentes Viereck ist, so ist jeder Punkt Q_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ ein Eckpunkt von E.

(a) Gibt es nichtkonvexe Vierecke E, für die die genannte Aussage falsch ist? (2 Punkte)

(b) Ist diese Aussage für alle nichtkonvexe Vierecke E falsch? (2 Punkte)

(c) Beweisen Sie, dass die Aussage für alle konvexen Vierecke wahr ist! (4 Punkte)

Hinweise: Ein Viereck E heißt konvex, wenn für zwei beliebige Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von E liegen, auch alle Punkte der geradlinigen Verbindungslinie dieser beiden Punkt im Innern oder auf dem Rand von E liegen.

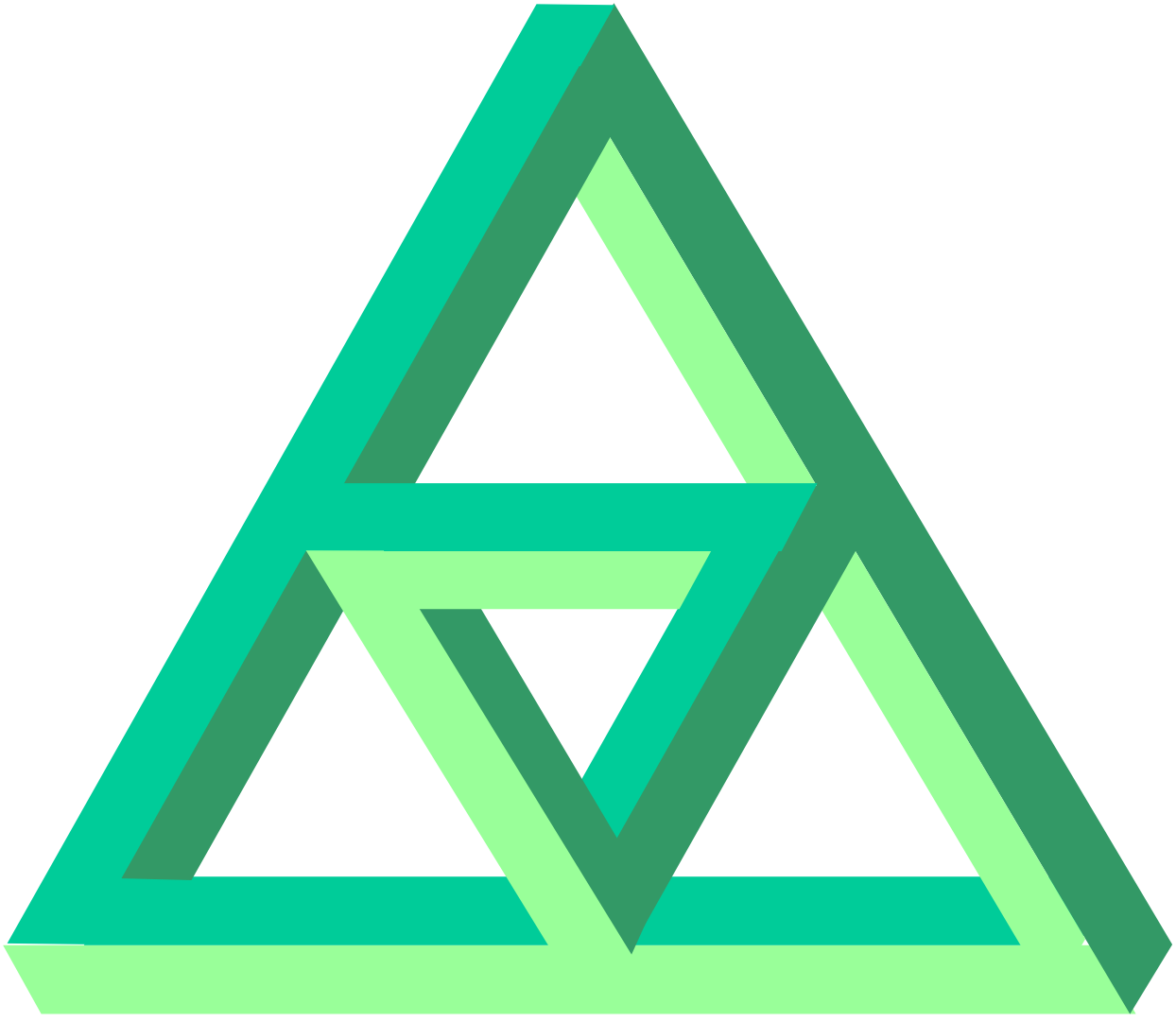
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 6 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 4 /2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 6

Aufgabe 6-1. Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen *n* mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von *n* durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen *a* und *b* entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von *a* und *b* gleich *n*.

Lösungshinweise: Nach den gestellten Bedingungen muss die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = 100a + b = n$$

mit natürlichen Zahlen *a* und *b* mit $10 \le a \le 99, 10 \le b \le 99$ gelten. Durch äquivalente Umformung erhält man daraus

$$a^2 + 2a \cdot (b - 50) + b^2 - b = 0 .$$

Wendet man auf diese quadratische Gleichung die bekannte Lösungsformel an, folgt

$$a_{1,2} = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 99b} .$$

Damit die Lösung für *a* eine natürliche Zahl ist, muss es eine natürliche Zahl *t* ($t \le 50$) mit $2500 - 99b = t^2$ geben. Dies ist gleichbedeutend mit

$$99b = 2500 - t^2 = (50 + t) \cdot (50 - t) .$$

Wegen der Faktorenzerlegung $99 = 9 \cdot 11$ muss der Faktor 11 in den Faktoren $(50 + t)$ oder $(50 - t)$ enthalten sein. Das kann nur für $t = 5, 16, 27, 38, 49$ bzw. $t = 6, 17, 28, 39, 50$ sein. Da das Produkt beider Faktoren durch 9 teilbar sein muss, scheiden davon 6, 16, 17, 27, 28, 38 und 39 aus, so dass nur $t = 5, 49, 50$ als mögliche Lösung verbleiben. Aus diesen Werten folgen für $b = 25, 1$ bzw. 0. Aus der obigen Lösungsformel findet man für *a* die Werte

$a = 25 \pm 5$, $a = 49 \pm 49$ bzw. $a = 50 \pm 50$.

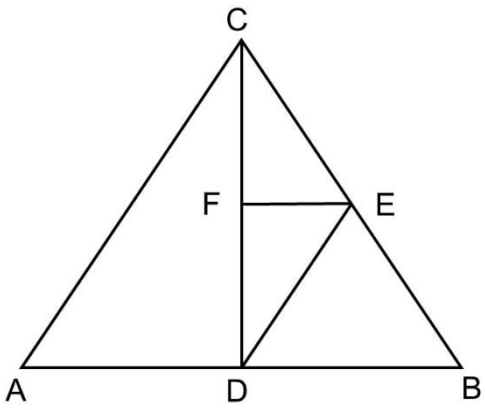
Unter Beachtung der Wertebeschränkung für *a* und *b* können folglich nur $a = 30$ und $a = 20$ zu einer Lösung führen. Tatsächlich erfüllen die Zahlen $n = 3025$ und $n = 2025$ die Bedingungen der Aufgabe.

Lässt man für *b* auch eine zweistellige Zahl mit führender Null zu (also $0 \le b \le 99$), so findet man für $b = 1$ die Zahl $a = 98$. Tatsächlich erfüllt auch $n = 9801$ die Bedingungen der Aufgabe. Lässt man auch nicht echt vierstellige Zahlen zu (d.h. $0 \le a \le 99$), so ist $a = 0$ als Lösung möglich, was zu den weiteren Lösungen $n = 0000$ und $n = 0001$ führt.

(Die Schreibweise mit vier Ziffern ist dabei notwendig, um den Schnitt gemäß Aufgabenstellung ausführen zu können.) ❑

Hinweis: Eine Liste aller Quadratzahlen von 32^2 bis 99^2 und Prüfung der geforderten Eigenschaft ist eine (wenn auch nicht elegante) vollständige Lösungsdarstellung. Sie ist ohne technische Hilfsmittel zu erstellen und der Korrektor kann die Rechnungen nachvollziehen. Die Nutzung von Rechentechnik ist für die Lösungsfindung in einer Hausarbeit stets zulässig, die Argumentation darf sich aber nicht auf die Ausführung eines Programmes begründen. Insbesondere reicht es nicht, nur die Lösungsmenge anzugeben, da auf diese Weise nicht nachgewiesen wurde, dass es keine weiteren Lösungen gibt (aufgrund eines Programmierfehlers könnten Lösungen übersehen werden).

Aufgabe 6-2 – MO561012. Beweisen Sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.



Lösungshinweise: Es genügt eine geeignete Zerlegung anzugeben und nachweisen, dass diese tatsächlich die Anforderungen der Aufgabe erfüllt.

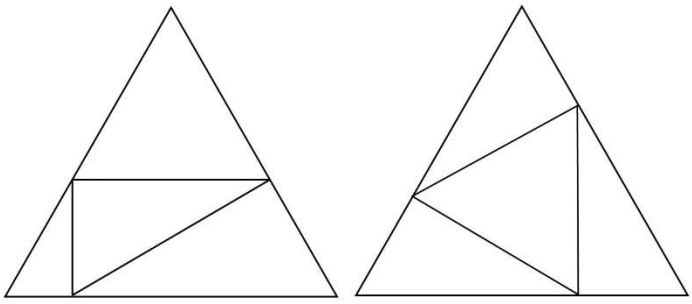
Wir fällen im ersten Schritt vom Punkt *C* auf die Seite $\overline{AB}$ das Lot. Den Schnittpunkt nennen wir *D*. Da das Lot $\overline{AD}$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, ist das Dreieck *ADC* ein rechtwinkliges Dreieck.

Wir markieren im zweiten Schritt auf $\overline{BC}$ einen Punkt *E*, der vom Punkt *B* den Abstand $|BE| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = a/2$ hat. Dann ist $\overline{DE}$ eine Mittellinie des Dreiecks *ABC* und somit gilt $|DE| = a/2$. Also ist das Dreieck *DBE* gleichseitig.

Abschließend fällen wir von *E* das Lot auf $\overline{AD}$. Den Schnittpunkt nennen wir *F*. Dann zerlegt das Lot $\overline{EF}$ das Dreieck *DEC* in zwei rechtwinklige Dreiecke *DEF* und *FEC*.

Somit erfüllt die Zerlegung mit den Dreiecken *ADC, DBE, DEF* und *FEC* die Bedingungen der Aufgabe. ❑

Es gibt weitere Möglichkeiten der Zerlegung, jedoch ist entweder duch die Konstruktionsbeschreibung oder durch eine Analyse sicherzustellen, dass es tatsächlich ein gleichseitiges und drei rechtwinklige Dreiecke sind.



Aufgabe 6-3. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ von reellen Zahlen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, und $\boldsymbol{z}$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \;\; ; \;\; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \;\; ; \;\; xy + yz + zx = 27.$$

Lösungshinweise: Wenn es reelle Zahlen *x*, *y* und *z* gibt, die diese Gleichungen erfüllen, so existiert nach dem Satz von VIETA[1] ein Polynom dritten Grades der Form

$$P(t) = t^3 - (x + y + z) \cdot t^2 + (xy + yz + xz) \cdot t - xyz$$

für das die Werte von *x*, *y* und *z* die Nullstellen sind. Für das Absolutglied dieses Polynoms finden wir:

$$xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = yz + xz + xy$$

Also erhalten wir *xyz* = 27. Damit finden wir für das Polynom

$$P(t) = t^3 - 9 \cdot t^2 + 27 \cdot t - 27 = (t - 3)^3$$

die Nullstellen *x* = *y* = *z* = 3. Die Probe bestätigt, dass alle drei gegebenen Gleichungen damit erfüllt werden. ❑

Aufgabe 6-4 (MO-Klassiker MO094102, 1969/70). Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten *a*, *b*, *c* sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

Lösungshinweise: Angenommen, die gegebene Gleichung mit ungeraden *a*, *b* und *c* besitzt eine rationale Lösung *x*. Dann lässt sich *x* in der Form $x = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei *p* und *q* ganze teilerfremde Zahlen mit *q* > 0 sind. Damit gilt:

$$a \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{p}{q}\right) + c = 0, \text{ also } ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Fall 1: p und *q* sind ungerade.
Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade und die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind sowie die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite dieser Gleichung eine ungerade Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: Einer der beiden Zahlen *p*, *q* ist gerade, die andere ungerade.
Dann ist *bpq* eine gerade Zahl und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist eine gerade und die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

[1] s. Heft 2/2021 „Gleichungssysteme und der Satz von VIETA“ (S. 19 – 23)

Fall 3: p und *q* sind gerade.
Dann sind beide Zahlen im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.

Da es keine weitere Möglichkeit gibt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Man wende auf die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ die Lösungsformel an und erhält

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}\,.$$

Damit *x* rational wird, muss der Radikand $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl sein. Für die ungeradzahligen Koeffizienten schreiben wir $2a' + 1$, $2b' + 1$ bzw. $2c' + 1$ mit ganzen Zahlen *a´*, *b´* und *c´*. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2b'+1)^2 - 4 \cdot (2a'+1)(2c'+1) \\ &= 4b'^2 + 4b' + 1 - 16a'c' - 8 \cdot (a'+c') - 4 \end{aligned}$$

Weil $\boldsymbol{b'^2 + b' = b' \cdot (b' + 1)}$ als Produkt zweier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets durch 2 teilbar ist, gibt es eine ganze Zahl *Z* mit

$$b^2 - 4ac = 8 \cdot Z - 3\,.$$

Angenommen, es gäbe eine ganz Zahl *k* mit $8 \cdot Z - 3 = k^2$, dann ist wegen

$$4 \cdot (2 \cdot Z - 1) = 8 \cdot Z - 4 = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$$

die rechte Seite dieser Gleichung durch 8 teilbar (*k* muss ungerade sein und von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen $k - 1$ und $k + 1$ ist eine mindestens durch 4 und die andere durch 2 teilbar), aber die linke Seite ist nicht durch 8 teilbar (weil der Ausdruck in der Klammer eine ungerade Zahl darstellt). Also kann es eine solche Zahl *k* nicht geben. ❑

Aufgabe 6-5A. Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

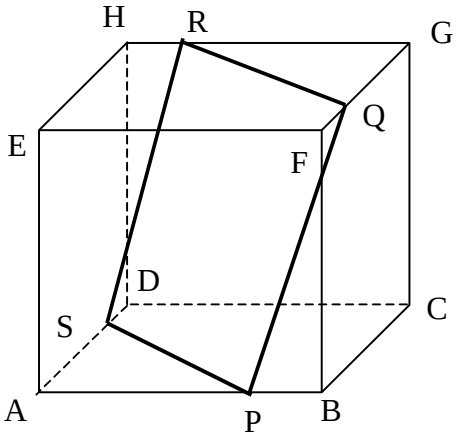
(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges *n*-Eck ist.

Lösungshinweise:

(a) Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit Kantenlänge 1 mit den in der Skizze markierten Punkten *P, Q, R, S*, so dass gilt *PB = FQ = HR = DS* = ¼ (Skizze nicht maßstabsgerecht). Die Länge der Strecke *PS* beträgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck *APS* mit dem rechten Winkel bei *A*,



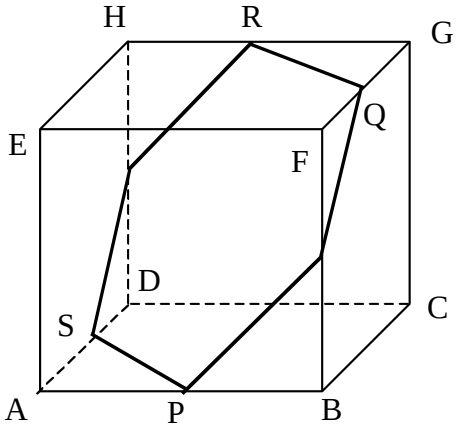
$$\overline{PS} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}.$$

Laut Konstruktion ist *RQ* parallel zu *SP* und gleich lang. Die Strecke *PQ* lässt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen (im Dreieck *PBF* mit dem rechten Winkel bei *B* und anschließend im Dreieck *PFQ* mit dem rechten Winkel bei *F*) und es gilt

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}.$$

Ebenfalls nach Konstruktion ist *RS* parallel zu *QP* und gleich lang. Also liegen *P, Q, R* und *S* in einer Ebene. Aus Symmetriegründen sind auch die Diagonalen *RP* und *QS* gleich lang und somit ist das Viereck *PQRS* ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\frac{18}{16} = 1{,}125$ (m²), das vollständig im Innern der Schnittfläche liegt.

(b) Wählt man die Punkte *P, Q, R* und *S* so, dass sie die entsprechenden Würfelkanten halbieren, so sind die Strecken *SP* und *QR* parallel und gleich lang. Die zusätzlichen Schnittpunkte auf *BF* und *DH* halbieren ebenfalls diese Kanten. Damit sind alle Seitenkanten der Schnittfläche gleich lang. Weil die Hauptdiagonalen jeweils in ihrer Länge einer Flächendiagonalen entsprechen, ist das entstandene Sechseck regelmäßig.



(c) Man kann ein gleichseitiges Dreieck (regelmäßiges 3-Eck) erhalten: Legt man beispielsweise die Schnittebene durch die Punkte *B, D* und *G* fest, so entsteht als Schnittfläche ein Dreieck mit jeweils Flächendiagonalen als Seiten.

Man kann kein regelmäßiges 5-Eck als Schnittfläche erhalten, denn wenigsten zwei Seiten der Schnittfigur müssten auf gegenüberliegenden Würfelseiten liegen. Eine Ebene schneidet aber die parallelen Würfelseiten so, dass die

Schnittgeraden ebenfalls parallel zueinander sind. Dies ist aber bei einem regelmäßigen Fünfeck nicht möglich.

Da verschiedene Kanten einer Schnittfigur auf verschiedenen Würfelseiten liegen, kann es kein regelmäßiges n-Eck mit $n > 6$ geben. Somit sind für ungerade n nur für $n = 3$ regelmäßige n-Ecke als Schnittfläche möglich. ❑

Aufgabe 6-5B. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

Lösungshinweise:
(a) Wir betrachten zunächst den ebenen Fall. Für zwei Gitterpunkte $(x_1 ; y_1)$ und $(x_2 ; y_2)$ berechnet sich der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke mittels

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) .$$

Dieser Mittelpunkt ist genau dann selbst ein Gitterpunkt, wenn sowohl x_1 und x_2 als auch y_1 und y_2 jeweils denselben Rest bei Division durch 2 lassen.

Da es für jede Koordinate des Gitterpunktes 2 Möglichkeiten bezüglich des Restes bei Division durch 2 gibt, können insgesamt $2^2 = 4$ Kombinationen der Reste bei Division durch 2 vorkommen. Hat man nun 5 Gitterpunkte, so stimmen nach dem Schubfachprinzip mindestens 2 dieser 5 Gitterpunkte in den Resten bei Division durch 2 in beiden Koordinaten überein. Für dieses Paar von Gitterpunkten ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

In Analogie beweist man die Behauptung für den räumlichen Fall, da sich auch hier der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke koordinatenweise als Mittelwert der Koordinaten ergibt. Die Zahl der Kombinationen erhöht sich bei 3 Koordinaten auf $2^3 = 8$. Nach dem Schubfachprinzip findet man deshalb unter 9 Gitterpunkten stets ein Paar von Gitterpunkten, die koordinatenweise im Rest bei Division durch 2 übereinstimmen. Für dieses Paar ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

(b) In einem Würfel mit der Grundfläche *ABCD* und der Deckfläche *EFGH* (mit der Kante *AE*) bildet der Körper mit den Eckpunkten *ACFH* einen regelmäßigen

Tetraeder, da alle Seitenkanten dieses Körpers als Flächendiagonalen des Würfels gleichlang sind. Es gibt unendlich viele Würfel, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind. Somit existieren auch unendlich viele Tetraeder der geforderten Art.

(c) Angenommen, es existiert in einem ebenen Gitter ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art. Dann kann man einerseits den Flächeninhalt A dieses Dreiecks durch Addition und Subtraktion von Teilflächen von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecksflächen mit rationalen Ergebnissen erhalten. Dazu bilde man das kleinste achsenparallele Rechteck, das das Dreieck vollständig enthält. Die Ecken dieses Rechtecks sind ebenfalls Gitterpunkte.

Andererseits ist das Quadrat einer Seitenlänge a stets rational, da es mittels des Satzes von Pythagoras als Summe zweier Quadrate ganzzahliger Längen dargestellt werden kann. Dann ist aber der Flächeninhalt nach der Flächenformel $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ stets irrational.

Mit diesem Widerspruch zwischen rationalen und irrationalen Flächenwert ist bewiesen, dass es kein solches Dreieck geben kann. ❑

PELLsche Gleichung

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ mit dem ganzzahligen Faktor A ist in natürlichen Zahlen x und y zu lösen, wobei die triviale Lösung $(1; 0)$ nicht in die weitere Diskussion einbezogen wird. Die Gleichung wurde nach dem britischen Mathematiker JOHN PELL (1611 – 1685) benannt, der sich u.a. mit Diophantischen Gleichungen beschäftigte.

Zunächst diskutieren wir die Möglichkeiten für A. Es können negative Zahlen ausgeschlossen werden, denn in diesem Fall ließe sich die Gleichung als $x^2 + |A| \cdot y^2 = 1$ schreiben, die für $|A| > 1$ nur die trivialen Lösungen hat. Ist A eine Quadratzahl einer ganzen Zahl, gibt es außer der trivialen Lösung auch keine weiteren Lösungen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz zweier Quadratzahlen, die den Wert 1 annehmen soll. Folglich sind PELLsche Gleichungen nur für Nichtquadratzahlen A interessant.

Wir können für ein vorgegebenes A durch systematisches Suchen eine Lösung $(x ; y)$ finden. So ist offensichtlich $(3; 2)$ eine Lösung von $x^2 - 2y^2 = 1$, aber auch $(17; 12)$ ist eine Lösung. Können wir auch alle Lösungen finden?

Ist $(x_0 ; y_0)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$, so gilt nach Binomischer Formel

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)(x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0) = 1$$

und folglich finden wir wegen

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n \cdot (x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0)^n = 1$$

neue Lösungen mit

$$x_n + \sqrt{A} \cdot y_n = (x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n,$$

wenn wir alle Summanden der Binomischen Formel ohne $\sqrt{A}$ zu x_n und die anderen Summenden mit $\sqrt{A}$ zu y_n zusammenfasst. Auf diese Weise erhalten wir

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n \right)$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \left(\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^n \right)$$

Daraus leiten wir aus der expliziten Bildungsvorschrift eine Rekursionsvorschrift her:

$$\begin{aligned} x_{n+1} + \sqrt{A} \cdot y_{n+1} &= \left(x_n + \sqrt{A} \cdot y_n\right)\left(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0\right) \\ &= (x_n x_0 + A \cdot y_n y_0) + \sqrt{A} \cdot (x_n y_0 + y_n x_0) \end{aligned}$$

Am Beispiel der Lösung $(3; 2)$ für $A = 2$ führt dies zu

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

Eliminieren wir aus diesem Gleichungssystem zunächst y_n, so gilt:

$$3x_{n+1} - 4y_{n+1} = x_n.$$

Setzen wir nun für $4y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - 3x_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$x_n + 2 = 6x_{n+1} - x_n .$$

Eliminieren wir nun noch x_n, so führt dies zu:

$$3y_{n+1} - 2x_{n+1} = y_n.$$

Setzen wir abschließend für $2x_{n+1}$ entsprechend der ersten Gleichung $y_{n+2} - 3y_{n+1}$ ein, finden wir die Rekursion:

$$y_n + 2 = 6y_{n+1} - y_n .$$

Sind damit alle Lösungen gefunden? Um dies zu untersuchen, definieren wir:
Eine Lösung $(x_0; y_0)$ der PELLschen Gleichung wird minimale Lösung genannt, wenn für alle Lösungen $(x; y)$ die Ungleichung $x_0 + y_0\sqrt{A} \leq x + y\sqrt{A}$ erfüllt ist.

Die minimale Lösung ist eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei minimale Lösungen $(x_{01}; y_{01})$ und $(x_{02}; y_{02})$, so wäre

$$x_{01} + y_{01}\sqrt{A} = x_{02} + y_{02}\sqrt{A}$$
$$x_{01} - x_{02} = \sqrt{A} \cdot (y_{02} - y_{01})$$

Auf der rechten Seite steht aber für $y_{01} \neq y_{02}$ eine irrationale Zahl, im Widerspruch zur rationalen Zahl auf der linken Seite, folglich müssen $y_{01} = y_{02}$ übereinstimmen und damit auch $x_{01} = x_{02}$.

Wenn nun $(x^*; y^*)$ eine weitere, nicht nach obigen Konstruktionsprinzip auffindbare Lösung der PELLschen Gleichung wäre, gilt für alle natürlichen Zahlen *n*

$$x* + y* \sqrt{A} \neq \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n$$

Aus der Minimalität von $(x_0; y_0)$ folgt

$$1 < x_0 + y_0\sqrt{A} < x* + y* \sqrt{A}.$$

In diesem Fall gibt es also einen Exponenten *k* mit

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^k < x* + y* \sqrt{A} < \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^{k+1}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungskette mit $\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^k$, finden wir eine weitere Lösung $(x'; y')$, wenn wir in folgender Ungleichungskette das mittlere Produkt ausmultiplizieren und die rationalen und irrationalen Summanden wieder entsprechend zusammenfassen.

$$1 < x' + y'\sqrt{A} = (x* + y* \sqrt{A})\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^k < 1 \cdot \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right).$$

Leicht überzeugen wir uns, dass $(x'; y')$ tatsächlich die PELLsche Gleichung erfüllt. Sind *x*' und *y*' positiv, so ist aus der letzten Ungleichung bereits ein Widerspruch zur Minimalität von (x_0 ; y_0) gegeben.

Keine der Zahlen kann 0 sein, weil daraus entweder $-Ay'^2 > 0$ oder $x'^2 = 1$ folgen würde. Beide Zahlen können aber auch nicht gleichzeitig negativ sein (wegen der linken Seite der letzten Ungleichungskette), so dass wir noch folgende Fälle analysieren müssen:

$$x' < 0 < y' \quad \Rightarrow \quad x' + y'\sqrt{A} < -x' + y'\sqrt{A}$$
$$y' < 0 < x' \quad \Rightarrow \quad x' + y'\sqrt{A} < x' - y'\sqrt{A}$$

d.h. $1 < x' + y'\sqrt{A} < \left|x' - y'\sqrt{A}\right| \quad \Rightarrow \quad 1 < \left|\left(x' + y'\sqrt{A}\right) \cdot \left(x' - y'\sqrt{A}\right)\right| = 1$

Dieser Widerspruch zeigt, dass das Paar $(x'; y')$ aus positiven ganzen Zahlen tatsächlich alle Bedingungen einer Lösung der PELLschen Gleichung erfüllt und zudem eine neue minimale Lösung wäre. Also haben wir mit dem obigen

Verfahren, ausgehend von der minimalen Lösung, alle unendlich vielen Lösungen gefunden.

Hinweis: Für jede positive Nichtquadratzahl A existieren Lösungen, und diese können mit Hilfe von Kettenbrüchen konstruktiv angeben werden.

Verallgemeinern wir die PELLsche Gleichung zu $x^2 - Ay^2 = C$ mit ganzahliger Konstanten C, so hängt die Existenz von Lösungen vom Wert C ab. Während beispielsweise $(10; 7)$ die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 2$ erfüllt, gibt es für $x^2 - 2y^2 = 3$ keine Lösungen, nachweisbar mittels der Restklassen bei Division durch 3:

- Wären nämlich x und y beide durch 3 teilbar, so ist die linke Seite – im Widerspruch zur rechten Seite – sogar durch 9 teilbar.
- Wäre nur eine Zahl x oder y durch 3 teilbar, muss auch die andere Zahl durch 3 teilbar sein.
- Sind aber beide Zahlen nicht durch 3 teilbar, so ergibt sich ein Widerspruch, weil deren Quadrate dann jeweils den Rest 1 bei Division durch 3 lassen.

Wenn es aber für eine Konstante C eine Lösung gibt, so finden wir sogar unendlich viele Lösungen, indem wir eine spezielle Lösung $(x_C; y_C)$ der Gleichung $x^2 - Ay^2 = C$ mit den allgemeinen Lösungen der PELLschen Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ kombinieren:

$$\left(x_C + y_C\sqrt{A}\right) \cdot \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n.$$

Für jede natürliche Zahl n finden wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rationalen und irrationalen Summanden eine Lösung der verallgemeinerten PELLschen Gleichung. Mathematisch besonders interessant erscheint der Fall $C = -1$.

Thema 6 – Einbeschriebene Körper[2]

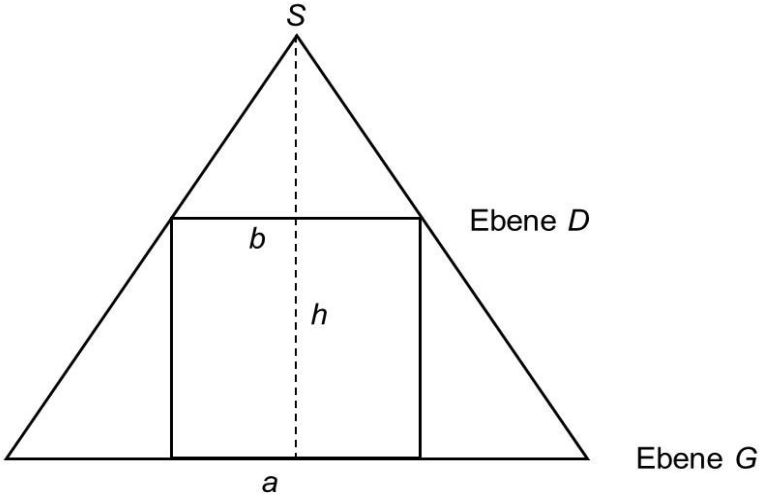
Aufgabe MO600936. Wir betrachten in dieser Aufgabe eine gerade quadratische Pyramide. Im Inneren dieser Pyramide liege ein Würfel, der mit seiner Grundfläche auf der Grundfläche der Pyramide steht. Weiterhin sollen die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Die Länge der Grundkanten der Pyramide wird im Folgenden mit a, die Länge ihrer Höhe mit h und schließlich die Länge der Würfelkanten mit b bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $b = \frac{a \cdot h}{a + h}$ gilt.
b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem a, h und b positive ganze Zahlen sind und die Gleichung aus Teil a) gültig ist.

[2] Thema 6 der Beitragsreihe zur Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden; www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von b alle Paare (a, h) positiver ganzer Zahlen, wenn b eine Primzahl ist und die Gleichung aus Teil a) erfüllt sein soll.

Lösungshinweise: Da die Aufgabenstellung keine Abbildung zur Veranschaulichung des Sachverhaltes enthält, skizzieren wir die gegebene Situation. Häufig lassen sich räumliche Fragestellungen auf ein ebenes Problem zurückführen, wenn wir eine geeignete Schnittebene finden. Hier eignet sich die senkrechte Parallelprojektion auf senkrecht stehende Würfelebene.



Teil a) Die Ebene, in welcher die Deckfläche des Würfels liegt, schneidet die Pyramide in einem Quadrat, dessen Ecken auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Da auch die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels auf den Seitenkanten der Pyramide liegen, handelt es sich bei dem genannten Quadrat genau um die Deckfläche des Würfels. Die Ebene schneidet von der großen also eine kleine Pyramide ab.

Die kleine Pyramide geht durch eine zentrische Streckung an der Spitze *S* in die große Pyramide über, welche die Ebene *D* der Deckfläche des Würfels in die Ebene *G* der Grundfläche der großen Pyramide überführt. Bei dieser Streckung geht jede Ecke der quadratischen Deckfläche des Würfels in die entsprechende Ecke der Grundfläche der großen Pyramide über. Da die Deckfläche des Würfels die Seitenlänge *b* und die Grundfläche der großen Pyramide die Seitenlänge *a* haben, muss der Streckfaktor der genannten Abbildung gleich $\frac{a}{b}$ sein.

Andererseits hat *S* von *D* den Abstand $h - b$ und von *G* den Abstand *h*, also ist der Streckfaktor gleich $\frac{h}{h-b}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir die Beziehung

$$\frac{h}{h-b} = \frac{a}{b}$$

die nach Multiplikation mit $(h-b) \cdot b$ zu $h \cdot b = a \cdot (h-b) = a \cdot h - a \cdot b$ und weiter nach Addition von $a \cdot b$ zu $a \cdot b + h \cdot b = a \cdot h$ führt. Nach Division durch $a + h$ finden wir hieraus Die Behauptung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$.

Teil b) Ein Beispiel ist $a = 2$, $h = 2$ und $b = 1$, denn es gilt $1 = \frac{2 \cdot 2}{2+2}$. Es ist die Probe, aber keine Herleitung erforderlich!

Teil c) Die Gleichung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$ ist gleichbedeutend mit $(a-b) \cdot (h-b) = b^2$. Daher müssen $a-b$ und $h-b$ Komplementärteiler von b^2 sein. Wäre dabei einer von ihnen negativ, so wären beide negativ und der kleinere läge zwischen $-b^2$ und $-b$. Das kann aber nicht sein, weil *a* und *h* positiv sind. Folglich müssen $a-b$ und $h-b$ beide positiv sein. Weil *b* eine Primzahl ist, gibt es drei Fälle:

$a-b = 1$ und $h-b = b^2$,
$a-b = b$ und $h-b = b$,
$a-b = b^2$ und $h-b = 1$.

Diese Fälle führen auf die folgenden Lösungen (unter Beachtung der möglichen Vertauschung von *a* und *h*):

$$(a,h) = ((b+1)\cdot b, b+1), (a,h) = (b+1, (b+1)\cdot b), (a,h) = (2b, 2b).$$

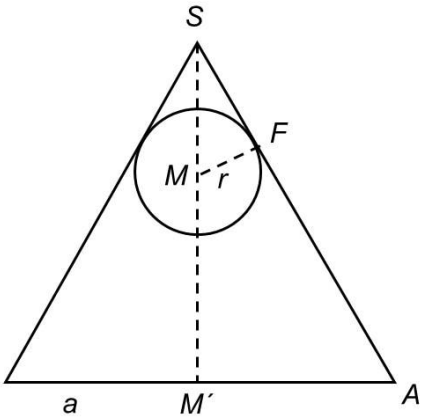
In einer Probe müssen wir noch zeigen, dass es sich hierbei auch tatsächlich um Lösungen der Gleichung aus Teil a) handelt. ❑

Derartige Aufgabenstellungen finden wir schon in den Anfängen der Mathematik-Olympiaden, beispielsweise in

Aufgabe MO031024. In einem Kreiskegelkörper mit der Spitze *S*, dessen Achsenschnitt die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt *M* die Höhe $\overline{SM'}$ des Kegels im Verhältnis $|SM| : |MM'| = 1:2$ teilt. Die Länge eines Durchmessers der Grundfläche des Kegels sei *a*.

Wie groß ist der Radius *r* der Kugel?

Lösungshinweise: Im Aufgabentext wird bereits auf den geeigneten Achsenschnitt hingewiesen. Das räumliche Problem können wir also in die Ebene projizieren: Wir zeichnen die Schnittfläche durch *S* und *M´*, in der die Mantellinie *SA* des Kreiskegelkörpers zu sehen ist. Da die Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, hat auch die Mantellinie die Länge *a*. Wir suchen den Radius *r*, der in der Zeichnung die Länge des Lotes vom Mittelpunkt *M* der Kugel auf die Mantellinie mit Fußpunkt *F* darstellt. Wir erkennen, dass die Dreiecke *MFS* und *AM´S* ähnlich sind.



Somit finden wir

$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a, \qquad \text{also} \qquad r = \frac{|SM|}{2}$$

Für die Höhe h des Schnittdreiecks wissen wir: $h = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}$. Nach Voraussetzung ist $|SM|:|MM'| = 1:2$, woraus wegen $|SM'| = h$ unmittelbar $|SM| = \frac{h}{3}$ folgt. Daraus erhalten für den gesuchten Radius $r = \frac{a}{12} \cdot \sqrt{3}$. ❑

In der Diskussion mit Kugeln oder Kreisen darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier sich berührender Kugeln oder Kreise durch den gemeinsamen Berührungspunkt geht.

Aufgabe MO510945. Auf einer waagerechten Ebene E liegen drei gleich große Kugeln K_1, K_2 und K_3, die sich paarweise berühren. Die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 dieser Kugeln bilden also ein gleichseitiges Dreieck. Eine vierte Kugel K_4 berührt die Kugeln K_1, K_2, K_3 und die Ebene E. Eine weitere Kugel K_5 wird von jeder dieser vier Kugeln K_1, K_2, K_3 und K_4 von außen berührt.

In welcher Lagebeziehung steht K_5 zur Ebene E' durch M_1, M_2 und M_3?

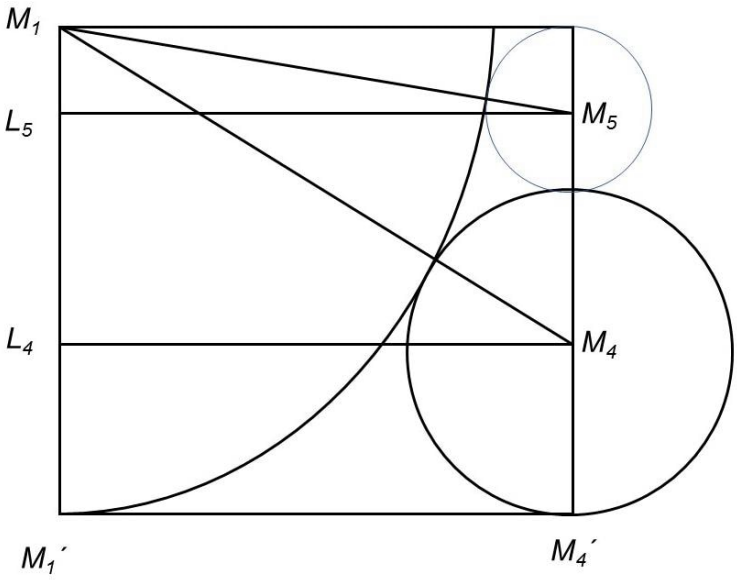
Lösungshinweise: Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bezeichnen wir mit M_i der Mittelpunkt der Kugel K_i, mit r_i der Radius der Kugel K_i und mit M'_i das Bild von M_i unter der senkrechten Parallelprojektion auf E. Für die Radien $r_1 = r_2 = r_3$ setzten wir R.

Schritt 1: Lagebestimmung der M'_i in E. Da für $i \neq 5$ der Berührungsradius von K_i mit E senkrecht auf E steht, ist für $i \neq 5$ der Punkt M'_i auch der Berührpunkt von K_i mit E. Da sich die gleich großen Kugeln K_1, K_2, K_3 von außen berühren, bilden ihre Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2R$ in der Ebene E', und es gilt $E' \parallel E$. Somit bilden M'_1, M'_2 und M'_3 ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2R$ in der Ebene E. Da die Abstände von M_4 zu M_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ alle gleich sind, liegt M_4 in den mittelsenkrechten Ebenen der Strecken M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3. Da diese Ebenen senkrecht zu E' und damit auch senkrecht zu E stehen, werden sie in der senkrechten Parallelprojektion auf E als Mittelsenkrechte von $M'_1M'_2$, $M'_1M'_3$ und $M'_2M'_3$ abgebildet. Der Punkt M'_4, das Bild von M_4 unter dieser Projektion, ist also der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $M'_1M'_2M'_3$.

Analog ergibt sich, dass auch M_5 auf M'_4 abgebildet wird. Die Kugeln K_4 und K_5 liegen also senkrecht übereinander und es ist $M'_4 = M'_5$. Weiter gilt

$$|M'_1M'_4| = \frac{2}{3}R \cdot \sqrt{3}$$

als Umkreisradius im gleichseitigen Dreieck $M'_1M'_2M'_3$ mit der Kantenlänge $2R$.



Schritt 2: Bestimmung von r_4 und r_5. Dafür zeichnen wir einen ebenen Schnitt E´´ durch die Mittelpunkte M_1, M_4 und M_5, der senkrecht auf der Ebene E steht. Dann finden wir

$$|M_5M'_4| = r_5 + 2 \cdot r_4, |M_1M_4| = R + r_4, |M_1M_5| = R + r_5.$$

Seien L_4 und L_5 die Fußpunkte der Lote von M_4 bzw. M_5 auf $M_1M'_1$. Die Vierecke $M'_1M'_4M_4L_4$ und $L_4M_4M_5L_5$ sind dann Rechtecke. Im rechtwinkligen Dreieck $L_4M_4M_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$(R - r_4)^2 + \left(\frac{2}{3}R \cdot \sqrt{3}\right)^2 = (R + r_4)^2$$

Umstellen nach r_4 unter Beachtung von $R \neq 0$ liefert $r_4 = \frac{1}{3}R$. Im rechtwinkligen Dreieck $L_5M_5M_1$ folgt ähnlich

$$(R - 2 \cdot r_4 - r_5)^2 + \left(\frac{2}{3}R \cdot \sqrt{3}\right)^2 = (R + r_5)^2$$

Umstellen nach r_5 liefert $r_5 = \frac{1}{6}R$. Damit folgt $2 \cdot r_4 + 2 \cdot r_5 = R$.

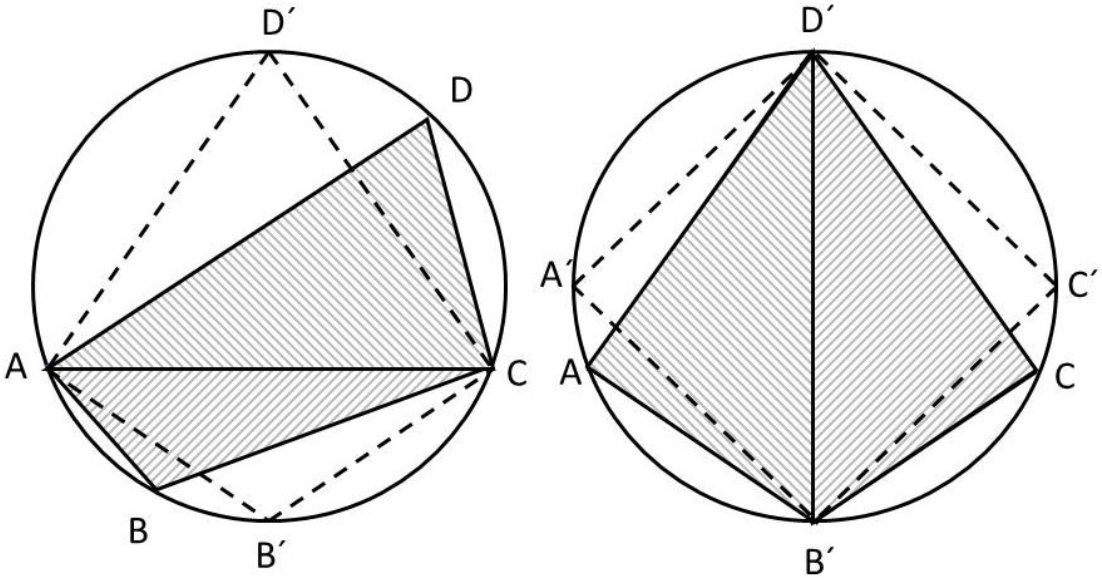
Antwort: E′ tangiert also die Kugel K_5 (im Umkreismittelpunkt von Dreieck $M_1M_2M_3$). ❑

Thema 6 – Einbeschriebene Figuren

Aufgabe 1 – MO380941. Gegeben ist ein Kreis *k*. Man beweise, dass von allen diesem Kreis einbeschriebenen Vierecken (Sehnenvierecken) die Quadrate den größten Flächeninhalt haben.

Lösungshinweise: Wir betrachten ein Sehnenviereck *ABCD* des Kreises *k*. Die Mittelsenkrechte von *AC* schneide *k* in *B´* und *D´* so, dass auch *AB´CD´* ein Sehnenviereck von *k* ist. Dann ist *B´D´* ein Durchmesser von *k*. Daher ist in den Dreiecken *AB´C* und *ACD´* die Summe der auf *AC* senkrechten Höhen größer oder gleich der entsprechenden Summe in den Dreiecken *ABC* und *ACD*. (Diese

Summen sind genau dann gleich, wenn *B* und *D* selbst auf der Mittelsenkrechten von *AC* liegen, also mit *B´* und *D´* zusammenfallen.) Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks *AB´CD´* ist größer oder gleich dem Flächeninhalt des ursprünglichen Sehnenvierecks *ABCD*.



Nun gehen wir von dem Sehnenviereck *AB´CD´* aus und betrachten die Mittelsenkrechte von *B´D´*, die *k* in *A´* und *C´* so schneidet, dass auch *A´B´C´D´* ein Sehnenviereck von *k* ist. Dann ist *A´C´* ein Durchmesser von *k*. Daher ist in den Dreiecken A´B´D´ und C´B´D´ die Summe der auf A´C´ senkrechten Höhen größer oder gleich der entsprechenden Summe in den Dreiecken *AB´D´* und *CB´D´*. (Diese Summen sind genau dann gleich, wenn *A* und *C* mit *A´* und *C´* zusammenfallen.) Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks *A´B´C´D´* ist größer oder gleich dem Flächeninhalt des Sehnenvierecks *AB´CD´* und deshalb auch größer oder gleich des ursprünglichen Sehnenvierecks *ABCD*.

Das Sehnenvierecks *A´B´C´D´* ist aber aufgrund der Umkehrung des Satzes von THALES ein Quadrat. Eine Vergrößerung dessen Flächeninhaltes ist nicht mehr möglich, womit wir die Behauptung bewiesen haben. ❑

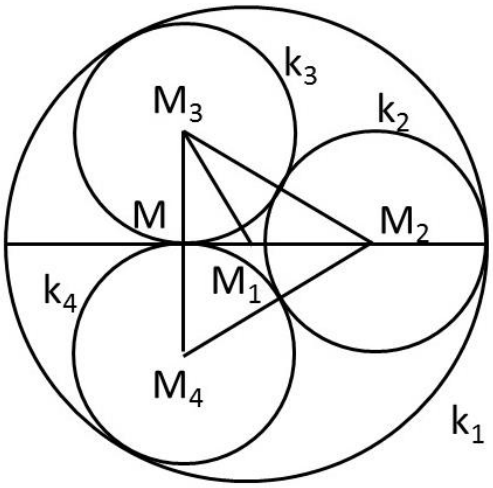
Aufgabe MO480944/481044. Es sei *C* ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Über $\overline{AB}$ und $\overline{CB}$ seien die Halbkreise h_1 bzw. h_2 zur selben Seite hin errichtet. Der Kreis k_3 berühre h_1 von innen, h_2 von außen und weiterhin die Strecke $\overline{AB}$.

Wenn die Radien von h_2 und k_3 beide 3 cm groß sind, wie groß ist dann der Radius von h_1?

Vorbemerkung: Bei Aufgaben mit konkreten Maßangaben ist es üblich, zu Beginn darauf zu verweisen, dass die Maßeinheiten im Folgenden weggelassen werden, wenn dadurch keine Missverständnisse möglich sind. Zudem dürfen wir ohne Beweis verwenden: Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte.

Lösungshinweise: Zum Aufgabentext wurde eine Skizze gezeigt. Wir ergänzen die Skizze, indem wir an der Strecke $\overline{AB}$ spiegeln. Dadurch wird h_1 zu einem Kreis k_1, h_2 zu einem Kreis k_2 und es kommt ein Kreis k_4 hinzu.

Die Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen Sie haben alle den Radius $r = 3$ und berühren jeweils k_1 von innen. Somit erkennen wir, dass die Mittelpunkte der Kreise k_2, k_3 und k_4 ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2 \cdot r = 6$ bilden. In diesem Dreieck beträgt der Radius seines Umkreises (also der Abstand des Mittelpunktes eines inneren Kreises zum Mittelpunkt M_1 des Kreises k_1) $\frac{2}{3} r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Damit finden wir den Zusammenhang: $r_1 - r_2 = 2r \cdot \sqrt{3}$.



Der Radius des Halbkreises h_1 beträgt also $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ cm ≈ 6,46 cm. ❑

Hinweis: Wenn die Ausgangsmaße konkret mit einer Maßzahl und einer Maßeinheit angegeben werden, wird erwartet, dass auch das Ergebnis in Maßzahlen dieser Maßeinheit angegeben wird (also z.B. keine Wurzelausdrücke im Ergebnis stehen). Wir können die Rechnung ohne Taschenrechner wie folgt abschätzen:

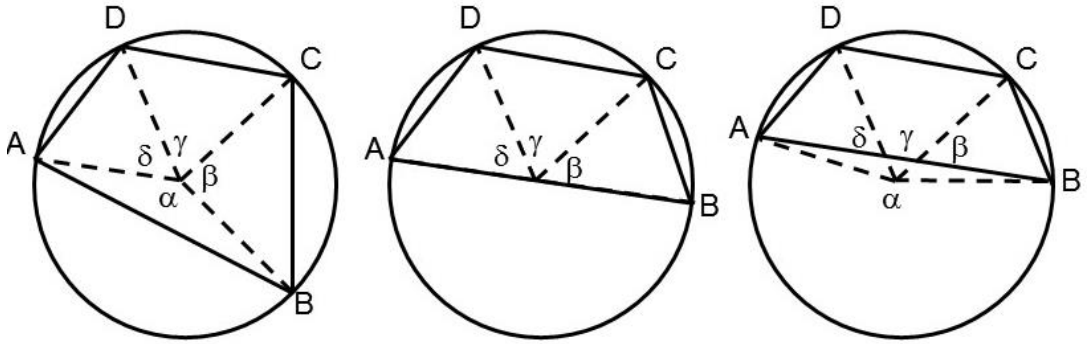
Wegen $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 3{,}24 = 1{,}8^2$ können wir $\sqrt{3}$ mit 1,75 abschätzen, oder wegen $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 < 3{,}0276 = 1{,}74^2$ können wir $\sqrt{3}$ mit 1,73 abschätzen. Die Berechnung der Quadrate ist dabei ohne Taschenrechner möglich.

Aufgabe MO400943. Einem Kreis *k* sei ein Viereck *ABCD* einbeschrieben. Die Längen seiner Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ seien wie üblich in dieser Reihenfolge mit *a*, *b*, *c*, *d* bezeichnet. Ein zweites dem Kreis *k* einbeschriebenes Viereck *A´B´C´D´* habe ebenfalls *a*, *b*, *c*, *d* als Längen seiner Seiten, und zwar in einer beliebigen Reihenfolge (die sich also auch von der Reihenfolge $\overline{A´B´}, \overline{B´C´}, \overline{C´D´}, \overline{D´A´}$ unterscheiden kann).

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, zwei Vierecke *ABCD* und *A´B´C´D´* so zu bilden, dass alle diese Voraussetzungen erfüllt werden und dass die beiden Vierecke nicht zueinander kongruent sind!
b) Beweisen Sie, dass je zwei Vierecke, die die in a) genannten Voraussetzungen erfüllen, zueinander flächengleich sind!

Lösungshinweise: Teil a) wird als Aufgabe 06-7a (Thema_06_Aufgaben.pdf) gestellt.

Teil b) Mit α, β, γ, δ bezeichnen wir die Zentriwinkelgrößen, die im Kreis k zu den Sehnenlängen gehören. Mit F_a, F_b, F_c und F_d bezeichnen wir die Flächeninhalte der jeweils in *k* von einer Sehne der Länge *a, b, c* und *d* und zwei Radien begrenzten Dreiecke. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:



(I) Alle vier Winkel sind kleiner als 180° und es gilt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_a + F_b + F_c + F_d$.

(II) Es sei $\alpha = 180°$. Dann gilt $\beta + \gamma + \delta = 180°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_b + F_c + F_d$.

(III) Es sei $\alpha > 180°$. Dann gilt $\beta + \gamma + \delta < 180°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_b + F_c + F_d - F_a$.

Nach Voraussetzung treten im Viereck *A´B´C´D´* dieselben Zentriwinkelgrößen auf wie in *ABCD*, nur möglicherweise in anderer Reihenfolge. Da aber die betrachteten drei Fälle nicht von der Reihenfolge der Winkel α, β, γ, δ abhängen, trifft für das Viereck *A´B´C´D´* derselbe Fall wie für das Viereck *ABCD* zu.

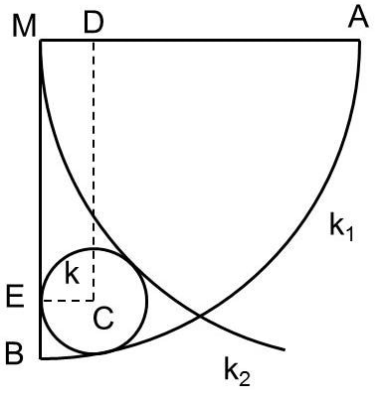
Somit haben die beiden Vierecke jeweils den gleichen Flächeninhalt und wir haben die Behauptung bewiesen. ❑

Aufgabe MO411032. Es sei *AB* ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit gegebenem Radius *r* und Mittelpunkt *M*. Ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt *A* und dem Radius *r* teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis *k* einbeschrieben werden, d.h. er soll die Strecke $\overline{MB}$ berühren und den Kreis k_1 von innen sowie den Kreis k_2 von außen berühren.

a) Wie groß ist der Radius des Kreises *k*?
b) Konstruieren Sie den Kreis *k* nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise Teil a): Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei *C*, sein Radius *x*. Die Fußpunkte der Lote von *C* auf $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ nennen wir *D* bzw. *E*. Dann ist *MDCE* ein Rechteck. *E* ist der Berührungspunkt von *k* mit $\overline{MB}$. Es gilt $|CE| = |DM| = x$, also $|AD| = r - x$.

Nun finden wir aufgrund der Verbindungslinien zwischen den Kreismittelpunkten $|AC| = r + x$ und $|MC| = r - x$.



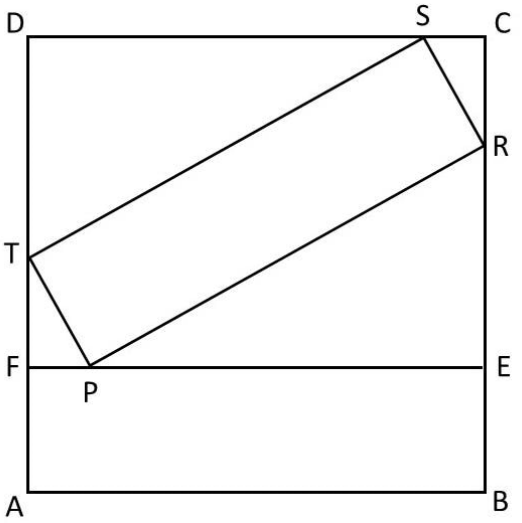
Setzen wir für die Länge $|DC|$ zur Abkürzung der Schreibweise *y*, so folgt nach dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck *ADC* mit rechtem Winkel am Punkt *D* bzw. im rechtwinkligen Dreieck *MCD* mit rechtem Winkel am Punkt *D*: $(r - x)^2 = x^2 + y^2$ und $(r + x)^2 = (r - x)^2 + y^2$. Nach dem wir y^2 eliminieren und die dabei entstehende Gleichung umstellen, erhalten wir $r^2 = 6 \cdot rx$, d.h. wegen r ≠ 0 finden wir $x = \frac{r}{6}$. ❑

Hinweis zu Teil b): Bei der Konstruktionsbeschreibung darf das Ergebnis aus Teil a) verwendet weren, d.h. es darf (mit geometrischen Mitteln, z.B. mittels Anwendung des Strahlensatzes) der sechste Teil des Radius konstruiert werden.

Aufgabe. Gegeben ist ein Quadrat, welches in zwei unterschiedliche Rechtecke geteilt ist, das kleinere Rechteck kann dabei dem größeren so einbeschrieben werden, dass auf jeder Seite des größeren Rechtecks genau ein Eckpunkt des kleineren liegt. In welchem Verhältnis wurde das Quadrat geteilt?

Lösungshinweise: Wir nehmen o.B.d.A.[3] an, dass die Kantenlänge des Quadrates 1 sei. Das kleinere Rechteck habe die Kantenlängen

$|AF| = |TP| = x$ und $|AB| = |PR| = 1$.



Bezeichnen wir die Längen $|FT| = y$, $|FP| = z$, $|PE| = a$ und $|ER| = |DT| = b$, so gelten aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke *FPT* und *PER* die Verhältnisse

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{1} \text{ bzw. } \frac{z}{x} = \frac{b}{1}.$$

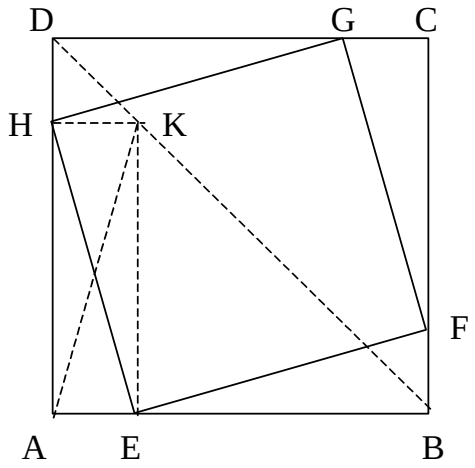
Damit das kleine Rechteck *PRST* wie gefordert in das Rechteck *ECDF* passt, muss gelten: $z + a = 1$ und $y + b = 1 - x$. Dies können wir zusammenfassen zu

$$b \cdot (y + c) - a \cdot (c + a) = b \cdot (1 - x) - a$$

Aus dem $b^2 - a^2 = b - 1$ folgt. Mit $a^2 + b^2 = 1$ erhalten wir daraus $b = -\frac{1}{2}$ und schließlich $x = 2 - \sqrt{3}$.

[3] o.B.d.A. – ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Eine solche Anmerkung ist ohne weitere Hinweise zulässig, wenn offensichtlich die vorgenommene Auswahl keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

Das gesuchte Verhältnis beträgt somit $\frac{1-x}{x} = 1 + \sqrt{3}$. ❑



Aufgabe. Einem Quadrat soll ein Quadrat mit minimalem Umfang einbeschrieben werden.

Lösungshinweise (geometrisch):
Ein einbeschriebenes Quadrat entsteht, wenn die Punkte *E, F, G* und *H* die Quadratseiten im gleichen Verhältnis teilen. Setzen wir $a = |\overline{AB}|$ und $x = |\overline{AE}|$, dann wird der Umfang *u* minimal, wenn $|\overline{HE}|$ minimal wird.

Ergänzen wir die Punkte *A, E* und *H* zum Rechteck *AEKH*, dann liegt *K* immer auf der Diagonalen *BD*, da das Dreieck *KHD* gleichschenklig rechtwinklig ist. Weiterhin gilt $|\overline{AK}| = |\overline{HE}|$. Also wird der Umfang minimal, wenn *AK* das Lot auf *BD* ist, und damit gilt $|\overline{AH}| = |\overline{HE}| = \frac{a}{2}$.

(analytisch) Wir finden mit dem Satz von PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck *AEH* die Gleichung $|\overline{HE}|^2 = x^2 + (a-x)^2$. Aus der Umformung

$$x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

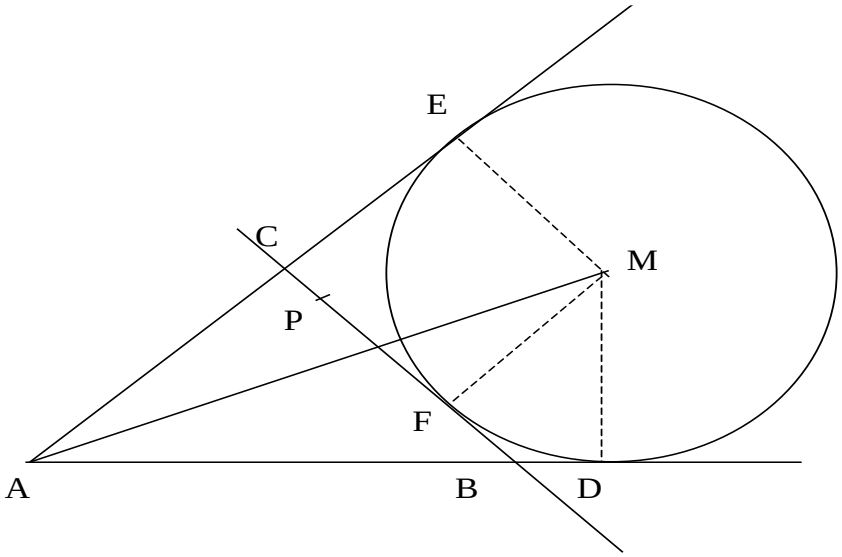
folgt, dass $|\overline{HE}|$ minimal wird, wenn $x = \frac{a}{2}$ gilt. ❑

Hinweis: Ersetzen wir in der Aufgabestellung für die einzubeschreibende Figur „Quadrat“ durch „Rechteck“, entartet das einbeschriebene Rechteck zur Diagonalen.

Aufgabe. Gegeben ist ein Winkel α mit dem Scheitel *A* und ein Punkt *P* im Winkelfeld von α. Eine Gerade g durch den Punkt *P* schneidet die Schenkel des Winkels α in den Punkten *B* und *C*. Wie muss man die Gerade *g* wählen, damit das Dreieck *ABC* minimalen Umfang besitzt?
Lösungshinweise:
Wir zeichnen durch den Punkt *P* eine beliebige Gerade und den Ankreis des Dreiecks *ABC* zur Seite *BC*. Der Ankreis berührt die Seiten (oder deren Verlängerungen) in den Punkten *D, E* und *F*. Für den Umfang *u* des Dreiecks *ABC* gilt dann

$$u = |\overline{AD}| + |\overline{AE}|.$$

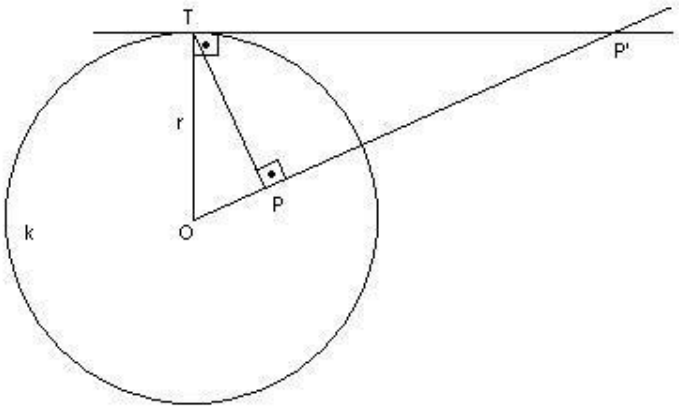
Der Umfang wird folglich minimal, wenn der Radius des Ankreises möglichst klein wird. Dies ist der Fall, wenn *PM* Radius des Umkreises ist. Für die vollständige Lösung ist noch die folgende Konstruktionsaufgabe zu lösen.



Aufgabe. Konstruieren Sie zu einem gegebenen Winkel α in *A* und einem im Winkelfeld gegebenen Punkt *P* das Dreieck *ABC* mit minimalen Umfang, wobei *B* und *C* auf den Winkelschenkeln und *P* auf der Seite *BC* liegen.

Inversion am Kreis

Definition: Die Inversion an einem Kreis *k* mit Mittelpunkt *O* und Radius *r* ist die Abbildung, die jeden Punkt *P* der Ebene außer *O* auf den Punkt *P*' mit $P' \in \overline{OP}$ abbildet und $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.



Dem Punkt *O* wird ein „unendlich ferner Punkt" zugeordnet.

<u>*Konstruktion:*</u> Es sei *P* ein von *O* verschiedener Punkt im Innern des Kreises *k*.

- Wir zeichnen die Gerade durch *O* und *P*.
- Die Senkrechte *s* in *P* zu *OP* schneidet *k* in *T*.
- Die Tangente an *k* in *T* schneidet *OP* in *P*'.

Existenz und Eindeutigkeit (!) sind leicht gezeigt; ebenso, dass *P*' tatsächlich der gesuchte Punkt ist. Wie verändert sich die Konstruktion von *P*' für einen Punkt *P* außerhalb von *k*?

<u>*Eigenschaften:*</u> (die sich leicht beweisen lassen)

- Die Inversion ist umkehrbar eineindeutig (bijektiv), d.h. aus dem Bild einer Inversion erhält man durch erneute Inversion wieder das Ausgangsbild.
- Geraden durch *O* sind Fixgeraden, sie werden also auf sich selbst abgebildet. Auch der Kreis *k* wird auf sich (sogar punktweise) abgebildet.

- Kreise senkrecht zu *k* sind Fixkreise, Kreise, die *O* nicht enthalten, werden wieder zu Kreisen, die *O* nicht enthalten und Kreise, die *O* enthalten, werden zu Geraden, die *O* nicht enthalten.
- Die Inversion am Kreis ist winkeltreu, das heißt die Größen von Winkeln bleiben bei Inversion an einem Kreis erhalten.

Eine interessante **Anwendungsaufgabe.** Gegeben seien ein Punkt A, zu A nicht kollineare Punkte M und N sowie Radien r_M und r_N .

Konstruieren Sie denjenigen Kreis durch A, der die Kreise $k_M(M, r_M)$ und $k_N(N, r_N)$ jeweils senkrecht schneidet.

Lösungsidee: Wir spiegeln A an k_M sowie an k_N und erhalten A_M bzw. A_N. Der gesuchte Kreis ist der Umkreis des Dreiecks AA_NA_M.

Thema 05 – Quadratische Funktionen

Aufgabe 1 – MO600934. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 5a^2 - 12a$$

gegebene Funktionenschar mit reellem Parameter *a*.

a) Bestimmen Sie alle diejenigen Werte für *a*, für welche die Funktion $f_a(x)$ genau zwei verschiedene Nullstellen hat.
b) Bestimmen Sie unter allen Werten für *a*, für welche die Funktion $f_a(x)$ genau zwei verschiedene Nullstellen hat, diejenigen, für welche der Abstand dieser Nullstellen maximal ist.

Lösungshinweise: Da die Nullstellen zu untersuchen sind, wenden wir in naheliegender Weise die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an und finden:

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 5a^2 + 12a} = a \pm 2 \cdot \sqrt{3a - a^2}$$

Es existieren genau dann zwei verschiedene reelle Nullstellen, wenn die Diskriminante $D = a \cdot (3 - a)$ positiv ist. Dies ist für alle *a* mit $0 < a < 3$ der Fall. Für die Differenz beider Nullstellen gilt zudem $|x_1 - x_2| = 4 \cdot \sqrt{3a - a^2}$, wobei *a* aus dem Intervall $(0; 3)$ gewählt werden kann. Wegen

$$3a - a^2 = -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

ist die Diskriminante nicht größer als $\frac{9}{4}$ und das Maximum wird für $a = \frac{3}{2}$ angenommen. Somit betragen die gesuchten Nullstellen

$$x_1 = \frac{3}{2} + 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\,;\; x_2 = \frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{3}{2}$$

Der Abstand beider Nullstellen ist $x_1 - x_2 = \frac{9}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 6$. ❑

Auch bei der folgenden Aufgabe führt die Diskussion der Diskriminante zur Lösung.

Aufgabe 2 – MO431023. Sei *b* eine ungerade ganze Zahl. Finden Sie alle ganzzahligen Werte von *c* in Abhängigkeit von *b*, für welche die Gleichung $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zwei verschiedene ganzzahlige Lösungen hat.

Lösungshinweise: Wir bestimmen die Diskriminante aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen in Normalform: $D = \frac{1}{4} \cdot (b^2 - 4 \cdot c)$. Wir erhalten genau dann zwei verschiedene ganzzahlige Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}$, wenn $b^2 - 4 \cdot c$ das Quadrat einer ungeraden Zahl ist. Setzen wir für eine ganze Zahl *z*

$$b^2 - 4 \cdot c = (2 \cdot z - 1)^2$$

so können wir diese Gleichung nach *c* auflösen:

$$c = -z^2 + z + \frac{b^2 - 1}{4}$$

Für eine ungerade Zahl *b* ist der Ausdruck $b^2 - 1 = (b - 1) \cdot (b + 1)$ stets durch 4 teilbar (weil der Vorgänger und der Nachfolger von *b* jeweils gerade Zahlen sind). Somit ist *c* für jede ganze Zahl *z* selbst eine ganze Zahl. Damit sind alle Lösungen der Aufgabe gefunden. ❑

Anstatt die Lösungen mit Hilfe der Lösungsformel zu analysieren, eignet sich auch die Anwendung des Wurzelsatzes von VIETA[4], der für quadratische Gleichungen in Normalform wie folgt lautet:

Sind x_1 und x_2 die reellen Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + a \cdot x + b$, so gilt

$$x_1 + x_2 = -a\,;\; x_1 \cdot x_2 = b$$

Lösungsvariante: Mittels Wurzelsatz von VIETA finden wir für die Nullstelen x_1 und x_2 dieser Funktion die Zusammenhänge

$$x_1 + x_2 = -b\,;\; x_1 \cdot x_2 = c$$

also nach c umgeformt:

$$c = x_1 \cdot (-b - x_1) = -x_1^2 - b \cdot x_1$$

[4] vergleiche Thema 03 – Gleichungssysteme (II)

Wir erkennen: Ist die Nullstelle x_1 eine beliebige ganze Zahl *n* und ermitteln wir *c* über die Gleichung $c = -n^2 - b \cdot n$, so lauten die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + n^2 - bn = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + n^2 - nb} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2} - n\right)^2}$$

Ist *b* eine ungerade Zahl, so ist die Diskriminante größer als 0 und es gibt zwei verschiedene Nullstellen, die ganzzahlig sind. ❑

Aufgabe 3 – MO590944. Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare $(a; b)$, für welche die Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und die Funktion $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$g(x) = x^2 + (2a + 1) \cdot x + (2b + 1)$$

die Nullstellen $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ besitzt.

Lösungshinweise: Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind für die genannten Nullstellen folgende Gleichungen erfüllt:

$$x_1 + x_2 = -a\ ;\ x_1 \cdot x_2 = b$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2a - 1\ ;\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1$$

Multiplizieren wir die beiden rechtsstehenden Gleichungen miteinander, so erhalten wir $1 = b(2b + 1)$, gleichbedeutend zu $2 \cdot b^2 + b - 1 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung ermitteln wir mit der bekannten Lösungsformel: $b_1 = -1$ und $b_2 = \frac{1}{2}$. Wenn es also Lösungen für *a* und *b* gibt, muss *b* einen dieser beiden Werte annehmen.

Außerdem erhalten wir aus den Gleichungen zu den Nullstellen:

$$-(2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-a}{b}$$

Es sei nun $b = \frac{1}{2}$, dann folgt daraus $-(2a + 1) = -2a$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Es sei deshalb $b = -1$, also $-(2a + 1) = a$. Diese Gleichung ist nur für $a = -\frac{1}{3}$ erfüllt.

Nun müssen wir mit diesen Parametern für die Funktionen *f*(*x*) und *g*(*x*) die Nullstellen ermitteln und prüfen, dass diese zueinander wie in der behaupteten Beziehung stehen:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 1 \;\longrightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{37}}{6}$$
$$g(x) = x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot x - 1 \;\longrightarrow\; x_{3,4} = -\tfrac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Wir überzeugen uns noch, dass x_3 der reziproke Wert von x_1 ist:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{37}}{6}} = \frac{6 \cdot (1+\sqrt{37})}{(1-\sqrt{37}) \cdot (1+\sqrt{37})} = \frac{6 \cdot (1+\sqrt{37})}{-36} = -\frac{1+\sqrt{37}}{6} = x_3$$

In gleicher Weise können wir zeigen, dass auch x_4 der reziproke Wert von x_2 ist. ❑

Aufgabe 4 – MO551014.

a) Es sei $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + (a + b)$. Weisen Sie nach, dass für $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ die Funktionswerte $p(1), p(2), p(3)$ und $p(11)$ jeweils ganzzahlig sind.

b) Es sei $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + (a + b)$ mit rationalen Koeffizienten a und b. Ferner seien $p(0)$ und $p(-1)$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass $p(x)$ für jede ganze Zahl x ganzzahlig ist.

Die Teilaufgabe (a) lädt dazu ein, sich mit der gegebenen quadratischen Funktion auseinanderzusetzen und erfolgreich erste Bewertungspunkte zu erhalten. Auch wenn die Aufgabe insgesamt schwierig erscheinen sollte – diesen einführenden Teil sollte man immer bearbeiten!

Lösungshinweise zu Teil a) Mit $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ gilt

$$p(x) = 2{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + (2{,}5 + 0{,}5) = 2{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 3.$$

Damit ergeben sich durch Einsetzen der geforderten Argumente jeweils die ganzzahligen Werte: $p(1) = 6$, $p(2) = 14$, $p(3) = 27$ und $p(11) = 311$.

Teil b) Aus den beiden Bedingungen ergibt sich (indem wir die Argumente 0 bzw. –1 einsetzen), dass sowohl $a + b = p(0)$ als auch $2 \cdot a = p(-1)$ ganze Zahlen sind.

Ist a selbst eine ganze Zahl, so ist wegen der ersten Bedingung auch b eine ganze Zahl und die Behauptung folgt unmittelbar.

Ist a keine ganze Zahl, so können wir eine ganze Zahl a' mit $a = a' + ½$ wählen. Werten wir noch einmal die erste Bedingung aus, so gibt es auch eine ganze Zahl b' mit $b = b' - ½$. In diesem Fall gilt

$$p(x) = a' \cdot x^2 + b' \cdot x + (a' + b') + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x).$$

Für eine ganze Zahl x ist aber $a' \cdot x^2 + b' \cdot x + (a' + b')$ eine ganze Zahl. Zudem ist $x^2 - x = x \cdot (x - 1)$ eine gerade ganze Zahl, also ist auch der letzte Summand von $p(x)$ eine ganze Zahl und die Behauptung folgt auch hier unmittelbar. ❑

Aufgabe 5. Man bestimme alle quadratischen Funktionen $f(x) = x^2 - px + q$ mit Primzahlen *p* und *q*, die eine Primzahl als Nullstelle haben.

Lösungshinweise: Sind x_1 und x_2 die Nullstellen von *f*(*x*), so gilt nach dem Wurzelsatz von VIETA $x_1 \cdot x_2 = q$. Somit erhalten wir unmittelbar $x_1 = q$ und $x_2 = 1$. Also finden wir wegen $x_1 + x_2 = p$ die Gleichung $q + 1 = p$. Diese ist aber nur für $q = 2$ und $p = 3$ erfüllbar. ❑

Hinweis: Diese Aufgabenstellung lässt sich auf Polynome $P(x) = x^n - px + q$ mit natürlichen Zahlen $n > 0$ verallgemeinern.

Vollkommene, befreundete und gesellige Zahlen [5]

Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. So finden wir, dass 6 eine vollkommene Zahl ist, denn die Summe ihrer Teiler 1, 2 und 3 ergibt gerade 6. Die nächste vollkommene Zahl ist 28, weil für die Summe ihrer Teiler 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 gilt.

Auf der Suche nach vollkommenen Zahlen können wir zunächst einige Spezialfälle analysieren. Offensichtlich ist keine Primzahl *p* vollkommen, da sie nur den echten Teiler $1 < p$ besitzt. Wir betrachten deshalb nun eine Zahl *n* als das Produkt zweier verschiedener Primzahlen *a* und *b*, also $n = a \cdot b$. Wäre *n* vollkommen, so müsste gelten $1 + a + b = a \cdot b$. Daraus folgt

$$2 = a \cdot b - a - b + 1 = (a - 1) \cdot (b - 1).$$

Diese Gleichung kann aber nur erfüllt werden, wenn $a = 2$ und $b = 3$ (oder $a = 3$ und $b = 2$) gilt. In diesem Fall erhalten wir die erste vollkommene Zahl $n = 6$.

Betrachten wir nun eine natürliche Zahl *n*, die das Produkt von drei verschiedenen Primzahlen *a*, *b* und *c* ist, also $n = a \cdot b \cdot c$. „Vollkommene Zahl“ bedeutet dafür

$$1 + a + b + c + ab + bc + ca = abc$$

bzw.

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$$

Wählen wir $a \geq 3$, dann gilt o.B.d.A. $b \geq 5$ und $c \geq 7$. Daraus folgt unmittelbar die Abschätzung

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \leq \frac{1}{105} + \frac{1}{35} + \frac{1}{21} + \frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{87}{105} < 1,$$

[5] vgl. Gardner, M.: Mathematische Hexereien, Weltbild Verlag Augsburg, 1990.

also kann *n* nicht vollkommen sein. Ist dagegen $a = 2$, so vereinfacht sich die Eigenschaft der vollkommenen Zahl zu

$$3 + b + c + 2 \cdot (b + c) + b \cdot c = 2 \cdot b \cdot c$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu $(b - 3) \cdot (c - 3) = 12$. Leicht finden wir durch systematisches Probieren für die Faktorenzerlegung für 12, dass es dafür keine Lösungen in Primzahlen *b* und *c* gibt. Folglich kann eine vollkommene Zahl nicht das Produkt von drei Primzahlen sein.

Wir untersuchen nun einen weiteren Spezialfall, nämlich $n = 2^{k-1} \cdot p$ mit einer natürlichen Zahl $k > 1$ und einer Primzahl *p*. Die Summe *S*(*n*) der echten Teiler von *n* ergibt sich zu

$$S(n) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + p + 2 \cdot p + 2^2 \cdot p + \ldots + 2^{k-2} \cdot p$$

Die Summe der Potenzen von 2 lässt sich vereinfachen und wir erhalten

$$S(n) = 2^k - 1 + (2^{k-1} - 1) \cdot p$$

Wenn nun $S(n) = 2^{k-1} \cdot p$ gelten soll, so finden wir für *p* die notwendige Bedingung $p = 2^k - 1$. (Solche Primzahlen werden nach dem Franzosen MARIN MERSENNE (1588 bis 1648) *Mersennesche Zahlen* genannt.)

Die vollkommene Zahl $28 = 4 \cdot 7 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$ ist eine Zahl mit dieser Struktur. Man kann sogar beweisen, dass eine Zahl *n* genau dann vollkommen ist, wenn es eine natürliche Zahl *k* gibt, so dass $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ gilt und $2^k - 1$ Primzahl ist. Als nächste vollkommene Zahl finden wir auf diese Weise 496.

Seien $1 \leq t_1, t_2, \ldots, t_k \leq n$ alle Teiler der Zahl *n* einschließlich 1 und der Zahl *n* selbst. Dann lässt sich die Eigenschaft der vollkommenen Zahlen so formulieren: Eine Zahl *n* ist genau dann vollkommen, wenn die Summe der Reziproken ihrer Teiler 2 beträgt (warum?). Daraus ergibt sich die Fragestellung: Kann die Summe der Reziproken der Teiler einer Zahl auch größer als 2 werden?

Es sei $S^*(n)$ die Summe der Reziproken aller Teiler einer Zahl *n*. Für eine Primzahl *p* ist $S^*(p) = 1 + \frac{1}{p}$ viel kleiner als 2. Aber schnell finden wir Beispiele wie $S^*(24) = 3$. Wir vermuten, dass sich für Fakultätszahlen *n*! recht große Werte für $S^*(n!)$ ergeben, denn es gilt:

$$S^*(n!) > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Tatsächlich kann die Summe der rechten Seite (die als harmonische Reihe bekannt ist) sehr groß werden. Untersuchen wir die Reihe für $n = 2^k$, so gilt folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{\geq 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}}\geq 1+\frac{k}{2}.$$

Wir müssen also nur k groß genug wählen, um ein sehr großes $S^*(n!)$ mit $n = 2^k$ zu erhalten. Aber um auf diese Weise mit Sicherheit einen Wert für S^* von mindestens 5 zu finden, würden wir $k = 8$ und folglich $n = 2^8 = 256$ wählen müssen. Dann ist die Summe der Reziproken aller Teiler von 256! größer als 5.

Wenn S^* sehr groß werden kann, dann kann auch die Summe der (echten) Teiler einer Zahl n größer als die Zahl n werden (warum?). Doch was kann passieren, wenn wir von einer beliebigen Zahl die Summe der (echten) Teiler bilden, von diesem Summenwert wieder die Summe seiner (echten) Teiler usw.? Beginnen wir beispielsweise mit der Zahl 220, so finden wir

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$
und $$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Die Summe der Teiler einer dieser Zahlen ist genau die andere dieser Zahlen – solche Zahlen heißen *befreundet*. Auch 1.184 und 1.210 sind befreundet, ebenso 2.620 und 2.924. Es gibt 13 Paare von befreundeten Zahlen kleiner als 100.000. Es wird vermutet, dass es unendlich viele befreundete Zahlen gibt. Das kleinste Beispiel befreundeter Zahlen $(220; 284)$ ist schon lange bekannt, aber erst 1636 fand PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) ein weiteres Paar befreundeter Zahlen $(17296; 18416)$. Auf der Suche nach weiteren Paaren wurden schnell große Zahlen gefunden, so etwa von RENÉ DESCARTES (1596 bis 1650) das Zahlenpaar $(9363584; 9437056)$. Erstaunlich, dass dabei das zweitkleinste Paar $(1184; 1210)$ lange Zeit „übersehen“ und erst 1867 durch den sechzehnjährigen NICOLÒ PAGANINI (nicht zu verwechseln mit dem bekannten Violinvirtuosen!) angegeben wurde. Derartige Überraschungen dürften heute allerdings versagt bleiben!

Beginnen wir diesen Prozess mit 12496, so finden wir nacheinander 14288, 15472, 14536, 14264 und dann wieder 12496. Solche Zahlen heißen *gesellig*, und zwar in diesem Fall der Ordnung 5. Es gibt gesellige Zahlen der Ordnung 4 (z.B. beginnend mit 1264460) und sogar der Ordnung 28 (z.B. beginnend mit 14316). Man hat aber noch kein Beispiel der Ordnung 3, aber auch keinen Beweis der Nichtexistenz gefunden.

Impressum

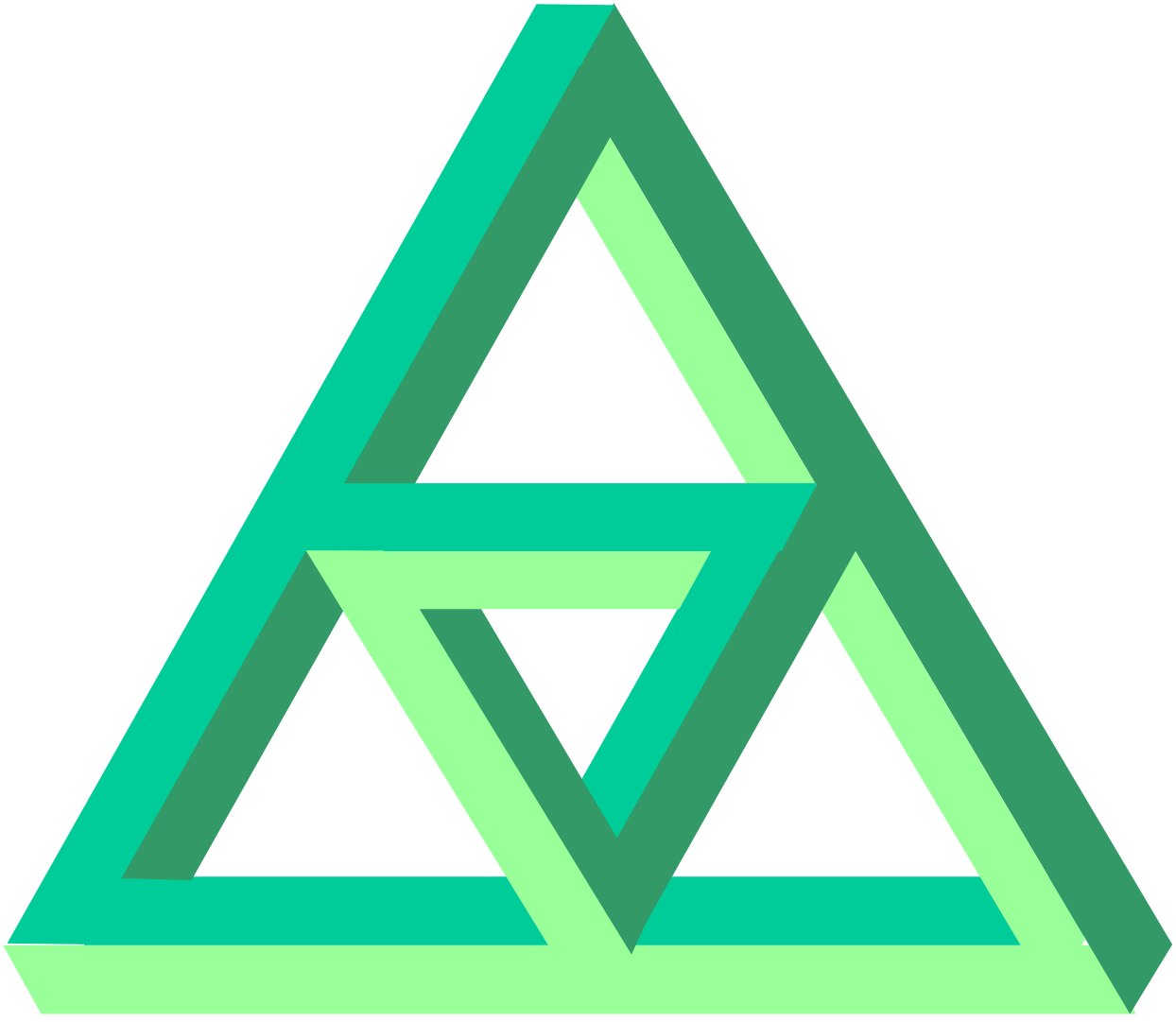
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 7 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 5 /2021 20. Jahrgang

Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9 und 10 – ein persönlicher Rückblick

Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz)

Anfang der 1970er Jahre erlebte der damalige Bezirk Karl-Marx-Stadt einen drastischen Rückgang in der inoffiziellen Bezirkswertung der Mathematik-Olympiade (MO). Die Ursachen waren sicher vielschichtig. Der sich schon länger anbahnende enttäuschende Negativrekord zur 14. MO (1974/75; 13. Platz von 15 Bezirken) forderte dringend eine Neukonzipierung der mathematischen Förderung. Ziel der von Dr. Helmut König geführten Aktivitäten war eine solide Breitenförderung als Grundlage der Spitzenförderung. Unter anderem wurde bereits 1973 ein Bezirkskorrespondenzzirkel Mathematik (KZM) für Schüler der Klassenstufen 7 bis 12 eingeführt. Dies und weitere Maßnahmen zur Förderung mathematisch begabter Schüler bewährten sich. Sie trugen *„zur Befähigung zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können und zur Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen“* bei (König, H.: MU Jahrgang 43, Heft 6/1997, S. 46). Die Anstrengungen zeigten schnell Erfolg – bereits zur 16. MO (1976/77) belegte der Bezirk in der inoffiziellen Bezirkswertung wieder den 1. Platz.

Ich hatte das große Glück, als Schüler die ersten beiden KZM-Jahre selbst erleben zu dürfen. Die Treffen mit meinem Zirkelleiter zur Diskussion meiner Lösungen sind mir gut in Erinnerung geblieben. Hier fand ich nicht nur Bestätigung meiner Lösungsideen oder Hinweise zur Schließung meiner Darstellungslücken, sondern lernte nachhaltig Prinzipien einer erfolgversprechenden Nachbereitung von Wettbewerbs- und KZM-Aufgaben kennen. Als ich 1986 nach meinem Mathematik-Studium und der Assistenzzeit an der Universität Jena in meine Heimatstadt zurückkehrte, übernahm ich die Leitung des KZM der Klassenstufen 9/10.

Das Grundprinzip ist seitdem geblieben. In sieben Serien erhalten die Teilnehmenden im Verlaufe eines Schuljahres jeweils fünf Aufgaben. Die Lösungseinsendungen werden bewertet und kommentiert. Die Rücksendungen enthalten (zunehmend variantenreiche) Lösungshinweise, vertiefende Beiträge zu Lösungsstrategien, anwendungsorientierte Diskussion zu mathematischen Verfahren und Wettbewerbsinformationen (Bundeswettbewerb Mathematik, Jugend forscht, IMO).

Die Materialen zum KZM wurden – zunächst unter inhaltlicher Anleitung von Herrn Dr. König – selbst hergestellt. Wie haben sich die technischen Möglichkeiten in diesen 35 Jahren verändert! Aus den Anfangsjahren bleiben die

sehr händischen Vervielfältigung mittels Ormig-Verfahren[1] unvergessen (ständig blaue Finger!). Auch der Einzug der Computer-Technik lief zunächst holprig (ständig irgendwelche Überraschungen auf dem Bildschirm!). Aus der einst losen Blattsammlung zum KZM ist seit 2001 (in Anlehnung an die Zeitschrift für Mathematik „$\sqrt[\text{Die}]{\text{WURZEL}}$“[2]) eine 24-seitige Broschüre mit jährlich 9 Ausgaben geworden.

Jede Serie folgte einer inhaltlichen Dreiteilung. Für die beiden einführenden Aufgaben wurden keine speziellen Kenntnisse erwartet. *„Eine Turmuhr (mit üblichem Zwölfstundenziffernblatt) zeigt genau 13:00 Uhr an. Wie oft bilden bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten zwölf Stunden einen rechten Winkel?“* (Serie 6 Aufgabe 1 [A6-1], diese und die weiteren Aufgaben stammen aus dem Schuljahr 2017/18). Doch solche Alltagsprobleme stellten eine besondere Herausforderung bzgl. der Lösungsdarstellung dar – die Einsendungen reichten von den Zeichnungen von Zeigerstellungen aller rechtwinkligen Situationen bis zu aufwendigen Gleichungssystemen. Wie soll man ausführlich aufschreiben, was doch eigentlich offensichtlich ist? Wie lässt sich Alltägliches in mathematische Form bringen?

Es folgten stets zwei Aufgaben aus dem Fundus der MO, wobei gern auf längst vergangene Jahrgänge zurückgegriffen wurde, aber auch stets aktuelle Aufgabenstellungen einflossen. *„Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck DEF mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.“* (A1-3, in Anlehnung an Aufgabe MO541023, in der eine solche Konstruktion mit zwei Rechtecken gefordert wurde).

Die fünfte Aufgabe mit drei Teilaufgaben ließ Spielraum für komplexe Themen, z.B. *Nullstellen von Polynomen* (A2-5A), *Methode der vollständigen Induktion*

[1] Ein Matrizendrucker, auch unter dem Begriff *Ormigverfahren* bekannt, ist eine Form der Hektographie, bei der ein recht einfaches Gerät zur Vervielfältigung verwendet wird. Mit dem Matrizendrucker kann man eine begrenzte Anzahl von Abzügen (je nach Qualität der Matrizen bis maximal 250 Exemplare) von einem speziell angefertigten Original – der Matrize – herstellen. Vor dem Druck muss zuerst eine Druckvorlage, die Matrize, auch *Spiritusmatrize* genannt, angefertigt werden. Sie ist ein stärkeres (120–150 g/m²), glattes (gestrichenes) Blatt Papier, das an den druckenden Stellen mit der abzugebenden Farbe beschichtet wird. Dazu legt man das Blatt auf eine spezielle Folie, die ähnlich wie Kohlepapier funktioniert. Allerdings wird der Durchschlag nicht auf ein neues Blatt geschrieben, sondern auf die Rückseite des zu beschreibenden Papieres. Diese Kopie ist somit spiegelverkehrt und dient als Vorlage für den Druck. Die Beschichtung der Folie besteht aus einem speziellen, alkohollöslichen Wachs, und durch den Druck des Schreibens bleibt diese auf der Rückseite des Papiers haften. Die Matrize wird auf eine Trommel gespannt und diese gedreht. Unter der Trommel wird das zu bedruckende saugfähige Papier hindurchgezogen, nachdem es hauchdünn durch einen feinporigen Schwamm mit Spiritus benetzt wurde. Der Alkohol löst winzige Partikel von der Matrize, und das zu bedruckende Papier nimmt diese auf – ein Abzug entsteht.

[2] www.wurzel.org

(A5-5A), oder spezielle Gleichungen wie $n^2 - 16n + 42 = QP(n)$ mit *QP* als Abkürzung für das Querprodukt einer natürlichen Zahl (A7-5B). Mit A und B wurden dabei zwei Wahlaufgaben angeboten – doch für die erfolgreichsten Teilnehmenden waren Lösungseinsendungen zu beiden Aufgaben selbstverständlich, auch wenn da schon mal mehrere Seiten Lösungsdarstellung zusammenkamen.

Eine Besonderheit bildete die dritte Serie (Einsendeschluss Dezember): Alle Aufgaben entstammten dem Bundeswettbewerb Mathematik[3] (BWM), um einen Eindruck zum Schwierigkeitsgrad sowie zum Erwartungsbild zu geben und damit für die Teilnahme an diesem Angebot zu motivieren. In der fünften Serie (Einsendeschluss März) wurden zudem zwei aktuelle Aufgaben des BWM verwendet. Der Hinweis *„… [es] können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden“* verdeutlichte das Anliegen – mit Erfolg: Unter den leider (viel zu!) wenigen Teilnehmern am BWM (1. Runde 2021: 45 von bundesweit 1182, 3.8%) sind im Vergleich zur bundesweiten Gesamtzahl unter den sächsischen Schülern überdurchschnittlich viele aus den Klassenstufen 9 und 10 (1. Runde 2021: bundesweit – 31.0%, Sachsen – 37.8%).

Fester Bestandteil des KZM waren die Seminare, die im Schuljahr viermal samstags angeboten wurden (September, Dezember, März, Juni). Hierbei hatten die Teilnehmenden nicht nur die Möglichkeit, Lösungsvarianten zu diskutieren, Lösungsstrategien zu üben oder Mathematik unterhaltsam zu erleben. Da jedes Mal ein schulferner Seminarort gewählt wurde, gab es interessante Einblicke in Anwendungen von Mathematik. Traditionell begann der Seminarzyklus an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz (TUC), natürlich mit Hinweisen zum Mathematik-Studium im Allgemeinen und an der TUC im Besonderen. Interessante Gastgeber waren beispielsweise auch immer wieder das

- das Vermessungsbüro Wuttke,
- das Sächsische Textilforschungsinstitut oder
- die Leadec Engineering GmbH,

die Einblicke in ihre Tätigkeiten boten Mathematik zum Anfassen. Aber ebenso beliebt waren kulturelle Einrichtungen der Stadt Chemnitz, wobei im Seminarprogramm ein passendes Thema angeboten wurde:

- Deutsches SPIELEmuseum (Führung mit Schwerpunkt Strategiespiele vs. Spiele in Wettbewerbsaufgaben),
- Sächsisches Industriemuseum (Führung mit Schwerpunkt Rechentechnik vs. Aufgaben mit verschiedenen Stellenwertsystemen) oder
- Tierpark Chemnitz (Zuchtprogramme vs. Wachstumsmodelle).

Zu den Gastgebervorstellungen oder Führungen waren die abholenden Eltern ausdrücklich eingeladen. Die Resonanz auf die Seminareinladungen war stets

[3] www.bundeswettbewerb-mathematik.de

erfreulich groß. Es war erstaunlich, welche oft weiten Wege die KZM-Teilnehmenden auf sich nahmen, um knapp vier Stunden Mathematik zu erleben. Schade, dass die Corona-Pandemie diese Angebote nun schon fast zwei Jahre unterbrach!

Der KZM der Klassenstufen 9/10 ordnet sich in das System der landesweiten Aktivitäten ein. Ab Klassenstufe 5 werden in den Regionen Chemnitz, Dresden und Leipzig Schülerinnen und Schüler zum KZM eingeladen. Bereits mit dem LOGO-Korrespondenzzirkel für Grundschüler werden unter dem Motto „Mathe macht Spaß – ist doch LOGO“ die Jüngsten an diese Form der Interessen- und Begabtenförderung herangeführt. Die sachsenweite Ausschreibung ab Klassenstufe 9 erschien ab 1991 angemessen, um entsprechend der Anmeldezahlen (Klassenstufe 9 durchschnittlich 20 bis 50) effizient zu arbeiten.

Auch im Schuljahr 2021/22 wird die Tradition des KZM fortgesetzt. Für die Teilnehmenden bleibt er eine wichtige Form der Wettbewerbsvorbereitung, denn beim Ringen um Punkte in mathematischen Wettbewerben wird die Fähigkeit einer vollständigen Lösungsdarstellung über die Platzierungen entscheiden. Während man die Lösungsfindung in unterschiedlicher Weise trainieren kann, ist für die Lösungsdarstellung das Aufschreiben und die kritische Durchsicht unerlässlich.

Eine kontinuierliche Teilnahme fördert die allgemeinen Eigenschaften wie Zielstrebigkeit und Durchhaltevermögen. Die Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen bestärkt das Interesse für das Fach. Zunehmende Erfolge bei der Lösungsfindung motivieren. Alles gute Gründe für eine Anmeldung – es lohnt, Jugendliche dafür begeistern zu wollen. Anmeldungen sind jederzeit möglich!

Lösungshinweise Serie 7

Aufgabe 7-1.

Gibt es Polyeder mit einer ungeraden Anzahl von Flächen, wobei jede Fläche ein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Seiten ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

Lösungshinweise: Angenommen, es gibt ein derartiges Polyeder. Dann lässt sich die Anzahl der Kanten folgendermaßen bestimmen:

Jede Seitenfläche ist ein Vieleck mit ungerader Seitenzahl. Addieren wir hierzu die Seitenzahl der anderen Seitenflächen so lange, bis alle Seitenflächen genau einmal erfasst sind, erhält man die doppelte Anzahl der Kanten des Polyeders (da jede Seite einer beliebigen Polyederseitenfläche Schnittgerade von genau zwei Seitenflächen ist). Die so berechnete Summe muss folglich das Doppelte der Kantenzahl sein, ist also geradzahlig.

Die so berechnete Summe ist aber andererseits eine Summe aus einer ungeraden Anzahl (Flächenanzahl) jeweils ungerader Zahlen (Anzahl der Seiten je Fläche). Eine solche Summe ist stets ungeradzahlig.

Beide Feststellungen widersprechen sich. Damit ist die Annahme falsch und gleichzeitig bewiesen, dass kein Polyeder existiert, der den Voraussetzungen der Aufgabe entspricht. ❑

Aufgabe 7-2.
Beweisen Sie: Wenn *a* und *b* ganzzahlig sind, dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + 10 \cdot a \cdot x + 5 \cdot b + 3 = 0$$

keine ganzzahlige Lösung.

Lösungshinweise: Wenn die gegebene quadratische Gleichung ganzzahlige Lösungen besitzt, dann sind die Ausdrücke gemäß der Lösungsformel quadratischer Gleichungen

$$x_{1/2} = -5a \pm \sqrt{25a^2 - 5b - 3}$$

ganzzahlig. Weil $-5a$ ganzzahlig ist, muss die Diskriminate (unter dem Wurzelzeichen) das Quadrat einer natürlichen Zahl *n* sein, also

$$25a^2 - 5b - 3 = n^2$$

Formen wir diese Gleichung nach *b* um, erhalten wir

$$b = 5a^2 - \frac{n^2 + 3}{5}$$

Weil auch $5a^2$ ganzzahlig ist, ist *b* ganzzahlig, wenn $n^2 + 3$ durch 5 teilbar ist. Jedoch treten für Quadratzahlen nur die Reste 0, 1 oder 4 bei Division durch 5 auf. Folglich kann $n^2 + 3$ nur die Reste 3, 4 oder 7 ($\equiv 2$) haben, d.h. der Ausdruck ist für keine natürliche Zahl durch 5 teilbar. Somit existieren für die gegebene Gleichung keine ganzzahligen Lösungen, wenn die Koeffizienten a und b ganzzahlig sind. ❑

Aufgabe 7-3.
Ermitteln Sie alle ungeordneten Paare $(x; y)$ aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die Folgendes gilt:

Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von *x* und *y*.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, dass für zwei natürliche Zahlen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ die Bedingungen erfüllt sind. Dann gibt es zwei natürliche Zahlen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{0 < a; b < 10} \quad ; \quad \boldsymbol{\frac{x+y}{2} = 10a + b} \quad ; \quad \boldsymbol{\sqrt{xy} = 10b + a}$$

Formen wir beide Gleichungen um zu

$$(x + y)^2 = 4 \cdot (100a^2 + 20ab + b^2)$$
$$4xy = 4 \cdot (100b^2 + 20ab + a^2)$$

so finden wir nach Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile die Gleichung

$$(x - y)^2 = 4 \cdot 99 \cdot (a^2 - b^2)$$

Offenbar ist der linke Term eine Quadratzahl und somit muss 11 ein Primteiler von $(a + b)(a - b)$, damit die Primzahl 11 in der Primfaktorenzerlegung in gerader Anzahl auftrifft. Außerdem ist $a > b$ (damit die rechte Seite positiv wird) und somit kann wegen $0 < a - b < 9$ die Differenz nicht durch 11 teilbar sein. Damit folgt wegen $(a + b) < 20$, dass $a + b = 11$ gelten muss. Dann muss $a - b$ selbst eine ungerade Quadratzahl kleiner 9 sein, also finden wir $a - b = 1$.

Wenn es eine Lösung gibt, kann dies nur mit $a = 6$ und $b = 5$ möglich sein. Mit diesen Zahlen erhalten wir

$$x + y = 2 \cdot (10a + b) = 130 \text{ und } x - y = \sqrt{4 \cdot 99 \cdot 11} = 66.$$

Daraus finden wir die Lösungen $(x; y)$ mit $(98; 32)$ bzw. $(32; 98)$. Die Probe bestätigt das Ergebnis:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{98+32}{2} = 65 \text{ und } \sqrt{98 \cdot 32} = \sqrt{3136} = 56. \qquad \square$$

Aufgabe 7-4.
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Lösungshinweise: Angenommen, zwei natürliche Zahlen a und b seien die gesuchten Zahlen. Dann gibt es vier ganze Zahlen x, y, z, v mit

$$\begin{array}{ccccccc} 41 & + & a & + & b & = & x^2 \\ 41 & + & a & & & = & y^2 \\ 41 & + & & & b & = & z^2 \\ & & a & + & b & = & v^2 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zum folgenden Gleichungssystem:

(1)	41	+	a	+	b	=	x^2
(2)					b	=	$x^2 - y^2$
(3)			a			=	$x^2 - z^2$
(4)	41					=	$x^2 - v^2$

Aus (4) folgt unmittelbar $41 = (x - v) \cdot (x + v)$ und aufgrund der Primzahleigenschaft von 41 erhalten wir $x = 21$ und $v = 20$. Damit reduziert sich das obige Gleichungssystem zu

(1´)	a	+	b	=	400	
(2´)			b	=	$441 - y^2$	
(3´)	a			=	$441 - z^2$	

Daraus finden wir die Gleichung $y^2 + z^2 = 482$. Offenbar gilt $y \neq z$ (weil 482 : 2 = 241 keine Quadratzahl ist), deshalb können wir o.B.d.A. $y > z$ annehmen.

Wegen $482 < 22^2$ können y und z höchstens 21 sein. Außerdem muss mindestens eine der Zahlen y oder z größer als 15 sein, weil die Abschätzung $2 \cdot 15^2 = 450 < 482$ gilt. Weiterhin erkennen wir, dass beide Zahlen ungeradzahlig sind. Wäre nämlich eine Zahl geradzahlig, so wäre deren Quadrat durch 4 teilbar und das Quadrat der anderen Zahl ließe bei Division durch 4 den Rest 2. Dies ist bekanntlich nicht möglich. Wären aber beide Zahlen geradzahlig, dann wäre die Summe ihrer Quadrate durch 4 teilbar, im Widerspruch zu 482.

Folglich können nur $y = 17$ oder $y = 19$ Lösungen sein. Für $y^2 = 289$ folgt $z^2 = 173$. In diesem Fall ist z jedoch keine natürliche Zahl. Für $y^2 = 361$ folgt $z^2 = 121$. Wir erhalten also $z = 11$.

Wenn es ein Zahlenpaar mit den geforderten Eigenschaften gibt, muss wegen (1´) $a = 441 - 121 = 320$ und (2´) $b = 441 - 361 = 80$ gelten. Die Probe bestätigt, dass das Tripel $(320, 80, 41)$ alle Bedingungen erfüllt. ❑

Hinweis: Aufgrund der Aufgabenstellung besitzt die Reihenfolge der drei Zahlen keine Bedeutung.

Aufgabe 7-5A

(a) Wenn die Summe zweier Quadratzahlen natürlicher Zahlen ein Vielfaches von 7 ist, so ist jede der Zahlen selbst durch 7 teilbar.

(b) Untersuchen Sie, ob es ein Zahlentrupel $(w; x; y; z)$ natürlicher Zahlen $(w > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 5 \cdot (y^2 + z^2).$$

(c) Beweisen Sie, dass es kein Zahlentrupel $(w; x; y; z)$ natürlicher Zahlen $(w > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 7 \cdot (y^2 + z^2).$$

Lösungshinweise: (a) Wir untersuchen die Reste, die bei einer Quadratzahl einer natürlichen Zahl x bei Division durch 7 möglich sind:

Rest bei Division durch 7							
x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Betrachten wir nun die Summe von zwei Quadratzahlen, so sind nur folgende Reste möglich:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 2 = 4, 0 + 4 = 4$$
$$1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 4 = 5$$
$$2 + 2 = 4, 2 + 4 = 6$$
$$4 + 4 = 8 \equiv 1$$

Nur wenn beide Zahlen jeweils ein Vielfaches von 7 sind, ergibt die Summe ihrer Quadratzahlen ein Vielfaches von 7. ❑

(b) Für diese Aufgabenstellung genügt es, ein geeignetes Quadrupel anzugeben, so beispielsweise $(4, 3, 1, 2)$, denn

$$w^2 + x^2 = 9 + 16 = 25 = 5 \cdot (1 + 4) = 5 \cdot (y^2 + z^2).$$

Es wird bei einer solchen Aufgabenstellung keine Herleitung verlangt. Ein systematisches Probieren (in Hausarbeit auch mit Computer) ist ausdrücklich erlaubt. Probieren wir zum Beispiel für z, y, x die natürlichen Zahlen in aufsteigender Folge und prüfen bei jedem Schritt, ob

$$w^2 = 5 \cdot (y^2 + z^2) - x^2$$

für eine natürliche Zahl erfüllt ist, werden wir gleich bei $z = y = x = 1$ fündig, denn

$$w^2 = 5 \cdot (1 + 1) - 1 = 9$$

wird für $w = 3$ erfüllt. Aber auch das oben genannte Quadrupel würden wir mit der systematischen Suche ohne viel Rechenaufwand finden, wenn wir uns nicht gleich mit dem trivialen Quadrupel zufriedengeben (was aber im Sinne der Aufgabenstellung akzeptabel wäre).

Das Quadrupel $(4, 3, 1, 2)$ erinnert mit den beiden ersten Zahlen $(4, 3)$ an das pythagoreische Tripel $(4, 3, 5)$, zumal der dritte Wert ein Vielfaches von 5 ist. Ohne Probleme erkennen wir, dass wir mit (1, 2) wegen $1^2 + 2^2 = 5$ ergänzen können.

Natürlich könnten wir auch auf der rechten Seite mit pythagoreischen Zahlen beginnen, z.B. mit (w, x, a, b), wobei $a^2 + b^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl c ist. Da wir $1^2 + 2^2 = 5$ bereits kennen, müssen wir nur $w = c \cdot 1$ und $x = c \cdot 2$

mit $c^2 = a^2 + b^2$ setzen, um ein Quadrupel der geforderten Art zu erhalten. Folglich ist $(5, 10, 3, 4)$ ein geeignetes Quadrupel. Die Probe bestätigt:

$$5^2 + 10^2 = 125 \; = \; 525 = 5(3^2 + 4^2)$$

(c) Es gibt kein Quadrupel der geforderten Art. Hätten wir vier geeignete Zahlen gefunden, wäre die Summe der Quadratzahlen auf der linken Seite durch 7 teilbar, und – wegen a) – sowohl w als auch x durch 7 teilbar. Dann wäre aber die linke Seite sogar durch 49 teilbar. Folglich müsste die Summe der Quadratzahlen auf der rechten Seite auch durch 7 teilbar. Wieder wegen a) ist diese Summe dann sogar durch 49 teilbar. Damit sind aber auf der rechten Seite eine ungerade Anzahl des Primfaktors 7. Den damit verbundenen Widerspruch erkennen wir am besten mit dem Extremalprinzip:

Angenommen, es gibt Quadrupel der geforderten Art. Dann wählen wir eines mit der kleinsten Summe $w^2 + x^2$. Aus $w^2 + x^2 = 7(y^2 + z^2)$ folgt, dass die linke Seite der Gleichung durch 7 teilbar ist. Wegen a) sind damit sowohl w als auch x durch 7 teilbar, sodass die linke Seite sogar durch 49 teilbar ist. Dann ist aber auch $y^2 + z^2$ durch 7 teilbar und – wieder wegen a) – sind sowohl y als auch z durch 7 teilbar. Also finden wir natürliche Zahlen w', x', y', z' mit

$$(7w')^2 + (7x')^2 = 7((7y')^2 + (7z')^2.$$

Das Quadrupel (w´, x´, y´, z´) erfüllt aber ebenfalls die geforderte Gleichung. Jedoch ist $w'^2 + x'^2 < w^2 + x^2$ im Widerspruch zur Annahme, dass $w^2 + x^2$ die kleinste Summe wäre. ❑

Aufgabe 7-5B. In der Ebene sei $P_1P_2P_3P_4$ ein beliebiges Viereck E. Zu untersuchen ist folgende Aussage:

> Sind Q_1, Q_2 ,Q_3 und Q_4 vier Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von E liegen, so dass $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ein zu E kongruentes Viereck ist, so ist jeder Punkt Q_k $(k \; = \; 1, 2, 3, 4)$ ein Eckpunkt von E.

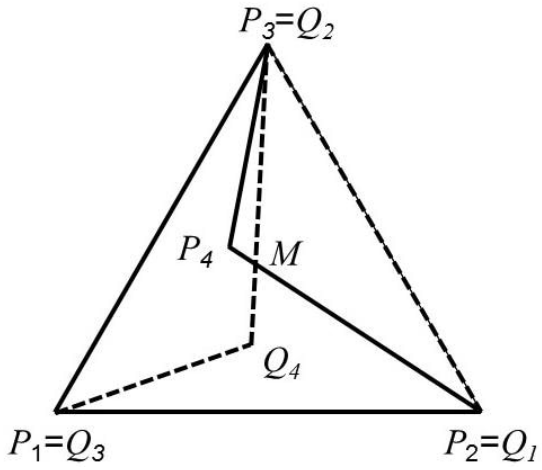
(a) Gibt es nichtkonvexe Vierecke E, für die die genannte Aussage falsch ist?

(b) Ist diese Aussage für alle nichtkonvexen Vierecke E falsch?

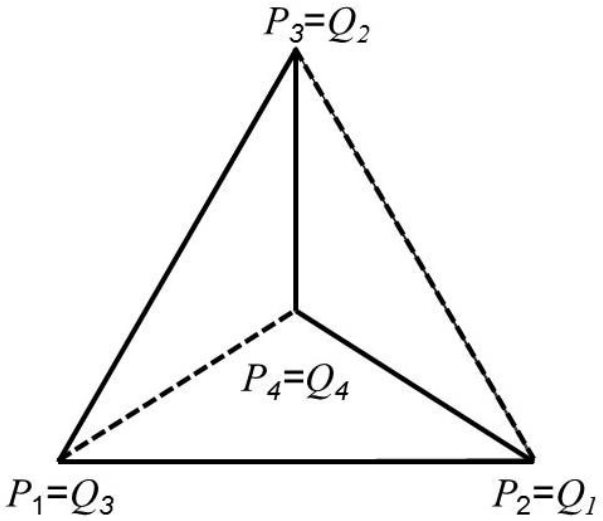
(c) Beweisen Sie, dass die Aussage für alle konvexen Vierecke wahr ist!

Hinweise: Ein Viereck E heißt konvex, wenn für zwei beliebige Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von E liegen, auch alle Punkte der geradlinigen Verbindungslinie dieser beiden Punkt im Innern oder auf dem Rand von E liegen.

Lösungshinweise: (a) Um die Frage vollständig zu beantworten, genügt ein Beispiel: Es seien P_1, P_2 und P_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks D. Ferner sei M sein Schwerpunkt und der Punkt P_4 liege auf der Verlängerung der Strecke $\overline{P_2M}$ über M hinaus, aber noch im Innern von D. Drehen wir nun das Dreieck D, sodass P_1 in $Q_1 = P_2$ überführt wird, gehen P_2 und P_3 in $Q_2 = P_3$ und $Q_3 = P_1$ über. Der Punkt P_4 liegt dann auf der Verlängerung der Strecke $\overline{P_3M}$ über M hinaus, aber ebenfalls im Innern von D. Offenbar sind $P_1P_2P_3P_4$ und $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kongruente Figuren, aber die Eckpunkte liegen nicht alle übereinander, da Q_4 verschieden von P_4 ist.

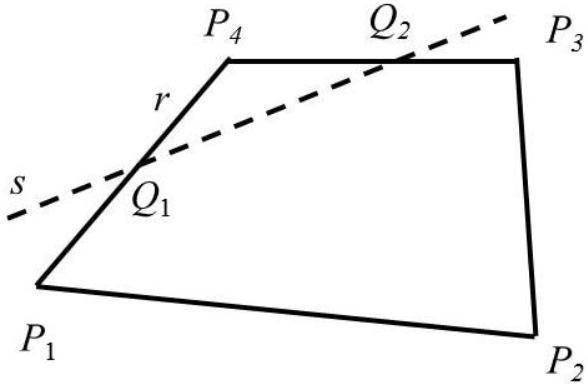


(b) Um die Frage vollständig zu beantworten, genügt ein Gegenbeispiel: Es seien P_1, P_2 und P_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks D. Ferner sei P_4 sein Schwerpunkt. Drehen wir nun das Dreieck D, sodass P_1 in $Q_1 = P_2$ überführt wird, gehen P_2 und P_3 in $Q_2 = P_3$ und $Q_3 = P_1$ über. Der Punkt P_4 bleibt unverändert und fällt mit $Q_4 = P_4$ zusammen. Offenbar sind $P_1P_2P_3P_4$ und $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kongruente Figuren und die Eckpunkte liegen (bei geeigneter Bezeichnung) alle übereinander.



(c) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt, o.B.d.A. sei dies Q_1, der nicht Eckpunkt des Vierecks E ist. Wir zeigen, dass es dann eine Seite des Vierecks mit den Eckpunkten $Q_1Q_2Q_3Q_4$ gibt, die innere Punkte von E enthält (#).

Liegt Q_1 im Innern von E, so ist die Behauptung (#) offenbar richtig. Liegt Q_1 auf dem Rand von E (also wegen der Annahme im Inneren einer Seite r von E) so liegt mindestens einer der Punkte Q_2, Q_3, Q_4 nicht auf r, da sonst $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kein Viereck wäre.



Wir können also die Bezeichnung der Punkte Q so vornehmen, dass Q_1 und Q_2 zwei benachbarte Punkte sind, die nicht beide auf der Seite r liegen. Liegt Q_2 im

Innern von E, so ist die Behauptung (#) offenbar richtig. Liegt dagegen Q_2 auf einer von r verschiedenen Seite von E, so ist Q_1Q_2 die Verbindungslinie zweier Randpunkte von E, die längs des Randes von E nicht geradlinig verbunden sind. Damit gehört jeder innere Punkt von Q_1Q_2 zum Innern von E.

Mit diesem Nachweis haben wir gezeigt: Die Gerade s durch Q_1 und Q_2 zerlegt E in zwei Vielecke mit jeweils positiven Flächeninhalten. Wegen der Konvexität von $Q_1Q_2Q_3Q_4$ liegt dieses Viereck ganz auf einer Seite von s. Da alle Eckpunkte im Innern oder auf dem Rand von E liegen, ist der Flächeninhalt (um den Inhalt der Fläche auf der anderen Seite von s) kleiner als der Flächeninhalt von E. Die beiden Vierecke können also nicht kongruent sein. Daher ist die Annahme falsch und alle Eckpunkte $Q_1Q_2Q_3Q_4$ sind auch Eckpunkte von E. ❑

Nachträge zu den Lösungsdiskussionen zur Serie 6

Aufgaben wie **A6-1** lassen sich durch systematisches Probieren lösen. Wir müssten lediglich in der Gleichung $a^2+2ab+b^2=100a+b$ nacheinander die zweistelligen Zahlen a = 10, 11, ..., 99 einsetzen und prüfen, ob sich eine ganze Zahl b mit $0\le b\le 99$ ergibt. Ohne Verwendung von rechentechnischen Hilfsmitteln ist dies zumindest aufwändig und nicht elegant. Ähnliche Fragestellungen lassen sich ableiten: Gibt es Lösungen zu

$$100a+b=(a-b)^2$$

$$100a+b=a^2+b^2 \qquad 100a+b=a^2-b^2 \qquad 100a+b=b^2-a^2$$

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, sollte zunächst die mögliche Lösungsmenge eingegrenzt werden.

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise: Laut Aufgabenstellung sind einstellige Zahlen a und b zu suchen, die die Gleichung $10a+b=a^2+b^2$ erfüllen. Natürlich ist es kein Problem, für die zehn Fälle a = 0, 1, ..., 9 auszuprobieren, ob es eine passende ganze Zahl b gibt. Doch zunächst soll die Zahl der Fälle reduziert werden:

Die Ausgangsgleichung ist äquivalent zu

$$a\cdot(10-a)=b\cdot(b-1)$$

Die rechte Seite ist als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen stets geradzahlig. Da a und 10 – a bzgl. Division durch 2 den gleichen Rest lassen, muss a ebenfalls geradzahlig sein. Die Anzahl der zu probierenden Fälle hat sich damit bereits halbiert. Für a = 8 (oder a = 2) ist die linke Seite durch 16 teilbar – im Widerspruch zur rechten Seite, die nicht durch 16 teilbar sein kann.

Folglich verbleiben die Fälle a = 0, 4, 6, doch nur a = 0 führt zu den trivialen Lösungen 01 bzw. 00. ❑

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen der Form $10 \cdot a + b$ mit einstelligen Zahlen a und b, die die Bedingung $10a + b = b^2 - a^2$ erfüllen.

Lösungshinweise: In ähnlicher Weise wie oben lässt sich die Ausgangsgleichung umformen zu

$$a \cdot (10 + a) = b \cdot (b - 1)$$

Wieder muss a geradzahlig sein. Weiter wissen wir, dass die rechte Seite für einstelligen Zahlen b nicht größer als $9 \cdot 8 = 72$ sein kann. Damit kann a nicht größer als 5 sein. Folglich müssen wir nur die Zahlen a = 0, 2, 4 probieren. Außer den trivialen Lösungen 00 und 01 finden wir noch die Lösung 48, denn es gilt $8^2 – 4^2 = 64 – 16 = 48$. ❑

Die Fallreduzierung gelingt oft durch Faktorisierung mit anschließender Diskussion der zulässigen Teiler. So auch bei der

Aufgabe MO520941(a). Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen z, die größer als ihre Spiegelzahl u sind und für die $z^2 – u^2$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungshinweise: Setzen wir $z = 10a + b$ mit den Ziffern a und b, so sind also die Zahlen z gesucht, für die es eine ganze Zahl k gibt mit

$$\begin{aligned} k^2 &= (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = (10a + b - 10b - a)(10a + b + 10b + a) \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung eine Quadratzahl wird, muss 11 ein Teiler von $a + b$ sein und folglich gilt $a + b$ = 11. Damit ist die Lösungsmenge schon so stark eingeschränkt, dass nun ein systematisches Probieren praktikabel erscheint. (Lösung: z = 65) ❑

Auch die Suche nach allen zweistelligen Zahlen, deren Quadrat gleich der 3. Potenz ihrer Quersumme ist, kann durch eine Vorüberlegung drastisch eingeschränkt werden. Sind wieder a und b die Ziffern der Zahl, so soll also gelten: $(10a + b)^2 = (a + b)^3$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{10a + b}{a + b} \right)^2 = a + b.$$

Also muss die Quersumme eine Quadratzahl sein, und dafür kommen für zweistellige Zahlen nur 1, 4, 9 oder 16 in Frage. Dann ist aber $(10a + b)^2$ eine der Zahlen 1, 4^3, 9^3 bzw. 16^3 und damit genügt es, die Fragestellung für die Zahlen 1, 2^3, 3^3 und 4^3 zu prüfen. Nur 27 ist Lösung, wie eine Probe bestätigt. ❑

Rückblick auf Olympiade-Aufgaben

Aufgabe MO540934. Gegeben sind drei positive Zahlen *g, b* und *f*, für die

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

gilt.

(a) Geben Sie zwei Beispiele für je drei positive ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft an.
(b) Beweisen Sie, dass für positive reelle Zahlen *g*, *b* und *f*, die diese Gleichung erfüllen, stets auch $g+b\geq 4f$ gilt.

Lösungshinweise: Es ist nicht schwierig, Beispiele für die angegebene Gleichung zu finden, so z.B. (2; 2; 1) oder (6; 3; 2).

Für Teil b) formen wir die Gleichung um zu

$$f=\frac{gb}{g+b}.$$

Weil *g* und *b* positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zu $(g+b)^2\geq 4gb$. Dies wiederum ist gleichbedeutend zu $(g-b)^2\geq 0$, was für alle reelle Zahlen *g* und *b* erfüllt ist. ❑

Aufgabe MO561024. Gegeben sind zwei positive rationale Zahlen *a* und *b* mit *a* + *b* = 2. In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{3+a}+\frac{2}{3+b}$$

untersucht werden.

(a) Gibt es positive rationale Zahlen a und b, für welche die Werte der linken und der rechten Seite der Ungleichung gleich sind?
(b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung?

Lösungshinweise: Für *a* = *b* = 1 finden wir eine Antwort auf den Teil a). Um die Ungleichung zu beweisen, formen wir äquivalent um (unter Beachtung, dass die Nenner jeweils positive Zahlen sind), bis wir die Ungleichung

$$(3+a)\cdot(3+b)\geq 4\cdot(1+a)\cdot(1+b)$$

erhalten. Nun gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, den Beweis abzuschließen.

(1) Wir ersetzen $a+b=2$ die Variable b durch $2-a$ und erhalten die quadratische Ungleichung $3a^2-6a+3=3\cdot(a-1)^2\geq 0$. Diese ist für alle rationalen Zahlen *a* erfüllt.

(2) Wir gehen von einem Zahlenpaar aus, für das die Gleichheit gilt und schreiben $a = 1 + m$ und $b = 1 – m$ mit einer beliebigen rationalen Zahl *m*. Offenbar gilt weiterhin $a + b = 1 + m + 1 – m = 2$. Damit vereinfacht sich die Ungleichung zu $3\cdot m^2\geq 0$. Dies ist für alle rationalen Zahlen *m* erfüllt. ❑

Hinweis: In der Musterlösung wird ausdrücklich erwähnt, dass die Einschränkung auf rationale Zahlen nur vorgenommen wurde, um nicht dem Schulstoff vorzugreifen. Selbstverständlich gilt diese Ungleichung auch für positive reelle Zahlen.

Diese beiden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade motivieren einmal mehr, sich mit Ungleichungen zu beschäftigen.

Ungleichungen

Der Nachweis von Ungleichungen in mathematischen Wettbewerben wird in den Musterlösungen häufig durch trickreiche Herleitungen geführt.

Aufgabe 381043. Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets größer oder gleich 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen *x*, *y* und *z* stets

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2\geq 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2+y^2+z^2-10\cdot(x+y+z)+75\geq 0$$

Setzen wir nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Dieser Lösungsansatz setzt voraus, dass man die Struktur der Ungleichung „durchschaut“ hat und das Lösungstripel, dass die Gleichheit erzeugt, errät.

Lösungsvariante: Gehen wir von der Gültigkeit der Abschätzung $(a + b)^2 \geq 2ab$ für beliebige reelle Zahlen aus, finden wir zunächst

(1) $$2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\cdot(xy+yz+xz).$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + yz + xz) = 225.$$

Die Addition von (1) und (2) führt zur Behauptung. ❑

Gewusst wie – wenn wir solche Beispiele kennen, können wir derartige Lösungswege finden. Diskutiert werden sollen hier aber Aufgabenbeispiele, für die allgemeinere Lösungsansätze versucht werden können.

Eine häufig einsetzbare Methode für den Beweis von Ungleichungen ist das ***Folgern aus der Behauptung***: Wir formen die zu beweisende Ungleichung solange um, bis die Gültigkeit der entstehenden Ausdrücke aufgrund bekannter Sachverhalte leicht zu erläutern ist. Hierbei ist auf die ausdrücklichen Hinweise zur Äquivalenz der Umformungen zu achten. Besser ist es deshalb, den eben beschriebenen Weg zur Lösungsfindung als Konzept aufzufassen und in der Lösungsdarstellung von den offensichtlichen Sachverhalten ausgehend die Behauptung herzuleiten. Beispiel:

Aufgabe. Man zeige für alle reellen Zahlen *a, b, c* die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0 .$$

Die Lösungsfindung gelingt nach Multiplikation mit 2 und „geschicktem Gruppieren“:

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = \\ &\quad a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = \\ &\quad (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Umformung ist offensichtlich, weil die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind. Die verwendeten Umformungen sind äquivalent, also sind die Schritte auch umkehrbar, so dass wir die Lösungsdarstellung vorteilhaft mit der letzten Zeile beginnen: Für reelle Zahlen *a, b, c* gilt stets $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$. Durch Ausmultiplizieren der Quadrate, Zusammenfassen gleicher Summanden und Division durch 2 gelangen wir zur behaupteten Ungleichung, wodurch diese bewiesen ist. ❑

Lassen sich Sonderfälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt, leicht angeben, können wir darauf eine erfolgsversprechende ***Substitution*** anwenden: Offensichtlich gilt für $a = b = c$ das Gleichheitszeichen. Betrachten wir den Fall $a \neq b = c$, so lautet die zu beweisende Ungleichung

$$a^2 + 2 \cdot b^2 - 2 \cdot ab - b^2 \geq 0 .$$

Jetzt wird $a^2 - 2 \cdot ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$ offensichtlich und vielleicht gelingt es damit, den Lösungsansatz von oben zu vermuten.

Von besonderem Interesse sind die Situationen, die von dieser Gleichheit abweichen. Es seien deshalb x und y reelle Zahlen mit $b = a + x$ und $c = a + y$. Substituieren wir nun damit b und c in der behaupteten Ungleichung, so finden wir

$$a^2 + (a+x)^2 + (a+y)^2 - a(a+x) - a(a+y) - (a+x)(a+y) = x^2 + y^2 - xy$$

Aus der Aufgabenstellung mit drei Variablen wurde ein zweidimensionales Problem! Wenn nachgewiesen wird, dass die rechte Seite für alle reellen x und y nichtnegativ ist, wäre auch das ursprüngliche Problem gelöst. Es gilt wirklich:

$$x^2 + y^2 - xy \geq x^2 + y^2 - 2 \cdot |xy| = \left(|x| - |y|\right)^2 \geq 0 .$$

Ungleichungen mit quadratischen Termen lassen sich oftmals sogar auf ein eindimensionales Problem zurückführen, wenn wir den Ausdruck als Funktion einer der Variablen auffassen, beispielsweise

$$f(a) = a^2 - a \cdot (b+c) + b^2 + c^2 - bc$$

Um die Lösungen dieser quadratischen Funktion zu analysieren, betrachten wir deren Diskriminante $D = -3(b-c)^2$. Ist b von c verschieden, so ist die Diskriminante negativ und es gibt folglich keine Nullstellen. Da aber für große a der Funktionswert $f(a)$ positiv ist, gilt also für alle a: $f(a) > 0$. Ist dagegen $b = c$, so finden wir genau eine Nullstelle und es gilt folglich für alle a: $f(a) \geq 0$. Insgesamt ist die Ungleichung damit bewiesen. ❑

Für Wettbewerbsaufgaben werden solche Beweise interessanter, wenn wir ***bekannte Ungleichungen*** anwenden können. So ist die Aufgabe

MO450922/451022 für positive a und b äquivalent zu

$$4 \leq \left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 .$$

Für positive reelle Zahlen x kann die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, womit die behauptete Ungleichung für positive a und b bereits bewiesen ist. Um diese Hilfsaussage zu beweisen, genügt deren Multiplikation mit x, um ein vollständiges Quadrat zu erkennen. Gleichwertig dazu können wir auch die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel anwenden: Für alle positiven reellen Zahlen x gilt

$$\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2} .$$

Eine Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes führt zu folgender Aussage:

$$2^n \le \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_1}\right)$$

Eine andere Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes liefert folgender Aussage:

Aufgabe. Man beweise: Für positive Zahlen *a*, *b* und *c* gilt stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$.

Lösungshinweise: Für $a = b = c$ ist nicht zu beweisen und für $b = c$ ergibt sich gerade der Hilfssatz für $x = \frac{a}{b}$. Der allgemeine Fall führt zu der Behauptung:

$$3 \le \frac{a^2b + b^2c + ac^2}{abc}.$$

Mit Hilfe der Mittelungleichung erweist sich diese Ungleichung als einfache Folgerung:

$$abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \le \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \qquad \square$$

Natürlich hätten wir auch gleich die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel auf die Ungleichung anwenden können:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \le \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3}$$

Nun sollte es nicht schwerfallen, diese Ungleichung auf mehr als 3 Summanden zu erweitern, d.h. es gilt auch für positive reelle Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* bzw. $a_1, a_2, \ldots a_n$ ($n > 1$)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \ge 4; \qquad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \ge n$$

Diese Aufgaben bestätigen wieder einmal, dass die intensive Nachbereitung von Aufgaben vergangener Olympiaden hilfreich ist. Denn wer sich die Lösungsmethode erarbeitet hat, wird mit folgender Aufgabe (bei der linken Ungleichung) keine Probleme haben:

Aufgabe MO480935. Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen *a*, *b*, *c* mit $a + b + c = 1$ stets $\frac{1}{3} \le a^2 + b^2 + c^2 \le 1$ gilt.

Das Finden von ***quadratischen Ergänzungen*** erweist sich oft als zielführende Lösungsstrategie.

Aufgabe MO480923(b). Zeigen Sie, dass für beliebige Paare (*a*; *b*) reeller Zahlen stets $a+b \le a^2+b^2+\frac{1}{2}$ gilt.

Lösungshinweise: Die Behauptung wird äquivalent zu $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ umgeformt und die Gültigkeit wird offensichtlich. ❑

Aufgabe. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left(1+a+a^2\right)^2 \le 3\cdot\left(1+a^2+a^4\right)$$

für alle reellen Zahlen *a*.

Lösungshinweise: Durch (äquivalentes) Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gelangen wir zu der Ungleichung

$$a^4-a^3-a+a \ge 0\,.$$

Nun erkennen wir die Faktorisierungsmöglichkeit:

$$(a-1)\cdot\left(a^3-1\right) \ge 0\,.$$

Diese Ungleichung ist für jede reelle zahl a erfüllt:

- Ist $a < 1$, dann sind beide Faktoren negativ und deren Produkt ist positiv.
- Ist $a > 1$, dann sind beide Faktoren positiv und deren Produkt ist positiv.
- Ist $a = 1$, dann sind beide Faktoren gleich Null und die Gleichheit gilt. ❑

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $x^8-x^5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4} \ge 0$ für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen *x*.

Lösungshinweise: Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit x^4 führt zu einem Polynom, für das wieder eine Faktorisierung gelingt. Die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu

$$\left(x^9-1\right)\cdot\left(x^3-1\right) \ge 0\,.$$

Nun schließen wir den Beweis wie eben ab. ❑

Kleine Änderungen in der Aufgabenstellung können zu ganz unterschiedlichen Ergebnissen führen:

Aufgabe MO301231. Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen *a, b, c, d* stets folgende Ungleichungen gelten:

(1) $\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \le \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$,
(2) $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$.

Lösungshinweise:
zu (1) Wir nehmen an, es gelte $\sqrt{ac}+\sqrt{bd} > \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$. Da beide Seiten positiv sind, darf quadriert werden und wir erhalten

$$ac + 2\sqrt{abcd} + bd > (a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

also

$$2\sqrt{abcd} > ad + bc.$$

Doch diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu $0 > \left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2$, was offenbar einen Widerspruch darstellt. Also gilt die Behauptung.

zu (2) Setzen wir $a = b = 2$ und $c = d = 1$, so wird die Ungleichung widerlegt. ❑

Gewusst wo – die Suche nach geometrischen Örtern[4]

In der 52. MO wurde in zwei Aufgaben nach einem *geometrischen Ort* gefragt, d.h. nach der Menge aller Punkte, die gewisse Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe MO520936. Es sei *k* ein Halbkreis über einem Durchmesser *AB*. Auf *k* werde ein weiterer von *A* und *B* verschiedener Punkt *C* gewählt. Wir betrachten den aus den Strecken *AC* und *CB* bestehenden Streckenzug und bezeichnen mit *X* denjenigen Punkt, welcher diesen Streckenzug in zwei Teile gleicher Länge zerlegt.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Punkte *X*, wenn *C* die von *A* und *B* verschiedenen Punkte auf dem Halbkreis *k* durchläuft.

Hinweis: Der geometrische Ort der Punkte X bezeichnet hier die Menge all dieser Punkte bei allen möglichen Wahlen des Punktes C.

Aufgabe MO520946. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck *ABC*. Bestimmen Sie die Menge aller derjenigen Punkte *P* im Inneren des Dreiecks *ABC*, für die es einen Punkt *X* auf der Geraden *BC* und einen Punkt *Y* auf der Geraden *CA* derart gibt, dass folgende drei Bedingungen simultan erfüllt sind:

(1) Der Punkt *X* ist vom Punkt *C* verschieden.
(2) Die Gerade *XY* ist parallel zur Geraden *AB*.
(3) Die Winkel $\angle XPC$ und $\angle CPY$ sind gleich groß.

[4] Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 22.06.2019

Hinweis: Zwei Geraden sind auch dann parallel, wenn sie zusammenfallen.

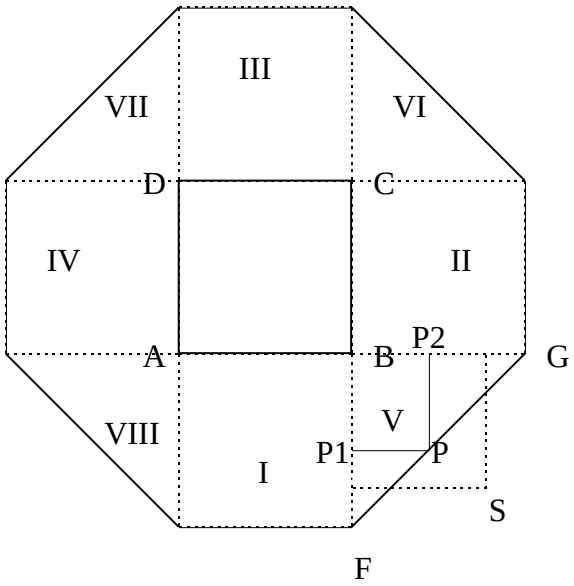
Der einfachste geometrische Ort ist der Kreis (Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben). Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Ellipse sind weitere Beispiele von bekannten geometrischen Orten. Bei der Suche nach den geometrischen Orten sind stets die folgenden vier Aspekte explizit darzustellen:

- eindeutige Beschreibung der gesuchten Menge,
- Nachweis, dass ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, in dieser Menge enthalten ist,
- Nachweis, dass alle Punkte außerhalb dieser Menge nicht allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen,
- Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Vorschrift erzeugt werden kann.

An folgenden Beispielen können diese vier Schritte demonstriert werden.

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Man ermittle den geometrischen Ort aller Punkte in der Ebene des Quadrates, für die die Summe der Abstände von den Geraden *AB*, *BC*, *CD* und *DA* gleich 4 ist!

Lösungshinweise: Die Geraden *AB*, *BC*, *CD*, *DA* zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder (in der Abbildung mit I, ..., VIII bezeichnet), wobei die Punkte der Trennungsgeraden zu allen ihnen anliegenden Feldern gehörig betrachtet werden. Weiterhin bezeichne $d(P,XY)$ den Abstand des Punktes *P* von der Geraden *XY*.



Wir betrachten zunächst Feld I. Wenn *P* ein Punkt aus dem Feld I ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

(1) $$d(P;AB)+d(P;BC)+d(P;CD)+d(P;DA)=4$$

Weil *P* zwischen den parallelen Geraden *BC* und *AD* liegt, gilt

(2) $d(P;BC)+(P;DA)=1.$

Da *AB* zu *CD* parallel ist und *P* in der durch *AB* begrenzten Halbebene liegt, in der *CD* nicht liegt, gilt weiterhin

(3) $d(P;CD)=d(P;AB)+1$

Wegen (1) bis (3) finden wir die Aussage $d(P;AB)=1$. Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf der Parallelen zu *AB* im Abstand 1 liegen. In ähnlicher Weise erhalten wir Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V. Wenn *Q* ein Punkt aus dem Feld V ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

(4) $d(Q;AB)+d(Q;BC)+d(Q;CD)+d(Q;DA)=4$

Analog zu den Untersuchungen im Feld I findet man:

(5) $d(Q;CD)=d(Q;AB)+1$; $\mathrm{d(Q;DA) = d(Q;BC) + 1}$

Wir zeigen nun: Ist *P* ein Punkt der Strecke *FG*, dann gilt:

$$d(P;AB)+d(P;BC)=1$$

Da *FG* parallel zu *AC* verläuft, beträgt der Winkel $\angle GFB = 45^o$. Seien nun P_1 der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *BC* und P_2 der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *AB*. Das Dreieck FPP_1 ist nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, d.h., es gilt: $\overline{PP_1} = \overline{P_1F}$. Da weiterhin *AB* senkrecht auf *BC* steht, ist P_1PP_2B ein Rechteck, also gilt:

$$\overline{BP_1} = \overline{P_2P}$$

also $\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = \overline{BF}$

Aufgrund der vorangegangenen Betrachtungen erhalten wir wie behauptet:

$$\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = d(P;AB)+d(P;BC) = \overline{BF} = 1$$

Über Dreiecksungleichungen zeigen wir nun leicht, dass für jeden Punkt *S*, der im Feld V, aber nicht auf der Strecke *FG* liegt, die Abstandssumme von 1 verschieden ist. Die Betrachtungen im Feld V beweisen, dass *Q* auf der zu *AC* parallelen Diagonalen des Quadrates liegt, das durch Spiegelung aus *ABCD* an *B* entsteht.

In ähnlicher Weise erhalten wir in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der bereits gefundenen Geraden in I bis IV übereinstimmen. Im Innern des Quadrates können offenbar keine gesuchten Punkte liegen, da hier die Summe der Abstände dieser Punkte von den Quadratseiten genau den Wert 2 annimmt.

Somit besteht der gesuchte geometrische Ort aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte sämtlich auf einem Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates liegen und von dessen Seite jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates parallel und kongruent ist. ❑

Aufgabe. Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit der Grundfläche *ABCD* und der Kante *AE*. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken *XY*, wobei *X* ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale *AC* und *Y* ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale *FH* ist.

Lösungshinweise: Durch Auswahl spezieller Situationen finden wir eine Vermutung über den gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir zum Beispiel $X = A$ und $Y = F$, so fällt *XY* mit der Flächendiagonalen der Seitenfläche *ABFE* zusammen und der Mittelpunkt ist von *XY* ist der Flächenmittelpunkt M_{ABFE}. Leicht sehen wir, dass auch die Flächenmittelpunkte M_{BCGF}, M_{CDHG} und M_{DAEH} in der gesuchten Menge enthalten sind. Somit liegt die Vermutung nahe, dass das Quadrat mit diesen vier Flächenmittelpunkten mit allen seinen inneren und Randpunkten der geometrische Ort sein könnte.

Wählen wir die Punkte *X* und *Y* entsprechend der Aufgabenstellung, so liegt der Mittelpunkt der Verbindung *XY* in der Ebene, in der die genannten Flächenmittelpunkten liegen. Mittels Strahlensatz ist nachweisbar, dass der Mittelpunkt von *XY* nicht außerhalb der beschriebenen Fläche liegen kann.

Wählen wir einen beliebigen Punkt *P* außerhalb der beschriebenen Menge aus, so zeigen wir, dass bei jeder Auswahl eines Punktes *X* auf *AC* die Verbindung *XP* die Gerade *FH* nicht schneiden kann.

Wählen wir einen beliebigen Punkt *P* der Menge aus, so schneidet die Ebene durch die Punkte *A*, *C* und *P* die Gerade *FH* in einem Punkt *P'*. Die Gerade *P'P* schneidet wiederum die Gerade *AC*, da *P'P* nicht parallel zu *AC* liegt. Somit gibt es zu jedem Punkt *P* die Punkte $X = P''$ und $Y = P'$, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. ❑

Aufgabe. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller von einem festen Punkt *A* ausgehenden Sehnen in einem Kreis *K*.

Lösungshinweise: Wählen wir den Durchmesser als ausgehende Sehne mit den Endpunkten *A* und *B*, so ist der Mittelpunkt M_K des Kreises Element des geometrischen Ortes. „Wandert" der von *A* verschiedene Endpunkt entlang der Kreisperipherie in Richtung *A*, so erzeugen die Mittelpunkte eine „gewölbte" Bahn, sodass die Vermutung aufgestellt werden kann, dass der geometrische Ort der Kreis durch *A* und M_K mit halben Radius des gegebenen Kreises *K* ist.

Wir wählen einen beliebigen von *A* verschiedenen Punkt *S* auf dem Kreis. Nach Satz des Thales das Dreieck *ABS* rechtwinklig. Die Verbindung des Mittelpunktes der Sehne M_{AS} mit dem Mittelpunkt des Kreises M_K verläuft nach Strahlensatz parallel zur Sehne *BS*. Somit ist das Dreieck AM_KM_{AS} ebenfalls rechtwinklig. Also liegt M_{AS} auf dem THALESkreis über AM_K.

Wählen wir einen anderen Punkt *P* der Ebene, zeichnen die Gerade *AP* über *P* hinaus und markieren den Punkt *S'* mit |*AP*| = |*PS'*|, so liegt dieser Punkt entweder außerhalb oder innerhalb des beschriebenen Kreises. Dann liegt aber der Punkt *S'* entsprechend außerhalb oder innerhalb des Kreises *K*, d.h. *P* gehört nicht zum gesuchten geometrischen Ort.

Wählt wir dagegen einen beliebigen Punkt *P* der beschriebenen Menge aus, so finden wir mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von *AP* über *P* hinaus und der Kreisperipherie den zugehörigen Punkt *S*, der *P* gemäß der Aufgabenstellung definiert. ❑

Aufgabe MO410946. Es sei *P* innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen *AP* bzw. *BP*, die beide auf derselben Seite der Geraden *AB* liegen.

Bestimmen Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn *P* die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.

Lösungshinweise: Wählen wir *P = A*, so entartet das Dreieck AO_1P zum Punkt *A* und das Dreieck BO_2P fällt mit dem Dreieck *ABC* zusammen. Der Mittelpunkt der Seite *AC* gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir *P* = B, so entartet das Dreieck BO_2P zum Punkt *B* und das Dreieck AO_1P fällt mit dem Dreieck *ABC* zusammen. Der Mittelpunkt der Seite *BC* gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir schließlich den Mittelpunkt der Seite AB als Punkt P, so liegt der Mittelpunkt von $\overline{O_1O_2}$ ebenfalls auf der Mittellinie des Dreiecks ABC. Damit können wir vermuten, dass die Mittellinie des Dreiecks ABC der gesuchte geometrische Ort ist. Der Beweis ist nun recht einfach zu vollenden. ❑

Zum Abschluss des KZM-Jahres noch eine Ungleichung zur mathematischen Unterhaltung: Beweisen Sie

$$4 < \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}} < 5$$

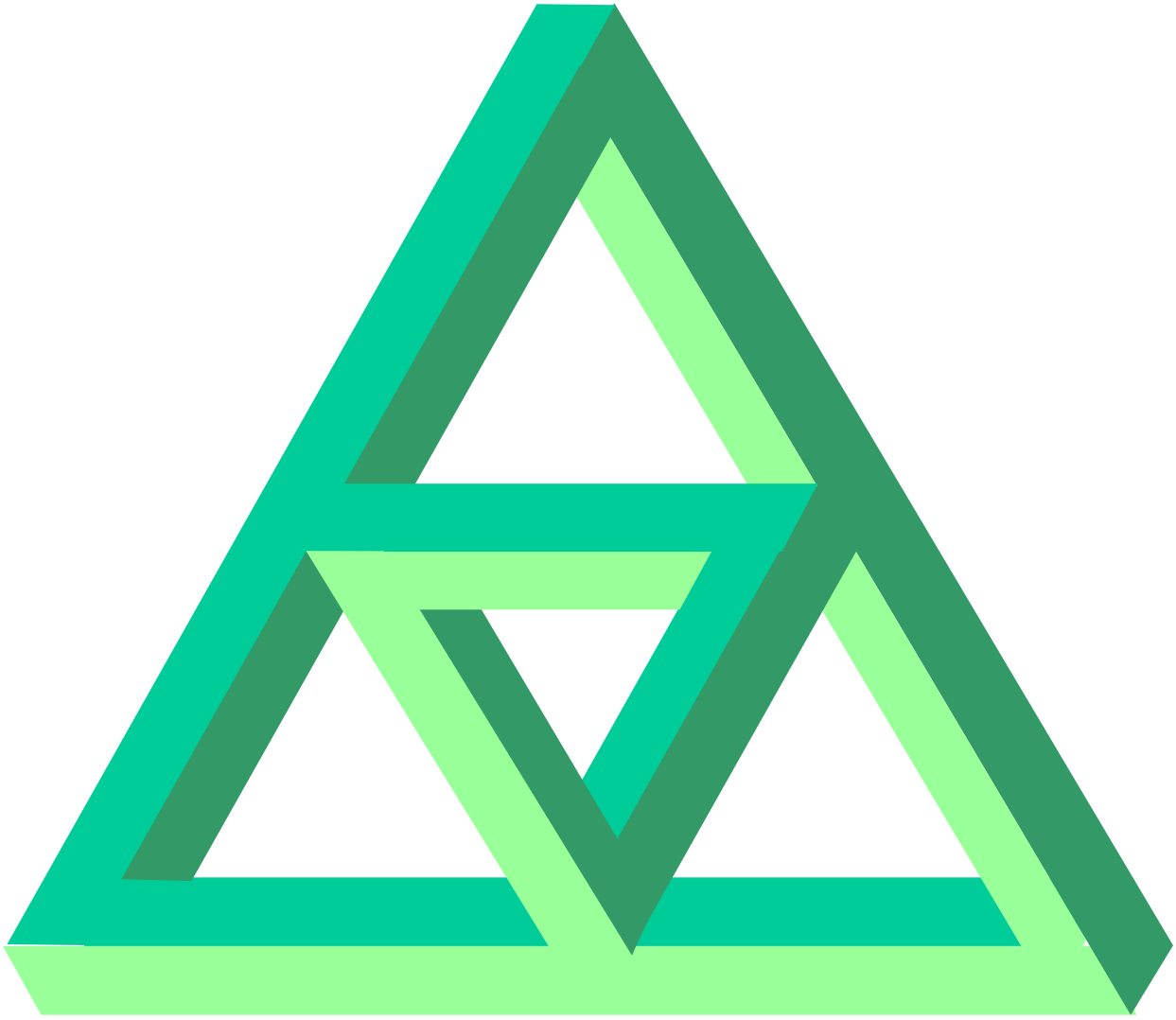
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz °

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Juli/August 2021 20. Jahrgang

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [1]

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form haben wie das große Polygon selbst.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen: Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“ Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

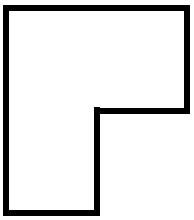


Abbildung 1a

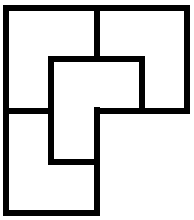


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil wir die Ausgangsfigur in 4 Stücke zerlegen müssen.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem zweiteiligen Gerücht haben wir ständig zu tun: Wenn wir ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten zusammenfalten und dann aufschneiden, erhalten wir zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden.

Bezeichnet a die Länge der langen Seite und b die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a/2}{b}, \qquad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst. Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes

[1] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990. Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 1-4, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht.

Von den dreiteiligen Gerüchten sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn wir die Seitenlängen geeignet wählen – aber wie?

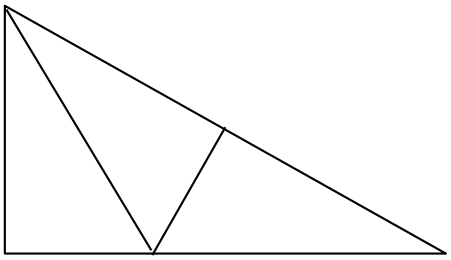
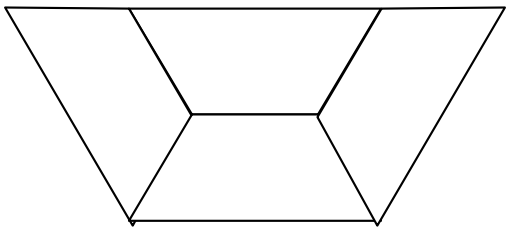
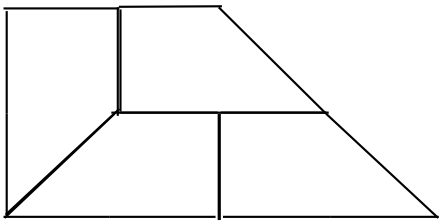


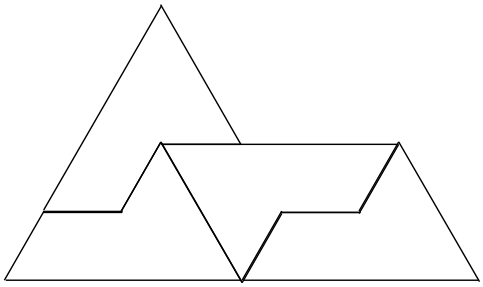
Abbildung 2

Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck und jedes Parallelogramm (sogar auf zwei verschiedene Weisen) gehören dazu. Aber auch andere Vierecke lassen sich beispielsweise entsprechend zerlegen:

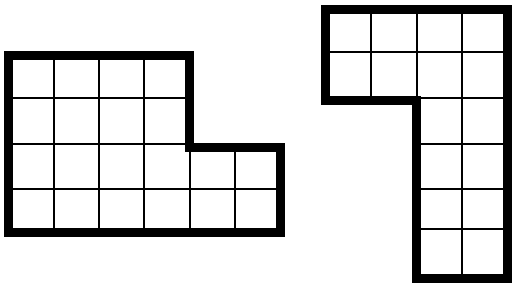




Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:



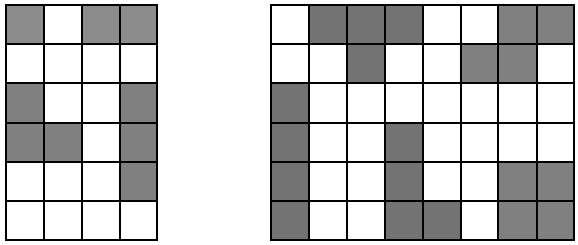
Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert (finden Sie diese):



Für jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich ein Parallelogramm angeben, dass sich als ein n-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Können wir dagegen für jedes vorgegebene n bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es ein n-teiliges Gerücht wird? Für $n = 3$ und $n = 4$ wurden oben die Lösungen besprochen. Auch $n = 2$ lässt sich einfach lösen. Aber für $n = 5$ oder größere n?

Haben wir ein n-teiliges Gerücht, können wir daraus schnell ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder entsprechend zerlegen.

Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn wir uns auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegen. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), können wir den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jedes natürliche n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn wir beispielsweise fordern, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es 2 verschiedene Triominos und 5 verschiedene Tetrominos.



n-minos für n = 1, 2, 3, 4

Welche Polyminos sind geometrische Gerüchte, d.h. welche Form können wir vergrößern, indem wir nur Polyminos der gleichen Form zusammensetzen?

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten können wir ein großes Quadrat zusammensetzen.
- Aus 4 Domino-Steinen können wir ein 2 x 4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.
- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht.
- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigen wir bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern. Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden (warum nicht?).

Setzen wir 5 Quadrate zusammen, erhalten wir Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur 4 davon sind Gerüchte.

So könnten wir die Reihe der n-minos fortsetzen. Da es aber bereits 35 verschiedene Formen von Hexominos gibt ($n = 6$), sollten wir diese Vielfalt wieder einschränken. So sind 11 dieser Hexominos Würfelnetze, d.h., diese

könnten wir zu einem Würfel falten und zusammenkleben. Damit ergibt sich folgende interessante Frage: Wie viele der Würfelnetze sind geometrische Gerüchte?

Ungeordnete Reihenfolgen [2]

Wir betrachten unterschiedliche Reihenfolgen der Ziffern 1 bis 9. Insgesamt gibt es 9! = 362880 verschiedene Möglichkeiten, diese Ziffern anzuordnen. Die natürliche Reihenfolge des Abzählens 1 2 3 4 5 6 7 8 9 weckt sicher wenig Aufmerksamkeit. Für die Anordnung 1 3 5 7 9 2 4 6 8 finden wir leicht eine Beschreibung. Reihenfolgen wie 1 9 2 8 3 7 4 6 5 heißen alternierend, und zwar in dem Sinne, dass es in dieser Anordnung keine drei aufeinanderfolgende Ziffern *a*, *b*, *c* gibt, für die $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt. Merkwürdig sieht folgende Reihenfolge aus: 8 3 1 5 9 6 7 4 2; finden Sie eine Beschreibung[3]?

Wir können nun folgende Fragen stellen: Was ist vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet die „unnatürlichste“ Reihenfolge? Für welche Reihenfolge ist die „Unordnung“ am größten?

Um die größte Unordnung zu finden, ist ein Maß notwendig, mit der die (Un-) Ordnung gemessen werden kann. Wir untersuchen folgenden Ansatz:

Gegeben sei eine Reihenfolge *F* der Ziffern 1 bis 9, geschrieben als $F = F(a_1,...,a_9)$. Wir bestimmen in dieser Folge von jedem Paar aufeinanderfolgender Ziffern den Betrag der Differenz (d.h. $|a_i - a_{i+1}|$ für i = 1, ..., 8) und bilden die Summe *S(F)* aller acht Beträge:

$$S(F) = \sum_{i=1}^{8} |a_i - a_{i+1}| = |a_1 - a_2| + ... + |a_8 - a_9|$$

S(F) sei der Unordnungswert der Reihenfolge *F*, je höher diese Summe, desto größer die Unordnung der Folge.

Die natürliche Reihenfolge hat die Unordnung 8. Es gibt offensichtlich keine Reihenfolge mit kleinerer Unordnung, denn jeder der acht Summanden ist größer oder gleich 1. Diese einfache Folgerung motiviert die Begriffswahl: Die natürliche Ordnung besitzt die geringste Unordnung. Auch die Umkehr der natürlichen Reihenfolge führt zu einer Reihenfolge mit Unordnung 8. Weitere Möglichkeiten kann es aber für die minimale Unordnung nicht geben.

Da es nur endlich viele Anordnungen der 9 Ziffern gibt, gibt es mindestens eine Reihenfolge mit maximaler Unordnung. Eine grobe obere Abschätzung (obere

[2] Nach Engelhaupt, H. Aufgaben mit Ziffern. In: alpha (1996) 9, S. 22f. Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 1-5A, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

[3] Die Ziffern sind alphabetisch geordnet: acht, drei, eins, ...

Schranke) über den maximalen Wert können wir mit $8 \cdot 8 = 64$ angeben, denn jeder der 8 Beträge kann 8 nicht übersteigen. Aber diese Schätzung ist sicherlich viel zu hoch. Wie groß ist aber nun die maximale Unordnung, welche Reihenfolgen haben diese und wie viele derartige gibt es?

Ohne Schwierigkeiten erkennen wir, dass für eine gegebene Reihenfolge *F* die Umkehrung der Ziffernfolge den Wert der Unordnung *S(F)* nicht ändert. Ebenso einfach finden wir, dass das Ersetzen jeder Ziffer *z* einer gegebenen Reihenfolge durch die Ziffer $z' = (10 - z)$ die Unordnung nicht verändert. Sind nämlich *a* und *b* zwei benachbarte Ziffern, so beträgt deren Beitrag zur Summenbildung nach dem Ersetzen

$$|(10 - a) - (10 - b)| = |b - a| = |a - b|,$$

d.h. alle acht Beträge und damit deren Summe ändern ihren Wert nicht.

Satz. Jede Folge mit maximaler Unordnung ist alternierend.

Der *Beweis* basiert auf dem Extremalprinzip: Es sei *F* eine Folge mit maximalem Unordnungswert *S(F)* und *F* sei nicht alternierend. Dann enthält *F* drei aufeinanderfolgende Ziffern (hier *a*, *b* und *c* genannt) für die $a < b < c$ (oder $a > b > c$) gilt. Dann ist der Unordnungswert der Folge *F'*, die aus *F* entsteht, wenn *b* weggelassen wird und damit aus 8 Ziffern besteht[4], ebenfalls *S(F)*, denn die Differenz der in *F'* benachbarten Ziffern *a* und *c* beträgt $c - a = (c - b) + (b - a)$. Setzen wir nun *b* an den Anfang der Folge *F'*, so hat diese neue neungliedrige Folge einen größeren Ordnungswert als *F'*, da ja ein positiver Summand zur Zahl *S(F')* hinzukommt. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass *F* eine (neungliedrige) Folge mit maximaler Unordnung ist. ❑

Wir betrachten nun eine alternierende Reihenfolge $F = F(a_1,...,a_9)$ mit $a_1 < a_2$. Dann finden wir für die Unordnung unter Beachtung der Größenverhältnisse von benachbarten Ziffern den Wert

$$\begin{aligned} S(F) &= (a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_8 - a_9) = \\ &= 2 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7 + a_9) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Unordnung am größten, wenn im ersten Klammerausdruck für die Variablen möglichst große Ziffern gewählt werden (also 6, 7, 8, 9) und im zweiten Ausdruck die doppelt gezählten Ziffern möglichst klein sind (1, 2, 3). Die maximale Unordnung beträgt dann 39. Beispielsweise realisiert die Reihenfolge 4 9 3 8 2 7 1 6 5 dieses Maximum. Insgesamt gibt es 576 verschiedene Anordnungen der neun Ziffern mit dem Unordnungswert 39 (warum?).

[4] Der Unordnungswert *S(F)* lässt sich in Analogie auf Reihenfolgen mit *n* Zahlen ($n > 1$) verallgemeinern.

Wie verändert sich die Aufgabe, wenn wir die 9 Ziffern im Kreis anordnen? Wie lauten unter diesen Bedingungen der kleinste und der größte Unordnungswert. Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es jeweils, die diese Extremwerte realisieren. (Dabei sollen zwei Anordnungen, von denen sich eine aus der anderen durch eine Drehung erzeugen lässt, nicht als verschieden angesehen werden.)

Suchen Sie nach anderen Definitionen für Unordnung und versuchen Sie, dafür die gleichen Fragestellungen nach Extremwerten und Anzahl der möglichen Anordnungen zu beantworten!

Thema 07 – Kryptogramme (Teil I) [5]

Aufgabe 1 – MO301021[6]. In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe O braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt werden.

		M	O	R	D
+		R	A	U	B
=	K	R	I	M	I

a) Beweisen Sie, dass in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe O durch die Ziffer 0 ersetzt wird!

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für A befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Lösungshinweise: Da K nur als Übertrag entstehen kann, muss $K = 1$ gelten. An der Tausenderstelle kann im Ergebnis nur R stehen, wenn $M = 9$ (mit Übertrag aus der Hunderterstelle) oder $M = 0$ steht. Letzteres ist nicht möglich, weil damit der erforderliche Übertrag für die Zehntausenderstelle nicht erzeugt wird. Mit $M = 9$ kann aber aus der Zehnerstelle kein Übertrag erfolgen, da $R \neq U$ vorausgesetzt und somit die Zehnerstelle im Ergebnis höchsten 8 erreichen kann, wenn aus der Einerstelle bereits ein Übertrag erfolgt. Wäre zugelassen, dass Anfangsziffern 0 sein dürfen, wäre auch $K = 0$ möglich. Da in der Tausenderstelle dann kein Übertrag entstehen darf, führt dies zu $M = 0$ im Widerspruch zu $K \neq M$.

a) Setzen wir $O = 0$, so muss aus der Zehnerstelle ein Übertrag entstehen, weil andernfalls $A = I$ gelten würde. Dies wurde aber bereits ausgeschlossen.
b) Wir untersuchen, ob es für $A = 0, 2, 3, \ldots, 8$ Lösungen des Kryptogramms gibt:

[5] Seit Anfang 2021 werden Texte zur Nach- und Vorbereitung der Mathematik-Olympiade angeboten, die angeregt durch aktuelle MO-Aufgaben Lösungswege ähnlicher Aufgaben vergleichen und weitere Aufgaben als Übungsmaterial zusammenstellen, siehe S. 20 dieses Heftes. Thema 07 ist für die Sommerpause gedacht.

[6] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert.

$\boldsymbol{A = 0}$: Da in der Hunderterstelle ein Übertrag entstehen muss, ist Fall $O = 9$ erforderlich (mit Übertrag aus der Zehnerstelle) im Widerspruch zu $M = 9$.

Aus $\boldsymbol{A = 2}$ folgt $O = 8$ und $I = 0$. Die Aussage $I = 0$ bedeutet $D + B = 10$ und somit ein Übertrag für die Zehnerstelle. Für R sind noch die Ziffern, 3, 4, 5, 6 und 7 möglich.

		9	8	R	D
+		R	2	U	B
=	1	R	0	9	0

- Aus $R = 7$ folgt wegen des Übertrags $U = 1$ im Widerspruch zu $K = 1$.
- Für $R = 6$ müsste $U = 2$ im Widerspruch zu $A = 2$ gelten.
- Für $R = 4$ müsste $U = 4$ im Widerspruch zu $R \neq U$ gelten.

Für jedes $R = 3$ und $R = 5$ ist U eindeutig bestimmt, $U = 5$ bzw. $U = 3$. Somit verbleiben für die Buchstaben D und B die Ziffern 4, 6, 7. Wegen $D + B = 10$ ist also nur $D = 4$ oder $D = 6$ mit $B = 6$ bzw. $B = 4$ möglich.

Insgesamt gibt es für $A = 2$ vier Möglichkeiten. Beispiel:

		9	8	3	6
+		3	2	5	4
=	1	3	0	9	0

(*Hinweis:* Diese Herleitung war nicht verlangt. Es genügte, ein Beispiel anzugeben).

Aus $\boldsymbol{A = 4}$ folgt $O = 6$ und $I = 0$. Für R sind noch die Ziffern, 2, 3, 5, 7 und 8 möglich.

- Aus $R = 8$ folgt wegen des Übertrags $U = 0$ im Widerspruch zu $I = 0$.
- Für $R = 7$ müsste $U = 1$ im Widerspruch zu $K = 1$ gelten.
- Für $R = 2$ müsste $U = 6$ im Widerspruch zu $O = 6$ gelten.

Für jedes $R = 3$ und $R = 5$ ist U eindeutig bestimmt, $U = 5$ bzw. $U = 3$. Somit verbleiben für die Buchstaben D und B die Ziffern 2, 7, 8. Wegen $D + B = 10$ ist nur $D = 2$ oder $D = 8$ mit $B = 8$ bzw. $B = 2$ möglich.

Insgesamt gibt es für $A = 4$ vier Möglichkeiten. Beispiel:

		9	6	3	8
+		3	4	5	2
=	1	3	0	9	0

Für $\boldsymbol{A = 6}$ und $\boldsymbol{A = 8}$ gilt die Argumentation wie für $A = 4$ bzw. $A = 6$ wegen der Vertauschbarkeit der Buchstaben A und O.

		9	2	3	6
+		3	8	5	4
=	1	3	0	9	0

		9	4	3	8
+		3	6	5	2
=	1	3	0	9	0

Wegen $K = 1$ und $M = 9$ kann nicht $\boldsymbol{A = 1}$ oder $\boldsymbol{A = 9}$ gelten.

Für $\boldsymbol{A = 5}$ folgt $O = 5$ im Widerspruch zu $A \neq O$.

Aus $\boldsymbol{A = 3}$ folgt $O = 7$ und $I = 0$. Für R sind noch die Ziffern, 2, 4, 5, 6 und 8 möglich.

- Aus $R = 8$ folgt wegen des Übertrags $U = 0$ im Widerspruch zu $I = 0$.
- Für $R = 5$ müsste $U = 3$ im Widerspruch zu $A = 3$ gelten.

- Für $R = 4$ müsste $U = 4$ im Widerspruch zu $R \neq U$ gelten.

Für jedes $R = 2$ und $R = 6$ ist U eindeutig bestimmt, $U = 6$ bzw. $U = 2$. Somit verbleiben für die Buchstaben D und B die Ziffern 4, 5, 8. Aus diesen Ziffern kann die Summe 10 nicht erzeugt werden.

Durch Vertauschen der Buchstaben finden wir, dass auch für $\boldsymbol{A = 7}$ keine Lösung besteht. Es gibt also keine weiteren Lösungen.

Mit dieser vollständigen Analyse (die zur Lösung der Fragestellung aber nicht erforderlich war) finden wir: Das Kryptogramm hat 16 verschiedene Lösungen. ❑

Aufgabe 2 – MO330923. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

	M	O	R	D
+		R	A	U	B
=	K	R	I	M	I

Geben Sie eine Lösung an! Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Mit der Aufgabe MO301021 ist diese Fragestellung bereits vollständig diskutiert.

Lösungshinweise: Wenn wir eine Lösung gefunden haben, dann können wir in dieser – jeweils unabhängig voneinander – die Ziffern

- für die Buchstaben A und O
- für die Buchstaben R und U
- für die Buchstaben D und B

vertauschen und erhalten damit bereits $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verschiedene Lösungen. In jeder dieser Lösung können wir gleichzeitig die Ziffern für O und D bzw. A und B vertauschen und erhalten weitere 8 verschiedene Lösungen, insgesamt also 16 verschiedene Lösungen. ❑

Aufgabe 3 – MO331023. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
=	F	Ü	N	F

Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!

Lösungshinweise: Da $F = 0$ ausgeschlossen ist, muss S ungerade und damit $F = 5$ gelten. Damit kann an der Tausenderstelle nur für $E = 1$ ohne Übertrag $F = 5$ folgen. Wir führen nun folgende Fallunterscheidung:

(I) $S = 1$ ist wegen $E = 1$ nicht möglich.
(II) Wäre $S = 3$, so müsste wegen des Übertrags aus $5 \cdot 3$ an der Zehnerstelle $5 \cdot N + 1$ auf N enden, also $4 \cdot N + 1$ durch 10 teilbar sein. Da $4 \cdot N + 1$ aber eine ungerade Zahl ist, kann dies nicht sein.
(III) $S = 5$ ist wegen $F = 5$ nicht möglich.
(IV) Wäre $S = 7$, so müsste wegen des Übertrags aus $5 \cdot 7$ an der Zehnerstelle $5 \cdot N + 3$ auf N enden, also $4 \cdot N + 3$ durch 10 teilbar sein. Da $4 \cdot N + 3$ aber eine ungerade Zahl ist, kann dies nicht sein.

Wenn es eine Lösung gibt, muss also $S = 9$ gelten. Dann muss wegen des Übertrags aus $5 \cdot 9$ an der Zehnerstelle $5 \cdot N + 4$ auf N enden, also $4 \cdot N + 4$ durch 10 teilbar sein. Dies ist nur möglich, wenn $4 \cdot N$ auf 6 endet, also $N = 4$ gilt (weil $N = 9$ wegen $S = 9$ nicht zulässig ist). Für die Hunderterstelle gilt: Zu $5 \cdot I$ kommt ein Übertrag 2 aus der Zehnerstelle hinzu und es wird kein Übertrag für die Tausenderstelle erzeugt. Also muss gelten: $5 \cdot I + 2 < 10$. Wegen $E = 1$ kann dies nur durch $I = 0$ erfüllt werden. Eine Probe bestätigt, dass damit eine Lösung gefunden wurde. Zudem zeigten wir, dass keine weiteren Lösungen existieren. ❑

Aufgabe 4. Finden Sie alle Lösungen des folgenden Kryptogramms. Dabei bezeichnen A und B (mit $B > 1$) zwei verschiedene Ziffern.

$$A^B + B^A = (A + B^B)^B$$

Lösungshinweise: Es gilt die grobe Abschätzung $(A + B^B)^B > A^B + (B^B)^B$. Deshalb muss $B^A > B^{B^2}$, also $A > B^2$ gelten. Weil A eine Ziffer ist ($A < 10$) finden wir $B = 2$. Die Gleichung vereinfacht sich deshalb zu

$$A^2 + 2^A = (A + 4)^2.$$

Dies ist gleichbedeutend zu $2^A = 8 \cdot A + 16 = 8 \cdot (A + 2)$. Weil auf der linken Seite der Gleichung eine Zweierpotenz steht, muss auch $A + 2$ eine Zweierpotenz sein. Dies ist für $A < 10$ nur für $A = 0$, $A = 2$ und A=6 möglich:

$A = 0$: $0^2 + 2^0 = 1 \neq (0 + 2^2)^2 = 16$
$A = 2$: $2^2 + 2^2 = 8 \neq (2 + 2^2)^2 = 36$
$A = 6$: $6^2 + 2^6 = 100 = (6 + 2^2)^2$

Somit ist nur $A = 6$ und $B = 2$ eine Lösung der Aufgabe. ❑

Aufgabe 5 – MO431034. Das Kryptogramm soll in einem *n*-adischen Positionssystem gelöst werden. Ermitteln Sie das kleinste *n*, für welches das Kryptogramm eine Lösung hat.

		A	S	T	A
+		E	R	N	I
=	N	A	M	E	N

Anmerkung:

(1) Für eine Lösung des Kryptogramms gelten die Regeln wie in den oberen Aufgaben.

(2) Ein *n*-adisches Positionssystem ist ein Positionssystem zur Basis *n* mit den Ziffern 0, 1, ..., *n* – 1.

Lösungshinweise: Da in dem Kryptogramm acht verschiedene Buchstaben auftreten, gilt $n \geq 8$. Wir suchen zunächst eine Lösung für $n = 8$. Offenbar kann für N als Übertrag der Tausenderstellen nur $N = 1$ gelten. Damit sich der erforderliche Übertrag ergibt, muss $E = n - 1 = 7$ gelten. Außerdem muss auch in den Einerstellen ein Übertrag entstehen, damit die Einerstelle des Ergebnisses 1 ergibt. Damit folgt $T = 5$. Wir sehen nun, dass die 0 nur für M angenommen werden kann. Da aus den Zehnerstellen kein Übertrag folgt, müssen S und R die Summe 8 ergeben – dafür sind nur 2 und 6 verfügbar. Damit müssten die Einerstellen mit 3 und 4 belegt werden. Doch dann finden wir $N = 7$ im Widerspruch zu $N = 1$. Es kann also keine Lösung im 8-adischen Positionssystem geben.

Für $n = 9$ finden wir das nebenstehende Beispiel (eine Herleitung ist nicht erforderlich, kann aber ähnlich wie für $n = 8$ diskutiert werden).

		3	4	6	3
+		8	5	1	7
=	1	3	0	8	1

Damit ist $n = 9$ die Lösung der Aufgabe. ❑

Thema 07 – Kryptogramme (Teil II)

Aufgabe 6 – MO560931/MO561031. In der Gleichung

$$* \cdot * * * = 6 \cdot * * 5 + 2017$$

ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sternchen dürfen durch die gleichen Ziffern ersetzt werden. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Lösungshinweise: Zunächst können wir die mit *a* und *b* bezeichneten Sternchen untersuchen: $a \cdot * * b = 6 \cdot * * 5 + 2017$

Damit die linke Seite der Gleichung vierstellig wird, muss *a* größer als 1 sein. Die rechte Seite ist nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar. Folglich kann auch *a* nicht durch 2, 3 und 5 teilbar sein, also gilt $a = 7$. Da die Einerstelle der rechten Seite 7 ist, muss zudem $b = 1$ sein. Nun lässt sich die Gleichung mit zweistelligen Zahlen *x* und *y* schreiben als

$$7 \cdot (10 \cdot x + 1) = 6 \cdot (10 \cdot y + 5) + 2017, \text{ d.h.} \quad 7 \cdot x = 6 \cdot y + 204$$

Da die rechte Seite durch 6 teilbar ist, ist auch x durch 6 teilbar. An der Zehnerstelle von *y* kann nicht die 0 oder die 1 (weil bereits *b* = 1) stehen, also ist *y* mindestens 23. Hieraus folgt $x \geq 49$. Nun können wir für die verbleibenden durch 6 teilbaren Zahlen systematisch probieren:

x	54	60	66	72	78	84	90	96
y	29	36	43	50	57	64	71	78

Nur das erste Zahlenpaar erfüllt alle Bedingungen. Bei den anderen Zahlenpaaren treten entweder Ziffern doppelt auf oder unter den Ziffern befindet sich die 7 (was wegen a = 7 nicht zulässig ist). Eine Probe bestätigt die Belegung als Lösung:

$$7 \cdot 541 = 3787 = 6 \cdot 295 + 2017.$$ ❑

Aufgabe 7 – MO020911. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, dass es nur eine Lösung gibt.

```
x x x x x x x x : x x x = x x x x x
  x x x
-------
      x x x x
        x x x
      -------
        x x x x
        8 x x x
      ---------
              0
```

Lösungshinweise: Wenn wir von einer *n*-stelligen Zahl ein $(n-1)$-stellige Zahl subtrahieren und das Ergebnis $(n-1)$-stellig ist, muss der Minuend mit 1 beginnen. Also ist die erste Ziffer des Dividenden und des ersten Restes eine 1. Jedoch ist die Teilaufgabe 1*xxx* – *xxx* = 1 nur durch 1000 – 999 = 1 erfüllbar.

Nun erkennen wir, dass 999 das *m*-fache des Divisors ist (erster Divisionsschritt, 0 < *m* < 10) und dass das *n*-fache des Divisors größer als 8000 ist (letzter Divisionsschritt, 0 < *n* < 10). Dies ist nur mit dem Divisor 999 erfüllbar und die vorletzte Zeile des Divisionsalgorithmus ergibt sich aus 999 · 9 = 8991. Somit können wir das Schema bereits wie folgt ausfüllen:

```
1 0 0 0 x x x 1 : 9 9 9 = 1 0 0 x 9
  9 9 9
-------
      1 x x x
        x x x
      -------
        8 9 9 1
        8 9 9 1
      ---------
              0
```

Die vorletzte Ziffer des Quotienten kann aber nur 1 sein, weil im mittleren Teil des Algorithmus nur eine dreistellige Zahl entsteht. Damit lautet das vollständig ausgefüllte Schema:

```
1 0 0 0 8 9 8 1 : 9 9 9 = 1 0 0 1 9
  9 9 9
-------
      1 8 9 8
        9 9 9
      -------
        8 9 9 1
        8 9 9 1
      ---------
              0
```

Die Richtigkeit der Divisionsausführung können wir bestätigen. Wie die Herleitung zeigte, kann es auch keine andere Lösung geben. ❑

Aufgabe 8 – MO330944. Jemand findet die Aufgabe

22! = 11240007277**607680000.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die beiden fehlenden Ziffern mit x und y. Weil 9 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 22! durch 9 teilbar. Deshalb ist auch die Quersumme

$$1 +1 +2 +4 +0 +0 +0 +7 +2 +7 +7 + x + y +6 +0 +7 +6 +8 +0 +0 +0 +0 = x + y + 58$$

durch 9 teilbar und somit auch $x + y + 4$. Dies ist für Ziffern x und y nur für $x + y = 5$ oder $x + y = 14$ möglich.

Weil 11 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 22! durch 11 teilbar. Deshalb ist die alternierende Quersumme

$$1 –1 +2 –4 +0 – 0 +0 –7 +2 –7 +7 – x + y –6 +0 –7 +6 –8 +0 –0 +0 –0 = y – x – 22$$

durch 11 teilbar und somit auch $y – x$. Dies kann für Ziffern nur für $x = y$ erfüllt werden und deshalb kann nur $x + y = 14$, also $x = y = 7$ gelten. ❑

Aufgabe 9 – MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

Lösungshinweise: In Erweiterung der Aufgabe MO330944 suchen wir zunächst die Anzahl der Nullen am Ende von 20! Da mit jedem Faktor 5 in 20! eine Endnull entsteht (weil mehr Faktoren 2 als 5 in dem Produkt auftreten), endet 20! wegen der Faktoren 5, 10, 15 und 20 insgesamt auf 4 Nullen. Wir bezeichnen die beiden fehlenden Ziffern mit x und y.

Weil 9 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 20! durch 9 teilbar. Deshalb ist auch die Quersumme

$$2 + 4 + 3 + 2 + 9 + 0 + 2 + 0 + x + 8 + 1 + 7 + 6 + 6 + y + 0 + 0 + 0 + 0 = x + y + 50$$

durch 9 teilbar und somit auch $x + y + 5$. Dies ist für Ziffern x und y nur für $x + y = 4$ oder $x + y = 13$ möglich.

Weil 7 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 20! durch 7 teilbar. Deshalb ist die alternierende 3er-Quersumme

$$600 + y - 176 + 8 + 10x - 902 + 432 - 2 = 10 \cdot x + y - 40$$

durch 7 teilbar und somit auch $3 \cdot x + y + 2$.

Gilt $x + y = 4$, so muss $2 \cdot x + 6$ durch 7 teilbar sein, also entweder $x = 4$ (und damit $y = 0$) oder $x = 7$ (dieser Wert entfällt jedoch wegen $4 = x + y > x$).

Gilt $x + y = 13$, so muss $2 \cdot x + 15$ und folglich $2 \cdot x + 1$ durch 7 teilbar sein, also entweder $x = 3$ (und damit $y = 10$, doch dieser Wert entfällt wegen der Ziffer $y < 10$) oder $x = 10$ (doch dieser Wert entfällt wegen der Ziffer $x < 10$).

Somit lauten die unleserlichen Ziffern (von links nach rechts) 0, 4, 0, 0, 0, 0.

Lösungsvariante: Wollen wir wie in Aufgaben MO330944 die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 9 und 11 anwenden, lassen sich die fehlenden Ziffern nicht eindeutig finden.

Weil 11 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 20! durch 11 teilbar. Deshalb ist die alternierende Quersumme

$$0 - 0 + 0 - 0 + y - 6 + 6 - 7 + 1 - 8 + x - 0 + 2 - 0 + 9 - 2 + 3 - 4 + 2 = x + y - 4$$

durch 11 teilbar sein

Ist wie oben $x + y = 4$, dann ist es nicht möglich, x und y eindeutig zu finden. Ist dagegen $x + y = 13$, ist die alternierend Quersumme nicht durch 11 teilbar.

Um die meist unbekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 7 zu umgehen, ist es zulässig, die letzten Ziffern von 20! durch wiederholte Multiplikationen zu ermitteln (für diese Multiplikationen sind durch die Beschränkung auf die Endziffern lediglich kleine Zahlen erforderlich und somit muss keine Rechentechnik eingesetzt werden). Wir finden auf diese Weise, dass 20! auf 40000 endet, also $y = 4$ gilt.

Diese Information genügt nicht für die Teilbarkeitsregel der Zahl 9, weil dann $x = 0$ oder $x = 9$ möglich bleibt.

Jedoch genügt diese Information für die Teilbarkeitsregel der Zahl 11, denn $x + y - 4 = x$ ist als Ziffer nur für $x = 0$ durch 11 teilbar.,

Thema 07 – Kryptogramme (Aufgaben[7])

Aufgabe 1a – MO330923. Das folgende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

	Z	W	E	I
+	D	R	E	I
=	F	Ü	N	F

a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Aufgabe 2a. Das folgende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für T und S) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

				T	W	O
+		T	H	R	E	E
+		S	E	V	E	N
=	T	W	E	L	F	E

[7] Lösungshinweise zu diesen Aufgaben können unter norman.bitterlich@t-online.de angefordert werden.

Finden Sie alle Lösungen des Kryptogramms und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 3a – MO451044. In jeder der folgenden beiden Summen sind die Sterne * durch die Ziffern 1 bis 9 so zu ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal benutzt wird und eine korrekte Rechnung entsteht. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl aller Lösungen!

	*	*	*			*	*	*
+	*	*	*		+	*	*	*
+	*	*	*		+	*	*	*
=	9	9	9		1	0	0	0

Aufgabe 4a. Bestimmen Sie alle vierstelligen Zahlen $\overline{ABCD}$ (mit den Ziffern $A, B, C, D \neq 0$), für die gilt:

$$A \cdot B = C + D \;\; ; \;\; B \cdot D = A + C \;\; ; \;\; A \cdot C \cdot D = (A + D)^3$$

Aufgabe 5a – MO331044. Jemand findet die Aufgabe

23! = 2585201673*8849*6640000.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Hinweis: Für jeder positive ganze Zahl *n* wird *n*! als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis *n* definiert.

Aufgabe 6a – MO561013. In der Gleichung

* * * * * _ * * * * * = 2017

ist jeder Stern so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sterne dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Die Ziffer Null darf nicht an erster Stelle einer Zahl stehen.

a) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
b) Beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt, wenn man 2017 durch 2016 ersetzt.

Aufgabe 7a. Das Aufschreiben des nachfolgend angegebenen Polynoms als Produkt zweier Linearfaktoren erfolgte so hastig, dass einige Ziffern unleserlich sind. (Jedes Sternchen bedeutet eine unlesbare Ziffer.)

$$x^2 +* x -* 1 = (x +**) \cdot (x -*).$$

Vervollständigen Sie diese Gleichung und untersuchen Sie, ob es verschiedene Möglichkeiten gibt, diese Gleichung zu vervollständigen.

Aufgabe 8a. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, dass es nur eine Lösung gibt. (Der Divisor beginnt nicht mit 0.)

```
x x x x x x x : x x = x 0 8 0 x
x x x
-------
      0 x x
        x x
        ---
          x x x
          x x x
          -----
                0
```

Wettbewerbe: Bundesrunde der 60. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 60. Mathematik-Olympiade sollte als Jubiläumsveranstaltung in Berlin stattfinden. Das Pandemie-Geschehen führte wie schon im Jahr 2020 dazu, dass dieser Wettbewerb (wie schon die diesjährigen Regional- und Landesrunden) nur virtuell durchgeführt werden durfte. Als Veranstalter übernahm der Verein Mathematik-Olympiade e.V. als Träger des Wettbewerbs die Organisation und Durchführung und gestaltete die Bundesrunde zu einem digitalen Erlebnis auf hohem technischen Niveau! Unter www.mo2021.de sind vielfältige Informationen verfügbar.

Bei der Eröffnungsveranstaltung am 13. Juni begrüßte Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN und ging in seinem Beitrag mit Blick auf die Jubiläumsveranstaltung auf die MO-Geschichte ein. Wie von den Begleitheften früherer Bundesrunden gewohnt, wurden alle Mannschaften vorgestellt. Die persönlichen Grußworte von

- ANJA KARLICZEK, Bundesministerin für Bildung und Forschung, und
- BRITTA ERNST, Ministerin für Bildung, Jugend und Sport im Land Brandenburg, Präsidentin der Kultusministerkonferenz

zeigten die öffentliche Wertschätzung, die der Wettbewerb genießt. Am 20. Juni gestaltete LISA SAUERMANN (erfolgreichste Teilnehmerin an den Internationalen Mathematik-Olympiaden) den Festvortrag „Das Kartenspiel SET und ein Resultat von J. ELLENBERG und D. GIJSWIJT“. In sehr anschaulicher Weise demonstrierte

sie den wissenschaftlichen Weg von einem Kartenspiel zu einer spannenden mathematischen Herausforderung – ein sehenswerter Vortrag! Schließlich wurde die Bundesrunde mit der Preisverleihung am 22. Juni beendet. Wieder begrüßte Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN die Zuschauenden. Prof. Dr. GÜNTER M. ZIEGLER, Präsident der Freien Universität Berlin, überbrachte die Gratulation. In seinem Beitrag ermutigte er unter anderem, das Motto „Mathematik - leider schwierig“ mit Stolz wie ein Markenzeichen zu verbreiten. Alle Videos stehen in YouTube noch zur Verfügung (letztmalig besucht: 03.07.2021), Einwahlinformationen unter www.mo2021.de.

Wie bei regulären Präsenzrunden auch, gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern und 5 Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 14 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 75 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 28 Anerkennungsurkunden[8] Die sächsische Mannschaft konnte leider in der (inoffiziellen) Länderwertung nicht an die vorderen Positionen der vergangenen Jahre anknüpfen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[9] belegte sie mit 13 Punkten den 7. Platz. Niedersachsen mit 35 Wertungspunkten und Bayern (32) führen die Länderliste souverän an. Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II und III. Preise bedeuten für Sachsen ein II. Preis und vier III. Preise sogar nur Platz 10. Auch hier führen Niedersachsen (10 Preise) und Bayern (9 Preise).

Den sächsischen Preisträgern unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

II. Preis	MELIA HAASE (Kl. 9, Gymn. Zschopau)
III. Preise	JIEOH AHN (Kl. 9, Nexö-Gymn. Dresden)
	TIM THIEME (Kl. 9, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	ANTON NÜSKE (Kl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	JOHANN KRETZSCHMAR (Kl. 12, Nexö-Gymn. Dresden)
Anerkennung:	LUKAS TANNENBERG (Kl. 8, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	MORITZ PETRICH (Kl. 12, Sächs. Landesgymn. St. Afra, Meißen).

Nun freuen wir uns auf die 61. Mathematik-Olympiade, deren Bundesrunde vom 15. bis 18. Mai 2022 in Magdeburg stattfinden wird – hoffentlich wieder als Präsenzveranstaltung.

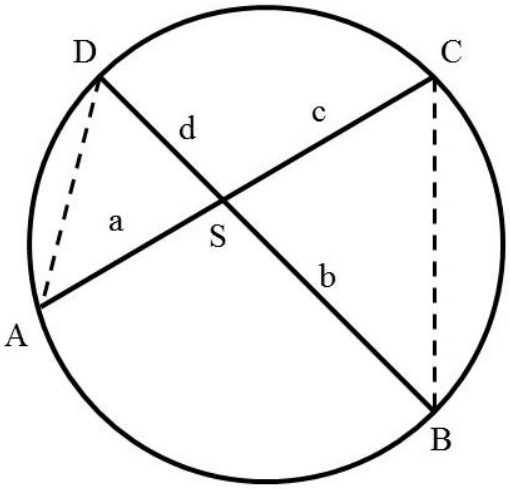
Bekannte Sätze der Mathematik

Aus der Vorbemerkung zum Aufgabenblatt der Mathematik-Olympiade: *„ … Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus*

[8] Die vollständige Liste ist unter www.mo2021.de verfügbar.
[9] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“

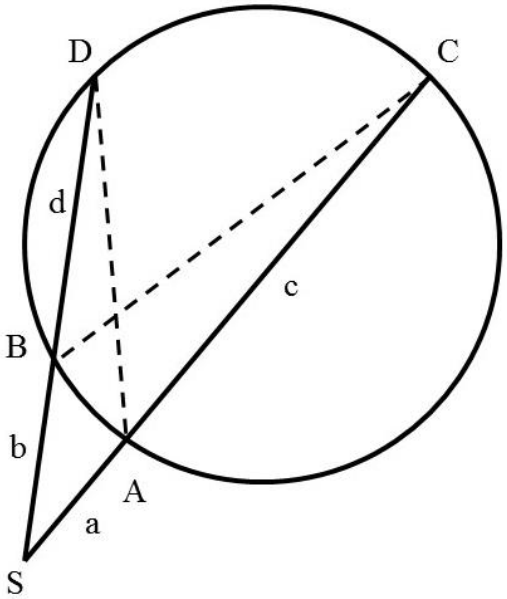
Sehnen-Satz. Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.



Beweisskizze: Bezeichnen wir (wie in nebenstehender Abbildung ersichtlich) mit *a*, *b*, *c* und *d* die Sehnen-Abschnitte, so ist die Gleichheit $a \cdot c = b \cdot d$ zu zeigen.

Nun sind aber die Winkel $\angle CBD$ und $\angle CAD$ gleich groß, da es beide Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne $\overline{CD}$ sind. Ebenso stimmen die Größen der Winkel $\angle ADB$ und $\angle ACB$ (Peripheriewinkel über $\overline{AB}$). Folglich sind die Dreiecke *ASD* und *BCS* ähnlich (www). Damit gilt die Verhältnisgleichung $a : d = b : c$, woraus die behauptete Gleichung folgt. ❑

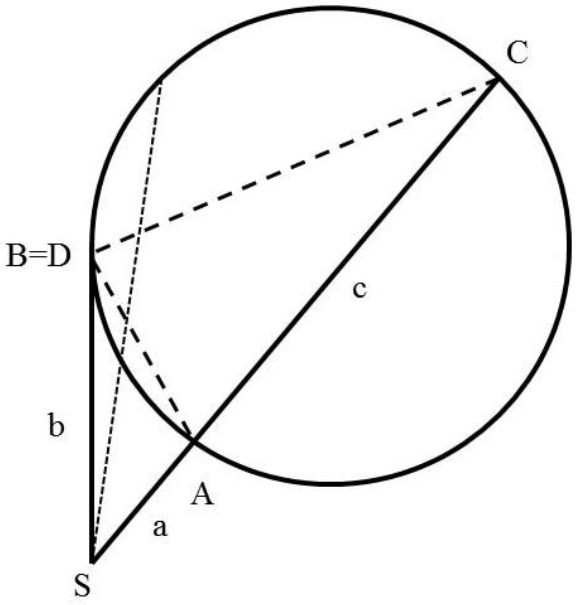
Sekanten-Satz. Schneiden sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich.



Beweisskizze: Mit den Bezeichnungen wie in nebenstehender Abbildung ist zu beweisen, dass $a \cdot (a + c) = b \cdot (b + d)$ gilt.

Wie beim Sehnen-Satz beweisen wir die Ähnlichkeit der Dreiecke *SCB* und *SAD*. Während die Winkelgleichheit von $\angle BCA$ und $\angle BDA$ als Peripheriewinkel über $\overline{AB}$ unmittelbar folgt, sind die Winkel $\angle SBC$ und $\angle DAS$ als Nebenwinkel von $\angle CBD$ bzw. $\angle CAD$ (Peripheriewinkel über $\overline{CD}$) gleich groß. Also gilt die Verhältnisgleichung $a: (b + d) = b: (a + c)$, woraus die Behauptung folgt. ❑

Sekanten-Tangenten-Satz
(auch Sehnen-Tangenten-Satz[10] genannt) Jede Tangente von einem Punkt an einem Kreis ist mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekanten-Abschnitten.



Beweisskizze: Um die geforderte Gleichung $b^2 = a \cdot (a + c)$ zu beweisen, genügt es anschaulich, im obigen Sekanten-Satz die Sekante $\overline{BD}$ so (nach links) zu verschieben, dass die Punkte B und D zusammenfallen und $b + d$ zu b wird. Um jedoch den Beweis vollständig zu führen, ist lediglich der Nachweis zu erbringen, dass die Dreiecke SAB und SCB ähnlich sind. Dann kann wie oben $a : b = b : (a + c)$ geschlossen werden. ❑

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben-bezug**
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

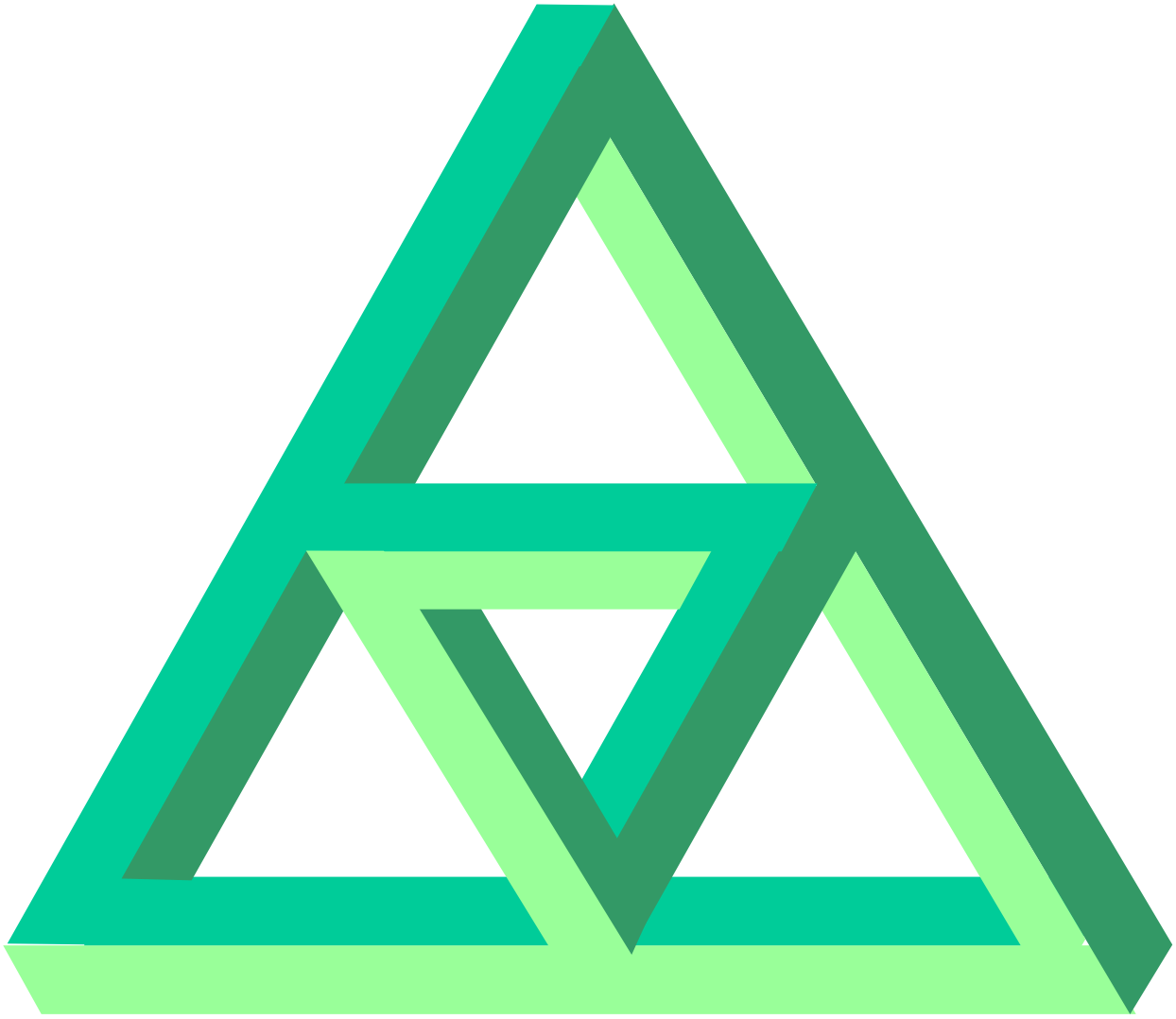
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Dieser Satz ist wesentliches Element der Lösungshinweise zu Aufgabe MO600946.
[11] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft September 2021 20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben thematische Schwerpunkte ausgewählt (in diesem Heft das Thema 8 in Bezug auf die 4. Runde der 60. MO). Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Die Seitenumbrüche sind hier so gewählt, dass sich diese Seiten auch separat ausdrucken lassen.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10 haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Mit einem statistischen Blick wird die Entwicklung der Wettbewerbe beleuchtet. Auszüge aus alten Büchern über Mathematik sollen unterhaltsam zeigen, dass für manche heutige Wettbewerbsaufgabe die inhaltlichen Wurzeln in der Mathematikgeschichte zu finden sind.

Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen [1]

Die Anzahl der Ziffern von *n!* wächst mit zunehmenden *n* schnell an. Während 6! noch eine dreistellige Zahl ist, besitzt 10! bereits 7 Ziffern und 20! gar 19 Stellen. Dies war Inhalt der

Aufgabe MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an.

Zwei Jahre vorher wurden bereits ähnliche Problemstellungen mit gleichartigem Fragetext in der 4. Stufe gestellt:

[1] vgl. Gardner, M. Mathematische Hexereien. Verlag Ullstein GmbH Berlin 1990. Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 1-5B, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Aufgabe MO330944. 22! = 11240007277**607680000
Aufgabe MO331044. 23! = 2585201673*8849*6640000

Lösungshinweise: In diesen beiden Aufgaben ist es ein nahe liegender Lösungsansatz, die fehlenden Ziffern anhand von Teilbarkeitsregeln zu ermitteln. Die Division durch 9 und durch 11 liefert hierfür ausreichende Argumente. In der Aufgabe der 35. MO war zudem zunächst die Anzahl der Endnullen zu ermitteln. Dann verbleiben wiederum nur zwei Ziffern, die es zu finden gilt.

Will man abschätzen, wie viele Stellen 1000! besitzt, so könnte man zunächst so vorgehen: In 1000! trägt jeder Faktor, der kleiner als 1000 ist, höchstens 3 Stellen zu 1000! bei. Folglich ist die Abschätzung $1000! < 10^{3000}$ sicherlich richtig.

Eine Verbesserung der Abschätzung ist wie folgt möglich: Aus der bekannten Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels von *n* Zahlen und der Summenformel der ersten *n* natürlichen Zahlen weiß man, dass auch folgende Abschätzung gilt:

$$\sqrt[1000]{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 1000} \le \frac{1+2+\ldots+1000}{1000} = \frac{500\cdot 1001}{1000} = 500{,}5 \ .$$

Also ist

$$1000! < 501^{1000} < \left(2^9\right)^{1000} < \left(2^{13}\right)^{693} < 10000^{693} = 10^{2772} \ .$$

Dabei beinhalten die mittleren Abschätzungen lediglich Umformungen, die eine Berechnung ohne Taschenrechner erleichtern, denn die Zweierpotenzen $501 < 512 = 2^9$ und $2^{13} = 8\cdot 2^{10} = 8\cdot 1024 < 10000$ sind bekannt (bzw. leicht ermittelbar). Mit TR geht es auch so:

$$1000\,! < 501^{1000} < \left(10^{2{,}7}\right)^{1000} = 10^{2700} \ .$$

Die Güte der Abschätzung lässt sich nur schwer bewerten. Hilfreich ist da die STIRLINGSCHE Formel[2], die die Fakultät mit den beiden mathematischen Konstanten *e* und π in Verbindung bringt: Es gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi\cdot n} \ .$$

Diese Abschätzung liefert praktikable Aussagen zur Stellenzahl:

$$lg(\,n!\,) \sim n\cdot lg\left(\frac{n}{e}\right) + 0{,}5\cdot lg(\,2\pi\cdot n\,).$$

[2] JAMES STIRLING, schottischer Mathematiker (1692 bis 1770)

Für $n = 20$ findet man auf diese Weise $\lg(n!) \approx 18{,}38$. Der daraus resultierende Wert $n! \approx 2{,}39 \cdot 10^{18}$ stimmt recht gut mit dem wirklichen Wert überein. Verlässt man sich (hier ohne weiteren Beweis) darauf, dass die Güte dieser Abschätzung auch bei großen n gilt, erhält man für $n = 1000$:

$$lg(1000!) \sim 2566{,}61$$

so dass 1000! insgesamt 2567 Ziffern umfassen könnte. Es kann bewiesen werden, dass der relative Fehler der STIRLINGSCHEN Formel mit wachsendem n kleiner wird, so dass die Formel eine verlässliche Abschätzung liefert. Für Werte über $n = 20$ beträgt der Fehler weniger als 0,5%.

Wenn man auch im Alltag kaum etwas mit solchen Zahlenriesen anfangen kann, dem Mathematiker fällt immer etwas ein. So suchte man alle Fakultäten, die man als Pyramide schreiben kann, also in einer solchen Zifferanordnung, dass in jeder folgenden Zeile zwei Ziffern mehr stehen. Wird die Pyramide mit n vollständigen Zeilen geschrieben, werden insgesamt $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1)$ Ziffern benötigt.

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen führt auf die Quadratzahl n^2. Jede Fakultätszahl, für die die Anzahl ihrer Ziffern der Dezimaldarstellung eine Quadratzahl ist, kann folglich in einer solchen Pyramiden- oder Dreiecksform aufgeschrieben werden. So lässt sich 7! = 5040 in der beschriebenen Weise darstellen:

5
040

Die nächste Fakultätszahl mit dieser Eigenschaft ist 12! = 479001600:

4
790
01600

Aber nicht für jede Quadratzahl existiert eine Fakultät mit entsprechender Ziffernzahl. So gibt es keine Fakultätszahl mit 25 Ziffern, wie man leicht aus den obigen Angaben zu 23! nachprüfen kann. Die Zahl 105! wird mit 169 Ziffern geschrieben, die unterste Zeile der Pyramide besteht genau aus den 25 Endnullen der Zahl. Dass man nun in ähnlicher Weise auch Darstellungsformen als Sechseck (z.B. 477! mit 1073 Ziffern) oder Achteck (z.B. 2206! mit 6421 Ziffern) fand, verwundert wohl nicht.

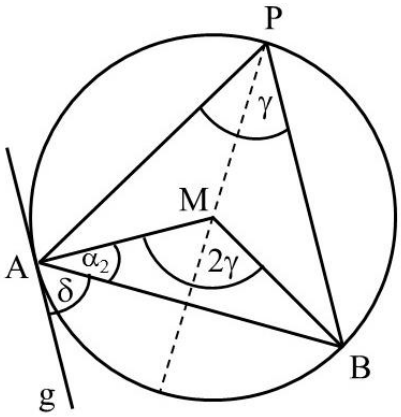
Thema 08 – Sehnen-Tangenten-Winkelsatz

Bei vielen geometrischen Aufgaben am Kreis oder mit einem Kreis als Hilfsfigur spielen Winkel eine wichtige Rolle. Besonders häufig anwendbar sind folgende Sätze:

- **Peripheriewinkelsatz.** Alle Peripheriewinkel über einem Kreisbogen (über einer Sehne) sind gleich groß.
- **Zentri-Peripherie-Winkelsatz.** Jeder Zentriwinkel (in der gleichen Halbebene) über einem Kreisbogen ist doppelt so groß wie der dazugehörige Peripheriewinkel.
- **Satz über die Winkel im Sehnenviereck.** Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck (d.h. die Eckpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises), wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

Seltener findet dagegen folgender Satz Anwendung:

Aufgabe 8.01 – Sehnen-Tangenten-Winkelsatz. Der Sehnen-Tangenten-Winkel eines Kreisbogens ist so groß wie der zugehörigen Peripheriewinkel und halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

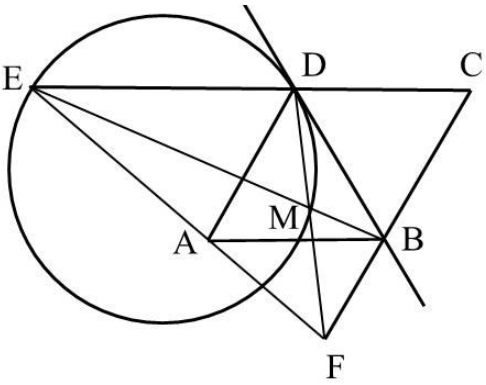


Lösungshinweise: Wir setzen als bekannt voraus, dass der Peripheriewinkel $\sphericalangle APB = \gamma$ halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel $\sphericalangle AMB = 2 \cdot \gamma$. Dann gilt für den Innenwinkel $\sphericalangle BAM = \alpha_2$ im gleichschenkligen Dreieck *ABM* die Beziehung $\alpha_2 = 90° - \gamma$. Da aber die Tangente im Punkt *A* rechtwinklig auf $\overline{AM}$ steht, gilt ebenso $\delta = 90° - \alpha_2$. Daraus folgt die Behauptung $\delta = \gamma$. ❑

In der Bundesrunde der 60. MO basierte ein Lösungsvorschlag auf diesem Satz. Man beachte, dass in geometrischen Aufgabenstellungen oft keine Abbildung gezeigt wird – die Umsetzung des Aufgabentextes in eine (möglichst exakt gezeichnete) Skizze ist somit der erste Schritt für die Lösungsfindung.

Aufgabe 8.02 – MO601045[3]. Gegeben sei eine Raute[4] *ABCD* mit $|\sphericalangle DCB| = 60°$. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{CD}$ über *D* hinaus sei ein Punkt *E* beliebig gewählt. Die Gerade durch *E* und *A* schneide die Gerade *BC* im Punkt *F*. *M* sei der Schnittpunkt der Geraden *BE* und *DF*.

Zeigen Sie, dass die Gerade *BD* den Umkreis des Dreiecks *MDE* berührt.



[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

[4] Hinweis: Statt Raute sagt man häufig auch Rhombus.

Lösungshinweise: Es ist zu zeigen, dass die Gerade durch *B* und *D* eine Tangente am Umkreis des Dreiecks *MDE* ist. Wir erkennen aus der Skizze, dass $\overline{EB}$ eine Sekante des Umkreises ist. Wenn wir nun zeigen können, dass die Größengleichheit der Winkel $\sphericalangle MDB$ und $\sphericalangle MED$ erfüllt ist, so folgt aus der Umkehrung des **Sehnen-Tangenten-Winkelsatzes** die Behauptung. Dazu suchen wir geeignete ähnliche Dreiecke:

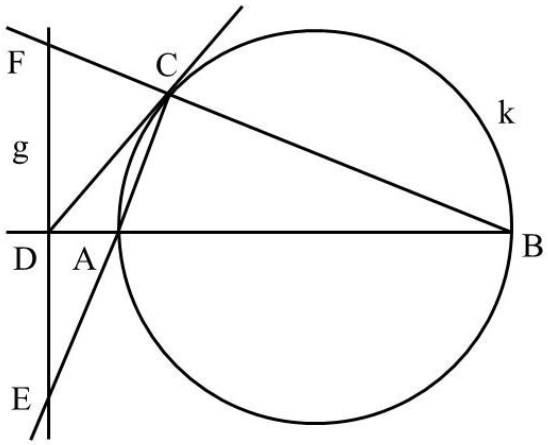
Die Dreiecke *EAD* und *AFB* haben drei Paare paralleler Seiten und sind folglich ähnlich zueinander. Insbesondere gilt $|\overline{DE}| : |\overline{DA}| = |\overline{BA}| : |\overline{BF}|$. Wegen der Gleichheit der Seitenlängen im Rhombus $|\overline{AD}| = |\overline{DB}| = |\overline{AB}|$ folgt daraus $|\overline{DE}| : |\overline{DB}| = |\overline{DB}| : |\overline{BF}|$.

Wegen $|\sphericalangle EDB| = |\sphericalangle DBF| = 120°$ sind auch die Dreiecke *EBD* und *DFB* ähnlich zueinander, und zwar mit $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle BED|$. Da die Punkte *B* und *E* auf verschiedenen Seiten der Geraden *MD* liegen, folgt die Behauptung aus der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Winkelsatzes zur Sehne *MD* im Umkreis des Dreiecks *MDE*. ❑

Aufgabe 8.03 – MO570945. Gegeben ist ein nicht gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit rechtem Winkel bei *C* und Umkreis *k*. Ferner sei *D* der Schnittpunkt der Geraden *AB* mit der Tangente durch *C* an *k*, *g* die Senkrechte zu *AB* in *D* sowie *E* der Schnittpunkt von *g* mit *AC* und *F* der Schnittpunkt von *g* mit *BC*.

Beweisen Sie: *D* ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$.

Lösungshinweise: Die Punkte *D*, *E* und *F* liegen außerhalb des Kreises *k*, da *D* auf einer Tangente an *k* durch *C* liegt und *E* und *F* auf der Senkrechten zu *AB* durch *D* liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir davon ausgehen, dass *A* zwischen *B* und *D* liegt, denn den anderen Fall können wir durch Spiegelung an *g* und Vertauschung der Bezeichnungen *A* und *B* sowie *E* und *F* auf diesen zurückführen. Dann liegen auch *C* zwischen *F* und *B* sowie *A* zwischen *E* und *C*.



Wie üblich bezeichnen wir mit $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ und $\beta = |\sphericalangle CBA|$ die Innenwinkelgrößen im Dreieck *ABC*. Nach Voraussetzung gilt $\alpha + \beta = 90°$. Aus den Lagebeziehungen folgt

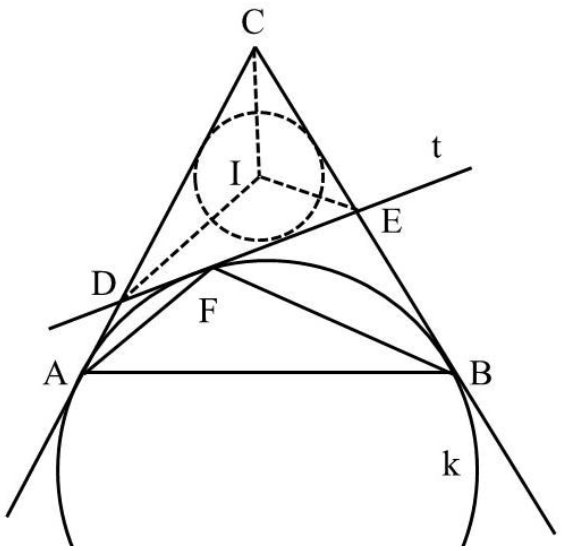
$$|\sphericalangle FBD| = |\sphericalangle CBA| = \beta \text{ und } |\sphericalangle DFB| = |\sphericalangle DFC| = 90° - \beta = \alpha.$$

Nach dem **Sehnen-Tangenten-Winkelsatz** gilt außerdem $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle FCD| = \alpha$, wobei $\sphericalangle FCD$ der Scheitelwinkel des Sehnen-Tangenten-Winkels zur Sehne $\overline{BC}$ ist. Es folgt $|DC| = |DF|$.

Analog zeigt man nacheinander $|\sphericalangle DAE| = \alpha$, $|\sphericalangle AED| = 90° - \beta = \alpha$ sowie $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle DCE| = \beta$, woraus $|DC| = |DE|$ folgt und sich zusammen $|DE| = |DF|$ wie behauptet ergibt. ❑

Aufgabe 8.04 – MO581046. Gegeben sind ein Kreis *k*, ein Punkt *C* außerhalb des Kreises, die Tangenten *CA* und *CB* an den Kreis *k* mit *A*, *B* auf *k* sowie eine weitere Tangente *t* an den Kreis *k* durch einen Punkt *F* auf *k*, wobei *F* ein innerer Punkt des Dreiecks *ABC* ist. Die Punkte *D* und *E* sind die Schnittpunkte von *t* mit den Geraden *CA* und *CB*.

Zeigen Sie, dass für die Flächeninhalte A_{ABF} und A_{CDE} der Dreiecke *ABF* und *CDE* stets $A_{ABF} < 2 \cdot A_{CDE}$ gilt.



Lösungshinweise: Es sei *I* der Inkreismittelpunkt des Dreiecks *CDE*. Nach dem **Sekanten-Tangenten-Winkelsatz** gilt

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle EBF|$$

und damit im Dreieck *FBE* für den Außenwinkel

$$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle EBF| + |\sphericalangle BFE| = 2 \cdot |\sphericalangle BAF|.$$

Somit folgt

$$|\sphericalangle IED| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle BAF|.$$

Analog erkennt man, dass $|\sphericalangle EDI| = |\sphericalangle FBA|$ gilt. Die Dreiecke *ABF* und *DEI* sind also ähnlich. Insbesondere folgt

$$\frac{A_{ABF}}{A_{DEI}} = \frac{|AB|^2}{|DE|^2} \qquad (1)$$

Nun sei *r* der Inkreisradius des Dreiecks *CDE*. Dann gilt:

$$A_{CDE} = A_{DEI} + A_{ECI} + A_{CDI} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot |DE| + \frac{1}{2} \cdot r \cdot |EC| + \frac{1}{2} \cdot r \cdot |CD|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (|DE| + |EC| + |CD|).$$

Hieraus folgt

$$\frac{A_{DEI}}{A_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r \cdot |DE|}{\frac{1}{2} \cdot r \cdot (|DE| + |EC| + |CD|)} = \frac{|DE|}{(|DE| + |EC| + |CD|)} \qquad (2)$$

Da die beiden Tangentenabschnitte von einem Punkt an denselben Kreis gleich lang sind, gilt $|AD| = |DF|$ und $|EF| = |EB|$, somit $|DE| = |AD| + |BE|$ und daher

$$|DE| + |EC| + |CD| = |BE| + |EC| + |CD| + |AD| = |AC| + |BC|,$$

weil *F* ein innerer Punkt des Dreiecks *ABC* ist und deshalb *D* und *E* innere Punkte der Strecken $|\overline{AC}|$ bzw. $|\overline{BC}|$ sind.

Setzen wir dies in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir $\frac{A_{DEI}}{A_{CDE}} = \frac{|DE|}{(|AC|+|BC|)}$. Nach Multiplikation mit (1) gelangen wir zu:

$$\frac{A_{ABF}}{A_{CDE}} = \frac{|DE|^2}{|DE|\cdot(|AC|+|BC|)}$$

Nun gilt nach der Dreiecksungleichung $|AC| + |BC| > |AB|$ und wegen (3) und der Dreiecksungleichung $2 \cdot |DE| = |AD| + |DE| + |EB| > |AB|$.

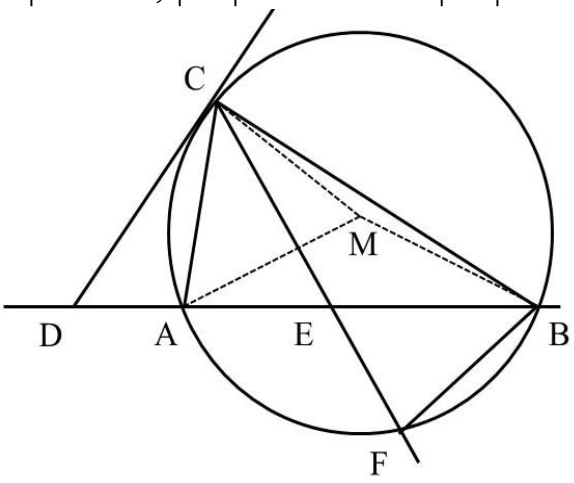
Damit können wir die Verhältnisgleichung der Flächeninhalte fortsetzen zu

$$\frac{A_{ABF}}{A_{CDE}} = \frac{2\cdot|AB|^2}{2\cdot|DE|\cdot(|AC|+|BC|)} < \frac{2\cdot|AB|^2}{|AB|\cdot|AB|} = 2\,. \qquad \square$$

Anmerkung: Untersucht man die verwendeten Dreiecksungleichungen eingehender, so lässt sich leicht zeigen, dass in der Ungleichung $\frac{A_{ABF}}{A_{CDE}} < 2$ die rechte Seite nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

Aufgabe 8.05 – MO540932/MO541032. Eine im Punkt *C* an den Umkreis *ABC* gelegte Tangente schneide die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über *A* hinaus in einem Punkt *D*. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ schneide die Strecke $\overline{AB}$ in *E* und den Bogen $\widehat{AB}$ in *F*.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur aus |*AB*| = 6 cm, |*BC*| = 7 cm und |*CA*| = 5 cm.
b) Beweisen Sie, dass $|AC| = |FB|$ gilt.
c) Beweisen Sie, dass $|DC| = |DE|$ gilt.

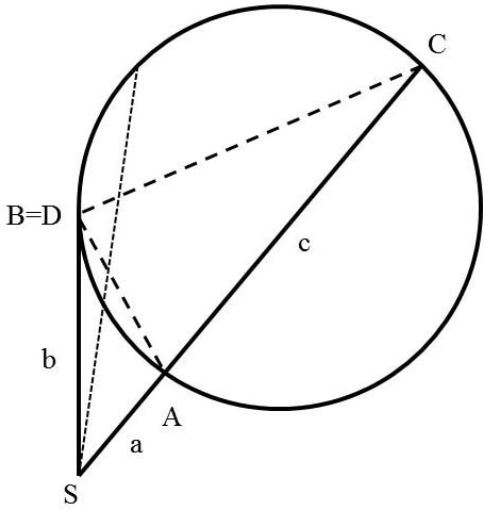


Lösungshinweise zu c): Bezeichnen wir mit γ den Winkel $\sphericalangle ACB$, so gilt $\sphericalangle ACE = \frac{1}{2}\cdot\gamma$ laut Definition des Punktes E. Mit dem **Sehnen-Tangenten-Winkel** $\sphericalangle DCA = \delta$ finden wir $\sphericalangle DCE = \delta + \frac{1}{2}\cdot\gamma$. Der Winkel $\sphericalangle CED$ ist ein Außenwinkel am Dreieck *EBC*, also gilt nach dem Außenwinkelsatz $\sphericalangle CED = \beta + \frac{1}{2}\cdot\gamma$. *MC* steht senkrecht auf der Tangente, also gilt für den Basiswinkel ε im gleichschenkligen Dreieck *AMC* die Beziehung δ + ε = 90°. Andererseits gilt $|\sphericalangle CMA| = 2\cdot\beta$ als Zentriwinkel zu β, also insgesamt

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot(180° - 2\cdot\beta) = 90° - \beta$$

Also folgt δ = β. Deshalb ist das Dreieck *DEC* gleichschenklig mit der Basis $\overline{EC}$ und es gilt die Behauptung $|DC| = |DE|$. $\square$

Thema 08 – Sekanten-Tangenten-Satz



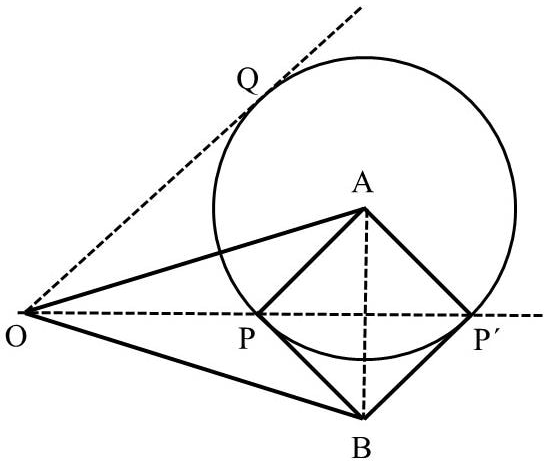
Sekanten-Tangenten-Satz[5] (auch Sehnen-Tangenten-Satz genannt). Jede Tangente von einem Punkt an einem Kreis ist mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekanten-Abschnitten.

Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze lautet der Satz: Es gilt $|\overline{SB}|^2 = |\overline{SA}| \cdot |\overline{SC}|$.

Dieser Satz fand bereits in der 3. MO (Schuljahr 1963/64) seine Anwendung:

Aufgabe 8.06 – MO031043[6]**.** Der „Inversor[7]“ von PEAUCELLIER[8] besteht aus zwei gelenkig verbundenen Stäben *OA* und *OB* derselben Länge, die in *A* und mit einem „Gelenkrombus“ *APBP´* verbunden sind. Es sei $|OA| > |PA|$.

Man zeige, dass das Produkt der Entfernungen $|OP|$ und $|OP'|$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.



Lösungshinweise: Wir betrachten den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass OA festliegt.

Die Punkte *O*, *P* und *P´* liegen auf derselben Geraden, welche Sekante des Kreises mit dem Radius $|PA|$ um *A*. Die Behauptung folgt dann aus dem **Sekanten-Tagenten-Satz**:

$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2,$$

wenn *Q* der Berührungspunkt einer Tangente von *O* an *k* ist. ❑

Aufgabe 8.07 – MO320933. Gegeben sind eine Gerade *g* und auf ihr drei Punkte *A*, *B*, *C*, in dieser Reihenfolge angeordnet.

---

[5] Siehe: „Mathematische Kostproben“, Heft Juli/August 2021. Bekannte Sätze der Mathematik: Sehnen-, Sekanten- und Sekanten-Tangenten-Satz

[6] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

[7] Der Inversor von PEAUCELLIER ist ein Koppelgetriebe zur Überführung einer Kreisbewegung in eine Geradenbewegung und umgekehrt.

[8] CHARLES-NICOLAS PEAUCELLIER (geb. 16. Juni 1832 in Saarlouis; gest. 4. Oktober 1919 in Paris)

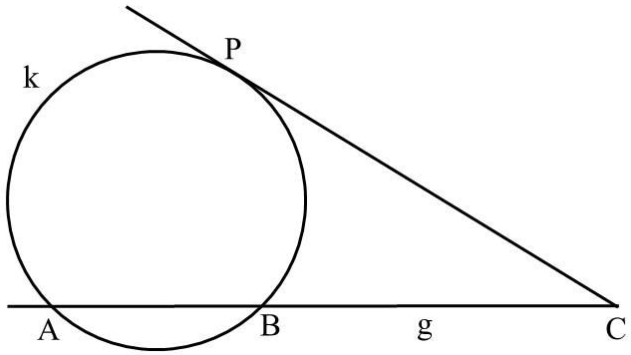
a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}$ und $b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises *k*, der durch *A* und *B* geht und eine durch *C* gehende Tangente besitzt, die auf *g* senkrecht steht.
b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis *c* um *C* gibt, auf dem alle Berührungs-punkte der Tangente liegen, die von *C* an alle diejenigen Kreise *k* gelegt werden, die durch *A* und *B* gehen.

Lösungshinweise zu a): Es seien *M* der Mittelpunkt des geforderten Kreises *k*, *P* der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente vom Punkt *C* und *D* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Dann ist laut Konstruktion dieser Punkte *DCPM* ein Rechteck mit der Seitenlänge (die gleich dem Radius *r* ist)

$$r = |MP| = |DC| = \frac{1}{2} \cdot |AB| + |BC| = \frac{1}{2} \cdot a + b \; .$$

zu b): Ist *P* der Berührungspunkt einer Tangente, die von *C* an einen durch *A* und *B* gehenden Kreis gelegt wird, so gilt nach dem **Sekanten-Tangenten-Satz** die Gleichung $|\overline{CP}|^2 = |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|$. Deshalb liegt *P* auf dem Kreis c um *C* mit dem Radius

$$R = \sqrt{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \sqrt{(a+b) \cdot b}.$$



Damit ist dieser Radius unabhängig von der Lage des Mittelpunktes des durch *A* und *B* gehenden Kreises und der Beweis ist erbracht. ❑

Hinweis: In den Lösungshinweisen zur MO wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Sekanten-Tangenten-Satz als bekannter Sachverhalt zitiert werden darf, dass aber auch über die nachzuweisende Ähnlichkeit der Dreiecke *CPB* und *CAP* die Gleichung selbst hergeleitet werden kann. Die Anwendung des Sekanten-Tangenten-Satzes verkürzt folglich die Lösungsdarstellung erheblich.

Aufgabe 8.08 – MO401024. *AB* sei der Durchmesser eines Kreises *k* und *t* die Tangente in *B* an *k*. Ferner sei *P* ein beliebiger von *B* verschiedener Punkt der Tangente *t*. Die Gerade *AP* schneide den Kreis in einem weiteren Punkt *C*.

Beweisen Sie, dass dann gilt: $|\overline{PA}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{AB}|^2$.

Lösungshinweise: Nach **Sekanten-Tangenten-Satz** gilt $|\overline{PA}| \cdot |\overline{PC}| = |\overline{BP}|^2$. Formen wir die diese Gleichung um, erhalten wir

$$|\overline{BP}|^2 = |\overline{PA}| \cdot |\overline{PC}| = |\overline{PA}| \cdot (|\overline{PA}| - |\overline{AC}|) = |\overline{PA}|^2 - |\overline{PA}| \cdot |\overline{AC}|$$

also $|\overline{PA}|^2 - |\overline{BP}|^2 = |\overline{PA}| \cdot |\overline{AC}|$.

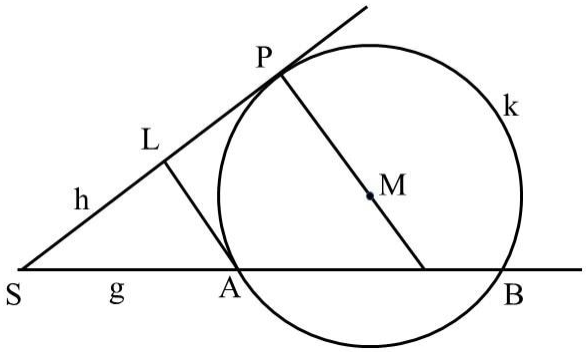
Da das Dreieck *ABP* rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt *B* ist, erhalten wir nach Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS auf der linken Seite der letzten Gleichung unmittelbar die Behauptung. ❑

Hinweis: Auch in dieser Aufgabe kann die Aussage des **Sekanten-Tangenten-Satzes** über den Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke *ABP* und *ACB* direkt hergeleitet werden. Es wurde laut Lösungshinweise sogar akzeptiert, nach Feststellung der beiden rechten Winkel bei *B* bzw. *C* den Satz des EUKLIDs anzuwenden (im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathetenlänge gleich dem Produkt aus der Länge des zugehörigen Hypotenusenabschnitts und der Hypotenusenlänge).

Aufgabe 8.09 – MO501036. Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitelpunkt *S* und den Schenkeln *g* und *h*. Die Punkte *A* und *B* mögen auf dem Schenkel *g* so liegen, dass *A* zwischen *S* und *B* liegt. Der Schnittpunkt der Senkrechten zu *h* durch *A* sei mit *L* bezeichnet. Ein Punkt *P* liege auf dem Schenkel *h* so, dass *h* eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks *ABP* ist.

Zeigen Sie: Falls die Bedingung $\frac{|\overline{SB}|-|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|+|\overline{SA}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{SA}|}$ erfüllt ist, so ist das Dreieck ABP rechtwinklig in P.

Lösungshinweise: Es sei *k* der Umkreis des Dreiecks *ABP* mit dem Mittelpunkt *M*. Die Tangente *h* an *k* steht senkrecht auf dem Berührungsradius $\overline{PM}$. Dieser Radius schneide *g* in *K*. Das Dreieck *ABP* ist rechtwinklig, wenn der Punkt *K* mit dem Mittelpunkt seines Umkreises zusammenfällt. Wir versuchen also, die gegebene Bedingung so umzuformen, dass wir auf *M* = *K* schließen können.



(*Hinweis:* In der Skizze sollte ausdrücklich vermieden werden, bereits der Lösung vorzugreifen und *M* = *K* anzunehmen. Es besteht die Gefahr, dass sonst Zusammenhänge als offensichtlich angesehen werden, die aber im Allgemeinen nicht erfüllt sein müssen. Das könnte zum Ringschluss „Wenn *M* = *K* dann *M* = *K*“ führen.)

Laut Konstruktion ist das Dreieck *SAL* ist zum Dreieck *SKP* ähnlich (Winkelgleichheit aufgrund zweier paralleler Seiten). Ausgehend von der gegebenen Bedingung erhalten wir

$$\left(\frac{|\overline{SB}|-|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|+|\overline{SA}|}\right)^2 = \left(\frac{|\overline{AL}|}{|\overline{SA}|}\right)^2 = \left(\frac{|\overline{KP}|}{|\overline{SK}|}\right)^2 = \frac{|\overline{KP}|^2}{|\overline{SK}|^2} = \frac{|\overline{SK}|^2-|\overline{SP}|^2}{|\overline{SK}|^2}$$

Dabei haben wir bei der rechten Umformung den Satz des PYTHAGORAS im Dreieck *SKP* mit dem rechten Winkel bei *P* angewandt. Wir formen die Ausdrücke um:

$$\left(\frac{|\overline{SB}|-|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|+|\overline{SA}|}\right)^2 = 1 - \frac{4\cdot|\overline{SB}|\cdot|\overline{SA}|}{(|\overline{SB}|+|\overline{SA}|)^2}\,;\, \frac{|\overline{SK}|^2-|\overline{SP}|^2}{|\overline{SK}|^2} = 1 - \frac{|\overline{SP}|^2}{|\overline{SK}|^2}$$

Nach dem **Sekanten-Tangenten-Satz** gilt $|\overline{SP}|^2 = |\overline{SA}| \cdot |\overline{SP}|$. Damit können wir die bisherigen Ergebnisse zusammenfassen:

$$\frac{4 \cdot |\overline{SB}| \cdot |\overline{SA}|}{(|\overline{SB}| + |\overline{SA}|)^2} = \frac{|\overline{SA}| \cdot |\overline{SB}|}{|\overline{SK}|^2}$$

was gleichbedeutend zu $|\overline{SK}| = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{SA}| + |\overline{SB}|)$ ist.

Der Punkt *K* ist also der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Da das Dreieck *SKP* rechtwinklig in *P* ist, steht die Gerade durch *P* und *K* nicht senkrecht auf der Geraden *g* durch *A* und *B*. Also schneidet sie die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ genau in *K*. Da der Umkreismittelpunkt *M* des Dreiecks *ABP* nach Konstruktion von *K* auf der Geraden durch *P* und *K* und bekanntlich auch auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AB}$ liegt, fällt *K* mit *M* zusammen. Damit ist der Innenwinkel des Dreiecks *ABP* bei *P* ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{AB}$ und somit ein rechter Winkel. ❑

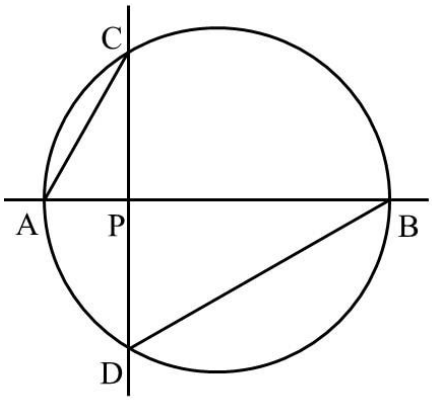
Aufgabe 8.10 – MO391034. Gegeben sei ein Kreis mit dem Durchmesser $d = |\overline{AB}|$. Eine zu *AB* senkrechte Gerade schneidet *AB* in *P* und den Kreis in *C* und *D*. Die Umfänge der Dreiecke *APC* und *BPD* verhalten sich zueinander wie 2 : 1.

Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen das Verhältnis $|\overline{AP}| : |\overline{PB}|$?

Lösungshinweise: Da die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ Sehnen im Kreis sind, gilt nach dem **Sehnensatz** $|\overline{AP}| \cdot |\overline{PB}| = |\overline{CP}| \cdot |\overline{PD}|$. Laut Konstruktion der Punkte *C* und *D* gilt die Gleichheit $|\overline{CP}| = |\overline{PD}|$. Folglich erhalten wir

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \left(\frac{|\overline{CP}|}{|\overline{PB}|}\right)^2$$

d.h. gesucht ist also das Verhältnis $|\overline{CP}| : |\overline{PB}|$.



Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BDC$ als Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne $\overline{BC}$ gleich groß. Zudem sind die Winkel $\sphericalangle CPA$ und $\sphericalangle DPB$ rechte Winkel. Also sind die Dreiecke *APC* und *BPD* ähnlich. Das Verhältnis der Umfänge überträgt sich auf die Verhältnisse einander entsprechender Seiten. Insbesondere gilt deshalb auch $|\overline{CP}| : |\overline{BP}| = 1 : 2$. Somit finden wir $|\overline{AP}| : |\overline{BP}| = 1 : 4$. ❑

Hinweis: Die Anwendung des Sehnen-Satzes ist nicht erforderlich, hilft aber für die Lösungsfindung mit der Angabe des zu bestimmenden Verhältnisses. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *APC* und *BPD* folgt aufgrund des Umfangsverhältnisses für gleichliegende Seiten $|\overline{AP}| : |\overline{CP}| = |\overline{DP}| : |\overline{BP}| = 1 : 2$, also $|\overline{AP}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{CP}|$ und $|\overline{DP}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BP}|$. Wegen $|\overline{CP}| = |\overline{DP}|$ folgt daraus unmittelbar $|\overline{AP}| = \frac{1}{4} \cdot |\overline{BP}|$.

Thema 08 – Sekanten-Tangenten-(Winkel-)Satz – Aufgaben

Aufgabe 8.11 – MO601045. Gegeben sei eine Raute *ABCD* mit $|\sphericalangle DCB| = 60°$. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{CD}$ über *D* hinaus sei ein Punkt *E* beliebig gewählt. Die Gerade durch *E* und *A* schneide die Gerade *BC* im Punkt *F*. *M* sei der Schnittpunkt der Geraden *BE* und *DF*. Wir nehmen an, dass die Gerade *BD* den Umkreis des Dreiecks *MDE* berührt (s. Aufgabe 8.02).

Bestimmen Sie die Länge $|\overline{MB}|$ in Abhängigkeit der Seitenlänge der Raute, wenn $|\sphericalangle FEC| = 30°$ gilt.

Aufgabe 8.12 – MO570932. Eine hölzerne Scheibe hat die Form eines geraden Zylinders mit einer Grundfläche vom Radius *r* und einer Höhe von 5 mm. Von dieser Scheibe wird durch einen ebenen Schnitt senkrecht zur Grundfläche ein Stück abgesägt. Die Schnittfläche beträgt 4 cm². Stellt man das Holzstück auf die Schnittfläche, so ist es 1 cm hoch.

Wie groß ist *r*?

Aufgabe 8.13 – MO081133. Es sei *g* die Gerade durch die voneinander verschiedenen gegebenen Punkt P_1, P_2 sowie *E* eine Ebene durch *g*. Von einem Punkt *Q* auf *g*, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle diejenigen in *E* gelegenen Kreise, die P_1P_2 als Sehne haben, die Tangenten gelegt. Man beweise:

a) Die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen auf ein und demselben Kreis k_Q um *Q*.
b) Sind Q_1 und Q_2 zwei voneinander verschiedene Punkte auf *g*, von denen keiner auf P_1P_2 liegt, so sind k_{Q1} und k_{Q2} punktfremd.

Aufgabe 8.14 – MO501036. Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitel-punkt *S* und den Schenkeln *g* und *h*. Die Punkte *A* und *B* mögen auf dem Schenkel *g* so liegen, dass *A* zwischen *S* und *B* liegt. Der Schnittpunkt der Senkrechten zu *h* durch *A* sei mit *L* bezeichnet. Ein Punkt *P* liege auf dem Schenkel *h* so, dass *h* eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks *ABP* ist.

Zeigen Sie: Falls *ABP* ein in *P* rechtwinkliges Dreieck ist, so ist folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{|\overline{SB}| - |\overline{SA}|}{|\overline{SB}| + |\overline{SA}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{SA}|}$$

Aufgabe 8.15 – Satz über die Winkel im Sehnenviereck. Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck (d.h. die Eckpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises), wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

Beweisen Sie diesen Satz.

62. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 14. bis 24. Juli 2021 in St. Petersburg (Russland) statt. Zum zweiten Mal musste die IMO Corona-bedingt als virtueller Wettbewerb durchgeführt werden – nach der 61. IMO in St. Petersburg sprangen die Organisatoren auch dieses Jahr wieder ein, nachdem der vorgesehene Austragungsort absagen musste.

Mit 64 teilnehmenden Schülerinnen und 555 Schülern aus 107 Ländern lag die Teilnahme nahe an den bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern).

Insgesamt wurden 303 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,9% aller Teilnehmer einen Preis. Mit zwei Gold-, zwei Silber- und einer Bronzemedaille schnitten die deutschen Teilnehmer sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 129 Punkten von 252 möglichen Punkten (51.2%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den beachtlichen **12. Platz** erreichen (2020: 140 Punkte/26. Platz; 2019: 126 Punkte/32. Platz). Angeführt wird diese Länderliste von der Volksrepublik China (208 Punkte, sechs Goldmedaillen), Russland (183 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaille) und der Republik Korea (172 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaille). Von den europäischen Ländern liegen nur die Ukraine, Italien und das Vereinigte Königreich vor Deutschland.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 62. IMO

Aufgabe 1. Es sei $n \geq 100$ eine ganze Zahl. Wanja schreibt die Zahlen n, n+1, ..., 2n auf Karten, jede auf eine eigene Karte. Er mischt diese $n + 1$ Karten und verteilt sie auf zwei Stapel. Man zeige, dass mindestens einer der Stapel zwei Karten enthält, deren Zahlen in Summe eine Quadratzahl ergeben.

Aufgabe 2. Man zeige, dass die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei D ein innerer Punkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB > AC$, für den $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$ gilt. Für den Punkt E auf der Strecke AC gilt $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, für den Punkt F auf der Strecke AB gilt $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, und für den Punkt X auf der Geraden AC gilt $CX = BX$. Es seien O_1 und O_2 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ADC beziehungsweise EXD.

Man beweise, dass die Geraden BC, EF und O_1O_2 durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Aufgabe 4. Es sei Γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt I und $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD und DA den Kreis Γ berühren. Es sei Ω der Umkreis des Dreiecks AIC. Die Verlängerung von BA über A hinaus schneidet Ω in X, und die Verlängerung von BC über C hinaus schneidet Ω in Z. Die Verlängerungen von AD und CD über D hinaus schneiden Ω in Y beziehungsweise T. Man beweise

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Aufgabe 5. Die beiden Eichhörnchen Buschi und Hoppi haben 2021 Walnüsse für den Winter gesammelt. Hoppi nummeriert die Walnüsse von 1 bis 2021 und gräbt 2021 kleine Löcher in den Boden entlang eines Kreises um ihren Lieblingsbaum. Am nächsten Morgen bemerkt Hoppi, dass Buschi in jedes Loch eine Walnuss gelegt hat, aber ohne die Nummerierung zu beachten. Verstimmt beschließt Hoppi, die Walnüsse umzuordnen, und führt dazu eine Folge von 2021 Zügen aus. Im k-ten Zug vertauscht Hoppi die Positionen der beiden Walnüsse, die direkt neben Walnuss k liegen. Man beweise, dass es eine ganze Zahl k derart gibt, dass Hoppi im k-ten Zug zwei Walnüsse a und b mit $a < k < b$ vertauscht.

Aufgabe 6. Es seien $m \geq 2$ eine ganze Zahl, A eine endliche Menge von (nicht notwendigerweise positiven) ganzen Zahlen und $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ Teilmengen von A. Es werde vorausgesetzt, dass für jedes $1 \leq k \leq m$ die Summe der Elemente von B_k genau m^k beträgt. Man beweise, dass A mindestens $m/2$ Elemente enthält.

Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen gelingen werden. Dennoch könnte man sich mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1: Untersuchen Sie, warum die Fragestellungen bei kleineren n (z.B. $n = 10$) nicht gültig ist. Finden Sie drei Zahlen zwischen 100 und 200, bei denen die Summe von je zwei dieser Zahlen eine Quadratzahl ist.

zu Aufgabe 2: Veranschaulichen Sie sich die Ungleichung für $n = 2$ und beweisen Sie diesen Spezialfall.

zu Aufgabe 3: Zeichnen Sie eine Skizze zur Aufgabe und finden Sie eine Vermutung über die Lage des gemeinsamen Punktes in Abhängigkeit von der Figur.

zu Aufgabe 4: Zeichnen Sie eine Skizze zur Aufgabe und prüfen Sie für spezielle Vierecke die Behauptung.

Zu Aufgabe 5: Untersuchen Sie, ob die Fragestellung auch für kleinere Anzahlen an Walnüssen richtig ist.
zu Aufgabe 6: Diskutieren Sie die Fälle $m = 3$ und $m = 4$.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In einem Projekt der Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg werden historische Schriften des 16. bis 18. Jahrhundert digitalisiert und für die Öffentlichkeit zugänglich gezeigt. Das 288-seitige Buch von JOHANN NICOLAUS MÜLLER[9] bietet unter

https://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18/content/titleinfo/11428278

interessante Einblicke in Geometrie des 18. Jahrhunderts. Bezugnehmend zum aktuellen Thema dieses Heftes wurden folgende Auszüge ausgewählt. Dabei wurde versucht, die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beizubehalten.

Dr. Johann Nicolaus Müller. Anweisung zur Geometrie für Anfänger. Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1790.

Capitel IX
Von dem Cirkel

§28.1. (S. 24) In dem vorhergehenden Capitel, lernten wir die Nahmen kennen, die eine Ebene erhält, wenn sie in lauter geraden Linien eingeschlossen wird.
Aus dem 20. §. Erinnern wir uns auch noch sehr wohl, daß zwo gerade Linien keine Fläche einschliessen können; sondern, daß zum wenigsten drey geraden Linien erfordert werden, um eine Ebene damit einzuschliessen.

Mit den krummen Linien aber, ist es ganz anders beschaffen. Wir wollen jetzt gleich zeigen, daß nur eine einzige krumme Linie nöthig ist, um eine Ebene einzuschließen.
Ziehet in einer Ebene eine gerade Linie c a, und stellet euch vor, daß diese gerade Linie in dem Punct c, fest gemacht wäre, so, dass man die Linie c a, um den Punct c, beweglich drehen könnte: so wird der Punct a, in dem die Linie c a, so herum geführet wird, bis sie wieder dahin kommt, wo sie Anfangs war, eine krumme Linie beschreiben, die ein Stück von der ebenen Fläche einschliesset.

Diese krumme Linie, und die ebene Fläche, innerhalb der krummen Linie, machen zusammen einen Cirkel, oder Kreiß.

...

[9] Johann Nicolaus Müller (geb. 1754 in Zweibrücken – gest. 1797 in Göttingen), Theologen, Mathematiker, Physiker, Privatlehrer in Göttingen.

Kapitel XI
Geraden Linien aufeinander senkrecht, oder perpendicular zu setzen

§38.1. Wie man überhaupt auf dem Papier, oder sonst einer ebenen Fläche, geraden Linien zieht, das ist leicht zu lernen.
Die Spitze eines fein gespitzten Bleistifts, nur an der Schärfe eines geraden Lineals, hingeführet, gibt allemal eine gerade Linie.

Die Linie wird desto feiner, oder verdient desto eher den Nahmen einer mathematischen Linie, je spitzer der Bleistift gewesen ist.

Obgleich solche Linie, niemals eine wahre mathematische Linie ist, denn sie ist und bleibt immer lang, breit und dick: so siehet man sie doch so an, als wäre sie wirklich mathematisch, das hißt, als wäre sie nur lang, aber nicht breit, und nicht dick.
Jetzt wollen wir zeigen ...

Kapitel XIX
Tangenten an einen Kreiß zu ziehen.

§81.1. Ist ein Kreiß a b c gegeben, und es soll in einem Punct a desselben, eine Tangente, das ist, eine gerade Linie gezogen werden, die den Kreis in dem Punct a, nur berühret, aber nicht schneidet: so verfahret auf folgende Weise:

Aus des Kreises Mittelpunct c, ziehet den Halbmesser c a:
Hierauf verlängert den Halbmesser soweit nach h zu, bis a h so lang ist, wie a c:
Nehmet alsdenn die ganze Linie c h in den Zirkel, und machet aus den Puncten, c und h, oberhalb c h, und auch unterhalb c h, jedesmal zween Bogen, wovon die Bogen über c h, sich in dem Punct t, die zween Bogen aber unter c h, sich in g, schneiden.
Durch die beyden Durchschnitte, t und g, ziehet die Gerade Linie t g: so wird t g den Kreis in dem Punct a nur berühren, abr nicht schneiden:
Folglich ist t g eine Tangente des Kreises a b c.

Liesse sich aber die gerade Linie, oder der Halbmesser c a, nicht soweit nach h verlängern, daß ah gleich ca würde: so richtet nur ans End des Halbmessers c a, in a eine Perpendicularlinie a t auf:

Das Perpendikel a t wird alsdenn den Kreis in dem Punkt a berühren, aber nicht schneiden: soweit man auch a t rückwärts nach g verlängern würde.

Über die Anzahl der Teiler einer Zahl

Wir können die Anzahl der Teiler einer Zahl formelmäßig ermitteln:

$$T\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}\right) = \left(1+k_1\right) \cdot \left(1+k_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+k_n\right)$$

Wie viele Teiler kann eine dreistellige Zahl maximal haben? Durch systematische Untersuchung der möglichen Fälle (was ist eine geeignete Systematik?) finden wir,

dass $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ mit 32 Teilern das Maximum erreicht. Unter den vierstelligen Zahlen besitzen übrigens die Zahlen 7560 und 9240 die meisten Teiler (jeweils 64).

Überprüfen Sie, dass es unter den drei- bzw. vierstelligen nicht mehr Teiler sein können!

Olympiade-Aufgaben, die sich durch Anwendung der allgemeinen Formel über die Anzahl der Teiler vorteilhaft lösen lassen, waren beispielsweise:

Aufgabe MO301035. Man untersuche, ob es eine Menge *M* von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Keine Zahl aus *M* enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus *M* ist eine Quadratzahl.

Lösungshinweise: Es gibt eine solche Menge. Mit allen elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 kann man folgende zusammengesetzte Zahlen bilden:

$$2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \ldots \cdot 31^{k_{11}} \quad (k_i = 0 \; oder \; 1)$$

Das sind 2^{11}= 2048 verschiedene Zahlen. Keine hat einen Primfaktor größer als 31. Unter diesen Zahlen ist keine mit einer Quadratzahl als Teiler. Folglich erfüllt jede Teilmenge mit 1991 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe. ❑

Aufgabe MO391041. *M* sei die Menge aller derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von fünf aufeinander folgenden positiven geraden Zahlen darstellen lassen.

(a) Ermittle die größte ganze Zahl *t*, die ein Teiler aller dieser Zahlen aus *M* ist.
(b) Ermittle die größte natürliche Zahl *m*, für die gilt, dass jede Zahl aus *M* mindestens *m* positive Teiler hat.
(c) Ermittle die kleinste Zahl aus *M*, die mehr als 200 positive Teiler hat.

Lösungshinweise: Der größte ganze Teiler kann nicht größer sein als jedes Element der Menge *M*. Folglich gilt $t \le 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$. Nun zeigen wir, dass jede der Zahlen aus *M* diesen Teiler besitzt. *t* besitzt 36 Teiler. Alle Zahlen aus *M* haben mindestens diese 36 Teiler, *m* kann aber nicht größer sein, weil 3840 als kleinstes Element genau diese 36 Teiler hat. Um (c) zu beantworten, genügt es mittels der Primfaktorzerlegung der ersten Elemente von *M* die erste Zahl der geforderten Art zu finden. Es ist $14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ mit insgesamt $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ Teilern. ❑

Ohne den Formelansatz zur Berechnung der Anzahl aller Teiler einer Zahl wäre dies eine kaum lösbare Aufgabe. In der Musterlösung für die Korrektur wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der **Satz über die Anzahl der Teiler** einer Zahl vom Schüler als bekannt vorausgesetzt und zitiert werden darf.

Über die Summe aller Teiler einer Zahl

Es sei $S(n)$ die Summe aller Teiler der natürlichen Zahl n. Wir untersuchen das Verhältnis $v(n) = \frac{S(n)}{n}$ und entscheiden, ob $v(n)$ beliebig groß werden kann.

Da die Zahl selbst Teiler von sich ist, gilt stets $v(n) \geq 1$. Betrachten wir Primzahlen p, so finden wir $v(p) = \frac{1+p}{p} = 1 + \frac{1}{p}$, also einen Wert nahe 1. Untersuchen wir nun aus Primzahlen zusammengesetzte Zahlen, $n = p_1 \cdot p_2$, so wächst das Verhältnis:

$$v(p_1 \cdot p_2) = \frac{1 + p_1 + p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_2} = 1 + \frac{1}{p_1 \cdot p_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

Für $n = 2 \cdot 3 = 6$ erhalten wir das Maximum für diese Zahlen, $v(6) = 2$, die vollkommen Zahl. Für $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ erhalten wir schon $v(30) = 2{,}4$. Wir könnten deshalb vermuten, dass der Wert $v(n)$ besonders groß wird, wenn n möglichst viele Teiler besitzt. Für $n = k^m$ können wir diese Vermutung bestätigen:

$$v(n) = \frac{\sum_{i=1}^{m} k^i}{k^m} = \frac{k^{m+1}-1}{k^m} = k - \frac{1}{k^m}.$$

Der Wert von $v(k^m)$ ist folglich nahe k. Wir müssen also nur k groß genug wählen, damit $v(n)$ ebenfalls groß wird. Auch für $n = k!$ finden wir eine interessante Abschätzung, wenn wir nur einige Teiler berücksichtigen:

$$v(k!) = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + k!}{k!} > \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i}}{k!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

Die Summe der rechten Seite ist der Beginn der harmonischen Reihe, die trotz der immer kleiner werdenden Summanden beliebig groß werden kann. Um dies nachzuweisen, formen wir die Reihe wie folgt um ($k > 8$):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{k}$$

Wir sehen, wenn k nur groß genug ist, werden so viele Summanden mit Werten größer als ½ addiert, dass die Summe eine beliebig vorgegebene Zahl übersteigt.

Inhaltsverzeichnis Heft Sept. 2021

Vorwort 2
Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen 2
Thema 08 – Sehnen-Tangenten-Winkelsatz 5
Thema 08 – Sekanten-Tangenten-Satz 9
Thema 08 – Sekanten-Tangenten-(Winkel-)Satz – Aufgaben 13
62. Internationale Mathematik-Olympiade 14
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Über die Anzahl der Teiler einer Zahl 17
Über die Summe aller Teiler einer Zahl 19

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[10]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben-bezug**
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

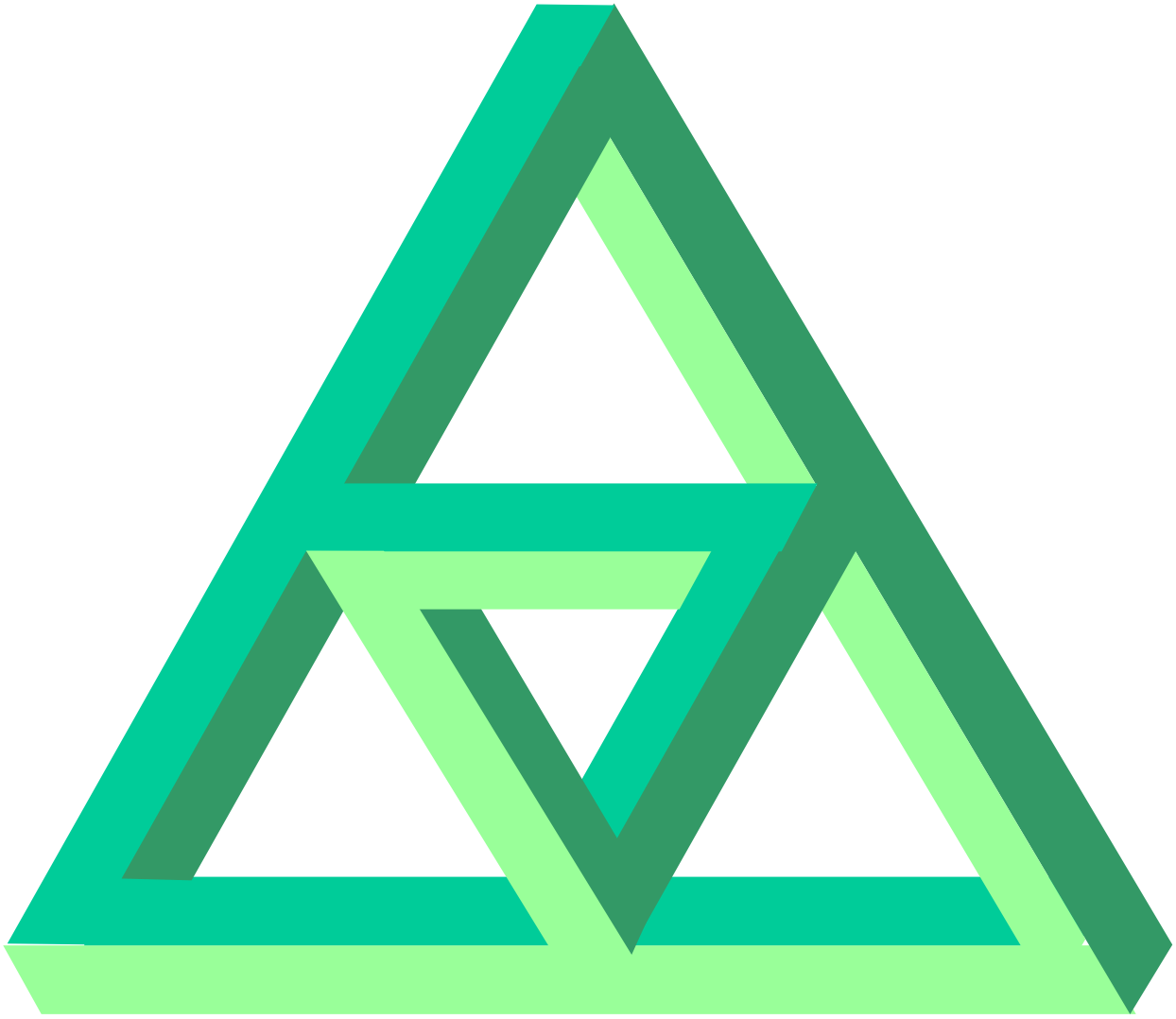
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Oktober 2021 20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10 haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Mit einem statistischen Blick wird die Entwicklung der Wettbewerbe beleuchtet. Auszüge aus alten Büchern über Mathematik sollen unterhaltsam Einblicke in der Mathematikgeschichte geben.

In diesem Heft blicken wir in Thema 09 auf die Bundesrunde der 60. MO zurück. Einerseits ist der Unterschied im Schwierigkeitsgrad der Aufgaben **MO600945** und **MO601046** bemerkenswert. Andererseits wird in den Lösungshinweisen zur Aufgabe **MO601046** ausdrücklich auf die Aufgabe **MO601033** verwiesen – eine Motivation für intensive Nachbereitung von MO-Aufgaben.

Angeregt durch die Aufgabe **MO611012** greifen wir noch einmal das Thema 01 auf. Obwohl zur Lösung dieser Aufgabe keine Fertigkeiten im Umgang mit Funktionalgleichungen erforderlich waren, könnte die Vertiefung der Thematik für ähnliche Fragestellungen förderlich sein.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich das Thema 07 in der Aufgabe **MO611011** wiederfand.

Thema 09 – Pythagoreische Zahlentripel

Aufgabe 9.01 – MO600945[1]. Untersuchen Sie, ob es eine fünfgliedrige Folge $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2)$ von Quadraten positiver ganzer Zahlen gibt, bei der jedes Folgenglied, beginnend mit dem dritten, die Summe der beiden vorangehenden Folgenglieder ist.

Hinweis: Es gibt unendlich viele dreigliedrige Folgen (a_1^2, a_2^2, a_3^2) mit dieser Eigenschaft, also mit $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2$, die pythagoräischen Zahlentripel.

Lösungshinweise: Nehmen wir an, es gäbe eine Folge $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2)$ von Quadraten positiver ganzer Zahlen, für die

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2, a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 \text{ und } a_3^2 + a_4^2 = a_5^2 \qquad (1)$$

gilt. Haben a_1 und a_2 einen gemeinsamen Teiler d, so folgt aus (1), dass auch a_3, a_4 und a_5 diesen Teiler haben. Dann hat die durch d geteilte Folge ebenfalls die Eigenschaft (1). Zu jeder Folge von Quadratzahlen, die (1) erfüllt, gibt es also eine solche Folge, in der a_1 und a_2 teilerfremd sind.

Wir untersuchen nun, ob es eine Folge mit der Eigenschaft (1) gibt, in welcher a_1 und a_2 teilerfremd sind, und verwenden im Weiteren die Eigenschaft, dass eine gerade Quadratzahl durch 4 teilbar ist und eine ungerade Quadratzahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt.

Die Zahlen a_1 und a_2 können nicht beide ungerade sein, denn dann ließe $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$ bei Division durch 4 den Rest 2. Also ist eine der beiden Zahlen a_1 und a_2 gerade und die andere ungerade. Daraus folgt, dass a_3 ungerade ist. a_2 kann nicht ungerade sein, denn sonst ließe $a_4^2 = a_2^2 + a_3^2$ bei Division durch 4 den Rest 2.

Also ist a_1 ungerade und a_2 gerade, folglich neben a_3 auch a_4 ungerade. Wegen $a_3^2 + a_4^2 = a_5^2$ ließe dann aber a_5^2 bei Division durch 4 den Rest 2. Das ist nicht möglich.

Unsere Annahme führt also in jedem Fall auf einen Widerspruch. Folglich kann es keine fünfgliedrige Folge $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2)$ von Quadratzahlen mit der Eigenschaft (1) geben. ❑

Aufgabe 9.02 – MO280931. Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist.

---

[1] [1] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

Lösungshinweise: Ist eine Zahl nicht durch 5 teilbar (lässt also bei Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3 oder 4), so lässt das Quadrat dieser Zahl bei Division durch 5 einen der Reste 1 oder 4: $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9 = 5 + 4$, $4^2 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$.

Ist bereits eine der beiden Zahlen durch 5 teilbar, ist nichts weiter zu beweisen. Wir nehmen deshalb an, dass beide Zahlen a und b nicht durch 5 teilbar sind. Die Quadrate beider Zahlen können jedoch nicht beide gleichzeitig den Rest 1 bei Division durch 5 lassen, weil es keine Zahl c gibt, deren Quadrat bei Division den Rest $1 + 1 = 2$ lässt. Die Quadrate beider Zahlen können aber auch nicht beide gleichzeitig den Rest 4 bei Division durch 5 lassen, weil es keine Zahl c gibt, deren Quadrat bei Division durch 5 den Rest $4 + 4 = 8 = 5 + 3$ lässt. Folglich lässt bei Division durch 5 eine dieser Quadratzahlen den Rest 1 und die andere den Rest 4. Dann ist aber deren Summe c^2 durch $1 + 4 = 5$ teilbar. Weil 5 eine Primzahl ist, ist damit auch c durch 5 teilbar. ❑

Aufgabe 9.03 – MO101022. Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Es ist zu beweisen, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2 \cdot m \cdot n,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist.

Lösungshinweise: Der Nachweis der geforderten Eigenschaft wird in gleicher Weise wie eben bewiesen. Ist mindestens einer der Zahlen m und n durch 5 teilbar, so ist x durch 5 teilbar. Sind m und n beide nicht durch 5 teilbar, so haben ihre Quadrate entweder gleiche Reste (jeweils 1 oder 4) – dann ist y durch 5 teilbar – oder sie haben verschiedene Reste (1 und 4) – dann ist z durch 5 teilbar. ❑

Der Zusammenhang zwischen der Formulierung in Aufgabe MO101022 und den pythagoreischen Zahlentripel wurde in folgender Aufgabe thematisiert.

Aufgabe 9.04 – MO121122. Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.

a) Man beweise, dass dann $x = uv$, $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$ und $z = \frac{u^2 + v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d.h. dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel ist.
b) Man gebe je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt.

Nun war in der 60. MO die Umkehrung der Teilaufgabe a) zu beweisen.

Aufgabe MO601033. Einen Punkt im kartesischen Koordinatensystem nennen wir rational, wenn beide Koordinaten rationale Zahlen sind. Eine Gerade nennen wir rational, wenn sie einer Gleichung $ux + vy = w$ mit ganzen Zahlen u, v und w genügt, wobei u und v nicht gleichzeitig null sein dürfen.

Wir betrachten nun den Einheitskreis, beschrieben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

a) Weisen Sie nach, dass jede rationale Gerade, die den Einheitskreis nicht tangiert, mit dem Kreis entweder keinen oder genau 2 gemeinsame rationale Punkte hat.

b) Zeigen Sie, dass jeder von $(-1,0)$ verschiedene rationale Punkt des Einheitskreises auf einer rationalen Geraden durch den Punkt $(-1,0)$ liegt. Bestimmen Sie anschließend die Koordinaten dieses rationalen Punktes in Abhängigkeit von den Parametern v und w der Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ der zugehörigen rationalen Geraden.

c) Zeigen Sie: Zu jedem Zahlentripel (a, b, c) nichtnegativer ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und einander teilerfremden a und b, wobei b gerade ist, existieren zwei teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $0 \leq w < v$ derart, dass $a = v^2 - w^2$, $b = 2 \cdot v \cdot w$ und $c = v^2 + w^2$ gilt.

Lösungshinweise Teil c) Es seien a, b, c nichtnegative ganze Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ derart, dass a und b zueinander teilerfremd sind und b gerade ist. Wir betrachten zunächst den Fall $b = 0$. Weil a zu b teilerfremd ist, folgt $a = 1$ und somit $c = 1$. Die Zahlen $v = 1$ und $w = 0$ haben die gewünschten Eigenschaften.

Nun sei $b > 0$. Dann ist auch $c > 0$, und $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ ist ein von $(-1, 0)$ verschiedener rationaler Punkt des Einheitskreises. Gemäß Aufgabenteil b) gibt es also teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $v > 0$ und $\frac{a}{c} = \frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}$, $\frac{b}{c} = \frac{2vw}{v^2+w^2}$. Wegen $b, c > 0$ ist mit v auch w positiv, und aus den beiden Gleichungen folgt durch Division $\frac{a}{b/2} = \frac{v^2-w^2}{vw}$. Da v und w teilerfremd sind, ist $v^2 - w^2$ zu v, zu w und damit auch zu v w teilerfremd. Weil auch a zu $\frac{b}{2}$ teilerfremd ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Bruchdarstellung von positiven rationalen Zahlen als Quotient zweier teilerfremder positiver Zahlen, dass $a = v^2 - w^2$ und $\frac{b}{2} = vw$, also $b = 2vw$ ist. Aus (5) folgt dann direkt $c = v^2 + w^2$. Weil b gerade ist und a teilerfremd zu b, muss a ungerade sein und deshalb $a > 0$ gelten. Aus $a = v^2 - w^2$ folgt also $w < v$. Die Zahlen v und w haben also die gewünschten Eigenschaften. ❑

Auf dem ersten Blick erscheint der Unterschied der folgenden Aufgabe zur Aufgabe MO600946 nicht so groß, aber die Beschränkung auf eine viergliedrige Folge anstatt der fünfgliedrigen Folge erfordert einen anderen Lösungsansatz.

Aufgabe MO601046. Beweisen Sie: Es gibt keine vier positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, für die $a^2 + b^2 = c^2$ und $b^2 + c^2 = d^2$ gilt.

Lösungshinweise: Ein primitives pythagoreisches Tripel (ppT) ist ein Tripel (a, b, c) paarweise teilerfremder positiver ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$.

Im Weiteren werden die folgenden bekannten Sätze über derartige Tripel benutzt:

- (P1) Ist (a, b, c) ein beliebiges pythagoräisches Tripel positiver ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und ist g der größte gemeinsame Teiler zweier dieser Zahlen, dann ist g auch ein Teiler der dritten Zahl und $\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}, \frac{c}{g}\right)$ ist ein ppT.
- (P2) In einem ppT (a, b, c) ist genau eine der Zahlen a oder b gerade, c ist ungerade.
- (P3) (a, b, c) ist genau dann ein ppT mit geradem b, wenn es zwei teilerfremde positive ganze Zahlen m, n gibt mit $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Hinweis: Obwohl es im Text als „bekannte Sachverhalte“ genannt wurde, sollten die drei Aussagen bewiesen werden. Allerdings reichte es in der Schülerlösung für (P3) aus, auf die Lösung der Aufgabe 601033 c) zu verweisen.

Nehmen wir an, es gäbe vier Zahlen gemäß der Aufgabenstellung. Dann betrachten wir vier solche Zahlen a, b, c, d mit minimalem c. Dann sind (a, b, c) und (b, c, d) ppT wegen (P1), also sind c und d ungerade wegen (P2). Es folgt, dass b gerade und a ungerade ist. Auch a und d sind teilerfremd, denn wäre p ein gemeinsamer (ungerader) Primteiler von a und d, so wäre $d^2 - a^2 = 2b^2$ durch p^2, also b^2 und damit auch b durch p teilbar, und (a, b, c) wäre wegen (P1) kein ppT.

Gibt es ein Quadrupel, welches die Aufgabenstellung erfüllt, so gibt es also auch vier positive ganze Zahlen a, b, c, d, für die gilt:

$c^2 - b^2 = a^2$,	(1)
$c^2 + b^2 = d^2$,	(2)
a, b, c, d sind paarweise teilerfremd,	(3)
a, c, d sind ungerade und b ist gerade	(4)
und c ist minimal mit diesen Eigenschaften (1)–(4).	(5)

Aus diesen Annahmen wollen wir einen Widerspruch herleiten. Multiplikation von (1) und (2) ergibt $c^4 - b^4 = a^2 d^2$ und damit die pythagoreische Gleichung $(ad)^2 + (b^2)^2 = (c^2)^2$. Wegen (3) und (4) gibt es deshalb nach (P3) teilerfremde positive ganze Zahlen m, n ($m > n$, m ungerade, n gerade) mit

$$ad = m^2 - n^2 \;\; ; \;\; b^2 = 2mn \;\; ; \;\; c^2 = m^2 + n^2$$

Somit ist (m, n, c) ein ppT mit geradem n. Es gibt deshalb teilerfremde positive ganze Zahlen p, q verschiedener Parität mit $m = p^2 - q^2$, $n = 2pq$, $c = p^2 + q^2$. Setzen wir m und n in b^2 ein, finden wir

$$b^2 = 2mn = 2(p^2 - q^2)2pq = 4(p - q)p(p + q)q \; .$$

Daher muss das Produkt $(p - q)p(p + q)q$ ein Quadrat sein. Da p und q teilerfremd und von verschiedener Parität sind, sind alle vier Faktoren des Produkts paarweise teilerfremd, also ist jeder von ihnen ein Quadrat. Wir setzen nun $r^2 = p - q$, $s^2 = q$, $t^2 = p$, $u^2 = p + q$. Dann sind r, s, t, u vier positive ganze Zahlen mit $r^2 + s^2 = t^2$ und $s^2 + t^2 = u^2$. Nun gilt aber $c = p^2 + q^2 > p^2 \geq p = t^2 \geq t$, und das ist ein Widerspruch zur Minimalität von c. ❑

Thema 01 –Funktionalgleichungen (Teil III): Periodische Funktionen[2]

In der **Aufgabe MO611012** wird die Schreibweise für Funktionalgleichungen verwendet. Es sind die Werte von z mittels

$$z = f(a) + f(a+1) + f(2a+3)$$

zu berechnen mit $f(x) = 3x + 7$. Für die Lösung dieser Olympiade-Aufgabe sind Zusammenhänge über Funktionalgleichungen allerdings nicht erforderlich. Es genügt, z explizit als Funktion von x darzustellen, um die Antworten auf die Teilaufgaben a) bis d) zu finden. Im Rückblick auf das **Thema 01 Funktionalgleichungen (Teil II)[3]** wollen wir jedoch folgende Frage untersuchen:

Aufgabe 1.11. Finden Sie alle monotonen[4] reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und die folgende Gleichungen erfüllen:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 7;\ f(1) = 10.$$

Lösungshinweise: Da wir in der gegebenen Gleichung die Grundstruktur der CAUCHYschen Funktionalgleichung erkennen, vermuten wir eine ähnliche Lösung und verwenden einen Substitutionsansatz. Wir definieren die Funktion $g(x) = f(x) - 7$ mit $g(1) = 3$. Für die Funktion g gilt

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - 7 = (f(x) + f(y) - 7) - 7 \\ &= (f(x) - 7) + (f(y) - 7) \ = \ g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Also erfüllt g die CAUCHYsche Funktionalgleichung und somit gilt $g(x) = cx$ mit dem Koeffizient $c = g(1) = 3$. (Die Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung darf als bekannt angegeben werden, wenn in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich formuliert wurde, dass diese Lösung hergeleitet werden soll.)

Also kann nur $f(x) = 3x + 7$ Lösung der Funktionalgleichung sein. ❑

Um den Umgang mit Funktionalgleichungen zu vertiefen, betrachten wir die

Definition. Die reelle Funktion $f: R \to R$ heißt periodisch mit der Periode $a \neq 0$, wenn für alle reellen Zahlen $x \in R$ die Gleichung $f(x+a) = f(x)$ erfüllt ist.

Die trigonometrischen Funktionen gelten sicher als die bekanntesten periodischen Funktionen und viele Eigenschaften lassen sich an diesen Funktionen demonstrieren. Aber auch in der Mathematik-Olympiade wurden häufig Aufgaben über periodische Funktionen gestellt. Zur Erklärung war jeweils ein Hinweis im Sinne obiger Definition angefügt.

---

[2] Nach Sprengel, H.-J.; Wilhelm, O.: Funktionen und Funktionalgleichungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984.

[3] Mathematische Kostproben, Heft Januar 2021

[4] Die Eigenschaft der Monotonie wird hier verwendet, um den Definitionsbereich der Funktionen von rationalen Zahlen auf reelle Zahlen erweitern zu können.

Aufgabe 1.12 – MO141232. Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1}$$

a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist.
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an!

Lösungshinweise: a) Als Lösungsansatz vermuten wir, dass $2p$ eine Periode ist und berechnen der Wert der Funktion f an der Stelle $x + 2p$:

$$f(x+2p) = \frac{f(x+p)}{3 \cdot f(x+p) - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1}}{3 \cdot \frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1} - 1}$$

Durch Zusammenfassen auf der rechten Seite erhalten wir für alle x tatsächlich $f(x+2p) = f(x)$. Folglich ist $2p$ eine Periode der Funktion f.

b) Die Existenz solcher Funktionen ist durch Angabe eines konkreten Beispiels nachgewiesen (und wird wie hier in den Wettbewerbsaufgaben meist gefordert). Dabei ist die Konstruktion recht einfach: Ist ein Zusammenhang für die Funktionswerte $x + a$ für um a verschobene Argumente x bekannt, so haben die angegebenen Beispiele stets die Form

$$f(x + a) = F(f(x)),$$

d.h., die weiteren Funktionswerte ergeben sich durch eine geeignete Funktion F von $f(x)$. Deshalb genügt es, im Intervall $0 \leq x < a$ die Funktion $f(x)$ beliebig zu definieren und dann die Werte im Intervall $a \leq x < 2a$ mittels F zu berechnen. Nutzen wir beispielsweise im ersten Intervall eine Konstante, wird auch für das zweite Intervall eine Konstante entstehen.

Setzen wir (willkürlich) $f(x) = 1$ im Intervall $[0, p)$, so finden wir für das Intervall $[p, 2p)$ für $0 \leq x < p$ die Funktionswerte

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$$

Verwenden wir noch einmal die Funktionalgleichung, erhalten wir im Intervall $[2p, 3p)$ für $0 \leq x < p$ die Funktionswerte

$$f(x+2p) = \frac{f(x+p)}{3 \cdot f(x+p) - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} = 1$$

und können $2p$ als Periode bestätigen.

An der Stelle $x = p$ ist ein Sprung notwendig, wenn f nicht eine konstante Funktion sein soll. Im Falle $f(x) = \frac{2}{3}$ würden wir dagegen eine konstante Funktion erhalten, weil auch $f(x + p)$ den Wert $\frac{2}{3}$ annimmt.

Mit einem linearen Ansatz im ersten Intervall gelingt es, eine nichtkonstante Funktion f ohne solche Sprünge zu konstruieren, wenn die Koeffizienten geeignet gewählt werden. Dazu setzen wir zunächst $f(x) = mx + n$ mit reellwertigen Koeffizienten m und n. Offensichtlich gilt $f(0) = n$ und $f(p) = mp + n$. Wir können aber den Funktionswert für p auch über die Funktionalgleichung bestimmen:

$$mp + n = f(p) = f(0 + p) = \frac{f(0)}{3 \cdot f(0) - 1} = \frac{n}{3n - 1}$$

Legen wir nun (willkürlich) $m = -\frac{1}{2p}$ fest, erhalten wir eine Gleichung für n:

$$-\frac{1}{2} + n = \frac{n}{3n - 1}$$

für die wir $n = 1$ als eine Lösung erkennen. Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2p} + 1$ leistet das Gewünschte: Es ist $f(p) = \frac{1}{2}$ und $f(0 + p) = \frac{f(0)}{3 \cdot f(0) - 1} = \frac{1}{2}$, d.h. an der Stelle p stimmen die Funktionsabschnitte überein. ❑

Aufgabe 1.13 - MO051222. Es sei a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.
2. Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt $f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$.

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist.
b) Geben Sie für $f(x)$ einen rechnerischen Ausdruck an, der die obigen Eigenschaften hat!

Lösungshinweise: a) Als ersten Lösungsversuch vermuten wir wieder, dass $2a$ eine Periode sei und berechnen den Wert der Funktion f an der Stelle $x + 2a$:

$$f(x + 2a) = \frac{1 + f(x + a)}{1 - f(x + a)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = \frac{\frac{1 - f(x) + 1 + f(x)}{1 - f(x)}}{\frac{1 - f(x) - 1 - f(x)}{1 - f(x)}} = \frac{1}{f(x)}$$

Offenbar kann $2a$ keine Periode sein, jedoch finden wir für $4a$ den Zusammenhang

$$f(x+4a) = \frac{1}{f(x+2a)} = f(x)$$

Also erweist sich der Wert $4a$ als Periode der Funktion f.

b) Wir suchen wieder eine stückweise konstante Funktion und definieren in dieser Aufgabe (willkürlich) für das Intervall $[0, a)$ den Wert $f(x) = 2$. Nach obiger Funktionalgleichung gilt dann im Intervall $[a, 2a)$

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

Ohne die obige Herleitung zu verwenden berechnen wir die Funktionswerte im Intervall $[2a, 3a)$ und $[3a, 4a)$ entsprechend der Funktionalgleichung:

$$f(x+2a) = f(x+a+a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x+3a) = f(x+2a+a) = \frac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

In beiden Fällen erkennen wir, dass wir tatsächlich für den Funktionswert an der Stelle $x + 2a$ das Reziproke des Funktionswertes an der Stelle x erhalten. ❑

Offensichtlich gilt für periodische Funktionen folgende Eigenschaft: Ist a eine Periode, dann ist $2a$ ebenfalls eine Periode, denn es gilt für alle x

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = f(x+a) = f(x)$$

Verallgemeinernd gilt sogar

Aufgabe 1.14. Die Zahlen $a_1,\ a_2$ seien Perioden der Funktion f. Dann ist für beliebige ganzzahlige Zahlen m und n die Zahl $a_3 = m \cdot a_1 + n \cdot a_2$ ebenfalls eine Periode von f (falls $a_3 \neq 0$).

Lösungshinweise: Zum Beweis führen wir ohne Probleme mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion den Nachweis, dass mit a auch jedes ganzzahlige Vielfache von a eine Periode ist. Dann genügt noch nachzuweisen, dass für zwei Perioden a, b auch deren Summe eine Periode ist. Dazu finden wir für alle reellen Zahlen x des Definitionsbereiches

$$f(x+(a+b)) = f((x+a)+b) = f(x+a) = f(x).$$

❑

Thema 01 – Funktionalgleichungen (Teil III) – Aufgaben

Aufgabe 1.15 – MO111032. Eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, sei periodisch mit der Periode P. Die kleinste positive Zahl, die Periode von f ist, sei p. Jede weitere Periode P ist dann ein ganzzahliges Vielfaches von p. Welche kleinste Periode hat dann die Funktion

a) $F(x) = \frac{1}{2} f(x)$ b) $G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$?

Aufgabe 1.16. Die folgenden Funktionen f seien jeweils für alle reellen Zahlen x definiert. Man zeige, dass sie periodisch sind, ermittle die kleinste Periode und gebe für (a) bis (c) ein konkretes Beispiel an.

a) $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x)$

b) $f(x+1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$

c) $f(x+1) = \sqrt{4 - f(x)^2}$

d) $f(x) = (-1)^{[x]}$

e) $f(x) = x - [x]$

(Hinweis: $[z]$ bezeichne die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

Aufgabe 1.17. Die Funktionen f_1, f_2 seien periodisch mit den Perioden a_1 beziehungsweise a_2. Wenn ganze Zahlen m, $n \neq 0$ mit $m \cdot a_1 = n \cdot a_2$ existieren (also der Bruch $\frac{a_1}{a_2}$ eine rationale Zahl ist) dann sind

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$f_4(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$
$$f_5(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad falls \quad f_2(x) \neq 0$$

ebenfalls periodische Funktionen mit der Periode $a_3 = m \cdot a_1 = n \cdot a_2$.

Pythagoreische 4-Tupel [5]

Quadrupel (*a, b, c, d*) von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ nennt man *Pythagoreische Zahlenquadrupel* oder kurz P-4-Tupel.

Es interessieren hier nur Quadrupel ohne gemeinsamen Teiler (da wir andernfalls alle 4 Zahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren könnten). Ein teilerfremdes P-4-Tupel, also mit ggT(*a;b;c;d*) = 1, kann höchstens zwei Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler enthalten und wird aus geraden und ungeraden Zahlen bestehen. Es sind folglich folgende Fälle denkbar:

(1) Alle Zahlen eines P-4-Tupel sind geradzahlig. Dann enthalten alle Zahlen den Faktor 2 und das P-4-Tupel ist nicht teilerfremd.

(2) Die Zahlen *a*, *b* und *c* sind ungerade und folglich auch *d*. Somit gibt es ganze Zahlen *a', b', c'* und *d'*, so dass die Gleichung

$$(2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 + (2c' + 1)^2 = (2d' + 1)^2$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot \left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + a' + b' + c'\right) + 2 = 4 \cdot d' \cdot (d' + 1)$$

erkennen wir, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (2), in dem alle Zahlen des P-4-Tupel ungeradzahlig sind, ist also nicht möglich.

(3) Zwei der Zahlen *a*, *b* und *c* sind ungerade, die dritte und folglich auch *d* sind gerade. Wir betrachten also o.B.d.A. den Fall

$$(2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 + (2c')^2 = (2d')^2.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot \left(a'^2 + b'^2 + a' + b'\right) + 2 = 4 \cdot \left(d'^2 - c'^2\right)$$

erkennen wir ebenso, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (3) ist also ebenfalls nicht möglich.

Da es P-4-Tupel gibt, z.B. (1 ; 4 ; 8 ; 9), gilt wegen (1) bis (3): In einem P-4-Tupel ist genau eine der Zahlen *a, b* und *c* ungerade, die anderen beiden Zahlen sind gerade. Dann ist *d* ungeradzahlig. ❑

Satz. In einem teilerfremden P-4-Tupel (a, b, c, d) ist mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar.

[5] Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173

Beweis: Ist *a, b* oder *c* durch 3 teilbar, wäre nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, keine der drei Zahlen *a, b* und *c* sei durch 3 teilbar. Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 3 stets den Rest 1. Wenn jede Quadratzahl a^2, b^2 und c^2 den Rest 1 lässt, dann lässt deren Summe den Rest 3 bei Division durch 3. Folglich ist d^2 und damit auch *d* durch 3 teilbar.

Satz. Ist eine der geraden Zahlen eines P-4-Tupel durch 4 teilbar, so ist auch die andere gerade Zahl des P-4-Tupel durch 4 teilbar.
Beweis: Seien $a = 4a' \pm 1$ und $d = 4d' \pm 1$ die ungeraden Zahlen des P-4-Tupels, dann ist wegen

$$b^2 + c^2 = d^2 - a^2 = 16d'^2 \pm 8d' + 1 - \left(16a'^2 \pm 8a' + 1\right)$$
$$= 8 \cdot \left(2\left(d'^2 - a'^2\right) \pm d' \mp a'\right)$$

die Summe der beiden geradzahligen Quadrate des PQ durch 8 teilbar. Ist eine dieser Zahlen durch 4 teilbar, dann ist deren Quadrat durch 16 teilbar und folglich muss auch das Quadrat der anderen Zahl mindestens durch 8 (und deshalb durch 16) teilbar sein. Damit ist auch die zweite gerade Zahl durch 4 teilbar. ❑

Wir suchen nun ein Verfahren zur Erzeugung aller P-4-Tupel in einem vorgegebenen Zahlenbereich. Aufgrund der Umformung $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$ können wir uns auf solche Zwischenwerte beschränken, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Nicht jede natürliche Zahl hat diese Eigenschaft. Durch Probieren finden wir schnell, dass z.B. 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 – 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Allgemein gilt:

Satz. Eine natürliche Zahl *m* lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

(a) $m = \prod_{j=1}^{k} {p_j}^{a_j}$ (wobei die Faktoren p_j Primzahlen der Form $4n + 1$ und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)
(b) $m = 2 \cdot a^2$
(c) $m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$
(d) $m = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ (mit natürlichen Zahlen *n, r, a, b*)

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$
$$n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) = (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2$$
$$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$ ❑

Satz. Eine natürliche Zahl *m* lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder
(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Beweisskizze: Leicht sehen wir den Fall (a), denn ist $2k + 1$ eine ungerade natürliche Zahl, so gilt: $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Der Teil (b) erweist sich als wesentlich komplexer und sei hier ohne Beweis angegeben.

Unter Anwendung beider Aussagen finden wir durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen und somit zu P-4-Tupeln führen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 38 P-4-Tupel. Ordnen wir diese P-4-Tupel nach der Größe der vierten Zahl *d*, so stellen wir fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätte wir das Suchverfahren bis $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$ führen müssen!

Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d < 50$ zu finden? Wegen $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$ wird *m* in zwei Faktoren $d + c = t_1,\ \ d - c = t_2,\ \ t_1 \geq t_2,$ zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit $(m; 1)$ und $\left(\sqrt{m}; \sqrt{m}\right)$ gegeben. Die Zahl *d* erhalten wir daraus als $d = \frac{t_1 + t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller P-4-Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen *m* bis 2401 zu untersuchen.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [6]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk

[6] www.jugend-forscht.de

des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[7] Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu 3 Schülern können Mädchen und Jungen bis 16 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 16 und 22 Jahre („Jugend forscht“) teilnehmen. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung der Forschungsergebnisse vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb (falls das Pandemie-Geschehen eine Präsenzveranstaltung wieder zulässt) öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmern Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2017/18	12.069	*Merck KGaA Darmstadt*
2018/19	12.150	*Fraunhofer-Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik Chemnitz*
2019/20	11.768	*ÖVB-Arena Bremen (ausgefallen)*
2020/21	8.998	*Experimenta gGmbH Heilbronn (Online-Veranstaltung)*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch wieder im Jahr 2021 bundesweit mit 730 Teilnehmern (8.1%) beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft und deutlich weniger als im FG Physik (1185) oder FG Technik (1712). In Sachsen waren es immerhin 18.2% aller Teilnehmer der 1. Runde (Regionalausscheide), die sich mit Projekten in Mathematik/Informatik beschäftigen.

[7] Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Sowohl der sächsische Landeswettbewerb[8] als auch das Bundefinale wurden aufgrund der Corona-Pandemie 2021 als Online-Veranstaltungen durchgeführt.
Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Partnersuche gegeben – aber jeder Mathematik- oder Informatik-Lehrer ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik (alphabetisch geordnet, 2020 ausgefallen):

Barylla, Philipp & Herrmann, Philipp (Rossbach-Schule, BSZ Leipzig) **Jugend forscht to go** *2. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, Sonderpreis futureSAX*	2016
Borodi, Vlad Samuel & Seibt, Annegret (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Analyse von Kartenmischtechniken** *2. Platz*	2018
Jandura, Sven (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse der Restfehlerwahrscheinlichkeiten zweier Decodierer von linearen Blockcodes** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis futureSAX*	2016
Juppe, Pascal (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Identifikation organischer Verbindungen mittels Infrarot-spektroskopie und neuronalen Netzen** *3. Platz, Sonderpreis Jahresabonnement „Spektrum der Wissenschaft“*	2018
Kandratavicius, Mantas (Goethe-Gymn. Chemnitz) **Lösungsansätze der Beal-Vermutung** *3. Platz, Sonderpreis Forschungspraktikum Leibnitz-Institut*	2018
Ketelsen, Margarete (Nexö-Gymn. Dresden) **Drei- und Vierdimensionale Fraktale** *2. Platz*	2017
König, Josie (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Das lineare Regressionsmodell in Theorie und Praxis** *3. Platz, Sonderpreis Studienseminar „Kerchensteiner Kolleg“*	2016
Krabbes, Felix (Ostwald-Gymn. Leipzig) **Praxisorientierter Steuerungsalgorithmus für ein autonomes RC-Segelboot** *Landessieger für interdisziplinäre Arbeit, Teilnahme am Bundesfinale*	2017

[8] www.jugend-forscht-sachsen.de

Kraft, Maximilian **Neuronale Netzwerke in der autonomen Robotik** *2. Platz, Sonderpreis Mobilität, Sonderpreis Elektrostatik, Elektrotechnik und Mikroelektronik*	2021
Loos, Felix (Freies Gymn. Borsdorf) **Entwicklung einer künstlichen Intelligenz für Industrieroboter** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2018
Meyer, Julian (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Simulationen von Strukturen aus Holz** *Sonderpreis Qualitätssicherung*	2018
Mogdans, Sarah (Freies Gymn. Penig) **Wurzelziehen – keine schmerzhafte Angelegenheit** *3. Platz*	2016
Petrich, Moritz **Zirkusnummer mit Quadraten** *2. Platz*	2021
Ristic, Nikola **Analyse und Visualisierung von Molekülstrukturen** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2021
Schmidt, Conrad (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Erstellung einer Android App als smartes Hausaufgabenheft** *3. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus*	2017
Skaliks, Eric (Sächsisches Landesgymn.St. Afra Meißen) **Neural AMT** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2017
Weiß, Konrad **Neuronale Netze und Algorithmen bei „Snake“** *3. Platz, Sonderpreis PM Magazin, futureSAX Sonderpreis*	2021

Den 56. Bundeswettbewerb richtete die Stiftung Jugend forscht e. V. gemeinsam mit der experimenta gGmbH in Heilbronn vom 26. bis 30. Mai 2021 als Online-Veranstaltung aus. Insgesamt 169 Finalisten hatten sich mit ihren 113 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 24 Teilnehmende mit 18 Projekten im Fachgebiet Mathematik/Informatik. Den 1. Preis errang hier **Jonathan Hähne**, Technische Universität München, Garching bei München (Bayern) mit seiner Arbeit **„Echtzeit-Raytracing auf Adaptively-Sampled Distance Fields“**. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre zu lesen:

> *Spiele und Kinofilme verblüffen heute mit erstaunlich realistischen Computeranimationen. Für die tollen Bilder sorgt unter anderem ein Verfahren namens Raytracing: Die Software errechnet den Verlauf eines jeden Lichtstrahls und erlaubt eine realitätsnahe Darstellung etwa von Reflexen. Allerdings ist die*

Methode aufwendig und erst seit Kurzem in Echtzeit anwendbar – vorteilhaft insbesondere für Spiele. Jonathan Hähne entwarf den Prototyp einer neuartigen echtzeitfähigen Raytracing-Software. Diese hat unter anderem das Potenzial, Rundungen besser abzubilden als die üblichen Algorithmen. Als Herausforderung erwies sich der Speicherbedarf: Der Jungforscher musste sich ein paar ausgefeilte Tricks einfallen lassen, um ein Überlaufen des Speichers beim Rechenvorgang zu verhindern.

Die Jury hat die Stringenz beeindruckt, mit der Jonathan Hähne die Aufgabenstellung anging. Obwohl aktuell sehr viel auf diesen Gebieten gearbeitet wird, ist die angewandte Methode geeignet, 3-D-Rendering in Echtzeit breiter und auf schwächerer Hardware verfügbar zu machen. Von der Anwendung mathematischer Methoden bis zur effizienten Programmierung hat er alle Probleme hervorragend gelöst.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen war bereits in der vorgriechischen Mathematik bekannt. Dennoch wird sie als GAUßsche Summenformel bezeichnet und darf auch so in Wettbewerbsaufgaben zitiert werden. Die Namensgebung resultiert aus der Überlieferung, dass der neujährige CARL FRIEDRICH GAUß[9] die Beschäftigungsaufgabe im Unterricht, die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, durch aufmerksames Beobachten und kreativer Vorüberlegung löste. Er entdeckte die Summenformel, mit der er das sture Rechnen umgehen konnte.

Wir können diese Geschichte als Ansporn für die Teilnahme am Wettbewerb „Jugend forscht“ nehmen: Man kann durch eigene Forschung auch mit Themen Aufmerksamkeit erwecken, die schon bekannt und in der Literatur nachzulesen sind. Die Summenformel wird beispielsweise im 2. Rechenbuch von ADAM RIES[10]

Rechenung auff der Linihen // vnd Federn in zal / maß vnd gewicht auff // allerley handierung / gemacht vnnd zu // samen gelesen durch Adam Riesen zu Erffurdt im // 1522 Jar.

im Kapitel **„Progressio“** beschrieben (die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten):

„Lehret in ein Summa bringen Zahlen / die nach einander folgen in natürlicher ordnung oder gleichen mitteln. Thu ihm also: Addir die erste zahl der letsten / was daraus wirdt / mach halb / so du magst / vnd multiplicir durch die zahl der stätt / so hastu wie viel die angegeben zahlen in einer Sum machen/. Magstu nicht / so medir die zahl der stätt / vnd multiplicir damit / als folgende zwey Exemple außweisen.

[9] geb. 1777 in Braunschweig, gest. 1855 in Göttingen
[10] geb. 1496 in Staffelstein, gest. 1559 in Annaberg

Item / 7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25. wie viel machen sie in einer Sum? Thu ihm also: Addir 7 zu 25, kommen 32. die medir / werden 16. vnd multiplicir durch die zahl der stätt / als 19. kommen 504. so viel machen gefaßte zahlen.

Item / 3.6.9.12.15.18.21.24.27.30.33.36.39.42.45.48. wie viel? Machs also: Addir 3. Vnd 48. Warden 51, seyn ungerade. / Derhalben zehle die stätt / seind 16. Die medir / kommen 8. vnd multiplicir mit 51. werden 408. Die ganze Summa.

So aber ein zahl die andere vbertritt, zweyfältig / dreyfältig / vierfältig / etc. vnd wolltest die Summa wissen / so multiplicir die letste mit der vbertrettung / nimb von solchem die erst / was da bleibt /theil ab mit der vbertrettung / weniger 1 als hie in folgenden Exempeln.“

(*Hinweis:* Gemeint sind geometrische Folgen, bei denen sich aufeinanderfolgende Glieder um einen konstanten Faktor (die „vbertrettung“) unterscheiden. An zwei Beispielen wird die Summation vorgerechnet, und zwar für 2, 4, 8, …, 2048 und 3, 9, 27, … 6561. Dabei gibt ADAM RIES weder Herleitung noch Beweis an Sein Ausspruch „Machs also: …“ beschreibt lediglich den Algorithmus. Mit einem Ausblick beendet er dieses Kapitel.)

„Die Wurzel / den Quadranten / vnnd Cubic aufzuziehen / will ich hie beruhen lassen / sondern zu seiner zeit / so ich das Visiern / und etliche Regeln der Coß erzehle / genugsam erklären.“

(*Hinweis:* Mit „zu seiner zeit“ kündigt Adam Ries sein drittes Rechenbuch an, die so genannte „Practica“. Das Buch konnte er aber erst 1550 in Druck bringen. Dagegen wurde seine „Coß“ nicht publiziert, obwohl die erhalten gebliebene Handschrift bereits auf 1524 datiert wird. Anlässlich seines 500. Geburtstages im Jahre 1992 gab der Teubner-Verlag Leipzig einen vollständigen Faksimiledruck heraus.)

Inhaltsverzeichnis Heft Oktober 2021

Vorwort 2
Thema 09 – Pythagoreische Zahlentripel 3
Thema 01 – Funktionalgleichungen (Teil III): Periodische Funktionen 7
Pythagoreische 4-Tupel 11
Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“ 14
In alten Mathe-Büchern geblättert 18

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben-bezug**
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan. und Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

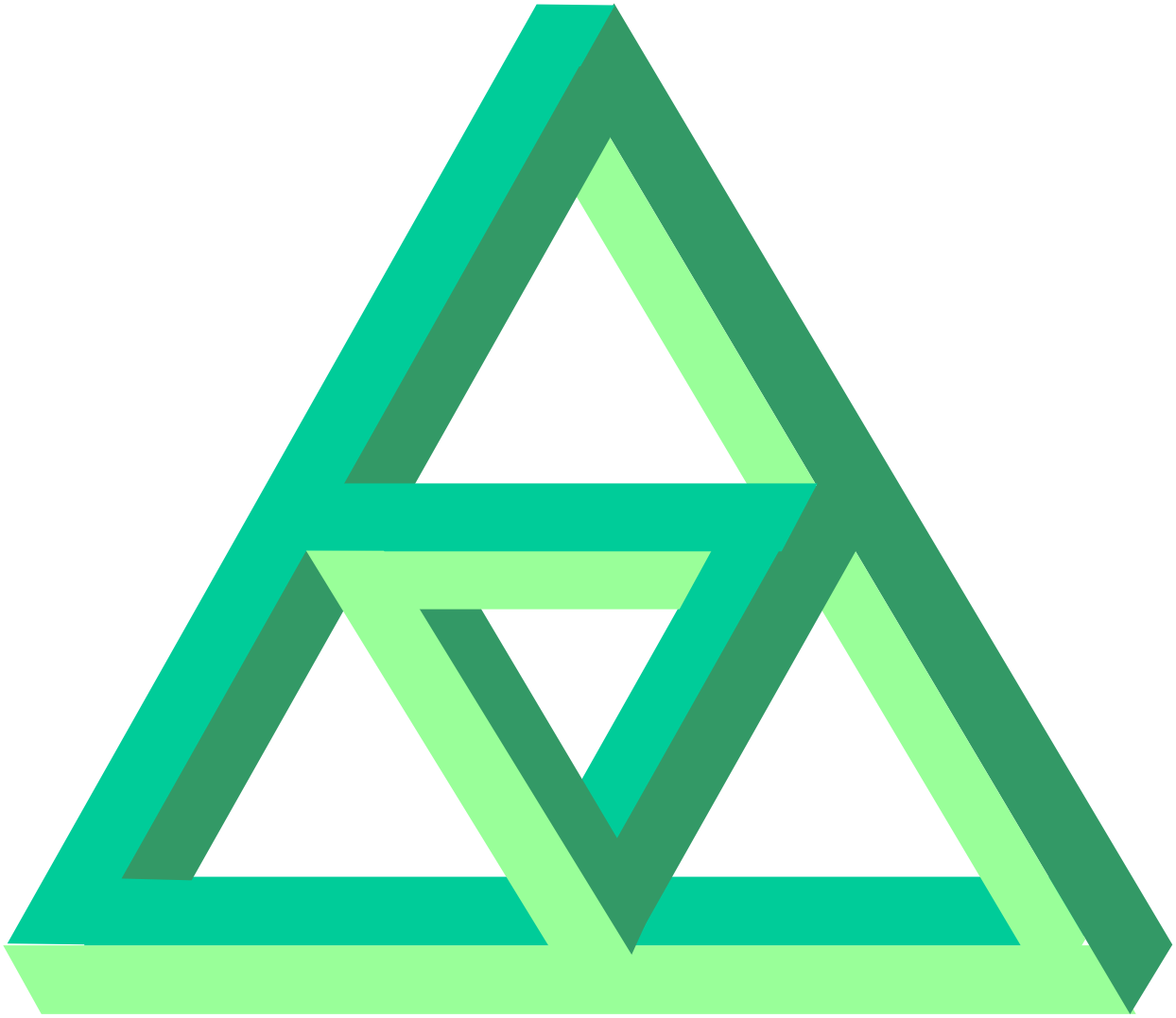
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft November 2021 20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Passend zur Jahreszeit informieren wir in diesem Heft über einen mathematischen Adventskalender.

Ein Auszug aus einem alten Mathematik-Buch soll unterhaltsam Einblicke in der Mathematikgeschichte geben.

In diesem Heft greifen wir mit Thema 10 die Diskussion von Brüchen wie in Aufgabe **MO611013** auf. Zudem wenden wir uns – angeregt durch die Aufgabe **MO611014** – der Streckenberechnung in geometrischen Figuren zu. Da solche Fragestellungen in den höheren Runden der Mathematik-Olympiaden oft nur ein erster Schritt in Aufgaben mit Flächenberechnungen sind, empfehlen wir die intensive Nachbereitung dieser Thematik.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 10 – Beschränkte und kürzbare Brüche

Aufgabe 10.1 – MO611013[3]

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen *z* mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen *n* die Ungleichung $n \cdot z < 2021$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen *z* mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen *n* die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ gilt.

Lösungshinweise – Teilaufgabe a): In Vorbereitung der Aufgabe b) hilft dieser Teil, die erforderlichen Arbeitsschritte zu erkennen:

- Aufstellen einer Vermutung für die gesuchten Zahlen z,
- Nachweis, dass für Zahlen dieser Vermutung die Ungleichung gilt,
- Nachweis, dass für alle anderen Zahlen die Ungleichung nicht gilt.

In Teilaufgabe a) können wir $z \leq 0$ vermuten.

- Für alle positiven ganzen Zahlen n gilt $\frac{2021}{n} > 0$ und folglich auch $\frac{2021}{n} > 0 \geq z$, womit die Ungleichung für alle $z \leq 0$ gilt.
- Wählen wir eine Zahl $z_0 > 0$, so finden wir für eine positive ganze Zahl n_0 mit $n_0 > \frac{2021}{z_0}$ die Ungleichung $n_0 \cdot z_0 > \frac{2021}{z_0} \cdot z_0 = 2021$. Damit ist gezeigt, dass die Aussage für alle Zahlen $z > 0$ nicht erfüllt ist.

Die gesuchte Lösungsmenge umfasst folglich alle nichtpositiven Zahlen *z*.

Teilaufgabe b) Um den Wertebereich des Bruchs auf der linken Seite der Ungleichung abzuschätzen, ist eine Wertetabelle hilfreich:

n	1	2	3	4
$\frac{2n+1}{3n+2}$	$\frac{3}{5} = 0.600$	$\frac{5}{8} = 0.625$	$\frac{7}{11} \approx 0.636$	$\frac{9}{14} \approx 0.643$

Mit den wenigen Werte können wir die Vermutung aufstellen, dass der Ausdruck $\frac{2n+1}{3n+2}$ nicht kleiner als 0.6 ist und mit zunehmenden *n* größer wird. Tatsächlich gilt:

$$6n^2 + 13 + 5 = (2n+1) \cdot (3n+5) < (2n+3) \cdot (3n+2) = 6n^2 + 13n + 6$$

also

$$\frac{2n+1}{3n+2} < \frac{2n+3}{3n+5}$$

[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

Außerdem finden wir die Abschätzung $\frac{2n+1}{3n+2} < \frac{2}{3}$, weil für alle positiven ganzen Zahlen *n* gilt:

$$6n + 3 = 3 \cdot (2n + 1) < 2 \cdot (3n + 2) = 6n + 4$$

Also sind die möglichen Zahlen *z* nach unten durch $\frac{2}{3}$ beschränkt, d.h. für alle reellen Zahlen *z* mit $z \geq \frac{2}{3}$ ist die gegebene Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen *n* erfüllt.

Wir zeigen nun noch, dass *z* nicht kleiner gewählt werden kann. Setzen wir beispielsweise $z = \frac{2}{3} - t$ mit einer positiven reellen Zahl *t*, so finden wir folgende Abschätzung:

$$6n + 3 = 3 \cdot (2n + 1) < (2 - 3t) \cdot (3n + 2) = 6n + 4 - 9nt - 6t$$

Also gilt

$$0 < 1 - 3t(3n - 2)$$

Wir erkennen nun, dass für alle *n* mit $3n - 2 > \frac{1}{3t}$, also $n > \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3t} + 2\right)$, diese Ungleichung aber nicht erfüllt ist. Somit kann *z* nicht kleiner gewählt werden und es gilt $z \geq \frac{2}{3}$. ❑

Aufgabe 10.2 (in Anlehnung an Aufgabe MO411033). Finden Sie alle reellen Zahlen *z*, für die die folgende Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen *n* erfüllt ist:

$$\frac{16 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 8}{16 \cdot n^2 - 1} > z$$

Lösungshinweise: Um eine Vermutung aufzustellen, berechnen wir einige Werte. Dabei beachten wir, dass im Klausurwettbewerb die Nutzung eines Taschenrechners nicht zugelassen sein könnte und beschränken uns deshalb (zumindest in der Lösungsdarstellung bei Hausaufgaben-Wettbewerben) beim Dividieren auf Abschätzungen:

n = 1	$\frac{48}{15} > 3$	*n* = 2	$\frac{120}{63} \approx 2$
n = 3	$\frac{224}{143} > \frac{224}{144} > \frac{216}{144} > \frac{3}{2}$	*n* = 4	$\frac{360}{255} > \frac{340}{255} > \frac{4}{3}$

Wir vermuten, dass für alle reellen Zahlen $z \leq 1$ die geforderte Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen *n* erfüllt ist. Tatsächlich gilt,

$$\frac{16 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 8}{16 \cdot n^2 - 1} = 1 + \frac{24 \cdot n + 9}{16 \cdot n^2 - 1} > 1 \geq z$$

weil Zähler und Nenner des verbleibenden Bruches für alle $n > 0$ positiv sind.

Wählen wir dagegen eine Zahl $z_0 = 1 + t$ mit einer positiven reellen Zahl t (also $z > 1$), so finden wir für ganze Zahlen *n* mit $\frac{24 \cdot n+9}{16 \cdot n^2-1} < t$, dass der gegebene Bruch kleiner als *z* ist. Dass es für jedes *t* auch solche Zahlen *n* gibt, zeigen wir mit der Abschätzung $\frac{24 \cdot n+9}{16 \cdot n^2-1} < \frac{24 \cdot n}{8 \cdot n^2} = \frac{3}{n} < t$. Somit ist für $n > \frac{3}{t}$ die Ungleichung für solche Zahlen *n* erfüllt, d.h. die Grenze kann nicht erhöht werden. ❑

Hinweis: Mit Fertigkeiten bei der Grenzwertberechnung können wir zwar erkennen, dass der Wert des Bruches für große Werte *n* beliebig nahe bei 1 liegen wird, womit $z \leq 1$ vermutet werden kann. Es ist aber dennoch der Beweis zu führen, dass für kein Wert von *n* ein Wert kleiner als 1 erreicht werden kann. In diesem Fall ist es bereits im ersten Teil des Beweises ersichtlich.

Aufgabe 10.3 – MO490946.

a) Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{41}{2010} < \frac{x}{y} < \frac{1}{49}$ erfüllt ist.

b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $qr - ps = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben. Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl *y*, für die es eine ganze Zahl *x* gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ erfüllt ist.

Lösungshinweise - Teilaufgabe a) Der linke Teil der Ungleichung ist äquivalent zu $2010 \cdot x - 41 \cdot y > 0$ und der rechte Teil ist äquivalent zu $y - 49x > 0$.

Setzen wir also $t = 2010 \cdot x - 41 \cdot y$ und $u = y - 49 \cdot x$, so sind *t* und *u* positive ganze Zahlen. Stellen wir diese Gleichungen nach *x* und y um, erhalten wir

$$x = t + 41 \cdot u \geq 1 + 41 = 42$$
$$y = 49 \cdot t + 2010 \cdot u \geq 49 + 2010 = 2059$$

Gleichheit gilt für $t = u = 1$, weswegen für mögliche Nenner $y \geq 2059$ gilt.

Weil mit $x = 42$ und $y = 2059$ aber tatsächlich $\frac{41}{2010} < \frac{42}{2059} < \frac{1}{49}$ erfüllt ist, lautet die Antwort der Teilaufgabe a) $y = 2059$. ❑

Wir erkennen in dieser Lösung, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner leicht als Summe der beiden gegebenen Zähler bzw. Nenner ermittelt werden können: 42 = 41 + 1 und 2059 = 2010 + 49. Wir finden die Idee des dazwischen liegenden Bruchs bereits in einer früheren MO-Aufgabe:

Aufgabe 10.4 – MO411043. Für drei reelle Zahlen a, b, c sei $0 < a < b < c$ vorausgesetzt. Beweisen Sie, dass dann gilt: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$

Lösungshinweise: Wir erkennen zunächst für $x, y, z, w > 0$ die Ungleichungskette

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+w} < \frac{z}{w}$$

Denn es gilt

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \Rightarrow xw < yz \Rightarrow xy + xw < xy + yz \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+w}$$
$$\frac{z}{w} > \frac{x}{y} \Rightarrow yz > xw \Rightarrow zw + yz > zw + xw \Rightarrow \frac{z}{w} > \frac{x+z}{y+w}$$

Wegen $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[3]{s}} = \sqrt[6]{s}$ für alle positiven reellen Zahl s folgt aus $a < b < c$ auch $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[3]{c}}$ und damit wie behauptet $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} < \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[3]{c}}$ ❑

Zudem wird in der Aufgabe für Kl. 10 die Frage nach kleinstem Nenner beantwortet:

Aufgabe – MO491046. Zwei verschiedene, vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ mit $p, q, r, s > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ seien so gewählt, dass sie folgende Eigenschaft besitzen: Für jeden Bruch $\frac{x}{y}$ mit $x, y > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ (1) gilt $y > max(q, s)$, d.h. der Nenner *y* ist sowohl größer als der Nenner *q* als auch größer als der Nenner *s*.

a) Beweisen Sie, dass $\frac{x}{y} = \frac{p+r}{q+s}$ ein Bruch mit kleinstmöglichem positiven Nenner ist, der (1) erfüllt.
b) Beweisen Sie, dass für Brüche mit dieser Eigenschaft stets $qr - ps = 1$ gilt.

Einen anderen Aufgabentyp mit Brüchen finden wir in

Aufgabe 10.5 – MO410933. Für jede natürliche Zahl *n* ist der Bruch

$$\frac{n^3 - 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 3}{n^3 + 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 3}$$

kürzbar. Beweisen Sie diese Aussage!

Lösungshinweise: Da der Faktor 3 sowohl im Zähler als auch im Nenner auffällt, vermuten wir, dass auch $n^3 + 2 \cdot n$ für alle n durch 3 teilbar ist. Dies ist tatsächlich erfüllt, denn wir finden

$$n^3 + 2 \cdot n = n^3 - n + 3 \cdot n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 3 \cdot n$$

Weil das Produkt von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets durch 3 teilbar ist, kann also der gegebene Bruch für alle natürlichen Zahlen *n* mit 3 gekürzt werden. ❑

Thema 11 – Streckenberechnung

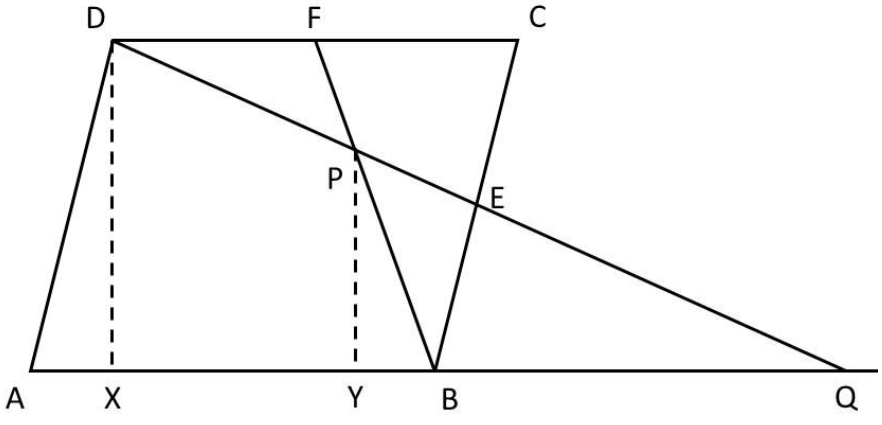
Vorbemerkung: In geometrischen Aufgabenstellungen wird häufig keine Skizze gezeigt. Es sollte bei der Lösungsdarstellung deshalb stets mit einer (sorgfältigen) Skizze begonnen werden, in der alle gegebenen Punkte eingezeichnet sind. Werden Hilfspunkte benötigt, sind deren Konstruktion im Text zu beschreiben.

In computer-gestützten Lösungsdarstellungen genügen einfache Grafik-realisierungen, solange die wichtigen Aussagen erkennbar sind. Wenn nicht ausdrücklich laut Aufgabenstellung verlangt, sollte der allgemeiner Fall skizziert werden. Die Verwendung von Spezialfällen (z.B. ein gleichseitiges Dreieck statt eines allgemeinen spitzwinkligen Dreiecks) könnte zu Vermutungen führen, die sich allgemein nicht bestätigen lassen. Gelingt jedoch kein erfolgversprechender Lösungsansatz, so kann die erfolgreiche Behandlung von Spezialfällen mit Punkten honoriert werden.

Zur Streckenberechnung in geometrischen Figuren erweisen sich Verhältnis-gleichungen infolge von Ähnlichkeit oder mittels Anwendung eines Strahlensatzes oft als nützlich, wie auch in:

Aufgabe 11.1 – MO611014. Das Viereck *ABCD* sei ein Parallelogramm, bei dem der Abstand der parallelen Geraden *AB* und *CD* gleich 6 ist. *E* und *F* seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$. Die Gerade *DE* schneide die Strecke $\overline{BF}$ im Punkt *P* und die Gerade *AB* im Punkt *Q*.

a) Zeigen Sie, dass $|AQ| = 2 \cdot |AB|$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass P auf der Geraden AC liegt, und bestimmen Sie die Länge des Abstands von P zur Geraden AB.



Lösungshinweise -
Teilaufgabe a) Die Dreiecke *CDE* und *BQE* sind nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent, da $|BE| = |EC|$ gilt und die an $\overline{BE}$ und $\overline{EC}$ anliegenden Innenwinkel nach dem Wechselwinkelsatz an geschnittenen Parallelen bzw. als Scheitelwinkel jeweils übereinstimmen. Also gilt $|AQ| = |AB| + |BQ| = |AB| + |CD|$, woraus die Behauptung folgt, da *ABCD* ein Parallelogramm ist.

Teilaufgabe b) Zunächst betrachten wir den Schnittpunkt *P* der Geraden *DQ* und *BF*. Aus der ersten Teilaufgabe folgt durch Anwendung des Strahlensatzes, dass *P* die

Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{DQ}$ jeweils im Verhältnis 1 : 2 teilt, da $|DF| = \frac{1}{2} \cdot |BQ|$ erfüllt ist und folglich $|FP| : |PB| = |DF| : |BQ| = |DP| : |PQ| = 1 : 2$ gilt. Damit erhalten wir $|PQ| = \frac{2}{3} \cdot |DQ|$.

Nun betrachten wir den Schnittpunkt der Geraden *AC* und *DQ*. Um nicht die Behauptung bereits vorauszusetzen, nennen wir diesen Schnittpunkt *P´* und wollen zeigen, dass *P´* mit *P* zusammenfällt. Aus der erneuten Anwendung des Strahlensatzes mit dem Zentrum *P´* folgt, dass *P´* die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DQ}$ jeweils im Verhältnis 1 : 2 teilt, da die Gleichungen $|P'C| : |P'A| = |DC| : |AQ| = |DP'| : |P'Q| = 1 : 2$ gelten und damit $|P'Q| = \frac{2}{3} \cdot |DQ|$ ist. Somit sind *P* und *P´* identisch, denn beide Punkte liegen auf *DQ* und haben den gleichen Abstand zu *Q*. *P* liegt daher auch auf *AC*.

Fällen wir nun die Lote von *D* und *P* auf *AQ* und bezeichnen deren Fußpunkte mit *X* bzw. *Y*, so sind die Dreiecke *XQD* und *YQP* ähnlich (www). Somit erhalten wir die Verhältnisgleichung $|YP| : |XD| = |QP| : |QD|$.

Wegen $|XD| = 6$ und $|QP| = \frac{2}{3} \cdot |DQ|$ finden wir für den Abstand des Punktes *P* von der Geraden *AQ*: $|YP| = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. ❑

Aufgabe 11.2 – MO581032. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit der Seitenlänge 12. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ wird mit *M* bezeichnet. Der Punkt *P* liegt auf der Strecke $\overline{BC}$ und der Punkt *Q* auf der Strecke $\overline{AC}$.

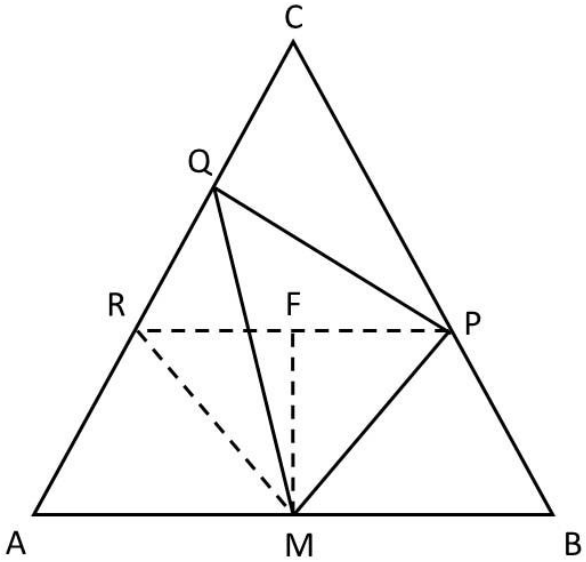
a) Sei zunächst $|BP| = 4$ und $|AQ| = 9$. Beweisen Sie, dass $|\angle PMQ| = 60°$ gilt.
b) Bestimmen Sie $x = |CQ|$ für alle Lagen von *P* (auf der Strecke $\overline{BC}$) und *Q* (auf der Strecke $\overline{AC}$), für die $|\angle PMQ| = 60°$ und $|\angle PQC| = 90°$ gilt.

Lösungshinweise – Teilaufgabe a) Die Dreiecke *BPM* und *AMQ* sind ähnlich, weil sie in der Größe der Winkel

$$|\angle PBM| = |\angle MAQ| = 60°$$

und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen:

$$|BP| : |BM| = |AM| : |AQ| = 2 : 3 .$$



Daher stimmen die Größen der beiden anderen einander entsprechenden Innenwinkel dieser Dreiecke überein: $|\angle BMP| = |\angle AQM|$ und $|\angle MPB| = |\angle QMA|$. Da die

Innenwinkelsumme in Dreiecken 180°beträgt und der Winkel $\angle AMB$ ebenfalls 180° groß ist, hat der gesuchte Winkel $\angle PMQ$ die Größe 60°.

Teilaufgabe b) Wenn $\angle PQC$ ein rechter Winkel ist, dann ist *PQ* parallel zur von *B* ausgehenden Höhe des Dreiecks *ABC* und je weiter *P* von *B* entfernt ist, desto kleiner ist der Winkel $\angle PMQ$. Liegt *P'* zwischen *P* und *C* und ist *Q'* der Fußpunkt des Lotes von *P'* auf die Gerade *AC*, so liegen *P'* und Q' im Inneren des Winkels $\angle PMQ$, es gilt also $|\angle PMQ| > |\angle P'MQ'|$.

Damit gibt es höchstens eine Lage von *P* und *Q* wie in der Aufgabenstellung gefordert. Wir zeigen nun, dass für $x = |CQ| = 9 - 3 \cdot \sqrt{3}$ und $|CP| = 2 \cdot x$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind:

Wegen $1 < \sqrt{3} < 2$ folgt $3 < |CQ| < 6$ und auch $6 < |CP| < 12$, sodass *P* und *Q* wie gefordert auf den entsprechenden Dreiecksseiten liegen. Die Dreiecke *BPM* und *AMQ* sind ähnlich, weil sie in den Größen der Winkel $|\angle PBM| = |\angle MAQ| = 60°$ und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen:

$$|BP|:|BM| = \left(6 \cdot \sqrt{3} - 6\right):6 = \sqrt{3} - 1$$

$$|AM|:|AQ| = 6 : \left(3 + 3 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} - 1$$

Weiter schließen wir wie bei Teilaufgabe a) auf $|\angle PMQ| = 60°$. Offensichtlich ist auch $|\angle PQC| = 90°$, da wegen $|PC| = 2 \cdot |QC|$ das Dreieck *PCQ* ein halbes gleichseitiges Dreieck ist. Es gibt also nur eine mögliche Lage für *P* und *Q* mit $|\angle PMQ| = 60°$ und $|\angle PQC| = 90°$, und für diese gilt $x = 9 - 3 \cdot \sqrt{3}$. ❑

Oft lassen sich Streckenlängen über Gleichungen bestimmen. Weisen wir zunächst nach, dass die Dreiecke *AMQ* und *BPM* ähnlich sind (www), so folgt aus dem Verhältnis einander entsprechender Seiten dieser Dreiecke nacheinander (mit $x = |CQ|$):

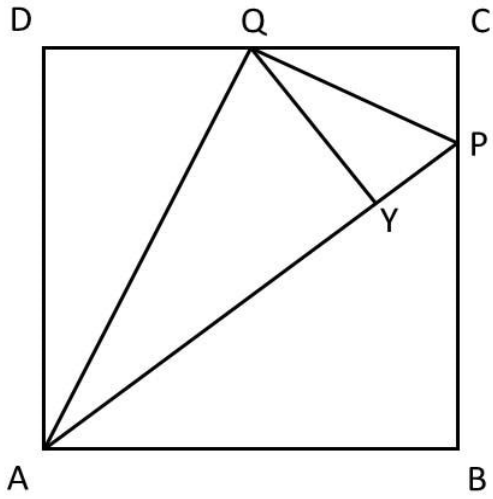
$$|AQ|:|AM| = |BM|:|BP|$$
$$(12 - x) : 6 = 6 : (12 - 2 \cdot x)$$

also

$$(12 - x) \cdot (12 - 2 \cdot x) - 36 = 2\,(x^2 - 18 \cdot x + 54) = 0$$

Dafür finden wir über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Nullstellen $x_{1,2} = 9 \pm 3 \cdot \sqrt{3}$. Für $x_1 = 9 + 3 \cdot \sqrt{3} > 9 + 3 = 12$ läge der Punkt *Q* außerhalb der Seite $\overline{AC}$. Damit entfällt diese Möglichkeit und es bleibt als einziger Lösungskandidat $|CQ| = x_2 = 9 - 3 \cdot \sqrt{3}$. Nun müssen wir aber noch zeigen, dass dies tatsächlich Lösung ist.

Aufgabe 11.3 – MO480924. Es sei *ABCD* ein Quadrat mit der Seitenlänge *a*, *Q* der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$ und *P* ein Punkt auf der Seite $\overline{BC}$ derart, dass $|\angle PAQ| = |\angle QAD|$ gilt.



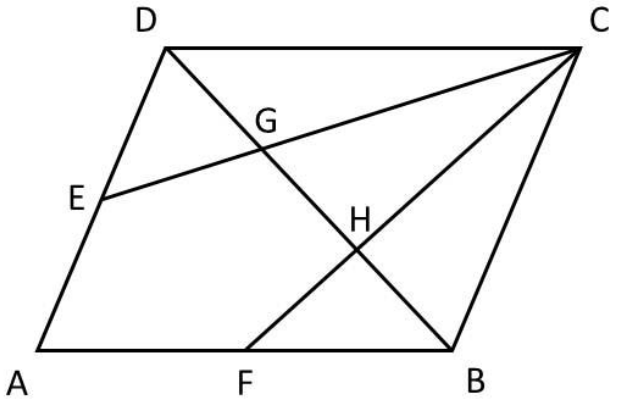
a) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts *Q* von der Geraden *AP* in Abhängigkeit von der Länge *a* der Quadratseite.
b) Beweisen Sie, dass $|\angle AQP| = 90°$ gilt.

Lösungshinweise: Teil a) Sei *Y* der Fußpunkt des Lotes von *Q* auf *AP*. Wegen

- $|\angle QAD| = |\angle PAQ| = |\angle YAQ|$,
- der beiden rechten Winkel und
- der gemeinsamen Seite AQ

folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke *AQD* und *AYQ* nach Kongruenzsatz SWW. Also gilt für den gesuchten Abstand $|QY| = |QD| = \frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 11.4 – MO090923. Es ist zu beweisen: Verbindet man in einem Parallelogramm *ABCD* den Eckpunkt *C* mit den Mittelpunkten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$, so teilen die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken mit der Diagonalen $\overline{BD}$ diese in drei gleich lange Teilstrecken.



Lösungshinweise: Es sei *E* der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$, *F* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, *G* der Schnittpunkt der Strecken $\overline{EC}$ und $\overline{BD}$ und *H* der Schnittpunkt der Strecken $\overline{FC}$ und $\overline{BD}$. Die Dreiecke *FBH* und *CHD* sind ähnlich, denn sie stimmen in den Winkeln überein (Scheitelwinkel und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen). Wegen $|FB|:|DC| = 1:2$ gilt auch $|HB|:|HD| = 1:2$.

Wegen $|HB| + |HD| = |BD|$ folgt somit $|HB| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$.

In gleicher Weise folgern wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *EGD* und *CGB* (www) die Gleichung $|GD| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$.

Dann gilt aber auch $|HG| = |BD| - |GD| - |BH| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$.

Somit sind die drei Teilstrecken auf $\overline{BD}$ alle gleich lang. ❑

Themen 10 und 11 – Aufgaben

Aufgabe 10.6 – MO490946.

a) (s. Thema 10)

b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $qr - ps = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben. Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl *y*, für die es eine ganze Zahl *x* gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ erfüllt ist.

Aufgabe 10.7 – MO411033. Wie viele ganze Zahlen *n* mit $\frac{2^{2005}}{45} < n \leq 2^{2005}$ gibt es, welche in der Form $2^a \cdot 45^b$ mit ganzen Zahlen a, b darstellen lassen?

Aufgabe 10.8 – MO411033. Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für die der Bruch

$$\frac{16 \cdot n^2 + 24 + 8}{16 \cdot n^2 - 1}$$

gekürzt werden kann!

Aufgabe 11.5 – MO510924. Es sei *ABC* ein Dreieck mit $|\overline{AC}| < |\overline{BC}|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei *C* schneide die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt *P*, die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade *AB* in einem Punkt *Q*. Die Punkte *X* und *Y* seien die Fußpunkte der Lote von *P* auf die Geraden *AC* bzw. *BC*.

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck *PCQ* rechtwinklig ist, und dass $|\overline{PX}| = |\overline{PY}|$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass das Verhältnis der Längen der Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ mit dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke *APC* und *BPC* übereinstimmt.

Aufgabe 11.6 – MO570935.[4] Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei *M* der Mittelpunkt von *BC* und *P* der Mittelpunkt von $\overline{AM}$. Weiter schneide die Gerade *BP* die Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt *Q*.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks *MCQP*.

Aufgabe 11.7 – MO580932. Im gleichschenkligen Dreieck *ABC* mit Spitze *C* ist *M* der Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$ und *P* ein von *A* und *B* verschiedener Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Die Senkrechte in *P* auf *AB* schneidet die Gerade *BC* in *Q* und die Gerade *AC* in *R*.

Zeigen Sie, dass dann stets $|PQ| + |PR| = 2 \cdot |MC|$ erfüllt ist.

---

[4] Aufgabe 2-4 des Sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Quersummen in Wettbewerbsaufgaben[5]

Für die Aufgabe 2-1 des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10 finden wir in den Aufgaben der Mathematik-Olympiade eine verallgemeinernde Formulierung:

Aufgabe MO411023. Für jede natürliche Zahl *n* sei *q*(*n*) die Quersumme von *n* und *d*(*n*) = |*q*(*n*+1) – *q*(*n*)|. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die *d*(*n*) annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Eine Lösungsdiskussion werden wir dazu im Dezember-Heft vorstellen.

Aufgabe. Man beweise für alle natürlichen Zahlen *m* und *n* die Ungleichung

$$Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$$

(dabei bezeichnet *Q*(*x*) die Quersumme der natürlichen Zahl *x*).

Lösungshinweise: Anschaulich scheint die Behauptung einfach. Wir beobachten die Eigenschaft $Q(m+1) = Q(m) + 1$, falls für den Nachfolger von *m* kein Übertrag in der Einerstelle entsteht. Bei einem Übertrag verringert sich die Quersumme. Folglich wird es gelingen, die Behauptung durch *n*-malige Addition von 1 schrittweise zu beweisen.

Dagegen wird in den Lösungshinweisen zur MO-Aufgabe ein algorithmischer Weg vorgeschlagen: Es seien $a_0, \ldots, a_k$ die Ziffern der Zahl *m* und $b_0, \ldots, b_k$ die Ziffern der Zahl *n* und $c_0, \ldots, c_k, c_{k+1}$ die Ziffern der Summe $m+n$ (wobei führende Nullen zugelassen sind). Entsprechend des Algorithmus der Addition gilt für jede Dezimalstelle

$c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0$
$c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1$
...
$c_{k+1} = u_k$

Dabei sind u_i die bei der zifferweisen Addition entstehenden Überträge, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Addieren wir alle Zeilen, wird die Behauptung bestätigt:

$$Q(m+n) = c_0 + \ldots + c_{k+1} = a_0 + \cdots + a_k + b_0 + \cdots + b_k - 9 \cdot (u_0 + \cdots + u_k) \leq Q(m) + q(n)$$

❑

[5] Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-1, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Lassen sich bei Aufgaben mit Quersummen die Lösungen über die Zifferndarstellung erarbeiten, kommt es im Allgemeinen zu einer Gleichung mit mehreren Unbekannten, die sich durch geschickte Fallunterscheidung lösen lässt.

Aufgabe. Finden Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die das Quadrat der Quersumme gleich der Quersumme des Quadrates von n ist, also $(Q(n))^2 = Q(n^2)$ gilt.

Lösungshinweise: Es sei n eine solche gesuchte mit $(Q(n))^2 = Q(n^2)$. Wir verwenden die Eigenschaft $Q(n) \leq n$ und die für positive ganze Zahlen r und s oben bewiesene Ungleichung $Q(r+s) \leq Q(r) + Q(s)$.

Betrachten wir einstellige Zahlen n, so gilt $Q(n) = n$ und deshalb muss auch $n^2 = Q(n^2)$ gelten. Das ist aber nur für $n^2 < 10$ möglich, also $n = 1, 2, 3$.

Setzen wir für eine zweistellige Zahl $n = 10a + b$ mit den Ziffern a und b ($a > 0$), so finden wir einerseits

$$Q(n)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und andererseits

$$Q(n^2) = Q(100a^2 + 20ab + b^2) \leq Q(a^2) + Q(2ab) + Q(b^2) \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Damit das Gleichheitszeichen gilt müssen alle Summanden jeweils kleiner als 10 sein. Das bedeutet aber, nur die Zahlen 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 und 31 genügen der geforderten Gleichung.

Sind nun $a_k, \ldots, a_1, a_0$ die Ziffern der $(k+1)$-stelligen Zahl n, also $n = \sum_{i=0}^{k} 10^i \cdot a_i$ mit $Q(n) = a_k + \ldots + a_1 + a_0$, so lässt sich die Aussage verallgemeinern: Alle Zahlen n, deren Ziffern die folgenden Bedingungen erfüllen, sind Lösung der geforderten Gleichung: $a_i^2 < 10$ für alle $i = 0, \ldots, k$ und $2 \cdot a_i \cdot a_j < 10$ für alle $i, j = 0, \ldots, k$ mit $i \neq j$. ❑

Oft lassen sich in Aufgaben mit Quersummen die Terme jedoch nicht auf die Zifferndarstellung umformulieren. Dann hilft meist nur eine Abschätzung.

Aufgabe MO450944. Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen *n*, die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 = Q(Q(n))$$

Mit *ggT* wird der größte gemeinsame Teiler abgekürzt.

Lösungshinweise: Da der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen mindestens 1 ist, gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16.$$

Somit gilt $Q(Q(n)) \geq 16$. Da *n* neunstellig ist, gilt $Q(n) \leq 81$. Die Zahl zwischen 1 und 81 mit der größten Quersumme ist 79. Für alle neunstelligen Zahlen *n* gilt folglich

$$1 \leq Q(Q(n)) \leq 16 = Q(79).$$

Insgesamt erhalten wir aus beiden Abschätzungen $Q(Q(n)) = 16$. Daher kommen nur neunstellige Zahlen mit $Q(n) = 79$ als Lösung in Frage. Als Ziffern von *n* sind folglich nur folgende Kombinationen möglich:

Fall 1: Achtmal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 7.
Fall 2: Siebenmal die Ziffer 9 und zweimal die Ziffer 8.

Im Fall (1) lassen sich genau 9 und im Fall (2) genau (9 · 8 : 2 =) 36 solche neunstellige Zahlen bilden. Es gibt also 45 neunstellige Zahlen mit der Quersumme 79.

Zur Lösung der Aufgabe muss aber zusätzlich $ggT(n; 90) = 1$ gelten. Die Primteiler von 90 sind 2, 3 und 5. Keine der gefundenen neunstelligen Zahlen ist durch 3 oder 5 teilbar. Es müssen somit nur diejenigen Zahlen eliminiert werden, die durch 2 teilbar sind. Das sind die 8 Zahlen aus Fall (2), die auf 8 enden. Also finden wir als die gesuchte Anzahl (45 – 8 =) 37. ❑

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen *n* ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, sodass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $Q(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: Es gilt $Q(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form

12; 1212; 12121212; 1212121212121212; ...

diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl *a* erhalten wir durch Multiplikation mit einem Faktor der Form (in geeigneter Länge) 100...001 die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das Doppelte, denn mit jedem Teiler *t* von *a* ist auch 100...001 · *t* ein Teiler der neu gebildeten Zahl. ❑

Aufgabe. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl *q* eine natürliche Quadratzahl *n* mit der Quersumme *q*?

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst Beispiele für solche Zahlen *n*.

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ (d.h. $n = \underbrace{1 \ldots 1}_{9-mal}$) fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr.

Kommen wir mit diesen Beispielen schon auf einen geeigneten Ansatz? Wohl eher nicht! Ohne Herleitung sei nur angegeben: Für $p^2 = q$ erfüllt zum Beispiel die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^{p} 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Gemeint sind also folgende Zahlen:

$$p = 1 \Rightarrow k = 100 \qquad \Rightarrow n = 10000$$
$$p = 2 \Rightarrow k = 10100 \qquad \Rightarrow n = 102010000$$
$$p = 3 \Rightarrow k = 100010100 \Rightarrow n = 10002020102010000$$

Wir müssen nun „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p-mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$-mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. ❑

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n, deren Querprodukt und Quersumme übereinstimmen?

Lösungshinweise: Da für zwei Ziffern $a, b > 1$ stets $a \cdot b \geq 2 \cdot max\{a, b\} \geq a + b$ gilt, können wir jede Zahl, deren Querprodukt größer als die Quersumme ist, durch zusätzliche Stellen „1“ erweitern, bis die Quersumme den Wert des (unveränderlichen) Querproduktes erreicht. Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z.B. betrachten wir für $n > 0$ die Zahlen

$$\underbrace{11\ldots11}_{k-mal}\,\underbrace{22\ldots22}_{n-mal}$$

Wählen wir $k = 2^n - 2n$, so ist das Querprodukt gleich 2^n und die Quersumme ebenfalls $k \cdot 1 + n \cdot 2 = 2^n - 2n + 2n = 2^n$. ❑

Mathematik-Adventskalender

Auf den Internetseiten[6] der **Deutschen Mathematiker-Vereinigung e.V.** lesen wir: Die Landschaft der Mathematikwettbewerbe wird immer vielfältiger. Neben der traditionellen Mathematik-Olympiade, dem Bundeswettbewerb Mathematik oder auch dem größten mathematischen Schülerwettbewerb, dem Känguru der Mathematik, gibt es viele weitere, wie die Mathematik-Adventskalender.

[6] www.mathematik.de/wettbewerbe, es werden hier Auszüge von dieser und von da verlinkten Internetseiten dargestellt

Das Angebot unter **www.mathe-im-advent.de** bietet jedes Jahr vorweihnachtlichen Mathezauber für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 4 bis 6 und 7 bis 9. Auch Früh- und Spätstartende ab Klasse 2 bzw. bis Klasse 10 können teilnehmen. Täglich kann man alleine oder im Klassenverband die beliebten Mathewichtel-Aufgabengeschichten aus dem Weihnachtsdorf lösen. Jährlich begeistern sich ca. 150.000 Kinder, Jugendliche, Eltern und Lehrkräfte für die Knobelaufgaben. Mitmachen lohnt sich!

Anspruchsvoller und sehr empfehlenswert ist der **MATH+ Adventskalender**, denn er bietet pfiffigen Jugendlichen ab der 10. Klasse sowie Studierenden, Lehrkräften und allen Interessierten faszinierende Einblicke in aktuelle Mathematik-forschung und den Berufsalltag von Mathematikerinnen und Mathematikern. Mit den kniffeligen Aufgaben wird eingeladen, über den Schulstoff hinaus die Kraft und Schönheit der Mathematik zu entdecken.

Die Mathe-Adventskalender stehen unter der Schirmherrschaft der Bundesministerin für Bildung und Forschung, ANJA KARLICZEK MdB. Die Schirmherrin schreibt:

„Ich freue mich sehr, dass die Mathe-Adventskalender jedes Jahr so viele Schülerinnen und Schüler zur Beschäftigung mit Mathematik motivieren und herausfordern. Denn es ist für unser Land sehr wichtig, dass wir junge Menschen für MINT-Fächer gewinnen. Ich wünsche den Mathe-Adventskalendern viel Erfolg, spannende Aufgaben und viele neugierige und aktive Teilnehmerinnen und Teilnehmer.“

Jede interessierte Person kann teilnehmen und unabhängig vom Gewinnspiel die Aufgaben lösen. Grundsätzlich können die Aufgaben gelöst, die man möchte. Bei der Bewertung wird aber das Alter berücksichtigt.

Für die Teilnahme ist ausschließlich eine einfache Registrierung erforderlich. Mit Angabe eines noch nicht vergebenen Benutzernamens, der Wahl eines Passwortes und einer echten E-Mail-Adresse kann jede Person ein Benutzerkonto einrichten. Die Registrierung ist selbstverständlich kostenlos und ab dem 1. November bis einschließlich 31. Dezember möglich.

Aufgaben des MATH+ Adventskalenders. Vom 1. bis 23. Dezember wird täglich um 16 Uhr (MEZ) eine Aufgabe auf dieser Webseite veröffentlicht. Die Aufgabe am 24. Dezember wird um 10 Uhr (MEZ) veröffentlicht. Die Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben mit zehn vorgegebenen Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Das Team des MATH+ Adventskalenders achtet darauf, dass alle Aufgaben für Zehntklässler geeignet sind, d. h. es werden keine mathematischen Vorkenntnisse vorausgesetzt, die erst später in der Schule oder gar an der Universität vermittelt werden.

Um eine Lösung einreichen zu können, muss man eingeloggt sein. Der Einsendeschluss für alle Aufgaben ist der 31. Dezember um 23:59:59 Uhr (MEZ). Bis zu diesem Zeitpunkt können eingereichte Antworten auch geändert werden. Es werden jedoch Punkte für richtige Antworten entsprechend dem Zeitpunkt der Einreichung bzw. der letzten Änderung vergeben:

So gibt es 5 Punkte, wenn die Lösungsabgabe bzw. die letzte Änderung der Antwort bis 23:59:59 Uhr (MEZ) am Tag der Veröffentlichung der Aufgabe (bzw. nach Wochenende am darauffolgenden Montag) erfolgte. Erfolgt die Lösungsabgabe bzw. die letzte Änderung bis 17:59:59 Uhr (MEZ) am folgenden Tag (bzw. nach Wochenenden am darauffolgenden Dienstag), so werden noch 3 Punkte vergeben. Für alle Lösungsabgaben bzw. letzte Änderungen bis 23:59:59 Uhr (MEZ) am 31.12.2021 gibt es noch einen Punkt.

Mitmachen lohnt nicht nur, sondern bereitet auch täglich mathematisches Vergnügen!

Im Aufgaben-Archiv sind zudem die Aufgaben der letzten Jahre zugänglich. Hier als Beispiel die Aufgabe vom 01.12.2020:

In einer alten Wichtelmütze liegen genau 80 Euroscheine. Der Weihnachtsmann sagt zu Knecht Ruprecht: „Wenn du zufällig 69 Scheine aus der Mütze ziehst, dann befinden sich darunter garantiert

- ein 100 €-Schein,
- drei 50 €-Scheine,
- fünf 20 €-Scheine,
- sieben 10 €-Scheine und
- neun 5 €-Scheine.

Was ist der Gesamtwert aller Geldscheine in der Mütze?

Als Lösungsmöglichkeiten werden die 10 Werte vorgeschlagen: 2500 € / 2845 € / 2075 € / 2465 € / 2920 € / 2695 € / 2150 € / 2330 € / 2285 € / 2710 €,

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[7].

[7] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

Zweiter Curſus

Abſchnitt XXII
Von den Gleichungen höheren Gradeſ
§332

Lehrſatz. Wenn alle Coefficienten einer numeriſchen Gleichung ganze Zahlen ſind, ſo ſind ihre reellen Wurzeln entweder ganze oder irrationale Zahlen.
Beweiſ. Die Gleichung ſei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

und alle Coefficienten ganze Zahlen. Wäre eine ihrer Wurzeln ein eigentlicher Bruch $\frac{p}{q}$, ſo müßte

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_0 = 0$$

ſein. Multipliciert man mit q^{n-1}, ſo wäre

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + a_0 q^{n-1} = 0$$

Dieſ iſt aber unmöglich, da daſ erſte Glied ein Bruch, alle folgenden ganze Zahlen ſind.

§333
Auffinden der rationalen Wurzeln

Die rationalen Wurzeln einer numeriſchen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten ſind nach d. v. § ganze Zahlen. Da nun daſ conſtante Glied alle Wurzeln alſ Faktoren enthält, ſo ſind die etwa vorhandenen rationalen Wurzeln unter den Teilern dieſeſ Gliedeſ zu ſuchen. Die Prüfung, ob einer dieſer Teiler eine Wurzel iſt, kann auf verſchiedenem Wege erfolgen.

1. **Wenn man den zu prüfenden Teiler für *x* in die Gleichung ſubſtituiert, ſo ergibt ſich ohne Weiteres, ob eſ der Gleichung genügt. Man führt die nötige Rechnung mit Vorteil in folgender an einem Beiſpiel erläuterten Weiſe auf. Die Gleichung ſei:**

   $$x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 43x + 42 = 0$$

   Um den Wert der linken Seite für irgend ein x zu finden, rechnet man in der durch die Klammern angedeuteten Weiſe:

   $$\big[\big((x+7)x - 7\big)x - 43\big]x + 42$$

Daſ conſtante Glied der Gleichung hat den Teiler (-7). Da nun dieſer Auſdruck für $x = -7$ gleich null wird, iſt (-7) eine Wurzel.
Sind die zu prüfende Teiler große Zahlen, iſt dieſe Rechnung daher beſchwerlich, ſo benutzt man lieber folgende Methode:

2. Man dividiert daſ conſtante Glied durch den zu prüfenden Teiler, addiert zum Quotienten den Coefficienten deſ vorletzten Gliedeſ, dividiert wieder durch jenen Teiler, addiert zu dieſem Quotienten den vorhergehenden Coefficienten und führt ſofort biſ zum höchſten Gliede. Erſcheint dann 0, ſo iſt der Teiler eine Wurzel. Denn iſt a der für daſ obige Beiſpiel zu prüfende Teiler deſ conſtanten Gliedeſ, ſo muß

$$a^4 + 7a^3 - 7a^2 - 43a + 42 = 0$$

ſein. Daher kann auch geſchrieben werden:

$$a^4\left\{1 + \left[7 + \left(-7 + \left(-43 + \frac{42}{a}\right) : a\right) : a\right] : a\right\} = 0$$

wodurch die obige Regel gerechtfertigt iſt.
Offenbar muß bei dieſer Rechnung jeder der Quotienten eine ganze Zahl ſein, ſoll daſ Reſultat 0 werden. Man iſt alſo der weiteren Prüfung mit dem Teiler a überhoben, ſobald eine der Diviſionen nicht aufgeht.

3. Eine dritte Prüfungſmethode beſteht in der Diviſion der Gleichung durch den Faktor $(x - a)$. Geht die Diviſion auf, ſo iſt $(x - a)$ ein Wurzelteiler und a eine Wurzel. Der erhaltene Quotient iſt dann daſ Produkt aller übrigen Wurzelfaktoren, ein Polynom vom (n-1)ten Grade, und für die weitere Prüfung auf eine andere rationale Wurzel bequemer alſ die gegebene Gleichung nten Gradeſ.

(Die Partialdivision wurde vorgerechnet und als Ergebnis $x^3 + x^2 - 15x + 25$ angegeben.)

Inhaltsverzeichnis Heft November 2021

Vorwort 2
Thema 10 – Beschränkte und kürzbare Brüche 3
Thema 11 – Streckenberechnung 7
Themen 10 und 11 – Aufgaben 11
Quersummen in Wettbewerbsaufgaben 12
Mathematik-Adventskalender 15
In alten Mathe-Büchern geblättert 17

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[8]	Nr.	Thema	Aufgaben-bezug
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan./Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

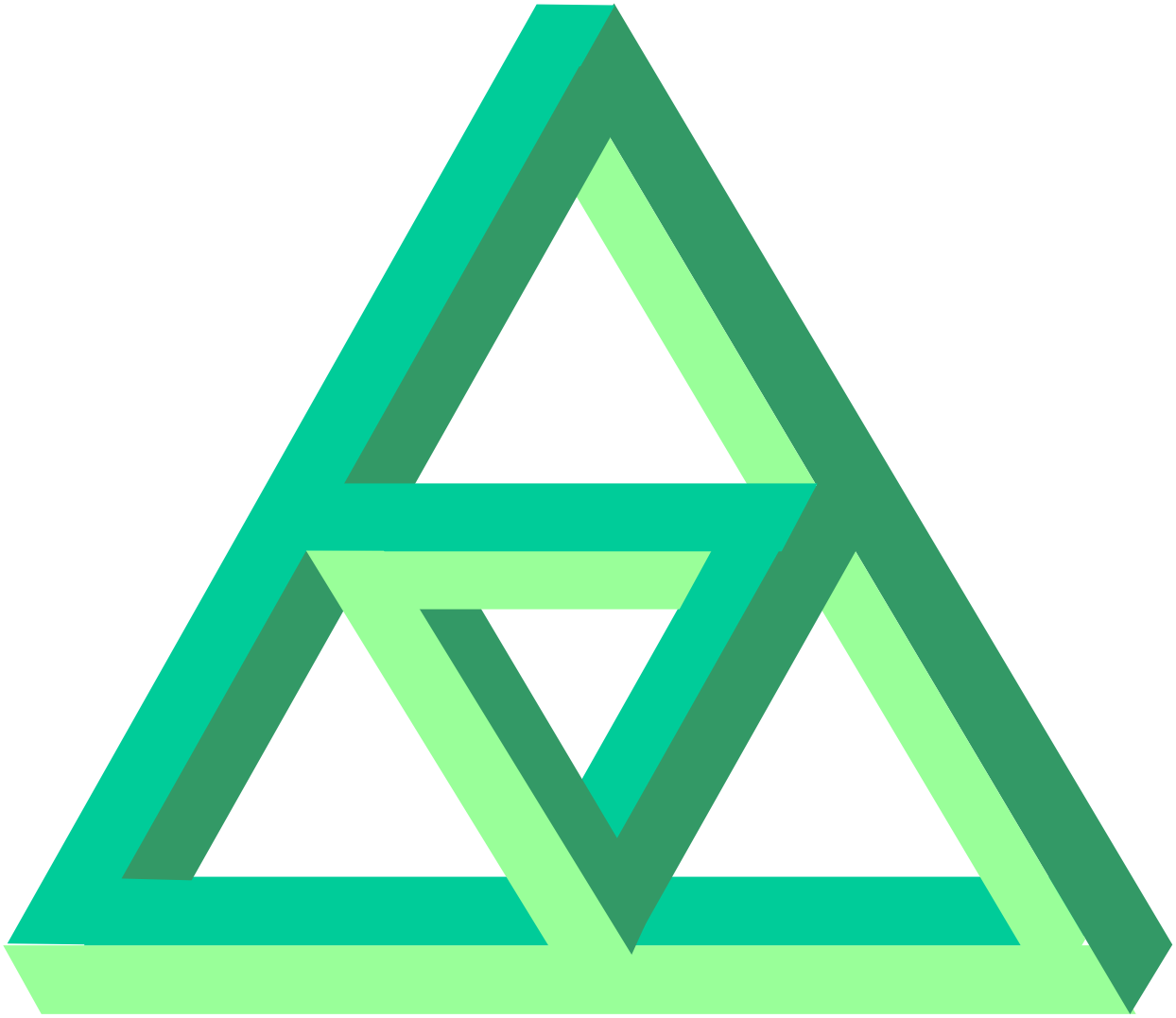
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[8] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Dezember 2021 20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Aus aktuellem Anlass informieren wir in diesem Heft über den Bundeswettbewerb Mathematik

Ein Auszug aus einem alten Mathematik-Buch soll unterhaltsam heutigen Schulstoff mit dem Blick vor über 100 Jahren zeigen.

In diesem Heft diskutieren wir im Thema 12 Bedeckungen von ebenen Figuren. Neben Dominosteinen wie in den Aufgaben **MO610922** und **MO611022** lassen sich auch andere Figuren für Bedeckungen verwenden. Es werden sowohl Lösungsansätze für beliebig große zu bedeckende Figuren gezeigt als auch die Färbungsmethode angewandt, um die Nichtexistenz von Bedeckungen der geforderten Art nachzuweisen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12 – Teil 1: Bedeckungen mit Dominosteinen

Aufgabe 12.1 - MO610922/MO611021[3]. Max bastelt durch Zusammenkleben von Teilen alter Schachbretter neue Figuren. Die Aufgabe ist nun, diese Figuren mit Dominosteinen lückenlos und überschneidungsfrei auszulegen. Dabei überdeckt jeder Dominostein genau zwei der Schachbrettfelder.

a) Die Abbildung 2 zeigt eine mögliche Anordnung von Dominosteinen, bei der die Figur in Abbildung 1 ausgelegt wird. Geben Sie alle anderen vier Möglichkeiten an, dieselbe Figur zu legen. Ein Nachweis, dass dies alle Möglichkeiten sind, wird nicht verlangt.

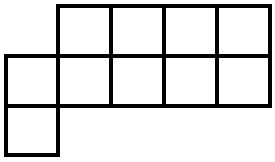


Abbildung 1

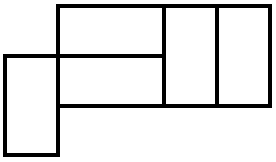


Abbildung 2

b) Geben Sie alle sechs Möglichkeiten an, die Figur in Abbildung 3 mit Dominosteinen auszulegen. Begründen Sie, dass es keine weiteren Möglichkeiten für das Auslegen der Figur geben kann.

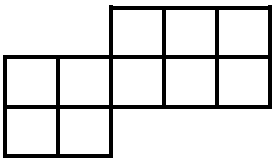


Abbildung 3

c) Bestimmen Sie (mit Nachweis) die Anzahl der Möglichkeiten, die Figur in Abbildung 4 mit Dominosteinen auszulegen. Die Aussagen aus (a) und (b) dürfen Sie hierbei ohne Nachweis verwenden.

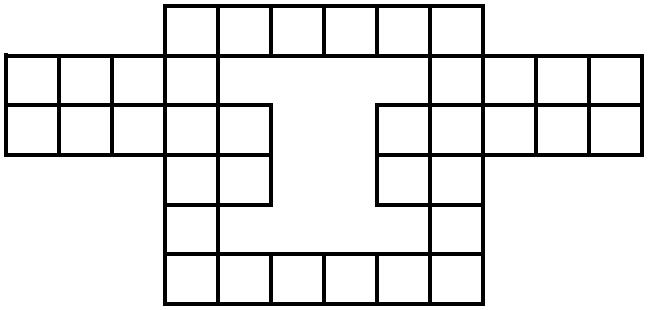
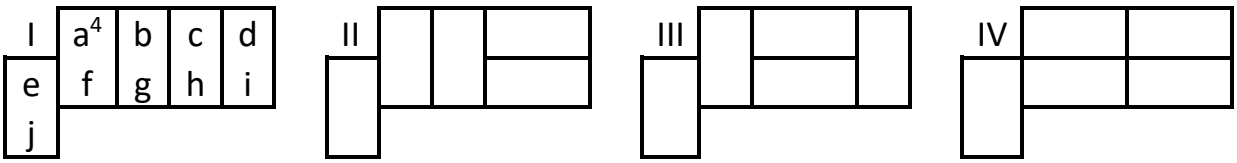


Abbildung 4

Lösungshinweise – Teil a) Es fällt nicht schwer, vier weitere Möglichkeiten anzugeben. Auch wenn im Aufgabentext der Nachweis ausdrücklich nicht verlangt wird, damit alle Möglichkeiten gefunden zu haben, wollen wir dies (zur Übung solcher Vollständigkeitsanalysen) dennoch nachweisen:



[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

[4] Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die Felder mit Kleinbuchstaben wie in der Zeichnung angegeben.

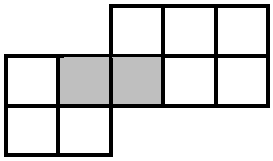
Um das Feld j zu bedecken, muss ein Dominostein auf e – j liegen. Um das Feld a zu bedecken, gibt es nur zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Wir bedecken mit einem Dominostein a – f. Um nun das Feld b zu bedecken, gibt es wiederum zwei Möglichkeiten:

Fall 1A: Wir bedecken mit einem Dominostein b – g. Die verbleibenden vier Felder können wir nun mittels c – h und folglich d – i bedecken (Variante I) oder mittels c – d und folglich h – i bedecken (Variante II).

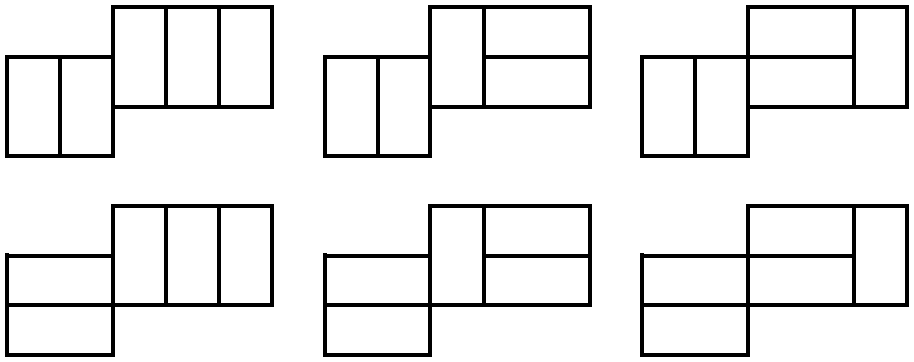
Fall 1B: Wir bedecken mit einem Dominostein b – c. Dann ergeben sich die Bedeckungen g – h und d – i zwangsläufig (Variante III).

Fall 2: Wir bedecken mit einem Dominostein b – c und folglich mit einem Dominostein f – g. Die verbleibenden vier Felder können wir nun mittels c – h und folglich d – i bedecken (Aufgabentext) oder mittels c – d und folglich h – i bedecken (Variante IV). Weitere Möglichkeiten kann es nicht geben.



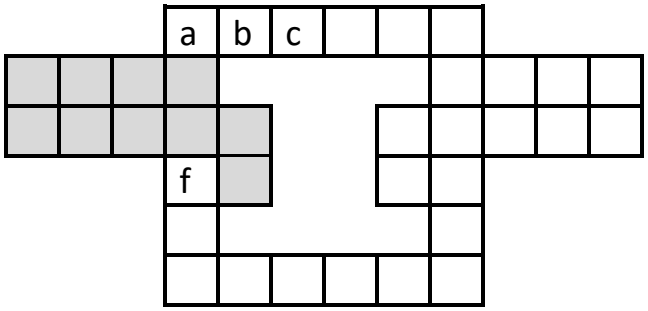
Teil b) Die grundlegende Lösungsidee besteht in der Zerlegung der Figur in eine 2×2-Figur und in eine 2×3-Figur. Offenbar kann kein Dominostein als Verbindung beider Teilfigur gelegt werden (graue Felder), da dann die jeweiligen Resflächen eine ungerade Anzahl von Feldern haben und folglich nicht vollständig durch Dominosteine bedeckt werden können.

Nun erkennen wir aber, dass für eine 2×2-Figur nur zwei Möglichkeiten für die Bedeckung existieren (zwei waagerecht liegende bzw. zwei senkrecht liegende Dominosteine). Außerdem erkennen wir, dass für eine 2×3-Figur nur drei Möglichkeiten für die Bedeckung existieren (drei senkrecht liegende Dominosteine bzw. zwei waagerecht liegende Dominosteine und ein senkrecht liegender Dominostein, entweder links oder rechts). Da beide Teilfiguren unabhängig voneinander bedeckt werden können, gibt es insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten. Die Aufgabenstellung verlangt, alle Möglichkeiten anzugeben:

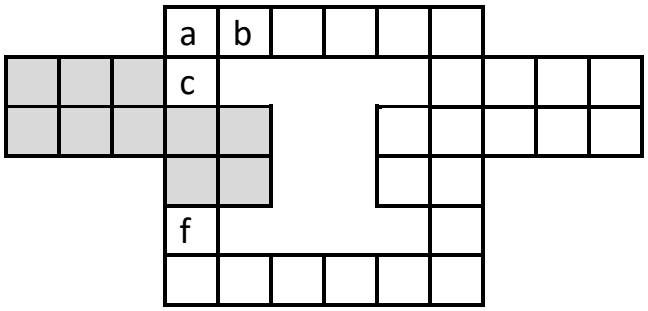


Teil c) Wir nehmen das Feld a als Ausgangspunkt für eine Bedeckung. Dann gibt es zwei Möglichkeiten.

Fall 1: Wir bedecken mit einem Dominostein a – b. Dann sehen wir die aus Teilaufgabe a) bekannte Figur. Kein aus dieser Figur herausragender Dominostein kann das Feld f bedecken, weil dabei eine ungerade Anzahl von Felder dieser Figur noch zu bedecken wären. Weiterhin sehen wir, dass mit c beziehungsweise mit f beginnend die nächsten Dominosteine in eindeutiger Weise gelegt werden müssen, bis spiegelbildlich auf der rechten Seite ebenfalls die Figur aus Teilaufgabe a) übrigbleibt. Da es für jede der Figuren aus Teilaufgabe a) 5 Möglichkeiten der Bedeckung gibt, gibt es im Fall 1 insgesamt $5 \cdot 5 = 25$ Möglichkeiten.



Fall 2: Wir bedecken mit einem Dominostein a – c. Dann sehen wir die aus Teilaufgabe b) bekannte Figur. Kein aus dieser Figur herausragender Dominostein kann das Feld f bedecken, weil dabei eine ungerade Anzahl von Felder dieser Figur noch zu bedecken wären. Weiterhin sehen wir, dass mit b beziehungsweise mit f beginnend die nächsten Dominosteine in eindeutiger Weise gelegt werden müssen, bis spiegelbildlich auf der rechten Seite ebenfalls die Figur aus Teilaufgabe b) übrigbleibt. Da es für jede der Figuren aus Teilaufgabe b) 6 Möglichkeiten der Bedeckung gibt, gibt es im Fall 2 insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten.



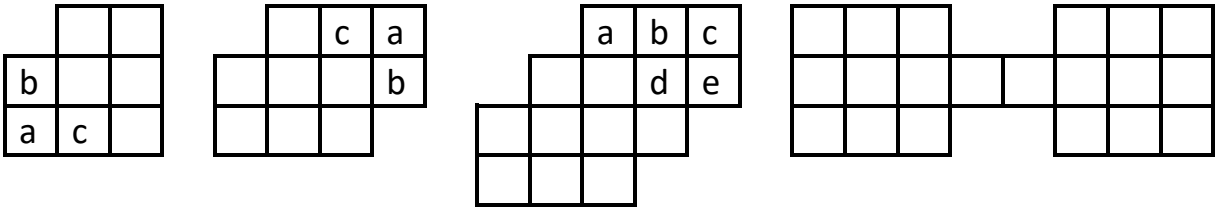
Da es keine andere Möglichkeit gibt, das Feld a zu bedecken, gibt es insgesamt $25 + 36 = 61$ Möglichkeiten, die gegebene Figur zu bedecken. ❑

Max hat schon in vergangenen Jahren mit Dominosteinen experimentiert. Auch hier ist der Zusammenhang der Teilaufgaben in gleicher Weise gegeben.

Aufgabe 12.2 - MO550921. Max möchte die folgenden Figuren[5] mit Dominosteinen auslegen:
a) Finden Sie vier Möglichkeiten, die linke Figur mit Dominosteinen zu legen! Ein Nachweis, dass es tatsächlich genau vier Möglichkeiten gibt, wird nicht verlangt.

[5] Die Abbildungen waren Bestandteil der Aufgabenstellung, allerdings wurden die Bezeichnungen hier für die Lösungsdarstellung hinzugefügt.

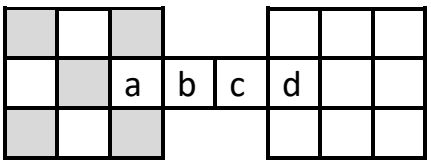
b) Geben Sie für jede der beiden mittleren Figuren alle Möglichkeiten an, sie mit Dominosteinen zu legen. Auch hier wird kein Vollständigkeitsnachweis verlangt.
c) Zeigen Sie, dass man die rechte Figur nicht mit Dominosteinen legen kann.



Lösungshinweise – Teilaufgabe a) Wir wollen systematisch alle Möglichkeiten suchen und bedecken zunächst das Feld a. Legen wir einen Dominostein auf a – c, so ist die Lage der weiteren Dominosteine bereits eindeutig bestimmt (1 Möglichkeit). Legen wir einen Dominostein dagegen auf a – b, so verbleibt ein 2×3-Rechteck, für das es insgesamt 3 Möglichkeiten gibt, es mit Dominosteinen zu belegen. Insgesamt finden wir also 4 Möglichkeiten, die laut Aufgabenstellung explizit anzugeben sind.

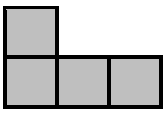
Teilaufgabe b1) Wir suchen systematisch alle Möglichkeiten und wollen zunächst das Feld a bedecken. Legen wir einen Dominostein auf a – c, so ist die Lage der weiteren Dominosteine bereits eindeutig bestimmt (1 Möglichkeit). Legen wir einen Dominostein dagegen auf a – b, so verbleibt eine Figur wie in Teilaufgabe a), für die es insgesamt 4 Möglichkeiten gibt, sie mit Dominosteinen zu belegen. Insgesamt finden wir also 5 Möglichkeiten, die laut Aufgabenstellung explizit anzugeben sind.

Teilaufgabe b2) Legen wir zunächst Dominosteine auf a – b und c – e, so verbleibt eine Figur wie in Teilaufgabe b1), für die es insgesamt 5 Möglichkeiten gibt, sie mit Dominosteinen zu belegen. Um das Feld c zu belegen, können wir aber auch die Dominosteine auf b – c und d – e bzw. auf b – d und c – e legen. In jedem dieser zwei Möglichkeiten ist die Lage der restlichen Dominosteine eindeutig festgelegt. Insgesamt gibt es also 5 + 2 = 7 Möglichkeiten, die laut Aufgabenstellung explizit anzugeben sind.



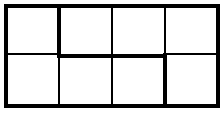
Teilaufgabe c) Würden wir einen Dominostein auf b – c legen, verblieben links und rechts 3×3-Quadrate, also jeweils eine ungerade Anzahl von Feldern, die sich nicht mit Dominosteinen bedecken lassen. Also müssen wir die Dominosteine auf a – b und folglich auch auf c – d legen. In der verbleibenden Teilfigur links können wir nun in einer systematischen Suche zeigen, dass diese nicht vollständig mit Dominosteinen bedeckt werden kann. Dies ist jedoch einfacher zu zeigen, wenn wir die grauen und weißen Felder zählen. Jeder Dominostein überdeckt nämlich immer – egal wie er liegt – ein graues und ein weißes Feld. Da aber 5 graue und 3 weiße Felder bedeckt werden müssen, ist dies mit Dominosteinen nicht vollständig möglich. ❑

Thema 12 – Teil II: Ebene Bedeckungen

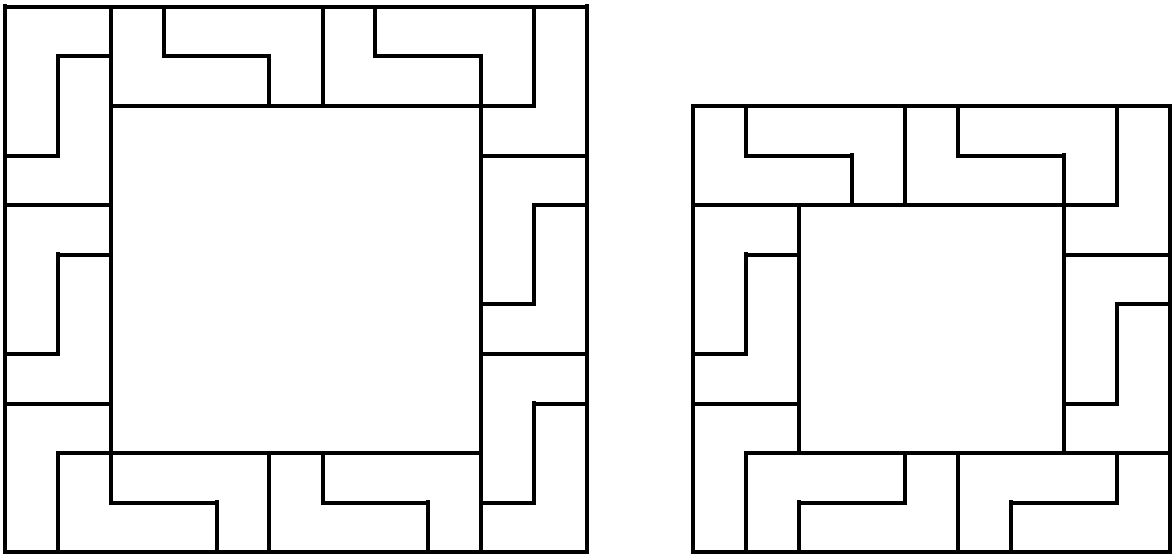


Aufgabe 12.3 - MO481021. Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$-Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll in L-Stücke der in Abbildung gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.
a) Bestimmen Sie für $n \in \{3; 5; 7; 9\}$ jeweils eine solche Zerlegung.
b) Zeigen Sie, dass für beliebiges ungerades n mit $n \geq 3$ die Zerlegung des $n \times n$-Schachbretts ohne mittleres Feld in eine gerade Anzahl von L-Stücken möglich ist.
c) Leiten Sie aus Aussage b) her, dass jede ungerade Quadratzahl bei Division durch 8 den Rest 1 lässt.

Lösungshinweise – Aufgabenteil b) Wir nehmen wir an, dass wir für einige ungerade Zahlen n bereits Zerlegungen in jeweils gerade viele Teile gefunden haben[6]. Wir konstruieren eine neue Zerlegung für $n + 4$, indem wir um das $n \times n$ -Quadrat einen Ring der Breite 2 legen. Da n ungerade ist, ist entweder $n - 1$ oder $n - 3$ durch 4 teilbar. Das linke Bild in der Abbildung zeigt die Konstruktion für den Fall $n = 15$ (also $n - 3$ ist durch 4 teilbar); das rechte Bild für den Fall $n = 13$ (also $n - 1$ ist durch 4 teilbar).



Jeder dieser Ringe kann durch zwei L-Stücke wie abgebildet an jeder der 4 Seiten um 4 verlängert werden. Offenbar wurde auch stets eine gerade Anzahl von Teilen benutzt.



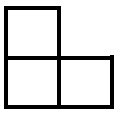
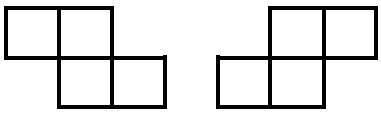
Beginnend mit den Zerlegungen aus der Lösung zu Aufgabenteil a) erhalten wir so die gesuchten Zerlegungen für größere n.

Aufgabenteil c) Bei Division durch 8 lässt die Quadratzahl $1^2 = 1$ den Rest 1. Für ungerades $n \geq 3$ lässt sich eine Fläche aus $n^2 - 1$ Feldern in eine gerade Anzahl von

[6] Finden Sie gemäß Teilaufgabe a) solche Beispiele.

Teilen mit 4 Feldern zerlegen. Also ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Damit lässt n^2 bei Division durch 8 in der Tat den Rest 1, sofern n ungerade ist.

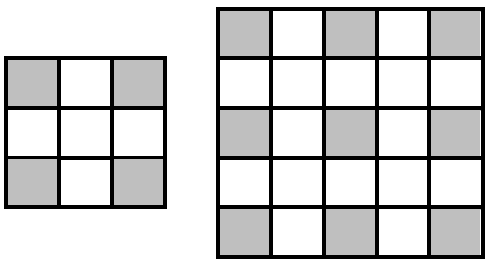
Aufgabe 12.4a - MO460943. Nicoles Zimmer soll neu gefliest werden. Zur Verfügung stehen nur die hier gezeigten Fliesen, die aus je 3 bzw. 4 Einheitsquadraten bestehen.

3er-Fliese:  4er-Fliesen: 

a) Zeigen Sie, dass es für $n = 1; 2; 3; 4; 5$ nicht möglich ist, ein quadratisches Zimmer, das aus $n \times n$ Einheitsquadraten besteht, mit den gezeigten 3er- und 4er-Fliesen zu plattieren.
b) Zeigen Sie, dass es für jedes ganzzahlige n mit $n \geq 6$ möglich ist, ein quadratisches Zimmer der Seitenlänge n mit den gezeigten 3er- und 4er-Fliesen zu plattieren.

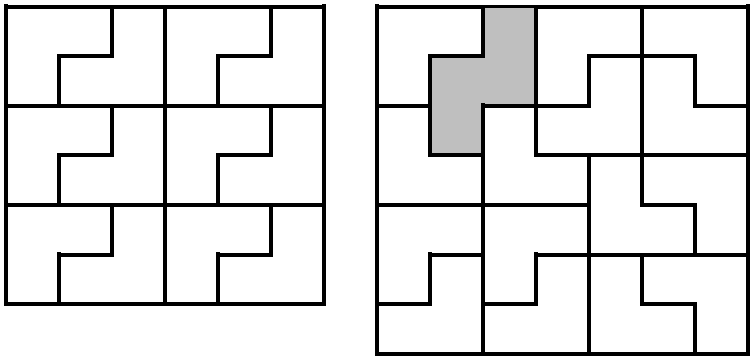
Aufgabe 12.4b – MO461043. Nicoles Zimmer … (s. Aufgabe MO460943).
a) Für welche positiven, ganzen Zahlen n ist es möglich, ein quadratisches Zimmer, das aus $n \times n$ Einheitsquadraten besteht, mit den gezeigten 3er- und 4er-Fliesen zu plattieren?
b) Nicoles Zimmer besteht aus 7×7 Einheitsquadraten. Bestimmen Sie die größtmögliche Anzahl 4er-Fliesen der gezeigten Form, die sich bei einer vollständigen Plattierung von Nicoles Zimmer verbrauchen lässt.

Lösungshinweise – Aufgabenteile a) Die vollständige Lösung zur Aufgabe in der Klassenstufe 9 beantwortet den Aufgabenteil a) in der Klassenstufe 10. Den allgemeinen Zugang zur Lösung für Aufgabe 12.4b finden wir durch systematisches Probieren: Für $n = 1$ und $n = 2$ sehen wir, dass es keine Bedeckung geben kann. Für $n = 4$ können wir die Nichtexistenz nachweisen, indem wir mittels Fallunterscheidung alle Belegungsmöglichkeiten – beginnend in einer Ecke – diskutieren und jeweils zu einem Widerspruch führen. Für $n = 3$ und $n = 5$ nutzen wir die Färbungsmethode für den Nachweis, dass keine Bedeckungen möglich sind:

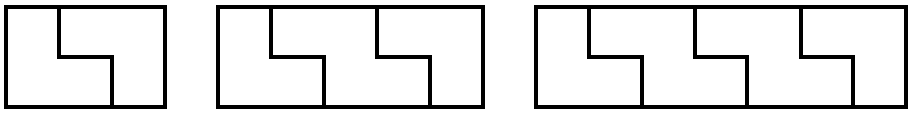


Egal, wie wir eine 3er- oder 4er-Fliese auf die Quadrate legen, es kann stets nur jeweils ein graues Feld bedeckt werden. Also sind beim 3×3-Quadrat mindestens 4 Fliesen und beim 5×5-Quadrat mindestens 9 Fliesen erforderlich. Jedoch decken 4 Fliesen mindestens $4 \cdot 3 = 12$ bzw. $9 \cdot 3 = 27$ Felder, also mehr, als in den Quadraten zur Verfügung stehen. Es kann also keine Bedeckung wie gefordert existieren.

Schließlich müssen wir $n = 6$ und $n = 7$ probieren und finden tatsächlich geeignete Bedeckungen.

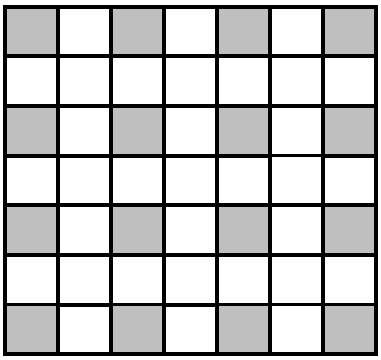


Um auch für größere $n > 7$ Bedeckungen nachzuweisen, nutzen wir die Möglichkeit, Streifen der Form $2 \times n$ mit ungerader Zahl $n \geq 3$ zu bilden:



…

Mit diesen Streifen können alle Streifen der Form $2 \times m$ mit gerader Zahl $m \geq 6$ bedeckt werden, da sich jede gerade Zahl $m \geq 6$ als $m = 3 + n$ mit ungerader Zahl $n \geq 3$ darstellen lässt. Somit können wir ausgehend von dem 6×6-Quadrat alle größeren Quadrate mit geradzahliger Seitenlänge und ausgehend von dem 7×7-Quadrat alle größeren Quadrate mit ungeradzahliger Seitenlänge bedecken, indem wir aufeinanderfolgende Streifen um die Quadrate legen.

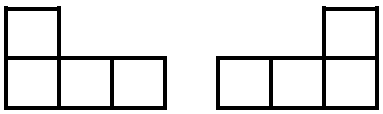


Lösungshinweise – Aufgabenteil b) Wir nutzen auch hier die Färbungsmethode: Wie oben stellen wir wieder fest, dass egal, wie wir eine 3er- oder 4er-Fliese auf dieses Quadrate legen, kann stets nur jeweils ein graues Feld bedeckt werden. Wir benötigen also mindestens 16 Fliesen. Bezeichnen wir mit x die Anzahl der 3er-Fliesen und mit y die Anzahl der 4er-Fliesen, so muss neben $x + y \geq 16$ auch $3x + 4y = 49$ gelten. Somit können wir die Anzahl y abschätzen, denn es gilt

$$49 = 3x + 4y = 3(x + y) + y \geq 48 + y$$

Somit ist $y = 1$ die größtmögliche Anzahl der 4er-Fliesen. Das obige Beispiel beweist, dass es tatsächlich eine Bedeckung des 7×7-Quadrates mit einer 4er-Fliese gibt.

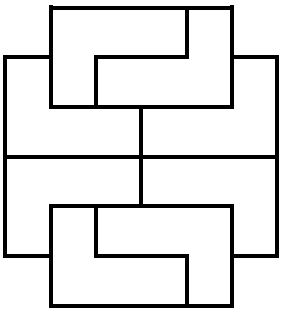
Aufgabe 12.5 – MO280936. Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Ecken vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Feld aus



einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!
Hinweis: Es ist zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.

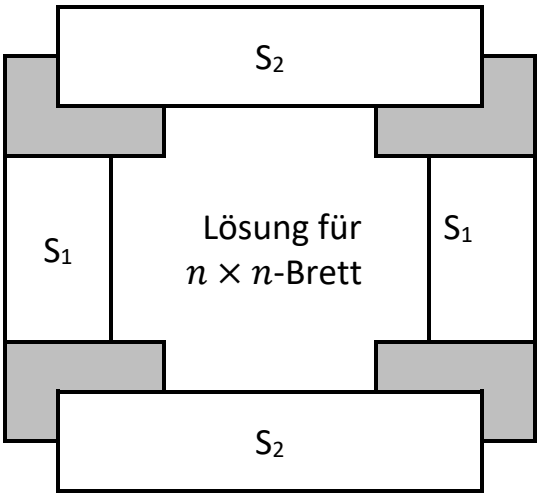
Lösungshinweise: Zunächst stellen wir fest, dass es keine Lösung für ungerade Zahlen n geben kann, denn in diesem Fall sind $n^2 - 4$ Felder, also eine ungerade Anzahl von Feldern zu bedecken. Mit den vorgegebenen Flächen kann aber nur eine gerade Anzahl von Feldern bedeckt werden.

Im zweiten Schritt können wir feststellen, dass es keine Zerlegung der geforderten Art geben kann, wenn n durch 4 teilbar ist.

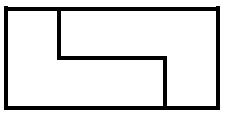


Schließlich weisen wir nach, dass für $n = 4k + 2$ mit $k > 0$ stets eine Zerlegung existiert. Für $n = 4 \cdot 1 + 2 = 6$ geben wir ein solches Beispiel an.

Haben wir nun – beginnend mit $n = 4 \cdot 1 + 2$ – die Zerlegung eines $n \times n$-Brettes mit $n = 4 \cdot k + 2$ gefunden, konstruieren wir eine Zerlegung des $m \times m$-Brettes mit $m = 4 \cdot (k + 1) + 2$:



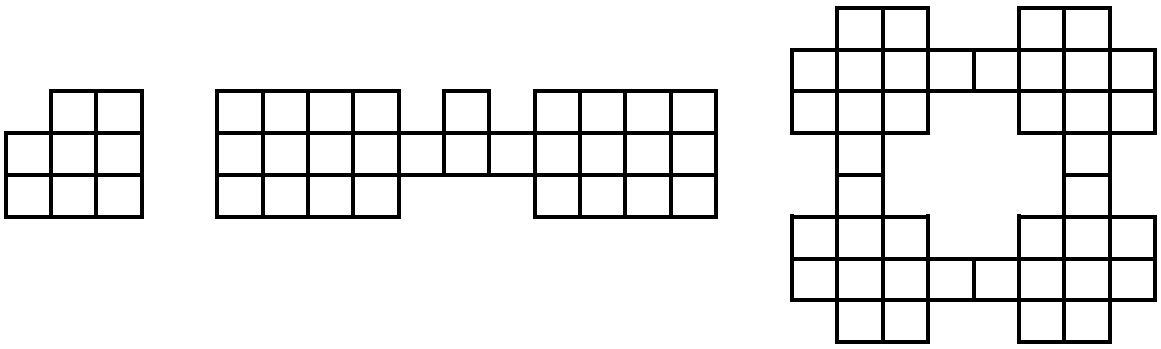
Um das $n \times n$-Brett platzieren wir 4 der gegebenen Flächen wie in der Abbildung gezeigt (graue Flächen). Die Streifen S_1 haben das Format $2 \times (n - 2)$ und die Streifen S_2 haben das Format $2 \times (n + 2)$ mit $n \geq 6$. Ihre längeren Seiten sind also stets durch 4 teilbar. Deshalb lassen sich diese Streifen in Teile der nebenstehend abgebildeten Form zerlegen.
Somit ist das $(n + 4) \times (n + 4)$-Brett wie gefordert zerlegbar.



Zusammenfassend sind die geforderten Zerlegungen genau für alle natürlichen Zahlen $n = 4 \cdot k + 2$ mit $k \geq 1$ möglich. ❑

Thema 12 – Aufgaben: Bedeckungen

Aufgabe 12.5 - MO551021. Max möchte folgende Figuren mit Dominosteinen auslegen:

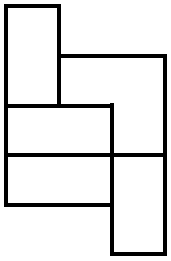


a) Finden Sie vier Möglichkeiten, die linke Figur zu legen! Ein Nachweis, dass es tatsächlich genau vier Möglichkeiten gibt, wird nicht verlangt.

b) Zeigen Sie, dass man die mittlere Figur nicht mit Dominosteinen auslegen kann.

c) Bestimmen Sie (mit Nachweis) die Anzahl der Möglichkeiten, die rechte Figur mit Dominosteinen auszulegen. Sie dürfen hierzu die Resultate der vorigen Aufgabenteile ohne Nachweis benutzen.

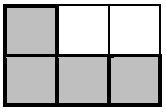
Aufgabe 12.6 - MO581022. Aus Dominosteinen der Form 2×1 und L-Steinen, bestehend aus drei quadratischen Feldern in L-Form, sollen Figuren gelegt werden.



a) In der Abbildung wurde eine Figur mit 11 Feldern aus vier Dominosteinen und einem L-Stein gelegt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, dieselbe Figur mit einem Dominostein und drei L-Steinen zu legen? Zwei Möglichkeiten sollen als gleich gelten, wenn sie durch Drehung als Ganzes ineinander überführt werden können.

b) Von einem 6×10-Rechteck werden nach Belieben zwei symmetrisch zum Mittelpunkt des Rechtecks liegende Felder entfernt. Zeigen Sie, dass die aus den übrigen 58 Feldern bestehende Figur immer mit zwei Dominosteinen und 18 L-Steinen ausgelegt werden kann.

Aufgabe 12.3 - MO481021. Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$-Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll



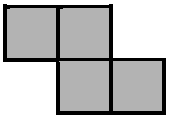
in L-Stücke der in Abbildung gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.

Zeigen Sie für jede dieser Zahlen $n\, n \in \{3; 5; 7; 9\}$, dass man die übrige Fläche in solche L-Stücke aus vier Schachbrettfeldern zerlegen kann.

Aufgabe 12.7 (Aufgabe 3-5A des KZM Klasse 9/10[7]).

a) Zum Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2×2 und solche des Formates 4×1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

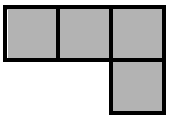
F1



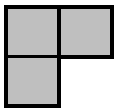
b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.

c) Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich jeweils für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers, wenn zum Auslegen jeweils nur Platten der Form F2 verwendet werden soll.

F2



Aufgabe 12.8. Für welche n lassen sich $n \times n$-Spielfelder mit Spielsteinen der nebenstehenden Form so bedecken, dass genau ein (beliebig vorgegebenes) Feld frei bleibt?



[7] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1 nach BWM 1972, 1. Runde, K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1987, S. 72.15.

Parkettierungen und Färbungen

Typische Wettbewerbsaufgaben zur Parkettierung (Bedeckung) beinhalten die vollständige und überdeckungsfreie Bedeckung von Figuren mit Domino-Steinen. Es ist offensichtlich, dass sich eine Fläche, die aus (8×8)-Quadraten besteht, mit Domino-Steinen parkettieren lässt. Aber geht dies auch, wenn wir zwei gegenüberliegende Eckfelder entfernen? Klar ist, dass die auszufüllende Fläche notwendigerweise eine gerade Anzahl an Teilquadraten besitzen muss. Dies erfüllt die aus 62 Quadraten bestehende Fläche. Nach einigem systematischen Probieren können wir uns sicherlich davon überzeugen, dass es dennoch keine solche Parkettierung gibt. Im Gegensatz zum Existenznachweis für eine Parkettierung, den wir lediglich konstruktiv durch Angabe eines Beispiels führen können, ist der Nachweis, dass es keine solche Parkettierung geben kann, nicht durch „misslungene“ Beispiele führbar.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung solcher Aufgaben ist das geschickte Einfärben der Fläche. Im genannten Fall ist es beispielsweise nützlich, das 8×8-Quadrat wie ein Schachbrett einzufärben. Wir erkennen, dass es nach Entfernen von zwei (gleichfarbigen) Eckfeldern 32 schwarze und 30 weiße Felder (oder umgekehrt) auf dem Brett gibt. Wie wir jedoch leicht sehen, überdeckt ein Domino-Stein, der ja aus zwei aneinandergefügten Quadraten besteht, immer genau ein weißes und ein schwarzes Feld, nie zwei gleichfarbige Felder. Daraus folgt, dass sich die Fläche nicht mit Domino-Steinen parkettieren lässt.

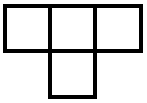
Aufgabe 1. Man untersuche, ob ein 10×10-Quadrat mit 1×4-Steinen vollständig ausgelegt werden kann.

Lösungshinweise: Wir färben das Quadrat mit vier Farben (hier durch Ziffern dargestellt) wie in der Skizze:

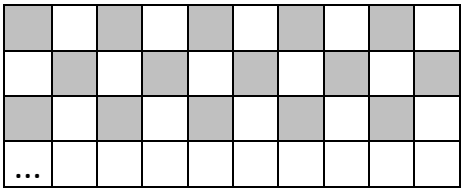
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
...									

Beim Auszählen der Felder erkennen wir, dass die Farben unterschiedlich häufig auftreten, im Widerspruch dazu, dass ein 1×4-Stein stets alle vier Farben bedeckt. ❑

Aufgabe 2. Man untersuche, ob ein 10×10-Quadrat mit Tetris-Steinen (s. nebenstehende Abbildung) vollständig bedeckt werden kann.



Lösungshinweise: Während ein 4×4-Quadrat bedeckt werden kann, vermuten wir (nach einigen Versuchen), dass es beim 10×10-Quadrat nicht gelingt. Um den Unmöglichkeitsbeweis zu führen, färben wir das Quadrat mit 2 Farben wie ein Schachbrett (vgl. Skizze):



Diese Färbung ergibt 50 weiße und 50 schwarze Felder. Ein Tetris-Stein überdeckt stets drei Felder einer Farbe und ein Feld der anderen Farbe. Somit sind für eine vollständige Überdeckung gleich viele Tetris-Steine mit drei weißen Feldern und mit drei schwarzen Feldern notwendig, im Widerspruch dazu, dass eine ungerade Anzahl der Tetris-Steine (25) zur Überdeckung der 100 Felder erforderlich ist. ❑

Aufgabe 3. Es wurde ein 7×7-Quadrat mit 1×3-Steinen überdeckt. Es bleibt ein 1×1-Feld frei. Wo kann dieses liegen?

Lösungshinweise: Wir färben das 7×7-Quadrat mit drei Farben (hier als Ziffern dargestellt):

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
...						

In der nebenstehenden Färbung stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Da aber ein 1×3-Stein stets drei Farben überdeckt, kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen.

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
...						

Nun erfolgte die Färbung willkürlich. Auch die nebenstehende Färbung wäre möglich. Auch hier stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Wiederum kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen – aber insgesamt nur an solchen Stellen, die bei beiden Färbungen eine „1“ tragen. Welche sind es? Es ist nun noch zu zeigen, dass es tatsächlich Überdeckungen der geforderten Art gibt. ❑

Aufgabe 4. Auf einem 11×11-Spielfeld befinden sich auf allen Feldern je ein Käfer. Jeder Käfer verlässt sein Feld und begibt sich auf ein diagonal benachbartes Feld. Dabei können sich danach auf einem Feld mehrere Käfer befinden. Wie viele Felder bleiben mindestens frei, wenn sich alle Käfer wie beschrieben bewegt haben?

Lösungshinweise: Um sich zu verdeutlichen, ob Felder frei bleiben, betrachten wir zunächst kleinere Spielfelder. Bei einem 2×2-Spielfeld bleiben offenbar keine Felder frei, denn jeder Käfer wechselt von einer Ecke in die gegenüberliegende Ecke. Bei einem 3×3-Spielfeld müssen die vier Käfer der Eckfelder auf das mittlere Feld

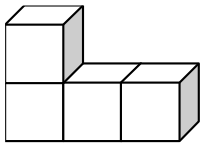
wechseln. Der anfangs auf dem Mittelfeld befindliche Käfer muss in eine Ecke wechseln. Die restlichen Käfer könnten jeweils mit einem diagonal benachbarten Käfer die Plätze tauschen. Es bleiben also mindestens drei (Eck-) Felder frei.

Für eine verallgemeinerungsfähige Beweisidee markieren wir in einem $n \times n$-Spielfeld die Felder wie in der Abbildung. Jeder auf einer „1“ befindliche Käfer wechselt zu einer „2“, und jeder auf einer „2“ befindliche Käfer wechselt zu einer „1“. Da es aber n Felder „1“ mehr als Felder „2“ gibt, müssen mindestens n Felder „1“ frei bleiben. Dass es eine solche Veränderung mit anschließend n freien Feldern tatsächlich geben kann, lässt sich problemlos mit einem Beispiel zeigen.

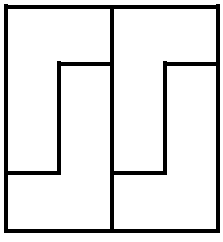
1	1	1	1	...
2	2	2	2	
1	1	1	1	
2	2	2	2	
1	1	1	1	
...				

❑

Aufgabe 5. Gegeben seien aus vier Würfel zusammengesetzte Körper der Form wie nebenstehend abgebildet. Wie viele solcher Körper sind mindestens notwendig, um daraus einen Würfel zusammenzusetzen?



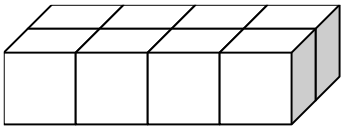
Lösungshinweise: Die Kantenlänge des kleinsten aus den gegebenen Körpern zu bauenden Würfel muss offensichtlich mindestens 3 betragen. Da aber dessen Volumen 27 Volumeneinheiten (VE) betragen würde, jeder Teilkörper aber aus 4 VE besteht, kann der $3 \times 3 \times 3$-Würfel nicht aus diesen Teilkörpern zusammengesetzt sein. Dagegen leistet ein $4 \times 4 \times 4$-Würfel das gewünschte, d.h., er kann aus 16 Teilkörpern gebildet werden, weil in einer Schicht 4 Teilkörper problemlos zusammengefügt werden können, zum Beispiel in folgender Weise:



Vier derartige Reihen übereinander gelegt ergeben einen vollständigen Würfel. Also genügen 16 Körper der gegebenen Form, um einen Würfel zusammenzusetzen. ❑

Ergänzende Bemerkung: Suchen wir den nächstgrößeren Würfel, so entfällt der mit der Kantenlänge 5 als Lösung. Weiter stellen wir fest, dass eine 6×6-Schicht nicht vollständig aus diesen Teilkörpern gebildet werden kann (Beweis der

Unmöglichkeit?). Aber der $6 \times 6 \times 6$-Würfel lässt sich aus 54 Teilkörpern der obigen Form zusammensetzen!



In ähnlicher Weise können wir die Fragestellung für Körper der nebenstehenden Form stellen. Die Kantenlänge des kleinsten Würfels muss mindestens 4 betragen und es bereitet keine Schwierigkeiten, einen solchen Würfel aus acht Körpern zusammenzusetzen. Den $6 \times 6 \times 6$-Würfel aus 27 Quadern der Abmessung $4 \times 2 \times 1$ zusammenzusetzen, erscheint im Volumenvergleich $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 = 27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$ ebenfalls problemlos – doch gefehlt, diese Aufgabe ist nicht lösbar (warum?).

Nachtrag zu Quersummen in Wettbewerbsaufgaben

Für die Aufgabe 2-1 des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik[8] der Klassenstufen 9/10 finden wir in den Aufgaben der Mathematik-Olympiade eine verallgemeinernde Formulierung:

Aufgabe MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) - q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Lösungshinweise: Es sie n eine natürliche Zahl. Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Zahl n endet nicht auf die Ziffer 9.
   In diesem Fall ist die letzte Ziffer von $n+1$ um 1 größer als die letzte Ziffer von n. In allen vorangehenden Ziffern (falls es solche gibt) stimmen $n+1$ und n überein. Also ist $q(n+1) = q(n) + 1$ und folglich gilt $d(n) = 1$.

2. Die Zahl n endet auf genau k Ziffern 9 ($k > 0$).
   Vor den k Ziffern 9 steht eine von 9 verschiedene Ziffer. Wir bilden deren Summe $s(n)$. Steht vor den k Ziffern 9 keine Ziffer mehr, so gilt $s(n) = 0$. Dann finden wir $q(n) = s(n) + k \cdot 9$ und $q(n+1) = s(n) + 1$. Folglich gilt $d(n) = 9k - 1$.

Die gesuchte Menge aller Zahlen $d(n)$ enthält also genau die Zahl 1 und alle Zahlen der Form $9k - 1$ mit ganzzahligem.

[8] Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-1, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

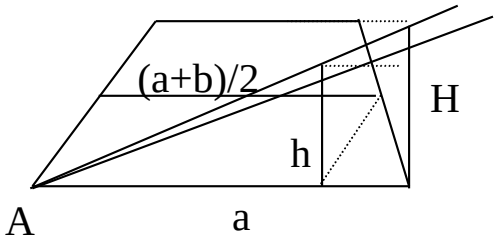
Folgerung (Aufgabe 2-1 des KZM, Klassenstufen 9/10). Die Zahl n = 2.899.999 ist die kleinste natürliche Zahl, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als die Quersumme ihres Nachfolgers $Q(n+1)$ durch 11 teilbar sind.

Lösungshinweise: Wir suchen die kleinste durch 11 teilbare Zahl m der Form $m = 9k - 1$. Durch systematisches Probieren finden wir dafür mit $k = 5$ den Wert $m = 44$. Daraus folgt, dass die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft auf fünf Ziffern 9 enden muss. Ist die Quersumme der vor diesen Ziffern 9 stehenden Ziffern gleich a (offenbar gilt $a > 0$), so erhalten wir $Q(n) = Q(a) + 5 \cdot 9 > 45$. Es muss also $a \geq 10$ gelten. Die Ziffernfolge 19 entfällt, weil dann n auf sechs Ziffern 9 enden würde. Die Ziffernfolge 28 erfüllt aber alle Bedingungen (wie durch eine Probe noch zu bestätigen ist).

Flächenhalbierung

In Anlehnung an Aufgabe 2-4 des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik[9] der Klassenstufen 9/10 diskutieren wir die Flächenhalbierung eines Trapezes *ABCD* [10], wobei die Teilungsgerade g durch den Punkt A verlaufen soll. Für die Konstruktion des Punktes X (der Schnittpunkt der Flächenhalbierenden durch A mit der gegenüberliegenden Trapezseite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$) sind mehrere Lösungsvarianten möglich:

(1) Da es genügt, die Höhe h des Dreiecks ABX zu ermitteln, können wir unter Ausnutzung der Parallelität für die Höhe h und die Trapezhöhe H und die Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{CD}| = b$ die Gleichung über die Flächeninhalte



$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \cdot H\right)$$

umformen zu

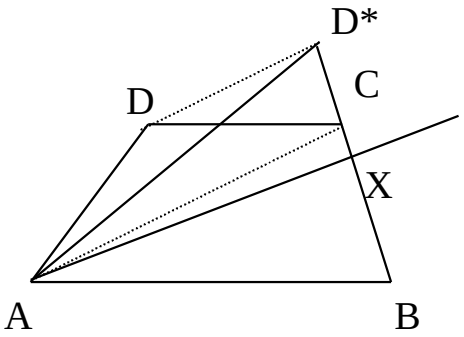
$$h : H = \frac{a+b}{2} : a$$

[9] Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-1, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

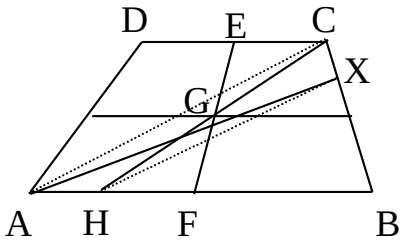
[10] nach MNU Vol. 47 (1994) Heft 6, S. 348-352

Diese Verhältnisgleichung können wir unmittelbar in der Trapezfigur wiederfinden. Dazu projizieren wir die Mittellinie (wie in der Skizze angedeutet) auf die Grundseite, zeichnen zudem die Höhe H im Punkt B ein und erhalten h.

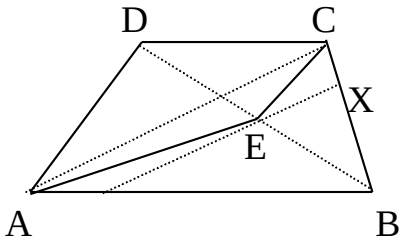
(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ACD. Geschieht dies nämlich so, dass das entstehende Dreieck ABD^* (mit C auf BD^*) flächengleich zum Trapez $ABCD$ wird, so ist X offensichtlich die Seitenhalbierende von BD^*.



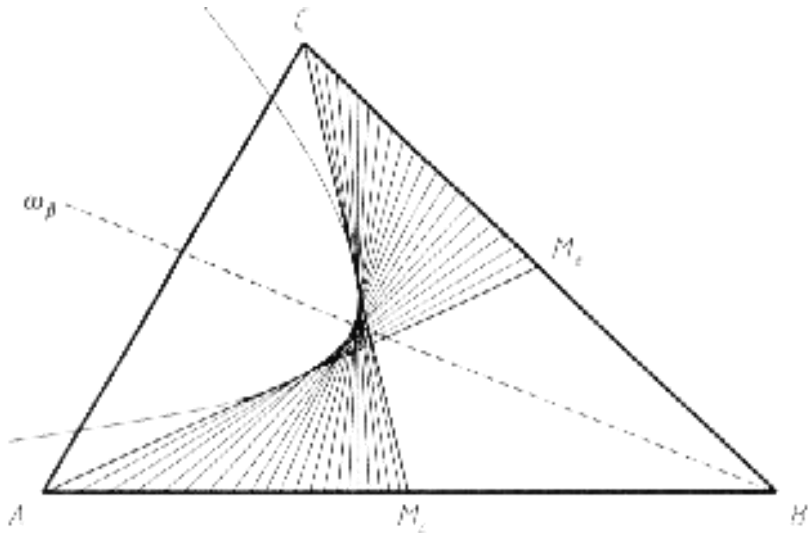
(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten. Diese Gerade schneidet die Mittellinie in G. Drehen wir die Gerade EF um G, so sind die Dreiecke HEG und CFG inhaltsgleich (sogar kongruent). Somit teilt die Gerade HC die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks AHC bzgl. $\overline{AC}$ in das (inhaltsgleiche) Dreieck AXC ist der gesuchte Punkt gefunden.



(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Wir suchen überhaupt eine Halbierung und versuchen, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$, dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke ABD und BCD jeweils halbiert werden. Durch Scherung des Dreiecks AEC bzgl. $\overline{AC}$ zum Dreieck AXE finden wir den gesuchten Punkt.



Die beiden letzten Lösungsvarianten legen die Frage nahe, wie sich die Lagen der Flächenhalbierenden in der KZM-Aufgabe 2-4 ändern, wenn sich die Position des Punktes D ändert. Die folgende Abbildung möge Anregungen für eigene Untersuchungen geben. Wir erkennen beispielsweise, dass der Schwerpunkt des Dreiecks nur in Grenzfällen auf der gesuchten Flächenhalbierenden liegt.



Bundeswettbewerb Mathematik 2022

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung e.V. von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Als Projekt von Bildung & Begabung steht der Bundeswettbewerb Mathematik unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen ihn und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs 2021 war die LEPPER Stiftung.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In *zwei Hausaufgabenrunden* werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.
In der dritten Runde, dem *Kolloquium*, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt.

Die Teilnehmerzahlen[11] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1479 (im Jahr 2018/19).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2018/19	1479	485 (32.8%)	46 (3.1%)	24 (52.2%)
2019/20	1177	417 (35.4%)	55 (4.7%)	30 (54.5%)
2020/21	1182	366 (31.0%)	45 (3.8%)	17 (37.8%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2020/21 in Sachsen erstmals nicht mehr weit über dem Durchschnitt! Unter den 45 sächsischen Teilnehmern wurden 9 erste, 5 zweite und 6 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (44.4%, bundesweit 36.6%). Dazu kamen noch 22 Anerkennungsurkunden (48.9%, bundesweit 43.1%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2018/19	265	69 (26.0%)	14 (5.3%)	6 (42.9%)
2019/20	277	99 (35.7%)	10 (3.6%)	4 (40.0%)
2020/21	193	57 (29.5%)	9 (4.7%)	3 (33.3%)

[11] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2020/21 wurden 3 erster und 3 zweite Preise an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 6 der 9 Starter!), darunter 2 Starter aus den Klassenstufen 9 und 10.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2022 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter **https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik** erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. Specht, E. Quaisser und P. Bauermann herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Dr. E. Bardeys

Arithmetiſche Aufgaben nebſt Lehrbuch der Arithmetik

Vorzugsweiſe für Realſchulen, höhere Bürgerſchulen und verwandte Anſtalten. Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906.[12]

Zweiter Teil. Algebra (Beſtimmungsgleichungen)

XX. Quadratiſche Gleichungen mit einer Unbekannten

A. Theorie

Unter einer quadratiſchen Gleichung oder einer Gleichung vom zweiten Grade verſteht man eine Gleichung, welche auf die Form gebracht werden kann

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

(allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.)

1. Spezialfälle a) a=0…
   b) b=0 …
   c) c=0 …

2. A. Um die allgemeine Gleichung zweiten Grades aufzulöſen, bringen wir dieſelbe durch Diviſion mit a und durch nachheriges Tranſponieren des von x freien Gliedes auf die Form

$$x^2 + p \cdot x = q$$ (1. Normalform der Gleichung zweiten Grades)[13]

Die Auflöſung dieſer Gleichung erfolgt durch die Methode der quadratiſchen Ergänzung. Addiert man nämlich beiderſeits das Quadrat des halben Koeffizienten von x, ſo wird die linke Seite ein vollſtändiges Quadrat. Man erhält

$$x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^4}{4} + q$$

oder

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + 4 \cdot q}{4}$$

[12] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[13] Man beachte die von heutiger Schreibweise abweichende Form $x^2 + px + q = 0$.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 4 \cdot q}}{2}$$

Es ergeben sich daher die beiden Wurzelwerte

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot q}}{2} \qquad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot q}}{2}$$

Bemerkung: Ist $p^2 + 4q > 0$, so ist $\sqrt{p^2 + 4q}$ reell, und es ergeben sich zwei von einander verschiedene reelle Wurzeln,

Ist $p^2 + 4q = 0$, so erhält man zwei reelle aber gleiche Wurzeln.

Ist $p^2 + 4q < 0$, so ist $\sqrt{p^2 + 4q}$ imaginär, also von der Form ib, falls i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Die Wurzeln x_1 und x_2 nehmen dann die Gestalt $a + ib$ und $a - ib$ werden komplexe Zahlen genannt (Gaußsche Zahlenebene!).

Es folgen die Abschnitte

3. Einführung einer neuen Unbekannten
4. Gleichungen 3. Und 4. Grades, die sich auf Gleichungen 2. Grades zurückführen lassen

B. Aufgaben

№ 1 bis 348, zum Beispiel
46. $\sqrt{5x + 4a - 3b} - \sqrt{5x - 4a - 3b} = 2 \cdot \sqrt{x + b}$
297. $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{8 - 2x} + \sqrt{x - 1}$
332. $(x^2 - 10) \cdot (x^2 - 18) = 13 \cdot x^2$
346. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

№ 1 bis 165 Sachaufgaben, zum Beispiel
53. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 29 m lang. Wie lang sind die Katheten, wenn die größere 1 m länger ist als die kürzere?
99. Zwei Maurer A und B können zusammen in 18 Tagen eine Mauer aufführen. Wie lange müßte jeder allein arbeiten, wenn B noch 15 Tage mehr braucht als A?
154. Wie groß ist die Länge der von einem Punkte an einen Kreis gezogene Tangente, wenn eine von demselben Punkt durch den Kreis gelegte Sekante doppelt so groß wie die Tangente, vermindert um eine Strecke a, und der äußere Abschnitt derselben doppelt so groß wie die Tangente, vermindert um eine Strecke b ist $(a < b)$?

Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021

Es sei $\{a_n\}$ n = 1, 2, ... eine Folge von ganzen Zahlen. Die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen ist 57. Weiter gelte a_{40} = 24 und a_{80} = 12. Bestimmen Sie die ersten drei Folgeglieder a_1, a_2 und a_3.

Inhaltsverzeichnis Heft Dezember 2021

Vorwort....2
Thema 12 – Teil 1: Bedeckungen mit Dominosteinen....3
Thema 12 – Teil II: Ebene Bedeckungen....7
Thema 12 – Aufgaben: Bedeckungen....11
Parkettierungen und Färbungen....13
Nachtrag zu Quersummen in Wettbewerbsaufgaben....16
Flächenhalbierung....17
Bundeswettbewerb Mathematik 2022....19
In alten Mathe-Büchern geblättert....22
Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021....23

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[14]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan./Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

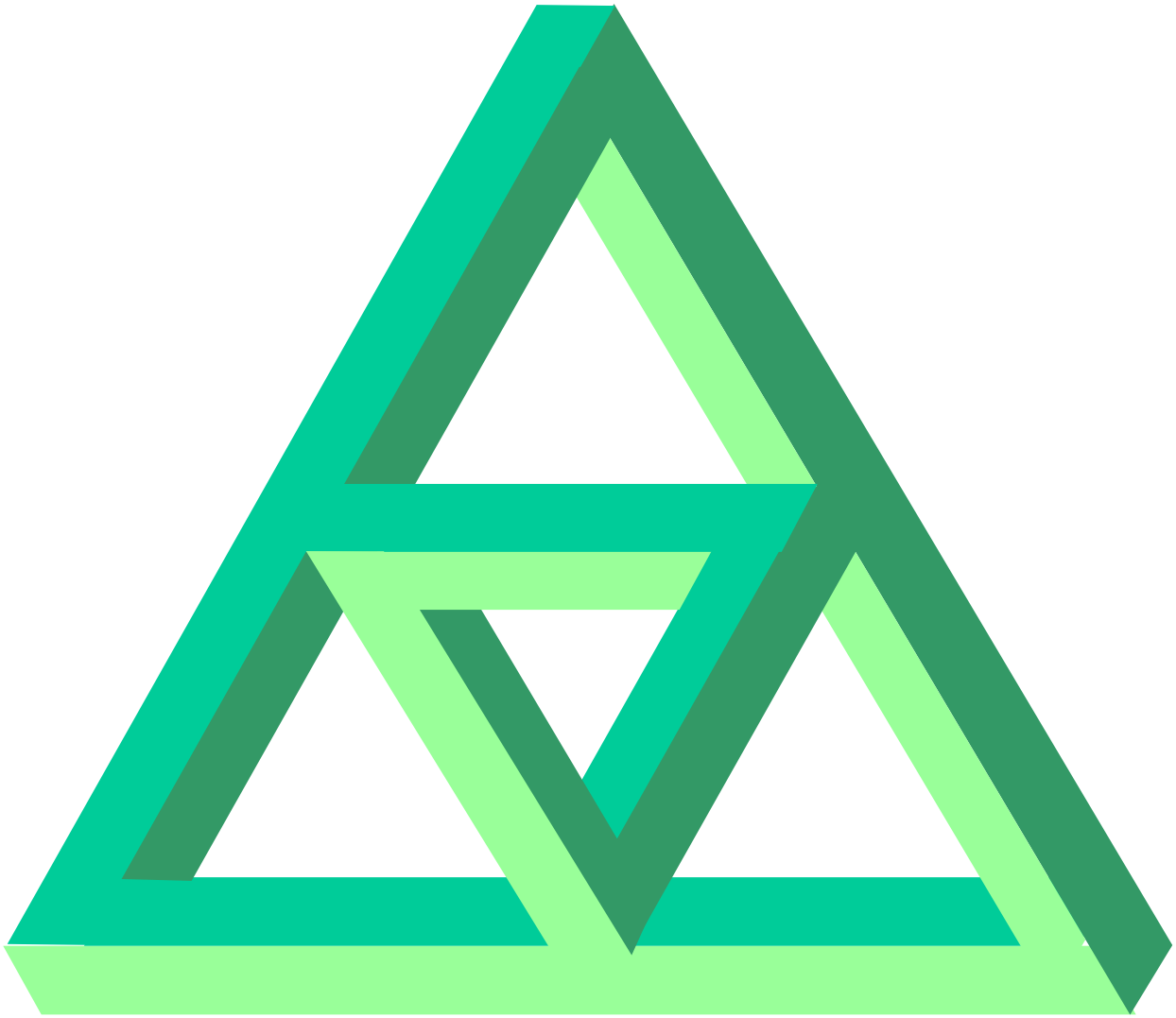
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Januar 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zur Aufgabe **MO610921** im Thema 13 Bewegungsaufgaben. Da damit die Berechnungen von harmonischen und arithmetischen Mittelwerten verbunden sind, wird die „Familie“ der Mittelwerte in Theorie und Wettbewerbs-Anwendung vielfältig untersucht.

Ein Auszug aus einem Buch zur Geschichte der Mathematik soll unterhaltsam eine Anwendung von Mittelwerten mit dem Blick vor über 3500 Jahren zeigen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 13 – Bewegungsaufgaben

Aufgabe MO610921[3]. Niklas fährt jeden Tag mit dem Fahrrad zur Arbeit, und zwar immer denselben Weg und immer mit derselben konstanten Geschwindigkeit – außer letzten Dienstag, da war es anders. Da ist er die erste Hälfte seines üblichen Weges doppelt so schnell gefahren wie sonst, die letzten 3 km ist er halb so schnell gefahren wie sonst, und nur dazwischen ist er genauso schnell gefahren wie sonst. Amüsiert stellt er fest, dass er genau die gleiche Fahrzeit gebraucht hat wie sonst auch.

Wie lang ist sein Arbeitsweg? Weisen Sie nach, dass sich die Antwort auf diese Frage eindeutig ermitteln lässt.

Lösungshinweise: Es sei s die Länge des Arbeitswegs von Niklas in km, v die an normalen Tagen gefahrene Geschwindigkeit in km/h und t die Gesamtfahrzeit in h. An normalen Tagen gilt für die Fahrzeit $t = \frac{s}{v}$.

Die Strecke am Dienstag lässt sich in drei Abschnitte unterteilen. Im 1. Abschnitt mit $s_1 = 0{,}5s$ fährt Niklas mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2v$ und braucht damit die Zeit $t_1 = \frac{0{,}5s}{2v} = \frac{s}{4v}$. Im 2. Abschnitt mit $s_2 = 0{,}5s - 3$ fährt er mit der üblichen Geschwindigkeit $v_2 = v$ und benötigt die Zeit $t_2 = 0{,}5s - \frac{3}{v} = s - \frac{6}{2v}$. Im 3. Abschnitt mit $s_3 = 3$ fährt er mit der Geschwindigkeit $v_3 = 0{,}5v$ in der Zeit $t_3 = \frac{3}{0{,}5v} = \frac{6}{v}$.

Addieren der Zeiten $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{4v} + \frac{s-6}{2v} + \frac{6}{v}$ ergibt $t = \frac{3s+12}{4v}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir die Gleichung $\frac{3s+12}{4v} = \frac{s}{v}$. Multiplizieren mit $4v$ führt zu $3s + 12 = 4s$ und damit zu $s = 12$. Da die Rechenschritte des Lösungswegs an jeder Stelle eindeutig ausführbar sind, ist dies die einzig mögliche Lösung. Diese Lösung existiert tatsächlich, weil die Terme für die drei Teilzeiten mit $s = 12$ sämtlich nichtnegativ sind. Niklas hat damit einen Arbeitsweg von 12 km. ❑

Aufgabe - MO601031. Mareike fährt mit dem Fahrrad von Adorf nach Bedorf, Nina fährt dieselbe Strecke in die andere Richtung. Beide fahren zur selben Zeit los. Nach 21 Minuten sind sie 20 km voneinander entfernt. Nach weiteren 35 Minuten sind sie 12 km voneinander entfernt; zu diesem Zeitpunkt ist keine bereits an ihrem Ziel angekommen. Beide fahren die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit, die beiden Geschwindigkeiten können sich aber unterscheiden.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Gesamtlänge der Strecke von Adorf nach Bedorf. Geben Sie jeweils geeignete Geschwindigkeiten für Mareike und Nina an.

[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

Lösungshinweise: Zu Beginn fahren Mareike und Nina aufeinander zu. Nach den ersten 21 Minuten müssen sie weiterhin aufeinander zu fahren, da sie sonst nicht später noch mal weniger als 20 km voneinander entfernt sein könnten. Folglich errechnet sich die gesuchte Strecke als die Summe von 20 km und derjenigen Strecke, die sie beide zusammengerechnet in den ersten 21 Minuten zurücklegen.

Fahren sie die folgenden 35 Minuten ebenfalls aufeinander zu, so legen sie in dieser Zeit gemeinsam eine Strecke von 8 km zurück. In den ersten 21 Minuten legen sie daher gemeinsam eine Strecke von $\frac{21}{35} \cdot 8 = \frac{24}{5} = 4{,}8$ Kilometern zurück, die Gesamtstrecke beträgt daher 24,8 km.

Fahren sie in den genannten 35 Minuten nicht die ganze Zeit aufeinander zu, so begegnen sie sich währenddessen und fahren danach voneinander weg. Damit legen sie in dieser Zeit gemeinsam eine Strecke von 20 + 12 = 32 Kilometern zurück. In den ersten 21 Minuten legen sie also gemeinsam eine Strecke von $\frac{21}{35} \cdot 32 = \frac{96}{5} = 19{,}2$ Kilometern zurück, die Gesamtstrecke beträgt daher 39,2 km.

Wir zeigen noch durch Beispiele, dass die beiden gefundenen Längen für die Gesamtstrecke auch tatsächlich möglich sind:

Wenn die Gesamtlänge 24,8 km beträgt, so nehmen wir an, dass jede innerhalb von 21 Minuten genau 2,4 km zurücklegt. (Dies entspricht einer jeweiligen Geschwindigkeit von $2{,}4 \cdot \frac{60}{21}$ km/h, also etwa 6,86 km/h.) Der Abstand von Mareike und Nina reduziert sich in den ersten 21 Minuten von 24,8 km auf 20 km. In den folgenden 35 Minuten legt jede genau $\frac{35}{21} \cdot 12{,}4$ km = 4 km zurück. Sie fahren also auch in dieser Zeit nur aufeinander zu und ihr Abstand reduziert sich weiter auf 12 km, wie es verlangt war.

Beträgt die Gesamtlänge 39,2 km, so nehmen wir an, dass jede innerhalb von 21 Minuten genau 9,6 km zurücklegt. (Dies entspricht einer jeweiligen Geschwindigkeit von $9{,}6 \cdot \frac{60}{21}$ km/h, also etwa 27,43 km/h.) Der Abstand von Mareike und Nina reduziert sich in den ersten 21 Minuten von 39,2 km auf 20 km. In den folgenden 35 Minuten legt jede genau $\frac{35}{21} \cdot 9{,}6$ km = 16 km zurück. Sie begegnen sich also innerhalb dieser Zeit und entfernen sich danach voneinander, bis sich ihr Abstand wie gewünscht auf 12 km vergrößert hat.

Aufgabe MO580944/MO581044. Thomas fährt an jedem Werktag mit dem Auto zur Arbeit. Außerhalb geschlossener Ortschaften (Autobahn) fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 180 km/h. Auf den 10 km innerhalb geschlossener Ortschaften, welche zum Großteil aus Tempo-30-Zonen bestehen, fährt er im Schnitt 40 km/h. Dadurch ist er oft zu schnell und wurde in letzter Zeit häufig geblitzt.

Inzwischen hat er eingesehen, dass es so nicht weitergehen kann, und er nimmt sich vor, in Zukunft sowohl außerhalb geschlossener Ortschaften als auch innerhalb jeweils seinen Durchschnitt um 20 km/h zu reduzieren.

Kann dadurch seine Durchschnittsgeschwindigkeit für den Gesamtweg um exakt 40 km/h sinken? Wenn ja, geben Sie für diesen Fall alle Möglichkeiten für die Gesamtlänge seines Weges zur Arbeit an.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit y die Gesamtlänge der Strecke innerhalb geschlossener Ortschaften, mit x die Länge außerhalb, jeweils in Kilometern. Wir werden später $y = 10$ setzen. Früher brauchte Thomas für die gesamte Strecke $\frac{x}{180} + \frac{y}{40}$ Stunden; in Zukunft braucht er $\frac{x}{160} + \frac{y}{20}$ Stunden. Damit seine Durchschnittsgeschwindigkeit um exakt 40 km/h sinkt, muss daher die Gleichung

$$\frac{x+y}{\frac{x}{180}+\frac{y}{40}} - \frac{x+y}{\frac{x}{160}+\frac{y}{20}} = 40$$

gelten. Äquivalente Umformungen ergeben nacheinander:

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot\left(\frac{180\cdot 40}{40x+180y} - \frac{160\cdot 20}{20x+160y}\right) = 40\\
&(x+y)\cdot\left(\frac{180}{40x+180y} - \frac{80}{20x+160y}\right) = 1\\
&(x+y)\cdot\left(\frac{9}{2x+9y} - \frac{4}{x+8y}\right) = 1\\
&(x+y)\cdot\big(9\cdot(x+8y) - 4\cdot(2x+9y)\big) = (2x+9y)\cdot(x+8y)\\
&x^2 + 37xy + 36y^2 = 2x^2 + 25xy + 72y^2\\
&x^2 - 12xy + 36y^2 = 0\\
&(x-6y)^2 = 0
\end{aligned}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit reduziert sich also genau dann um 40 km/h, wenn $x = 6\cdot y$ gilt. Für $y = 10$ ist dies gleichbedeutend mit $x = 60$. Die Gesamtlänge der Strecke muss in diesem Fall also genau 70 km betragen. ❑

Hinweis: Eine Probe ist nicht nötig, da nur äquivalent umgeformt wurde. Direktes Einsetzen zeigt, dass sich die Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h auf 80 km/h reduziert.

Aufgabe MO470923. Max fährt immer mit der U-Bahn zur Schule. Er muss dazu an der Station „Schillerstraße“ aussteigen. Vom Bahngleis führen eine Treppe und eine Rolltreppe nach oben, Max hat jedoch die Angewohnheit, ausschließlich die Rolltreppe zu benutzen.

Max geht immer mit derselben Geschwindigkeit und hat festgestellt, dass er morgens auf dem Weg zur Schule, wenn er die Rolltreppe hinaufgeht, stets 15 Stufen zählt, und nachmittags auf dem Weg nach Hause, wenn er die Rolltreppe gegen die Fahrtrichtung hinabsteigt, 35 Stufen nehmen muss.
Diese Woche ist die Rolltreppe kaputt. Wie viele Stufen wird Max jetzt zählen, wenn er die Rolltreppe benutzt? (*Hinweis:* Der Effekt, dass die Treppenstufen am Anfang und am Ende der Rolltreppe ihre Höhe ändern und verschwinden, ist zu vernachlässigen.)

Lösungshinweise: Es sei x die gesuchte Anzahl Stufen. Des Weiteren sei v_M bzw. v_T die jeweilige Geschwindigkeit von Max bzw. der Rolltreppe (gemessen in Stufen pro Minute). Offensichtlich gilt $v_M > v_T$, sonst könnte Max die Rolltreppe nicht gegen die Fahrtrichtung überwinden.

Wie lange befindet sich Max auf dem Weg zur Schule auf der Rolltreppe? Relativ zur Rolltreppe bewegt sich Max mit der Geschwindigkeit v_M und legt in der gesuchten Zeit 15 Stufen zurück. Das macht $\frac{15}{vM}$ Minuten.
Einerseits überwindet Max den Höhenunterschied der Treppe von x Stufen mit der Gesamtgeschwindigkeit $v_M + v_T$, da er sich in Fahrtrichtung der Rolltreppe bewegt und sich die Geschwindigkeiten dadurch addieren. Das macht $\frac{x}{v_M+v_T}$ Minuten. Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$\frac{15}{v_M} = \frac{x}{v_M+v_T}, \qquad \text{also} \quad x = \left(1 + \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 15$$

Wie lange befindet sich Max auf dem Nachhauseweg auf der Rolltreppe? Relativ zur Rolltreppe bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_M und legt in der gesuchten Zeit 35 Stufen zurück. Das macht $\frac{35}{v_M}$ Minuten.
Andererseits überwindet Max den Höhenunterschied der Treppe von x Stufen mit der Gesamtgeschwindigkeit $v_M - v_T$, da er sich gegen die Fahrtrichtung der Rolltreppe bewegt und sich die Geschwindigkeiten dadurch subtrahieren. Das macht $\frac{x}{v_M-v_T}$ Minuten. Durch Gleichsetzen ergibt sich $\frac{35}{v_M} = \frac{x}{v_M-.v_T}$. Nach äquivalenten Umformungen erhalten wir $x = \left(1 - \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 35$. Nun können wir das Verhältnis beider Geschwindigkeiten bestimmen, denn es gilt:

$$\left(1 + \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 15 = \left(1 - \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 35 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_T}{v_M} = \frac{2}{5}$$

Dies eingesetzt führt zu

$$x = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot 15 = 21$$

Die Rolltreppe hat also 21 Stufen. ❑

Thema 13 – Bewegungsaufgaben (Aufgaben)

Aufgabe – MO560941/MO561041. Tom fährt mit seinem E-Bike von seiner Arbeitsstelle nach Hause. Er fährt um 19:00 Uhr los. Auf den ersten 4 km geht es bergab, dort fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Es folgen 12 km ebener Radweg, den er mit 20 km/h zurücklegt. Dann muss er einen Berg hinauffahren; auf der Strecke von 3 km Länge bringt er es lediglich auf 10 km/h. Abschließend fährt er noch mal auf ebener Strecke 5 km mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Um schneller voranzukommen, kann er den Elektromotor seines Fahrrads dazuschalten. Dadurch erhöht sich seine Geschwindigkeit um 5 km/h. Allerdings ist der Akku schon recht leer, so dass er das nur für insgesamt 10 Minuten tun kann.

Wann kann er frühestens zu Hause sein?

Aufgabe – MO520922/MO521022. Velo Flitzeped macht eine Radtour. Zum Aufwärmen fährt er auf ebener Straße mit 20 km/h und dann mit 15 km/h bergauf, bis ihm die Puste ausgeht. Danach fährt er dieselbe Strecke zurück, bergab sehr vorsichtig mit 30 km/h und in der Ebene wieder mit 20 km/h. Insgesamt ist er 5 Stunden unterwegs.

Ermitteln Sie die Gesamtlänge der beschriebenen Radtour.

Aufgabe – MO490932/MO491032. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Man zeige, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Man zeige, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Hinweis: Es wird für diese Aufgabe angenommen, dass die Züge auf den jeweiligen Strecken mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

Aufgabe – MO460921/MO461021. Die Läuferinnen Karla, Lili und Momo sind bekannt dafür, dass sie als Schlussläuferinnen ihrer (3×1000 m)-Staffeln mit der Gleichmäßigkeit eines Uhrwerks ihre Runden drehen. Beim letzten Staffelrennen gewann Momo auf jeweils 50 m ihrer Laufstrecke 5 m gegen Lili und hatte im Ziel 20 m Vorsprung vor dieser. Karla holte auf jeweils 200m ihrer Laufstrecke 15 m zu Lili auf, doch rettete diese einen knappen Vorsprung von 1 m vor Karla ins Ziel.

Welche Läuferin ging als letzte auf ihre 1000-m-Strecke und wie groß waren zu diesem Zeitpunkt ihre Rückstände auf die beiden Konkurrentinnen?

Nachtrag zu Thema 12 – Aufgaben mit Flächenzerlegung

Auch wenn folgende Aufgaben nicht direkt den im Thema 12 beschriebenen Prinzipien folgen, sind es reizvolle Fragestellungen:

Aufgabe – MO291045. Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Aufgabe – MO350931. Beweisen Sie, dass man ein gleichseitiges Dreieck so in 1996 gleichseitige Teildreiecke zerschneiden kann, dass es unter je 5 dieser Teildreiecke zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

(*Ergänzung:* In welchem Jahr könnte die Aufgabe mit Bezug zur Jahreszahl erneut gestellt werden?)

Aufgabe – MO351031. Beweisen Sie, dass man ein Quadrat so in mehr als vier Teilquadrate zerschneiden kann, dass es unter je 4 dieser Teilquadrate zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

(*Ergänzung:* Lässt sich die Aufgabe anstatt mit „… ein Quadrat …“ durch eine zu einer Jahreszahl passenden Angabe formulieren.)

Aufgabe – MO271036. Eine Ebene E sei durch vertikale und horitontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt. Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm x 2 cm so ausgefüllt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Kein Punkt der Ebene soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen
- Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke i9n kleinere Flächenstücke.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

Mittelungleichungen als Beweismethode

Die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit v aus den Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$ und $v_2 = \frac{s_2}{t_2}$ hängt eng mit dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel zusammen. Wird die Mittelung für gleiche Zeiteinheiten $t = t_1 = t_2$ berechnet, so gilt:

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{2 \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t}\right) = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2)$$

Wir berechnen also das arithmetische Mittel der Teilgeschwindigkeiten.

Wird dagegen die Mittelung für gleiche Wegstrecken $s = s_1 = s_2$ berechnet, so gilt:

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Wir berechnen also in diesem Fall das harmonische Mittel der Teilgeschwindigkeiten. Diesen Bezug nehmen wir zum Anlass, die bekannten Mittelungleichungen für positive reelle Zahlen x_1 bis x_n ($n > 0$) zwischen dem harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel zu betrachten:

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \max(x_1, \dots, x_n).$$

Diese Ungleichungen können wir oft für Abschätzung nutzen und damit den Beweis für Ungleichungen führen.

Aufgabe. Für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 6$ folgt stets $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Lösungshinweise: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Mittelungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = 2$$

❑

Aufgabe. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise: Es gilt stets

$$a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ac} + c^2 \cdot \sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3$$

Lösungshinweise: Mit Hilfe der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel finden wir folgende Abschätzung:

$$a^2 \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a^4 \cdot bc} = \sqrt{a^3 \cdot abc} \leq \frac{a^3 + abc}{2}$$

Wenden wir diese Beziehungen analog für die anderen zwei Summanden der behaupteten Ungleichung an und addieren wir die insgesamt drei Ungleichungen, so erhalten wir auf der rechten Seite

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}$$

Nun ist aber auch (wiederum aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel)

$$abc = \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

Setzen wir dies in der Ungleichung ein, ist die Richtigkeit der Behauptung sofort ersichtlich. ❑

Hinweis: Es ist darauf zu achten, dass die Anzahl der Faktoren unter der Wurzel mit dem Wurzel-Exponenten übereinstimmt. Dies einhaltend könnten wir die obige Umformung auch anders fortsetzen:

$$a^2 \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a^4 \cdot bc} = \sqrt[6]{(a^4)^3 \cdot b^3 \cdot c^3} = \sqrt[6]{(a^3)^4 (b^3)(c^3)} \leq \frac{4a^3 + b^3 + c^3}{6}$$

Wenden wir diese Beziehungen ebenso für die anderen zwei Summanden der behaupteten Ungleichung an und addieren wir die insgesamt drei Ungleichungen, erhalten wir unmittelbar Behauptung.

Aufgabe. Man beweise: Für alle reelle Zahlen x, y, z mit $0 \leq x, y, z \leq 1$ und $x + y + z = 1$ gilt

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Lösungshinweise: Aus der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel folgt:

$$\sqrt[3]{(1-2x)^2(1-2y)^2(1-2z)^2} \leq \frac{3 - 2 \cdot (x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2}{3} \leq \frac{1}{3}$$

also $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27}$. Wegen

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1 - 2 \cdot (x + y + z) + 4 \cdot (xy + yz + xz) - 8xyz$$

erhalten wir mit der Voraussetzung $x + y + z = 1$ daraus die gesuchte Ungleichung.

Ist $z \geq \frac{1}{2}$ und deshalb $x \leq y \leq \frac{1}{2}$, gilt trivialerweise $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq 0 < \frac{1}{27}$ und die Behauptung kann wie eben bewiesen werden. ❑

Aufgabe. Es seien a, b, c die Seitenlängen eines (nicht zu einer Strecke entarteten) Dreiecks und p der halbe Umfang dieses Dreiecks. Man beweise:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}$$

Lösungshinweise: Wegen der gültigen Dreiecksungleichungen sind die Nenner jeweils positiv, beispielsweise gilt $p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$. Setzen wir nun $x = \frac{1}{p-a}, y = \frac{1}{p-b}, z = \frac{1}{p-c}$, so folgt aus der Mittelungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel

$$\frac{3}{p} = \frac{3}{p-a+p-b+p-c} = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

❑

Aufgabe. Man finde für die natürliche Zahl n ($n > 0$) eine Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$.

Lösungshinweise: In naheliegender Weise nutzen wir die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)-mal} \cdot n} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + n}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Mit wachsendem n nähert sich die Grenze der Zahl 2. Für $n = 4$ finden wir 1,75 und für $n = 100$ erhalten wir 1,99.

Setzen wir jedoch einige Werte für n in den Wurzelausdruck ein, erkennen wir ein anderes Verhalten:

$$n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{2} \approx 1{,}4142 \quad ; \quad n = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422$$
$$n = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{4} \approx 1{,}4142 \quad ; \quad n = 5 \Rightarrow \sqrt[5]{5} \approx 1{,}3797$$
$$n = 10 \Rightarrow \sqrt[10]{10} \approx 1{,}2589 \quad ; \quad n = 100 \Rightarrow \sqrt[100]{100} \approx 1{,}0471$$

Die gefundene Abschätzung ist offensichtlich nicht in der Lage, diese Beobachtung richtig zu beschreiben. Für $n \geq 2$ lässt sich obige Idee der Mittelungleichung aber besser ausnutzen:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)-mal} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}$$

Nun ergibt sich für $n = 4$ der Wert 1,5 und für $n = 100$ erhalten wir 1,18.

Mit dieser Idee der Aufspaltung von n lässt sich für $n \geq 4$ die Abschätzung weiter verbessern:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-4)-mal} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{(n-4) \cdot 1 + 4 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Das Ergebnis sieht nun nicht nur einfacher aus, es beschreibt zudem übersichtlicher das Verhalten der Werte für wachsendes n. Wir erhalten beispielsweise für $n = 4$ wiederum 1,5, für $n = 100$ dagegen 1,1. ❑

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a, b)$$

Beweise:

(1) Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel:

Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Addieren wir auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividieren wir beide Seiten durch 4, so finden wir

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel:

Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachten wir ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Bilden wir von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel:
Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4 und radizieren, so erhalten wir die behauptete Ungleichung.

(4) Gilt $a \leq b$, also $\frac{a}{b} \leq 1$ an, so finden wir aus $2 \geq 1 + \frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ die linke äußere Abschätzung. Zudem folgt aus $b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ die rechte äußere Abschätzung.

Folgerung. Die Ungleichungskette zwischen den Mitteln kann auf endlich viele positive reelle Zahlen $a_1,\ a_2, \ldots, a_n\ (n > 1)$ verallgemeinert werden:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}.$$

Für den Beweis nutzen wir folgenden

Hilfssatz. Für positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ gilt stets

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Beweis mittels der Methode der vollständigen Induktion[4].
(1) Induktions-Anfang: Für $n = 1$ gilt laut Voraussetzung $x_1 = 1$ und damit $x_1 \leq 1$
(2) Induktions-Schritt

Ind.-Voraussetzung: Es gelte für ein n:
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$

Ind.-Behauptung: Es ist zu zeigen, dass dann gilt:
$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1$

Ind.-Beweis: O.B.d.A. sortieren wir die Folge so, dass $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}$ gilt. Dann ist $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1$
$\Rightarrow \quad x_2 + x_3 + \cdots + x_n + (x_1 + x_{n+1} - 1) = n$
$\Rightarrow \quad x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$

Außerdem gilt

[4] In den Wettbewerben der Mathematik-Olympiade wird die korrekte Anwendung der Methode der vollständigen Induktion in Klassenstufen 9/10 nicht erwartet.

$$(x_{n+1}-1)(x_1-1) \le 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x_{n+1}x_1 \le x_{n+1}+x_1-1$$

Insgesamt folgt also:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \le x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \le 1$$

(3) Induktions-Schluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt somit die behauptete Gleichung für alle $n > 0$. ❑

Für den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung setzen wir nun

$$c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad ; \quad x_i = \frac{a_i}{c} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

dann gilt $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{c} = n$

Daraus folgt wegen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{c^n} \le 1$$

also

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

unmittelbar die Behauptung der Folgerung. Die Beweise zu (2) und (3) lassen sich nun auf *n* reelle Zahlen übertragen:

(2‘) Aus

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

folgt nach Übergang zu den Reziproken auf beiden Seiten mit Umkehrung des Relationszeichen die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel.

(3‘) Wegen $(x_i - x_j)^2 \ge 0$ mit $1 \le i, j \le n$ folgt $2x_ix_j \le x_1^2 + x_2^2$. Damit finden wir

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$
$$\le x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (n-1) \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = n \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

Teilen wir beide Seiten durch n^2 und ziehen wir die Quadratwurzel, so erhalten wir die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und quadratischen Mittel.

Den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung können wir auch ohne diesen Hilfssatz führen, indem wir zunächst die Variablenanzahl in jedem Schritt verdoppeln (anstatt um eine Variable zu erhöhen, „Vorwärts“-Induktionsschritt). Dazu betrachten wir die positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $y_1, y_2, \dots, y_n$. Gilt sowohl

$$x_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = x_{arithm} \text{ und}$$
$$y_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} = y_{arithm},$$

so können wir die Mittelungleichung für die Mittelwerte anwenden:

$$\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k}} = \sqrt{x_{geom} \cdot y_{geom}} \leq \frac{x_{arithm}+y_{arithm}}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k}{2n},$$

also gilt die Mittelungleichung auch für $2n$ Variablen. Nun gehen wir schrittweise zurück (“Rückwärts“-Induktionsschritt):

Es sei n keine Zweierpotenz mit $n < 2^k$ Wir setzen $a = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ und (mit $m = 2^k$) definieren wir weitere Variablen $x_{n+1} = \dots = x_m = a$. Nun gilt bereits $\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k}{m}$. Wir formen weiter um:

$$a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{\frac{m}{n}(x_1 + \dots + x_n)}{m} = \frac{x_1 + \dots + x_n + (m-n) \cdot a}{m}$$

Für $(m-n) \cdot a$ können wir nun aber $x_{n+1} + \dots + x_m$ einsetzen und haben somit eine Zweierpotenz als Anzahl der Variablen. Deshalb gilt

$$a \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot a^{m-n}}$$

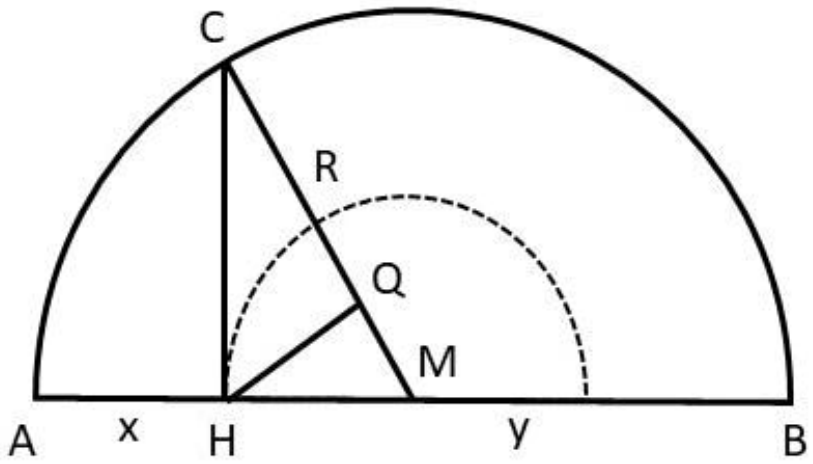
Nach Potenzieren finden wir

$$a^m \geq x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot a^{m-n}, \text{ also } a^n \geq x_1 \cdot \dots \cdot x_n,$$

womit die verallgemeinerte Mittelungleichung auch für n Variablen bewiesen ist. ❑

Geometrische Interpretation der Mittelungleichungen

Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ und dem rechten Winkel bei C. Der Mittelpunkt des zugehörigen Thaleskreises sei M. Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Hypotenuse sei H, der die Hypotenuse in die Hypotenusenabschnitte x und y teilt, o.B.d.A. gelte $x \leq y$. Der Fußpunkt des Lotes von H auf $\overline{MC}$ sei Q.



Dann finden wir folgende Zusammenhänge:

Wegen $x + y = |\overline{AB}|$ ist $|\overline{AM}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$ das arithmetische Mittel von x und y und es gilt $|\overline{AM}| = \frac{x+y}{2} \leq y$.

Nach Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\overline{CH}$ das geometrische Mittel von x und y und als Kathete im rechtwinkligen Dreieck HMC gilt somit $|\overline{CH}| = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = |\overline{MC}|$.

Weil die rechtwinkligen Dreiecke MCH und QCH ähnlich sind (Ähnlichkeitssatz www), gilt $|\overline{QC}| = |\overline{CH}| \cdot \frac{|\overline{CH}|}{|\overline{MC}|} = \frac{xy}{\frac{x+y}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Somit ist im rechtwinkligen Dreieck QCH die Ungleichung $|\overline{QC}| = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} = |\overline{CH}|$ erfüllt.

Zeichnen wir schließlich um M den Halbkreis mit dem Radius $|\overline{HM}| = \frac{y-x}{2}$, so schneidet die Kreislinie die Strecke $\overline{MC}$ in einem Punkt R zwischen Q und C. Folglich gilt auch $|\overline{CR}| = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} = x \leq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = |\overline{CQ}|$.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Berechnung von Mittelwerten hat eine mindestens 4000 Jahre lange Geschichte. In

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotanien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 3 – Mathematik in Mesopotanien
Abschnitt 3.4 – Hinweise zur babylonischen Mathematik (Seiten 236ff)

wird vom babylonischen Wurzelziehen berichtet: Will man für eine Nichtquadratzahl N die Quadratwurzel ziehen, sucht man eine vollständige Quadratzahl a^2 mit $a^2 < N$. Dann ist a eine Näherung von $\sqrt{N}$. Intuitiv ist aber auch $b = \frac{N}{a} > a$ eine Näherung von $\sqrt{N}$. In der Schreibweise der Mittel erweist sich $\sqrt{N}$ als das geometrische Mittel der Näherungen a und b. Wegen $a < \frac{a+b}{2} < b$ ist das arithmetische Mittel von a und b eine bessere Näherung für $\sqrt{N}$. Für das arithmetische Mittel können wir aber auch

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{N}{a}\right)$$

schreiben[5]. Diese Formel finden wir heute im Heron-Verfahren für das Wurzelziehen. HERON VON ALEXANDRIA (um 60 u. Z.) hat dieses Verfahren im Gegensatz zum babylonischen Verfahren ausdrücklich als Iteration beschrieben.

Geometrisch lässt sich das babylonische Verfahren wie folgt beschreiben: Falls eine Fläche keine Quadratzahl N ist, sucht man eine vollständige Quadratzahl $a^2 < N$, teilt die Differenz $N - a^2 = r$ in 4 gleiche Teile und fügt diese in alle Windrichtungen an a^2 an. Man erhält also ein Quadrat a^2 mit 4 angesetzten Rechtecken ab mit $b = \frac{r}{4a}$. Ergänzt man in den Ecken je ein kleines Quadrat mit der Seite b, so ergibt sich ein Quadrat mit der Seite $a + 2 \cdot \frac{r}{4a} = a + \frac{r}{2a}$. Somit gilt:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

[5] Die Quadratwurzel $\sqrt{N}$ ist das geometrische Mittel aus a und b. Bezeichnen wir den Näherungswert $\frac{a+b}{2}$ mit a_1 und bilden wir in gleicher Weise wie oben $b_1 = \frac{N}{a_1}$, dann erhalten wir unter Verwendung von $N = ab$ den Zusammenhang: $b_1 = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, d.h. die Näherung b_1 ist das harmonische Mittel aus den beiden ersten Näherungen a und b.

Als Näherungswert für $\sqrt{2}$ wurde damals $\frac{17}{12}$ angegeben, mit $1{,}416\overline{6}$ schon ein recht genauer Wert. Diesen Bruch erhalten wir mit Hilfe der Näherung $a = \frac{4}{3}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} \approx \frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{16}{12} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

aber auch mit $a = \frac{3}{2}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \approx \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{18}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

Doch es waren für $\sqrt{2}$ weit bessere Näherungswerte bekannt. Dies ist mit der mehr als 3500 Jahre alten babylonischen Tontafel YBC 7289[6] (Bestandteil der Yale Babylonian Collection, einer Sammlung von Keilschrifttafeln aus dem Zeitraum zwischen 3000 v. Chr. und der frühen christlichen Zeit) belegt. Auf dieser Tafel ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 30 und den eingezeichneten Diagonalen zu sehen. Als Länge der Diagonale wird 42,4263… angegeben. Dies bedeutet aber eine Näherung $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$.

Von besonderem Interesse ist diese Darstellung durch die Schreibweise im Sexagesimalsystem[7]. Als Zahlenzeichen wurden 1 bis 59 verwendet, schreibbar mit „Keilen“ (für die Einer) und „Winkel“ (für die Zehner), zum Beispiel für 23 (entwickelt aus einem davor verwendeten Mischsystem aus Dezimal- und Sexagesima-Zahlen). Jedoch gab es kein Zeichen für 0 und es wurde kein Sexagesimal-Komma verwendet. Anstelle der Aneinanderreihung von Zahlen wie (3 17 20 12) würden wir heute die Strukturierung einfügen, um eine eindeutige Darstellung zu ermöglichen:

$$(3; 17, 20, 12) = 3 \cdot 60^0 + \frac{17}{60} + \frac{20}{60^2} + \frac{12}{60^3} = 3{,}7153\ldots$$

oder aber

$$(3{,}17; 20{,}12) = 3 \cdot 60^1 + 17 \cdot 60^0 + \frac{20}{60} + \frac{12}{60^2} = 197{,}336\ldots$$

Die Seitenlänge 30 kann somit tatsächlich den Wert 30 bedeuten. Auf der Tafel ist für $\sqrt{2}$ die Zahl $(1; 24{,}51{,}10) = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}41421\ldots$ angegeben. Multipliziert mit 30 ergibt dies $(42; 25{,}35) = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42{,}4263\overline{8}$. Dies ist als Ergebnis der Diagonalenlänge auf der Keilschrifttafel angegeben!

[6] Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/YBC_7289 (zuletzt 15.01.2022)

[7] Zahlensystem zur Basis 60.

Es könnte aber auch sein, dass mit 30 die erste Stelle nach dem Komma im Sexagesimalsystem gemeint ist, also $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Weil aber $\frac{1}{2}$ ein 60-tel von 30 ist, bedeutet das für das Ergebnis eine Verschiebung um eine Stelle, also (0; 42, 25, 35). Dies ist in alter Schreibweise (45 25 35) jedoch kein Unterschied.

Obwohl auf Keilschrifttafeln das babylonische Verfahren nicht als iterative Prozedur beschrieben wurde, erhalten wir mit dem Startwert $\frac{17}{12}$ für $\sqrt{N}$ den Näherungswert

$$\sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{2 \cdot \frac{17}{12}} = 1\frac{169}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \frac{35}{60^4} + \cdots$$

Auflösung der Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021

Es sei $\{a_n\}$ n = 1, 2, ... eine Folge von ganzen Zahlen. Die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen ist 57. Weiter gelte a_{40} = 24 und a_{80} = 12. Bestimmen Sie die ersten drei Folgeglieder a_1, a_2 und a_3.

Lösungshinweise: Aufgrund der Bedingung $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 57$ für alle natürlichen Zahlen n = 1, 2, ... gilt insbesondere

$$a_{38} + a_{39} + a_{40} = 57 = a_{37} + a_{38} + a_{39}, \text{ also } a_{40} = a_{37}.$$

Setzen wir dies fort, gilt ebenso für jede ganze Zahl $k \geq 0$ die Beziehung

$$a_{40} = a_{3 \cdot k+1} = 24.$$

In gleicher Weise finden wir

$$a_{78} + a_{79} + a_{80} = 57 = a_{77} + a_{78} + a_{79}, \text{ also } a_{80} = a_{77},$$

woraus $a_{80} = a_{3 \cdot k+2} = 12$ folgt.

Insbesondere gilt damit a_1 = 24, a_2 = 12 und a_3 = 57 – 24 – 12 = 21.

Die Lösung lautet passend zum Weihnachtsfest (24, 12, 21). ❑

Inhaltsverzeichnis Heft Januar 2022

Vorwort....2
Thema 13 – Bewegungsaufgaben....3
Thema 13 – Bewegungsaufgaben (Aufgaben)....7
Nachtrag zu Thema 12 – Aufgaben mit Flächenzerlegung....8
Mittelungleichungen als Beweismethode....9
Bekannte Sätze der Mathematik....12
Geometrische Interpretation der Mittelungleichungen....15
In alten Mathe-Büchern geblättert....17
Auflösung der Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021....19

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[8]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
Jan. 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan./Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

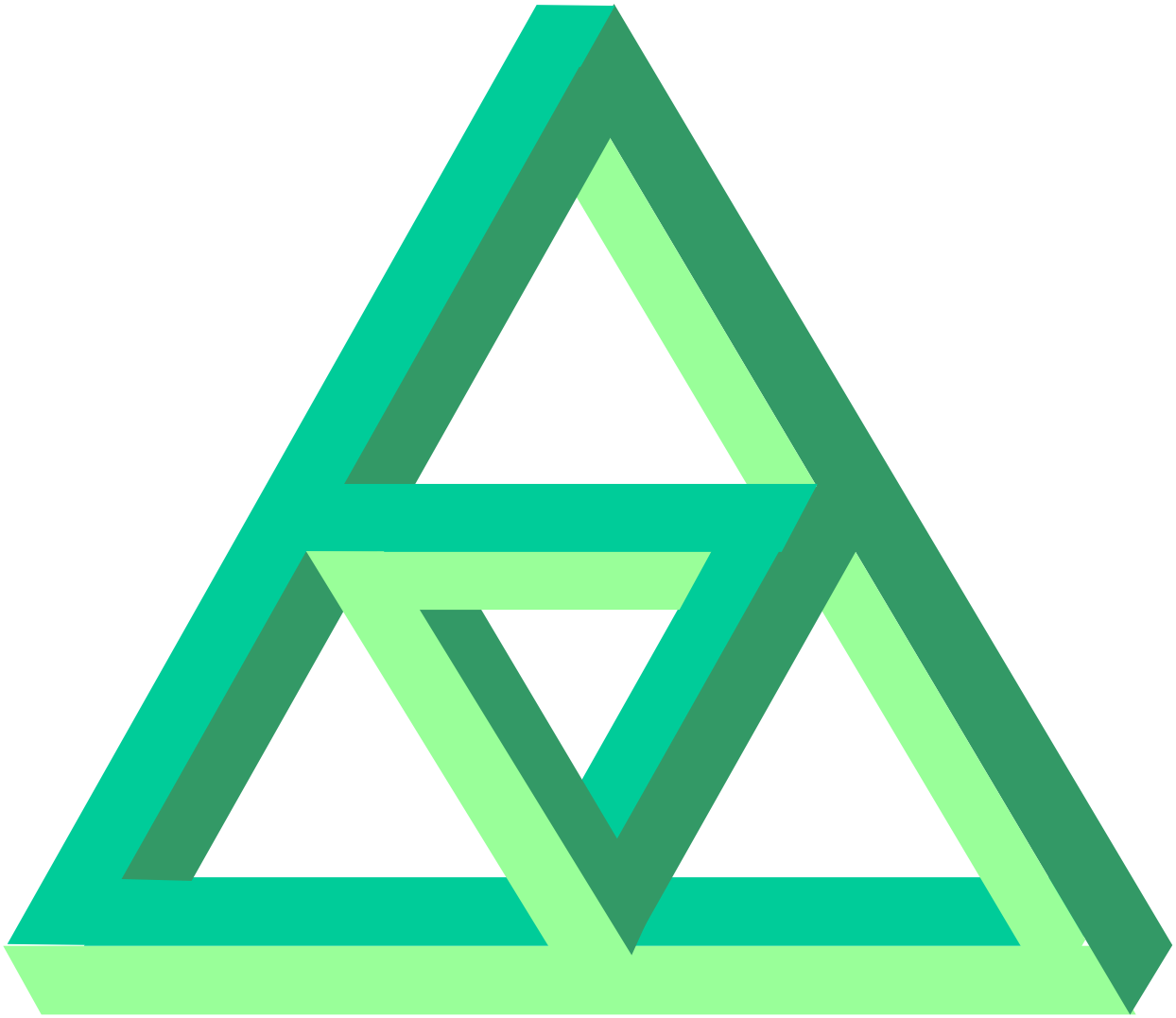
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[8] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 02/22 – März 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zu den Aufgaben **MO610923/MO611022** im Thema 14 Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen. Es werden verschiedene Lösungsstrategien für derartige Aufgaben vorgestellt.

Ein Auszug aus dem Neunten Buch von Euklids Elementen zeigt unterhaltsam einen Ausschnitt aus der Geschichte der Primzahlen.

Hinweise auf den 4. Tag der Mathematik der Technischen Universität Chemnitz und auf „Mathematik alpha“ geben allen Mathematik-Interessierten attraktive Angebote zur Mathematik-Förderung weiter.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 14 – Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen

Aufgabe 14.01 – MO610923[3]. Ermittle alle Paare von zweistelligen Primzahlen (p, q) mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es gilt $p < q$.
(2) Auch $p - 6$ und $p + 6$ sind zweistellige Primzahlen.
(3) p und q besitzen die gleiche Einerstelle.
(4) Die Quersumme des Produktes $p \cdot q$ ist gleich p.

Lösungshinweise: Die Einschränkung der Lösungsmenge auf zweistellige Primzahlen motiviert zur systematischen Suche. In der Nachbereitung solcher Aufgaben ist es nicht nur zulässig, sondern auch hilfreich, die Bearbeitung auf diese Weise zu beginnen. Auch in Aufgaben in Heimarbeit wie beim Korrespondenzzirkel Mathematik oder im Bundeswettbewerb Mathematik kann die Lösungsmenge so gefunden werden. In der Lösungsdarstellung ist jedoch der Verweis auf das mittels Rechentechnik erhaltene Ergebnis nicht zugelassen. Die computer-gestützte systematische Suche muss so wiederholt werden, dass alle Rechenschritte im Text nachvollziehbar sind (beispielsweise in einer Tabelle)! Dies ist aber nur möglich, wenn die Anzahl der zu untersuchenden Fälle überschaubar bleibt.

Eine systematische Suche könnte auf allen (90 · 90 =) 8100 Paaren zweistelliger Zahlen beruhen. Für jedes dieser Paare sind die Eigenschaften (1) bis (4) zu prüfen. Das ist computer-gestützt kein Problem. Aber es ist sofort ersichtlich, dass diese vollständige Untersuchung nicht in die Lösungsdarstellung übernommen werden kann. Es kommt also nun darauf an, in einer Vorbetrachtung aufgrund der Eigenschaften (1) bis (4) möglichst viele Zahlenpaare als Lösung auszuschließen und damit die Anzahl der zu überprüfenden Zahlenpaare verringert wird.

Unter Berücksichtigung der Eigenschaft (1) reduziert sich die Anzahl bereits auf $89 + 88 + \cdots + 1 = \frac{89 \cdot 90}{2} = 4005$ Paare. Beziehen wir uns nur auf die 21 zweistelligen Primzahlen 11, 13, …, 97 (als Liste ohne Nachweis der Vollständigkeit), verbleiben nur $20 + 19 + \cdots + 1 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$ zu untersuchende Paare. Für eine tabellarische Übersicht in der Lösungsdarstellung sind es aber zu viele.

Unter Beachtung der Eigenschaft (2) stellen wir fest, dass keine der Primzahlen auf 1 oder 9 enden kann, denn andernfalls würde die um 6 verringerte oder die um 6

[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

vergrößerte Zahl auf 5 enden und kann somit keine Primzahl sein. Für die Primzahl p sind folglich nur 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83 oder 97 möglich, von denen aber

13 wegen 13 – 6 = 7 < 10,
43 wegen 43 + 6 = 49 = 7 · 7,
83 wegen 83 – 6 = 77 = 7 · 11 und
97 wegen 97 – 6 = 91 = 7 · 13

entfallen.

Wenn wir nun die Eigenschaft (3) berücksichtigen, lassen sich die noch zu untersuchenden Zahlenpaare bereits übersichtlich angeben:

(23 ; 43), (23 ; 53), (23 ; 73), (23 ; 83), (53 ; 73), (53 ; 83), (17 ; 37), (17 ; 47), (17 ; 67), (17 ; 97), (37 ; 47), (37 ; 67), (37 ; 97), (47 ; 67), (47 ; 97), (67 ; 97).

In einer (vollständigen, hier jedoch nur angedeuteten) Tabelle lässt sich nun ohne viel (Kopf-) Rechenaufwand prüfen, welche dieser 16 Zahlenpaare auch die Eigenschaft (4) erfüllt:

p	q	p · q	QS(p · q)	Vergleich QS(p · q) mit p
23	43	989	26	26 ≠ 23
…				
23	73	1679	23	23 = 23
…				
17	37	629	17	17 = 17
…				
67	97	6499	28	28 ≠ 67

Als Lösungen finden wir die Zahlenpaare (17 ; 37) und (23 ; 73), wobei wir den Tabelleneintrag als Probe verwenden können.

Wir können jedoch die Eigenschaft (4) nicht nur als Kontrolle verwenden, sondern daraus weitere Einschränkungen ableiten. Da das Produkt zweier zweistelliger Zahlen höchstens vierstellig ist, kann die Quersumme von $p \cdot q$ höchstens (4 · 9 =) 36 betragen. Somit gilt für die Primzahl p die Einschränkung $p \leq 36$, d.h. es genügt nur die acht Zahlenpaare

(23 ; 43), (23 ; 53), (23 ; 73), (23 ; 83), (17 ; 37), (17 ; 47), (17 ; 67), (17 ; 97)

zu überprüfen.

Die Eigenschaft (4) lässt jedoch noch eine weitere Einschränkung zu. Weil die Quersumme QS einer Zahl bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Zahl selbst lässt, sind wegen $QS(p \cdot q) - p = p - p = 0$ auch $p \cdot q - p = p \cdot (q - 1)$ durch 9 teilbar. Da p als zweistellige Primzahl weder durch 9 noch durch 3 teilbar ist, muss $q - 1$ durch 9 teilbar sein. Dies ist aber nur für $q = 37$ oder $q = 73$ möglich, d.h. es genügt die zwei Zahlenpaare

(23 ; 73), (17 ; 37)

zu untersuchen. Wie oben gesehen, sind damit die Lösungen gefunden, die durch die Probe noch zu bestätigen sind. ❑

Wann wir die Vorbetrachtungen beenden und die verbleibenden Zahlenpaare systematisch untersuchen, ist sicherlich eine Abwägung zwischen Zeitaufwand für die Findung weiterer Lösungsansätze gegenüber dem erforderlichen Rechenaufwand. Während Listen von untersuchten Beispielen in der Korrektur prinzipiell akzeptiert werden müssen (es sei denn durch die Fülle ist eine Kontrolle praktisch nicht mehr zumutbar) und lediglich als „nicht elegant“ kritisiert werden, sind Tabellen mit 16 Fällen natürlich praktikabel. Hier haben die Vorbetrachtungen eine akzeptable Vorauswahl ermöglicht.

Die verkürzte Aufgabenstellung in Klassenstufe 10 erweist sich da komplizierter als in Klassenstufe 9, weil ohne eine vollständige Auswertung der Eigenschaft (2) immerhin 59 zu untersuchenden Fälle verbleiben – für eine Heimarbeit eine noch akzeptable, aber äußerst unelegante Lösungsdarstellung, jedoch unter Klausurbedingungen zeitlich nicht realisierbar.

Aufgabe 14.02 – MO611022. Ermitteln Sie alle Paare von zweistelligen Primzahlen (p, q) mit den folgenden Eigenschaften:

(1) p und q besitzen die gleiche Einerstelle.
(2) Die Quersumme des Produktes $p \cdot q$ ist gleich p.

Lösungshinweise: Mit der Argumentation wie oben finden wir aus der Eigenschaft (2) die Einschränkungen $p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ und $q \in \{19{,}37{,}73\}$. Aufgrund der Eigenschaft (1) verbleiben somit 5 Zahlenpaare, die zu untersuchen sind:

(13 ; 73), (17 ; 37), (19 ; 19), (23 ; 73), (29 ; 19).

Anhand der Erfüllung der Eigenschaft (2) erweisen sich nur die Zahlenpaare (17 ; 37) und (23 ; 73) als Lösung der Aufgabe. ❑

Systematisches Probieren als Lösungsansatz

Für die Lösungsfindung bei Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen sind oft Untersuchungen für die ersten Primzahlen 2, 3, 5, … hilfreich. Auch wenn dann eventuell allgemeine Lösungsansätze oder Nichtexistenzbeweise für größere Primzahlen misslingen sollten, wären Bewertungspunkte für spezielle Lösungen bereits gesichert.

Aufgabe 14.03 – MO500936. Man bestimme alle Paare $(p\,;\,q)$ von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst spezielle Lösungen.

- Ist $p = 2$, so ist $r = 2^2 - 3q - 1 = 3 - 3q$ für $q > 1$ negativ und offensichtlich keine Primzahl.
- Ist $p = 3$, ist für $r = 3^2 - 3q - 1 = 8 - 3q$ nur $q = 2$ als Lösung mit einer Primzahl $r = 2$ möglich.
- Ist $p = 5$, ist für $r = 5^2 - 3q - 1 = 24 - 3q$ nur für $q = 7$ das Ergebnis $r = 3$ eine Primzahl.
- Ist $p = 7$, erkennen wir aus $r = 7^2 - 3q - 1 = 48 - 3q = 3 \cdot (16 - q)$, dass r durch 3 teilbar und deshalb keine Primzahl ist. Wir vermuten, dass dies für alle Primzahlen $p > 5$ gilt.

Tatsächlich ist eine Primzahl $p > 5$ nicht durch 3 teilbar und deshalb lässt p^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit ist r durch 3 teilbar und es muss als Primzahl $r = 3$ gelten. Dies ist aber nur für $3q = p^2 - 4 = (p - 2) \cdot (p + 2)$ möglich, wenn ein Faktor in der rechtsseitigen Faktorenzerlegung gleich 3 und der andere gleich q ist. Wegen $p + 2 > 3$ muss $p - 2 = 3$, also $p = 5$ gelten – im Widerspruch zu $p > 5$. Somit sind mit (3 ; 2) und (5 ; 7) alle Lösungen gefunden. ❑

Lösungsdiskussion: Versuchen wir in gleicher Weise mit der Primzahl q zu probieren, finden wir ebenfalls die Lösungen.

- Ist $q = 2$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 7$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass es mit $p = 3$ und folglich $r = 2$ gelingt und erkennen, dass für $p > 3$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine weiteren Lösungen geben kann.
- Ist $q = 3$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 10$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass für $p > 3$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine Lösungen geben kann.

- Ist $q = 5$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 16$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass für $p > 5$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine Lösungen geben kann.
- Ist $q = 7$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 22$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass es mit $p = 5$ und folglich $r = 3$ gelingt und erkennen, dass für $p > 5$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine weiteren Lösungen geben kann.

In allen Schritten erkennen wir, dass für $p > 3$ die Zahl r durch 3 teilbar ist. Ob es aber für $q > 7$ Lösungen mit $p = 2$ oder $p = 3$ geben kann, können wir nicht allein aus q schließen, sondern müssen wie oben für p die Untersuchung führen.

Aufgabe 14.04 – MO081012. Gesucht sind alle Primzahlen p, sodass $50 + p$ und $50 - p$ Primzahlen sind.

Lösungshinweise: Durch Probieren mit verschiedenen Primzahlen p stellen wir fest,

- dass $p = 2$ keine Lösung ist, weil 50 – 2 = 48 und 50 + 2 = 52 keine Primzahlen sind.
- Dagegen finden wir für $p = 3$ eine Lösung, weil 50 – 3 = 47 und 50 + 3 = 53 Primzahlen sind.
- Wählen wir $p = 5$, führt es zu keiner Lösung, weil 50 – 5 = 45 und 50 + 5 = 55 keine Primzahlen sind. Die Teilbarkeit durch 5 lässt sich vermutlich nicht verallgemeinern.
- Deshalb probieren wir noch $p = 7$. Dies ist auch keine Lösung, weil 50 – 7 = 43 und 50 + 7 = 57 keine Primzahlen sind.

Können wir jetzt schon vermuten, dass für $p > 3$ entweder $50 - p$ oder $50 + p$ stets durch 3 teilbar ist?

Tatsächlich, lässt p bei Division durch 3 den Rest 1 ($p = 3 \cdot p' + 1$), so ist

$$50 + p = 50 + 3 \cdot p' + 1 = 3 \cdot (p' + 17)$$

durch 3 teilbar. Lässt dagegen p bei Division durch 3 den Rest 2 ($p = 3 \cdot p' + 2$), so ist

$$50 - p = 50 - 3 \cdot p' - 2 = 3 \cdot (16 - p')$$

durch 3 teilbar. Wenn es weitere Lösungen gibt, muss folglich $50 - p$ selbst durch 3 teilbar sein, d.h. $p = 47$. Wegen $50 + p = 97$ sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt und $p = 3$ sowie $p = 47$ sind die Lösungen der Aufgabe. ❑

Aufgabe 14.05 – MO370941/MO371041. Beweisen Sie folgende Aussage:
Sind $p = n^{n^n} + n^n + n + 1$ und n Primzahlen, dann ist auch $q = n^{n^n} - n^n + n - 1$ eine Primzahl.

Lösungshinweise: Um sich die Zahlen p und q vorstellen zu können, probieren wir zunächst $n = 2$:

$$p = 2^{2^2} + 2^2 + 2 + 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$
$$q = 2^{2^2} - 2^2 + 2 - 1 = 16 - 4 + 2 - 1 = 13$$

Wir finden damit eine wahre Aussage. Da bereits $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$ eine sehr große Zahl liefert, ist weiteres Probieren nicht angemessen. Wir erkennen aber, dass p für eine ungerade Zahl n als Summe von vier ungeraden Summanden stets gerade ist. Jedoch kann $p = 2$ für $n > 1$ nicht erfüllt werden. Es gibt also keine weiteren Primzahlen p der genannten Form, sodass die Behauptung bewiesen ist. ❑

Aufgabe 14.06 – MO261222. Es seien $p > q > r$ drei aufeinanderfolgende Primzahlen. Die Summe ihrer Quadrate sei ebenfalls eine Primzahl. Ermitteln Sie alle $(p\,;q\,;r)$ mit dieser Eigenschaft.

Lösungshinweise: Für eine nicht durch 3 teilbare Zahl lässt deren Quadrat den Rest 1 bei Division durch 3. Sind also alle drei Primzahlen nicht durch 3 teilbar, so ist die Summe ihrer Quadrate durch 3 teilbar. Folglich muss sich unter den Primzahlen die Zahl 3 befinden, um die Bedingungen der Aufgabe erfüllen zu können:

(2; 3; 5): 4 + 9 + 25 = 38, keine Primzahl
(3; 5; 7): 9 + 25 + 49 = 83, Primzahl.

Damit ist das Tripel (3; 5; 7) einzige Lösung der Aufgabe. ❑

Aufgabe 14.07. Man bestimme alle Paare $(p\,;\,q)$ von Primzahlen, für die $p^q + q^p$ auch eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Wir probieren mit kleinen Primzahlen und setzen zunächst $p = 2$. Dann sind alle Primzahlen q gesucht, für die $2^q + q^2$ auch Primzahl ist.

- Offenbar liefert $q = 2$ keine Lösung, weil dann der Ausdruck $2^2 + 2^2$ den Wert 8 annimmt.
- Probieren wir $q = 3$, finden wir mit $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ eine Lösung.

- Nach Einsetzen von $q = 5$ oder $q = 7$ vermuten wir, dass wegen $2^5 + 5^2 = 32 + 25 = 57$ bzw. $2^7 + 7^2 = 128 + 49 = 177$ für $q > 5$ der Ausdruck stets ein Vielfaches von 3 ist.

Tatsächlich lassen für jedes $q > 5$ der Ausdruck 2^q bei Division durch 3 den Rest 2 und der Ausdruck q^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Also ist die Summe beider Summanden durch 3 teilbar.

Statt des Probierens mit $p = 2$ können wir aber auch am Anfang feststellen, dass nicht beide Primzahlen gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sein dürfen, weil in diesen Fällen der zu untersuchende Ausdruck stets geradzahlig und größer als 2 wäre. Aufgrund der Symmetrie in beiden Variablen sind (2 ; 3) und (3 ; 2) die einzigen Lösungen. ❑

Ergänzung 1. Sind p und q Primzahlzwillinge (d.h. es gilt $p = q + 2$), so ist $p^q + q^p$ stets durch $p + q$ teilbar.

Lösungshinweise: Wegen $p = q + 2$ ist p größer als q. Deshalb können wir die folgenden Umformungen durchführen.

$$\frac{p^q + q^p}{p+q} = \frac{p^q + q^q + q^p - q^q}{p+q} = \frac{p^q + q^q}{p+q} + \frac{q^{q+2} - q^q}{2q+2}$$

Für ganze Zahlen a und b und für ungerade Exponenten n ist $a^n + b^n$ durch stets durch $a + b$ teilbar[4]. Also ist der erste Summand wegen der Primzahl $q > 2$ eine ganze Zahl. Außerdem gilt

$$\frac{q^{q+2} - q^q}{2q+2} = q^q \cdot \frac{q^2 - 1}{2(q+1)} = q^q \cdot \frac{(q-1)(q+1)}{2(q+1)}$$

Weil $q - 1$ geradzahlig ist, ist auch der zweite Summand ganzzahlig. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Ergänzung 2. Man bestimme alle Tripel $(p\,;q\,;r)$ aus Primzahlen, sodass $p^q + p^r$ eine Quadratzahl ist.

Lösungshinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[5] nehmen wir $q \leq r$ an und schreiben für die Aufgabenstellung $p^q + p^r = p^q(1 + p^{r-q})$.

[4] $a^n + b^n = (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

[5] „o.B.d.A." ist gerechtfertigt, weil durch Umbenennung der Variablen die bezeichnete Situation gewährleistet werden kann.

Fall 1: $q < r$. Offenbar ist p kein Teiler von $1 + p^{r-q}$. Deshalb müssen zur Erfüllung der Aufgabestellung sowohl p^q als auch $1 + p^{r-q}$ Quadratzahlen sein. Für Primzahlen p und q ist p^q nur für $q = 2$ eine Quadratzahl. Außerdem muss es eine positive ganze Zahl z mit $p^{r-q} = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ geben.

Für $z = 2$ folgt $p^{r-2} = 3$, woraus sofort $r = 3$ und $p = 3$ folgt. Die Probe bestätigt das Tripel $(3\,;2\,;3)$ als Lösung: $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 6^2$.

Für $z > 2$ muss p sowohl ein Teiler von $z-1$ als auch ein Teiler von $z+1$ sein. Dann ist p aber auch ein Teiler von $(z+1) - (z-1) = 2$. Also kann in diesem Fall nur $p = 2$ gelten. Außerdem ist nur im Fall $z = 3$ sowohl $z-1$ als auch $z+1$ eine Zweierpotenz. Aus $2^{r-2} = (3-1)(3+1) = 8$ erhalten wir $r = 5$. Die Probe bestätigt das Tripel $(2\,;2\,;5)$ als Lösung: $2^2 + 2^5 = 4 + 32 = 6^2$.

Betrachten wir nun den Fall $q = r$. Dann vereinfacht sich der Term zu $2 \cdot p^q = z^2$. Damit ist 2 ein Teiler von z^2 und deshalb auch von z. Folglich ist aber auch 2 ein Teiler von p^q und damit auch von p. Schließlich folgt daraus, dass $p = 2$ gilt. Für jede ungerade Primzahl q ergibt dann aber $2 \cdot 2^q = 2^{q+1}$ stets eine Quadratzahl. Somit sind auch alle Tripel $(2;\ q;\ q)$ mit Primzahlen $q > 2$ Lösung der Aufgabe. ❑

Funktionsgleichungen mit Primzahlen

Aufgabe 14.08 – MO450942 und KZM 4-3[6]. Man finde alle Paare $(p\ ;\ q)$ von Primzahlen, für die es ganze Zahlen x und y gibt, sodass folgende Gleichungen gelten:

$$p = x^2 - y \quad ; \quad q = y^2 + 3x - 7$$

Lösungshinweise: Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$p + q = x \cdot (x+3) + y \cdot (y-1) - 7$$

Da entweder x oder $x+3$ geradzahlig ist und ebenfalls entweder y oder $y-1$ geradzahlig ist, muss $p+q$ ungeradzahlig sein. Folglich ist eine der beiden Primzahlen gleich 2.

Es sei $p = 2$. Damit gilt in der ersten der gegebenen Gleichungen $x^2 = y + 2$. Weil keine Quadratzahl bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, ist y offenbar nicht durch 3 teilbar. Dann lässt aber y^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit folgt in der zweiten

[6] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

der gegebenen Gleichungen, dass q durch 3 teilbar ist und als Primzahl $q = 3$ folgt. Wir zeigen nun noch, dass es auch geeignete Zahlen x und y gibt. Mit $(p\,;q) = (2\,;3)$ folgt $y^2 + 3x = 10$. Wir erkennen, dass für $x = y = 2$ die zweite Gleichung wegen $3 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 7$ erfüllt wird. Außerdem ist auch die erste Gleichung in diesem Fall $2 = 2^2 - 2$ eine wahre Aussage.

Es sei nun $q = 2$. Dann gilt $y^2 + 3x = 9$. Für $x = 0$ kann es keine passende Primzahl p geben. Für positive Zahlen x existiert keine passende ganze Zahl y. Ist dagegen x eine negative ganze Zahl, so ist y^2 und damit auch y durch 3 teilbar. Also ist y^2 auch durch 9 teilbar und somit ist x durch 3 teilbar. Damit ist aber auch p durch 9 teilbar. Also kann es außer $(2\,;3)$ keine weiteren Lösungen in Primzahlen p und q geben. ❑

Aufgabe 14.09. Welche Tripel $(x\,;y\,;z)$ von Primzahlen genügen folgender Gleichung?

$$x^3 - y^3 - z^3 = 6y \cdot (y + 2)$$

Lösungshinweise: Da die rechte Seite der Gleichung positiv ist, gilt $x > y\,, z \geq 2$. Da die rechte Seite der Gleichung zudem geradzahlig ist, gilt entweder $y = 2$ und $z \geq 3$ oder $y \geq 3$ und $z = 2$.

Nehmen wir zunächst $y = 2$ an. Dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$x^3 - 8 - z^3 = 6 \cdot 2 \cdot (2 + 2) = 48$$

also

$$x^3 - z^3 = (x - z)(x^2 + xz + z^2) = 56 = 7 \cdot 8$$

Da die Summe der drei ungeraden Summanden in der zweiten Klammer ungeradzahlig ist, kann die Faktorenzerlegung nur in folgender Form erfolgen

$$x - z = 8 \;\; ; \;\; x^2 + xz + z^2 = 7$$

Wegen $x \geq 11$ kann es aber keine Lösungen in ganzzahligen Zahlen x und z geben. Nehmen wir deshalb $z = 2$ an. Dann finden wir

$$x^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 = (y + 2)^3$$

Somit sind für alle Primzahlzwillinge x und y mit $x = y + 2$ die Tripel $(x\,;y\,;2)$ Lösung der Gleichung. ❑

Faktorisierung zur Lösung von Aufgaben mit Primzahlen

Aufgabe 14.10 – MO420922. Man beweise, dass für jede Primzahl $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$ durch 120 teilbar ist.

Lösungshinweise: Es gilt die Faktorenzerlegung

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1).$$

- Da p eine ungerade Primzahl ist, sind $p - 1$ und $p + 1$ geradzahlig und eine davon sogar durch 4 teilbar, also ist 8 ein Teiler von $p^4 - 1$.
- Da p nicht durch 3 teilbar ist, ist $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar.
- Da p nicht durch 5 teilbar ist, gilt entweder $p = 5k \pm 1$ oder $p = 5k \pm 2$ (mit geeigneter ganzzahliger Zahl k). Im ersten Fall ist 5 ein Teiler von $p^2 - 1$, im zweiten Fall von $p^2 + 1$.

Also ist $p^4 - 1$ durch $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ teilbar. ❑

Hinweis: Diese Aufgabe hat thematisch einen frühen Vorgänger in

Aufgabe 14.11 – MO081036. Es seien $p > q > 3$ zwei Primzahlen. Man zeige: Die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch 24 teilbar.

Lösungshinweise: Man forme die Differenz zweier Quadratzahlen zu einem Produkt um:

$$p^2 - q^2 = (p - q) \cdot (p + q)$$

Beide Primzahlen sind ungerade, also ist sowohl die Differenz als auch die Summe durch 2 teilbar. Weil p und q bei Division durch 4 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 3) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 3), so ist sogar die Differenz bzw. die Summe durch 4 teilbar. Also ist das Produkt insgesamt durch 8 teilbar.

Weil p und q bei Division durch 3 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 2) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 2), so ist die Differenz bzw. die Summe durch 3 teilbar. Also ist das Produkt stets durch 3 teilbar.

Insgesamt ist die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch 8 · 3 = 24 teilbar. ❑

Aufgabe 14.12 – MO480932.
a) Es sei p eine beliebige Primzahl mit der Eigenschaft $p > 3$. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n so gibt, dass $p^2 = 24 \cdot n + 1$ gilt.
b) Es seien p und n positive ganze Zahlen, für die $p^2 = 24 \cdot n + 1$ gilt. Untersuchen Sie, ob p dann notwendigerweise eine Primzahl sein muss.

Lösungshinweise, Teilaufgabe a): Die Behauptung ist bewiesen, wenn $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p > 3$ durch 24 teilbar ist. Dies ist aber in der Aufgabe MO081036 für $q = 1$ bereits gezeigt.
Teilaufgabe b): Die Formulierung des Aufgabenteils a) lässt vermuten, dass die Behauptung zu verneinen ist. Dann genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden. Das systematische Probieren mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist aufwändig und führt bei den ersten Versuchen entweder zu Primzahlen p oder zu Ergebnissen, die keine Quadratzahlen sind. Wir müssen also versuchen, n so zu wählen, dass auf der rechten Seite der Gleichung eine Quadratzahl zu erkennen ist. Dies gelingt uns beispielsweise mit $n = 26$, denn es gilt

$$p^2 = 24 \cdot n + 1 = 24 \cdot (24 + 2) + 1 = 24^2 + 2 \cdot 24 \cdot 1 + 1 = (24 + 1)^2 = 25^2$$

Es ist $p = 25$ keine Primzahl und somit wurde ein Gegenbeispiel erbracht. ❑

Es ist zur Beantwortung der Fragestellung nicht erforderlich, weitere Gegenbeispiele zu finden. Es ist aber in der Nachbereitung immer eine Untersuchung wert, ob sich ein spezieller Lösungsansatz so verallgemeinern lässt, um mehrere oder gar unendlich viele Gegenbeispiele zu generieren. Setzen wir für eine beliebige natürliche Zahl k für $n = 26 + k \cdot 25$, so finden wir

$$p^2 = 24 \cdot (26 + k \cdot 25) + 1 = 24^2 + 2 \cdot 24 + 1 + k \cdot 24 \cdot 25$$
$$p^2 = (24 + 1)^2 + k \cdot 24 \cdot 25 = 25^2 + 25 \cdot 24 \cdot k = 25 \cdot (25 + 24 \cdot k)$$

Folglich ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k das Quadrat p^2 stets durch 25 und somit p durch 5 teilbar und keine Primzahl. ❑

Aufgabe 14.13 – MO511023. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(p\,;\,z)$ mit einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z, für welche die Beziehung $z^2 = 25 \cdot p + 9$ gilt.

Lösungshinweise: Die geforderte Gleichung formen wir zu $25 \cdot p = (z - 3)(z + 3)$ um. Damit können wir die Faktorenzerlegung der linken Seite analysieren.

$z+3$	$z-3$	Bedingung für p	p	Primzahl
25	p	$25-p=6$	19	ja
p	25	$p-31=6$	37	ja
$25\cdot p$	1	$25\cdot p-1=6$	0,28	nein
1	$25\cdot p$	$1-25\cdot p=6$	-0,2	nein
5	$5\cdot p$	$5-5\cdot p=6$	-0,2	nein
$5\cdot p$	5	$5\cdot p-5=6$	2,2	nein

Damit finden wir insgesamt zwei Lösungen: $(19;\ 22)$ und $(37;\ 28)$. ❑

Interessante Eigenschaften von Primzahlen

Von LEONARD EULER (1707 – 1783) stammt das Polynom $P(x)=x^2+x+41$, das für $x=0,1,2,\dots,39$ Primzahlen liefert. Ohne den Funktionswert konkret auszurechnen ist wegen $40^2+40+41=40^2+2\cdot 40+1=(40+1)^2$ der Wert $P(40)$ keine Primzahl. Für $x=41$ ist $P(41)$ durch 41 teilbar und ebenfalls keine Primzahl. Mit dem Polynom $P(x)=x^2-79\cdot x+1601$ finden wir für alle $x=0,1,2,\dots,79$ als Funktionswert Primzahlen. Kann es sogar Polynome geben, die bei allen natürlichen Argumenten Primzahlen liefern?

CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764) zeigte 1752 folgenden **Satz**: Ist $P(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, dann können nicht alle Werte der Form $|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|, \dots$ Primzahlen sein.

Beweisidee: Jedes Polynom $P(x)$ mit $P(0)=p$ können wir auch in der Form $P(x)=p+x\cdot Q(x)$ mit einem geeigneten Polynom $Q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben. Dann ist für alle ganzen Zahlen k der Funktionswert $P(kp)$ durch p teilbar, denn es gilt $P(kp)=p+kp\cdot Q(kp)$. Da aber P für alle natürlichen Zahlen eine Primzahl ergeben soll, ist für alle k der Funktionswert $P(kp)=p$ und somit $Q(kp)=0$. Ein Polynom, dass unendlich viele Nullstellen hat, ist aber konstant gleich Null im Widerspruch zur Definition von $P(x)$. ❑

Kleiner Satz von FERMAT[7]. Für eine Primzahl p und eine beliebige ganze Zahl a ist a^p-a durch p teilbar.

Beweisidee (mittels der Methode der vollständigen Induktion). Es genügt, sich auf positive ganze Zahlen a zu beschränken. Für negative a folgt nämlich die Aussage aus $(-a)^p-(-a)=-(a^p-a)$ für ungerade Primzahlen p und für $p=2$ aus $(-a)^2-(-a)=a^2+a=a^2-a+2a$.

[7] PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665)

Induktionsanfang: Für $a = 0$ und $a = 1$ ist p stets Teiler von $0^p - 0 = 0$ bzw. $1^p - 1 = 0$.
Induktionsvoraussetzung: Der Ausdruck $a^p - a$ ist für gewisse a durch p teilbar.
Induktionsschritt: Wir betrachten $(a+1)^p - (a+1)$ und wenden die binomische Formel an:

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a + 1 - (a+1)$$

In der Darstellung der Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$ steht p für $1 \leq k \leq p-1$ nur im Zähler und nicht im Nenner. Jeder der Binomialkoeffizienten ist somit durch p teilbar. Damit lässt $(a+1)^p - (a+1)$ bei Division durch p den gleichen Rest wie $a^p - a$ und ist somit ebenfalls durch p teilbar.
Induktionsschluss: Für alle ganzen Zahlen ist $a^p - a$ durch p teilbar.

Folgerung. Sind a und p teilerfremd, so ist wegen $a^p - a = a \cdot (a^{p-1} - 1)$ auch $a^{p-1} - 1$ durch p teilbar.

WILSONscher Satz[8]. Eine natürliche Zahl $n > 1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn die Zahl $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist.

Beweisidee: Es sei n eine zusammengesetzte Zahl, d.h. es gibt entweder

- ganze Zahlen $1 < a < b < 1$ mit $n = a \cdot b$, dann sind a und b als Faktoren in $(n-1)!$ enthalten, oder
- eine ganze Zahl a mit $n = a^2$, dann gilt $2a < n$ und a und $2a$ sind als Faktoren in $(n-1)!$ enthalten.

Folglich ist in beiden Fällen n ein Teiler von $(n-1)!$ und deshalb kein Teiler von $(n-1)! + 1$. Damit ist bewiesen: Wenn $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist, dann ist n keine zusammengesetzte Zahl und somit eine Primzahl.

Es sei nun n eine Primzahl p ($n = p$). Weil p eine Primzahl ist, lassen sich die Zahlen $2, 3, \ldots, p-2$ in eindeutiger Weise und vollständig in Paare zusammenfassen, deren Produkte jeweils bei Division durch p den Rest 1 lassen. Dann lässt auch $(p-2)!$ bei Division durch p den Rest 1. Folglich ist $(p-2)! - 1$ restlos durch p teilbar und somit auch $(p-1)! - p + 1$ und wie behauptet auch $(p-1)! + 1$. ❑

[8] JOHN WILSON (1741 – 1793)

Postulat von BERTRAND[9]. Ist p eine Primzahl, so liegt zwischen p und $2p$ mindestens eine weitere Primzahl.

Hinweis: Diese Aussage erscheint beinahe trivial – dennoch ist der Beweis recht langwierig. Man kann die Ungleichungskette

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

beweisen[10]. Dabei werden die Produkte über alle Primzahlen in den angegebenen Intervallen gebildet, das leere Produkt hat den Wert 1. Existiert nun keine Primzahl p im letzten Produkt, so führt dies zu einem Widerspruch für alle $n > 4000$. Für die Zahlen bis 4000 lässt sich aber leicht zeigen, dass das Postulat stets erfüllt ist.

Palindrom-Zahlen

Palindrom-Zahlen sind Zahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Der Begriff Palindrom kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Hin- und Herbewegung“ (παλινδρομηση = palíndromese). Das Datum 22.02.2022 erinnerte uns an diese Besonderheit unter den Zahlen, zumal es für längerer Zeit der letzte Tag war, der in Langform eine Palindrom-Zahl ergibt. Für die Jahre 2023 bis 2029 existieren keine passenden Tageszahlen. Erst am 03.02.2030 können wir wieder einen Palindrom-Tag begehen. Für die Datumsangabe in Kurzform 2.2.22 ist natürlich schon im nächsten Jahr das nächste Palindrom in Sicht: 3.2.23.

Unter den Palindrom-Zahlen gibt es auch Palindrom-Primzahlen, also Primzahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Die ersten derartigen Zahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, …

Die Anzahl der palindromischen Primzahlen mit 1, 2, 3, … Ziffern ist 4, 1, 15, 0, 93, 0, 668, 0, 5172, 0, 42042, 0, … Die Anzahlen 0 in dieser Aufzählung sind schnell erklärt: Da jede Palindrom-Zahl mit einer geraden Anzahl von Ziffern durch 11 teilbar ist, existiert nur eine Palindrom-Primzahl mit gerader Stellenzahl, die 11.

Im Jahre 2001 fand HARVEY DUBNER (1928 – 2019) die bisher größte Palindrom-Primzahl mit 39027 Ziffern: $P = 10^{39026} + 4538354 \cdot 10^{19510} + 1$.

[9] JOSEPH LOUIS FRANÇOIS BERTRAND (1822 bis 1900)

[10] Winzenick, J. Das Postulat von Bertrand. Proseminararbeit, Universität Paderborn, 2005.

Bekannt ist der so genannte **196-Algorithmus**: Zu einer mehrstelligen Zahl n wird die natürliche Zahl addiert, welche dadurch entsteht, dass die Ziffernfolge von n umgekehrt wird. Diese Addition wird mit der Summe immer wiederholt, bis eine Palindrom-Zahl entsteht, z.B. $n = 65 \Rightarrow 65 + 56 = 121$. Die nach mehreren Schritten entstehende Zahl kann selbst bei kleinen Startzahlen sehr groß werden, für 89 ergibt sich erst 8813200023188 als erstes Palindrom. Die kleinste Zahl, für welche nicht bekannt ist, ob der Algorithmus irgendwann eine Palindrom-Zahl liefert, ist 196.

Viele weitere interessante Informationen zu Palindrom-Zahlen stehen unter https://mathematikalpha.de/palindrom-zahlen.

Die mathematische Fundgrube in diesen Web-Seiten ist ein überaus empfehlenswertes Angebot! Zur Einführung unter https://mathematikalpha.de erklärt sich „Mathematik alpha“ selbst: *„Das Freeware-Programm behandelt eine Vielzahl von Themen der Mathematik und Naturwissenschaften. Ziel dieses Programms ist es, Lehrern, Schülern, Studenten und allen mathematisch Interessierten Unterstützung bei der Behandlung von mathematischen Aufgaben der Bereiche Analysis, Algebra, Geometrie und Stochastik zu geben. Darüber hinaus werden fachübergreifende mathematische Anwendungen aus der Physik, der Informatik, der Astronomie sowie der Chaostheorie behandelt. Insbesondere für eine gymnasiale Ausbildung oder ein mathematisches Anfangsstudium kann das Programm gut genutzt werden. Zusätzlich bietet dieses Internetangebot die Download-Möglichkeit eines mathematischen Lexikons, einer Vielzahl von Aufgabentexten und Einzelprogrammen sowie mathematischer Literatur, darunter alle Hefte der „Zeitschrift alpha“ und Lehrbücher der Mathematik.“* [11]

(Vorläufige) Herzliche Einladung zum

4. Tag der Mathematik der TUC

Für den 2. April 2022 möchte die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz alle herzlich zu ihrem Tag der Mathematik einladen! Hauptevent soll wieder der Team-Wettbewerb für Teams aus den Klassenstufen 8/9 und den Klassenstufen 10 bis 12 mit jeweils 3 bis 5 Teilnehmenden werden. Dafür ist eine Anmeldung bis zum 28. März unter

https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/anmeldung/

erforderlich. Aber auch Lehrerinnen und Lehrer sowie alle Mathematikinteressierten sind herzlich willkommen!

[11] Zitat vom 26.02.2022

Die Veranstaltung soll nach Möglichkeit wieder in Präsenz im Hörsaalgebäude der TUC (Reichenhainer Str. 90, 09126 Chemnitz, 09:00 Uhr bis gegen 15:00 Uhr) stattfinden – noch ist es aber nicht entschieden, ob dies unter den dann geltenden sächsischen Pandemie-Beschränkungen möglich sein wird.

Vorgesehen ist der Hauptvortrag von Frau Prof. Uta Freiberg über „Die wunderbare Welt der Fraktale“ (14:00 Uhr bis 14:30 Uhr). Als Lehrerfortbildung (10:00 Uhr bis 12:00 Uhr, mit Teilnahmebestätigung) sind Vorträge von Prof. Horst Martini über „M. C. Escher – Mathematik und Kunst“ und Prof. Peter Stollmann über „Grenzwerte – konvergiert sie oder konvergiert sie nicht?“ angekündigt. Zudem wird ganztägig die Mitmach-Ausstellung in der Haupthalle zugänglich sein – alles vorbehaltlich der pandemie-bedingten Umsetzbarkeit.

Details zum 4. TdM werden nach Anmeldung per E-Mail bekanntgegeben.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids Elemente[12]

Funfzehn Bücher
auf dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[13]

Siebentes Buch

Definitionen

1. Die **Einheit** iſt, nach welcher jedes Ding Eins heißt.
2. Eine Zahl aber iſt die auf Einheiten beſtehende Vielheit.
3. Eine kleinere Zahl iſt ein **Theil** der gröſſern, wenn die gröſſere ſich von ihr genau meſſen läßt.

[12] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[13] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022,

4. Eine kleinere Zahl ist ein **vielfacher Theil** der grössern, wenn die grössere sich von ihr nicht genau messen läßt.
5. Eine grössere Zahl ist ein **Vielfaches** der kleinern, wenn sie sich von der kleinern genau messen läßt.
6. Eine **gerade** Zahl ist, welche sich halbieren läßt.

...

11. Eine **Primzahl** ist, welche sich nur von der Einheit genau messen läßt.
12. Zahlen, welche nur die Einheit zum gemeinschaftlichen Maase haben, sind **Primzahlen zu einander** (relative Primzahlen).

...

Der 1. Satz

Wenn zwei ungleiche Zahlen, AB, CD, vorhanden sind, und man nimmt immer die kleinere von der grössern weg, ohne daß vom Rest die nächstvorhergehende Zahl eher genau gemessen werde, als bis derselbe zur Einheit geworden: so sind die zuerst gedachten Zahl, AB, CD, Primzahlen zu einander.

Wären AB, CD, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa von E gemessen. Nun lasse AB, von CD gemessen, den Rest AF < CD, und CD, von AF gemessen, den Rest CG < AF, und AF, von CG gemessen, den Rest AH = 1.

E mißt die CD, und CD die BF, folglich mißt E die BF; aber auch die ganze AB, folglich auch den Rest AF. Dieser Rest aber mißt die DG, folglich mißt auch E die DG; aber auch die ganze CD, folglich auch den Rest CG. Dieser Rest aber mißt die FH, folglich mißt auch E die FH; aber auch die ganze AF, folglich auch den Rest AH, das ist, die Einheit, welches unmöglich, weil E > 1.

Neuntes Buch

Der 20. Satz

Jeder angegebenen Menge von Primzahlen, A, B, C, können noch mehrere beygefügt werden.

Es sey die den gegebenen Primzahlen, A, B, C, meßbare kleinste Zahl, DE, so ist, wenn die Einheit DF dazukommt, EF entweder eine Primzahl, oder nicht. Ist das erste, so ist schon Eine Primzahl mehr als angegeben worden. Ist es aber das letzte, so wird EF von irgend einer Primzahl, G, gemessen. Diese G aber ist mit keiner der A, B, C, einerley. Denn wäre dies, so würde sie die DE messen, weil A, B, C, die DE messen. Nun mißt G die EF, folglich auch den Rest DF, das ist, eine Zahl die Einheit, welches unmöglich.

Inhaltsverzeichnis Heft 02/22 - März 2022

Vorwort 2
Thema 14 – Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen 3
Systematisches Probieren als Lösungsansatz 6
Funktionsgleichungen mit Primzahlen 10
Faktorisierung zur Lösung von Aufgaben mit Primzahlen 12
Interessante Eigenschaften von Primzahlen 14
Palindrom-Zahlen 16
4. Tag der Mathematik der TUC 17
In alten Mathe-Büchern geblättert 18

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[14]	Nr.	Thema	Aufgabe
März 2022	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
Jan. 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

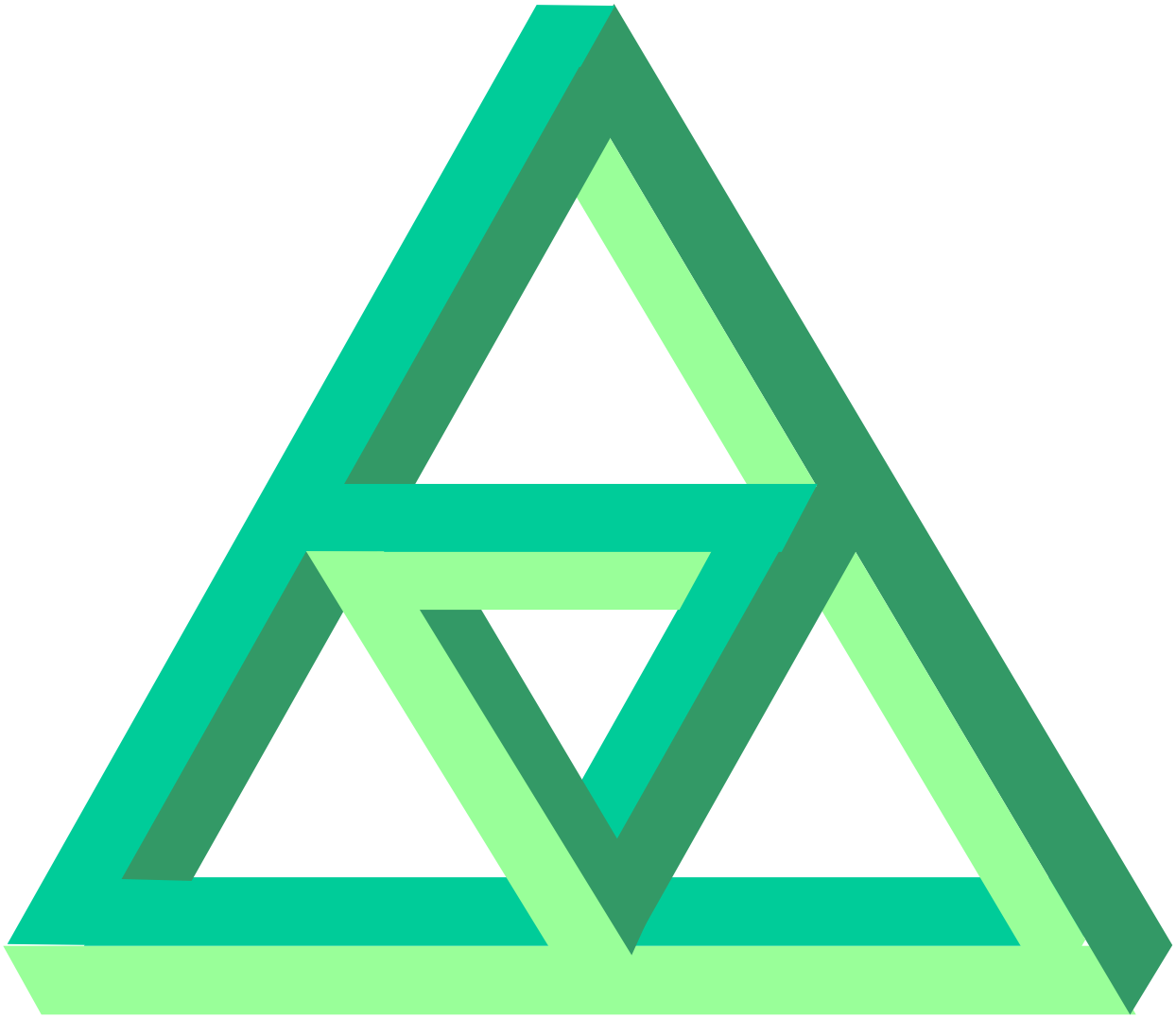
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 03/22 – April 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zu den Aufgaben **MO610932/MO611031** nochmals Zerlegungen von geometrischen Figuren (Thema 12.1, Bedeckungen) und setzen damit die Aufgabenbeispiele aus Heft 11/21 (Dezember 2021) fort.

Ein Auszug aus einem Lehrbuch zur Arithmetik und Algebra aus dem Jahr 1895 zeigt unterhaltsam einen Ausschnitt über die Einführung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zur damaligen Zeit.

Ein Rückblick auf den 4. Tag der Mathematik der Technischen Universität Chemnitz lässt bereits Vorfreude auf das kommende Jahr aufkommen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12.1 – Zerlegung einer Dreiecksfläche

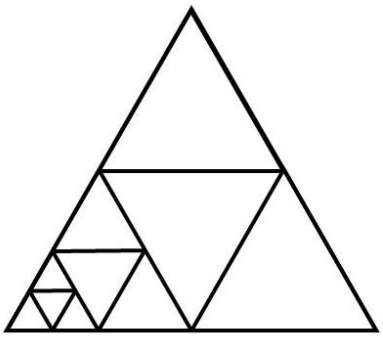
Aufgabe 12.9 – MO610932/MO611031.
a) Weisen Sie nach, dass sich ein gleichseitiges Dreieck in 61 gleichseitige Teildreiecke zerlegen lässt.
b) Weisen Sie nach, dass sich für jedes $n \geq 6$ ein gleichseitiges Dreieck in genau n gleichseitige Teildreiecke zerlegen lässt.
c) Weisen Sie nach, dass sich ein gleichseitiges Dreieck nicht in 5 gleichseitige Teildreiecke zerlegen lässt.

Vorbemerkung: Diese Thematik wurde bereits in einer Olympiade-Aufgabe 1996 behandelt. Der Begriff „Zerschneiden“ entspricht der umgangssprachlichen Vorstellung einer **Parkettierung**: Eine Figur wird in Teilfiguren zerlegt, sodass jeder Punkt der Ausgangsfigur (einschließlich ihrer Randpunkte) in genau einer Teilfigur und kein Punkt in mehr als einer Teilfigur enthalten ist. Auf eine vollständige Definition des Zerschneidens wird hier nicht eingegangen.

Aufgabe 12.10 – MO350931. Beweisen Sie, dass man ein gleichseitiges Dreieck so in 1996 gleichseitige Teildreiecke zerschneiden kann, dass es unter je 5 dieser Teildreiecke zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind

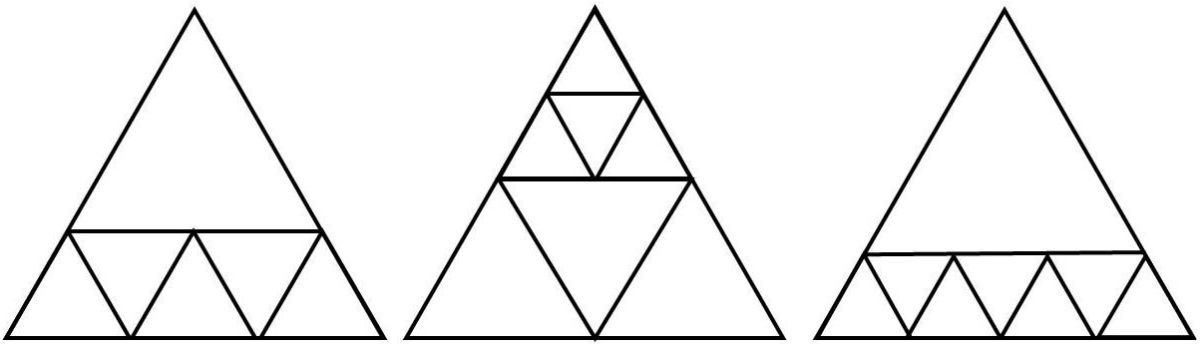
Lösungshinweise: Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass jedes gleichseitige Dreieck durch die Verbindungsstrecken seiner Seitenmittelpunkte in vier gleichseitige Dreiecke zerlegt werden kann. Führen wir dies für das vorgegebene Dreieck aus und setzen das Zerschneiden für jeweils eines der entstandene Teildreieck fort, so finden wir: Bis auf das letzte Zerschneiden eines Teildreiecks bleiben jeweils drei Teildreiecke gleicher Größe und beim letzten Zerschneiden vier Teildreiecke gleicher Größe bestehen. Damit sichert diese Prozedur die Forderung, dass unter je 5 dieser Teildreiecke stets zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind (weil es keine 5 gleichgroßen Dreiecke gibt).

Außerdem erkennen wir, dass bei jedem Zerschneiden eines Teildreiecks aus einem Dreieck (das durch das Zerschneiden „verloren“ geht) vier neue Dreiecke entstehen, also insgesamt drei Dreiecke hinzukommen. Wegen $1 + 3 \cdot 665 = 1996$ ist nach 665 Zerschneidungen eines der entstandenen Teildreiecke eine Zerlegung in 1996 der geforderten Art erreicht.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Teilaufgabe a) Wegen 61 = 1 + 20 · 3 ist mit der Argumentation in der Lösung zu Aufgabe 2 gezeigt, dass eine Zerlegung in 61 Teildreiecke möglich ist.

Teilaufgabe b) Für $n = 7$ ist die Lösung wegen $7 = 1 + 2 \cdot 3$ auf Aufgabe 2 zurückzuführen. Da diese Argumentation auf $n = 6$ und $n = 8$ nicht übertragbar ist, müssen wir spezielle Lösungen finden.



$n = 6$ $n = 7$ $n = 8$

Die in Aufgabe 1 vorgeschlagene Prozedur ermöglicht nun, von einer gegebenen Ausgangssituation mit k Teildreiecken für jede Anzahl der Form $k + 3 \cdot m$ Teildreiecke zu erzeugen. Da sich jede natürliche Zahl $n \geq 6$ als $6 + 3 \cdot m$, $7 + 3 \cdot m$ oder $8 + 3 \cdot m$ darstellen lässt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

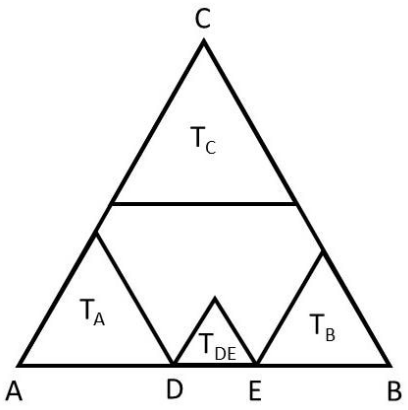
Lösungsvariante: Aus der in Bezug zu Aufgabe 2 naheliegenden Lösung für $n = 7$ können wir aber auch folgende Beweisidee verfolgen.

Die Lösung für eine gerade Zahl $n = 2 \cdot m$ ergibt sich, indem wir die Grundseite für $m \geq 2$ in m Teilstrecken zerlegen. Mit $2 \cdot m - 1$ gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ können wir einen trapezförmigen Streifen überdecken, sodass darüber ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $1 - \frac{1}{m}$ verbleibt. Insgesamt entstehen auf diese Weise $2 \cdot m$ gleichseitige Dreiecke. Es lassen sich also mit dieser Vorgehensweise für jede gerade Anzahl n ($n \geq 4$) eine Zerlegung in n Dreiecke erreichen.

Da wir aber bei dieser Konstruktion anstelle des oberen gleichseitigen Dreiecks dieses stets in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen können, ist es auch möglich, insgesamt $2 \cdot m - 1 + 4 = 2 \cdot m + 3$ Dreiecke zu erreichen. Somit sind auch für jede ungerade Anzahl n ($n \geq 7$) die Zerlegung in n Dreiecke möglich.

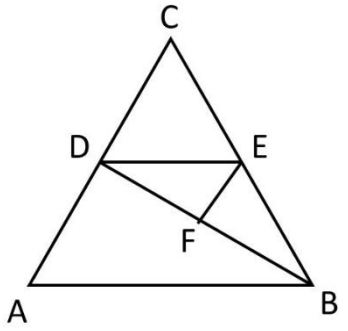
Lösungshinweise zu Teilaufgabe c) Wir nehmen an, für das Dreieck ABC eine Zerlegung in fünf Teildreiecke gefunden zu haben. Dann sind darunter genau drei Teildreiecke T_A, T_B und T_C, die jeweils genau einen der Eckpunkte A, B und C

enthalten. Würde nämlich ein Dreieck zwei Eckpunkte enthalten, fiele es mit dem Ausgangsdreieck zusammen und es wäre keine weitere Zerlegung möglich.



Haben nun zwei dieser Teildreiecke, zum Beispiel T_A und T_B keinen Punkt gemeinsam, so verbleibt auf der Seite AB des Dreiecks ABC eine nicht überdeckte Strecke DE, für die ein viertes Dreieck T_{DE} erforderlich ist. Dann sind aber mindestens zwei weitere Dreiecke erforderlich, die mit einem Eckpunkt den D bzw. E berühren, um die Flächen zu überdecken, also insgesamt mindestens 6 Teildreiecke. Deshalb haben sowohl T_A und T_B, T_B und T_C sowie T_C und T_A jeweils einen Punkt auf den Dreiecksseiten gemeinsam. Das ist aber nur möglich, wenn die drei Dreiecke kongruent sind. Es verbleibt somit offene Fläche, die selbst wieder ein gleichseitiges Dreieck ist. Diese kann aber nicht in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. ❑

Aufgabe 12.11 – MO561012. Beweisen Sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos so in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.



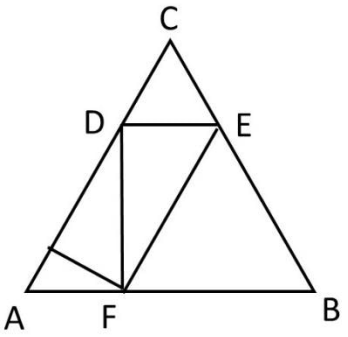
Lösungshinweise: Es genügt, wenn wir ein Beispiel der geforderten Zerlegung angeben und nachweisen, dass es den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Nebenstehende Abbildung zeigt eine Möglichkeit: Verbinden wir im gleichseitigen Dreieck ABC die Seitenmittelpunkte D von AC und E von BC, so ist das Dreieck CDE ebenfalls gleichseitig. Andererseits ist BD die Mittelsenkrechte auf AC, also ist das Dreieck ABD rechtwinklig. Zudem ist das Dreieck BED gleichschenklig mit der Basis BD und wir können es mit der Mittelsenkrechten EF auf BD in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Also haben wir eine Zerlegung wie gefordert gefunden. ❑

Verallgemeinerung. In Analogie zu den Aufgaben MO610932/MO611031 können wir die Fragestellung verallgemeinern und behaupten, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein gleichseitiges Dreieck in n rechtwinklige Dreiecke und ein gleichseitiges Dreieck zerlegt werden kann, denn jedes rechtwinklige Dreieck lässt sich durch die Höhe auf der Hypotenuse in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

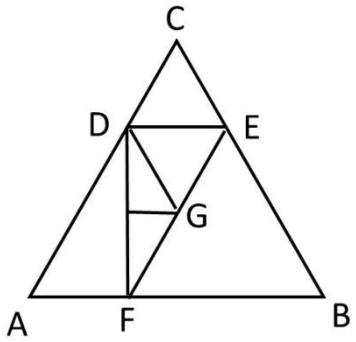
Aufgabe 12.12. Für welche natürliche Zahlen n ist es möglich, ein gleichseitiges Dreieck in n gleichseitige Dreiecke und drei rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen?

Lösungshinweise: Wie wir in obigen Diskussionen gesehen haben, ist für $n = 1$ und $n \geq 6$ die Zerlegung möglich. Natürlich ist die Zerlegung auch für $n = 4$ möglich, weil wir das Dreiecke zunächst in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen können und dann eins dieser Teildreiecke in ein gleichseitiges Dreieck und drei rechtwinklige Dreiecke zerlegen können.

Auch für $n = 2$ finden wir eine Lösung wie in nebenstehender Abbildung. Werden die gleichseitigen Dreiecke CDE und BEF so festgelegt, dass DF senkrecht auf AB steht (d.h. DE ist ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangsdreiecks ABC), so ist das Parallelogramm $AFED$ durch die Diagonale DF in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegbar, wovon eines nochmals unkompliziert in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann.



Mit diesem Ansatz finden wir aber auch für $n = 3$ eine Lösung. Ist das Dreieck DGE ebenfalls gleichseitig, so ist das Dreieck DFG gleichschenklig und lässt sich in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.



Damit gibt es aber auch eine Zerlegung wie gefordert für $n = 5$. Im ersten Schritt zerlegen wir ein gleichseitiges Dreieck in vier gleichseitige Dreiecke. Eines dieser Teildreiecke können wir nun in zwei gleichseitige Dreiecke und drei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

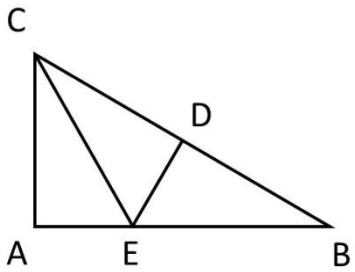
Somit ist die geforderte Zerlegung für alle $n \geq 1$ möglich. ❑

Eine besondere Form der Zerlegung von Flächen ist das so genannte geometrische Gerücht[3]. Hierbei wird eine Fläche in kleinere Teilflächen überdeckungsfrei und vollständig zerlegt, die paarweise kongruent und zur Ausgangsfläche ähnlich sind. Jedes Dreieck ist demnach ein vierteiliges Gerücht, weil wir es mit den Verbindungslinien der Seitenmitten in vier zueinander kongruente und zum Ausgangsdreieck ähnliche Teildreiecke zerlegen können. Jedes Dreieck ist aber auch für jedes $n \geq 2$ ein n^2 −teiliges Gerücht, weil wir jedes Dreieck in n^2 Teildreiecke gitterförmig zerlegen können, wenn wir die Seiten in n Teilstrecken teilen.

[3] Aus: Devendran T. (Hrsg.) Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1990.

Betrachten wir nun rechtwinklige Dreiecke. Jedes gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist ein zweiteiliges Gerücht, weil die Höhe auf der Basis das Dreieck wieder in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Damit ist es aber auch ein vierteiliges, achtteilige bzw. allgemein 2^n-teiliges Gerücht, weil wir die Teilung beliebig fortsetzen können.

Aufgabe 12.13. Existieren rechtwinklige Dreiecke, die dreiteilige Gerüchte sind?



Lösungshinweise: Wir zeichnen eine Skizze, wie wir uns eine Zerlegung des Dreiecks in drei kongruente Dreiecke vorstellen. Wir nehmen an, diese Konstruktion lässt sich bei geeigneten Maßen als geometrisches Gerücht festlegen. Damit die Dreiecke BDE und CED kongruent sind, muss $BD = CD$ gelten. Damit die Dreiecke AEC und BDE kongruent sind, muss auch $BD = AC$ gelten. Nach dem Satz von PYTHAGORAS finden im rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse für die Seitenlänge $|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Alle rechtwinkligen Dreiecke, deren Seitenlängen im Verhältnis $1 : \sqrt{3} : 2$ stehen, sind folglich dreiteilige Gerüchte. ❑

Wie jedes Dreieck ist auch ein rechtwinkliges Dreieck ein vierteiliges Gerücht.

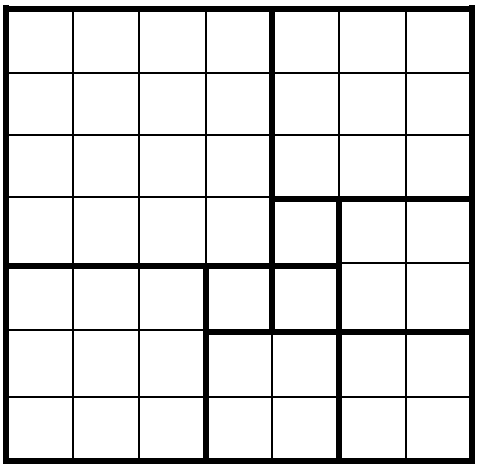
Die Frage nach der Existenz von rechtwinkligen Dreiecken, die fünfteilige Gerüchte sind, wurde in Aufgabe **KZM1-4**[4] untersucht.

Thema 12.1 – Zerlegung einer Quadratfläche

Aufgabe 12.14 – MO351031. Beweisen Sie, dass man ein Quadrat so in mehr als vier Teilquadrate zerschneiden kann, dass es unter je 4 dieser Teilquadrate zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

Lösungshinweise: Es genügt bei dieser Fragestellung, eine geeignete Zerlegung zu zeigen. Aufgrund der Bedingungen der Aufgabenstellung können höchsten drei der Teilquadrate die gleiche Größe haben.

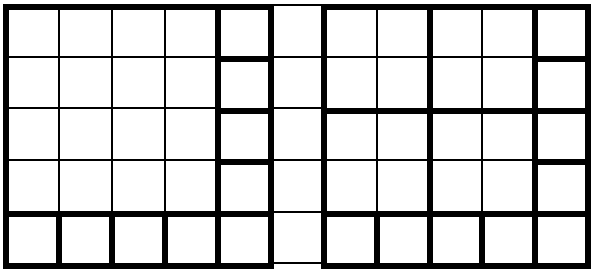
[4] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1



Dies wird in nebenstehender Abbildung realisiert, da es ein Quadrat mit 16 FE[5], zwei Quadrate mit 9 FE und jeweils drei Quadrate mit 4 FE bzw. 1 FE als Teilquadrate gibt.

Angeregt durch diese Aufgabe liegt es Nahe zu untersuchen, in wie viele Teilquadrate wir ein Quadrat zerschneiden können[6]. Offensichtlich können wir ein Quadrat nicht in zwei und nicht in drei Teilquadrate zerschneiden. Beim Zerschneiden muss jeder Quadrat-Eckpunkt in einem der Teilquadrate enthalten sein. Bei weniger als vier Teilquadraten gibt es mindestens ein Teilquadrat, das mindestens zwei Eckpunkte enthält. Dann fällt dieses Teilquadrat bereits mit dem Ausgangsquadrat zusammen.

Es ist natürlich möglich, ein Quadrat in 4 Teilquadrate zu zerschneiden.



Wir können auch ein Quadrat in jede gerade Anzahl $2 \cdot m$ von Quadraten zerschneiden ($m > 1$). Dafür zerschneiden wir zunächst einen Streifen von m Teilquadraten jeweils mit der Seitenlänge $\frac{1}{m}$. Dann lassen sich weitere $(m-1)$ Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ abschneiden. Es verbleibt ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{m-1}{m}$. Insgesamt sind es also $2 \cdot m$ Teilquadrate.

Wir können auch ein Quadrat in jede ungerade Anzahl $2 \cdot m + 1$ von Quadraten zerschneiden ($m \geq 3$). Dafür zerschneiden wir zunächst einen Streifen von $(m-1)$ Teilquadraten jeweils mit der Seitenlänge $\frac{1}{m-1}$. Dann lassen sich weitere $(m-2)$ Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{m-1}$ abschneiden. Es verbleibt ein Quadrat der

[5] FE – Flächeneinheit darf als Abkürzung für eine beliebige, aber fixierte Einheit verwendet werden (vergleiche auch LE – Längeneinheit). Wir vereinbaren, dass im Weiteren FE als 1 angenommen wird und deshalb weggelassen werden kann.

[6] Nach: Hercher C. Hyperwürfel-Zerlegungen. $\sqrt{WURZEL}$ Heft 6/2021, S. 124ff.

Seitenlänge $\frac{m-2}{m-1}$, das wir in 4 Teilquadrate zerschneiden. Insgesamt sind es also $2 \cdot m + 1$ Teilquadrate.

Wir können aber auch mit den Beispielen für $n = 6$, $n = 7$ und $n = 8$ argumentieren, dass wir aus einer gegebenen Ausgangssituation mit k Teilquadraten für jede Anzahl der Form $k + 3 \cdot m$ Teilquadrate zerschneiden können, indem eines der Teilquadrate wiederholend in 4 Teilquadrate zerlegt wird. Da sich jede natürliche Zahl $n \geq 6$ als $6 + 3 \cdot m$, $7 + 3 \cdot m$ oder $8 + 3 \cdot m$ darstellen lässt, ist die Behauptung also bewiesen.

Wie auch bei den Dreiecken weisen wir nun nach, dass eine Zerlegung in $n = 5$ Teilquadrate nicht möglich ist. Wir stellen fest, dass die Seiten der Teilquadrate parallel zu Seiten des Ausgangsquadrates liegen. Außerdem liegen in vier der fünf Teilquadrate jeweils ein Eckpunkt des Ausgangsquadrates mit Seitenlänge 1, deren Seitenlängen a_1, a_2, a_3 und a_4 seien.

Es können höchstens auf einer Seites des Ausgangsquadrates nicht alle Punkte durch diese Teilquadrate bedeckt sein (denn für jede dieser Lücke ist ein weiteres Teilquadrat erforderlich). Entlang der anderen drei Seiten gilt deshalb (bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen) $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = 1$. Deshalb gilt $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$. Wäre nun $a_1 > \frac{1}{2}$, so wäre auch $a_1 > \frac{1}{2}$ und der Mittelpunkt des Ausgangsquadrates läge sowohl im Innern des Teilquadrates mit Seitenlänge a_1 als auch im Innern des Teilquadrates mit Seitenlänge a_3. Also muss $a_1 \leq \frac{1}{2}$ und $a_3 \leq \frac{1}{2}$ gelten. Daraus folgt aber $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$. Diese vier Teilquadrate überdecken das Ausgangsquadrat und es kann kein fünftes Teilquadrat in der Zerlegung geben. ❑

Die zweidimensionale Fragestellung mit Quadraten führt zum dreidimensionalen Zerlegungsproblem mit Würfeln. Offensichtlich können wir einen Würfel nicht in n Würfel mit $n < 8$ zerlegen, weil jeder Eckpunkt des Würfels in einem der n Teilwürfel liegen muss. Natürlich ist es möglich, einen Würfel in 8 Teilwürfel zu zerlegen. Kann ähnlich wie im zweidimensionalen Fall die folgende Frage beantwortet werden: Für welche natürliche Zahl n_0 ist eine Zerlegung eines Würfels in n Würfel für alle $n \geq n_0$ möglich?

Diese Thematik finden wir in einer Aufgabe im Buch **Felgenhauer A, Gronau H-D, …, Welk M. Die schönsten Aufgaben der Mathematik-Olympiade in Deutschland – 300 ausgewählte Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklassen 11 bis 13. Springer Verlag GmbH (**Deutschland, 2021) Dieses überaus empfehlenswerte Buch ist eine Fundgrube für das Olympiade-Training – auch für die Klassenstufen 9 und 10.

Aufgabe 12.15 – MO321242. Man beweise, dass ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in n Würfel zerlegt werden kann.

Lösungshinweise: Wenn wir eine Zerlegung in k Teilwürfel gefunden haben, können wir einen Würfel davon wegnehmen und in 8, 27, 64, … oder m^3 Teilwürfel zerlegen. Wir erhalten entsprechend $k+7$, $k+26$, $k+63$, … bzw. $k-1+m^3$ Teilwürfel. Wir könnten aber auch von den 27 erhaltenen Teilwürfeln 8 wieder zu einem größeren Teilwürfel zusammensetzen und erhalten 27 – 8 = 19 neue Teilwürfel, ebenso sind Zerlegungen in 64 – 27 = 37 Teilwürfel oder 64 – 8 = 56 Teilwürfel möglich. Wiederholen wir – beginnend mit $k = 1$ – diese Zerlegungen nacheinander, sind beispielsweise folgende Zerlegungen für möglich: $k = 1 + t \cdot 7, 1 + t \cdot 19, 1 + t \cdot 37$. Dies lässt sich nun zu Zerlegungen in $1 + t \cdot 19 + m \cdot 7$, $1 + t \cdot 37 + m \cdot 7$ oder $1 + t_1 \cdot 37 + t_2 \cdot 19 + m \cdot 7$ Teilwürfel kombinieren.

Es ist nun eine besondere Herausforderung, für die sieben aufeinanderfolgenden Zahlen 100, 101, …, 106 solche Zerlegungen zu finden:

$100 = 1 + 3 \cdot 19 + 6 \cdot 7$ und damit auch für $100 + k \cdot 7$,
$101 = 1 + 1 \cdot 37 + 9 \cdot 7$ und damit auch für $101 + k \cdot 7$,
$102 = 1 + 2 \cdot 19 + 9 \cdot 7$ und damit auch für $102 + k \cdot 7$,
$103 = 1 + 2 \cdot 37 + 4 \cdot 7$ und damit auch für $103 + k \cdot 7$,
$104 = 1 + 1 \cdot 19 + 12 \cdot 7$ und damit auch für $104 + k \cdot 7$,
$105 = 1 + 4 \cdot 19 + 4 \cdot 7$ und damit auch für $105 + k \cdot 7$,
$106 = 1 + 15 \cdot 7$ und damit auch für $106 + k \cdot 7$ (jeweils $k \geq 0$). ❑

Als Nachtrag zur Olympiade-Aufgabe wird vermerkt, dass mit dieser 7-er, 19-er und 37-er Zerlegung $n_0 = 77$ gewählt werden kann, denn es gelten die Zerlegungen:

$77 = 1 + 4 \cdot 19$,
$78 = 1 + 1 \cdot 37 + 1 \cdot 19 + 3 \cdot 7$,
$79 = 1 + 3 \cdot 19 + 3 \cdot 7$,
$80 = 1 + 1 \cdot 37 + 6 \cdot 7$,
$81 = 1 + 2 \cdot 19 + 6 \cdot 7$,
$82 = 1 + 2 \cdot 37 + 1 \cdot 7$,
$83 = 1 + 1 \cdot 19 + 9 \cdot 7$.

In dem Artikel (s. Fußnote 6) aus der monatlich erscheinenden mathematischen Zeitschrift für Mathematik $\sqrt{WURZEL}$ (s. www.wurzel.org) wird sogar die Zerlegung für $n_0 = 48$ gezeigt. Allerdings sind einige der Zerlegungen in 48, 49, …, 54 Teilwürfel trickreich. Leicht zu sehen sind davon lediglich:

Wegen $48 = 3^3 + 3 \cdot 7$ ist die Zerlegung in 48 Teilwürfel möglich.
Wegen $50 = 1 + 7 \cdot 7$ ist die Zerlegung in 50 Teilwürfel möglich.

In dem Buch **Hemme H. Die Quadrate des Teufels – 112 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht GmbH & Co. KG** (Göttingen 2005) sind 7 Basiszerlegungen eines Würfels gezeichnet, mit denen wir die Zerlegungen um jeweils 7 weitere Teilwürfel fortsetzen können. Für 26 Anzahlen zwischen 9 und 47 sind keine solche Zerlegungen möglich.

Rückblick auf den 4. Tag der Mathematik[7]

Am 2. April 2022 fand der 4. TdM der Technischen Universität Chemnitz statt – erstmals nach 2019 wieder in Präsenz. Insgesamt 115 Schülerinnen und Schüler reisten an und nahmen auf 32 Teams verteilt am Wettbewerb teil, der den Untertitel „Mit Spaß muss man rechnen“ verdient hat. Für 30 begleitende Lehrerinnen und Lehrer sowie weitere Mathe-Interessierte wurde ein umfangreiches Rahmenprogramm mit Ausstellung und interessanten Vorträgen geboten. Das Interesse bestätigte einmal mehr, wie sehr sich alle auf eine solche Präsenz-Veranstaltung gefreut haben.

Der knapp dreistündige Wettbewerb führte die Teams an fünf Stationen auf den Campus an der Reichenhainer Straße. „An den einzelnen Stationen der Rallye herrschte reger Betrieb, innerhalb der Teams wurde eifrig über Lösungsansätze für die Stationsaufgaben diskutiert“, berichtet HENRIK SCHUMACHER vom Organisationsteam der Fakultät für Mathematik.

Zwischenzeitlich fand eine Reihe von Fortbildungsmaßnahmen für Lehrerinnen und Lehrer, Referendarinnen und Referendare sowie mathematisch Interessierte statt. Einen faszinierenden Ausflug in die geheimnisvolle Welt des niederländischen Grafikers M. C. ESCHER[8] vermittelte HORST MARTINI, emeritierter Professor für Geometrie der TU Chemnitz. Anhand zahlreicher Bildbeispiele erläuterte er die tiefliegenden geometrischen Strukturen, die in ESCHERS Bilder erkennbar sind und in unmöglichen Lattenkisten, endlosen Treppengängen, Metamorphosen und kunstvollen Parkettierungen zum ästhetisch ansprechenden Ausdruck kommen. Um das nicht ganz einfache, aber dennoch für die Analysis grundlegende Konzept der Konvergenz von Zahlenfolgen ging es danach in PETER STOLLMANNS Vortrag “Grenzwerte — konvergiert sie oder konvergiert sie nicht?”. Der Professor für Analysis an der Fakultät für Mathematik, erklärte anhand dreier Zahlenfolgen, seinen

[7] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/11189 (Stand 09.04.2022)
[8] Maurits Cornelis Escher (geb. 1898 in Leeuwarden, gest. 1972 in Hilversum)

“drei Grazien”, wie der Konvergenzbegriff eng mit der Struktur der natürlichen und reellen Zahlen verwoben ist.

Zum Mittag verteilten sich die Gäste des 4. TdM in der Mathematikausstellung im Foyer des Hörsaalgebäudes sowie auf die drei Labore „Tomographie“, „Fraktale“ und „Origami“. „Das Labor ‚Origami‘ ist mittlerweile ein echter Dauerbrenner. Auch dieses Mal konnten Interessierte dekorative geometrische Körper bauen und dabei ihre Bastelfähigkeiten und ihre räumliche Vorstellung unter Beweis stellen“, berichtet FRANK GÖRING. Aus dem sogenannten SONOBÈ-Modul, das aus einem quadratischen Blatt gefaltet und anschließend mit weiteren derartigen Modulen zusammengesteckt wird, seien meist in Teamarbeit zahlreiche bunte Würfel und Sternikosaeder entstanden. Dabei tat sich immer wieder die spannende Frage auf: Wie viele unterschiedliche Farben werden benötigt, damit sich keine zwei gleichfarbigen Flächen an einer Kante berühren?

Um “Fraktale”, also Mengen mit hochgradig irregulärer Struktur, die aber dennoch in der Natur (z.B. Farnblätter, Küstenlinien, …) und in der Technik (z.B. Industrieschwämme, Polymermoleküle, …) immer wieder anzutreffen sind, ging es am Nachmittag im Hauptvortrag von Prof. Dr. UTA FREIBERG, Inhaberin der Professur Stochastik an der TU Chemnitz. Anhand bekannter Konstruktionen wie SIERPINSKI[9]-Dreieck und MENGER[10]-Schwamm erklärte sie nach zahlreichen Beispielen schließlich die fraktale Dimensionsformel und stellte fest: „Heute habt Ihr Objekte kennengelernt, deren Dimension nicht ganzzahlig ist — das ist ein guter Tag für Euch.“

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungsversuche zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit. „Erstaunlicherweise wurde die besonders schwere Aufgabe, die sich mit dem MENGER-Schwamm befasste, vom Team ‚Sahnehäubchen‘ aus der Klassenstufe 10 bis 12, aber auch vom Team ‚Die Irrationalen‘ der Klassestufe 8 bis 9 komplett richtig gelöst“, so Schumacher. Bei der abschließenden Siegerehrung konnten sich aus den beiden Klassenstufen jeweils fünf Teams ihre Preise abholen. Erfolgreich waren hier Teams vom Gymnasium Olbernhau, vom Landkreis-Gymnasium St. Annen Annaberg-Buchholz, vom DPFA-Regenbogen-Gymnasium Augustusburg, vom Albert-Schweitzer-Gymnasium Limbach-Oberfrohna, vom Johann-Wolfgang-von-Goethe-Gymnasium Chemnitz, vom Johannes-Kepler-Gymnasium Chemnitz und vom Sächsischen Landesgymnasium Sankt Afra in Meißen.

[9] Waclaw Franciszek Sierpinski (geb. 1882 in Warschau, gest. 1969 in Warschau)
[10] Karl Menger (geb. 1902 in Wien, gest. 1985 in Chicago)

Gleichungssysteme mit Primzahlen

Wie bereits in der Lösungsdiskussion zu Aufgabe **KZM 4-3**[11] im Heft 02/22 nutzen Lösungsansätze für Gleichungssysteme mit Primzahlen im Allgemeinen nicht die bekannten Lösungsverfahren. Dies ist schon deshalb nicht vollständig möglich, weil mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen. Vielmehr kommt es darauf an, in der Umformung zur Faktorisierung zu gelangen, um die Primzahleigenschaften auszunutzen. Oft ist es hilfreich, Spezialfälle mit Primzahlen 2 und 3 zu untersuchen.

Aufgabe. Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems

$$p_1 + p_2 = p_3^m$$
$$p_1 - p_2 = p_3^n$$

wobei p_1, p_2, p_3 Primzahlen und m und n natürliche Zahlen sind. Welche Werte können m und n annehmen?

Lösungshinweise: Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$2 \cdot p_1 = p_3^n \cdot (p_3^{m-n} + 1)$$

Daraus ergeben sich aus der Faktorenzerlegung der linken Seite drei Möglichkeiten:

(1) $p_1 = p_3^n$, doch daraus folgt $p_2 = 0$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft-
(2) $p_3^n = 1$, wegen $p_3 > 1$ folgt $n = 0$ und daraus $p_1 - p_2 = 1$. Diese Gleichung ist für Primzahlen nur durch $p_1 = 3$ und $p_2 = 2$ zu erfüllen. Aus der ersten Gleichung erhalten wir mit $m = 0$ und $p_3 = 5$ eine Lösung des Gleichungssystems.
(3) $p_3^n = 2$, also $p_3 = 2$ und $n = 1$. Daraus folgt $p_1 = 2^{m-1} + 1$ und mit der zweiten Gleichung finden wir $p_2 = 2^{m-1} - 1$. Damit sind $p_2, 2^{m-1}, p_1$ drei aufeinanderfolgende Zahlen, von denen deshalb eine der Zahlen durch 3 teilbar ist. Da 3 kein Teiler von 2^{m-1} ist, muss $p_1 = 3$ oder $p_2 = 3$ gelten. Der Fall $p_1 = 3$ entfällt, weil dann $p_2 = 1$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft folgen würde. Mit $p_2 = 3$ erhalten wir mit $m = 3$ und $p_1 = 5$ eine weitere Lösung.

Es gibt also zwei Lösungen, die durch die Proben bestätigt werden:

[11] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

$3+2=5^1$ $\qquad$ $5+3=2^3$
$3-2=5^0$ $\qquad$ $5-3=2^1$

Weitere Lösung kann es nicht geben, wie aus der Herleitung erkennbar ist. ❑

Aufgabe – MO560946. Bestimmen Sie alle Tripel $(p;q;r)$ von Primzahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$p+q=r+1$$
$$p\cdot r=q^2+6$$

Lösungshinweise: Wir setzen aus der ersten Gleichung $r=p+q-1$ in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$p\cdot(p+q-1)=q^2+6$$
also $\quad(p+2)\cdot(p-3)=q\cdot(q-p)$ $\qquad$ (*)

Wir suchen nun Lösungen in Abhängigkeit von p:

(1) $p=2$, wegen $p-3<0$ wird die linke Seite der Gleichung (*) negativ, ergibt also keine Lösung.
(2) $p=3$, wegen $p-3=0$ folgt aus Gleichung (*) $q=p$ und damit $r=5$.
(3) $p\geq 5$, weil die linke Seite positiv ist, muss $q>p$ und somit $q\geq p+2$ gelten. Da zudem q einen Faktor der linken Seite der Gleichung (*) teilt, gilt auch $q\leq p+2$. Wir erhalten $q=p+2$. Setzen wir diesen Zusammenhang in die Gleichung (*) ein, finden wir $p-3=2$ und somit $p=5$, also $q=7$ und $r=11$.

Wir finden somit zwei Lösungen (3;3;5) und (5;7;11), was wir durch die Proben bestätigen:

$3+3=6=5+1$ $\qquad$ $5+7=12=11+1$
$3\cdot 5=15=3^2+6$ $\qquad$ $5\cdot 11=55=7^2+6$ ❑

Aufgabe. Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen. Dabei seien n_1 und n_2 natürlichen Zahlen und p_i $(i=1;2;\ldots;6)$ Primzahlen.

$(1)\ n_1=p_1^2\cdot p_2\cdot p_3$ $\qquad$ $(2)\ n_2=n_1+1=p_4^2\cdot p_5\cdot p_6$
$(3)\ p_2=p_3-p_1^6$ $\qquad$ $(4)\ p_3=p_1\cdot p_4^3+p_6$
$(5)\ p_5=p_2+p_1\cdot p_4$ $\qquad$ $(6)\ p_6=p_1^2+p_2+p_1\cdot p_4$

Lösungshinweise: Wegen $p_5 > 2$ und $p_6 > 2$ sind beide Primzahlen ungeradzahlig und so folgt aus (5) und (6) mit $p_6 = p_1^2 + p_5$, dass $p_1 = 2$ gelten muss. Damit finden wir aus (2) die Gleichung

$$p_2 = 2 \cdot p_4^3 + p_6 - 64$$

Setzen wir dies in die Gleichung (6) ein, können wir sowohl p_2 als auch p_6 eliminieren und erhalten

$$p_4 \cdot (p_4^2 + 1) = 30$$

Aufgrund der Primfaktorenzerlegung $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ finden wir durch Probieren die Zuordnung $p_4 = 3$. Zur besseren Übersicht fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen:

$(1')\ n_1 = 4 \cdot p_2 \cdot p_3$ $\quad$ $(2')\ n_2 = n_1 + 1 = 9 \cdot p_5 \cdot p_6$
$(3')\ p_2 = p_3 - 64$ $\quad$ $(4')\ p_3 = 54 + p_6$
$(5')\ p_5 = p_2 + 6$ $\quad$ $(6')\ p_6 = 10 + p_2$

Ausgehend von (1‘) und (2‘) finden wir nun folgende Gleichung:

$$4 \cdot p_2 \cdot (p_2 + 64) + 1 = 9 \cdot (p_2 + 6) \cdot (p_2 + 10)$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$5 \cdot p_2^2 - 112 \cdot p_2 + 539 = 0$$

Mit der einzigen ganzzahligen Lösung $p_2 = 7$. Damit erhalten wir auch die Werte der anderen Primzahlen: aus (3‘) $p_3 = p_2 + 64 = 71$, aus (5‘) $p_5 = p_2 + 6 = 13$ und aus (6‘) $p_6 = p_2 + 10 = 17$, wobei die Variablen $n_1 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71 = 1988$ und $n_2 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 1989$ einen Gruß zum damaligen Jahreswechsel enthalten. ❑

Aufgabe. Es seien a und b ganze Zahlen und p_i $(i = 1, \dots, 6)$ Primzahlen. Man ermittle alle derartigen Zahlen, die das folgende Gleichungssytem erfüllen:

$(1)\ a^6 - b^6 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ $\quad$ $(2)\ a^3 + b^3 = p_1 \cdot p_2$
$(3)\ a + b = p_1$ $\quad$ $(4)\ a \cdot b = p_4 \cdot p_5 \cdot p_6$

Lösungshinweise: Wegen $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3) \cdot (a^3 + b^3)$ finden wir aus (1) und (2) $a^3 - b^3 = p_3$. Wegen $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ erhalten wir aufgrund der Primzahleigenschaft von p_3 die Aussagen $p_3 = a^2 + ab + b^2$ und $a = b + 1$.

Wegen $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ erhalten wir zudem aus (2) und (3) $p_2 = a^2 - ab + b^2$, woraus $p_3 - p_2 = 2ab$ folgt.

Mit diesen Zusammenhängen finden wir folgende Umformung

$$p_1^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot (p_3 - p_2)$$

d.h. $2 \cdot p_1^2 = 3 \cdot p_3 - p_2$

Wäre p_1 durch 3 teilbar (also $p_1 = 3$), dann wäre $a = 2$ und $b = 1$ und das Produkt $a \cdot b$ könnte nicht das Produkt von drei Primzahlen sein. Also wissen wir: Es gilt $p_1 > 3$ und wegen $p_1 = a + b = 2 \cdot b + 1$ ist entweder b durch 3 teilbar oder b lässt bei Division durch 3 den Rest 2 und somit ist a durch 3 teilbar. In beiden Fällen ist das Produkt $a \cdot b$ durch 3 teilbar.

Nun untersuchen wir die Gleichung (4) und nehmen aufgrund der Symmetrie der drei Primzahlen auf der rechten Seite o.B.d.A.[12] die Ungleichung $p_4 \leq p_5 \leq p_6$ an. Weil $a \cdot b = b \cdot (b + 1)$ eine gerade Zahl ist, gilt $p_4 = 2$.

Weil das Produkt $a \cdot b$ durch 3 teilbar ist, gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) $p_5 = 3$. Es sind vier Primfaktorzerlegungen für $a \cdot b$ mit $a > b$ möglich:

(1a) $a = 2 \cdot p_5 = 6$ und $b = p_6$. Wegen $b = a - 1 = 5$ wäre dann p_3 mit $p_3 = a^2 + ab + b^2 = 36 + 30 + 25 = 91 = 7 \cdot 13$ keine Primzahl!
(1b) $a = p_5 = 3$ und $b = 2 \cdot p_6$. Wegen $b = a - 1 = 2$ ist dies jedoch nicht möglich, weil $b = 2 \cdot p_6 > 6$ gilt.
(1c) $a = 2 \cdot p_6$ und $b = p_5 = 3$. Daraus folgt $a = b + 1 = 4$.
(1d) $a = p_6$ und $b = 2 \cdot p_5 = 6$. Daraus folgt $a = b + 1 = 7$.

(2) $p_6 = 3$. Wegen der oben festgelegten Reihenfolge gibt es nur zwei Möglichkeiten:

(2a) $p_5 = 2$, d.h. $a \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Dafür ist mit $a = b + 1$ die Zerlegung $a = 4$ und $b = 3$ möglich und entspricht dem Fall (1c).
(2b) $p_5 = 3$, d.h. $a \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Dafür ist mit $a = b + 1$ keine Zerlegung möglich.

Wenn es Lösungen des Gleichungssystems gibt, so muss $a = 4$ und $b = 3$ oder $a = 7$ und $b = 6$ gelten. Für beide Zahlenpaare finden wir Tupel von sechs Primzahlen:

[12] Um den Hinweis „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ zu verwenden, sollte eine kurze Begründung angegeben werden.

(1) $a = 4; b = 3$ mit $p_4 = 2;\ p_5 = 2; p_6 = 3$:

$$p_1 = 4 + 3 = 7; p_2 = \frac{4^3+3^3}{7} = 13; p_3 = \frac{4^6-3^6}{7 \cdot 13} = 37$$

(2) $a = 7; b = 6$ mit $p_4 = 2;\ p_5 = 3; p_6 = 7$:

$$p_1 = 7 + 6 = 13; p_2 = \frac{7^3+6^3}{13} = 43; p_3 = \frac{7^6-6^6}{13 \cdot 43} = 127$$

Aufgrund der Symmetrie in Gleichung (4) sind die Primzahlen p_4 bis p_6 beliebig vertauschbar.

Hinweis: Die Berechnungen für p_2 und p_3 sind über $a^2 \pm ab + b^2$ auch ohne Rechentechnik möglich. ❑

Aufgabe. Gegeben seien alle Primzahltupel $(p; q; r)$, für die die beiden Zahlen $s = pq - r$ und $t = pq + r$ ebenfalls Primzahlen sind. Man zeige, dass das Fünftupel $(p; q; r; s; t)$ die beiden Zahlen 2 und 3 enthält.

Lösungshinweise: Wenn jede der Primzahlen p, q und r ungeradzahlig wären, wären sowohl s als auch t geradzahlig. Es würde also wegen der Primzahleigenschaft $s = t = 2$ gelten – im Widerspruch zu $s < t$. Mindestens eine der Zahlen p, q und r ist also gleich 2.

Wenn keine der Primzahlen p, q und r durch 3 teilbar wäre, lässt das Produkt $p \cdot q$ bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Da auch r bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2 lässt, ist entweder $s = pq - r$ oder $t = pq + r$ durch 3 teilbar. Mindestens eine der Zahlen s und t ist also gleich 3. ❑

Hinweis: Aus der Aufgabenstellung wird nicht ersichtlich, ob es überhaupt solche Fünftupel gibt. Auch wenn ein entsprechender Nachweis nicht gefordert ist, sollten wir dies in der Nachbereitung prüfen. Schnell finden wir ein Beispiel wie im Beweis mit $2 \in \{p; q; r\}$ und $3 \in \{s; t\}$: $(2;\ 5;\ 7;\ 3;\ 17)$. Während aber die Zuordnung für die Zahl 2 zu den ersten drei Primzahlen notwendig ist, ist dies für die Zuordnung der Zahl 3 zu den letzten beiden Primzahlen nicht erforderlich, wie das Beispiel $(3;\ 3;\ 2;\ 7;\ 11)$ zeigt.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Angeregt durch die Aufgaben MO610935/MO611035 schlagen wir zum Thema Wahrscheinlichkeit nach[13]. Wir weisen jedoch ausdrücklich darauf hin, dass sich Begrifflichkeiten bis heute geändert haben.

[13] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

mit Übungs-Aufgaben

für höhere Lehranstalten

von Professor Dr. Th. Spieker

Vierte verbesserte Auflage
Verlag von August Stein, Potsdam, 1895

Anhang

Die mathematische Wahrscheinlichkeit

§ 273.

Diejenigen Fälle eines Ereignisses, welche unter den gleichmöglichen derselben der Erwartungen entsprechen, nennt man Treffer, diejenigen, welche der Erwartung nicht entsprechen, Nieten. Die Summe aller Treffer und Nieten ist daher gleich der Anzahl aller gleichmöglichen Fälle.

Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit, (Probabilität), eines Treffers versteht man das Verhältnis der Anzahl n der günstigen zur Anzahl N aller gleichmöglichen Fälle dieses Ereignisses. Die mathematische Wahrscheinlichkeit w dieses Falles wird daher durch den Bruch

$$w = \frac{n}{N}$$

ausgedrückt.

Da im allgemeinen n < N, so ist w ein echter Bruch. Trifft aber das Ereignis fortwährend zu, sind also alle möglichen Fälle günstige, so ist n = N und w = 1. Ist kein Fall ein günstiger, so ist w = 0.

Ist $w = \frac{n}{N}$ die Wahrscheinlichkeit eines Treffers, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Niete $= \frac{N-n}{N} = 1 - w$. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten nennt man entgegengesetzte. Ist die Anzahl der Treffer größer als die der Nieten, ist also $w > \frac{1}{2}$, so heißt das Ereignis wahrscheinlich, ist dagegen $w < \frac{1}{2}$, so heißt das Ereignis unwahrscheinlich, und ist $w = \frac{1}{2}$, so ist es weder wahrscheinlich noch unwahrscheinlich.

Beispiele. 1. Aus einer Urne, in welcher 6 schwarze und 5 weiße Kugeln liegen, wird blindlings eine gezogen, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu treffen?
2. Aus derselben Urne, wie in 1, werden zugleich 2 Kugeln gezogen, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei weiße getroffen werden?
...

§ 274.

1. Zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit

a. Hat ein Ereignis n günſtige Fälle einer Art, n′ günſtige einer anderen Art, die ſich gegenſeitig ausſchließen, und iſt der Treffer ſo beſtimmt, daß entweder ein Fall der erſten, oder ein Fall der anderen Art eintritt, ſind die Treffer coordiniert, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſes zuſammengeſetzten Treffers gleich der Summe der einfachen Treffer:

$$W = w + w'$$

Beiſpiel. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, auf einem Spiele Whiſtkarten mit einem Zuge entweder ein Bild oder eine Zehn zu ziehen? Aufl. $w = \frac{16}{52} + \frac{4}{52} = \frac{5}{13}$.

b. Hat ein Ereignis n günſtige Fälle einer Art und n′ günſtige Fälle einer anderen Art, und iſt der Treffer ſo beſtimmt, daß ein Fall der erſten und ein Fall der anderen Art zugleich eintritt, ſind die Treffer ſubordiniert, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit gleich dem Produkte der Wahrſcheinlichkeit der einfachen Treffer

$$W = w \cdot w'$$

Beiſpiel. Die Wahrſcheinlichkeit, auf einem Spiele Whiſtkarten[14] in zwei Zügen hintereinander erſt ein Bild und dann eine Zehn zu ziehen, iſt $= \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{16}{663}$, erſt eine Zehn und dann ein Bild, iſt $w = \frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} = \frac{16}{663}$; daß die zwei gezogenen Karten ein Bild und eine Zehn, iſt $w = 2 \cdot \frac{4 \cdot 16}{52 \cdot 51} = \frac{32}{663}$.

2. Relative Wahrſcheinlichkeit. Wenn die abſoluten Wahrſcheinlichkeiten w, w′, w″ mehrere Treffer gegeben ſind, kann man nach der Wahrſcheinlichkeit fragen, daß unter dieſen Treffern einer derſelben eintrifft. Dieſe relative Wahrſcheinlichkeit iſt der Quotient der abſoluten Wahrſcheinlichkeit w dieſes Treffers und der Summe aller:

$$W = \frac{w}{w + w' + w''}$$

Beiſpiel. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit 2 Würfen eher einen Paſch, als 6 Augen zu werfen? Aufl. $w = \frac{1}{6} : \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}$.

[NB: Es folgen 22 Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit, darunter…]

10. Welche Wahrſcheinlichkeit iſt größer: einen Paſch zu 2, oder 3 unmittelbar aufeinander folgende Zahlen zu werfen und wie verhalten ſich dieſe Wahrſcheinlichkeiten?
15. Welche Wahrſcheinlichkeit hat man mit 2 Würfeln, entweder einen Paſch, oder 1 und 2 zu werfen?

[14] Rommé-Karten

Inhalt

Vorwort 2
Thema 12.1 – Zerlegung einer Dreiecksfläche 3
Thema 12.1 – Zerlegung einer Quadratfläche 7
Rückblick auf den 4. Tag der Mathematik 11
Gleichungssysteme mit Primzahlen 13
In alten Mathe-Büchern geblättert 17

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[15]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
April 2022	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610932 MO611031
März 2022	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
Jan. 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

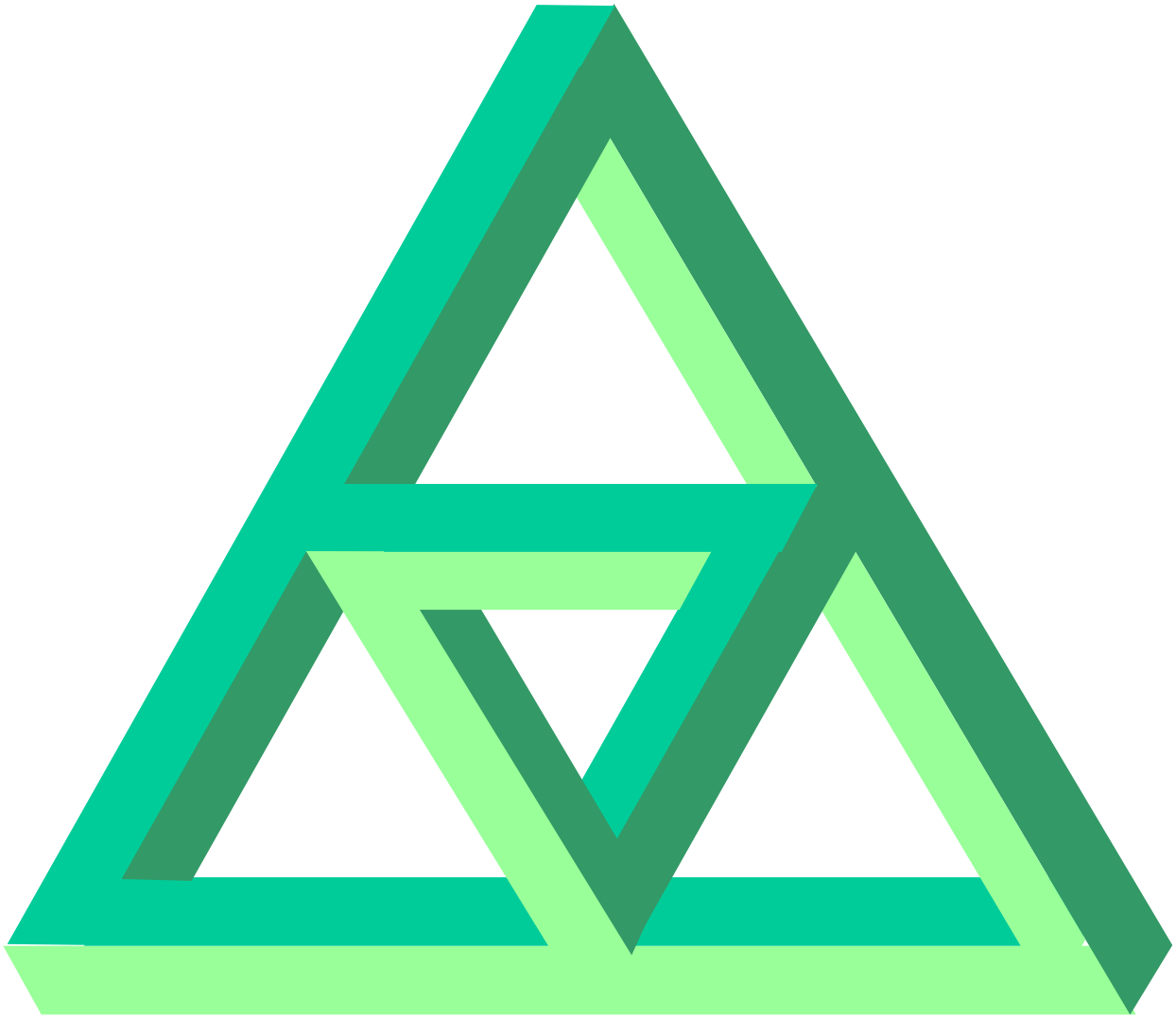
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[15] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Mai 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zu den Aufgaben **MO610933/MO611032** im Thema 15 Stammbrüche. Die damit verbundenen Zerlegungen eines Stammbruchs in Summen von Stammbrüchen erfordern Fertigkeiten im Umgang mit Gleichungen in natürlichen Zahlen.

Ein Auszug aus einem Buch zur Geschichte der Mathematik soll unterhaltsam die Bedeutung der Stammbrüche in der altägyptischen Mathematik vor über 3500 Jahren zeigen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 15 – Stammbrüche

In der diesjährigen Landesrunde der Mathematik-Olympiade wurden Brüche mit Zähler 1 und natürlichen Zahlen als Nenner betrachtet, die sogenannten ***Stammbrüche***.

Aufgabe 15.1 – MO610933

a) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ positive ganze Zahlen $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ existieren, für die die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{31}{61} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen a derart, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ positive ganze Zahlen $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ existieren mit

$$\frac{a}{61} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

Lösungshinweise – Teil a) Für $n = 2$ ergibt die Umformung

$$\frac{31}{61} = \frac{62}{2 \cdot 61} = \frac{61}{2 \cdot 61} + \frac{1}{2 \cdot 61} = \frac{1}{2} + \frac{1}{122}$$

eine Lösung $k_1 = 2, k_2 = 122$. Anstelle dieses trickreichen Ansatzes lassen sich die Nenner direkt ermitteln, indem wir die Ausgangsgleichung umformen zu

$$31 \cdot k_1 \cdot k_2 = 61 \cdot (k_1 + k_2) \Rightarrow k_1 = \frac{61 \cdot k_2}{31 \cdot k_2 - 61}$$

Wir spalten nun vom Bruch auf der rechten Seite eine ganze Zahl ab:

$$k_1 = \frac{62 \cdot k_2 - 122}{31 \cdot k_2 - 61} - \frac{k_2 - 122}{31 \cdot k_2 - 61} = 2 - \frac{k_2 - 122}{31 \cdot k_2 - 61}.$$

Da sowohl k_1 als auch k_2 ganze Zahlen größer als 1 sind, folgt unmittelbar aus dem verbleibenden Bruch $k_2 = 122$ und somit $k_1 = 2$ (bzw. $k_2 = 2$ und $k_1 = 122$).

Für $n > 2$ verwenden wir die Formel $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k \cdot (k+1)}$, deren Richtigkeit wir durch Zusammenfassen auf der rechten Seite leicht bestätigen können. Damit finden wir aus einer Darstellung mit n Summanden mit den Nennern $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1} < k_n$ eine geeignete Darstellung mit $n + 1$ Summanden und Nennern $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1} < k_{n+1} < k_n \cdot (k_n + 1)$.

Teil b) Es genügt, alle positiven ganzen Zahlen a zu bestimmen, für die ganze Zahlen k_1, k_2 mit $0 < k_1 < k_2$ existieren mit

$$a \cdot k_1 \cdot k_2 = 61 \cdot (k_1 + k_2).$$

Wie in Teil a) beschrieben, ergeben sich dann auch Lösungen für alle $n \geq 2$. Für $a \neq 0$ ergibt sich daraus die äquivalente Gleichung

$$a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = 61 \cdot (a \cdot k_1 + a \cdot k_2)$$

und

$$(a \cdot k_1 - 61) \cdot (a \cdot k_2 - 61) = 61^2.$$

Für ganze Zahlen $a > 0$ und $k_2 > k_1 > 0$ sind die beiden Faktoren $a \cdot k_1 - 61$ und $a \cdot k_2 - 61$ ganzzahlig mit $(a \cdot k_2 - 61) > (a \cdot k_1 - 61) > -61$. Vergleichen wir dies mit den ganzzahligen Faktorisierungen der Zahl 61^2, also mit

$$61^2 = 61^2 \cdot 1 = 61 \cdot 61 = (-1) \cdot (-61^2) = (-61) \cdot (-61),$$

so erhalten wir $a \cdot k_2 - 61 = 61^2$ und $a \cdot k_1 - 61 = 1$. Wegen $a \cdot k_1 = 62$ können wir für (a, k_1) nur die Lösungspaare $(1, 62)$, $(2,\ 31)$, $(31,\ 2)$ und $(62,\ 1)$ finden. Aus $ak_2 = 61 \cdot 62$ erhalten wir für (a, k_1, k_2) durch Einsetzen der bereits gefundenen Werte für a die Lösungstripel $(1, 62, 61 \cdot 62)$, $(2, 31, 61 \cdot 31)$, $(31, 2, 61 \cdot 2)$ und $(62, 1, 61)$.

Somit sind genau die Zahlen $a \in \{1,2,31,62\}$ Lösungen des Aufgabenteils b). ❑

Die Darstellung als Summe vieler Stammbrüche wurde bereits in einer früheren Aufgabe der MO untersucht.

Aufgabe 15.2 – MO330931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche[3] gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $p > 2$ kann der Stammbruch $\frac{1}{p}$ als Summe zweier Stammbrüche mittels $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p \cdot (p+1)}$ dargestellt werden, denn es gilt

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p \cdot (p+1)} = \frac{p}{p \cdot (p+1)} + \frac{1}{p \cdot (p+1)} = \frac{p+1}{p \cdot (p+1)} = \frac{1}{p}$$

❑

[3] Hinweis unter dem originalen Aufgabentext: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Diese Zerlegung eines Stammbruches in die Summe zweier Stammbrüche ist ein Spezialfall eines allgemeinen Verfahrens zur Auffindung solcher Summen. Es beruht auf der „***gierigen Strategie***“ (greedy strategy), mit der immer zuerst der größte Teil eines gegebenen Problems bearbeitet wird. Im Fall der Zerlegung in Stammbrüche bedeutet es, zunächst den größtmöglichen Stammbruch zu finden, der vom Ausgangsbruch subtrahiert werden kann, um dann mit dem verbleibenden (Rest-) Bruch ebenso zu verfahren.

Es sei $\frac{a_0}{b_0}$ ein Bruch mit positiven ganzen Zahlen a_0 und b_0 mit dem größten gemeinsamen Teiler $ggT(a_0; b_0) = 1$ (d.h. der Bruch $\frac{a_0}{b_0}$ ist nicht kürzbar) und der Relation $b_0 > a_0 \geq 1$.

1. Wir suchen den größten Stammbruch $\frac{1}{n_0}$ mit $n_0 \cdot a_0 > b_0 \geq (n_0 - 1) \cdot a_0$. Gilt das Gleichheitszeichen, so ist b_0 ein ganzzahliges Vielfaches von a_0, was wegen $ggT(a_0; b_0) = 1$ nur für $a_0 = 1$ möglich ist.

2. Wir subtrahieren $\frac{1}{n_0}$ von $\frac{a_0}{b_0}$, die Differenz ergibt einen neuen Bruch $\frac{a_1}{b_1}$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_0}{b_0} - \frac{1}{n_0} = \frac{a_0 \cdot n_0 - b_0}{b_0 \cdot n_0}$$

3. Wir verfahren mit dem neuen Bruch $\frac{a_i}{b_i}$ wie mit dem Bruch $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$, beginnen wieder mit Schritte 1 und erhalten einen Bruch $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ $(i = 1,2, \dots)$.

   Aufgrund der Auswahl von n_{i-1} gilt stets $a_{i-1} \geq (a_{i-1} \cdot n_{i-1}) - b_{i-1} = a_i$, d.h. die Zähler der erzeugten Brüche nehmen entweder kontinuierlich ab oder es ist ein Stammbruch erreicht. Das Verfahren bricht also nach einer endlichen Anzahl von Schritten ab.

4. Wir können das Verfahren beenden, wenn sich in Schritt 2 ein Stammbruch ergibt. Wir können aber auch das Verfahren fortsetzen, bis wir eine bestimmte Anzahl von Stammbrüchen erhalten. Die Darstellung der rationalen Zahl ergibt sich dann als Summe der ermittelten Stammbrüche:

$$\frac{a_0}{b_0} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{n_i}$$

Beispiel 1: Es sei $a_0 = 31, b_0 = 61$. Wir wählen $n_0 = 2$. Damit ist die Abschätzung $2 \cdot 31 \geq 61 > (2 - 1) \cdot 31$ erfüllt, wir können den größtmöglichen Stammbruch subtrahieren $\frac{31}{61} - \frac{1}{2} = \frac{62-61}{122} = \frac{1}{122}$ und finden die Lösung der Aufgabe 1.

Beispiel 2: Es sei $a_0 = 1$ und $b_0 = p$ für eine natürliche Zahl $p > 1$. Wir wählen $n_0 = p + 1$. Wegen $(p+1) \cdot 1 > p \geq (p+1-1) \cdot 1$ ist die Bedingung erfüllt und wir erhalten nach Subtraktion $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p \cdot (p+1)} = \frac{1}{p \cdot (p+1)}$.

Auch die Darstellung in Summen mit vielen Summanden wurde bereits als Aufgabe in der MO formuliert.

Aufgabe 15.3 – MO331031. Beweisen Sie, dass sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen lässt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $p > 2$ kann der Stammbruch $\frac{1}{p}$ als Summe zweier Stammbrüche $\frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ mittels $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p \cdot (p+1)}$ dargestellt werden. Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehung lässt sich der Stammbruch $\frac{1}{1994}$ wie gefordert darstellen:

$$\frac{1}{1994} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_2} = \cdots = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_{1993}} + \frac{1}{r_{1993}}$$

Dabei wird jeweils $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{q_{i+1}} + \frac{1}{r_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, 1992)$ eingesetzt und alle Nenner der Stammbrüche sind wegen $q_1 < q_2 < \cdots < q_{1993} < r_{1993}$ paarweise verschieden. ❑

Aufgabe 15.4 – MO411034. Für welche Paare (m, n) natürlicher Zahlen gilt:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{31}$$

Lösungshinweise: Es sei (m, n) eine Lösung der Aufgabe und es gelte o.B.d.A. $m \leq n$. Wir erkennen die Ungleichung $m \leq 31 \leq n$. Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $31 \cdot m \cdot$n erhalten wir $2 \cdot m \cdot n = 31 \cdot (m + n)$. Damit muss mindestens eine der beiden Zahlen durch 31 teilbar sein.

(i) Wir nehmen an, m sei durch 31 teilbar. Dann gilt $m = 31$ und folglich auch $n = 31$.

(ii) Wir nehmen an, m sei nicht durch 31 teilbar. Dann gibt es einen Faktor k mit $n = 31 \cdot k$ und $2 \cdot m \cdot k = m + 31 \cdot k$, also

$$(2k - 1) \cdot m = 31 \cdot k$$

Nun sind aber sowohl $2k-1$ und k als auch m und 31 teilerfremd. Somit finden wir durch Faktorenvergleich $2k-1=31$ und $m=k$. Wir erhalten also $m=k=16$ und folglich $n=31\cdot k=496$.

Mit der Probe bestätigen wir, dass die Paare $(31,31)$, $(16,496)$ und $(496,16)$ Lösungen der Aufgabe sind. ❑

Aufgabe 15.5 – MO300935. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x,y,z) natürlicher Zahlen, für die folgende Gleichung gilt

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$

Lösungshinweise: O.B.d.A. nehmen wir $x\leq y\leq z$ an. Außerdem gilt $x>1$. Damit folgern wir

$$\frac{3}{x}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}\Rightarrow 2\leq x\leq 3$$

(i) Es sei $x=3$. In diesem Fall erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{12-5}{15}=\frac{7}{15}$$

Aus $\frac{2}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}$ folgt die Abschätzung $3\leq y\leq 4$ und wir können probieren:

- Für $y=3$ finden wir mit $z=\frac{1}{\frac{7}{15}-\frac{1}{3}}=\frac{15}{2}$ keine ganze Zahl als Lösung.
- Auch für $y=4$ gibt es keine ganzzahlige Lösung in z, denn $z=\frac{1}{\frac{7}{15}-\frac{1}{4}}=\frac{60}{13}$.

(ii) Es sei nun $x=2$. In diesem Fall erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{8-5}{10}=\frac{3}{10}$$

Aus $\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$ und $\frac{2}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$ folgt für y die Abschätzung $4\leq y\leq 6$ und wir können probieren:

- Für $y=4$ finden wir mit $z=\frac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{4}}=\frac{20}{1}$ das Lösungstripel (2, 4, 20).
- Auch für $y=5$ gibt es eine Lösung, denn $z=\frac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}}=\frac{20}{1}$, also (2, 5, 10).
- Setzen wir $y=6$, so ist z wegen $z=\frac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{6}}=\frac{30}{4}$ nicht ganzzahlig.

Insgesamt gibt es nur die Lösungen (2, 4, 20) und (2, 5, 10) sowie alle Tripel, die durch Vertauschen der Werte aus diesen hervorgehen. ❑

Wenden wir den gierigen Algorithmus für $a_0 = 4$ und $b_0 = 5$ an, so können wir $n_0 = 2$ wählen, da $2 \cdot 4 > 5 \geq (2-1) \cdot 4$ erfüllt ist. Wir subtrahieren $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ und setzen den Algorithmus fort. Wir wählen $n_1 = 4$ mit $4 \cdot 3 > 10 \geq (4-1) \cdot 3$. Nach Subtraktion $\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ finden wir mit (2, 4, 20) eine Lösung der Gleichung.

Um auch die zweite Lösung zu finden, dürfen wir nicht so „gierig“ sein, sondern müssen probieren, ob es auch andere Lösungen gibt. Wählen wir $n_1 = 5$, führt dies zum Ergebnis, denn es gilt $\frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$. Doch nun müssten wir systematisch weiter probieren (einschließlich für die Wahl für n_0), ob damit alle Lösungen gefunden sind, bzw. nachweisen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann. Dies führt uns schließlich zu einer Fallunterscheidung wie oben bereits durchgeführt.

Wird in einem Schritt des gierigen Algorithmus der Wert n_i nicht größtmöglich gewählt, so kann dies dennoch zu einer Zerlegung in eine Summe von Stammbrüchen führen. Subtrahieren wir beispielsweise für $a_0 = 4$ und $b_0 = 5$ mit $n_0 = 3$, berechnen also $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$, so gibt es offenbar keine Lösung mit drei Stammbrüchen.

Setzen wir aber das Verfahren wie vorgesehen korrekt fort, erhalten wir für $a_1 = 7$ und $b_1 = 15$ mit der Wahl $n_1 = 3$ (wegen $3 \cdot 7 > 15 \geq (3-1) \cdot 7$) als nächsten Bruch $\frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$. Fortführend finden wir nun für $a_2 = 2$ und $b_2 = 15$ mit der Wahl $n_2 = 8$ (wegen $8 \cdot 2 > 15 \geq (8-1) \cdot 2$) als nächsten Bruch $\frac{2}{15} - \frac{1}{8} = \frac{16-15}{120} = \frac{1}{120}$. Damit haben wir eine Zerlegung in vier Stammbrüche gefunden:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

Da wir die Gleichung $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ verwenden können, lässt sich auch eine Zerlegung mit fünf verschiedenen Stammbrüchen angeben.

Aufgabe 15.6. Finden Sie für jede der folgenden Gleichungen jeweils alle Lösungen in positiven ganzen Zahlen (m, n) mit voneinander verschiedenen Zahlen $m \neq n$.

a) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}$
b) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{8}$

Hinweis: Jeder Stammbruch $\frac{1}{n}$ lässt sich in trivialer Weise als Summe zweier Stammbrüche der Form $\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{n}$ darstellen. Diese Lösungen sind also durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen.

Lösungshinweise Aufgabe a) Wir formen die Gleichung um zu

$$7\cdot(m+n)=m\cdot n.$$

Mindestens einer der beiden Faktoren muss durch 7 teilbar sein. O.B.d.A. sei $m=7\cdot k$. Damit erhalten wir

$$7\cdot(7\cdot k+n)=7\cdot k\cdot n,$$

also $n=\frac{7k}{k-1}$. Entweder ist $k=2$ oder $k-1$ ist ein Teiler von 7, also $k=8$. Somit können nur (für $k=2$) $m=14$ und $n=14$ bzw. (für $k=8$) $m=56$ und $n=8$ Lösung der Aufgabe sein, wobei die erste Lösung mit $m=n=14$ nicht den Bedingungen entspricht. Dagegen können wir die zweite Lösung mit der Probe bestätigen: $\frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{8}=\frac{1+7}{56}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$.

Lösungshinweise Aufgabe b) Der Lösungsansatz wie in Aufgabenteil a) führt zur Gleichung

$$8\cdot(m+n)=m\cdot n.$$

Nun unterscheiden wir vier Fälle:

(i) 8 ist ein Teiler von m, also $m=8k$. Dann erhalten wir $n=\frac{8k}{k-1}$. Entweder ist $k=2$ oder $k-1$ ein Teiler von 8, also $k=3$, $k=5$ oder $k=9$. Wir finden:
($k=2$) $m=16$ und $n=16$- Dies entfällt jedoch als Lösung wegen $m=n$.
($k=3$) $m=24$ und $n=12$: $\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1+2}{24}=\frac{1}{8}$.
($k=5$) $m=40$ und $n=10$: $\frac{1}{40}+\frac{1}{10}=\frac{1+4}{40}=\frac{1}{8}$.
($k=9$) $m=72$ und $n=9$: $\frac{1}{72}+\frac{1}{9}=\frac{1+8}{72}=\frac{1}{8}$.

(ii) 4 ist ein Teiler von m, aber 8 ist kein Teiler von m, also $m=4k$ mit ungerader Zahl k. Dann ist aber n durch 2 teilbar, also $n=2k'$. Wir erhalten $k'=\frac{4k}{k-2}$. Nur für die ungerade Zahl $k=3$ ist k' ganzzahlig, denn für größere ungerade Zahlen k ist $k-2$ kein Teiler von 4 und teilerfremd zu k.
Für $k=3$ erhalten wir die Lösung $m=12$ und $n=24$.

(iii) 2 ist ein Teiler von m, aber 4 ist kein Teiler von m, also $m = 2k$ mit ungerader Zahl k. Dann ist aber n durch 4 teilbar, also $n = 4k'$. Wir erhalten $k' = \frac{2k}{k-4}$. Nur für die ungerade Zahl $k = 5$ ist k' ganzzahlig, denn für größere ungerade Zahlen k ist $k - 4$ kein Teiler von 2 und teilerfremd zu k.
Für $k = 5$ erhalten wir die Lösung $m = 10$ und $n = 40$.

(iv) m ist eine ungerade Zahl. Dann ist 8 ein Teiler von n und wir finden wie im Fall (i) entsprechende Lösungen

Insgesamt finden wir die Lösungen (24, 12), (12, 24), (40, 10), (10, 40), (72, 9) und (9, 72). ❑

Aufgabe 15.7. Für welche natürlichen Zahlen $q \geq 2$ lässt sich der Stammbruch $\frac{1}{q}$ als Summe zweier Stammbrüche mit verschiedenen Nennern $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ in eindeutiger Weise (bis auf Vertauschen der Summanden) darstellen?

Lösungshinweise: Es sei $q = p$ mit einer Primzahl p. Dann ist die Darstellung als Summe zweier Stammbrüche (bis auf Vertauschung der Summanden) eindeutig.

Für den Nachweis dieser Aussage verallgemeinern wir die oben gefundene Gleichung zu $p \cdot (m + n) = m \cdot n$. Mindestens einer der beiden Faktoren muss durch p teilbar sein, o.B.d.A. sei $m = p \cdot k$. Damit erhalten wir

$$p \cdot (p \cdot k + n) = p \cdot k \cdot n,$$

also $n = \frac{p \cdot k}{k-1}$. Entweder ist $k = 2$ oder $k - 1$ ist ein Teiler von p, also $k = p + 1$. Somit können nur (für $k = 2$) $m = 2 \cdot p$ und $n = 2 \cdot p$ bzw. (für $k = p + 1$) $m = p \cdot (p + 1)$ und $n = p + 1$ Lösung der Aufgabe sein, wobei die erste Lösung mit $m = n = 2 \cdot p$ nicht den Bedingungen entspricht.

Es sei nun q eine zusammengesetzte Zahl, zum Beispiel $q = a \cdot b$ mit natürlichen Zahlen a und b mit $1 < a \leq b < q$. Dann existieren mindestens zwei verschiedenen Darstellungen als Summe zweier Stammbrüche.

Für den Nachweis verwenden wir einerseits die bekannte Zerlegungsmöglichkeit

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q(q+1)}.$$

Andererseits gilt

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{ab} = \frac{b+1}{ab(b+1)} = \frac{b}{ab(b+1)} + \frac{1}{q(b+1)} = \frac{1}{q+a} + \frac{1}{q(b+1)}.$$

Wegen $a \neq 1$ und $b \neq q$ sind beide Darstellungen verschieden. ❑

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [4]

Im Heft April 2022 wurden im Thema 12.1 – Bedeckungen mit Bezug zu der Aufgabe KZM1-4[5] die geometrischen Gerüchte unter den Dreiecken beschrieben.

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form wie das große Polygon selbst haben.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen: Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“ Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

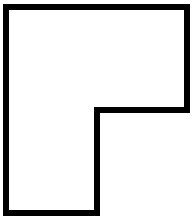


Abbildung 1a

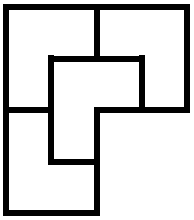


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil wir die Ausgangsfigur in 4 Stücke zerlegen müssen.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem zweiteiligen Gerücht haben wir ständig zu tun: Wenn wir ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten

[4] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990.
[5] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

zusammenfalten und dann aufschneiden, erhalten wir zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden. Bezeichnet *a* die Länge der langen Seite und *b* die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{b}, \qquad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst.

Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis 1 : $\sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht.

Von den dreiteiligen Gerüchten sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn man die Seitenlängen geeignet wählt (s. Heft April 2022, S. 7).

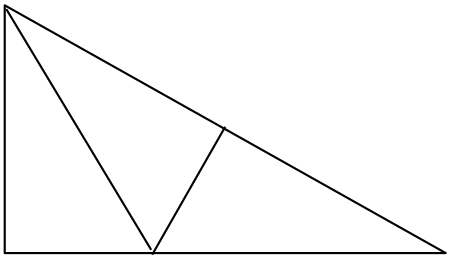
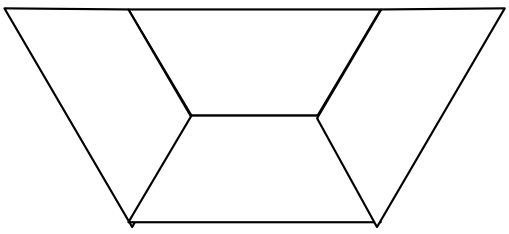
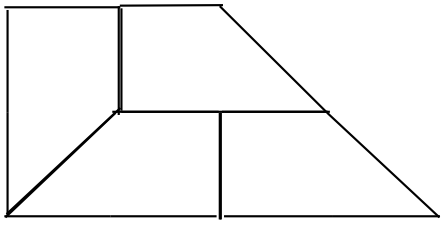


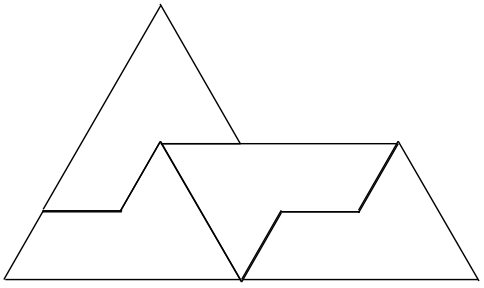
Abbildung 2

Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck und jedes Parallelogramm (sogar auf zwei verschiedene Weisen) gehören dazu. Aber auch andere Vierecke lassen sich beispielsweise entsprechend zerlegen:

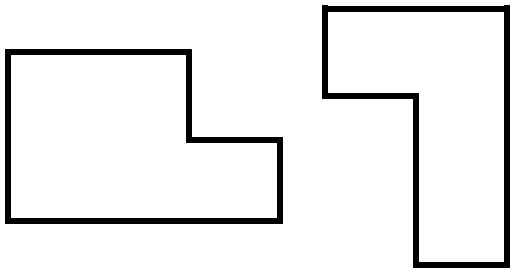




Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:

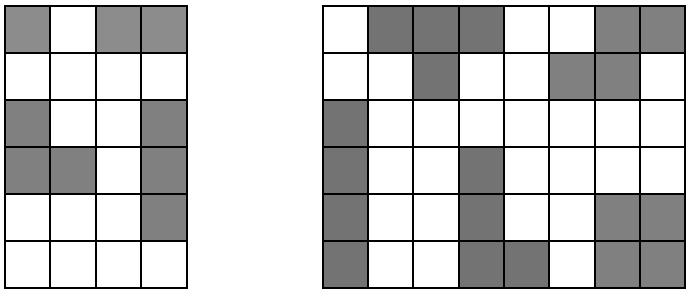


Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert:



Für jede natürliche Zahl *n* > 1 lässt sich ein Parallelogramm angeben, das sich als ein *n*-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Können wir dagegen bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es für jedes vorgegebene *n* ein *n*-teiliges Gerücht wird? Für *n* = 3 und *n* = 4 wurden oben die Lösungen besprochen. Auch *n* = 2 lässt sich einfach lösen. Damit sind auch die Fragestellungen für $n \geq 5$ zu beantworten.

Haben wir ein n-teiliges Gerücht, können wir daraus schnell ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder entsprechend zerlegen. Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn wir uns auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegen. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), können wir den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jede natürliche Zahl n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn wir beispielsweise fordern, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es 2 verschiedene Triominos und 5 verschiedene Tetrominos.



n-minos für n = 1, 2, 3, 4

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten können wir ein großes Quadrat zusammensetzen.

- Aus 4 Domino-Steinen können wir ein 2 x 4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.

- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht.

- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigen wir bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern.

- Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden.

Setzen wir fünf Quadrate zusammen, erhalten wir Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur 4 davon sind Gerüchte. So könnten wir die Reihe der n-minos fortsetzen. Da es aber bereits 35 verschiedene Formen von Hexominos gibt ($n = 6$), sollten wir diese Vielfalt wieder einschränken. So sind 11 dieser Hexominos Würfelnetze, d.h., diese könnten wir zu einem Würfel falten und zusammenkleben. Damit ergibt sich folgende interessante Frage: Wie viele der Würfelnetze sind geometrische Gerüchte?

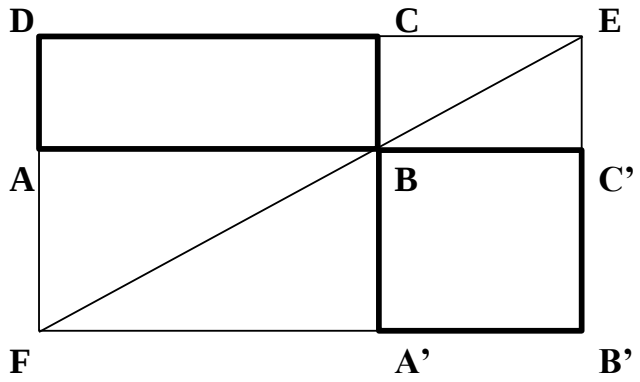
Geometrisches Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren [6]

In der **KZM-Aufgabe 6-5B**[7] wird das HERONsche Verfahren zur Approximation eines Wurzelwertes untersucht. Insbesondere ist zu beweisen, dass wir uns mit diesem Verfahren bei jedem Schritt dem Wurzelwert nähern. Die Vorgehensweise bei diesem Verfahren lässt sich geometrisch interpretieren: Gehen wir von einem beliebigen positiven Startwert x_0 aus, so hat das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und $\frac{a}{x_0}$ den Flächeninhalt a. Wir möchten dieses Rechteck nun iterativ „quadratischer“ machen, also schrittweise eine solche Seitenlänge x_n finden, für die schließlich $x \approx \sqrt{a}$ gilt.

Über den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusen-Abschnitten x_0 und $\frac{a}{x_0}$ ist diese Aufgabe in einem Schritt lösbar. Dieser Weg sei hier nicht beschritten. Vielmehr betrachten wir folgende Abbildung:

[6] Nach dem gleichnamigen Beitrag von B. Artmann und H. Puhlmann in MNU 55/1 (2002), Seite 16-19.

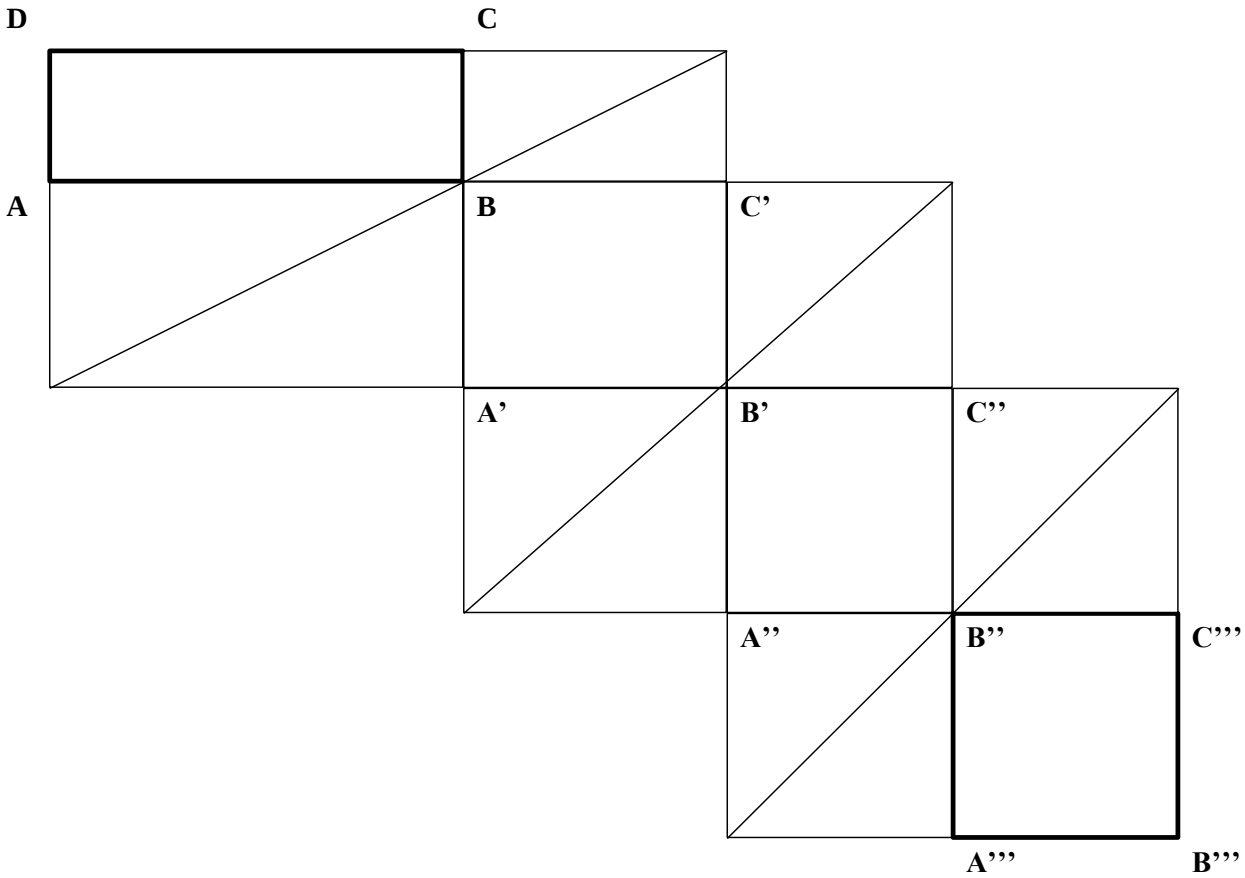
[7] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1



Liegt der Punkt B auf der Diagonale FE des Rechtecks $FB'ED$, so sind die Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D$ flächengleich. Der Beweis ist einfach: Da die Dreiecke FBA und $BC'E$ ähnlich sind, gilt $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{BC'}|}{|\overline{C'E}|}$, also $|\overline{AB}| \cdot |\overline{C'E}| = \left|\overline{BC'}\right| \cdot |\overline{AF}|$. Wegen $\left|\overline{C'E}\right| = |\overline{BC}|$ und $|\overline{AF}| = \left|\overline{A'B}\right|$ ergibt sich unmittelbar die Flächengleichheit. Schon EULER kannte diese Eigenschaft und benutzte sie, um für ein gegebenes Rechteck $ABCD$ und eine Strecke $\overline{BC'}$ ein flächengleiches Rechteck „anzulegen“, dessen eine Seite genau die Länge $\overline{BC'}$ hat.

Ist eine Zahl[8] $a > 1$ gegeben, so setzen wir $x_0 = a$ und $y_0 = 1$. Das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und y_0 hat damit den Flächeninhalt a. Nun wählen wir eine Strecke $\overline{BC'}$ der Länge $\left|\overline{BC'}\right| = x_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + y_0)$, die geometrisch sehr einfach zu konstruieren ist. Nach obiger Konstruktion erhalten wir damit ein flächengleiches Rechteck, dessen andere Seitenlänge mit y_1 bezeichnet werde. Dieses Verfahren lässt sich nun beliebig fortsetzen. Bereits nach 3 Schritten sieht das resultierende Rechteck schon wie ein Quadrat aus!

[8] Es wird im Folgenden auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet.



Wegen $a = x_0 \cdot y_0 = x_1 \cdot y_1 = \cdots = x_n \cdot y_n$ gilt laut Konstruktionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + y_n) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

also die Iterationsformel des HERONschen Verfahrens.

Eine Verallgemeinerung des Heronschen Verfahrens[9]

Zur Ermittlung der n-ten Wurzel ($n > 2$) einer Zahl können wir folgendes Verfahren untersuchen: Es seien $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ positive reelle Zahlen und $A^{(j)}$ das arithmetische Mittel, $G^{(j)}$ das geometrische Mittel und $H^{(j)}$ das harmonische Mittel dieser n Zahlen. Bekanntlich gilt (s. Heft Januar 2022, S. 13)

$$H^{(j)} \leq G^{(j)} \leq A^{(j)}.$$

Finden wir Zahlen $x_i^{(j)} \approx \sqrt[n]{x}$, so können deren harmonisches und arithmetisches Mittel untere bzw. obere Grenzen von $\sqrt[n]{x}$ sein. Dazu starten wir mit

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)} = x$$

[9] Nach W. Dörband: Ein allgemeiner Wurzelalgorithmus. In: WURZEL 01/2001, S. 16-19.

und setzen für alle $j > 0$

$$x_1^{(j)} = H^{(j-1)}, x_2^{(j)} = A^{(j-1)}$$
$$x_3^{(j)} = \cdots = x_{n-1}^{(j)} = y^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot \left(H^{(j-1)} + A^{(j-1)}\right)$$
$$x_n^{(j)} = \frac{1}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)} \cdot (y^{(j)})^{n-3}}$$

Hinweis: Für $n = 3$ entfällt die mittlere Definitionsgleichung und wir setzen

$$x_3^{(j)} = \frac{x}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)}}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine wachsende Folge für $x_1^{(j)}$ und eine fallende Folge für $x_2^{(j)}$, die sich zudem (von unten bzw. von oben) an den Wert $\sqrt[n]{x}$ annähern. Beispielsweise erhalten wir für $n = 3$ und $x = 2$ für

$j = 1$: $\quad (1.200000 =)\ \frac{6}{5} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{4}{3}\ \ (\approx 1.3333333)$

$j = 2$: $\quad (1.258741 \approx)\ \frac{180}{143} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{227}{180}\ \ (\approx 1.261111)$

$j = 3$: $\quad (1.259921 \approx)\ \frac{17528940}{13912733} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{22085087}{17528940}\ \ (\approx 1.259921)$

Für $n = 5$ finden wir nach 3 Schritten die Näherung $\sqrt[5]{2} \approx 1.148698$.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Verwendung von Stammbrüchen ist mit den ältesten Aufzeichnungen von mathematischen Rechentechniken verbunden. In

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotanien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 2 – Mathematik in Altägypten
Abschnitt 2.3 – Zur Rechentechnik Altägyptens (Seiten 76ff)

wird erläutert, wie die alten Ägypter zur Zahlendarstellung ebenso wie für die Schrift Hieroglyphen verwendeten. Dabei bekam nicht jede Zahl ein eigenes Symbol, sondern es wurden lediglich die Zehnerpotenzen festgelegt und alle anderen Zahlen als Summe dieser geschrieben. Die Zeichen wurden für größere Zahlen

hintereinandergeschrieben, was bedeutete, dass diese zur eigentlichen Zahl addiert werden sollten, wie wir es in der heutigen Dezimalschreibweise gewöhnt sind. Zur Darstellung von Brüchen wurden nur Brüche der Form $\frac{1}{n}$ verwendet. Dafür wurde die Zahl des Nenners ausgeschrieben und über die gesamte Zahl die Hieroglyphe für den Mund gezeichnet. Das bedeutete, dass von der Zahl der Kehrwert zu bilden war. Die einzige Ausnahme bildeten die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, für die es eigene Hieroglyphen gab. Für Brüche, deren Zähler ungleich 1 sind, hätte mehrmals der Kehrwert des Nenners hintereinander geschrieben werden müssen. Beispielsweise bei $\frac{5}{12}$ würde fünf Mal das Zeichen für $\frac{1}{12}$ stehen. Dies wäre sehr platz- und schreibaufwendig. Damit das umgangen werden konnte, wurden Brüche, deren Zähler ungleich 1 sind, als Summe von Stammbrüchen dargestellt. So gilt beispielsweise $\frac{7}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{9} + \frac{1}{45}$.

Für Brüche der Form $\frac{2}{n}$ mit ungerader natürlicher Zahl n $(n = 3, 5, \dots, 101)$ waren im Papyrus Rhind[10] die Stammbruchzerlegungen tabellarisch angegeben. Da sich jede natürliche Zahl als Summe von Zweierpotenzen schreiben lässt, können alle Brüche mit diesen Angaben zerlegt werden. Schreiben wir für $\frac{7}{15}$ zunächst die Summe $\frac{7}{15} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}$, so können wir gemäß Tabelle $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ verwenden und diesen Term mit 2 multiplizieren, um eine Zerlegung für $\frac{4}{15}$ zu erhalten. Falls ein Nenner ungerade ist, erhalten wir bei Multiplikation mit 2 die Form $\frac{2}{n}$, für die wir wieder in der Tabelle nachschlagen können. Wir erhalten $\frac{7}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}$.

Offenbar wurden die Zerlegungen in der Tabelle nicht nach einem allgemeinen Algorithmus erstellt. Es gibt eine Vielzahl von Zerlegungsmöglichkeiten. Die nachfolgend angegebenen Beispiele sind im Papyrus Rhind verzeichnet.

(1) Die bekannte Zerlegung $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ können wir für ungerade Zahlen n umformen zu $\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Beispielsweise gilt für n=3: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ oder für n=11: $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$.

(2) Ist n eine zusammengesetzte Zahl $n = p \cdot q$ mit mit ungeraden Zahlen p und q mit $1 < p \leq q < n$, so gilt $\frac{2}{pq} = \frac{1}{\frac{p\cdot(p+q)}{2}} + \frac{1}{\frac{q\cdot(p+q)}{2}}$. Wir finden in der Tabelle für $n = 35$ die Zerlegung $\frac{2}{35} = \frac{1}{\frac{5\cdot(5+7)}{2}} + \frac{1}{\frac{7\cdot(5+7)}{2}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$.

[10] Der Papyrus Rhind ist ein auf Papyrus verfasst Abhandlung zu mathematischen Themen, benannt nach dem Schotten ALEXANDER HENRY RHIND, der ihn 1858 in Ägypten erwarb. Er wird auf etwa 1550 v. Chr. datiert. Er ist heute im Besitz des Britischen Museums in London.

(3) Wir können die Summe $12 = 6 + 3 + 2 + 1$ verwenden und erhalten eine Zerlegung der Form $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$. Als Beispiel steht in der Tabelle $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$.

(4) Wegen $\frac{2}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2q-p}{pq}$ können wir für die ungerade Zahl p die Zahl $q = \frac{p+1}{2}$ wählen und erhalten auf der rechten Seite dieser Gleichung den Nenner 1. So lässt sich für $n = 7$ die Zerlegung $\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7+1}{2}} + \frac{8-7}{7 \cdot 4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ erklären.

(5) Ist der Nenner durch 3 teilbar, so ist die Zerlegung $\frac{2}{n} = \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{3}{2 \cdot n}$ möglich, weil der zweite Bruch zu einem Stammbruch gekürzt werden kann. So könnten in der Tabelle die Zerlegung $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ oder $\frac{1}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ entstanden sein.

(6) Diesen Lösungsansatz können wir auch für Nenner übertragen, die durch 5 teilbar sind, denn es gilt $\frac{2}{n} = \frac{1}{3 \cdot n} + \frac{5}{3 \cdot n}$, wie zum Beispiel für $\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$.

(7) Wegen $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ können wir für alle durch 3 teilbaren Nenner eine naheliegende Zerlegung angeben, zum Beispiel $\frac{2}{39} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$ oder $\frac{2}{99} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{33} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$.

(8) Finden wir natürliche Zahlen a und b mit $n = 2ab - (a + b)$, so ist auch die Zerlegung $\frac{2}{n} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{an} + \frac{1}{bn}$ richtig. Aus $17 = 2 \cdot (3 \cdot 4) - (3 + 4)$ folgt die Zerlegung $\frac{2}{17} = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 17} + \frac{1}{4 \cdot 17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$.

(9) Diesen Lösungsansatz erweitern wir, denn für natürliche Zahlen a, b und c mit $n = 2 \cdot a \cdot b \cdot c - (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$ folgt $\frac{2}{n} = \frac{1}{abc} + \frac{1}{a \cdot n} + \frac{1}{b \cdot n} + \frac{1}{c \cdot n}$. Wir finden in der Tabelle: Wegen $43 = 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7) - (2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7)$ gilt die Darstellung $\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$.

Für die Zerlegung von $\frac{2}{29}$ wird in der Tabelle eine Summe aus vier Stammbrüchen angegeben. Vermuten wir, dass dies mit dieser Methode gelang, so finden wir tatsächlich $29 = 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) - (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5)$ und können die Darstellung als Summe von Stammbrüchen angeben: $\frac{2}{29} = \frac{1}{30} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{145}$. Doch in der Tabelle finden wir $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$, möglicherweise basierend auf dem Zusammenhang $4 \cdot 29 = 2 \cdot (2 \cdot 6 \cdot 8) - (2 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 8)$ mit anschließender Division durch 4.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 15 – Stammbrüche 3
Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen 11
Geometrisches Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren 14
Eine Verallgemeinerung des Heronschen Verfahrens 16
In alten Mathe-Büchern geblättert 17

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
Mai 2022	Thema 15	Stammbrüche	MO610933 MO611032
April 2022	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610932 MO611031
März 2022	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
Januar 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dezember 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
November 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
November 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Oktober 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
September 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

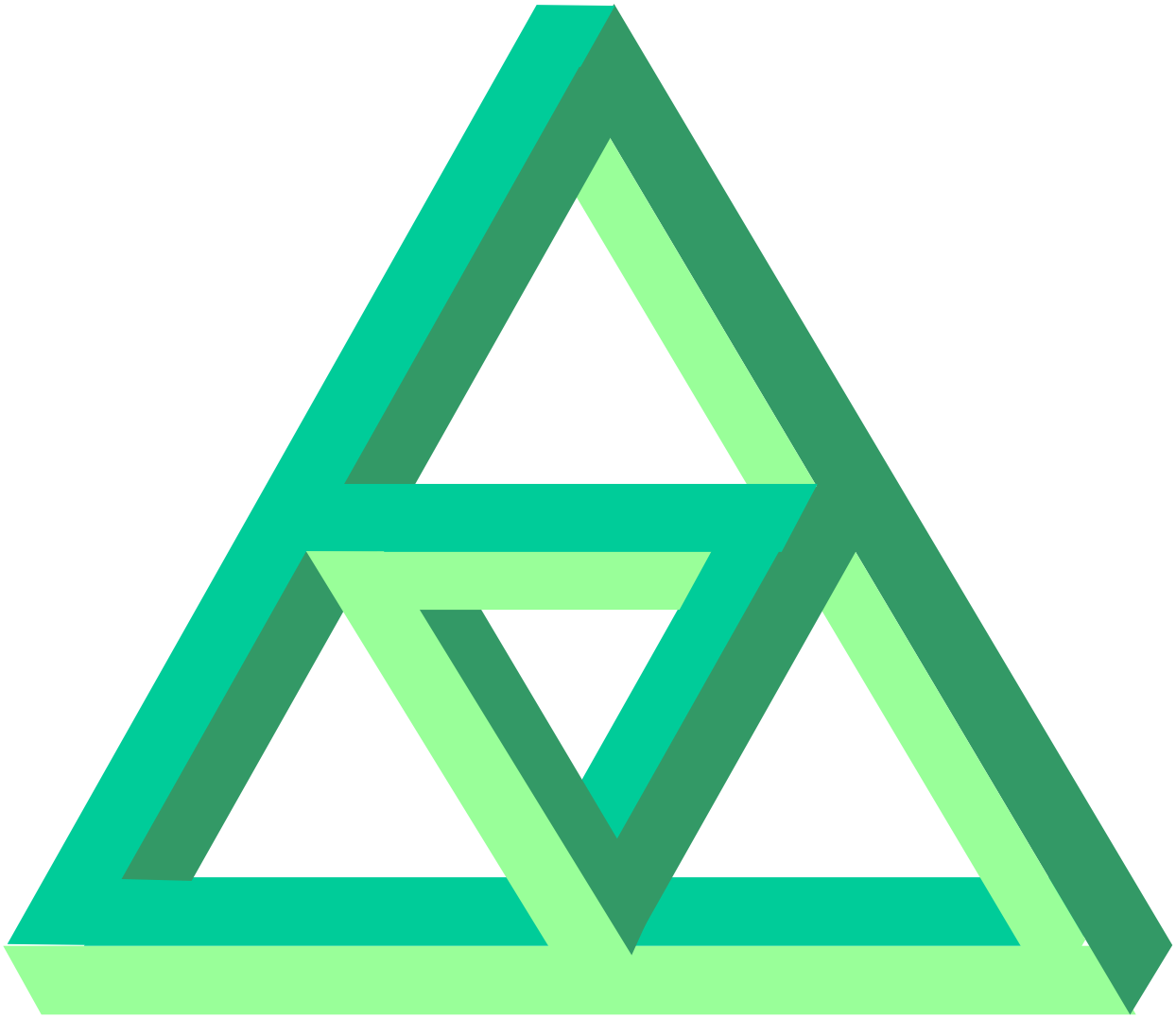
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2022 (Juni 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

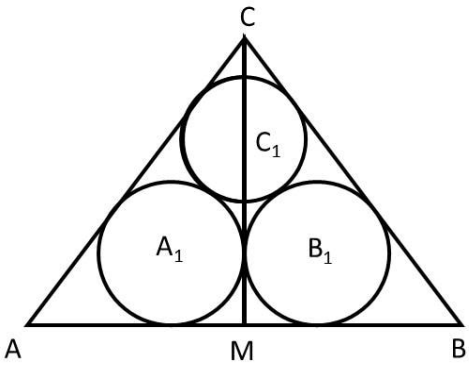
Es war vorgesehen, die bislang diskutierten Themen fortzuschreiben, wenn sich im Wettbewerbsverlauf entsprechende Aufgaben thematisch wiederholen. In diesem Heft blicken wir deshalb mit Bezug zur Aufgabe **MO610945** auf das Thema 06 – „Einbeschriebene Figuren und Körper“ zurück und diskutieren Aufgaben, in denen diesmal Kreise in Figuren einzubeschreiben sind. Diese Aufgaben motivieren, die Packungsdichten von kongruenten Kreisen in einem Einheitsquadrat zu untersuchen.

Ein Auszug aus einem Lehrbuch zur Geometrie aus dem 18. Jahrhundert zeigt, wie das Einbeschreiben eines Kreises in reguläre Vielecke gelehrt wurde.

Ergänzend werden Summen und Produkte mit vielen Gliedern betrachtet, deren Berechnung durch Kürzen benachbarter Glieder vereinfacht werden können.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 06 - Einbeschriebene Kreise (III)



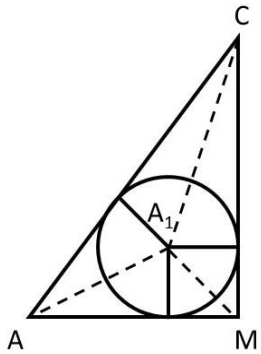
Aufgabe 06.09 – MO610945[3]**.** Gegeben ist ein Dreieck ABC, in dem drei Kreise k_A, k_B und k_C so liegen, dass sie sich paarweise von außen und jeweils zwei der drei Seiten des Dreiecks berühren wie in der Abbildung dargestellt. Es ist bekannt, dass für jedes Dreieck ABC solche Kreise k_A, k_B und k_C existieren und eindeutig bestimmt sind.

Berechnen Sie die Radien der drei Kreise, wenn $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = 5$ cm und $|\overline{AB}| = 6$ cm gilt.

Lösungshinweise: Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ sei M. Die drei Kreise k_A, k_B und k_C mögen die Mittelpunkte A_1, B_1 bzw. C_1 und die Radien r_A, r_B bzw. r_C haben. In der Lösung werden alle Längen in der Einheit cm und alle Flächen in der Einheit cm^2 verstanden[4]. Diese Einheiten werden in der Lösungsdarstellung weggelassen.

Da Tangentenabschnitte an einen Kreis gleich lang sind, liegen die Mittelpunkte A_1, B_1 bzw. C_1 auf den Winkelhalbierenden der Winkel bei A, B bzw. C des Dreiecks ABC.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist und damit die Winkelhalbierende durch C zugleich Symmetrieachse ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung für die Kreise, dass $r_A = r_B$ gilt und die Gerade CM gemeinsame Tangente von k_A und k_B ist.



Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, sind die Dreiecke AMC und MBC kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen $|\overline{AM}| = |\overline{MB}| = 3$, $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = 5$, $|\overline{MC}| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ und den Inkreisen k_A bzw. k_B. Wir betrachten im Folgenden nur das Dreieck *AMC* und berechnen zunächst r_A als Inkreisradius in diesem rechtwinkligen Dreieck.

Zerlegen wir das Dreieck AMC in die drei Dreiecke AMA_1, MCA_1 und CAA_1 (für die der Radius r_A des Kreises um A_1 jeweils der Höhe dieser Dreiecke entspricht), so folgt

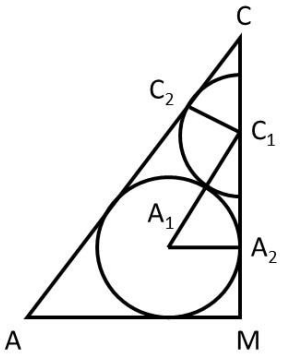
[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formulier, s. www.mathematik-olympiaden.de

[4] Ein solcher Hinweis sollte zu Beginn der Lösungsdarstellung gegeben werden, um Missverständnisse zu vermeiden.

aus dem Flächenvergleich des gesamten Dreiecks und der Summe dieser drei Teildreiecke:

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot|\overline{AM}|\cdot|\overline{MC}|=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(|\overline{AM}|+|\overline{MC}|+|\overline{CA}|)=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(3+4+5)$$

der Wert $r_A = 1$.



Das rechtwinklige Dreieck CC_2C_1 ist ähnlich dem Dreieck AMC (weil die Winkelgrößen übereinstimmen). Folglich finden wir mit der abkürzenden Schreibweise $|\overline{C_2C_1}| = r_c$

$$\frac{|\overline{CC_1}|}{r_c}=\frac{|\overline{CA}|}{|\overline{AM}|}=\frac{5}{3}\quad\Rightarrow\quad|\overline{CC_1}|=\frac{5}{3}\cdot r_c$$

Im rechtwinkligen Dreieck $A_1A_2C_1$ gilt $|\overline{A_1C_1}| = r_A + r_C = 1 + r_C$. Mit dem Satz des PYTHAGORAS im Dreieck $A_1A_2C_1$ mit dem rechten Winkel bei A_2 folgt

$$|\overline{A_1C_1}|^2=(1+r_c)^2=|\overline{A_1A_2}|^2+|\overline{A_2C_1}|^2=1+\left(4-1-\frac{5}{3}\cdot r_c\right)^2$$

Die daraus folgende Gleichung $\frac{16}{9}\cdot r_c^2-12\cdot r_c+9=0$ lösen wir mittels Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf und erhalten $r_c=\frac{8}{9}\cdot\left(3\pm\sqrt{5}\right)$.

Die Lösung mit positivem Rechenzeichen innerhalb der Klammer ist offensichtlich größer als $|\overline{AM}| = 3$ und korrespondiert daher zu einem Kreis, dessen Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks AMC liegt. Daher ist die Lösung mit negativem Rechenzeichen der gesuchte Wert. Wir erhalten als Ergebnis, dass die drei Kreise die Radien $r_A = r_B = 1$ cm und $r_c=\frac{8}{9}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)\approx 0.86$ cm[5] haben. ❑

Hinweis: Für den Inkreisradius r eines rechtwinkligen Dreiecks gilt der Zusammenhang $r = 2\cdot A/U$ mit Flächeninhalt A und Umfang U. Im konkreten Fall der Aufgabenstellung erhalten wir unmittelbar

$$r_A=\frac{2\cdot\frac{3\cdot 4}{2}}{3+4+5}=1$$

[5] Sind in der Aufgabenstellung konkrete Maßzahlen angegeben, ist eine Antwort (zumindest in Lösungsdarstellungen von Hausaufgaben oder wenn die Berechnung ohne rechentechnische Hilfsmittel möglich ist) in der zugehörigen Maßeinheit günstig.

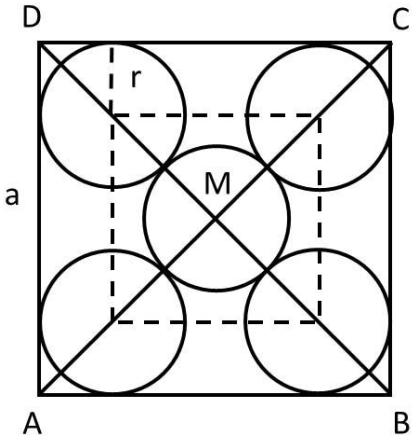
Entsprechend der einleitenden Hinweise auf jedem Aufgabenblatt zur MO sind „*zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann".* Da die Formel keinen eigenen Namen hat, kann es im Ermessen der Korrektoren oder Jury liegen, ob der Zusammenhang ohne Beweis verwendet werden darf. Es ist deshalb ratsam, zumindest die Beweisidee anzugeben, etwa „… es gilt …, wie wir aus … herleiten können."

Aufgaben mit einbeschriebenen Kreisen waren zu Beginn der Mathematik-Olympiaden häufig zu finden.

Aufgabe 06.10 – MO031014. In einem Quadrat der Seitenlänge a sollen fünf kongruente Kreise, von denen keine zwei zusammenfallen, so gezeichnet werden, dass einer der Kreise den Mittelpunkt des Quadrates als Mittelpunkt hat und jeder der vier übrigen Kreise sowohl diesen Kreis als auch je zwei benachbarte Quadratseiten berührt.

a) Berechnen Sie den Radius dieser Kreise.
b) Beschreiben Sie eine Konstruktion dieser fünf Kreise, bei der nur Zirkel und Lineal verwendet wird.

Lösungshinweise: a) Wenn sich zwei der fünf Kreise berühren, so müssen sie außerhalb voneinander liegen, da sie gleichlange Radien haben und nicht zusammenfallen. Berührt ein Kreis zwei benachbarte Quadratseiten, so liegt sein Mittelpunkt auf der Diagonalen, die von der gemeinsamen Ecke dieser Seite ausgeht, da er von beiden Seiten gleichen Abstand hat.



Die vier Mittelpunkte Kreise, die Quadratseiten berühren (im Weiteren „Eck-Kreise" genannt) bilden ebenfalls ein Quadrat, und zwar mit der Seitenlänge $a - 2r$. Die Diagonale dieses Quadrates besitzt die Länge $4 \cdot r$. Weil die Diagonalenlänge eines Quadrates das $\sqrt{2}$-fache der Seitenlänge ist, erhalten wir die Gleichung

$$(a - 2 \cdot r) \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot r$$

Daraus erhalten wir nach Umformung $r = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0.207 \cdot a$.

Lösungshinweise b) Den Mittelpunkt M des mittleren Kreises erhalten wir als Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates. Den Berührungspunkt E des mittleren Kreises mit dem Eck-Kreis beim Punkt A finden wir als Schnittpunkt der Diagonalen AC und des Kreises um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, denn

$$[\overline{AM}] - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = r.$$

Mit dem Doppelten dieses Radius können wir ausgehend von M auf den Diagonalen die Mittelpunkte der anderen vier Kreise markieren. ❑

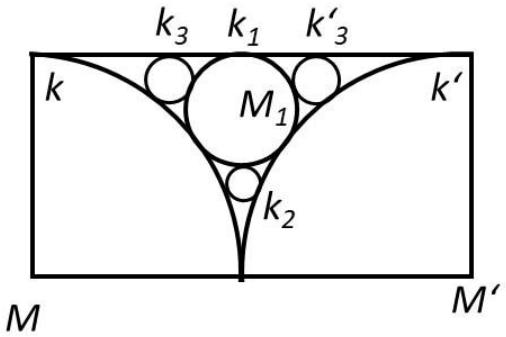
Ergänzung: Stimmt der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Mittelpunkt des Quadrates (Schnittpunkt der Diagonalen) überein, so kann der Radius dieses Kreises (im Weiteren „Mittel-Kreis“ genannt) auch anders als die vier kongruenten Eck-Kreise gewählt werden. Der maximale Radius des Mittel-Kreises beträgt $\frac{a}{2}$, wenn der Mittelkreis alle vier Seiten des Quadrates berührt. Mit ähnlicher Argumentation wie oben finden wir dafür die Gleichung

$$(a - 2 \cdot r) \cdot \sqrt{2} = a + 2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \approx 0.086 \cdot a.$$

Sind dagegen die Eck-Kreise maximal, betragen deren Radien $\frac{a}{4}$. Den Radius r des zugehörigen Mittel-Kreises können wir in ähnlicher Weise berechnen:

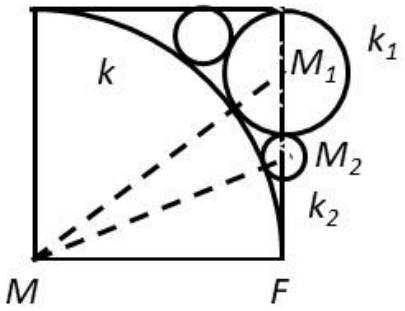
$$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{2} + 2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0.104 \cdot a.$$

Aufgabe 06.11 – MO061013. In dem in der Abbildung dargestellten Teil eines Ornamentes treten als Grundformen Kreise und Kreisbögen auf, die einander in der aus dem Bild ersichtlichen Weise berühren. Es sollen die Radien r_1, r_2 und r_3 der Kreise k_1, k_2 bzw. k_3 und k_3' in Abhängigkeit vom Radius r von k und k' berechnet werden.



Lösungshinweise: Wir fällen das Lot vom Mittelpunkt M_1 auf die Gerade durch M und M' und bezeichnen den Fußpunkt mit F. Dann ist das Dreieck MFM_1 rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt F. Für die Seitenlängen gilt:

$$|\overline{MM_1}| = r + r_1 \;\; ; \;\; |\overline{MF}| = r \;\; ; \;\; |\overline{M_1F}| = r - r_1$$



Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt folglich im rechtwinkligen Dreieck MFM_1 mit der Hypotenuse $\overline{MM_1}$ und den Katheten $\overline{MF}$ und $\overline{M_1F}$:

$$(r + r_1)^2 = r^2 + (r - r_1)^2$$

Durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach r_1 finden wir $r_1 = \frac{r}{4}$.
Bezeichnen wir mit M_2 den Mittelpunkt des Kreises k_2 (der ebenfalls auf dem Lot $\overline{M_1F}$ liegt), so ist auch das Dreieck MFM_2 rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt F. Für die Seitenlängen gilt:

$$|\overline{MM_2}| = r + r_2 \;\; ; \;\; |\overline{MF}| = r \;\; ; \;\; |\overline{M_2F}| = r - 2 \cdot r_1 - r_2$$

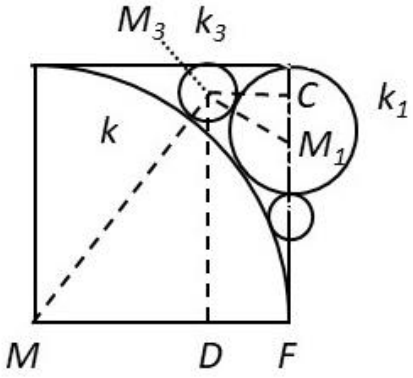
Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt folglich im rechtwinkligen Dreieck MFM_2 mit der Hypotenuse $\overline{MM_2}$ und den Katheten $\overline{MF}$ und $\overline{M_2F}$:

$$(r + r_2)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot r - r_2\right)^2$$

Durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach r_2 finden wir $r_2 = \frac{r}{12}$.

Bezeichnen wir mit M_3 den Mittelpunkt des Kreises k_3 und fällen von M_3 das Lot auf $\overline{MF}$ mit dem Fußpunkt D, so ist auch das Dreieck MDM_3 rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt D. Für die Seitenlängen gilt:

$$|\overline{MM_3}| = r + r_3;\; |\overline{MD}| = x \;;\; |\overline{M_3D}| = r - r_3$$



Für die Länge der Strecke $\overline{MD}$ ermitteln wir im Hilfsdreieck M_3M_1C mit C als Fußpunkt des Lotes von M_3 auf die Verlängerung von $\overline{M_1F}$ über M_1 hinaus den Zusammenhang $|\overline{MD}| = r - \sqrt{r \cdot r_3}$.

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt folglich im rechtwinkligen Dreieck MDM_3 mit der Hypotenuse $\overline{MM_3}$ und den Katheten $\overline{MD}$ und $\overline{M_3D}$:

$$(r + r_3)^2 = \left(r - \sqrt{r \cdot r_3}\right)^2 + (r - r_3)^2$$

Durch Ausmultiplizieren finden wir

$$r - 3 \cdot r_3 = 2 \cdot \sqrt{r \cdot r_3}$$

Wir quadrieren beide Seiten und erhalten die quadratische Gleichung

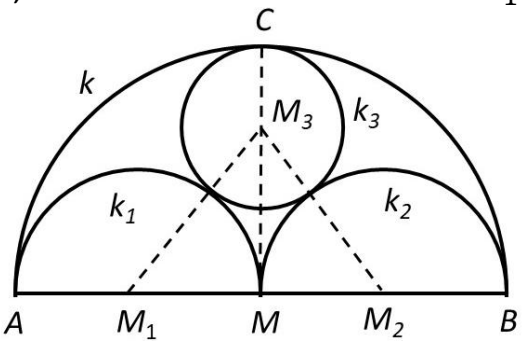
$$r^2 - 10 \cdot r \cdot r_3 + 9 \cdot r_3^2 = 0$$

Aufgelöst nach r_3 mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen führt dies zu

$$r_{3.1,2} = \frac{5}{9} \cdot r \pm \sqrt{\frac{(25 \cdot r^2 - 9 \cdot r^2)}{81}} = \frac{5}{9} \cdot r \pm \frac{4}{9} \cdot r$$

Es ist also $r_{3.1} = r$ und $r_{3.2} = \frac{r}{9}$. Wegen $r_3 < r$ kann nur die zweite Lösung möglich sein und wir haben alle geforderten Radien gefunden. ❑

Aufgabe 06.12 – MO011132. Gegeben sei eine Strecke AB mit dem Mittelpunkt M, M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Strecken AM bzw. MB. Es werden ein Halbkreis k, der den Mittelpunkt M und den Radius AM hat, und zwei weitere Halbkreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $\frac{1}{2} \cdot |\overline{AM}|$ gezeichnet, die in derselben von der Geraden g_{AB} begrenzten Halbebene wie k liegen. Der Kreis k_3 berühre den Halbkreis k von innen und jeden der beiden Halbkreise k_1 und k_2 von außen (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie die Lage des Mittelpunktes M_3 von k_3.

Lösungshinweise: Aus Symmetriegründen liegt M_3 auf der Mittelsenkrechten $\overline{MC}$. Wir bezeichnen mit x die Länge des Radius des Kreises k_3. Aufgrund der sich berührenden Kreise k_1, k_2 und k_3 gilt:

$$|\overline{M_1M_3}| = |\overline{M_2M_3}| = \frac{|\overline{AM}|}{2} + x$$

Ist r die Länge des Radius des Kreises k, so gilt auch $|\overline{MM_3}| = r - x$. Somit finden wir mittels Satz von PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck M_1MM_3 mit der Hypotenuse $\overline{M_1M_3}$ und den Katheten $\overline{M_1M}$ und $\overline{MM_3}$ die Gleichung

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2 = \left(\frac{r}{2} + x\right)^2$$

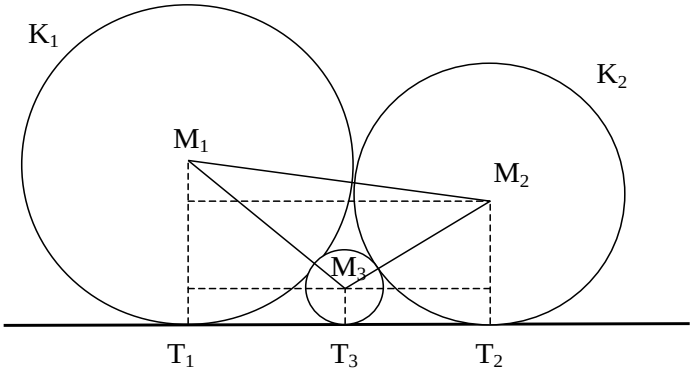
Durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach x erhalten wir (wegen $r \neq 0$) das Ergebnis $x = \frac{1}{3} \cdot r$. Also liegt M_3 auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ im Abstand von $\frac{2}{3} \cdot r$ über M.

Aufgabe 06.13. Gegeben seien drei Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Radien $r_3 < r_2 \leq r_1$, für die eine Gerade g die Tangente ist. Die Kreise mögen sich wie in der Abbildung zu sehen paarweise berühren. Man beweise:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

Lösungshinweise: Bezeichnen T_1, T_2 und T_3 die Berührungspunkte der Kreise mit der Tangente g (s. Skizze), so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\overline{T_2T_1}^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$$
$$\overline{T_2T_3}^2 + (r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$
$$\overline{T_1T_3}^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$



Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen finden wir

$$\overline{T_1T_2} = 2 \cdot \sqrt{r_1r_2}, \overline{T_1T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_1r_3}, \overline{T_2T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_2r_3}.$$

Folglich gilt wegen $\overline{T_1T_3} + \overline{T_3T_2} = \overline{T_1T_2}$ die Gleichung $\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_3r_2} = \sqrt{r_1r_2}$. Nach Division durch $\sqrt{r_1r_2r_3}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ❑

Hinweis: Die Gleichung kann als eine „Verwandte“ des Satzes von PYTHAGORAS (im Sinne von $a^2 + b^2 = c^2$) betrachtet werden, wenn wir sie in folgender Form darstellen:

$$r_1^{-\frac{1}{2}} + r_2^{-\frac{1}{2}} = r_3^{-\frac{1}{2}}$$

In Analogie zu dieser Idee gilt mit c als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten p und q sowie mit h als der auf c stehenden Höhe:

$$p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} = (c + 2 \cdot h)^{\frac{1}{2}}$$

Ebenso gilt für die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks und für die auf der Hypotenuse stehenden Höhe h:

$$a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}$$

Packungsdichte von Kreisen im Einheitsquadrat

Die Ergänzung zur **Aufgabe 06.10** führt zum Begriff der Packungsdichte. Damit ist das Verhältnis der Summe der Kreisflächen zur umschreibenden Quadratfläche gemeint. Unter Packung verstehen wir, dass jeder Punkt des Quadrates (einschließlich seines Randes) in höchstens einem der Kreise (einschließlich ihrer Randpunkte) liegt. Dies entspricht der anschaulichen Vorstellung, Kreisscheiben in eine Quadratfläche so „einzupacken“, dass sich die Kreisscheiben nicht überlagern und möglichst wenig Platz übrig bleibt.

Im Folgenden betrachten wir ein Einheitsquadrat mit der Seitenlänge[6] 1. Bei dem in Aufgabe 06.10 untersuchten Fall mit fünf kongruenten Kreisen, jeweils mit Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$, beträgt die Packungsdichte

$$\rho = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi = \frac{5}{4} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \pi \approx 0.673.$$

Wählen wir dagegen nur einen einbeschriebenen Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2}$, so beträgt die Packungsdichte

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

Bei vier kongruenten einbeschriebenen Kreisen (jeweils mit Radius $r = \frac{1}{4}$) kommen wir ebenfalls auf

$$\rho = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$

Wir stellen fest, dass für alle Anordnungen von n^2 kongruenten einbeschriebenen Kreisen (mit den Radien $r = \frac{1}{2 \cdot n}$), angeordnet in einem Quadratgitter, die Packungsdichte konstant ist:

$$\rho = n^2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$

[6] Wir verzichten im Weiteren auf die Angabe von Längen- und Flächeneinheiten, da Missverständnisse ausgeschlossen werden können.

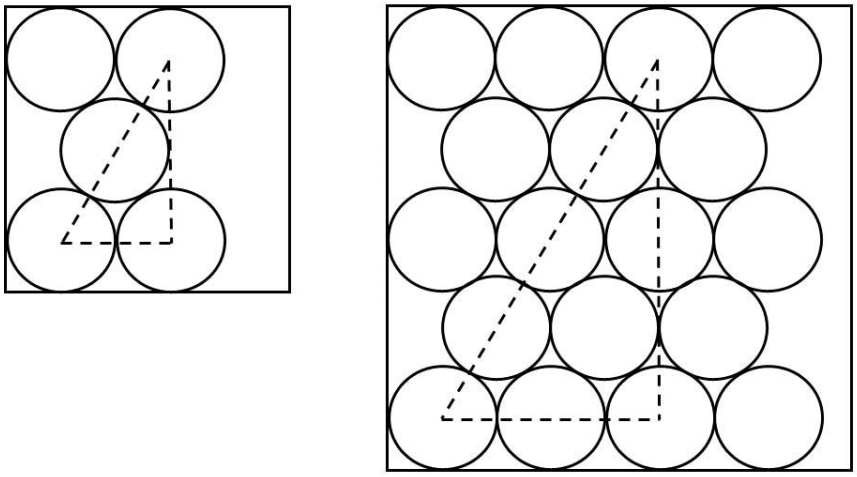
Offensichtlich ist die Packungsdichte bei den Beispielen zur Ergänzung der Aufgabe 06.10 mit maximalem bzw. minimalem Mittel-Kreis größer, da hier zu einem Kreis bzw. zu den vier Kreisen noch weitere Flächen hinzukommen:

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi + 4 \cdot \left(\frac{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{1}{4} + 17 - 12 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \pi \approx 0.878$$

bzw.

$$\rho = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{7 - 2 \cdot \sqrt{2}}{16} \cdot \pi \approx 0.819.$$

Füllen wir die bei diesen Konfigurationen noch nicht bedeckten Teilflächen mit weiteren kleinen Kreisflächen aus, können wir die Packungsdichte beliebig nahe an 1 bringen. Es erscheint deshalb sinnvoll, die größte Packungsdichte bei Verwendung kongruenter Kreise zu suchen. Dazu ordnen wir die Kreise wie in folgender Abbildung an.



Befinden sich in der obersten Reihe n Kreise (mit gerader Zahl $n \geq 2$) mit Radius r, so füllen wir mit weiteren n Reihen auf, bis wir insgesamt

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot n + \frac{n}{2} \cdot (n - 1) = n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$$

Kreise gezeichnet haben. Offenbar kann eine solche Anordnung das Quadrat nicht optimal ausfüllen. Das kleinste umschreibende Rechteck hat die Breite $2 \cdot n \cdot r$ und die Höhe $\sqrt{(2 \cdot n \cdot r)^2 - (n \cdot r)^2} + 2 \cdot r = r \cdot \left(n \cdot \sqrt{3} + 2\right)$.

Für $n = 2$ betragen bei einem Radius r für das kleinste umschreibende Rechteck die Breite $4 \cdot r$ und die Höhe $r \cdot \left(2\sqrt{3} + 2\right) \approx 5.464 \cdot r$. Wir können deshalb

$r = \frac{1}{2\sqrt{3}+2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$ wählen und finden als Packungsdichte für diese Konfiguration:

$$\rho = 5 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi = \frac{5}{8} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \pi \approx 0.526$$

Für $n = 4$ betragen bei einem Radius r für das kleinste umschreibende Rechteck die Breite $8 \cdot r$ und die Höhe $r \cdot \left(4\sqrt{3} + 2\right) \approx 8.928 \cdot r$. Wir wählen deshalb $r = \frac{1}{4\sqrt{3}+2} = \frac{1}{22} \cdot \left(2\sqrt{3} - 1\right)$ wählen und finden als Packungsdichte für diese Konfiguration:

$$\rho = 18 \cdot \left(\frac{1}{22} \cdot \left(2\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi = \frac{9}{242} \cdot \left(13 - 4 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \pi \approx 0.709$$

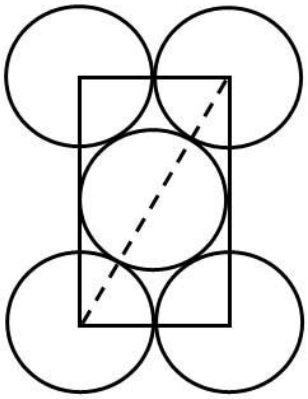
Gibt es eine Zahl n, sodass die Breite und Höhe des kleinsten umschreibenden Rechtecks fast übereinstimmen, könnte die Packungsdichte besonders groß sein. Tatsächlich finden wir für $n = 8$ die Breite $16 \cdot r$ und die Höhe $r \cdot \left(8\sqrt{3} + 2\right) \approx 15.856 \cdot r$, d.h. die Höhe ist in diesem Fall geringfügig kleiner als die Breite. Wir können also als Radius $r = \frac{1}{16}$ wählen und erhalten als Packungsdichte

$$\rho = 68 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot \pi = \frac{17}{64} \cdot \pi \approx 0.834$$

Vergrößern wir die Anzahl der Kreise in der oberen Reihe, entsteht unten ein nicht bedeckter Streifen. Deshalb vermuten wir, dass die Packungsdichte zunächst nicht weiter steigt. Tatsächlich finden wir für $n = 10$ mit den Radien $r = \frac{1}{20}$ die Packungsdichte

$$\rho = 105 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot \pi = \frac{21}{80} \cdot \pi \approx 0.825$$

Erst wenn zusätzlich eine weitere Reihe von Kreisen in das Einheitsquadrat passt, könnte die Packungsdicht wieder zunehmen. Um eine obere Schranke der Packungsdichte zu finden, bestimmen wir die Packungsdichte der Ebene, auf der Kreise in oben gewählter Konfiguration angeordnet sind. Dazu wählen wir einen Ausschnitt der bepackten Ebene aus, mit dem wir die gesamte Ebene füllen könnten, und ermitteln für diesen Ausschnitt die Packungsdichte: Durch Aneinanderfügen von den Rechtecken wie in nebenstehender Abbildung können wir die Anordnung der Kreise mit jeweils Radius r erzeugen.



Einerseits beträgt der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks $A_R = 2 \cdot \sqrt{12} \cdot r^2$. Andererseits umfasst so ein Rechteck die Fläche von zwei Kreisen mit der Gesamtfläche von $A_K = 2 \cdot r^2 \cdot \pi$. Somit finden wir für die Packungsdichte dieses Ausschnittes der Ebene:

$$\rho = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \pi}{2 \cdot \sqrt{12} \cdot r^2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.907$$

Summen und Produkte – einfach kürzbar

Aufgabe 1. Es sei $S(n)$ die Summe der Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis n, also

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Man beweise: $S(2022) < 2$.

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $k > 1$ gilt

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{(k-1) \cdot k} > \frac{1}{k^2}$$

Folglich können wir die Summe $S(n)$ wir folgt abschätzen:

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1) \cdot k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

Nun teilen wir den Ausdruck unterm Summenzeichen auf:

$$S(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Durch die Verschiebung des Index erkennen wir, dass sich fast alle Summanden aufheben:

$$S(n) = 1 + \left(\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Somit ist die Behauptung für alle $n > 1$ und folglich auch für $n = 2022$ richtig. ❑

Hinweis: Die Verwendung des Summenzeichens ist prinzipiell nicht erforderlich, wenn die Summendarstellung mit den Pünktchen „$+\cdots+$“ eindeutig erklärt ist oder Missverständnisse nicht zu erwarten sind. So erfordert beispielsweise der Ausdruck $S = 1 + 2 + \cdots + 16$ die Erläuterung „S ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16“, um eine Verwechslung mit „Summe der Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^4“ auszuschließen. Dagegen würde die Schreibweise $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 16$ vermutlich richtig als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16 interpretiert werden. Dennoch wäre die verbale Beschreibung für S hilfreich.

Aufgabe 2 – MO371045. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999$$

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ gilt offenbar

$$\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{2}{2\cdot\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$

Erweitern wir den Bruch links mit $\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ und den Bruch rechts mit $\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$, so erhalten wir die Ungleichung

$$2\cdot\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\cdot\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$

Führen wir nun die Summenbildung von $k = 2$ bis $k = 1000000$ aus, so heben sich auf beiden Seiten benachbarte Glieder auf und die Summen reduzieren sich auf

$$2\cdot\sqrt{1000001} - 2\cdot\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2\cdot\sqrt{1000000} - 2\cdot\sqrt{1}$$

Um dies ausführlich zu zeigen, genügt es, die Summation anzudeuten, indem wir für $k = 2, 3, 4$ und $k = 1000000$ die dazugehörigen Ungleichungen angeben:

$$2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\cdot\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{1}$$
$$2\cdot\sqrt{4} - 2\cdot\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{2}$$
$$2\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{4}} < 2\cdot\sqrt{4} - 2\cdot\sqrt{3}$$
$$\ldots$$
$$2\cdot\sqrt{1000001} - 2\cdot\sqrt{1000000} < \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2\cdot\sqrt{1000000} - 2\cdot\sqrt{999999}$$

Damit wird ersichtlich, was wir mit „Aufheben benachbarter Glieder“ meinen. Mit Verwendung der Summensymbole können wir die Darstellung formalisieren:

$$\sum_{k=2}^{n} 2 \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{n} 2 \cdot \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

gleichbedeutend mit

$$2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k+1} - 2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} - 2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k-1}$$

Durch eine Indexverschiebung im ersten Summenzeichen der linken Seite bzw. im zweiten Summenzeichen der rechten Seite und anschließender Abtrennung der „Randsummanden“ finden wir das Ergebnis der Summation:

$$2 \cdot \sqrt{n+1} + 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \sqrt{k} - 2 \cdot \sum_{k=3}^{n} \sqrt{k} - 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$< \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2 \cdot \sqrt{n} + 2 \cdot \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt{k} - 2 \cdot \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt{k} - 2 \cdot \sqrt{1}$$

Diese Übung im Umgang mit dem Summenzeichen vereinfacht aber wohl nicht die Lösungsdarstellung!

Während wir die rechte Seite exakt mit $2 \cdot (1000 - 1) = 1998$ bestimmen können, benötigen wir für die linke Seite eine Abschätzung, die ohne rechentechnische Hilfsmittel nachvollziehbar ist:

$$2 \cdot \sqrt{1000001} - 2 \cdot \sqrt{2} > 2 \cdot \sqrt{1000000} - 2 \cdot 1.5 = 1997.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$1998 < 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999$$ ❑

Aufgabe 3 – MO301024. Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n} + n \cdot \sqrt{n+1}}$$

Mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{1989} + a_{1990}$$

Beweisen Sie, dass hieraus $0.5 < s < 1$ folgt!

Lösungshinweise: Wir formen den Ausdruck für a_n um, indem wir den Bruch mit $(n+1)\cdot\sqrt{n} - n\cdot\sqrt{n+1}$ erweitern:

$$a_n = \frac{(n+1)\cdot\sqrt{n} - n\cdot\sqrt{n+1}}{(n+1)^2\cdot n - n^2\cdot(n+1)} = \frac{(n+1)\cdot\sqrt{n} - n\cdot\sqrt{n+1}}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Bilden wir nun die Summe s, so heben sich bis auf die „Randsummanden“ benachbarte Summanden auf und wir erhalten

$$s = 1 - \frac{1}{\sqrt{1991}}$$

Es gilt $s < 1$. Wegen $\frac{1}{\sqrt{1991}} < \frac{1}{\sqrt{1600}} = \frac{1}{40}$ gilt auch $s > 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40} > 0.5$.

Hinweis: Die linke Ungleichung $0.5 < s$ können wir natürlich auch durch Berechnen der ersten Glieder beweisen. Wir finden beispielsweise

$$a_1 = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1} + 1\cdot\sqrt{2}} > \frac{1}{2\cdot 1 + 1\cdot\frac{3}{2}} = \frac{2}{7}$$
$$a_2 = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{3}} > \frac{1}{3\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot 2} = \frac{2}{17}$$
$$a_3 = \frac{1}{4\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{4}} > \frac{1}{4\cdot 2 + 3\cdot 2} = \frac{1}{14}$$
$$a_4 = \frac{1}{5\cdot\sqrt{4} + 4\cdot\sqrt{5}} > \frac{1}{5\cdot 2 + 4\cdot 2.5} = \frac{1}{16}$$

d.h.

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{17} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} = \frac{2\cdot 16\cdot 17 + 2\cdot 7\cdot 16 + 8\cdot 17 + 7\cdot 17}{7\cdot 16\cdot 17} = \frac{544+224+136+119}{1904} = \frac{1023}{1904} > 0.5.$$

❑

Aufgabe 4 – MO091132. Man beweise, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2499}{2500}$$

kleiner als 0.02 ist.

Lösungshinweise: Wir betrachten ein zweites Produkt q,

$$q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2498}{2499}$$

Wir können durch äquivalentes Umformen nachweisen, dass für alle positiven ganzen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n} < \frac{2 \cdot n}{2 \cdot n + 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad (2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 4 \cdot n^2 - 1 < 4 \cdot n^2$$

gilt. Deshalb gilt für das Produkt $p \cdot q$ die Ungleichung

$$p^2 < p \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2497}{2498} \cdot \frac{2498}{2499} \cdot \frac{2499}{2500} = \frac{1}{2500}$$

Wie behauptet finden wir also $p = \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0.02$. ❑

Lösungsvariante: Aus der Definition von p erhalten wir auch

$$p^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2499^2}{2500^2}$$

Dann gilt aber

$$p^2 < \frac{1^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2499^2}{2500^2 - 1^2} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2499 \cdot 2499}{2499 \cdot 2501}$$

Kürzen wir die Faktoren, so bleibt $p^2 = \frac{1}{2501}$ übrig, woraus wir wie oben die Behauptung bestätigen können.

Aufgabe 5. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2020}{2021} < 0.2022^2$$

Lösungshinweise: Wir bezeichnen das Produkt auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung mit x und definieren ein weiteres Produkt y in ähnlicher Weise:

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2021}{2022}$$

Es ist offenbar $x < y$, denn für jede positive ganze Zahl k gilt

$$\frac{2 \cdot k - 2}{2 \cdot k - 1} < \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k} \quad \Leftrightarrow \quad (2 \cdot k - 2) \cdot 2 \cdot k = 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k < (2 \cdot k - 1)^2$$

Also finden wir $x^2 < x \cdot y = \frac{2}{2022}$. Daraus können wir x ohne Verwendung von rechentechnischen Hilfsmitteln abschätzen:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2022}} = \frac{1}{\sqrt{1011}} < \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} < \frac{1}{25} = 0.04 = 0.2^2 < 0.2022^2 \qquad \square$$

Bemerkung: Mit einem Taschenrechner finden wir $\sqrt{\frac{2}{2022}} \approx 0.0315$, woraus wir $x < 0.1774^2$ vermuten können. Das Spiel mit der Jahreszahl zielt offensichtlich nur darauf ab, die Abschätzung nachvollziehbar darzustellen. Auch folgende Abschätzung würde akzeptiert werden:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2022}} = \sqrt{\frac{10}{10110}} < \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10000}} < \frac{\sqrt{10.24}}{100} = \frac{3.2}{100} = 0.032 < 0.0324 = 0.18^2$$

Die rechte Seite der Ungleichung könnte also auch kleiner vorgegeben werden.

Aufgabe 6. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2021}{2022} < \frac{1}{55}$$

Lösungshinweise: Wie in obiger Aufgabe könnten wir den Ansatz wählen, zum Produkt x in der linken Seite der Ungleichung ein passendes Produkt y zu bilden:

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2022}{2023}$$

Dann folgern wir daraus $x^2 < x \cdot y = \frac{1}{2023}$. Aber wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2023}} > \frac{1}{\sqrt{2048}} = \frac{\sqrt{2}}{64} > \frac{1.4}{70} = \frac{1}{50} > \frac{1}{55}$$

können wir auf diese Weise nicht die Behauptung beweisen. Jedoch finden wir für alle $k \geq 2$ die Abschätzung

$$\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}<\frac{\sqrt{3\cdot k-2}}{\sqrt{3\cdot k+1}},$$

die wir durch äquivalentes Umformen bestätigen können. Damit folgern wir für jede ganze Zahl $k\geq 2$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}<\frac{1}{\sqrt{3\cdot k+1}}$$

Speziell für $k=1011$ führt dies zu $x<\frac{1}{\sqrt{3034}}<\frac{1}{\sqrt{3025}}=\frac{1}{55}$. ❑

Aufgabe 7[7]. Sei $n>1$ eine natürliche Zahl. Man beweise

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}}<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2\cdot n)}<\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$$

Lösungshinweise: Setzen wir wieder

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-1}{2\cdot n}$$

und

$$q=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}$$

so finden wir

$$p^2<p\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-1}{2\cdot n}\cdot\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}=\frac{1}{2\cdot n+1}<\frac{1}{2\cdot n}$$

Ziehen wir sowohl für die linke Seite als auch für die rechte Seite die Quadratwurzel, so erhalten wir wie behauptet $p<\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$.

Setzen wir dagegen

$$q'=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-2}{2\cdot n-1}$$

so gilt die Abschätzung

[7] Aufgabe 2020-56, $\sqrt{WURZEL}$ 7/2021, S. 162.

$$p^2 > p \cdot q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot n - 2}{2 \cdot n - 1} \cdot \frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n} = \frac{1}{4 \cdot n} = \frac{1}{\left(2 \cdot \sqrt{n}\right)^2}$$

und wir finden $p > \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}}$. ❑

Aufgabe 8. Es sei $T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$. Zeigen Sie

$$T(2) \cdot T(3) \cdot T(4) \cdot \ldots \cdot T(100) > \frac{2}{3}$$

Lösungshinweise: Wir setzen $a_n = n - 1$, $b_n = n^2 + n + 1$, $c_n = n + 1$ und $d_n = n^2 - n + 1$. Dann gilt für jedes $n = 2, 3, \ldots, 100$

$$T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n-1) \cdot (n^2 + n + 1)}{(n+1) \cdot (n^2 - n + 1)} = \frac{a_n \cdot b_n}{c_n \cdot d_n}$$

Nun erkennen wir aber die Rekursionen $a_{n+2} = (n+2) - 1 = n + 1 = c_n$ sowie $d_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1 = b_n$. Multiplizieren wir also wie gefordert die 99 Brüche, so können wir a_4 mit c_2, a_5 mit c_3, …, a_{100} mit c_{98} kürzen, aber auch d_3 mit b_2, d_4 mit b_3, …, d_{100} mit b_{99}. Es verbleiben im Produkt der Brüche

$$T(2) \cdot T(3) \cdot \ldots \cdot T(100) = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot b_{100}}{c_{99} \cdot c_{100} \cdot d_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10101}{100 \cdot 101 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 10101}{3 \cdot 10100} > \frac{2}{3}$$

❑

Wettbewerbe: Bundesrunde der 61. Mathematik-Olympiade

Endlich wieder als Präsenzveranstaltung: Die Bundesrunde der 61. Mathematik-Olympiade fand vom 15. bis 18. Mai 2022 in Magdeburg statt. Der Verein eLeMeNTe e.V. (www.elemente.org) organisierte den Wettbewerb und gestaltete nach zwei Pandemie-bedingten digitalen Runden das erlebnisreiche Treffen für die rund 200 Teilnehmenden. Der Ministerpräsident von Sachsen-Anhalt, Dr. REINER HASELOFF, übernahm die Schirmherrschaft. Unter www.mo2022.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Am Sonntag, dem Anreisetag, fand der Begrüßungsabend im Jahrtausendturm statt. Die beiden Klausuren wurden im Werner-von-Siemens-Gymnasium geschrieben. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in Magdeburg. Die

Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand in der Johanniskirche statt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie 5 Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen und 4 ukrainische Gastschüler an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 78 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von mehr als 40 aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 25 Anerkennungsurkunden[8]. Die sächsische Mannschaft konnte wieder in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erobern. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[9] belegte sie mit 22 Punkten den 4. Platz. Bayern führt mit 38 Wertungspunkten die Länderliste souverän an, gefolgt von Niedersachsen (31 Wertungspunkte) und Nordrhein-Westfalen (27 Wertungspunkte). Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II und III. Preise bedeuten für Sachsen ein I. Preis und je drei II. und III. Preise den Platz 5 (insgesamt 7 Preise). Auch hier führen Bayern (drei I. Preise, insgesamt 12 Preise), Thüringen (zwei I. Preise, insgesamt zwei Preise), Niedersachsen (ein I. Preis, insgesamt 11 Preise) und Nordrhein-Westfalen (ein I. Preis, insgesamt 10 Preise).

Den sächsischen Preisträgern unseren ***herzlicher Glückwunsch*!**

I. Preis	OLIVER ECKSTÄDT (Kl. 8, Nexö-Gymn. Dresden)
II. Preise	JIEOH AHN (Kl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	MELIA HAASE (Kl. 10, Gymn. Zschopau)
	TIM THIEME (Kl. 10, Kepler-Gymn. Chemnitz)
III. Preise	AMOS VOGEL (Kl. 8, Lessing-Gymn. Hohenstein-Ernstthal)
	TOBIAS PÖTZSCH (Kl. 9, Scholl-Gymn. Taura)
	KARL SCHOMERUS (Kl. 10, Ostwald-Gymn. Leipzig)
Anerkennung:	LILIA DIETERLEIN (Kl. 8, Freies Gymn. Naunhof)
	ROBERT FLUGRAT (Kl. 8, Gymn. Franziskaneum Meißen)
	ANTON NÜSKE (Kl. 11, Nexö-Gymn. Dresden).

In alten Mathe-Büchern geblättert

In einem Projekt der Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg werden historische Schriften des 16. bis

[8] Die vollständige Liste ist unter www.mo2022.de verfügbar.

[9] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

18. Jahrhundert digitalisiert und für die Öffentlichkeit zugänglich gezeigt. Das 288-seitige Buch von JOHANN NICOLAUS MÜLLER[10] bietet unter

https://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18/content/titleinfo/11428278

interessante Einblicke in die Vermittlung der Geometrie des 18. Jahrhunderts. Bezugnehmend zum aktuellen Thema 06 dieses Heftes wurde der folgende Auszug gewählt. Dabei wurde versucht, die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beizubehalten. In Anlehnung an den Schrifttyp des Originals wird der Schrifttyp Bertholdr Mainzer Fraktur verwendet. Wie hier dargestellt wurden auch im Original für die Bezeichnungen von Punkten und Strecken bzw. Bögen ein geradliniger Schrifttyp eingesetzt.

Dr. Johann Nicolauſ Müller.

Anweiſung zur Geometrie für Anfänger.

Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1790.

Capitel XXXVIII (S. 212 – 219)

In reguläre Figuren einen Kreis zu beſchreiben.

§. 154 I.

Bisher lernten wir geradlinichten Figuren in und um einen Kreis beſchreiben. Jetzt wollen wir auch lernen, wie ein Kreis in dieſelben gezeichnet werden kann.

Erſte Aufgabe. In einem gegebenen regulären oder irregulären Dreyeck a b c einen Kreis zu beſchreiben:
Mit einer beliebigen Dehnung des Zirkels machet auf den Puncten, a und c, die Bogen d e und f g:
Die Weite d e nehmet hernach in den Zirkel, und machet damit aus den Puncten, d und e, einwärts dem Dreyeck nach m zu, zween Bogen, die ſich in m ſchneiden:
Eben ſo machet mit unverrückter Dehnung des Zirkels, aus f und g, wieder einwärts dem Kreis nach n zu, zween andere Bogen, deren gemeinſchaftlicher Durchſchnitt bey n iſt:
Aus den Endpuncten a und c, ziehet hierauf durch die Durchſchnittspuncten, m und n, gerade Linien, die ſich, gehörig verlängert, in k ſchneiden:
Von dem Durchſchnittspunct k fället auf ac, das Loth oder Perpendikel kx, nach der Anweiſung, die wir in §. 42 gegeben haben:

[10] Johann Nicolaus Müller (geb. 1754 in Zweibrücken – gest. 1797 in Göttingen), Theologe, Mathematiker, Physiker, Privatlehrer in Göttingen.

Jetzt ſetzet die eine Zirkelſpitze in den Durchſchnittspunct k, öffnet die andere bis in den Punct x, und beſchreibet mit dem Halbmeſſer oder Radius kx, aus k, einen Kreis; ſo wird ſolcher nicht nur ganz innerhalb dem Dreyeck a b c liegen. Sondern er wird auch jede Seite des Dreyecks in einem Punct berühren.
Aus dieſem iſt ſehr leicht einzuſehen, wie innerhalb eines jeden Dreyecks a b c, ein Kreis beſchreiben werden kann.
Bey den folgenden Aufgaben aber lernen wir nun einen Kreis in reguläre Figuren zeichnen.

Zweite Aufgabe. In ein Quadrat oder reguläres Viereck a b c d einen Kreis zu beſchreiben: ...

§. 155. II.

Dritte Aufgabe. Einen Kreis in ein reguläres Fünfeck einzuzeichnen: ...

Vierte Aufgabe. Innerhalb einem regulären Sechſeck einen Kreis ſo zu beſchreiben, daß er jede Seite des Sechſecks berühret: ...

§. 156. III.

Fünfte Aufgabe. Einen Kreis in ein reguläres Siebeneck ſo zu zeichnen, daß jede Seite des Siebenecks davon berühret wird. ...

Sechſte Aufgabe. Es wird ein reguläres Achteck abcdefgh gegeben, und man ſoll in demſelben einen Kreis beſchreiben, der jede Seite des Vielecks in einem Punct berühret: ...

§. 157. IV.

Siebente Aufgabe. In dem gegebenen regulären Neuneck abcdefghi einen Zirkel oder Kreis zu beſchreiben, der jede Seite vom Neuneck in einem Punct berühret: Verfahret auf folgende Weiſe:
Nehmet zwo Seiten deſſelben, ab und ai, die den Polygon- oder Vieleckswinkel b a i einſchlieſſen, und theilet ſie bey den Puncten, p und q, nach §. 51 oder 52 in zwey gleiche Hälften oder Theile:
Aus den Theilungspuncten, p und q, ziehet nach den gerade gegenüberſtehenden Winkelpuncten, e und f, die geraden Linien, pe und gf, die ſich in einem Punct k ſchneiden werden:
Faſſet hierauf die Weite oder Entfernung, kp oder kq, in den Zirkel, und beſchreibet damit auf dem Durchſchnittspunct k einen Kreis; dieſer wird jede Seitenlinie oder Seite des Neunecks, nur in einem Punct berühren.

Achte Aufgabe. Es ſey das reguläre Zehneck abcdefghil gegeben, und es ſoll darin ein Kreis ſo beſchrieben werden, daß er jede Seite des Zehnecks nur berühret, aber nicht ſchneidet.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 06 - Einbeschriebene Kreise (III) 3
Packungsdichte von Kreisen im Einheitsquadrat 10
Summen und Produkte – einfach kürzbar 13
Wettbewerbe: Bundesrunde der 61. Mathematik-Olympiade 20
In alten Mathe-Büchern geblättert 21

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2021/22)

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
05/2022 (Jun. 2022)	Thema 06.3	Einbeschriebene Figuren (Kreise)	MO610945
04/2022 (Mai 2022)	Thema 15	Stammbrüche	MO610933 MO611032
03/2022 (Apr. 2022)	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610932 MO611031
02/2022 (März 2022)	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
01/2022 (Jan. 2022)	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
11/2021 (Dez.2021)	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
09/2021 (Okt. 2021)	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
08/2021 (Sept. 2021)	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

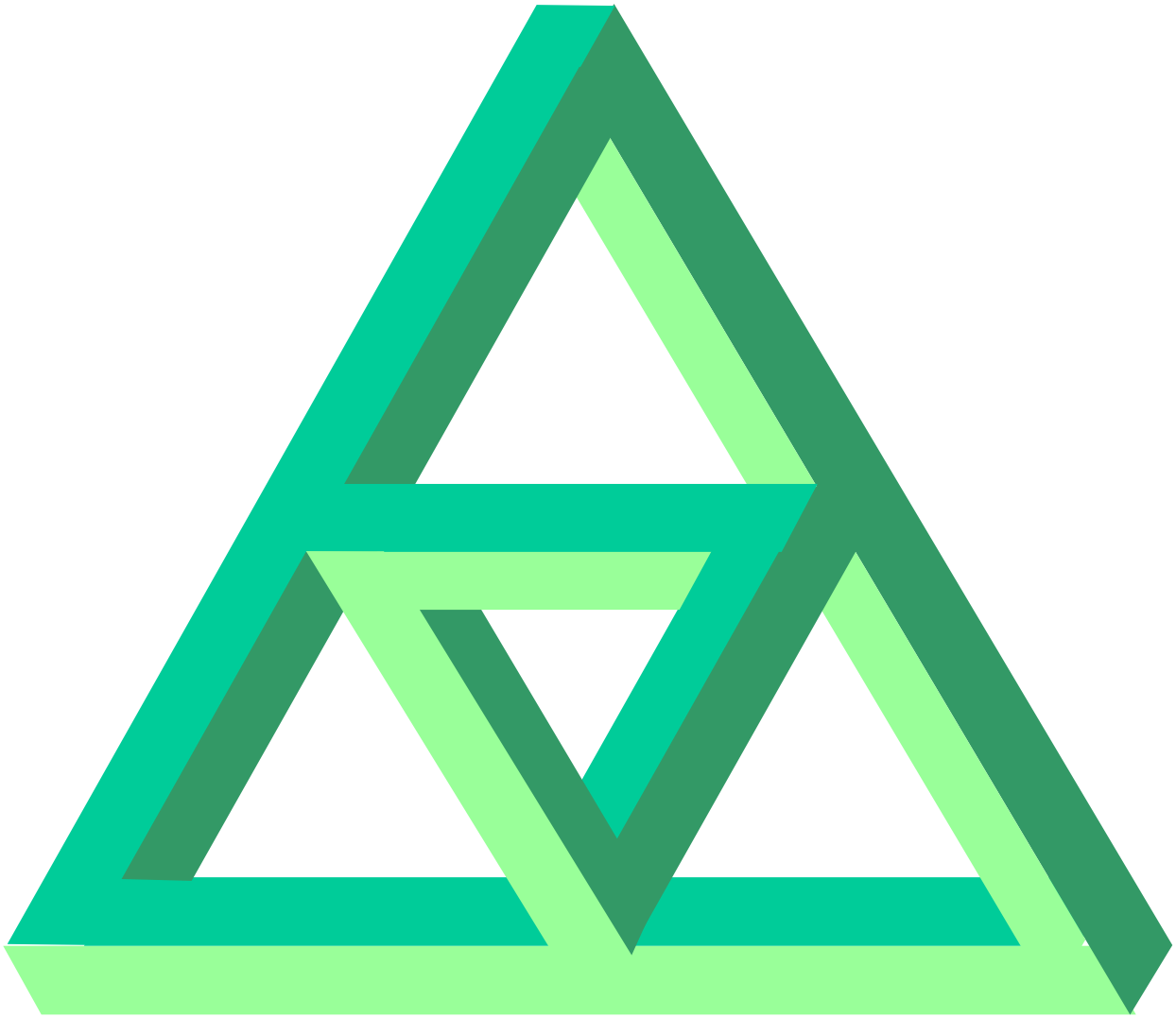
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06/2022 (Juli 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgaben **MO610941/MO611041** stehen die Anforderungen bei Aufgaben mit Betragszeichen in Gleichungen und Gleichungssystemen im Mittelpunkt. Durch eine vollständige Fallunterscheidung entstehen Teilaufgaben, in denen keine Betragszeichen mehr vorkommen. Der entstehende Mehraufwand in der Lösungsdarstellung muss unter Klausurbedingungen kompensiert werden, indem die Analogien der verschiedenen Fälle erkannt und ausgenutzt werden.

Die Aufgaben **MO610946/MO611046** erwiesen sich als sehr anspruchsvoll, weil ausgehend von speziellen Lösungen Konstruktionsvorschriften für unendlich viele Beispiele zu finden waren. Das Grundprinzip des Lösungsansatzes ist aber aus geometrischen und arithmetischen Problemstellungen gut bekannt.

Ausführlich werden Zerlegungen von Rechtecken durch flächengleiche Teilrechtecke diskutiert und damit die **KZM-Aufgabe 6-2** vertieft. Hier spielen sowohl die Suche nach speziellen Lösungen als auch rekursive Konstruktionsvorschriften eine entscheidende Rolle.

Mit einem Auszug aus dem 20. Jahrgang der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ (1889) wird für die **KZM-Aufgabe 7-5B** die historische Quelle zitiert.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 16 – Betragszeichen: Gleichungen und Gleichungssysteme

Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ gilt als allgemein bekannt. In Aufgabe **MO490921** wurde dazu noch folgender Hinweis gegeben:

> *Der Betrag einer ganzen Zahl ist sehr einfach zu bestimmen. Zum Beispiel gilt:* $|+8| = +8, |-8| = +8, |+7| = +7, |-7| = +7, |0| = 0.$

Wettbewerbsaufgaben mit Betragszeichen können wir prinzipiell durch Fallunterscheidung lösen, indem wir alle Situationen untersuchen, für die wir die Gleichungen oder Gleichungssysteme ohne Betragszeichen umformulieren können.

Aufgabe 16.01 - MO610941/MO611041. Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\frac{10}{1+|x|} + y = 4 \quad ; \quad \frac{10}{1+|y|} + x = 4\,.$$

Lösungshinweise: Wir führen eine Fallunterscheidung durch, mit der das Gleichungssystem ohne Betragszeichen formuliert werden kann.

Fall 1: x und y sind beide nichtnegativ. Dann können wir wegen $|x| = x$ und $|y| = y$ die Betragsstriche weglassen. Die linke Gleichung formen wir um zu

$$1 + y = 5 - \frac{10}{1+x}\,.$$

Wegen $1 + y \geq 1 > 0$ können wir dies in die rechte Gleichung einsetzen und äquivalent umformen. Wir erhalten:

$$\frac{10}{5 - \frac{10}{1+x}} + x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot (1+x)}{(1+x) - 2} = 4 - x.$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach Multiplikation mit $(x-1)$ zur quadratischen Gleichung $x^2 - 3 \cdot x + 6 = 0$. Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erkennen wir, dass die Diskriminante $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6$ negativ ist, weshalb dieser Fall keine Lösung hat.

Fall 2: x ist negativ, y ist nichtnegativ, d.h. $|x| = -x$ und $|y| = y$. Die linke Gleichung ist damit gleichbedeutend zu

$$1 + y = 5 - \frac{10}{1-x}\,.$$

Wegen $1 + y \geq 1 > 0$ können wir dies in die rechte Gleichung einsetzen und äquivalent umformen. Wir erhalten:

$$\frac{10}{5-\frac{10}{1-x}}+x=4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\cdot\,(1-x)}{(1-x)-2}=4-x.$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach Multiplikation mit $(-1-x)$ zur quadratischen Gleichung $x^2-x-6=0$. Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erkennen wir, dass $x_1=-2$ und $x_2=3$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind. Wegen der Voraussetzung $x<0$ kann in diesem Fall nur x_1 eine Lösung sein und wir erhalten mit $y=4-\frac{10}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$ das Lösungspaar $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$, das wir durch eine Probe bestätigen:

$$\frac{10}{1+|-2|}+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4 \quad ; \quad \frac{10}{1+\left|\frac{2}{3}\right|}+(-2)=\frac{30}{5}-2=4.$$

Fall 3: x ist nichtnegativ, y ist negativ, d.h. $|x|=x$ und $|y|=-y$. Dieser Fall entspricht dem Fall 2, weil durch Vertauschen der Variablen x und y die beiden Ausgangsgleichungen getauscht werden. Wir finden somit das Lösungspaar $\left(\frac{2}{3},-2\right)$.

Fall 4: x und y sind beide negativ, d.h. $|x|=\,-x$ und $|y|=\,-y$. Die linke Gleichung ist gleichbedeutend zu

$$1-y=-3+\frac{10}{1-x}\ .$$

Wegen $1-y\geq 1>0$ können wir dies in die rechte Gleichung einsetzen und äquivalent umformen. Wir erhalten:

$$\frac{10}{-3+\frac{10}{1-x}}+x=4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10\cdot\,(1-x)}{-3\cdot(1-x)+10}=4-x.$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach Multiplikation mit $(3\cdot x+7)$ zur quadratischen Gleichung $x^2-5\cdot x-6=0$. Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erkennen wir, dass $x_1=-1$ und $x_2=6$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind. Wegen der Voraussetzung $x<0$ kann in diesem Fall nur x_1 eine Lösung sein und wir erhalten mit $y=4-\frac{10}{1-(-1)}=-1$ das Lösungspaar $(-1,-1)$, das wir durch eine Probe bestätigen: $\frac{10}{1+|-1|}+(-1)=4$.

Einzige Lösungspaare sind $(-1;-1)$, $\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ und $\left(\frac{2}{3};-2\right)$. ❑

Aufgabe 16.02 – MO561015. Wir betrachten die Funktion $f(x)=x\cdot|x|-2\cdot x$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie durch Argumentieren anhand des Graphen dieser Funktion f diejenigen reellen Zahlen s, für welche die Gleichung $x \cdot |x| - 2 \cdot x = s$ genau zwei verschiedene Lösungen für x hat.

Hinweis: Das Ablesen von Werten aus einer Zeichnung führt nur zu einer Vermutung. Das ist jedoch zulässig, wenn deren Korrektheit mit einer Probe bestätigt wird.

Lösung Teil a) Wir können den Graphen auf der Basis einer Wertetabelle skizzieren.

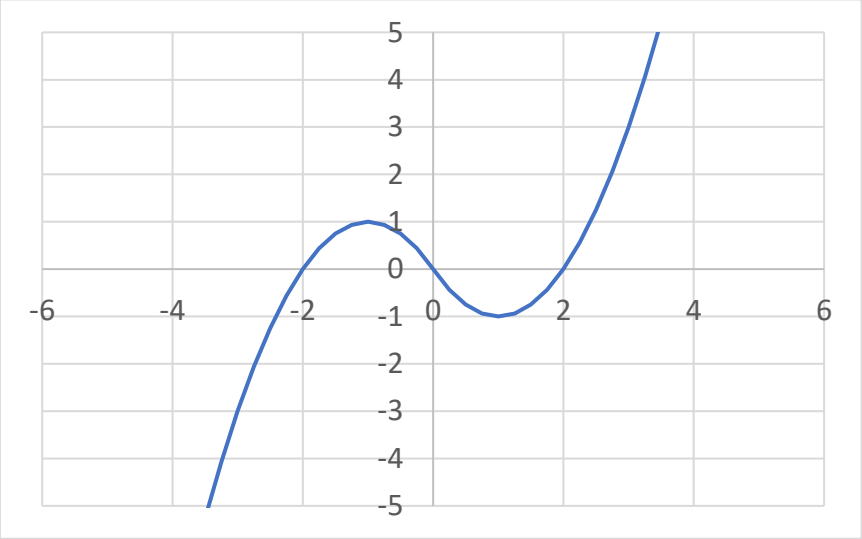
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	0	1	0	-1	0	5

Wir charakterisieren die Teilgraphen aber genauer: Aufgrund des Betragszeichens führen wir dazu eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Für $x \geq 0$ gilt $f(x) = x^2 - 2 \cdot x = (x-1)^2 - 1$. Der Graph G^+ dieser Funktion ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S_1 = (1; -1)$.

Fall 2: Für $x \leq 0$ gilt $f(x) = -x^2 - 2 \cdot x = -(x+1)^2 + 1$. Der Graph G^- dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S_2 = (-1;\ 1)$.

Der Graph von f(x) besteht damit aus den beiden Teilgraphen G^+ und G^-, die im Punkt $S = (0; 0)$ zusammentreffen.



Lösungshinweise Teil b) Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = s$ entspricht der Anzahl der Schnittpunkte der horizontalen Geraden $y = s$ mit dem Graphen der Funktion $f(x)$. Diese Anzahlen lassen sich unmittelbar aus dem Graphen ablesen:

Es sei $s > 1$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten[3] $\left(1 + \sqrt{1+s}; s\right)$ und keinen mit dem Teilgraphen G^-, also insgesamt 1 Schnittpunkt.

Es sei $s = 1$. Die Horizontale $y = s$ enthält S_2 und einen weiteren Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $\left(1 + \sqrt{2}, 1\right)$, also insgesamt 2 Schnittpunkte.

Es sei $0 < s < 1$. Die Horizontale $y = s$ hat zwei Schnittpunkte mit dem Teilgraphen G^- mit den Koordinaten $\left(-1 \pm \sqrt{1-s}; s\right)$ und einen mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $\left(1 + \sqrt{1+s}; s\right)$, also insgesamt 3 Schnittpunkte.

Es sei $s = 0$. Die Horizontale $y = s$ enthält S sowie die Punkte $(-2; 0)$ und $(2; 0)$, also insgesamt 3 Schnittpunkte.

Es sei $-1 < s < 0$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^- mit den Koordinaten $\left(-1 - \sqrt{1-s}; s\right)$ und zwei mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $\left(1 \pm \sqrt{1+s}; s\right)$, also insgesamt 3 Schnittpunkte.

Es sei $s = -1$. Die Horizontale $y = s$ enthält S_1 und einen weiteren Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $\left(-1 - \sqrt{2}; -1\right)$, also insgesamt 2 Schnittpunkte.

Es sei $s < -1$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^- mit den Koordinaten $\left(-1 - \sqrt{1-s}; s\right)$ und keinen mit dem Teilgraphen G^+, also insgesamt 1 Schnittpunkt.

Die Gleichung hat also für $s = 1$ und $s = -1$ genau zwei Lösungen. ❑

Lösungsvariante: Obwohl in der Aufgabenstellung ausdrücklich die Argumentation anhand des Graphen der Funktion $f(x)$ gefordert wurde (und deshalb in der Lösungsdarstellung der Bezug zum Graphen erkennbar sein soll!), wollen wir die Lösungen der Gleichung $x \cdot |x| - 2 \cdot x - s = 0$ auch rechnerisch bestimmen. Wir beachten dabei, dass wir die Anzahl der Nullstellen sowohl im Bereich $x < 0$ als auch im Bereich $x \geq 0$ zählen müssen.

Für $x < 0$ erhalten wir mittels Lösungsformel für die quadratische Gleichung $f(x) = -x^2 - 2x - s = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-s}$.

- Ist $s > 1$, dann ist die Diskriminante negativ und es gibt keine reellwertigen Lösungen.
- Für $s = 1$ ist der Wert $x = -1$ die einzige Lösung der Gleichung.

[3] Da eine Argumentation anhand des Graphen genügt, müssen die Schnittpunkt-Koordinaten nicht exakt angegeben werden.

- Für $0 \leq s < 1$ ist die Diskriminante nichtnegativ und wegen $1 \geq \sqrt{1-s}$ gibt es zwei Lösungen.
- Für $s < 0$ entfällt in diesem Fall die positive Lösung x_1 und es gibt genau eine Lösung.

Für $x \geq 0$ erhalten wir mittels Lösungsformel für die quadratische Gleichung $f(x) = x^2 - 2x - s = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+s}$.

- Ist $s < -1$, dann ist die Diskriminante negativ und es gibt keine reellwertigen Lösungen.
- Für $s = -1$ ist der Wert $x = 1$ die einzige Lösung der Gleichung.
- Für $-1 < s \leq 0$ ist die Diskriminante nichtnegativ und wegen $1 \geq \sqrt{1+s}$ gibt es zwei Lösungen.
- Für $0 < s$ entfällt in diesem Fall die negative Lösung x_2 und es gibt genau eine Lösung.

Obwohl diese Herleitung kürzer erscheint, müssen wir bei der Zusammenfassung die Fallunterscheidung die obige auzsführliche Argumentation führen. So finden wir, dass es nur für $s = 1$ und $s = -1$ genau zwei Lösungen gibt:

	Anzahl Schnittpunkte		
	$x < 0$	$x \geq 0$	Gesamt
$s > 1$	0	1	1
$s = 1$	1	1	2
$0 < s < 1$	2	1	3
$s = 0$	2*	2*	3
$0 > s > -1$	1	2	3
$s = -1$	1	1	2
$-1 > s$	1	0	1

* der Schnittpunkt $(0; 0)$ ist in beiden Graphen enthalten.

Aufgabe 16.03 – MO570922. Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -4 \cdot |x-4| + 8$ und $b(x) = -|x-8| + 6$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen a und b in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
b) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle haben.
c) Ermitteln Sie für die Funktion b alle weiteren Nullstellen.
d) Ermitteln Sie reelle Zahlen p, q, r, für die die Funktion c mit der Gleichung $c(x) = p \cdot |x-q| + r$ eine Nullstelle bei $x_1 = 2$ hat und ihren größten Wert 7 für $x_2 = 6$ annimmt.
e) Ergänzen Sie im Koordinatensystem aus a) den Graphen der Funktion c.

Lösungshinweise: Wir erkennen, dass die Funktionen stückweise linear sind. Deshalb genügt es, einige Funktionswerte zu bestimmen. Wir wählen die Argumente so, dass die Auswirkungen der Betragszeichen berücksichtigt werden, z.B.

x	2	3	4	5	6
$a(x)$	$-4 \cdot 2 + 8 = 0$	$-4 \cdot 1 + 8 = 4$	$-4 \cdot 0 + 8 = 8$	$-4 \cdot \lvert -1 \rvert + 8 = 4$	$-4 \cdot \lvert -2 \rvert + 8 = 0$

x	6	7	8	9	10
$b(x)$	$-\lvert -2 \rvert + 6 = 4$	$-\lvert -1 \rvert + 6 = 5$	$-0 + 6 = 6$	$-1 + 6 = 5$	$-2 + 6 = 4$

Lösungshinweise Teil b) Aus der Wertetabelle und den daraus gezeichneten Funktionsverläufen vermuten wir $x = 2$ als gemeinsame Nullstelle. Mit der Probe $a(2) = -4 \cdot |2 - 4| + 8 = 0$ und $b(2) = -|2 - 8| + 6 = 0$ ist der geforderte Nachweis vollständig erbracht.

Lösungshinweise Teil c) Auch hier genügt es, anhand der Graphen zu erkennen, dass nur zwei Nullstellen möglich sind und die zweite Nullstelle vermutlich bei $x = 14$ gegeben ist. Die Probe bestätigt es: $b(14) = -|14 - 8| + 6 = 0$.

Setzen wir für die rechnerische Nullstellenbestimmung $b(x) = 0$, so können wir die Gleichung zu $|x - 8| = 6$ vereinfachen. Mit der erforderlichen Fallunterscheidung finden wir

$$x < 8\text{: } |x - 8| = -(x - 8) = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2\ (< 8),$$
$$x \geq 8\text{: } |x - 8| = x - 8 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 14\ (> 8)$$

Lösungshinweise zu Teil d) Auch bei dieser Aufgabenformulierung genügt es, geeignete Zahlen p, q, r ohne Herleitung anzugeben und nachzuweisen, dass diese Zahlen alle Bedingungen erfüllen. In den Lösungshinweisen des Aufgabenausschusses steht hierzu:

> *„Anmerkung: Man kann die reellen Zahlen auch ermitteln, indem man sie glücklich errät, …“*

Anstatt zu raten können wir besser anhand der Funktionen a und b wichtige Eigenschaften des Graphens ablesen.

- Den größten Wert beobachten wir, wenn der Ausdruck in den Betragszeichen 0 wird. Damit finden wir $c(2) = 7 = r$ mit $q = 6$.
- Da $x_1 = 2$ links vom Maximum der Funktion c liegt, schreiben wir die Funktion für $x < q$ in der Form $c(x) = -p \cdot (x - 6) + 7$, Damit finden wir $c(2) = -p \cdot (2 - 6) + 7 = 0$. Dies wird für $p = \frac{7}{4}$ erfüllt.

Wir können aber auch die gesuchten Zahlen mittels eines Gleichungssystems ermitteln, wenn wir aus den Graphen von a und b verallgemeinert haben, dass es für

Funktionen dieses Typs zwei Nullstellen gibt, die symmetrisch zum Maximum der Funktion liegen. Dann gilt

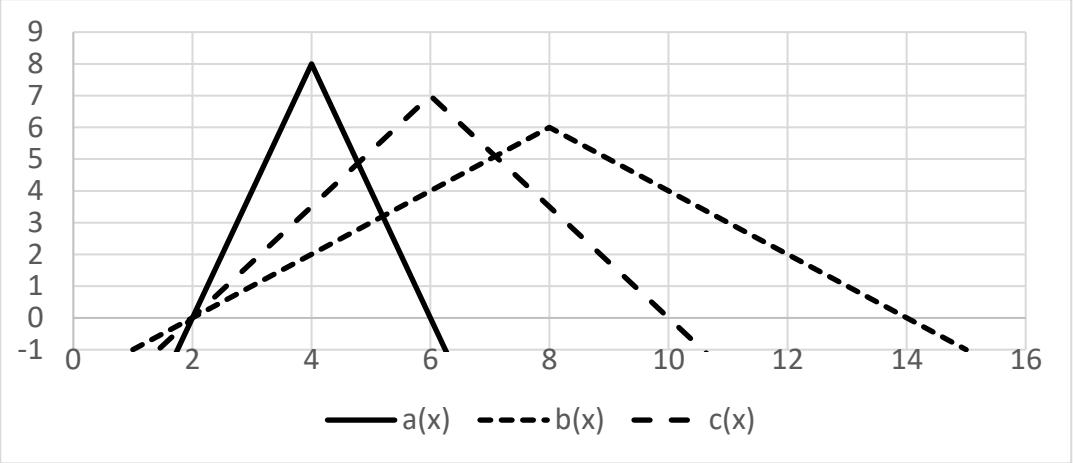
$$c(2) = -p \cdot |2 - q| + r = 0,$$
$$c(6) = -p \cdot |6 - q| + r = 7,$$
$$c(10) = -p \cdot |10 - q| + r = 0.$$

Durch Gleichsetzen der 1. und 3. Gleichung erhalten wir

$$|2 - q| = |10 - q|,$$

nachdem wir den Parameter r subtrahierten und durch $-p$ teilten (da $c(x)$ nicht konstant ist, gilt $p \neq 0$). Wegen $2 < q < 10$ und $2 - q < 10 - q$ können nicht beide Differenzen gleichzeitig negativ oder gleichzeitig positiv sein. Es muss also $2 - q < 0 < 10 - q$ gelten, womit die Gleichung äquivalent zu $q - 2 = 10 - q$ wird. Wir erhalten also $q = 6$. Den Wert $r = 7$ finden wir dann unmittelbar aus der 2. Gleichung. Setzen wir schließlich die Werte für q und r in die 3. Gleichung ein, erhalten wir $p = \frac{7}{4}$.

Lösung zu den Teilaufgaben a und e)



Aufgabe 16.04 – MO580941/MO581041. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$|x + y| + z = 4$$
$$|y + z| + x = 5$$
$$|z + x| + y = 6$$

Lösungshinweise: Wir können die Gleichungen durch folgende Fallunterscheidungen ohne Betragszeichen schreiben.

Fall 1 (alle drei Terme in den Betragszeichen sind nichtnegativ): $x + y \geq 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x \geq 0$. Damit können wir alle Betragszeichen weglassen. Das entsprechende

Gleichungssystem hat aber keine Lösungen, da in den drei Gleichungen die linken Seiten übereinstimmen, die rechten Seiten aber nicht.

Fall 2 (genau zwei Terme in den Betragszeichen sind nichtnegativ): $x + y \geq 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x < 0$. Damit können wir in zwei Gleichungen die Betragszeichen weglassen. Das entsprechende Gleichungssystem aus diesen zwei Gleichungen hat aber keine Lösungen, da die linken Seiten übereinstimmen, die rechten Seiten aber nicht.

Ebenso gibt es mit gleicher Argumentation keine Lösungen für $x + y \geq 0$, $y + z < 0$ und $z + x \geq 0$ sowie für $x + y < 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x \geq 0$.

Fall 3.1 (genau ein Term in den Betragszeichen ist nichtnegativ): $x + y \geq 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$x + y + z = 4 \quad ; \quad -y - z + x = 5 \quad ; \quad -z - x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $2 \cdot x = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $2 \cdot y = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot z = 11$. Durch eine Probe bestätigen wir, dass $\left(\frac{9}{2}; 5; -\frac{11}{2}\right)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\left|\frac{9}{2} + 5\right| - \frac{11}{2} = \frac{19}{2} - \frac{11}{2} = 4,$$
$$\left|5 - \frac{11}{2}\right| + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5,$$
$$\left|-\frac{11}{2} + \frac{9}{2}\right| + 5 = \frac{2}{2} + 5 = 6.$$

Fall 3.2: $x + y < 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x < 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$-x - y + z = 4 \quad ; \quad y + z + x = 5 \quad ; \quad -z - x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $2 \cdot z = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot x = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $2 \cdot y = 11$. Durch eine Probe erkennen wir, dass $\left(-5; \frac{11}{2}; \frac{9}{2}\right)$ keine Lösung des Gleichungssystems ist, weil schon die erste Gleichung nicht bestätigt werden kann:

$$\left|-5 + \frac{11}{2}\right| + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \neq 4.$$

Fall 3.3: $x + y < 0$, $y + z < 0$ und $z + x \geq 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$-x - y + z = 4 \quad ; \quad -y - z + x = 5 \quad ; \quad z + x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $-2 \cdot y = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $2 \cdot z = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $2 \cdot x = 11$. Durch eine Probe erkennen wir, dass $\left(\frac{11}{2}; -\frac{9}{2}; 5\right)$ keine Lösung des Gleichungssystems ist, weil schon die erste Gleichung nicht erfüllt ist:

$$\left|\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\right| + 5 = \frac{2}{2} + 5 = 6 \neq 4.$$

Fall 4: (kein Term in den Betragszeichen ist nichtnegativ): $x + y < 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$-x - y + z = 4 \quad ; \quad -y - z + x = 5 \quad ; \quad -z - x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $-2 \cdot y = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot x = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot z = 11$. Durch eine Probe bestätigen wir, dass $\left(-5; -\frac{9}{2}; -\frac{11}{2}\right)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\left|-5 - \frac{9}{2}\right| - \frac{11}{2} = \frac{19}{2} - \frac{11}{2} = 4,$$
$$\left|-\frac{9}{2} - \frac{11}{2}\right| - 5 = \frac{20}{2} - 5 = 5,$$
$$\left|-\frac{11}{2} - 5\right| - \frac{9}{2} = \frac{21}{2} - \frac{9}{2} = 6.$$

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Damit sind alle Lösungen gefunden. ❑

Lösungsvariante: Anstelle der umfangreichen Fallunterscheidung kann folgende trickreiche Vorbetrachtung geführt werden. Angenommen $(x; y; z)$ wäre eine Lösung mit $y + z \geq 0$. Dann finden wir die Abschätzung

$$5 = |y + z| + x = y + x + z \leq |x + y| + z = 4.$$

Da dies nicht richtig sein kann, gilt $y + z < 0$. Angenommen, es wäre $x + z \geq 0$. Dann finden wir die Abschätzung

$$6 = |x + z| + y = x + z + y \leq |x + y| + z = 4.$$

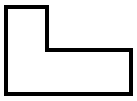
Da auch dies nicht richtig sein kann, gilt $x + z < 0$. Damit verbleiben nur noch zwei Fälle:

- *Fall 1':* $x + y \geq 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Dies entspricht dem Fall 3.1 in obiger Lösungsdarstellung.
- *Fall 2':* $x + y < 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Dies entspricht dem Fall 4 in obiger Lösungsdarstellung.

Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion

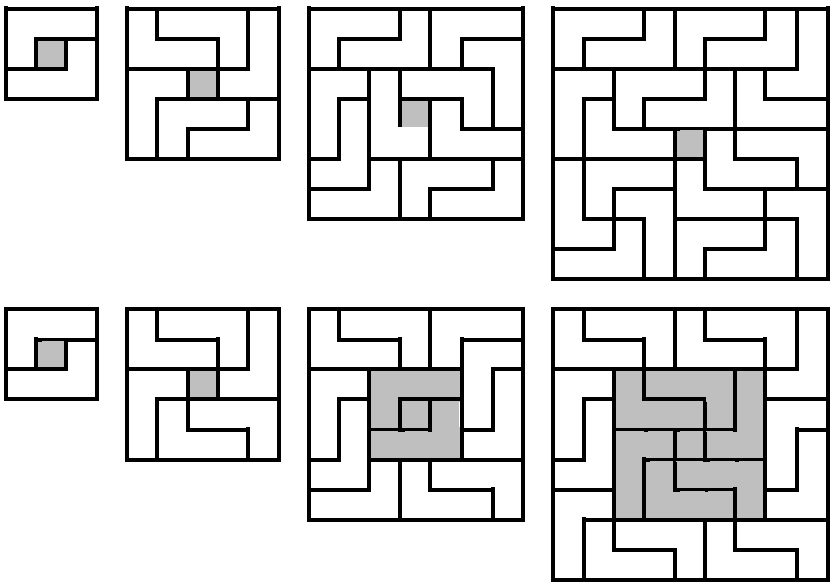
Für einen (Nicht-) Existenzbeweis anhand unendlich vieler (Gegen-) Beispiele können wir eine explizite Bildungsvorschrift beschreiben, mit der wir für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ (mit geeigneter Startzahl n_0) solche Beispiele erzeugen können. Vorteilhaft kann es aber auch sein, nur konkrete Beispiele für kleine n anzugeben und dann zu beschreiben, wie wir aus diesen Beispielen rekursiv neue Beispiele erzeugen können. Bei der Diskussion zur Zerlegung von Dreiecken und Quadraten[4] haben wir dieses Vorgehen bereits angewandt. In diesem Heft wird im Beitrag „Primäre Zerlegungen“ ebenfalls dieser Ansatz gewählt. Wir erinnern zunächst an

Aufgabe MO481021[5]. Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$-Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll in L-Stücke der nebenstehend abgebildeten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.



a) Bestimmen Sie für $n = 3, 5, 7, 9$ jeweils eine solche Zerlegung.
b) Zeigen Sie, dass für beliebiges ungerades n mit $n \geq 3$ die Zerlegung des $n \times n$-Schachbretts ohne mittleres Feld in eine gerade Anzahl von L-Stücken möglich ist.

Lösungshinweise Teil a) Für die Fälle $n = 3, 5, 7, 9$ sind beispielsweise folgende Zerlegungen möglich (es genügt eine Zeichnung, in der die Einhaltung der Bedingungen ohne weitere Kommentare ersichtlich ist):

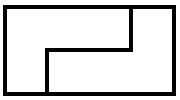


$n = 3$ $n = 5$ $n = 7$ $n = 9$

[4] S. Thema 12.3/4 – Zerlegung einer Dreiecks-/Quadratfläche (Heft 03/2022)
[5] s. Thema 12.2 – Ebene Bedeckungen (Heft 11/2021)

Während in der oberen Reihe Zerlegungen zu sehen sind, die offenbar keine verallgemeinerungsfähige Strukturen zeigen[6], unterstützt die untere Reihe die Lösungsfindung für Teil b.

Lösungshinweise Teil b) Nehmen wir an, dass wir für eine Zahl n bereits eine Zerlegung in gerade viele Teile gefunden haben. Wir konstruieren nun eine Zerlegung für $n+4$, indem wir um das $n \times n$-Quadrat einen Ring der Breite 2 legen, der aus nebenstehenden Elementen besteht.



Für die ungerade Zahl n ist entweder $n+1$ oder $n+3$ durch 4 teilbar. Wie beim Übergang von $n=3$ zu $n=7$ in der Zeichnung ersichtlich können wir für $n=4k+3$ $(k=1,2,\dots)$ den nächsten Ring legen, indem wir an jeder Seite ein 2×4-Element einfügen. Wie beim Übergang von $n=5$ zu $n=9$ können wir in ähnlicher Weise wir für $n=4k+1$ $(k=1,2,\dots)$ den nächsten Ring legen, indem wir ebenfalls an jeder Seite ein 2×4-Element einfügen.

Damit haben wir gezeigt, dass für alle ungeraden $n \geq 3$ die geforderten Zerlegungen möglich sind. ❑

Aufgabe – BWM 1975, 2. Runde, Aufgabe 3.

Es sei $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n > 1)$. Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

S_n: Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Man beweise S_2 und widerlege S_n mindestens für alle geraden $n > 2$.

Lösungshinweise: Wir wollen hier nur den zweiten Teil der Aufgabe diskutieren und zeigen, dass die Aussage S_n für alle $n > 2$ falsch ist. Es ist ungewöhnlich, eine Wettbewerbsaufgabe derart mit „mindestens“ zu formulieren. Wir vermuten, dass sich der Nachweis für ungerade Zahlen $n > 1$ als trickreich oder kompliziert erweist und deshalb deren Lösung nicht erwartet wurde.

Legen wir eine natürliche Zahl $n > 2$ fest, so genügt zur Widerlegung von S_n, ein Gegenbeispiel anzugeben, das heißt natürliche Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ zu finden, die nicht alle gleich sind, aber deren Quotient aus arithmetischen und geometrischen Mittelwerten eine ganze Zahl ergibt. Es ist dabei nicht erforderlich, ein geeignetes Tupel herzuleiten.

[6] In Aufgabe MO480921 wurde nur der Teil a) als Aufgabe gestellt – dafür sind beliebige Strukturen völlig ausreichend.

Für $n = 4$ finden wir mit $x_1 = 81, x_2 = x_3 = x_4 = 1$ ein Gegenbeispiel, denn es gilt

$$\frac{a_4}{g_4} = \frac{\frac{81+1+1+1}{4}}{\sqrt[4]{81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}} = \frac{21}{3} = 7.$$

Nehmen wir an, es gibt für alle geraden Zahlen $n > 2$ ein Gegenbeispiel, das bis auf eine Variable (o.B.d.A. $x_1 = m \neq 1$) nur Variablen der Form $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$ enthält, so lautet der zu untersuchende Quotient:

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{\frac{m + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\ mal}}{n}}{\sqrt[n]{m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1\ mal}}}.$$

Günstig wäre es, wenn m die n-te Potenz einer natürlichen Zahl k ist, also $m = k^n$, so dass im Nenner die ganze Zahl k steht. Den Zähler von a_n können wir damit als $k^n + (n-1)$ schreiben und der Quotient wird zu

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{k^n + n - 1}{n \cdot k}.$$

Wäre nun k ein Teiler von $n-1$, also $k' \cdot k = n - 1$ für eine geeignet ausgewählte natürliche Zahl k', so könnten wir den Bruch mit k kürzen und erhalten

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{k^{n-1} + k'}{n}.$$

Wir wissen, dass $a^m + b^m$ für ungerade Zahlen m durch $(a+b)$ teilbar[7] ist. Wählen wir $k' = 1$ (woraus $n = k + 1$ folgt), so ist $k^{n-1} + 1 = k^{n-1} + 1^{n-1}$ durch $k + 1 = n$ teilbar. Der Quotient ist also ganzzahlig. Wir bestätigen das Ergebnis noch durch die Probe. Wir setzen für geradzahliges $n > 2$.

$$x_1 = (n-1)^n, x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$$

und finden

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{(n-1)^n + (n-1)}{n} = \frac{(n-1)^{n-1} + 1}{n}$$

Der Zähler ist durch $(n-1) + 1 = n$ teilbar und somit ist der Quotient ganzzahlig. Die Aussage S_n ist somit für gerade Zahlen $n > 2$ widerlegt. ❑

[7] $a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2} \cdot b + a^{m-3} \cdot b^2 - \cdots - a \cdot b^{m-2} + b^{m-1})$, m ungerade

Um die Aussage S_n auch für ungerade Zahlen $n > 1$ zu widerlegen, kann gezeigt werden[8], dass für $p = 3$ das Tupel $x_1 = 27, x_2 = 8, x_3 = 1$ und für alle Primzahlen $p > 3$ die Tupel

$$x_1 = (p-2)^{p-1}, x_2 = (p-2) \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)^p, x_3 = x_4 = \cdots = x_p = 1$$

Gegenbeispiele ergeben. Als Folgerung können wir die Aussage S_n auch für alle Vielfachen einer ungeraden Zahl $n > 1$ widerlegen. Lässt sich nämlich n als Produkt $m \cdot p$ mit einer ganzen Zahl m und einer Primzahl p darstellen, so gibt es für p ein p-Tupel, das die Aussage S_p widerlegt. Dann widerlegt das n-Tupel der Form

$$x_{1,1} = x_{1,2} = \cdots = x_{1,m} = x_1,$$
$$\ldots$$
$$x_{p,1} = x_{p,2} = \cdots = x_{p,m} = x_p,$$

die Aussage $S_{m \cdot p}$. Das gleichmäßige „Vervielfachen" der Variablen verändert weder das arithmetische noch das geometrische Mittel, denn es gilt

$$a_{m \cdot p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} x_{i,j}}{m \cdot p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}}{m}}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{p} x_i}{p} = a_p,$$

$$g_{m \cdot p} = \sqrt[m \cdot p]{\prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{m} x_{i,j}} = \sqrt[p]{\prod_{i=1}^{p} \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} x_{i,j}}} = \sqrt[p]{\prod_{i=1}^{p} x_i} = g_p.$$

Unabhängig von dieser Herleitung konstruieren wir nun geeignete Gegenbeispiele rekursiv. Für $n = 3$ hat das Tupel $x_1^* = 27, x_2^* = 8, x_3^* = 1$ den arithmetische Mittelwert 12 und den geometrischen Mittelwert 6.

Nehmen wir an, wir hätten für ein $i > 2$ ein Gegenbeispiel für die Aussage S_i gefunden, das ebenfalls den arithmetischen Mittelwert 12 und den geometrischen Mittelwert 6 hat. Dann können wir für jedes $n > 1$ für das $(i + 3 \cdot n)$ −Tupel der Form

$$x_1, x_2, \ldots, x_i,$$
$$x_{1,1} = x_{1,2} = \ldots = x_{1,n} = x_1^*,$$
$$x_{2,1} = x_{2,2} = \cdots = x_{2,n} = x_2^*$$
$$x_{3,1} = x_{3,2} = \cdots = x_{3,n} = x_3^*$$

die Mittelwerte berechnen:

$$a_{i+3n} = \frac{\sum_{k=1}^{i} x_i + \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{3} x_{m,l}}{i + 3 \cdot n} = \frac{i \cdot 12 + n \cdot 3 \cdot 12}{i + n \cdot 3} = 12,$$

[8] [8] K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

$$g_{i+3\cdot n} = \sqrt[i+3\cdot n]{\prod_{k=1}^{i} x_i \cdot \prod_{j=1}^{n}\prod_{m=1}^{3} x_{j,m}} = \sqrt[i+3\cdot n]{6^i \cdot (6^3)^n} = 6.$$

Beginnend mit $i = 3$ können wir so für alle $i = 3, 6, 9, \dots, 3n$ für natürliche Zahlen der Form $3n > 0$ Gegenbeispiele konstruieren.

Wir finden mit dem Tupel $x_1 = 27, x_2 = 24, x_3 = 6, x_4 = 2, x_5 = 1$ ein Gegenbeispiel für S_5 mit arithmetischem Mittelwert 12 und geometrischem Mittelwert 6. Damit können wir auch für alle $i = 5, 8, 11, \dots, 3n + 2$ für natürliche Zahlen der Form $3n + 2 > 0$ Gegenbeispiele konstruieren.

Wir finden mit $x_1 = 36, x_2 = 18, x_3 = 18, x_4 = 6, x_5 = 4, x_6 = 1, x_7 = 1$ ein Gegenbeispiel für S_7 mit arithmetischem Mittelwert 12 und geometrischem Mittelwert 6. Damit können wir auch für alle $i = 7, 10, 13, \dots, 3n + 1$ für natürliche Zahlen der Form $3n + 1 > 0$ Gegenbeispiele konstruieren.

Zusammen mit dem oben gezeigten Gegenbeispiel zur Aussage S_4 haben wir für alle $n > 2$ Gegenbeispiele gefunden. ❑

Anmerkung: Die Angabe der speziellen Gegenbeispiele für $n = 3, 5, 7$ ist schwer nachvollziehbar. Unter Klausurbedingungen erscheinen sie nicht auffindbar. Da aber keine Herleitung der Lösungsfindung erforderlich ist, sondern lediglich nachgewiesen werden muss, dass die angegebenen Tupel alle Bedingungen erfüllen, ist in einer Hausarbeit die Lösungsfindung mittels Rechentechnik zugelassen. Da der geometrische Mittelwert 6 sein soll, können die Variablen für S_n nur die Form $x_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i}$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ haben. Die Exponenten sind nichtnegative ganze Zahlen mit $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Durch systematisches Probieren lassen sich Belegungen für die Exponenten finden, für die der arithmetische Mittelwert 12 ergibt.

Aufgabe MO610946. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Es gibt n positive ganze Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils Potenzen von 6 sind.

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass diese n positiven ganzen Zahlen verschieden sind. Die Zahl 1 $(= 6^0)$ ist ebenfalls eine Potenz von 6.

Lösungshinweise: Derartige Zahlen existieren genau für $n = 1$ und für alle ganzen Zahlen $n \geq 3$.

Für $n = 1$ können wir die Zahl 1 wählen. Für $n = 4$ können wir die Zahlen 1, 8, 9, 18 (Summe: $36 = 6^2$; Produkt: $1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 3^2) = 6^4$) oder die Zahlen 3, 3, 6, 24 (Summe: $36 = 6^2$; Produkt: $3 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2^3 \cdot 3) = 6^4$) verwenden.

Haben wir für eine Zahl n eine Lösung $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit der Summe $s = x_1 + \cdots + x_n = 6^a$ und dem Produkt $p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 6^b$ mit ganzen Zahlen a und b gefunden, so erhalten wir für $n + 2$ ebenfalls eine Lösung, nämlich

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = 2 \cdot s, x_{n+2} = 3 \cdot s.$$

Offensichtlich ist die neue Summe der $n + 2$ Zahlen gleich

$$s + 2 \cdot s + 3 \cdot s = 6 \cdot s = 6^{a+1}$$

und damit wieder eine Potenz von 6. Für das neue Produkt ergibt sich

$$p \cdot (2 \cdot s) \cdot (3 \cdot s) = 6 \cdot p \cdot s^2 = 6^{b+2a+1},$$

was ebenfalls wieder eine Potenz von 6 ist. Folglich erhalten wir auf diese Weise aus einer Lösung für $n = 1$ Lösungen für alle ungeraden Zahlen $n \geq 1$, und aus einer Lösung für $n = 4$ Lösungen für alle geraden Zahlen $n \geq 4$.

Der Nachweis, dass es für $n = 2$ keine solche Zahlenpaare gibt, ist noch gesondert zu führen. ❑

Anmerkungen: Wie schon bei der Aufgabe des BWM besteht eine besondere Schwierigkeit im Finden geeigneter Beispiele. Da im Aufgabentext auf den Fall $n = 1$ hingewiesen wurde, darf dieser im Ergebnis nicht übersehen werden. Für $n = 3$ finden wir das Beispiel 1, 2, 3 ($S = 1 + 2 + 3 = 6;\ P = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$). Aufgrund der Aufgabenformulierung vermuten wir (ohne uns dessen sicher zu sein!), dass die Aussage nicht für alle n gelten wird. Es wäre deshalb ein erstes Teilresultat, zu beweisen, die Aussage gelte für alle ungeraden Zahlen $n \geq 1$.

Es erscheint sehr spekulativ, aus den Beispielen für $n = 1$ und $n = 3$ bereits das Konstruktionsprinzip für größere Zahlen n zu erkennen. Beim Probieren suchen wir deshalb noch nach Zahlen x und y mit $S = 1 + 2 + 3 + x + y = 36$ und $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 6^k$, wobei x und y nur die Primfaktoren 2 und 3 haben dürfen. Die Werte $x = 12$ und $y = 18$ und damit ein geeignetes Konstruktionsprinzip sind auf diese Weise zu finden.

Nun stellen wir fest, dass es für $n = 6$ ebenfalls ein Beispiel existiert, nämlich sechsmal die Zahl 6. Da das oben gefundene Konstruktionsprinzip aus $n = 6$ auch zu einem korrekten Beispiel für $n = 8$ führt, bleibt nur noch zu untersuchen, ob es Beispiele für $n = 2$ und $n = 4$ gibt.

Da die Teilsumme $6 + 6 + 6 = 18$ die Gesamtsumme bei $n = 6$ nicht verändert, untersuchen wir für $n = 4$ das Tupel 6, 6, 6, 18. dessen Produkt beträgt $2^4 \cdot 3^5$. Nun liegt die Lösung mit den Zahlen 1, 8, 9, 18 schon nahe.

Aufgabe MO611046. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Es gibt n positive ganze Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils Potenzen von 10 sind.

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass diese n positiven ganzen Zahlen verschieden sind. Die Zahl $1\ (= 10^0)$ ist ebenfalls eine Potenz von 10.

Lösungshinweise: Derartige Zahlen existieren genau für $n = 1$ und für alle ganzen Zahlen $n \geq 5$.

Für $n = 1$ können wir die Zahl 1 wählen. Wir finden weitere Beispiele:

$n = 6$: 5, 5, 5, 5, 40, 40 $(S = 100 = 10^2;\ P = 5^4 \cdot (2^3 \cdot 5^1)^2 = 10^6)$
$n = 7$: 5, 5, 5, 5, 20, 20, 40 $(S = 100;\ P = 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^1)^2 \cdot (2^3 \cdot 5^1) = 10^6)$
$n = 8$: 5, 5, 5, 5, 20, 20, 20, 20 $(S = 100;\ P = 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^1)^4 = 10^8)$

Haben wir für eine Zahl n eine Lösung $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit der Summe $s = x_1 + \cdots + x_n = 10^a$ und dem Produkt $p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 10^b$ mit ganzen Zahlen a und b gefunden, so erhalten wir für $n + 4$ ebenfalls eine Lösung, nämlich

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = s, x_{n+2} = s, x_{n+3} = 2 \cdot s, x_{n+4} = 5 \cdot s.$$

Offensichtlich ist die neue Summe der $n + 4$ Zahlen gleich

$$s + s + s + 2 \cdot s + 5 \cdot s = 10 \cdot s = 10^{a+1}$$

und damit wieder eine Potenz von 10. Für das neue Produkt ergibt sich

$$p \cdot s \cdot s \cdot (2 \cdot s) \cdot (5 \cdot s) = 10 \cdot p \cdot s^4 = 10^{b+4a+1},$$

was ebenfalls wieder eine Potenz von 10 ist. Folglich erhalten wir auf diese Weise aus einer Lösung für $n = 1$ eine Lösung für $n = 5$: 1, 1, 1, 2, 5 (Summe: 10, Produkt: 10). Aus einer Lösung für $n = 4 \cdot m + k$ finden wir Lösungen für alle geraden $n = 4 \cdot (m + 1) + k$ mit $k = 1, 2, 3, 4$ und $m \geq 1$. Weil wir Lösungen für $n = 5, 6, 7, 8$ kennen, existieren neben $n = 1$ für alle $n \geq 5$ Lösungen.

Dass es für $n = 2, 3, 4$ keine Lösungen gibt, muss gesondert nachgewiesen werden. ❑

Anmerkungen: Auch bei dieser Aufgabe besteht eine besondere Schwierigkeit im Finden geeigneter Beispiele. Den Fall $n = 1$ beachten wir. Für $n = 5$ finden wir das Beispiel 1, 1, 1, 2, 5 ($S = 1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 10;\ P = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$). Da wir ein Beispiel für $n = 10$ angeben können (nämlich zehnmal die Zahl 10), haben wir bereits drei Spezialfälle gelöst.

Wir vermuten, dass es für $n = 2, 3, 4$ keine Beispiele geben wird, da wir die Summe 10 nicht aus Summanden bilden können, die gleich 1 sind oder durch 2 oder 5 teilbar sind, wobei die Faktoren 2 und 5 gleich oft vorkommen. Größere Summen wollen wir

zunächst nicht versuchen. Beim Probieren für $n = 6$ könnten wir das interessante Tupel (1, 1, 1, 1, 8, 8) finden. Da die Summe 20 beträgt, wäre es ein Kandidat für ein geeignetes Beispiel, wenn wir jeden dieser sechs Werte mit 5 multiplizieren. Tatsächlich erfüllen die Zahlen 5, 5, 5, 5, 40, 40 alle Bedingungen.

Die Zerlegung $40 = 20 + 20$ führt uns zu einem Beispiel für $n = 7$, denn die Summe bleibt unverändert und das Produkt erhöht sich um den Faktor 10. Da wir dies auch für den zweiten Wert 40 ausführen können, finden wir auch ein Beispiel für $n = 8$.

Nachtrag: Beide Aufgaben könnten zum Verallgemeinern verführen.

> *Man bestimme für jede ganze Zahl $k \geq 2$ alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Es gibt n positive ganze Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils Potenzen von k sind.*

Für $k = 2$ ist diese Eigenschaft für alle $n \geq 1$ gegeben. Dazu geben wir jeweils geeignete Tupel an:

$n = 1$: $\quad 2 \qquad\qquad (S = 2; p = 2)$,
$n = 2$: $\quad 2; 2 \qquad\qquad (S = 2 + 2 = 4; P = 2 \cdot 2 = 4)$,
$n = m \geq 2$:

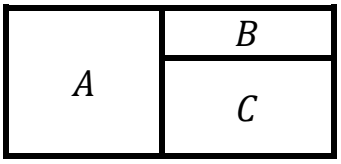
$$2; 2; 2^2; \ldots; 2^{m-1} \left(S = 2 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i = 2^m; P = 2 \prod_{i=1}^{m-1} 2^i = 2^{\frac{n(n+1)}{2}+1}\right).$$

❑

Primäre und sequentielle Zerlegungen von Rechtecken

KZM – Aufgabe 6-2[9]**.** Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt. Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch einen geraden Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der in diesem Schritt entstandenen Teilrechtecke erneut durch einen geraden Schnitt in zwei weitere Rechtecke zerlegt usw.

In der Abbildung kann man annehmen, dass mit einem ersten Schnitt das Rechteck A abgeteilt wurde und in einem zweiten Schnitt die Rechtecke B und C entstanden. Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird sequentiell genannt. Gibt es jedoch keine solche Schnittfolge, heißt die Zerlegung primär.



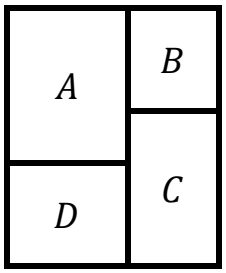
a) Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechteckes in drei Teilrechtecke gibt (d.h., dass jede Zerlegung eines Rechtecks in drei Teilrechtecke eine sequentielle Zerlegung ist).

[9] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

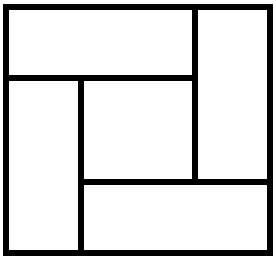
b) Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in fünf Teilrechtecke existiert.

Lösungshinweise Teil a) Angenommen, es gäbe eine primäre Zerlegung in drei Teilrechtecke. Da diese Teilrechtecke die vier Eckpunkte des Ausgangsrechtecks enthalten, gibt es mindestens ein Teilrechteck, das zwei dieser Eckpunkte enthält (Schubfachprinzip). Das können jedoch nur benachbarte Eckpunkte sein. Folglich kann dieses Teilrechteck mittels einer Schnittlinie abgeschnitten werden. Das verbleibende Rechteck kann nun mittels eines weiteren Schnittes in zwei Teilrechtecke zerlegt werden. Folglich ist die Zerlegung sequentiell und nicht primär. ❑

Über die Aufgabenstellung hinaus suchen wir eine primäre Zerlegung für vier Teilrechtecke. Wir nehmen also wiederum an, es gäbe eine solche primäre Zerlegung. Dann kann es darunter kein Teilrechteck geben, dass zwei Eckpunkte des Ausgangsrechtecks enthält, denn dann könnten wir dieses Teilrechteck mit einem Schnitt abtrennen. Für das verbleibende Rechteck gibt es aber nur sequentielle Zerlegungen in drei Teilrechtecke. Also ist diesem Fall insgesamt jede Zerlegung sequentiell und es existiert keine primäre Zerlegung.



Untersuchen wir deshalb den Fall, dass jedes der vier Teilrechtecke genau einen Eckpunkt des Ausgangsrechtecks enthält. Dann stoßen benachbarte Teilrechtecke (hier A und B) an einer Seite (ggf. teilweise) zusammen. Haben diese Teilrechtecke A und B die gleiche Breite, so entsteht eine durchgehende Schnittlinie. Damit können wir in einem ersten Schnitt das Ausgangsrechteck in zwei Rechtecke A/B und C/D zerlegen[10] und im zweiten bzw. dritten Schnitt die Teilrechtecke A und B bzw. C und D erzeugen. Haben dagegen diese Teilrechtecke A und B nicht die gleiche Breite, kann die verbleibende Fläche nur dann durch zwei weitere Rechtecke bedeckt werden, wenn bei B und C eine durchgehende Schnittlinie entsteht. Auch in diesem Fall ist die Zerlegung sequentiell.



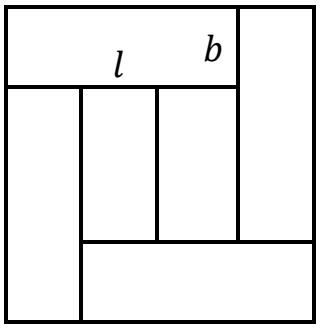
Lösungshinweise Teil b) Eine primäre Zerlegung eines Quadrates in fünf Teilrechtecke ist beispielsweise wie in nebenstehender Abbildung möglich. Da keine Linie im Ausgangsquadrat gegenüberliegende Seiten verbindet, kann es keine sequentielle Schnittfolge geben.

❑

[10] Eine Erweiterung der Einteilung in „primär“ und „sequentiell“ könnte in der „sequentiellen Zerlegung k-ter Ordnung“ bestehen, wobei mit einem geraden Schnitt maximal k zusammenhängende Rechtecke abgeschnitten werden dürfen. Dann wäre hier keine sequentielle Zerlegung 1. Ordnung möglich, wohl aber 2. Ordnung.

Die entstandenen Teilrechtecke sind offenbar nicht kongruent. Die Schnitte können aber so erfolgen, dass alle Teilrechtecke flächengleich sind. Legen wir dafür die Seitenlänge[11] des Ausgangsquadrates mit 1 fest, so beträgt der Flächeninhalt des mittleren Quadrate 0.2 und dessen Seitenlänge $\frac{1}{5}\sqrt{5}$. Die anderen vier Teilrechtecke sind gemäß Konstruktion kongruent und haben ebenfalls den Flächeninhalt 0.2. Wir können die Seitenlängen dieser Teilrechtecke berechnen: Bezeichnen wir mit b die Breite und mit l die Länge, so hängen diese Werte über das Gleichungssystem $b + l = 1$ und $b \cdot l = \frac{1}{5}$ zusammen. Die Werte sind also die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{5} = 0$. Wir erhalten:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{5}\sqrt{5}\right).$$



Natürlich können wir aus einer primären Teilung in fünf Rechtecke eine Teilung in sechs Rechtecke erzeugen, wenn wir beispielsweise das mittlere Teilquadrat in zwei Rechtecke zerlegen. Dabei entsteht offensichtlich keine Schnittlinie, die gegenüberliegende Seiten des Ausgangsquadrates verbindet. Wählen wir das mittlere Quadrat so, dass dessen Flächeninhalt zwei Sechstel des Ausgangsquadrates hat, so gilt für die Länge l und Breite b der umrahmenden kongruenten vier Teilrechtecke $b + l = 1$ und $b \cdot l = \frac{1}{6}$. Die quadratische Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}\right).$$

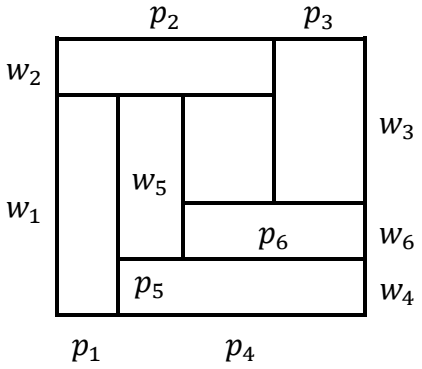
Damit haben wir eine primäre Zerlegung in sechs flächengleiche Teilrechtecke gefunden. Da es mit der einfachen Definition einer primären Zerlegung zugelassen ist, dass ab einem Schritt die Zerlegung sequentiell fortgesetzt werden darf, können wir die Argumentation für $n = 6$ auf $n \geq 6$ verallgemeinern. Wählen wir das mittlere Quadrat so, dass dessen Flächeninhalt $\frac{n-4}{n}$ des Ausgangsquadrates umfasst, so gilt für die Länge l und Breite b der umrahmenden kongruenten vier Teilrechtecke $b + l = 1$ und $b \cdot l = \frac{1}{n}$. Die dazu passende quadratische Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{n} = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2n}\sqrt{(n-4) \cdot n}\right)$$

[11] Die Längen- oder Flächeneinheiten werden im Folgenden weggelassen, da Missverständnisse auszuschließen sind.

Damit haben wir also auch für alle $n \geq 5$ eine primäre Zerlegung in n flächengleiche Teilrechtecke gefunden.

Anstelle dieser trivialen Verallgemeinerung suchen wir nun nach einer „kreativen“ primären Zerlegung eines Quadrates in sieben flächengleiche Rechtecke. Wir geben uns eine geometrisch mögliche Zerlegung vor, unabhängig davon, ob dies tatsächlich für diese Konfiguration flächengleich gelingt. Wir bezeichnen einige Teilstrecken wie in der Skizze ersichtlich[12], mit denen die Zerlegung vollständig beschrieben ist:



Setzen wir $w_1 = x$, so ist $p_1 = \frac{1}{7x}$, um eine Fläche von $\frac{1}{7}$ der Ausgangsfläche einzunehmen. Nacheinander ergeben sich dann folgende Zusammenhänge:

$$w_2 = 1 - x \quad , \quad p_2 = \frac{1}{7 \cdot (1-x)}$$

$$p_3 = 1 - p_2 = \frac{6 - 7x}{7 \cdot (1-x)} \quad , \quad w_3 = \frac{1}{7p_3} = \frac{7x-1}{7x}$$

$$p_4 = 1 - p_1 = \frac{7x-1}{7x} \quad , \quad w_4 = \frac{1}{7p_4} = \frac{x}{7x-1}$$

$$w_5 = w_1 - w_4 = \frac{x \cdot (7x-2)}{7x-1} \quad , \quad p_5 = \frac{1}{7w_5} = \frac{7x-1}{7x \cdot (7x-2)}$$

$$p_6 = p_4 - p_5 = \frac{(7x-1)(7x-3)}{7x \cdot (7x-2)} \quad , \quad w_6 = \frac{1}{7p_6} = \frac{x \cdot (7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}$$

Nun gilt $w_3 + w_4 + w_6 = 1$. Setzen wir die oben gefundenen Terme ein und formen um, finden wir die kubische Gleichung

$$196 \cdot x^3 - 294 \cdot x^2 + 128 \cdot x - 15 = 0$$

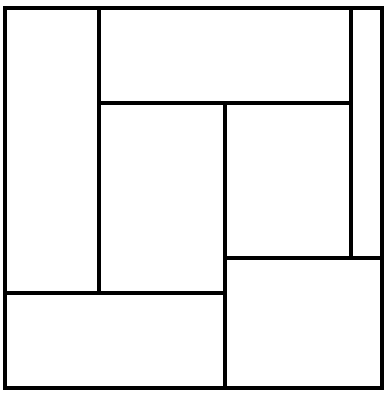
Eine Lösung[13] dieser Gleichung ist $x_1 = \frac{1}{2}$, denn es gilt $\frac{196}{8} - \frac{294}{4} + \frac{128}{2} - 15 = 24{,}5 - 73{,}5 + 64 - 15 = 0$. Daraus folgt $w_1 = w_2$ und $p_1 = p_2$ und wir können beide Teilrechtecke mit einem geraden Schnitt abtrennen – aber die vorgesehene geometrische Struktur ist damit nicht mehr realisierbar.

Die anderen Lösungen der kubischen Gleichung erhalten wir nach Polynomdivison der kubischen Funktion und dem Linearfaktor $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ aus der quadratischen Funktion $x^2 - x + \frac{30}{196} = 0$. Wir finden $x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{14}$. Allerdings muss $x > \frac{3}{7}$ gelten, denn anderenfalls wäre p_6 negativ. Wenn es also eine Zerlegung der geforderten Art gibt,

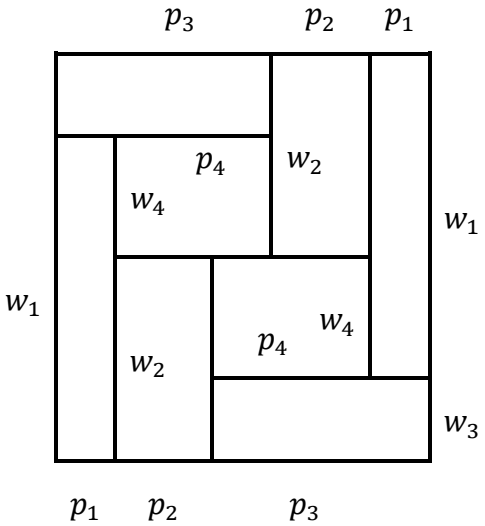
[12] Um nicht durch Anschauung falsche Schlüsse zu ziehen, dürfen in der Skizze optische Gleichheiten bewusst vermieden werden.

[13] Diese Lösung können wir aus einer grafischen Darstellung der kubischen Funktion erraten.

so gilt $x = \frac{7+\sqrt{19}}{14} \approx 0{,}81$. Damit gelingt tatsächlich die geforderte Zerlegung, wie eine Probe bestätigt.



Für nebenstehenden Zerlegungsansatz gibt es jedoch keine primäre Zerlegung des Quadrates in sieben flächengleiche Rechtecke. Die nahezu symmetrisch aussehende Zerlegung der Figur erweist sich als trügerisch. Berechnen wir wie oben die Teilstrecken, so ist die Flächengleichheit der Teilrechtecke nur möglich, wenn die beiden unteren Rechtecke kongruent sind. Dann gibt es aber eine erste durchgehende Schnittlinie und es fällt nicht schwer, eine vollständige sequentielle Zerlegung anzugeben.



Für die Zerlegung eines Quadrates in acht flächengleiche Rechtecke versuchen wir eine punktsymmetrische Lage der Teilrechtecke. Wir bezeichnen wieder einige Teilstrecken, die die Zerlegung vollständig beschreiben. Dafür genügen vier Höhen- und Breitenangaben.

Aufgrund der Symmetrie gilt bereits (falls die Quadratseite die Länge 1 hat) $w_2 = \frac{1}{2}$ und damit $p_2 = \frac{1}{4}$. Setzen wir $w_1 = x > \frac{1}{2}$, so ergibt sich nacheinander:

$$p_1 = \frac{1}{8x}$$

$$w_3 = 1 - x \quad , \quad p_3 = \frac{1}{8 \cdot (1-x)}$$

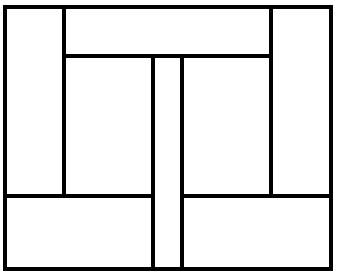
$$w_4 = x - \frac{1}{2} \quad , \quad p_4 = \frac{1}{8 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

Nun gilt aber $p_4 = p_3 - p_1$. Setzen wir hier die gefundenen Ausdrücke ein und formen um, so finden wir die quadratische Gleichung

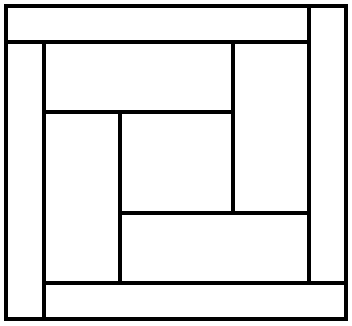
$$6 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

Von den beiden Lösungen dieser Gleichung, nämlich $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$, kann wegen $x > \frac{1}{2}$ nur die größere die gesuchte Lösung sein. Rechnen wir damit alle Rechteckseiten aus, wird die Lösung bestätigt.

Auch die nebenstehend skizzierte Zerlegung des Quadrates ist in acht inhaltsgleiche Rechtecke als primäre Zerlegung möglich.

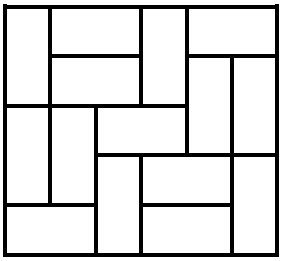


Ausgehend von $n = 5$ finden wir leicht eine primäre Zerlegung für $n = 9$, indem wir einen weiteren „Rahmen“ mit vier Teilrechtecken um die Figur mit fünf Teilrechtecken legen:



Diesen Zerlegungsansatz können wir aber verallgemeinern: Haben wir eine primäre Zerlegung für $n = k$ gefunden, so können wir auch eine primäre Zerlegung für $n = k + 4$ angeben. Weil wir für $n = 5, 6, 7, 8$ bereits primäre Zerlegungen konstruiert haben, existieren für alle $n \geq 5$ primäre Zerlegungen eines Quadrates in n flächengleiche Teilrechtecke.

Diese Problematik ist eng verbunden mit der vom ROBERT ISRAEL JEWETT (geb. 1937, Mathematiker) formulierten Fragestellung, ein Rechteck so mit Domino-Steinen vollständig und überdeckungsfrei zu bedecken, dass dabei weder eine waagerechte noch eine senkrechte Gerade entsteht, die gegenüberliegende Seiten des Rechtecks miteinander verbindet[14]. Eine solche Gerade wäre, wenn man sich die Domino-Steine als Ziegelsteine vorstellt, eine strukturell schwache Stelle, eine so genannte „Bruchlinie“. Primäre Zerlegungen sind bruchlinienfrei – jedoch haben wir gesehen, dass es für 5×5-Rechtecke (und kleinere) keine Zerlegung in kongruente Teilrechtecke geben kann.

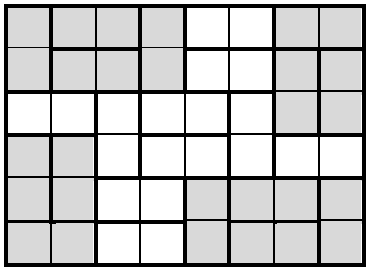


Nun wird sogar gefordert, dass die Teilrechtecke Domino-Steine in Form von 2×1-Rechtecke sind. Somit kommen nur Rechtecke in Frage, die eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten (1×1-Rechtecke) enthalten. Tatsächlich finden wir für 5×6-Rechtecke eine bruchlinienfreie Bedeckung mit Domino-Steinen.

Es gibt jedoch keine bruchlinienfreie Bedeckung eines 6×6-Rechtecks mit 18 Domino-Steinen. Denken wir uns das Rechteck durch 5 waagerechte und 5 senkrechte (innere) Geraden in 36 Einheitsquadrate zerlegt. Wenn das Gesamtquadrat bruchlinienfrei bedeckt werden soll, muss jede dieser Geraden

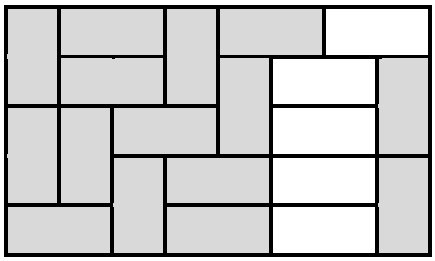
[14] Nach: Martin Gardner. Mathematische Knobeleien. Vieweg-Verlag, 1973.

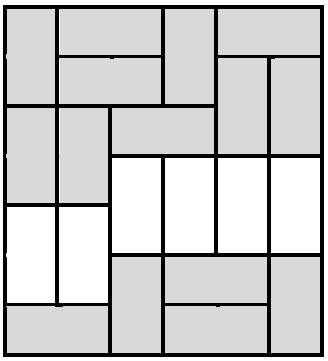
wenigstens einen Domino-Stein halbieren. Wir stellen nun fest, dass in diesem Fall jede dieser Geraden sogar eine gerade Anzahl von Domino-Steinen halbieren muss. Betrachten wir nämlich eine beliebige senkrechte (oder waagerechte) Gerade, dann liegen links (bzw. oberhalb) von ihr eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten (6, 12, 18, 24 oder 30). Die ungeteilten Domino-Steine links (bzw. oberhalb) von der Geraden bedecken natürlich auch eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten (je Domino-Stein zwei). Also verbleiben links (bzw. oberhalb) von der Geraden noch eine gerade Anzahl einzelner Einheitsquadrate, die zu den durch die Gerade geteilten Domino-Steinen gehören. Da aber ein Domino-Stein nur von einer Geraden halbiert werden kann, und jede der 10 Geraden mindestens zwei Domino-Steine halbiert, müssten mindestens 20 Domino-Steine für die Bedeckung vorhanden sein – im Widerspruch zur Größe des 6×6-Rechtecks.



Mit dieser Überlegung können wir auch begründen, dass in einem 6×8-Rechteck jede der 5 waagerechten und 7 senkrechten (inneren) Geraden genau zwei Domino-Steine halbieren. Es sind also $12 \cdot 2 = 24$ Domino-Steine erforderlich, die aber auf den Flächeninhalt $6 \cdot 8 = 48$ passen würden. Damit ist aber noch nicht gezeigt, dass es eine bruchlinienfreie Bedeckung auch gibt – ein solches Beispiel muss konkret angegeben werden.

Die eingefärbten Einheitsquadrate ergeben (zusammengeschoben) das schon bekannte bruchlinienfreie 5×6-Rechteck. Wir können also aus bekannten Bedeckungen neue Bedeckungen für größerer Rechtecke erstellen. Dabei gibt es verschiedene Rekursionsmöglichkeiten, beispielsweise vom 5×6-Rechteck zum 5×8-Rechteck oder vom 5×6-Rechteck zum 7×6-Rechteck:





Die in der Abbildung erkennbare Rekursionsvorschrift ist verallgemeinerungsfähig. Wir erhalten die Aussage: Wenn der Flächeninhalt eines Rechtecks aus einer geraden Anzahl von Einheitsquadraten besteht und die Länge bei beiden Seiten mehr als vier Einheiten beträgt, lässt sich immer (mit dem 6×6-Rechteck als Ausnahme) eine bruchlinienfreie Bedeckung durch Domino-Steine finden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) stellt eine Vielzahl von historischen Dokumenten öffentlich zur Verfügung. Der folgende Auszug steht im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM-7.5B**[15] über magische Sechsecke. In der Teilaufgabe c) waren alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gesucht, für die es magische Sechsecke geben kann. Eine Lösung für $n = 3$ wurde 1889 von ERNST VON HASELBERG (1827 – 1905, Architekt und Baubeamter in Stralsund) veröffentlicht (s. https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/101875/1, letzter Abruf: 30.06.22).

Zeitschrift

für

mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht

Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen.

herausgegeben
von
J. C. V. Hoffmann.

Zwanzigster Jahrgang.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1889.

[S. 262ff]

Zum Aufgaben-Repertorium

Auflösungen

801. (Gestellt von v. Haselberg XIX_6, 429.)[16] An der Stelle der in das nachfolgend abgebildete Sechseck[17] eingeschriebenen Buchstaben sind die Zahlen von 1 bis 19 so zu setzen, daſs die Summe der auf einer und derselben geraden Linie stehenden Zahlen, gleichviel ob sie aus drei, vier oder fünf Gliedern zusammengesetzt ist, nach allen Richtungen hin gleich 38 ist.

---

[15] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1
[16] Gestellt wurde die Aufgabe im 19. Jahrgang der Zeitschrift auf Seite 429.
[17] Abbildungen nachgestellt

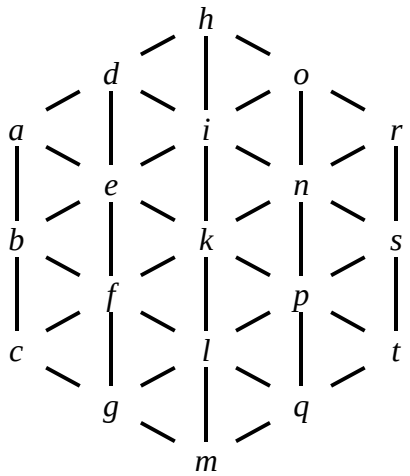
Auflösung. Bezeichnet man die Summe der sechs Zahlen an den äußeren Ecken mit $\sum a$, diejenige der sechs Zahlen in den Mitten der äußeren Seiten mit $\sum b$ und diejenige der sechs Zahlen, welche die Kernzahl k umgeben mit $\sum c$, so ist

$$\sum a + \sum b + \sum c = 5 \cdot 38 - k,$$

$$2\sum a + \sum b = 6 \cdot 38$$

und

$$2\sum b + 2\sum c = 6 \cdot 38.$$



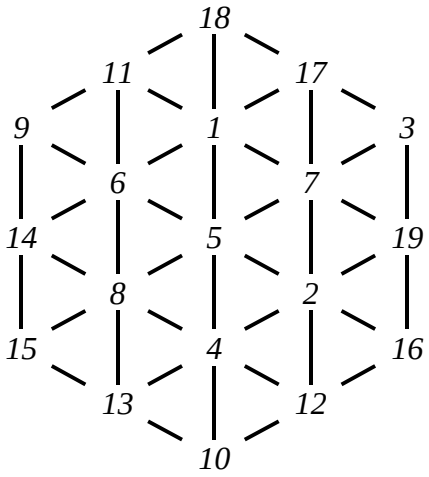
Hieraus ergiebt sich

$$\sum a = 2 \cdot 38 - k \qquad (1)\,;$$

$$\sum b = 2(38 + k) \qquad (2)\,;$$

$$\sum c = 38 - 2k \qquad (3).$$

Aus (3) ergiebt sich, daſs k nicht gröſser als 8 sein kann; wäre $k = 9$, so würde $\sum c = 20$ sich nicht mehr aus den sechs niedrigsten Zahlen bilden lassen. Die kleinste Zahl, welche an einer äußeren Ecke stehen kann, ist 3; wollte man z.B. $r = 2$ setzen, so würde sich $h + n + s + t = 2(38 - 2) = 72$ auch aus den vier höchsten Zahlen nicht mehr darstellen lassen. – Aus der Aufgabe lassen sich dreizehn Gleichungen bilden, welche je drei, vier oder fünf Unbekannte enthalten, deren Summe gleich 38 ist. Von diesen sind die zur Lösung wichtigsten $b = k + o + p$, $g = k + i + o$, u. s. w., da man hierdurch nach versuchsweiser Anordnung der inneren Zahlen die sechs Zahlen in den Mitten der äußeren Seiten findet. – Für $k = 8$ ist nun $\sum c = 22$; man findet für $\sum c$ eine, jedoch nicht brauchbare Gruppe von Zahlen für die Umgebung von k. Für $k = 7$ ergeben sich zwei, für $k = 6$ drei Gruppen solcher Zahlen, mit denen man ebenfalls nicht zum Ziel gelangt. Für $k = 5$ ist $\sum c = 28$; man erhält dann die einzige überhaupt mögliche Lösung in beistehender Anordnung. Für $k < 5$ enthält man keine passende Lösung.



v. HASELBERG (Stralsund)

Inhalt

Vorwort 2
Thema 16 – Betragszeichen: Gleichungen und Gleichungssysteme 3
Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion 12
Primäre und sequentielle Zerlegungen von Rechtecken 19
In alten Mathe-Büchern geblättert 26

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2021/22)

Ausgabe[18]	Nr.	Thema	Aufgabe
06/2022 (Jul. 2022)	Thema 16	Betragszeichen	MO610941 MO611041
05/2022 (Jun. 2022)	Thema 06.3	Einbeschriebene Figuren (Kreise)	MO610945
04/2022 (Mai 2022)	Thema 15	Stammbrüche	MO610933 MO611032
03/2022 (Apr. 2022)	Thema 12.2	Bedeckungen	MO610932 MO611031
02/2022 (März 2022)	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
01/2022 (Jan. 2022)	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
11/2021 (Dez.2021)	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
09/2021 (Okt. 2021)	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
08/2021 (Sept. 2021)	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

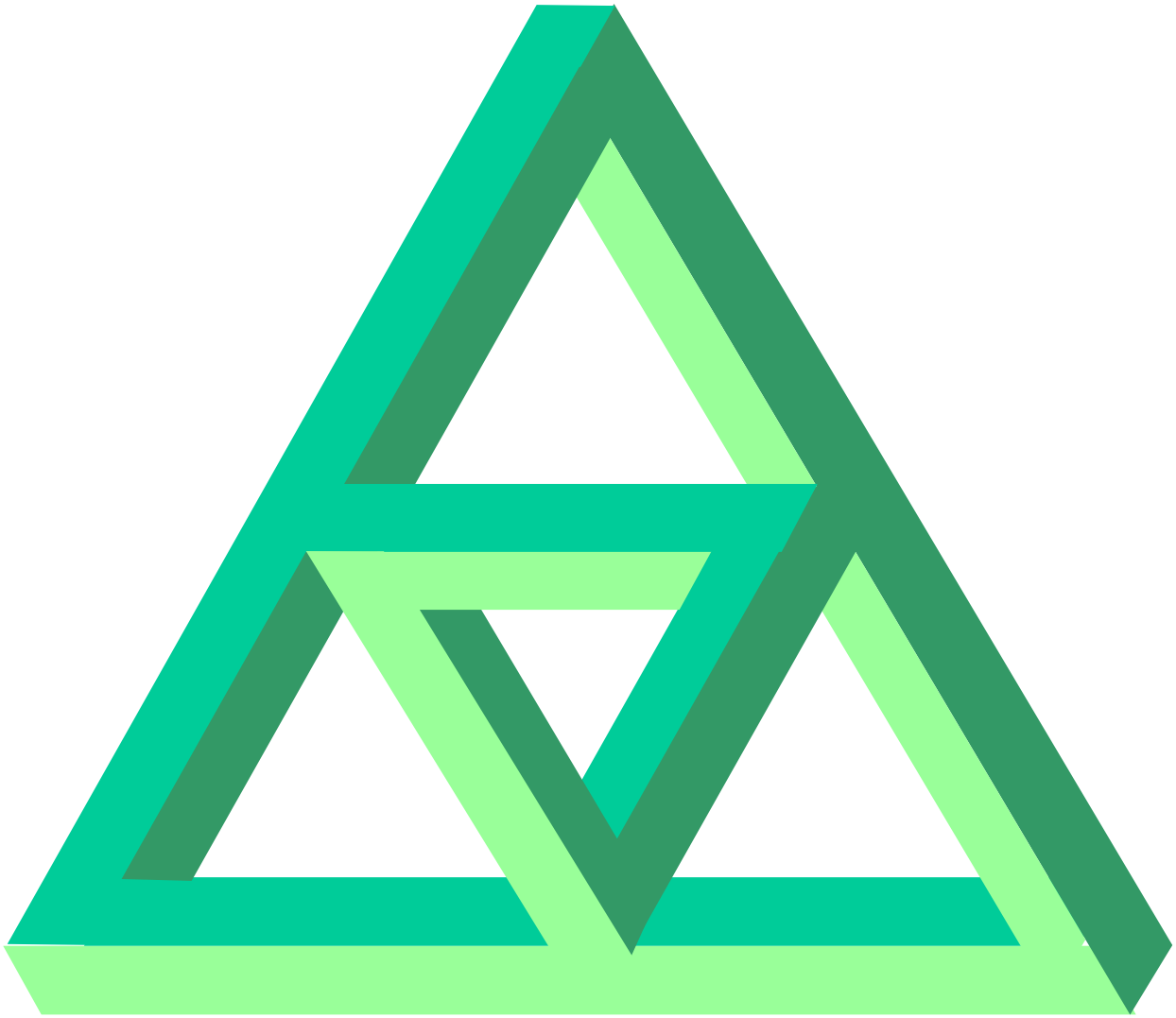
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[18] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



September 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen ergänzt die Thematik.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM) der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Zu Beginn des Schuljahres schauen wir auf die Aufgabe **MO610931** zurück. In den Lösungshinweisen wird der größte gemeinsame Teiler von drei Zahlen verwendet. Wir nehmen dies zum Anlass, uns ausführlich mit dieser Thematik zu befassen.

In der **KZM-Aufgabe 1-5A** wird die eindeutige Angabe von Summen mit vielen Summenden thematisiert. Der Gebrauch von „+ … +“ zur abkürzenden Schreibweise kann Missverständnisse hervorrufen. Diese könnten durch die Verwendung des Summenzeichens Σ vermieden werden. Wir zeigen, dass mit dieser Symbolik viele Umformung leicht auszuführen sind.

Mit Freude können wir vom erfolgreichen Abschneiden der deutschen Mannschaft bei der **63. Internationalen Mathematik-Olympiade** berichten.

Im historischen Rückblick erklären wir die Bruchrechnung mit römischen Zahlenzeichen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 17 – Der größte gemeinsame Teiler

Wir finden den Begriff „größter gemeinsamer Teiler“ in den Lösungshinweisen zu Teil (b) der

Aufgabe - MO610931. Auf einem 2000m langen Rundkurs werden neue Automodelle einem Dauertest mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit unterzogen. Während eines solchen Tests überqueren die drei Automodelle A, B und C gleichzeitig die Ziellinie der Runde. Als der Wagen A, welcher der schnellste der drei Wagen ist, das nächste Mal diese Linie überquert, hat er 100 m Vorsprung vor B. Als auch B die Ziellinie überquert, hat B 200 m Vorsprung vor C.

a) Berechnen Sie den Vorsprung des Wagens A vor Wagen C zu dem Zeitpunkt, an dem A die Ziellinie erreicht hatte.
b) Nachdem alle drei Wagen gleichzeitig die Ziellinie überquert hatten, müssen viele Runden gefahren werden, bis dieses Ereignis erneut beobachtet werden kann.
   Berechnen Sie, wie viele Runden A, B bzw. C jeweils bis dahin zurücklegen müssen.

Lösungshinweise Teil a) Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der Automodelle A, B und C mit v_A, v_B und v_C. Während A 2000 m zurücklegt, schafft B nur 1900 m. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten gilt also $\frac{v_B}{v_A} = \frac{19}{20}$ bzw. $v_B = \frac{19}{20} \cdot v_A$. Während B 2000 m zurücklegt, schafft C nur 1800 m. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten gilt also $\frac{v_C}{v_B} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ bzw. $v_c = \frac{9}{10} \cdot v_B$. Somit gilt $v_C = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{19}{20} \cdot v_A\right) = \frac{171}{200} \cdot v_A$. Während A 2000 m zurücklegt, schafft C somit nur $\frac{171}{200} \cdot 2000 = 1710$ m. Der Vorsprung von A auf C betrug also $2000\ \text{m} - 1710\ \text{m} = 290\ \text{m}$.

Teil b) Um wieder auf der Ziellinie zusammenzutreffen, müssen alle drei Wagen ganzzahlige Rundenzahlen zurückgelegt haben. Das Verhältnis dieser Rundenzahlen entspricht dem Verhältnis der Geschwindigkeiten und dieses wiederum dem Verhältnis der in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege. Hat A zum Beispiel 2000 volle Runden zurückgelegt, dann ist B 1900 Runden und C 1710 Runden gefahren. Der **größte gemeinsame Teiler** von 2000, 1900 und 1710 ist 10. Damit wurde bereits nach 200 Runden von A, 190 Runden von B bzw. 171 Runden von C ein erstes erneutes gemeinsames Passieren der Ziellinie erreicht. ❑

Um den größten gemeinsamen Teiler (abgekürzt mit *ggT*) zweier ganzer Zahlen zu ermitteln, können wir die Primfaktorenzerlegung dieser Zahlen berechnen und aus

den Exponenten der Primfaktoren die gemeinsamen Teiler finden. Seien beispielsweise

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}, b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k}$$

mit Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $(k \geq 1)$ und mit ganzzahligen Exponenten $a_i, b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, so ist

$$ggT(a; b) = p_1^{min(a_1, b_1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{min(a_k, b_k)}$$

der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen a und b. So ist wegen $99 = 3^2 \cdot 11$ und $69 = 3 \cdot 13$ der größte gemeinsame Teiler $ggT(99; 69) = 3$. Dagegen ist die Suche nach $ggT(2021027; 3028009)$ über eine Primfaktorenzerlegung ohne rechentechnische Hilfsmittel schon recht aufwendig.

Anstelle der Primfaktorenzerlegung können wir den EUKLIDischen Algorithmus[3] verwenden. Er basiert auf dem

Satz von der Division mit Rest. Zu zwei positiven natürlichen Zahlen a und b mit $a \geq b$ gibt es natürliche Zahlen q (Quotient) und r (Rest), so dass $a = q \cdot b + r$ gilt. Erfüllt r die Ungleichung $0 \leq r < b$, so sind q und r eindeutig bestimmt.

$Beweis$: Für den Existenz von q und r können wir einfach $q = 1$ und $r = a - b$ setzen. Dann ist $a = 1 \cdot b + a - b$ erfüllt.

Wir nehmen an, es gäbe zwei Zerlegungen $a = q_1 \cdot b + r_1$ und $a = q_2 \cdot b + r_2$ mit $0 \leq r_1, r_2 < b$, dann gilt offenbar

$$(q_1 - q_2) \cdot b = r_2 - r_1.$$

Für $q_1 \neq q_2$ können wir o.B.d.A. die Ungleichung $q_1 > q_2$ und deshalb $q_1 - q_2 \geq 1$ annehmen. Also muss $r_2 - r_1 \geq b$ gelten. Da aber r_2 laut Voraussetzung kleiner als b ist, kann diese Ungleichung nicht erfüllt werden. Wir erhalten deshalb $q_2 = q_1$ und somit auch $r_2 = r_1$, d.h. q und r sind eindeutig bestimmt. ❑

Haben wir für zwei Zahlen a und b einen Quotienten q und den zugehörigen Rest r gefunden, also $a = q \cdot b + r$, so gilt $ggT(a;\ b) = ggT(b;\ r)$.

Diese Beziehung ist erfüllt, denn jeder gemeinsame Teiler von a und b ist auch ein Teiler von r und umgekehrt ist jeder gemeinsame Teiler von b und r auch ein gemeinsamer Teiler von a. Die Mengen der gemeinsamen Teiler von a und b bzw. von b und r stimmen also überein und damit auch der größte gemeinsame Teiler.

Wir berechnen nun $ggT(99;\ 69)$ nach dem EUKLIDischen Algorithmus:

[3] Benannt nach EUKLID VON ALEXANDRIA (im 3. Jh. v. Chr.), der diesen Algorithmus im 7. Buch seines Werkes „Elemente“ beschrieb.

99 = 1 · 69 + 30; also gilt $ggT(99;\ 69) = ggT(69;\ 30)$,
69 = 2 · 30 + 9; also gilt $ggT(69;\ 30) = ggT(30;\ 9)$,
30 = 3 · 9 + 3; also gilt $ggT(30;\ 9) = ggT(9;\ 3)$,
9 = 3 · 3 + 0; also gilt $ggT(9;\ 3) = 3$.

Setzen wir nun die Aussagen zu den größten gemeinsamen Teilern „von oben nach unten“ zusammen, erhalten wir das Ergebnis $ggT(99;\ 69) = 3$.

Beachten wir, dass in jeder Zeile der Rest r kleiner als in der vorangegangenen Zeile wird, wenn wir den Quotienten q maximal wählen, erreichen wir nach endlich vielen Schritten immer eine Division mit dem Rest 0.

Mit diesem Verfahren finden wir auch für größere Zahlen a und b den größten gemeinsamen Teiler, ohne eine Primfaktorenzerlegung durchführen zu müssen:

$3028009 = 1 \cdot 2021027 + 1006982$; $ggT(3028009; 2021027) = ggT(2021027; 1006982)$.
$2021027 = 2 \cdot 1006982 + 7063$; $ggT(2021027; 1006982) = ggT(1006982; 7063)$.
$1006982 = 142 \cdot 7063 + 4036$; $ggT(1006982; 7063) = ggT(7063; 4036)$.
$7063 = 1 \cdot 4036 + 3027$; $ggT(7063; 4036) = ggT(4036; 3027)$.
$4036 = 1 \cdot 3027 + 1009$; $ggT(4036; 3027) = ggT(3027; 1009)$.
$3027 = 3 \cdot 1009 + 0$; $ggT(3027; 1009) = 1009$.

Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 2021027 und 3028009 ist somit 1009.

Aufgabe. Untersuche, welchen größten gemeinsamen Teiler die Zahlen $2n + 3$ und $3n + 2$ für verschiedene natürliche Zahlen n haben.

Lösungshinweise: Um eine Vermutung zu finden, berechnen wir zuerst für einige Werte von n den größten gemeinsamen Teiler der zugehörigen Zahlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$2n+3$	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$3n+2$	2	5	8	11	14	17	20	23	26
ggT	1	5	1	1	1	1	5	1	1

Wir erkennen, dass die beiden Zahlen meist teilerfremd sind, aber manchmal auch einen gemeinsamen Teiler 5 haben, nämlich offenbar, wenn es ganze Zahlen m mit $n = 5m + 1$ gibt. Tatsächlich können wir im Sinne einer vollständigen Induktion[4] bestätigen:

- Ist $2n + 3$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n = 1$ oder $n = 6$), dann ist auch $2(n + 5) + 3 = 2n + 3 + 10$ durch 5 teilbar.

[4] Es wird in der MO kein vollständiger Beweis mit der Methode der vollständigen Induktion erwartet, wenn deren Prinzipien wie im Folgenden erkennbar sind.

- Ist $3n+2$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n=1$ oder $n=6$), dann ist auch $3(n+5)+2=3n+2+15$ durch 5 teilbar.

Hinweis: Setzen wir $n=5m+1$ in die zu untersuchenden Ausdrücke ein, erhalten wir die Teilbarkeit durch 5 unmittelbar:

$$2\cdot n+3=2\cdot(5\cdot m+1)+3=10\cdot m+5,$$
$$3\cdot n+2=3\cdot(5\cdot m+1)+2=15\cdot m+5.$$

Mithilfe des EUKLIDischen Algorithmus können wir unsere Beobachtung bestätigen:

$$3n+2=1\cdot(2n+3)+(n-1);\quad ggT(3n+2;2n+3)=ggT(2n+3;n-1).$$
$$2n+3=2\cdot(n-1)+5;\quad ggT(2n+3;\,n-1)=ggT(n-1;5).$$

Zusammengefasst bedeutet dies:

$$ggT(3n+2;2n+3)=ggT(n-1;5).$$

Damit wissen wir: Wenn $n-1$ nicht durch 5 teilbar ist, dann sind die beiden Ausgangszahlen teilerfremd. Ist dagegen $n-1$ durch 5 teilbar, so ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler 5. Die Antwort lautet also

$$ggT(3n+2;2n+3)=\begin{cases}5,\text{falls } 5|(n-1)\\1,\text{sonst}\end{cases}$$ ❑

Aufgabe MO430945. Untersuchen Sie, ob es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die 2^n-3 und 3^n-2 einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben.

Lösungshinweise: Wir berechnen einige Werte beider Zahlen.

n	1	2	3	4	5	6	7
2^n-3	-1	1	5	13	29	61	125
3^n-2	1	7	25	79	241	727	2185

Wir erkennen, dass es Zahlenpaare gibt, die teilerfremd sind (z.B. 13 und 79). Wir vermuten aber, dass die Teilbarkeit durch 5 ein erfolgversprechender Lösungsansatz sein könnte. Berechnen wir in der Tabelle jeweils die Reste bei Division durch 5, so können wir die Tabelle mühelos fortsetzen:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^n	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2
2^n-3	0	3	4	1	0	3	4	1	0	3	4
3^n	2	1	3	4	2	1	3	4	2	1	3
3^n-2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1

Da die Reste eine periodische Folge bilden, sind offenbar für alle natürlichen Zahlen n mit $n = 4m - 1$ ($m = 1{,}2, \ldots$) sowohl $2^n - 3$ als auch $3^n - 2$ durch 5 teilbar.

Tatsächlich können wir im Sinne einer vollständigen Induktion bestätigen:

- Ist $2^n - 3$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n = 3, 7, 11$), dann ist auch $2^{n+4} - 3 = 16 \cdot 2^n - 3 = 15 \cdot 2^n + (2^n - 3)$ durch 5 teilbar.
- Ist $3^n - 2$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n = 3, 7, 11$), dann ist auch $3^{n+4} - 2 = 81 \cdot 3^n - 2 = 80 \cdot 3^n + (3^n - 2)$ durch 5 teilbar.

Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen n, so dass sowohl $2^n - 3$ als auch $3^n - 2$ einen Teiler größer 1 haben. ❑

Lösungsvariante: Die Anwendung des EUKLIDischen Algorithmus führt ebenfalls zum Ziel, erfordert aber für eine erfolgreiche Darstellung bereits die entsprechende Vermutung und führt zu einer aufwändigen Herleitung:

$$3^n - 2 = 1 \cdot (2^n - 3) + (3^n - 2^n + 1)$$
$$ggT(3^n - 2\,;\, 2^n - 3) = ggT(2^n - 3\,;\, 3^n - 2^n + 1).$$

$$2^n - 3 = 1 \cdot (3^n - 2^n + 1) + (2 \cdot 2^n - 3^n - 4)$$
$$ggT(2^n - 3\,;\, 3^n - 2^n + 1) = ggT(3^n - 2^n + 1\,;\, 2 \cdot 2^n - 3^n - 4).$$

$$3^n - 2^n + 1 = 2 \cdot (2 \cdot 2^n - 3^n - 4) + (3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 9)$$
$$ggT(3^n - 2^n + 1\,;2 \cdot 2^n - 3^n - 4) = ggt(2^n - 3^n - 4\,;3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 9).$$

Betrachten wir den zuletzt aufgetretenen Rest

$$3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 9 = 3 \cdot (3^n - 2^n) + 9 - 2^{n+1},$$

so erkennen wir einerseits, dass für eine ungerade Zahl n der Ausdruck $3^n - 2^n$ durch $(3 + 2) = 5$ teilbar ist[5]. Andererseits sehen wir für eine ungerade Zahl $n = 2m + 1$ den Zusammenhang

$$2^{2m+2} - 9 = 2^{(m+1)\cdot 2} - 3^2 = (2^{m+1} - 3) \cdot (2^{m+1} + 3)$$

Untersuchen wir nun zunächst tabellarisch, welche Reste bei Division durch 5 die beiden Klammerausdrücke lassen.

[5] Es kann ohne Beweis zitiert werden: Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so gilt:
$a^m - b^m = (a + b) \cdot (a^{m-1} - a^{m-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{m-2} - b^{m-1})$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
2^{m+1}	4	3	1	2	4	3	1	2
$2^{m+1}-3$	1	0	3	2	1	0	3	2
$2^{m+1}+3$	2	1	4	0	2	1	4	0

Also ist für jede gerade Zahl m entweder $2^{m+1}-3$ oder $2^{m+1}+3$ durch 5 teilbar. Insgesamt ist also das Produkt beider Klammerausdrücke für jede gerade Zahl m durch 5 teilbar. Somit hat dieser Rest für alle $n = 4m+1$ den Teiler 5 und somit gilt auch für diese natürlichen Zahlen $ggT(2^n-3; 3^n-2) \geq 5$.

Aufgabe. Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form p^2-1 mit einer Primzahl $p \geq 5$.

Lösungshinweise: Wir kennen die Faktorenzerlegung $p^2-1 = (p-1)\cdot(p+1)$.

- Da p als Primzahl mit $p \neq 2$ eine ungerade Zahl ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine dieser Zahlen sogar durch 4 teilbar. Insgesamt ist das Produkt also durch $2\cdot 4 = 8$ teilbar.
- Da von drei aufeinanderfolgenden Zahlen genau eine dieser Zahlen durch 3 teilbar ist, ist wegen $p \neq 3$ entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt für jede Primzahl $p \geq 5$ durch $8\cdot 3 = 24$ teilbar.

Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen dieser Form ist folglich mindestens 24.

Weil wir für $p = 5$ den Wert $5^2-1 = 24$ erhalten, kann der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen dieser Form nicht größer als 24 sein. Somit ist der größte gemeinsame Teiler gleich 24. ❑

Lösungsvariante: Wir berechnen für zwei Primzahlen $p \geq 5$ und $q \geq 5$ mit $p > q$ den größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des EUKLIDischen Algorithmus:

$$p^2-1 = 1\cdot(q^2-1) + (p^2-q^2).$$

Zerlegen wir den Rest $p^2-q^2 = (p+q)\cdot(p-q)$, so finden wir mit ähnlicher Argumentation wie oben, dass dieser Rest durch 24 teilbar ist. Damit ist der größte gemeinsame Teiler mindestens 24. Anhand des Beispiels $p = 5$ überzeugen wir uns, dass er nicht größer als 24 sein kann.

Aufgabe – MO421022. Wir betrachten alle diejenigen Zahlen u^3-u, bei denen u eine ungerade Zahl mit $u > 1$ ist.

a) Beweisen Sie, dass jede dieser Zahlen gerade ist.
b) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller dieser Zahlen.

Lösungshinweise zu a) Für eine ungerade Zahl u ist auch u^3 ungeradzahlig. Die Differenz zweier ungerader Zahlen ist stets gerade.[6]

Zu b) Wir setzen $z = u^3 - u$. Für $u = 3$ finden wir $z = 3^3 - 3 = 24 = 8 \cdot 3$. Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen der geforderten Form kann also nicht größer als 24 sein. Wir beweisen nun, dass alle diese Zahlen durch 8 und 3 teilbar sind. Wir zerlegen dafür z in ein Produkt von Faktoren[7]:

$$z = u \cdot (u^2 - 1) = (u - 1) \cdot u \cdot (u + 1)$$

- Da u eine ungerade Zahl ist, sind $u - 1$ und $u + 1$ gerade Zahlen. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine dieser Zahlen sogar durch 4 teilbar. Insgesamt ist das Produkt also durch $2 \cdot 4 = 8$ teilbar.
- Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist zudem genau eine dieser Zahlen durch 3 teilbar.

Somit ist das Produkt für jede ungerade Zahl $u > 1$ durch $8 \cdot 3 = 24$ teilbar.

Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen dieser Form ist folglich 24. ❑

Aufgabe MO410943. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $n^4 - 4 \cdot n^2$ mit $n \in \{1,2,3, \dots\}$, welche auf Null enden.

Lösungshinweise: Wir setzen $z = n^4 - 4 \cdot n^2$. Da z auf Null enden soll, ist z geradzahlig. Deshalb muss auch n geradzahlig sein. Außerdem ist 5 ein Teiler aller Zahlen dieser Form. Wir zerlegen z in

$$z = n^2 \cdot (n^2 - 4) = (n - 2) \cdot n^2 \cdot (n + 2).$$

- Von den drei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen $n - 2$, n und $n + 2$ ist genau eine Zahl durch 3 teilbar.
- Ist n durch 4 teilbar, sind sowohl $n - 2$ als auch $n + 2$ durch 2 teilbar. Das Produkt der Faktoren ist also durch $2 \cdot 4^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 4^2$ teilbar. Ist die gerade Zahl n nicht durch 4 teilbar, sind sowohl $n - 2$ als auch $n + 2$ durch 4 teilbar. Das Produkt der Faktoren ist also durch $4 \cdot 2^2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 4^2$ teilbar.

Insgesamt ist z stets durch $2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$ teilbar.

Der größte gemeinsame Teiler ist also mindestens 960. Anhand von Beispielen zeigen wir, dass dieser Wert nicht größer sein kann. Aus der Faktorenzerlegung erkennen wir, dass für gerade Zahlen n mindestens $n = 8$ gelten muss, um z auf Null enden zu lassen. Anstatt die dabei entstehenden recht großen Zahlen schriftlich auszurechnen (rechentechnische Hilfsmittel sind nicht erlaubt!), nutzen wir die Faktorenzerlegung:

[6] Diese Aussage darf ohne Beweis zitiert werden.

[7] Wir nutzen die bekannte Beziehung für reelle Zahlen a und b: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$n = 8$: $\quad z = 6 \cdot 8^2 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 960.$

Da der kleinstmögliche Wert für z bereits größer als 960 ist, könnte der größte gemeinsame Teiler größer als 960 sein.

$n = 10$: $\quad z = 8 \cdot 10^2 \cdot 12 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 5 \cdot 960.$
$n = 12$: $\quad z = 10 \cdot 12^2 \cdot 14 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 960.$

Da die zusätzlichen Primfaktoren 2^2, $2 \cdot 5$ und $3 \cdot 7$ keine gemeinsamen Teiler haben, kann der größte gemeinsame Teiler aller dieser Zahlen nicht größer als 960 sein. ❑

Aufgabe MO411042. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $n^8 - n^2$ mit $n \in \{1,2,3, \dots\}$.

Lösungshinweis: Wir setzen $z = n^8 - n^2$.

- Für $n = 1$ erhalten wir $z = 0$, was durch jede positive ganze Zahl teilbar ist.
- Für $n = 2$ berechnen wir $z = 256 - 4 = 252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$. Der größte gemeinsame Teiler kann also nicht größer als 252 sein.

Wir zeigen nun, dass z für jede Zahl n durch 4, 7 und 9 teilbar ist. Dazu zerlegen wir z in Faktoren

$z = n^2 \cdot (n^6 - 1) = n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^4 + n^2 + 1),$
also $\quad z = (n-1)n^2(n+1)(n^4 + n^2 + 1)$

- z ist durch 4 teilbar: Ist n gerade, so ist n^2 durch 4 teilbar. Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ durch 4 teilbar.
- z ist durch 9 teilbar: Ist n durch 3 teilbar, dann ist n^2 durch 9 teilbar. Ist n nicht durch 3 teilbar, so lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Somit ist in diesem Fall sowohl $n^2 - 1$ als auch $(n^2)^2 + n^2 + 1$ durch 3 teilbar.
- z ist durch 7 teilbar: Lässt n bei Division einen der Reste 0 oder ±1, so ist $(n-1)$, n oder $(n+1)$ durch 7 teilbar. Lässt n bei Division durch 7 einen der Reste ±2 oder ± 3, dann ist $n^4 + n^2 + 1$ durch 7 teilbar.

Insgesamt ist also z für jede Zahl n durch $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$ teilbar. ❑

63. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 6. bis 16. Juli 2022 in Oslo (Norwegen) statt. Mit 68 teilnehmenden Schülerinnen und 521 Schülern aus 104 Ländern wurde die bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern) nicht erreicht.

Insgesamt wurden 285 Medaillen vergeben, somit erhielten 48.4% aller Teilnehmenden einen Preis. Mit einer Gold-, vier Silber- und einer Bronzemedaille schnitten die deutschen Teilnehmer sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 192 Punkten von 252 möglichen Punkten (94.2%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den hervorragenden **7. Platz** erreichen (2021: 129 Punkte/12. Platz; 2020: 140 Punkte/26. Platz). Insbesondere erreichten alle sechs deutschen Teilnehmer in den Aufgaben 1, 2 und 4 jeweils die volle Punktzahl. Angeführt wird diese Länderliste von der Volksrepublik China (252 Punkte, sechs Goldmedaillen), Republik Korea (208 Punkte, drei Gold- und drei Silbermedaillen) und den USA (207 Punkte, vier Gold-, eine Silber- und eine Bronzemedaille). Von den europäischen Ländern liegt nur Rumänien (194 Punkte) vor Deutschland.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org zu finden.

Aufgaben der 63. IMO[8]

Aufgabe 1. Die Osloer Bank gibt Münzen aus Aluminium (mit *A* bezeichnet) und aus Bronze (mit *B* bezeichnet) heraus. Marianne hat n Aluminiummünzen und n Bronzemünzen beliebig in einer Reihe angeordnet. Eine *Kette* sei eine Teilfolge aufeinanderfolgender Münzen aus gleichem Material. Für eine gegebene positive ganze Zahl $k \leq 2n$ führt Marianne wiederholt die folgende Operation durch: Sie identifiziert die längste Kette, die die k-te Münze von links enthält, und verschiebt alle Münzen dieser Kette an das linke Ende der Reihe. Zum Beispiel erhält sie für $n = 4$ und $k = 4$ ausgehend von der Konfiguration *AABBBABA* nacheinander

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \cdots$$

Man bestimme alle Paare (n, k) mit $1 \leq k \leq 2n$, sodass für jede Ausgangskonfiguration zu irgendeinem Zeitpunkt im Verlauf des Prozesses die n am weitesten links liegenden Münzen aus dem gleichen Material sind.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, für die es zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ genau ein $y \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

[8] Es wird nicht erwartet, diese Aufgaben selbständig zu lösen. Jedoch könnte man bei Aufgabe 1 einen Spezialfall mit kleinen Zahlen n und k lösen, bei Aufgabe 2 außer der trivialen Lösung $f(x) = x^{-1}$ weitere Beispiele finden, bei Aufgabe 3 ein Beispiel angeben, bei Aufgabe 4 die Problemstellung in einer Skizze verdeutlichen, bei Aufgabe 5 eine systematische Suche starten und bei Aufgabe 6 am 4×4-Quadrat experimentieren.

Aufgabe 3. Es seien k eine positive ganze Zahl und S eine endliche Menge ungerader Primzahlen. Man beweise, dass es (bis auf Drehung und Spiegelung) höchstens eine Möglichkeit gibt, die Elemente von S entlang eines Kreises so anzuordnen, dass das Produkt zweier beliebiger Nachbarn in der Form $x^2 + x + k$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl x dargestellt werden kann.

Aufgabe 4. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit $BC = DE$. Weiterhin sei angenommen, dass T ein Punkt im Inneren von $ABCDE$ mit $TB = TD, TC = TE$ und $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$ ist. Die Gerade AB schneide die Geraden CD und CT in den Punkten P bzw. Q. Wir nehmen an, dass die Punkte P, B, A, Q in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Die Gerade AE schneide die Geraden CD und DT in den Punkten R bzw. S. Wir nehmen an, dass die Punkte R, E, A, S in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen.

Man beweise, dass die Punkte P, S, Q, R auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 5. Man bestimme alle Tripel (a, b, p) positiver ganzer Zahlen mit Primzahl p und

$$a^p = b! + p$$

Aufgabe 6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Ein Nordisches Quadrat ist ein Spielbrett der Größe $n \times n$, in dessen Feldern alle Zahlen von 1 bis n^2stehen, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält. Zwei verschiedene Felder heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite besitzen. Jedes Feld, das nur benachbarte Felder mit größeren Zahlen hat, heißt Talfeld. Ein ansteigender Pfad ist eine Folge von einem oder mehreren Feldern mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Das erste Feld in der Folge ist ein Talfeld.
(ii) Jedes weitere Feld der Folge ist benachbart zum vorigen Feld.
(iii) Die Zahlen in den Feldern der Folge sind in ansteigender Reihenfolge.

Man bestimme in Abhängigkeit von n die kleinstmögliche Gesamtzahl ansteigender Pfade in einem Nordischen Quadrat.

Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen

Das Summenzeichen Σ (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *S*) wird für alle ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

Die Verwendung des Summenzeichens wie bei Aufgabe KZM 1-5A[9] kann helfen, mathematische Texte übersichtlicher und unmissverständlich zu formulieren. Es wird jedoch nicht erwartet, in einer Lösungsdarstellung selbst das Summenzeichen zu verwenden. Stattdessen können solche Summen ausgeschrieben werden. Allerdings ist darauf zu achten, dass bei abkürzenden Schreibweisen mit „+ … +“ keine Missverständnisse über den Inhalt der Summe möglich sind – so wie es in der Aufgabe KZM 1-5A thematisiert wird.

Mit den folgenden Regeln können wir mit Summenzeichen rechnen. Zur anschaulichen Darstellung dieser Regeln sind Beispiele mit konkreten Zahlenwerten hilfreich:

(1) Freie Wählbarkeit des Summationsindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$

Beispiel: $\sum_{j=3}^{8} j = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{k=3}^{8} k$

(2) Ausklammern eines konstanten Faktors: $\sum_{j=m}^{n}(c \cdot a_j) = c \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{k=2}^{5}(2 \cdot k) = 4 + 6 + 8 + 10 = 2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{5} k$

(3) Zerlegen in Teilsummen ($m < k < n$): $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{j=-3}^{3} j^2 = \sum_{j=-3}^{-1} j^2 + \sum_{j=0}^{0} j^2 + \sum_{j=1}^{3} j^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2$

$\sum_{j=-3}^{3} j^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$

$= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2$

(4) Zusammenfassen von Summen: $\sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j = \sum_{j=m}^{n}(a_j + b_j)$

Beispiel für die aufeinanderfolgende Ausführung dieser Regeln:

$\sum_{k=1}^{4}(10 + k) + \sum_{m=1}^{4}(10 - m)$

$= \sum_{j=1}^{4}(10 + j) + \sum_{j=1}^{4}(10 - j)$ (Regel 1)

$= \sum_{j=1}^{4}\big((10 + j) + (10 - j)\big)$ (Regel 4)

$= \sum_{j=1}^{4} 20$

$= 20 \cdot \sum_{j=1}^{4} 1 = 20 \cdot 4 = 80$ (Regel 2)

Dieses Beispiel überprüfen wir durch die ausführliche Summendarstellung:

$\sum_{k=1}^{4}(10 + k) + \sum_{m=1}^{4}(10 - j) = (11 + 12 + 13 + 14) + (9 + 8 + 7 + 6) = 80$

[9] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

(5) Umkehrungsregel: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j}$

Beispiel: $1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = \sum_{k=1}^{4} k \cdot 10^{4-k}$
$= \sum_{k=1}^{4} (5-k) \cdot 10^{4-(5-k)} = \sum_{k=1}^{4} (5-k) \cdot 10^{k-1}$
$= 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$

(6) Transformation des Summenindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$

Beispiel: $\sum_{j=4}^{8} j = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{j=6}^{10} (j-2)$

Die bekannte Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen, die bereits im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (1492 bis 1559) zu finden ist, aber im Allgemeinen mit dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) in Verbindung gebracht wird, d.h.

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

finden wir unter Verwendung der obigen Rechenregeln mit Summenzeichen auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
&S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\right) && \text{(Regel 5)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \big(k + (n+1-k)\big) && \text{(Regel 4)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (n+1) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 && \text{(Regel 2)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n
\end{aligned}$$

Für allgemeinere Ausdrücke, wie etwa $S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n} (a + k \cdot d)$ ergeben sich nun deren Summenformeln als unmittelbare Folgerung:

$$\begin{aligned}
&S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n} (a + k \cdot d) \\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 + d \cdot \sum_{k=0}^{n} k \quad \text{(Regel 3)} \\
&= a \cdot (n+1) + d \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Leicht können wir nachprüfen, dass wir – bis auf Regel (2) – in jeder der angegebenen Regeln das Summenzeichen durch das Produktzeichen ersetzen können:

Das Produktzeichen Π (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *P*) wird für alle nichtnegativen ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$.

In Analogie muss die Regel des Ausklammerns eines Faktors (Regel 2) für das Produktzeichen lauten:

(2') $\prod_{j=m}^{n}(c \cdot a_j) = c^{(n-m+1)} \cdot \prod_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\prod_{j=1}^{4}(2 \cdot j) = 2^4 \cdot \prod_{j=1}^{4} j = 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 384$

Allerdings können Summen- und Produktzeichen im Allgemeinen nicht innerhalb eines Ausdruckes vertauscht werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{2} 1 = \sum_{i=1}^{2}(1 \cdot 1) = 1 + 1 = 2\,, \quad \text{aber}$$
$$\prod_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} 1 = \prod_{j=1}^{2}(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Bezeichnen $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ die Ziffern einer m-stelligen Zahl im Dezimalsystem, so können wir die Aufgabe KZM 1-1 mit Summen und Produktzeichen so formulieren:

Aufgabe KZM 1-1. Man finde alle positiven ganzen Zahlen n mit den Ziffern $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ (häufig als $n = \overline{a_m a_{m+1} \ldots a_1 a_0}$ dargestellt), die folgende Gleichung erfüllen:

$$n = \sum_{i=0}^{m}\left(10^{m-i} \cdot a_i\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i + \prod_{i=0}^{m} a_i.$$

In alten Mathe-Büchern geblättert

Der Autor Werner Bergmann analysiert in

Bruchrechnen im Mittelalter
Verlag Henselowsky Boschmann, Bottrop, 2020

die Rechenkunst im Mittelalter und erläutert insbesondere die Bruchrechnung mit römischen Zahlen, jenem Zahlensystem, dass bereits vor unserer Zeitrechnung im antiken Römischen Reich (ab ca. 750 v.u.Z.) verwendet wurde und bis ins 16. Jahrhundert gebräuchlich war. Die römischen Zahlenzeichen I, V, X, L, C, D und M sind noch heute gut bekannt. Aufgrund des additiven Systems zur Darstellung ganzer Zahlen sind Addition und Subtraktion leicht ausführbar. Für die Addition zweier Zahlen, z.B. CCCLXXXVII + CXXXVI, genügt es, alle Zeichen geordnet nebeneinander zu schreiben, also CCCCLXXXXXXVVIII, und die geeignete Anzahl gleicher Zeichen von rechts nach links schrittweise durch das nächsthöhere Zeichen zu ersetzen („elevieren"), also

CCCCLXXXXXX**VV**III → CCCCL**XXXXX**XXIII → CCCC**LL**XXIII → **CCCCC**XXIII → DXXIII

Wir können heute das Ergebnis durch das uns vertraute Dezimalsystem prüfen, also 387 + 136 = 523.

Die Multiplikation wurde auf die wiederholte Addition zurückgeführt, wobei die Werte des zweiten Faktors geschickt verwendet werden können. Das dabei entstehende Schema finden wir in dem heutigen schriftlichen Multiplikationsverfahren wieder. Auch die Division einer Zahl durch einen einstelligen Divisor lässt sich intuitiv durchführen. Um den dritten Teil von CCCLXXXVII zu erhalten, suchen wir von links die passenden Vielfachen der verwendeten Zeichen:

> **CCC**LXXXVII: Da C dreimal vorhanden ist, beginnt der Quotient mit C und wir subtrahieren vom Dividend CCC. Es verbleiben:
>
> LXXXVII: Da L weniger als dreimal vorhanden ist, stellen wir L mit dem nächstkleineren Zeichen X dar („resolvieren“). Es entsteht:
>
> XXXXXXXXVII: Da X mehr als sechsmal und weniger als neunmal vorhanden ist, wird der Quotient mit XX fortgesetzt und wir subtrahieren XXXXXX. Es verbleiben:
>
> XXVII: Da X weniger als dreimal vorhanden ist, stellen wir X mit dem nächstkleineren Zeichen V dar („resolvieren“). Es entsteht:
>
> VVVVVII: Da V mehr als dreimal und weniger als sechsmal vorhanden ist, wird der Quotient mit V fortgesetzt und wir subtrahieren VVV. Es verbleiben:
>
> VVII: Da V weniger als dreimal vorhanden ist, stellen wir V mit dem nächstkleineren Zeichen I dar („resolvieren“). Es entsteht:
>
> IIIIIIIIIIII: Da I zwölfmal vorhanden ist, wird der Quotient mit IIII fortgesetzt und nach Subtraktion von IIIIIIIIIIII ist der Dividend aufgebraucht.
>
> Wir erhalten also das Ergebnis: CXXVIIII (387 : 3 = 129).

Die Division mit einem mehrstelligen Divisor erfordert Übung, gelingt aber nach dem Prinzip, den Divisor so lange zu addieren, bis sich der Dividend ergibt.

Das Rechnen mit römischen Zahlenzeichen beschränkte sich im Allgemeinen auf ganze Zahlen. Dezimalzahlen, wie wir sie heute verwenden, waren noch nicht im Gebrauch. Man war sich dieser Beschränkung bewusst. ADAM RIES (1492 bis 1559)

erklärt in seinem dritten Rechenbuch, „Practica“ genannt (1550), im Zusammenhang mit dem Radizieren:

„Es haben alle zahl nicht gar radicem ſondern es bleibt etwas vbrig / ſuch iren radix auff geneheſte alſo / multiplicir die ſelbe zahl mit 1000000 als dann extrahir radicem komen dir eitel tauſent teil von ein gantzen / Auf 19 ſoltu den Radix ſuchen / ſetz darfur ſechs 0 wirt 19000000 darauf ſuch radice wie geſagt. … Iſt alſo Radix 4 gantze und 358 tauſent teil / das vberig tregt wenig auff.“

Ohne es im Dezimalsystem als $\sqrt{19} \approx 4.358$ schreiben zu können, gab ADAM RIES das Ergebnis in dieser Genauigkeit an und wusste zudem, dass der Rest vernachlässigbar war.

Um mit gebrochenen Zahlen rechnen zu können, wurden ganzzahlige Brüche verwendet. Entgegen des (um die Fünferwerte erweiterten) Dezimalsystems für die ganzen Zahlen basierte die Bruchrechnung auf der Einteilung in 12 Teile (Dutzend), so wie es in der Kalender- und Zeitenrechnung üblich war und auch in der römischen Währung praktiziert wurde (Römisches Pfund = 12 Unzen).

Für die Brüche $\frac{1}{12}$ bis $\frac{11}{12}$ genügten drei zusätzliche Zeichen ($\frac{1}{12}$: – ; $\frac{2}{12}$: = und $\frac{6}{12}$: S). Die anderen Zwölfer-Brüche konnten damit wie mit römischen Zahlenzeichen gewohnt zusammengesetzt werden, z.B. $\frac{8}{12}$: S=–.

Zusätzlich wurden für die Stammbrüche[10], deren Nenner Vielfache von 12 sind (24, 36, 48, 72, 144 und 288), eigene Zeichen verwendet. So ist für $\frac{1}{288}$ das Zeichen ∋ überliefert. Brüche mit ganzzahligem Zähler größer als 1 werden durch nachgestellte römischen Zahlenzeichen geschrieben, z.B. $\frac{27}{288}$ = ∋XXVII. Mit diesem Repertoire von Zeichen konnten nun die Grundrechenarten für Brüche in gleicher Weise praktiziert werden. In besonders einfacher Weise gelang dies, wenn die Rechnungen mit dem Hauptnenner 288 durchgeführt wurden. So lässt sich die Aufgabe $6 \cdot \frac{1}{24} = 6 \cdot \frac{12}{288}$ so umschreiben: VI · ∋XII = ∋VI·XII = ∋LXXII. Die Rechnungen im Zähler (also in den nachgestellten Zeichen) erfolgte dabei so, wie man es mit römischen Zahlenzeichen gewohnt war. Zur Vereinfachung des Rechenaufwandes waren umfangreiche Additions- und Multiplikationstabellen verfügbar.

Für Kreisberechnungen ist im Mittelalter die Näherung $\pi \approx \frac{22}{7}$ bekannt. Dieser Wert wird mit ARCHIMEDES VON SYRAKUS (um 287 bis 212 v.u.Z.) in Verbindung gebracht, der

[10] Brüche mit Zähler 1 und ganzzahligem Nenner größer 1 heißen Stammbrüche (vgl. Thema 5, Heft Mai 2022)

die Kreiskonstante durch Einschachtelung des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1) mit ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecken näherungsweise berechnete. Jedoch muss vermutet werden, dass beim Rechnen mit römischen Zahlenzeichen diese Näherung wohl nicht verwendet wurde, da dieser Bruch nicht direkt darstellbar ist (es gab keine Zeichen für Brüche mit dem Nenner 7) und somit stets die Multiplikation mit 22 und anschließend die Division durch 7 auszuführen wäre. Dagegen fügt sich der Wert $3\frac{41}{288} \approx 3.14236111$ in dieses Zahlensystem ein und ist zudem ein besserer Näherungswert für $\pi \approx 3.14159265$ als $\frac{22}{7} \approx 3.14285714$. Das dies auch tatsächlich so angewandt wurde, lässt sich bei SEXTUS JULIUS FRONTINUS (um 40 bis 103) nachweisen. Als „Curator Aquarum“ war er in Rom für die städtische Wasserversorgung verantwortlich und gab nach dem Jahre 97 eine Übersicht über die Maße der Wasserleitungen und -rohre einschließlich ihrer Durchmesser, Umfänge und Fassungsvermögen heraus. Aus diesen Daten lässt sich eindeutig nachweisen, dass bei seinen Berechnungen der Wert $3\frac{41}{288}$ verwendet wurde.

Bekannte Sätze - Über die Anzahl der Teiler einer Zahl

Satz. Bezeichnet $T(a)$ die Anzahl der Teiler[11] der positiven natürlichen Zahl a und hat diese Zahl a die Primfaktorenzerlegung $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ mit Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_k$ $(k \geq 1)$ und ganzzahligen Exponenten $a_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, so gilt

$$T(a) = \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1)$$

Beweis: Ist die natürliche Zahl n eine Potenz einer Primzahl p, also $n = p^m$, so besitzt n genau die $m + 1$ Teiler $1, p, p^2, \dots, p^m$. Ist n eine zusammengesetzte Zahl der Form $n = p^m \cdot b$ mit der Primzahl p und den ganzen Zahlen m und b (wobei b und p teilerfremd sind, also $ggT(b; q) = 1$, dann gilt für die Anzahlen der Teiler $T(n)$ und $T(b)$:

$$T(n) = (m + 1) \cdot T(b).$$

Ist nämlich t ein Teiler von b, so sind auch $t, t \cdot p, t \cdot p^2, \dots, t \cdot p^m$ Teiler von n. Wegen der Teilerfremdheit von p und b sind auch p und t teilerfremd und die aufgelisteten Teiler sind paarweise verschieden und noch nicht als Teiler von b vorhanden. Auf diese Weise finden wir sukzessive

[11] Die Zahl 1 und die Zahl a selbst werden ebenfalls als Teiler von a betrachtet.

$b_2 = p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$: $T(a) = (a_1 + 1) \cdot T(b_2)$,
$b_3 = p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$: $T(a) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot T(b_3)$,
…
$b_k = p_k^{a_k}$: $T(a) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_{k-1} + 1) \cdot T(b_k)$.

❑

Folgerungen: Die maximale Anzahl von Teilern einer zweistelligen Zahl ist 12. Sie wird von den Zahlen 60, 72 und 96 angenommen.

Lösungshinweise: Wir finden diese Zahlen durch eine systematische Suche. Dabei achten wir darauf, dass die höheren Exponenten bei den kleineren Primzahlen gesetzt werden, um möglichst kleine Zahlen zu erzeugen. Wegen $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 99$ kann der Primfaktor 7 (oder größere Primfaktoren) bei dieser Systematik nicht auftreten.

k_1	k_2	k_3	k_4	a	$T(a)$
7	0	0	0	$2^7 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 > 99$	
6	0	0	0	$2^6 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 64$	7
5	1	0	0	$2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 96$	$6 \cdot 2 = 12$
4	2	0	0	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 > 99$	
3	2	0	0	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 72$	$4 \cdot 3 = 12$
3	1	1	0	$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 > 99$	
2	1	1	0	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 60$	$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

Bei dreistelligen Zahlen sind 32 Teiler das erreichbare Maximum, bei vierstelligen Zahlen 64.

Monatsaufgabe12 09/22. Es seien m und n natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass die Quersumme der Summe $m + n$ kleiner-gleich der Summe der Quersummen beider Zahlen ist, also dass gilt $Q(m + n)Q(m) + Q(n)$.

[12] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.10.2022 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 17 – Der größte gemeinsame Teiler 3
63. Internationale Mathematik-Olympiade 10
Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen 12
In alten Mathe-Büchern geblättert 15
Bekannte Sätze - Über die Anzahl der Teiler einer Zahl 18
Monatsaufgabe 09/22 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[13]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
September 2022	Thema 17	Größter gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

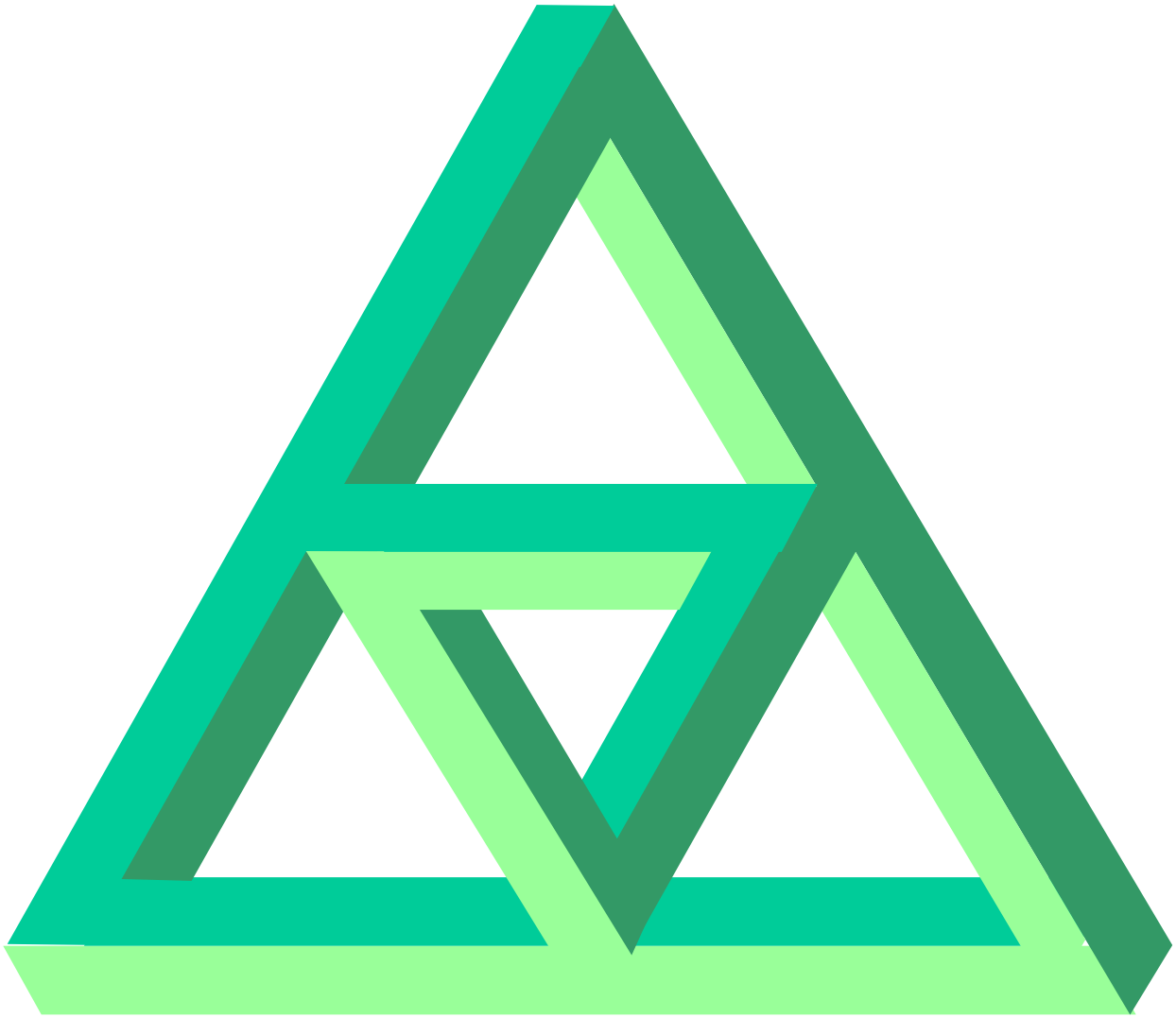
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

[13] Alle Hefte ab Januar 2021 sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2022 (Oktober 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgaben **MO621014** wird der Satz des THALES thematisiert. Auch wenn er in geometrischen Aufgabenstellungen nur einen Zwischenschritt zur vollständigen Lösung darstellt, lässt er in komprimierter Form die Rechtwinkligkeit von Dreiecken nachweisen. Die gleiche Aufgabe gibt auch Anlass, die Methode Versuch-Irrtum bei geometrischen Konstruktionen zu diskutieren. Dem ist auch die aktuelle Monatsaufgabe gewidmet.

Ausführlich werden Verteilungen von mehreren Punkten in einem Quadrat diskutiert, bei denen der Mindestabstand zwischen zwei dieser Punkte maximal ist. Damit soll die **KZM-Aufgabe 1-5B** vertieft werden. Die Ermittlung der Abstände erweist sich dabei als Übung für die Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS.

Im Zusammenhang mit dem Satz des THALES zitieren wir den Beweis aus dem Buch „Elemente“ von EUKLID.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 18 – Der Satz des THALES

Der Satz des THALES („Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig.“) und seine Umkehrung („Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt immer in der Mitte der Hypotenuse.“) sind oft wichtige Hilfsmittel, um Kreislinien zu definieren bzw. die Rechtwinkligkeit von Dreiecken zu zeigen. Auch wenn dies meist nur Zwischenergebnisse sind, so kann wie in der Runde 1 der diesjährigen Mathematik-Olympiade dieser Satz erfolgreich eingesetzt werden, um einen Lösungsansatz zu finden.

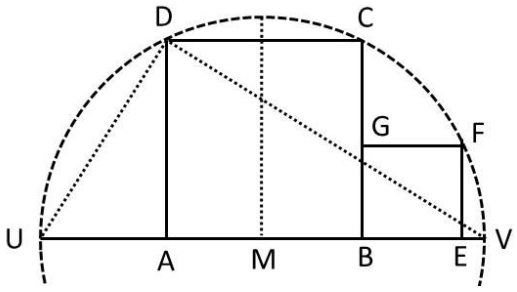
Aufgabe 18.01 - MO621014. In einem Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser $\overline{UV}$ mit $|\overline{UV}| = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei A und B auf dem Durchmesser sowie C und D auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei B zwischen M und E auf dem Durchmesser UV, F auf dem Halbkreis und G auf der Strecke $\overline{BC}$ liegen.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.
b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A_{ABCD} des Quadrats $ABCD$.
c) Zeigen Sie, dass $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{BEFG}$ gilt.

Hinweis: Die Zeichnung darf auch mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms angefertigt werden.

Lösungshinweise zu Teil b): Wir nehmen an, das Quadrat $ABCD$ erfülle alle Anforderungen. Dann liegt der Punkt D auf dem Halbkreis und nach **Satz des THALES** ist das Dreieck UVD rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt D. Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck UVD gilt folglich mit den abkürzenden Schreibweisen $s = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$ und $x = |\overline{UA}|$

$|\overline{UA}| \cdot |\overline{AV}| = x \cdot (2 \cdot s + x) = 4 \cdot s^2 = |\overline{AD}|^2$
und $\quad x + s = 6.$



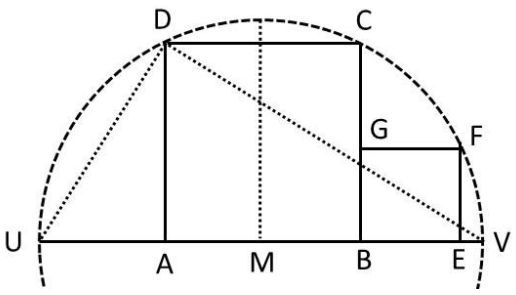
Aus diesem Gleichungssystem können wir die quadratische Gleichung

$$(6 - s) \cdot (s + 6) = 36 - s^2 = 4 \cdot s^2$$

herleiten und für s den Betrag[3] $s = \frac{6}{5}\sqrt{5} \approx 2.7$ berechnen. Somit finden wir für den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ den Wert $(2 \cdot s)^2 = 4 \cdot s^2 = \frac{144}{5} = 28.8$.

[3] Es ist zulässig, in Formel die Maßeinheiten wegzulassen, wenn Missverständnisse auszuschließen sind. Wenn wie in der Aufgabenstellung keine Maßeinheit angegeben ist, wird eine normierte Längeneinheit angenommen, die im Folgenden nicht genannt werden muss.

Lösungshinweise zu Teil c): Auch für das zweite Quadrat $BEFG$ nutzen wir die Argumentation von Teil b. Weil F auf dem Halbkreis liegt, ist das Dreieck UVF nach **Satz des THALES** rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F. Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck UVF gelten mit $t = |\overline{EF}|$ und $y = |\overline{EV}|$ die Gleichungen



$|\overline{UE}| \cdot |\overline{EV}| = (6 + s + t) \cdot y = t^2 = |\overline{EF}|^2$
und $\quad s + t + y = 6.$

Aus diesem Gleichungssystem finden wir die quadratische Gleichung

$$(6 + s + t) \cdot (6 - s - t) = 36 - (s + t)^2 = t^2,$$

also

$$t^2 + st + \frac{1}{2}s^2 - 18 = 0.$$

Da t als Streckenlänge einen positiven Wert annimmt, nutzen wir aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nur den positiven Teil

$$t = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{2} + 18} = -\frac{s}{2} + \sqrt{18 - \frac{s^2}{2}}.$$

Setzen wir den Wert für $s = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ ein, erhalten wir $t = \frac{6}{5}\sqrt{5} = s$, woraus unmittelbar die Behauptung $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{BEFG}$ folgt.

Lösungshinweise zu Teil a): Haben wir die Werte von s und t wie oben berechnet, können wir diese Längen zur Konstruktion der Quadrate verwenden. Dafür müssen wir aber zum Beispiel die Streckenlänge $s = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ tatsächlich konstruieren (und dürfen nicht stattdessen nur den Rundungswert 2.7 als Zirkelspanne wählen!).

Wegen $\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 6^2$ ist s die längere Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten s und $2 \cdot s$ und der Hypotenuse 6.

Anstatt der direkten Konstruktion von s aus den gegebenen Zahlenwerten können wir auch folgende Konstruktion ausführen: Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck *MNO* mit dem rechten Winkel bei M und den (lt. Aufgabenstellung gegebenen) Streckenlängen $|\overline{MN}| = 12$ und $|\overline{MO}| = 6$. Wir markieren auf der Hypotenuse dieses Dreiecks den Punkt S mit $|\overline{OS}| = 6$ und fällen von S das Lot auf MO mit dem Fußpunkt T. Die Strecke $\overline{ST}$ hat die geforderte Länge.

Diese Länge tragen wir auf dem Durchmesser $\overline{UV}$ des gegebenen Halbkreises von M in Richtung U ab und finden den Punkt A. Die Konstruktion des Quadrates $ABCD$ ist nun einfach:

- Wir errichten die Senkrechte in A und erhalten einen Schnittpunkt mit der Halbkreislinie, den wir D nennen.
- Wir konstruieren die Parallele zu UV durch D und erhalten einen zweiten Schnittpunkt mit der Halbkreislinie, den wir C nennen.
- Wir fällen das Lot von C auf UV, dessen Fußpunkt wir B nennen.

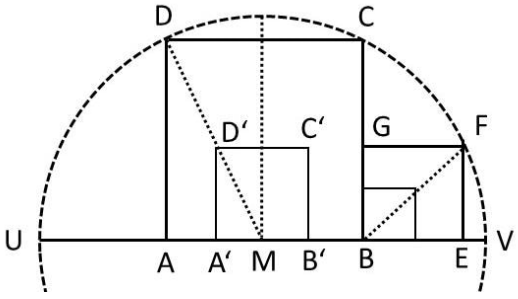
Das Viereck $ABCD$ erfüllt alle Bedingungen, denn es ist laut Konstruktion ein Rechteck und die Seitenlängen sind laut der obigen Herleitung alle gleich lang.

In Analogie konstruieren wir das Quadrat $BEFG$, indem wir auf UV von B aus in Richtung V den Punkt E mit $|\overline{BE}| = t$ und auf BC den Punkt G mit $|\overline{BG}| = t$ markieren. Sowohl die Parallele zu UV durch G als auch die Senkrechte zu UV in E schneiden die Halbkreislinie in dem gleichen Punkt, den wir F nennen. Das Quadrat $BEFG$ erfüllt alle Bedingungen, da es laut Konstruktion ein Rechteck ist, dessen Seitenlängen aufgrund der Herleitung alle gleich lang sind. ❑

Lösungsvariante zu Teilaufgabe a): Konstruktionen, bei denen die gesuchte Figur mehrere Bedingungen gleichzeitig erfüllen muss, lassen sich mit der Methode „Versuch und Irrtum“ lösen, wenn sich eine ähnliche Figur bei Weglassen einer dieser Bedingungen leicht konstruieren lässt und durch Streckung oder Stauchung die zunächst weggelassene Bedingung erfüllt werden kann. Der MO-Aufgabe entnehmen wir für das Quadrat $ABCD$ die zwei Bedingungen

(1) die Seite AB liegt auf UV und
(2) die Eckpunkte C und D liegen auf dem Halbkreis.

Aus Symmetriegründen erkennen wir, dass die Punkte A und B symmetrisch zum Halbkreis-mittelpunkt M liegen, weil andernfalls die Punkte C und D nicht beide auf dem Halbkreis liegen könnten.



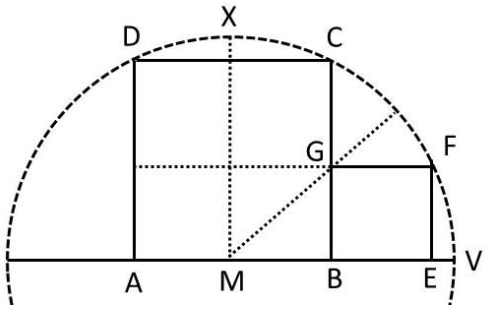
Lassen wir zunächst die Bedingung (2) außer Acht und konstruieren ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit einem frei wählbaren Betrag $|\overline{A'M}| = |\overline{MB'}|$. Nun zeichnen wir die Strecke $\overline{MD'}$ und verlängern diese ggf. über D' hinaus, so dass ein Schnittpunkt mit dem Halbkreis entsteht (den wir mit D bezeichnen). Dieser Punkt erweist sich als der gesuchte Eckpunkt des Quadrates $ABCD$. Wir erhalten die anderen drei Eckpunkte, indem wir

- den Punkt A als Fußpunkt des Lotes von D auf UV,
- den Punkt C als Schnittpunkt der Parallel zu UV durch D und schließlich
- den Punkt B als Fußpunkt des Lotes von C auf UV

konstruieren. In gleicher Weise konstruieren wir das Quadrat $BEFG$, indem wir zunächst ein Quadrat $BE'F'G'$ konstruieren und den Punkt F als Schnittpunkt der Strecke BF' (bzw. deren Verlängerung über F' hinaus) mit dem Halbkreis finden.

Lösungsvariante für Teilaufgabe b): Aufgrund der Symmetrie im Quadrat $ABCD$ gilt $|\overline{BC}| = 2 \cdot |\overline{MB}|$. Weil der Radius $\overline{MC}$ die Länge 6 hat, erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck MBC mit dem rechten Winkel in B nach Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS die Länge $|\overline{MB}| = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, woraus wir für den Flächeninhalt den Wert $4 \cdot |\overline{MB}|^2 = \frac{4 \cdot 36}{5} = \frac{144}{5}$ erhalten.

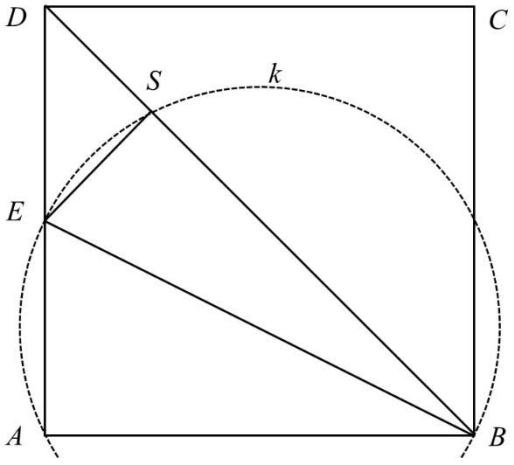
Lösungsvariante zu Teilaufgabe c): Aufgrund von Symmetriebetrachtungen erkennen wir, dass wir die im Viertelkreis XMV enthaltene Lösungsfigur an der Geraden durch M und G spiegeln können. Dann geht X in E und C in F über. Daraus folgt unmittelbar, dass der Flächeninhalt A_{ABCD} das Vierfache des Flächeninhalts A_{BEFG} ist.



Bereits in den letzten Jahren wurde der Satz des THALES wiederholt in den Lösungsdarstellungen verwendet. In den folgenden drei Beispielen beschränken wir uns bei den Lösungshinweisen auf die Anwendung dieses Satzes, ohne den Beweis zu vervollständigen.

Aufgabe 18.02 – MO601023[4]. Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Es sei *E* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises *k*. Der Kreis *k* schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in *S*.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *EBS*.



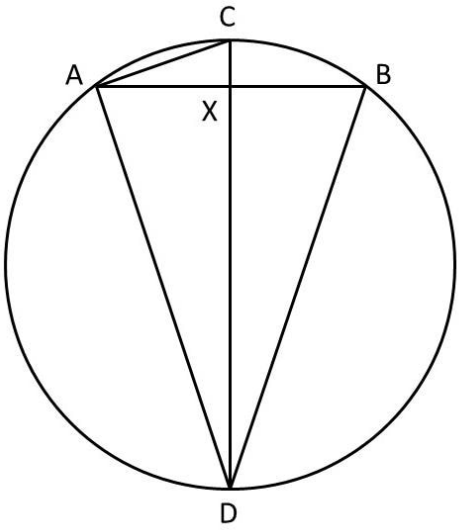
Lösungsansatz: Das Dreieck BSE ist wegen des **Satzes des THALES** rechtwinklig im Punkt S. Da auch das Dreieck DES laut Konstruktion rechtwinklig ist, können wir die Längen $\overline{ES}$ und $\overline{BS}$ explizit mit Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS in den entsprechenden rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

Aufgabe 18.03 – MO570932. Eine hölzerne Scheibe hat die Form eines geraden Zylinders mit einer Grundfläche vom Radius r und einer Höhe von 5 mm. Von dieser

[4] S. Thema 4 (III) Heft 03/2021

Scheibe wird durch einen ebenen Schnitt senkrecht zur Grundfläche ein Stück abgesägt. Die Schnittfläche beträgt 4 cm². Stellt man das Holzstück auf die Schnittfläche, so ist es 1 cm hoch.

Wie groß ist r?

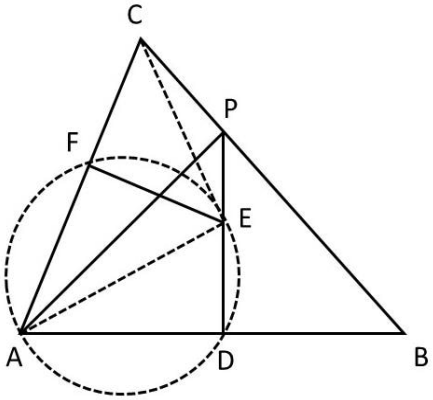


Lösungsansatz: Wir betrachten nur die Grundfläche der Ausgangsscheibe. Auf diesem Kreis seien A und B die Endpunkte der Schnittkante. Durch diese Punkte wird der Kreis in zwei Kreisbögen zerlegt. Einer dieser Kreisbögen gehört zum betrachteten Holzstück; der Mittelpunkt dieses Bogens werde mit C bezeichnet. Der auf dem Kreis dem Punkt C gegenüberliegende Punkt D ist der Mittelpunkt des anderen Kreisbogens. Die Gerade CD ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, schneidet sie also senkrecht im Mittelpunkt X von $\overline{AB}$.

Das Dreieck ACD hat nach dem **Satz des THALES** einen rechten Winkel bei A. Der Punkt X ist der Höhenfußpunkt der von A auf CD gefällten Höhe. Nun können wir den Höhensatz anwenden, um den Radius $|\overline{CD}|$ berechnen.

Aufgabe 18.04 – MO560945. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P der Fußpunkt des Lotes von A auf die Seite BC. Der Fußpunkt des von P auf die Seite AB gefällten Lotes sei D. Auf der Strecke $(\overline{PD})$ sei weiter ein innerer Punkt E gegeben, für den $|\sphericalangle CEA| = 90°$ gilt. Der Fußpunkt des von E auf die Seite AC gefällten Lotes sei mit F bezeichnet.

Beweisen Sie, dass die Geraden DF und BC parallel sind.



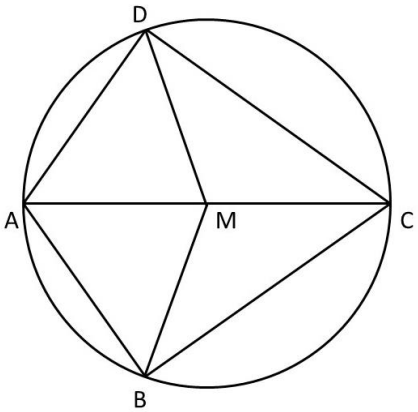
Lösungsansatz: Zeichnen wir die Skizze zur Aufgabenstellung, so erkennen wir, dass sowohl das Dreieck AEF rechtwinklig im Punkt F als auch das Dreieck ADE rechtwinklig im Punkt D sind. Nach Umkehrung des **Satzes des THALES** liegen also sowohl F als auch D auf der Kreislinie über dem Durchmesser $\overline{AE}$, d.h. sie liegen auf einem gemeinsamen Kreis und das Viereck $ADEF$ ist folglich ein Sehnenviereck.

Weitere Aufgaben aus länger zurückliegenden Olympiaden bestätigen, dass der Satz des THALES ein geeignetes Mittel ist, die Rechtwinkligkeit von Dreiecken nachzuweisen.

Aufgabe 18.05 – MO491023. In einem Drachenviereck $ABCD$ haben die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ die Länge a und die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ die Länge b. Das Drachenviereck besitze einen Umkreis k (d. h. alle Eckpunkte A, B, C und D liegen auf diesem Kreis k) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

a) Beweisen Sie, dass die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CMD$ gleich groß sind.
b) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Umkreisradius aus den Längen a und b her.
c) Es wird ein spezielles Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC und dem Umkreis k betrachtet. Der Punkt B soll so auf dem Umkreis k liegen, dass eine Parallele zu AC durch diesen Punkt B die Tangente t in B an den Umkreis k ist. Ein Punkt E liege auf der Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus so, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABED$ doppelt so groß ist wie der Inhalt des Vierecks $ABCD$.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BE}$ in Abhängigkeit von r.



Lösungshinweise Teil a): Da das Viereck $ABCD$ nach dem **Satz des THALES** zwei rechte Innenwinkel mit der Summe $180°$ besitzt und da AC die Symmetrieachse ist, gilt für die anderen beiden Winkel

$$|\sphericalangle BAD| = 180° - |\sphericalangle DCB| = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle DCM|.$$

Weil $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ Umkreisradien sind, ist das Dreieck DCM gleichschenklig und es gilt

$$|\sphericalangle CMD| = 180° - (|\sphericalangle DCM| + |\sphericalangle MDC|) = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle DCM|.$$

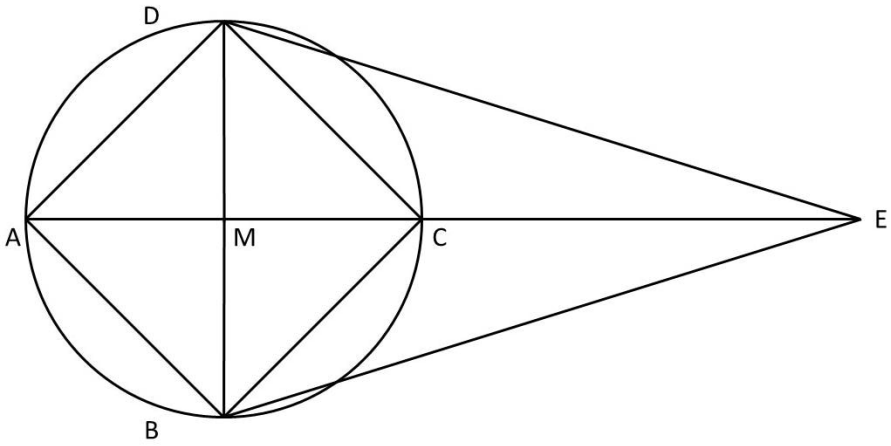
Also sind die Winkel $\sphericalangle CMD$ und $\sphericalangle BAD$ gleich groß.

Lösungshinweise Teil b): Die Diagonale $\overline{AC}$ ist der Umkreisdurchmesser (mit der Länge $2r$). Damit ist das Dreieck ACD nach dem **Satz des THALES** rechtwinklig. Also gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das Dreieck ACD mit der Hypotenuse $\overline{AC}$, die Gleichung $a^2 + b^2 = (2r)^2$. Für den Umkreisradius gilt daher nach Umformung

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Lösungshinweise Teil c): Unter den beschriebenen Bedingungen stehen der Berührungsradius und die Tangente an B senkrecht aufeinander, $MB \perp t$, und damit wegen der Parallelität von t und AC gilt auch $MB \perp AC$. Die Strecke $\overline{MB}$ ist somit Höhe auf $\overline{AC}$ im Dreieck ABC sowie Höhe auf $\overline{CE}$ im Dreieck CBE.

Wenn sich die Viereckfläche verdoppelt hat, muss die Länge der Diagonale $\overline{AE}$ im Vergleich zu $\overline{AC}$ doppelt so groß sein. Also gilt auch $|\overline{CE}| = |\overline{AC}| = 2 \cdot r$. Aus dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck EMB mit dem rechten Winkel im Punkt M, folgt $|\overline{BE}|^2 = r^2 + (r + 2r)^2$.



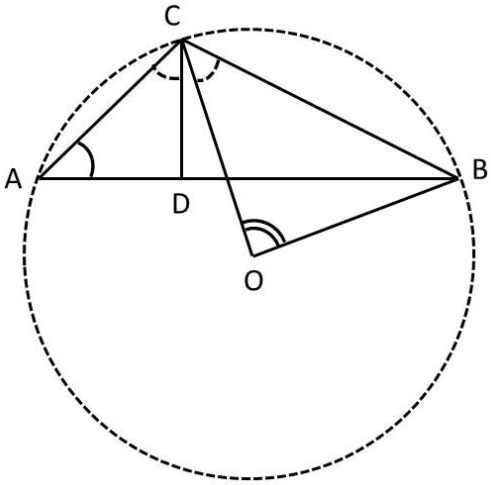
Damit erhalten wir $|BE| = r \cdot \sqrt{10}$. ❑

Aufgabe 18.06 – MO430946. In einem Dreieck ABC wird der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ von der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$ und der Höhe $\overline{CD}$ in drei gleich große Teile geteilt.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

Hilfssatz. In einem Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt O und dem zur Höhe von C gehörigen Höhenfußpunkt D gilt die Winkelgleichheit $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle BCO|$.

Lösungshinweise: Sei O der Umkreismittelpunkt eines (beliebigen[5]) Dreiecks ABC. Dann gilt $|\overline{OC}| = |\overline{OB}|$ als Radien des Umkreises und $|\sphericalangle COB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$ nach Peripherie-Zentri-Winkelsatz über der Sehne $\overline{BC}$.



Weiter gilt im gleichschenkligen Dreieck BCO stets der Zusammenhang

$$|\sphericalangle BCO| = \tfrac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle COB|) = 90° - |\sphericalangle CAB|.$$

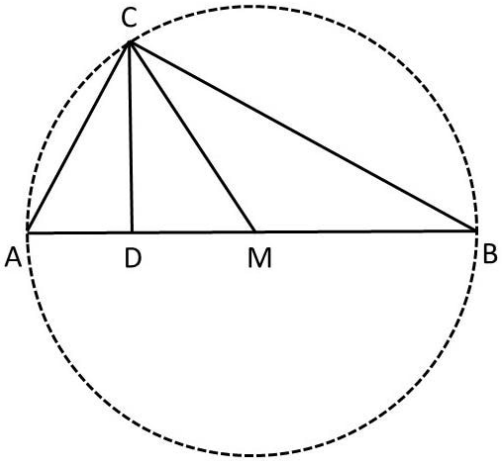
Zudem gilt im rechtwinkligen Dreieck ADC die Beziehung $|\sphericalangle DCA| = 90° - |\sphericalangle CAD|$. Somit gilt wegen $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB|$ auch die Gleichheit $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle BCO|$. ❑

Lösungshinweise zur Aufgabe 18.06: Nach dem Hilfssatz folgt im konkreten Fall der Aufgabenstellung, die diese Winkelgleichheit laut Konstruktion realisiert, dass der

[5] Auch wenn in der konkreten Aufgabe $M = O$ zu zeigen sein wird, sollte die Skizze den allgemeinen Fall widerspiegeln, um nicht nur (scheinbar) einen Sonderfall zu betrachten.

Umkreismittelpunkt O auf der Seitenhalbierenden CM liegt. Außerdem liegt der Umkreismittelpunkt O stets auf den Mittelsenkrechten eines Dreiecks. Im konkreten Fall der Aufgabestellung kann aber die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ nicht mit der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$ zusammenfallen, denn dann wäre das Dreieck ABC gleichschenklig und die Höhe DC würde ebenfalls mit der Seitenhalbierenden zusammenfallen (und der Winkel $\sphericalangle BCA$ würde nicht in drei Teile geteilt).

Also finden wir $M = O$, d.h. die Seite $\overline{AB}$ ist der Durchmesser des Umkreises. Nach **Satz des THALES** ist das Dreieck ABC rechtwinklig und es gilt somit $|\sphericalangle BCA| = 90°$. Damit erhalten wir mit



$$|\sphericalangle DCA| = \frac{1}{3} \cdot 90° = 30°$$

die Größe des Innenwinkels

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAD| = 90° - |\sphericalangle DAC| = 60°$$

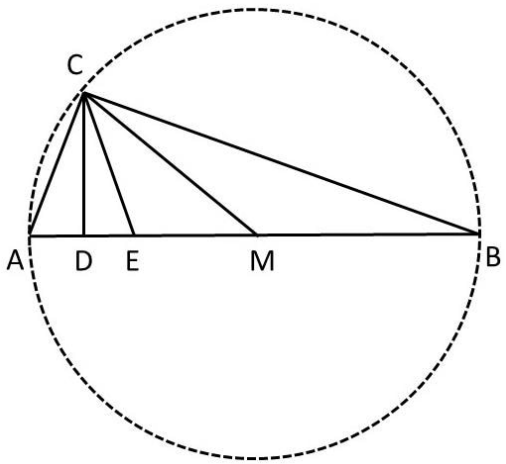
und folglich

$$|\sphericalangle ABC| = 180° - 90° - 60° = 30°.$$ ❑

Aufgabe 18.07 – MO431045. In einem Dreieck ABC wird der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ durch die Höhe $\overline{CD}$, die Winkelhalbierende $\overline{CE}$ und die Seitenhalbierenden $\overline{CM}$ in vier gleich große Teilwinkel zerlegt.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

Lösungshinweise: Nach dem Hilfssatz finden wir wie bei Aufgabe 18.06, dass der Punkt M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist. Nach **Satz des THALES** ist also das Dreieck rechtwinklig im Punkt C, d.h. $|\sphericalangle BCA| = 90°$. Jeder der vier Teilwinkel hat somit die Größe $22.5°$. Damit liegt der Höhenfußpunkt D zwischen A und E, weil im Dreieck AEC der Winkel bei C $45°$ beträgt. Folglich finden wir



$$|\sphericalangle DAC| = 90° - |\sphericalangle DAC| = 90° - 22.5° = 67.5°.$$

Mittels des Satzes über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks erhalten wir schließlich $|\sphericalangle ABC| = 180° - 90° - 67.5° = 22.5°$. ❑

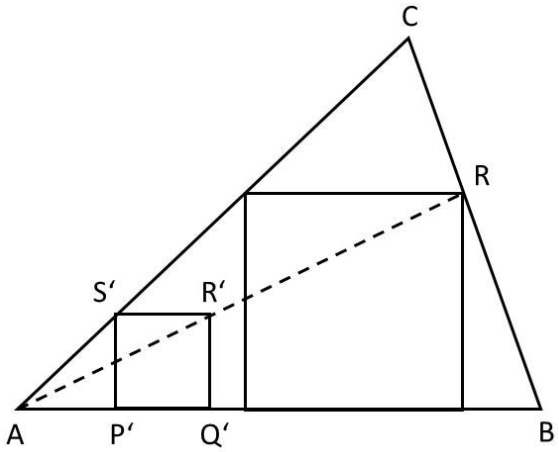
Versuch-Irrtum-Methode bei geometrischen Konstruktionen

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Dreieck *ABC*. Konstruiere ein Quadrat *PQRS*, so dass $\overline{PQ}$ auf der Seite $\overline{AB}$, R auf $\overline{BC}$ und *S* auf $\overline{CA}$ liegt.

Lösungshinweise: An das gesuchte Quadrat werden drei Bedingungen gestellt

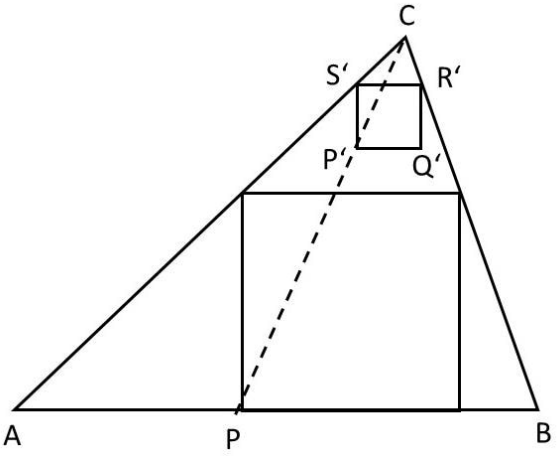
(1) $P \in \overline{AB}$ und $PQ \parallel AB$
(2) $S \in \overline{AC}$
(3) $R \in \overline{BC}$

Wir konstruieren zunächst eine Figur, die nur die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, ohne auf die Bedingung (3) zu achten. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt S' auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$ und fällen das Lot von S' auf die Dreiecksseite $\overline{AB}$. Den Fußpunkt des Lotes nennen wir P'. Nun konstruieren wir ein Quadrat $P'Q'R'S'$ mit der Seitenlänge $\left|\overline{P'S'}\right|$.



Mit Hilfe dieser Figur zeichnen wir nun eine Gerade g durch A und R'. Den Schnittpunkt von g und $\overline{BC}$ bezeichnen wir mit R. Mit diesem Punkt finden wir ohne Probleme konstruktiv das gesuchte Quadrat $PQRS$.

Wir können aber auch zunächst eine Figur konstruieren, die nur die Bedingungen (2) und (3) erfüllt, ohne auf die Bedingung (1) zu achten. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt S' auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$ und ziehen die Parallele zu $\overline{AB}$ durch S'. Den Schnittunkt der Parallele mit $\overline{BC}$ nennen wir R'. Nun konstruieren wir ein Quadrat $P'Q'R'S'$ mit der Seitenlänge $\left|\overline{R'S'}\right|$.

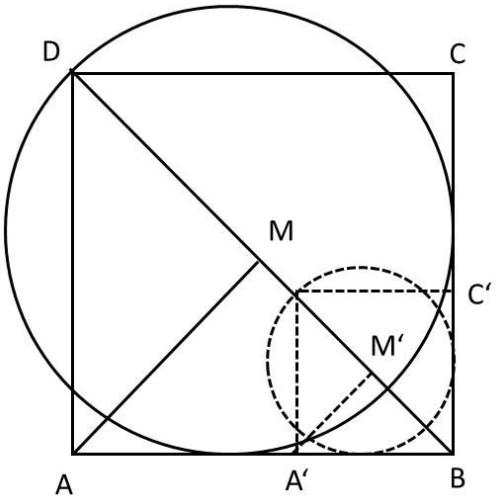


Mit Hilfe dieser Figur zeichnen wir nun eine Gerade h durch P' und C. Den Schnittpunkt von h mit $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit P. Damit finden wir ohne Probleme konstruktiv das gesuchte Quadrat $PQRS$. ❑

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD*. Konstruieren Sie einen Kreis *k* durch *D*, der die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ berührt.

Lösungshinweise: An den gesuchten Kreis werden drei Bedingungen gestellt.

(1) AB ist Tangente am Kreis,
(2) BC ist Tangente am Kreis,
(3) D liegt auf der Kreislinie.

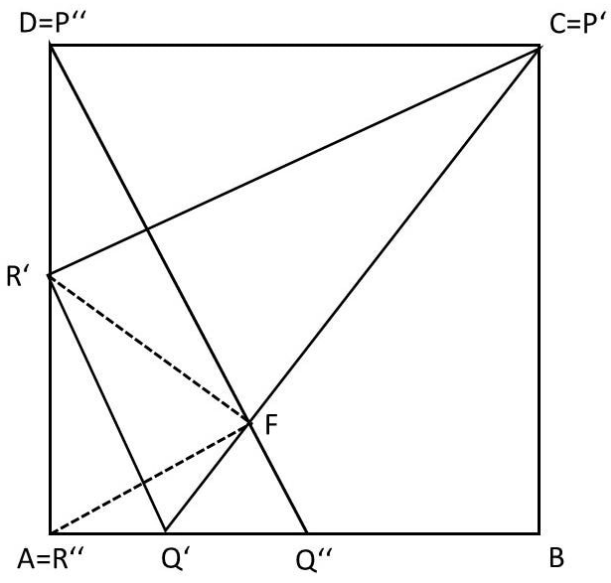


Aus Symmetriegründen liegt der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises auf der Diagonalen $\overline{BD}$.

Wir wählen einen beliebigen Punkt M' auf der Geraden BD, fällen das Lot auf AB mit dem Fußpunkt A' und zeichnen den Kreis k' mit Mittelpunkt M' und Radius $\left|\overline{A'M'}\right|$. Laut dieser Konstruktion berührt die Kreislinie die Quadratseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Nun konstruieren wir die Parallele zu $\overline{A'M'}$ durch *A.* Deren Schnittpunkt mit der Diagonalen $\overline{BD}$ ist der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises. ❑

Aufgabe[6] 3. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Auf der Seite $\overline{AB}$ sei ein Punkt Q markiert, der $\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-1\right) < |\overline{AQ}| < \frac{1}{3}\sqrt{3}$ erfüllt[7]. Es ist diesem Quadrat ein rechtwinkliges Dreieck QPR mit $\sphericalangle RQP = 60°$ und $\sphericalangle QPR = 30°$ so einzubeschreiben, dass auch die Punkte P und R auf Quadratseiten liegen.

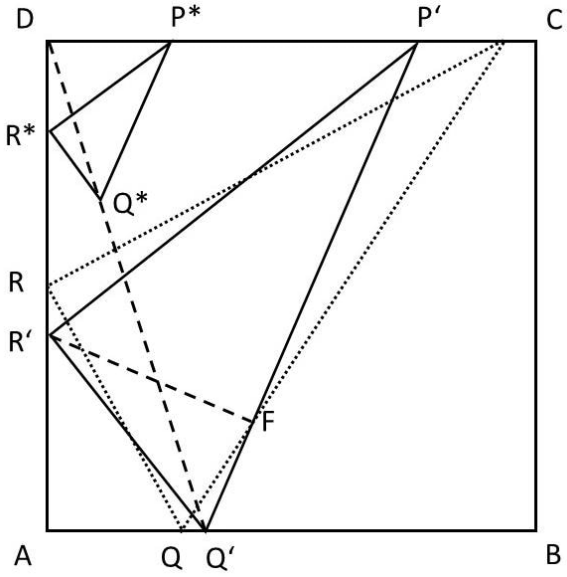
Lösungshinweise: Wir analysieren zunächst die zwei Spezialfälle Q‘ mit $\left|\overline{AQ'}\right| = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-1\right) \approx 0.244$ und Q‘‘ mit $\left|\overline{AQ''}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.577$. Im ersten Fall fällt P‘ mit C zusammen, im zweiten Fall fällt P‘‘ mit D zusammen. Fällen wir die Lote von R‘ auf $Q'P'$ und von $A = R''$ auf $Q''P''$, so stimmen deren Fußpunkte überein, den wir mit F bezeichnen. Diese Beobachtung bedarf natürlich eines Beweises. Dieser gelingt uns aber, weil wir die Längen aller eingezeichneten Teilstrecken mit wiederholter Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS berechnen können.



Wir könnten aufgrund dieser Beobachtung die Lage des Punktes F berechnen und dann damit das gesuchte Dreieck QPR konstruieren. Wir wenden aber die Versuch-

[6] nach: Träger, Walter. Ein Dreieck im Quadrat. In: $\sqrt{WURZEL}$ Heft 7 (2001), S. 146-148.
[7] Für $|\overline{AQ}| < \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$ gibt es ein Lösungsdreieck mit $P \in \overline{BC}$. Für $|\overline{AQ}| > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ existiert kein solches Lösungsdreieck.

Irrtum-Methode an und konstruieren zunächst ein dem gesuchten Dreieck ähnliches kleines Dreieck $Q^*P^*R^*$ in der Nähe des Quadrateckpunktes D. Dies gelingt uns, indem wir auf $\overline{AD}$ einen Punkt R* und auf $\overline{CD}$ einen Punkt P* markieren und an dieser Strecke $\overline{R^*P^*}$ die vorgegebenen Winkel antragen. Den Schnittpunkt der beiden Winkelschenkel nennen wir Q*.



Verlängern wir die Strecke $\overline{DQ^*}$ über Q^* hinaus, so finden wir auf $\overline{AB}$ einen Schnittpunkt, den wir Q‘ nennen[8]. Die Parallele zu R^*Q^* durch Q‘ schneidet die Seite $\overline{AD}$; den Schnittpunkt bezeichnen wir mit R‘. Die Parallele zu P^*Q^* durch Q‘ schneidet die Seite $\overline{CD}$; den Schnittpunkt bezeichnen wir mit P‘. Das Dreieck $Q'P'R$‘ ist ähnlich dem Dreieck $Q^*P^*R^*$, stimmt also insbesondere in den Innenwinkeln überein und die Eckpunkte liegen auf Quadratseiten. Wir fällen das Lot von R‘ auf $Q'P$‘. Den Fußpunkt bezeichnen wir mit F.

Um das gesuchte Dreieck zu finden, zeichnen wir die Gerade durch Q und F. Den Schnittpunkt mit $\overline{CD}$ bezeichnen wir mit P. Schließlich errichten wir die Senkrechte auf $\overline{QP}$ im Punkt F. Deren Schnittpunkt mit $\overline{AD}$ bezeichnen wir mit R. Das Dreieck QPR erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe. ❑

Hinweis: Eine Lösung der Aufgabe im Rahmen einer praktikablen Zeichengenauigkeit ist iterativ möglich. Wir setzen $R_1 = A$ (dann liegt P_1 innerhalb des Quadrates) und $R_2 = D$ (dann liegt P_1 außerhalb des Quadrates). Wir nennen die Strecke $\overline{R_{k-2}R_{k-1}}$ $(k > 2)$ Lösungsintervall, weil der gesuchte Punkt R in dieser Strecke zu finden ist. Wir wählen R_k als Mittelpunkt des Lösungsintervalls und konstruieren das zum gesuchten Dreieck ähnliche Dreieck mit den Eckpunkten R_k, Q, P_k. Liegt P_k innerhalb des Quadrates, verändern wir das Lösungsintervall zu $\overline{R_kR_{k-1}}$, andernfalls $\overline{R_{k-2}R_k}$. Ein solches Verfahren ist aber als Konstruktionsvorschrift nicht zulässig, da die Anzahl der Konstruktionsschritte möglicherweise nicht endlich ist. Wäre nämlich der Abstand von R zu A eine irrationale Zahl, kann diese durch fortwährendes Halbieren des Lösungsintervalls nicht erreicht werden. Bei der Versuch-Irrtum-Methode wird gefordert, dass nach einer vorab bestimmten Anzahl von Versuchen die Möglichkeit besteht, die Lösungsfigur zu konstruieren. Es ist dann ein Beweis erforderlich, dass die gefundene Figur tatsächlich alle Bedingungen erfüllt.

[8] Liegt Q‘ nicht im geforderten Intervall auf $\overline{AB}$, so müssen wir die Lage des Punktes R^* variieren. Es wird uns nach wenigen Versuche gelingen, das Intervall zu treffen,

Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat

In der **KZM-Aufgabe A1-5B**[9] sind n Punkte $(n > 1)$ so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Eine Verteilung, die den maximal möglichen Mindestabstand realisiert, nennen wir im Weiteren „beste Verteilung“.

Für $\boldsymbol{n = 2}$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und wir finden eine beste Verteilung, indem wir die zwei Punkte in gegenüberliegende Eckpunkte platzieren. Der Abstand $d_2 = \sqrt{2}$ kann von keiner Konfiguration übertroffen werden, da die Diagonale eines Quadrates die längste Strecke innerhalb des Quadrates ist. Diese intuitiv anschauliche Lösung basiert auch auf dem

Hilfsatz. Bei einer Verteilung von zwei und mehr Punkten mit maximalem Mindestabstand in einem Quadrat befindet sich auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt[10].

Lösungshinweise: Wir nehmen an, wir haben im Quadrat $ABCD$ eine Verteilung gefunden, bei der auf der Seite $\overline{AB}$ kein Punkt platziert ist. Dann gibt es (mindestens) einen Punkt X dieser Verteilung mit minimalem Abstand zur Seite $\overline{AB}$. Wir fällen das Lot von diesem Punkt X auf $\overline{AB}$ und verschieben den Punkt entlang dieses Lotes, bis er $\overline{AB}$ erreicht. Bei dieser neuen Verteilung ist der Mindestabstand nicht kleiner als vor der Verschiebung:

- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X nicht enthält, bleibt bei dieser Verschiebung unverändert.
- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X enthält, vergrößert sich bei dieser Verschiebung.

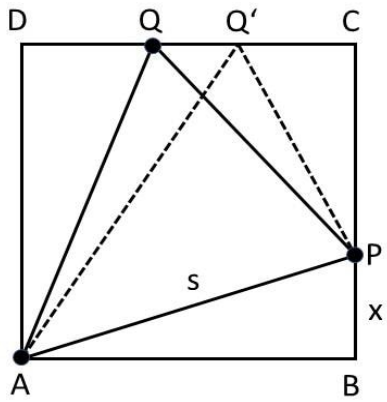
Dieses Verfahren wiederholen wir mit den anderen Quadratseiten. ❑

Mit dem Hilfssatz kann die beste Verteilung von zwei Punkten formal begründet werden.

$\boldsymbol{n = 3}$. Wir erhalten aus dem Hilfssatz für eine beste Verteilung von drei Punkten die Aussage, dass ein Punkt in einer Quadratecke platziert werden muss und sich die beiden anderen Punkte auf den gegenüberliegenden benachbarten Quadratseiten befinden.

[9] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

[10] Ein Punkt auf einem Eckpunkt des Quadrates gilt als zugehörig zu den beiden anliegenden Quadratseiten.



Die drei Punkte der gesuchten Verteilung bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks APQ mit $|\overline{AQ}| = |\overline{PQ}|$. Betrachten wir nämlich ein Dreieck APQ' mit $\left|\overline{AQ'}\right| > \left|\overline{PQ'}\right|$ und verschieben wir den Punkt Q' in Richtung des Eckpunktes D, so vergrößert sich die Streckenlänge $\overline{PQ'}$, während sich gleichzeitig die Streckenlänge $\overline{AQ'}$ verringert. Solange bei dieser Verschiebung $\left|\overline{AQ'}\right| > \left|\overline{PQ'}\right|$ gilt, hat sich der Mindestabstand nicht verkleinert (denn entweder realisierte die Verbindungsstrecke $\overline{PQ'}$ den Mindestabstand, dann wird dieser bei der Verschiebung größer, oder $\overline{AP}$ realisierte den Mindestabstand, dann bleibt dieser bei der Verschiebung unverändert). Da wir aber in gleicher Weise argumentieren können, dass im Dreieck APQ auch $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$ gelten wird, ist das gesuchte Dreieck sogar gleichseitig.

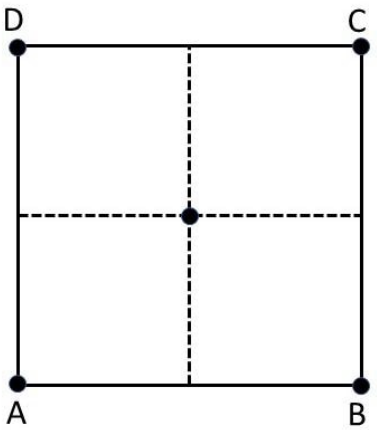
Wir können für die Seitenlänge d_3 des gleichseitigen Dreiecks APQ durch zweimalige Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS (im Dreieck ABP mit Hypotenuse $\overline{AP}$ bzw. im Dreieck PCQ mit Hypotenuse $\overline{PQ}$) den Betrag der Strecke $x = |\overline{BP}|$ aus der Gleichung

$$x^2 + 1 = {d_3}^2 = 2 \cdot (1 - x)^2$$

berechnen. Wir erhalten daraus die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ und finden mit der Lösungsformel $x = 2 - \sqrt{3}$ (die zweite Lösung entfällt wegen $x > 1$). Setzen wir diesen Wert für x in $x^2 + 1 = s^2$ ein, erhalten wir

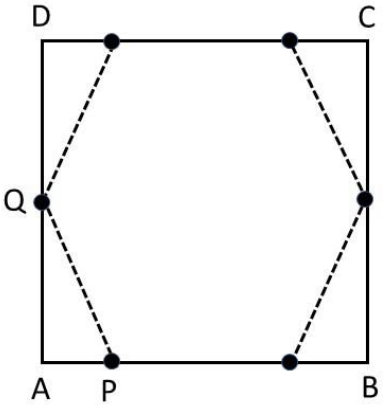
$$d_3 = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.035.$$

$\boldsymbol{n = 4}$. Bei einer besten Verteilung von vier Punkten befinden sich aufgrund der Aussage des Hilfssatzes mindestens zwei Punkte in den Eckpunkten des Quadrates. Damit finden wir unmittelbar, dass alle Punkte dieser Verteilung Eckpunkte des Quadrates sind und somit $d_4 = 1$ gilt.



$\boldsymbol{n = 5}$. Die vier Eckpunkte des Quadrates und der Schnittpunkt seiner Diagonalen bilden eine beste Verteilung für 5 Punkte. Zum Beweis unterteilen wir das Quadrat in vier kongruente Teilquadrate. Nach dem Schubfachprinzip existiert davon mindestens ein Teilquadrat, in dem sich zwei (oder mehr) Punkte von den 5 Punkten befinden müssen. Der maximale Abstand dieser zwei kann aber die halbe Diagonallänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Die beschriebene Verteilung von 5 Punkten realisiert damit den Mindestabstand von $d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\boldsymbol{n = 6}$. Es gibt verschiedene Verteilungen von 6 Punkten, die einen großen Mindestabstand haben.



Wir können beispielsweise die Punkte als Eckpunkte eines Sechsecks in das Quadrat so wie in nebenstehender Abbildung legen, dass alle Seitenlängen gleich lang sind. (*Hinweis:* Dieses Sechseck ist nicht regelmäßig, denn die horizontale Diagonale ist kleiner als die beiden anderen Diagonalen.) Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck APQ mit der Hypotenuse $d_6 = |\overline{PQ}|$ und wenden den Satz des PYTHAGORAS an, so erhalten wir

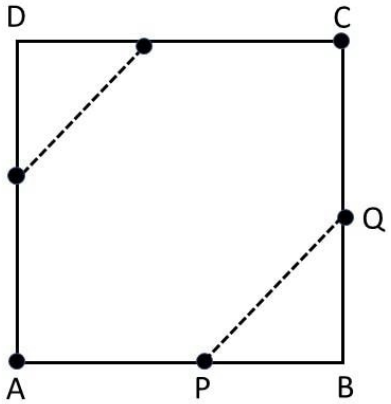
$$|\overline{AP}| = \sqrt{d_6^2 - |\overline{AQ}|^2} = \sqrt{d_6^2 - \tfrac{1}{4}}$$

Somit können wir aus $2 \cdot \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}} + d_6 = 1$ die quadratische Gleichung

$$d_6^2 + \tfrac{2}{3} \cdot d_6 - 2 = 0$$

herleiten und finden mit der Lösungsformel

$$d_6 = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{7} - 1\right) \approx 0.549\,.$$

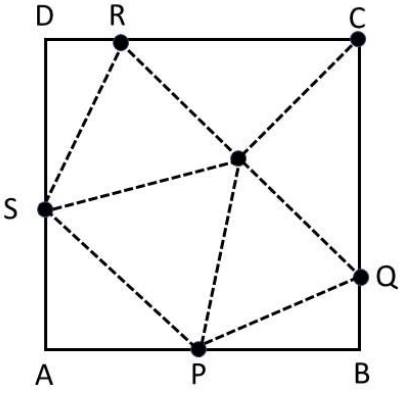


Platzieren wir die 6 Punkte so wie in nebenstehender Abbildung, wobei alle Seiten des Sechsecks gleichlang sind (*Hinweis:* Auch dieses Sechseck ist nicht regelmäßig), so finden wir leicht, dass in diesem Fall wegen

$$|\overline{PB}| = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6$$

(als Kathete im gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck BQP mit der Hypotenuse $\overline{PQ}$) gilt:

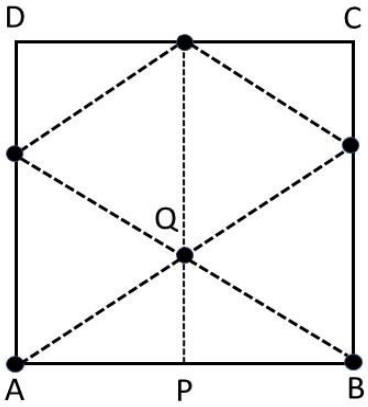
$$\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6 + d_6 = 1, \text{ also } d_6 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.585.$$



Für die nebenstehende Verteilung seien alle eingezeichneten Punktverbindungen gleichlang. Das Dreieck CRQ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{RQ}$ mit $|\overline{RQ}| = 2 \cdot d_6$ und daraus folgend $|\overline{QC}| = \sqrt{2} \cdot d_6$. Auch das Dreieck APS ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{PS}$ mit $|\overline{PS}| = d_6$, woraus $|\overline{AP}| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6$ folgt. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck PBQ an, so

finden wir für diese Verteilung den Mindestabstand von $d_6 = \sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0.597$ aus

$$\sqrt{2} \cdot d_6 + \sqrt{d_6^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6\right)^2} = 1$$



Der maximale Mindestabstand wird für die nebenstehende Verteilung erreicht. Er berechnet sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks APQ mit den Kathetenlängen $\left|\overline{AP}\right| = \frac{1}{2}$ und $|\overline{PQ}| = \frac{1}{3}$, also

$$\left(\overline{AQ}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{13} \approx 0.601.$$

Diese Verteilung hat eine alltägliche Realisierung: Wenn einander fremde Personen in einem Fahrstuhl stehen, werden sie sich etwa in der Verteilung für $n = 5$ aufstellen, um sich nicht gegenseitig zu belästigen. Tritt eine weitere Person herein (in der Abbildung von oben kommend), rücken die bereits im Fahrstuhl stehenden Personen ein Stück nach hinten (in der Abbildung nach unten) und die hinzu gekommene Person bleibt an der Türmitte (in der Abbildung in der Mitte von von $\overline{CD}$) stehen.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Argumentation *„ausgehend von einer (scheinbar) besten Verteilung verschlechtert sich der maximale Mindestabstand, wenn wir Punkte verschieben“* nicht ausreicht. Vermuten wir nämlich, dass die beste Verteilung eingenommen wird, wenn die Punkte ein konvexes Sechseck bilden, so verschlechtert sich der Mindestabstand tatsächlich, wenn wir die Lage der Punkte nur wenig „stören“. Verändern wir aber die Lage wesentlich, ist eine Verbesserung zu erreichen!

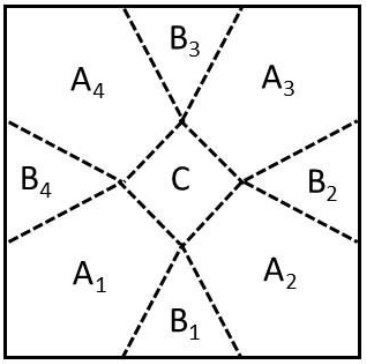
Beweise zum Fall mit sechs Punkten wurden erst in den 1960-er Jahren veröffentlicht. Ein erster Beweis wird RONALD LEWIS GRAHAM (1935 – 2020, US-amerikanischer Mathematiker) zugeschrieben. Wir skizzieren hier einen Beweis von HANS MELISSEN[11] (geb. 1949).

Er konstruierte eine Hilfsfigur, indem er die Quadratseiten jeweils in drei Strecken teilte und die langen Diagonalen der Gebiete $A_1, \ldots, A_4$ der Länge d_6 aus der obigen, vermutlich besten Verteilung entsprechen. An dieser Figur führt er die Annahme, dass es eine Verteilung mit größerem Mindestabstand gäbe, zum Widerspruch.

Zunächst stellte er fest: Liegen drei Punkte in den benachbarten Gebieten der Form ABA, so ist deren Mindestabstand nicht größer als d_6.

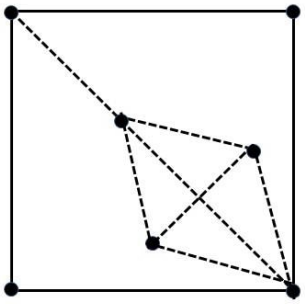
[11] Melissen, Hans. Densest Packing of Six Equal Circles in a Square. In: Elemente der Mathematik, Jahrgang 49 (1994), S. 27-31.

Nun untersuchte er den Fall, dass kein Punkt der Verteilung im Gebiet C liegt. Liegen in drei oder vier Gebieten der Form A jeweils ein Punkt, kann alles mit Situationen der Form ABA erklärt werden und der Mindestabstand ist nicht größer als d_6. Liegen jedoch nur in zwei Gebieten der Form A Punkte, müssen in jedem Gebiet der Form B jeweils ein Punkt enthalten sein. Nun lässt sich zeigen, dass dann der Abstand zweier Punkte in benachbarten Gebieten der Form B nicht größer als d_6 sein kann.

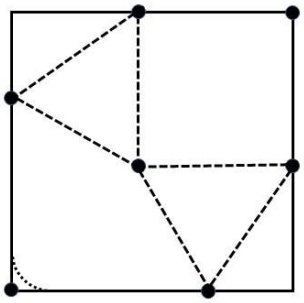


Abschließend untersuchte er den Fall, dass genau ein Punkt im Gebiet C liegt. Entweder gibt es für die anderen 5 Punkte wieder die Situationen ABA, oder die Punkte liegen beispielsweise[12] in A_2, A_3, A_4, B_1, B_4. Doch bei einer solchen Aufteilung zeigte er rechnerisch durch Abschätzungen, dass der Mindestabstand den Wert d_6 nicht übertreffen kann.

Für $\boldsymbol{n = 7, 8, 9}$ fand JONATHAN SCHAER beste Verteilungen mit maximalem Mindestabstand.



Wählen wir eine Verteilung von 7 Punkten, indem 4 Punkte in die Eckpunkte gelegt werden und die verbleibenden 3 Punkte im Innern ein gleichseitiges Dreieck bilden, erreichen wir nicht den maximal möglichen Mindestabstand!

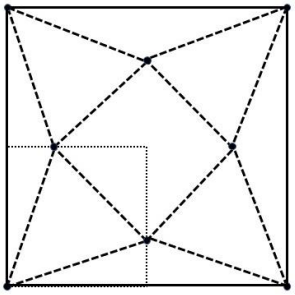


Die Lage wie nebenstehend dagegen bietet eine beste Verteilung. Erstaunlicherweise kann der siebente Punkt in einer Umgebung des (linken unteren) Eckpunktes verschoben werden, ohne den Mindestabstand zu verkleinern. Aus der Skizze ist die Konstruktion leicht zu erkennen (die markierten Dreiecke sind gleichseitig) und die Berechnung des Mindestabstandes ist nicht schwer:

$$d_7 = 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx 0.536$$

[12] Andere Indizes können durch Umbenennung aus dieser Situation gewonnen werden.

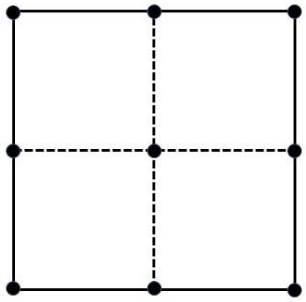
Eine vermutlich beste Anordnung für 8 Punkte finden wir durch Probieren, wenn wir 4 Punkte in die Quadratecken legen und die verbleibenden 4 Punkte als Eckpunkte eines Quadrates im Inneren anordnen. Wir erkennen die Verteilungsstruktur vom Fall $n = 3$ wieder. Es ergibt sich deshalb ein Mindestabstand von



$$d_8 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot d_3 \approx 0.518$$

der auch tatsächlich als maximal möglicher Mindestabstand bewiesen werden kann. Jedoch erweist sich der Beweis[13] als vergleichbar aufwändig wie im Fall $n = 6$. Es ist jedoch nicht verallgemeinerungsfähig, dass durch Zusammensetzung verkleinerter bester Verteilungen mit weniger Punkten wieder eine beste Verteilung mit maximalem Mindestabstand erreicht werden kann.

Schließlich[14] betrachten wir $\boldsymbol{n = 9}$. Teilen wir das Quadrat in vier gleichgroße Teilquadrate, wissen wir mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass in (mindestens) einem dieser Teilquadrat drei Punkte liegen. Mit dem Ergebnis für $n = 3$ folgt daraus, dass der Mindestabstand nicht größer als $\frac{1}{2} d_3$ sein kann. Dies kann aber nicht der größte Mindestabstand sein, weil in der Anordnung für acht Punkte kein weiterer Punkt eingefügt werden kann. J. SCHAER wies nach, dass $d_9 = 0.5$ der größte Mindestabstand ist und bei der Anordnung im 3×3-Gitter realisiert wird.



Unter http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/csq/csq.html hat ECKARD SPECHT (Universität Magdeburg) die besten Verteilungen für $n = 1, \ldots, 10000$ beschrieben, illustriert und mit Literaturhinweisen untersetzt.

Die besondere Aufgabe

Wettbewerbstraining mit Aufgaben vergangener Mathematik-Olympiaden beruht auf der Erfahrung, dass sich trotz der Vielfalt von Aufgabenstellungen Lösungsstrategien übertragen lassen. Damit kann es uns gelingen, für neue Aufgaben effizient geeignete Lösungsansätze zu finden und diese zum Erfolg zu führen. In der ersten Runde der diesjährigen MO sehen wir jedoch den Ausnahmefall, eine Aufgabe fast wortgleich in der Vergangenheit wiederzufinden.

[13] Schaer J. and Meir A. On a geometric extremum problem. In: Can. Math. Bull. 8 (1965), 21-27.
[14] Schaer, J. The Densest Packing of 9 Circles in a Square. In: Can. Math. Bull. vol. 8 (1965), p. 273-277.

Aufgabe MO621005. In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien u die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und d die Summe der Diagonalenlängen.

a) Zeigen Sie, dass stets $d < 2u$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass stets $u < d$ gilt.

Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.

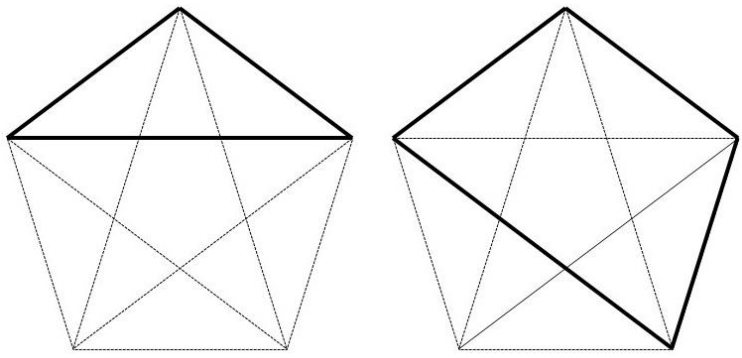
Aufgabe MO390933. Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gilt die Ungleichung

$$u < s < 2u$$

Dabei bezeichne u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.

Lösungshinweise: Wir zeichnen in ein Fünfeck die fünf Diagonalen ein und erkennen, dass wir

- einerseits fünf verschiedene Dreiecke finden, die jeweils aus zwei benachbarten Fünfeckseiten und einer Diagonalen bestehen (linke Abbildung), und
- andererseits fünf verschiedene Vierecke finden, die jeweils aus drei aufeinanderfolgende Fünfeckseiten und einer Diagonalen bestehen (rechte Abbildung).



Im ersten Fall verwenden wir in jedem dieser Dreiecke die Dreiecksungleichung, d.h. die Summe zweier Fünfeckseiten ist größer als die zugehörige Diagonale. Summiert über alle fünf Dreiecke, erhalten wir $2u > s$.

Im zweiten Fall verwenden wir die Eigenschaft in jedem konvexen Viereck, dass die Summe der Diagonallängen größer als die Hälfte des Umfangs ist. Die Summe der fünf Umfänge der Vierecke beträgt $3u + s$, die Summe der paarweisen Diagonallängen beträgt $2s$. Also muss $2s > \frac{1}{2}(3u + s)$ gelten. Daraus folgt $4s > 3u + s$ und wir erhalten die zweite zu beweisenden Ungleichung $s > u$. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids Elemente[15]

Funfzehn Bücher
auf dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[16]

[Es werden zunächst die Textstellen aus dem ersten und dritten Buch zitiert, auf die im Beweis hingewiesen wird.]

(1, 10. Def.) Erſtes Buch, Definition 10 (Seite 2): Steht eine gerade Linie auf einer anderen ſo, daß die Nebenwinkel gleich ſind; ſo heißt ſie ſenkrecht (perpendikular) auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heißt ein rechter.
(1, 15. Def.) Erſtes Buch, Definition 15 (Seite 2): Ein Cirkel iſt eine ebne Figur, von einer einigen Linie, Peripherie genannt, ſo eingeſchloſſen, daß die geraden Linien, welche bis zu derſelben, auf Einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte, gezogen werden, alle einander gleich ſind;
(1, 1. Ax.) Erſtes Buch, 1. Axiom (Seite 3): Zwey Dinge, ſo Einem Dritten gleich, ſind ſelbſt einander gleich.
(1, 2. Ar.) Erſtes Buch, 2. Axiom (Seite 3): Wenn zu Gleichem Gleiches hinzukommt, ſo ſind auch die Aggregate gleich.
(1, 5. S.) Erſtes Buch, 5. Satz (Seite 7): In jedem gleichſchenklichen Triangel, ABC, ſind die Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, einander gleich; auch ſind, wenn man die Schenkel AB, AC verlängert, die Winkel unter der Grundlinie, DBC, ECB, einander gleich.
(1, 13. S.) Erſtes Buch, 13. Satz (Seite 10): Iſt eine gerade Linie, AB, auf einer andern, CD, aufgeſtellt: ſo ſind die Winkel, die ſie macht, was für welche es auch ſind, CBA, ABD, entweder zwey rechte, oder zweyen rechten gleich.
(1, 32. S.) Erſtes Buch, 32. Satz (Seite 18): In jedem Triangle, ABC, iſt, wenn man eine ſeiner Seiten, BC, verlängert, der Auſſenwinkel, ACD, den beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkel, CAB, ABC, gleich. Auch ſind die drey innern Winkel eines Triangels, ABC, BCA, CAB, zweyen rechten gleich.

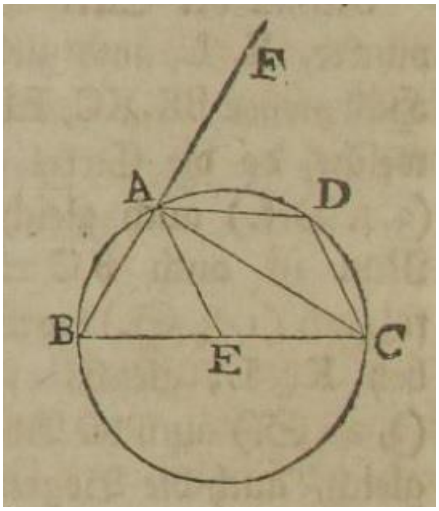
[15] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[16] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.

(3, 22. S.) Drittes Buch, 22. Satz (Seite 46): Die Gegenwinkel einer vierseitigen Figur im Cirkel, ABCD, sind zweyen rechten gleich.

Drittes Buch

Der 31. Satz[17]



Der Winkel im Halbcirkel, BAC, ist ein rechter; aber der im grössern Abschnitt, ABC, kleiner als ein rechter, und der im kleinern Abschnitt, ADC, grösser als ein rechter. Auch ist der Winkel des grössern Abschnitts, CBAC, grösser, des kleinern Abschnitts, CDAC, aber kleiner, als ein rechter.

Es sey ein Cirkel, ABCD, dessen Mittelpunkt, E, und dessen Durchmesser, BC. Nimm in der Peripherie über BC willkürlich zwey Punkte A, D, und ziehe BA, AC, AD, DC, so ist BADC, ein Halbcirkel; der Abschnitt CABC, grösser als ein Halbcirkel, und der Winkel im grössern Abschnitt, ABC; der Abschnitt CADC, kleiner als ein Halbcirkel, und der Winkel im kleinern Abschnitte, ADC. Der Winkel des grössern Abschnitts wird von dem Bogen CBA und der geraden Linie AC eingeschlossen; und der Winkel des kleinern Abschnitts, wird von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC eingeschlossen. Nun ist zu beweisen

1.) daß BAC = ℜ. Ziehe EA, und verlängre BA nach F. Da (1, 15. Def.) EB = EA, und EA = EC, so ist (1, 5. S.) EAB = EBA, und EAC = ECA, folglich (1, 2. Ax.) BAC = EBA + ECA. Nun ist (1, 32. S.) EAC = EBA + ECA, folglich (1, 1. Ar.) BAC = FAC, folglich (1, 10. Def.) FAC sowohl, als BAC, ein rechter Winkel. Oder: Da (1, 32. S.) AEC = 2 BAE, und AEB = 2 EAC, so ist AEC + AEB = 2 BAC. Nun ist (1, 13. S.) AEC + AEB = 2 ℜ, folglich 2 BAC = 2 ℜ, folglich BAC = ℜ.
2.) daß ABC < ℜ. Da im ∆ ABC (1, 32. S.) ABC + BAC < 2 ℜ, aber BAC = ℜ, so ist ABC < ℜ,
3.) daß ADC > ℜ. Da in der vierseitigen Figur ABCD, (3, 22. S) ABC + ADC = 2 ℜ, aber ABC < ℜ, so ist ADC > ℜ.
4.) daß der Winkel CBAC > ℜ. Denn er ist offenbar grösser, als der rechte Winkel BAC.
5.) daß der Winkel CDAC < ℜ. Denn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel FAC.

Zusatz.

Hieraus erhellt, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen zusammen gleich, daß er alsdenn ein rechter sey, weil sein Nebenwinkel diesen beyden übrigen, und daher ihm selbst gleich, folglich (1, 10. Def.) jeder der beyden Nebenwinkel ein rechter ist.

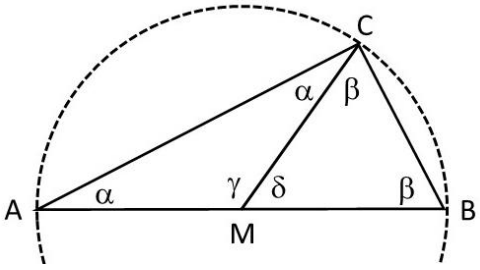
[17] Seiten 50-51

Bekannte Sätze der Mathematik: Satz des Thales

„Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.“ Der erste Beweis wird dem antiken griechischen Mathematiker THALES VON MILET (ca. 624 v.u.Z. bis ca. 545 v.u.Z) zugeschrieben. Jedoch finden sich keine Aufzeichnungen von ihm. Von EUKLID VON ALEXANDRIA (im 3. Jahrhundert v.u.Z.) ist ein Beweis in seinem Buch „Elemente“ angegeben[18]. Die Aussage des Satzes war aber bereits früher in Ägypten und Babylonien bekannt.

Beweis mit gleichschenkligen Dreiecken.

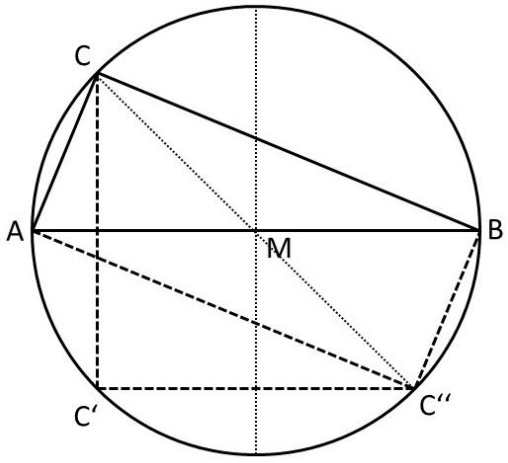
Wir zerlegen das Dreiecks ABC unter dem Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ in zwei Dreiecke AMC und BCM, wobei mit M der Kreismittelpunkt bezeichnet ist. Die Streckenlängen $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ sind alle gleich dem Radius des Halbkreises. Deshalb sind die Dreiecke AMC und BCM gleichschenklig.



Die Winkel $\sphericalangle AMC = \gamma$ und $\sphericalangle CMB = \delta$ sind Nebenwinkel und ergänzen sich zu 180°. Nach dem Peripherie-Zentri-Winkelsatz gilt über der Sehne $\overline{BC}$ die Beziehung $\sphericalangle CAM = \alpha = \frac{1}{2}\delta$ und über der Sehne $\overline{AC}$ die Beziehung $\sphericalangle MBC = \beta = \frac{1}{2}\gamma$, also ergänzen sich die Winkel α und β zu 90°, d.h. das Dreieck ABC ist rechtwinklig. ❑

Beweis mit Vervollständigung zum Rechteck.

Wird der Punkt C am Durchmesser $\overline{AB}$ (Punkt C‘) und anschließend an der Mittelsenkrechten von$\overline{AB}$ (Punkt C“) gespiegelt, dann liegt der Bildpunkt C“ wegen Symmetrie auf dem unteren Halbkreis über der Seite $\overline{AB}$. Die zweimalige Spiegelung kann als Punktspiegelung am Kreismittelpunkt M ausgeführt werden. Daher sind die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC“}$ sowie $\overline{AC“}$ und $\overline{BC}$ parallel und das Viereck $ACBD$ ist ein Parallelogramm. Weil die Diagonalen$\overline{AB}$ und $\overline{CC''}$ Durchmesser des Kreises und daher gleich lang sind, ist das Parallelogramm ein Rechteck und der Winkel bei C ein rechter Winkel. ❑



[18] s. In alten Mathe-Büchern geblättert.

Monatsaufgabe[19] 10/22.

Gegeben seien in der Ebene drei parallele Geraden g, h und k. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 18 – Der Satz des THALES 3
Versuch-Irrtum-Methode bei geometrischen Konstruktionen 11
Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat 14
Die besondere Aufgabe 19
In alten Mathe-Büchern geblättert 21
Bekannte Sätze der Mathematik: Satz des Thales 23
Monatsaufgabe 10/22. 24

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[20]	Nr.	Thema	Aufgabe
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

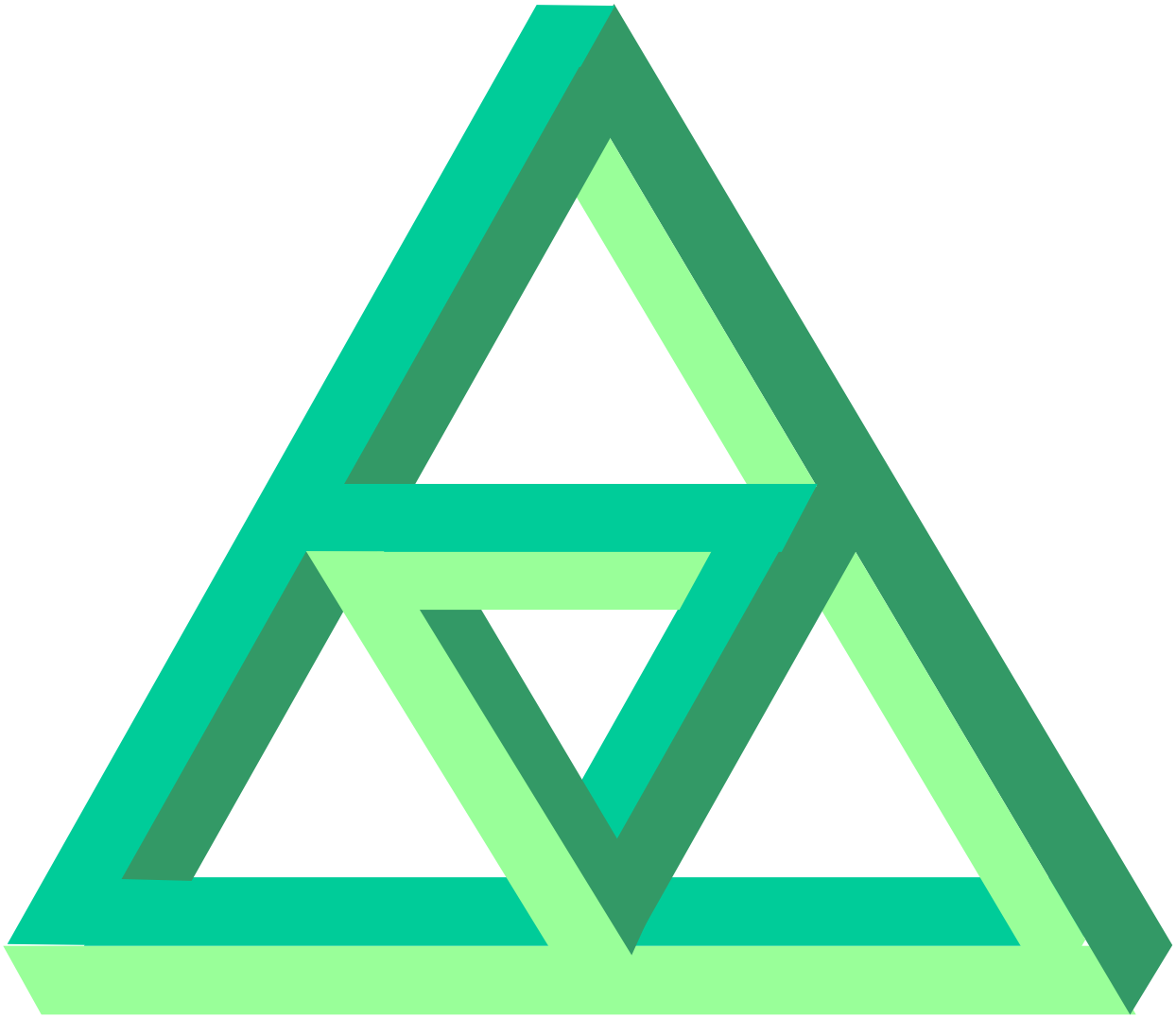
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[19] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.11.2022 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.
[20] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 11/2022 (November 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Nachdem in den vergangenen Jahren bereits MO-Aufgaben mit Summen von Quadratzahlen gestellt wurden, wird diese Thematik mit der Aufgabe **MO621012** wieder aufgegriffen. Wir erweitern deshalb mit Thema 9.02 die Diskussion um pythagoreische Zahlentupel (s. Thema 9.01 in Heft 09/2021).

Wir zeigen zudem in Bezug zu Aufgabe **MO621011** weitere Beispiele zu Aufgaben, bei denen Quersummen zur Abschätzung der Stellenzahl genutzt wird.

Wir beginnen in diesem Heft einen mehrteiligen Beitrag zu geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Im historischen Rückblick schauen wir – passend zum Thema 9.02 – in eine Ausgabe des Archivs der Mathematik und Physik aus dem Jahr 1874. Der Autor beschäftigt sich auf 37 Seiten mit „Rationalen Dreiecken“. Aus Platzgründen können wir hier nur Auszüge aus dem Vorwort und allgemeine Eigenschaften zitieren.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 9.2 – Pythagoreische Zahlentupel

Nach den Aufgaben MO600945/MO601046[3] waren auch in der 1. Runde der 62. MO wieder Summen von Quadratzahlen zu untersuchen.

Aufgabe 9.07 - MO621012. In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2 \,.$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

Hinweis: Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

Lösungshinweise zu Teil a):

$$\begin{aligned}&(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2\\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2\\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \,.\end{aligned}$$

Somit finden wir

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 0 \,.$$

Lösungshinweise zu Teil b): Da nur die Angabe eines korrekten Beispiels gefordert ist, können wir die Lösung durch (zufälliges) Suchen finden. Für ein systematisches Probieren wäre eine computer-gestützte Analyse der Summen von drei Quadratzahlen möglich (und in einer Heimarbeit zulässig, ohne darauf Bezug nehmen zu müssen). In der Lösungsdarstellung ist darauf zu achten, dass zur Probe die erforderlichen Rechenschritte ersichtlich sind, also das Ausrechnen der Quadrate und die Darstellung der Addition. Es gilt beispielsweise:

[3] s. Thema 9.01 – Pythagoreische Zahlentripel (Heft 09/2021), es wird die Aufgabennummerierung fortgesetzt.

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9 = 3^2$,
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$.

In Anlehnung an bekannte pythagoreische Zahlentripel finden wir ebenfalls geeignete Tupel, beispielsweise:

Wegen $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$; $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
gilt auch $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

Wegen $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$; $13^2 + 84^2 = 169 + 7056 = 7225 = 85^2$
gilt auch $5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$.

Beachten wir, dass die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen wegen $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$ eine ungerade Zahl ist, können wir auch suchen, welche ungerade Zahl sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt.

Wegen $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$ gilt $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$.
Wegen $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ gilt $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$.
Wegen $9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$ gilt $1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$.

Mit Bezug zu Teilaufgabe a) finden wir ebenfalls Lösungstupel. Wir setzen zum Beispiel $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$ und erhalten

$$(1^2 + 1^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$
$$= (1^2 + 1^2 + 1^2)^2 = 3^2$$

oder für $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

$$(3^2 + 2^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 3 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 12^2 + 6^2 + 4^2$$
$$144 + 36 + 16 = 196 = (3^2 + 2^2 + 1^2)^2 = 14^2 .$$

Lösungshinweise zu Teil c): Da in der Aufgabenstellung ausdrücklich die mehrfache Verwendung von Quadratzahlen zugelassen wird, untersuchen wir die Möglichkeiten, möglichst oft die Quadratzahl 1^2 einzusetzen. Die Summe aller 2022 Quadratzahlen ist somit mindestens 2022. Die nächstgrößere Quadratzahl ist $45^2 = 2025$. Wir finden dafür folgende Zuordnung:

$$\underbrace{\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2021-mal} + 2^2}_{2022\ Summanden} = 2021 + 4 = 2025 = 45^2$$

Wir können aber auch für $46^2 = 2116$ geeignete Zuordnungen finden:

$$\underbrace{\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2018-mal} + 2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2}_{2022\ Summanden} = 2018 + 4 + 9 + 36 + 49 = 2116 = 46^2$$

oder

$$\underbrace{\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{2018-mal}+3^2+3^2+4^2+8^2}_{2022\ Summanden}=2018+9+9+16+64=2116=46^2$$

Auch folgende Herleitung ist möglich:

$$(1010+1)^2=1010^2+2\cdot1010\cdot1+1^2=1010^2+\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{2020\ Summanden}+1^2\,.$$

❑

Um Summen mit paarweise verschiedenen Summanden zu erzeugen, verwenden wir den Ansatz über die Pythagoreischen Zahlentripel. Wir wissen aus der Aufgabe MO601033 (s. Thema 9.01), dass ein Tripel (a,b,c) genau dann ein primitives pythagoreisches Zahlentripel mit gerader Zahl b ist, wenn es zwei teilerfremde positive ganze Zahlen m,n gibt mit $a=m^2-n^2$, $b=2mn$ und $c=m^2+n^2$.

Wir beginnen mit $(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$ und erzeugen für $n>0$ aus einem Tripel (a_n,b_n,c_n) ein neues Tripel $(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$ mit $a_{n+1}=c_n$. Da im primitiven pythagoreischen Zahlentripel die Summe c_n eine ungerade Zahl ist, können wir stets

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=c_n=\left(\frac{c_n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{c_n-1}{2}\right)^2\\ b_{n+1}&=\frac{c_n+1}{2}\cdot\frac{c_n-1}{2}=\frac{1}{4}\cdot(c_n^2-1)\\ c_{n+1}&=\left(\frac{c_n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{c_n-1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

wählen und erhalten ein neues pythagoreisches Zahlentripel. Dann gilt aber auch

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1^2+b_1^2}_{=c_1^2=a_2^2}+b_2^2}_{=c_2^2=a_3^2}+b_3^2\ldots+b_{2021}^2}_{\ldots}=c_{2021}^2$$

denn wir wissen $a_1^2+b_1^2=c_1^2=a_2^2$, $a_2^2+b_2^2=c_2^2=a_3^2$, …, $a_{2021}^2+b_{2021}^2=c_{2021}^2$.

Berechnen wir auf diese Weise die ersten Zahlentripel erhalten wir

$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$ mit $m=2$ und $n=1$,
$(a_2,b_2,c_2)=(5,12,13)$ mit $m=\frac{5+1}{2}=3$ und $n=\frac{5-1}{2}=2$,
$(a_3,b_3,c_3)=(13,84,85)$ mit $m=\frac{13+1}{2}=7$ und $n=\frac{13-1}{2}=6$.

Einen erfolgversprechenden Ansatz[4] finden wir auch, wenn wir die Summe der ersten n Quadratzahlen untersuchen. Setzen wir $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2\ldots+n^2$, so müssen wir entscheiden, ob es zwei ganze Zahlen a und b gibt, so dass die Gleichung

[4] Nach Aufgabe KZM 5-5B, Heft 03/2021.

$S_n + a^2 = b^2$ erfüllbar ist. Wir wissen, dass jede ungerade Zahl größer als 1 als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann, denn jede ungerade Zahl $k > 1$ kann in der Form $k = 2m + 1$ geschrieben werden und wir können die Quadratzahlen $(m + 1)^2$ und m^2 wählen.

Ist S_n eine ungerade Zahl[5] mit $n > 2$, so gilt $S_n = 2m + 1 > n^2 + (n - 1)^2$. Also erhalten wir

$$2m + 1 > 2 \cdot n^2 - 2n + 1\,,$$
$$m > n(n - 1) \geq 2n > n + 1\,.$$

Somit sind in der Summe $1^2 + 2^2 \ldots + n^2 + \left(\frac{S_n - 1}{2}\right)^2$ alle Summanden paarweise verschieden und es gilt

$$1^2 + 2^2 \ldots + n^2 + \left(\frac{S_n - 1}{2}\right)^2 = S_n + \frac{S_n^2 - 2S_n + 1}{4} = \frac{S_n^2 + 2S_n + 1}{4} = \left(\frac{S_n + 1}{2}\right)^2$$

Für $n = 2021$ sind in der Summe $1^2 + 2^2 \ldots + n^2$ insgesamt 1010 gerade Summanden und 1011 ungerade Summanden. Die Summe S_{2021} ist folglich eine ungerade Zahl und wir haben mit diesem Ansatz 2022 paarweise verschiedene Quadratzahlen gefunden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist.

Für eine besonders elegante Generierung von 2022 paarweise verschiedenen Quadratzahlen können wir die Umformung aus Teilaufgabe a) verallgemeinern. Es gilt nämlich auch

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2021}^2 - c^2)^2 + (2a_1c)^2 + \cdots + (2a_{2021}c)^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2021}^2 + c^2)^2.$$

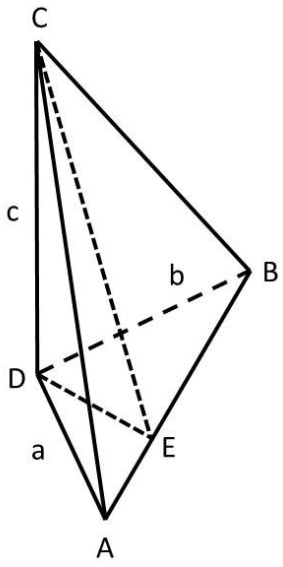
Mit dieser Gleichung finden wir für $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{2021} = 2021$ und $c = 1$ eine geforderte Auswahl.

Ein Beispiel zu Teilaufgabe b) finden wir in der räumlichen Version des Satzes von PYTHAGORAS, die zur 41. Mathematik-Olympiade als Aufgabe gestellt wurde:

Aufgabe[6] 9.08 – MO410941/MO411041.
Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide $ABCD$ gilt: Sind die Dreiecke ABD, ACD und BCD sämtlich bei D rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

[5] Ist S_n eine gerade Zahl, so betrachten wir S_{n+1} und streichen den Summanden $2^2 = 4$, so dass wir insgesamt n Summanden mit ungerader Summe ihrer Quadratzahlen betrachten können.
[6] s. Heft 03/2021

Lösungshinweise: Wir betrachten die Quaderecke *ABCD* in nebenstehender Skizze. Insgesamt hat die „abgeschnittene“ Ecke drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen. Laut obiger Aufgabe ist zu beweisen:



$$F_{\Delta ABD}^2 + F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta BCD}^2 = F_{\Delta ABC}^2.$$

Wir legen eine Ebene durch die Gerade CD, die senkrecht auf AB steht. Diese Ebene schneidet die Gerade AB in einem Punkt E, so dass $\overline{DE}$ die Höhe auf AB im Dreieck ABD ist und die $\overline{CE}$ die Höhe auf AB im Dreieck ABC ist.

Weil CD senkrecht auf AD und senkrecht auf BD steht, steht CD auch senkrecht auf jeder Geraden in der Ebene des Dreiecks ABD. Somit ist das Dreieck DEC ebenfalls rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Durch Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS im Dreieck DEC mit der Hypotenuse $\overline{CE}$ finden wir

$$|\overline{CE}| = \sqrt{|\overline{DE}|^2 + |\overline{DC}|^2}$$

Im Dreieck ABD finden wir über die Formeln für den Flächeninhalt

$$F_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{DE}| = \frac{ab}{2} \quad \Rightarrow \quad |\overline{DE}| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wobei wir im Nenner den Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck ABD mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ anwenden ($|\overline{AB}|^2 = a^2 + b^2$). Nun können wir den Flächeninhalt der Seitendreiecke berechnen:

$$F_{\Delta ABC}^2 = \left(\frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CE}|}{2}\right)^2 = \frac{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{CE}|^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \left(c^2 + \frac{(ab)^2}{a^2 + b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (c^2 \cdot (a^2 + b^2) + (ab)^2) = \frac{1}{4} \cdot ((ac)^2 + (bc)^2 + (ab)^2)$$
$$= \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta BCD}^2 + F_{ABD}^2 .$$

❑

In Ergänzung der oben ausgeführten Erzeugung von pythagoreischen Zahlentripel verweisen wir auf folgende Zusammenfassung[7].

Aufgabe 9.09 – Satz. Jedes pythagoreische Tripel kann vier verschiedene pythagoreische Tripel durch zweidimensionale Parameterdarstellungen erzeugen.

[7] Fritzsch K.-H. „Parameterdarstellungen der pythagoreischen Tripel“. In: Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht, Jahrgang 45 (1992) Heft 5, S. 259-261.

Die Parameter sind Linearkombinationen der Zahlen des erzeugenden Tripels (a, b, c) mit $a < b$:

$$(a_d, b_d, c_d) = (|c^2 - d^2|, 2 \cdot c \cdot d, c^2 + d^2)$$

mit $d = \pm a \pm b \pm c$, wobei in diesem Ausdruck höchstens ein Minuszeichen zu verwenden ist.

Beweis: Um das erzeugte Tripel als pythagoreisches Zahlentripel nachzuweisen, berechnen wir den Ausdruck

$$(c^2 - d^2)^2 + (2 \cdot c \cdot d)^2 - (c^2 + d^2)^2.$$

Setzen wir zum Beispiel $d = a + b + c$, so erhalten wir

$$((a + b + c)^2 - c^2)^2 + 4 \cdot (ac + bc + c^2)^2 - ((a + b + c)^2 + c^2)^2.$$

Dies formen wir um und finden für jeden der drei Terme:

$$a_d^2 = (a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2 = a^4 + b^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 2a^2b^2 + 4a^3b + 4a^3c + 8a^2bc + 4ab^3 + 8ab^2c + 4b^3c + 4abc^2 ,$$

$$b_d^2 = 4 \cdot (ac + bc + c^2)^2 = 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^4 + 8abc^2 + 8ac^3 + 8bc^3 ,$$

$$c_d^2 = (a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2 = a^4 + b^4 + 4c^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^2bc + 4b^2c^2 + 4ab^3 + 4ab^2c + 4b^3c + 8abc^2 + 8ac^3 + 8bc^3 + 8a^2bc + 8ab^2c + 8abc^2 .$$

Wir erkennen, dass sich die Summanden aufheben und wir tatsächlich

$$((a + b + c)^2 - c^2)^2 + \left(2 \cdot (ac + bc + c^2)\right)^2 - ((a + b + c)^2 + c^2)^2 = 0$$

erhalten. In gleicher Weise können wir nachweisen, dass wir auch mit $d = a + b - c$, $d = a - b + c$ oder $d = -a + b + c$ pythagoreische Tripel erhalten. ❑

Wir nennen Dreiecke mit $|a - b| = 1$ *fast-gleichschenklige* Dreiecke, weil sie für große Werte von a und b tatsächlich wie gleichschenklig wahrgenommen werden. Betrachten wir nun die Differenz

$$2(ac + bc + c^2) - ((a + b + c)^2 - c^2) = 2c^2 - 2ab - a^2 - b^2,$$

finden wir wegen $a^2 + b^2 = c^2$, dass für $a + 1 = b$ das so erzeugte pythagoreische Zahlentripel ebenfalls die Seitenlängen eines fast-gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks repräsentiert:

$$2(ac + bc + c^2) - ((a + b + c)^2 - c^2) = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Für $(3, 4, 5)$ führt $d = a + b + c$ zu $(119, 120, 169)$.

Auch wenn wir $d = a + b - c$ einsetzen, erhalten wir in gleicher Weise die Seitenlängen eines fast-gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, zum Beispiel aus $(3, 4, 5)$ das Tripel $(21, 20, 29)$.

Aufgabe 9.10 – MO291036.

a) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder -) derart zu wählen, dass mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm m^2 = k$$

gilt.

b) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen die Gleichung aus Teil a) gilt[8].

Lösungshinweise zu Teil a): Das Auffinden geeigneter Summen für kleine k gelingt durch Probieren. Wir finden beispielsweise:

$1 = 1^2$,
$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = -1 - 4 - 9 + 16$,
$3 = -1^2 + 2^2 = -1 + 4$,
$4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16$.

Aufwändig (zumindest unter Klausurbedingungen) erscheint dagegen das Finden einer solchen Summendarstellung für $k = 0$ (dies ist aber erforderlich, weil im Allgemeinen 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt wird):

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = 1 + 4 - 9 + 16 - 25 - 36 + 49.$$

Bezeichnen wir den letzten Summanden in der Darstellung für k mit m_k, können wir die Aufgabenstellung auch so schreiben:

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm m_k^2 = k\ .$$

Das Beispiel für $k = 4$ verallgemeinern wir:

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$
$$= m^2 + 2m + 1^2 - m^2 - 4m - 2^2 - m^2 - 6m - 3^2 + m^2 + 8m + 4^2 = 4\ .$$

Damit können wir „Vierer"-Schritte begründen und schreiben dafür die Zahl k als $k = 4q + r$ mit geeigneten natürlichen Zahlen q und r $(r < 4)$. So können wir für jde Zahl $k > 0$ eine geeignete Darstellung der geforderten Form angeben:

$$\pm 1^2 \pm \cdots \pm m_r^2 + (m_r+1)^2 - (m_r+2)^2 - (m_r+3)^2 + (m_r+4)^2$$
$$+(m_r+4+1)^2 - (m_r+4+2)^2 - (m_r+4+3)^2 + (m_r+4+4)^2$$

[8] siehe auch: Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion. Heft 06/2022.

$$
\begin{aligned}
&\dots\\
&+(m_r + 4\cdot(q-1)+1)^2 - (m_r + 4\cdot(q-1)+2)^2\\
&\qquad - (m_r + 4\cdot(q-1)+3)^2 + (m_r + 4\cdot(q-1)+4)^2\\
&= r + \underbrace{4 + \dots + 4}_{q\ Mal} = r + 4\cdot q = k\,.
\end{aligned}
$$

Lösungshinweise zu Teil b): Wenn wir für eine natürliche Zahl k eine Darstellung nach Teilaufgabe a) mit dem letzten Summanden l^2 gefunden haben, können wir diese Summe mit den Summanden

$$\underbrace{(l+1)^2 - (l+2)^2 - (l+3)^2 + (l+4)^2}_{=4}\ \underbrace{-(l+5)^2 + (l+6)^2 + (l+7)^2 - (l+8)^2}_{=-4}$$

(beliebig oft wiederholt) fortsetzen. ❑

Quersummen in Wettbewerbsaufgaben[9]

In den folgenden Aufgaben werden die Aussagen über die Quersummen vor allem dafür genutzt, die Stellenzahl der ursprünglichen Zahl zu schätzen.

Aufgabe MO621011.

> a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.
> b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

Lösungshinweise Teil a): Da z und $Q(z)$ durch 2, 3 und 5 teilbar sind und das kleinste gemeinsame Vielfache $kgV(2,3,5) = 30$ ist, müssen z und die Quersumme $Q(z)$ beide durch 30 bzw. durch 3 und durch 10 teilbar sein. Damit haben die Zahlen z und $Q(z)$ beide die Endziffer Null und sind Vielfache von 30.

Die Zahl z muss mindestens fünfstellig sein, da die größtmögliche Quersumme einer vierstelligen Zahl mit einer Null am Ende $9 + 9 + 9 + 0 = 27$ ist. Die gesuchte kleinste Zahl ist daher mindestens fünfstellig.

Bei der kleinstmöglichen Zahl sind bei einer festen Quersumme die ersten Ziffern so klein und die letzten Ziffern demzufolge so groß wie möglich zu wählen. Die gesuchte Zahl ist daher 39 990. Sie und auch ihre Quersumme 30 sind durch 2, 3 und 5 teilbar.

Lösungshinweise Teil b): Es gilt $kgV(2,3,4,5) = 60$. Wie in Teil a) schließen wir auf die Teilbarkeit von z und $Q(z)$ durch 60 und Null als letzte Ziffer von beiden Zahlen. Wegen $6\cdot 9 + 0 < 60$ muss z mindestens achtstellig sein. Wegen der Teilbarkeit von z durch 4 ist die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildet wird, durch 4

[9] s. auch Heft 10/2021 und Heft 11/2021

teilbar. Die Zahl z endet also auf 00, 20, 40, 60 oder 80. Damit die erste Ziffer von z so klein wie möglich ist, wählen wir als letzte Ziffern 80. Die kleinste Zahl ist somit 79 999 980. Diese Zahl ist durch 2, 3, 4 und 5 teilbar und ihre Quersumme 60 auch. ❑

Aufgabe MO571013. Es gibt positive ganze Zahlen n, für die sowohl n als auch deren Quersumme $Q(n)$ durch 57 teilbar ist. Solche Zahlen n werden in dieser Aufgabe betrachtet.

a) Geben Sie zwei Beispiele für solche Zahlen n an und weisen Sie nach, dass diese Zahlen die gestellten Bedingungen erfüllen.
b) Ermitteln Sie die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft und weisen Sie nach, dass sie die gestellten Bedingungen erfüllt.

Lösungshinweise Teil a): Da die Zahl 57 die Primfaktorenzerlegung $57 = 3 \cdot 19$ besitzt, ist eine Zahl genau dann durch 57 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 19 teilbar ist.

Die Zahl 57 hat die Quersumme $5 + 7 = 12$. Durch 19-maliges Aneinanderfügen von 57 entsteht eine Zahl mit der Quersumme $19 \cdot 12 = 57 \cdot 4 = 228$, die durch 57 teilbar ist. Die Zahl selbst $\underbrace{57 \ldots 57}_{19\,Mal}$ ist auch durch 57 teilbar. Somit ist ein Beispiel gefunden. Durch Anfügen von Nullen bleibt die Teilbarkeit durch 57 erhalten und die Quersumme ändert sich nicht. Deshalb erfüllen auch $\underbrace{57 \ldots 57}_{19\,Mal}0$ oder $\underbrace{57 \ldots 57}_{19\,Mal}00$ und weitere derartiger Zahlen alle Bedingungen.

Lösungshinweise zu Teil b): Jede Zahl n mit $Q(n) = 57$ hat wenigstens 7 Stellen, denn die höchstens 6-stellige Zahl mit der größten Quersumme ist 999 999 und hat die Quersumme $6 \cdot 9 = 54 < 57$. Die kleinste Zahl mit $Q(n) = 57$ ist 3 999 999.

Die Zahl 3 999 999 ist wie alle anderen Zahlen mit der Quersumme 57 zwar durch 3 teilbar, aber sie ist kein Vielfaches von 19.

Die nächstgrößeren Zahlen mit der Quersumme 57 sind 4 899 999, 4 989 999, 4 998 999, 4 999 899, 4 999 989, 4 999 998 (alle jedoch nicht durch 19 teilbar); es folgen 5 799 999, 5 889 999, 5 898 999 und 5 899 899. Von denen wiederum ist nur 5 899 899 durch 57 teilbar (es gilt $5\,899\,899 = 57 \cdot 103\,507$). Diese Zahl ist somit die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft. ❑

Aufgabe MO281021. Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und durch 450 teilbar ist.

Lösungshinweise: Ist eine Zahl durch 450 teilbar, dann ist sie durch 50 und durch 9 teilbar (weil 50 und 9 teilerfremd sind).

Ist eine Zahl durch 50 teilbar, so endet die Zahl auf 00 oder 50. Weil nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen, endet die gesuchte Zahl auf 00.

Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist auch ihre Quersumme durch 9 teilbar. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist gleich der Anzahl der Ziffern 1.

Die gesuchte Zahl besteht folglich aus 9 Ziffern 1 und endet auf 00, lautet also 11 111 111 100. ❑

Aufgabe. Es bezeichnet $Q(n)$ die Quersumme der positiven ganzen Zahl n. Berechnen Sie $Q\left(Q\left(Q(2022^{2022})\right)\right)$.

Lösungshinweise: Wir schätzen die Anzahl der Ziffern von $z = 2022^{2022}$ ab.

$$z < 2048^{2022} = 2^{2022} \cdot (2^{10})^{2022} = 2^{22242} < (2^{13})^{1711} < (10^4)^{1711}$$

Dabei verwenden wir $2^{13} = 8\,192$ und $22\,242 < 13 \cdot 1711 = 22\,243$ Deshalb hat die gesuchte Zahl z höchsten $4 \cdot 1711 = 6844$ Ziffern. Somit können wir die Quersumme abschätzen: $Q(z) \leq 6\,844 \cdot 9 = 61\,596$.

Dann finden wir aber $Q\left(Q(z)\right) \leq 6 + 4 \cdot 9 = 42$.

Somit gilt sogar $Q\left(Q\left(Q(z)\right)\right) \leq 12$.

Die Zahl 2022 lässt bei Division durch 9 den Rest 6. Deshalb ist 2022^2 durch 9 teilbar. Dann ist auch $(2022^2)^{1011} = 2022^{2022}$ durch 9 teilbar. Also sind auch die Quersummen durch 9 teilbar. Da die Quersummen von positiven Zahlen nicht Null sein können, finden wir $Q\left(Q\left(Q(z)\right)\right) = 9$. ❑

Aufgabe. Geben Sie die kleinste 2022-stellige Zahl z an, für die $Q\left(Q\left(Q(z)\right)\right)$ größtmöglich ist.

Lösungshinweise: Die größte Quersumme einer 2022-stelligen Zahl besteht nur aus Ziffern 9 und kann deshalb $2\,022 \cdot 9 = 18\,198$ nicht übertreffen. Es gilt also $z_1 = Q(z) \leq 18198$. Weiter finden wir $Q\left(Q(z)\right) \leq 36$, denn wäre z_1

- fünfstellig, dann liefert 17999 die größte Quersumme,
- vierstellig, dann liefert 9999 die größte Quersumme.

Folglich erhalten wir die Abschätzung $Q\left(Q\left(Q(z)\right)\right) \leq 11$. Um die Zahl 11 als Quersumme zu realisieren, muss $Q\left(Q(z)\right) = 29$ gelten. Die kleinste Zahl mit Quersumme 29 ist 2999. Wir suchen also eine Zahl z mit $Q(z) = z_1 = 2999$.

Wegen $2999 = 333 \cdot 9 + 2$ erhalten wir die kleinste 2022-stellige Zahl als

$$z = 1\underbrace{00\ldots00}_{1687}1\underbrace{9\ldots9}_{333}$$ ❑

Aufgabe 5-2: Es seien p_1 eine einstellige, p_2 eine zweistellige und p_3 eine dreistellige Primzahl. Mit $Q(n)$ werde die Quersumme von der natürlichen Zahl n bezeichnet. Man finde die kleinste natürliche Zahl n mit

$$Q(n) = p_3,\ Q(p_3) = p_2 \text{ und } Q(p_2) = p_1.$$

Lösungshinweise: Um die kleinste Zahl n zu finden, gehen wir zunächst von der kleinstmöglichen Primzahl $p_1 = 2$ aus. Mit $p_2 = 11$ finden wir die kleinstmögliche zweistellige Primzahl mit $Q(p_2) = p_1$.

Nun suchen wir die kleinste dreistellige Primzahl p_3 mit $Q(p_3) = 11$. Wegen $119 = 7 \cdot 17$ und $128 = 2 \cdot 64$ ist dies $p_3 = 137$. Die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 137 besteht aus 15-mal der Ziffer 9 mit einer vorangestellten 2. Folglich erfüllt die Zahl 2 999 999 999 999 999 alle Bedingungen der geforderten Quersummen.

Wir zeigen noch, dass mit anderen einstelligen Primzahlen keine kleinere Zahl erzeugt werden kann.

Für $p_1 = 2$ gibt es aber keine weitere Lösung, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, weil jede zweistellige Primzahl größer als 11 eine Quersumme größer als 2 besitzt.

Der Fall $p_1 = 3$ kann nicht auftreten, da dann p_2 die Quersumme 3 hätte und somit durch 3 teilbar wäre (im Widerspruch zur Primzahleigenschaft).

Im Falle $p_1 = 5$ gibt es nur die zweistelligen Primzahlen 23 bzw. 41 mit entsprechender Quersumme. Allerdings kann p_2 als Quersumme einer dreistelligen Zahl höchstens 27 sein, so dass nur $p_2 = 23$ in Frage kommt. Die kleinste dreistellige Zahl mit Quersumme 23 lautet 599 (Primzahl!). Die zugehörige Zahl n wäre aber 67-stellig und damit größer als die oben gefundene Lösung.

Der Fall $p_1 = 7$ entfällt sofort, da keine Primzahl unter 27 eine Quersumme von 7 besitzt.

Damit ist bewiesen, dass die oben gefundene Zahl n die kleinste Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist. ❑

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal [10]

Zur Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene nutzt man *elementare* Konstruktionen (Grundkonstruktionen), die durch folgende Axiome[11] abgesichert sind, d.h. es gilt als vereinbart, dass mit Zirkel und Lineal in der Ebene folgende Konstruktionen ausgeführt werden können:

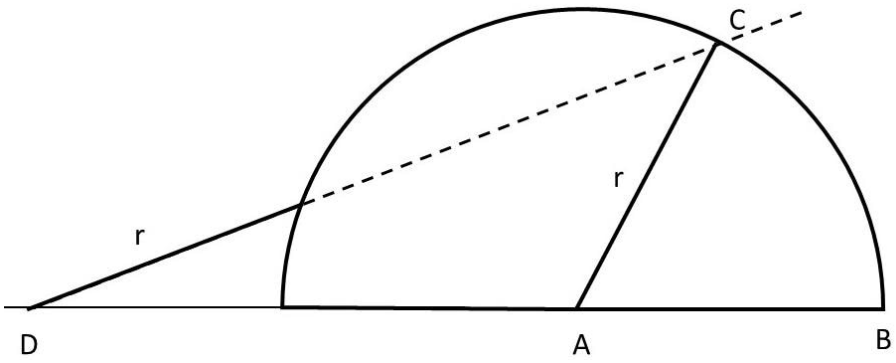
1. (Lineal-Axiom) Es ist stets möglich, durch 2 gegebene Punkte genau eine Gerade zu ziehen, d.h. jeder Punkt dieser Geraden ist gegeben.
2. (Schnittpunkt-Axiom I) Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets konstruieren.
3. (Zirkel-Axiom) Es lässt sich genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und wenigstens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind, d.h. dass damit alle Punkte der Peripherie gegeben sind.
4. (Schnittpunkt-Axiom II) Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets durch Konstruktion die Schnittpunkte bestimmen.
5. (Schnittpunkt-Axiom III) Es ist stets möglich, die Punkte zu konstruieren, die zwei sich schneidenden Kreise gemeinsam haben.

Lässt sich eine Aufgabe nicht auf diese Axiome zurückführen, so heißt sie *nichtelementar*. Allerdings ist hierbei zwischen der Möglichkeit der Aufgabe und der Lösbarkeit der Aufgaben zu unterscheiden. Eine Aufgabe heißt möglich, wenn es eine Lösung gibt. Dabei kann es aber durchaus sein, dass diese Lösung nicht mit den oben genannten Axiomen ausführbar ist, aber mit speziellen Instrumenten eine Lösung praktisch gelingt. Solche Aufgaben nennen wir *elementar nicht lösbar*. Ein Beispiel ist die Dreiteilung des Winkels mit einem *Einschiebelineal*:

Bereits ARCHIMEDES VON SYRAKUS (geb. um 287 v.u.Z., gest. 212 v.u.Z.) schlug eine Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels vor: Es sei $\sphericalangle \mathrm{C}AB = \alpha$ der dreizuteilende Winkel wie in untenstehender Zeichnung. Schlage einen Halbkreis um A mit beliebigem Radius r. Bringe am Lineal zwei Markierungen im Abstand $|\overline{AB}| = r$ an. Lege das Lineal so an C, dass eine der beiden Markierungen auf der Geraden AB im Punkt D und die andere auf der Kreislinie liegt, und zeichne die Gerade CD. Der Winkel $\sphericalangle CDA$ ist der gesuchte Drittelwinkel.

[10] Nach: Hameister, E. Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970.

[11] Ein Axiom ist ein Grundsatz, der weder begründet noch deduktiv abgeleitet, sondern als Grundlage gesetzt wird.



Wir bemerken: Eine Markierung am Lineal und ein geschicktes Anlegen des Lineals entsprechen keinen klassischen Konstruktionsmethoden. Es wurde also statt des klassischen Zirkels und Lineals ein abweichendes Instrument verwendet. Somit ist diese Konstruktionslösung kein Widerspruch zur Unlösbarkeit des klassischen Konstruktionsproblems.

Doch betrachten wir nun wieder die klassische Fragestellung. Für eine Konstruktionsbeschreibung ist es streng genommen erforderlich, jeden (Konstruktions-) Schritt durch eines oder mehrere dieser Axiome zu begründen. Die *Halbierung eines Winkels* mit Zirkel und Lineal könnte ausführlich so beschrieben werden: Gegeben sei ein Winkel durch die zwei Halbgeraden (Schenkel des Winkels) mit dem gemeinsamen Anfangspunkt *S* (Scheitelpunkt).

- Im Scheitel *S* des gegebenen Winkels wird der Zirkel eingesetzt und mit einer beliebigen Öffnung ein Kreisbogen gezeichnet (Axiom 3),
- der jeden Schenkel in einem Punkt *A* bzw. *B* schneidet (Axiom 4).
- Dann wird um jeden der Punkte *A* und *B* mit einem festen, ausreichend großen, aber beliebig gewählten Radius ein Kreis geschlagen (Axiom 3).
- Beide Kreise schneiden sich in einem von *S* verschiedenen Punkt *T* (Axiom 5).
- Abschließend wird durch *S* und *T* eine Gerade gezeichnet (Axiom 1).

Die Gerade *ST* ist die gesuchte *Winkelhalbierende*.

Nun ist es natürlich zur Verkürzung von Konstruktionsbeschreibungen zulässig, häufig wiederkehrende Konstruktionen als bekannt vorauszusetzen. Dazu gehören beispielsweise:

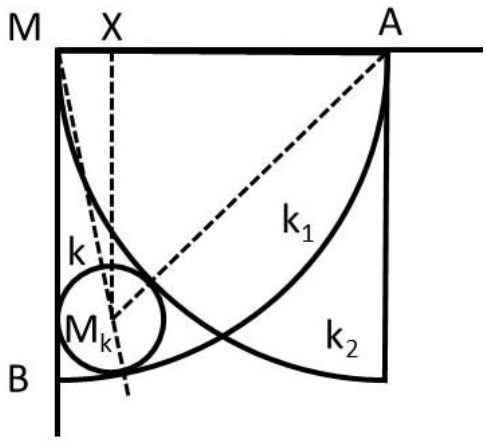
- Halbierung eines Winkels $\sphericalangle BSA$,
- Errichten der Mittelsenkrechten auf einer Strecke $\overline{AB}$,
- Fällen des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g,
- Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden g durch einen Punkt P.

Von der platonischen Schule (PLATON, um 428 bis 348 v.u.Z.), an deren Eingangstür die Worte „μηδειζ αγεωμετρητοζ εισιτω“ [12] prangten, wurde die Methodik der

[12] „Keiner soll ohne Kenntnisse der Geometrie hereinkommen“

Durchführung von Konstruktionsaufgaben streng vorgegeben. Jede, auch die einfachste Aufgabe sollte mit einer **Analyse** beginnen. Dazu wird die vorgelegte Aufgabe an einer angenommenen Figur unter Berücksichtigung der vorgegebenen Bestimmungsstücke so aufgelöst, dass die Konstruktionsschritte ersichtlich werden. Eine Skizze, in der alle benötigten Punkte eingetragen sind, ist eine hervorragende Grundlage für die Analyse. Hier schließt sich die eigentliche **Beschreibung** der Konstruktionsschritte an. Ist die Konstruktionsaufgabe gelöst, muss anschließend der **Beweis** geführt werden, dass die gefundene Figur tatsächlich die geforderte ist. Oft genügt es, hierbei auf die Analyse zu verweisen. Wenn aber gewisse Hilfskonstruktionen notwendig sind, wird dies als Nachweis nicht ausreichen und ein gesonderter Beweis ist erforderlich. Abschließend ist stets die Diskussion zu führen, ob die Konstruktion bei jeder konkreten Wertvorgabe der gegebenen Bestimmungsstücke ausführbar ist (**Existenz**) bzw. welche Beschränkungen zu beachten sind (**Nebenbedingungen**). So kann zwar die Konstruktion eines Dreiecks aus den gegebenen Seitenlängen beschrieben werden, die Konstruktion ist aber nur ausführbar, wenn diese Seitenlängen die Dreiecksungleichungen erfüllen. Schließlich ist auch die **Eindeutigkeit** zu untersuchen, also ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist. Ergeben sich beispielsweise in einem Schritt zwei (oder mehr) Schnittpunkte und es ist zur Fortsetzung der Konstruktion einer davon auszuwählen, ist darzulegen, welche Konsequenzen sich aus der Auswahl für die Figur ergeben. Diese Elemente der Konstruktionsbeschreibung finden wir auch in Wettbewerbsaufgaben wieder.

Aufgabe MO411032. Es sei ABM ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit dem gegebenen Radius r und Mittelpunkt M. Ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis k einbeschrieben werden, d.h. er soll die Gerade durch M und B, den Kreis k_1 von innen und den Kreis k_2 von außen berühren.



a) Wie groß ist der Radius des Kreises k?
b) Konstruieren Sie den Kreis k nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise: Die Teilaufgabe a) ist die Aufforderung zur Analyse, denn wenn wir den Radius r_k des Kreises *k* ermitteln können, finden wir wesentliche Aussagen zur Lage des Kreises, auf denen dann die Konstruktionsbeschreibung beruht. Die Herleitung dieses Radius dient gleichzeitig dem Beweis, dass der gefundene Kreis der gesuchte ist.

Für die *Analyse* nehmen wir an, wir haben den Mittelpunkt M_k des Kreises k gefunden. Wir fällen das Lot von M_k auf $\overline{MA}$ (mit dem Fußpunkt X). Wir verbinden M_k mit A und M_k mit M. Nun wissen wir im rechtwinkligen Dreieck AXM_k mit der Hypotenuse $\overline{AM_k}$ mittels Satz des PYTHAGORAS:

$$|\overline{M_kX}|^2 = (r + r_k)^2 - (r - r_k)^2$$

Außerdem gilt im rechtwinkligen Dreieck MM_kX mit der Hypotenuse $\overline{MM_k}$ mittels Satz des PYTHAGORAS:

$$|\overline{M_kX}|^2 = (r - r_k)^2 - r_k^2$$

Aufgrund der Drittengleichheit erhalten wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen (wegen $r > 0$)

$$6rr_k = r^2 \quad \Rightarrow \quad r_k = \frac{r}{6}.$$

Nun können wir die *Konstruktionsbeschreibung* angeben. Dabei ist darauf zu achten, dass auch der sechste Teil des Radius r konstruiert werden muss (Teilung einer Strecke in sechs Teile mithilfe des Strahlensatzes) und nicht numerisch aus dem Radius r berechnet werden darf. Mit der Zirkelspanne der Weite r_k konstruieren wir von M aus den Punkt X, errichten die Senkrechte auf $\overline{MA}$ in X. Nun schlagen wir um M einen Kreisbogen mit dem Radius $r - r_k$. Den Schnittpunkt mit der Senkrechten bezeichnen wir mit M_r. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius r, der *Beweis* ist in der Analyse enthalten.

Wie die Herleitung zeigte, gibt es für jeden Radius r einen Radius r_k. Damit ist die *Existenz* eines Kreises gesichert. Dies wurde laut einem Korrekturhinweis in der Musterlösung auch aufgrund der Anschaulichkeit auch ohne Beweis akzeptiert. Sowohl die Länge des Radius r_k als auch jeder Konstruktionsschritt war eindeutig. Somit gibt es genau eine Lösung (*Eindeutigkeit*). ❑

Im Weiteren werden die Bestimmungsstücke für die zu konstruierende Figur (soweit Missverständnisse nicht zu erwarten sind) entsprechend der üblichen Bezeichnungsweisen benannt. Es sollten aber prinzipiell Skizzen oder Zeichnungen dargestellt und alle benannten Punkte, Strecken und Figuren eingetragen werden. So können Missverständnisse aus der textlichen Beschreibung vermieden werden. Eine sorgfältig gezeichnete Skizze kann zudem wesentlich zur Lösungsfindung beitragen!

Besteht die Aufgabenstellung darin, aus drei gegebenen Seitenlängen ein Dreieck zu konstruieren, so wird auch ohne detaillierte Analyse eine geeignete Konstruktionsbeschreibung möglich sein. Für den Existenznachweis genügt der Hinweis auf die Dreiecksungleichungen: Es existieren nur dann Lösungen, wenn die Summen aus je zwei Seitenlängen größer als die jeweilige dritte Seitenlänge sind. (*Hinweis:* Bei solch einer allgemeinen Aufgabenstellung ist es nicht gerechtfertigt, die

Seitenlängen mit a, b und c zu benennen und damit die vordefinierten Lagebeziehung entsprechend der üblichen Bezeichnungen anzunehmen.) Die Eindeutigkeit ist leicht zu erklären (zwei spiegelbildliche, kongruente Lösungen).

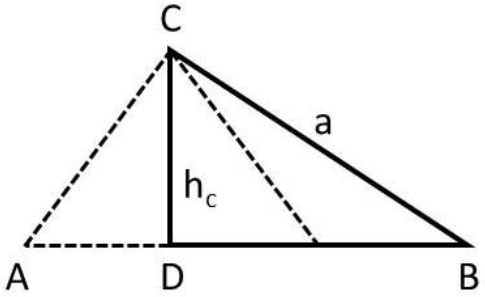
Auch die Aufgabe, ein Dreieck aus den Seitenlängen a und c und dem Winkel $\alpha = 30°$ zu konstruieren, erscheint einfach. Jedoch sind die Diskussionen zur Eindeutigkeit (es können zwei verschiedene, nicht kongruente Dreiecke konstruiert werden) und zur Existenz (es muss $a \geq \frac{c}{2}$ gelten) sorgfältig zu führen.

Betrachten wir die Seitenlängen (a, b, c) Winkelgrößen (α, β, γ) sowie die Längen der Höhen (h_a, h_b, h_c), Seiten- (s_a, s_b, s_c), und Winkelhalbierenden (w_a, w_b, w_c) als mögliche Bestimmungsstücke für Dreieckskonstruktionen, so lassen sich insgesamt $\binom{15}{3} = 455$ Aufgaben formulieren. Sollen Aufgaben, die durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen ineinander überführt werden können, als unwesentlich verschieden angesehen werden, verbleiben insgesamt 95 wesentlich verschiedene Konstruktionsaufgaben. Von diesen sind die Vorgaben (α, β, γ) und (a, β, h_c) unterbestimmt, d.h., bereits zwei der gegebenen Größen bestimmen die dritte Angabe eindeutig und somit lassen sich die Dreiecke nicht eindeutig konstruieren (es fehlt eine dritte unabhängige Bestimmungsgröße, um das Dreieck zu konkretisieren). Während 63 Aufgaben allein mit Zirkel und Lineal gelöst werden können, sind die restlichen 30 Aufgaben im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal lösbar.

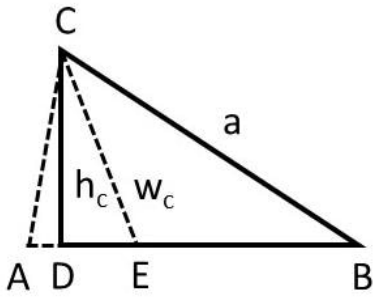
Im Folgenden seien Lösungsansätze für einige (unkomplizierte) Konstruktionsaufgaben für Dreiecke diskutiert. Zur Übung sollten die Konstruktionen ausgeführt und dabei die Analyse, die Konstruktionsbeschreibung, der Beweis sowie die Diskussion zur Existenz und Eindeutigkeit angegeben werden.

Befinden sich Höhenangaben unter den Bestimmungsstücken, lassen sich häufig zunächst rechtwinklige Hilfsdreiecke aus der Höhe und einer weiteren gegebenen Größe konstruieren, hier die rechtwinkligen Dreiecke DBC jeweils aus der Seitenlänge a und der Höhe h_c.

Aufgabe K1. (a, b, h_c)



Aufgabe K2. (a, h_c, w_c).



In beiden Aufgabenstellungen ist für $a > h_c$ die Konstruktion des Hilfsdreiecks BCD stets (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Wir zeichnen dafür den THALESkreis über der Seite $\overline{BC}$ und schlagen um C einen Kreis mit dem Radius h_c. Der (eindeutige) Schnittpunkt beider Kreise ist der Punkt D.

Nun können wir für $b \geq h_c$ bzw. $w_c \geq h_c$ die Konstruktion fortsetzen, indem wir die Strecke $\overline{DB}$ verlängern und die Punkte A bzw. E als Schnittpunkte der Geraden durch D und B mit einem Kreis um C mit den Radien b bzw. w_c finden. Gilt in der Voraussetzung die Gleichheit, fällt der Punkt A bzw. E mit D zusammen, andernfalls ist die Konstruktion nicht eindeutig, es existieren zwei verschiedene Lösungen mit einem Schnittpunkt rechts von D bzw. links von D.

Hinweis zu Aufgabe K1: Für $b \geq a$ ist jedoch nur die linksseitige Lösung gültig, da sonst A rechts von B läge und damit der üblichen Bezeichnungsweise widerspricht. Wird dagegen die Aufgabenstellung ohne Verwendung der allgemeinen Bezeichnungen formuliert („es ist ein Dreieck aus den Längen zweier Seiten und der Länge der Höhe auf der dritten Seite zu konstruieren“) gilt diese Einschränkung natürlich nicht.

Hinweis zu Aufgabe K2: Für $w_c \geq a$ ist jedoch nur die linksseitige Lösung gültig, da sonst A rechts von B läge und damit der üblichen Bezeichnungsweise widerspricht. Wird dagegen die Aufgabenstellung ohne Verwendung der allgemeinen Bezeichnungen formuliert („es ist ein Dreieck aus der Länge einer Seite und den Längen der Höhe und der Winkelhalbierenden, die von einem Endpunkt dieser Seite ausgehen, zu konstruieren“) gilt diese Einschränkung natürlich nicht. Zusätzlich ist jedoch darauf zu achten, dass bei der Fertigstellung der Konstruktion „Verdopplung des Winkels zwischen a und w_c“ der Winkel bei C kleiner als 180° bleibt bzw. der Schnittpunkt von b und c rechts von B entsteht.

(wird fortgesetzt)

In alten Mathe-Büchern geblättert

ARCHIV
der MATHEMATIK und PHYSIK[13]

mit besonderer Rücksicht
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Sechsundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Verlagsbuchhandlung, J. Sengbusch.
1874.

[13] s. http://books.google.com. Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten

XVII.
Die rationalen Dreiecke.

Vollständig entwickelt und mit Ausscheidungen aller Wiederholungen
3 systematische Tafeln gebracht
von
Heinrich Rath.

Mathematiklehrer am Realgymnasium in Kaaden.

Vorwort.

Mit der vorliegenden Schrift hatte ich mir die Aufgabe gestellt, ein historisch merkwürdiges und ziemlich umfassendes Problem der rationalen Analysis gründlich und bis in seine Einzelheiten hinaus zu lösen. So weit auch die rationale Analysis im Allgemeinen entwickelt ist; eine vollständig durchgeführte Specialarbeit besitzen wir noch nicht. Und damit fehlt dieser mathematischen Disziplin die eigentliche Anwendung. Denn es kann nicht genügen, die verschiedenen Probleme nur mit einigen Zügen rational zu machen; es müssen auch einzelne Aufgaben durchgearbeitet werden. Und gerade hier zeigen sich erst die zahlreichen und eigenthümlichen Schwierigkeiten der rationalen Analysis, die manchmal selbst des sorgfältigsten Scharfsinns spotten. Das mag denn auch die Ursache sein, warum bisher die Detailarbeiten hinter den grossen Bahnbrecher in dieser Wissenschaft so kümmerlich zurückgeblieben sind.

…

Allgemeine Eigenschaften der rationalen Primdreiecke.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks commensurabel, und man misst sie durch die grösste gemeinsame Längeneinheit, so werden die Seitenmasszahlen im Allgemeinen relative Primzahlen, während sie einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, oder Brüche werden, wenn man mit einem aliquoten Teil, oder mit einem Vielfachen jener Längeneinheit misst. Solche Dreiecke mit ganzen, relative primären Seitenzahlen kann man Primdreiecke nennen. Jedes seitencommensurable Dreieck lässt sich als ein Primdreieck ausdrücken, wenn man der Messung die grösste Masseinheit zu Grunde legt. Tritt zu den relativ primären Seitenmassen noch eine Inhaltszahl, so hat man ein rationales Primdreieck.

Ein Dreiecke mit drei ganzen, relativ primären Seitenzahlen und einer rationalen Inhaltszahl heisst ein rationales Primdreieck. Ist dasselbe rechtwinklig, so heisst es ein pythagorisches Primdreieck.

Alle ähnlichen rationalen Dreiecke lassen sich numerisch als ein und dasselbe Primdreieck darstellen, indem man jedes mit seiner grössten

Längeneinheit misst; und von jedem rationalen Primdreieck lassen sich alle möglichen, ihm ähnliche rationale Dreiecke ableiten, indem man die Seiten mit einer Zahl und die Fläche mit dem Quadrate dieser Zahl multipilcirt und dividirt. … Mithin repräsentiert die vollständige Gruppe der rationalen Primdreiecke alle möglichen rationalen Dreiecke, weshalb sich die vorliegende Aufgabe auf Herstellung aller rationalen Primdreiecke reducirt.

Sind a, b, c die Seitenmasse und α, β, γ die Masszahlen der durch den inneren Berührungskreis bewirkten „Seitenteile“, so folgt:

$$\frac{a+b+c}{2} = \alpha+\beta+\gamma\,;\ \frac{-a+b+c}{2} = \alpha\,;\ \frac{a-b+c}{2} = \beta\,;\ \frac{a+b-c}{2} = \gamma$$

$$i = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

$$i = \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma}$$

Welche drei Zahlen man auch für α, β, γ setzt, immer wird die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite. …

Setzt man $a = b = c$, so wird die Inhaltszahl irrational:

$$i = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \alpha^2\sqrt{3}$$

Kein rationales Dreieck ist gleichseitig. Mithin kann es nur gleichschenklige und ungleichseitige rationale Dreiecke geben.

Setzt man für a, b, c drei ungerade Zahlen, oder nur Eine, so wird die Umfangszahl u und jeder der vier Zähler in

$$\frac{a+b+c}{2}\ ;\ \frac{-a+b+c}{2}\ ;\ \frac{a-b+c}{2}\ ;\ \frac{a+b-c}{2}$$

eine ungerade Zahl, was gibt

$$\alpha = \frac{2x+1}{2}\ ;\ \beta = \frac{2y+1}{2}\ ;\ \gamma = \frac{2z+1}{2}$$

$$16i^2 = [2(x+y+z)+3](2x+1)(2y+1)(2z+1) = [2s+3](4A+2s+1)$$
$$= (2s+3)4A + 4s^2 + 6s + 2s + 3 = 4B + 3 = 4N - 1$$
$$4i = \sqrt{4N-1}$$

Erhebt man aber eine gerade und eine ungerade Zahl aufs Quadrat, so folgt

$$(2m)^2 = 4m^2$$
$$(2n+1)^2 = 4(n^2+n) + 1 = 4p + 1$$

d.h. nur eine 4fache Zahl, sowie eine solche ungerade Zahl, welche um 1 grösser als eine 4fache Zahl ist, kann eine Quadratzahl sein. Deshalb muss

$$\sqrt{4N-1}$$

eine irrationale Zahl sein.

Will man dieses auch umgekehrt beweisen, in der Voraussetzung, dass die ungerade Zahl $4N-1$ doch eine Quadratzahl von der Form $4p+1$ enthalten möchte, so folgt

$$4N-1=4p+1, 4N=4p+2, 2N=2p+1$$

ein Widerspruch, da die gerade Zahl $2N$ einer ungeraden Zahl nicht gleicht.

Daraus folgt nun zunächst der zahlentheoretische Satz:

Multipliziert man die Summe dreier ungerader Zahlen mit dem Producte dieser drei Zahlen, so ist die zweite Wurzel aus dem Product irrational.

Und weiter folgt daraus, dass Dreiecke mit drei ungeraden Seitenzahlen, oder nur mit Einer ungeraden Seitenzahl irrational sind, dass mithin die rationalen Dreiecke nur Ein gerades Seitenmass, oder 3 gerade Seitenmasse haben müssen, so dass für die rationalen Primdreiecke nur Ein gerades Seitenmass möglich ist. daraus ergeben sich eine gerade Umfangs- und Flächenzahl, sowie ganze Seitenteilzahlen.

Jedes rationale Primdreieck hat nur Eine gerade Seitenzahl, gerade Umfangs- und Flächenzahlen, sowie ganze Seitenteilzahlen.

Anm. Es gibt also kein rationales Dreieck mit ganzen Seitenzahlen, das nicht auch eine ganze, und zwar eine gerade Inhaltszahl hat.

Monatsaufgabe 09/22 – Lösungsdiskussion

Aufgabe. Es seien m und n natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass die Quersumme der Summe $m+n$ kleiner-gleich der Summe der Quersummen beider Zahlen ist, also dass gilt $Q(m+n) \leq Q(m)+Q(n)$.

Lösungshinweise: Wir lösen die Aufgabe, indem wir uns an der schriftlichen Addition orientieren. Wir schreiben m, n und $m+n$ in einer Zifferndarstellung, wobei die führende Ziffer $c_k \neq 0$ sei und die Ziffern für m und n gegebenenfalls mit 0 aufgefüllt werden, um die Stellenzahlen anzugleichen.

$$m=\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}, n=\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}, m+n=\overline{c_k c_{k-1} \dots c_0}$$

Wir argumentieren zunächst anschaulich: Wir zerlegen die Addition in die n-malige Addition der Zahl 1. Entsteht bei Addition einer Zahl z mit 1 kein Übertrag, so gilt

$Q(z+1) = Q(z) + 1$. Ein Übertrag entsteht aber, wenn die Zahl z auf die Ziffer 9 endet. Dann erhöht sich der Wert auf der Zehnerstelle um 1 und die Einerstelle wird 0. Also gilt in diesem Fall $Q(z+1) = Q(z) + 1 - 9$, also $Q(z+1) < Q(z) + Q(1)$. Insgesamt erhalten wir also stets $Q(z+1) \leq Q(z) + Q(1)$. Diese Ungleichung setzt sich bei wiederholter Addition mit 1 fort, so dass wir die Behauptung bewiesen haben.

Nun wollen wir diesen Beweis formalisieren. Dafür schreiben wir die Additionsschritte von rechts beginnend auf, wobei wir mit u_j die Überträge der Addition bezeichnen ($u_j \in \{0; 1\}$ für alle $j = 1, \ldots, k-1$):

$$\begin{aligned}
&c_0 + u_0 \cdot 10 = a_0 + b_0 && \Rightarrow \quad c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0 \\
&c_1 + u_1 \cdot 10 = a_1 + b_1 + u_0 && \Rightarrow \quad c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1 \\
&c_2 + u_2 \cdot 10 = a_2 + b_2 + u_1 && \Rightarrow \quad c_2 = a_2 + b_2 + u_1 - 10 \cdot u_2 \\
&\ldots \\
&c_{k-1} + u_{k-1} \cdot 10 = a_{k-1} + b_{k-1} + u_{k-2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad c_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1} + u_{k-2} - 10 \cdot u_{k-1}
\end{aligned}$$

Falls $a_k + b_k + u_{k-1} < 10$ (also kein Übertrag entsteht), gilt

$$c_k = a_k + b_k + u_{k-1}\,.$$

Andernfalls ergibt sich c_k nur aus dem Übertrag der letzten Addition. Dann sind aber $a_k = b_k = 0$ und es gilt ebenfalls

$$c_k = a_k + b_k + u_{k-1} \qquad \Rightarrow \quad c_k = a_1 + b_k + u_{k-1}\,.$$

Nun addieren wir diese Gleichungen und erhalten:

$$\sum_{j=0}^{k} c_j = Q(m+n) = \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{j=0}^{k} b_j - 9 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} u_j \leq \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{j=0}^{k} b_j = Q(m) + Q(n)$$

Weil die Überträge nichtnegative Zahlen sind, finden wir die Behauptung bestätigt: $Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$. ❑

Monatsaufgabe[14] 11/22.

Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl z mit den Eigenschaften

- z ist durch 2 teilbar,
- $Q(z)$ ist durch 3 teilbar und
- $Q(Q(z))$ ist durch 5 teilbar.

Hinweis: Mit $Q(n)$ wird die Quersumme von der ganzen Zahl n bezeichnet.

[14] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.11.2022 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 9.2 – Pythagoräische Zahlentupel 3
Quersummen in Wettbewerbsaufgaben 10
Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal 13
In alten Mathe-Büchern geblättert 19
Monatsaufgabe 09/22 – Lösungsdiskussion 22
Monatsaufgabe 11/22. 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[15]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.02	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

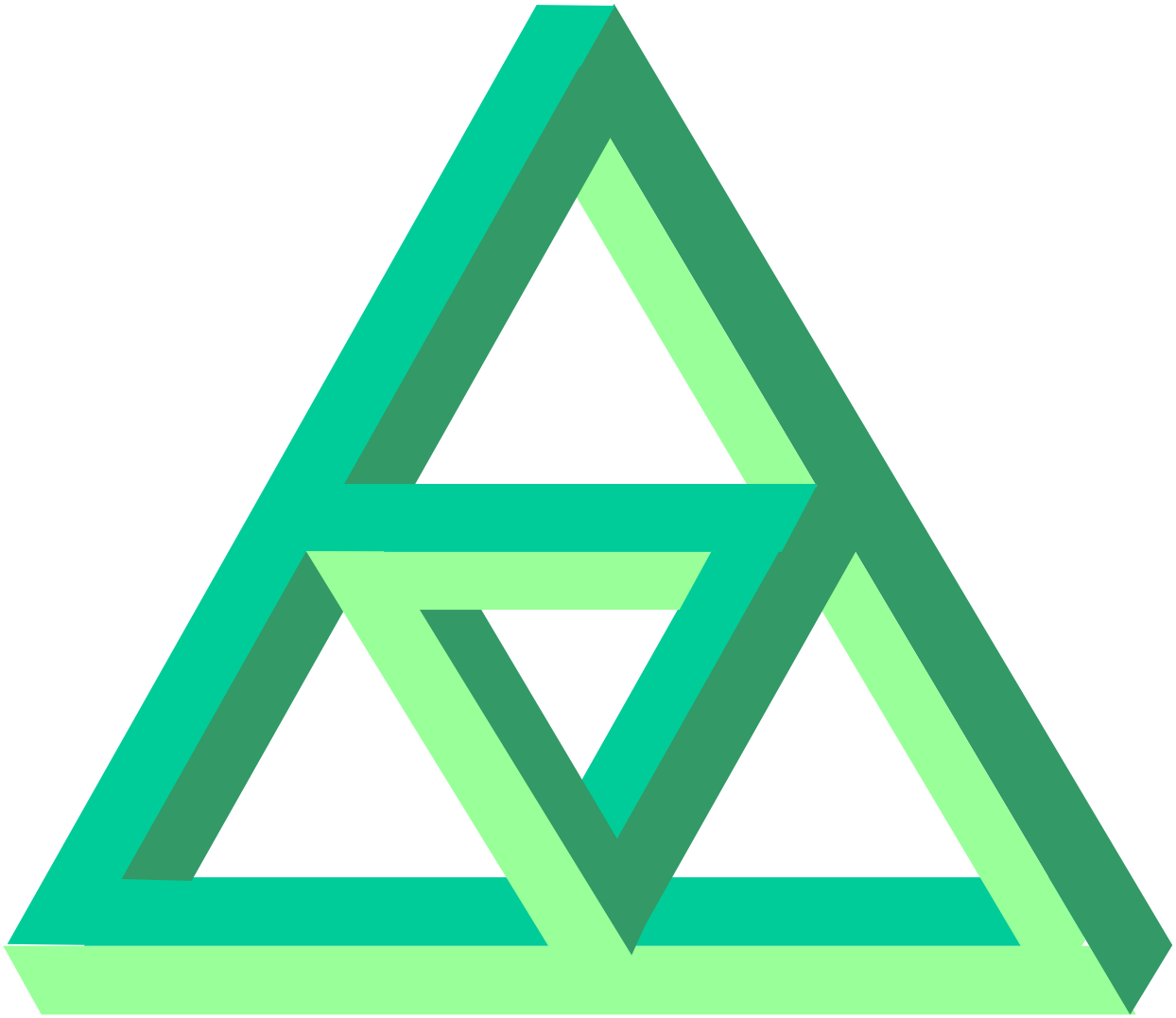
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[15] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2022 (Dezember 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgabe **MO620924** werden Flächenberechnungen diskutiert, wenn die Lage der zu untersuchenden Figuren nicht eindeutig festgelegt ist. Ein Lösungsansatz besteht darin, die Figuren so lange zu vergrößern, bis eine Situation erreicht ist, bei der sich der (nun vergrößerte) Flächeninhalt aus gegebenen Bestimmungsstücken berechnen lässt. Aber auch der Versuch, die allgemeine Lage durch zusätzliche Bestimmungsstücke zu quantifizieren, kann ein erfolgversprechender Lösungsansatz sein

Der Beitrag zu geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal wird fortgesetzt. Zudem beginnen wir einen Beitrag über die Anwendung des Schubfachprinzips. Damit soll die **KZM-Aufgabe 2-5B** vertieft werden.

Ein Auszug aus dem Buch „Anweisung zur Geometrie für Anfänger“ von Dr. J. N. Müller aus dem Jahre 1790 zeigt, wie bereits damals Dreiecks-Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zur mathematischen Ausbildung gehörten.

Mit Hinweisen zum Bundeswettbewerb Mathematik ist die Aufforderung verbunden, an diesem Wettbewerb teilzunehmen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 19 – Maximale Flächeninhalte

Wettbewerbsaufgaben mit Berechnungen von Flächeninhalten beruhen meist auf exakt beschriebenen Figuren. Die erforderliche Ermittlung von geeigneten Bestimmungsstücken, mit denen Flächeninhalte berechnet werden können, kann sich dennoch als schwierig erweisen. Sind die zu betrachtenden Figuren jedoch mit Freiheitsgraden versehen, sind

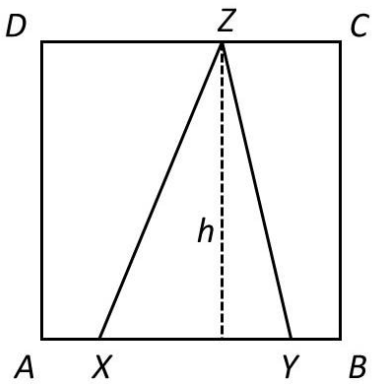
- entweder Hilfsgrößen zur Beschreibung dieser Figuren einzuführen, mit denen dann Flächenberechnungen möglich werden,
- oder Vergrößerungen dieser Figuren zu konstruieren, mit denen Flächenabschätzung geführt werden können.

Aufgabe 19.01 – MO620924. Zeigen Sie: Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks XYZ alle auf dem Rand oder im Inneren eines Quadrats $ABCD$, so ist der Flächeninhalt des Quadrats mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungshinweise: Wir beweisen zunächst einen einfacheren Hilfssatz.

Behauptung: Liegen die drei Eckpunkte eines Dreiecks XYZ alle auf zwei einander gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks $ABCD$, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks.

Beweis: Seien die Bezeichnungen der Punkte o.B.d.A.[3] so gewählt, dass X und Y auf der Seite $\overline{AB}$ und Z auf der Seite $\overline{CD}$ liegt. Betrachten wir $\overline{XY}$ als Grundseite des Dreiecks XYZ, dann hat die Höhe die Länge $|\overline{AD}|$ und es ist offensichtlich $|\overline{XY}| \leq |\overline{AB}|$. Folglich gilt für die Flächeninhalte wie behauptet

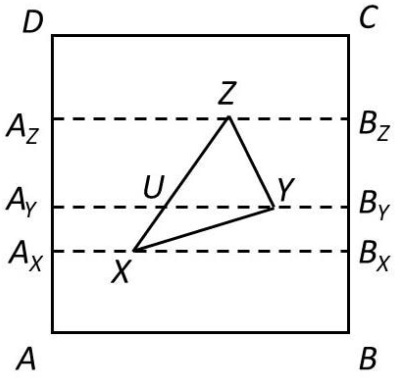


$$A_{XYZ} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{XY}| \cdot |\overline{AD}| \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$$

Wir betrachten nun die allgemeine Lage des Dreiecks XYZ. Seien die Eckpunkte des Dreiecks so bezeichnet, dass für die Abstände d_X, d_Y, d_Z der Punkte X, Y, Z von der Geraden AB gilt: $d_X \leq d_Y \leq d_Z$. Wir zeichnen die Parallelen p_X, p_Y, p_Z zur Gerade AB durch die Eckpunkte des Dreiecks XYZ. Die Schnittpunkte der Geraden p_X, p_Y, p_Z mit den Geraden AD bzw. BC bezeichnen wir mit A_X, A_Y, A_Z bzw. mit B_X, B_Y, B_Z.

[3] o.B.d.A. – ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Diese Bemerkung kann z.B. stets ohne weitere Erläuterungen verwendet werden, wenn die beschriebene Situation durch eine geeignete Bezeichnung erreicht werden kann.

Das Dreieck XYZ liegt somit vollständig im Rechteck $A_XB_XB_ZA_Z$, welches seinerseits vollständig im Quadrat $ABCD$ liegt (einschließlich der Gleichheit von Rechteck und Quadrat), insbesondere gilt für die Flächeninhalte $A_{A_XB_XB_ZA_Z} \leq A_{ABCD}$. Fallen zwei der drei Parallelen p_X, p_Y, p_Z zusammen, dann folgt die Behauptung direkt aus dem Hilfssatz.



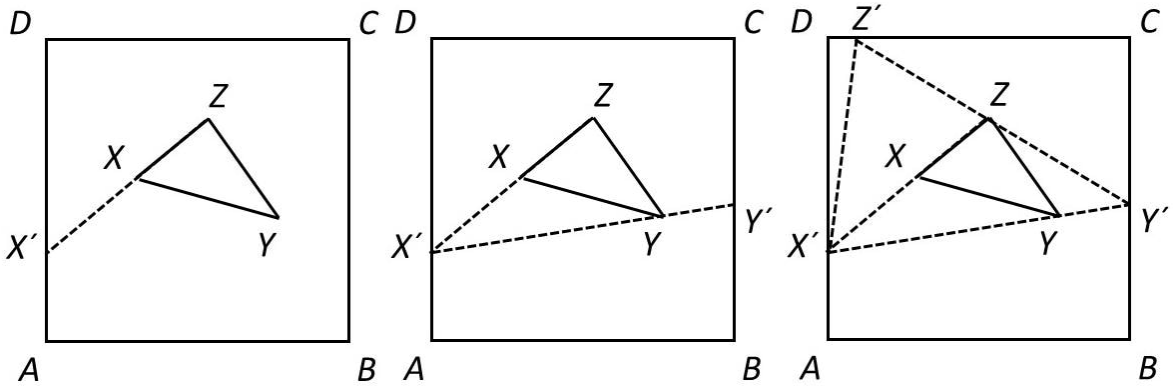
Sind die drei Parallelen p_X, p_Y, p_Z paarweise verschieden (d.h. es gilt $d_X < d_Y < d_Z$), dann schneidet die Gerade p_Y die Seite $\overline{XZ}$ des Dreiecks XYZ im Punkt U und teilt es in genau zwei Teildreiecke XYU und UYZ, wobei das Dreieck XYU ganz im Rechteck $A_XB_XB_YA_Y$ und das Dreieck UYZ ganz im Rechteck $A_YB_YB_ZA_Z$ liegt. Für die beiden Teildreiecke folgt mit dem Hilfssatz

$$A_{XYU} \leq \frac{1}{2} \cdot A_{A_XB_XB_YA_Y} \quad \text{bzw.} \quad A_{UYZ} \leq \frac{1}{2} \cdot A_{A_YB_YB_ZA_Z}$$

Zusammengefasst erhalten wir wegen $A_{XYZ} = A_{XYU} + A_{UYZ}$, dass der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ den halben Flächeninhalt des Rechtecks $A_XB_XB_ZA_Z$, nicht überschreitet, und damit gilt erst recht $A_{XYZ} \leq A_{ABCD}$, also die Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Das Dreieck XYZ liege im Quadrat $ABCD$. Liegt der Punkt X auf dem Rand von $ABCD$, so benennen wir ihn aus formalen Gründen um in X‘. Liegt der Punkt X im Innern von $ABCD$, so hat der Strahl von Z über X hinaus einen Schnittpunkt mit dem Rand von $ABCD$, den wir X‘ nennen. Wir betrachten nun das Dreieck $X'YZ$. Es hat einen größeren Flächeninhalt als das Dreieck XYZ, weil die Höhe auf XZ unverändert blieb und $\left|\overline{X'Z}\right| \leq |\overline{XZ}|$ gilt. In Analogie setzen wir dieses Verfahren fort und vergrößern die Dreiecke über Y‘ und Z‘, so dass die Eckpunkte X‘, Y‘ und Z‘ auf dem Rand von $ABCD$ liegen. Für die Flächeninhalte gilt

$$A_{XYZ} \leq A_{X'YZ} \leq A_{X'Y'Z} \leq A_{X'Y'Z'}.$$

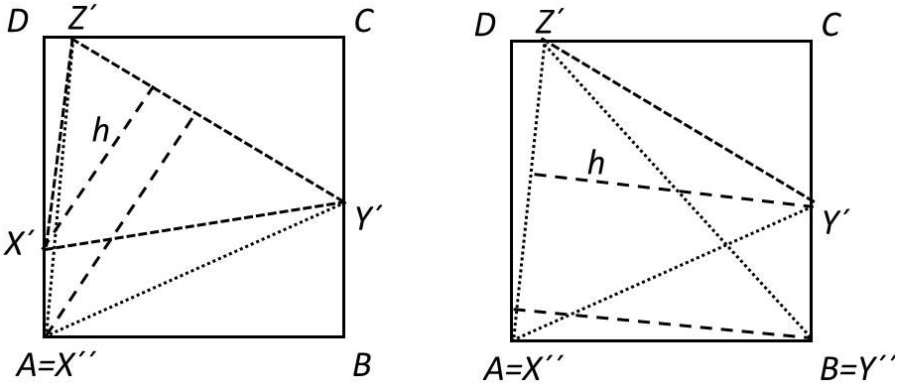


Im Weiteren unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: Zwei der drei Punkte liegen auf einer gemeinsamen Quadratseite. O.B.d.A. seien dies die Punkte X’ und Y ’, die beide auf der Seite AB liegen. Dann gilt für die

Grundseite $\overline{X'Y'}$ des Dreiecks $\left|\overline{X'Y'}\right| \leq |\overline{AB}|$ und ebenso für die entsprechende Höhe $h_{Z'} \leq |\overline{AB}|$ und damit $A_{X'Y'Z'} \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|^2 = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$, also die Behauptung.

Fall 2: Keine zwei Punkte liegen auf einer gemeinsamen Seite des Quadrates. O.B.d.A. seien die Punkte des Quadrates und des Dreiecks $X'Y'Z'$so benannt, dass X' auf $\overline{AD}$, Y' auf $\overline{BC}$ und Z' auf $\overline{CD}$ liegen. Ist h die Höhe des Dreiecks auf $Y'Z'$, so ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks am größten, wenn h maximal ist. Dies wird mit $X'' = A$ erreicht. Dann gilt: $A_{X'Y'Z'} \leq A_{AY'Z'}$. Betrachten wir nun das Dreieck $AY'Z'$. Ist nun h die Höhe dieses Dreiecks auf AZ', so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AY'Z'$ am größten, wenn h maximal ist. Dies wird mit $Y'' = B$ erreicht. Dann gilt: $A_{AY'Z'} \leq A_{ABZ'}$.



Das Dreieck ABZ' hat die Grundseite $\overline{AB}$ und die Höhe der Länge $|\overline{AD}|$, also finden wir insgesamt

$$A_{X'Y'Z'} \leq A_{ABZ'} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \,.$$

❑

Diese Fragestellung hatte einen sehr ähnlich klingenden Vorläufer.

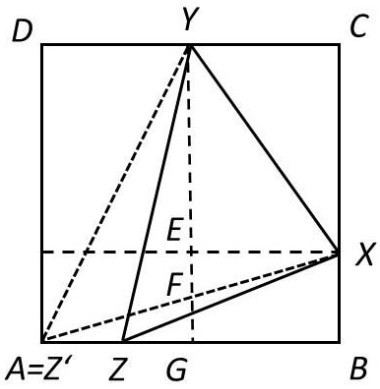
Aufgabe 19.02 – MO401016. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, dessen Ecken auf dem Rand dieses Quadrates liegen, einen Flächeninhalt hat, der höchstens 8 cm² beträgt.

Lösungshinweise: Es sei $ABCD$ das Quadrat und XYZ ein einbeschriebenes Dreieck. O.B.d.A. liegt X auf $\overline{BC}$ und Y auf $\overline{CD}$. Liegt Z ebenfalls auf $\overline{BC}$, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks A_{XYZ}:

$$A_{XYZ} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{XZ}| \cdot |\overline{CY}| \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{CD}| = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$

In ähnlicher Weise überzeugen wir uns von der Richtigkeit der Behauptung, wenn Z auf $\overline{CD}$ liegt.

Untersuchen wir nun den Fall, dass Z auf $\overline{AB}$ liegt.



Ist h die Höhe des Dreiecks auf XY, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ am größten, wenn h maximal ist. Dies wird mit $Z' = A$ erreicht. Dann gilt: $A_{XYZ} \leq A_{XYZ'}$. Die zu den Quadratseiten parallelen Geraden durch X und Y schneiden sich in E, die Parallele durch Y schneidet zusätzlich AX in F und AB in G. Dann finden wir für den Flächeninhalt:

$$A_{XYZ'} = A_{XYF} + A_{YZ'F} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot |\overline{EX}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot |\overline{AG}|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot (|\overline{AG}| + |\overline{EX}|) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot |\overline{AB}| \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{GY}| \cdot |\overline{AB}| = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$

Für den Fall Z auf AD trifft diese Argumentation analog zu. Damit ist insgesamt gezeigt, dass der Flächeninhalt des einbeschriebenen Dreiecks höchstens 8 cm² beträgt[4]. ❑

Diese Aufgabe diente als Vorbereitung für eine Aufgabe der Bundesrunde, in der ausdrücklich auf die Schulrunde Bezug genommen wurde.

Aufgabe 19.03 – MO400946/401046. Im Inneren eines Quadrates der Seitenlänge 12 cm seien 20 Punkte beliebig, aber so gewählt, dass keine drei auf derselben Geraden liegen. Beweisen Sie, dass es mindestens ein Dreieck gibt, dessen Ecken mit solchen Punkten übereinstimmen und dessen Flächeninhalt höchstens 8 cm² beträgt.

Lösungshinweise: Wir teilen das Quadrat, in dem die 20 Punkte verteilt sind in neun kongruente Quadrate der Seitenlänge 4 cm,

20 Objekte: beliebig gewählte Punkte
9 Schubfächer: Teilquadrate des Ausgangsquadrates

Wenden wir für die Zerlegung $20 = 2 \cdot 9 + 2$ das Schubfachprinzip[5] an, so liegen in mindestens einem dieser Teilquadrate 3 der 20 Punkte.

Wir müssen nun noch beweisen, dass jedes Dreieck in einem solchen Teilquadrat einen Flächeninhalt hat, der höchstens 8 cm² beträgt. Zeigen wir dafür zunächst, dass zu jedem Dreieck innerhalb des Quadrates ein flächenmäßig größeres Dreieck existiert, dessen Eckpunkte auf den Quadratseiten liegt (wie in Aufgabe MO620924), so können wir darauf den Beweis aus Aufgabe MO401016 übertragen. ❑

Sind die abzuschätzenden Figuren Dreiecke, lassen sie sich oft durch geeignete rechtwinklige Dreiecke flächenmäßig vergrößern.

[4] Es ist zulässig, in der Herleitung auf die Angabe der Maßeinheiten zu verzichten. Jedoch sollte der Schlusssatz wieder vollständig sein.
[5] siehe Beitrag über das Schubfachprinzip in diesem Heft.

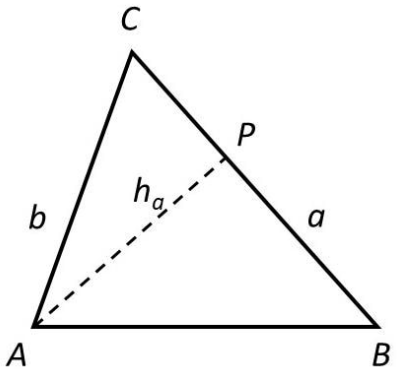
Aufgabe 19.04 – MO560924. Gegeben sind vier Stangen, die an ihren Enden durch Gelenke beweglich miteinander zu einem konvexen Viereck (einem Gelenkviereck) verbunden sind.

a) Bestimmen Sie den größten Flächeninhalt, den ein solches Gelenkviereck haben kann, wenn zwei seiner Stangen die Länge 6 und die beiden anderen die Länge 8 haben.
b) Beweisen Sie, dass im allgemeinen Fall der Flächeninhalt F des Vierecks die Ungleichung $F \leq \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}$ erfüllt. Hierbei bezeichnen a, b, c und d die Längen der Stangen (in dieser Reihenfolge).

Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn beide Diagonalen innerhalb des Vierecks liegen.

Lösungshinweise: Wir zeigen zunächst, dass für die Längen a und b die Längen zweier Seiten eines Dreiecks seinen Flächeninhalt stets $F \leq \frac{a \cdot b}{2}$ gilt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn diese Seiten senkrecht aufeinander stehen.

Beweis: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit den Seitenlängen $a = |\overline{BC}|$ und $b = |\overline{AC}|$ ergibt sich als Produkt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$, wobei h_a die Länge der Höhe $\overline{AP}$ auf der Geraden BC ist und P den Höhenfußpunkt bezeichnet. Da a vorgegeben ist, hängt der Flächeninhalt nur von h_a ab. Steht die Seite $\overline{AC}$ senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$, dann gilt $h_a = b$. Steht die Seite $\overline{AC}$ nicht senkrecht auf $\overline{BC}$, dann ist das Dreieck APC rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{AC}$ und es gilt $h_a < b$. Damit ist die Behauptung bewiesen.



Lösungshinweise zu Teil a) Für die Stangen im Viereck gibt es zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten: ihre Längen sind der Reihe nach gleich 6, 8, 6, 8 oder gleich 6, 6, 8, 8. Im ersten Fall erhalten wir ein Parallelogramm und im zweiten ein Drachenviereck.

Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke wird maximal, wenn sie rechtwinklige Dreiecke sind. Damit ist der Flächeninhalt des Parallelogramms maximal, wenn es ein Rechteck ist. Der maximale Flächeninhalt beträgt daher $6 \cdot 8 = 48$.

Der Flächeninhalt des Drachenvierecks ist dann am größten, wenn zwei aneinanderstoßende Seiten mit den Längen 6 und 8 einen rechten Winkel

einschließen. Dann zerlegt die Symmetrieachse das Drachenviereck in zwei Dreiecke, die beide rechtwinklig sind. Auch hier beträgt der maximale Flächeninhalt daher wieder $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$.

Lösungshinweise zu Teil b) Das Viereck wird durch eine Diagonale der Länge l in zwei Teildreiecke mit den Seitenlängen a, b, l bzw. c, d, l zerlegt. Der Flächeninhalt des Vierecks ist gleich der Summe der Inhalte dieser beiden Teildreiecke. Nach der einleitenden Bemerkung ist der Flächeninhalt jedes der beiden Teildreiecke höchstens gleich $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot c \cdot d$. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt F des Vierecks

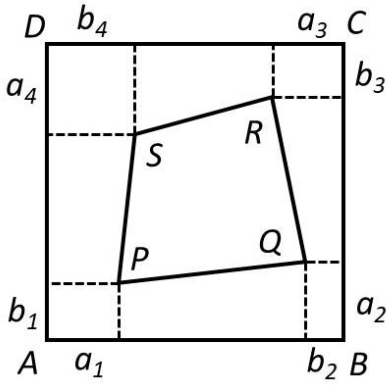
$$F \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}.$$

❑

In folgender Aufgabe wird demonstriert, wie aufgrund der Nebenbedingungen die Figur über Hilfsstrecken charakterisiert werden kann.

Aufgabe 19.05 – MO571046. Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 3. In seinem Inneren liegt ein Viereck $PQRS$ mit $|\overline{AP}| = |\overline{BQ}| = |\overline{CR}| = |\overline{DS}| = 1$.

‹Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ kleiner als 5 ist.



Lösungshinweise: Die Abstände der Punkte P, Q, R und S zu den jeweils nächstliegenden Quadratseiten seien wie in der Skizze mit $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4$ bezeichnet. Das Viereck $ABQP$ setzt sich aus zwei Dreiecken und einem Trapez zusammen, und die Anwendung bekannter Formeln ergibt unter Ausnutzung von $0 < a_1, a_2, b_1, b_2 < 1$:

$$A_{ABQP} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 \cdot b_1 + (b_1 + a_2) \cdot (3 - a_1 - b_2) + a_2 \cdot b_2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot (b_1 + a_2) - a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2)$$
$$> \frac{1}{2}(3 \cdot (b_1 + a_2) - a_2 - b_1) = b_1 + a_2 > b_1^2 + a_2^2$$

Durch Addition entsprechender Ungleichungen für die übrigen Quadratseiten ergibt sich

$$A_{ABCD} - A_{PQRS} = A_{ABQP} + A_{BCRQ} + A_{CDSR} + A_{DAPS}$$
$$> a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + a_4^2 + b_4^2$$

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt im Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AP}$ die Gleichung $a_1^2 + b_1^2 = |\overline{AP}|^2 = 1$ und entsprechend

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 = a_4^2 + b_4^2 = 1$$

womit sich die Ungleichung $A_{ABCD} - A_{PQRS} > 4$ ergibt. Wegen $A_{ABCD} = 9$, folgt die Behauptung der Aufgabenstellung. ❑

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil II)

In den 1980-er Jahren wurde eine Reihe von Konstruktionsaufgaben in der Mathematik-Olympiade begonnen, in der alle Aspekte dieses Aufgabentyps berücksichtigt wurden.

Aufgabe – MO261035. Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm und $s = 16.8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = |\overline{AB}|$ und $a = |\overline{BC}|$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

Aufgabe – MO301036. Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, dass c die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 60° hat.

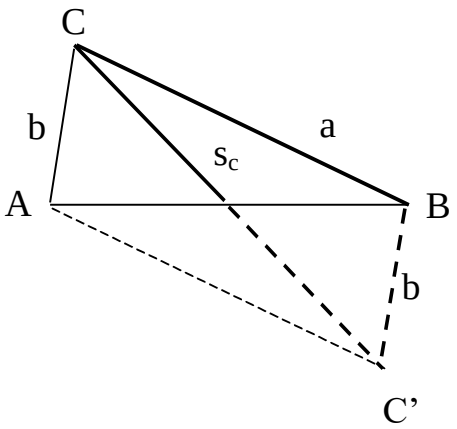
(a) Beweisen Sie, Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden;
(b) beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
(d) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

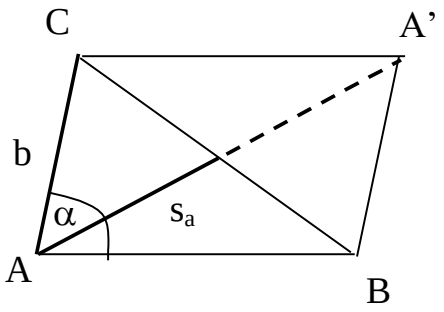
Die vier Schritte Analyse – Konstruktion – Beweis – Eindeutigkeit wurden also explizit als Aufgaben formuliert (der Nachweis der Existenz beschränkt sich hier auf die vorgegebenen Werte der Bestimmungsstücke). Bevor wir dazu Lösungshinweise diskutieren, beschränken wir uns weiter auf Bestimmungsstücke mit Seitenlängen, Winkelgrößen sowie Längen von Ecktransversalen[6] Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden und Höhen.

Sind Längen von Seitenhalbierenden gegeben, so führen oft die Verdopplung dieser Größen zu nützlichen Hilfsfiguren (Parallelogramme mit der doppelten Seitenhalbierenden als eine Diagonale), zum Beispiel bei

Aufgabe K3. (a, b, s_c)



Aufgabe K4. (b, s_a, α)



Wir erkennen mittels Analyse, dass in den durch Verlängerung der Seitenhalbierenden entstehenden Parallelogrammen die Dreiecke $CC'B$ bzw. $AA'C$ leicht konstruierbar sind. In Aufgabe K3 konstruieren wir das Hilfsdreieck aus den drei Seitenlängen a, b und $2 \cdot s_c$. Ergänzen wir dieses Dreieck zu einem Parallelogramm, finden wir den Punkt A. In Aufgabe K4 zeichnen wir zunächst eine Gerade g, auf der wir den Punkt A beliebig festlegen. Dann konstruieren wir in A den Winkel α und tragen auf dem Schenkel die Länge b ab und finden so den Punkt C. Konstruieren wir nun die Parallele zu g durch C und schlagen einen Kreisbogen um A mit dem Radius $2 \cdot s_a$. Dessen Schnittpunkt mit der Parallelen bezeichnen wir mit A'. Die Parallele zu AC durch A' schneidet g in B.

Für die Existenz müssen in Aufgabe K3 die Dreiecksungleichungen für die Seitenlängen $(a,\ b,\ 2 \cdot s_c)$ erfüllen. In Aufgabe K4 muss das Doppelte der Seitenhalbierenden mindestens so groß sein wie die Höhe auf AB im Dreieck ABA', d.h. es muss die Ungleichung $2 \cdot s_a \geq b \cdot \sin \alpha$ erfüllt sein.

Die Konstruktion ist in Aufgabe K3 eindeutig, weil die Lagebeziehung von a und b durch die Bezeichnung bereits vorgegeben ist. Mit gleicher Argumentation ist auch in

[6] Eine Ecktransversale (auch Cevane genannt) ist eine Gerade oder Strecke, die einen Eckpunkt eines Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite oder ihrer Verlängerung verbindet.

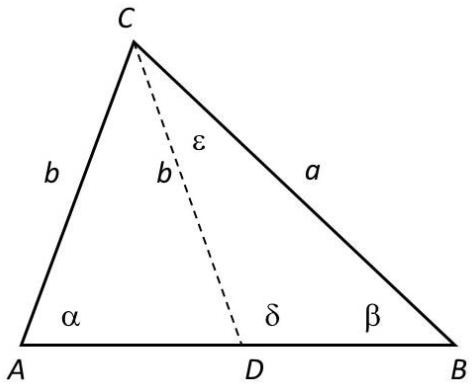
der Aufgabe K4 die Konstruktion für $\alpha \leq 90°$ eindeutig. Im Fall $\alpha > 90°$ ist die Konstruktion für $2 \cdot s_a > b$ eindeutig, andernfalls existieren zwei Lösungen, da der Kreisbogen um A mit der Parallelen zwei verschiedene Schnittpunkte rechts von B hat.

Allerdings ist für beide Aufgaben ein Beweis (oder ein geeigneter Hinweis in der Analyse) erforderlich: Wir müssen erläutern, dass die Hilfskonstruktionen der Punkte *C'* und *A'* tatsächlich zu Parallelogrammen führen und nicht nur anschaulich richtig sind. Dafür genügt die Anwendung des aus dem Unterricht bekannten Satzes:

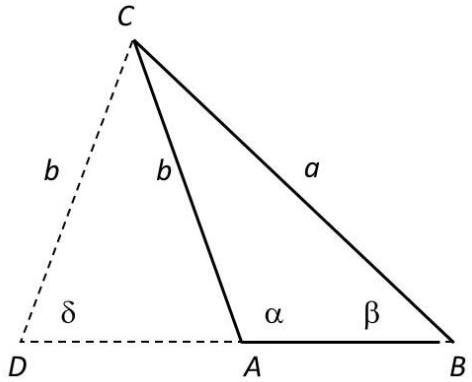
In einem Viereck halbieren sich die Diagonalen gegenseitig genau dann, wenn das Viereck ein Parallelogramm ist.

Einen besonderen Reiz in der Wettbewerbsmathematik bieten Konstruktionsaufgaben mit Summen und Differenzen in den Bestimmungsstücken. Wir dürfen dabei annehmen, dass die Differenzen stets nichtnegativ sind, auch wenn negative Winkelangaben beim Abtragen gegen den Uhrzeigersinn definiert sind. Dagegen sind negative Streckenlängen nicht anwendbar, da mit Strecken keine Richtungsangaben festgelegt sind.

Aufgabe K5. Man konstruiere ein Dreieck aus den Bestimmungsstücken a, b und der Differenz $\alpha - \beta$.



Lösungshinweise: Für die Analyse sei ABC das geforderte Dreieck (s. Skizze). Wegen $\alpha > \beta$ gilt auch $a > b$ (dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber). Wie nehmen zunächst $\alpha \leq 90°$ an. In diesem Fall liegt der Punkt D mit $|\overline{CD}| = b$ zwischen A und B. Im gleichschenkligen Dreieck ADC gilt $\sphericalangle CDA = \alpha$ und somit $\delta = 180° - \alpha$ (Nebenwinkel).



Im Fall $\alpha > 90°$ liegt der Punkt D mit $|\overline{CD}| = b$ links von A. Im gleichschenkligen Dreieck ADC gilt $\sphericalangle CAD = 180° - \alpha$ (Nebenwinkel) und somit $\delta = 180° - \alpha$ (Basiswinkel).

In beiden Fällen erhalten wir im Dreieck BCD die Innenwinkelsumme

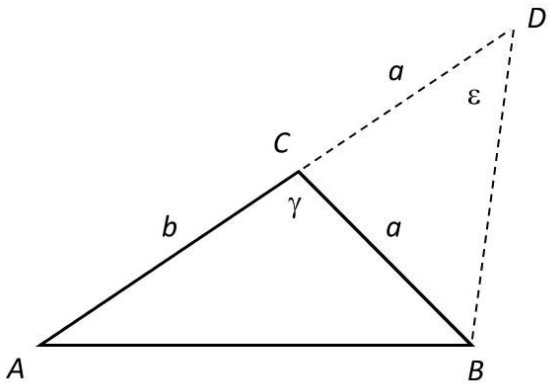
$$180° = \delta + \beta + \varepsilon = 180° - \alpha + \beta + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \alpha - \beta$$

Damit kennen wir vom Dreieck BCD die Seitenlängen a und b sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\varepsilon = \alpha - \beta$. Dieses Hilfsdreieck können wir nun ohne Schwierigkeiten konstruieren.

Wie in der Analyse erkennbar, existiert für $a > b$ stets eine Lösung, die zudem eindeutig ist. ❑

Aufgabe K6 – MO080932. Man konstruiere ein Dreieck aus der Winkelgröße γ, der Seitenlänge von c und der Summe $a + b$.

Lösungshinweise: Angenommen ABC sei das gesuchte Dreieck (s. Skizze). Verlängern wir die Seite $\overline{AC}$ über C hinaus um a zum Punkt D, so ist das Dreieck BCD gleichschenklig und für den Winkel ε bei D gilt als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck und wegen des Außenwinkelsatzes:

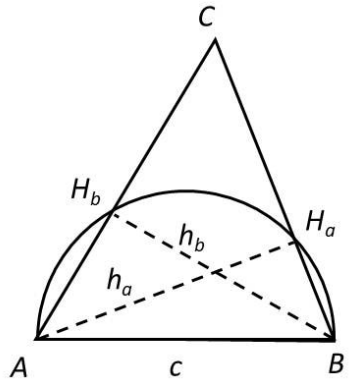


$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle BCD|) = \frac{1}{2} \cdot \gamma$$

Damit können wir das Hilfsdreieck ABD aus zwei gegebenen Seiten und einem anliegenden Winkel konstruieren. Tragen wir nun den Winkel ε an $\overline{BD}$ ab, finden wir den Punkt C. ❑

Aufgabe K7. Man konstruiere ein Dreieck aus der Seitenlänge von c und den Längen der Höhen h_a und h_b.

Lösungshinweise: Betrachten wir in der Analyse ein Dreieck ABC. Wie bezeichnen die Fußpunkte der Höhe h_a auf BC mit H_a bzw. der Höhe h_b auf AC mit H_b, so erkennen wir: Da die Dreiecke ABH_a und ABH_b rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse c sind, liegen die Punkte H_a und H_b nach Umkehrung des Satzes von THALES auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$.



Wir können also zunächst einen Halbkreis über c zeichnen. Ein Kreisbogen um A mit dem Radius h_a schneidet diesen Halbkreis in H_a, ein Kreisbogen um B mit dem Radius h_b schneidet diesen Halbkreis in H_b. Gilt $h_a^2 + h_b^2 > c^2$, so liegen die Punkte H_a und H_b in der Reihenfolge wie in der Skizze dargestellt. Zudem müssen die Fälle noch diskutiert werden, wenn die Punkte H_a oder H_b auf dem unteren Halbkreis unter c gewählt werden.

(wird fortgesetzt)

DIRICHLETsches Schubfachprinzip (Teil I)

Das DIRICHLETsche Schubfachprinzip (engl. pigeon-hole principle) wurde zuerst von PETER GUSTAV DIRICHLET (1805 – 1859) explizit formuliert:

Werden $n \cdot k + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als k Objekte.

So einfach dieses Prinzip auch erscheinen mag, es wird dennoch von Schülern nur selten vollständig zur Beweisführung bei Olympiade- und KZM-Aufgaben genutzt. Dabei ist seine Anwendungsvielfalt enorm, man muss „nur" die geeigneten Objekte und Schubfächer definieren können, was sich aber durchaus als schwierig erweisen kann. Häufig sind Aufgabenstellungen des Typs *„Man zeige: Bei beliebiger Anordnung ... gibt es mindestens ..."* mit dem Schubfachprinzip lösbar, insbesondere dann, wenn eine vollständige Fallunterscheidung für die „beliebigen Anordnungen" nicht möglich oder nur sehr komplex erscheint. So auch in folgender Aufgabe.

Aufgabe – MO570935[7]. In einem Verkehrsverbund in Bayern gibt es zwischen je zwei Städten eine Busverbindung in beiden Richtungen oder eine Zugverbindung in beiden Richtungen (möglicherweise auch beides).

a) Zeigen Sie, dass es zu je sechs Städten immer mindestens eine Rundreise durch drei dieser Städte gibt, die sich mit nur einem Verkehrsmittel durchführen lässt.
b) Zeigen Sie, dass es zu fünf Städten nicht notwendigerweise eine Rundreise wie in a) gibt.

Lösungshinweise Teil a): Eine der betrachteten Städte bezeichnen wir mit A. Wir definieren

5 Objekte: 5 weitere Städte,
2 Schubfächer: Verbindungen mit Bus oder Zug,

Nach dem Schubfachprinzip gibt es unter Beachtung der Zerlegung $5 = 2 \cdot 2 + 1$ mindestens drei Städte, die von der Stadt A aus mit dem gleichen Verkehrsmittel erreichbar sind; drei solche Städte bezeichnen wir mit B, C und D. Verbindet dieses Verkehrsmittel auch zwei dieser drei Städte untereinander, dann gibt es eine Rundreise durch A und diese zwei Städte. Andernfalls gibt es eine Rundreise mit dem anderen Verkehrsmittel durch B, C und D.

Lösungshinweise Teil b) Wir stellen uns die Städte in einem Fünfeck angeordnet vor. Auf dem Umfang des Fünfecks liegt eine Bahnstrecke, jede Stadt ist durch eine Zugverbindung mit ihren beiden Nachbarstädten verbunden. Auf den Diagonalen des

[7] In Aufgabe **MO571035** wurde noch Teil c) ergänzt: Zeigen Sie, dass es zu je sechs Städten immer mindestens zwei verschiedene Rundreisen durch je drei Städte gibt, die sich jeweils mit nur einem Verkehrsmittel durchführen lassen. Dabei dürfen die beiden Rundreisen verschiedene oder gleiche Verkehrsmittel benutzen. Zwei Rundreisen gelten dann als verschieden, wenn sie nicht dieselben drei Städte besuchen.

Fünfecks liegen Straßen, zwischen den Enden jeder Diagonalen besteht eine Busverbindung. Dann gibt es keine Rundreisen durch drei Städte mit nur einem Verkehrsmittel:

Fall 1. Wir betrachten drei aufeinanderfolgend benachbarte Eckpunkte (Städte). Sie sind nacheinander durch Zugverbindungen erreichbar, aber der Rundweg (zurück zum Ausgangspunkt) kann nur durch eine Busverbindung (Diagonale) geschlossen werden.

Fall 2. Wir betrachten drei Eckpunkte (Städte), die nicht aufeinanderfolgend benachbart sind. Dann sind aber von diesen 2 Eckpunkte benachbart, zwischen denen nur eine Zugverbindung besteht. Zum dritten dieser Eckpunkte führen aber nur Busverbindungen (über Diagonalen). ❑

Aufgabe. Jede natürliche Zahl n hat ein Vielfaches der Form 1111...1100...0000.

Lösungshinweise: Wir definieren

$n+1$ *Objekte:* paarweise verschiedene Zahlen $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots111}_{n+1}$

n *Schubfächer:* Reste $0, 1, \ldots, n-1$ bei Division durch n

In mindestens einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch n) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (Zahlen der Form 111...11). Die Differenz dieser zwei Zahlen hat die geforderte Form und ist durch n teilbar ist. ❑

Aufgabe – MO361045. Beweisen Sie, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl z gibt, die im dekadischen System unter (gegebenenfalls mehrfacher) Verwendung von genau zwei verschiedenen Ziffern geschrieben wird und durch n teilbar ist!

Lösungshinweise: Wir können die Lösung der vorhergehenden Aufgabe übernehmen und sogar statt der Ziffer 1 eine beliebige Ziffer $a \neq 0$ wählen. ❑

Aufgabe. Gegeben seien 100 beliebige natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Man zeige, dass man aus diesen stets eine Auswahl treffen kann, sodass deren Summe durch 100 teilbar ist!

Lösungshinweise: Wir definieren

100 Objekte: Summen S_n der jeweils ersten n $(n = 1, \ldots, 100)$ Zahlen, also
$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$

99 Schubfächer: Reste 1 bis 99 bei Division durch 100.

Ist einer der Summen $S_1, \dots, S_{100}$ bereits durch 100 teilbar, ist nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen also an, dass die 100 Summen alle nicht durch 100 teilbar sind In mindestens einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 100) befinden sich dann nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (Summen S_m und S_n mit $m > n$). Die Differenz $S_m - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_m$ ist eine Summe der geforderten Art und durch 100 teilbar. ❑

Aufgabe – MO440942/MO441042. Die Menge M bestehe aus 15 verschiedenen natürlichen Zahlen, die alle größer als Null und kleiner als 2005 sind. Zeigen Sie, dass es stets möglich ist, aus einer solchen Menge zwei teilerfremde nicht leere Teilmengen so auszuwählen, dass die Summe der Elemente der einen Menge gleich der Summe der Elemente der anderen ist.

Lösungshinweise: Für die Summe S der 15 Zahlen gilt

$$S \leq 2004 + 2003 + 2002 + \cdots + 1990 = 29955.$$

Die Menge M hat $2^{15} - 1 = 32767$ nicht leere Teilmengen. Für jede dieser Teilmengen gilt ebenfalls, dass die Summe ihrer Elemente nicht größer als 29955 ist. Deshalb können wir

32767 Objekte: nichtleere Teilmengen der Menge M
29955 Schubladen: Mögliche Summen der Elemente der Teilmengen von M

In mindestens einem Schubfach (Summen der Teilmengen von M) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (Teilmengen von M). Diese zwei Mengen seien T_1 und T_2. Dabei kann keine dieser Mengen eine Teilmenge der anderen Menge sein, denn wären beispielsweise alle Elemente von T_1 auch Elemente von T_2, so müsste mindestens eine weitere Zahl in T_2 enthalten sein. Da aber die Null nicht zu M gehört, wäre die Summe der Elemente von T_2 größer als die Summe der Elemente von T_1. Somit sind die Teilmengen $T_1/T_1 \cap T_2$ und $T_2/T_1 \cap T_2$ (d.h. aus den beiden Mengen T_1 und T_2 wurden die gemeinsamen Elemente gestrichen) nichtleere teilerfremde Mengen, für die die Summe der Elemente der einen Menge gleich der Summe der Elemente der anderen ist. ❑

Aufgabe – MO430942. Beweisen Sie: Aus jeder Menge M von 1003 positiven ganzen Zahlen, die alle kleiner als 2004 und paarweise verschieden sind, können stets zwei Zahlen ausgewählt werden, deren Summe in M liegt.

Lösungshinweise: Es sei $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{1003}\}$ eine Menge positiver ganzer Zahlen mit $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{1003} < 2004$. Wir bilden aus diesen Zahlen die 1002 Differenzen $d_2 = a_2 - a_1$, $d_3 = a_3 - a_1$, …, $d_{1003} = a_{1003} - a_1$, für die ebenfalls $0 < d_2 < d_3 < \cdots < d_{1003} < 2004$ gilt. Nun können wir definieren

2004 Objekte: die Zahlen $a_2, \dots, a_{1003}$ und $d_2, \dots, d_{1003}$.
2003 Schubfächer: ganze Zahlen von 1 bis 2003.

In mindestens einem Schubfach (Zahlen 1 bis 2003) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (aus $a_2, \dots, a_{1003}$,$d_2, \dots, d_{1003}$.). Diese zwei Objekte sind folglich gleich groß. Weil sowohl die a_i als auch die d_i jeweils paarweise verschieden sind, gibt es ein Paar (a_m, d_n) mit $d_n = a_m$. Wegen $d_n = a_n - a_1$ liegt die Summe $a_m + a_1 = a_n$ in M. ❑

Aufgabe – MO431042. Man bestimme die größte natürliche Zahl N, für die folgende Aussage gilt: Aus jeder Menge M von 2004 positiven ganzen Zahlen, die alle kleiner als N und paarweise verschieden sind, können stets zwei Zahlen ausgewählt werden, deren Summe in M liegt.

Lösungshinweise: Die größte natürliche Zahl dieser Art ist $N = 4006$.

Beweis Teil I: Für $N > 4006$ können wir die Menge $M = \{2003, 2004, \dots, 4006\}$ der Zahlen 2003 bis 4006 wählen. Für je zwei verschiedene Zahlen aus M ist ihre Summe größer als $2003 + 2003 = 4006$ und liegt folglich nicht in M. Deshalb gilt $N \leq 4006$.

Beweis Teil II: Es sei $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{2004}\}$ eine Menge positiver ganzer Zahlen mit $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2004} < 4006$. Wir bilden aus diesen Zahlen die 2003 Differenzen $d_2 = a_2 - a_1$, $d_3 = a_3 - a_1$, …, $d_{2004} = a_{2004} - a_1$, für die ebenfalls $0 < d_2 < d_3 < \cdots < d_{2004} < 4006$ gilt. Nun können wir definieren

4006 Objekte: die Zahlen $a_2, \dots, a_{2004}$ und $d_2, \dots, d_{2004}$.
4005 Schubfächer: ganze Zahlen von 1 bis 4005.

In mindestens einem Schubfach (Zahlen 1 bis 4006) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (aus $a_2, \dots, a_{2004}$,$d_2, \dots, d_{2004}$.). Diese zwei Objekte sind folglich gleich groß. Weil sowohl die a_i als auch die d_i jeweils paarweise verschieden sind, gibt es ein Paar (a_m, d_n) mit $d_n = a_m$. Wegen $d_n = a_n - a_1$ liegt die Summe $a_m + a_1 = a_n$ in M. Also gilt $N \geq 4006$.

Zusammenfassend erhalten wir aus Teil I und Teil II die Aussage $N = 4006$. ❑

Aufgabe. Man zeige: Wählt man aus den natürlichen Zahlen 1 bis 200 auf beliebige Weise 101 Zahlen aus, so sind unter diesen wenigstens zwei Zahlen, von denen die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Lösungshinweise: Wir definieren

101 Objekte: die jeweils größten ungeradzahligen Teiler der ausgewählten 101 Zahlen
100 Schubfächer: alle ungeraden Zahlen von 1 bis 199

In mindestens einem Schubfach (ungerade Zahlen) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei verschiedene Objekte (größte ungerade Teiler). Diese zwei Objekte haben folglich den gleichen größten ungeraden Teiler, haben also die Form $2^m \cdot t$ und $2^n \cdot t$ mit $m > n$. Also gilt $2^m \cdot t = 2^{m-n} \cdot (2^n \cdot t)$ wie gefordert. ❑

Diese Fragestellung wurde in einer MO-Aufgabe umschrieben:

Aufgabe – MO370943/MO371043. Andreas experimentiert mit einem Computerprogramm. Das Programm wählt aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 zufällig 101 Zahlen aus und sucht unter diesen nach einem Zahlenpaar, für welche die eine Zahl Teiler der anderen ist. Stets erfolgt die Ausgabe eines solchen Zahlenpaares. Andreas wundert sich darüber.

Birgit behauptet, dass es immer ein solches Zahlenpaar gibt. Das könne sie auch ohne Computerprogramm beweisen, z.B. unter geschickter Verwendung der Tatsache, dass es unter den Zahlen ja nur 100 gerade Zahlen gibt. Welchen Beweis könnte Brigitte für ihre Behauptung führen?

Aufgabe. Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen stets 15 derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist?

Lösungshinweise: Wir definieren

> *100 Objekte:* 100 beliebige Zahlen
> *7 Schubfächer:* Reste $0, 1, \ldots, n - 1$ bei Division durch n

In mindestens einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 7) müssen wegen $14 \cdot 7 = 98 < 100$ mehr als 14 Objekte (Zahlen) enthalten sein. Diese Zahlen lassen bei Division durch 7 jeweils den gleichen Rest, sodass deren paarweisen Differenzen stets durch 7 teilbar sind. ❑

Aufgabe. Gegeben sei ein 3×3-Quadrat. Auf jedem Feld steht eine der Zahlen -1, 0 oder 1. Man zeige, dass unter den Zeilen-, Spalten und Diagonalensummen mindestens zwei denselben Wert haben.

Lösungshinweise: Die möglichen Summen aus drei dieser Zahlen betragen $-3, \ldots, 3$, es gibt also

> *8 Objekte:* 3 Zeilen-, 3 Spalten und 2 Diagonalensummen
> *7 Schubfächer:* mögliche Summen aus drei der Zahlen -1, 0 oder 1.

Folglich gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte in einem dieser Schubfächer. Diese haben dieselbe Summe. ❑

Aufgabe. Wir wählen beliebige $n+1$ Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Man zeige:

a) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, welche keinen gemeinsamen Teiler (größer als 1) haben.
b) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, sodass eine der Zahlen die andere teilt.

Lösungshinweise zu Teil a) Zwei Zahlen, die sich um eins unterscheiden, sind relativ prim zueinander. Wir betrachten

$n+1$ *Objekte:* ausgewählte Zahlen,
n *Schubfächer:* Zahlenpaare $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$.

Von den $n+1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) befinden sich mindestens zwei in einem der Schubfächer.

Lösungshinweise zu Teil b) Man schreibe die Zahlen in der Form $2^k \cdot u$, wobei k größtmöglich und u somit ungerade ist. Der Faktor u kann nur Werte zwischen 1 und $2n-1$ annehmen, also können wir definieren

$n+1$ *Objekte:* ausgewählte Zahlen,
n *Schubfächer:* alle ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.

Zwei der $n+1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) haben also denselben ungeraden Anteil und erfüllen somit die Bedingung. ❑

Aufgabe (IMO 1972). Aus einer Menge S von 10 höchstens zweistelligen verschiedenen Zahlen lassen sich immer zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 auswählen, deren Summe gleich ist.

Lösungshinweise: Es gibt $2^{10}-1 = 1024 > 1000$ Möglichkeiten (Objekte), eine nichtleere Teilmenge aus 10 Zahlen zu wählen, aber nur $99 + 98 + \dots + 90 < 1000$ verschiedene Summen (Schubfächer) aus nicht mehr als 10 zweistelligen Zahlen. Somit kommt mindestens eine Summe zweimal vor. Entfernen der Summanden, die in beiden Summen vorkommen, liefert die disjunkten Teilmengen. ❑

(wird fortgesetzt)

Bundeswettbewerb Mathematik 2023

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz

und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung e.V. von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Als Projekt von Bildung & Begabung steht der Bundeswettbewerb Mathematik unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen ihn und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs 2021 war die LEPPER Stiftung.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In *zwei Hausaufgabenrunden* werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.

In der dritten Runde, dem *Kolloquium*, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt.“

Die Teilnehmerzahlen[8] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Jahr 2021/22).

[8] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2019/20	1177	417 (35.4%)	55 (4.7%)	30 (54.5%)
2020/21	1182	366 (31.0%)	45 (3.8%)	17 (37.8%)
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2021/22 in Sachsen wieder weit über dem Durchschnitt!

Unter den 66 sächsischen Teilnehmern wurden 7 erste, 5 zweite und 18 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (45.5%, bundesweit 30.5%). Dazu kamen noch 29 Anerkennungsurkunden (43.9%, bundesweit 52.4%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 30 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2019/20	277	99 (35.7%)	10 (3.6%)	4 (40.0%)
2020/21	193	57 (29.5%)	9 (4.7%)	3 (33.3%)
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2021/22 wurden insgesamt 113 Preise vergeben (43.1% aller Teilnehmer), darunter 1 erster, 1 zweiter und 3 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (29.4% aller sächsischen Teilnehmer, darunter 2 Starter aus den Klassenstufen 9/10).

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2023 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. Specht, E. Quaisser und P. Bauermann herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In einem Projekt der Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg werden historische Schriften des 16. bis 18. Jahrhundert digitalisiert und für die Öffentlichkeit zugänglich gezeigt. Das 288-seitige Buch von JOHANN NICOLAUS MÜLLER[9] bietet unter

https://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18/content/titleinfo/11428278

interessante Einblicke in Geometrie des 18. Jahrhunderts. Bezugnehmend zum Beitrag „Geometrische Konstruktionen“ wurde folgender Auszug ausgewählt. Dabei wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Berthold Mainzer Fraktur genommen. Wie hier geschrieben finden wir auch im Original für die Bezeichnungen von Punkten und Strecken bzw. Bögen eine „geradlinigen“ Schrift.

Dr. Johann Nicolauſ Müller.

Anweiſung zur Geometrie für Anfänger.
Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1790.

(Seiten 152 – 154)

Ein und dreyſigſtes Capitel

Dreyecke zu zeichnen

§. 118. I.

Bißher haben wir allerley krumme Linien und krummlinichten Figuren zeichnen lernen. Jetzt wollen wir auch mit den geradlinichten Figuren den Anfang machen, worunter die Dreyecke zuerſt folgen ſollen.

(Fig. 126) Erſtens auf eine gegebene gerade Linie a b, ein gleichſeitiges Dreyeck zu ſetzen, verfahret ſo:

[9] JOHANN NICOLAUS MÜLLER (geb. 1754 in Zweibrücken – gest. 1797 in Göttingen), Theologe, Mathematiker, Physiker, Privatlehrer in Göttingen.

Nehmet die gerade Linie a b in den Zirkel, und beschreibet mit dieser Oefnung des Zirkels, aus den Endpuncten, a und b oberhalb von a b zween Bogen, die sich in c schneiden:

Hierauf ziehet auf dem Durchschnittspunct c, nach den Endpuncten, a und b, die geraden Linien, c a und c b; so wird auf die Weise das gleichseitige Dreyeck gezeichnet seyn.

(Fig. 127) Zweitens aus zwo gegebenen geraden Linien, a b und c d, wovon die eine c d allemal größer ist, als die Hälfte von der andern a b, ein gleichschenklichtes Dreyeck zu machen:

Dieses kann auf folgende Weise gemacht werden:

Ziehet eine gerade Linie a b just so lang wie die gegebene a b:

Fasset alsdann die gerade Linie c d in den Zirkel, und beschreibet auf den Puncten, a und b, mit der Weite c d, aufwärts zween Bogen, die sich in c schneiden:

Ziehet hierauf, aus a und b, nach dem Durchschnittspunct c, die geraden Linien, a c und b c; so wird das Dreieck a b c gleichschenklicht seyn.

(Fig. 128) Drittens aus drey gegebenen geraden Linien, a b, c d, e f, davon immer zwo und zwo, welche man auch zusammen nehmen will, größer sind, als die noch übrige dritte, läßt sich auf folgende Weise ein Dreyeck machen:

Ziehet eine gerade Linie a b eben so lang wie die gegebene a b:

Nehmet hierauf die gegebene c d in den Zirkel, und beschreibet aus dem Punct a, aufwärts einen Bogen:

Ferner nehmet auch die e f in den Zirkel, und machet mit dieser Weite, aus b einen andern Bogen aufwärts, welcher den ersten, in dem Punct c durchschneidet:

Auf dem Durchschnittspunct c, ziehet nach den Endpuncten, a und b, die geraden Linien, c a und c b; so werden sie das ungleichseitige Dreyeck a b c bilden, welches man verlangt hat.

§. 119. II.

(Fig. 129) Viertens aus zwo gegebenen geraden Linien, a b und c d, und einem gegebenen Winkel e f g ein Dreyeck zu zeichnen; das kann so geschehen:

Ziehet eine gerade Linie a b eben so lang, wie die gegebene a b;

Setzet den Zirkel mit der einen Spitze in den Scheitelpunct f des Winkels e f g, öfnet die andere auf dem Schenkel f g, ohngefähr bis in h, und beschreibet mit der Weite f h auf f, zwischen den Schenkeln, f g und f e, den Bogen h i:

Mit eben der Weite f h, bringet den Zirkel in den Punct b, und machet aus b, über b a den Bogen m q ziemlich groß:

Hierauf fasset die Weite i h in den Zirkel, und machet mit dieser Oefnung des Zirkels, auf m in dem Bogen m q, einen Durchschnitt in n; so wird der Bogen m n so groß seyn, wie der Bogen i h:

Ziehet ferner durch die Puncte, b und n, die gerade Linie b c, eben so lang wie die gegebenen c d; So wird der Winkel a b c, oder m b n, dem Winkel e f g, gleich seyn;

Endlich ziehet von a nach dem Endpunct c, die gerade Linie a c; so wird das Dreyeck a b c, aus den zwo geraden Linien, a b und c d, und dem gegebenen Winkel e f g, gezeichnet sein.

(Fig. 130) Fünftens aus einer gegebenen Seite oder Linie a b, und aus zween gegebenen Winkeln, d c e und f g h, ein Dreyeck a b c zu machen: dieses läßt sich auf die Weise verrichten:

Mit einerley beliebigen Oefnung des Zirkels, beſchreibet auf den Scheitelpuncten, c und g, der Winkel d c e und f g h, die Bogen p q und m n:

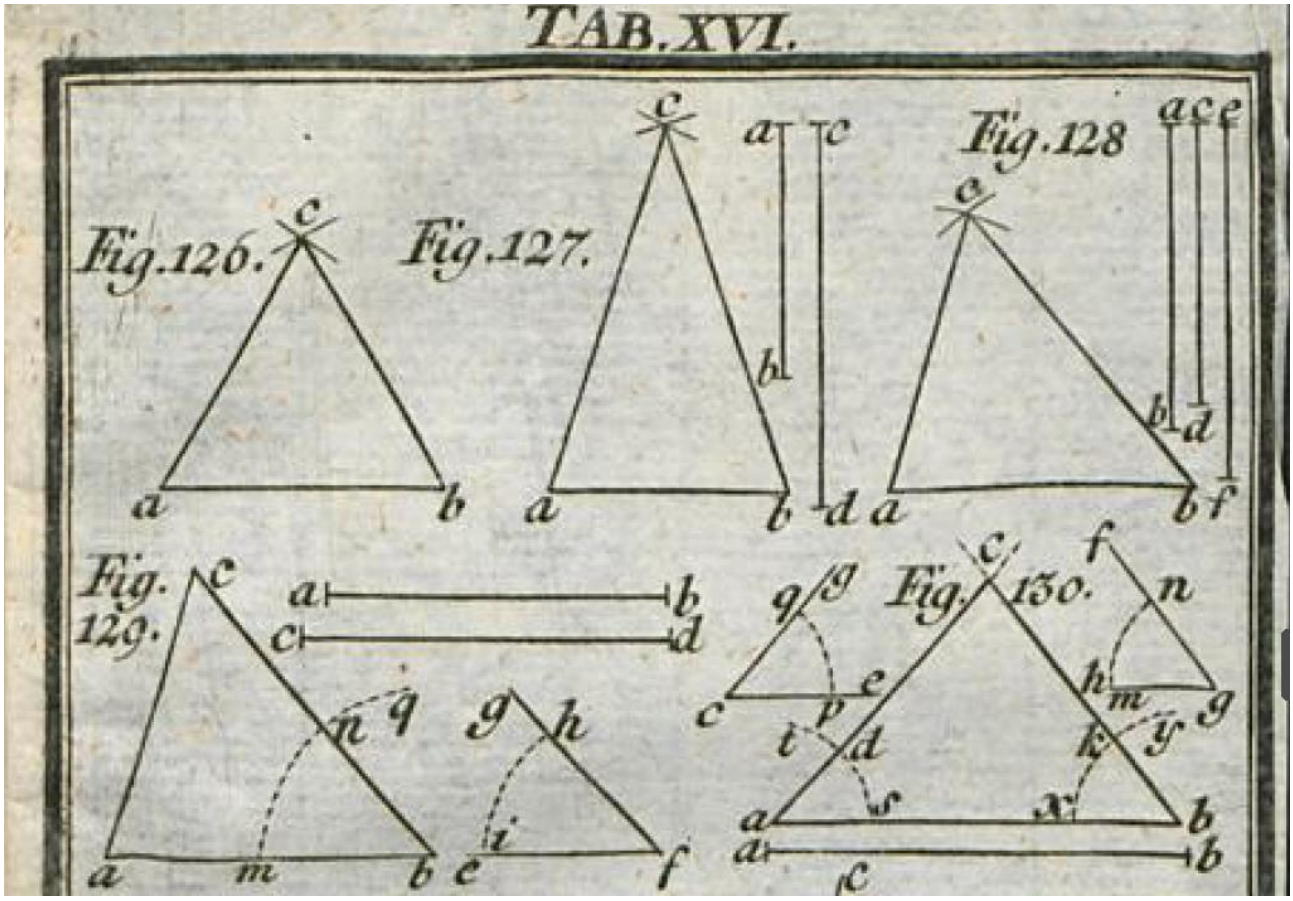
Jetzt ziehet eine gerade Linie a b ſo lang, wie die gegebene a b:

Mit der nämlichen Oefnung des Zirkels, womit ihr die Bogen, p q und m n, in den Winkeln, d c e, f g h, beſchrieben habt, beſchreibet jetzt auch aus den Eckpunkten, a und b, über a b, die Bogen, s t und x y:

Hierauf bringet die eine Zirkelſpitze in den Punct m, öfnet die andere bis in den Punct n, und machet mit der Weite m n, aus x, in dem Bogen x y, bey k einen Durchſchnitt:

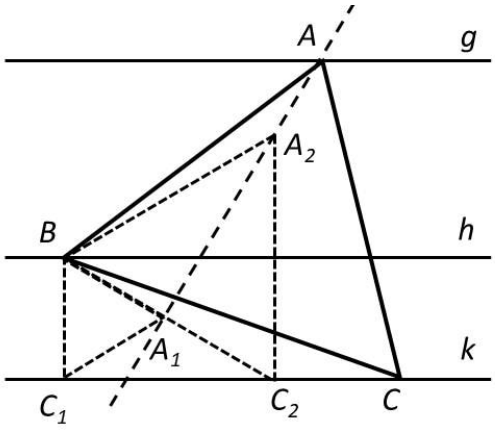
Eben ſo faſſet auch die Weite p q in den Zirkel, und machet mit der Entfernung p q, aus dem Punct s, in dem Bogen s t, bey o einen Durchſchnitt:

Ferner ziehet auf den Endpuncten, a und b, und durch die Durchſchnittspuncte, o und k, die geraden Linien a o c und b k c. die einander in dem Punct c ſchneiden; ſo wird das Dreyeck fertig ſein.



Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 10/22

Gegeben seien in der Ebene drei parallele Geraden g, h und k. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$.



Lösungshinweise: Wir nehmen an, die drei parallelen Geraden liegen in der Ebene vor. Dabei liege h zwischen g und k. Wir wollen die Versuch-und-Irrtum-Methode anwenden, d.h. wir konstruieren Beispiele von gleichseitigen Dreiecken, bei denen $B \in h$ und $C \in k$ erfüllt wird. Im Allgemeinen ist vor der Verwendung von Spezialfällen zu warnen, weil möglicherweise Zusammenhänge sichtbar, die sich nicht verallgemeinern lassen. Wir wollen dennoch einfachheitshalber folgende zwei gleichseitige Dreiecke konstruieren:

a) A_1BC_1: $\overline{BC_1} \perp h$,
b) A_2BC_2: $\overline{A_2C_2} \perp h$.

Für die Seitenlängen beider Dreiecke gilt

$$|\overline{BC_1}| = \frac{1}{2} \cdot [\overline{A_2C_2}]$$

Somit liegt A_1 tatsächlich wie in der Skizze erkennbar auf der Strecke $\overline{BC_2}$ und die Gerade A_1A_2 ist die Mittelsenkrechte auf BC_2. Somit erkennen wir die Winkelgleichheit $[\sphericalangle A_1XC_1] = |\sphericalangle C_1A_1X| = 30°$ und finden $|\sphericalangle C_2XA_1| = 60°$. Den Schnittpunkt der Geraden A_1A_2 (oder ihrer Verlängerung) mit g bezeichnen wir mit A. Konstruieren wir nun den Punkt C auf k mit $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Um dies zu zeigen, drehen wir das Dreieck ABA_2 im Punkt B um 60°, so dass der Punkt A_2 auf C_2 fällt. Weil die Gerade A_1A_2 bei dieser Drehung mit k zusammenfällt und A auf dieser Geraden liegt, fällt auch der Punkt A auf C. Somit sind die Dreiecke ABC und A_2BC_2, weil sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Also ist das Dreieck ABC tatsächlich gleichseitig und es gilt wie gefordert $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$. ❑

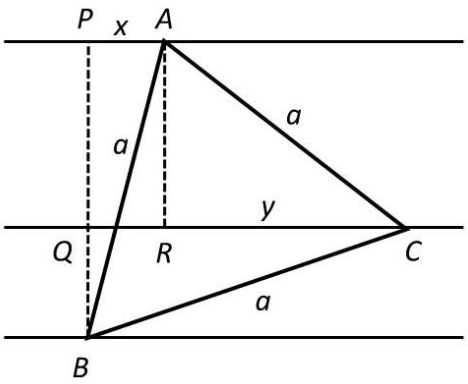
Die Fragestellung der Monatsaufgabe 10/22 wurde wiederholt als MO-Aufgabe gestellt, wobei Zusatzinformationen den Zugang erleichtern sollten.

Aufgabe – MO281045. In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, dass g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und dass k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.

Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.

Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, es existiere ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art und habe die Seitenlänge a. Wir fällen das Lot von B auf g (den Fußpunkt nennen wir P und den Schnittpunkt mit k nennen wir Q) und das Lot von A auf k (den Fußpunkt nennen wir R). Dabei seien B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und R. Mit den Bezeichnungen $|\overline{PA}| = x$ und $|\overline{RC}| = y$ finden wir aufgrund des Satzes von PYTHAGORAS



- im Dreieck APB mit Hypotenuse $\overline{AB}$: $x^2 + 8^2 = a^2$ (1),
- im Dreieck ARC mit Hypotenuse $\overline{AC}$: $y^2 + 5^2 = a^2$ (2),
- im Dreieck BCQ mit Hypotenuse $\overline{BC}$: $(x + y)^2 + (8 - 5)^2 = a^2$ (3).

Wir formen Gleichung (3) um und ersetzen x^2 und y^2 mithilfe der Gleichungen (1) und (2)

$$2xy = a^2 - 9 - (a^2 - 64) - (a^2 - 25) = 80 - a^2 \qquad (4)$$

Quadrieren wir beide Seiten und ersetzen wiederum x^2 und y^2, erhalten wir

$$4 \cdot (a^2 - 64) \cdot (a^2 - 25) = (80 - a^2)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 \cdot (3 \cdot a^2 - 196) = 0$$

Wegen $a > 0$ finden wir die Maßzahl $a = \frac{14}{3}\sqrt{3}$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass mit der gefundenen Maßzahl stets ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art konstruierbar ist. Wegen $196 > 3 \cdot 64$ gilt $a > 8$ und erst recht $a > 5$. Es existieren also positive Zahlen x, y, die (1) und (2) erfüllen. Wegen $196 < 3 \cdot 80$ ist auch $80 > a^2$, so dass auch (4) und damit (3) erfüllbar ist.

Wir konstruieren zunächst als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck RST mit der Hypotenuse $\overline{RS}$ der Länge 28 cm und der Kathete $\overline{RS}$ der Länge 14 cm, indem wir über $\overline{RS}$ einen Halbkreis zeichnen und den Schnittpunkt mit dem Kreisbogen um R mit dem

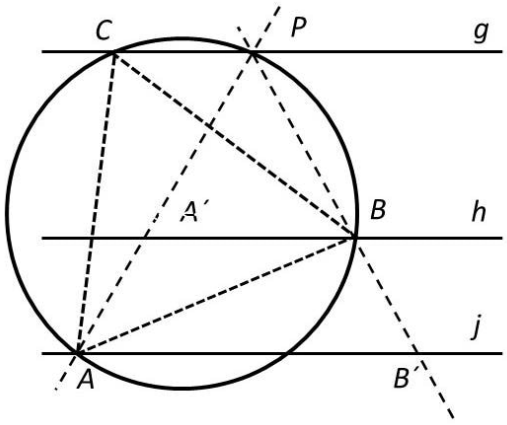
Radius 14 cm konstruieren. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir mit T. Nach dem Satz des PYTHAGORAS im Dreieck RST beträgt die Seitenlänge

$$|\overline{ST}| = \sqrt{(2 \cdot 14)^2 - 14^2} = \sqrt{3 \cdot 14^2} = 14 \cdot \sqrt{3}$$

Wenn wir die Länge der Kathete $\overline{ST}$ (mittels Strahlensatz) dritteln, haben wir die Maßzahl von a konstruiert. Wählen wir nun auf h einen beliebigen Punkt B und konstruieren jeweils rechts von *B* die Punkte *A* auf *g* mit $|\overline{AB}| = a$ und *C* auf *k* mit $|\overline{BC}| = a$, so leistet das Dreieck *ABC* das geforderte. ❑

Aufgabe – MO350943. Über drei Geraden g, h und j wird vorausgesetzt. dass sie zueinander parallel sind, wobei h zwischen g und j liegt. Durch einen Punkt P auf g werden die beiden Geraden gezeichnet, die mit g Winkel von 60° einschließen. Diese Geraden schneiden h und j in insgesamt vier Punkten.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Man kann aus den zuletzt genannten vier Schnittpunkten zwei Punkte A und B so auswählen, dass auf g ein Punkt C existiert, für den ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.



Lösungshinweise: Wir wählen wie in der Skizze dargestellt die zwei Punkte so, dass A auf j und B auf h liegen. Wir zeigen, dass es den gesuchten Punkt C gibt. Dazu zeichnen wir den Umkreis k zum Dreieck ABP. Dieser Umkreis hat mit g einen weiteren Schnittpunkt $C \neq P$. Wäre nämlich $C = P$, so wäre g eine Tangente an k. Dann läge der Umkreismittelpunkt auf der in P auf g errichteten Senkrechte. Folglich wäre diese Senkrechte zugleich Mittelsenkrechte im gleichseitigen Dreieck $A'BP$ und der Umkreis würde auch durch A' gehen (weil er durch B geht). Dies ist aber nicht möglich, weil P, A' und A drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden sind.

Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AC}$ gilt: $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CPA = 60°$.
Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AB}$ gilt: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BPA = 60°$.

Somit haben alle Innenwinkel des Dreiecks ABC die Größe 60°, das Dreieck ist also gleichseitig. ❑

Monatsaufgabe[10] 12/22

Auf einer Digitaluhr werden der Tag, der Monat, die Stunde, die Minuten und die Sekunden jeweils als zweistellige Zahlen dargestellt, also im Format tt.mm.hh.mm.ss. Wie viele Zeitpunkte gibt es im Jahr, wenn dabei alle zehn Ziffern 0, 1, …, 9 genau einmal auftreten?

Inhalt

Vorwort 2
Thema 19 – Maximale Flächeninhalte 3
Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil II) 9
DIRICHLETsches Schubfachprinzip (Teil I) 12
Bundeswettbewerb Mathematik 2023 18
In alten Mathe-Büchern geblättert 21
Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 10/22 24
Monatsaufgabe 12/22 27

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalt	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

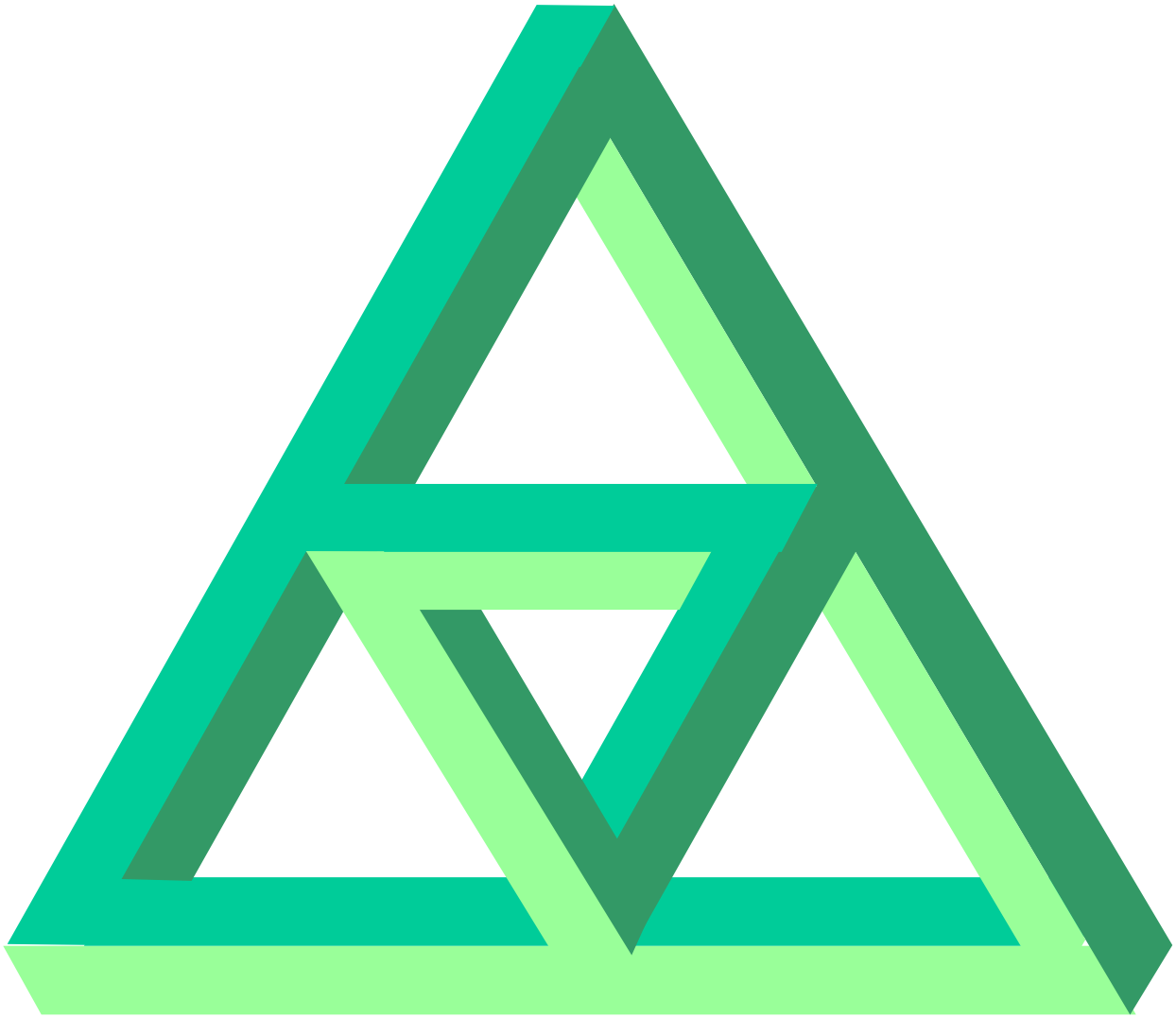
[10] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.01.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[11] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 1&2/2023 (Januar/Februar 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgabe **MO620923** werden Beispiele gezeigt, in denen die Berechnung großer Zahlen erforderlich waren. Während es in frühen Wettbewerbsjahren ausdrücklich zugelassen war, dafür (nicht programmierbare) Taschenrechner einzusetzen, ist es ohne technische Hilfsmittel unter Klausurbedingungen eine (zeitliche) Herausforderung, die nach Einschränkungen der Lösungsmenge suchen lässt.

Wir setzen den Beitrag über die Anwendung des Schubfachprinzips fort und zeigen Anwendungsbeispiele bei geometrischen Fragestellungen. Interessanterweise finden wir in einem Aufgabenbuch aus dem Jahr 1636 bereits eine Aufgabenstellung, deren Lösung mit diesem Prinzip dargestellt wird.

Die dritte Serie des KZM der Klassenstufen 9/10 stellte Aufgaben aus dem Archiv des Bundeswettbewerbs Mathematik zusammen – als Vorbereitung für die Teilnahme an der aktuellen Ausschreibung: Nicht vergessen – Einsendeschluss für die 1. Runde des BWM 2023 ist **6. März 2023** (Datum des Poststempels)!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 20 – Rechnen mit großen Zahlen

Es gibt in der Mathematik-Olympiade immer wieder einmal Aufgaben, bei denen viel gerechnet werden muss. Ohne technische Hilfsmittel wie unter Klausurbedingungen kann dies sehr zeitaufwändig sein, obwohl die Aufgabenstellung selbst wenig inhaltliche Probleme beinhaltet. Da die Rechnungen nachvollziehbar dargestellt werden müssen (beispielsweise mit schriftlicher Multiplikation auf dem Konzeptpapier) müssen wir also nach Einschränkungen suchen, die das Rechnen reduzieren.

Aufgabe 20.01 – MO620923. Bestimmen Sie alle fünfstelligen Quadratzahlen, die die folgenden drei Eigenschaften haben.

(1) Die Quadratzahl ist durch 3 teilbar.
(2) In ihrer Zifferndarstellung (im üblichen Zehnersystem) hat sie jeweils genau zweimal die Ziffer 7 und die Ziffer 6.
(3) Die Zehnerziffer ist ungerade.

Hinweis: 15625 ist eine (fünfstellige) Quadratzahl, weil $15625 = 125^2$ gilt. Ihre Zehnerziffer ist 2.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, es gibt eine solche Quadratzahl. Dann ist sie nicht nur durch 3, sondern auch durch 9 teilbar, weil jeder Primfaktor einer Quadratzahl in gerader Anzahl auftritt. Somit ist die Quersumme Q der Quadratzahl durch 9 teilbar. Wegen $2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 26 \leq Q \leq 26 + 9 = 35$ kommt nur $Q = 27$ in Frage. Die fünfte Ziffer ist daher eine Eins. Es gilt nun eine Anordnung der Ziffern 1, 6, 6, 7, 7 zu finden, die den Forderungen genügt. Insgesamt gibt es 30 verschiedene Möglichkeiten, die fünf Ziffern anzuordnen:

16677, 16767*, 16776, 17667*, 17676, 17766*
61677, 61767*, 61776, 66177, 66717, 66771,
67167*, 67176, 67617, 67671, 67716, 67761*
71667*, 71676, 71766*, 76167*, 76176, 76617, 76671, 76716, 76761*,
77166*, 77616, 77661*

Wegen $129^2 = 16641 < 16677 < \cdots < 77661 < 77841 = 279^2$ wären alle durch 3 teilbaren Basiszahlen von 132 bis 276 zu prüfen, ob sie zu Quadratzahlen der geforderten Art führen[3]. Es würde also genügen, eine Liste der Quadratzahlen zu erstellen, in der die Lösungen ersichtlich sein werden.

[3] Wegen $(n+3)^2 = n^2 + 6 \cdot n + 9$ können wir schrittweise die Quadratzahlen, beginnend mit 129^2, ermitteln, ohne die Multiplikationen vollständig ausführen zu müssen.

Um den Rechenaufwand zu verringern, sollten wir zuvor noch möglichst viele Lösungskandidaten ausschließen.

Da nach Aussage (3) die Ziffer 6 nicht auf der Zehnerstelle steht, entfallen die 12 mit * markierten Möglichkeiten und es verbleiben 18 fünfstellige Zahlen, die Lösung sein können. Wir verwenden die Aussage (1) und untersuchen zeilenweise, welche Basiszahlen durch 3 teilbar sind:

Zeile 1: Wegen $129^2 = 16641 < 16677 < \cdots < 17676 < 17689 = 133^2$, ist hierbei nur 132 eine durch 3 teilbare mögliche Basiszahl, aber $132^2 = 17424$ liefert keine Quadratzahl der geforderten Art.

Zeile 2: Wegen $248^2 = 61504 < 61677 < \cdots < 66771 < 67081 = 259^2$, sind nur 249, 252, 255 und 258 durch 3 teilbare mögliche Basiszahl, aber $249^2 = 62001$, $252^2 = 63504, 255^2 = 65025$ und $258^2 = 66564$ liefern keine Quadratzahlen der geforderten Art.

Zeile 3: Wegen $259^2 = 67081 < 67176 < \cdots < 67716 < 68121 = 261^2$, ist hierbei keine mögliche Basiszahl durch 3 teilbar.

Zeile 4: Wegen $267^2 = 71289 < 71676 < \cdots < 76716 < 76729 = 277^2$, sind nur 270, 273 und 276 durch 3 teilbare mögliche Basiszahlen. $270^2 = 72900$ und $273^2 = 74529$ liefern keine Quadratzahlen der geforderten Art, aber $276^2 = 76176$ erfüllt alle Anforderungen.

Zeile 5: Wegen $27^2 = 77284 < 77616 < 77814 = 279^2$ ist die verbleibende Zahl keine Quadratzahl.

(Hierbei waren immer noch 18 Quadratzahlen zu berechnen!)

Wir suchen nach weiteren Einschränkungen. Das Quadrat einer positiven ganzen Zahl kann stets eindeutig durch $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ dargestellt werden, wobei a eine nicht-negative ganze Zahl und b eine ganze Zahl mit $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ist. Die Zehnerziffer der Quadratzahl ist also nur dann ungerade, wenn b^2 einen ungeradzahligen Beitrag zur Zehnerziffer beiträgt, weil $20ab$ zur Zehnerziffer einen geradzahligen Anteil liefert. Wegen $b^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ kann dies nur für $b = 4$ oder $b = 6$ gelten. Die Einerziffer der Quadratzahl ist dann stets eine 6 und die Zehnerziffer ist gleich 1 oder 7. So verbleiben aus obiger Liste nur noch 9 mögliche Zahlen als Lösung:

16776, 17676
61776,
67176, 67716
71676, 76176, 76716, 77616

Zeile 1: Wegen $129^2 = 16641 < 16776 < 17676 < 17689 = 133^2$, ist nur 132 eine durch 3 teilbare mögliche Basiszahl, aber $132^2 = 17424$ liefert keine Quadratzahl der geforderten Art.

Zeile 2: Wegen $248^2 = 61504 < 61776 < 62001 = 259^2$ ist diese Zahl keine Quadratzahl.

Zeile 3: Wegen $259^2 = 67081 < 67176 < 67716 < 68121 = 261^2$, sind hier keine durch 3 teilbaren Quadratzahlen

Zeile 4: Wegen $267^2 = 71289 < 71676 < \cdots < 776161 < 77841 = 279^2$, sind nur 270, 273 und 276 durch 3 teilbare mögliche Basiszahlen. $270^2 = 72900$ und $273^2 = 74529$ liefern keine Quadratzahlen der geforderten Art, aber $276^2 = 76176$ erfüllt alle Anforderungen.

(Es genügte nun, 12 Quadratzahlen zu berechnen.) ❑

Hinweis: Eine unbewiesene Formulierung „Bis auf 76176 sind dies alles keine Quadratzahlen“ genügt nicht. Zumindest auf dem Konzeptpapier muss ersichtlich sein, wie diese Aussage durch konkrete Berechnungen begründet werden kann.

Lösungsvariante: Wenn wir die Eigenschaften der möglichen Lösungen ermittelt haben, also Teilbarkeit durch 3 und Endziffern 16 oder 76, so können wir auch die Basiszahlen von 129 bis 279 untersuchen. Dabei wissen wir schon, dass diese auf 4 oder 6 enden müssen. Es verbleiben:

144, 156, 174, 186, 204, 216, 234, 244, 264, 276

Es erscheint einfacher, diese zehn Quadratzahlen auszurechnen anstatt solcher Einschachtelungen wie oben zu finden.

Fall 1: Die Basiszahl endet auf 4. Sind a und b Ziffern, so wird die Zehnerziffer von $(100a + 10b + 4)^2 = 100 \cdot (100a^2 + 20ab + 8a + b^2) + 80b + 16$ allein durch die Endziffer von $8b + 1$ gebildet. Nur für $b = 2, 5, 7$ entsteht als Zehnerziffer 1 oder 7. Aus den Basiszahlen erfüllt das nur 174. Aber wegen $174^2 = 30276$ erfüllt diese Zahl nicht die Anforderungen.

Fall 2: Die Basiszahl endet auf 6. Sind a und b Ziffern, so wird die Zehnerziffer von $(100a + 10b + 6)^2 = 100 \cdot (100a^2 + 20ab + 12a + b^2) + 120b + 36$ allein durch die Endziffer von $12b + 3$ gebildet. Nur für $b = 2, 4, 7$ entsteht als Zehnerziffer 1 oder 7. Aus den Basiszahlen erfüllt das nur 276. Wegen $276^2 = 76176$ erfüllt diese Zahl alle Anforderungen.

Aufgabe 20.02 – MO510936. In dieser Aufgabe ist unter einer Zahl stets eine nichtnegative ganze Zahl zu verstehen. Wir nennen eine Zahl ergänzbar, wenn sie höchstens 5-stellig ist und sich durch Anhängen von genau fünf Ziffern an das Ende der Zahl zu einer (höchstens 10-stelligen) Quadratzahl ergänzen lässt. Beispielsweise ist die Zahl 4199 ergänzbar, da $419963049 = 20493^2$ eine Quadratzahl ist. Auch die Zahl 0 ist ergänzbar.

a) Bestimmen Sie die kleinste nicht ergänzbare Zahl.
b) Bestimmen Sie die Anzahl aller ergänzbaren Zahlen.

Lösungshinweise zu Teil a) Die kleinste nicht ergänzbare Zahl ist 25317.

Zunächst beweisen wir: Jede Zahl kleiner als 25000 ist ergänzbar. Andernfalls gäbe es eine Zahl n mit $0 \leq n < 25000$, die nicht ergänzbar ist. Dann wäre jede Quadratzahl entweder kleiner als $100000 \cdot n$ oder mindestens gleich $100000 \cdot (n+1)$. Also gäbe es eine natürliche Zahl k mit $k^2 < 100000n < 100000(n+1) \leq (k+1)^2$. Daraus folgte $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 > 100000$. Dies bedeutet $k \geq 50000$, also $100000n > k^2 \geq 25 \cdot 10^8$ und daher $n > 25000$, im Widerspruch zu Annahme $n < 25000$.

Wir betrachten nun Quadratzahlen der Form

$$q = (50000 + k)^2 = 25 \cdot 10^8 + 100000k + k^2$$

mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. Solange $k^2 < 100000$ gilt, sind die ersten fünf Ziffern von q gegeben durch $25000 + k$. Also sind für $k = 0, 1, \ldots, 316$ die Zahlen $25000 + k$ ergänzbar ($316^2 = 99856 < 100000$). Die Zahl 25317 ist nicht ergänzbar, weil $50316^2 = 2531699856$ und $50317^2 = 2531800489$ gilt.

Lösungshinweise zu Teil b) Wir wissen bereits, dass jede Zahl kleiner als 25316 ergänzbar ist. Wegen

$$2500000000 = 50000^2 < 50001^2 < \ldots < 99999^2 < 100000^2 = 10000000000$$

sind die übrigen ergänzbaren Zahlen gegeben durch die jeweils ersten 5 Ziffern der fünfzigtausend zehnstelligen Quadratzahlen $50000^2, 50001^2, \ldots, 99999^2$.

Wir zeigen nun, dass je zwei dieser Quadratzahlen unterschiedliche ergänzbare Zahlen liefern. Wäre das nicht so, dann gäbe es zwei dieser Quadratzahlen, die sich um weniger als 100000 unterscheiden; insbesondere gäbe es eine Zahl $k \geq 50000$ derart, dass $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 < 100000$ ist. Das ist aber nicht möglich. Damit haben wir bewiesen, dass die Anzahl der ergänzbaren Zahlen gleich 25316 + 50000 = 75316 ist. ❑

Aufgabe 20.03 – MO471023. Bestimmen Sie alle neunstelligen Zahlen X mit folgenden Eigenschaften:

1. Jede der Ziffern 1, 2, …, 9 kommt einmal vor.
2. Streicht man von X die letzten sechs Ziffern weg, so bleibt eine durch 3 teilbare Zahl übrig, die genau drei verschiedene Primteiler hat.
3. Streicht man von X die ersten sechs Ziffern weg, so bleibt das Doppelte einer durch 3 teilbaren Quadratzahl übrig.
4. Streicht man von X die ersten drei und die letzten drei Ziffern weg, so bleibt eine Primzahlpotenz übrig.

Hinweis: Die Zahl $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ hat genau drei verschiedene Primteiler. Auch Primzahlen selbst sind Primzahlpotenzen!

Lösungshinweise: Die dreistelligen Zahlen, die von den ersten, den mittleren und den letzten drei Ziffern von X gebildet werden, bezeichnen wir mit A, B bzw. C. Nach Voraussetzung enthält X jede Ziffern 1, 2, …, 9 genau einmal, ihre Quersumme ist daher gleich 45, und deshalb ist X durch 3 teilbar. Da A und C auch durch 3 teilbar sind, folgt, dass auch B durch 3 teilbar ist. Weil B eine Primzahlpotenz ist, muss B eine Potenz von 3 sein. Die einzigen dreistelligen Potenzen von 3 sind $3^5 = 243$ und $3^6 = 729$. Auf jeden Fall enthält B also die Ziffer 2.

Die letzte Ziffer einer Quadratzahl ist eine der Ziffern 0; 1; 4; 5; 6; 9; die letzte Ziffer von C ist also 0, 2 oder 8. Da die Ziffer 0 nicht in X vorkommt und die 2 bereits in B enthalten ist, muss die letzte Ziffer von C eine 8 sein. Wir schreiben $C = 2 \cdot 9 \cdot y^2$ für eine positive, ganze Zahl y. Die letzte Ziffer von $9 \cdot y^2$ ist eine 4 oder eine 9; daher muss die letzte Ziffer von y^2 eine 1 oder eine 6 sein. Da C dreistellig ist, folgt außerdem

$$1000 > 2 \cdot 9 \cdot y^2 > 100 \qquad \text{also} \qquad \frac{1000}{18} > 55 \geq y^2 \geq 6 > \frac{100}{18}.$$

Daher ist y^2 entweder gleich 16 oder 36; im ersten Fall wäre $C = 2 \cdot 9 \cdot 16 = 288$, dann käme die Ziffer 8 aber zweimal vor. Also ist $C = 2 \cdot 9 \cdot 36 = 648$.

In C kommt also die Ziffer 4 vor, also kann B nicht gleich 243 sein und muss daher gleich 729 sein. Für A verbleiben die drei Ziffern 1, 3 und 5. Wir finden die Primfaktorzerlegungen

$$135 = 3^3 \cdot 5; \quad 153 = 3^2 \cdot 17;$$
$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7; \; 351 = 3^3 \cdot 13;$$
$$513 = 3^3 \cdot 19; \quad 531 = 3^2 \cdot 59.$$

Also gilt $A = 315$. Die einzige Zahl mit den gewünschten Eigenschaften ist also $X = 315729648$. ❑

Aufgabe 20.04 – MO281036. Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n+2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.

Hinweis: Die Verwendung eines – nicht programmierbaren – Taschenrechners ist gestattet.

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren mit dem Taschenrechner finden wir für $n = 1, \ldots, 6$ folgende Beispiele.

$$364 = 52 \cdot 7; \quad 3346 = 478 \cdot 7; \quad 34363 = 4909 \cdot 7;$$
$$333634 = 47662 \cdot 7; \quad 3333463 = 476209 \cdot 7; \quad 33333643 = 4761949 \cdot 7.$$

Weiterhin finden wir $333333 = 47619 \cdot 7$. Damit haben wir für jedes n, für das die Bedingungen erfüllbar sind, auch $n + 6$, für das die Bedingungen erfüllbar sind. Also gibt es tatsächlich für jede Zahl $n \geq 1$ eine Zahl der geforderten Art. ❑

Aufgabe 20.05 – MO390941. M sei die Menge alle derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie die größte ganze Zahl t, die ein Teiler aller Zahlen aus M ist.
b) Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl m, für die gilt, dass jede Zahl aus M mindestens m positive Teiler hat.
c) Ermitteln Sie die kleinste Zahl aus M, die mehr als 100 positive Teiler hat.

Lösungshinweise zu Teil a) Von vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 8 teilbar, genau eine weitere durch 4 und jede der anderen durch 2 teilbar. Somit ist jede Zahl aus M durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ teilbar. Da jede dritte gerade Zahl durch 3 teilbar ist, ist auch jede Zahl aus M durch 3 teilbar. Weil 2 und 3 teilerfremd sind, ist jede Zahl aus M durch $2^7 \cdot 3 = 384$ teilbar. Da zudem M auch 384 enthält, kann es keine größere Zahl geben, die alle Zahlen aus M teilt. Die größte ganze gesuchte Zahl ist also 384.

Lösungshinweise zu Teil b) Da $2^7 \cdot 3 = 384$ die größte ganze Zahl ist, die alle Zahlen aus M teilt, hat jede Zahl aus M mindestens so viele Teiler wie 384.

Hat eine Zahl n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ mit Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ $(m > 0)$ und ganzzahlige positive Exponenten $k_1, \ldots, k_m$, so hat n insgesamt $(k_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$ verschiedene Teiler[4].

Wegen $2^7 \cdot 3 = 384$ hat die Zahl 384 insgesamt $m = 8 \cdot 2 = 16$ verschiedene Teiler. Dies ist zugleich die größte gesuchte Zahl.

[4] Diese Aussage darf laut offiziellen Lösungshinweisen als bekannt vorausgesetzt werden, siehe auch „Mathematische Kostproben“, Heft 09/2022, Bekannte Sätze.

Lösungshinweise zu Teil c) Wir schreiben die ersten Zahlen aus M auf und ermitteln die Anzahl ihrer Teiler T. Dieses vollständige systematische Probieren ist erforderlich, um auszuschließen, dass es keine kleinere Zahl mit der geforderten Eigenschaft geben kann.

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2^7 \cdot 3$	mit $T = 8 \cdot 2 = 16$
$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$	mit $T = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	mit $T = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$
$8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
$10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 = 2^8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 72$
$12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$
$14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 108$

Die kleinste Zahl z aus M mit mehr als 100 Teilern ist also $14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 80640$. ❑

Hinweis: Faktorendarstellungen wie in obiger Liste sind als Zwischenergebnisse zulässig. Wird aber im Aufgabentext nach einer Zahl gefragt, wird deren Angabe in einer Faktorendarstellung oder Potenzschreibweise als unvollständig gewertet.

Aufgabe 20.06 – MO391041. M sei die Menge alle derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von fünf aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie die größte ganze Zahl t, die ein Teiler aller Zahlen aus M ist.
b) Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl m, für die gilt, dass jede Zahl aus M mindestens m positive Teiler hat.
c) Ermitteln Sie die kleinste Zahl aus M, die mehr als 200 positive Teiler hat.

Lösungshinweise zu Teil a) Von fünf aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 8 teilbar, genau eine weitere durch 4 und jede der anderen durch 2 teilbar. Somit ist jede Zahl aus M durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$ teilbar. Da jede dritte gerade Zahl durch 3 und jede fünfte gerade Zahl durch 5 teilbar ist, ist auch jede Zahl aus M durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar. Weil 2, 3 und 5 paarweise teilerfremd sind, ist jede Zahl aus M durch $2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$ teilbar. Da zudem M auch 3840 enthält, kann es keine größere Zahl geben, die alle Zahlen aus M teilt. Die größte ganze gesuchte Zahl ist also 3840.

Lösungshinweise zu Teil b) Da 3840 die größte ganze Zahl ist, die alle Zahlen aus M teilt, hat jede Zahl aus M mindestens so viele Teiler wie 3840.

Wegen $3840 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$ beträgt die Anzahl der verschiedenen Teiler nach der Formel über die Teilerzahl aufgrund der Primfaktorenzerlegung[5] $T = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$. Da M die Zahl 3840 selbst enthält, kann $m = 36$ nicht größer sein.

Lösungshinweise zu Teil c) Wir schreiben die ersten Zahlen aus M auf und ermitteln die Anzahl ihrer Teiler T. Dieses vollständige systematische Probieren ist erforderlich, um auszuschließen, dass es keine kleinere Zahl mit der geforderten Eigenschaft geben kann.

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$	mit $T = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$
$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$	mit $T = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$
$6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 108$
$8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$
$10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 = 2^9 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 7$	mit $T = 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 160$
$12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 11 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 176$
$14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	mit $T = 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$

Die kleinste Zahl z aus M mit mehr als 200 Teilern ist also

$$z = 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 1774080.$$

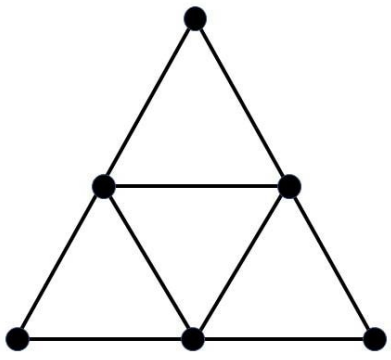
❑

DIRICHLETsches Schubfachprinzip (Teil II)

Das Schubfachprinzip findet auch oft in geometrischen Aufgabenstellungen Anwendung, beispielsweise wenn Punkte auf eine geometrische Figur verteilt werden. In einer solchen typischen Aufgabenstellung wurde in den Lösungshinweisen einer frühen Aufgabe jedoch (noch) auf die Nennung des Schubfachprinzips verzichtet.

Aufgabe 291045. Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Lösungshinweise: Es sei a die Seitenlänge des Dreiecks. Dann können die fünf (und sogar sechs) Punkte wie in der Abbildung gelegt werden: Werden die Mittelpunkte der Dreiecksseiten verbunden, beträgt der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten hierbei $\frac{a}{2}$.



Wir zeigen nun, dass bei keiner Lage von fünf Punkten im Dreieck der kleinste Abstand zwischen zwei

[5] Diese Formel darf ohne Beweis verwendet werden, sollte aber ausführlich wie in Aufgabe 20.05 erläutert werden.

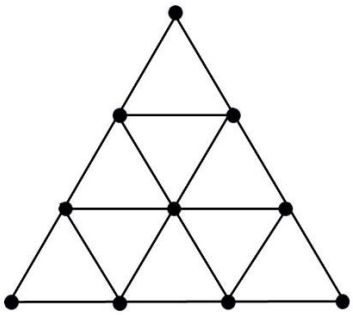
verschiedenen Punkten größer als $\frac{a}{2}$ sein kann. Gäbe es nämlich eine solche Lage, so wäre jeder dieser Abstände größer als $\frac{a}{2}$. Daher könnte dann in jedem der vier in der Abbildung gezeigten Teildreiecke höchstens ein Punkt liegen, also lägen insgesamt höchstens vier Punkte im ganzen Dreieck. Damit ist bewiesen, dass der größte Mindestabstand zweier Punkte von 5 in einem gleichseitigen Dreieck befindlichen Punkte höchstens $\frac{a}{2}$ beträgt und die gezeigte Verteilung diesen Mindestabstand realisiert. ❑

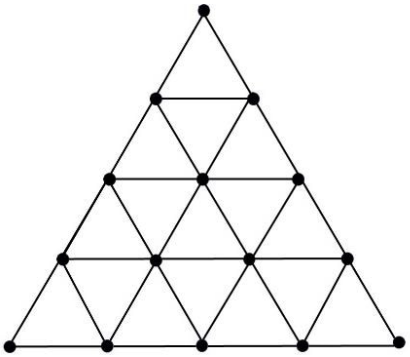
Lösungsvariante: Wir betrachten

5 Objekte: fünf zu verteilende Punkte,
4 Schubfächer: vier Teildreiecke wie in obiger Skizze.

Nach dem Schubfachprinzip befinden sich in mindestens einem Teildreieck mindestens zwei Punkte. Deren Abstand kann aber nicht größer als $\frac{a}{2}$ sein. Da mit Verteilung der fünf Punkte auf die Eckpunkte der Teildreiecke eine Verteilung mit diesem Mindestabstand gefunden wurde, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Wir wollen diese Aufgabe verallgemeinern: Ermitteln Sie eine Verteilung von 10 bzw. 17 verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!





Lösungshinweise: Wir dritteln bzw. vierteln die Dreiecksseiten und konstruieren daraus ein Dreiecksgitter mit 9 bzw. 16 Teildreiecken, so können wir mithilfe des Schubfachprinzips zeigen, dass es jeweils mindestens zwei Punkte unter den 10 bzw. 17 Punkten gibt, deren Abstand nicht größer als $\frac{a}{3}$ bzw. $\frac{a}{4}$ ist. Um diesen Abstand zu gewährleisten, müssen aber die Punkte auf den Gitterpunkten liegen. Während im Fall der 10 Punkte genau 10 solche Gitterpunkte zur Verfügung stehen und deshalb eine Verteilung gefunden ist, bei der der maximale Mindestabstand $\frac{a}{3}$ beträgt, lassen sich die 17 Punkte nicht auf die 15 verfügbaren Gitterpunkte aufteilen. Wir finden in diesem Fall keine Verteilung mit dem Mindestabstand von $\frac{a}{4}$.

Dieser Aspekt wird mit folgender Aufgabe vertieft.

Aufgabe. Von zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 LE haben mindestens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$.

Hinweis: Bei Maßzahlen für Längen ohne Maßeinheit werde LE als Angabe in formalen Längeneinheiten verstanden.

Lösungshinweise: Wir betrachten

10 Objekte: zehn beliebig vorgegebene Punkte,
9 Schubfächer: Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ LE

Mindestens in einem der Teilquadrate befinden sich mindestens zwei Punkte, deren Abstand die Diagonale des Teilquadrates nicht übersteigen kann. ❑

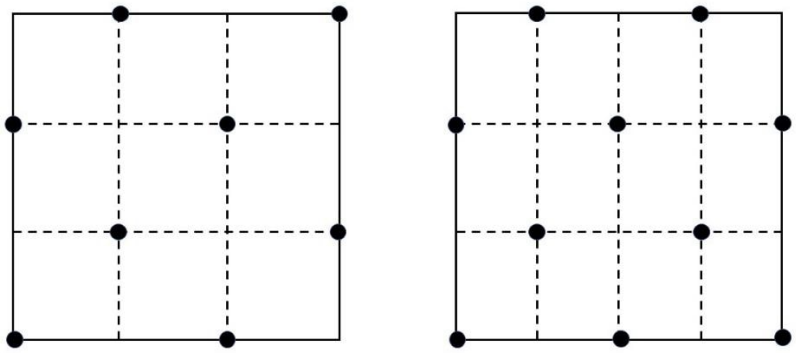
Man beachte, dass hiermit nur eine obere Grenze des maximalen Mindestabstandes angegeben werden kann. Es lässt sich mit dem Schubfachprinzip zunächst nur schlussfolgern, dass der maximale Mindestabstand den angegebenen Wert nicht übersteigt. Ob es eine Verteilung gibt, die diese Grenze auch tatsächlich annimmt, muss zusätzlich gezeigt werden. Dafür genügt es jedoch, ein Beispiel anzugeben.

Aufgabe. Man finde eine Verteilung von $n = 10$ Punkten in einem Quadrat mit möglichst großem Mindestabstand.

Hinweis: Im Gegensatz zu „der Abstand von zwei Punkten ist höchstens …“ bedeutet „möglichst großer Mindestabstand“, dass jedes Paar von Punkten mindestens diesen Mindestabstand einhält.

Lösungshinweise: Wie eben gezeigt gilt für den maximalen Mindestabstand von 10 Punkten in einem Quadrat $d_{10} \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471$.

Es gelingt aber nicht, die 10 Punkte so zu verteilen, dass dieser Grenzwert der maximale Mindestabstand ist: Wahlen wir eine Zerlegung in neun Teilquadrate (linke Abbildung), so ist für die Einhaltung des Mindestabstandes erforderlich, die Punkte jeweils diagonal auf die Eckpunkte der Teilquadrate zu verteilen. Dies gelingt aber nur für maximal 8 Punkte.



Wir zeigen nun, dass der maximale Mindestabstand mindestens mehr als 0,4 beträgt. Teilen wir nämlich das Quadrat in 12 Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ (rechte Abbildung) und verteilen die 10 Punkte wie angegeben auf den Gitterpunkten, so beträgt der Mindestabstand

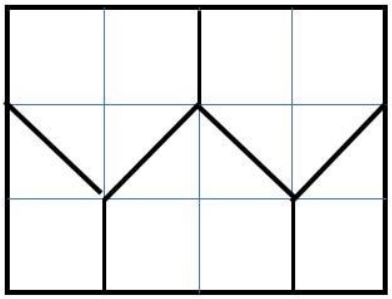
$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9+16}{144}}=\frac{5}{12}>0{,}416.$$

❑

Aufgabe MO221034. Beweisen Sie folgende Aussage: In einem Quadrat der Seitenlänge a gibt es 10 Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}\cdot a$ zueinander haben.

Lösungshinweise: Für die Beantwortung der Aufgabe genügt es, ein Beispiel einer solchen Verteilung anzugeben und den Nachweis zu führen, dass der genannte Mindestabstand bei jedem Punktepaar eingehalten wird. Die Gitterpunkte in der oben dargestellten Teilung des Quadrates in 3×4 Rechtecke bietet den Lösungsansatz. ❑

Aufgabe. Man zeige, dass von 6 Punkten in einem 3×4-Rechteck wenigstens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{5}$ haben.



Lösungshinweise: Wir zerlegen das Rechteck in 5 Teilfiguren, wie in der Abbildung ersichtlich. Nun betrachten wir

6 Objekte: die vorgegebenen 6 Punkte,
5 Schubladen: die konstruierten 5 Teilfiguren.

In mindestens einer der Teilfiguren befinden sich mindestens 2 Punkte. Der maximale Abstand zweier Punkte in so einer Teilfigur beträgt

$$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,.$$

Aufgabe. In einem Quadrat der Seitenlänge 1 werden zufällig 50 Punkte verteilt. Zeigen Sie, dass dann mindestens 2 Punkte einen Abstand kleiner als $\frac{1}{7}\sqrt{2}$ haben.

Lösungshinweise: Wir betrachten

50 Objekte: 50 vorgegebenen Punkte
49 Schubladen: Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{7}$, angeordnet im Gitter.

In mindestens einem Teilquadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{7}$ befinden sich mindestens zwei Punkte, deren Abstand die Länge der Diagonalen nicht übersteigen kann: $\frac{1}{7} \cdot \sqrt{2}$.

Aufgabe. In einem Quadrat mit der Seitenlänge werden zufällig 51 Punkte verteilt. Zeigen Sie, dass es einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, in dem mindestens 3 Punkte liegen.

Lösungshinweise: Wählen wir die 51 Punkte als Objekte und untersuchen dazu die 49 Schubladen in Form von Teilquadraten mit der Seitenlänge $\frac{1}{7}$, so liegen mindestens zwei Punkte in Teilquadraten, in denen sich bereits ein Punkt befindet. Wir können aber nicht entscheiden, ob diesen beiden Punkte in einem gemeinsamen Teilquadrat liegen – der Lösungsansatz misslingt. Deshalb betrachten wir

51 Objekte: die vorgegebenen 51 Punkte
25 Schubladen: Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{5}$, angeordnet im Gitter.

Wegen $51 = 25 \cdot 2 + 1$ befinden sich in mindestens einem Teilquadrat mindestens 3 Punkte. Der Radius des Umkreises eines solchen Teilquadrates ist die Hälfte seiner Diagonale, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{2} < 0.142 < \frac{1}{7}$. ❑

Aufgabe. Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 LE seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkten bestehendes Punktepaar gibt, sodass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$ ist.

Lösungshinweise: Wir betrachten

28 Objekte: 28 beliebig vorgegebene Punkte,
27 *Schubfächer:* Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ LE.

Mindestens zwei Punkte befinden sich in einem der Teilwürfel, deren Abstand die Raumdiagonale des Teilwürfels nicht übersteigen kann. ❑

Aufgabe. In einem Würfel mit der Kantenlänge 7 werden 342 Punkte verteilt. Zeigen Sie, dass es dann immer einen Teilwürfel mit der Kantenlänge 1 gibt, in dem kein Punkt liegt.

Lösungshinweise: Wir betrachten

342 Objekte: die vorgegebenen 342 Punkte,
343 Schubladen: die $7^3 = 343$ Teilwürfel mit Kantenlänge 1, die sich gitterartig und überschneidungsfrei im gegebenen Würfel anordnen lassen.

Da es mehr Schubladen als Objekte gibt, muss mindestens eine Schublade leer bleiben („negatives oder umgekehrtes Schubfachprinzip“). ❑

Aufgabe. In der Ebene liegen ein Dreieck und eine Gerade. Die Gerade geht durch keinen Eckpunkt des Dreiecks. Zeigen Sie, dass dann die Gerade mindestens eine Dreiecksseite nicht schneidet.

Lösungshinweise: Wir betrachten

3 Objekte: 3 Eckpunkte des Dreiecks
2 Schubfächer: 2 Halbebenen, die durch die Gerade gebildet werden.

Dann liegen in mindestens einer Halbebene mindestens 2 Eckpunkte. Die Dreiecksseite zu diesen zwei Eckpunkten wird nicht durch die Gerade geschnitten.

Aufgabe. Kann ein gleichseitiges Dreieck mithilfe zweier kleinerer gleichseitiger Dreiecke lückenlos überdeckt werden?

Lösungshinweise: Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch und nehmen an, eine solche Überdeckung sei möglich. Das ursprüngliche Dreieck A habe die Seitenlänge a. Die kleineren Dreiecke A_1 und A_2 haben die Seitenlängen a_1 und a_2. Die Aufgabenstellung verlangt, dass $a_1 < a$ und $a_2 < a$ erfüllt ist. Somit müssen die Eckpunkte vom Dreieck A entweder durch A_1 oder durch A_2 überdeckt werden. Wir betrachten nun

3 Objekte: die 3 Eckpunkte des Dreiecks A,
2 Schubladen: die 2 Dreiecke A_1 und A_2.

Nach dem Schubfachprinzip überdeckt mindestens eines der Dreiecke zwei Eckpunkte (o.B.d.A. sei dies das Dreieck A_1), was zur Konsequenz hat, dass zwei Punkte im Dreieck A_1 den Abstand a haben und damit gilt: $a \leq a_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_1 < a$. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Obwohl das Schubfachprinzip bereits im 17. Jahrhundert angewandt wurde (ohne es jedoch so zu benennen), wird es nach einer Behandlung des Prinzips von PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859) im Jahr 1834 unter dem Namen *„DIRICHLETsches Schubfachprinzip“* bekannt. Eine frühe Quelle für solche Aufgaben finden wir 1636 in:

Deliciae physico-mathematicae[6]:

Oder Mathemat: und Philosophische Erquickstunden : Darinnen Sechshundert dreyund Sechzig Schone, Liebliche und Annehmliche Kunststucklein, lustgaben und Fragen

Wie solche uf der andern seiten dieses blats ordentlich nacheinander verzeichnet worden

Daniel Schwenter

Verlegung Jeremiae Dumlers, 1636

[Seite 34]

Vorrede:

Der erste Theil der Erquickstunden / darinnen XC Auffgaben und Fragen / auf der Arithmetica oder Rechenkunst / genommen / begriffen.

Was das rechnen vor eine treffliche Kunst und was Nutzen sie allen Ständen auff der gantzen Welt bringt / haben vor vielen und wenigen Jahren / eine grosse anzahl gelehrter Männer in ihren Schriften vmständlich aufgeführet und Sonnenklärlich dargethan; also daß solche allhier weitläufig zu rühmen / vnd mit hohen Worten herauf zu streichen / ganz vnötig; Wir lassen vns aber einzig und allein an des tiefffinnigen vnd weltweisen Mann Aristotelis Vrtheil von geachteter Kunst begnügen / welcher sie allen Mathematischen Wissenschaften weit vorziehet / vnd für die Edelste darunter hält; nicht allein wegen ihres großen Nutzens / sondern auch weil sie vor sich selbst vollkommen / vnd keiner andern Mathematischen Wissenschaft zu ihrer Verrichtung bedürfftig / da hingegen sie andern fast alle / mit hülfe vn zuthun der Rechenkunst erführe vollkommenheit erreichen. …

Weil ich dann in meiner Jugend mich mit solchen Auffgaben auch vielfältig delectiret und ergötzet / hernach aber in zunemung meines Alters erfahren / daß solche Auffgaben Grund und Beweis zu erforschen / nicht schlechten Nutz / höhere Auffgaben Beweis zu ergründen / bringe / hab ich solcher 90. auß des Französischen Authoris vnd meinen collectaneis zusammn geschreiben / und in folgendem ersten Theil dieser Erquickstunden / theils mit den demonstratioinibus vnd Beweis / theils aber / damit dem Leser auch etwas außzudencken an die Hand gegeben würde / ohne Beweis / an Tag geben. Der günstige Leser woll damit vor lieb nehmen / vnd solches zu seiner Ergötzung / oder Nutzen nach belieben gebrauchen.

[6] https://www.google.de/books/edition/Deliciae_Physico_Mathematicae_Oder_Mathe/JBx877ilk0cC?hl=de&gbpv=1&dq=Deliciae+physico-mathematicae&printsec=frontcover. Ein Service von Google Books (zuletzt am 08.01.2023). Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurden weitgehend beibehalten.

[Seite 86]

Die LIII. Auffgab.

Zu erweiſen daß es wol müglich / ja auch ſeyn müſſe / daß unter zweyen Menſchen einer ſo viel Haar an ſeinem Leib habe / als der ander.

Es iſt / ſpricht der Franzöſiſche Professor, eine richtige Sach / daß mehr Menſchen auff der Welt / als der allerhaarigſte Menſch an ſeinem Leib härlein hat : Weiln vns aber die Haar eines Menſchen zu zehlen vnmüglich / wolln wir nur durch geringe Zahlen / beſſers verſtands halben / vnſere Auffgab erläutern vn demonstrirn. Wir ſetzen es ſeynt 100 Menſchen / darunter der allerhaarichſte nit mehr als 99 Haar habe; man möchte wol auch viel million Menſchen nennen daß nit müglich ein Menſch ſo viel Haar haben ſollte / wir bleiben obgeſetzter Vrſach halben bey den 100. Dieweil nun mehr Menſchen ſeynt als Haar an einem / laſſet vns betrachten 99 Menſchen und ſagen / entweder ſeynt deren Haar ganz ungleich an der Zahl / oder es ſeynt welche gleiche Haar haben : Iſt diß ſo dürffen wir ferners keines Beweiſes / vnd haben wir vnſere meynung erhalten : Sagt man aber keiner habe ſoviel als der ander vnter 99. So muß der erſte nur ein Haar haben / der ander 2. der dritte 3. der vierdte 4. vnd ſo fortan / biß auff den neun vnd neunzigſten der müſte haben 99 Haar. Nun weil noch überig der hunderſte Menſch / der auch über 99 Haar nit hat / wie wir geſetzt / ſo muß er vnwiderſprechlich in der Haarzahl mit einem vnter den 99 übereinkommen. Ebner maſſen kann man ſagen : daß es müglich 2 Vögel oder mehr einer ſo viel Federn habe als der ander. Zween Bäume einer ſo viel Blätter als der ander. Zween Viſch einer ſo viel Schuppen als der ander. Item zween Menſchen daß einer ſo viel Gelt habe als der ander. Alſo köndte man folglich ſagen / daß zwey groſſe Bücher eins ſo viel Buchſtaben köndte halten als das ander.

Die LIV- Auffgab.

Ob mehr Haar als Augen auff der Welt.

Mit einem vornemen Doctore in Nürnberg hatte ich die Zeit zu vertreiben dergleichen discurs; Meine Meynung war / es weren mehr Haar als Augen / dann man ſollte die Menſchen / Pferd / Kammel / Ochſen / Eſelſ/ Gaiß / Hund / Katzen und andere Thier betrachten / welche viel 1000 Haar aber jedes nur zwey Augen hätten. Er aber nannte mir hingegen ſo viel Augen, daß ich davor erſchrake ; Dann ſagt er / wie viel 1000 Fiſch / Krebs / Fröſch / Krötn / Schlangen / Edexen / Scorpion / Mücke Flöh / Leuß / Wanzen / Schaben / Schwaben / Vögel vnd der gleichen ſeynt / welche alle nur Augen / keins aber kein Haar hat. Daß alſo noch vngewiß / ob mehr Haar als Augen auff der Welt ; welche ich luſts halben hieher ſetzen wollen.

...

[Seite 123]

Ende des erſten Theilſ der
Erquickſtunden

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [7].

Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}, \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}.$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind die Ergebnisse selbst wieder rationale Zahlen ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei r eine rationale und t eine irrationale Zahl. Wir nehmen an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, s sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.
Wir nehmen an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, p sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Wird die Differenz als Summe mit einem negativen Summanden und der Quotient als Produkt mit dem Reziproken des Faktors interpretiert, ist der Nachweis auch für Differenz und Quotient erbracht.

Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

[7] Eine reelle Zahl r heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

$$\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4,$$
$$\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=2.$$

Satz. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert stets mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl.

Beweis: Seien r_1 und r_2 rationale Zahlen mit $r_1 < r_2$, dann gilt für die rationale Zahl $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ die Ungleichung $r_1 < r < r_2$.

Die Zahl $t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ stets

$$r_1 < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = t$$

und

$$t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot 1 = r_2.$$

Also gilt für die irrationale Zahl t die Ungleichung $r_1 < t < r_2$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, eine geeignete rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich wird.

Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22.

Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl z mit den Eigenschaften

- z ist durch 2 teilbar,
- $Q(z)$ ist durch 3 teilbar und
- $Q(Q(z))$ ist durch 5 teilbar.

Hinweis: Mit $Q(n)$ wird die Quersumme von der ganzen Zahl n bezeichnet.

Lösungshinweise: Wenn $Q(z)$ durch 3 teilbar ist, so ist auch die Quersumme davon – also $Q(Q(z))$ – durch 3 teilbar. Somit gilt $Q(Q(z)) \geq 15$. Die kleinste Zahl mit Quersumme 15 ist 69. Die kleinste Zahl mit Quersumme 69 ist 69.999.999. Diese Zahl ist jedoch nicht durch 2 teilbar. Deshalb ist 79.999.998 die gesuchte Zahl, denn es gilt für alle Zahlen n mit $n < 79.999.998$ die Abschätzung $Q(n) < 7 + 6\cdot 9 + 8 = 69$, weil n an wenigstens einer Stelle eine kleinere Ziffer als 79.999.998 haben muss und insbesondere die Einerstelle eine gerade Ziffer ist. ❑

Monatsaufgabe[8] 1/23.

Zeigen Sie: Ist α eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, so existiert ein gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q mit $0 < q \leq n$ und

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{n \cdot q}.$$

Inhalt

Vorwort 2
Thema 20 – Rechnen mit großen Zahlen 3
Dirichletsches Schubfachprinzip (Teil II) 9
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Bekannte Sätze der Mathematik 18
Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22. 19
Monatsaufgabe 1/23. 20

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[9]	Nr.	Thema	Aufgabe
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

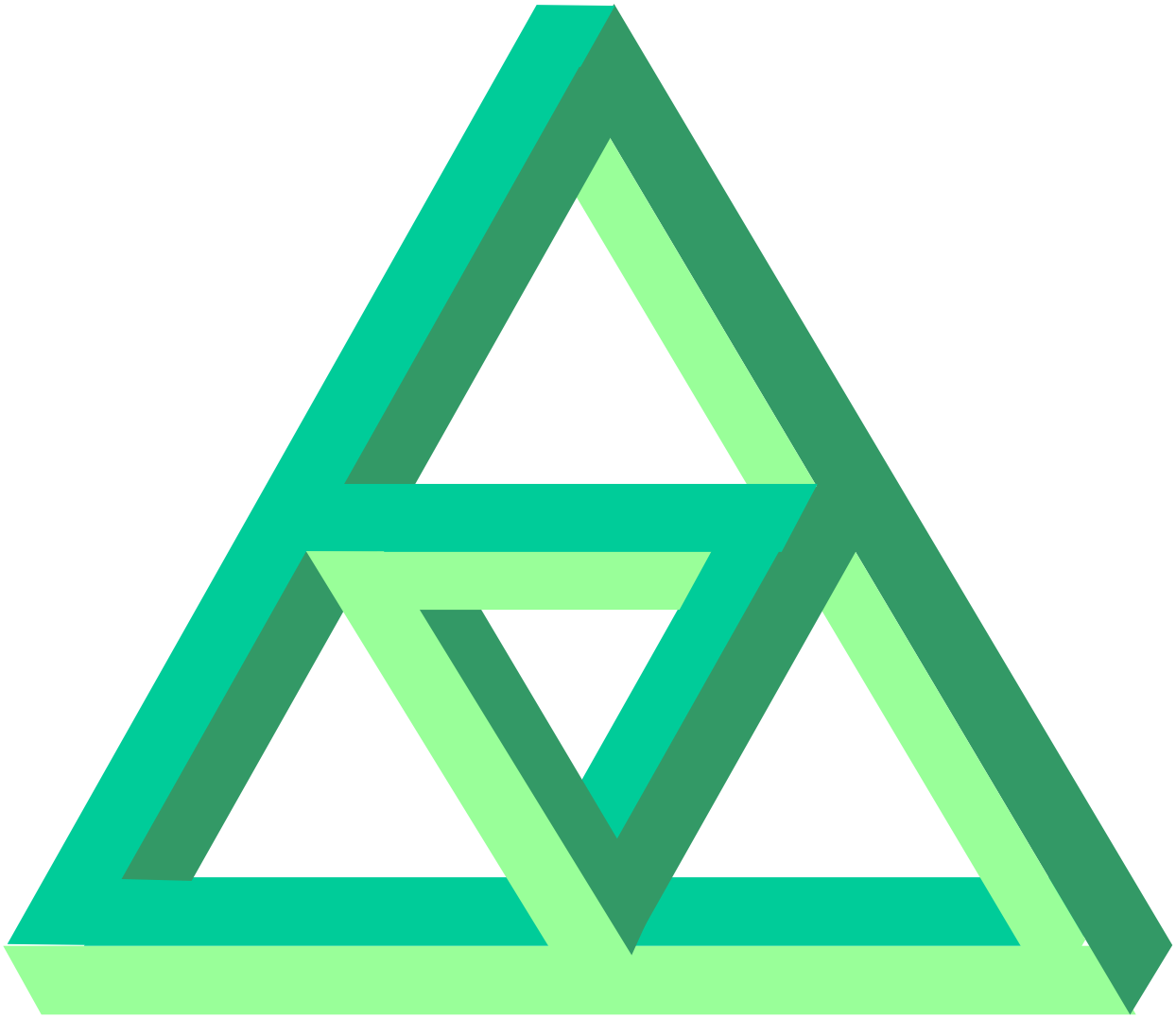
[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 28.02.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[9] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 3/2023 (März 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden (MO) werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen aus dem MO-Archiv mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgabe **MO621024** werden (nach Heft 10/2022) weitere Beispiele gezeigt, in denen der Satz des THALES eine wesentliche Hilfe bei der Beweisführung darstellt.

Wir setzen in diesem Heft den Beitrag über geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal fort und stellen Aufgaben vor, in denen Vierecke aus gegebenen Bestimmungsstücken zu konstruieren sind.

In der vierten Serie des diesjährigen KZM der Klassenstufen 9/10 wurden Fragen zum FERMAT-Punkt gestellt. Dabei wurde die Existenz eines solchen Punktes vorausgesetzt. Diese wird im Heft untersucht und es werden Konstruktionsmöglichkeiten des FERMAT-Punktes gezeigt. Das allgemeinere Thema „Summe von Abständen“ finden wir zudem in Aufgaben der Mathematik-Olympiade.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 18.02 – Der Satz des THALES

Im Heft Oktober/2022 wurde mit Bezug zur Aufgabe MO621014 der Satz des THALES thematisiert. Auch in der nachfolgenden Stufe wurde eine Aufgabe gestellt, zu deren Lösung dieser Satz beitragen kann.

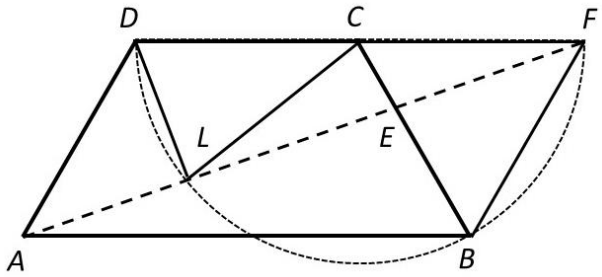
Aufgabe 18.08 – MO621024. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $AB \parallel CD$,
(2) $|\overline{AB}| > |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}|$,
(3) $|\sphericalangle CBA| = 60°$.

Weiterhin sei E der Punkt der Strecke $\overline{BC}$, für den $|\overline{BE}| : |\overline{EC}| = 2 : 1$ gilt. Schließlich sei L der Lotfußpunkt von D auf die Gerade AE, d.h. L liegt auf AE und es gilt $|\sphericalangle ELD| = 90°$.

Zeigen Sie, dass $|\overline{CL}| = |\overline{CD}|$ gilt.

Hinweis: Wie bei allen geometrischen Aufgaben sollte der Lösungsansatz mit einer aussagekräftigen Skizze beginnen, bei der alle gegebenen Stücke zu erkennen sind.



Lösungshinweise: Es sei F der Schnittpunkt der Parallelen zu AD durch B mit der Geraden durch C und D. Das Viereck $ABFD$ ist ein Parallelogramm, also folgt mit (2) $|\overline{BF}| = |\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ und $|\overline{DF}| = |\overline{AB}| > |\overline{DC}|$, weswegen F auf der Verlängerung der Strecke $\overline{DC}$ über C hinaus liegt.

Nach dem Wechselwinkelsatz ergibt sich damit $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BCF| = 60°$. Folglich ist das Dreieck CBF gleichschenklig mit Basiswinkel $60°$, ist also sogar gleichseitig. Es folgt

$$|\overline{CF}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| \text{ und } |\overline{AB}| = |\overline{DF}| = 2 \cdot |\overline{CF}|.$$

Wir zeigen nun, dass A, E und F auf einer Geraden liegen. Die Dreiecke ABE und FCE sind nach (SWS) ähnlich, denn es ist

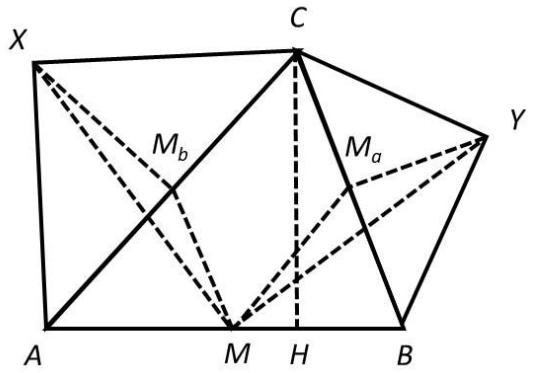
$$|\sphericalangle EBA| = |\sphericalangle ECF| = 60° \text{ und } |\overline{CF}| : |\overline{AB}| = 1 : 2 = |\overline{CE}| : |\overline{EB}|.$$

Daher ist $|\sphericalangle FEC| = |\sphericalangle AEB|$ und folglich liegt F auf der Geraden AE.

Damit hat das Dreieck FDL einen rechten Winkel bei L, weswegen L auf dem zugehörigen THALESkreis mit Durchmesser DF und Mittelpunkt C liegt. Also hat L den gleichen Abstand zum Mittelpunkt C wie der Punkt D, was gerade der Behauptung $|\overline{CL}| = |\overline{CD}|$ entspricht ❑

Aufgabe 18.09 – MO590946/MO591046. Über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke ACX und BCY mit $|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle CYB| = 90°$ errichtet.

Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$, der Fußpunkt H des von C auf die Gerade AE gefällten Lotes und die Punkte X und Y auf einem gemeinsamen Kreis liegen.



Lösungshinweise: Die Punkte M, H, Y, X liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (auch Umfangswinkelsatz genannt)[3] auf einem gemeinsamen Kreis, wenn die Größen der Winkel $\sphericalangle YMX$ und $\sphericalangle YHX$ gleich sind.

Einerseits wissen wir, dass die Punkte H und X auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ liegen. Der Umfangswinkelsatz im Sehnenviereck $AHCX$ liefert über der Seite $\overline{CX}$ die Gleichheit $|\sphericalangle CHX| = |\sphericalangle CAX| = 45°$. Entsprechend liegen die Punkte Y und H auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser $\overline{BC}$, womit im Sehnenviereck $BYCH$ die Gleichung $|\sphericalangle YHC| = |\sphericalangle YBC| = 45°$ erfüllt ist. Daraus erhalten wir

$$|\sphericalangle YHC| + |\sphericalangle CHX| = |\sphericalangle YHX| = |\sphericalangle YBC| + |\sphericalangle CAX| = 90°.$$

Damit liegt H auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser $\overline{XY}$.

Andererseits wollen wir auch $|\sphericalangle YMX| = 90°$ nachweisen. Wenn wir dafür zeigen (jedoch hier nicht ausgeführt), dass die Dreiecke XMM_b und MYM_a kongruent (SWS) sind, finden wir

$$\begin{aligned}|\sphericalangle YMX| &= |\sphericalangle YMM_a| + |\sphericalangle M_aMM_b| + |M_bMX| = \\ &= |\sphericalangle MXM_b| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle M_bMX| = \\ &= |\sphericalangle MXM_b| + (|\sphericalangle XM_bM| - 90°) + |\sphericalangle M_bMX| = 90°\end{aligned}$$

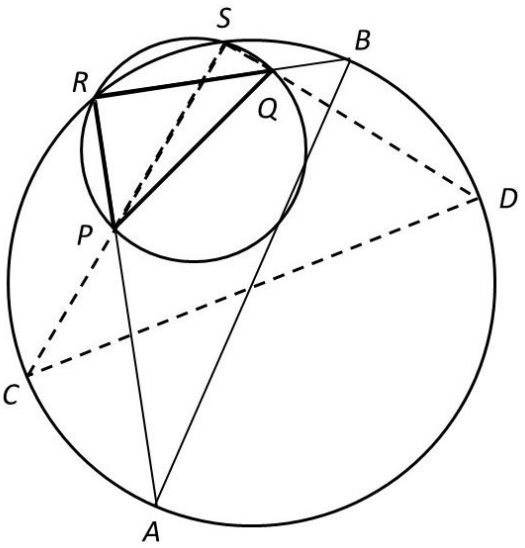
Damit liegt auch M auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser $\overline{XY}$ und somit liegen X, Y, M und H auf dem gemeinsamen (Halb-) Kreis. ❑

Aufgabe 18.10. Es seien zwei Punkte P und Q innerhalb eines Kreises k gegeben. Konstruiere ein dem Kreis einbeschriebenes rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete durch P und dessen andere Kathete durch Q geht.

Bei welcher Lage von P und Q ist diese Aufgabe nicht lösbar?

[3] Werden über einer Strecke $\overline{AB}$ die Punkte C und D so gewählt, dass sie in einer Halbebene liegen und die Winkelgrößen $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ gleich groß sind, dann liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis. Der Satz des THALES ist ein Spezialfall mit $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$.

Lösungshinweise: Der THALESkreis über dem Durchmesser $\overline{PQ}$ schneide den gegebenen Kreis k in den Punkten R und S. Dann sind die Dreiecke PQR und PQS rechtwinklig. Weiterhin schneide die Gerade RP den Kreis k in A, und die Gerade RQ schneide k in B. Dann ist das Dreieck ABR ebenfalls rechtwinklig und erfüllt die gestellten Anforderungen.



In Analogie dazu ist auch das Dreieck CDS eine Lösung der Aufgabe.

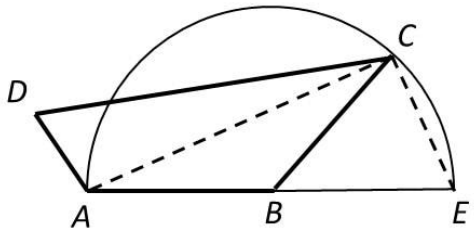
Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn der THALESkreis über dem Durchmesser $\overline{PQ}$ und der gegebene Kreis k gemeinsame Punkte haben (einen Berührungspunkt oder zwei Schnittpunkte). Liegt nämlich dieser Kreis vollständig in k und ist R ein beliebiger Punkt auf der Kreisperipherie, so ist das Dreieck PQR stets spitzwinklig. ❑

Aufgabe 18.11 – MO060922. In dem Viereck $ABCD$ wird die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, dass $|\overline{BE}| = |\overline{AB}|$ ist. Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie notwendig dafür ist, dass der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter ist.

Das Viereck hat

a) vier gleichgroße Winkel,
b) vier gleichlange Seiten,
c) zwei Paar gleichlanger Seiten,
d) zwei gleichlange Seiten mit gemeinsamem Eckpunkt,
e) zwei gleichgroße Winkel.

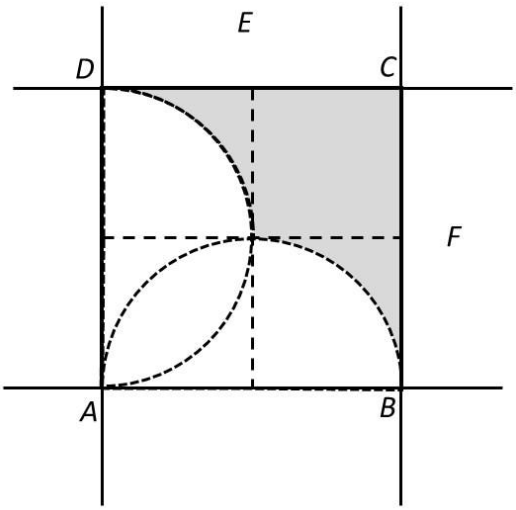
Lösungshinweise: Aus der Umkehrung des Satzes von THALES folgt aus der Gleichheit $|\overline{BE}| = |\overline{AB}|$: Wenn der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter ist, so liegt C auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{AB}$. Folglich ist die Bedingung (d) notwendig.



Dagegen sind die anderen genannten Bedingungen nicht notwendig: Da die Lage von Punkt D keinen Einfluss auf den Winkel $\sphericalangle ACE$ hat, können wir wie in der Skizze ein Beispiel angeben, bei dem nur die Bedingungen (d) erfüllt ist. ❑

Aufgabe 18.12 – MO421024. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Die Menge M aller Punkte P der Ebene, für die sowohl das Dreieck ABP als auch das Dreieck ADP spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

a) Stellen Sie diese Fläche M (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für $a = 6$ cm) und berechnen Sie den Flächeninhalt $F(M)$ in Abhängigkeit von a.
b) Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von M.
c) Beschreiben Sie die Menge M' aller Punkte Q, für die sowohl das Dreieck ABQ als auch das Dreieck ADQ stumpfwinklig ist.



Lösungshinweise zu a): In der Skizze ist die Menge M grau markiert. Die Fläche von M besteht aus einem vollständigen Viertelquadrat und zwei Viertelquadraten, von denen ein Viertelkreis ausgeschnitten ist, also

$$F(M) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$$
$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot a^2 \approx 0.3573 \cdot a^2.$$

Lösungshinweise zu b): Liegt ein Punkt R innerhalb des Streifens E, der durch die Geraden AD und BC gebildet wird, so ist das Dreieck ABR stumpfwinklig. Liegt R auf den Geraden AD oder BC, so ist das Dreieck ABR rechtwinklig. Also kann ein gesuchter Punkt nur im Innern des Streifens E liegen.

Analog kann ein gesuchter Punkt P nur im Innern des Streifens F liegen (der durch die Geraden AB und CD gebildet wird) damit das Dreieck ADP spitzwinklig wird. Als Durchschnitt beider Streifen ergibt sich damit die Menge der inneren Punkte des Quadrates $ABCD$. Davon entfallen aber noch die inneren und die Randpunkte der THALESkreise über den Durchmessern $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$, da sonst die Dreiecke ABP bzw. ADP stumpfwinklig oder rechtwinklig wären. Damit bleibt nur die beschriebene und in der Abbildung skizzierte Punktmenge übrig.

Lösungshinweise zu c): Nach den Überlegungen zur Teilaufgabe b) gehören zur Menge M‘ genau die Punkte, die

- im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser $\overline{AB}$ und im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser $\overline{AD}$ liegen.
- im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser $\overline{AB}$ und außerhalb des Streifens F liegen
- im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser $\overline{AD}$ und außerhalb des Streifens E liegen,
- außerhalb des Streifens E und außerhalb des Streifens F liegen. ❑

Konstruktion des FERMAT-Punktes[4]

Folgende Aussage gilt als allgemein bekannt und darf ohne Beweis zitiert werden:

Satz von VIVIANI[5]. In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines Punktes P im Innern des Dreiecks zu den Dreiecksseiten unabhängig von der Lage des Punktes P.

Beweis: Der Punkt P zerlegt das Dreieck ABC mit der Seitenlänge a und der Höhe h in drei Teildreiecke ABP, BCP und CAP. Die Abstände des Punktes P zu den Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ sind die Höhen h_c, h_a und h_b dieser Teildreiecke. Für die Fläche des Dreiecks ABC gilt:

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = a \cdot h = a \cdot (h_a + h_b + h_c).$$

Also ist – unabhängig von der Lage des Punktes P – die Summe der Abstände konstant $h = h_a + h_b + h_c$. ❑

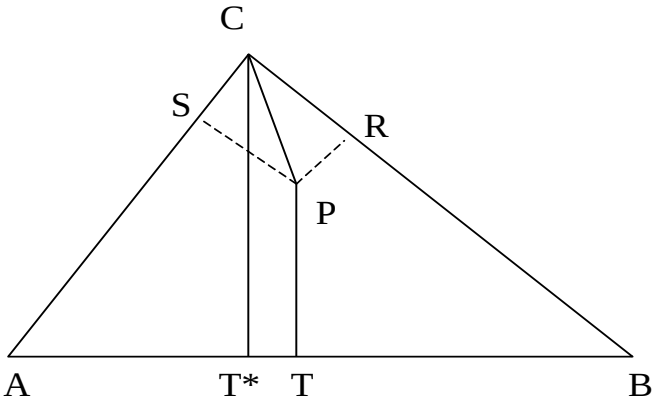
Wir betrachten nun ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basisseite $\overline{AB} = c$ und den Schenkeln der Länge a, dessen Winkel an der Basisseite größer als $60°$ sind. Gibt es dafür eine ähnliche Eigenschaft?

Für einen beliebigen Punkt P im Innern des Dreiecks und dessen Abstände zu den Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, die wir wieder mit h_c, h_a und h_b bezeichnen, gilt

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = c \cdot h = a \cdot (h_a + h_b) + c \cdot h_c.$$

Wenn $h_c = 0$ gilt, liegt P auf der Seite $\overline{AB}$. Damit ist für alle Punkte P auf der Basisseite die Summe der Abstände konstant, denn wir finden $h_a + h_b = \frac{c \cdot h}{a}$. Wählen wir dagegen $P = C$, so reduziert sich die Summe der Abstände auf h_c. Wir erkennen also, dass es Dreiecke gibt, bei denen die Summen der Abstände eines Inneren Punktes zu den Dreiecksseiten verschieden sind.

Betrachten wir nun ein beliebiges Dreieck. Seien T^* der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC und R, S, T die Fußpunkte der Lote von P auf die Dreiecksseiten. Dann ist die Summe der Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{PS}$ größer als die



[4] Nach Engelhaupt, H.: Kürzeste Wege (Teil I). In: Mathematikinformation Nr. 41. Universität Gesamthochschule Kassel, 2004.

[5] VINCENZO VIVIANI (italienischer Mathematiker, 1622–1703)

Strecke $\overline{CP}$ (als Diagonale im Rechteck $CSPR$). Weiterhin ist $\overline{|CP|} + \overline{|PT|}$ größer als $\overline{|CT^*|}$. Also gilt für jeden Punkt P:

$$\left|\overline{PR}\right| + \left|\overline{PS}\right| + \left|\overline{PT}\right| \geq \left|\overline{PT}\right| + \left|\overline{PC}\right| \geq \left|\overline{PT^*}\right|.$$

Die Summe der Abstände zu den Dreiecksseiten wird also durch die Fußlotpunkte geprägt.

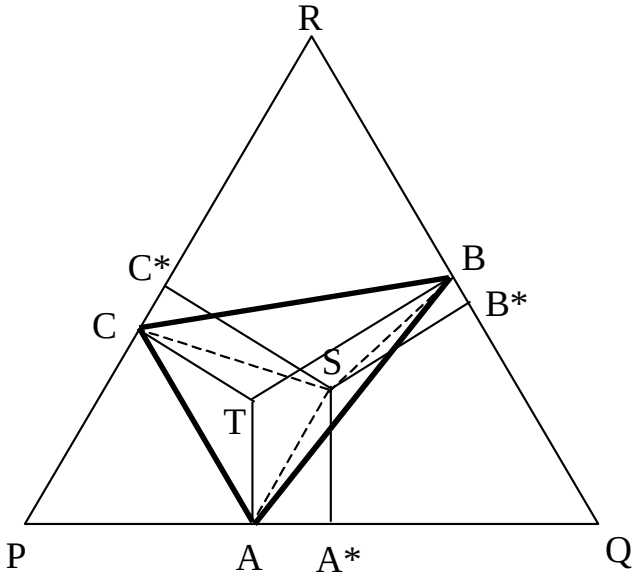
Im Folgenden untersuchen wir nicht die Summe der Abstände zu den Dreiecksseiten, sondern die Summe der Abstände zu den Eckpunkten eines Dreiecks. Wenn es einen Punkt gibt, der diese Summe minimiert, so wird er FERMAT-Punkt genannt (da FERMAT[6] in seinem Manuskript „MAXIMA ET MINIMA“ die Aufgabe stellte *„Gegeben sind drei Punkte, gesucht ist ein vierter Punkt, so dass die Summe seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird.“,* selbst aber keine Lösung veröffentlichte).

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Der Punkt T sei so gewählt, dass die Strecken $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ und $\overline{TC}$ bei T gleiche Winkel bilden (also jeweils $120°$). Nun zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck PQR derart, dass dessen Seiten auf TA, TB und TC senkrecht stehen. Dies ist problemlos möglich, da z.B. im Viereck $TBRC$ die gegenüberliegenden Winkel zusammen $180°$ ergeben (zwei rechte Winkel), folglich beträgt der Innenwinkel bei R $180° - 120° = 60°$.

Fällen wir nun von einem beliebigen, von T verschiedenen inneren Punkt S die Lote auf die Seiten des gleichseitigen Dreiecks PQR, so gilt

$$\left|\overline{TA}\right| + \left|\overline{TB}\right| + \left|\overline{TC}\right| = \left|\overline{SA^*}\right| + \left|\overline{SB^*}\right| + \left|\overline{SC^*}\right|$$

Nun gelten aber im rechtwinkligen Dreieck A^*SA die Ungleichung $\left|\overline{SA^*}\right| \leq \left|\overline{SA}\right|$ und ebenso die entsprechenden Ungleichungen für die Punkte *B, B** bzw. *C, C*,* also minimiert der Punkt *T* die Summe.

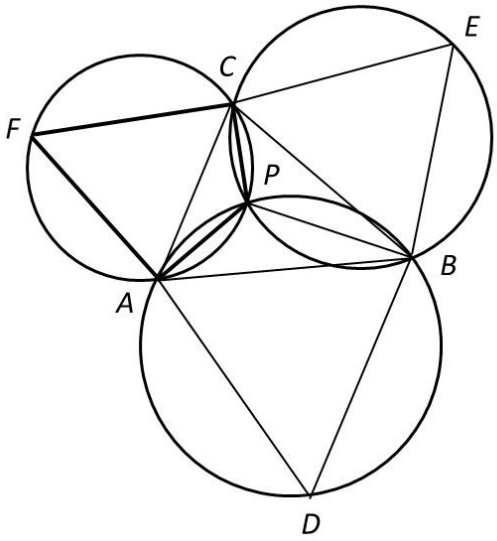


Wir konstruieren nun einen solchen Punkt. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz. In einem Dreieck ABC mit Innenwinkeln kleiner als $120°$ schneiden sich die Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ABD, BCE und ACF in einem Punkt.

[6] PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker; 1601 bis 1665)

Beweis: Die Umkreise der Dreiecke ACF und ABD schneiden sich im Punkt A und in einem weiteren Punkt P. Betrachten wir das Viereck $FAPC$, das laut Konstruktion ein Sehnenviereck ist (weil alle vier Eckpunkte auf dem Umkreis liegen). Da sich im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel zu $180°$ ergänzen und im aufgesetzten gleichseitigen Dreieck ACF der Winkel $\sphericalangle AFC = 60°$ beträgt, finden wir $\sphericalangle CPA = 120°$.



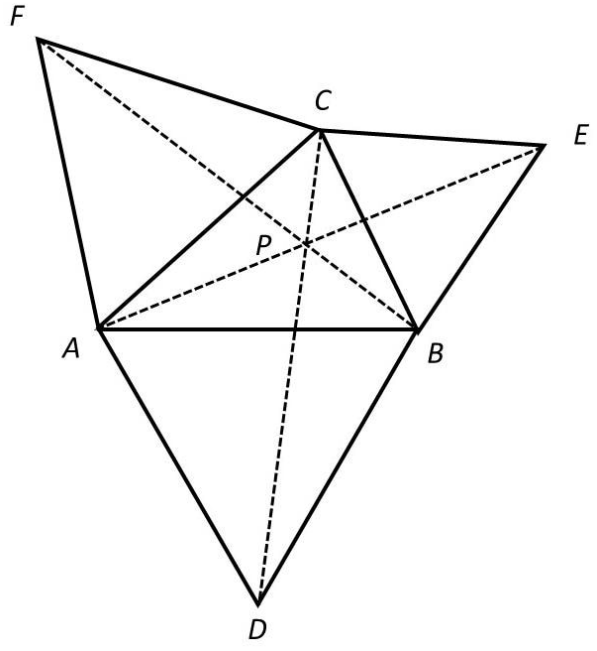
Auch das Viereck $ADBP$ ist ein Sehnenviereck. Deshalb können wir mit ähnlicher Argumentation von $\sphericalangle BDA = 60°$ auf $\sphericalangle APB = 120°$ schließen.

Wegen $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPA + \sphericalangle BPC = 360°$ erhalten wir unmittelbar $\sphericalangle BPC = 120°$.

Nach Umkehrung des Sehnensatzes ist das Viereck $BECP$ ebenfalls ein Sehnenviereck, weil sich die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle BPC$ und $\sphericalangle CFB$ zu $180°$ ergänzen. Somit liegt der Punkt P auch auf dem Umkreis des Dreiecks BCF. ❑

Wir zeigen nun noch, dass sich dieser gemeinsame Punkt P sehr leicht konstruieren lässt.

Satz. In einem Dreieck ABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° sei P der gemeinsame Punkt der Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ABD, BCE und ACF. Dann liegen A, P, E und B, P, F und C, P, D jeweils auf einer Geraden.



Beweis: Die Dreiecke ADC und ABF sind ähnlich (SWS), denn

- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ACF gilt $|\overline{AC}| = |\overline{AF}|$,
- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ABD gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ und
- $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAC = 60° + \sphericalangle BAC = \sphericalangle FAC + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAF$.

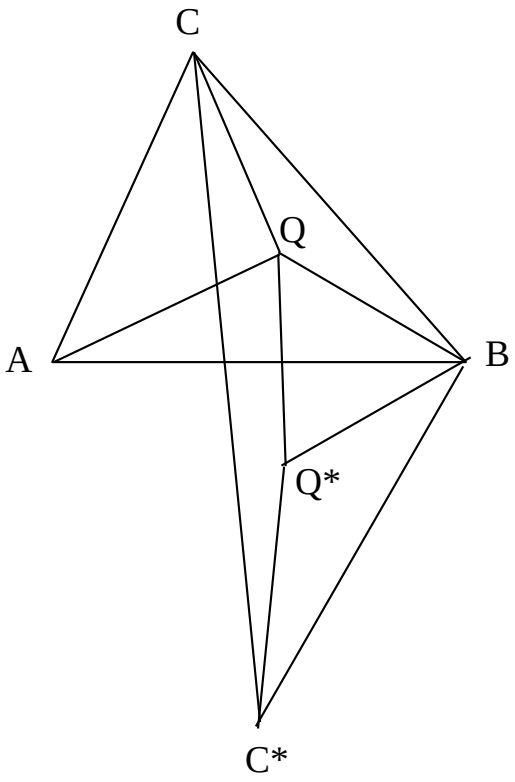
Damit stimmen auch die Winkel $\sphericalangle AFB$ und $\sphericalangle ACD$ überein. Wenden wir im Dreieck CFP den Innenwinkelsummensatz an, erhalten wir:

$$\sphericalangle CPF + (60° - \sphericalangle AFB) + (60° + \sphericalangle ACD) = 180°, \text{ also } \sphericalangle CPF = 60°.$$

Mit entsprechender Argumentation zeigen wir, dass auch $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPE = 60°$ gilt.

Da wir die Größen der Winkel $\sphericalangle FPD = \sphericalangle DPE = \sphericalangle EPF = 120°$ kennen, erhalten wir $\sphericalangle APE = \sphericalangle BPF = \sphericalangle CPD = 180°$ und schließen daraus, dass A, P, F und B, P, G und C, P, E jeweils kollinear sind. ❑

Aufgrund dieser Überlegung finden wir für ein beliebiges Dreieck ABC mit Innenwinkeln kleiner als $120°$ folgende Konstruktionsvorschrift für den FERMAT-Punkt: Wir konstruieren die gleichseitigen Dreiecke über den Dreiecksseiten nach außen (z.B. ABC^* über $\overline{AB}$) und verbinden die neuen Ecken A^*, B^* und C^* mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B bzw. C. Diese drei Verbindungsstrecken schneiden sich ein einem Punkt P, dem gesuchten FERMAT-Punkt.



Im Jahr 1929 wird von J. E. HOFMANN[7] die Existenz des FERMAT-Punktes geometrisch begründet: Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Innenwinkel alle kleiner als 120° sind. Wir wählen im Innern einen Punkt Q und verbinden ihn mit den Ecken des Dreiecks. Drehen wir die Figur um den Punkt B um 60°, so sind die Dreiecke BQQ^* und ABC^* gleichseitig (Bezeichnung wie in nebenstehender Skizze).

Die Streckenzüge $|\overline{CQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{AQ}|$ und $|\overline{CQ}| + |\overline{QQ^*}| + |\overline{QC^*}|$ haben die gleiche Länge, wobei der zweitgenannte Streckenzug unabhängig von Q immer in C^* endet.

Offensichtlich ist die Länge des zweitgenannten Streckenzuges minimal, wenn Q und Q^* auf der Geraden durch C und C^* liegen.

Aus dieser Argumentation lässt sich folgende Konstruktion herleiten:

Wir konstruieren auf $\overline{AB}$ das gleichseitige Außendreieck ABC^* und verbinden C mit C^*. Um auf der Geraden CC^* den Punkt F zu finden, für den $\sphericalangle AFB = 120°$ erfüllt wird, zeichnen wir den Umkreis des Dreiecks ABC^*. Der Schnittpunkt F mit CC^* ist der FERMAT-Punkt, da das Viereck AC^*BF ein Sehnenviereck ist.

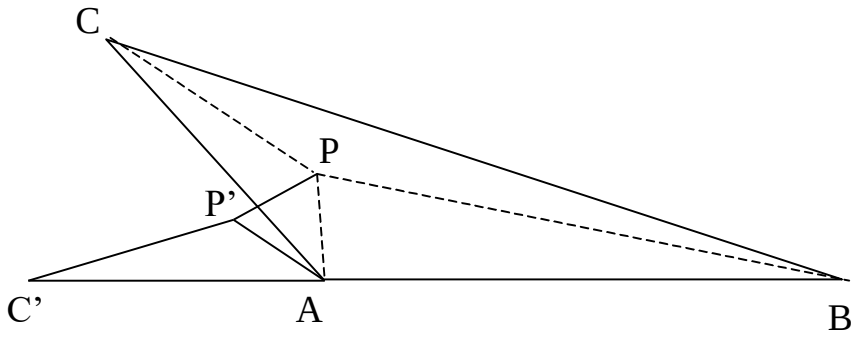
Den FERMAT-Punkt können wir auch experimentell finden: Wir zeichnen das Dreieck ABC auf eine Tischplatte und bohren an den Eckpunkte Löcher durch die Platte. Drei

[7] JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN (deutscher Mathematik-Historiker, 1900 - 1973)

Schnüre werden in einem Punkt P verknotet. Die drei Enden werden durch diese Löcher geführt (möglichst über Rollen, um die Reibungsverluste zu minimieren) und mit gleich schweren Gewichten belastet. Dann werden die drei in P angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Dies ist nur möglich, wenn die Richtungen der drei Kräfte jeweils einen Winkel von $120°$ einschließen.

Gibt es auch in stumpfwinkligen Dreiecken, bei denen der stumpfe Winkel größer als $120°$ ist, einen FERMAT-Punkt?

Wir nehmen an, im Dreieck ABC mit $a > 120°$ gäbe es einen Punkt P im Innern des Dreiecks, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten minimal sei.



Wir drehen das Dreieck APC um den Punkt A gegen den Uhrzeiger so, dass der Punkt C' auf die Gerade AB fällt. Der Drehwinkel ist (wegen $a > 120°$) kleiner als $60°$. Deshalb ist die Strecke $\overline{PP'}$ kleiner als die Strecke $\overline{AP}$. Somit gilt:

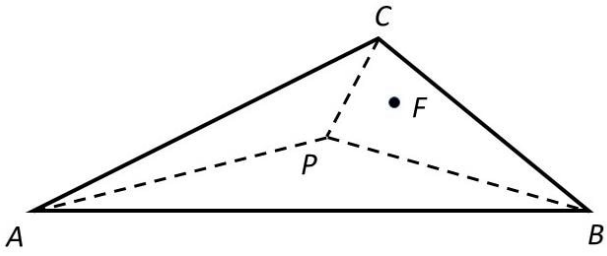
$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| > |\overline{PP'}| + |\overline{PB}| + |\overline{P'C'}| > |\overline{BC'}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC'}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität der Abstandssumme für den Punkt P. ❑

Satz. In einem Dreieck mit einem stumpfen Winkel realisiert der Eckpunkt mit dem stumpfen Winkel die kleinste Summe der Abstände zu den Eckpunkten.

Beweis: Wir betrachten dazu ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC > 120°$. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt P im Innern des Dreiecks mit minimaler Summe

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| < |\overline{AC}| + |\overline{AB}|.$$



Da wegen $\sphericalangle BAC > 120°$ erst recht $\sphericalangle BPC > 120°$ gilt, muss mindestens einer der Winkel $\sphericalangle APC$ oder $\sphericalangle APC$ kleiner als $120°$ sein. O.B.d.A. nehmen wir an, dass dies im Dreieck ABP erfüllt sei. Dann gibt es im Innern dieses Teildreiecks einen Punkt F mit

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FP}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}|.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt zudem $|\overline{CF}| < |\overline{CP}| + |\overline{PF}|$. Die Addition der beiden Ungleichungen führt zu

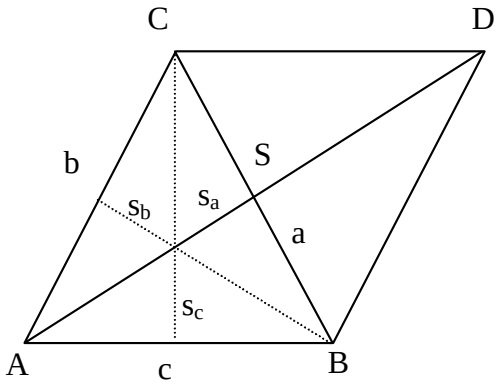
$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}|,$$

im Widerspruch zur angenommenen Minimalität der Summe für den Punkt P. Also realisiert C den FERMAT-Punkt im Dreieck mit stumpfem Winkel bei C. ❑

In den Aufgaben der Mathematik-Olympiade standen mehrfach die Summe der Abstände eines Punktes zu den Dreiecks-Eckpunkten im Mittelpunkt. So wurde bereits zur 2. Mathematik-Olympiade 1962/63 in der 4. Runde der Klassenstufe 10 folgende Aufgabe gestellt:

MO021045. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Lösungshinweise: Sind A, B, C die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen für die Seiten a, b, c und die Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet (s. nebenstehende Skizze), so ist zu zeigen



$$s_a + s_b + s_c < a + b + c.$$

Diese Ungleichung würde unmittelbar aus den drei Ungleichungen

$$2 \cdot s_a < b + c \quad , \quad 2 \cdot s_b < c + a \quad , \quad 2 \cdot s_c < a + b$$

durch deren Addition und anschließender Division durch 2 folgen. Wegen der Symmetrie der Bezeichnungen genügt es, wenn wir eine der drei Relationen beweisen, beispielsweise $2 \cdot s_a < b + c$.

Ist D der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch C mit der Parallelen zu g_{AC} durch B (der Punkt D existiert, weil die Seiten c und b nicht parallel sind), so ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm. Daher gilt $|\overline{BD}| = |\overline{CA}| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von $\overline{AD}$ als auch von $\overline{BC}$. Folglich ist AS Seitenhalbierende von ΔABC und weil sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren, gilt:

$$|AD| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot s_a$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck ABD mit den Seitenlängen c, b und $2 \cdot s_a$ die zu beweisende Ungleichung. ❑

Ergänzung: Wir finden in Formelsammlungen über die Zusammenhänge in

allgemeinen Dreiecken für die Seitenhalbierende s_c und die Seiten a, b, c die Gleichung $s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$. Durch einfaches Zusammenfassen der drei durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen entstehenden Gleichungen führt dies zur Formel:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Daraus wegen $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < a^2 + b^2 + c^2$ ohne weitere Argumentation auf die gesuchte Ungleichung zu schließen (also nur durch Weglassen der Quadrate), kann nicht korrekt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zwar gilt $64 + 64 + 64 < 169 + 9 + 16$,
aber es ist $8 + 8 + 8 > 13 + 3 + 4$.

Wir erkennen jedoch leicht, warum dieses Gegenbeispiel nicht passend ist: 3, 4 und 13 können (wegen der Verletzung der Dreiecksungleichung) nicht Seitenlängen eines Dreiecks sein. Gehen wir aber beispielsweise von der Ungleichung $b < a + c$ aus, so folgt nacheinander:

$$\begin{aligned}
&|b - a| < c \\
&b^2 - 2ab + a^2 < c^2 \\
&2 \cdot (b^2 + a^2) - c^2 < b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2 \\
&s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2} < \frac{a + b}{2}
\end{aligned}$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen zu s_a und s_b lässt sich nun unmittelbar auf die behauptete Ungleichung schließen.

Aufgabe MO501023. Im Innern eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u. Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette $\frac{1}{2}u < x + y + z < u$ gilt.

Vorbemerkung: Wählen wir für D den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt nach dieser Ungleichungskette stets

$$\frac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) < u,$$

also $s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}u$.

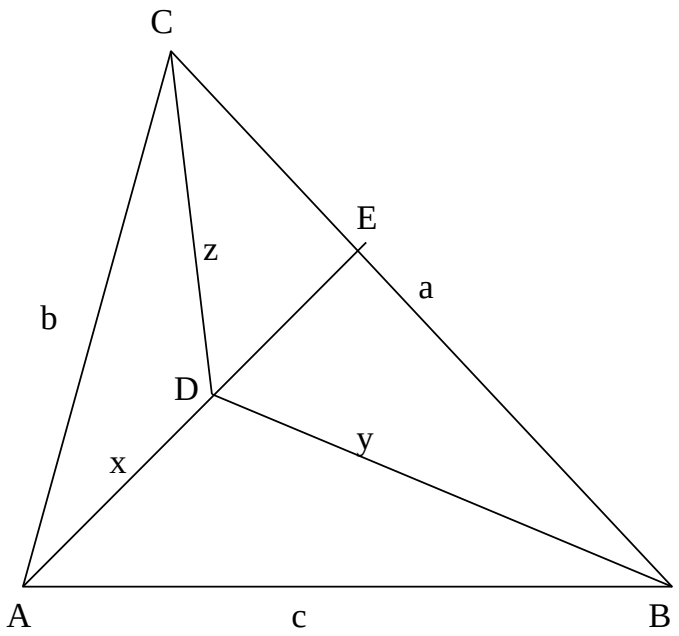
In Aufgabe MO021045 wurde aber bereits eine strengere Ungleichung bewiesen. Damit stellt sich die Frage, ob die Ungleichung dieser MO-Aufgabe sehr grob ist.

Betrachten wir deshalb beispielsweise ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und damit mit dem Umfang 3, so beträgt die Abstandsumme zu den Eckpunkten für

den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Wählen wir dagegen einen Eckpunkt als Punkt aus, so ist dessen Abstandssumme 2. In beiden Fällen ist diese Abstandssumme deutlich kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Betrachten wir jedoch ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Grundseite $\overline{AB}$ sehr klein im Vergleich zu den Dreiecksschenkeln ist, und wählen wir als Punkt P den Eckpunkt C, so ist dessen Abstandssumme zu den Eckpunkten nur wenig kleiner als der Dreiecksumfang. Wir können also die (rechte) Ungleichung aus Aufgabe MO501023 im Allgemeinen nicht verschärfen.

Lösungshinweise: Es sei D ein innerer Punkt und die Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks ABC werden (wie in der Skizze ersichtlich) mit x, y und z bezeichnet.



Dann gelten nach der Dreiecksungleichung:

$$a < y + z$$
$$b < x + z$$
$$c < x + y$$

Zusammenfassend erhalten wir die linke Seite der behaupteten Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{u}{2} < x + y + z.$$

Um die rechte Seite der Ungleichung zu zeigen, bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden durch A und D mit der Seite BC mit E. Wieder mittels Dreiecksungleichung im Dreieck *AEC* folgt:

$$x + \left|\overline{DE}\right| < b + \left|\overline{CE}\right|$$
also $$x + |\overline{DE}| + |\overline{BE}| < b + |\overline{CE}| + |\overline{BE}| = b + a.$$

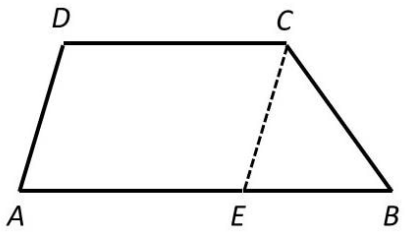
Wegen $y < \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{BE}\right|$ ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck BED die Ungleichung $x + y < a + b$. In ähnlicher Weise können die Ungleichungen $x + z < a + c$ und $y + z < b + c$ gezeigt werden. In der Zusammenfassung dieser drei Ungleichungen folgt unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung. ❑

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil III)

Während aus den drei Seitenlängen eines Dreiecks (sofern die Dreiecksungleichungen erfüllt sind) das zugehörige Dreiecke konstruiert werden kann, ist ein Viereck durch Vorgaben der vier Seitenlängen noch nicht eindeutig bestimmt. Es ist eine weitere Bestimmungsgröße erforderlich, also mindestens fünf Angaben. Als Gedankenstütze können wir uns dazu vorstellen, aus drei Bestimmungsstücken ein „halbes" Viereck (das Teildreieck aus zwei Viereckseiten und einer Diagonalen) konstruieren zu können. Diese nun verfügbare Diagonalenlänge zusammen mit den beiden anderen Bestimmungsstücken genügen, das zweite Teildreieck zu konstruieren. Wenn nicht anders angegeben, werden die Bestimmungsstücke wie im allgemeinen Viereck üblich bezeichnet. Allerdings kann das fünfte Bestimmungsstück durch Eigenschaften der zu konstruierenden Figur implizit gegeben sein.

Aufgabe. Es ist ein Trapez aus den Seitenlängen a, b, c und d zu konstruieren.

Lösungshinweise – Analyse: Aus der Skizze ist leicht zu erkennen, dass sich das Trapez aus einem Parallelogramm $AECD$ mit den Seitenlängen c und d und einem Dreieck EBC mit den Seitenlängen $a - c$, b und d zusammensetzt. Dabei ist E der Schnittpunkt der zu $\overline{AD}$ parallelen Geraden durch C mit der Grundseite $\overline{AB}$ oder deren Verlängerung.



Wir beginnen mit der *Konstruktion* des Teildreiecks EBC aus den gegebenen drei Seitenlängen, verlängern die Seite $\overline{EB}$ über E hinaus zu A mit $\overline{AB} = a$, zeichnen die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C, tragen auf dieser die Länge $\overline{DC} = c$ ab und verbinden A mit D. Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

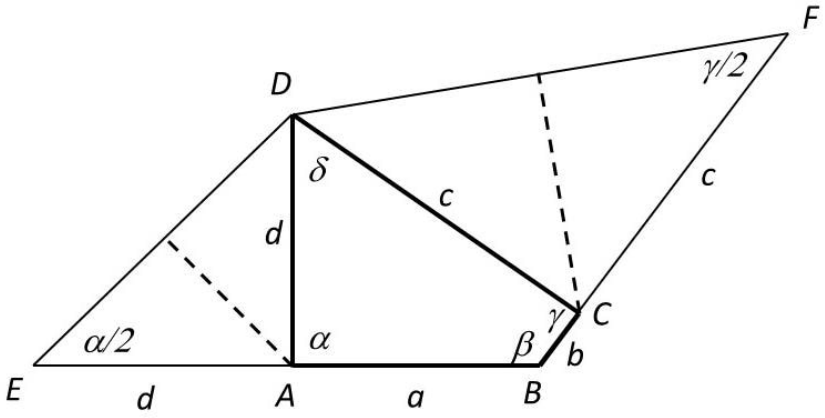
Die Konstruktion ist *eindeutig* ausführbar und die gesuchte Figur *existiert*, wenn das Dreieck EBC konstruierbar ist. Die Seitenlängen $a - c, b$ und d (mit $a > c$) müssen also die Dreiecksungleichungen erfüllen. Gilt $a < c$, ist die Konstruktion entsprechend anzupassen. ❑

Aufgabe. Es ist ein Viereck zu konstruieren, wenn[8] $a + d, b + c$ und die Winkelgrößen α, γ, δ gegeben sind.

Lösungshinweise – Analyse: Es sei $ABCD$ ein Viereck der verlangten Art. Wir verlängern die Seite $\overline{AB} = a$ von A aus um $\overline{AE} = d$ und $\overline{BC} = b$ von C aus um $\overline{CF} = c$. Die entstehenden Dreiecke ADE und DCF sind gleichschenklig. Damit kennen wir die Innenwinkel am Punkt E, $|\sphericalangle AED| = \frac{1}{2} \cdot \alpha$ als die Hälfte des

[8] Diese Schreibweise bedeutet, dass die Summe der Längen gegeben ist, ohne die Einzellängen zu kennen.

Außenwinkels im Punkt A, und am Punkt F, $|\sphericalangle DFC| = \frac{1}{2} \cdot \gamma$ als die Hälfte des Außenwinkels im Punkt C.



Aus diesen Zusammenhängen können wir die *Konstruktion* ableiten:

- An einem beliebigen Punkt B zeichnen wir einen Winkel der Größe $\beta = 360° - (\alpha + \gamma + \delta)$.
- Auf den Schenkeln tragen wir die Längen $\overline{BE} = a + d$ bzw. $\overline{BF} = b + c$ ab.
- Zeichnen wir nun in E einen Winkel der Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$ und in F einen Winkel der Größe $\frac{1}{2} \cdot \gamma$, so schneiden sich die freien Schenkel in einem Punkt D.
- Tragen wir abschließend von D aus Winkel der Größen $\frac{1}{2} \cdot \alpha$ und $\frac{1}{2} \cdot \gamma$ ab, so finden wir mit den Schnittpunkten der freien Schenkel mit $\overline{EB}$ den Punkt A und mit $\overline{BF}$ den Punkt C.

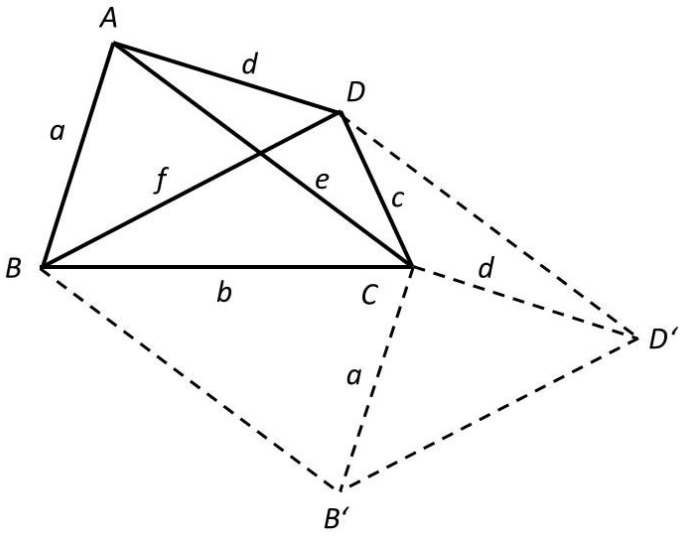
Das Viereck $ABCD$ ist die gesuchte Figur. Der *Beweis* ist in der Analyse gegeben.

Eindeutigkeit: Die Konstruktion ist eindeutig bestimmt (in jedem Konstruktionsschritt wird genau ein neuer Punkt erzeugt).

Existenz: Gilt $180° < \alpha + \gamma + \delta < 360°$, so ist die Konstruktion stets ausführbar. Gilt dagegen $\alpha + \gamma + \delta < 180°$ und damit $\beta > 180°$ ist in einer gesonderten Betrachtung zu erklären, wie die Konstruktionsschritte auszuführen sind. Dieser Sonderfall führt jedoch dazu, dass die Bezeichnung der Bestimmungsstücke nicht der üblichen Reihenfolge entspricht. ❑

Aufgabe. Es ist ein Viereck aus den Längen a, c, e und f (wobei e und f die beiden Diagonalen bezeichnen) und der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel zu konstruieren.

Lösungshinweise – Analyse: Es sei $ABCD$ das gesuchte Viereck. Wir tragen die gegebenen Bestimmungsstücke ein, $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ sowie $\overline{AC} = e$, $\overline{DB} = f$ mit dem Schnittpunkt K und eingeschlossenem Winkel $\sphericalangle BKC$. Wir verschieben das Dreieck ABD parallel zur Strecke $\overline{AC}$ und erhalten die Punkte $A' = C$, B' und D'. Das Parallelogramm $BB'D'D$ hat die Seitenlängen e und f mit dem eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle B'BD = \sphericalangle BKC$.

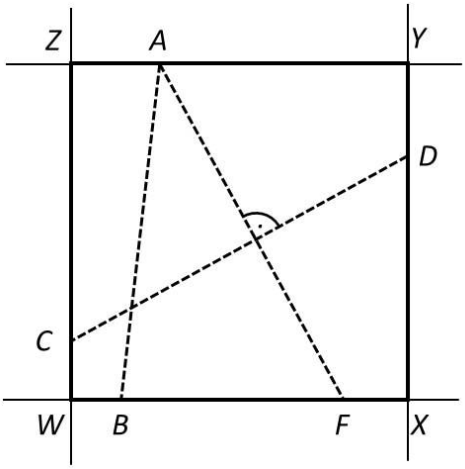


Die *Konstruktion* des Parallelogramms $BB'D'D$ bereitet keine Schwierigkeiten. Den Punkt C erhalten wir als Schnittpunkt des Kreises um B' mit dem Radius a und des Kreises um D mit dem Radius c. Auf der Parallele zu $\overline{BB'}$ durch C finden wir den Punkt A mit $\overline{AC} = e$.

Eindeutigkeit: Die Konstruktion des Parallelogramms ist stets eindeutig ausführbar. Die beiden Kreise um B' und D schneiden sich in zwei Punkten. Der Punkt A ist dagegen wieder eindeutig konstruierbar. Es sind also zwei Figuren möglich.

Existenz: Für eine erfolgreiche Konstruktion ist die Einhaltung der Dreiecksungleichung $a + c \geq e$ erforderlich. Andernfalls lässt sich der Punkt C nicht ermitteln. Weitere Beschränkungen bestehen nicht. ❑

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.



Lösungshinweise: Es seien die Punkte A, B, C und D vorgegeben. Wir fällen von A das Lot auf die Gerade durch C und D und tragen die Länge der Strecke $\overline{CD}$ von A aus auf $\overline{AF}$ ab. Wir zeichnen die Gerade durch B und F und fällen die Lote von C auf BF (mit dem Fußpunkt W) und von D auf BF (mit dem Fußpunkt X). Die Strecke $\overline{WX}$ ist die gesuchte Quadratseite.

Zur Vervollständigung des Quadrates konstruieren wir die Parallele zu WX durch A. Abschließend errichten wir die Senkrechten in W und X und erhalten die Schnittpunkte Z bzw. Y mit dieser Parallelen. Das Viereck $WXYZ$ erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung. ❑

(wird fortgesetzt)

Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22.

Auf einer Digitaluhr werden der Tag, der Monat, die Stunden, die Minuten und die Sekunden jeweils als zweistellige Zahlen dargestellt, also im Format TT.MM.hh:mm:ss.

Wie viele Zeitpunkte gibt es im Jahr, wenn dabei alle zehn Ziffern 0, 1, …, 9 genau einmal auftreten?

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Ziffern in der angegebenen Reihenfolge mit $T_1, T_2, M_1, M_2, h_1, h_2, m_1, m_2, s_1, s_2$. Aufgrund der Inhalte dieser Variablen müssen wir einige Wertebereiche einschränken:

E1: $T_1 \in \{0,1,2,3\}$, $T_2 \in \{0,1\}$ falls $T_1 = 3$,
E2: $M_1 \in \{0,1\}$, $M_2 \in \{0,1,2\}$ falls $M_1 = 1$,
E3: $h_1 \in \{0,1,2\}$, $h_2 \in \{0,1,2,3\}$ falls $h_1 = 2$,
E4: $m_1, s_1 \in \{0,1,\dots,5\}$.

Alle anderen Ziffern können $0,1,\dots,9$ sein. Wir führen eine Fallunterscheidung unter Berücksichtigung von E1.

(1) $T_1 = 0$. Dann muss $M_1 = 1$ (weil 0 bereits vergeben ist, E2) und $h_1 = 2$ (weil 0 und 1 bereits vergeben sind, E3) gelten. Nun gibt es keine zulässige Ziffer für M_2 (weil 0, 1, 2 bereits vergeben sind, E2), d.h. in diesem Fall kann es keine Zeitpunkte geben, die sich mit zehn verschiedenen Ziffern darstellen lassen.

(2) $T_1 = 1$. Dann muss $M_1 = 0$ (weil 1 bereits vergeben ist, E2), $h_1 = 2$ (weil 0 und 1 bereits vergeben sind, E3) und $h_2 = 3$ gelten (weil 0, 1 und 2 bereits vergeben sind, E3). Damit verbleiben die zwei Möglichkeiten $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ bzw. umgekehrt $m_1 = 5$ und $s_1 = 4$ (weil 0, 1, 2 und 3 bereits vergeben sind, E4). Auf den vier noch nicht besetzten Stellen können die verbleibenden Ziffern 6 bis 9 beliebig verteilt werden. Dafür gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $2 \cdot 24 =$ **48 Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

(3) $T_1 = 2$ und $M_1 = 0$. Dann muss $h_1 = 1$ gelten (weil 0 und 2 bereits vergeben sind, E3). Nun gibt es sechs Möglichkeiten, m_1 und s_1 aus den verbleibenden zulässigen Ziffern 3 bis 5 auszuwählen (weil 0, 1 und 2 bereits vergeben sind, E4). Wurde diese Auswahl getroffen, verbleiben fünf Ziffern zur Verteilung auf die noch fünf nicht besetzten Stellen. Jede Verteilung führt zu einer gültigen Darstellung, also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $6 \cdot 120 =$ **720 Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

(4) $T_2 = 2$ und $M_1 = 1$. Dann muss $h_1 = 0$ gelten (weil 1 und 2 bereits vergeben sind, E3). Damit lässt sich M_2 mit den verbleibenden Ziffern nicht belegen (weil 0, 1 und 2 bereits vergeben sind, E2).

(5) $T_1 = 3$ und $T_2 = 0$. Daraus folgt zwingend $M_1M_2 = 12$, womit aber h_1 nicht mehr korrekt belegt werden kann (weil 0, 1, 2 und 3 bereits vergeben sind, E2).

(6) $T_1 = 3$ und $T_2 = 1$. Daraus folgt zwingend $M_1 = 0$ (weil 1 bereits vergeben ist, E2) und $h_1 = 2$ (weil 0 und 1 bereits vergeben sind, E3), womit aber h_2 nicht mehr korrekt belegt werden kann (weil 0, 1, 2 und 3 bereits vergeben sind, E3).

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Somit gibt es $48 + 720 = \mathbf{768}$ **Zeitpunkte**, die mit zehn verschiedenen Ziffern dargestellt werden können.

Ergänzung: Es lässt sich nun der erste Zeitpunkt eines Jahres dieser Art leicht ermitteln.

Im Fall (2) kann der kleinste Wert den Monat 04 anzeigen (weil $M_1 = 0$, $T_1 = 1$, $h_1 = 2$ und $h_2 = 3$ bereits vergeben sind).

Da jedoch im Fall (3) der Monat 03 möglich ist, gilt es diesen Ansatz zu verfolgen. Da die Ziffern $M_1 = 0$, $h_1 = 1$, $T_1 = 2$ und $M_2 = 3$ bereits vergeben sind, muss $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ gewählt werden (E4).

Daraus folgt: Das erste Mal in einem Jahr werden alle zehn Ziffern am **26.03. 17:48:59** verwendet.

Ebenso lässt sich der letzte Zeitpunkt eines Jahres ermitteln, bei dem alle zehn Ziffern zu verwenden sind.

Unter Berücksichtigung der Fälle (4), (5) und (6) könnte aus dem Fall (3) der späteste Zeitpunkt mit $T_1 = 2$, $M_1 = 0$ und $h_1 = 1$ möglich sein. Wir suchen deshalb eine Lösung mit $M_2 = 9$ und $T_2 = 8$.

Wir finden: Das letzte Mal in einem Jahr werden alle zehn Ziffern am **28.09. 17:56:43** verwendet.

Monatsaufgabe[9] 2/23. Einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist ein Dreieck DEF mit minimalem Umfang einzubeschreiben, wobei auf jeder Dreiecksseite des Dreiecks ABC eine Ecke des Dreiecks DEF liegt.

[9] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.04.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 18.02 – Der Satz des THALES 3
Konstruktion des FERMAT-Punktes 7
Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil III) 15
Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22. 18
Monatsaufgabe 2/23. 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[10]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

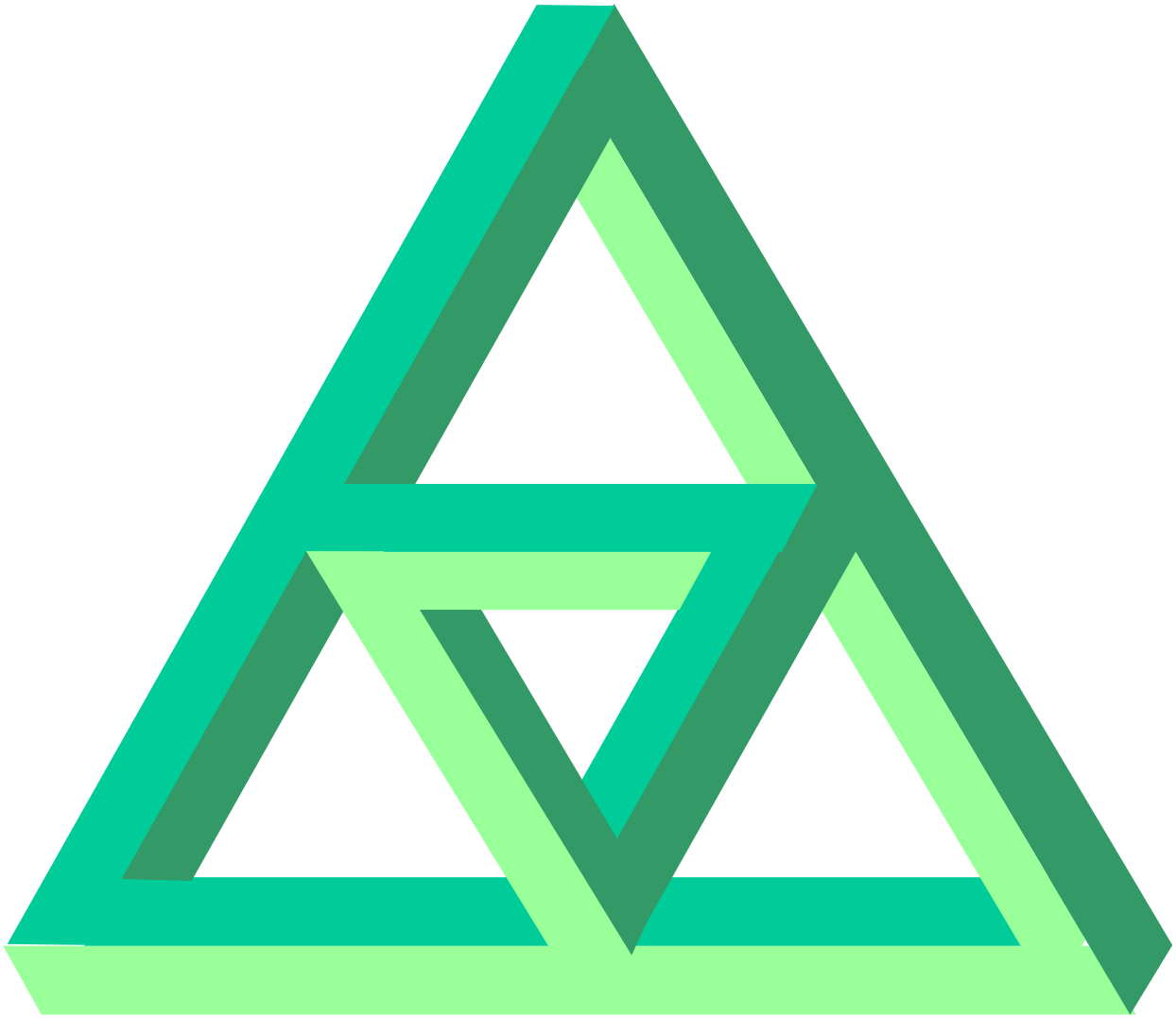
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 4/2023 (April 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgaben **MO620934/MO621034** werden Beispiele gezeigt, in denen Mischungsverhältnisse zu berechnen sind. Im Vergleich zu den Aufgaben **MO600921/MO601021** ist zu erkennen, wie die Thematik in der Komplexität gesteigert wurde. Dies könnte anregen, ähnliche Aufgabenstellungen zu formulieren.

Wir schließen die Beiträge zu Konstruktionsaufgaben ab und verwenden als Bestimmungsstücke auch die Längen der Radien von In- und Umkreisen. Eine Lösungsvariante führt zu mathematischen Sätzen über innere und äußere Tangenten an zwei Kreisen. Beim Blick in alte Mathe-Bücher fanden wir einen Beitrag von 1947 über eine Konstruktionsaufgabe, die im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal gelingt.

Ein Rückblick zum 5. Tag der Mathematik an der Technischen Universität Chemnitz rundet das Heft ab.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 21 – Mischungsverhältnisse

Aufgabe 21.01 – MO620934/MO621034. Frank experimentiert mit Flüssigkeiten. Hierfür hat er drei Gefäße mit jeweils 3 Litern Fassungsvermögen. Zu Beginn befinden sich im Gefäß A genau 1 Liter Aceton, im Gefäß B genau 1 Liter Methanol und im Gefäß C genau 1 Liter Wasser. Ansonsten befindet sich nichts in den Gefäßen. Die drei Flüssigkeiten sind mischbar.

Frank beginnt nun, jeweils einen Teil der Flüssigkeit von einem Gefäß in ein anderes umzuschütten. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass keine Flüssigkeit verloren geht und die Flüssigkeiten sich sofort und ohne Volumenänderung mischen. Frank schüttet insgesamt 6-mal um, und zwar wie folgt:

Schritt	1	2	3	4	5	6
von Gefäß	A	B	C	C	A	B
nach Gefäß	B	A	A	B	C	C

a) Nach vier Schritten war das Gefäß C nicht leer. Zu wie viel Prozent bestand zu diesem Zeitpunkt die Flüssigkeit im Gefäß C aus Wasser?

Am Ende ist die Verteilung der Flüssigkeiten auf die Gefäße wie folgt (Angaben in Millilitern):

Gefäß	A	B	C
Aceton	702	176	122
Methanol	108	704	188
Wasser	180	200	620

b) Ermitteln Sie, wie viel Milliliter Flüssigkeit Frank in den letzten beiden Schritten jeweils umgeschüttet hat. Stellen Sie den Stand nach dem vierten Schritt in einer Tabelle wie oben dar.
c) Ermitteln Sie auch für die ersten vier Schritte, wie viel Milliliter Flüssigkeit Frank jeweils umgeschüttet hat. Stellen Sie den Stand nach dem zweiten Schritt in einer Tabelle wie oben dar.

Lösungshinweise Teil a): Da in den ersten vier Schritten keine Flüssigkeit in das Gefäß C hineingeschüttet wurde, besteht die Flüssigkeit im Gefäß C zu diesem Zeitpunkt zu 100% aus Wasser.

Lösungshinweise Teil b): Wir nehmen an, dass im fünften Schritt x Milliliter und im sechsten Schritt y Milliliter Flüssigkeit umgeschüttet wurden. Die Flüssigkeit im Gefäß

A besteht am Ende zu $\frac{702}{702+108+180} = \frac{39}{55}$ aus Aceton. An diesem Anteil hat die Entnahme von Flüssigkeit im fünften Schritt nichts geändert. Folglich war auch nach dem vierten Schritt der Aceton-Anteil im Gefäß A gleich $\frac{39}{55}$.

Analog war der Aceton-Anteil im Gefäß B nach dem vierten Schritt gleich $\frac{176}{176+704+200} = \frac{22}{135}$. Durch den fünften und sechsten Schritt wurden also insgesamt $\frac{39}{55}x + \frac{22}{135}y$ Milliliter Aceton in das Gefäß C umgefüllt. Da vorher kein Aceton im Gefäß C war, muss gelten

$$\frac{39}{55}x + \frac{22}{135}y = 122 \quad (1)$$

Argumentieren wir entsprechend mit Methanol, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{6}{55}x + \frac{88}{135}y = 188 \quad (2)$$

Multiplikation der Gleichung (1) mit 4 und anschließende Subtraktion von (2) ergibt:

$$\frac{4 \cdot 39 - 6}{55} \cdot x = 4 \cdot 122 - 188$$

$\frac{155}{50} \cdot x = 300$, also $x = 110$.

Einsetzen in (1) liefert $\frac{22}{135} \cdot y = 128 - 78 = 44$ und damit $y = 270$.

Nach dem vierten Schritt befanden sich $702 + \frac{39}{55} \cdot x = 780$ ml Aceton, $108 + \frac{6}{55} \cdot x = 120$ ml Methanol und $180 + \frac{10}{55} \cdot x = 200$ ml Wasser im Gefäß A.

Analog erhalten wir im Gefäß B $176 + \frac{22}{135} \cdot y = 220$ ml Aceton, $704 + \frac{88}{135} \cdot y = 880$ ml Methanol und $200 + \frac{25}{135} \cdot y = 250$ ml Wasser. Da es insgesamt jeweils 1 Liter Aceton, Methanol und Wasser gibt, ergeben sich die Werte folgender Tabelle:

Gefäß	A	B	C
Aceton	780	220	0
Methanol	120	880	0
Wasser	200	250	550

Lösungshinweise Teil c): Vor dem dritten Schritt befand sich im Gefäß C lediglich der Liter Wasser. Im dritten und vierten Schritt sind also 200 bzw. 250 ml umgeschüttet worden. Nach dem zweiten Schritt war die Verteilung also wie folgt:

Gefäß	A	B	C
Aceton	780	220	0
Methanol	120	880	0
Wasser	0	0	1000

Vor dem zweiten Schritt befand sich kein Methanol im Gefäß A. Der Anteil an Methanol im Gefäß B beträgt nach dem zweiten Schritt 80%; dieser Anteil ändert sich durch die Entnahme aus Gefäß B im zweiten Schritt nicht und entspricht auch dem Anteil an Methanol der umgefüllten Flüssigkeit. Von den v ml, die im zweiten Schritt umgefüllt wurden, sind also $0{,}8 \cdot v$ ml Methanol, und dieser Wert muss gleich 120 sein. Also folgt $v = 150$, und diese 150 ml bestanden zu 30 ml aus Aceton. Vor dem zweiten Schritt befanden sich also 750 ml Aceton im Gefäß A. Im ersten Schritt müssen also 250 ml Flüssigkeit (Aceton) umgefüllt worden sein. ❑

Diese Aufgabe hat einen direkten Vorgänger. Der Sachverhalt wirkte hier mit nur zwei verschiedenen Flüssigkeiten in seiner Komplexität wesentlich reduziert.

Aufgabe 21.02 – MO600921/MO601021. Frank experimentiert mit Flüssigkeiten. Dafür hat er zwei Gefäße A und B mit jeweils 1 Liter Fassungsvermögen. Zu Beginn befinden sich im Gefäß A genau 315 ml Methanol und 35 ml Wasser. Im Gefäß B befinden sich lediglich 175 ml Wasser.

a) Zu wie viel Prozent besteht die Flüssigkeit im Gefäß A aus Methanol?

Frank schüttet nun 50 ml aus dem Gefäß A in das Gefäß B.

b) Zu wie viel Prozent besteht die Flüssigkeit im Gefäß A nun aus Methanol? Zu wie viel Prozent besteht die Flüssigkeit im Gefäß B aus Methanol?

Frank will im nächsten Schritt zunächst x ml aus dem Gefäß B in das Gefäß A umschütten. Danach möchte er y ml aus dem Gefäß A in das Gefäß B schütten.

c) Wie müssen x und y gewählt sein, damit am Ende die Flüssigkeit im Gefäß A zu 80% und die Flüssigkeit im Gefäß B zu 30% aus Methanol besteht? Weisen Sie nach, dass x und y eindeutig bestimmt sind.

Hinweis: In den Gefäßen befinden sich nur die genannten Flüssigkeiten. Methanol mischt sich in jedem Verhältnis perfekt mit Wasser und beim Mischen soll das Volumen der Mischung gleich der Summe der Volumina der Ausgangsstoffe sein.

Lösungshinweise Teil a): Insgesamt befinden sich im Gefäß A genau $315 + 35 = 350$ ml Flüssigkeit, davon sind $\frac{315}{350} \cdot 100\% = 90\%$ Methanol.

Lösungshinweise Teil b): Der Anteil an Methanol im Gefäß A ändert sich durch das Ausschütten nicht, es sind weiterhin 90%. Von den 50 ml, die umgeschüttet werden,

sind 90% Methanol, also 45 ml; die übrigen 5 ml sind Wasser. Nach dem Umschütten befinden sich im Gefäß B also $175 + 5 = 180$ ml Wasser und 45 ml Methanol. Der Anteil an Methanol beträgt dann $\frac{45}{225} \cdot 100\% = 20\%$.

Lösungshinweise Teil c): Die x ml bestehen zu 20% aus Methanol, vor dem Umschütten dieser x ml befinden sich im Gefäß A genau 300 ml, von denen 270 ml Methanol sind. Nach dem Umschütten dieser x ml sind also im Gefäß A genau 300 + x ml Flüssigkeit, davon $270 + 0{,}2 \cdot x$ ml Methanol. Durch den letzten Schritt ändert sich der Methanol-Anteil im Gefäß A nicht, er soll also schon nach dem vorletzten Schritt 80% betragen. Es muss deshalb gelten

$$270 + 0{,}2 \cdot x = 0{,}8 \cdot (300 + x),$$

was zu $30 = 0{,}6 \cdot x$ und damit zu $x = 50$ führt. Vor dem letzten Schritt sind im Gefäß B genau 175 ml Flüssigkeit, davon 35 ml Methanol, und im Gefäß A genau 350 ml Flüssigkeit, davon 280 ml Methanol. Aus dem Gefäß A werden dann y ml Flüssigkeit umgeschüttet, davon 80% Methanol. Hinterher befinden sich im Gefäß B also $175 + y$ ml Flüssigkeit, davon $35 + 0{,}8y$ ml Methanol. Es muss also gelten

$$35 + 0{,}8 \cdot y = 0{,}3 \cdot (175 + y),$$

was zu $y = 35$ führt. Am Ende sind im Gefäß A genau 315 ml Flüssigkeit, davon 252 ml Methanol, was $\frac{252}{315} \cdot 100\% = 80\%$ entspricht. Im Gefäß B befinden sich 210 ml Flüssigkeit, davon 63 ml Methanol, was $\frac{63}{210} \cdot 100\% = 30\%$ entspricht.

Die linearen Gleichungen zur Bestimmung von x und y hatten jeweils genau eine Lösung, die damit berechneten Mengen waren auch für die jeweilige Umfüllung vorhanden und führten zu den geforderten Methanol-Anteilen im jeweiligen Gefäß. Damit sind x und y tatsächlich eindeutig bestimmt. ❑

Aufgabe 21.03 – MO580921/MO581021. Peggy hält für die Gäste ihrer Party eine volle 2-Liter-Kanne mit dem Getränk „KiBa“ bereit. KiBa ist eine Mischung aus Kirsch- und Bananensaft.

Der erste Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt sofort die entnommene Menge, indem sie in gleicher Menge reinen Bananensaft nachfüllt. Der zweite Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt die entnommene Menge diesmal mit reinem Kirschsaft. (Wir gehen davon aus, dass die beiden Saftsorten in der gesamten Kanne überall gleichmäßig vermischt sind.)

a) Angenommen, am Anfang waren es 1200 ml Kirschsaft und 800 ml Bananensaft. Berechnen Sie den prozentualen Kirschsaftanteil

   – im Becher des ersten Gastes,

– im Becher des zweiten Gastes,
– in der Kanne nach dem zweiten Wiederauffüllen.

b) Ermitteln Sie das erforderliche Verhältnis Ki : Ba (Kirschanteil zu Bananenanteil) in der Ausgangsmenge, wenn der zweite Gast nach dem Auffüllen durch Bananensaft KiBa im Mischungsverhältnis 1 : 1 erhalten soll.

Lösungshinweise Teil a): Der erste Gast hat 1200/2000, also 60% Kirschanteil. Der erste Gast entnimmt mit seinem Becher 120 ml Kirschanteil und 80 ml Bananenanteil. Da danach nur Bananensaft nachgefüllt wird, hat die neue Mischung 1200 ml – 120 ml = 1080 ml Kirschsaft.

Der zweite Gast erhält damit einen Kirschanteil von 1080/2000, das sind 54%. Damit entnimmt er mit seinen 200 ml auch 108 ml Kirschsaft, und dann werden 200 ml Kirschsaft nachgefüllt. In der Kanne sind somit 1172 ml Kirschsaft, das ist ein Anteil von 58,6%.

Lösungshinweise Teil b): Da der zweite Gast das Verhältnis 1 : 1 vorfinden soll, muss die Mischung nach dem Auffüllen von 200 ml reinem Bananensaft 1000 ml Bananensaft und 1000 ml Kirschsaft enthalten. Also müssen vor dem Nachfüllen 800 ml Bananensaft und 1000 ml Kirschsaft enthalten sein. Damit muss anfangs für das Mischungsverhältnis Ki : Ba = 1000 : 800 = 5 : 4 gelten. ❑

Aufgabe 21.04 – MO490923. Gegeben sind zwei kleine Fässer F1 und F2 mit einem Fassungsvermögen von jeweils 10 Litern. In dem Fass F1 befinden sich 4 Liter der Flüssigkeit A. Im Fass F2 sind 2 Liter der Flüssigkeit B. Die beiden Flüssigkeiten A und B besitzen die gleiche Dichte und sind miteinander mischbar.

Zum Umfüllen steht eine 1-Liter-Kelle zur Verfügung. Zuerst wird eine volle Kelle von F1 nach F2 umgefüllt. Nach dem Umrühren in F2 wird eine volle Kelle des entstandenen Gemischs nach F1 zurückgefüllt. Dort wird erneut umgerührt; anschließend wird wieder eine volle Kelle von F1 nach F2 umgefüllt.

a) Berechnen Sie den Anteil der Flüssigkeit A am Inhalt des Fasses F1 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

b) Berechnen Sie den Anteil der Flüssigkeit B am Inhalt des Fasses F2 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

Hinweis: Ein ganzzahliges Verhältnis ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Lösungshinweise Teil a): Wir betrachten nur Flüssigkeit A. Ein Liter wird nach F2 mit der Flüssigkeit B geschöpft, dort ist der Anteil dann einer von drei Litern. Von diesen jetzt drei Litern wird ein Liter (mit $\frac{1}{3}$ Liter Flüssigkeit A) zurückgefüllt. Damit beträgt im

Fass F1 der Anteil (der Flüssigkeit A) $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ Liter von insgesamt $4 = \frac{12}{3}$ Litern, das ist ein Anteil von $\frac{5}{6}$.

Lösungshinweise Teil b): Somit werden $\frac{5}{6}$ Liter zum noch vorhandenen Anteil von $\frac{2}{3}$ Liter in Fass F2 gegeben. Das sind $\frac{3}{2}$ Liter von insgesamt 3 Litern, also genau die Hälfte. Damit hat auch Flüssigkeit B im Fass F2 den gleichen Anteil von $\frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 21.05 – MO031111. Zwei Freunde A und B sitzen im Café. A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel (gleicher Größe) voll seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von A. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

Lösungshinweise: Wir bezeichnen allgemein die Menge Milch mit m, die Menge Kaffee mit k und das Fassungsvermögen des Löffels mit l, wobei keine Bedingungen an diese Mengen zu stellen sind (außer $l < m$, d.h. wir können tatsächlich einen Löffel voll Milch nehmen), so befindet sich nach dem ersten Tauschvorgang $k + l$ Flüssigkeit in der Tasse. Nach dem Umrühren entnehmen wir davon wieder eine Menge l, die nun aber $l \cdot \frac{l}{k+l}$ Milch und Kaffee $l \cdot \frac{k}{k+l}$ Kaffee enthält. Dies gilt, weil wie in der Tasse das Verhältnis von Milch zu Kaffee auch auf dem Löffel wie $l : k$ sein muss und die Gesamtmenge auf dem Löffel l ist. Also befindet sich nach dem zweiten Tausch die Menge $\frac{l \cdot k}{k+l}$ Kaffee in der Milch. An Milch verbleibt im Kaffee aber

$$l - l \cdot \frac{l}{k+l} = \frac{l \cdot (k+l) - l^2}{k+l} = \frac{l \cdot k}{k+l}$$

Diese Mengen sind also gleich. ❑

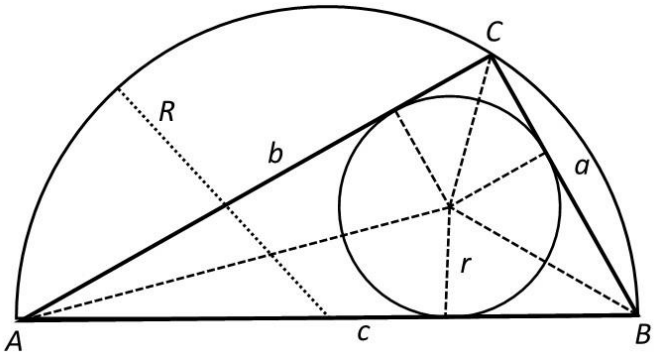
Lösungsvarianten: Nach dem Mischen befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleichen Flüssigkeitsmengen wie vorher. Daher fehlt B am Ende gegenüber dem Anfangszustand in seiner Tasse genau so viel Kaffee, wie er Milch in der Tasse hat. Genau diese Menge Kaffee muss A im Glas haben. Somit hat B genau so viel Milch in der Tasse Kaffee wie A Kaffee im Glas Milch.

Diese Argumentation können wir noch etwas formalisieren: Es sei M die Menge Milch und k die Menge Kaffee, die A nach dem Tausch in seinem Glas hat, und m die Menge Milch, die B in seiner Tasse hat. Da A nach dem Tausch die gleiche Menge Flüssigkeit in seinem Glas hat wie vor dem Tausch, gilt $M + k = M + m,$ also $k = m$.

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil IV)

Abschließend zu dieser Thematik betrachten wir Konstruktionsaufgaben mit Inkreis- oder Umkreisradius als Bestimmungsstücke. Diese zählen eigentlich nicht zu den Konstruktionsaufgaben, wie sie im Teil I beschrieben wurden. Sie ordnen sich aber direkt ein, weil oftmals Hilfsdreiecke eine Rolle spielen, deren Seitenlängen durch diese Radien bestimmt werden.

Aufgabe. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Inkreis- und Umkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

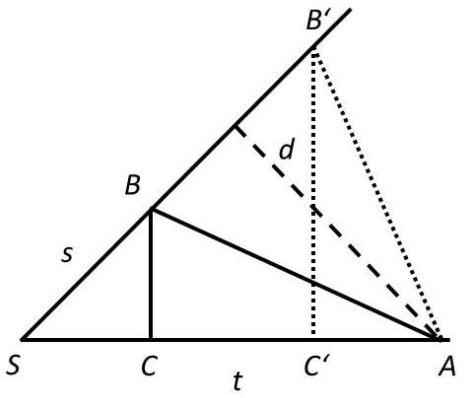


Lösungshinweise[3]*:* Die Bezeichnungen sind aus der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.

Analyse: Da der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks der THALESkreis über der Hypotenuse c ist, gilt $R = \frac{c}{2}$. Durch die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wird dessen Fläche in ein Quadrat und zwei Drachenvierecke zerlegt.

Wegen $(a - r) + (b - r) = 2 \cdot R$ finden wir

(1) $\quad a + b = 2 \cdot r + 2 \cdot R.$



Konstruktionsbeschreibung: (vgl. Abbildung) Wir konstruieren (zum Beispiel über die Winkelhalbierende eines rechten Winkels) die Schenkel s und t eines Winkels der Größe $45°$ mit dem Scheitel S. Auf dem Schenkel t tragen wir einen Punkt A mit $\overline{AS} = 2 \cdot (r + R)$ ein. Der Abstand d, den der Punkt A vom Schenkel s hat, beträgt $\sqrt{2} \cdot (r + R)$, denn als halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{AS}$ finden wir

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{d}{2 \cdot (r + R)}$$

Der Kreis um A mit dem Radius $2 \cdot R$ hat daher mit s einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der näher an S liegende Schnittpunkt werde mit B bezeichnet. Das Lot

[3] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1983 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983-1987. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1988, S. 83.5 bzw. 83.9.

von B auf t schneidet t in einem Punkt, der C genannt werde. Der zweite Schnittpunkt werde mit B' bezeichnet. Das Lot von B' auf t schneidet t in einem Punkt, der C' genannt werde.

Behauptung: Die Dreiecke ABC und ABC‘ besitzen die geforderten Eigenschaften.

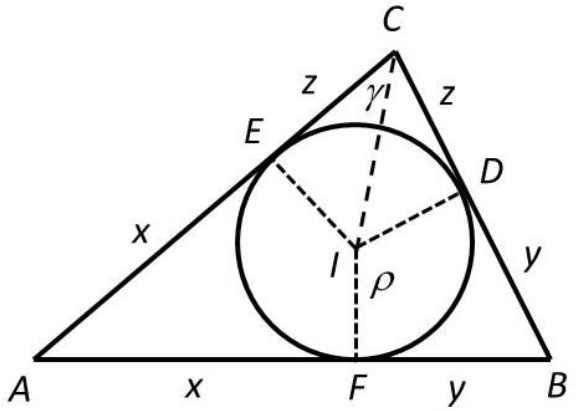
Beweis: Das so erhaltene Dreieck ist nach Konstruktion rechtwinklig. Sein Umkreis hat den Radius R. Weiterhin gilt im Dreieck ABC:

$$a + b = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CS} = \overline{AS} = 2 \cdot (r + R).$$

Also hat der Inkreis vom Dreieck ABC den geforderten Radius. Das Dreieck besitzt somit die verlangten Eigenschaften. In ähnlicher Argumentation zeigen wir, dass auch das Dreieck ABC‘ die verlangten Eigenschaften besitzt. ❑

Aufgabe. Von einem Dreieck ABC seien der Umfang u, der Inkreisradius ρ und der Winkel γ bekannt. Man konstruiere das Dreieck.

Lösungshinweise: Wie in der Skizze eines Dreiecks ABC mit dem eingezeichneten Inkreis mit Mittelpunkt I ersichtlich, bezeichnen wir mit D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten. Die Strecken von den Eckpunkten zu den benachbarten Berührungspunkten haben paarweise dieselbe Länge, die wir wie in der Skizze erkennbar mit x, y, z bezeichnen. Da wir γ und ρ kennen, können wir das rechtwinklige Dreieck ICE anhand der Bestimmungstücke



$$\sphericalangle ECI = \frac{1}{2} \cdot \gamma,\ \sphericalangle CIE = 90°,\ |\overline{EI}| = \rho$$

konstruieren und erhalten die Länge der Strecke $|\overline{CE}| = z$.

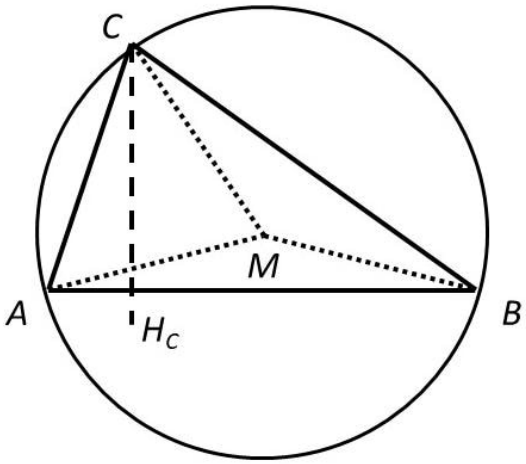
Weiterhin erhalten wir $c = x + y = \frac{1}{2} \cdot (u - 2 \cdot z)$. Wir können also die Länge der Strecke c konstruieren. Außerdem kennen wir die Länge $a + b = u - c$.

Das Rechteck mit den Seiten u und ρ hat den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Mit Hilfe des Satzes von den Ergänzungsparallelogrammen[4] können wir ein flächengleiches Rechteck mit der Seite c konstruieren, deren Länge der anderen Seite

[4] Gegeben sei ein Parallelogramm P und darin sei d eine der beiden Diagonalen. Weiter sei Z ein innerer Punkt von d. Durch Z seien die beiden Parallelen zu den Seiten von P gezogen, welche P in vier Teilparallelogramme unterteilen, wobei Z deren alleiniger gemeinsamer Punkt ist. Dann gilt: Die beiden Teilparallelogramme, welche von der Diagonalen d nicht zerlegt werden, sind ergänzungsgleich und daher von identischem Flächeninhalt.

h_c ist, also die Höhe des Dreiecks ABC auf der Seite c. Mit den Bestimmungsstücken c, $a+b$ und h_c können wir nun das gesuchte Dreieck konstruieren (s. Aufgabe K6 – MO080932 im Heft 12/2022). ❑

Aufgabe. Man konstruiere ein Dreieck aus seinem Umkreisradius r, einer Höhe h_c und der Differenz der beiden nicht zu h_c gehörenden Innenwinkel und beweise die Richtigkeit der Konstruktion.



Lösungshinweise – Analyse: Ist ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis mit Mittelpunkt M und dem Höhenfußpunkt H_C gegeben, so folgt aus den (wie üblich mit α, β, γ bezeichneten Innenwinkel) $\sphericalangle BMC = 2 \cdot \alpha$ als Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\sphericalangle BAC = \alpha$ über der gemeinsamen Sehne $\overline{BC}$. Damit finden wir im gleichschenkligen Dreieck BCM die Winkelgröße $\sphericalangle MCB = 90° - \alpha$. Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck BCH_C mit dem rechten Winkel $\sphericalangle BH_CC$, so erhalten wir

$$\sphericalangle H_CCM = 180° - 90° - \beta - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$$

Konstruktionsbeschreibung:

1. Wir zeichnen eine Gerade g und wählen auf ihr einen Punkt H_C, in dem wir die Senkrechte errichten.
2. Wir tragen auf dieser Senkrechten die Länge der Höhe h_c ab und bezeichnen den entstandenen Schnittpunkt mit C, also $|\overline{H_CC}| = h_c$.
3. Wir tragen auf einer Seite von H_C den Winkel $\alpha - \beta$ mit Scheitelpunkt C an.
4. Wir schlagen einen Kreisbogen um C mit dem Radius r und bezeichnen den Schnittpunkt mit dem freien Schenkel mit M.
5. Wir ziehen den Kreis um M mit Radius r und erhalten auf g zwei Schnittpunkte, die wir mit A und B bezeichnen.

Das Dreieck ABC ist Lösung der Aufgabe.
Beweis: Laut Konstruktion besteht das Dreieck CH_CM aus den gegebenen Bestimmungsstücken, wobei $\overline{H_CC}$ nach Schritt 1 die Höhe im Dreieck ABC und M nach Schritt 5 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sind.

Eindeutigkeit und Existenz: In den Konstruktionsschritten 2 und 3 bestehen jeweils zwei Möglichkeiten, den Punkt C festzulegen bzw. den Winkel anzutragen. Die Fortsetzung der Konstruktion führt jedoch zu kongruenten Lösungen.

Die Konstruktionsschritte 1 bis 4 sind für jede Vorgabe der Bestimmungsschritte ausführbar. Bezeichnen wir mit X den Fußpunkt des Lotes von M auf $\overline{H_C C}$, so schneidet der Kreis um M mit Radius r die Gerade g nur dann in zwei Punkten, wenn die Ungleichung $h_c < r + |\overline{XC}|$ erfüllt ist. Dabei gilt $|\overline{XC}| = r \cdot \cos(\alpha - \beta)$. ❑

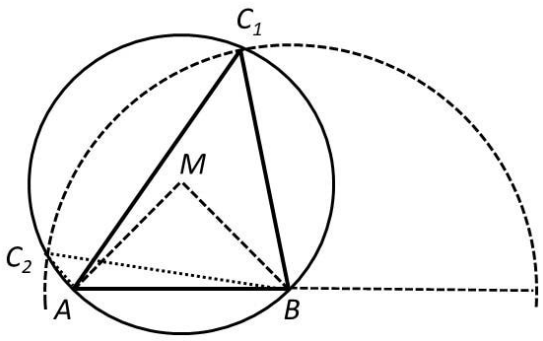
Die folgenden Aufgaben formulieren detailliert alle erforderlichen Schritte einer vollständigen Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe MO281035. Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm , $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Der Umkreis des Dreiecks hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{BC}$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s und γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2) und (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

Lösungshinweise zu I (Analyse): Wenn ein Dreieck ABC die genannten Bedingungen erfüllt, so erkennen wir folgende Eigenschaften.



Für den Mittelpunkt M des Umkreises gilt nach (1) $\overline{MA} = \overline{MB} = r$ sowie nach (3) und des Satzes über Zentriwinkel und Peripheriewinkel $\sphericalangle AMB = 2 \cdot \gamma$. Der Punkt C liegt einerseits auf dem Umkreis um M, andererseits auch auf dem Kreis um B mit dem Radius a. Dabei gilt nach (2) $a = s - |\overline{AB}|$.

Lösungshinweise zu II (Konstruktionsbeschreibung): Aus der Analyse können wir die folgenden Konstruktionsschritte ableiten.

1. Wir konstruieren einen Winkel der Größe $2 \cdot \gamma$. Den Scheitelpunkt bezeichnen wir mit M.
2. Wir konstruieren einen Kreis um M mit dem Radius r. Dieser Kreis schneidet die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B.

3. Wir konstruieren einen Kreis um B mit dem Radius a. Dieser Kreis schneidet den Kreis um M in zwei Punkten C_1 und C_2.

Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind Dreiecke der geforderten Art.

Lösungshinweise zu III (Beweis): Nach Konstruktionsschritten 1 und 3 liegen C_1 und C_2 jeweils auf dem Kreis um M, also ist die Bedingung (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 3 gilt $|\overline{BC}| = s - |\overline{AB}|$, also $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = s$ und somit ist die Bedingung (2) erfüllt. Nach Konstruktionsschritten (1) und (2) sind C_1 und C_2 jeweils Peripheriewinkel über der gleichen Sehne des Zentriwinkels $\sphericalangle AMB$, also ist auch die Bedingung (3) erfüllt.

Lösungshinweise zu IV (Eindeutigkeit): Die Konstruktionsschritte 1 und 2 sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt 3 führt zu zwei Dreiecken. Für diese Dreiecke gilt $|\sphericalangle ABC_1| \neq |\sphericalangle ABC_2|$, also sind diese Dreiecke nicht zueinander kongruent. Es gibt somit bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke der verlangten Art. ❑

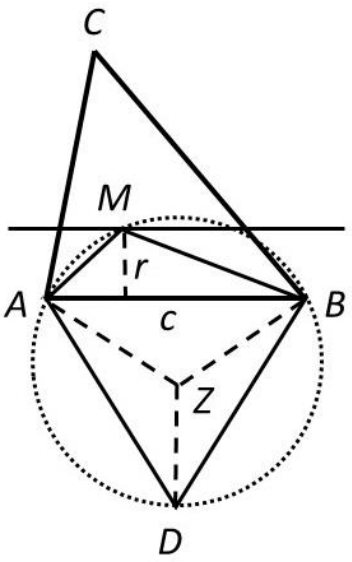
Hinweis: Da die Bestimmungsstücke mit konkreten Maßzahlen gegeben sind, muss die Existenz von Dreiecken der verlangten Art nicht bewiesen werden. Die Existenz ergibt sich aus der erfolgreichen Konstruktion.

Aufgabe MO301036. Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, dass c die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe $60°$ hat.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen konstruiert werden.
(b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
(d) Beweisen Sie, dass bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Hinweis: Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösungshinweise Teil a – Analyse: Wir ergänzen – wie in der Skizze ersichtlich – das gesuchte Dreieck ABC mit einem aufgesetzten gleichseitigen Dreieck ABD. Da der Mittelpunkt M des Inkreises der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist, finden wir



$$\sphericalangle AMB = 180° - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA) = 120°,$$

da laut Vorgabe im Dreieck ABC die Innenwinkelsumme $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + 60° = 180°$ gilt. Folglich ist das Viereck $ADBM$ eine Sehnenviereck und es existiert für dieses Viereck ein Umkreis mit dem Mittelpunkt Z, den wir als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck ABD ermitteln können.

Lösungshinweise Teil b – Konstruktionsbeschreibung: Aus der Analyse können wir folgende Konstruktion ableiten.

1. Wir konstruieren ein gleichseitiges Dreieck ABD der Seitenlänge c und seinen Schnittpunkt der Seitenhalbierenden Z.
2. Wir zeichnen den Kreis k um Z mit dem Radius $\overline{AZ}$ durch A.
3. Wir konstruieren die Parallele zu AB im Abstand von r, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z. Einen der Schnittpunkte mit dem Kreis k bezeichnen wir mit M.
4. Wir tragen in A den Winkel der Größe $2 \cdot \sphericalangle BAM$ und in B den Winkel der Größe $2 \cdot \sphericalangle ABM$ jeweils auf der Seite an, in der M liegt (d.h. wir verdoppeln die Winkel $\sphericalangle BAM$ und $\sphericalangle ABM$).
5. Wir verlängern die freien Schenkel beider Winkel und bezeichnen deren Schnittpunkt mit C.

Das Dreieck ABC ist Lösung der Aufgabe.

Lösungshinweise zu Teil c – Beweis: Nach Konstruktionsschritt 1 gilt $|\overline{AB}| = c$. Nach Konstruktionsschritt 5 ist M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck ABC und folglich der Inkreismittelpunkt. Nach Konstruktionsschritt 3 beträgt der Inkreisradius r. Schließlich beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$ im Sehnenviereck $AMBD$ 120°. und deshalb gilt $\sphericalangle BAM + \sphericalangle MBA = 60°$. Damit finden wir

$$\sphericalangle ACB = 180° - 2 \cdot (\sphericalangle BAM + \sphericalangle MBA) = 180° - 2 \cdot 60° = 60°.$$

Damit erfüllt das Dreieck ABC tatsächlich alle geforderten Bedingungen.

Lösungshinweise Teil d – Eindeutigkeit und Existenz: Bis auf die Festlegung des Schnittpunktes M aus zwei Möglichkeiten sind alle Schritte der beschriebenen

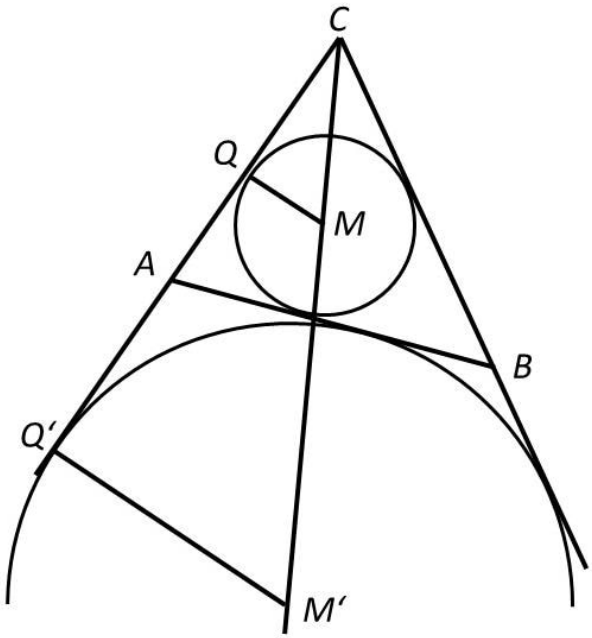
Konstruktion eindeutig ausführbar. Die Wahl des Punktes M führt jedoch zu kongruenten Lösungen.

Da eine Konstruktion ausdrücklich nicht verlangt wurde (und somit die Existenz nicht konstruktiv geprüft wird), erfordern die Vorgaben $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm noch die Prüfung, ob mit diesen Werten das Dreieck konstruiert werden kann. Der Abstand des Punktes M von Z ist nach Konstruktion die Summe eines Drittel der Seitenhalbierenden im Dreieck ABD (entspricht $c \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3}$) und des Inkreisradius r, also gemäß den Vorgaben $\sqrt{120} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3} + 3 = \sqrt{10} + 3$. Dagegen beträgt die Länge des Umkreisradius im Dreieck ABD $c \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{10}$. Wegen $3 < \sqrt{10}$ schneidet dieser Umkreis die Parallele durch M in zwei Punkten.

Damit ist gezeigt, dass es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck gibt, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. ❑

Die Konstruktionsaufgabe bietet einen anderen Lösungsansatz, der sich an innere und äußere Tangenten orientiert. Wir beschränken uns lediglich auf die

Konstruktionsbeschreibung:



1. Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck MCQ mit rechtem Winkel bei Q, mit einem Winkel $\sphericalangle QCM = 30°$ und der Kathetenlänge $|\overline{QM}| = r$.
2. Wir zeichnen den Kreis um M mit Radius $\overline{QM} = r$.
3. Wir verlängern die Kathete $\overline{CQ}$ über Q hinaus und markieren den Punkt Q' mit $\left|\overline{QQ'}\right| = c$.
4. Wir errichten in Q' die Senkrechte und bezeichnen deren Schnittpunkt mit der Verlängerung der Hypotenuse $\overline{CM}$ mit M'.
5. Wir zeichnen den Kreis um M' mit dem Radius $\overline{MQ'}$.
6. Wir konstruieren die innere Tangente bezüglich der Kreise um M und M' und bezeichnen die Schnittpunkte mit den beiden äußeren Tangenten mit A bzw. mit B.

Das Dreieck ABC erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe. ❑

Hinweis: Die Konstruktion der inneren und äußeren Tangenten für zwei sich nicht überschneidende Kreise gilt nicht als „zitierfähige“ Grundkonstruktion. In einer Nebenanalyse müsste im Wettbewerb also sowohl die für den Beweis wesentliche

Eigenschaft $\left|\overline{QQ'}\right| = |\overline{AB}|$ nachgewiesen als auch die Konstruktion der Tangenten ausführlicher beschrieben werden.

Rückblick auf den 5. Tag der Mathematik[5]

Am Samstag, dem 1. April 2023, fand der 5. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Rund 500 Gäste nutzten die Gelegenheit, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter über 240 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Die Teilnahme von 61 Mannschaften aus 29 sächsischen sowie weiteren polnischen und tschechischen Gymnasien entsprach einer Steigerung auf mehr als das Doppelte im Vergleich zum Vorjahr. Der auf dem Programm verwendete Untertitel *„Mit Spaß muss man rechnen“* bestätigte sich nicht nur während der Aufgaben-Rallye für die Klassenstufen 8 – 9 bzw. 10 – 12, sondern auch in der Mitmach-Ausstellung und in den Mathe-Laboren. Die rund 30 begleitenden Lehrerinnen und Lehrer sowie weitere Mathe-Interessierte wurden in Fortbildungsvorträgen in die Welt des Zufalls (Prof. Dr. ALOIS PICHLER, TU Chemnitz) und in mathematische Arbeitswelten (Dr. MICHAEL PIPPIG, Intenta Automotive GmbH) entführt[6]. Im Plenarvortrag klärte Dr. ANNE KANDLER vom Max-Planck-Institut für Evolutionäre Anthropologie in Leipzig auf, wie Mathematik durch die Modellierung des sogenannten Sprachwechsels helfen kann, bedrohte Sprachen zu retten.

Ein Höhepunkt des Tages war die Podiumsdiskussion mit dem Sächsischen Ministerpräsidenten zum Thema “Zukunftstechnologie Mathematik – auch in Chemnitz?". Die Fragen waren vielfältig, von den inhaltlichen Belangen in die Gestaltung der Lehrpläne und des Prüfungsgeschehens über die Einbeziehung von digitalen Medien im Unterricht und in der Prüfung bis zu Erwartungen an eine kreative Wissensvermittlung mit stärkerem Realitätsbezug im Mathe-Unterricht. Deutlich wurde auch, dass in vielen Bereichen der Hochtechnologien und des täglichen Lebens die Bedeutung der Mathematik zunimmt und auch deshalb kreativer Lösungen bedarf, dem Lehrermangel in Sachsen und hier insbesondere in der ländlichen Region im MINT-Bereich zu begegnen. Die Podiumsdiskussion vermittelte aber den Optimismus, dass viele Seiten den Willen haben, für die Mathematik im Bereich der Bildung in Sachsen etwas zu bewirken und kreative Lösungen zu entwickeln. In der Tageszeitung „Freie Presse“ wurde am 3. April auf Seite 4 unter dem Titel „Sexy Stunden mit Mathematik“ fast ganzseitig berichtet.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit. Während der Preisverleihung des Wettbewerbs durch den Sächsischen Ministerpräsidenten

[5] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/11793 (Stand 04.04.2023)
[6] ausführlichere Informationen im Heft 5/2023

MICHAEL KRETSCHMER, und den Dekan der Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. DANIEL POTTS, wurden diesmal pro Altersstufe fünf Preise vergeben: In den Klassenstufen 8 bis 9 gingen sie an Teams aus Chemnitz, Hohenstein-Ernstthal, Naunhof und Schneeberg. In den Klassenstufen 10 bis 12 hatten Teams aus Chemnitz, Marienberg, Plauen und Thum am besten abgeschnitten. „Diese Bilanz zeigt, dass viele mathematische Talente in Sachsen beheimatet sind“, freute sich Prof. POTTS.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB) stellt eine Vielzahl von historischen Dokumenten öffentlich zur Verfügung. Der folgende Auszug zeigt die Diskussion eines Beispiels für nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbare Dreiecksaufgaben[7]. PAUL BUCHNER (1891 – 1978) war zu dieser Zeit Rektor des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasium in Basel. (s. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN378850199_0002, letzter Abruf: 04.04.23).

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

II. Jahrgang
1947

Verlag Birkhäuser Basel

El.Math. *Band II* *Nr. 1* *Seiten 14 – 16* *Basel, 15. Januar 1947*

Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist

Gewöhnlich wird nur gezeigt, dass einige klassische geometrische Aufgaben, wie die Dreiteilung eines Winkels, die Volumenverdopplung eines Würfels, die Konstruktion gewisser regelmäßiger Polygone, die Quadratur des Kreises, mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden können. Zahlreiche andere Fragen der elementaren Geometrie führen ebenfalls auf solche Probleme.

Ein Ingenieur berichtete mir, daß er sich lange vergeblich bemühte, eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten a und b und dem Inkreisradius ρ zu finden. Es soll gezeigt werden, daß es eine solche Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht gibt.

[7] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten.

Es sei $a \geq b$. Als viertes Stück bestimmen wir die halbe Seitensumme $s = \frac{a+b+c}{2}$, dann gilt bekanntlich

$$\rho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(a+b-s)}{s}$$

Wir erhalten daher für die Unbekannte x=s die Bestimmungsgleichung dritten Grades

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-a-b) + \rho^2$$
$$-x^3 - 2x^2(a+b) + x(\rho^2 + 3ab + a^2 + b^2) - ab(a+b) = 0 \qquad (1)$$

Hieraus folgt

$$f(0) = -ab(a+b) < 0, f(b) = \rho^2 b, f(a) = \rho^2 a, f(a+b) = \rho^2(a+b) \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) hat daher immer eine reelle Wurzel $0 < x_1 < b$.

In einem Dreieck gilt stets

$x = s = \frac{a+b+c}{2} > a \geq b$, und $\frac{c}{2} < \frac{a+b}{2}$, also
$\frac{a+b+c}{2} < a+b$, oder $a+b > x = s > a$.

Lösungen unseres Problems liefern nur Wurzeln der Gleichung (1), die dem Intervall $(a; a+b)$ angehören. Da die Gleichung (1) stets eine reelle Wurzel besitzt, die außerhalb dieses Intervalles liegt, so hat unsere Aufgabe nur Lösungen, wenn die Gleichung drei reelle Wurzeln hat.

Die Kurve $y = f(x)$ schneidet nach (2) die Gerade $y = \rho^2 x$ immer in den drei Punkten $A(b; \rho^2)$, $B(a; \rho^2)$, $C\big(a+b; \rho^2(a+b)\big)$, da außerdem $f(0) < 0$ ist, können die weiteren Nullstellen von $f(x)$ nur zwischen a und $a+b$ liegen. Unser Problem hat daher für ein gegebenen Wertetripel a, b, ρ entweder 0, 1 oder 2 Lösungen, je nachdem die Gleichung (1) eine reelle Wurzel, eine Doppelwurzel oder drei verschiedene Wurzeln hat.

Die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$x^3 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3 = 0$$

hat drei reelle Wurzeln, wenn ihre Diskriminante

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18 a_1 a_2 a_3 - 4a_1^3 a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2 \geq 0$$

ist. In unserem Fall ist

$$a_1 = -2(a+b), a_2 = \rho^2 + 3ab + a^2 + b^2, a_3 = -ab(a+b)$$

und somit ergibt sich

$$D = -4\rho^6 - 4\rho^4(2a^2 + 7ab + 2b^2)$$
$$-4\rho^2(a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4) + a^2b^2(a - b)^2 \geq 0.$$

Zu jeden Tripel a, b, ρ, welches dieser Ungleichung genügt, gibt es Dreiecke mit den Seiten a, b und dem Inkreisradius ρ, aber ob dieselben mit Zirkel und Lineal gefunden werden können, ist damit noch nicht entschieden. Für spezielle Werte $a = 2$ und $b = 1$ wird

$$D = -4(\rho^6 + 24\rho^4 + 3\rho^2 - 1) \geq 0.$$

Nach der Zeichenregel von DESCARTES[8] hat die Gleichung

$$\rho^6 + 24\rho^4 + 3\rho^2 - 1 = 0$$

eine positive Wurzel, und zwar ist $\rho_1 \approx 0{,}388$.

Mit $a = 2, b = 1$ gibt jedes $\rho \leq 0{,}388$ ein Zahlentripel, das zu einem reellen Dreieck gehört. Insbesondere für $a = 2, b = 1, \rho = 0.3$ nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$x^3 - 6x^2 + 11{,}09x - 6 = 0$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit 1000 und setzen $10x = y + 20$, dann erhalten wir eine Gleichung in der Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten

$$g(y) = y^3 - 91y + 180 = 0\,. \qquad (3)$$

Eine solche Gleichung hat entweder reelle ganzzahlige oder irrationale Wurzeln. Wegen

$$g(-11) = -150, g(-10) = 90, g(2) = 6, g(3) = -66, g(8) = -36, g(9) = 90$$

gilt für die drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$-11 < y_1 < -10\,, 2 < y_2 < 3\,, 8 < y_3 < 9$$

Die Gleichung (3) hat demnach keine rationalen Wurzeln. Eine kubische Gleichung

$$y^3 + ay + b = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, die keine rationale Wurzel hat, ist aber auch nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar (s. WEBER-WELLSTEIN, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, 3. Aufl., § 109). Die Wurzeln der Gleichung (3) sind daher nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, daher gibt es auch für die allgemeine Aufgabe keine solche Konstruktion, denn diese müßte unser spezielles Beispiel mitumfassen.

[8] Vorzeichenregel von RENÉ DESCARTES (1596 – 1650): Die Anzahl aller positiven Nullstellen eines reellen Polynoms ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizientenfolge oder um eine gerade natürliche Zahl kleiner als diese, wobei jede Nullstelle ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird.

Natürlich ist das nicht so zu verstehen, dass es keine Tripel a, b, ρ gibt, aus denen das zugehörige Dreieck konstruierbar wäre. Ist zum Beispiel $a = 5, b = 3$, $\rho = 1$, dann heißt die Gleichung (1)

$$x^3 - 16x^2 + 80x - 120 = (x - 6)(x^2 - 10x + 20) = 0\,,$$

das heißt sie ist reduzibel geworden. Die Lösungen

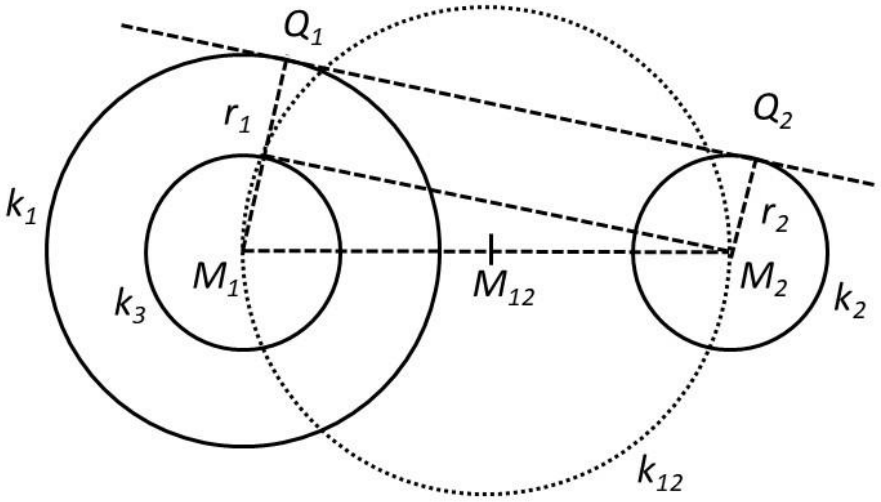
$$x_1 = S_1 = 6 \text{ und } x_2 = s_2 = 5 + \sqrt{5}$$

führen zu den Dreiecken mit den Seiten $a = 5, b = 3, c = 4$ und $a = 5, b = 3$, $c = 2 + 2\sqrt{5}$, die aus den gegebenen Zahlenwerten leicht konstruierbar sind. Es gibt aber keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die in jedem Falle zum Ziele führen würde.

P. BUCHNER, Basel

Bekannte Sätze der Mathematik

Wir zeichnen die sogenannten *äußeren Tangenten* an zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 > r_2$ und den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 mit $\overline{M_1M_2} > r_1$ (d.h. der Kreis k_2 liegt nicht vollständig innerhalb von k_1).

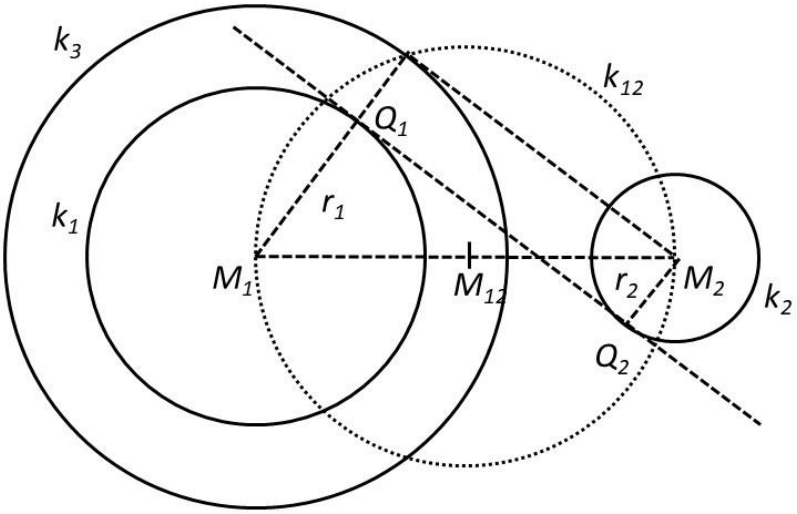


1. Dazu konstruieren wir zunächst einen weiteren Kreis k_3 mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 - r_2$.
2. Anschließend ermitteln wir konstruktiv den Mittelpunkt M_{12} der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und zeichnen einen Kreis k_{12} um M_{12} mit dem Radius $\frac{1}{2} \cdot (r_1 + r_2)$. Dieser Kreis k_{12} schneidet den Kreis k_3 in zwei Punkten X und X'. Im Ergebnis finden wir im Dreieck M_1M_2X im Eckpunkt X nach Satz des THALES einen rechten Winkel.
3. Die Parallele zu M_2X im Abstand von r_2 (die auf der anderen Seite von M_2X als M_1 liegt) berührt die Kreise k_1 und k_2 in den Punkten Q_1 bzw. Q_2.

Die Gerade durch Q_1 und Q_2 ist eine äußere Tangente zu den beiden gegebenen Kreisen. Ausgehend von X‘ können wir nach Konstruktionsschritt 3 eine weitere innere Tangente konstruieren, die bzgl. M_1M_2 symmetrisch zu $\overline{Q_1Q_2}$ liegt.

Beweis: Der Abstand vom Berührungspunkt Q_1 zu M_1 ist $(r_1 - r_2) + r_2 = r_1$. Die Gerade durch Q_1 und Q_2 steht im Berührungspunkt senkrecht auf dem Radius. Weiterhin ist das Viereck $M_1M_2Q_2Q_1$ ein Rechteck, da die beiden Winkel in M_1 und M_2 ebenfalls $90°$ sind. Somit ist auch der Winkel im Berührungspunkt Q_2 ein rechter Winkel, die Gerade also eine Tangente. ❑

Gilt für die gegebenen zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 > r_2$ und den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 die Ungleichung $\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$ (d.h. die Kreise k_1 und k_2 haben keine gemeinsamen Punkte), so können wir auch *innere Tangenten* zeichnen.

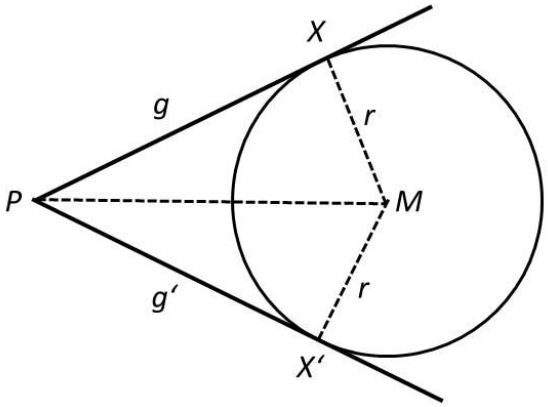


1. Dazu konstruieren wir zunächst einen weiteren Kreis k_3 mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 + r_2$.
2. Anschließend ermitteln wir konstruktiv den Mittelpunkt M_{12} der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und zeichnen einen Kreis k_{12} um M_{12} mit dem Radius $\frac{1}{2} \cdot (r_1 + r_2)$. Dieser Kreis k_{12} schneidet den Kreis k_3 in zwei Punkten X und $X‘$. Im Ergebnis finden wir im Dreieck M_1M_2X im Eckpunkt X nach Satz des THALES einen rechten Winkel.
3. Die Parallele zu M_2X im Abstand von r_2 (die auf der gleichen Seite von M_2X wie M_1 liegt) berührt die Kreise k_1 und k_2 in den Punkten Q_1 bzw. Q_2.

Die Gerade durch Q_1 und Q_2 ist eine innere Tangente zu den beiden gegebenen Kreisen. Ausgehend von X‘ können wir nach Konstruktionsschritt 3 eine weitere innere Tangente konstruieren, die bzgl. M_1M_2 symmetrisch zu $\overline{Q_1Q_2}$ liegt. Den Beweis können wir in Analogie zu den äußeren Tangenten führen.

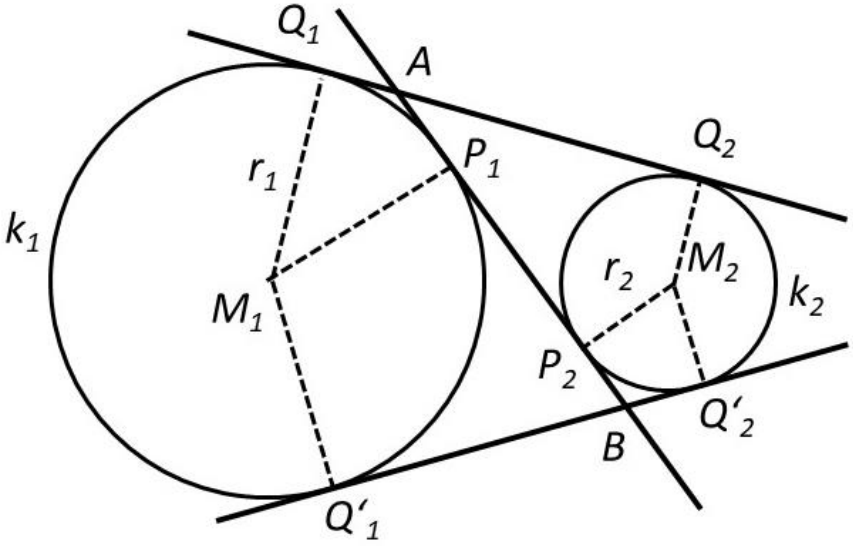
Satz. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, und sei P ein Punkt außerhalb von k. Dann gibt es genau zwei Tangenten durch P an den Kreis k. Die beiden Tangentenberührungspunkte sind von P gleich weit entfernt.

Beweis. Seien g und g‘ Tangenten durch P an den Kreis k. Dann haben g und g‘ jeweils genau einen Punkt mit k gemeinsam, die wir mit X bzw. mit X‘ bezeichnen. Von den rechtwinkligen Dreiecken MXP und $MX'P$ sind dann die drei Stücke bekannt: die Kantenlängen $|\overline{MX}| = |\overline{MX'}| = r$, die gemeinsame Kantenlänge $|\overline{MP}|$ und die rechten Innenwinkel bei X bzw. X‘.



Weil P außerhalb des Kreises liegt, ist $|\overline{MP}| > |\overline{MX}|$. Damit wird der Kongruenzsatz SSW anwendbar, und es gilt insbesondere $|\overline{PX}| = |\overline{PX'}|$.

Satz. Sind zwei äußere und eine innere Tangente gegeben, so sind auf der inneren Tangente die zwei Tangentenabschnitte gleichlang.



Beweis: Es gilt für die äußeren Tangenten $|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_1'Q_2'}|$ oder $|\overline{Q_1A}| + |\overline{AQ_2}| = |\overline{Q_1'B}| + |\overline{BQ_2'}|$.

Die Tangentenabschnitte $\overline{AQ_1}$ und $\overline{AQ_2}$ außen sind gleich den Tangentenabschnitten $\overline{AP_1}$ und $\overline{AP_2}$ innen. Die Tangentenabschnitte $\overline{BQ_1'}$ und $\overline{BQ_2'}$ außen sind gleich den Tangentenabschnitten $\overline{BP_1}$ und $\overline{BP_2}$ innen.

Somit können wir die äußeren Tangentenabschnitte durch die inneren ausdrücken und finden $|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{AP_1}| + |\overline{AP_2}|$ bzw. $|\overline{Q_1'Q_2'}| = |\overline{BP_1}| + |\overline{BP_2}|$. Wegen $|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_1'Q_2'}|$ gilt also $|\overline{AP_1}| + |\overline{AP_2}| = |\overline{BP_1}| + |\overline{BP_2}|$. Zerlegen wir die längeren Tangentenabschnitt $\overline{AP_2} = \overline{AP_1} + \overline{P_1P_2}$ bzw. $\overline{BP_1} = \overline{BP_2} + \overline{P_1P_2}$, erhalten wir die Gleichung $2 \cdot |\overline{AP_1}| + |\overline{P_1P_2}| = 2 \cdot |\overline{BP_2}| + |\overline{P_1P_2}|$, also $|\overline{AP_1}| = |\overline{BP_2}|$.

Folgerung. Schneidet die innere Tangente zweier Kreise die äußeren Tangenten in den Punkten A und B und sind Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte einer äußeren Tangente mit den Kreisen, so gilt $|\overline{AB}| = |\overline{Q_1Q_2}|$.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen wie in der Skizze des obigen Satzes. Dann gilt

$$|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_1A}| + |\overline{AQ_2}| = |\overline{AP_1}| + |\overline{AP_2}| = |\overline{AP_2}| + |\overline{BP_2}| = |\overline{AB}|. \qquad \square$$

Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 01/23.

Ist x eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, so existiert ein gekürzter Bruch $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ mit $0 < \mathrm{q} \leq \mathrm{n}$ und

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{n \cdot q}.$$

Lösungshinweise: Wir schreiben $\lfloor x \rfloor$ für den größten ganzen Teil und $\{x\}$ für den Nachkommateil einer reellen Zahl x, also $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ mit $\{x\} \in [0, 1)$. Wir zerlegen das Intervall [0, 1) in die n Unterintervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right)$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, …, $\left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$.

Von den $n + 1$ Zahlen $\{0 \cdot x\}$, …, $\{n \cdot x\}$, die alle in [0, 1) liegen, müssen nach den Schubfachprinzip mindestens zwei im gleichen Unterintervall liegen, d.h. wir finden zwei ganze Zahlen a und b $(0 \leq a < b \leq n)$ mit $|\{b \cdot x\} - \{a \cdot x\}| < \frac{1}{n}$. Aber es ist

$$\begin{aligned} |\{b \cdot x\} - \{a \cdot x\}| &= |b \cdot x - \lfloor b \cdot x \rfloor - (a \cdot x - \lfloor a \cdot x \rfloor)| \\ &= \left| \underbrace{(b - a)}_{q} \cdot x - \left(\underbrace{\lfloor b \cdot x \rfloor - \lfloor a \cdot x \rfloor}_{p} \right) \right| \end{aligned}$$

also haben wir $|q \cdot \alpha - p| < \frac{1}{n}$ mit $0 < q \leq n$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Monatsaufgabe[9] 3/23.

Im Dreieck ABC wird A an B nach A_1, B an C nach B_1 und C an A nach C_1 gespiegelt.

Man konstruiere das Dreieck ABC, falls nur die Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben sind. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu diskutieren.

[9] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.05.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort ... 2
Thema 21 – Mischungsverhältnisse ... 3
Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil IV) ... 9
Rückblick auf den 5. Tag der Mathematik ... 16
In alten Mathe-Büchern geblättert ... 17
Bekannte Sätze der Mathematik ... 20
Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 01/23. ... 23
Monatsaufgabe 3/23. ... 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[10]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
04/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO620934 MO621034
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

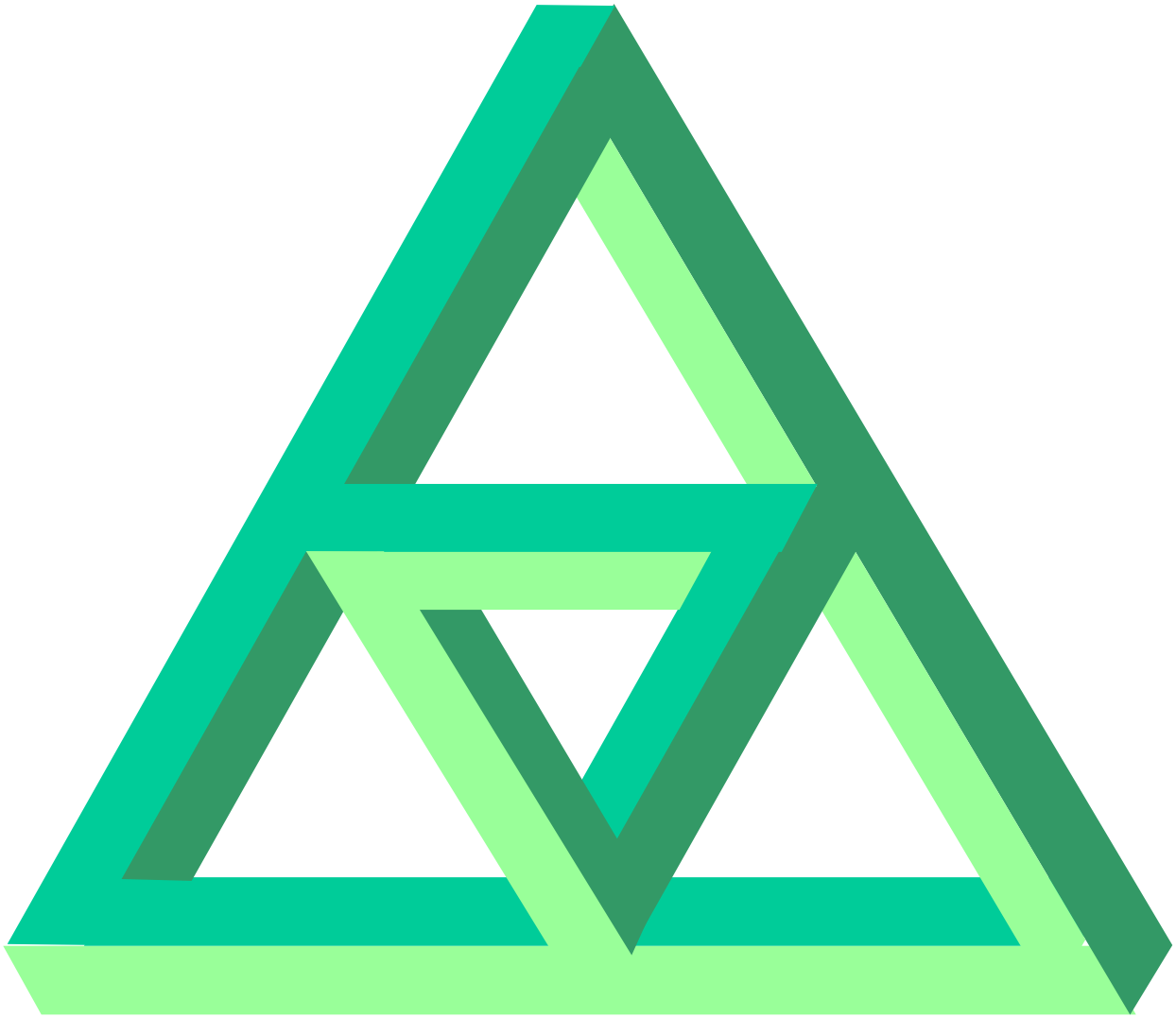
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 5/2023 (Mai 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Aufgaben wie **MO620936** finden wir eher in der Unterhaltungsmathematik. Werden jedoch alle möglichen Zahlenverteilungen oder die Anzahl aller möglichen Zahlenverteilungen gesucht, ist eine systematische Analyse erforderlich, die über geschicktes Probieren hinausreicht. Die gezeigten Beispiele können anregen, ähnliche Figuren unter derartigen Aspekten zu untersuchen.

Eine beliebte Sonderform solcher Zahlenverteilungen sind **Magische Quadrate**, die schon lange Zeit bekannt sind. Im historischen Rückblick zeigen wir, wie bereits im 16. Jh. die Lösung großer Magischer Quadrate erklärt wurde.

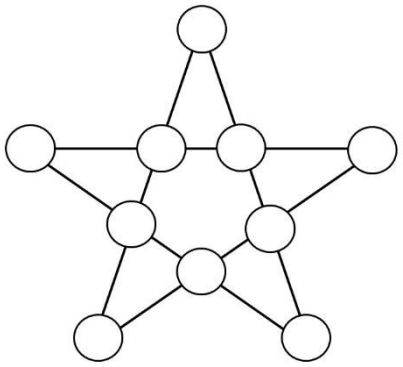
Angeregt durch den 5. Tag der Mathematik und den Abschluss der 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik blicken wir auf **Vorträge für die Schule** zurück und verweisen auf entsprechende Angebote der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz.

In Vorbereitung eines Beitrags zur Lösung von Gleichungssystemen mit Bezug zur Aufgabe **KZM 6-3** wiederholen wir den Satz von VIETA.

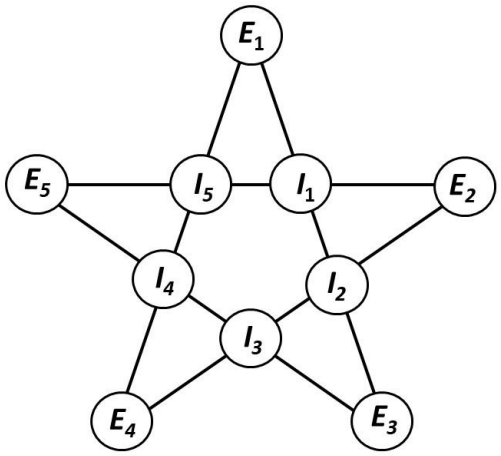
[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 22 – Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren

Aufgabe 22.01 – MO620936. Im abgebildeten Pentagramm ist jeder der zehn eingezeichneten Kreise mit einer der Zahlen $1,2,\ldots,n$ derart zu beschriften, dass auf jeder der fünf definierenden Geraden (auf denen sich jeweils vier Kreise befinden) vier verschiedene Zahlen stehen. Für jede positive ganze Zahl n sei A_n die Anzahl derartiger Beschriftungen. Hierbei sollen zwei Beschriftungen auch dann als verschieden gelten, wenn sie durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.



a) Beweisen Sie, dass $A_4 = 0$ gilt.
b) Bestimmen Sie A_5.



Vorbemerkung: Wir nummerieren die „Eck"-Kreise mit $E_1, \ldots, E_5$ und die „inneren" Kreise mit $I_1, \ldots, I_5$ wie in der Abbildung ersichtlich. Wir verwenden v, w, x, y und z als Platzhalter für die späteren Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5. Für eine zulässige Beschriftung ist erforderlich, dass auf jeder der fünf definierenden Geraden vier verschiedene Buchstaben aus v, w, x, y und z stehen, wobei gleiche Buchstaben für dieselbe Zahl und verschiedene Buchstaben für verschiedene Zahlen stehen sollen.

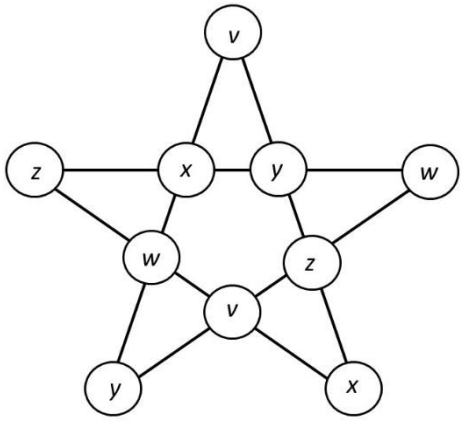
Lösungshinweise Teil a) Allgemein stellen wir fest, dass bei jeder zulässigen Beschriftung des Pentagramms mit den Zahlen $1,2,\ldots,n$ keine dieser Zahlen mehr als zweimal verwendet werden. Denn wenn wir o.B.d.A.[3] den äußeren Kreis E_1 mit x beschriften, stehen nur noch die Kreise E_2, E_5, I_3 für Beschriftungen mit x zur Verfügung. Da aber diese drei Kreise paarweise auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann nur ein weiterer Kreis mit x beschriftet werden. Wenn wir dagegen beim inneren Kreis I_1 mit der Beschriftung beginnen, stehen nur noch die Kreise I_3, I_4, E_4 für Beschriftungen mit x zur Verfügung. Da auch diese drei Kreise paarweise auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann nur ein weiterer Kreis mit x beschriftet werden.

Wenn aber jede Zahl nicht mehr als zweimal verwendet werden kann, können mit den vier Zahlen 1, 2, 3 und 4 maximal acht der zehn Kreise des Pentagramms beschriftet werden. Daraus folgt $A_4 = 0$.

[3] ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Wir können die Figur immer so drehen, dass die erste Beschriftung am oberen Eckkreis beginnt. Dann können die Bezeichnungen entsprechend angepasst werden.

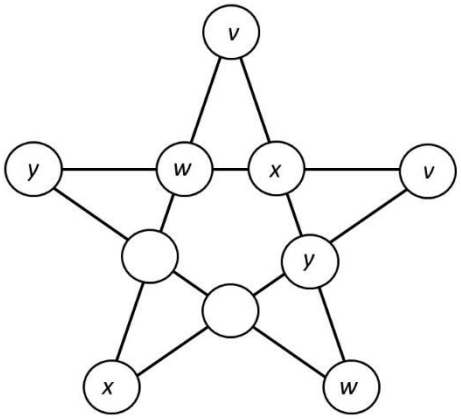
Lösungshinweise Teil b) Nach Teil a erfordert eine zulässige Beschriftung des Pentagramms mit den fünf Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5, dass jede Zahl genau zweimal verwendet wird. Wir führen eine Fallunterscheidung anhand der Beschriftung auf den Eckkreisen.

Fall 1: Auf den fünf Eckkreisen stehen fünf paarweise verschiedene Zahlen.



Aus der Argumentation im Teil a) wissen wir, dass für jeden Platzhalter die Position der zweiten dieser Zahl eindeutig bestimmt ist, weil alle Eckkreise bereits besetzt sind. Für die Belegung der Platzhalter mit den fünf Zahlen gibt es deshalb $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten.

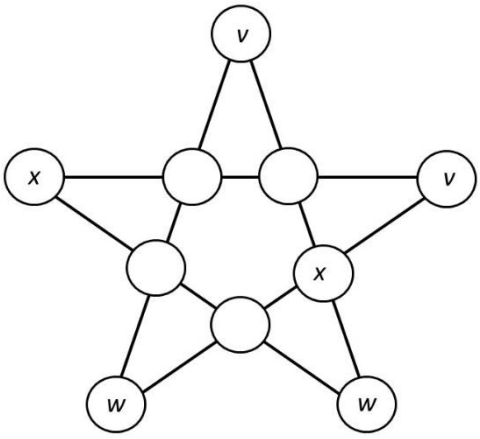
Fall 2: Auf den fünf Eckkreisen stehen vier verschiedene Zahlen.



Die zweifach verwendeten Zahlen (in der Abbildung v) müssen auf benachbarten Eckkreisen (o.B.d.A. auf E_1 und E_2) stehen.

Wieder mit der Argumentation zu Teil a) sind die Positionen der anderen Zahlen der Eckkreise eindeutig bestimmt. Die verbleibenden zwei zu beschriftenden Kreise liegen jedoch auf einer Linie (hier I_3 und I_4), so dass dieser Fall zu einer unzulässigen Beschriftung führt.

Fall 3: Auf den fünf Eckkreisen stehen drei verschiedene Zahlen.



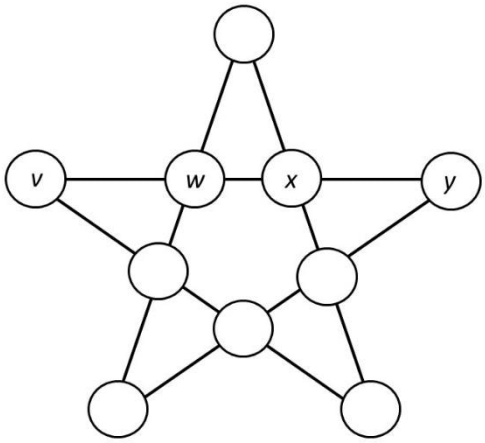
Die zweifach verwendeten Zahlen (in der Abbildung v und w) müssen auf benachbarten Eckkreisen (o.B.d.A. auf E_1 und E_2 bzw. E_3 und E_4) stehen. Da die Position I_2 eindeutig mit x beschriftet werden muss, gibt es nur zwei Möglichkeiten, die verbleibenden vier zu beschriftenden Kreis auszufüllen:

y auf I_3 und I_5 sowie z auf I_1 und I_4
oder z auf I_3 und I_5 sowie y auf I_1 und I_4.

Da es fünf Möglichkeiten gibt, die nur einmal verwendete Zahl auf einem der Eckkreise zu platzieren, gibt es insgesamt $5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 5! = 600$ Möglichkeiten.

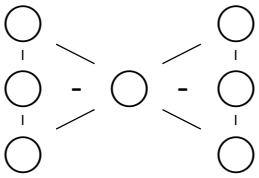
Die Fallunterscheidung ist vollständig, insgesamt gibt es also $120 + 600 = 720$ Möglichkeiten. ❑

Lösungsvariante zu Teil b) Bei einer zulässigen Beschriftung befinden sich auf den vier Kreisen einer jeden Linie vier paarweise verschiedene Zahlen. Wir wählen beispielsweise die Linie $E_5 - I_5 - I_1 - E_2$ und beschriften die Kreise o.B.d.A. mit v, w, x, y. Nun führen wir eine Fallunterscheidung bzgl. der Position I_4. Dort können für zulässige Beschriftungen nur w, x oder z stehen. Diese Unterfälle lassen sich nun vollständig diskutieren.[4]



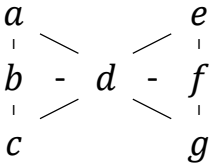
Hinweis: Es existiert keine magische Zahlenverteilung auf dieser Figur. Es ist also nicht möglich, die zehn Zahlen 1, …, 10 so zu verteilen, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und die Summen der jeweils vier Kreise auf den fünf Geraden gleich groß sind. Müssen die einzusetzenden Zahlen zwar paarweise verschieden, aber nicht aufeinanderfolgend sein, gelingen Zahlenverteilungen mit gleichen Summen auf den Geraden.

Aufgabe 22.02. In die Kreise der nebenstehenden Figur sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Geraden (mit jeweils drei Kreisen) die gleiche Summe ergeben.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sich deren Eintragungen bei wenigstens einem Kreis unterscheiden.

Lösungshinweise: Wir setzen anstelle der Kreise die Buchstaben a bis g. Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt für die Geradensumme s



$$a + b + c = a + d + g = b + d + f = e + f + g = e + d + c = s$$

Durch Addition aller fünf Gleichungen erhalten wir

$$5s = 2a + 2b + 2c + 3d + 2e + 2f + 2g = 2\sum_{i=1}^{7} i + d = 56 + d$$

[4] Offizielle Musterlösung der Aufgabenkommission des MO e.V.

Damit für $1 \leq d \leq 7$ auch die rechte Seite dieser Gleichung durch 5 teilbar ist, muss $d = 4$ gelten. Damit gilt $s = 60 : 5 = 12$.

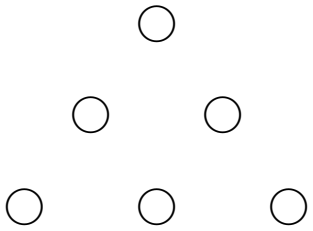
Wegen $b + 4 + f = 12$ gibt es deshalb sechs Möglichkeiten, den Wert b festzulegen: 1, 2, 3, 5, 6 oder 7. Daraus finden wir alle Lösungen durch systematisches Probieren.

b	$f = 8 - b$	a	$c = 12 - a - b$	$e = 8 - c$	$g = 12 - e - f$
1	7	2	9 > 7 *		
1	7	3	8 > 7 *		
1	7	5	6	2	3
1	7	6	5	3	2
2	6	1	9 > 7 *		
2	6	3	7	1	5
2	6	5	5 *		
2	6	7	3	5	1
3	5	1	8 > 7 *		
3	5	2	7	1	6
3	5	6	3 *		
3	5	7	2	6	1
5	3	1	6	2	7
5	3	2	5 *		
5	3	6	1	7	2
5	3	7	0 *		
6	2	1	5	3	7
6	2	3	3 *		
6	2	5	1	7	3
6	2	7	-1 *		

* In Spalte 4 führen nur die Zahlen 1, 2, 3, 5, 6 oder 7 zu einer Lösung. Zudem dürfen in jeder Zeile nur paarweise verschiedene Zahlen stehen.

Insgesamt erhalten wir 10 verschiedene Beschriftungsmöglichkeiten, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. ❑

Aufgabe 22.03 – MO270911. In die Kreisfelder der nebenstehenden Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die drei Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösungshinweise: Es genügt, eine der in der folgenden Aufgabe gefundene Lösung anzugeben. Es ist bei der Aufgabenstellung „Geben Sie an …“ nicht erforderlich, die Herleitung einer solchen Lösung darzustellen, aber es müssen die drei Seitensummen berechnet und explizit angegeben werden. ❑

Aufgabe 22.04 – MO270921. In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung zu MO270911) sollen die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Lösungshinweise: Wir setzen anstelle der Kreise die Buchstaben a bis f. Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt für die Seitensumme s

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & b & & c & \\ d & & e & & f \end{array}$$

$a+b+d=s$ (1); $a+c+f=s$ (2); $d+e+f=s$ (3)

sowie

$$a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21$$

Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21+a+d+f=3\cdot s \text{ ; d.h. } 7+\frac{a+d+f}{3}=s \quad (4)$$

Da s als Summe ganzer Zahlen ganzzahlig ist, muss $a+d+f$ durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für a,d,f eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

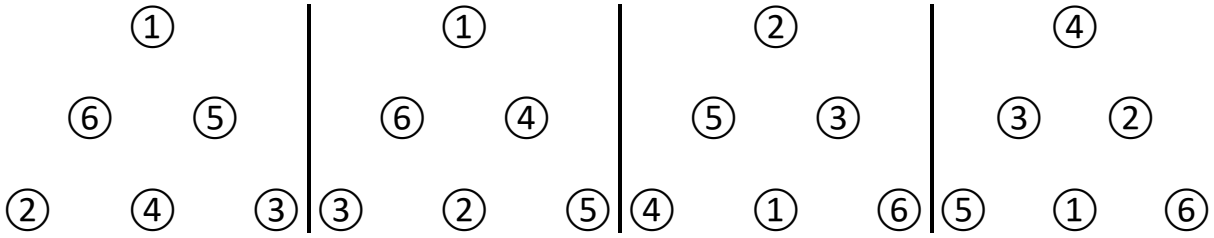
Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert $a+d+f$, den Wert s aus (4), die Werte

$b=s-a-d$ (5); $c=s-a-f$ (6); $e=s-d-f$ (7)

sowie die Angabe, ob die Bedingung über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

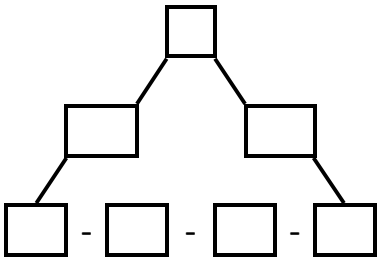
a	d	f	$a+d+f$	s	b	c	e	Kommen 1 bis 6 vor?
1	2	3	6	9	6	5	4	Ja
1	2	6	9	10	7	3	2	Nein
1	3	5	9	10	6	4	2	ja
1	5	6	12	11	5	4	0	Nein
2	3	4	9	10	5	4	3	Nein
2	4	6	12	11	5	3	1	Ja
3	4	5	12	11	4	3	2	Nein
4	5	6	15	12	3	2	1	Ja

Da die Gleichungen (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, dass die vier mit ”Ja” gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.



Da sie sich in den als a, d, f auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten. ❑

Aufgabe 22.05 – MO310924. In die Felder der nebenstehenden Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

Lösungshinweise: Zuerst bemerken wir, dass die beiden mittleren Felder der Basis immer vertauscht werden können, ohne dass die Figur durch Spiegelung in sich selbst überführt wird. Wir wollen deshalb im Folgenden o.B.d.A. voraussetzen, dass die Zahl

im zweiten Feld der Basis kleiner ist als im dritten und die im ersten kleiner als die im vierten.

Seien x die Zahl im ersten Feld der Basis, y diejenige im vierten Feld der Basis und z diejenige in der Spitze des Dreiecks sowie s die Summe der Zahlen an einer Seite dieses Dreiecks. Dann ist

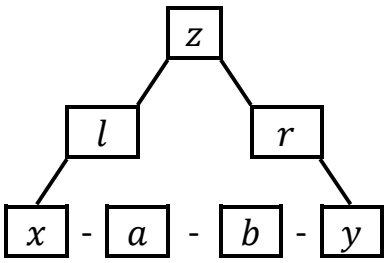
$$3s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + x + y + z = 28 + x + y + z,$$

da genau die Eckfelder an zwei Seiten beteiligt sind und alle anderen Zahlen an genau einer. Wegen $6 = 1 + 2 + 3 \leq x + y + z \leq 5 + 6 + 7 = 18$ ist $34 \leq 3s \leq 46$. Daraus folgt (da s eine ganze Zahl ist) $12 \leq s \leq 15$.

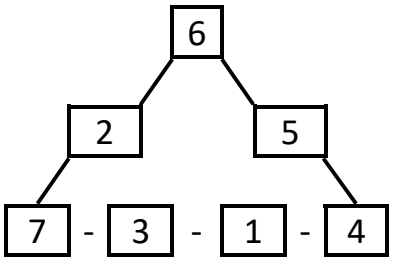
In der folgenden Tabelle geben wir für jeden möglichen Wert für s den Wert, den die Summe der Eckfelder $x + y + z$ dann annehmen muss, sowie dessen Zerlegungen in drei paarweise verschiedene Summanden zwischen 1 und 7 an:

s	$x + y + z$
12	$8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$
13	$11 = 1 + 3 + 7 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5$
14	$14 = 1 + 6 + 7 = 2 + 5 + 7 = 3 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6$
15	$17 = 4 + 6 + 7$

Seien weiterhin mit l die Zahl im Mittelfeld des linken, r die Zahl im Mittelfeld des rechten Schenkels und mit a sowie b die Zahlen im zweiten und dritten Feld der Basis bezeichnet:



Fall 1: $s = 15$. Dann ist $x + y + z = 4 + 6 + 7$ in irgendeiner Reihenfolge. Es könnenwegen $s - 6 - 7 = 2 < 1 + 2$ nicht 6 und 7 beide in der Basis stehen, sodass $y = 4$ folgt. Weiterhin kann dann wegen $s - 7 - 4 = 4$ nicht $z = 7$ gelten, sodass $x = 7$ und $z = 6$ folgt. Dann muss $l = s - x - z = 2$ und $r = s - y - z = 5$ gelten. Es verbleiben für a und b die Zahlen 3 und 1. Tatsächlich ist dann $x + a + b + y =$



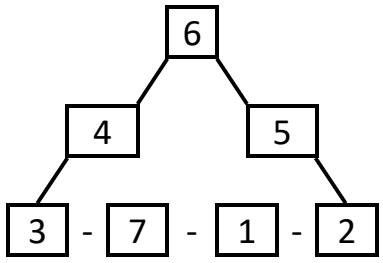
$15 = s$, sodass dies eine Lösung ist (bzw. durch Vertauschung von 1 und 3 dann zwei Lösungen).

Fall 2: $s = 14$. Dann ist $x + y + z = 14 = s$ und es müsste $l = s - x - z = y$ haben, was zu einer Doppelbelegung mit der Zahl y führen würde. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

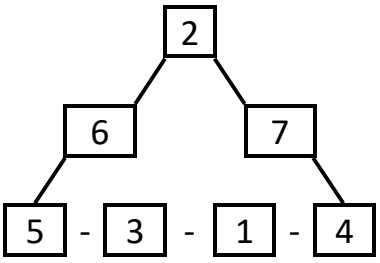
Fall 3.1: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 7$. Dann sind insbesondere $x + z$ und $y + z$ gerade, aber s ungerade, sodass sowohl l als auch r beide ungerade sein müssten. Es ist aber nur noch die einzige noch nicht verwendete ungerade Zahl 5, sodass in diesem Fall keine Lösung existiert.

Fall 3.2: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 4 + 6$. Dann können nicht 4 und 6 an der Basis stehen, da $s - 4 - 6 = 3 < 2 + 3$, da die 1 ja schon für ein Eckfeld vergeben wurde. Also muss $y = 1$ gelten. Es kann nicht $z = 6$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 6 = z$. Es kann nicht $z = 4$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 4 = 8 > 7$. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3.3: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 3 + 6$. Dann können nicht 3 und 6 in der Basis stehen, da $s - 6 - 3 = 4 < 1 + 4$ (1 und 4 sind die kleinsten noch nicht vergebenen Zahlen). Also muss 2 in der Basis stehen und damit $y = 2$ gelten. Dann kann nicht $z = 3$ sein, da sonst $r = s - y - z = 13 - 2 - 3 = 8$ und somit größer als 7 wäre. Also muss $z = 6, r = 5$ und $x = 3$ gelten, woraus $s - x - z = 13 - 3 - 6 = 4$ folgt. Es verbleiben für a und b die Ziffern 7 und 1, und tatsächlich gilt $x + 7 + 1 + y = 3 + 7 + 1 + 2 = 13$, sodass die Zeilensummer erfüllt ist und auch hier eine Lösung (bzw. nach Vertauschen von 7 und 1 eine zweite) entsteht.

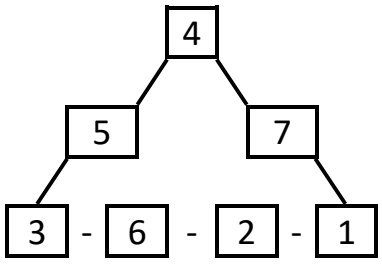


Fall 3.4: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 4 + 5$. Dann können weder 4 noch 5 in der Spitze z stehen, da sonst $y = 2$ und $l = s - x - z = 13 - 4 - 5 = 4$ folgen würde. Also muss $z = 2, x = 5$ und $y = 4$ sein, woraus sofort $l = 6$ und $r = 7$ folgt, sodass für a und b noch die Ziffern 3 und 1 verbleiben. Auch hier gilt wieder $x + a + b + y = 5 + 3 + 1 + 4 = 13 = s$, sodass auch dies eine (bzw. nach Vertauschen von 3 und 1 eine zweite) Lösung ist.



Fall 4.1: $s = 12$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 2 + 5$. Dann kann nicht die 5 in der Spitze *z* stehen, weil sonst $x = 2$ und $l = s - x - z = 12 - 2 - 5 = 5 = z$ folgen würde. Also ist $x = 5$. Mit ähnlicher Argumentation kann dann nicht $z = 2$ sein, sodass $z = 1$ und $y = 2$ folgt, was aber auf den Widerspruch $r = s - y - z = 12 - 2 - 1 = 9 > 7$ führt. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 4.2: $s = 12$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 4$. Dann kann nicht 4 in der Basis stehen, da sonst $x = 4$, $y + z = 1 + 3$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 3 = 8 > 7$ folgen würde. Also muss $z = 4$ und damit $x = 3$ sowie $y = 1$ gelten, woraus $l = s - x - z = 12 - 3 - 4 = 5$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 4 = 7$ folgt. Es verbleiben für a und b noch die Ziffern 6 und 2 und wieder ist $x + a + b + y = 3 + 6 + 2 + 1 = 12 = s$, sodass wir auch hier eine (bzw. nach Vertauschen von 6 und 2 eine zweite) Lösung erhalten.



Da die Fallunterscheidung vollständig war, gibt es bis auf Vertauschung der Felder a und b (sowie Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis) genau vier verschiedene Lösungen. ❑

Aufgabe 22.06 – BWM 2007-R1-A1[5]. Gegeben sei ein regelmäßiges 2007-Eck. Man verteile auf seine Eckpunkte und auf seine Seitenmittelpunkte in beliebiger Weise die natürlichen Zahlen 1, 2, …, 4014 und bilde zu jeder Seite die Summe der Zahlen auf den Eckpunkten und der Zahl auf dem Mittelpunkt.

Man gebe eine Verteilung der Zahlen an, bei der diese Summen gleich sind.

Hinweis: Bei solch einer Aufgabenstellung ist eine Lösung auch ohne Herleitung zulässig, wenn nachgewiesen wird, dass die eindeutig beschriebene Verteilung die gleichen Seitensummen erzeugt. Bei Aufgaben mit Verwendung der aktuellen Jahreszahl ist es möglich (aber nicht zwingend), dass die Jahreszahl durch andere Zahlen ersetzbar ist. Es lohnt also, Lösungsansätze für kleinere Zahlen zu suchen und dann die Lösungsstrategie auf die ursprüngliche Aufgabe zu übertragen.

Lösungshinweise: Für $i \in \{1,2,\ldots,2007\}$ bezeichnen wir mit $e(i)$ die Zahl, die dem Eckpunkt i zugeordnet wird, und mit $m(i)$ die Zahl, die der Seitenmitte zwischen $e(i)$ und $e(i+1)$ zugeordnet wird (wobei für $i = 2007$ statt $i + 1$ der Index 1 gesetzt wird). Wir legen fest:

[5] Bundeswettbewerb Mathematik 2007, Runde 1, Aufgabe 1. In: Langmann, H.-H., Quaisser, E., Specht, E. (Hrsg.) Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben. Springer-Verlag Berlin – Heidelberg 2016. S. 159 ff.

$$e(i) = \begin{cases} i & \text{falls} \quad i \text{ ungerade} \\ 2007 + i & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$
$$m(i) = \begin{cases} 4014 - 2i & \text{falls } i < 2007 \\ 4014 & \text{falls } i = 2007 \end{cases}$$

Mit dieser Zuordnung sind alle 4014 Zahlen genau einmal verwendet. Wir berechnen die Seitensummen:

Fall 1: i ungeradzahlig und somit $i + 1$ geradzahlig, $i < 2007$

$$e(i) + m(i) + e(i+1) = i + 4014 - 2i + 2007 + (i+1) = 6022$$

Fall 2: $i = 2007$

$$2007 + 4014 + 1 = 6022$$

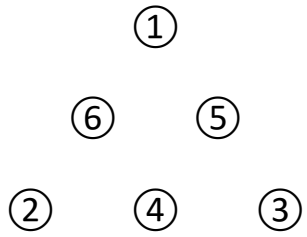
Fall 3: i geradzahlig und somit $i + 1$ ungeradzahlig mit $i + 1 \leq 2017$

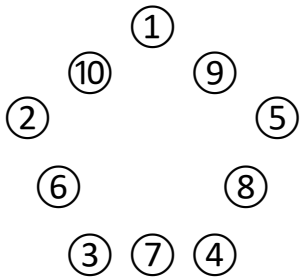
$$e(i) + m(i) + e(i+1) = 2007 + i + 4014 - 2i + (i+1) = 6022.$$

Somit realisiert die Zuordnung eine Beschriftung der geforderten Art. ❑

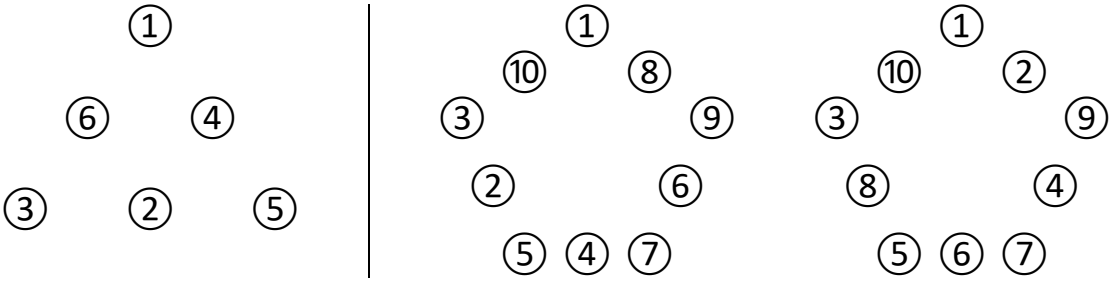
Hinweis: Ausgehend von den Lösungen mit Dreiecken aus Aufgabe 22.03 gelingt uns keine Verallgemeinerung.

Wir versuchen, die Zuordnung beim Dreieck auf ein Fünfeck zu übertragen (die Zahlen 1 bis 5 gegen den Uhrzeigersinn auf die Eckpunkte, die Zahlen 6 bis 10 gegen den Uhrzeigersinn auf die Seitenmitten). Auf diesem Weg sind keine gleichen Seitensummen erreichbar.

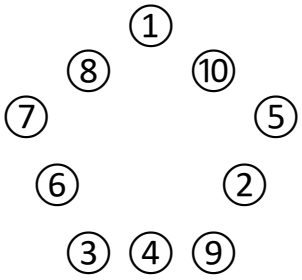




Wir versuchen mit der zweiten Lösung, die Zuordnung beim Dreieck auf ein Fünfeck zu übertragen (die ungeraden Zahlen 1 bis 9 gegen den Uhrzeigersinn auf die Eckpunkte, die geraden Zahlen 2 bis 10 im/gegen den Uhrzeigersinn auf die Seitenmitten). Auf diesem Weg sind keine gleichen Seitensummen erreichbar.



Kommen wir dagegen auf die Idee, im Fünfeck bei der Zuordnung der ungeraden Zahlen gegen den Uhrzeigersinn jeweils eine Ecke zu überspringen, dagegen die geraden Zahlen gegen den Uhrzeigersinn auf die Seitenmitten zuzuordnen, finden wir an allen fünf Seiten die Summe 16.



Vorträge zur Mathematik für die Schule

Zum **5. Tag der Mathematik** (TdM) der Technischen Universität Chemnitz (s. Heft 4/2023) wurden am Vormittag während der Wettbewerbszeit für die Schülerinnen und Schüler zwei Vorträge angeboten, die vom Landesamt für Schule und Bildung (LASUB) für Lehrkräfte als Fortbildung anerkannt wurden[6]. So untersuchte Prof. Dr. ALOIS PICHLER (TUC, Fakultät für Mathematik, Professur Finanzmathematik) in seinem Vortrag "Wie zufällig ist der Zufall?" anhand des einfachen Münzwurfs Regelmäßigkeiten im Zufall. Er diskutierte u.a., ob der Mensch als Generator von Zufallszahlen taugt. Dr. MICHAEL PIPPIG (Intenta Automotive GmbH, Studium an der TUC bis 2009, Promotion an der Professur für Angewandte Funktionalgleichungen) berichtete in seinem Vortrag von „Mathematischen Arbeitswelten“. Am Beispiel eines Arbeitstages illustrierte er, was ein Mathematiker macht. Fernab von Vorurteilen und Klischees gab er Einblicke in einen Beruf, der sich vielfach auszahlt.[7]

Im **Plenarvortrag** des TdM behandelte Dr. ANNE KANDLER (Max-Planck-Institut für evolutionäre Anthropologie, Abteilung für menschliches Verhalten, Ökologie und

[6] Auch zum 6. TdM im kommenden Jahr werden Fortbildungsvorträge vorbereitet.

[7] Dr. Pippig stellte seine Vortragsfolien unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/ online zur Verfügung (pdf-Format, 3,2 MB) auch auf Anfrage an bino@hrz.tu-chemnitz.de

Kultur; Studium an der TUC bis 2006, Promotion an der Professur für Angewandte Mathematik) das Thema „Kann Mathematik helfen, bedrohte Sprachen zu retten?“

Abstrakt: Warum gibt es zwei Geschlechter? Warum leben nur Menschen in Städten und nicht zum Beispiel Schimpansen, mit denen wir etwa 98% unsere Gene teilen? Warum gibt es so viele Sprachen auf der Welt, warum sterben die meisten gerade aus und kann man diesen Prozess umkehren? Auch wenn diese Fragen zu sehr verschiedenen Themengebieten gehören, so haben sie doch eines gemeinsam; nämlich, dass zu ihrer Beantwortung mathematische Modelle benutzt werden. Die Mathematik ist ein wichtiges Werkzeug, welches wissenschaftlichen Fortschritt in anderen Disziplinen ermöglicht. In diesem Vortrag werden die Bedeutung mathematischer Modelle am Beispiel der sogenannten Sprachverschiebung demonstriert. Lokale Dialekte und ganze Sprachen verschwinden derzeit in einem unglaublichen Tempo. Im Schnitt geht alle 14 Tage eine Sprache verloren. Linguisten versuchen zumindest Fragmente dieser Sprachen aufzuzeichnen, zum Beispiel mit Hilfe von Tonaufnahmen. Aber was kann man tun, wenn man eine vom Aussterben bedrohte Sprache erhalten möchte? Dies ist ein Bereich, in dem Mathematiker den Linguisten zur Seite stehen können. Es wird ein mathematisches Modell gezeigt, das beschreibt, wie häufig verschiedene Sprachen im Laufe der Zeit gesprochen wurden. Solch ein Modell kann dabei helfen, die Wirksamkeit von Regierungsprogrammen zu bewerten, die den Erhalt bedrohter Sprachen fördern sollen. Als reales Beispiel wird die gälisch-englische Sprachverschiebung diskutiert.

Unter der Überschrift **„Wir machen Schule mit Vorträgen“** bietet die Fakultät für Mathematik interessante Vorträge im Umfang von ca. 60 bis 90 Minuten für die Klassenstufen 11 und 12 an. Die Vorträge können an der TU Chemnitz organisiert werden, sind aber auch an Gymnasien im Regierungsbezirk Chemnitz und im Umland möglich. Dabei entstehen für die Schule keine Kosten. Die Vorträge zeigen Zusammenhänge zu anderen Gebieten der Wissenschaften und unseres Lebens auf und leisten einen Beitrag zur Abiturvorbereitung und für das spätere Studium oder Berufsleben. Unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/schule/index.de.php[8] sind aktuelle Vortragsangebote beschrieben. Sie beziehen sich unter anderem auf Anwendungen der Optimierung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, erläutern Beispiele der bildgebenden Verfahren und Signalverarbeitung oder zeigen Mathematik und Kunst. Es ist aber auch möglich, eigene Themenvorschläge anzugragen.

Am 26. April 2023 fand das Online-Seminar zum **Bundeswettbewerb Mathematik** für Lehrerinnen und Lehrer statt. Schwerpunkt des kostenlosen Seminars waren die

[8] Hier werden weitere Angeboten beschrieben: Besuch an der Fakultät für Mathematik, Praktika, Projektarbeiten, Besondere Lernleistungen, Online-Lernangebote, individuelle Betreuung, …

Lösungen der Aufgaben der abgeschlossenen Wettbewerbsrunde. Daneben beschäftigte es sich auch mit organisatorischen Fragen. Es wurde über unerwartete Lösungswege, den mathematischen Hintergrund der Aufgabenstellungen und typische Lösungsmuster der Teilnehmenden gesprochen. Das Seminar wurde von PATRICK BAUERMANN (Leiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe) geleitet. Er war im Gespräch mit Prof. Dr. RAINER KAENDERS (Vorsitzender Aufgabenausschuss des Bundeswettbewerbs) und StD i.R. KARL FEGERT (Vorsitzender Korrekturkommission).

Das erklärte Ziel des Wettbewerbs ist es, das Beweisen von mathematischen Aussagen zu vervollkommnen. Beweise müssen präzise, schlüssig, vollständig und richtig aufgeschrieben werden. Hilfsmittel sind zugelassen, aber die Darstellung muss ohne solche Hilfsmittel nachvollziehbar sein. Insbesondere kann Rechentechnik zur Lösungsfindung eingesetzt werden, Programmcodes sind jedoch in Beweisen nicht zulässig (weil der Korrektur zur Prüfung ebenfalls Rechentechnik nutzen müsste).

Mit über 1400 Teilnehmenden in der 1. Runde wurden die Aufgaben gut angenommen. Die Einstiegsaufgabe trug sicher dazu bei: Der Text war verspielt (und damit eher untypisch für BWM). Für die Beantwortung der ersten beiden Teilaufgaben genügte die Angabe eines Beispiels eines passenden Verlaufs. Da die dritte Teilaufgabe zu verneinen war, bestand hier jedoch Argumentationsbedarf. Dies konnte modulo 3 gelöst oder ganz „formelfrei“ verbal erfolgreich bewältigt werden.

Die Lösung zur zweiten Aufgabe konnte man durch Probieren finden. Sie ließ sich auch mittels geeigneter Software finden. Für die Lösungsdarstellung genügte es, die Probe vorzurechnen. Der wichtigere Teil der Aufgabe war jedoch die Argumentation, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Hier gibt es viele, in den veröffentlichten Lösungshinweisen gezeigte Ansätze, die für eine tiefere Beschäftigung mit solchen Aufgaben anregen sollte.

Ein Schwerpunkt in der Lösungsdiskussion zu den Aufgaben 3 und 4 war die Nutzung der Recherche nach ähnlichen Problemen und die dabei möglichen Übertragungen auf die zu lösende Fragestellung. Breiten Raum nahm die Auswirkungen von ChatGPT. Noch erscheint dessen Einfluss auf das mathematische Argumentieren unkritisch, so dass mit der Aufgabengestaltung gegengesteuert werden kann. Zudem wird darauf gesetzt, dass die Teilnahme am BWM eine Ehrensache ist und die persönliche Leistungsfähigkeit herausfordert. Zur 3. Runde als Höhepunkt des Wettbewerbs, die als Gespräch mit einer Fachjury stattfindet, wird ChatGPT auch zukünftig keine Rolle spielen.

Das nächste Online-Seminar wird im September stattfinden und sich den Aufgaben der aktuell laufenden Runde widmen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist ein Quadrat der Seitenlänge n, auf dessen Feldern n^2 paarweise verschiedene natürliche Zahlen so platziert werden, dass jede Zeile und jede Spalte sowie die beiden Diagonalen die gleiche Summe ergeben. Sie sind bereits aus China seit ca. 2800 v.u.Z. bekannt. Eines der berühmtesten magischen Quadrate ist in ALBRECHT DÜRERS (1471 – 1528) Kupferstich „Melancholia I“ zu finden (s. nebenstehende Abbildung). Es vereint eine Vielzahl interessanter Eigenschaften von bestimmten magischen Quadraten und zeigt in der Mitte der unteren Zeile das Entstehungsjahr 1514.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ADAM RIES (1496 – 1559) beschäftigt sich zum Schluss seines 2. Rechenbuchs „Rechenung auff der Linihen vnd Federn“ (1522, gedruckt in Erfurt) mit magischen Quadraten der Ordnung 3. Abschließend gibt er ohne weitere Erläuterungen ein magisches Quadrat der Ordnung 4 an – das DÜRER-Quadrat, in dem die zwei mittleren Spalten vertauscht sind. RIES nimmt später in seinem 3. Rechenbuch (1550, gedruckt in Leipzig) darauf Bezug und diskutiert ausführlich die Bildung magischer Quadrate[9].

Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder.
Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones /
Practica genant /

Mit grüntlichem vnterricht des viſierens.

Durch Adam Rieſen
im 1550. jar.

[... Seiten 103 bis 106]

Zum beſchlus der federn / will ich dir alhie erzehlen ſo etlich zaln / natürlicher ordenung / oder gleichen mitteln in ein geuierdt geſatzt werden / wie du die ordnen ſolt / hiermit in einer zal fur ſich oder vnderſich / des gleichen creutzweis eine zal wird / das iſt in einer zeil ſovil als in der andern.

Item in 3 mal 3 als 9 velder gleich einem gevierden quadraten / ſollen geſatzt werden 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. das vberal ein Summa wirt alhie thu 1 zu 9 wird 10 derhalbe teil iſt 5. kompt in die mitte des geviertdes als in das fünffte feldt / vnder dem ſetz 1 als die erſte zal und zele diametraliter / das iſt von einem winckel zum anderen / wie die zaln angegeben ſeind / kanſtu nicht vnderſich / ſetz das ſelb in die oberſte zeil gerad vberſich zele fort /

[9] Es wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen.

kompt auſſerhalb der rechten handt / ſetz zu forderſt gen der lincke hand zele alſo nach den winckeln / Begibt ſich das ein zall ſter / nach der ſeiren darunter / ſetz du die letzte zal gen der lincken handt / zele fort / bis du die letzte zal erreichſt / vnd alle felder mit zaln beſchrieben ſeind / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern.

4	9	2	
3	5	7	3
8	1	6	8
4	9	2	7

Nach 1 volget 2 kompt auſſerhalb des gevierds/ ſetz 2 zu oberſt / ſo komen 3 auch auſſerhalb des gevierden / ſetz zu forderſt gen der lincken handt / zele fort / quemen 4 an ſtatt des 1 ſetz 4 nachm winckel zu rück / thu die auf kompt auſſerhalb / ſetz zu oberſt / zele herab 4 / 5 / 6 wie hie obe komen 7 auſſerhalb / ſetz in das euſſerſte mittlere felt / ſo komet 8 auſſerhalb / ſetz gerad gen der lincken hant zele alſo fort / kompt wie oben / vnd ſeind in jeder zal 15.

Item 1/2/3/4/5/6 etc, in 5 mal 5 felder zu ſetzen / al hie iſt die erſte zal .1 die letzte zal 25 thut 26 / der halbe theil iſt 13 komet in die mitte als an das dreizehende feldt / wu ſchacht weis gemacht ſetz 1 vnder 13 zele fort wie hie oben gethan / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern wie hie 65 in jder zeil.

11	24	7	20	3	
4	12	25	8	16	4
17	5	13	21	9	17
10	18	1	14	22	10
23	6	19	2	15	23
11	24	7	20	3	16

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	5
30	6	24	49	18	36	12	30
13	31	7	25	43	19	37	13
38	14	32	1	26	44	20	38
21	39	8	33	2	27	45	21
46	15	40	9	34	3	28	46
22	47	16	41	10	35	4	29

Desgleichen in 7 mal 7 zu ſetzen von 1 an zuheben iſt 1 vnd 49 gerad 50 der halbe theil iſt 25 komet in die mitte darunter heb an zu zeln / nach den winckeln gen der rechten handt 1/2/3 etc. wie alhie wirt 175.

37	78	29	70	21	62	13	54	5	
6	38	79	30	71	22	63	14	46	6
47	7	39	80	31	72	23	55	15	47
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57
26	58	18	50	1	42	74	34	66	26
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67
36	68	19	60	11	52	3	44	76	36
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77
37	78	29	70	21	62	13	54	5	46

Desgleichen kanſtu auch in 9 mal 9 als in 81 feldern ſetzen das allenthalben ein zal kompt wie hie 361.

Mit 11 mal 11 / 13 mal 13 vnd allen ungeraden zaln thu gleicher weis / allhie thut 11 mal 11 / 121 iſt 61 der eine teil vnd 60 der ander teil kompt 61 in die mitte deſ gevierdes / gleich wie das punct in der mitte deſ Circkels iſt / darunter ſetz 1 danach winckelmeſſig 2 / 3 / 4 etc.

Wirt alſo von 56 dem obern eck bis auff 66 das vnder eck gezelt / thut die Summa jder zeil 671 / furſich / vnderſich / auch creutzweis.

Von den ungeraden / oder ungleichen zaln / hab ich bis here gnugſame vnterıcht gethan / wie ein jede in ſich multiplicirt / ein gevierte flech auff alle ſeitten gleich brengt / vnd auff alle ſeitten / furſich / vnderſich auch creutzweis eine Suzmma komet / Nach dem die zaln / Natürlicher ordenung einander volgen / gleich en mitteln / oder irgent einer quantiter / will ich itzt ein wenig melden wan ein gerade zal alſ 2 / 4 / 6 / 8 etc. in ſich gefürt / vnd ein gevierd mache / wie gleicherweis zaln / natürlicher / vnderſcheidener des gleichen der quantiteten geſatzt ſolln werden / das allenthalben gleiche ſumma wie hie oben angezeigt kome.

Hie ſol ein jder wiſſen / das 2 mal 2 als 4 nicht zu gleich komen kan / dan 1 / 2 / 3 / 4 in eine gevierdt geſetzt ſo an jmezehent thut / in vier gantze das nicht bleibt vnmüglich / Creutzweis mag das ſein / oder fur ſich vnd vnderſich nicht.

1	2
3	4

Nach zweien in ſich volget die an der gerade zal / natürlicher ordenung / 4 / ſo die in ſich gefürt / werden 16 müſſen alda vier für ſich vnd 4 vnderſich ſein / es kann von 1 oder einer anderen zal angehoben werden / jdoch das Natürlich / oder vnterſchiedtlich etc. zeln da iſt / hie vnd im volgenden zaln ſo gerad vnd in ſich gefürt / kann allenthalben gleicheit gehalten / welche in zwei mal zwei nicht ſein mag.

In 4 mal 4 das iſt ein Roſt 4 löcher fur ſich vnd 4 vnderſich / zu ſetzen.

5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

In meinem vorigen Büchlein / ſo 1522 in Erffurdt gedruckt hab ich gelernt / vor wechſſelung auſwendig vnd inwendig vber eck / darbey las ichs noch beruhen / ſtet.

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

Iſt alhie in jeder zeil / furſich / auch vnderſich desſgleichen vber eck 50.

Dem nach mag ein jeder von jeme ſelbſt / machen in 6 mal 6 / oder 8 mal 8 zu ſetzen / wie der ausganck der erſten vnd oberſten zeil gen der vnderſten / alſo iſt der ausganck der anderen zeil / gegen an einer der letzten / wu zuvor von der rechten / wirt als dan von der lincken / gen der rechten handt gegangen / alſo hinfort wie hie klerlich vor augen.

In ſechs felder fur ſich / auch vnderlich zu ſetzen /

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Volgendt werden in 64 felder gefetzt zaln / als 1 2 3 4 5 6 alſo hinfort das an einer zeil / ſovill als an der andern komen den ausganck / ſiheſtu vor augen / magſt mit andern geraden zaln / gleich meſſig handeln wirt vberal 260.

In acht feldern zu ſetzen dasſ allenthalben gleich werde 260.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	41	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Bekannte Sätze der Mathematik

Der Satz von VIETA (oder auch Wurzelsatz von VIETA) ist benannt nach dem französischen Mathematiker FRANÇOIS VIÈTE (1540 – 1603), der ihn in seinem postum (1642) erschienenen Werk *„De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo“ („Zwei Abhandlungen über die Untersuchung und Verbesserung von Gleichungen“*) bewies. Der Satz macht eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer algebraischen Gleichung.

Satz. Seien p und q die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und x_1 und x_2 deren Lösungen (Wurzeln). Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich direkt durch Ausmultiplizieren der Nullstellenform nach Koeffizientenvergleich. Dafür verwenden wir eine Folgerung der Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra, dass sich jedes (normierte) Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, dass n reellwertige Nullstellen besitzt, als Produkt von n Linearfaktoren darstellen lässt. Sind also für $n = 2$ die Werte x_1 und x_2 deren Lösungen, so gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

und somit $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Alternativ folgt der Satz aus der pq-Formel: Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Addieren der beiden Lösungen ergibt:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

Multiplizieren ergibt nach der dritten binomischen Formel:

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q.$$

Der Satz von Vieta lässt sich auf Polynomgleichungen bzw. Polynome beliebigen Grades verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist die Grundlage für das Lösen von Gleichungen höheren Grades durch Polynomdivision. Wir verwenden hier lediglich den Sonderfall reellwertiger Lösungen.

Ist x_0 eine reellwertige Lösung des (normierten) Polynoms

$$P(x) = \sum_0^n a_n \cdot x^n = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

(d.h. $P(x_0) = 0$) mit reellwertigen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ (normiert, d.h. $a_n = 1$), so gibt es ein Polynom $Q(x)$ mit reellwertigen Koeffizienten mit

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x).$$

Sind alle n Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ reellwertig, so können wir das Abspalten der Linearfaktoren fortsetzen und erhalten

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Nun ergibt sich der verallgemeinerte Satz von VIETA durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich[10]:

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

[10] hier für $n \geq 4$ dargestellt. In Wettbewerbsaufgaben genügt meist die Verallgemeinerung auf $n = 3$.

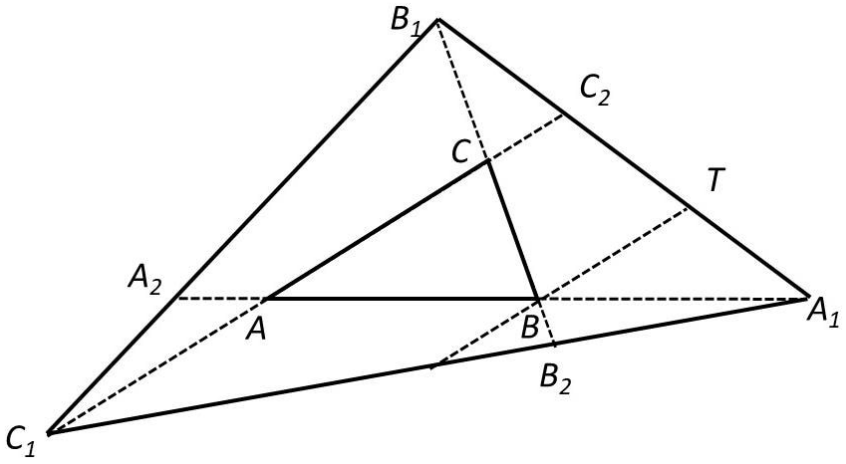
$$a_{n-2} = (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$
$$a_{n-3} = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$
$$\ldots$$
$$a_0 = (-1)^n \cdot x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Folgerung. Sind alle Lösungen eines Polynoms ganzzahlig, so ist jede Lösung ein Teiler des Absolutgliedes a_0. Somit können wir eine Lösung durch systematisches Probieren aller positiven und negativen Teiler finden. Durch Abspalten des zugehörigen Linearfaktors können wir das verbleibende Polynom untersuchen, dessen Grad um 1 gegenüber dem Ausgangspolynom reduziert wurde.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/23

Im Dreieck ABC wird A an B nach A_1, B an C nach B_1 und C an A nach C_1 gespiegelt. Man konstruiere das Dreieck ABC, falls nur die Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben sind. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu diskutieren.

Lösungshinweise Analyse:
Die Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus schneide A_1B_1 in C_2, die Parallele dazu durch B schneide A_1B_1 in T. Weiterhin schneiden die Verlängerungen von $\overline{AB}$ über A hinaus B_1C_1 in A_2 und von $\overline{BC}$ über B hinaus A_1C_1 in B_2.



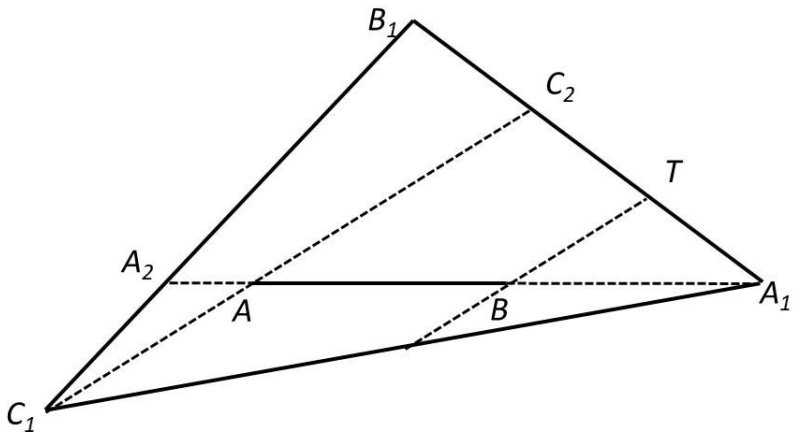
Wegen der Bildungsvorschrift $|\overline{AB}| = |\overline{BA_1}|$ bzw. $|\overline{BC}| = |\overline{CB_1}|$ (Spiegelungen an B bzw. C) ist nach Strahlensatz bzgl. der Strahlen A_1A und A_1C_2

$$|\overline{A_1T}| : |\overline{TC_2}| = |\overline{A_1B}| : |\overline{BA}| = 1$$

und bzgl. der Strahlen B_1B und B_1T

$$|\overline{B_1C_2}| : |\overline{C_2T}| = |\overline{B_1C}| : |\overline{CB}| = 1$$

Somit teilt der Punkt C_2 die Strecke A_1B_1 im Verhältnis $|\overline{A_1C_2}| : |\overline{C_2B_1}| = 2 : 1$. Ebenso können wir beweisen, dass der Punkt A_2 die Strecke B_1C_1 im Verhältnis $|\overline{B_1A_2}| : |\overline{A_2C_1}| = 2 : 1$ teilt und der Punkt B_2 die Strecke C_1A_1 im Verhältnis $|\overline{C_1B_2}| : |\overline{B_2A_1}| = 2 : 1$ teilt.



Konstruktionsbeschreibung:

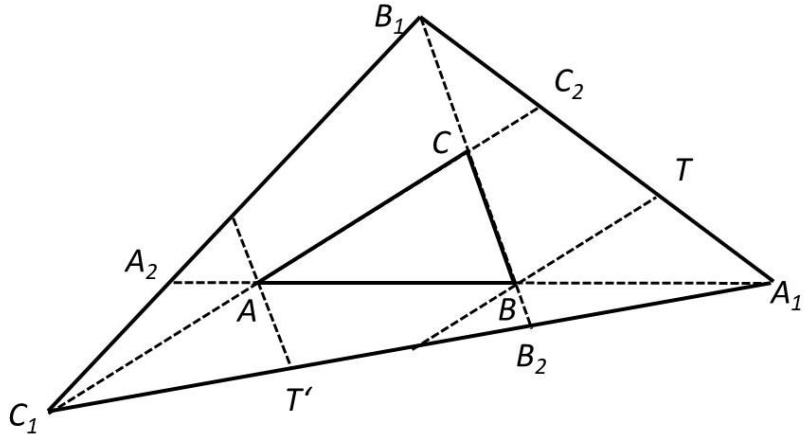
1) Im gegebenen Dreieck $A_1B_1C_1$ dritteln wir die Dreiecksseiten $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{B_1C_1}$ und markieren die Teilungspunkte C_2, A_2, die näher an B_1 bzw. C_1 liegen.

2) Wir verbinden A_1 mit A_2, und C_1 mit C_2. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{C_1C_2}$ mit A.

3) Wir konstruieren die Parallele zu $\overline{C_1C_2}$ durch T, dem zweiten Teilungspunkt auf $\overline{A_1B_1}$, und bezeichnen den Schnittpunkt mit $\overline{A_1A_2}$ mit B.

4) Wir verbinden B_1 mit B, verlängern über B hinaus und bezeichnen den Schnittpunkt mit $\overline{C_1A_1}$ mit B_2. Den Schnittpunkt von $\overline{C_1C_2}$ und $\overline{B_1B_2}$ bezeichnen wir mit C.

Das Dreieck ABC ist Lösung der Aufgabe.



Beweis: Nach Konstruktionsschritt 3) können wir für die Strahlen $\overline{A_1C_2}$ und $\overline{A_1A}$ mit den Parallelen $\overline{C_1C_2}$ und $\overline{BT}$ den Strahlensatz anwenden und finden

$$|\overline{AB}| : |\overline{BA_1}| = |\overline{C_2T}| : |\overline{TA_1}| = 1.$$

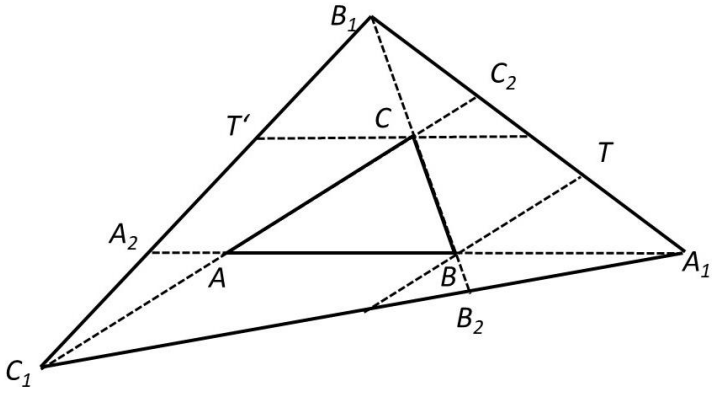
Also gilt $|\overline{AB}| = |\overline{BA_1}|$, d.h., A_1 ist der Spiegelpunkt von A bezüglich B.

Nach Konstruktionsschritt 4) können wir auch für die Strahlen $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1A_1}$ mit den Parallelen $\overline{C_1C_2}$ und $\overline{BT}$ den Strahlensatz anwenden und finden

$$|\overline{BC}| : |\overline{CB_1}| = |\overline{TC_2}| : |\overline{C_2B_1}| = 1.$$

Also gilt $|\overline{BC}| = |\overline{CB_1}|$, d.h., B_1 ist der Spiegelpunkt von B bezüglich C.

Wir zeichnen als eine Hilfsgröße die Parallele zu $\overline{A_1A_2}$ durch C und bezeichnen deren Schnittpunkt mit $\overline{C_1B_1}$ mit T‘. Dann können wir auch für die Strahlen $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1A_2}$ mit den Parallelen $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{T'T}$ den Strahlensatz anwenden und finden



$$\left|\overline{A_2T'}\right| : \left|\overline{T'B_1}\right| = |\overline{BC}| : |\overline{CB_1}| = 1.$$

Also ist T‘ der zweite Teilungspunkt nach Konstruktionsschritt 1) auf der Seite $\overline{C_1B_1}$. Somit können wir auch für die Strahlen $\overline{C_1B_1}$ und $\overline{C_1C}$ mit den Parallelen $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{TT'}$ den Strahlensatz anwenden und finden

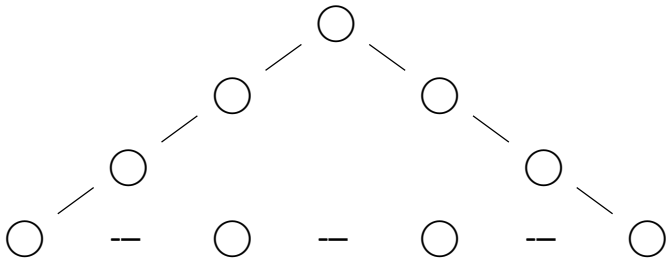
$$|\overline{C_1A_2}| : \left|\overline{A_2T'}\right| = |\overline{C_1A}| : |\overline{AC}| = 1.$$

Also gilt $|\overline{AC}| = |\overline{C_1A}|$, d.h., C_1 ist der Spiegelpunkt von A bezüglich C.

Monatsaufgabe[11] 5/23.

In die unten abgebildete Figur sind in die neun Kreise die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass jede dieser Zahlen genau einmal verwendet wird und die Summen der drei Dreiecksseiten (jeweils aus den Zahlen der vier Kreise einer Seite) gleich groß sind.

Ermitteln Sie alle möglichen verschiedenen Zahlenverteilungen, wenn im Kreis an der Spitze die Zahl 5 steht.



Hinweis: Zwei Zahlenverteilungen genau dann voneinander verschieden, wenn sich deren Eintragungen bei wenigstens einem Kreis unterscheiden.

[11] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.06.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 22 – Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren 3
Vorträge zur Mathematik für die Schule 13
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Bekannte Sätze der Mathematik 19
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/23 21
Monatsaufgabe 5/23. 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[12]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
5/2023 (Mai 2023)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf ebene Figuren	MO620936
4/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO621034, MO620934
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

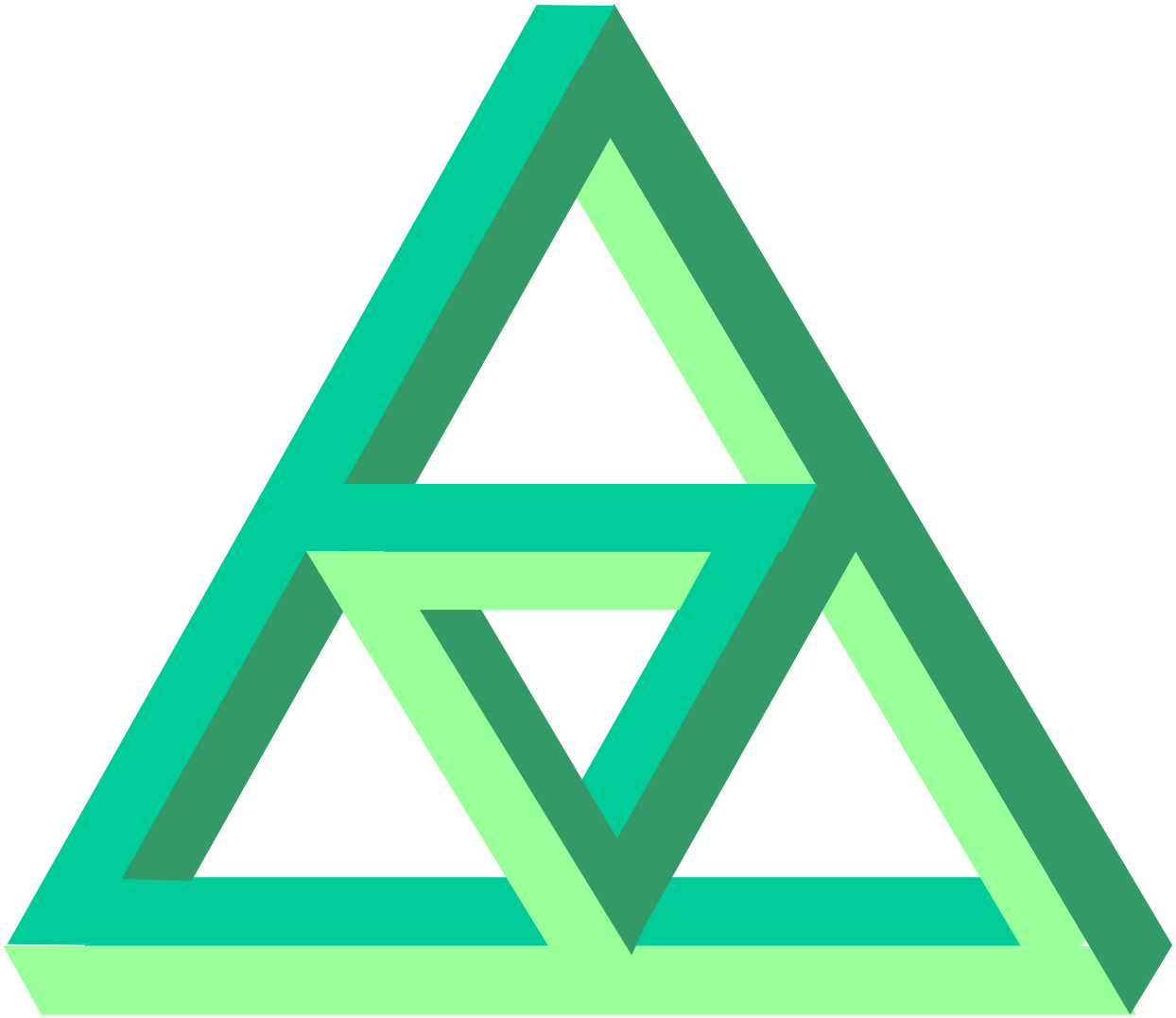
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 6/2023 (Juni 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir beziehen uns noch einmal auf die Aufgabe **MO620936** und zeigen weitere Beispiele von Zahlenbeschriftungen, diesmal auf Körpern. Damit wollen wir die Vielfalt derartiger Wettbewerbsaufgaben verdeutlichen.

Mit Bezug zur Aufgabe **KZM 6-3** des Korrespondenzzirkels Mathematik diskutieren wir Lösungsansätze für Aufgaben mit (nicht-linearen) Gleichungssystemen, die sich auf den Wurzelsatz von VIETA begründen. Es zeigt sich, dass die Quantifizierung der im Wurzelsatz auftretenden Terme beitragen kann, die Nichtexistenz weiterer Lösungen zu beantworten.

Im historischen Rückblick zitieren wir aus einem Lehrbuch von 1895, wie damals Wurzelsatz von VIETA vermittelt wurde.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 22.02 – Zahlenverteilungen auf Körpern

Aufgabe 22.07 – MO341021.

a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?
b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, dass für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?

Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Lösungshinweise Teil a) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt.

Dazu legen wir den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Dann gibt es fünf Möglichkeiten, welche der Zahlen auf der unteren Seitenfläche steht. Anschließend drehen wir den Würfel so um die vertikale Achse, dass die kleinste Zahl nach vorn zeigt. Es gibt damit noch $3! = 6$ Möglichkeiten, wie die anderen drei Seitenflächen beschriftet wurden. Es gibt also insgesamt $5 \cdot 3! = 30$ paarweise verschiedene Verteilungen.

Lösungshinweise zu Teil b) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt und Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen die Summe 7 haben.

Dazu legen wir den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Da 6 (und nicht 2) auf der gegenüberliegenden Seite steht, können ihn so um die vertikale Achse drehen, dass die Seite mit der 2 nach vorn zeigt. Somit liegt 5 auf der hinteren Seite. Nun kann 3 auf der linken oder auf der rechten Seitenfläche stehen. Es gibt also insgesamt 2 Möglichkeiten. ❑

Aufgabe 22.08 – MO540936/MO541036. Die sechs Seitenflächen eines Würfels sollen so mit verschiedenen positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass zwei Zahlen genau dann teilerfremd sind, wenn sie auf gegenüberliegenden Seitenflächen liegen.

a) Finden Sie eine derartige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderte Eigenschaft hat.
b) Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert, welchen die größte der sechs Zahlen einer derartigen Beschriftung annehmen kann.

Lösungshinweise – Vorbemerkung: Eine Beschriftung der Seitenflächen des Würfels entsprechend der gegebenen Bedingung nennen wir zulässig. Da zwei nicht gegenüberliegende Seitenflächen eines Würfels stets benachbart sind, ist eine Beschriftung genau dann zulässig, wenn auf gegenüberliegenden Seiten teilerfremde Zahlen und auf benachbarten Seiten nicht teilerfremde Zahlen stehen. Wir erzeugen eine spezielle Art von Beschriftung der Seitenflächen, indem wir zunächst den Kanten des Würfels Primzahlen zuordnen. Für jede Seitenfläche bilden wir dann die Menge der verschiedenen Primzahlen, die den vier angrenzenden Kanten zugeordnet sind. Aus diesen Zahlen berechnen wir anschließend das Produkt und beschriften damit die Seitenfläche.

Für derartige Beschriftungen gelten folgende Aussagen:

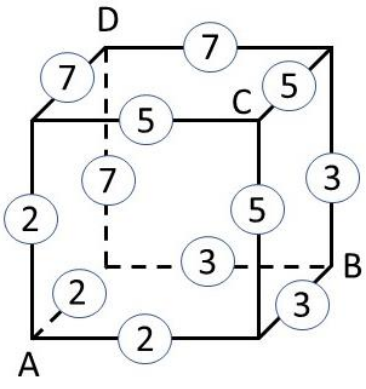
(1) Eine solche Beschriftung ist genau dann zulässig, wenn auf gegenüberliegenden Seitenflächen teilerfremde Zahlen stehen.

(2) In einer solchen zulässigen Beschriftung sind gegenüberliegenden Kanten derselben Seitenfläche verschiedene Primzahlen zugeordnet.

Zu (1): Nach Konstruktion sind benachbarte Seitenflächen nicht teilerfremd beschriftet, denn die beiden Beschriftungen enthalten als gemeinsamen Faktor wenigstens die Primzahl, die der gemeinsamen Kante zugeordnet ist. Die zweite Zulässigkeitsbedingung ist also automatisch erfüllt.

Zu (2): Diese beiden Kanten gehören zu gegenüberliegenden Seitenflächen, die ihnen zugeordneten Primzahlen gehen damit in teilerfremde Produkte ein und müssen somit selbst teilerfremd sein.

Lösungshinweise Teil a) Wir erzeugen eine zulässige Beschriftung nach dem eben beschriebenen Verfahren wie folgt: Wir wählen eine Ecke A des Würfels und bezeichnen die Endpunkte der drei von A ausgehenden Flächendiagonalen mit B, C und D. Von jedem dieser vier Eckpunkte gehen genau drei Würfelkanten aus, und diese Kantenmengen sind paarweise disjunkt. Den drei von A ausgehenden Würfelkanten wird nun jeweils 2 zugeordnet, den drei von B ausgehenden Würfelkanten jeweils 3, den drei von C ausgehenden Würfelkanten jeweils 5, den drei von D ausgehenden Würfelkanten jeweils 7 und daraus eine Beschriftung der Seitenflächen nach dem oben angegebenen Verfahren erzeugt.



Die Würfelseiten mit Ecke A sind dann mit den Zahlen $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$ und $2 \cdot 7 = 14$, die jeweils gegenüberliegenden Seiten mit den Zahlen $5 \cdot 7 = 35$, $3 \cdot 7 = 21$ und $3 \cdot 5 = 15$ beschriftet. Die Beschriftung ist nach (1) zulässig, da gegenüberliegende Seitenflächen teilerfremd beschriftet sind, wie durch einfaches Nachrechnen geprüft werden kann.

Anmerkung: Eine derart systematische Herleitung muss zum Lösen der Aufgabe nicht erbracht werden, allein der Nachweis ist erforderlich, dass die vom Schüler angegebene Lösung auch wirklich alle geforderten Eigenschaften hat.

Lösungshinweise Teil b) Wir zeigen nun, dass die größte der sechs Zahlen einer zulässigen Beschriftung mindestens gleich 35 ist.

Wir starten mit einer beliebigen zulässigen Beschriftung $a_1, \dots, a_6$ der Seitenflächen mit Maximum a und erzeugen daraus zunächst eine Zuordnung von Primzahlen zu Würfelkanten: In jeder Würfelkante stoßen genau zwei benachbarte Seitenflächen zusammen, die in einer zulässigen Beschriftung nicht teilerfremd beschriftet sind. Wir ordnen der Kante den größten gemeinsamen Primfaktor der beiden Seitenflächenbeschriftungen zu.

Nun bestimmen wir aus dieser Kantenbeschriftung nach obigem Verfahren eine zweite Beschriftung $b_1, \dots, b_6$ der Seitenflächen mit Maximum b. Ist P die Menge der Primzahlen zu den Kanten zur Seitenfläche i, so ist a_i durch jede Primzahl $p \in P$ teilbar und b_i gerade das einfache Produkt aller Primzahlen $p \in P$. Damit ist b_i ein Teiler von a_i und es folgt zunächst, dass nach (1) auch die zweite Beschriftung zulässig ist, denn wenn gegenüberliegende a_i teilerfremd sind, so erst recht gegenüberliegende b_i. Weiterhin gilt $a \geq b$.

Wir zeigen nun $b \geq 35$. Auf jeder Seitenfläche steht in der zweiten Beschriftung wegen (2) ein Produkt aus mindestens zwei Primzahlen. Ist eine Seitenfläche mit einem Produkt aus mindestens drei Primzahlen beschriftet, so handelt es sich dabei um das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ oder um ein Produkt, das wenigstens gleich $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ (also größer als 35) ist. Im ersten Fall sind den Kanten der Seitenfläche die Primzahlen {2, 3, 5} zugeordnet und somit den Kanten der gegenüberliegenden Seitenfläche wenigstens zwei Primzahlen größer als 5. Auf jener Seitenfläche ist also als Produkt mindestens $7 \cdot 11 = 77$ eingetragen. In beiden Fällen gilt $b > 35$.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass auf jeder Seitenfläche ein Produkt aus je genau zwei Primzahlen steht. Nach (2) ist dabei von den vier Kanten einer Seitenfläche zwei benachbarten die eine Primzahl und den anderen beiden benachbarten die andere Primzahl zugeordnet.

In einer Ecke A einer Seitenfläche S_1 des Würfels treffen also zwei Kanten zusammen, denen die gleiche Primzahl p zugeordnet ist. Die dritte Kante zur Ecke A gehört zu zwei weiteren Seitenflächen S_2 und S_3. S_2 enthält eine mit S_1 gemeinsame Kante mit zugeordneter Primzahl p, muss also noch eine zweite dazu benachbarte Kante mit zugeordneter Primzahl p enthalten. Dies kann nur die dritte Kante zur Ecke A sein, denn der andere Kandidat gehört zur Seitenfläche, die S_3 gegenüberliegt. Ihr ist folglich eine zu p teilerfremden Primzahl zugeordnet.

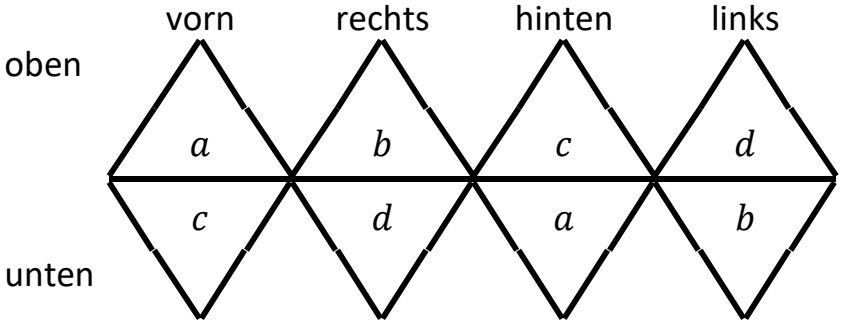
Die gleiche Überlegung trifft auf die von A aus über eine Diagonale erreichbaren Ecken zu und wir erhalten genau die im Teil a) konstruierte Zuordnung, allein möglicherweise mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ statt der Primzahlen $2 < 3 < 5 < 7$. Auch in diesem Fall ist $b = p_3 \cdot p_4 \geq 5 \cdot 7 = 35$.

Wir haben damit gezeigt, dass in jedem Fall die größte der sechs Zahlen einer zulässigen Beschriftung mindestens gleich 35 ist. Zusammen mit dem Beispiel aus a) ist damit gezeigt, dass das gesuchte Minimum gleich 35 ist. ❑

Aufgabe 22.09 – MO471021. Zum Würfeln kann man nicht nur klassische Würfel mit quadratischen Seitenflächen verwenden, sondern auch andere reguläre Körper, auf denen entsprechend Zahlen aufgebracht sind. Besonders der Oktowürf™ der Magic Dice Corporation – ein Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen – wird gern gekauft. In der Blue Edition der Firma sind die Seitenflächen mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, und zwar so, dass die Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen sich stets zur selben Summe addieren.

Wie viele verschiedene Oktowürftypen kann die Blue Edition enthalten, d. h. wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, ein regelmäßiges Oktaeder unter den obigen Bedingungen zu beschriften? Dabei soll es nur darauf ankommen, welche Zahlen auf den Seitenflächen stehen, nicht aber, wie die Beschriftung angebracht ist.

Lösungshinweise: Zunächst stellen wir uns vor, wir könnten alle acht Seitenflächen des Oktaeders unterscheiden. Zu diesem Zweck balancieren wir das Oktaeder auf einer seiner Ecken derart, dass sich die Seitenflächen wie im Oktaedernetz angegeben unterscheiden lassen. Hier sind die vier Paare gegenüberliegender Seitenflächen jeweils mit einem gemeinsamen Kleinbuchstaben gekennzeichnet.



Die Summe aller Zahlen auf den Seitenflächen des Oktaeders beträgt $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$. Da die Summen der beiden Zahlen auf jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen des Oktaeders konstant gleich sind, muss diese Summe $36 : 4 = 9$ betragen. Es gibt nun acht Möglichkeiten, eine Seitenfläche für die Zahl 1 auszuwählen, die Zahl 8 kommt dann auf die jeweils gegenüberliegende Seite. Danach verbleiben für die Zahl 2 insgesamt sechs Seitenflächen, während die Zahl 7 jeweils auf die gegenüberliegende Seite kommt. Analog ergeben sich für die Zahl 3 noch vier

verbleibende Möglichkeiten und für die Zahl 4 schließlich zwei Möglichkeiten der Wahl einer Seitenfläche. Das ergibt insgesamt $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$ geeignete Oktaeder bei unterscheidbaren Seitenflächen.

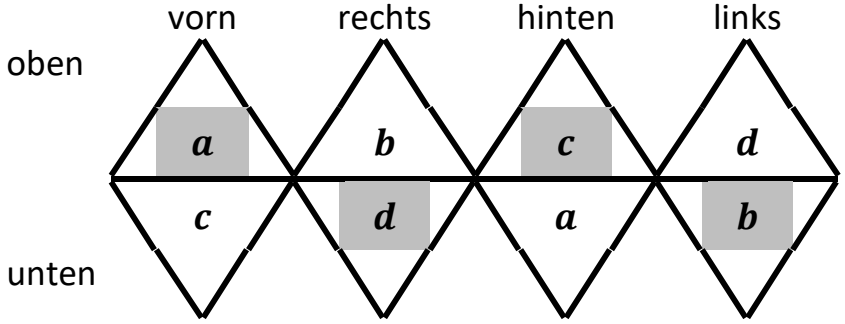
Die Seitenflächen sind aber nicht unterscheidbar, daher ergeben Beschriftungen, die sich durch Drehen des Oktaeders ineinander überführen lassen, gleiche Oktowürftypen. Diese Varianten wurden beim bisherigen Abzählverfahren unterschieden und deshalb mehrfach gezählt.

Für jedes Oktaeder gibt es 24 Drehbewegungen, die das Oktaeder in sich selbst und damit eine Beschriftung in eine andere Beschriftung derselben Variante überführen. (*Beweis:* Es gibt insgesamt sechs Möglichkeiten, die Ecke auszuwählen, welche in obigem Bild nach oben zeigt und anschließend noch jeweils vier Möglichkeiten, die Seitenfläche festzulegen, die sich vorn-oben befindet.) Es wurde also jede Beschriftung in $6 \cdot 4 = 24$ Varianten gezählt, was zu $384 : 24 = 16$ verschiedenen Oktowürftypen führt. ❑

Aufgabe 22.10 – MO471044. Zum Würfeln kann man nicht nur klassische Würfel verwenden, sondern auch andere reguläre Körper, auf denen entsprechend Zahlen aufgebracht sind. Besonders der Oktowürf™ der Magic Dice Corporation - ein Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen - wird gern gekauft. Deshalb plant die Firma, ihre Produktpalette durch eine Red Edition von Oktowürfs aus gehärtetem Kirschbaumholz zu ergänzen. Im Gegensatz zur altbewährten Blue Edition sollen in der Red Edition die Oktowürfs aber so beschriftet sein, dass benachbarte Zahlen niemals auf benachbarten Seitenflächen stehen.

Wie viele verschiedene Oktowürftypen kann die Red Edition enthalten, d. h. wie viele unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, ein regelmäßiges Oktaeder unter den obigen Bedingungen zu beschriften? Dabei soll es nur darauf ankommen, welche Zahlen auf den Seitenflächen stehen, nicht aber, wie die Beschriftung angebracht ist.

Lösungshinweise: Zunächst stellen wir uns vor, wir könnten alle acht Seitenflächen des Oktaeders unterscheiden. Zu diesem Zweck balancieren wir das Oktaeder auf einer seiner Ecken derart, dass sich die Seitenflächen wie im folgenden Oktaedernetz angegeben unterscheiden lassen.



In obigem Bild sind die vier Paare gegenüberliegender Seitenflächen jeweils mit einem gemeinsamen Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Zusätzlich wurden vier der acht Seitenflächen grau gefärbt. Bei dieser speziellen Färbung des Oktaeders sind benachbarte Seitenflächen, wie auch gegenüberliegende Seitenflächen, immer mit unterschiedlichen Farben belegt.

Das obige Oktaeder sei nun zusätzlich mit einer geeigneten Beschriftung versehen. Wir ordnen jeder solche Beschriftung eine Zeichenfolge aus acht Buchstaben zu, welche aus der Zeichenfolge „12345678“ entsteht, indem die Ziffer k; $k = 1; \dots; 8$ durch „w“ (wie weiß) ersetzt wird, wenn sie auf einer weißen Seitenfläche steht, sonst durch „g“ (wie grau). So bedeutet z. B. die Zeichenfolge „ggwgwgww“, dass die Zahlen 3, 5, 7 und 8 auf weißen Seitenflächen stehen, während sich alle anderen Zahlen auf grauen Seitenflächen befinden.

Es stellt sich nun die Frage, zu welchen Zeichenfolgen aus acht Buchstaben mindestens eine geeignete Beschriftung des Würfels existiert. Jede solche Zeichenfolge ist durch die folgenden drei Eigenschaften charakterisiert:

(1) Die Zeichenfolge enthält die Buchstaben „w“ und „g“ jeweils genau viermal.
(2) Die Buchstabenkombinationen „wg“ und „gw“ tauchen in der Zeichenfolge zusammen maximal viermal auf.
(3) Die Zeichenfolge enthält keine der Buchstabenkombinationen „wgw“ und „gwg“.

Begründung: (1) ist offensichtlich notwendig. Für (2) und (3) betrachten wir eine Zeichenfolge, welche eine der Buchstabenkombinationen „wg“ oder „gw“ enthält. Die zugehörigen Zahlen müssen auf verschiedenfarbigen, nicht benachbarten Seitenflächen des Oktaeders stehen. Da jede g-Fläche drei w-Nachbarn hat, kann es sich nur um gegenüberliegende Seitenflächen des Oktaeders handeln. (2) ergibt sich also, weil es nur vier Paare gegenüberliegender Seitenflächen gibt und (3), weil jede Seite nur genau ein Gegenüber hat.

Umgekehrt lässt sich aber auch jede Zeichenkette, welche den Bedingungen (1), (2) und (3) genügt, in einer Beschriftung realisieren. Man reserviere dazu für jede Buchstabenkombination „wg“ oder „gw“ ein Paar gegenüberliegender Seiten des Oktaeders und verteile anschließend die verbleibenden Zahlen auf die restlichen Seitenflächen.

Im Folgenden listen wir nun systematisch alle Zeichenketten mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) auf und geben jeweils die Anzahl erzeugter Beschriftungen an.

Fall 1: Zeichenketten mit genau einer Kombination „wg“ oder „gw“.

wwwwgggg ggggwwww

Das ergibt zwei Zeichenketten, wobei sich jede von ihnen durch $4 \cdot (3!)^2 = 144$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt; es gibt vier Möglichkeiten, für die Kombination „wg“ bzw. „gw“ ein Paar gegenüberliegender Seiten auszuwählen (dort ist dann die Beschriftung festgelegt), und jeweils 3! Möglichkeiten, die verbleibenden grauen/weißen Zahlen auf die noch freien grauen/weißen Seitenflächen zu verteilen.

Fall 2: Zeichenketten mit genau zwei Kombination „wg“ oder „gw“.

wggggwww	gwwwwggg
wwggggww	ggwwwwgg
wwwggggw	gggwwwwg

Das ergibt 6 Zeichenketten, wobei sich jedes Wort durch $4 \cdot 3 \cdot (2!)^2 = 48$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt.

Fall 3: Zeichenketten mit genau drei Kombination „wg“ oder „gw“.

wggwwwgg	gwwgggww
wgggwwwg	gwwwgggw
wwggwwgg	ggwwggww
wwgggwwg	ggwwwggw

Das ergibt 8 Zeichenketten, wobei sich jedes Wort durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1!)^2 = 24$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt.

Fall 4: Zeichenketten mit genau vier Kombination „wg“ oder „gw“.

wggwwggw	gwwggwwg

Das ergibt zwei Zeichenketten, wobei sich jede Zeichenkette durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Beschriftungen realisieren lässt.

Als Summe ergeben sich $2 \cdot 144 + 6 \cdot 48 + 8 \cdot 24 + 2 \cdot 24 = 816$ geeignete Beschriftungen. Die Seitenflächen der Spielwürfel sind nun aber nicht unterscheidbar. Beschriftungen, welche sich durch Drehen des Oktaeders ineinander überfuhren lassen, wurden also mehrfach gezählt.

Für jedes Oktaeder gibt es 24 Drehbewegungen, die das Oktaeder in sich selbst und damit eine Beschriftung in eine andere Beschriftung derselben Variante überfuhren. (*Beweis:* Es gibt insgesamt sechs Möglichkeiten, die Ecke auszuwählen, welche in obigem Bild nach oben zeigt und anschlie¼end noch jeweils vier Möglichkeiten, die Seitenfläche festzulegen, die sich vorn-oben befindet.) Es wurde also jede Beschriftung 24-mal gezählt, was zu $816 : 24 = 34$ unterscheidbaren Oktowürftypen führt. ❑

Im Aufgabentext wurde der „*Hinweis: Bitte beachten Sie bei Ihrer Arbeitseinteilung: Die vollständige Lösung der Aufgabe kann je nach Ansatz sehr zeitaufwändig sein.“*

gegeben. Bei einer solchen ungewöhnlichen Aufforderung ist es empfehlenswert, Ergebnisse zunächst nur anzugeben (im Sinne eines Antwortsatzes) und erst dann auszuformulieren, wenn für die anderen Aufgaben die Lösungsdarstellungen nach eigenem Ermessen bereits als abgeschlossen gelten könnten.

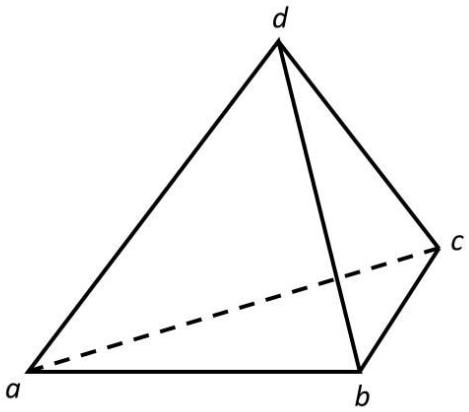
Aufgabe 22.12. Ein regelmäßiger Tetraeder ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Dreiecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Ein Tetraeder hat 4 Seitenflächen, 6 Kanten und 4 Ecken.

Man zeige, dass es keine natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt, für die es möglich ist, die Ecken eines Tetraeders so mit den Zahlen $1; 2; \ldots; n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1; 2; \ldots; n$.
(2) Jede der Zahlen $1; 2; \ldots; n$ kommt gleich oft vor.
(3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

Lösungshinweise: Da jede der n Zahlen gleich oft vorkommt und es vier Ecken gibt, muss n ein Teiler von 4 sein. Es muss also $n = 2$ oder $n = 4$ gelten.

Für $n = 4$ kann die Eigenschaft (3) offenbar nicht erfüllt werden. Bezeichnen wir mit a, b, c, d die (paarweise verschiedenen) Zahlen an den Ecken, so müsste für die zwei in der Abbildung von vorn und von rechts sichtbaren benachbarten Seitenflächen $a + b + d = b + c + d$ gelten, woraus jedoch $a = c$ folgt.



Ist dagegen $n = 2$, so gibt es eine Seitenfläche, bei der zwei Eckpunkte mit 1 und ein Eckpunkt mit 2 beschriftet sind. Dann trägt der vierte Eckpunkt die Zahl 2 und es gibt eine andere Seitenfläche, bei der ein Eckpunkte mit 1 und zwei Eckpunkte mit 2 beschriftet sind. Damit ist aber die Eigenschaft (3) wegen $1 + 1 + 2 \neq 1 + 2 + 2$ verletzt.

Es kann also keine Beschriftung der geforderten Art geben. ❑

Aufgabe 22.13. Ein regelmäßiger Hexaeder ist ein Polyeder (im Allgemeinen als Würfel bezeichnet), dessen Seitenflächen regelmäßige Vierecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Ein Hexaeder hat 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die es möglich ist, die Ecken eines Hexaeders so mit den Zahlen $1; 2; \ldots; n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1; 2; \ldots; n$.
(2) Jede der Zahlen $1; 2; \ldots; n$ kommt gleich oft vor.
(3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

Lösungshinweise: Da jede der n Zahlen gleich oft vorkommt und es acht Ecken gibt, muss n ein Teiler von 8 sein. Wir untersuchen deshalb nur die Fälle $n = 1, 2, 4, 8$.

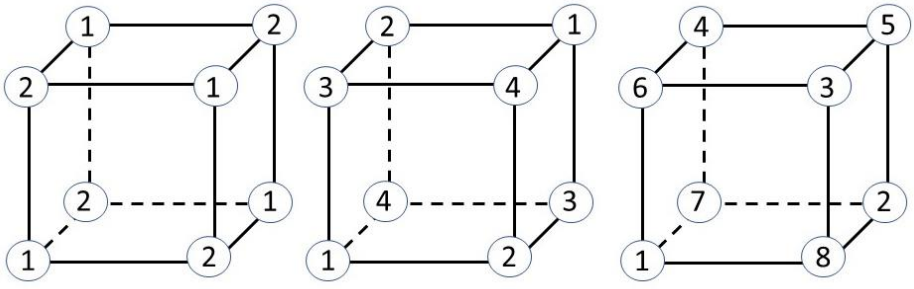
Wir überlegen uns dafür zuerst, wie groß die Summe S der Zahlen an den Ecken einer Seitenfläche sein wird. Addieren wir alle Zahlen der Beschriftung des Hexaeders, so erhalten wir aufgrund der Gleichverteilung der Zahlen unter Verwendung der GAUßschen Summenformel[3]

$$\frac{8}{n} \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{8}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 4 \cdot (n+1).$$

Addieren wir nun die Zahlen aller sechs Seitenflächen, erhalten wir einerseits $6 \cdot S$. Andererseits wird dabei jede der Zahlen dreimal gezählt, da an jeder Ecke des Hexaeders drei Seitenflächen zusammenstoßen. Wir erhalten somit das Dreifache der Summe aller Zahlen, also $12 \cdot (n+1)$. Damit finden wir $6 \cdot S = 12 \cdot (n+1)$, also $S = 2 \cdot (n+1)$.

- Für $n = 1$ (d.h. wir beschriften alle Ecken mit der Zahl 1) erscheint $S = 4$ trivial.
- Auch für $n = 2$ ist $S = 6$ leicht realisierbar.
- Für $n = 4$ erhalten wir $S = 10$. Wegen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ erfordert dies, dass auf den Eckpunkten jede Seitenfläche die Zahlen $1, 2, 3, 4$ anzuordnen sind.
- Schließlich finden wir für $n = 8$ die Summe $S = 18$. Wegen $1 + 2 + 7 + 8 = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$ kann es gelingen, eine Beschriftung mit den Zahlen $1, 2, 7, 8$ auf den Eckpunkten einer Seitenfläche und den Zahlen $3, 4, 5, 6$ auf den Eckpunkten der gegenüberliegenden Seitenfläche zu finden.

Für $n = 1$ ist die Beschriftung in trivialer Weise möglich. Wir geben nun für jeden der anderen Fälle $n = 2, 4, 8$ eine Beschriftung an, die den Bedingungen (1) bis (3) genügt, und zeigen somit, dass es für diese Fälle ebenfalls tatsächlich möglich ist:



❑

[3] Die GAUßsche Summenformel kann als bekannt vorausgesetzt werden, jedoch ist in der Lösungsdarstellung deren korrekte Anwendung zu zeigen. Eine Formulierung wie „Die Gesamtsumme beträgt laut GAUßscher Summenformel $4 \cdot (n+1)$“ genügt nicht!

Aufgabe 22.14 – MO480936. Ein Dodekaeder (genauer: Pentagondodekaeder) ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünfecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Ein Dodekaeder hat 12 Seitenflächen, 30 Kanten und 20 Ecken.

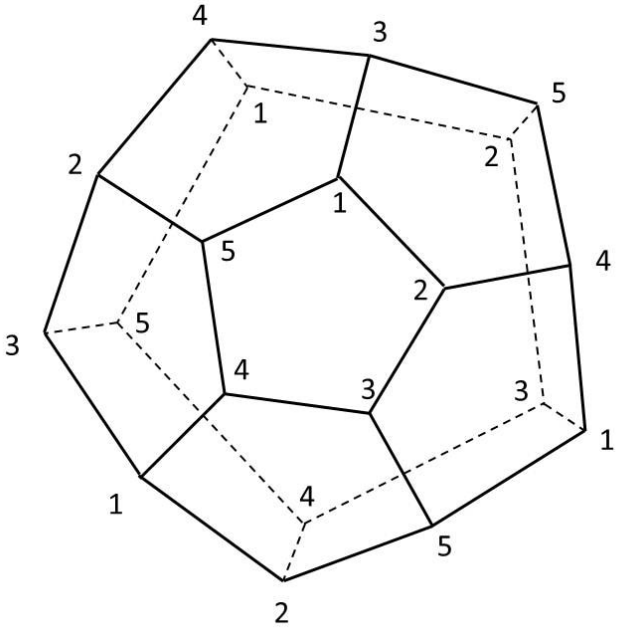
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die es möglich ist, die Ecken eines Dodekaeders so mit den Zahlen $1; 2; \ldots; n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1; 2; \ldots; n$.
(2) Jede der Zahlen $1; 2; \ldots; n$ kommt gleich oft vor.
(3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

Lösungshinweise: Da jede der n Zahlen gleich oft vorkommt und es 20 Ecken gibt, muss n ein Teiler von 20 sein. Addieren wir alle Zahlen der Beschriftung des Dodekaeders, so erhalten wir aufgrund der Gleichverteilung der Zahlen unter Verwendung der GAUßschen Summenformel

$$\frac{20}{n} \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{20}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 10 \cdot (n+1).$$

Wir bezeichnen die laut (3) ergebenden Summen mit S. Addieren wir die Zahlen aller 12 Seitenflächen, erhalten wir einerseits $12 \cdot S$. Andererseits wird dabei jede der Zahlen dreimal gezählt, da an jeder Ecke des Dodekaeders drei Seitenflächen zusammenstoßen. Wir erhalten also das Dreifache der Summe aller Zahlen, also $30 \cdot (n+1)$, d.h. $12 \cdot S = 30 \cdot (n+1)$ und damit $2 \cdot S = 5 \cdot (n+1)$.



Da die linke Seite dieser Gleichung geradzahlig ist, muss n eine ungerade Zahl sein. Die einzigen ungeraden Teiler von 20 sind 1 und 5.

Wenn es Beschriftungen der geforderten Art gibt, kann dies nur für $n = 1$ oder $n = 5$ sein. Der Fall $n = 1$ ist trivial, an jeder Ecke steht die Zahl 1. Für $n = 5$ zeigt die Abbildung, dass es eine solche Beschriftung gibt. ❑

Der VIETAsche Wurzelsatz als Lösungsansatz für Gleichungssysteme

Hat ein Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit reellwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ insgesamt n reellwertige Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt nach dem VIETAschen Wurzelsatz im Fall $n = 2$ und $n = 3$:

$$x_1 + x_2 = -a_1 \; ; \; x_1 \cdot x_2 = a_0$$

bzw.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2 \; ; \; x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = a_1 \; ; \; x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -a_0.$$

Diese Zusammenhänge bieten oft einen hilfreichen Zugang zur Lösung von Polynomgleichungen und (nichtlinearen) Gleichungssystemen.

Aufgabe KZM 6-4. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27 \, .$$

Lösungshinweise: Wir suchen aus den Gleichungen die Angaben für die Koeffizienten eines dazugehörigen Polynoms. Für das Produkt der drei Variablen gilt

$$xyz = xyz \cdot 1 = xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = yz + xz + xy = 27.$$

Damit sind über den Wurzelsatz von VIETA die Koeffizienten des Polynoms bekannt:

$$P(u) = u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = (u - 3)^3.$$

Folglich gibt es nur die (ohnehin leicht erratbare) Lösung $x = y = z = 3$. ❑

Aufgabe – MO261043A[4]. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \quad (1) \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 3 \quad (2) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Da mit den Bedingungen (1) und (3) bereits Terme des Wurzelsatzes von VIETA zu erkennen sind, versuchen wir, auch den dritten Term $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ zu quantifizieren. Wir überzeugen uns durch Ausmultiplizieren aller Produkte und Zusammenfassen der Terme, dass folgende Gleichung richtig ist:

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + x_3)^3 = \\ &x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Setzen wir in diese Gleichung die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte (1) bis (3) ein, erhalten wir

$$3^3 = 3 + 3 \cdot 3 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3 \cdot 1$$

[4] Das A am Ende der Nummerierung verweist darauf, dass es Jahrgänge gab, in denen bei der dritten Aufgabe zwischen zwei unterschiedlichen Aufgabenstellungen genau eine für die Bearbeitung ausgewählt werden konnte.

Diese Gleichung können wir zu $(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3$ zusammenfassen.

Damit gibt es nach dem Wurzelsatz von VIETA für das Gleichungssystem genau dann ein Lösungstripel mit reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, wenn das Polynom

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

drei reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3 hat.

Wegen $P(x) = (x-1)^3$ finden wir $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ als einzig mögliches Lösungstripel. Eine Probe bestätigt, dass damit das Gleichungssystem tatsächlich erfüllt wird:

$$1 + 1 + 1 = 3 \quad (1)$$
$$1^3 + 1^3 + 1^3 = 3 \quad (2)$$
$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad (3)$$

❑

Hinweis: Das Lösungstripel können wir erraten. Mit der Probe bestätigen wir, dass es das Gleichungssystem erfüllt. Dies kann als Ergebnis bereits formuliert werden. Für eine vollständige Lösungsdarstellung muss aber nun noch gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungstripel geben kann. Diesen schwierigeren Teil des Lösungsansatzes können wir mit dem Wurzelsatz von VIETA umgehen.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem für $a \neq 0$ kein Lösungstripel $(x; y; z)$ mit reellen Zahlen x, y und z besitzt:

$$x + y + z = a$$
$$xy + yz + zx = a^2$$
$$xyz = a^3$$

Lösungshinweise: Wir betrachten die Variablen x, y und z als Lösungen einer Polynomgleichung 3. Grades. Dann ist die Unlösbarkeit für $a \neq 0$ schnell gezeigt: Nach dem Wurzelsatz von VIETA lässt sich die zugehörige Polynomgleichung darstellen als

$$P(u) = u^3 - a \cdot u^2 + a^2 \cdot u - a^3 = (u - a) \cdot (u^2 + a^2)$$

Offensichtlich kann P nicht drei reelle Nullstellen haben und somit existiert auch kein reelles Lösungstripel für das Gleichungssystem. ❑

Hinweis: Für $a = 0$ sind Tripel der Form $(0; t; -t)$, $(t; 0; -t)$ und $(t; -t; 0)$ mit beliebigen reellen zahlen t Lösungen des Gleichungssystems.

Aufgabe. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + r$ für alle reellen Zahlen r nur eine reelle Nullstelle besitzt.

Lösungshinweise: Wir schreiben die Gleichungen des Wurzelsatzes auf. Gäbe es nämlich drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3, so gilt für diese:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(-1)$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$$

Dann folgt aber daraus der Widerspruch

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1,$$

denn eine Summe von reellen Quadratzahlen (linke Seite der Gleichungskette) kann nicht negativ sein. Damit ist gezeigt, dass es keine drei reellen Nullstellen geben kann. Da aber ein Polynom 3. Grades stets entweder eine reelle Nullstelle oder drei reelle Nullstellen hat, besitzt – wie behauptet – das kubische Polynom für jede reelle Zahl r nur genau eine reelle Nullstelle. ❑

Bei Aufgabenstellungen mit zwei Variablen bringt die Verwendung des Wurzelsatzes von VIETA oftmals keinen spürbaren Aufwandsvorteil. Eine direkte Umformung der gegebenen Aussagen zu quadratischen Gleichungen in einer Variablen führt indirekt zu vergleichbaren Lösungsstrategie.

Aufgabe – MO291042. Von zwei reellen Zahlen werde gefordert: Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.

Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Lösungshinweise: Wir formen die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$ (für die $x \neq 0$ und $y \neq 0$ notwendig ist) zu $x + y + 1 = xy$ um und finden mit der Summe $s = x + y$ aufgrund des Wurzelsatzes von VIETA die quadratische Gleichung

$$f(z) = z^2 - s \cdot z + s + 1 = 0$$

mit den Lösungen x und y. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung lautet $D = \frac{s^2}{4} - s - 1$. Es existieren also nur für $D \geq 0$ reellwertige Lösungen. Diese Bedingung ist gleichbedeutend zu $s^2 - 4s - 4 \geq 0$. Daraus folgern wir:

$$(s - 2)^2 \geq 8$$
$$|s - 2| \geq 2\sqrt{2}$$

also

$$s \leq 2 - 2\sqrt{2} \text{ oder } s \geq 2 + 2\sqrt{2}$$

Wir müssen jedoch beachten, dass sich im Fall von $s = -1$ die quadratische Gleichung auf $f(z) = z^2 + z = z \cdot (z + 1) = 0$ reduziert. Eine Lösung dieser Gleichung ist 0,

was aber nicht zulässig ist. Wegen $8 < 9$ gilt $2\sqrt{2} < 3$ und deshalb gilt die Abschätzung $-1 = 2 - 3 < 2 - 2\sqrt{2}$. Wir erhalten also insgesamt die Lösungsmenge für s:

$$s < -1 \quad \text{oder} \quad -1 < s \leq 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad s \geq 2 + 2\sqrt{2} \qquad \square$$

Aufgabe – MO171046. Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

Lösungshinweise: Wir erkennen wieder die Terme aus dem Wurzelsatz von VIETA und setzen $x + y = -p$ und $xy = q$. Dann lauten die gegebenen Gleichungen

$$q - p = 2 + 3\sqrt{2}$$
$$p^2 - 2q = 6$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 2 und addieren anschließend beide Gleichungen, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$p^2 - 2p - 10 - 6\sqrt{2} = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung mit der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen und erhalten

$$p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{\left(3 + \sqrt{2}\right)^2} = 1 \pm \left(3 + \sqrt{2}\right).$$

Die Doppeldeutigkeit der Lösungen bzgl. $\sqrt{a^2} = |a|$ und $\sqrt{a^2} = -|a|$ wird durch das Zeichen ± abgedeckt und wirkt sich nur auf das Vertauschen von p_1 und p_2 aus.

Für $p_1 = -2 - \sqrt{2}$ erhalten wir $q_1 = 2 + 3\sqrt{2} + p_1 = 2\sqrt{2}$ und finden über den Wurzelsatz von VIETA die dazugehörige quadratische Gleichung

$$f(z) = z^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)z + 2\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 2$$

$$z_2 = y = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Wie wir durch Einsetzen von $(x; y) = \left(2; \sqrt{2}\right)$ zeigen, sind dies tatsächlich Lösungen:

$$x + xy + y = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}\,; \;\; 2^2 + \sqrt{2}^2 = 4 + 2 = 6$$

Für $p_2 = 4 + \sqrt{2}$ erhalten wir $q_2 = 2 + 3\sqrt{2} + p_2 = 6 + 4\sqrt{2}$ und finden über den Wurzelsatz von VIETA die quadratische Gleichung

$$f(z) = z^2 - \left(4 + \sqrt{2}\right)z + 6 + 4\sqrt{2} = 0.$$

Für diese quadratische Gleichung ist die Diskriminante $D = \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 6 - 4\sqrt{2}$ mit $D = -\frac{3}{2} - 2\sqrt{2}$ jedoch negativ. Es gibt außer $\left(2; \sqrt{2}\right)$ und die dazu symmetrische Lösung $\left(\sqrt{2}; 2\right)$ keine weiteren reellwertigen Lösungen des Gleichungssystems. ❑

Aufgabe – MO391141. Man ermittle für jede reelle Zahl a die Anzahl der reellwertigen Lösungspaare $(x\,;\,y)$ des Gleichungssystems

$$|x| + |y| = 1,$$
$$x^2 + y^2 = a.$$

Lösungshinweise: Aufgrund der Betragszeichen und der Quadrate genügt es, wenn wir zunächst untersuchen, ob nichtnegative Zahlen x und y Lösungen des Gleichungssystems sein können. Angenommen, es existieren solche Lösungen, o.B.d.A. mit $x \geq y$. Wegen

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2} = \frac{1^2 - a}{2}$$

können wir mithilfe des Wurzelsatz von VIETA die quadratische Funktion aufschreiben, deren Nullstellen x und y diese Lösungen sind:

$$f(z) = z^2 - z + \frac{1-a}{2} = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung lautet $D = \frac{1}{4} - \frac{1-a}{2} = \frac{2a-1}{4}$. Es gilt:

1) Für $D < 0$, d.h. für $a < \frac{1}{2}$, kann es keine reellwertigen Lösungen geben.
2) Für $D = 0$, d.h. für $a = \frac{1}{2}$, sind $x = y = \frac{1}{2}$ die nichtnegativen Lösungen. Folglich existieren in diesem Fall insgesamt vier verschiedene Lösungspaare:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

3) Für $D > 0$, d.h. für $a > \frac{1}{2}$, erhalten wir die Lösungen $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a-1}$ und $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a-1}$.

Jedoch finden wir für $a > 1$ die Ungleichungen $x > 1$ im Widerspruch zu $x + y = 1$, so dass es für diese Bedingung keine Lösungspaare mit nichtnegativen x und y geben kann.

Dagegen gibt es für $a = 1$ das Lösungspaar $x = 1$ und $y = 0$, so dass es in diesem Fall vier verschiedene Lösungspaare gibt:

$$(1\,;0)\,,(-1\,;0)\,,(0\,;1)\,,(0\,;-1).$$

Schließlich existieren für $\frac{1}{2} < a < 1$ insgesamt acht verschiedene Lösungspaare:

$$\left(\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\,;\,\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\right),$$
$$\left(\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\,;\,\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-1}\right)\right).$$

❑

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [5]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[6] (FG) Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu drei Teilnehmenden können Mädchen und Jungen bis 14 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 15 und 21 Jahre („Jugend forscht“) starten. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung des Projektes vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmenden Rede und Antwort.

[5] www.jugend-forscht.de

[6] Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2020/21	8.998	*Experimenta gGmbH Heilbronn (Online-Veranstaltung)*
2021/22	8.527	*FORSCHUNGSFORUM Schleswig-Holstein e.V. Lübeck*
2022/23	9.386	*Unternehmensverbände im Lande Bremen e. V. Bremen*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch im Jahr 2023 bundesweit mit 701 Teilnehmende (7.5%) wieder beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft (510 Teilnehmende, 5.4%) und deutlich weniger als zum Beispiel im FG Physik (1306 Teilnehmende, 13.9%) oder im FG Technik (1846 Teilnehmende, 19.7%).

Der Landeswettbewerb Sachsen fand am 1. April 2023 bei Porsche Leipzig GmbH statt. Drei Patenunternehmen unterstützten die Veranstaltung: GLOBALFOUNDRIES Dresden, DAS Environmental Expert GmbH Dresden und BGH Edelstahlwerke GmbH Freital. Es waren 16 Teilnehmende mit 15 Projekten am Start. Dazu hatten sich noch neun Schülerinnen und Schüler mit sechs Projekten in der Sparte „Schüler experimentieren“ qualifiziert. Hier war das FG Mathematik/Informatik mit drei Projekten „Jugend forscht“ (20.0%) und zwei Projekten „Schüler experimentieren“ (33.3%) überdurchschnittlich vertreten.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Betreuersuche gegeben – aber jede Lehrerin und jeder Lehrer fürs Fach Mathematik ist gleichermaßen ein Ansprechpartner. Am 1. Juli 2023 findet in

Chemnitz[7] dafür ein Seminar statt, dass unter anderem Anforderungen des Wettbewerbs „Jugend forscht“ thematisiert und Ideen für Projekte diskutiert.

Die folgende Übersicht der Themen der sächsischen Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik – auch wenn manche Projekttitel nur wenig über den Inhalt verraten:

Benedix, Alexander (TU Dresden): **Integration über sphärische Dreiecke** *2. Platz, Sonderpreis c’t Magazin, Sonderpreis Studienseminar im Kerschensteiner Kolleg des Deutschen Museums in München*	2023
Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Einsatz effektiverer Transformer-Encoder** *2. Platz, Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik*	2023
Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Geschwindigkeits-optimierung des IMoJIE-Modells** *2. Platz, Sonderpreis c’t Magazin, Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2022
Droste, Alexander (Universität Leipzig, vormals Ostwald-Gymn. Leipzig): **Penrose-Parkettierung** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale 2022 (2. Preis)*	2022
Hertel, Christian (Nexö-Gymn. Dresden): **Echtzeit-Synchronisierung von Audio-Streams** *Sonderpreis Jugend unternimmt – Summer School, Sonderpreis futureSAX*	2022
Kraft, Maximilian: **Neuronale Netzwerke in der autonomen Robotik** *2. Platz, Sonderpreis Mobilität, Sonderpreis Elektrostatik, Elektrotechnik und Mikroelektronik*	2021
Lowa, Alexander/ Voigtmann, Richard (TU Dresden): **Falschinformationen erkennen mithilfe von KI** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis Staatsministerium für Wirtschaft, Arbeit und Verkehr, futureSAX Sonderpreis*	2023
Neubauer, Hannah (Mosen-Gymn. Oelsnitz/Vogtl.): **Simulation des Covid-19-Pandemieverlaufes** *3. Platz, Sonderpreis Thinkig Safety*	2022
Petrich, Moritz (Landesgymn. St. Afra Meißen): **Zirkusnummer mit Quadraten** *2. Platz*	2021
Weiß, Konrad (Regenbogen Gymn. Augustusburg): **Neuronale Netze und Algorithmen bei „Snake“** *3. Platz, Sonderpreis PM Magazin, futureSAX Sonderpreis*	2021

[7] siehe http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html

Den 58. Bundeswettbewerb richtete die Stiftung Jugend forscht e. V. gemeinsam mit den Unternehmensverbänden im Lande Bremen e. V. in Bremen vom 18. bis 21. Mai 2023 aus. Insgesamt 173 Finalisten hatten sich mit ihren 108 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 31 Teilnehmende mit 21 Projekten im Fachgebiet Mathematik/Informatik. Den 1. Preis errangen SIMON RULLE und ARTHUR ACHILLES vom Gymnasium St. Michael, Paderborn (Nordrhein-Westfalen) mit ihrem Projekt „Hassreden auf der Spur: Project Eagle – Echtzeitanalyse antisemitischer Verschwörungsmythen im Netz“.

Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) und dem Sonderpreis „Stipendium für einen Studienplatz an einer Universität der Bundeswehr“ vom Bundesminister der Verteidigung, BORIS PISTORIUS. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre[8] lesen:

> *In den sozialen Netzwerken finden sich unzählige antisemitische Kommentare und Hassreden. Viele davon basieren auf bekannten Verschwörungsmythen. Derartige Tweets und Postings schnell und zielgerichtet zu identifizieren, ist aufgrund der schieren Datenmenge eine große Herausforderung. Daher entwickelten Simon Rulle und Arthur Achilles eine Software, die diesen Vorgang automatisch erledigt und antisemitische Inhalte so zuverlässig aus dem Internet herausfiltern kann. Die Jungforscher setzten dafür unter anderem aktuelle KI-Chatbots ein, die ähnlich wie ChatGPT funktionieren. Die Suchergebnisse zeigt das Programm als anschauliche Grafiken an. Mit dem Programm lässt sich auch rekonstruieren, wie die Zahl antisemitischer Tweets eines Accounts mit der Zeit zugenommen hat.*

SIMON RULLE und ARTHUR ACHILLES beeindruckten die Jury durch die Kombination verschiedener informatischer Methoden zu einem neuen Instrument, das nicht nur antisemitische Tweets erkennt, sondern auch die dazugehörigen Kommunikationsgruppen. Sie wenden ihr Verfahren auf das Themenfeld antisemitischer Verschwörungsmythen an. Es ist aber ohne Weiteres übertragbar auf andere inhaltliche Bereiche. (Auszug aus der veröffentlichten Laudatio)

[8] https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2023/preistraegerinnen-und-preistraeger.html

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[9].

Zweiter Cursus

Abschnitt XXII – Von den Gleichungen höheren Grades

§308

Die allgemeine Form einer geordneten algebraischen Gleichung n ten Grades ist:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + m = 0$$

worin die Coefficienten a, b, c etc. beliebige reelle Zahlen sind.

Durch Division durch den Coefficienten a des höchsten Gliedes kann dieselbe auf die schematische Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

gebracht werden, deren linke Seite eine algebraische Funktion von x des n ten Grades genannt, und abgekürzt mit dem Zeichen f(x) bezeichnet wird.

Sind die Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. mit Ausnahme von a_n gleich null, so ist die Gleichung eine reine oder binomische des Grades n:

$$x^n + a_n = 0.$$

Ist das constante Glied $a_n = 0$, so läßt sich aus der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

der Faktor x absondern, woraus ersichtlich, daß dann eine Wurzel gleich null ist.

§309 – Zerlegung in Wurzelfaktoren

Ist α_1 eine Wurzel der Gleichung n ten Grades

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

so läßt sich f(x) durch den Faktor $(x - \alpha_1)$ ohne Rest dividieren. Denn da α_1 eine Wurzel ist, so muß auch

$$\alpha_1^n + a_1 \alpha_1^{n-1} + a_2 \alpha_1^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

sein. Subtrahiert man diese von der gegebenen Gleichung, so erhält man ohne Änderung der Identität eine Gleichung

[9] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

$$f(x) = (x^n - \alpha_1{}^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha_1{}^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - \alpha_1{}^{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(x - \alpha_1),$$

deren rechte Seite durch $(x - \alpha_1)$ ohne Reſt teilbar iſt. Folglich muß es auch die linke ſein.

Dividiert man aber die algebraiſche Funktion n ten Grades durch den Faktor $(x - \alpha_1)$, ſo muß als Quotient eine algebraiſche Funktion $(n - 1)$ ten Grades erſcheinen. Die gegebene Gleichung läßt ſich mithin in die zwei Faktoren zerlegen:

$$(x - a_1)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1}) = 0.$$

Bemerkung. Der Fundamentalſatz, daß jede algebraiſche Gleichung beliebigen Grades wenigſtens eine reelle oder imaginäre Wurzel hat, iſt in mehrfacher Weiſe von verſchiedenen Mathematikern, und allgemein von Gauß und Cauchy bewieſen worden. Friedr. Gauß, Prof. in Göttingen, hat dafür drei Beweiſe, 1799, 1814, 1815 bekannt gemacht und A. L. Cauchy einen andern im Cours d'analyse, Paris 1821. Dieſe Beweiſe liegen jedoch außerhalb der hier gezogenen Grenzen.

…

§310 – Das Coefficienten-Geſetz

Entwickelt man das Produkt der n Wurzelfaktoren einer ſchematiſch geordneten algebraiſchen Gleichung n ten Grades nach Potenzen von x, ſo erhält man

$$x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\, x^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)\, x^{n-2} -$$
$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)\, x^{n-3} + \ldots + (-1)^n\, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = 0.$$

Durch Vergleichung mit der gegebenen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

ergiebt ſich, daß die Coefficienten derſelben in folgender Weiſe aus den Wurzeln gebildet ſind:

1. Der Coeffizient a_1 iſt gleich der Summe der Wurzeln mit entgegengeſetztem Vorzeichen.
2. Der Coefficient a_2 iſt gleich der Summe der Binionen der Wurzeln.
3. Der Coefficient a_3 iſt gleich der Summe der Ternionen derſelben mit entgegengeſetztem Vorzeichen.
4. Der Coefficient des $(r + 1)$ ten Gliedes a_r iſt gleich der Summe der Combinationen der r ten Klaſſe der Wurzeln mit ungeändertem oder entgegengeſetztem Vorzeichen, je nachdem r gerade oder ungerade iſt.
5. Das conſtante Glied a_n iſt gleich dem Produkte aller Wurzeln mit unverändertem Vorzeichen, wenn n gerade, mit entgegengeſetztem, wenn n ungerade iſt.

Bemerkung. Dieſer wichtige Satz rührt von dem franzöſiſchen Mathematiker Franz Vieta (1540 – 1603) her.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 4/23

Leider wurde im Heft 4/2023 die Monatsaufgabe aus Heft 3/2023 wiederholt, deren Lösungsdiskussion im Heft 5/2023 erschien.

Monatsaufgabe[10] 5/23.

Beweisen Sie: Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ gilt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 22.02 – Zahlenverteilungen auf Körpern 3
Der VIETAsche Wurzelsatz als Lösungsansatz für Gleichungssysteme 12
Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“ 18
In alten Mathe-Büchern geblättert 22
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 4/23 23
Monatsaufgabe 5/23. 24

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
06/2023 (Juni 2023)	Thema 22.02	Zahlenverteilungen auf Körpern	MO541036, MO540936
05/2023 (Mai 2023)	Thema 22.01	Zahlenverteilungen auf ebene Figuren	MO620936
04/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO621034, MO620934
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
01+02/2023 (Jan./Feb. 23)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

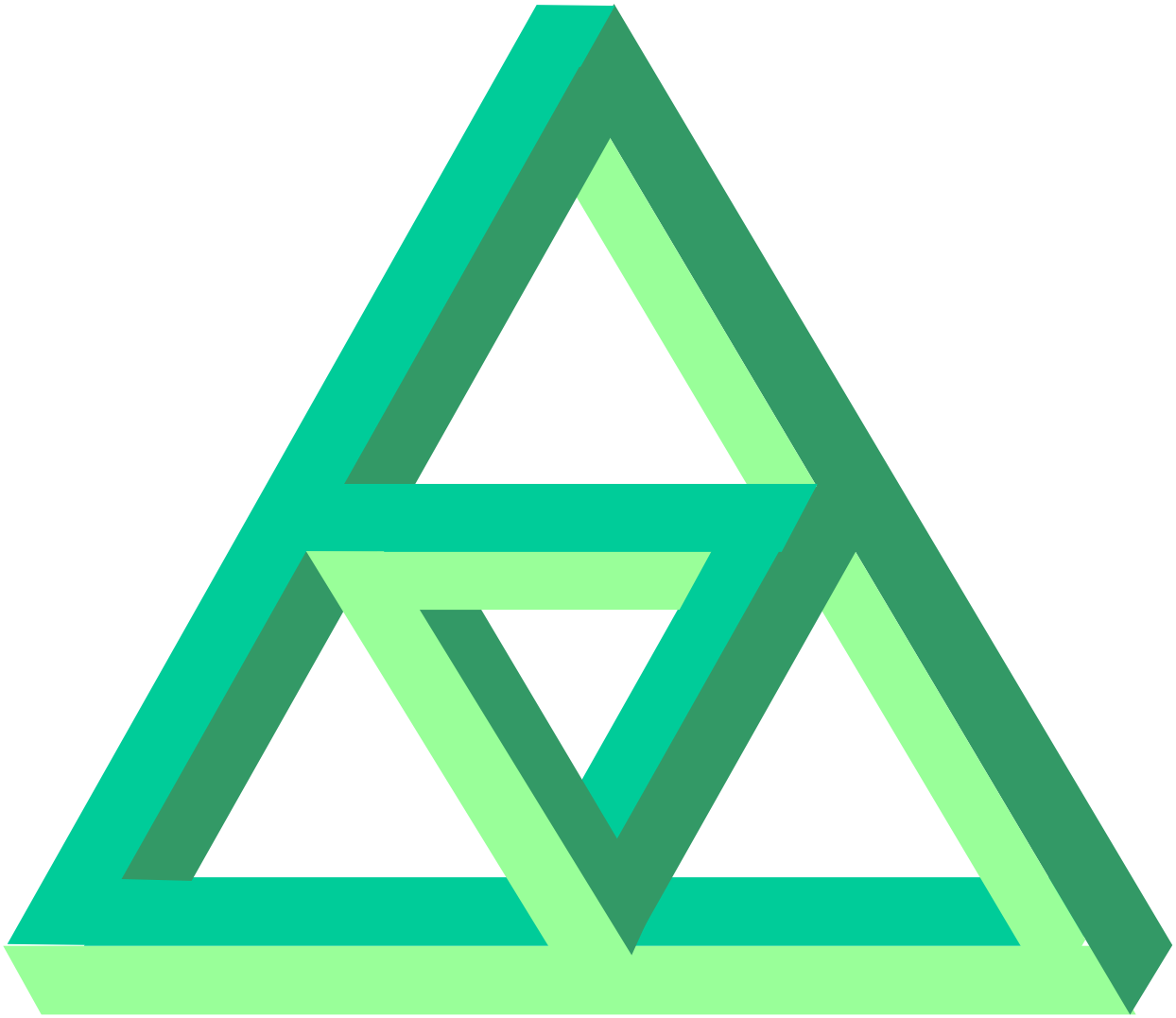
[10] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.07.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[11] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 7/2023 (Juli/August 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit Bezug auf die Aufgaben **MO620941/MO621041** beginnen wir die Diskussion um Quersummen und Querprodukte, wie sie in MO-Aufgaben häufig zu finden sind. Im Allgemeinen lassen sie sich prägnant formulieren, und es werden keine mathematischen Sätze zur Lösung benötigt – ideal für einen erfolgversprechenden Wettbewerbseinstieg.

Im Beitrag zur Approximation von π bieten wir Unterhaltungsmathematik für die Ferienzeit. Mit einem Ansatz zur Konstruktion solcher Terme könnten aber Anregungen für selbständiges Forschen gegeben werden – auch wenn dabei keine elegant wirkenden Darstellungen entstehen. Aber vielleicht findet jemand eigene Zugänge zu dieser Fragestellung?

Wir beschreiben anhand von Aufgabenstellungen die Schwerpunkte der mathematischen Interessen- und Begabtenförderung: **Korrespondenzzirkel Mathematik** zur Vorbereitung der **Mathematik-Olympiaden**, **Bundeswettbewerb Mathematik** und **Bundeswettbewerb „Jugend forscht“.** Gern vertiefen wir diese Diskussion in weiteren zentralen Seminaren oder auf Anfrage an Gymnasien.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 23.01 – Quersummen und Querprodukte

Der Einstieg zu den Aufgaben der Bundesrunde der 62. MO beinhaltete die Thematik „Quersummen“. Für solche Fragestellungen lassen sich meist ohne Vorkenntnisse Lösungsansätze finden. Nicht zum ersten Mal in der Aufgabengeschichte wurde nach der Quersumme einer Summe von Zahlen gefragt.

Aufgabe 23.01 - MO620941/MO621041.

(a) Es seien a und b positive ganze Zahlen, jeweils mit Quersumme $Q(a) = Q(b) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $a + b$ annehmen?

(b) Es sei a eine positive ganze Zahl mit Quersumme $Q(a) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $2 \cdot a$ annehmen?

Es sei zunächst folgende Aufgabe betrachtet.

Aufgabe 23.02. Man beweise für alle natürlichen Zahlen *m* und *n* die Ungleichung

$$Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$$

(dabei bezeichnet $Q(x)$ die Quersumme der natürlichen Zahl x).

Lösungshinweise: Anschaulich scheint die Behauptung einfach. Wir beobachten die Eigenschaft $Q(m+1) = Q(m) + 1$, falls für den Nachfolger von m kein Übertrag in der Einerstelle entsteht. Bei einem Übertrag verringert sich die Quersumme. Durch n-malige Addition von 1, also $Q(m + n \cdot 1)$, ist die Ungleichung schrittweise bewiesen, denn nach dem ersten Übertrag bei der Summenbildung verringert sich die Quersumme, ohne es wieder ausgleichen zu können.

In den Lösungshinweisen zur MO-Aufgabe wird ein algorithmischer Weg vorgeschlagen: Es seien $a_0, \dots, a_k$ die Ziffern der Zahl m und $b_0, \dots, b_k$ die Ziffern der Zahl n und $c_0, \dots, c_k, c_{k+1}$ die Ziffern der Summe $m + n$ (wobei führende Nullen zugelassen sind). Der Algorithmus der Addition erfordert für jede Dezimalstelle

$$c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0$$
$$c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1$$
$$\dots$$
$$c_{k+1} = u_k$$

Dabei sind u_i die bei der zifferweisen Addition entstehenden Überträge, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Wir addieren alle Zeilen und bestätigen die Behauptung:

$$Q(m+n) = c_0 + \dots + c_{k+1} =$$
$$a_0 + \dots + a_k + b_0 + \dots + b_k - 9 \cdot (u_0 + \dots + u_k) \leq Q(m) + Q(n)$$

❑

Zur Lösung der aktuellen MO-Aufgabe verwenden wir den hergeleiteten Zusammenhang $Q(m+n) = Q(m) + Q(n) - 9 \cdot k$. Für die Teilaufgabe (a) ergibt sich daraus, dass wir für $Q(a+b)$ nur die Zahlenwerte $124 - 9k$ für nichtnegative ganze Zahlen k erhalten können.

Lösungshinweise zu MO620941 (a): Es gilt $Q(a) + Q(b) - 9k$, wobei k die Anzahl der Überträge in der schriftlichen Addition $a + b$ bezeichnet. Wegen $Q(a+b) \leq Q(a) + Q(b) = 124$ gilt $Q(a+b) = 124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$.

Wir setzen $a = 5 \ldots 51 \ldots 1$ und $b = a$ mit k Fünfen und $62 - 5k$ Einsen (mit den Quersummen $Q(a) = Q(b) = 62$) für $k = 0, \ldots, 12$. Für die Summe erhalten wir $a + b = 1 \ldots 102 \ldots 2$ mit k Einsen, $62 - 5k$ Zweien und eine 0. Die Quersumme beträgt $2 \cdot (62 - 5k) + k + 0 = 124 - 9k$ (es treten k Überträge auf).

Für den Fall mit $k = 13$ Überträgen setzen wir $a = 34444445555555$ und $b = 35555554444445$ mit je sechs Vieren und sieben Fünfen als Ziffern. Wir finden für beide Zahlen die Quersummen $Q(a) = Q(b) = 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 62$. Die Summe $a + b = 70000000000000$ hat die Quersumme 7.

$Q(a+b)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$ annehmen.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Im Teil (a) haben wir bereits die möglichen Quersummenwerte des Doppelten einer Zahl mit $Q(2 \cdot a) = 124 - 9k$ charakterisiert und für ganzzahliges k und $0 \leq k \leq 12$ Zahlenbeispiele angegeben.

Es bleibt zu zeigen, dass für $Q(2 \cdot a)$ die Quersumme 7 (also $k = 13$) nicht angenommen werden kann. In der Zifferndarstellung der Zahl a kann nur eine Ziffer $z \geq 5$ einen Übertrag hervorrufen. Für 13 Überträge müssen aber 13 solche Ziffern in dieser Zifferndarstellung vorkommen, woraus sich $Q(a) \geq 65$ ergibt.

$Q(2 \cdot a)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 12$ annehmen, also 7, 16, 25, …, 124. ❑

Aufgabe 23.03 – MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) - q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Lösungshinweise: Es sie n eine natürliche Zahl. Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Zahl n endet nicht auf die Ziffer 9. In diesem Fall ist die letzte Ziffer von $n+1$ um 1 größer als die letzte Ziffer von n. In allen vorangehenden Ziffern (falls es solche gibt) stimmen $n+1$ und n überein. Also erhöht sich die Quersumme um 1, es ist $q(n+1) = q(n) + 1$ und folglich gilt $d(n) = 1$.

2. Die Zahl n endet auf genau k Ziffern 9 ($k > 0$). Vor den k Ziffern 9 steht eine von 9 verschiedene Ziffer. Wir bilden deren Summe $s(n)$. (Steht vor den k Ziffern 9 keine Ziffer mehr, so gilt $s(n) = 0$.) Damit finden wir $q(n) = s(n) + k \cdot 9$ und $q(n+1) = s(n) + 1$. Folglich gilt $d(n) = 9k - 1$.

Die gesuchte Menge aller Zahlen $d(n)$ enthält also genau die Zahl 1 und alle positiven Zahlen der Form $9k - 1$ mit ganzzahligem k. ❑

Aufgabe 23.04. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als die Quersumme ihres Nachfolgers $Q(n+1)$ durch 11 teilbar sind.

Lösungshinweise: Unter Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabe 23.03 suchen wir die kleinste durch 11 teilbare Zahl m der Form $m = 9k - 1$. Durch systematisches Probieren finden wir dafür mit $k = 5$ den Wert $m = 44$. Daraus folgt, dass die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft auf fünf Ziffern 9 enden muss. Ist die Quersumme der vor diesen Ziffern 9 stehenden Ziffern gleich a (offenbar gilt $a > 0$), so erhalten wir $Q(n) = Q(a) + 5 \cdot 9 > 45$. Es muss also $a \geq 10$ gelten. Die Ziffernfolge 19 entfällt, weil dann n auf sechs Ziffern 9 enden würde. Die Ziffernfolge 28 erfüllt aber alle Bedingungen. Eine Probe bestätigt, dass 2899999 die Bedingungen erfüllt: $Q(2899999) = 2 + 8 + 5 \cdot 9 = 55$ und $Q(2900000) = 11$. ❑

Aufgabe 23.05. Finden Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die das Quadrat der Quersumme gleich der Quersumme des Quadrates ist, also $(Q(n))^2 = Q(n^2)$ gilt.

Lösungshinweise: Es sei n eine solche gesuchte Zahl mit $(Q(n))^2 = Q(n^2)$. Wir verwenden die Eigenschaft $Q(n) \leq n$ und die für positive ganze Zahlen r und s oben bewiesene Ungleichung $Q(r+s) \leq Q(r) + Q(s)$.

Betrachten wir einstellige Zahlen n, so gilt $Q(n) = n$ und deshalb muss auch $n^2 = Q(n^2)$ gelten. Das ist aber nur für $n^2 < 10$ möglich, also $n = 1, 2, 3$.

Setzen wir für eine zweistellige Zahl $n = 10a + b$ mit den Ziffern a und b ($a > 0$), so finden wir einerseits

$$Q(n)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und andererseits

$$Q(n^2) = Q(100a^2 + 20ab + b^2) \leq Q(a^2) + Q(2ab) + Q(b^2) \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Damit das Gleichheitszeichen gilt, müssen alle Summanden jeweils kleiner als 10 sein. Das bedeutet aber, nur die Zahlen 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 und 31 genügen der geforderten Gleichung.

Sind nun $a_k, \dots, a_1, a_0$ die Ziffern der $(k+1)$-stelligen Zahl n, also $n = \sum_{i=0}^{k} 10^i \cdot a_i$ mit $Q(n) = a_k + \dots + a_1 + a_0$, so lässt sich die Aussage verallgemeinern: Alle Zahlen n, deren Ziffern die folgenden Bedingungen erfüllen, sind Lösung der geforderten Gleichung: $a_i^2 < 10$ für alle $i = 0, \dots, k$ und $2 \cdot a_i \cdot a_j < 10$ für alle $i, j = 0, \dots, k$ mit $i \neq j$. ❑

Aufgabe 23.06. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, so dass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $Q(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: Es gilt $Q(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form

12; 1212; 12121212; 1212121212121212; ...

diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhalten wir durch Multiplikation mit einem Faktor der Form (in geeigneter Länge) 100...001 die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch $100\dots001 \cdot t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. ❑

Aufgabe 23.07. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q?

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst Beispiele für solche Zahlen n.

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ (d.h. $n = \underbrace{1 \dots 1}_{9-mal}$) fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr. Kommen wir mit diesen Beispielen schon auf einen geeigneten Ansatz? Wohl eher nicht!

Ohne Herleitung sei hier nur angegeben: Für $p^2 = q$ erfüllt die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^{p} 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Gemeint sind also folgende Zahlen:

$p = 1 \Rightarrow k = 100 \quad \Rightarrow n = 10000$
$p = 2 \Rightarrow k = 10100 \quad \Rightarrow n = 102010000$
$p = 3 \Rightarrow k = 100010100 \Rightarrow n = 10002020102010000$

Wir müssten nun „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen *p*-mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$-mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. ❑

Wettbewerbe: Bundesrunde der 62. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 62. Mathematik-Olympiade fand vom 11. bis 14. Juni 2023 in Berlin statt. Die Veranstaltung stand unter der Schirmherrschaft der Senatorin für Bildung, Jugend und Familie des Landes Berlin, Katharina Günther-Wünsch. Der Verein Mathematikolympiaden in Berlin e.V. (http://www.mathematikolympiaden-berlin.de/) organisierte den Wettbewerb und gestaltete nach letztmalig 2000 erneut das Treffen der rund 200 Teilnehmenden. Unter www.mo2023.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Am Sonntag, dem Anreisetag, traf man sich in der Jugendherberge Berlin-Ostkreuz. Die beiden Klausuren wurden am Montag und Dienstag im Immanuel-Kant-Gymnasium geschrieben. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in Berlin. Am Dienstag trafen sich alle zum Begegnungsabend im Stadion „An der Alten Försterei“, der Heimat des Bundesligisten FC 1. Union Berlin. Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand im Emil-Fischer-Hörsaal der Humboldt-Universität zu Berlin statt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weiteren Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 78 Preise[3] vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 26 Anerkennungsurkunden[4]. Die sächsische Mannschaft konnte wieder in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[5] belegte sie mit 19 Punkten gemeinsam mit Bremen und Hessen den 5. Platz. Niedersachsen mit 36 Wertungspunkten und Bayern mit 35 Wertungspunkten führen die Länderliste souverän an, gefolgt von Nordrhein-Westfalen (27 Wertungspunkte) und Sachsen-Anhalt (21 Wertungspunkte). Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen zwei I. Preise, ein II. Preis und drei III. Preise den Platz 4 (insgesamt 6 Preise). Auch hier führen Niedersachsen (vier I. Preise, insgesamt 13 Preise), Bayern (drei I. Preise, insgesamt 13 Preise) und Nordrhein-Westfalen (zwei I. Preise, insgesamt neun Preise).

Den sächsischen Preisträgern unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

[3] Ein weiterer 3. Preis wurde an einen Schüler (Kl. 8) von der Auslandschule in Warschau (Polen) vergeben.
[4] Die vollständige Liste ist unter www.mo2023.de verfügbar (Stand: 26.06.2023).
[5] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

I. Preis	TILMAN FERCHLAND (Kl. 8, Oswald-Gymn. Leipzig)
	OLIVER ECKSTÄDT (Kl. 9, Nexö-Gymn. Dresden)
II. Preise	TOBIAS PÖTZSCH (Kl. 9, Scholl-Gymn. Taura)
III. Preise	JIEOH AHN (Kl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	Lukas Grinz (Kl. 10, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	TIM THIEME (Kl. 11, Kepler-Gymn. Chemnitz)
Anerkennung:	DAVID MAUERSBERGER (Kl. 8, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	THEODOR LUDWIG SEIDEL (Kl. 8, Oswald-Gymn. Leipzig)

Die Bundesrunde 2024 wird vom 6. bis 9. Juni 2024 in Flensburg stattfinden.

Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte

Aufgabe MO201014.

Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen.
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: ”Musst dich nicht quälen!
’s sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag’ dir, dass es nicht gelingt,
dass man sie so drin unterbringt,
dass nicht ein Pärchen existier’
des Abstand kleiner ist als vier”
(Er meint natürlich Zentimeter.)
”Und dies beweis mir mal!” sagt Peter:
”Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht.”

Lösungshinweise:

Zehn Zentimeter ist das Kantenmaß
des Würfelkörpers ganz aus purem Glas.
Das heißt, es gibt dann immer 5^3
der Würfel von der Kantenlänge 2,
in die der Würfel sei zerlegt gedacht,
was in Gedanken keine Mühe macht.
Da 126 dargestellt
als $5^3 + 1$, weiß alle Welt,
dass zwei der Punkte letztlich man zum Schluss
im gleichen kleinen Würfel finden muss.
Nun fragt man nach dem Abstand maximal

in einem kleinen Würfel dieser Wahl.
Das muss die Raumdiagonale sein,
die nach Pythagoras man findet fein
als $2 \cdot \sqrt{3}$; und jetzt ist klar,
dass der Beweis schon fast vollendet war.
Denn $2 \cdot \sqrt{3}$ liegt unter 4,
und dies zu zeigen, überlass ich dir.

❑

Ferienkost – Approximation[6] von π

Es sind viele Möglichkeiten zur angenäherten Berechnung der Kreiskonstanten π bekannt. Ziel ist hierbei immer, eine hohe Genauigkeit der Näherung zu erreichen. Häufig wird zusätzlich diskutiert, wie schnell diese Annäherung erfolgt, d.h. beispielsweise, wie viele Summanden einer unendlichen Reihe oder wie viele Iterationen eines Verfahrens zur Berechnung notwendig sind.

Eine etwas ungewohnte Gütebewertung von Approximationen besteht im folgenden Ansatz:

> *Es sei X ein Term, der genau b Ziffern enthält und dessen numerischer Wert in den ersten c Nachkommastellen mit der Zahl π übereinstimmt. Dann bezeichnet der Quotient $G = \frac{b}{c}$ die Aufwandsgüte G von X für π.*

Je kleiner der Gütewert G ist, um so geringer ist also der Ziffernaufwand zur Annäherung von

$$\pi \approx 3{,}1415926535\ 8979323846\ .$$

Beispiele:

(1) Die bereits von ARCHIMEDES VON SYRAKUS (ca. 287 - 212 v.u.Z.) benutzte Näherung $P_1 = \frac{22}{7} = 3{,}14|285\ldots$[7] erreicht mit 3 Ziffern eine Genauigkeit von 2 Nachkommastellen, also $G = 1{,}50$.

(2) Der Wert $P_2 = \sqrt{51} - 4 = 3{,}141|428\ldots$ erreicht mit 3 Ziffern bereits die Übereinstimmung in 3 Nachkommastellen ($G = 1{,}00$).

(3) In China war um 500 u.Z. die Näherung $P_3 = \frac{355}{113} = 3{,}141592|920\ldots$ bekannt. Mit 6 Ziffern wird eine Genauigkeit von 6 Nachkommastellen erreicht ($G = 1{,}00$). Den Gütewert können wir durch eine einfache Umformung verbessern: Stellen wir den

[6] Nach: Schwarz, St.: Aufgabe ι28. In: Wurzel (2003), Heft 1, S. 16-20.

[7] Der Strich | steht nach der letzten mit π übereinstimmenden Nachkommastelle.

Bruch mittels $P_4 = \frac{355}{5!\ -7}$ dar, genügen bereits 5 Ziffern und die Aufwandsgüte G sinkt auf 0,83.

(4) Auf SRINIVASA RAMANUJAN (1887 - 1920) geht die Näherung $P_5 = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3{,}14159265|258\ldots$ zurück. Mit 9 Ziffern wird damit eine Genauigkeit von 8 Nachkommastellen erreicht ($G = 1{,}13$). Formen wir den Term zu $P_6 = \sqrt{\sqrt{97\frac{9}{22}}}$ um, so genügen dafür bereits 5 Ziffern ($G = 0{,}63$).

Bei den letztgenannten Umformungen zu P_4 bzw. P_6 erkennen wir das Potenzial, durch einstellige Operatoren wie Wurzelzeichen oder Fakultäten Ziffern zu sparen. So finden wir für

$$P_7 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!}}}}}}}} = 3{,}141|603\ldots$$

eine Aufwandsgüte von $G = 0{,}67$, oder für

$$P_8 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!\ -\sqrt{\sqrt{4!}}}}}}}}}} = 3{,}1415926|308\ldots$$

sogar eine Güte von $G = 0{,}43$.

Ob folgendes Verfahren zu Näherungen mit beliebig kleiner Aufwandsgüte führt, ist nicht bekannt: Wir legen uns einen Fundus von Zahlen zwischen 2 und 4 an, die sich aus nur einer Ziffer bilden lassen.

- Das sind natürlich die Ziffern 2, 3 und 4.
- Hinzu kommen $\sqrt{5} \approx 2.23607, \sqrt{6} \approx 2.44949, \sqrt{7} \approx 2.64575, \sqrt{8} \approx 2.82843$.
- Mit zwei Wurzelzeichen gehören zu diesem Zahlenfundus auch $\sqrt{\sqrt{4!}} \approx 2.21336, \sqrt{\sqrt{5!}} \approx 3.30975$.
- Dies setzen wir fort. Beispielsweise nehmen wir dazu

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{6!}}} \approx 2.27597,\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!}}}} \approx 2.22580 \text{ oder } \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4!!}}}}} \approx 2.35375$$

usw. Wie sich solcherart konstruierte Zahlen auf dem Intervall [2; 4] verteilen, ist noch nicht untersucht. Vielleicht können wir damit jede reelle Zahl beliebig genau annähern?

Haben wir nun einen Term T_n, der n Ziffern enthält und mit π in mindestens n Nachkommastellen übereinstimmt, so bilden wir für $T_n > \pi$ den Quotienten $q = \frac{T_n}{\pi} > 1$ (andernfalls bilden wir den Kehrwert). Durch ausreichend häufiges Quadrieren erhalten wir einen Wert zwischen 2 und 4, etwa $2 \leq q^{2^k} < 4$. Für diesen suchen wir aus dem Fundus eine nahe gelegene Zahl w, ziehen entsprechend oft daraus die Quadratwurzel und finden eine neue Näherung $T_{n+1} = T_n / \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{w}}}}_{k\ Wurzeln}$

Diese enthält $n + 1$ Ziffern (weil ja mit w nur eine Ziffer dazukommt). Doch erhöht sich hierbei immer die Anzahl der übereinstimmenden Nachkommastellen?

Beispiel: Wir starten mit der Näherung $P_4 = \frac{355}{5!-7}$.

$$T_1 = \frac{355}{5!\ -7} \approx 3{,}141592|920 > \pi\ \Rightarrow q = \frac{T_1}{\pi} \approx 1.000000084914.$$
$$q^{2^{23}} \approx 2.038690181726$$

Wir wählen $w = 2$ und verwenden $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{23\ Wurzeln} \approx 1.000000082630$ für den nächsten Term[8]:

$$T_2 = \frac{355}{(5! - 7) \cdot \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{23\ Wurzeln}} \approx 3.1415926|60765$$

Würden wir jedoch $w = \sqrt{5}$ und entsprechend $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{5}}}}_{24\ Wurzeln} \approx 1.000000095930$ für den nächsten Term verwenden, also

[8] Die Ziffern der Zahl 23 gehören nicht zur Darstellung sondern dienen lediglich zur Abkürzung der Wurzeltürme.

$$T_2' = \frac{355}{(5! - 7) \cdot \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{5}}}}_{24\ Wurzeln}} \approx 3.1415926|18981$$

erhalten wir ebenfalls einen Term mit 6 Ziffern, der in 7 Nachkommastellen mit der Zahl π übereinstimmt.

Wer findet mit diesem Verfahren (oder mit anderen Lösungsansätzen) eine Näherung mit besonders kleiner Aufwandsgüte?[9]

Beim Anblick der obigen „Wurzeltürme“ erscheinen Zweifel an der Aufwandsbewertung berechtigt. Alternativ sollte deshalb vereinbart werden, dass neben den Ziffern auch jedes Operationszeichen (also sowohl die Zeichen der Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ bzw. Bruchstrich als auch Wurzel- und Fakultätszeichen) gezählt wird. Mit dieser neuen Zählweise benötigen zum Beispiel

P_1 insgesamt 4 Ziffern/Zeichen,	2 Nachkommastellen	$(G^* = 2{,}00)$,
P_3 insgesamt 6 Ziffern/Zeichen,	6 Nachkommastellen	$(G^* = 1{,}00)$,
$P_4 = T_1$ insgesamt 8 Ziffern/Zeichen,	6 Nachkommastellen	$(G^* = 1{,}33)$,
T_2 insgesamt 32 Ziffern/Zeichen,	6 Nachkommastellen	$(G^* = 5{,}33)$,
P_8 insgesamt 19 Ziffern/Zeichen	7 Nachkommastellen	$(G^* = 2{,}71)$.

Damit werden die derart modifizierten Aufwandsgüten G^* wesentlich höher! Aber dennoch gelingen interessante Approximationen:

$P_9 = \sqrt[5]{306 + \frac{5}{254}} = 3{,}14159265|411\ldots$ (11 Zeichen, 8 Stellen, $G^* = 1{,}38$),

$P_{10} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3{,}14159265|258\ldots$ (9 Zeichen, 8 Stellen, $G^* = 1{,}13$),

$P_{11} = \sqrt[18]{888582403} = 3{,}1415926535|758\ldots$ (12 Zeichen, 10 Stellen, $G^* = 1{,}20$).

Gibt es für diese modifizierte Aufwandsgüte Darstellungen mit einer Aufwandsgüte unter 1,00?

Seminar „Mathematik in Wettbewerben“

Eine Zusammenfassung des Seminarinhaltes vom 1. Juli 2023. Wir bedanken uns sehr herzlich bei der Wuttke Ingenieure GmbH Chemnitz[10] für die Unterstützung.

[9] Vorschläge werden gern unter bino@hrz.tu-chemnitz.de entgegengenommen.
[10] https://www.wuttke-ingenieure.de/

Sächsischer Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM) zur Vorbereitung auf die Wettbewerbe der Mathematik-Olympiade (MO): Die MO gilt in Sachsen als das Kernstück der Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik. Jährlich werden in vier Runden in jeder Klassenstufe 22 Wettbewerbsaufgaben gestellt – ein wahrer Fundus an Übungsmaterial! An Beispielen können wir erklären, wie mit den Aufgaben des KZM in sieben Serien pro Schuljahr sowohl das effiziente Finden eines Lösungsansatzes als auch die vollständige Lösungsdarstellung trainiert werden kann.

Grundsätzlich sollte davon ausgegangen werden, dass ab der 3. Stufe der MO (Landesausscheid) alle Teilnehmenden für die gestellten Aufgaben erfolgversprechende Lösungsstrategien finden und zu richtigen Ergebnissen kommen. Die Differenzierung des Starterfeldes wird also wesentlich durch die Lösungsdarstellung erfolgen. Es ist deshalb ein Anliegen des KZM, anhand von Aufgaben vergangener MO-Jahrgänge die Formulierungen zu trainieren. Die ersten beiden Aufgaben jeder Serie haben „Einstiegs-Charakter“: Die erste Aufgabe einer MO sollte im Allgemeinen den Einstieg in einen erfolgreichen Wettbewerb erleichtern. Die Aufgabenstellungen sind häufig kurz und knapp. Die Musterlösungen für die Korrektoren sind es meist ebenso, woraus zu schließen ist, dass keine wesentlichen Probleme erwartet werden.

Aufgabe. Entscheiden Sie, ob 99^{20} kleiner, gleich oder größer als 9999^{10} ist.

Lösungshinweise: Mit Anwendung der Potenzgesetze gilt

$9999^{10} = (99 \cdot 101)^{10} > (99 \cdot 99)^{10} = 99^{20}$, also finden wir $99^{20} < 9999^{10}$. ❑

Aufgabe KZM22/23-A1-2[11]. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $a^b + 7 = c$, wobei a, b und c Primzahlen sind.

Lösungshinweise: Da für Primzahlen a und b stets $a^b > 0$ gilt, ist die Primzahl $c > 7$ ungeradzahlig. Da 7 eine ungerade Zahl ist, muss folglich a^b geradzahlig sein, was $a = 2$ bedingt. Somit vereinfacht sich die Aufgabe zu $2^b + 7 = c$.

Für b = 2 erhalten wir mit $2^2 + 7 = 11$ eine Primzahl. Damit ist (2, 2, 11) eine Lösung der Aufgabe.

Es sei $b > 2$ und damit eine ungerade (Prim-) Zahl. Dann lässt sich b mit einer Zahl z ($z \geq 0$) darstellen als $b = 2 \cdot z + 1$ und somit gilt $2^{2z+1} = 2 \cdot 4^z$. Weil 4 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, lässt auch jede Potenz von 4 bei Division durch 3 den Rest 1. Somit lässt 2^b bei Division durch 3 den Rest 2. Nach Addition von 7 bleibt bei Division durch 3 der Rest 9, d.h. der Ausdruck $2^b + 7$ ist durch 3 teilbar und folglich keine Primzahl.

Es kann außer (2, 2, 11) keine weitere Lösung für die Aufgabenstellung geben. ❑

[11] Notation: **KZM**Schuljahr-**A**Serie-Aufgabennummer

Aufgabe MO390931[12]. Welche Paare (m, n) natürlicher Zahlen erfüllen die Gleichung $2^n + 1 = m^2$?

Lösungshinweise: Wir formen die gegebene Gleichung mithilfe der bekannten binomischen Formel um und erhalten

$$2^n = (m-1) \cdot (m+1)$$

Aufgrund der möglichen Faktorenzerlegung für 2^n (linke Seite der Gleichung) existieren zwei natürliche Zahlen $0 \leq n_1 < n_2$ mit $m - 1 = 2^{n_1}, m + 1 = 2^{n_2}, n_1 + n_2 = n$. Offenbar gilt $2^{n_2} - 2^{n_1} = 2$.

- Für $n_1 = 0$ gibt es keine natürliche Zahl n_2 mit $2^{n_2} = 2 + 2^0 = 3$.
- Für $n_1 = 1$ erfüllt $n_2 = 2$ die Gleichung $2^{n_2} = 2 + 2^1 = 4$.
- Ist $n_1 > 1$, so finden wir $4 \cdot (2^{n_2-2} - 2^{n_1-2}) = 2$ mit einem ganzzahligen Wert in der Klammer. Während die linke Seite dieser Gleichung durch 4 teilbar ist, ist die rechte Seite nicht durch 4 teilbar. Es kann also keine Lösung mit $n_1 > 1$ geben.

Somit finden wir als einzige Lösung $m = 3$ und $n = 3$. Die Probe bestätigt, dass (3, 3) tatsächlich Lösung ist, denn es gilt $2^3 + 1 = 9 = 3^2$. ❑

Aufgabe MO391031[13]. Untersuchen Sie, ob es Paare (a, b) natürlicher Zahlen gibt, die die Gleichung $\sqrt[3]{3^b + 1} = a$ erfüllen.

Lösungshinweise: Nach Einsetzen einiger Werte von b vermuten wir, dass es kein Lösungspaar gibt, denn wir finden für kleine b keine Kubikzahlen unter der Wurzel.

$$\sqrt[3]{3^0 + 1} = \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3^1 + 1} = \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3^2 + 1} = \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{3^3 + 1} = \sqrt[3]{28}.$$

Wenn es ein Lösungspaar (a, b) gäbe, so gilt für dieses $3^b = a^3 - 1$. Für die rechte Seite dieser Gleichung finden wir eine Faktorisierung, wie durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nachgewiesen werden kann:

$$3^b = a^3 - 1 = (a-1) \cdot (a^2 + a + 1)$$

[12] *Hinweise zur Auswertung:* Die 34 Teilnehmer des Sächsischen Landesausscheides der Olympiadeklasse 9 erreichten bei dieser Aufgabe lediglich durchschnittlich 39,7% der möglichen Punkte, dagegen erhielten die 8 Preisträger durchschnittlich 72,9%.

[13] *Hinweise zur Auswertung:* Die 21 Teilnehmer des Sächsischen Landesausscheides der Olympiadeklasse 10 erreichten bei dieser Aufgabe lediglich durchschnittlich 33,3% der möglichen Punkte, dagegen erhielten die 6 Preisträger durchschnittlich 83,3%.

Aufgrund der möglichen Faktorenzerlegung für 3^b existieren zwei natürliche Zahlen $0 \leq b_1 < b_2$ mit $a-1 = 3^{b_1}, a^2+a+1 = 3^{b_2}, b_1+b_2 = b$. Offenbar müssen wir $a = 3^{b_1}+1$ wählen. Damit erhalten wir für den zweiten Faktor die Gleichung

$$3^{b_2} = (3^{b_1}+1)^2 + (3^{b_1}+1) + 1 = 3^{2b_1} + 3 \cdot 3^{b_1} + 3 = 3 \cdot (3^{2b_1-1} + 3^{b_1} + 1)$$

- Für $b_1 = 0$ gibt es keine natürliche Zahl b_2 mit $3^{b_2} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$.
- Ist $b_1 > 0$, so ist der ganzzahlige Wert in der Klammer der rechten Seite dieser Gleichungskette größer als 1, aber nicht durch 3 teilbar. Deshalb ist die rechte Seite der Gleichung keine 3er-Potenz und es kann keine Lösungen (a, b) geben.

❑

Die Aufgaben 3 und 4 jeder KZM-Serie sind typische MO-Aufgaben (oder davon abgeleitet) und dienen vor allem der Übung zur Lösungsdarstellung. Dagegen sollen die Wahlaufgaben 5A und 5B zur vertiefenden Beschäftigung mit einer Thematik anregen. Die Teilfragen (a) bis (c) können dabei unabhängig voneinander sein und die Vielfalt möglicher Untersuchungen andeuten.

Aufgabe KZM22/23-1-5B. Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$. Für $n = 4$ erscheint $d_4 = 1$ als naheliegend, aber dafür ist bereits ein Beweis notwendig.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel.
(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird.
(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht.

Manchmal werden in den Teilaufgaben Spezialfälle formuliert, die entweder bei der vollständigen Lösungsdiskussion gesondert zu betrachten sind oder die für die Lösungsfindung hilfreich sein können.

Aufgabe KZM22/23-2-5A. Von einem Kreis sind zwei voneinander verschiedene Punkte A und B und eine Tangente g gegeben. Man konstruiere den Kreis, falls

(a) der Punkt A auf g liegt.
(b) die Gerade durch A und B parallel zu g ist.

(c) die Gerade durch A und B die Tangente g in einem Punkt S schneidet, der von A und B verschieden ist.

Organisatorische Hinweise: Für die Teilnahme am KZM ist eine Anmeldung unter https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1 erforderlich, die spätestens mit der ersten Einsendung von Lösungen erfolgen muss. Es wird ein Unkostenbeitrag erhoben.

Bundeswettbewerb Mathematik (BWM): Die Resonanz auf den BWM ist in Sachsen zahlenmäßig weiterhin gering. Dabei ist dieses dreistufige Angebot gerade in der 1. Runde besonders reizvoll: die dreimonatige häusliche Bearbeitungszeit lässt viel Freiraum für Recherchen, zudem ist Gruppenarbeit zugelassen. Wir zeigen anhand von Beispielen die Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieses Wettbewerbs mit der MO.

Die erste Runde des BWM hat als Hausaufgaben-Wettbewerb natürlich ein anderes Anspruchsniveau als ein Klausurwettbewerb – die verschiedensten Hilfsmittel sind zugelassen (wobei die selbständige Bearbeitung Ehrensache ist und recherchierte Teilergebnisse zitiert werden müssen!). „Selbständig“ schließt aber ausdrücklich eine Gruppenarbeit mit bis zu drei Teilnehmenden ein, in der natürlich eine gemeinsame Lösungsdiskussion erfolgen kann. Trotz dieser organisatorischen Unterschiede finden wir Aufgaben im BMW, die auch in der MO gestellt werden könnten.

Aufgabe BWM/2023-1-2[14]. Bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3$$

erfüllen. (*Anmerkung:* Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen).

Lösungshinweise[15]: Aus Aufgaben der MO, in denen Terme der binomischen Formeln wie $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auftreten[16], ist bekannt, dass wir durch Bildung vollständiger Quadrate die Lösungsmenge einschränken können. So ist es naheliegend, die gegebene Gleichung mit 2 zu multiplizieren und dann äquivalent zu

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 6$$

umzuformen. Da x, y und z ganze Zahlen sind, sind auch die paarweisen Differenzen ganzzahlig. Da zudem die Quadrate reeller Zahlen stets nicht negativ sind, können die

[14] Notation: **BWM/**Jahrgang-Runde-Aufgabennummer

[15] In Anlehnung oder übernommen aus den alljährlich veröffentlichten Lösungshinweisen, in denen zudem Lösungvarianten dargestellt sind. Als Literatur empfehlenswert: E. Specht, E. Quaisser, P. Bauermann (Hrsg.). 50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben (2. Auflage). Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2020. ISBN 978-3-662-61165-4.

[16] siehe Thema 2

Quadrate der Differenzen nur die Werte 0, 1 oder 4 annehmen. Wir erkennen, dass sich die Zahl 6 aus diesen Quadratzahlen nur als Summe 6 = 1 + 1 + 4 darstellen lässt.

Weil die gegebene Gleichung in x, y und z symmetrisch ist, können wir o.B.d.A. $x \leq y \leq z$ annehmen[17]. Somit finden wir als Lösung $y - x = 1$, $z - y = 1$ und $z - x = 2$. Dies ist gleichbedeutend zu $x = y - 1$ und $z = y + 1$, d.h., x, y und z sind drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Eine Probe bestätigt, dass diese Tripel tatsächlich Lösungen sind, denn es gilt:

$$(y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 - (y-1)y - y(y+1) - (y-1)(y+1) =$$
$$(y^2 - 2y + 1) + y^2 + (y^2 + 2y + 1) - (y^2 - y) - (y^2 + y) - (y^2 - 1) = 3$$

Somit sind alle Zahlentripel, die aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen oder deren Permutationen, Lösungen der gegebenen Gleichung. ❑

Aufgabe BWM/2020-2-2. Beweise: Es gibt keine rationalen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

Lösungshinweise: Da der Umgang mit rationalen Zahlen aus der MO bekannt ist, führt ein Lösungsansatz zur Darstellung der rationalen Zahlen zu Brüchen $x = \frac{a}{c}$ und $y = \frac{b}{c}$ mit ganzen Zahlen a, b, c $(c > 0)$, die durch Kürzen der Brüche so gefunden werden können, dass ihr größter gemeinsamer Teiler $ggT(a, b, c)$ gleich 1 ist. Wegen $x + y = -z$ finden wir nun die zu erfüllende Gleichung in der Form

$$a^2 + ab + b^2 = 2 \cdot (5c)^2.$$

Wir stellen fest: Wären a und b beide geradzahlig, dann ist c wegen $ggT(a, b, c) = 1$ ungeradzahlig. Dann wäre aber die linke Seite der Gleichung durch 4 teilbar, die rechte Seite aber nur durch 2 und nicht durch 4.

Wären a oder b (oder beide) jedoch ungeradzahlig, so stehen auf der linken Seite entweder eine oder drei ungerade Summanden und somit eine ungerade Summe, im Widerspruch zur Geradzahligkeit der rechten Seite.

Es kann also keine Lösungen wie gefordert geben. ❑

Ein Vorteil in der Heimarbeit besteht darin, dass zur Lösungsfindung Rechentechnik eingesetzt werden darf. Wir können also viele Beispiele rechnen (und sind hierbei nicht auf mühsame, zeitaufwendige manuelle Erstellung von tabellarischen Übersichten angewiesen). In folgender Aufgabe erscheint der Rechenaufwand aber selbst durch Kopfrechnen beherrschbar.

[17] Für jede andere Ungleichungskette können wir die Variablen entsprechend umbenennen.

Aufgabe BWM/2022-1-1. Fünf Eichhörnchen haben zusammen einen Vorrat von 2022 Nüssen. Am ersten Tag kommen 2 Nüsse hinzu, am zweiten Tag 4 Nüsse, am dritten 6 Nüsse und so weiter, d.h. an jedem weiteren Tag kommen jeweils 2 Nüsse mehr hinzu als am Tag zuvor.

Am Ende irgendeines Tages teilen die Eichhörnchen den Vorrat untereinander auf. Ist es möglich, dass dabei alle gleich viele Nüsse erhalten und keine Nuss übrigbleibt?

Anmerkung: Die Nüsse bleiben beim Verteilen ganz. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise: Wir erstellen eine Tabelle mit der Anzahl der Nüsse nach jedem weiteren Tag.

Tag	0	1	2	3	4	5	6	7	…
Nüsse davor	2022	2022	2024	2028	2034	2042	2052	2064	…
+ Nüsse	0	2	4	6	8	10	12	14	…
Nüsse gesamt	2022	2024	2028	2034	2042	2052	2064	2078	..

Wir vermuten anhand dieser Berechnungen, dass die Anzahl der Nüsse an keinem Tag auf 5 oder 0 endet (und damit durch 5 teilbar ist). Aber natürlich kann eine solche Aussage nicht durch (noch so viele) Beispiele beweisen werden. Wir müssen deshalb eine Struktur erkennen, die sich verallgemeinern lässt. Offenbar wird die Endziffer der Nussanzahl allein durch die Endziffern in der Tabelle bestimmt.

Tag		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
End-	Nüsse davor	2	2	4	8	4	2	2	4	8	4	2	…
ziffer	+ Nüsse	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0	…
der	Nüsse gesamt	2	4	8	4	2	2	4	8	4	2	2	..

Jetzt erkennen wir die Regelmäßigkeit in den Spalten. Da die Angaben zu den Endziffern am Tag 5 mit den Angaben zu den Endziffern am Tag 0 vollständig übereinstimmen, wiederholen sich die Spalten in den Folgetagen immer wieder. Es tritt also in der unteren Zeile niemals eine 0 oder 5 auf. ❑

Aufgabe BWM/2020-1-4. Die Folge $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = \max_{0<d<n} a_n \cdot a_{n-d} \ (n \geq 4)$$

Bestimme die Primfaktorenzerlegung von $a_{19702020}$.

Hinweis: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise: Der Hinweis am Ende der Aufgabenstellung bedeutet, dass es nicht genügt, mittels eines Computerprogramms das Folgenglied $a_{19702020}$ zu berechnen und die zugehörige Primfaktorenzerlegung anzugeben. Da aber das Besondere am

Index (außer dass es zum Bezug „50 Jahre BWM von 1970 – 2020“ steht) nicht erkennbar ist, könnte eine Auflistung der nächsten Folgeglieder hilfreich sein. Dies wäre ohne Rechentechnik sehr aufwändig. Wir erhalten:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	2	3	4	6	9	12	18	27	36
		2^1	3^1	2^2	$2^1 3^1$	3^2	$2^2 3^1$	$2^1 3^2$	3^3	$2^2 3^2$
					$3 \cdot a_2$	$3 \cdot a_3$	$3 \cdot a_4$	$3 \cdot a_5$	$3 \cdot a_6$	$3 \cdot a_7$

Die vierte Zeile der Tabelle finden wir erst, wenn wir einige Glieder ermittelt haben. Jetzt können wir vermuten: Für alle m gilt $a_{3m} = 3^m$ (entweder explizit aufgrund der dritten Zeile oder rekursiv aufgrund der vierten Zeile). Diese Vermutung ist aber nun noch ohne Verwendung von Rechentechnik zu beweisen, beispielsweise mit der Methode der vollständigen Induktion.

Schließlich kommen wir wegen $19702022 = 3 \cdot 6567340$ zu dem Ergebnis $a_{19702020} = 3^{6567340}$. ❑

Aufgabe BWM-2017-2-4. Eine natürliche Zahl nennen wir heinersch, wenn sie sich als Summe einer positiven Quadratzahl und einer positiven Kubikzahl darstellen lässt. Beweise: Es gibt unendlich viele heinersche Zahlen, deren Vorgänger und deren Nachfolger ebenfalls heinersch sind.

Lösungshinweise: Die sehr schwierige Aufgabe war ohne Computereinsatz wohl kaum lösbar, da zu Beginn nicht einmal gesichert scheint, dass es überhaupt solche Tripel gibt. Heinersche Zahlen finden wir aber schnell: $2 = 1^2 + 1^3$, $5 = 2^2 + 1^3$ oder $9 = 1^2 + 2^3$. Aber erst $126 = 1^2 + 5^3$, $127 = 10^2 + 3^3$, $128 = 8^2 + 4^3$ bilden das erste Tripel mit der geforderten Eigenschaft. Es folgen die Tripel 127, 128, 129 und 351, 352, 353.

Aus diesen und anderen gefundenen Beispielen eine allgemeine Konstruktionsvorschrift für (unendlich viele) Tripel zu generieren, war eine besondere Herausforderung. Aus der Beobachtung, dass es offenbar heinersche Tripel gibt, bei denen die Kubikzahlen aus aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen, lässt sich ableiten: Für alle Lösungen (s, t) der Gleichung $s^2 - 13t^2 = 3$ (es gibt unendlich viele!) sind die drei Zahlen

$$H_1(t) = (4t^2 - 1)^3 + (10t^2)^2$$
$$H_2(t) = (4t^2)^3 + (2st)^2$$
$$H_3(t) = (4t^2 + 1)^3 + (2t^2)^2$$

heinersche Zahlen, die aufeinanderfolgend sind, was durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen noch zu beweisen ist. ❑

Aufgabe BWM/2021-1-2. Der Bruch $\frac{3}{10}$ kann auf genau zwei Arten als Summe zweier Stammbrüche[18] dargestellt werden: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden?
b) Gibt es eine nicht durch 3 teilbare positive ganze Zahl *n* mit der Eigenschaft, dass $\frac{3}{n}$ auf genau 2021 Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden kann?

Erläuterung: Ein Stammbruch ist ein Bruch der Form $\frac{1}{z}$, wobei z eine positive ganze Zahl ist. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Wir suchen alle positiven ganzen Zahlen a und b mit $a \leq b$, für die $\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$b = \frac{1}{\frac{3}{2021} - \frac{1}{a}} = \frac{2021a}{3a - 2021}.$$

Damit b eine positive ganze Zahl ist, muss a größer als 673 gewählt werden (wegen $3 \cdot 674 = 2022 > 2021$). Außerdem gilt für $a \leq b$ stets $\frac{3}{2021} \leq 2 \cdot \frac{1}{a}$, d.h. wir erhalten eine obere Abschätzung $a \leq \frac{4042}{3} < 1344$. Es genügt also, für alle ganzen Zahlen a mit $673 < a < 1344$ systematisch auszuprobieren, ob damit eine passende ganze Zahl b erhalten wird. Tatsächlich finden wir drei (bis auf Vertauschen der Reihenfolge der Summanden) verschiedene Arten der Darstellung mit zwei Stammbrüchen:

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{674} + \frac{1}{1362154} = \frac{1}{688} + \frac{1}{32336} = \frac{1}{1290} + \frac{1}{1410}.$$

Es genügt nun aber nicht, diese drei Darstellungsarten mit dem Hinweis anzugeben, dass keine weiteren Möglichkeiten gefunden wurden. Ein Quellcode für einen geeigneten Algorithmus oder ein ausführbares Programm zur Ermittlung solcher Darstellungen wird im BWM nicht als Lösung anerkannt, selbst wenn die Richtigkeit der Ergebnisse umfassend geprüft wurde. Wir müssen also die Lösungsmenge aus der äquivalent umgeformten Gleichung $(3a - 2021) \cdot (3b - 2021) = 2021^2$ über die Faktorenzerlegung von 2021² ermitteln. Es ist allerdings dafür hilfreich zu wissen, dass es nur drei Arten geben kann.

Für die Teilaufgabe b) hilft die Rechentechnik kaum. Obwohl es bei dieser Fragestellung genügt, eine Lösung ohne Herleitung anzugeben, und die 2021 Arten

[18] zu Stammbrüchen siehe Thema 15 – Stammbrüche

der Darstellung im Ergebnis der systematischen Suche aufgelistet und somit auf das Lösungsblatt übertragen werden könnten, ist die Richtigkeit der Lösungen nicht offensichtlich, weil die Probe aller 2021 Arten ohne rechentechnische Hilfsmittel nicht einfach möglich ist. Die kleinste Zahl n mit der geforderten Eigenschaft beträgt zudem $n = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 23 = 35388628000$, also praktisch durch systematisches Suchen nicht auffindbar. Aber wir werden in Spezialfällen Strukturen erkennen, die wir verallgemeinern können. So finden wir beispielsweise eine Lösung $n = 2^{4042}$, für die wir alle Darstellungen formal eindeutig angeben können. ❑

Organisatorische Hinweise: Die Aufgaben der jeweils 1. Runde werden im Internet unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/ Anfang Dezember veröffentlicht und zudem an die Gymnasien als Papier-Flyer verteilt. Ansprechpartner können also alle Fachlehrerinnen und Fachlehrer für Mathematik sein. Für die Teilnahme genügt es, bis zum Einsendeschluss Anfang März des Folgejahres (Datum des Poststempels) seine Lösungsdarstellungen mit dem ausgefüllten Anmeldeformular auf dem Postweg einzusenden (eine elektronische Einsendung ist derzeit nicht möglich). Unabhängig vom erreichten Ergebnis erhalten alle Teilnehmenden die ausführlichen Lösungshinweise des BWM. Nach der ersten und zweiten Runde wird jeweils durch den Träger Bildung und Begabung e.V. ein online-Seminar angeboten. Das nächste Seminar findet am 13. September 2023 von 17:30 bis 18:30 Uhr statt, Anmeldung unter https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10121.

Fachgebiet Mathematik/Informatik im Bundeswettbewerb „Jugend forscht" (Jufo): Wer bereits ein mathematisches Thema untersucht hat oder es probieren möchte, sollte eine Teilnahme an Jufo in Erwägung ziehen. Ein attraktiver Wettbewerb wartet. Dieser bietet – neben vielen Preisen – die Chance, mit Jugendlichen sowie Vertretern aus Wirtschaft und Wissenschaft ins fachliche Gespräch zu kommen. Wir diskutieren an Beispielen den Weg von einer ersten Idee zum erfolgreichen Wettbewerbsbeitrag.

Im Gegensatz zu KZM und BWM steht im Wettbewerb Jufo der Lösungsprozess im Mittelpunkt. Dies setzt zunächst eine Idee voraus, was untersucht werden könnte, weil keine zentralen Aufgabenstellungen vorgegeben werden. Vorab: Es muss nicht unbedingt ein bislang ungelöstes Problem gefunden werden. Es können auch bekannte Fragestellungen aufgegriffen und selbständig bearbeitet werden – wichtig ist vor allem, diesen Forschungsprozess deutlich werden zu lassen. Zugegeben – die Themenfindung ist die erste (und vielleicht größte) Herausforderung. Aber da lassen sich Partner aus Universität[19] und Wirtschaft[20] für interessante Anregungen

[19] siehe https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/schule/index.de.php, Kontakt: Dr. Frank Göring (frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de)
[20] Kontakt: MINT-Region, Bianka Albrecht (B.Albrecht@icm-chemnitz.de)

vermitteln. Doch selbst wenn die ersten Ideen eher spielerisch wirken, können sich daraus (Zwischen-) Ergebnisse ergeben, die zu weiteren Untersuchungen anregen.
So wurde 2022 in Sachsen ein Projekt „Mathematik mit Kacheln“ eingereicht, dass es bis zu einem 2. Preis im FG Mathematik/Informatik im Bundeswettbewerb geschafft hat. Ausgangspunkt war das 1974 vom späteren Physik-Nobelpreisträger ROGER PENROSE (geb. 1931) entdeckte mathematische Verfahren, eine Fläche lückenlos mit gewissen Kacheln zu parkettieren, ohne dabei ein Grundschema zu wiederholen. Dennoch finden sich Muster - bestimmte Strukturen finden sich im Großen ebenso wie im Kleinen. Darüber hinaus ist jedes sogenannte PENROSE-Parkett als eine Folge von Nullen und Einsen darstellbar. Eigentlich alles erforscht? Der Jungforscher kehrte diesen Ansatz um und konnte mathematisch beweisen, dass sich aus jeder Folge, in der keine zwei Einsen direkt aufeinanderfolgen, ein PENROSE-Parkett konstruieren lässt.

Die oben beschriebene Aufgabe KZM22/23-1-5B könnte ebenfalls Ausgangspunkt eines Jufo-Projektes werden. Zunächst ist zu recherchieren, was alles bereit bekannt ist – es geht ja nicht darum, Bekanntes nachzuvollziehen. Für kleine Punktanzahlen sind konstruktive Verfahren bekannt. Was ist davon verallgemeinerungsfähig? Nun kann es ein eigenständiger Forschungsprozess werden, neue Wege zu gehen, die auf vergleichbare Ergebnisse führen. Wie können Sie – anders als andere – computergestützt Verteilungen von n Punkten mit möglichst großem Mindestabstand erzeugen – und wie können Sie nachweisen, dass es keine besseren Verteilungen gibt? Und wenn es gelöst erscheint – welche praktischen Anwendungen könnte es dafür geben?



Oder haben Sie Lust auf **NMBR9**? Bei diesem Spiel geht es darum, zwei Sätze der nebenstehend abgebildeten 10 Zahlenplättchen gemäß den Spielregeln (z.B. unter www.brettspiele-magazin.de/nmbr9-number9/) aneinander und übereinander zu legen, so dass die summarische Bewertung aller Produkte „Zahlenwert · Ebene“ möglichst groß wird. Die Reihenfolge der zu legenden Zahlenplättchen wird zufällig durch Ziehen einer Zahlenkarte festgelegt. Da stellen sich doch viele Fragen, zuallererst: Was ist die höchste erreichbare Bewertung? (Im Internet ist dafür 198 zu finden.)

Der Forschungsprozess könnte mit Spielen beginnen (gut geeignet für eine Gruppenarbeit!). Durch experimentelles Vorgehen (bei dem zunächst der Zufall ausgeschaltet wird – also die Karten offen ausliegen und optimal ausgewählt werden dürfen) lässt sich sicher eine Struktur erkennen, bei der eine möglichst hohe Bewertung entsteht. Wie kann nachgewiesen werden, dass es keine höhere Bewertung geben kann? Wenn nun der Zufall gemäß Regelwerk mitspielt – mit

welcher Wahrscheinlichkeit ist diese höchste Bewertung erreichbar? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mindestens 100 Bewertungspunkte erreichen? Wir erkennen: Bis auf die Zahl 1 können alle Zahlen mit einem 3×4-Rechteck umschrieben werden – hilft dieses grobe Modell bereits, sich der Lösung zu nähern, vielleicht durch eine Zusatzforderung, dass die übergeordnete Ebene nur einen bestimmten Prozentsatz der darunter liegenden Ebene umfassen darf? Wie gut kann damit der Höchstwert erreicht werden? Lassen sich aus den originalen Zahlenfiguren Teilflächen vorstrukturieren, die den Spielverlauf vereinfachen?

Sicher entstehen beim Forschen noch viele andere Fragen. Vielleicht finden Sie auch abgewandelte Spielvarianten, die mathematisch interessant sind. (Für die Bearbeitung der Thematik wird ein Spiel bereitgestellt – eine formlose Anfrage genügt.)

Organisatorische Hinweise: Unter www.jugend-forscht.de und www.jugend-forscht-sachsen.de wird der Wettbewerb und seine Geschichte ausführlich erklärt. Dort finden wir auch Teilnahmebedingungen und viel Informationsmaterial zum Download. Die Anmeldung mit einem Projekt muss bis 30. November online erfolgen. Bis zu diesem Zeitpunkt sollte das Projekt schon in seiner Bearbeitung fortgeschritten sein, denn nun muss bis Januar des Folgejahres eine Projektbeschreibung eingereicht werden. Dieser Text ist Grundlage für die Bewertung des Projektes im Regionalwettbewerb[21], der Anfang März durchgeführt wird. Die Regionalsieger (dies können auch mehrere oder keine pro Fachgebiet sein) qualifizieren sich für den Sächsischen Landeswettbewerb.

[21] In Sachsen werden Regionalwettbewerbe in Chemnitz, Dresden und Leipzig durchgeführt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 23 – Quersummen und Querprodukte 3
Wettbewerbe: Bundesrunde der 62. Mathematik-Olympiade 7
Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte 8
Ferienkost – Approximation von □ 9
Seminar „Mathematik in Wettbewerben“ 12

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[22]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
7/2023 (Juli 2023)	Thema 23.01	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941
6/2023 (Juni 2023)	Thema 22.02	Zahlenverteilungen auf Körpern	
5/2023 (Mai 2023)	Thema 22.01	Zahlenverteilungen auf ebene Figuren	MO620936
4/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO621034, MO620934
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

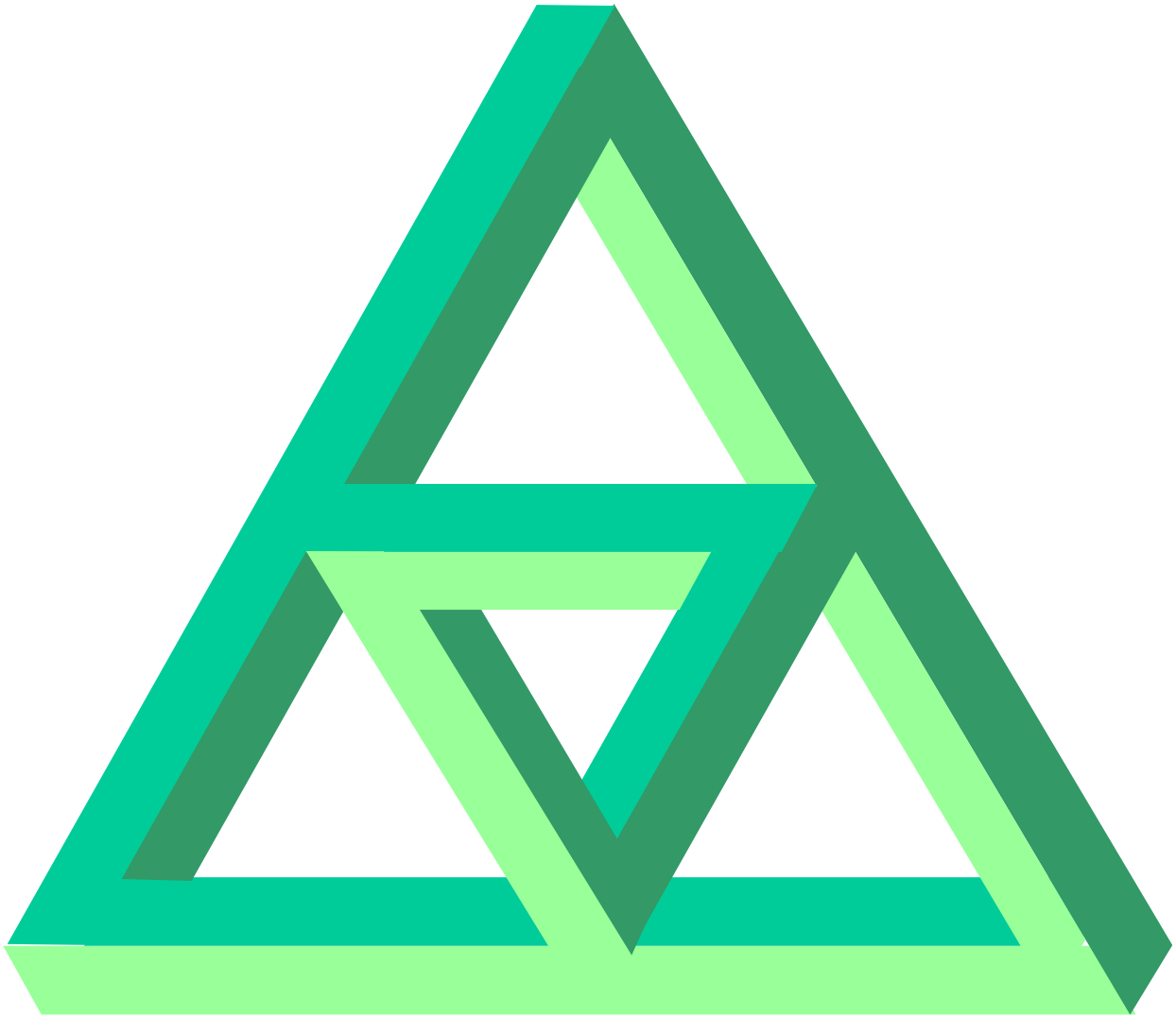
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[22] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 8+9/2023 (August/September 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Noch einmal knüpfen wir an die Aufgaben **MO620941/MO621041** an und erweitern die Thematik auf das Querprodukt einer Zahl. Die Idee, durch Austausch der Begriffe Quersumme und Querprodukt zu neuen Fragestellungen zu kommen, führt mitunter zu sehr komplexen Fallunterscheidungen, da die Nichtlinearität der Gleichungen über den Zusammenhang der Ziffern keine geschlossenen Lösungsansätze erlauben. Damit eignen sich derart generierte Aufgabe für das Trainieren eines Lösungsansatzes durch Fallunterscheidung. Aber es gibt auch Fragestellungen, die zu trivialen Problemen führen.

Im Rückblick auf die Aufgaben **MO620942/MO621042** betrachten wir kombinatorische Probleme aus der Wettbewerbs-Mathematik. Auch hier helfen oftmals Fallunterscheidungen, die Fragestellungen so zu gliedern, dass die zu bearbeitenden Fälle mit bekannten Methoden gelöst werden können. In den höheren Runden der MO erweisen sich die Lösungsdiskussionen als sehr anspruchsvoll.

Ein Auszug aus einem Lehrbuch von 1895 bietet den (damaligen) Einstieg in die Kombinatorik und zeigt die Herleitung der Formel zur Berechnung der Anzahl der Permutationen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 23.02 – Quersummen und Querprodukte

Mit Bezug zu den Aufgaben **MO620941/MO621041** fanden wir einen Zusammenhang zwischen der Summe der Quersummen zweier Zahlen und der Quersumme der Summe dieser Zahlen.

Aufgabe 23.08. Die beiden positiven ganzen Zahlen x und y haben die Summe z. Die Quersumme von x beträgt $Q(x) = 43$. Die Quersumme von y beträgt $Q(y) = 68$.

Wie groß ist Q(z), wenn bei der schriftlichen Addition in genau fünf Spalten jeweils ein Übertrag entsteht?

Lösungshinweise: Wir kennen den Zusammenhang $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) - 9k$, wobei k die Anzahl der Überträge bei der schriftlichen Addition angibt. Somit finden wir $Q(z) = 43 + 68 - 9 \cdot 5 = 43 + 68 - 45 = 66$. ❑

Aufgabe 23.09. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n, deren Querprodukt und Quersumme übereinstimmen?

Lösungshinweise: Da für zwei Ziffern $a, b > 1$ stets $a \cdot b \geq 2 \cdot max\{a, b\} \geq a + b$ gilt, können wir jede Zahl, deren Querprodukt größer als die Quersumme ist, durch zusätzliche Stellen „1“ erweitern, bis die Quersumme den Wert des (unveränderlichen) Querproduktes erreicht. Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z.B. betrachten wir für $n > 0$ die Zahlen

$$\underbrace{11\ldots11}_{k-mal}\,\underbrace{22\ldots22}_{n-mal}.$$

Wählen wir $k = 2^n - 2n$ (also 2, 22, 11222, 111111112222 usw.) so ist das Querprodukt gleich 2^n und die Quersumme $k \cdot 1 + n \cdot 2 = 2^n - 2n + 2n = 2^n$. ❑

Aufgabe 23.10. Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes ist, also $n = QS(n) + QP(n)$!

Lösungshinweise: Unter den einstelligen natürlichen Zahlen kann es keine Zahl mit dieser Eigenschaft geben, denn in diesem Fall gilt stets $n = QS(n) = QP(n)$.

Es sei $n = 10a + b$ mit $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $a > 0$. Dafür wird laut Aufgabenstellung gefordert, dass $10a + b = (a + b) + (a \cdot b)$, also $9a = a \cdot b$ und wegen $a \neq 0$ nach Division durch a sogar $9 = b$ gilt. Also können unter den zweistelligen Zahlen nur alle Zahlen der Form 19, 29, …, 99 Lösung der Aufgabe sein. Dies bestätigen wir durch eine Probe: Sei a eine Ziffer 1, 2, …, 9, so erhalten wir

$$10a + 9 = a + 9 + 9 \cdot a = QS(10a + 9) + QP(10a + 9)$$

Es sei nun n echt k-stellig ($k > 2$) mit den Ziffern $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0$ mit $a_{k-1} \geq 1$. Dann finden wir folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i + \prod_{i=0}^{k-1} a_i = n \geq 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i \,.$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\sum_{i=0}^{k-2} a_i$ und teilen anschließend beide Seiten durch $a_{k-1} \neq 0$, so erhalten wir

$$1 + \prod_{i=0}^{k-2} a_i \geq 10^{k-1}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber (wenn alle anderen Ziffern den Wert 9 haben) höchstens $1 + 9^{k-1}$, was aber offensichtlich für $k > 2$ kleiner als 10^{k-1} ist. Es kann also keine weiteren Lösungen der Aufgabenstellung geben. ❑

Hinweis: Die Argumentation für mindestens dreistellige Zahlen lässt sich auch auf zweistellige Zahlen übertragen, also für $k = 2$. Dann untersuchen wir die Abschätzung $1 + a_0 \geq 10$ und erkennen, dass diese nur für $a_0 = 9$ erfüllt werden kann.

Aufgabe 23.11 – MO440924. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihrer Quersumme $QS(n)$ beträgt 2004.

Lösungshinweise: Die Aufgabenstellung verleitet zum Probieren. Sicher ist n kleiner als 2004. Also probiere man die Zahlen 2003, 2002, ..., bis man sicher sein kann, dass es für kleinere als die probierten Zahlen keine Lösung mehr geben kann. Da die Quersumme einer Zahl kleiner als 2004 höchstens $1 + 9 + 9 + 9 = 28$ ergeben kann, genügt es die Zahlen bis $(2004 - 28 =)1976$ zu probieren. Dies wurde in den Lösungshinweisen zur Aufgabe als vollständige Lösungsdarstellung akzeptiert.

Doch wie immer bei solchen „Probier“-Aufgaben wollen wir durch Vorüberlegungen die Menge der zu probierenden Zahlen einschränken.

Fall 1: Es gelte $n \geq 2000$. Es gibt also eine Einerziffer e mit $QS(n) = 2 + e$ und damit $(2000 + e) + (2 + e) = 2004$, also $2002 + 2 \cdot e = 2004$. Daraus folgt $e = 1$. Tatsächlich erfüllt $n = 2001$ die Gleichung $2001 + QS(2001) = 2001 + 3 = 2004$.

Fall 2: $n < 2000$: Für $n > 1975$ gibt es eine Ziffer z (mit $z = 7, 8, 9$) und eine Ziffer e mit $QS(n) = 1 + 9 + z + e$ und $1900 + 10 \cdot z + e + 1 + 9 + z + e = 2004$, also $11 \cdot z + 2 \cdot e = 94$. Damit muss z eine gerade Zahl sein, d.h. $z = 8$, und deshalb finden wir $e = 3$. Die Probe $1983 + QS(1983) = 1983 + 21 = 2004$ bestätigt $n = 1983$ als Lösung. ❑

Aufgabe 23.12. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihres Querproduktes $QP(n)$ beträgt 2015.

Lösungshinweise: Auch diese Aufgabenstellung verleitet zum Probieren. Sicher ist $n = 2015$ eine Lösung, weil $2015 + QP(2015) = 2015 + 0 = 2015$ erfüllt ist. Weitere Lösungen dürfen keine Ziffer 0 enthalten und müssen folglich kleiner als 2000 sein. Also probieren wir die Zahlen 1999, 1998, ..., bis wir sicher sein können, dass es für kleinere als die probierten Zahlen keine Lösung mehr geben kann.

Wegen $QP(n) \leq 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ geht der Suchbereich bis höchstens $(2015 - 729 =)\, 1286$. In einem Klausurwettbewerb ist ein systematisches Probieren in einem so großen Bereich ohne weitere Vorüberlegungen nicht realistisch. In einer Hausarbeit ist Computertechnik für die Lösungsfindung hilfreich, die Lösungsdarstellung muss aber ohne Verweis auf die Rechnergebnisse gelingen.

Wir nennen die Ziffer an der Hunderterstelle h, an der Zehnerstelle z und an der Einerstelle e. Dann soll laut Aufgabenstellung gelten:

$$1000 + 100h + 10z + e + h \cdot z \cdot e = 2015.$$

Wir können zunächst die Hunderterstelle einschränken: Für $n = 1599$ gilt $1599 + QP(1599) = 1599 + 405 = 2004 < 2015$. Weil jede kleinere Zahl n zu einer kleineren Summe führt, finden wir die Abschätzung $h > 5$.

Fall 1: $e = 1$, also $100h + 10z + h \cdot z = 1014$. Wir finden $h = \frac{1014-10z}{100+z} \geq \frac{924}{109} > 8$. Wenn es Lösungen mit $e = 1$ gibt, muss $h = 9$ gelten. Dies bedeutet

$$900 + 10z + 9z = 1014, \text{ d.h. } 19 \cdot z = 114, \text{ also } z = 6.$$

Die Probe bestätigt $n = 1961$ wegen $1961 + 1 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 1 = 1961 + 54 = 2015$ als Lösung.

Fall 2: Wir erkennen, dass e nicht geradzahlig sein kann, weil dann in der Gleichung $100h + 10z + e + h \cdot z \cdot e = 1015$ die linke Seite als Summe von geraden Zahlen geradzahlig ist, im Widerspruch zur rechten Seite.

Fall 3: $e = 3$, also $100h + 10z + 3 \cdot h \cdot z = 1012$. Wir finden $h = \frac{1012-10z}{100+z\cdot 3} \geq \frac{922}{127} > 7$. Wenn es Lösungen mit $e = 3$ gibt, muss $h = 8$ oder 9 gelten. Dies bedeutet

$$h = 9 \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 3 = 1012, \text{ d.h. } 37 \cdot z = 112,$$
$$h = 8 \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 3 = 1012, \text{ d.h. } 34 \cdot z = 212.$$

In beiden Fällen führt dies zu keiner ganzen Zahl für z.

Fall 4: $e = 5$, also $100h + 10z + 5 \cdot h \cdot z = 1010$. Wir finden $h = \frac{1010-10z}{100+z\cdot 5} \geq \frac{920}{145} > 6$. Wenn es Lösungen mit $e = 5$ gibt, muss $h = 7, 8$ oder 9 gelten. Dies bedeutet

$h = 9 \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 5 = 1010$, d.h. $55 \cdot z = 110$, d.h. $z = 2$,
$h = 8 \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 5 = 1010$, d.h. $50 \cdot z = 210$,
$h = 7 \Rightarrow 700 + 10z + 7 \cdot z \cdot 5 = 1010$, d.h. $45 \cdot z = 310$.

Während die beiden letzte Gleichung zu keiner ganzen Zahl z führen, können wir $n = 1925$ wegen $1925 + 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 1925 + 90 = 2015$ als Lösung bestätigen.

Fall 5: $e = 7$, also $100h + 10z + 7 \cdot h \cdot z = 1008$. Wir finden $h = \frac{1008-10z}{100+z \cdot 7} \geq \frac{918}{163} > 5$. Wenn es also Lösungen mit $e = 7$ gibt, muss $h = 6, 7, 8$ oder 9 gelten. Dies bedeutet

$h = 9 \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 7 = 1008$, d.h. $73 \cdot z = 108$,
$h = 8 \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 7 = 1008$, d.h. $66 \cdot z = 208$,
$h = 7 \Rightarrow 700 + 10z + 7 \cdot z \cdot 7 = 1008$, d.h. $59 \cdot z = 308$,
$h = 6 \Rightarrow 600 + 10z + 6 \cdot z \cdot 7 = 1008$, d.h. $52 \cdot z = 408$.

In allen diesen Fällen führt es zu keiner ganzen Zahl für z.

Fall 6: $e = 9$, also $100h + 10z + 9 \cdot h \cdot z = 1006$. Wir finden $h = \frac{1006-10z}{100+z \cdot 9} \geq \frac{916}{181} > 5$. Wenn es Lösungen mit $e = 9$ gibt, muss $h = 6, 7, 8$ oder 9 gelten. Dies bedeutet

$h = 9 \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 9 = 1006$, d.h. $91 \cdot z = 106$.
$h = 8 \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 9 = 1006$, d.h. $82 \cdot z = 206$,
$h = 7 \Rightarrow 700 + 10z + 7 \cdot z \cdot 9 = 1006$, d.h. $73 \cdot z = 306$,
$h = 6 \Rightarrow 600 + 10z + 6 \cdot z \cdot 9 = 1006$, d.h. $64 \cdot z = 406$,

In allen diesen Fällen führt es zu keiner ganzen Zahl für z.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Die Gleichung wird also nur für $n = 1925, 1961, 2015$ erfüllt. ❑

Hinweis: Die eingangs gefundene Abschätzung für h zeigt, dass die Gleichung $n + QP(n) = 2004$ mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt. Man untersuche, ob weitere Lösungen neben $n = 1599$ und $n = 2004$ existieren.

Aufgabe 23.13 – MO450944. Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen n, die im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 = QS(QS(n)).$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler, mit QS die Quersumme abgekürzt.

Lösungshinweise: Da der ggT zweier Zahlen mindestens 1 ist, gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16.$$

Somit gilt $QS(QS(n)) \geq 16$. Da n neunstellig ist, gilt $QS(n) \leq 81$. Zwischen 1 und 81 ist die Zahl mit der größten Quersumme 79. Für alle neunstelligen Zahlen n gilt folglich $1 \leq QS(QS(n)) \leq 16 = Q(79)$. Insgesamt erhalten wir daraus $QS(QS(n)) = 16$.

Daher kommen nur neunstellige Zahlen mit $QS(n) = 79$ als Lösung in Frage. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich:

a) Achtmal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 7.
b) Siebenmal die Ziffer 9 und zweimal die Ziffer 8.

Bei a) lassen sich genau 9 und bei b) genau $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ solche neunstelligen Zahlen bilden. Es gibt also (9 + 36 =) 45 neunstellige Zahlen mit der Quersumme 79.

Zur Lösung der Aufgabe muss aber zusätzlich $ggT(n;\ 90) = 1$ gelten. Die Primteiler von 90 sind 2, 3 und 5. Keine der gefundenen neunstelligen Zahlen ist durch 3 oder 5 teilbar. Es müssen somit nur diejenigen Zahlen eliminiert werden, die durch 2 teilbar sind. Das sind die 8 Zahlen aus b), die auf 8 enden. Also ergibt sich als Anzahl aller neunstelligen Zahlen mit der geforderten Eigenschaft (45 – 8 =) 37. ❑

Aufgabe 20.14. Bestimmen Sie die Anzahl aller dreistelligen natürlichen Zahlen *n*, die im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n;\ 90))^4 = QP(QP(n)).$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler, mit QP das Querprodukt abgekürzt.

Lösungshinweise: Wie oben finden wir $(1 + ggT(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16$. Somit gilt $QP(QP(n)) \geq 16$. Da n dreistellig ist, gilt $QP(n) \leq 9^3 = 729$. Die Zahl zwischen 1 und 729 mit dem größten Querprodukt ist 699 mit $QP(699) = 486$. Für alle dreistelligen Zahlen n gilt folglich $0 \leq QP(QP(n)) \leq 486$.

Daher kommen nur dreistellige Zahlen als Lösung in Frage, deren Querprodukt vom Querprodukt die vierte Potenz einer Zahl zwischen 2 und 4 ergibt (wegen $2^4 = 16$ und $4^4 = 64$, aber $5^4 = 625$). Zudem kann $QP(n)$ höchsten $9^3 = 729$ sein. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich.

- $QP\big(QP(n)\big) = 2^4$ und $ggT(n;\ 90) = 1$. Die Ziffern von $QP(n)$ sind somit sämtlich Potenzen von 2 (ggf. einschließlich des Exponenten 0). Wir untersuchen die möglichen Kombinationen, inwieweit sich diese Zahlen $QP(n)$ als Produkt von drei einstelligen Faktoren darstellen lassen.
-
  - $QP(n) = 128 = 4 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 8 \cdot 8$ alle möglichen Zahlen haben 2 als Teiler, d.h. $ggT(n;\ 90) > 1$
  - $QP(n) = 144 = 4 \cdot 4 \cdot 9 = 2 \cdot 8 \cdot 9$ nur für 9 als Einerstelle ist $ggT(n;\ 90) = 1 \Rightarrow$ 2 Zahlen

- $QP(n) = 182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 224 = 4 \cdot 7 \cdot 8$ nur für 7 als Einerstelle ist $ggT(n;\ 90) = 1 \Rightarrow$ 2 Zahlen
- $QP(n) = 242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 422 = 2 \cdot 211$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 218 = 2 \cdot 109$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 281 = 1 \cdot 281$ keine Möglichkeit

- $QP\big(QP(n)\big) = 3^4$ und $ggT(n;\ 90) = 1$. Die Ziffern von $QP(n)$ sind somit sämtlich Potenzen von 3 (ggf. einschließlich des Exponenten 0). Wir untersuchen die möglichen Kombinationen, inwieweit sich diese Zahlen QP(n) als Produkt von drei einstelligen Faktoren darstellen lassen.

  - $QP(n) = 199 = 1 \cdot 199$ keine Möglichkeit
  - $QP(n) = 339 = 3 \cdot 113$ keine Möglichkeit
  - $QP(n) = 393 = 3 \cdot 131$ keine Möglichkeit

- $QP\big(QP(n)\big) = 4^4 = 2^8$ und $ggT(n;\ 90) = 3$. Die Ziffern von $QP(n)$ sind somit sämtlich Potenzen von 2 (einschließlich des Exponenten 0). Wir untersuchen die möglichen Kombinationen, inwieweit sich diese Zahlen $QP(n)$ als Produkt von drei einstelligen Faktoren darstellen lassen.

  - $QP(n) = 488 = 8 \cdot 61$ keine Möglichkeit

Die Zahlen 289, 829, 487 und 847 sind Lösungen der Aufgabe, wie die Proben bestätigen:

$$QP\big(QP(289)\big) = QP(2 \cdot 8 \cdot 9) = QP(144) = 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16;\ ggT(289; 90) = 1$$
$$QP\big(QP(829)\big) = QP(8 \cdot 2 \cdot 9) = QP(144) = 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16;\ ggT(829; 90) = 1$$
$$QP\big(QP(487)\big) = QP(4 \cdot 8 \cdot 7) = QP(224) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16;\ ggT(487; 90) = 1$$
$$QP\big(QP(847)\big) = QP(8 \cdot 4 \cdot 7) = QP(224) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16;\ ggT(847; 90) = 1$$

❑

Aufgabe 20.15. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, so dass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $QS(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir mit 12 die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: $QS(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form 12; 1212; 12121212; 1212121212121212 usw. diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhält man durch Multiplikation mit einem Faktor der Form 100...001 die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das

Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch 100...001 $\cdot\, t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. ❑

Die Übertragung der Fragestellung auf das Querprodukt führt zu der trivialen

Aufgabe 23.16. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, sodass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $QP(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir mit 12 eine Zahl mit dieser Eigenschaft: $QP(12) = 2 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form 11…112 die geforderte Eigenschaft, denn deren Querprodukte sind stets 2 und mit 1, 2, 4 gibt es mindestens 3 Teiler. ❑

Aufgabe 23.17. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q?

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst Beispiele für solche Zahlen n.

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr.

Lässt sich mit diesen Beispielen schon der folgenden Ansatz erklären? Für $p^2 = q$ erfüllt die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^{p} 10^{2j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Wir müssen „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p-mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$-mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. ❑

Aufgabe 20.18. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit dem Querprodukt q?

Lösungshinweise: Diese Frage ist zu verneinen. Zwar gibt es für kleine q triviale Lösungen, nämlich $n = 1$ für $q = 1$, $n = 4$ für $q = 4$ und $n = 9$ für $q = 9$.

Für $q = 16$ müssten n in der Dezimaldarstellung die Ziffern 1, …, 1, 2, 8 oder die Ziffern 1, …, 1, 4, 4 vorkommen. Aber der Nachweis, dass aus diesen Ziffern keine Quadratzahl kombiniert werden kann, ist sicherlich aufwendig, oder?

Dagegen müsste für $q = 121 = 11^2$ die Zahl n in der Dezimaldarstellung die Ziffern 1, …, 1, 11, 11 haben – im Widerspruch dazu, dass Ziffern einstelligen Zahlen sind. ❑

Thema 24 – Kombinatorik

Aufgabe 24.01 – MO620942/MO621042. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man durch Umordnen der sieben Buchstaben des Worts KLAUSUR bilden, bei denen keiner der Buchstaben mehr an der vorherigen Stelle steht, also K nicht an der ersten Stelle, L nicht an der zweiten, A nicht an der dritten, U weder an der vierten noch an der sechsten, S nicht an der fünften und R nicht an der siebenten Stelle?

Lösungshinweise: Wir finden die Platzierungsmöglichkeiten durch eine systematische Untersuchung. Dazu nehmen wir an, dass nach der Umordnung die zwei Buchstaben U auf den Plätzen 1 und 2 stehen (also auf den Plätzen von K und L).

Für den Buchstaben A gibt es nunmehr 4 Möglichkeiten der Umordnung

Fall 1: A steht nach der Umordnung auf dem Platz von S (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben S 4 Möglichkeiten der Umordnung.

Fall 1.1: S steht nach der Umordnung auf dem Platz von R (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben R nach dem Umordnen noch 3 Möglichkeiten (Plätze A, U, U). Der Fall 1.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ Möglichkeiten.

Fall 1.2: S steht nach dem Umordnen nicht auf dem Platz von R (3 Möglichkeiten, Plätze A, U, U). Dann verbleiben für den Buchstaben R noch zwei Möglichkeiten. Der Fall 1.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 2: A steht nach der Umordnung auf dem Platz von R (1 Möglichkeit).

Fall 2.1: R steht nach der Umordnung auf dem Platz von S (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben S nach dem Umordnen noch 3 Möglichkeiten (Plätze A, U, U). Der Fall2.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ Möglichkeiten.

Fall 2.2: R steht nach dem Umordnen nicht auf dem Platz von S (3 Möglichkeiten, Plätze A, U, U). Dann verbleiben für den Buchstaben S noch zwei Möglichkeiten. Der Fall 2.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 3: A steht nach der Umordnung auf einem Platz von U (2 Möglichkeit).

Fall 3.1: S steht nach der Umordnung auf dem Platz von R (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben R nach dem Umordnen noch 3 Möglichkeiten (Plätze A, S, U). Der Fall 3.1 ergibt insgesamt $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 3.2: S steht nach der Umordnung nicht auf dem Platz von R (2 Möglichkeiten). Dann gibt es für den Buchstaben R nach dem Umordnen noch 2 Möglichkeiten (Plätze S, A oder U). Der Fall 3.1 ergibt insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

Alle Fälle ergeben zusammen $3 + 6 + 3 + 6 + 6 + 8 = 32$ Möglichkeiten. Nun sind noch zwei Plätze frei, auf die K und L zu platzieren sind. Da diese Wahl unabhängig von der Verteilung der Buchstaben A, S und R erfolgt, finden wir insgesamt $2 \cdot 32 = 64$ Buchstabenreihenfolgen mit UU am Anfang.

Nun gibt es $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ verschiedene Verteilungen der zwei Buchstaben U auf die Plätze 1, 2, 3, 5 und 7. Für jede dieser Verteilung finden wir mit einer ähnlichen Argumentation wie eben 64 Buchstabenreihenfolgen der geforderten Art. Alle diese Buchstabenreihenfolgen sind paarweise verschieden, so dass es insgesamt $10 \cdot 64 = 640$ Verteilungen gibt. ❑

„Traditionelle“ Wettbewerbsaufgaben mit kombinatorischen Fragestellungen beziehen sich auf die Ermittlung der Anzahl von Permutationen (also der Anordnung von Objekten in einer Reihenfolge). Es darf in der Lösungsdarstellung verwendet werden, dass es für n paarweise verschiedene Objekte (also Permutationen ohne Wiederholungen) insgesamt $n!$ verschiedene Anordnungen gibt.

Aufgabe 24.02.

a) Wie viele verschiedene Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes KLAUSUR bilden (wobei auch unsinnige und unaussprechliche Wörter zugelassen sind)?
b) Wie viele Wörter gemäß Aufgabe a) kann man bilden, wenn die Buchstaben U nicht nebeneinander stehen dürfen?

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a) An erster Stelle können wir einen von 7 Buchstaben auswählen, an zweiter Stelle einen von 6 Buchstaben usw. bis wir an siebenter Stelle nur noch einen Buchstaben zur Verfügung haben. Das sind insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ Möglichkeiten. Jedoch führt das Vertauschen der Buchstaben U in einem Wort nicht zu einem davon verschiedenen Wort, so dass jedes Wort doppelt auftritt. Somit verbleiben (5040 : 2 =) 2520 verschiedene Möglichkeiten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b) Wir legen zunächst die Platzierungen der Buchstaben U fest. Es gibt insgesamt $\binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten, die zwei Buchstaben zu platzieren, jedoch stehen davon 6 Möglichkeiten nebeneinander. Somit verbleiben für die Aufgabenstellung (21 – 6 =) 15 verschiedene Möglichkeiten, die Buchstaben zu platzieren. Nun stehen noch 5 freie Plätze zur Verfügung, die anderen 5 (paarweise verschiedenen) Buchstaben zu platzieren, was mit $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ Möglichkeiten erreicht werden kann. Somit gibt es $(15 \cdot 120 =)\ 1800$ verschiedene Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Wir berechnen zunächst die Anzahl der verschiedenen Wörter, in denen die zwei Buchstaben U nebeneinander stehen. Dafür können wir die Buchstabengruppe UU als einen eigenständigen Buchstaben auffassen, so dass es

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ Möglichkeiten gibt, verschiedene Wörter zu bilden. Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe a) erhalten wir somit für die Fragestellung (2520 – 720 =) 1800 Möglichkeiten. ❑

Erstmalig wurden Permutationen in einer Aufgabenstellung der 3. MO thematisiert.

Aufgabe 24.03 - MO030922. Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Lösungshinweise: Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. 7, 7, 7, 9, 10; 2. 7, 7, 8, 8, 10; 3. 7, 7, 8, 9, 9; 4. 7, 8, 8, 8, 9; 5. 8, 8, 8, 8, 8

und nur diese. Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so dass $120 : 6 = 20$ Möglichkeiten übrig bleiben.
2./3. Analoge Überlegungen führen zu $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 120 : 4 = 30$ Möglichkeiten.
4. Diese Konstellation entspricht der Variante 1 (20 Möglichkeiten).
5. Hierfür gibt es genau 1 Möglichkeit.

Insgesamt gibt es also 20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101 Möglichkeiten. ❑

Dieses Prinzip, die Aufgabe durch Fallunterscheidung in jeweils einfachere Situationen zu gliedern, hat sich als Lösungsstrategie vielfach bewährt, so auch in

Aufgabe 24.04 – MO490941/MO491941. Die Klasse 10b plant einen zweitägigen Ausflug zur DRK-Hütte in Altenfeld. In der Klasse 10b sind 13 Schuler (8 Jungen und 5 Mädchen). Es gibt keine Geschwisterkinder in dieser Klasse. Um die Kosten zu minimieren, haben sich fünf Väter bereit erklärt, die Schüler mit ihren Autos zur DRK-Hütte zu fahren. Die Mathematiklehrerin Frau Lustig notiert sich auf dem Elternabend die Namen der fünf Väter.

Frau Lustig stellt ihrer Klasse folgende Knobelaufgabe: Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Schüler auf die fünf Fahrzeuge gibt es, wenn man davon ausgeht, dass

in jedem Auto genau drei Plätze für Schüler zur Verfügung stehen und in jedem Auto das Kind des Vaters sitzt, der das Auto fährt?

Lösungshinweise: Die fünf Fahrer und fünf Kinder sind schon platziert, so dass in jedem Auto noch zwei Plätze frei sind. Es müssen also nur noch die restlichen 8 Personen auf diese Plätze in den fünf Autos verteilt werden. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Es gibt ein Auto, in dem zwei Plätze frei bleiben. Dies ist genau dann möglich, wenn alle anderen Autos voll besetzt sind. Um alle solchen Möglichkeiten zu erfassen, wählen wir zunächst das Auto aus, in dem zwei Plätze frei bleiben; dafür gibt es fünf Möglichkeiten. Nun legen wir für die verbleibenden Fahrzeuge eine Reihenfolge fest. Dann werden für jedes dieser Fahrzeuge zwei der noch zu verteilenden Mitfahrer ausgewählt. Beim ersten Fahrzeug sind noch 8 Personen zu verteilen; dafür gibt es $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ Möglichkeiten. Entsprechend wird bis zum letzten Auto verfahren. Anwenden der Produktregel liefert

$$5 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 5 \cdot \frac{8!}{2^4} = 12600$$

Möglichkeiten für diesen Fall.

Fall 2: Es gibt kein Auto, in dem zwei Plätze frei bleiben. Da es für die verbleibenden zehn freien Plätze nur acht Mitfahrer gibt, sind in diesem Fall drei Fahrzeuge voll zu besetzen, während in den anderen beiden Fahrzeugen jeweils ein Platz frei bleibt. Zunächst werden diese zwei Fahrzeuge ausgewählt, dafür gibt es $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ Möglichkeiten. Dann werden diese zwei Autos in eine Reihenfolge gebracht; nun wird der weitere Mitfahrer für das erste dieser zwei Fahrzeuge gesucht (8 Möglichkeiten), dann der weitere Mitfahrer für das zweite (7 Möglichkeiten).

Die drei Autos, die jeweils voll zu besetzen sind, werden nun in eine Reihenfolge gebracht; dann werden für das erste dieser drei Fahrzeuge zwei weitere Mitfahrer ausgewählt. Dafür gibt es $\frac{6\cdot 5}{2}$ Möglichkeiten. Entsprechend wird bis zum letzten Auto verfahren. Anwenden der Produktregel liefert

$$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 20 \cdot \frac{8!}{2^4} = 50400$$

Möglichkeiten für diesen Fall.

Da es keine weiteren Fälle gibt und die beiden Fälle sich gegenseitig ausschließen, erhalten wir insgesamt 12 600 + 50 400 = 63 000 Möglichkeiten. ❑

Aufgabe 24.05 – MO370931. Zur Gestaltung einer Schulfeier will die Klasse 9a ein Glücksrad bauen. Es soll 5 im Kreis angeordnete Plätze zum Aufkleben von Bildern

haben. Für die Bilder sind 5 Motive vorhanden, jedes Motiv in genügend vielen Exemplaren. Unter den Bildern auf dem Glücksrad soll es mindestens zwei geben, die voneinander verschiedene Motive zeigen, und für höchstens vier der Bilder soll gelten, dass je zwei voneinander verschiedene Motive zeigen.

Bei insgesamt wie vielen verschiedenen Verteilungen von Motiven auf die Plätze sind diese Bedingungen erfüllt? Dabei gelten zwei Verteilungen genau dann als einander gleich, wenn nach einer geeigneten Drehung des Glücksrades an jeder Stelle des Rades bei der einen Verteilung dasselbe Motiv zu sehen ist wie bei der anderen Verteilung.

Lösungshinweise: Wir können zunächst den Plätzen Nummern von 1 bis 5 reihum vergeben. Für jeden Platz haben wir 5 Motive zur Auswahl. Es gibt also bzgl. dieser Unterscheidung $5^5 = 3125$ Verteilungen.

Von ihnen haben 5 Verteilungen die Eigenschaft, auf allen Plätzen das gleiche Motiv zu zeigen. Diese erfüllen nicht die Bedingung, dass es mindestens zwei Plätze mit verschiedenen Motiven geben soll.

Außerdem gibt es unter ihnen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Verteilungen mit 5 unterschiedlichen Motiven. Diese erfüllen nicht die Bedingung, dass für höchstens vier der Bilder gelten soll, dass je zwei voneinander verschiedene Motive zeigen.

Somit erfüllen nur $(3125 - 5 - 120 =)\ 3000$ Verteilungen die Bedingungen. Jedoch sind darunter je 5 Verteilungen in dem Sinn gleich, dass sie durch Drehung ineinander überführt werden können (indem wir die Platznummer 1 durch Drehung auf die Plätze 1 bis 5 bringen). Somit gibt es $3000 : 5 = 600$ verschiedene Verteilungen für die Bilder auf dem Glücksrad. ❑

Die Aufgabe **MO371031** entsprach der Aufgabe MO370931, nur dass hier 7 Motive anstelle 5 Motiven zur Verfügung standen. Mit dieser Voraussetzung gibt es also $7^5 = 16807$ Verteilungen. Davon zeigen 7 Verteilungen das gleiche Motiv. Außerdem zeigen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2320$ Verteilungen paarweise verschiedene Motive. Somit erfüllen $(16807 - 7 - 2320 =)\ 14280$ Verteilungen die Bedingungen. Unter Berücksichtigung, dass darunter je 5 durch Drehung ineinander überführt werden können, verbleiben $14280 : 5 = 2856$ verschiedene Verteilungen.

Aufgabe 24.06 - MO570931/MO571031. Wir betrachten in dieser Aufgabe Wörter, die aus genau 11 Buchstaben bestehen; jeder dieser Buchstaben ist ein A oder ein B. Dabei ist es unerheblich, ob diese Wörter Sinn ergeben.

a) Wie viele solche Wörter gibt es?
b) Wie viele solche Wörter gibt es, die weder mit 8 gleichen Buchstaben beginnen noch mit 8 gleichen Buchstaben enden?

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a) Da es für jeden Buchstaben genau zwei Möglichkeiten gibt und diese Möglichkeiten unabhängig voneinander gewählt werden können, gibt es insgesamt $2^{11} = 2048$ solche Wörter.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b) Wenn in einem solchen Wort die ersten acht Buchstaben gleich sein sollen, dann gibt es für diese Buchstaben genau 2 Möglichkeiten und für jeden der letzten drei Buchstaben auch 2 Möglichkeiten. Es gibt also 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben beginnen. Analog gibt es genau 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben enden. Wörter, die sowohl mit acht gleichen Buchstaben beginnen als auch mit acht gleichen Buchstaben enden, sind nur diejenigen, die aus elf gleichen Buchstaben bestehen, also genau 2. Damit ist die Anzahl der gesuchten Wörter (nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion) gleich $2^{11} - 2^4 - 2^4 + 2 = 2018$. ❑

Aufgabe 24.07 – MO500941/MO501041. Wie viele verschiedene achtbuchstabige Wörter (auch sinnlose oder unaussprechliche Wörter sind erlaubt) kann man aus drei Buchstaben A, drei Buchstaben B und zwei Buchstaben C bilden, bei denen gleiche Buchstaben nie nebeneinander stehen?

Lösungshinweise: Wir nehmen eine Fallunterscheidung nach der Position der C vor und betrachten die Anzahl und die Länge der (nichtleeren) Zwischenräume zwischen den Rändern oder den C. In jedem dieser Zwischenräume haben wir höchstens zwei Möglichkeiten zur Verwendung von A und B, nämlich entweder abwechselnd beginnend mit A oder abwechselnd beginnend mit B.

Fall 1: Es gibt genau einen Zwischenraum, d. h. die C stehen am Rand. Es ergeben sich genau die zwei Möglichkeiten CABABABC und CBABABAC.

Fall 2: Es existieren genau zwei Zwischenräume, d. h. ein C steht am Rand, das andere nicht. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein C am linken Rand steht. Wir unterscheiden nun nach der Größe des ersten Zwischenraumes, die Größe des zweiten ist dadurch eindeutig bestimmt:

Fall 2.1: Wenn der erste Zwischenraum ungerade Länge hat, ergibt sich aus der Wahl seines Anfangsbuchstabens zwingend die Belegung beider Zwischenräume und für diese Wahl gibt es zwei Möglichkeiten. Weiterhin gibt es drei Möglichkeiten für die Länge des ungeraden Zwischenraumes, nämlich 1, 3 und 5. Dieser Unterfall liefert also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 2.2: Wenn der erste Zwischenraum gerade Länge hat, können wir in beiden Zwischenräumen den Anfangsbuchstaben frei wählen – für diese Wahl ergeben sich also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Darüber hinaus gibt es für die Länge des ersten Zwischenraumes zwei Möglichkeiten, nämlich 2 und 4. Dieser Unterfall liefert also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

Für den Fall, dass ein C am rechten Rand steht, erhalten wir analog die gleichen Anzahlen von Möglichkeiten. Damit liefert der 2. Fall insgesamt $2 \cdot (6 + 8) = 28$ Möglichkeiten.

Fall 3: Es gibt genau drei Zwischenräume. Wir unterscheiden nach der größten der Zwischenraumlängen, welche höchstens $6 - 1 - 1 = 4$ sein darf und mindestens 2 sein muss:

Fall 3.1: Der größte Zwischenraum hat die Länge 4. Die anderen Zwischenräume haben dann beide die Länge 1. Bei dem größten Zwischenraum können wir den Anfangsbuchstaben frei wählen, die verbleibenden unterschiedlichen Buchstaben (ein A und ein B) können wir frei auf die kleinen Zwischenräume verteilen – hierfür gibt es zusammen $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten.

Außerdem gibt es genau drei unterscheidbare Möglichkeiten, eine Zwischenraum der Länge vier und zwei Zwischenräume der Länge 1 anzuordnen. Dieser Unterfall liefert also $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten.

Fall 3.2: Der größte Zwischenraum hat die Länge 3. Ein weiterer muss dann die Länge 1 und einer die Länge 2 haben. Die Wahl des Anfangsbuchstabens im längsten Zwischenraum legt den Buchstaben im Einer-Zwischenraum fest, während der Anfangsbuchstabe im Zweier-Zwischenraum frei gewählt werden kann; insgesamt gibt es also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten.

Die Zwischenräume haben alle verschiedene Längen und können daher auf 3! = 6 verschiedene Arten angeordnet werden. Es gibt also in diesem Unterfall $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

Fall 3.3: Die größte Zwischenraumlänge ist 2. Dann haben alle Zwischenräume die Länge 2 und der jeweilige Anfangsbuchstabe kann frei gewählt werden. Hierfür gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Da die Zwischenräume gleiche Länge haben, gibt es keine voneinander unterscheidbaren Möglichkeiten, diese Zwischenräume anzuordnen.

Der 3. Fall liefert also $12 + 24 + 8 = 44$ Möglichkeiten.

Insgesamt ergeben sich damit $2 + 28 + 44 = 74$ Möglichkeiten der Verteilung. ❑

Wettbewerbsaufgaben, die den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ enthalten, erfordern zunächst die Ermittlung der Anzahl aller günstigen Fälle, die zu dem beschriebenen Ereignis passen. Mitunter ist die Berechnung der konkreten Wahrscheinlichkeiten zur Lösung der Aufgabe nicht erforderlich.

Aufgabe – MO491034. An einem Lift stehen fünf Männer und drei Frauen, um nach oben zu fahren. Mit dem Lift können immer nur zwei Personen (ein Paar) befördert

werden, so dass genau vier Fahrten benötigt werden. Die acht Personen steigen in zufälliger Reihenfolge in den Lift ein. Dabei können sowohl gleichgeschlechtliche Paare (zwei Männer oder zwei Frauen) als auch verschiedengeschlechtliche Paare (je ein Mann und eine Frau) entstehen.

a) Welche Wahrscheinlichkeit ist größer, dass mehr gleichgeschlechtliche Paare auftreten oder dass mehr verschiedengeschlechtliche Paare auftreten?
b) Ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vier zuerst oben angelangten Personen alles Männer sind, größer als 1die Wahrscheinlichkeit, dass unter den vier zuerst oben angelangten alle drei Frauen sind?

Lösungshinweise – Vorbemerkungen: Zunächst betrachten wir nur das Geschlecht und untersuchen, wie viele Möglichkeiten es gibt, verschiedene achtbuchstabige Wörter aus fünf Buchstaben M (für Männer) und drei Buchstaben F (für Frauen) zu bilden. Wir können für F $8 \cdot 7 \cdot 6$ Positionen auswählen, wobei sich aber jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1$ nicht unterscheiden. Insgesamt gibt es also $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ verschiedene Möglichkeiten, drei F auf acht Plätze festzulegen. Für die Buchstaben M sind die Plätze dann eindeutig festgelegt.

Zu jeder dieser Reihenfolge gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten, die Frauen auf die Plätze F zu verteilen. Zu jeder dieser Reihenfolge gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten, die Männer auf die Plätze M zu verteilen. Also entspricht jede dieser Reihenfolgen genau $6 \cdot 120 = 720$ gleichwahrscheinliche Reihenfolgen der Personen. Es genügt also zur Beantwortung der Fragen jeweils die oben genannten 56 Möglichkeiten der achtbuchstabigen Wörter zu betrachten.

Teilaufgabe a) Es gibt $4 \cdot 2^3 = 32$ Verteilungen mit drei verschiedengeschlechtlichen Paaren (nämlich 4 verschiedene Positionen für das MM-Paar und für die anderen Paare je 2 Positionen für das F). Wegen 56 – 32 = 24 < 32 gibt es mehr Fälle mit mehr verschiedengeschlechtlichen Paaren als Fälle mit mehr gleichgeschlechtlichen Fällen.

Teilaufgabe b) Wir betrachten alle Möglichkeiten, dass die ersten vier Personen alles Männer sind. Dann sind in diesen Fällen unter den letzten vier Personen die drei Frauen. Da wir die Möglichkeiten umkehren können, gibt es also gleichviele Reihenfolgen beider Sorten. ❑

64. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 2. bis 13. Juli 2023 in Chiba (Japan) statt. Mit 67 teilnehmenden Schülerinnen und 550 Schülern aus 112 Ländern lag die Teilnahme nahe an den bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern).

Insgesamt wurden 303 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,9% aller Teilnehmer einen Preis. Mit drei Silber- und drei Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer wieder sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 156 Punkten von 252 möglichen Punkten (61,9%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **20. Platz** erreichen (2021: 129 Punkte/12. Platz; 2022: 192 Punkte/7. Platz). Angeführt wird diese Länderliste erneut von der Volksrepublik China (240 Punkte, sechs Goldmedaillen), den USA (222 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaille) und der Republik Korea (215 Punkte, vier Gold- und zwei Silbermedaillen). Von den europäischen Ländern liegen nur Rumänien, das Vereinigte Königreich und Italien vor Deutschland.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 64. IMO[3]

Aufgabe 1. Man bestimme alle zusammengesetzten ganzen Zahlen $n > 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $d_1, d_2, \dots d_k$ mit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ alle positiven Teiler von n, dann ist d_i ein Teiler von $d_{i+1} + d_{i+2}$ für alle $1 \leq i \leq k-2$.

Aufgabe 2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei Ω der Umkreis von ABC. Ferner sei S der Mittelpunkt des Bogens CB von Ω, der A enthält. Die Senkrechte von A auf BC schneide BS in D und Ω nochmals in $E \neq A$. Die Parallele zu BC durch D schneide die Gerade BE in L. Der Umkreis des Dreiecks BDL sei mit ω bezeichnet. Der zweite Schnittpunkt von ω mit Ω sei $P \neq B$.

Man beweise, dass die Tangente an ω in P die Gerade BS auf der inneren Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ schneidet.

Aufgabe 3. Man bestimme für jede ganze Zahl $k \geqslant 2$ alle unendlichen Folgen positiver ganzer Zahlen $a_1, a_2, \dots$, für die ein Polynom P der Gestalt

$$P(x) = x^k + c_{k-1} \cdot x^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot x + c_0$$

mit nichtnegativen ganzzahligen $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ existiert, sodass

$$P(a_n) = a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_{n+k}$$

für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ gilt.

Aufgabe 4. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, sodass

[3] *Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.*

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

für alle $n = 1, 2, \ldots, 2023$ ganzzahlig ist. Man beweise, dass $a_{2023} \geqslant 3034$ gilt.

Aufgabe 5. Sei *n* eine positive ganze Zahl. Ein *Japanisches Dreieck* besteht aus $1 + 2 + \cdots + n$ Kreisen, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind, sodass für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ die i −te Zeile genau i Kreise enthält, von denen genau einer rot gefärbt ist. Ein *Ninja-Pfad* in einem Japanischen Dreieck ist eine Folge von n Kreisen, bei der man, beginnend in der obersten Reihe, wiederholt von einem Kreis zu einem der beiden unmittelbar darunterliegenden Kreise geht, bis die unterste Reihe erreicht ist. Das Bild zeigt ein Japanisches Dreieck mit $n = 6$ und einen Ninja-Pfad mit zwei roten Kreisen in diesem Dreieck.

Man bestimme, in Abhängigkeit von n, das größte k, sodass es in jedem Japanischen Dreieck einen Ninja-Pfad mit mindestens k roten Kreisen gibt.

Aufgabe 6. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Die Punkte A_1, B_1, C_1 liegen im Inneren von *ABC*, sodass

$$BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A, AC_1 = C_1B$$

und

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$$

gilt. Die Geraden BC_1 und CB_1 schneiden sich in A_2, die Geraden CA_1 und AC_1 in B_2, die Geraden AB_1 und BA_1 in C_2.

Man beweise: Wenn das Dreieck $A_1B_1C_1$ nicht gleichschenklig ist, dann enthalten die drei Umkreise der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 und CC_1C_2 zwei gemeinsame Punkte.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen erwartet werden. Dennoch könnte man sich mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1: Man finde (einige) Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.
zu Aufgabe 2: Man veranschauliche die Fragestellung in einer Zeichnung.
zu Aufgabe 3: Man löse die Aufgabe für $k = 2$.
zu Aufgabe 4: Man suche für kleine n geeignete Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, so dass alle $a_1, \ldots, a_n$ ganzzahlig sind.
zu Aufgabe 5: Man bestimme für $n = 3, 4, 5, 6$ die jeweils größten k.
zu Aufgabe 6: Man untersuche die Fragestellung für gleichseitige und gleichschenklige Dreiecke.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[4].

Zweiter Cursus

Abschnitt XVII – Die Combinationslehre

§ 259

Die Combinationslehre enthält die Gesetze, nach welchen aus beliebigen, nicht notwendig gleichartigen Einzelheiten, Gesamtheiten gebildet werden, die sich durch Form oder Inhalt unterscheiden. Die gegebenen Einzelheiten heißen Elemente, die auf ihnen gebildeten Gesamtheiten Complexionen. Die gegebenen Elemente haben eine bestimmte Reihenfolge, und werden demgemäß durch die Ordnungszahlen oder die Buchstaben in ihrer alphabetischen Reihenfolge bezeichnet, und als höhere oder niedrigere unterschieden. Gleich hohe werden mit denselben Zeichen belegt. Der Inbegriff der gegebenen Elemente in ihrer natürlichen Folge heißt der Zeiger.

Es gibt drei Arten von Complexionen:

1. Permutationen. Diese unterscheiden sich bei gleichbleibendem Inhalt nur durch die Form, d. h. durch die Anordnung aller im Zeiger enthaltenen Elemente.
2. Combinationen. Diese unterscheiden sich ohne Rücksicht auf die Form nur durch ihren Inhalt, d. h. durch die darin vorkommenden Elemente.
3. Variationen. Diese sind sowohl an Inhalt, wie in der Form, verschieden.

Beispiel. Die sämtlichen Variationen des Zeigers a, b, c sind folgende:

a, b, c	ab, ac, bc	abc
	ba, ca, cb	acb
		bac
		bca
		cab
		cba

In der obersten Zeile stehen sämtliche Combinationen, und die letzte Columne enthält die Permutationen dieses Zeigers.

a. Permutationen.

§ 260.

Ableitung sämtlicher Permutationen eines gegebenen Zeigers in lexicographischer Ordnung

Die erste Permutation ist der geordnete Zeiger selbst. Um jede folgende aus der je vorhergehenden abzuleiten, durchläuft man die letztere von rechts nach links, bis man zu

[4] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

einem Element (der Lücke) kommt, das niedriger ist, als das rechts von ihm stehende. Für dies Element setzt man das nächst höhere der durchlaufenen, während man die vor ihm stehenden unverändert, und die noch übrigen Elemente in natürlicher Ordnung folgen läßt. Die letzte Permutation ist der umgekehrte Zeiger.

Den Inbegriff sämtlicher Permutationen eines gegebenen Zeigers abcd…n bezeichnet man mit P(abcd…n).

Alle Permutationen, welche mit demselben Element anfangen, bilden eine Ordnung, Der Inbegriff der Permutationen jedes Zeigers zerfällt daher in so viele Ordnungen, als Elemente vorhanden; jede Ordnung aber, wenn man von den unveränderlichen Anfangselemente absieht, wieder in so viele Unterordnungen, als noch verschiedene Elemente da sind, u. s. w. Diese Bemerkung kommt beim praktischen Permutieren zu statten, indem man niemals in eine höhere Ordnung eintreten darf, ehe alle Permutationen der Unterordnungen vollendet sind.

Enthält der Zeiger einige gleiche Elemente, so bleibt das Permutationsverfahren dasselbe, nur die Zahl der Permutationen ist eine geringere.

§ 261.

Berechnung der Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen.

Die gesuchte Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen soll mit P(n) bezeichnet werden. Nach dem vor. § besteht der Inbegriff aller Permutationen eines Zeigers von n Ordnungen in der jedes Mal (n – 1) verschiedene Element permutiert sind. Da nun

P(1) = 1, so ist daher
P(2) = 2. P(1) = 2. 1.
P(3) = 3. P(2) = 3. 2. 1.
P(4) = 4. P(3) = 4. 3. 2. 1.
… …
P(n) = n. P(n – 1) = n. (n – 1) . . . 4. 3. 2. 1.

Also P(n) = 1. 2. 3. 4 . . . n.

Das Produkt der Faktoren-Folge aller ganzen Zahlen von 1 bis n nennt man „n“ Fakultät, und bezeichnet dieselbe mit n! Es ist daher P(n) = n!

§ 262.

Berechnung der Anzahl der Permutationen eines Zeigers von n Elementen, unter denen α einander gleiche vorkommen.

Wären alle Elemente verschieden, so wäre die Anzahl ihrer Permutationen = P(n) = n!. Da nun aber α Elemente einander gleich sind, so ist die Anzahl der wirklich verschiedenen Complexionen, die mit x bezeichnet werden möge, geringer. Man müßte nämlich in jeder dieser x Complexionen jene α Elemente, indem man sie als verschieden denkt, erst unter sich permutieren, um die P(n) Permutationen zu erhalten. Da hierdurch aus jeder der x nun $P(\alpha) = \alpha!$ Complexionen entstehen, so ist

x. $P(\alpha)$ = P(n); daher

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{P}(\alpha)} = \frac{\mathrm{n!}}{\alpha!}.$$

Kommen in einem Zeiger von n Elementen, α gleiche einer Art, β gleiche einer anderen Art, γ gleiche einer dritten Art, so ist:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{P(n)}}{\mathrm{P}(\alpha) \cdot \mathrm{P}(\beta) \cdot \mathrm{P}(\gamma)} = \frac{\mathrm{n!}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}.$$

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 6/23.

Beweisen Sie: Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ gilt.

Lösungshinweise: Zur Erfüllung der Aufgabe genügt es, geeignete Zahlenbeispiele (ohne Herleitung) anzugeben und die Richtigkeit der Gleichung zu prüfen. So ist es möglich, die Zahlen für jedes $n \geq 2$ wie folgt zu wählen:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2}, a_{n-1} = 2, a_n = n.$$

Dann gilt:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2} \cdot 2 \cdot n \qquad \square$$

Hinweis: Diese Aufgabe wurde als Aufgabe **MO221041** gestellt. Sie hatte einen thematischen Vorgänger.

Aufgabe MO201031. Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$ und

$$x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

Lösungshinweise: Wenn ein Quintupel natürlicher Zahlen die geforderte Eigenschaft hat, so folgt $x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v = x + y + z + u + v \leq 5 \cdot v$, also wegen $v > 0$

$$x \cdot y \cdot z \cdot u \leq 5$$

Wäre $y \geq 2$, so wären auch $z \geq 2$ und $u \geq 2$ und damit $x \cdot y \cdot z \cdot u \geq 8 \cdot x \geq 8$. Also finden wir $x = y = 1$ und $z \cdot u \leq 5$.

Wäre $z \geq 3$, so wären auch $u \geq 3$ und damit $z \cdot u \geq 9$. Also gilt stets $z = 1$ oder $z = 2$ sowie $u \leq 5$.

Durch systematisches Probieren finden wir alle Quintupel:

z	u	$x+y+z+u+v$	$x\cdot y\cdot z\cdot u\cdot v$	v
1	1	$4+v$	v	$4=0$ Widerspruch
1	2	$5+v$	$2v$	$v=5$
1	3	$6+v$	$3v$	$2v=6\ \Rightarrow v=3$
1	4	$7+v$	$4v$	$3v=7\Rightarrow v\notin\mathbb{N}$
1	5	$8+v$	$5v$	$4v=8\ \Rightarrow v<u$ Widerspruch
2	2	$6+v$	$4v$	$3v=6\Rightarrow v=2$

Somit haben wir insgesamt drei Quintupel mit der geforderten Eigenschaft gefunden:

$$1+1+1+2+5=10=1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot5$$
$$1+1+1+3+3=9=1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot3$$
$$1+1+2+2+2=8=1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2$$ ❑

Ergänzung: Wenden wir die Lösungsstrategie auf die Aufgabe **MO221041** an, so können wir o.B.d.A. $0<a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$ voraussetzen und erhalten zunächst $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\le n$. Für die natürliche Zahl k mit $2^{k-1}\le n<2^k$ finden wir die Werte $a_1=a_2=\cdots=a_{n-k}=1$, weil anderenfalls das Produkt $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}$ mindestens gleich 2^k und damit größer als n ist. Nun muss auch $a_{n-k+1}\le 2$ gelten, weil sonst der Wert des Teilproduktes $a_{n-k+1}\cdot a_{n-k+2}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}$ mindestens gleich 3^k und damit größer als n ist.

Durch systematisches Probieren finden wir für $a_1=a_2=\cdots=a_{n-4}=1$ verschiedene Lösungstupel. Da aber – bis auf Zeile 2 – Nebenbedingungen an n zu stellen sind (rechte Spalte), gelingt es damit nicht, allgemeingültige Regeln für alle n zu generieren.

a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\sum_{i=1}^{n}a_i$	$\prod_{i=1}^{n}a_i$	a_n
1	1	1	$(n-1)\cdot1+a_n$	a_n	$(n-1)\cdot1=0$ $\Rightarrow$ Widerspruch
2	1	1	$(n-2)\cdot1+2+a_n$	$2\cdot a_n$	n
3	1	1	$(n-2)\cdot1+3+a_n$	$3\cdot a_n$	$2\cdot a_n=n+1$ $\Rightarrow 2\mid(n+1)$, $n\ge2\cdot3-1$
p	1	1	$(n-2)\cdot1+p+a_n$	$p\cdot a_n$	$(p-1)\cdot a_n=n+p-2$ $\Rightarrow(p-1)\mid(n-1)$, $n\ge(p-2)\cdot p+2$
2	2	1	$(n-3)\cdot1+4+a_n$	$4\cdot a_n$	$3\cdot a_n=n+1$ $\Rightarrow 3\mid(n+1)$ $n\ge3\cdot2-1$
3	2	1	$(n-3)\cdot1+5+a_n$	$6\cdot a_n$	$5\cdot a_n=n+2$ $\Rightarrow 5\mid(n+2)$ $n\ge5\cdot32$

2	2	2	$(n-4)\cdot 1+6+a_n$	$8\cdot a_n$	$7\cdot a_n = n+2$ $\Rightarrow 7 \mid (n+2)$ $n \geq 7\cdot 2-2$

Beispiele:

Zeile 2: n beliebig $\quad \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2}+2+n=2\cdot n$

Zeile 3: $n=5$ $\quad 1+1+1+3+3=9=1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3$

Zeile 3: $n=7$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{5}+3+4=12=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{5}\cdot 3\cdot 4$

Zeile 4: $p=5, n=17$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{15}+5+5=25=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{15}\cdot 5\cdot 5$

Zeile 5: $n=5$ $\quad 1+1+2+2+2=8=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

Zeile 5: $n=8$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{5}+2+2+3=12=1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

Zeile 6: $n=18$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{15}+2+3+4=24=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{15}\cdot 2\cdot 3\cdot 4$

Zeile 7: $n=12$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{8}+2+2+2+2=16=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{8}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

Da in der Aufgabenstellung zwei Terme aus dem Wurzelsatz von VIETA verwendet werden, wollen wir dessen Anwendung zur Lösung prüfen. Wir nehmen also an, die gesuchten Variablen sind die n reellwertigen Lösungen eines Polynoms n-ten Grades.

Im Fall $n=2$ finden wir für die natürliche Zahl $t=a_1+a_2=a_1\cdot a_2$ die zu lösende Gleichung in der Form $a^2-ta+t=0$. Nach der Lösungsformel erhalten wir

$$a_{1,2}=\frac{t}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\cdot(t^2-4t)}=\frac{1}{2}\cdot\left(t\pm\sqrt{t^2-4t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(t\pm\sqrt{(t-2)^2-4}\right)$$

Damit die Wurzel einen ganzzahligen Wert ergibt, muss $(t-2)^2-4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl sein. Dies gelingt nur für $t=4$, denn für $t=0,1,2,3$ erhalten wir keine Quadratzahl und für $t>4$ ist der Abstand von $(t-2)^2$ zur nächstgelegenen Quadratzahl mindestens 5.

Somit ist für $n=2$ die einzige Lösung der Aufgabenstellung $(2,2)$ mit $2+2=2\cdot 2$.

Im Fall $n=3$ finden wir für die natürliche Zahl $t=a_1+a_2+a_3=a_1\cdot a_2\cdot a_3$ die zu lösende Gleichung in der Form $a^3-ta^2+sa-t=0$. Nehmen wir an, eine der drei Lösungen sei $a_1=1$. Wir führen die Partialdivison aus und erhalten die Faktorenzerlegung:

$$a^3-ta^2+sa-t=(a-1)\cdot(a^2+a\cdot(s-1+t)+s+1-t)+\frac{-2t+s+1}{a-1}$$

Nur im Fall $s=2t-1$ kann die Division ohne Rest ausgeführt werden. Damit finden wir die Faktorenzerlegung

$$a^3-ta^2+sa-t=(a-1)\cdot(a^2+a\cdot(1-t)+t).$$

Durch systematisches Probieren finden wir, dass die quadratische Funktion im rechten Klammerausdruck für $t = 3, 4, 5$ keine reellwertigen Nullstellen hat. Für $t = 6$ finden wir $a_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, also $a_2 = 2$ und $a_3 = 3$. Für $t > 6$ gilt $(t-1)^2 - 4t = t^2 - 6t + 1 = (t-3)^2 - 8$, aber der Abstand von $(t-3)^2$ zur nächstgelegenen Quadratzahl ist 7 oder mindestens 9.

Somit ist für $n = 3$ die einzige Lösung der Aufgabenstellung $(1,2,3)$ mit $1 + 2 + 3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Auch für $n > 3$ lassen sich die gegebenen Terme mit ähnlicher Argumentation auswerten mit Hilfe des Wurzelsatzes von VIETA auswerten. Aber der Aufwand wird hoch, selbst wenn man die Anzahl der Variablen mit Wert 1 richtig errät.

Monatsaufgabe[5] 9/23.

Von einer fünfstelligen ganzen Zahl wird eine bestimmte Ziffer gestrichen, so dass eine vierstellige Zahl übrig bleibt. Die fünfstellige und die neue vierstellige Zahl werden addiert und ergeben die Summe 52713.

Wie groß ist die Quersumme der ursprünglichen fünfstelligen Zahl?

Termine

Online-Seminar des Bundeswettbewerbs Mathematik 2023
13.09.2023, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Verein Bildung & Begabung e.V. Bonn
Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10121

Online-Auftaktveranstaltung 59. Wettbewerbsrunde „Jugend forscht“
13.09.2023, 17:00 bis 18:00 Uhr, Veranstalter: Jugend-forscht-Team Sachsen
Einwahl: https://jufo-sc01-greenlight01.x-net.at/b/jug-hkq-mbe-cgq

Online-Seminar Mathematik-Olympiade in Deutschland
14.09.2023, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Verein Bildung & Begabung e.V. Bonn
Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10122

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: Nach der 1. Runde der 63. MO mit Aufgabenanalysen zur Vorbereitung der 2. Runde.
21.10.2023, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (09126 Chemnitz, Reichenhainer Str. 39)
Formlose Anmeldung an bino@krz.tu-chemnitz.de

[5] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.10.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 23.02 – Quersummen und Querprodukte 3
Thema 24 – Kombinatorik 10
In alten Mathe-Büchern geblättert 20
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 6/23 22
Monatsaufgabe 9/23. 25
Termine 25

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe	Nr.	Thema	Aufgabe
8+9/2023 (Aug./Sep. 2023)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep. 2023)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

´

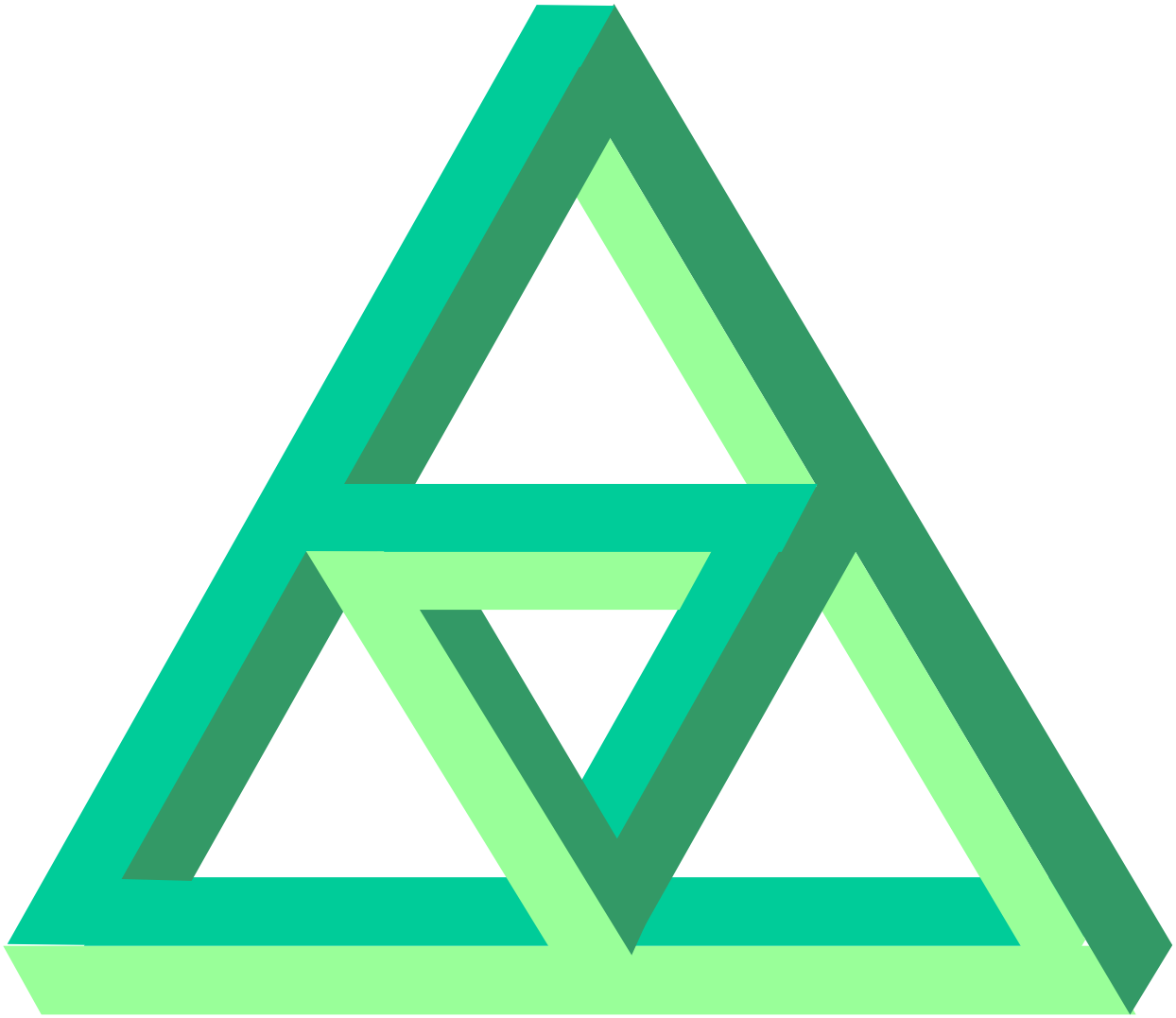
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2023 (Oktober 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir greifen im Zusammenhang mit den Aufgaben **MO620922/MO621022** und **MO620944/MO621044** das Thema 13 zu Bewegungsaufgaben erneut auf, nachdem wir bereits im Heft 1/2022 diese Thematik diskutierten. Im 62. Jahrgang der MO lässt sich verfolgen, wie eine Idee der Aufgabenstellung durch zusätzliche Fragen oder durch modifizierte Bedingungen sowohl zwischen den Klassenstufen 9 und 10 als auch zwischen den MO-Runden differenziert werden kann.

Passend zur Erfordernis, bei diesen Bewegungsaufgaben lineare Gleichungssysteme zu lösen, zeigen wir im historischen Rückblick aus einem **Mathematik-Buch von 1906**, wie Lösungsmethoden erklärt wurden.

Mit Bezug zur aktuellen Aufgabe **KZM 1-4** untersuchen wir geometrische Gerüchte – also Figuren, die sich selbst vervielfachen.

Wir berichten über die **17. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade** (MeMO), von der das sechsköpfige deutsche Team mit einer Gold- und zwei Bronzemedaillen sowie drei ehrende Erwähnungen zurückkam. Eine Besonderheit des Wettbewerbs ist neben dem typischen individuellen Leistungsvergleich ein Teamwettbewerb, in dem die Ländermannschaften in fünf Stunden acht Aufgaben zu lösen haben.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 13.02 - Bewegungsaufgaben[3]

Aufgabe 13.05 - MO620922. Eine Schnecke beginnt um 10:50 Uhr von einem Salatblatt auf kürzestem Wege zu einem 120 cm entfernten Kohlkopf zu kriechen. Um 11:05 Uhr kriecht eine Raupe auf demselben Weg in Gegenrichtung vom Kohlkopf in Richtung des Salatblatts los. Als sich Raupe und Schnecke unterwegs begegnen, ist es 12:00 Uhr.

Sie hätten sich auch um 12:00 Uhr getroffen, wenn die Schnecke erst um 11:00 Uhr und die Raupe bereits um 10:30 Uhr losgekrochen wäre.

Jedes der beiden Tiere kriecht stets mit derselben konstanten Geschwindigkeit, diese beiden Geschwindigkeiten können aber verschieden sein.

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten von Raupe und Schnecke in cm/min. Führen Sie die Probe durch.

Lösungshinweise: Wenn sich die Schnecke und die Raupe treffen, haben sie zusammen gerade die Entfernung vom Salatblatt zum Kohlkopf zurückgelegt, also 120 cm.

In der ersten Variante kriecht die Schnecke $t_s = 70$ Minuten und die Raupe $t_r = 55$ Minuten. In der zweiten Variante sind es $t_s = 60$ bzw. $t_r = 90$ Minuten. Wenn v_s und v_r die jeweiligen Geschwindigkeiten in cm/min sind, ergeben sich für die Entfernungen s in cm wegen des allgemeinen Zusammenhangs $t \cdot v = s$ die Gleichungen[4]

$$70 \cdot v_s + 55 \cdot v_r = 120\,,$$
$$60 \cdot v_s + 90 \cdot v_r = 120\,.$$

Subtrahieren wir das Siebenfache der zweiten Gleichung vom Sechsfachen der ersten, erhalten wir $-300 \cdot v_r = -120$ und damit $v_r = 0{,}4$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich $70 \cdot v_s = 98$ und damit $v_s = 1{,}4$. Die Schnecke kriecht also mit einer Geschwindigkeit von 1,4 cm/min und die Raupe mit 0,4 cm/min.

Probe: Wenn die Schnecke 70 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 1,4 cm/min kriecht, legt sie in dieser Zeit einen Weg von $70 \cdot 1{,}4 = 98$ cm zurück. Die Raupe kriecht 55 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 0,4 cm/min und legt damit einen Weg von $55 \cdot 0{,}4 = 22$ cm zurück. Wegen 98 cm + 22 cm = 120 cm treffen sie sich an einer Stelle.

[3] Man beachte zu diesem Thema auch Heft 1/2022.

[4] Es ist zulässig, die Berechnungen ohne die zugehörigen Maßeinheiten durchzuführen. Im Antwortsatz sind die Maßeinheiten aber aufzuführen.

In der zweiten Variante kriecht die Schnecke 60 Minuten lang mit der Geschwindigkeit von 1,4 cm/min und legt damit einen Weg von $60 \cdot 1{,}4 =$ cm zurück. Die Raupe kriecht 90 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 0,4 cm/min und legt jetzt einen Weg von $90 \cdot 0{,}4 = 36$ cm zurück. Auch in diesem Fall gilt 84 cm + 36 cm = 120 cm. ❑

Der Schwierigkeitsgrad für die Klassenstufe 10 wird durch eine zusätzliche Fragestellung erhöht.

Aufgabe 13.06 - MO621022. Eine Schnecke beginnt um 10:50 Uhr auf kürzestem Wege von einem Salatblatt zu einem 120 cm entfernten Kohlkopf zu kriechen. Um 11:05 Uhr kriecht eine Raupe auf demselben Weg in Gegenrichtung vom Kohlkopf in Richtung des Salatblatts los. Als sich Raupe und Schnecke unterwegs begegnen, ist es 12:00 Uhr.

Sie hätten sich auch dann um 12:00 Uhr getroffen, wenn die Schnecke erst um 11:00 Uhr und die Raupe bereits um 10:30 Uhr losgekrochen wäre.

Wann würden sich Schnecke und Raupe treffen, wenn beide um 11:00 Uhr starteten?

Gehen Sie dabei von folgender Annahme aus: Jedes der beiden Tiere kriecht stets mit derselben konstanten Geschwindigkeit, diese beiden Geschwindigkeiten können aber verschieden sein.

Lösungshinweise: Obwohl in der Aufgabestellung nicht ausdrücklich gefordert, müssen wir zunächst wie bei Aufgabe **MO620922** die Geschwindigkeiten von Schnecke (1,4 cm/min) und Raupe (0,4 cm/min) berechnen. Damit verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie 1,4 : 0,4 = 7 : 2. Bei gleichzeitigem Start legt die Schnecke also bis zum Treffpunkt $\frac{7}{9}$ der 120 cm zurück, das sind $\frac{280}{3}$ cm. Wegen $t = \frac{s}{v}$ dauert das $\frac{\frac{280}{3}}{1{,}4} = \frac{200}{3}$ Minuten bzw. 66 Minuten und 40 Sekunden. Damit treffen sich beide um 12:06:40 Uhr.

Probe: Die Raupe würde bis zum Treffpunkt $\frac{2}{9}$ der 120 cm zurücklegen, das sind $\frac{80}{3}$ cm. Wegen $t = \frac{s}{v}$ dauert das $\frac{\frac{80}{3}}{0{,}4} = \frac{200}{3}$ Minuten wie auch bei der Schnecke. ❑

Hinweis für die Korrektoren: Wird in der Schülerlösung deutlich, dass Gleichungen und Gleichungssysteme äquivalent umgeformt wurden (oft auch ohne entsprechende Zeichen), dann muss die Probe nichtzwingend durchgeführt werden und der eine Bewertungspunkt ist der Lösung des Systems zuzurechnen.

Trotz dieses Hinweises ist zu empfehlen, wenn möglich stets eine Probe durchzuführen, um auch Übertragungs- und Rechenfehler in der Lösungsdarstellung auszuschließen.

Obwohl die folgenden Aufgaben qualitativ sehr ähnlich erscheinen, besteht nun die zusätzliche Schwierigkeit, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, an welcher Stelle die zweite Begegnung stattfindet.

Aufgabe 13.07 - MO620944. Rudi und Simon gehen jede Woche auf dem Waldweg zwischen Adorf und Bedorf spazieren. Rudi wohnt in Adorf, Simon wohnt in Bedorf. Jeder geht mit seiner eigenen konstanten Geschwindigkeit daheim los bis zum anderen Ort und dann wieder zurück nach Hause.

Heute sind beide genau um 12 Uhr mittags losgegangen. Zum ersten Mal haben sie sich heute bei der alten Eiche getroffen, die genau 3 km von Adorf entfernt ist. Einige Zeit später kamen sie gleichzeitig bei der Grillhütte an, die genau 4 km von Adorf entfernt liegt.

Wie weit ist der Weg von Adorf nach Bedorf? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Entfernung zwischen beiden Orten in km mit e, die Geschwindigkeiten in km/h, mit denen sich Rudi und Simon bewegen, mit v_R und v_S, und messen die Zeiten in h. Damit können wir in Gleichungen auf Maßeinheiten verzichten.

Das erste Treffen findet statt, wenn sich beide auf dem Hinweg befinden. Rudi hat zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s_R = 3$ zurückgelegt, Simon eine Strecke der Länge $s_S = e - 3$. Es gilt also für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_1 = \frac{3}{v_R} = \frac{e-3}{v_S}$$

und folglich

$$v_S = \frac{e-3}{e} \cdot v_R \qquad (\#).$$

Beim zweiten Treffen muss Simon schon auf dem Rückweg sein, hat also zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s'_S = e + 4$ zurückgelegt. Es gibt die zwei Möglichkeiten, dass Rudi noch auf dem Hinweg ist und von Simon überholt wird, oder dass er sich auf dem Rückweg befindet und Simon ihm ein zweites Mal begegnet.

Fall 1: Rudi ist noch auf dem Hinweg und wird von Simon überholt. Dann gilt für den von Rudi zurückgelegten Weg $s'_R = 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}.$$

Wir erhalten daraus mit (#) die Gleichung

$$(e+4)\cdot v_R = 4\cdot v_S = \frac{4}{3}\cdot(e-3)\cdot v_R,$$

woraus $3\cdot(e+4) = 4\cdot(e-3)$ und deshalb $e = 24$ folgt.

Fall 2: Rudi ist bei der zweiten Begegnung mit Simon ebenfalls bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2\cdot e - 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{2\cdot e - 4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}.$$

Nun erhalten wir mit (#) die Gleichung

$$(e+4)\cdot v_R = (2\cdot e - 4)\cdot v_S = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot e-4)\cdot(e-3)\cdot v_R,$$

also $3\cdot(e+4) = (2e-4)\cdot(e-3) = 2e^2 - 10e + 12$. Diese Gleichung ist gleichbedeutend zu $2\cdot e^2 - 13\cdot e = 0$, woraus wir wegen $e > 0$ schließlich $e = 6{,}5$ finden.

Im ersten Fall beträgt die Entfernung zwischen Adorf und Bedorf 24 km und Simons Geschwindigkeit ist $\frac{24-3}{3} = 7$ Mal so hoch wie die von Rudi. (Läuft z. B. Rudi mit 1 km/h und Simon mit 7 km/h, so tritt dieser Fall auch wirklich auf, mit erstem Treffen um 15 Uhr und zweitem Treffen um 16 Uhr.)

Im zweiten Fall beträgt die Entfernung zwischen Adorf und Bedorf 6,5 km und Simons Geschwindigkeit $\frac{6{,}5-3}{3} = \frac{7}{6}$ Mal so hoch wie die von Rudi. (Läuft z. B. Rudi mit 3 km/h und Simon mit 3,5 km/h, so tritt dieser Fall auch wirklich auf, mit erstem Treffen um 13 Uhr und zweitem Treffen um 15 Uhr.) ❑

Aufgabe 13.08 - MO621044. Rudi und Simon gehen jede Woche auf dem Waldweg zwischen Adorf und Bedorf spazieren. Rudi wohnt in Adorf, Simon wohnt in Bedorf. Jeder geht mit seiner eigenen konstanten Geschwindigkeit daheim los bis zum anderen Ort und dann wieder zurück nach Hause.

Heute sind beide genau um 12 Uhr mittags losgegangen. Zum ersten Mal haben sie sich heute bei der alten Eiche getroffen, die genau 3 km von Adorf entfernt ist. Einige Zeit später kamen sie gleichzeitig bei der Grillhütte an, die genau 1 km von der alten Eiche entfernt liegt.

Wie weit ist der Weg von Adorf nach Bedorf? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Entfernung zwischen beiden Orten in km mit e, die Geschwindigkeiten in km/h, mit denen sich Rudi und Simon bewegen, mit v_R und v_S, und messen Zeiten in h. Damit können wir in Gleichungen auf Maßeinheiten verzichten.

Das erste Treffen findet statt, wenn sich beide auf dem Hinweg befinden. Rudi hat zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s_R = 3$ zurückgelegt, Simon eine Strecke der Länge $s_S = e - 3$. Es gilt also für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_1 = \frac{3}{v_R} = \frac{e-3}{v_S}$$

und folglich

$$v_S = \frac{e-3}{3} \cdot v_R \quad (\#)$$

Von der Grillhütte wissen wir nicht, ob sie 4 km oder 2 km von Adorf entfernt ist. Wenn die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt ist, könnten sich Rudi und Simon dort begegnen, wenn beide auf dem Rückweg sind; es wäre aber auch möglich, dass Rudi noch auf dem Hinweg ist und dort von Simon, der bereits auf dem Rückweg ist, überholt wird.

Wenn die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt ist, können sich Rudi und Simon dort begegnen, wenn beide auf dem Rückweg sind; es könnte aber auch sein, dass Rudi bereits auf dem Rückweg ist und Simon dort überholt, der noch auf dem Hinweg ist.

Fall 1: Die Grillhütte ist 4 km von Adorf entfernt, Rudi ist noch auf dem Hinweg und wird von Simon überholt. Dann gilt für den von Rudi zurückgelegten Weg $s'_R = 4$, für den von Simon zurückgelegten Weg $s'_S = e + 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}.$$

Somit erhalten wir die Gleichung

$$(e+4) \cdot v_R = 4 \cdot v_S = \frac{4}{3} \cdot (e-3) \cdot v_R \,,$$

woraus $3 \cdot (e+4) = 4 \cdot (e-3)$ und schließlich $e = 24$ folgt.

Fall 2: Die Grillhütte ist 4 km von Adorf entfernt, Rudi ist bei der zweiten Begegnung mit Simon ebenfalls bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2 \cdot e - 4$, $s'_S = e + 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{2 \cdot e - 4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}$. Wir erhalten die Gleichung

$$(e+4) \cdot v_R = (2 \cdot e - 4) \cdot v_S = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot e - 4) \cdot (e-3) \cdot v_R,$$

woraus $3 \cdot (e+4) = (2 \cdot e - 4) \cdot (e-3) = 2 \cdot e^2 - 10 \cdot e + 12$, und weiter $2 \cdot e^2 - 13 \cdot e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 6{,}5$ folgt.

Fall 3: Die Grillhütte ist 2 km von Adorf entfernt, Rudi und Simon sind bei der zweiten Begegnung beide bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2 \cdot e - 2$, $s'_S = e + 2$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{2 \cdot e - 2}{v_R} = \frac{e + 2}{v_S}.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$(e + 2) \cdot v_R = (2 \cdot e - 2) \cdot v_S = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) \cdot v_R,$$

woraus $3 \cdot (e + 2) = (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) = 2 \cdot e^2 - 8 \cdot e + 6$, und somit weiter $2 \cdot e^2 - 11 \cdot e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 5{,}5$ folgt.

Fall 4: Die Grillhütte ist 2 km von Adorf entfernt, Rudi überholt bei der zweiten Begegnung auf seinem Rückweg Simon, der noch auf dem Hinweg ist. Dann gilt $s'_R = 2 \cdot e - 2$, $s'_S = e - 2$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{2 \cdot e - 2}{v_R} = \frac{e - 2}{v_S}.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$(e - 2) \cdot v_R = (2 \cdot e - 2) \cdot v_S = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) \cdot v_R,$$

woraus $3 \cdot (e - 2) = (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) = 2 \cdot e^2 - 8 \cdot e + 6$, und somit weiter $2 \cdot e^2 - 11 \cdot e + 12 = (e - 4) \cdot (2 \cdot e - 3) = 0$ und wegen $e > 3$ (die alte Eiche liegt zwischen Adorf und Bedorf) schließlich $e = 4$ folgt.

Es gibt also vier Möglichkeiten für die Entfernung, nämlich 24 km oder 6,5 km oder 5,5 km oder 4 km. Alle Fälle können auch wirklich auftreten:

- Beträgt die Entfernung 24 km, liegt die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 1 km/h und Simon mit 7 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 15 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 16 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 6,5 km, liegt die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 3,5 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 15 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 5,5 km, liegt die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 2,5 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 15 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 4 km, liegt die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 1 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 14 Uhr. ❑

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [5]

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form haben wie das große Polygon selbst.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen.

> *Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“*

Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

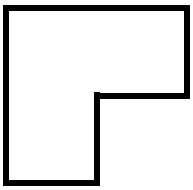


Abbildung 1a

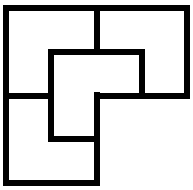


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil wir die Ausgangsfigur in vier Stücke zerlegen müssen.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem **zweiteiligen Gerücht** haben wir ständig zu tun: Wenn wir ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten zusammenfalten und dann aufschneiden, erhalten wir zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden. Bezeichnet a die Länge der langen Seite und b die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a/2}{b}, \qquad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst. Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist ebenfalls ein zweiteiliges Gerücht.

[5] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990.

Von den **dreiteiligen Gerüchten** sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn wir die Seitenlängen geeignet wählen: Da die kleinen rechtwinkligen Dreiecke ähnlich zum Ausgangsdreieck sind, betragen die Winkel 30° bzw. 60°. Bezeichnen wir die kurze Kathetenlänge mit a, die lange Kathetenlänge mit b und die Länge der Hypotenuse mit c, so gilt zunächst $b = a\sqrt{3}$ und daraus folgend entsprechend der Skizze nach Satz des PYTHAGORAS: $b^2 + (a + c)^2 = 4 \cdot b^2$. Setzen wir $a = 1$ und deshalb $b = \sqrt{3}$, so erhalten wir $c = 2$.

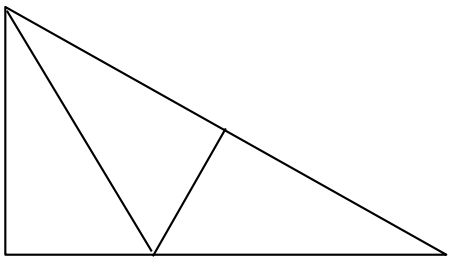
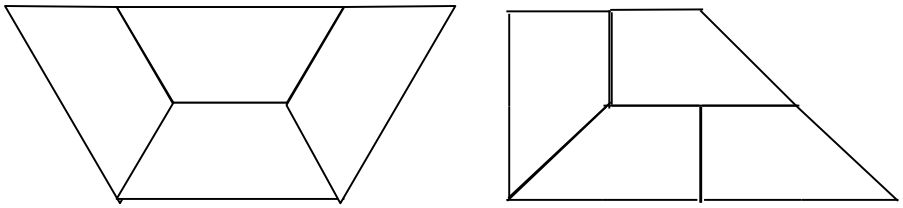
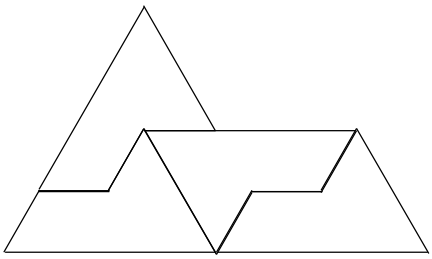


Abbildung 2

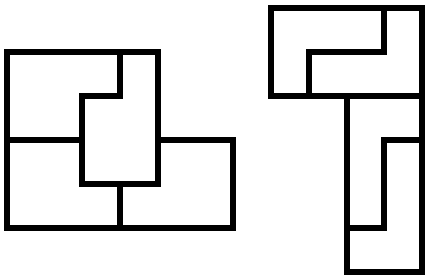
Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck gehört dazu: Indem wir die Seitenmittelpunkte miteinander verbinden, zerlegen wir das Dreieck in vier kongruente Dreiecke, die dem Ausgangsdreieck ähnlich sind. Jedes Parallelogramm gehört ebenfalls dazu (Verbindung gegenüberliegender Seitenmittelpunkte). Verhalten sich die Seitenlängen wie 1 : 2, so gibt es sogar zwei Möglichkeiten, das Parallelogramm in vier kongruente kleiner Parallelogramme zu zerlegen. Aber auch andere Vierecke lassen sich entsprechend zerlegen, beispielsweise:



Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:



Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert:



Für jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich ein Parallelogramm angeben, dass sich als ein n-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Können wir dagegen bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es für jedes vorgegebene n ein n-teiliges Gerücht wird? Für $n = 3$ und $n = 4$ wurden oben die Lösungen besprochen. Auch $n = 2$ lässt sich wie beschrieben einfach lösen. Für $n = 5$ wurde das Problem im aktuellen Jahrgang des KZM gestellt.

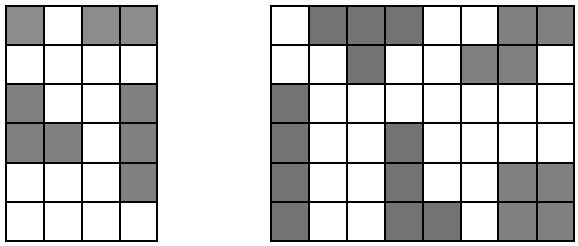
Aufgabe KZM 1-4[6]. Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck ABC ähnliche Dreiecke zerlegen lässt. (D.h. das Dreieck ABC ist ein sogenanntes fünfteiliges Gerücht). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an.

Hinweis: Es ist begründen, dass die Zerlegung die geforderte Eigenschaft hat.

Für größere n besteht die Herausforderung darin, ein rechtwinkliges Dreieck in n ebenfalls rechtwinklige Dreiecke zerlegen zu können. Dies misslingt jedoch im Allgemeinen für $n > 5$.

Haben wir ein n-teiliges Gerücht gefunden, können wir daraus ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder als n-teiliges Gerücht zerlegen.

Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn wir uns auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegen. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) im Jahr 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), können wir den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jedes natürliche n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn wir beispielsweise fordern, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es zwei verschiedene Triominos und fünf verschiedene Tetrominos.



n-minos für $n = 1, 2, 3, 4$

[6] Die Lösungsdiskussion erscheint im Heft 11/2023.

Welche Polyminos sind geometrische Gerüchte, d.h. welche Form können wir vergrößern, indem wir nur Polyminos der gleichen Form zusammensetzen?

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten können wir ein großes Quadrat zusammensetzen.
- Aus vier Domino-Steinen können wir ein 2×4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.
- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht (wie in der „Acker“-Aufgabe bzw. als 6×2 – Rechteck).
- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigen wir bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern. Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden.

Setzen wir fünf Quadrate zusammen, erhalten wir Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur vier davon sind Gerüchte.

17. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO) ist ein staatenübergreifender Mathematikwettbewerb, der 2007 erstmalig ausgerichtet wurde und an dem seit 2014 die zehn Länder Deutschland, Kroatien, Litauen, Polen, Österreich, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn teilnehmen. Er bietet Jugendlichen (in Deutschland der Jahrgangsstufen 10 und 11) eine zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) zusätzliche Möglichkeit, an internationalen Vergleichen teilzunehmen. Dabei wird jedoch die Doppel-Teilnahme an MeMO und IMO in einem Kalenderjahr per Reglement ausgeschlossen.

Jedes teilnehmende Land entsendet sechs Schüler zur MeMO. Es gibt sowohl einen Einzel- als auch einen Mannschaftswettbewerb. Jeder Teilnehmende schreibt am ersten Wettkampftag eine fünfstündige Individualklausur. Am Folgetag steht die ebenfalls fünfstündige Teamklausur auf dem Programm. Die vier Aufgabenstellungen des Einzelwettbewerbs und die acht Probleme für die Teamentscheidung orientieren sich im Schwierigkeitsgrad am Niveau der IMO. Es sind je Aufgabe 8 Punkte möglich. Wie auch zur IMO wird die siebentägige Veranstaltung von einem reichhaltigen Exkursionsprogramm umrahmt.

In diesem Jahr fand die MeMO vom 21. bis 27. August 2023 in Strečno (Slowakei) statt. Zu den sechs deutschen Teilnehmenden gehörte Jieoh Ahn vom Nexö-

Gymnasium Dresden (Olympiadeklasse 11). Insgesamt wurden 4 Gold-, 10 Silber- und 17 Bronze-Medaillen vergeben. Zusätzlich erhielten 20 Teilnehmende, die es nicht auf einen Medaillenplatz schafften, aber bei mindestens einer Aufgabe die volle Punktzahl erreichten, eine ehrende Erwähnung. Nur ein Starter aus Polen schaffte im Individualwettbewerb die Idealpunktzahl 32. Verwenden wir für die Länderwertung den Modus der IMO, die Platzierung anhand der Summe der sechs Einzelleistungen festzulegen, erreichte Deutschland mit 113 von 198 möglichen Punkten den Platz 5 (2022: 104 Punkte/Platz 2; 2021: 59 Punkte/Platz 4).

Platz	2023	Punkte	Gold	Silber	Bronze	Ehrende Erwähnung
1	Ungarn	146	1	4	-	1
2	Polen	133	2	-	3	1
3	Kroatien	122	-	3	1	2
4	Schweiz	114	-	2	2	-
5	Deutschland	113	1	-	2	3
6	Österreich	112	-	-	4	2
7	Slowakei	107	-	-	3	3
8	Slowenien	88	-	1	-	4
9	Tschechien	79	-	-	1	3
10	Litauen	72	-	-	1	1

Im Teamwettbewerb können insgesamt 64 Punkte erreicht werden. Das deutsche Team kam auf Platz 7 (nach 2021/47 Punkte und 2022/37 Punkte mit jeweils Platz 6).

Platz	Team	Punkte
1	Polen	55
2	Ungarn	47
3	Tschechien	37
3	Kroatien	37
5	Schweiz	34
6	Slowakei	25
7	Deutschland	22
8	Slowenien	21
9	Litauen	18
10	Österreich	16

Turnusgemäß wurde nach der 8. MeMO 2014 in Dresden die 19. MeMO wieder nach Deutschland vergeben[7]. Sie wird vom 25. bis 31. August 2025 in der Kulturhauptstadt Europas Chemnitz stattfinden.

[7] Pandemie-bedingt wurde die 14. MeMO 2020 virtuell durchgeführt und damit keinem Veranstalterland zugeordnet.

Aufgaben der 17. MeMO

Aufgabe I[8]–1. Sei R die Menge aller reellen Zahlen. Bestimme für jedes Paar (α, β) nichtnegativer reeller Zahlen, mit der Eigenschaft $\alpha + \beta \geq 2$, alle Funktionen $f : R \to R$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y.$$

Aufgabe I–2. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, n Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre $2n$ Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau k andere Sehnen schneidet, wobei:

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Bemerkung: Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

Aufgabe I–3. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis ω von ABC berühre die Seite BC im Punkt D. Wir bezeichnen mit E und F diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90°$ gelten. Die Geraden DE und DF schneiden ω jeweils ein weiteres Mal in den Punkten E' bzw. F'.

Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

Aufgabe I–4. Seien n und m zwei positive ganze Zahlen. Wir nennen eine Menge S positiver ganzer Zahlen (n, m)-*gut*, falls sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(i) Es gilt $m \in S$.
(ii) Für jedes $a \in S$ sind auch alle positiven ganzen Teiler von a Elemente von S.
(iii) Für alle paarweise verschiedenen Zahlen $a, b \in S$ gilt auch $an + bn \in S$.

Bestimme alle Paare (n, m), für die die Menge aller positiven ganzen Zahlen die einzige (n, m)-gute Menge ist.

Aufgabe T[9]–1. Seien Z die Menge aller ganzen Zahlen und $Z_{>0}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen.

(a) Eine Funktion $f : Z \to Z$ heiße *Z-ilinisch*, falls für alle $a, b \in Z$ die Gleichung $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ gilt. Bestimme die größtmögliche Anzahl paarweise verschiedener Werte unter $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, wobei f eine Z-ilinische Funktion ist.

[8] I - Individualwettbewerb (Arbeitszeit: 5 Stunden)
[9] T – Teamwettbewerb (Arbeitszeit: 5 Stunden)

(b) Eine Funktion $f : Z_{>0} \to Z_{>0}$ heiße $Z_{>0}$-*ilinisch*, falls für alle $a, b \in Z_{>0}$ die Gleichung $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ gilt. Bestimme die größtmögliche Anzahl paarweise verschiedener Werte unter $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, wobei f eine $Z_{>0}$-ilinische Funktion ist.

Aufgabe T–2. Seien a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $abcd = 1$. Zeige, dass

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4$$

gilt, und bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), für die Gleichheit gilt.

Aufgabe T–3. Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8 × 8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen stehen.

Aufgabe T–4. Sei $c \geq 4$ eine gerade ganze Zahl. In einer Fußball-Liga hat jedes Team ein Heim- und ein Auswärts-Trikot. Jedes Heim-Trikot hat genau zwei verschiedene Farben, und jedes Auswärts-Trikot ist einfarbig. Das Auswärts-Trikot eines Teams darf keine der Farben seines Heim-Trikots haben. Für alle Trikots in der Liga werden insgesamt höchstens *c* verschiedene Farben verwendet. Falls zwei Teams dieselben zwei Farben auf ihrem Heim-Trikot haben, dann haben ihre Auswärts-Trikots verschiedene Farben.

Wir sagen, ein Paar von Trikots *beißt sich*, wenn eine Farbe auf beiden Trikots vorkommt. Angenommen, für jedes Team X in der Liga gebe es kein Team Y in der Liga, sodass sich das Heim-Trikot von X mit beiden Trikots von Y beißt.

Bestimme die größtmögliche Anzahl von Teams in der Liga.

Aufgabe T–5. Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ ohne rechte Innenwinkel. Es gebe Punkte P, Q, R und S so auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA, dass $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$ und $PR \perp CD$ gelten. Außerdem sei angenommen, dass sich die drei Geraden PR, SQ und AC in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Zeige, dass die Punkte P, Q, R und S auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe T–6. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Sei J der Mittelpunkt des A-Ankreises von ABC. Sei D der Fußpunkt des Lotes von J auf die Gerade BC. Die Innenwinkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle BDJ$ und $\sphericalangle JDC$ schneiden die Geraden BJ bzw. JC in X bzw. Y. Die Strecken XY und JD schneiden sich in P. Sei Q der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade BC.

Zeige, dass die Innenwinkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle QAP$ senkrecht auf die Gerade XY steht.

Bemerkung: Der A-Ankreis des Dreiecks ABC ist derjenige Kreis außerhalb des Dreiecks, der die Geraden AB und AC und die Strecke BC berührt.

Aufgabe T–7. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die es positive ganze Zahlen $a > b$ mit

$$n = \frac{4ab}{a-b}$$

gibt.

Aufgabe T–8. Seien A und B positive ganze Zahlen. Wir betrachten eine Folge positiver ganzer Zahlen $(x_n)_{n\geq 1}$, für die

$$x_{n+1} = A \cdot ggT(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt. Zeige, dass in dieser Folge nur endlich viele verschiedene Werte vorkommen.

Bemerkung: Dabei bezeichnet $ggT(a,b)$ den größten gemeinsamen Teiler zweier positiver ganzer Zahlen a und b.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten, wie sie in Thema 13.2 zu lösen sind, behandelten bereits die BABYLONIER um 2000 v. Chr., ohne jedoch allgemeine Lösungstheorien zu nutzen. Die erste systematische Untersuchung von linearen Gleichungssystemen wird GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) zugeschrieben. Seine Ergebnisse wurden zu Lebzeiten jedoch nicht veröffentlicht. CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) betrachtete lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang mit astronomischen Problemen. Im Jahr 1811 entwickelte er dafür den nach ihm benannten Algorithmus. Diese Lösungsmethoden werden schon seit über 100 Jahre so wie heute an Schulen gelehrt.

Dr. E. Bardeys
Arithmetiſche Aufgaben nebſt Lehrbuch der Arithmetik
Vorzugsweiſe für Realſchulen, höhere Bürgerſchulen und verwandte Anſtalten.
Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906.[10]

Zweiter Teil. Algebra (Beſtimmungsgleichungen)

XVIII. Gleichungen erſten Grades mit mehreren Unbekannten

[10] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigen Schrift gesetzt.

A. Theorie

I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y heißt vom ersten Grad, wenn sie auf die Form gebracht werden kann $ax + by = c$. Aus einer einzigen derartigen Gleichung lassen sich die Unbekannten x und y nicht bestimmen. Man braucht hierzu vielmehr zwei Gleichungen zwischen denselben Unbekannten. Beide Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein, d. h. die eine Gleichung darf keine bloße Folge der anderen sein. Zwei Gleichungen, durch welche zwei Unbekannte bestimmt werden können, heißen ein *System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten*. Ihre Zusammengehörigkeit wird durch senkrechte Striche bezeichnet.

Um ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, sucht man auf denselben zunächst eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten. Man muß daher die eine Unbekannte fortschaffen oder *eliminieren*. Diesem Zwecke dienen drei Methoden: 1) die Additionsmethode, 2) die Einsetzungsmethode, 3) die Gleichsetzungsmethode.

1. Die **Additionsmethode**.

a) Spezialfälle: ...

b) Im allgemeinen besteht die Additionsmethode darin, daß man die Gleichungen mit solchen möglichst kleinen Faktoren multipliziert, daß die Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten entgegengesetzt gleich werden, so daß bei der Addition (oder Subtraktion) der Gleichungen diese Unbekannte herausfällt.

Man eliminiert zweckmäßig diejenige Unbekannte, welche die kleinsten Koeffizienten hat. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = \ 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{I}8 \ \text{I} + 7 \\ \text{I}3 \ \text{I} - 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 40x & +24y & = 168 \\ 21x & -24y & = \ 15 \\ \hline 61x & & = 183 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 35x & +21y & = 147 \\ -35x & +40y & = -25 \\ \hline & 61v & = 122 \end{array}$$

$$x = 3 \qquad y = 2$$

Hat man x gefunden, so kann man y auch ermitteln, indem man den Wert x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzt. So verwandelt sich die erste Gleichung für $x = 3$ in

$15 + 3y = 21$, woraus folgt $y = 2$.

2. Die **Einsetzungsmethode** besteht darin, daß man die eine Gleichung nach der einen Unbekannten auflöst und den gefundenen Ausdruck für dieselbe in die zweite Gleichung einsetzt. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = \ 5 \end{array}\right|$$

Auf der ersten Gleichung folgt $y = \frac{21-5x}{3}$; dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$7x - 8 \cdot \frac{21 - 5x}{3} = 5$$
$$21x - 168 + 40x = 15$$
$$61x = 183$$
$$x = 3$$
$$y = \frac{21 - 5x}{3} = \frac{21 - 15}{3} = 2.$$

3. Die **Gleichsetzungsmethode** besteht darin, daß man beide Gleichungen nach derselben Unbekannten auflöst und die für dieselben gefundenen Ausdrücke gleich setzt. Beispiel:

$$\left|\begin{matrix} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = \ \ 5 \end{matrix}\right|$$
$$y = \frac{21 - 5x}{3} \qquad y = \frac{7x - 5}{8}$$
$$\frac{21 - 5x}{3} = \frac{7x - 5}{8}$$
$$168 - 40x = 21x - 15$$
$$x = 3$$
$$y = \frac{21 - 5x}{3} = \frac{21 - 15}{3} = 2.$$

4. **Einführung neuer Unbekannten.** Bei Systemen von Gleichungen wie

$$\left|\begin{matrix} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{matrix}\right|$$

setze man $\frac{1}{x} = u$ und $\frac{1}{y} = v$ und berechne zunächst u und v. Gleiches gilt von Systemen wie

$$\left|\begin{matrix} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2a \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2b \end{matrix}\right|.$$

B. Theorie

[Es folgen 131 Aufgaben, darunter:]

40. $\left|\begin{matrix}15x+16y=\ 70\\35x-24y=116\end{matrix}\right|$ 83. $\left|\begin{matrix}ax+by=e\\mx-ny=0\end{matrix}\right|$

110. $\left|\begin{matrix}\frac{1}{2x-3y}=\frac{9}{3x-2y}\\\frac{1}{2x-9}=\frac{9}{4y-3}\end{matrix}\right|$ 131. $\left|\begin{matrix}\frac{4x-3y+19}{4}-\frac{x-2y+9}{6}=x\\\frac{5x-4y+21}{6}-\frac{3x-2y-2}{9}=y\end{matrix}\right|$

Termine

“Jugend forscht” - Online-Veranstaltungsreihe „Wissenschaft: LIVE!“
Am 12.10.2023, 15:30 bis 16:45 Uhr, referiert Dr. DINA DECHMANN vom Max-Planck-Institut für Verhaltensbiologie zum Thema Energieeffizienz „Energie sparen leicht gemacht – warum Spitzmäuse im Winter schrumpfen“. Eine Anmeldung ist unter https://www.max-wissen.de/slide/vortragsreihe-zu-den-max-heften/ erforderlich.

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: Nach der 1. Runde der 63. MO mit Aufgabenanalysen zur Vorbereitung der 2. Runde (detailliertes Programm unter http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
21.10.2023, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. NORMAN BITTERLICH, zu Gast an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (09126 Chemnitz, Reichenhainer Str. 39). Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

“Jugend forscht” - Online-Veranstaltungsreihe „Wissenschaft: LIVE!“
Am 14.11.2023, 15:30 bis 16:45 Uhr, referiert Nobelpreisträger Prof. Dr. BENJAMIN LIST vom Max-Planck-Institut für Kohlenforschung und stellt die Bedeutsamkeit organischer Katalysatoren für die Chemie vor: „Magische Moleküle – organische Katalysatoren beflügeln die Chemie“. Eine Anmeldung ist unter https://www.max-wissen.de/slide/vortragsreihe-zu-den-max-heften/ erforderlich.

Am 30.11.2023 ist Anmeldeschluss für die Teilnahme an der 59. Wettbewerbsrunde von „Jugend forscht“ unter dem Motto „Mach Dir einen Kopf“ (https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular).

Monatsaufgabe 10/2023[11]

Wir nennen eine positive ganze Zahl N infektiös, wenn es 1000 aufeinanderfolgende nichtnegative ganze Zahlen gibt, sodass die Summe aller ihrer Ziffern N ergibt.

Bestimme alle infektiösen positiven ganzen Zahlen.

[11] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.11.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 13.02 - Bewegungsaufgaben 3
Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen 9
17. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade 12
Aufgaben der 17. MeMO 14
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Termine 19
Monatsaufgabe 10/2023 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[12]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

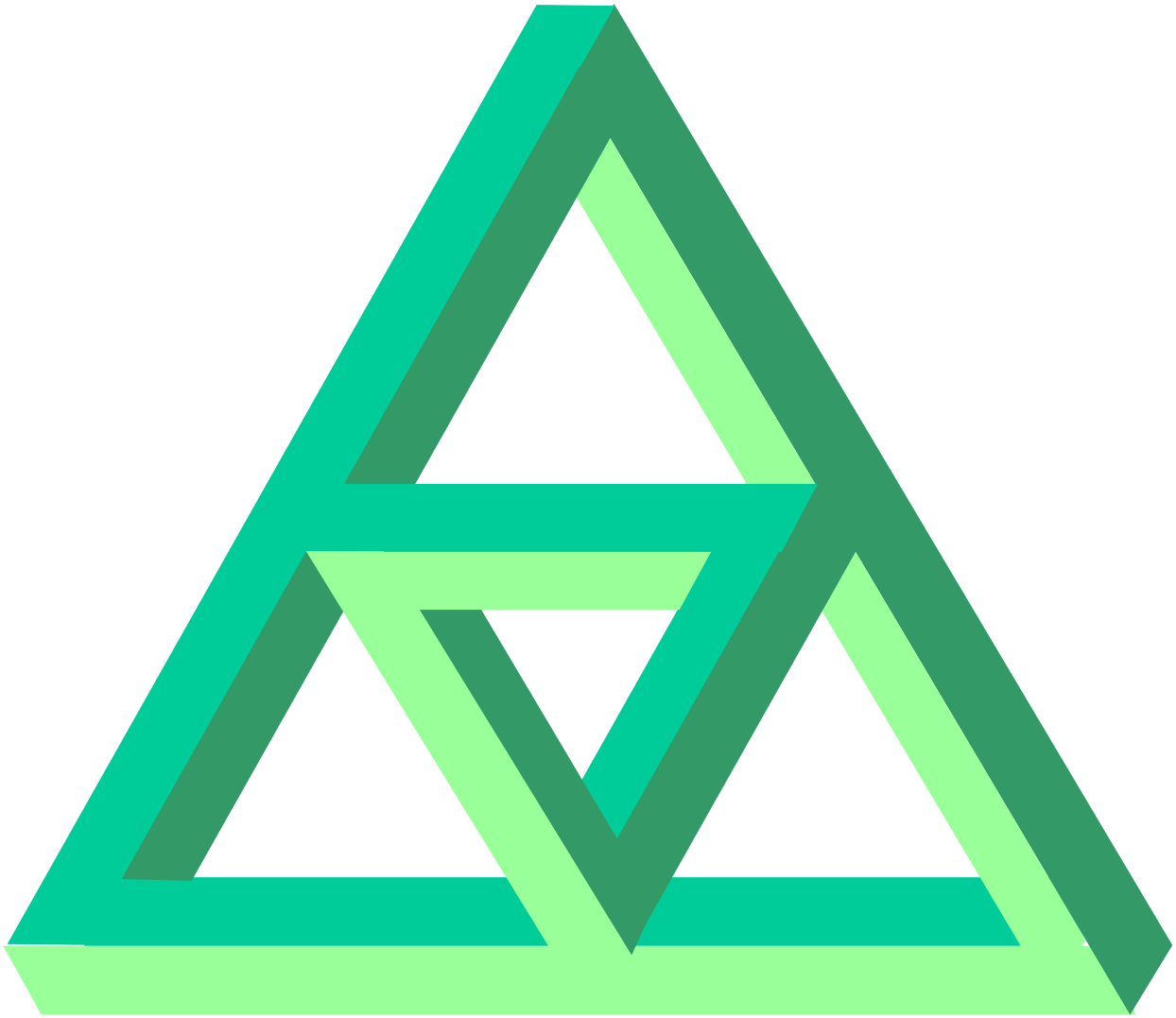
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 11/2023 (November 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Im Rückblick auf die 1. Runde der 63. Mathematik-Olympiade greifen wir die Hinweise in der Einleitung zur Aufgabe **MO631014** auf und diskutieren Gleichungen mit Wurzelausdrücken. Wir konzentrieren uns besonders darauf, Beschränkungen der Lösungsmenge frühzeitig zu erkennen, um nur äquivalente Umformungen durchzuführen und somit Scheinlösungen zu umgehen.

Wir vertiefen die Aufgabe **MO631015** und erläutern Lösungsstrategien für geometrische Örter. Dabei ist die Lösungsfindung ein wichtiger Schritt, denn erst wenn wir die gesuchte Punktmenge gut beschreiben können, werden die erforderlichen Nachweise gelingen.

In Bezug zu den Aufgaben mit Wurzelausdrücken schauen wir in ein **Rechenbuch von 1550**, in dem das schriftliche Wurzelziehen an einem Beispiel erläutert wird.

Wir blicken auf das **2. Präsenzseminar** zurück, das am 28. Oktober 2023 an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz stattfand.

Zudem stellen wir mit **„Girls Tandem“** ein attraktives Angebot der Technischen Universität Chemnitz für Schülerinnen vor, sich mit Studienfach und -ort frühzeitig vertraut zu machen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken

Um eine Gleichung zu lösen, bei der die Lösungsvariablen im Radikanden einer Wurzel vorkommen, ist es empfehlenswert, die Gleichung zu quadrieren. Zuvor sollten wir aber immer analysieren, ob aus der gegebenen Gleichung Einschränkungen für die Variablen abgeleitet werden können. Dabei beachten wir, dass ein Wurzelausdruck $\sqrt{a}$ nur für $a \geq 0$ definiert ist und stets $\sqrt{a} \geq 0$ gilt.

Für eine Gleichung wie $\sqrt{2 \cdot x + 1} = -7$ erkennen wir sofort, dass wegen der negativen rechten Seite keine Lösung existieren kann. Quadrieren wir dennoch (fälschlicherweise!), erhalten wir $2 \cdot x + 1 = 49$, also $x = 24$. Bei einer Probe stellen wir durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung (nicht in eine bereits abgeleitete Zwischengleichung!) fest, dass dies keine Lösung ergibt. Dieses Beispiel erinnert uns daran, dass Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist. Es kann zu Scheinlösungen führen, die durch eine Probe ausgeschlossen werden können.

Aufgabe 25.01. Betrachten wir die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{x - 6} = \sqrt{2 \cdot x - 2}$. Es muss $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Beide Seiten sind offensichtlich nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und Zusammenfassen äquivalent umformen. Wir erhalten $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 6} = 2$. Wieder sind beide Seiten positiv (da keiner der beiden Faktoren 0 sein kann) und wir können erneut quadrieren. Dies führt nun zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6 \cdot x - 4 = 0$. Wir lösen sie mit der bekannten Lösungsformel und erhalten die Lösungen

$$x_1 = 3 - \sqrt{13} \text{ und } x_2 = 3 + \sqrt{13}\,.$$

Wegen $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13}$ finden wir $x_1 = 3 - \sqrt{13} < 0 < 6$ und können wegen obiger Einschränkung für Lösungen diesen Wert ausschließen – es handelt sich also um eine Scheinlösung.

Da wir darauf geachtet haben, dass alle Umformungen äquivalent waren, erhalten wir mit x_2 die Lösung der Gleichung. Dennoch ist es ratsam, eine Probe durchzuführen, um Ungenauigkeiten in den Umformungen auszuschließen. Dabei genügt eine numerische Auswertung mit dem Taschenrechner nicht, da sich auf diese Weise niemals die exakte Gleichheit von

$$\sqrt{\sqrt{13} + 3} + \sqrt{\sqrt{13} - 3} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{13} + 4}$$

zeigen lässt. Um die Gleichheit zu zeigen, quadrieren wir und erhalten die Beziehung

$$\left(\sqrt{\sqrt{13} + 3} + \sqrt{\sqrt{13} - 3}\right)^2 = 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{\left(\sqrt{13} + 3\right) \cdot \left(\sqrt{13} - 3\right)}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{\sqrt{13}^2 - 3^2} = 2 \cdot \sqrt{13} + 4$$

Da für zwei Zahlen $A, B > 0$ mit $A = B$ auch $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ gilt, haben wir x_2 als Lösung bestätigt. ❑

Aufgabe 25.02 – MO631014.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2 \cdot x - 14}.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-7}.$$

Lösungshinweise zu Teil a): Da die gegebene Gleichung sehr ähnlich zum zweiten Beispiel im Einleitungstext erscheint, können wir die dargestellte Lösungsidee übernehmen. In der Gleichung $\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2 \cdot x - 14}$ muss $x \geq 7$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion folgt aus $x > x - 6$ auch $\sqrt{x} > \sqrt{x-6}$. Beide Seiten sind deshalb nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und Zusammenfassen äquivalent umformen. Wir erhalten

$$x - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} + x - 6 = 2 \cdot x - 14 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 4.$$

Wieder sind beide Seiten positiv (da für positive x keiner der beiden Faktoren negativ sein kann) und wir können erneut quadrieren. Dies führt nun zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6 \cdot x - 16 = 0$. Wir lösen sie mit der bekannten Lösungsformel und erhalten

$$x_1 = 3 - \sqrt{25} = -2 \text{ und } x_2 = 3 + \sqrt{25} = 8\,.$$

Wir erkennen $x_1 = -2 < 7$ und können wegen obiger Einschränkungen für Lösungen diesen Wert ausschließen – es handelt sich also um eine Scheinlösung.

Da wir darauf geachtet haben, dass alle Umformungen äquivalent waren, erhalten wir mit x_2 die Lösung der Gleichung. Dennoch führen wir eine Probe durch und bestätigen x_2 als Lösung:

$$\sqrt{8} - \sqrt{8-6} = 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 8 - 14}$$

Wir haben also x_2 als Lösung bestätigt.

Lösungshinweise zu Teil b): Nur für $x \geq 7$ sind alle Radikanten nichtnegativ, so dass alle Wurzelausdrücke definiert sind. Zudem sind alle Werte der Wurzel nicht negativ, so dass wir mit Quadrieren und anschließendem Zusammenfassen äquivalent umformen können. Wir erhalten

$$x+5+2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-2}+x-2=x+14+2\cdot\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}+x-7$$
$$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-2}=2+\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}$$

Wieder sind beide Seiten nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und anschließendem Zusammenfassen weiter äquivalent umformen:

$$(x+5)\cdot(x-2)=4+4\cdot\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}+(x+14)\cdot(x-7)$$
$$x^2+3x-10=x^2+7x-94+4\cdot\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}$$
$$-x+21=\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung stets nichtnegativ ist, legen wir die zusätzliche Einschränkung $x\leq 21$ fest. Dann können wir wieder mit Quadrieren und anschließendem Zusammenfassen weiter äquivalent umformen:

$$x^2-42\cdot x+441=x^2+7\cdot x-98$$
$$49\cdot x-539=0$$
$$x=11$$

Obwohl wir äquivalent umgeformt haben und alle Einschränkungen berücksichtigten, führen wir die Probe durch:

$$\sqrt{11+5}+\sqrt{11-2}=4+3=5+2=\sqrt{11+14}+\sqrt{11-7}$$

Wir können also $x=11$ als Lösung bestätigen. ❑

Aufgabe 25.03 – MO5541035. Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung $\sqrt{x+1}-\sqrt{2\cdot x-4}=2$ erfüllt ist.

Hinweis: Damit die Gleichung gelten kann, müssen insbesondere alle Wurzeln definiert sein.

Lösungshinweise: Nach einigen Versuchen zur Lösungsfindung stellen wir fest, dass die gesuchte Menge leer ist. Entsprechend dem Hinweis zum Aufgabentext finden wir vorab die Einschränkung $x\geq 2$, damit die Wurzeln definiert sind. In

$$\sqrt{x+1}=2+\sqrt{2\cdot x-4}$$

sind beide Seiten der Gleichung nicht negativ. Quadrieren und Zusammenfassen dieser Gleichung sind also äquivalente Umformungen und liefert nacheinander

$$x+1=4+4\cdot\sqrt{2\cdot x-4}+2\cdot x-4$$
$$-x+1=4\cdot\sqrt{2\cdot x-4}$$

Wegen der Einschränkung $x\geq 2$ ist aber $-x+1\leq -1$, d.h. der Wurzelausdruck müsste negativ sein. Dies widerspricht der Wurzeldefinition, somit kann es kein x geben, dass die geforderte Gleichung erfüllt. ❑

Hinweis: Erkennen wir die Unlösbarkeit an dieser Stelle nicht, würden wir wie üblich quadrieren und erhalten die quadratische Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$. Wir ermitteln mit der bekannten Lösungsformel die Lösungen

$$x_{1/2} = 17 \pm \sqrt{17^2 - 65} = 17 \pm \sqrt{224} = 17 \pm 4 \cdot \sqrt{14}$$

Verwenden wir „heimlich“ einen Taschenrechner, finden wir

$$x_1 > x_2 = 17 - 4 \cdot \sqrt{14} > 17 - 14.96663 > 2$$

Beide Werte sind also im zulässigen Bereich. Nun müssen wir noch die zeitaufwendige Probe durchführen, um zu erkennen, dass beide Werte Scheinlösungen sind und die geforderte Gleichung nicht erfüllen.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2 \cdot x - 4} = 2$$
$$\sqrt{18 \pm 4 \cdot \sqrt{14}} - \sqrt{30 \pm 8 \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\left(2 \pm \sqrt{14}\right)^2} - \sqrt{\left(4 \pm \sqrt{14}\right)^2}$$
$$\left|2 \pm \sqrt{14}\right| - \left|4 \pm \sqrt{14}\right| = \sqrt{14} \pm 2 - 4 \mp \sqrt{14} \neq 2$$

❑

Aufgabe 25.04 – MO601024.

a) Ermitteln Sie alle Paare positiver Zahlen (x, y), für welche die Gleichung

$$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} = x + y$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass für alle positiven Zahlen x und y die Ungleichung

$$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} \geq x + y$$

gilt.

Lösungshinweise zu Teil a): Wir führen nacheinander die folgenden Umformungsschritte durch:

$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} = x + y$	I quadrieren
$(x^2+1) \cdot (y^2+1) = x^2 + 2 \cdot xy + y^2$	I ausmultiplizieren
$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = x^2 + 2 \cdot xy + y^2$	I $-x^2 - 2 \cdot xy - y^2$
$x^2y^2 - 2 \cdot xy + 1 = 0$	I binomische Formel
$(xy - 1)^2 = 0$	
$xy = 1$	

Eine notwendige Bedingung für ein Paar (x, y) positiver Zahlen, Lösung der Gleichung zu sein, ist also $y = \frac{1}{x}$.

Jedes solche Paar $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ mit $x > 0$ ist aber auch Lösung, denn für ein solches Paar gilt[3]:

$$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} = \sqrt{(x^2+1)\,\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \sqrt{(x^2+1)\,\cdot\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{x}$$

Wegen $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + y$ sind die Lösungen also genau alle Paare (x, y) der Form $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ mit $x > 0$.

Lösungshinweise zu Teil b)[4]: Stets gilt $(xy-1)^2 \geq 0$. Daraus folgt nach Ausmultiplizieren $x^2y^2 - 2 \cdot xy + 1 \geq 0$. Beidseitige Addition von $x^2 + 2 \cdot xy + y^2$ liefert

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq x^2 + 2 \cdot xy + y^2 \text{ bzw. } (x^2+1) \cdot (y^2+1) \geq (x+y)^2$$

Da das Wurzelziehen die Ordnungsrelation unverändert lässt und sowohl x als auch y positiv sind, finden wir schließlich

$$\sqrt{(x^2+1) \cdot (y^2+1)} \geq \sqrt{(x+y)^2} = x + y. \qquad \square$$

Aufgabe 25.05 – MO561032. Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \sqrt{y^2+3} = 3$$
$$y + \sqrt{x^2+6} = 6$$

Lösungshinweise: Da die Ausdrücke unter den Wurzeln positiv sind (sogar mindestens 3 bzw. 6), sind die Wurzelausdrücke definiert. Da die Wurzelausdrücke stets nichtnegativ sind, finden wir die Einschränkungen $x \leq 3$ und $y \leq 6$. Durch äquivalentes Umformen und anschließendes Quadrieren erhalten wir:

$$\sqrt{y^2+3} = 3 - x \quad \Rightarrow \quad y^2 + 3 = 9 - 6 \cdot x + x^2 \qquad (1)$$

bzw.

$$\sqrt{x^2+6} = 6 - y \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6 = 36 - 12 \cdot y + y^2 \qquad (2)$$

Die Addition beider Gleichungen führt zu

[3] In den offiziellen Lösungshinweise wird darauf hingewiesen, dass die Probe entfallen kann, wenn ausdrücklich formuliert wird, dass alle Umformungen äquivalent waren. Es ist jedoch zu empfehlen, stets die Probe zu führen, um auch fehlerhafte Umformungen auszuschließen.

[4] In den offiziellen Lösungshinweise wird darauf hingewiesen, dass Ungleichungen stets von einer wahren Aussage aus abgeleitet werden müssen. Für die Lösungsfindung werden wir aber meist zunächst von der Behauptung aus schließen, bis wir eine offensichtlich wahre Aussage finden. Im Teil a) haben wir diese Schlussweise bereits ausgeführt. Wir müssen nur prüfen, ob wir in jeder Zeile das Gleichheitszeichen durch das Relationszeichen ersetzen können.

$$x^2 + y^2 + 9 = 45 - 6 \cdot x - 12 \cdot y + x^2 + y^2$$

also

$$6 \cdot x + 12 \cdot y = 36 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 2 \cdot y \qquad (3)$$

Setzen wir dies in (2) ein, erhalten wir eine quadratische Gleichung in y:

$$36 - 24 \cdot y + 4 \cdot y^2 + 6 = 36 - 12 \cdot y + y^2$$

d.h.

$$y^2 - 4 \cdot y + 2 = 0$$

Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden wir die Lösungen

$$y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Setzen wir diese Werte in 3 ein, führt dies zu

$$x_1 = 6 - 4 - 2 \cdot \sqrt{2} = 2 - 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$x_2 = 6 - 4 + 2 \cdot \sqrt{2} = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} > 2 + 2 \cdot 1 = 4 > 3$$

Die zweite Lösung entfällt aufgrund der eingangs gefundenen Einschränkungen. Als Lösungskandidat kommt also nur das Paar $\left(2 - 2 \cdot \sqrt{2}; 2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)$ in Frage. Wir wollen diese noch mittels Probe bestätigen.

$$(1) \quad 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + 3} = 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9 + 4 \cdot \sqrt{2}} =$$
$$= 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 3$$
$$(2) \quad 2 + \sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 6} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{18 - 8 \cdot \sqrt{2}} =$$
$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{\left(4 - \sqrt{2}\right)^2} = 6$$

Somit haben wir das Paar $\left(2 - 2 \cdot \sqrt{2}; 2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)$ als Lösung bestätigt. ❑

Aufgabe 25.06. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die

$$\sqrt[4]{a + x} + \sqrt[4]{a - x} > 2\sqrt[8]{a^2 - x^2}$$

gilt, wobei a ein beliebiger reeller Parameter sei.

Lösungshinweise: Der Definitionsbereich D (Gültigkeitsbereich für die Wurzelausdrücke) wird durch die Ungleichungen $a + x \geq 0$, $a - x \geq 0$ und $a^2 - x^2 \geq 0$ bestimmt. Nach Addition der ersten beiden Ungleichungen erhalten wir sofort $a \geq 0$.

Für nichtnegative a liefert die dritte Ungleichung $x \in [-a; a]$. Für x aus diesem Intervall sind auch die ersten beiden Ungleichungen erfüllt. Damit ist:

$$D = \begin{cases} \emptyset & falls \quad a < 0 \\ \{0\} & falls \quad a = 0 \\ [-a; a] & falls \quad a > 0 \end{cases}$$

Im Definitionsbereich lässt sich die Ungleichung dreimal quadrieren (dabei gleiche Wurzeln zusammenfassen). Dies ergibt nacheinander nach Quadrieren

$$\sqrt{a+x} + 2 \cdot \sqrt[4]{a+x} \cdot \sqrt[4]{a-x} + \sqrt{a-x} > 4 \cdot \sqrt[4]{a^2 - x^2}$$
$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > 2 \cdot \sqrt[4]{a^2 - x^2}$$

erneutem Quadrieren

$$a + x + 2 \cdot \sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a-x} + a - x = 4 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$a > \sqrt{a^2 - x^2}$$

und erneutem Quadrieren

$$a^2 > a^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

Für $a = 0$ ist die Lösungsmenge wegen $0 \neq x$ ebenfalls leer. Unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches ist die Lösungsmenge

$$L = \begin{cases} \emptyset & falls \quad a \leq 0 \\ [-a; a] - \{0\} & falls \quad a > 0 \end{cases}$$ ❑

Thema 26 – Geometrischer Ort

In der Elementargeometrie bezeichnet geometrischer Ort (Plural: geometrische Örter) eine Menge von Punkten, die eine bestimmte, gegebene (definierende) Eigenschaft haben.

Der geometrische Ort aller Punkte, …

> … die von einem gegebenen Punkt M einen festen Abstand r haben, ist der Kreis um M mit dem Radius r.
> … die von einer gegebenen Geraden g einen festen Abstand d haben, ist das Paar von Parallelen zu g im Abstand d.
> … die von zwei gegebenen Punkten A und B den gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte über der Strecke $\overline{AB}$.
> … die von zwei gegebenen sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben, ist das Paar von Winkelhalbierenden zu g und h.
> … die von zwei gegebenen parallelen Geraden g und h den gleichen Abstand haben, ist die Mittelparallele zu g und h.

Um einen geometrischen Ort zu bestimmen, sind prinzipiell die Punktmenge eindeutig zu beschreiben und zwei Nachweise zu führen:

(1) Jeder Punkt des geometrischen Ortes besitzt die definierende Eigenschaft.
(2) Jeder Punkt, der nicht dem geometrischen Ort angehört, besitzt die definierende Eigenschaft nicht.

Aufgabe 26.01 – MO631015.

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände $|\overline{AP}| + |\overline{BP}|$ des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.
b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}|$ minimal wird.

Lösungshinweise zu Teil a): Die gesuchte Menge sind alle Punkte der Strecke $\overline{AB}$ einschließlich der Randpunkte A und B. Der minimale Wert der Summe der Abstände ist die Länge $|\overline{AB}| = c$.

(1) Für jeden Punkt P der Strecke $\overline{AB}$ gilt $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = |\overline{AB}| = c$.

(2) Für jeden Punkt P auf der Geraden AB links von A gilt:

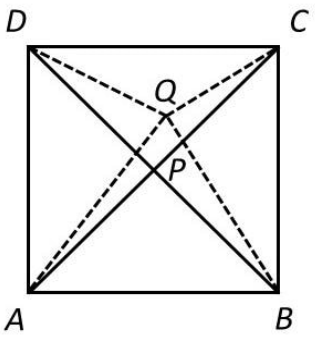
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = |\overline{AP}| + |\overline{AP}| + |\overline{BP}| = |\overline{AP}| + |\overline{AB}| = |\overline{AP}| + c > c.$$

Für jeden Punkt P auf der Geraden AB rechts von B gilt:

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{BP}| = |\overline{AB}| + |\overline{BP}| = |\overline{BP}| + c > c.$$

Für jeden Punkt P außerhalb der Geraden AB spannen die drei Punkte ABP ein (nicht-entartetes) Dreieck auf. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt in jedem dieser Dreiecke $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| > |\overline{AB}| = c$.

Lösungshinweise zu Teil b): Wir vermuten, dass der Schnittpunkt der Diagonalen den geometrischen Ort mit der minimalen Abstandssumme zu den Eckpunkten darstellt. Dies leiten wir aus der Teilaufgabe a) ab, indem wir für die Diagonale $\overline{AC}$ und für die Diagonale $\overline{BD}$ die Abstandssummen minimieren. Nur für den Schnittpunkt der Diagonalen werden beide Teilsummen gleichzeitig minimiert.

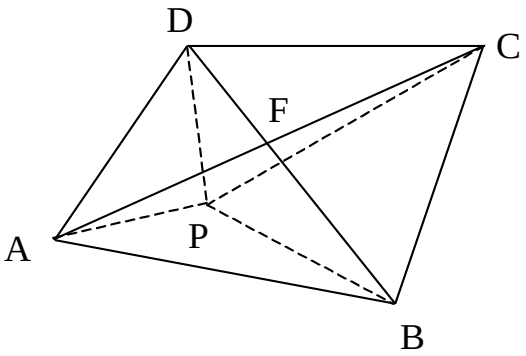


Zur Übung wollen den Nachweis explizit ausführen. Dafür verwenden wir aber den Lösungsansatz aus Teilaufgabe a). Für den Schnittpunkt P der Diagonalen finden wir bei einer Seitenlänge a die Abstandssumme

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}| = 2a\sqrt{2}.$$

Betrachten wir nun einen von P verschiedenen Punkt Q, so gelten in den Dreiecken ACQ und BQD die Dreiecksungleichungen $|\overline{AQ}| + |\overline{QC}| \geq |\overline{AC}| = |\overline{AP}| + |\overline{PC}|$ bzw. $|\overline{BQ}| + |\overline{QD}| \geq |\overline{BD}| = |\overline{BP}| + |\overline{PD}|$. Gilt $P \neq Q$, so ist in mindestens einer dieser Ungleichungen die Gleichheit nicht erfüllt, so dass die Abstandssumme von Q zu den Eckpunkten stets echt größer als von P aus ist. ❑

Folgerung 26.02. In einem konvexen Viereck realisiert der Schnittpunkt der Diagonalen den geometrischen Ort aller Punkte mit minimaler Abstandsumme zu den Eckpunkten.



Hinweis: Ein Viereck ist konvex, wenn der Schnittpunkt der Diagonalen im Innern des Vierecks liegt.

Lösungshinweise: Bei der Beweisführung für das Quadrat $ABCD$ wurden Eigenschaften des Quadrates (bis auf die Berechnung der Abstandssumme) nicht ausgenutzt. Deshalb gelingt der Nachweis auch bei einem beliebigen Viereck. Es sei F der Schnittpunkt der Diagonalen und P ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken APC bzw. DPB:

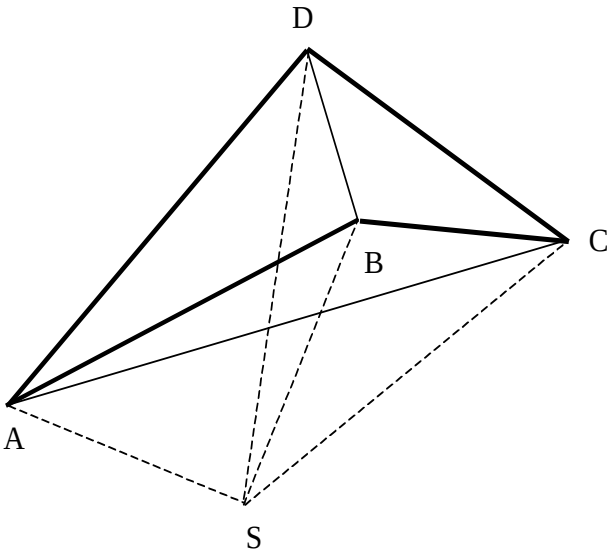
$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{CP}\right| \geq \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FC}\right|$$
$$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PD}\right| \geq \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{FD}\right|$$

Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von P zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalen-Schnittpunkts zu allen Eckpunkten. ❑

Hinweis: Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker, 1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

Aufgabe 26.03. Man finde in einem konkaven Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Innenwinkel größer als 180°) die Menge aller Punkte mit minimaler Abstandssumme zu den Eckpunkten.

Lösungshinweise: Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (o.B.d.A wie in der Skizze B) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist B der gesuchte geometrische Ort.



Es sei S ein beliebiger, von B verschiedener Punkt der Ebene. Die drei Dreiecke ASC, CSD und DAS überdecken das Dreieck ACD und somit das konkave Viereck $ABCD$. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt B. In der skizzierten Konstellation ist dies das Dreieck SCD. Damit liegt der Streckenzug CBD vollständig innerhalb des Dreiecks SCD und somit gilt:

$$\left|\overline{CS}\right| + \left|\overline{SD}\right| \geq \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BD}\right|.$$

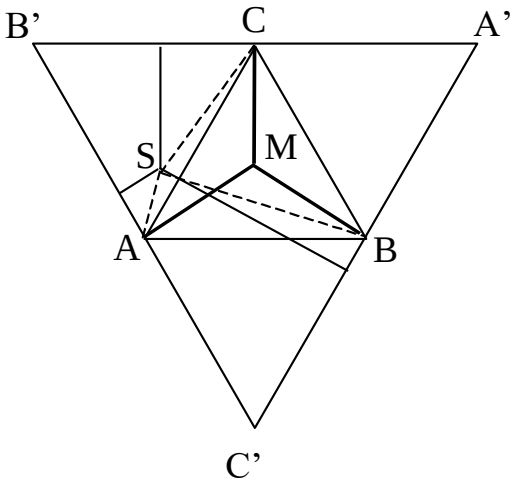
(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.) Im Dreieck ABS gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt, falls S auf der Geraden zwischen $\overline{AB}$ liegt.) Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von S zu allen vier Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von B zu den Eckpunkten A, C und D. Der gesuchte geometrische Ort besteht somit nur aus dem Punkt B. ❑

Aufgabe 26.04. Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck genau einen Punkt mit minimaler Abstandsumme zu den Eckpunkten des Dreiecks gibt.

Lösungshinweise: Der Schnittpunkt M der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der gesuchte geometrische Ort. Betrachten wir das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$, das aus ABC durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist M auch der Höhenschnittpunkt von $A'B'C'$.



Im gleichseitigen Dreieck $A'B'C'$ ist nach dem Satz von VIVIANI[5] die Summe der Abstände eines inneren Punktes S zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant und gleich der Höhe des Dreiecks $A'B'C'$. Der Beweis dieser Aussage ist einfach: Wir betrachten die Dreiecke

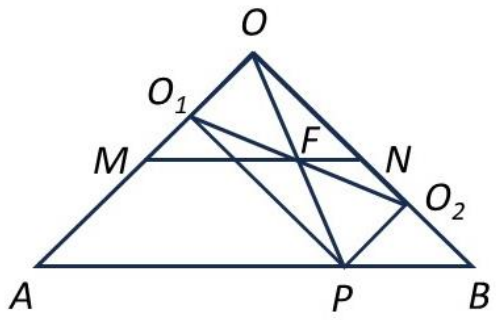
[5] VINCENZO VIVIANI, italienischer Mathematiker, 1622–1703

$A'B'S$, $B'C'S$ und $A'C'S$. Die Summe der drei Flächeninhalte ist so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$. Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks als das halbe Produkt von Grundseite und Höhe berechnet und in den Teildreiecken die Grundseiten jeweils der Grundseite des Gesamtdreiecks entsprechen, folgt die Behauptung, dass die Summe der Höhen der Teildreiecke gleich der Höhe im Gesamtdreieck ist.

Für M stimmt die gesuchte Abstandssumme mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein. Die Abstände von S zu den Eckpunkten A, B und C können aber nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten des Dreiecks sein $A'B'C'$. Liegt dagegen S außerhalb des Dreiecks $A'B'C'$, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von *M* aus. ❑

Aufgabe 26.05 – MO410946/MO411046. Es sei P ein innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen AP bzw. BP, die beide auf derselben Seite der Geraden AB liegen.

Bestimmen Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn P die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.



Lösungshinweise: Wir untersuchen zunächst einige Grenzfälle, um den geometrischen Ort zu beschreiben. Gilt $P = A$, so entsteht über $\overline{AB}$ ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck (dessen dritten Eckpunkt wir O nennen). Dann folgt $A = O_1$ und $O = O_2$ und der gesuchte Punkt ist in diesem Fall der Mittelpunkt M von $\overline{AO}$. Setzen wir $P = B$, so entsteht über $\overline{AB}$ das gleiche rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ABO. Nun wird $B = O_2$ und $O = O_1$ und der gesuchte Punkt ist in diesem Fall der Mittelpunkt N von $\overline{BO}$. Halbiert der Punkt P die Strecke $\overline{AB}$, so erkennen wir, dass der gesuchte Punkt auf der Verbindungsgeraden $\overline{MN}$ liegt. Wir vermuten deshalb, dass der geometrische Ort die Dreiecksmittellinie $\overline{MN}$ ist. (Die drei Beispiele genügen selbstverständlich nicht als Beweis!)

Für den Beweis stellen wir zuerst fest, dass die Geraden AO_1 und BO_2 sich in dem schon genannten Punkt O schneiden. Wegen $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OBA| = 45°$ ist das Dreieck ABO ebenfalls rechtwinklig-gleichschenklig.

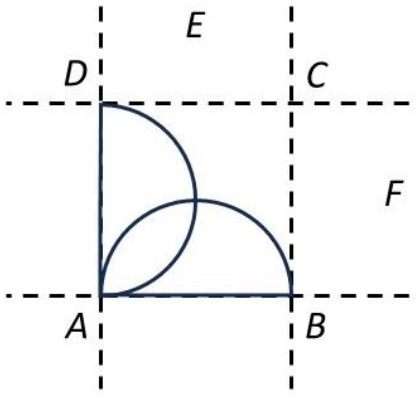
Für einen gegebenen Punkt P auf $\overline{AB}$ ist der Mittelpunkt F von $\overline{O_1O_2}$ der Diagonalenschnittpunkt im Rechteck PO_2OO_1 und somit auch Mittelpunkt der Strecke $\overline{PO}$. F liegt also im Inneren der Strecke $\overline{MN}$, die parallel zu $\overline{AB}$ verläuft.

Umgekehrt können wir zu einem gegebenen inneren Punkt F dieser Mittellinie einen Punkt P als Schnittpunkt von OF und AB konstruieren, so dass F der Schnittpunkt der entsprechenden Strecke $\overline{O_1O_2}$ ist.

Der gesuchte geometrische Ort besteht also genau aus den inneren Punkten derjenigen Mittellinie des Dreiecks ABO, die parallel zu $\overline{AB}$ verläuft. ❑

Aufgabe 26.04 - MO420924. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Die Menge M aller Punkte P der Ebene, für die sowohl das Dreieck ABP als auch das Dreieck ADP spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

a) Stellen Sie diese Fläche M (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für $a = 6$ cm) und berechnen Sie den Flächeninhalt $F(M)$ in Abhängigkeit von a.
b) Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von M.
c) Beschreiben Sie die Menge M_0 aller Punkte Q, für die sowohl das Dreieck ABQ als auch das Dreieck ADQ stumpfwinklig ist.



Lösungshinweise zu Teil a): Die Fläche M ist in dem Quadrat $ABCD$ erkennbar und besteht aus einem vollständigen Quadratviertel mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ und aus zwei Quadratviertel mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$, aus denen ein Viertelkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$ herausgeschnitten wurde. Deshalb gilt für den Flächeninhalt von M:

$$F(M) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot a^2 \approx 0.3573 \cdot a^2 \,.$$

Lösungshinweise zu Teil b): Liegt ein Punkt R außerhalb des Streifens E, der durch die Geraden AD und BC gebildet wird, so ist das Dreieck ABR stumpfwinklig. Liegt ein Punkt R auf den Geraden AD oder BC, so ist das Dreieck ABR rechtwinklig. Also kann ein gesuchter Punkt nur im Innern des Streifens E liegen.

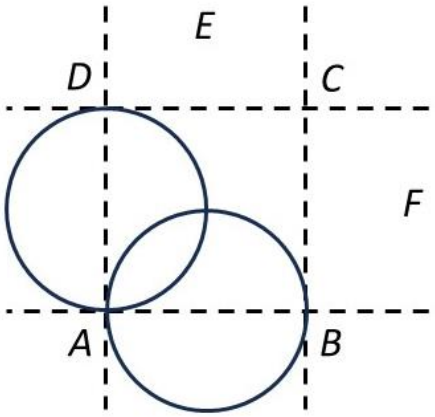
Mit analoger Argumentation: Liegt ein Punkt R außerhalb des Streifens F, der durch die Geraden AB und CD gebildet wird, so ist das Dreieck ADR stumpfwinklig. Liegt ein Punkt R auf den Geraden AB oder CD, so ist das Dreieck ADR rechtwinklig. Also kann ein gesuchter Punkt nur im Innern des Streifens F liegen.

Als Durchschnitt beider Schnittmengen ergibt sich damit die Menge der inneren Punkte des Quadrates $ABCD$. Davon entfallen aber auch noch die inneren Punkte und die Randpunkte der THALES-Kreise über den Durchmessern $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$, da sonst die Dreiecke ABP bzw. ADP stumpf- oder rechtwinklig wären.

Damit verbleibt für die Menge M die beschriebene und in der Abbildung gezeigte Punktmenge übrig.

Lösungshinweise zu c): Anknüpfend an die Überlegungen zu Teil b) gehören zur Menge M‘ genau die Punkte, die

- im Innern des THALES-Kreises über $\overline{AB}$ und im Innern des THALES-Kreise über $\overline{AD}$ liegen,
- im Innern des THALES-Kreises über $\overline{AB}$ und außerhalb des Streifens F liegen, liegen,
- im Innern des THALES-Kreises über $\overline{AD}$ und außerhalb des Streifens E liegen, liegen,
- außerhalb des Streifens F liegen und außerhalb des Streifens E liegen.



❑

2. Präsenzseminar (Rückblick)

Am Samstag, dem 28. Oktober 2023, fand das 2. Präsenzseminar der „Mathematischen Kostproben“ statt. Wir waren zu Gast an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz.

Im ersten Teil des Seminars demonstrierten wir anhand ausgewählter Aufgabenpaare vergangener Mathematik-Olympiaden das Grundprinzip, durch intensive Nachbereitung der zurückliegenden Runde die Vorbereitung für den Fortgang des Wettbewerbs zu unterstützen[6].

So fanden wir in der Aufgabe **MO601024** in Teilaufgabe c) eine Ungleichung, die in Aufgabe **MO610936** wieder aufgenommen wurde. Damit war ein erfolgversprechender Lösungsansatz unmittelbar bekannt und es blieb Klausurzeit, um den erhöhten Schwierigkeitsgrad durch einen variablen Faktor anstelle eines festen Faktors zu bewältigen.

Im Aufgabenpaar **MO601011** und **MO601041** ging es jeweils um das kombinatorische Problem, die Anzahl voneinander verschiedener Euro-Beträge aus einer gegebenen Menge von verschiedenen Münzen zu bestimmen. Die Frage in der 1. Runde wäre noch tabellarisch lösbar gewesen. Die Nachbereitung anhand der offiziellen Lösungshinweise ließ aber die Lösungsdarstellung so strukturieren, dass diese Erkenntnisse auf die komplexere Fragestellung der 4. Runde übertragen werden konnte.

Die Aufgabe **MO631011** hat in der Aufgabe **MO621041** einen inhaltlichen Vorgänger. Auch wenn wir das Ergebnis des Vorjahres nicht zwingend zur Lösung der aktuellen

[6] Auf Anfrage ist eine Zusammenfassung dieser Aufgabendiskussion als Zusatz zu Heft 11/2023 erhältlich.

Aufgabe benötigten (weil wir die Lösung auch durch neue Überlegungen finden konnten), wäre damit eine elegante Lösungsdarstellung möglich gewesen.

Mit Blick auf die Aufgabe **MO631013** diskutierten wir die Situation, aus der Angabe von einzelnen Beispielen zu unendlich vielen passenden Beispielen bzw. zu Beispielen mit modifizierter Fragestellung zu gelangen. Auch wenn in der Hausarbeit der Einsatz von Rechentechnik zur Lösungsfindung zugelassen ist – die Lösungsdarstellung muss so gelingen, dass zu deren Verständnis nicht selbst Rechentechnik erforderlich ist.

Im Teil 2 und 3 des Seminares wurden die Aufgaben zu den Themen 25 und 26 wie in diesem Heft zusammengefasst diskutiert.

Girls‘ Tandem – MINTeinander ins Studium!

„Du interessierst dich für Naturwissenschaft und Technik?
Du willst wissen, welches Studium zu dir passt?“

Die Technische Universität Chemnitz bietet mit dem Mentoringprojekt „Girls‘ Tandem“ naturwissenschaftlich-technisch interessierten Schülerinnen aus Chemnitz und dem Umland die Möglichkeit, Uni-Luft zu schnuppern.

Jede Teilnehmerin bekommt eine Studentin der MINT-Fächer als Mentorin zur Seite gestellt (MINT steht für Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik), die erste **Einblicke in das Leben als Studentin** gibt, aber auch **auf fachlicher Ebene** berät. So kann die Zeit des Girls‘ Tandem genutzt werden, um eigene **Stärken zu erkennen**, sich hinsichtlich der **Studienfachwahl zu orientieren** und mit gleichgesinnten Schülerinnen **auszutauschen**. Es lassen sich erste Kontakte knüpfen, die für ein späteres Studium oder Praktikum hilfreich sein können.

Das Girls‘ Tandem-Mentoring dauert **ein halbes Jahr**, kann aber auch auf ein Jahr verlängert werden.

Die persönliche Beziehung zur Mentorin kann **ganz individuell** gestaltet werden: Kontakte per Telefon oder über Internet halten, sich an der Uni oder im Café treffen und die Häufigkeit der Treffen festlegen (z.B. Teilnahme an Vorlesungen, Seminaren und Übungen, Besichtigung der Wohnheime, Mittagessen in der Mensa, Hilfe bei der Wahl des Studienfachs…).

Besondere Höhepunkte sind aller 6 bis 8 Wochen die **gemeinsamen Veranstaltungen** mit den anderen Schülerinnen-Studentinnen-Tandems (Workshops, Experimente, Exkursionen…).

Die Anmeldung ist jederzeit möglich! Die Teilnahme ist kostenfrei.

In einem Video unter https://www.tu-chemnitz.de/gleichstellung/projekte/GiTa/videos/GiTa_stellt_sich_vor_1080p.mp4 werden weitere Informationen zu Girls' Tandem gegeben.

Kontaktdaten/Projektkoordination: Nicole Dietrich
E-Mail: gita@tu-chemnitz.de; www.tu-chemnitz.de/girlstandem

In alten Mathe-Büchern geblättert

ADAM RIES (1496 – 1559) beschreibt in seinem 3. Rechenbuch (1550, gedruckt in Leipzig) die Konstruktion und Anwendung von Visierstäben zur Inhaltsmessung von Fässern. Dafür ist die Fähigkeit, Wurzeln aus ganzen Zahlen zu ziehen (zu radizieren) von grundlegender Bedeutung. Deshalb erklärt er diese Operation an einem Beispiel[7].

Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder.
Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones /
Practica genant /

Mit grüntlichem vnterricht des viſierens.

Durch Adam Rieſen
im 1550. jar.

Viſier Steeb oder Ru=

eten / auff jede ohm zu machen /
vnd damit zu vieſieren

In volgenden worten will ich dich leren / wie du eine rechte / gewieſſe / vnd gantz geordente Ruth auſſem Quadraten mache ſolt / muſt vor allem dingen / den Radix Quadrata einer jeden zal auff das geneheſte wiſſen zu vinden / ...

```
  •   •   •
4 5 9 6 8 4
```

Sovil punct vorhanden/ſovil wirſtu figuren im radix haben / vnder dem letzten punct ſuch eine zahl / die in ſich multiplicirt vnd auff das geneheſte von den 45 kan genomen werden / als 6 mal 6 dan 7 mal 7 nicht genomen werden / Nim 36 von 45 bleiben 9 ſetz vber die 5

Alsdan dublir die gefundene figur 6 die wirt 12 die ſetz hinder das folgende punct / ſihe wie offt du nehmen magſt / vnd ſo offt du nehmen magſt / ſetz nach den 6 den gleichen ſetz dieſelbe figur vnder das punct / darunder du ſuchen ſollſt.

```
    9   •   •
4 5 9 6 8 4 | 6 7
    1 2 7
```

Die 12 kondeſtu von 99 wol acht mal nehmen / aber acht mal 8 kondeſtu vom bleibenden nicht nemen / derhalben nim 7 mal bleibet alſo

[7] Es wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen.

```
    1
   9   7
4 5 9 6 8 4 | 6 7
  1 2 7 4
    1 3
```

Duplir 67 wirt 134 ſetz hinder das forder punct wie hi vorzeichnet / Gibt wie offt du nehmen kanſt /mag 8 mal ſein die ſetz nemlich 8 zum radix des gleichen 8 vnder 4 die erſte figur multiplicir vnd nim ſter alſo.

```
    1
   9   7
4 5 9 6 8 4 | 6 7 8
  1 2 7 4 8
    1 3
```

Iſt alſo radix quadrata auf gemelter zahl 678 wirt ſolcher radix in ſich multiplicirt wirt wider der quadrat.

Es haben alle zaln nicht gar radicem ſondern es bleibt etwas vberig / ſuch iren radix auff geneheſte alſo / multiplicir die ſelbe zal mit 1000000 als dan extrahir radicem komen dir eitel tauſent teil von ein ganzen / Aus 19 ſoltu den Radix ſuchen / ſetz darfur ſechs 0 wirt 19000000 darauf ſuch radix wie geſagt.

```
      7   8
    3 5 1 7 5 3 8
1 9 0 0 0 0 0 0 | 4 3 5 8 |   4 ganze
    8 3 6 5 0 8   1 0 0 0
      8 8 7
```

Iſt alſo Radix quadrata 4 ganze vnd 358 tauſent teil / das vberig tregt wenig auff dan wan ein linihen vngeferlich einer ſpannen lang als hirinnen der diameter nicht ſo langk / in 1000 zu teiln kompt wenig auff ein teil.

[Es folgt eine Tabelle der Quadartwurzeln aus ganzen Zahlen.]

Nöſel	Radix	Nöſel	Radix	Nöſel	Radix
1	1000	31	5567	61	7816
2	1414	32	5657	62	7874
3	1732	33	5744	63	7937

Diese Tabelle der Quadratwurzel wurde bis 206 … 14352 fortgesetzt. Da ein Dezimalpunkt zur damaligen Zeit noch nicht verwendet wurde, sind die Wurzeln als Ganze und Teile zu verstehen, also $\sqrt{206}$ ergeben 14 Ganze und 352 Teile.

In Anlehnung an die Anweisung von ADAM RIES wollen wir $\sqrt{459684}$ ermitteln. Wir wissen, dass die Lösung drei Ziffern haben wird. Wir suchen also Ziffern a, b und c mit

$$\begin{aligned}(100a + 10b + c)^2 &= 10000a^2 + 2000ab + 100b^2 + 20bc + c^2 + 200ac \\ &= 459684\end{aligned}$$

Wir wählen zunächst $a = 6$, weil $6^2 < 45$, aber $7^2 > 45$ gilt. Wir können damit den ersten Summanden verarbeiten und es verbleibt:

$$2000ab + 100b^2 + 20bc + c^2 + 200ac = 99684$$

Nun suchen wir einen geeigneten Wert für b. Setzen wir $b = 8$, erhalten wir zwar im nunmehr ersten Summanden $96000 < 99684$, aber wir können den zweiten Summanden $100 \cdot b^2 = 6400$ nicht mehr subtrahieren. Also wählen wir $b = 7$ und finden

$$100b^2 + 20bc + c^2 + 200ac = 15684$$

Verlassen wir nun den historischen Rechenweg und setzen abkürzend nunmehr die Werte von a und b in die verbleibende Gleichung ein, dann erhalten wir die quadratische Gleichung $c^2 + 1340c - 10784 = 0$ mit der positiven Lösung $c = 8$.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 9/23.

Von einer fünfstelligen ganzen Zahl wird eine bestimmte Ziffer gestrichen, so dass eine vierstellige Zahl übrig bleibt. Die fünfstellige und die neue vierstellige Zahl werden addiert und ergeben die Summe 52713.

Wie groß ist die Quersumme der ursprünglichen fünfstelligen Zahl?

Lösungshinweise: Wenn von der fünfstelligen Zahl X nicht die Einerstelle E gestrichen würde, sondern eine der vorderen vier Stellen, um die vierstellige Zahl Y zu erhalten, dann würden X und Y beide auf der Einerstelle mit der Ziffer E enden. Folglich müsste ihre Summe $X + Y$ geradzahlig sein. Da aber die Summe $X + Y = 52713$ ungerade ist, wird von der fünfstelligen Zahl die Einerstelle gestrichen.

Somit gilt $X = 10Y + E$. Setzen wir dies in die Summe ein, erhalten wir $10Y + E + Y = 52713$, gleichbedeutend zu $y = (52713 - E)/11$. Nur wenn die Ziffer $E = 1$ ist, erhalten wir einen ganzzahligen Wert für Y. Er beträgt $Y = 4792$. Somit ist $X = 47921$. Die Zahl X hat die Quersumme $Q(X) = 23$. ❑

Monatsaufgabe[8] 10/23.

Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu zwei fest vorgegebenen Punkten A und B einen konstanten Wert $|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 = e^2 = const$ annimmt.

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.12.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort ... 2
Thema 25 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken ... 3
Thema 26 – Geometrischer Ort ... 9
2. Präsenzseminar (Rückblick) ... 15
Girls‘ Tandem – MINTeinander ins Studium! ... 16
In alten Mathe-Büchern geblättert ... 17
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 9/23 ... 19
Monatsaufgabe 10/23. ... 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

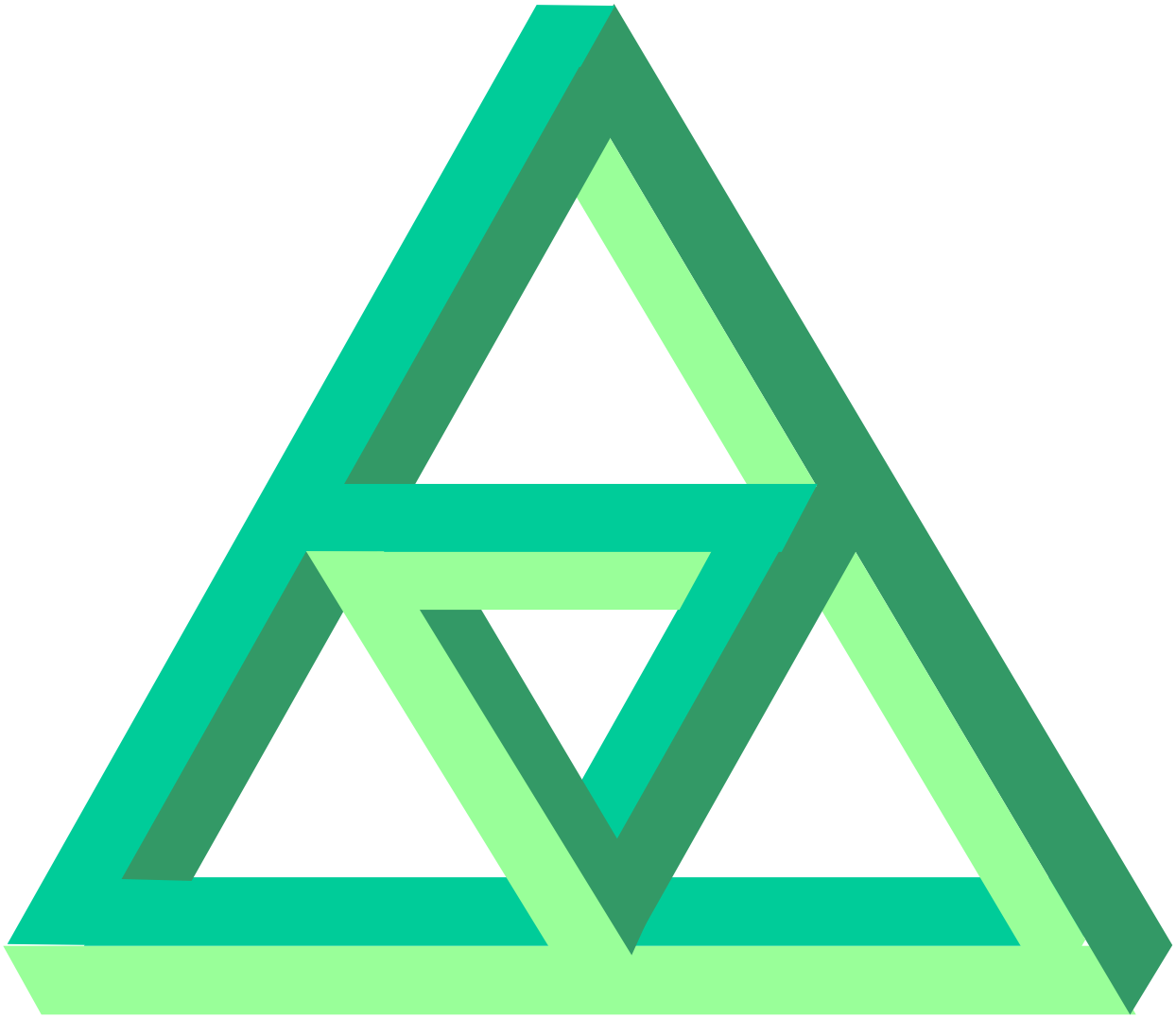
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2023 (Dezember 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir blicken noch einmal auf die Aufgabe **MO631014** und diskutieren Ungleichungen mit Wurzelausdrücken. Da hierbei die Probe aufwendig werden kann, kommt es besonders darauf an, nur äquivalente Umformungen vorzunehmen. Für die Lösungsdarstellung bietet sich aber dennoch an, von einer offenbar richtigen Aussage auszugehen und diese durch Umformungen auf die Behauptung zu führen.

Ergänzend zu den (nummerierten) Themen betrachten wir rationale und irrationale Zahlen und konzentrieren uns vor allem auf die Nachweise, dass gegebene Ausdrücke keine rationalen Zahlen sein können. Für den „Klassiker“, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, zitieren wir unter der Rubrik „Alte Mathe-Bücher“ den Beweis aus dem Zehnten Buch der Elemente von EUKLID

Wir stellen den Bundewettbewerb Mathematik vor und laden zur Teilnahme an der aktuellen Ausschreibung für 2024 ein. Ein statistischer Überblick zeigt, dass sächsische Jugendliche im vergangenen Wettbewerb erneut sehr erfolgreich waren. Allerdings blieb die Anzahl der sächsischen Teilnehmer an der ersten Runde hinter den Erwartungen zurück. Also, auf ein Neues!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25.02 – Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken

Wir können zu Übungszwecken alle bisherigen Gleichungen des Themas 25 als Ungleichungen schreiben. Da wir die Gleichungen bereits gelöst haben, könnten wir durch Einsetzen geringfügig veränderter Werte prüfen, welche Relationszeichen geeignete Ungleichungen ergeben. Verwenden wir die Gleichung aus Teil a der Aufgabe **MO631014,** also $\sqrt{x}-\sqrt{x-6}=\sqrt{2\cdot x-14}$, so finden wir beispielsweise für $x=7$ die Ungleichung $\sqrt{7}-\sqrt{1}>0$ oder für $x=9$ die Ungleichung $\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$. Es sind demnach beide Richtungen der Ungleichung möglich. Wir untersuchen folgende Aufgabe.

Aufgabe 25.07. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Ungleichung

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-6}\geq\sqrt{2\cdot x-14}.$$

Lösungshinweise: In der Ungleichung $\sqrt{x}-\sqrt{x-6}\geq\sqrt{2\cdot x-14}$ muss $x\geq 7$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion folgt aus $x>x-6$ auch $\sqrt{x}>\sqrt{x-6}$. Beide Seiten sind deshalb nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und Zusammenfassen äquivalent umformen. Wir erhalten

$$x-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-6}+x-6\geq 2\cdot x-14\ \Rightarrow\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-6}\leq 4.$$

Wieder sind beide Seiten positiv (da für positive Zahlen $x\geq 7$ keiner der beiden Faktoren negativ sein kann) und wir können erneut quadrieren. Dies führt nun zur quadratischen Ungleichung $x^2-6\cdot x-16\leq 0$.

Lösungsvariante 1: Wir lösen mit der bekannten Lösungsformel die zugehörige Gleichung $x^2-6\cdot x-16=0$ und erhalten

$$x_1=3-\sqrt{25}=-2 \text{ und } x_2=3+\sqrt{25}=8$$

Damit erkennen wir die Möglichkeit der Faktorisierung und können die Ungleichung äquivalent umformen zu

$$(x+2)\cdot(x-8)\leq 0$$

Das Produkt ist genau dann nichtpositiv, wenn beide Faktoren unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies erfordert $x+2\geq 0$ (d.h. $x\geq -2$) und $x-8\leq 0$ (d.h. $x\leq 8$). Dies ist gleichzeitig erfüllt für alle reellen Zahlen x mit $-2\leq x\leq 8$. Unter Berücksichtigung der eingangs festgestellten Einschränkung $x\geq 7$ erhalten wir als Lösungsmenge alle reellen Zahlen x mit $7\leq x\leq 8$.

Lösungsvariante 2: Wir suchen für die Funktion $f(x)=x^2-6\cdot x-16$ die quadratische Ergänzung und können damit umformulieren zu

$$f(x)=x^2-6\cdot x-16=\ (x-3)^2-25.$$

Wir erkennen, dass der Funktionsverlauf eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt bei $x = 3$ darstellt. Damit ist der Kurvenverlauf für $x \geq 3$ monoton wachsend. Deshalb ist wegen $f(-2) = 0$ und $f(8) = 0$ für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leq x \leq 8$ die Ungleichung $f(x) \leq 0$ erfüllt. Unter Berücksichtigung der eingangs festgestellten Einschränkung $x \geq 7$ erhalten wir als Lösungsmenge alle reellen Zahlen x mit $7 \leq x \leq 8$.

Für die Probe setzen wir $x = 7 + t$ mit nichtnegativer Zahl $t \leq 1$. Dann lautet die Ausgangsungleichung

$$\sqrt{7+t} - \sqrt{1+t} \geq \sqrt{2t}.$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir quadrieren

$$7 + t - 2\sqrt{7+t} \cdot \sqrt{1+t} + t + 1 \geq 2t$$

also

$$4 \geq \sqrt{7+t} \cdot \sqrt{1+t}$$

Wir können erneut quadrieren und erhalten

$$16 \geq (7+t)(1+t) = 7 + 8t + t^2$$

Diese Ungleichung ist wegen $7 + 8t + t^2 \leq 7 + 8 + 1$ für alle nichtnegativen Zahlen $t \leq 1$ erfüllt. Damit wird die Lösungsmenge bestätigt. ❑

Vergleichbare Aufgabenstellungen liegen in der Mathematik-Olympiade jedoch schon weit zurück, beispielsweise

Aufgabe 25.08 – MO401032. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\left(\sqrt{x} - 0{,}5 \cdot x\right) : \left(0{,}5 \cdot \sqrt{x} - x\right) \leq 15 \cdot \sqrt{x}$$

erfüllen!

Lösungshinweise: Wir stellen $x \geq 0$ (damit die Wurzeln existieren) und $\frac{1}{2}\sqrt{x} - x \neq 0$ (also $x \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, damit der Nenner von 0 verschieden ist) fest. Wir schreiben die Ungleichung um zu

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}\sqrt{x} - x} \leq 15 \cdot \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 2x} = \frac{2 - \sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}} \leq 15 \cdot \sqrt{x}$$

Fall 1: Es gelte $1-2\sqrt{x}<0$ (d.h. $\frac{1}{4}<x$). Dann können wir unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens mit $1-2\sqrt{x}$ multiplizieren und erhalten die zur Ausgangsungleichung äquivalente Ungleichung

$$2-\sqrt{x}\geq 15\cdot\sqrt{x}\cdot\left(1-2\sqrt{x}\right)=15\sqrt{x}-30x$$

also

$$x-\frac{8}{15}\sqrt{x}-\frac{1}{15}=\left(\sqrt{x}-\frac{4}{15}\right)^2-\frac{1}{225}\leq 0$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für alle x mit

$$-\frac{\sqrt{17}}{15}\leq\sqrt{x}-\frac{4}{15}\leq\frac{\sqrt{17}}{15}\quad\Rightarrow\quad\frac{4-\sqrt{17}}{15}\leq\sqrt{x}\leq\frac{4+\sqrt{17}}{15}$$

Berücksichtigen wir die Einschränkung dieses Falls, so finden wir

$$\frac{1}{4}<x\leq\frac{33+8\cdot\sqrt{17}}{225}$$

Fall 2: Es gelte $1-2\sqrt{x}>0$ (d.h. $\frac{1}{4}>x$). Dann können wir mit $1-2\sqrt{x}$ multiplizieren und erhalten die zur Ausgangsungleichung äquivalente Ungleichung

$$2-\sqrt{x}\leq 15\cdot\sqrt{x}\cdot\left(1-2\sqrt{x}\right)=15\sqrt{x}-30x$$

Also

$$x-\frac{8}{15}\sqrt{x}-\frac{1}{15}=\left(\sqrt{x}-\frac{4}{15}\right)^2-\frac{31}{225}\geq 0$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für alle x mit

$$-\frac{31}{225}\leq\sqrt{x}-\frac{4}{15}\leq\frac{31}{225}\quad\Rightarrow\quad-\frac{27}{225}\leq\sqrt{x}\leq\frac{35}{225}$$

Berücksichtigen wir die Einschränkung dieses Falls, so finden wir $\frac{1}{4}<x\leq\frac{49}{2025}$ ❑

Aufgabe 25.08 – MO291034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1}>1$$

Lösungshinweise: Für $x<-5$ ist die Wurzel nicht definiert. Zudem ist $x\neq-1$, damit der Nenner des Bruches von 0 verschieden ist.

Für $-5 \leq x < -1$ wird die Ungleichung nicht erfüllt, weil der Zähler positiv und der Nenner negativ sind, also der Bruch auf der linken Seite negativ ist.

Für $x > -1$ gilt $x + 1 > 0$. Deshalb können wir durch Multiplikation mit $x + 1$ die Ungleichung äquivalent umformen

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+5} > x+1 && \text{I quadrieren (da beide Seiten positiv)}\\
&x+5 > x^2+2x+1 && \text{I zusammenfassen}\\
&x^2+x-4 < 0 && \text{I quadratische Ergänzung}\\
&\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 < \tfrac{17}{4}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$-\frac{\sqrt{17}}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{17}}{2}$$

also

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{17}+1\right) < x < \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)$$

Wegen $\sqrt{17} > 4$ folgt $-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{17}+1\right) < -\frac{5}{2} < -1$. Deshalb müssen wir die bereits bekannte Einschränkung $x > -1$ beachten und erhalten als Lösungsmenge alle reellen Zahlen x mit $-1 < x < \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)$. ❑

Aufgabe 25.09 – MO211034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 1$$

Lösungshinweise: Offensichtlich kann x nicht 0 sein, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Außerdem muss $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gelten, da für $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ sofort $x^2 > \frac{1}{3}$ und damit $1 - 3x^2 < 1 - 1 = 0$ folgen würde, sodass der Radikand negativ und damit die Wurzel nicht mehr definiert wäre.

Es sei also im Folgenden $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dann ist $1 - 3x^2 < 1$ und damit auch $\sqrt{1-3x^2} < 1$und folglich $1 - \sqrt{1-3x^2} > 0$. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x.

Ist x negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, sodass wir ein erstes Lösungsintervall erhalten, nämlich

$$x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$$

Ist dagegen x positiv, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von 1 äquivalent zu

$$-\sqrt{1-3x^2} < x-1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-3x^2} > 1-x$$

Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu

$$1-3x^2 > (1-x)^2 = x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \quad 4x^2-2x < 0$$

Betrachten wir die Faktorenzerlegung $4x^2-2x = (-2x)\cdot(1-2x)$, so finden wir für den zweiten Faktor wegen $x > 0$ und damit $-2x < 0$, dass diese Ungleichung äquivalent zu $1-2x > 0$ bzw. zu $x < \frac{1}{2}$ ist. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist zudem $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, so dass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).

Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right)\setminus\{0\}$ die Ungleichung erfüllen. ❑

Aufgabe - MO241032. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen gelten!

$$2\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$$

Lösungshinweise: Zunächst beweisen wir die linke Ungleichung. Für alle $x > 1$ gilt stets

$$\begin{aligned}
&x^2+x < x^2+x+\tfrac{1}{4} && \\
&x\cdot(x+1) < \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 && \text{I zusammenfassen} \\
&\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} < x+\tfrac{1}{2} && \text{I radizieren} \\
&2\cdot\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-x\right) < 1 && \text{I } -x \text{ I } \cdot 2 \\
&2\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) < \tfrac{1}{\sqrt{x}} && \text{I } :\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung beweisen. Die rechte Ungleichung beweisen wir nach dem gleichen Prinzip:

$$\begin{aligned}
&x^2-x < x^2-x+\tfrac{1}{4} && \text{I zusammenfassen} \\
&x\cdot(x-1) < \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 && \text{I radizieren} \\
&\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} < x-\tfrac{1}{2} && \text{I } -x \text{ I } \cdot(-2)
\end{aligned}$$

$$2 \cdot \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} - x\right) < 1 \qquad \text{I} : \sqrt{x}$$
$$2 \cdot \left(\sqrt{x} - 1\right) > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Damit ist auch diese Ungleichung bewiesen (die Einschränkung $x \geq 1$ ist für die Definition von $\sqrt{x-1}$ notwendig, wurde aber im Beweis anderweitig nicht verwendet). ❑

Aufgabe - MO261035. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen gelten!

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

Lösungshinweise: Für jedes $x > 1$ gilt $0 < 9x + 8$. Wir addieren auf beiden Seiten $27x^3 + 54x^2 + 27x$ und erhalten

$$27 \cdot (x^3 + 2x^2 + x) < 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

und fassen zusammen zu

$$27 \cdot x \cdot (x+1)^2 < (3x+2)^3$$

Da alle Faktoren positiv sind, können wir als äquivalente Umformung radizieren und erhalten

$$3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x+1)^2} < 3x + 2$$

Nach Division durch $\sqrt[3]{x}$ finden wir

$$3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} < 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Nun können wir das Umformen abschließen und erhalten die zu beweisende linke Ungleichung

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Für jedes $x > 1$ gilt aber auch $8 < 9x$. Wir addieren auf beiden Seiten

$$27x^3 - 54x^2 + 27x$$

und erhalten

$$27 \cdot (x^3 - 2x^2 + x) < 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

und fassen zusammen zu

$$27 \cdot x \cdot (x-1)^2 < (3x-2)^3$$

Da alle Faktoren für $x > 1$ positiv sind, können wir als äquivalente Umformung radizieren und erhalten

$$3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x-1)^2} < 3x - 2$$

Nach Division durch $\sqrt[3]{x}$ finden wir

$$3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} < 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Nun können wir das Umformen abschließen und erhalten die zu beweisende rechte Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

❑

Ergänzung: Wir können die zu beweisende Ungleichungskette nach Division durch $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ äquivalent umformen zu

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) < \frac{1}{x} < \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Es gilt die (verallgemeinerte) BERNOULLIsche[3] Ungleichung:

$$(1+z)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot z \text{ für } z \geq -1 \text{ und } \alpha \geq 0.$$

Gemäß der Einleitung zu den MO-Aufgaben „… *Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“* kann dieser Sachverhalt genutzt werden.

Aufgabe - MO500943. Es seien a und b reelle Zahlen mit $3a \geq b$ und $3b \geq a$. Man beweise, dass alle Wurzeln in der Ungleichung

$$\sqrt{a+b} \cdot \left(\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}\right) \leq 4\sqrt{ab}$$

definiert sind und dass die Ungleichung gültig ist.

Lösungshinweise: Aus $3a \geq b$ und $3b \geq a$ folgt $9a \geq a$ und somit $a \geq 0$, und mit analoger Argumentation $b \geq 0$. Also gilt

[3] Benannt nach JAKOB BERNOULLI (1655 – 1705) Schweizer Mathematiker und Physiker.

$$a+b \geq 0 \quad ; \quad 3a \geq b \quad ; \quad 3b \geq a \quad ; \quad ab \geq 0$$

Damit sind alle Wurzeln definiert. Außerdem gilt $3ab \geq a^2$ und $3ab \geq b^2$ und somit $8ab - (a+b)^2 \geq 0$. Schließlich gilt für alle reellen Zahlen a und b

$$0 \leq 4 \cdot (a-b)^4 = 4 \cdot (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)$$

Die Summanden lassen sich geschickt aufteilen zu

$$-3a^4 + 4a^3b + 14a^2b^2 + 4ab^3 - 3b^4 \leq a^4 - 12a^3b + 38a^2b^2 - 12ab^3 + b^4$$

Dies ist äquivalent zu

$$(a^2 + 2ab + b^2)(-3a^2 + 10ab - 3b^2) \leq (-a^2 + 6ab - b^2)^2$$

Alle Umformungsschritte waren umkehrbar (insbesondere der erste und vierte Schritt, da auf beiden Seiten der ersten und vierten Ungleichung nichtnegative Ausdrücke stehen), und da die letzte Ungleichung wahr ist, ist die gegebene Ungleichung als richtig nachgewiesen. ❑

Aufgabe 4 - MO280934. Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

gilt!

Lösungshinweise: Die zu zeigende Ungleichung ist symmetrisch in x und y, sodass wir o.B.d.A. $y \geq x$ annehmen können. Durch Multiplikation mit $y^6 > 0$ geht sie äquivalent über in

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{y^6 \cdot \sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{y^6}{x^6} + 1$$

bzw. nach der Substitution $t = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$ in $\frac{1}{t} + t^{13} \geq t^{12} + 1$. Multiplizieren wir beide Seiten mit t, so finden wir

$$t^{14} - t^{13} - t + 1 \geq 0$$

also

$$(t^{13} - 1) \cdot (t - 1) \geq 0$$

Wegen $t \geq 1$ ist auch $t^{13} \geq 1$. Somit sind beide Faktoren nicht negativ und die letzte Ungleichung ist erfüllt. Da alle Umformungen äquivalent waren, gilt auch die Ausgangsungleichung. ❑

Aufgabe - MO251022. Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+3b}<\sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}$$

Lösungshinweise: Es gilt $a^2+3ab<a^2+3ab+2b^2=(a+b)(a+2b)$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt auch $\sqrt{a^2+3ab}<\sqrt{a^2+3ab+2b^2}$.

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung der Wurzelgesetze und Addition von $2a+3b$ erhalten wir

$$a+(a+3b)+2\sqrt{a}\sqrt{a+3b}<(a+b)+(a+2b)+2\sqrt{a+b}\sqrt{a+2b}$$

Unter Benutzung der binomischen Formel ergibt sich daraus

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+3b}\right)^2<\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}\right)^2$$

Weil für reelle Zahlen u und v aus $u^2<v^2$ stets $|u|<|v|$ folgt, gilt weiter

$$\left|\sqrt{a}+\sqrt{a+3b}\right|<\left|\sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}\right|$$

Da die Terme in den Beträgen positiv sind, können die Betragszeichen weggelassen werden und es gilt die ursprüngliche Behauptung. ❑

Rationale und irrationale Zahlen

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [4].

Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n>0$ und $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2\cdot n^2=m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

[4] Eine reelle Zahl r heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen m und n mit $n>0$ und $r=\frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

Beweisvariante: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Dies ist gleichbedeutend zur Aussage, dass es eine positive ganze Zahl n gibt, so dass $n \cdot \sqrt{2}$ eine ganze Zahl ist.

Nun wenden wir als Lösungsansatz das Extremalprinzip. In der Zahlenmenge mit der angenommenen Eigenschaft gibt es stets ein kleinstes Element (es sei dies die Zahl *k*, „kleinste Zahl“ als Extremaleigenschaft). Dann ist auch $k_0 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot k < 0.5 \cdot k$ ganzzahlig und kleiner als k. Zudem hat $k_0 < k$ wegen

$$k_0 \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot k \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot k - k \cdot \sqrt{2}$$

auch die Eigenschaft, dass ihr Produkt mit $\sqrt{2}$ ganzzahlig ist – im Widerspruch zur Extremaleigenschaft von k. ❑

Diese als bekannt vorausgesetzte Aussage wurde in einer MO-Aufgabe verallgemeinert.

Aufgabe MO301022. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist.

(Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.)

Lösungshinweise: Für eine Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, gilt $n > 1$, weil sowohl $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ Quadratzahlen sind.

Wir nehmen an, $\sqrt{n}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen r und s mit $s > 0$ und $\sqrt{n} = \frac{r}{s}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $n \cdot s^2 = r^2$. Wegen $n > 1$ gilt auch $r^2 > 1$ und damit $r > 1$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von s^2 und von r^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primfaktoren der Zahl n. Jedoch muss in n ein Primfaktor in ungerader Anzahl auftreten, denn andernfalls wäre n eine Quadratzahl. Somit tritt dieser Primfaktor auf der linken Seite in ungerader Anzahl und auf der rechten Seit in gerader Anzahl auf. Das widerspricht der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{n}$ rational ist, d.h. $\sqrt{n}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}, \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind die Ergebnisse selbst wieder rationale Zahlen ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei r eine rationale und t eine irrationale Zahl. Wir nehmen an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, s sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.
Wir nehmen an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, p sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Wird die Differenz als Summe mit einem negativen Summanden und der Quotient als Produkt mit dem Reziproken des Faktors interpretiert, ist der Nachweis auch für Differenz und Quotient erbracht.

Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

$$\underbrace{\left(2+\sqrt{2}\right)}_{irrational} + \underbrace{\left(2-\sqrt{2}\right)}_{irrational} = 4,$$

$$\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right) = 2.$$

Aufgabe – MO290934. Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a und b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt.

Lösungshinweise: Für die gegebenen rationalen Zahlen a und b gilt für die rationale Zahl $x = \frac{a+b}{2}$ die Ungleichung $a < x < b$.

Die Zahl $y = x + (b - x) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ stets

$$x < x + (b - x) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = y$$

und

$$y = x + (b - x) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) < x + (b - x) \cdot 1 = b.$$

Also gilt für die rationale Zahl x und die irrationale Zahl y die Ungleichungskette $a < x < y < b$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, geeignete rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich wird.

Aufgabe MO221033. Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösungshinweise: Angenommen, die Zahl $z=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ wäre rational. Wir formen die Gleichung um:

$\sqrt{7}=z-\sqrt{2}-\sqrt{5}$	I quadrieren
$7=z^2-2\cdot z\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+2+2\cdot\sqrt{10}+5$	I zusammenfassen
$2\cdot z\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=z^2+2\cdot\sqrt{10}$	I quadrieren
$4\cdot z^2\cdot\left(2+2\cdot\sqrt{10}+5\right)=z^4+4\cdot z^2\cdot\sqrt{10}+40$	I zusammenfassen
$4\cdot z^4\cdot\sqrt{10}=z^4-28\cdot z^2+40$	I: $(4\cdot z^2)$
$\sqrt{10}=\frac{z^4-28\cdot z^2+40}{4\cdot z^2}$	

Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen Produkte, Summen, Differenz und Quotienten von rationalen Zahlen. Folglich ist die rechte Seite selbst eine rationale Zahl, im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{10}$ (da 10 nicht Quadratzahl ist). Damit ist die obige Annahme falsch und der Beweis erbracht. ❑

Aufgabe MO201031. Man stelle fest, ob die Zahl

$$x=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{1989+\sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, x sei eine rationale Zahl. Dann ist auch die Zahl

$$((((x^2-1)^2-2)^2-3)^2\ldots-1988)^2-1989=\sqrt{1990}$$

rational, da nur Produkte und Differenzen gebildet werden. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass 1990 nicht Quadratzahl und folglich $\sqrt{1990}$ eine irrationale Zahl ist. ❑

Hinweis: Würden wir die Aufgabe angepasst im Jahr 2025 stellen, führt das Umstellen bis zur innersten Wurzel wegen $\sqrt{2025}=45$ nicht zum Ziel. Stattdessen formen wir um bis zu

$$((((x^2-1)^2-2)^2-3)^2 \ldots -2022)^2-2023=\sqrt{2024+\sqrt{2025}}=\sqrt{2069}$$

Aufgabe MO381024. Beweisen Sie: Zu jeder rationalen Zahl a existiert ein Paar $(x;y)$ von rationalen Zahlen, so dass $x^2=y^2+a$ gilt.

Lösungshinweise: Ein solches Paar können wir wie folgt wählen. Wir setzen zunächst

$$y=\frac{a-1}{2}$$

Dann finden wir

$$x^2=y^2+a=\frac{a^2-2a+1}{4}+a=\frac{a^2+2a+1}{4}=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

Wir können also $x=\frac{a+1}{2}$ wählen. Die Zahlen x und y sind rational und erfüllen die geforderte Gleichung.

Lösungsvariante: Aus $a=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ können wir für eine beliebige rationale Zahl $p\neq 0$ das folgende Gleichungssystem aufstellen.

$$\begin{aligned} x-y&=p\\ x+y&=\frac{a}{p}\end{aligned}$$

Lösen wir dieses System auf, erhalten wir

$$x=\frac{1}{2}\cdot\left(p+\frac{a}{p}\right)\quad;\quad y=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{p}-p\right)$$

Beide Zahlen x und y sind offensichtlich wieder rational. Wir können die geforderte Aussage bestätigen:

$$x^2=\frac{1}{4}\cdot\left(p^2+2a+\frac{a^2}{p^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(p^2-2a+\frac{a^2}{p^2}\right)+\frac{4\cdot a}{4}=y^2+a$$

❑

Aufgabe MO470931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen a gibt, für welche die Zahl $a+0{,}25$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Lösungshinweise: Für jede positive ganze Zahl k können wir $a=k\cdot(k+1)$ wählen. Dann gilt

$$a+\frac{1}{4}=k\cdot(k+1)+\frac{1}{4}=k^2+k+\frac{1}{4}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$$

Da für k unendlich viele Werte eingesetzt werden können, ist die Existenz von unendlichen vielen Zahlen a mit der geforderten Eigenschaft gezeigt. ❑

Lösungsvariante: Wir nehmen an, dass es eine rationale Zahl k mit $a = k^2 - \frac{1}{4}$ gibt, dann gilt die Faktorisierung $a = \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)$. Wählen wir also k in der Form $k = \frac{1}{2} \cdot (2n + 1)$ für $n \geq 1, 2, 3, \ldots$, so finden wir die Zahlen $a = n \cdot (n + 1)$.

Bundeswettbewerb Mathematik 2024

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist die Bildung & Begabung gGmbH mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung gGmbH von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs sind die LEPPER Stiftung und der Arbeitgeberverband Gesamtmetall.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In zwei Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.

In der dritten Runde, dem Kolloquium, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt."

Die Teilnehmerzahlen[5] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Jahr 2021/22).

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2020/21	1182	366 (31.0%)	45 (3.8%)	17 (37.8%)
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)
2022/23	1764	576 (32.7%)	67 (3.8%)	36 (53.7%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2022/23 in Sachsen wieder weit über dem Durchschnitt!

Unter den 67 sächsischen Teilnehmern wurden 3 erste, 2 zweite und 25 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmenden gehörte zu den Preisträgern (44.8%, bundesweit 26.5%). Dazu kamen noch 30 Anerkennungsurkunden (44.8%). Somit wurden in Sachsen 89.6% aller Teilnehmenden ausgezeichnet (bundesweit 87.6%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 30 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2020/21	193	57 (29.5%)	9 (4.7%)	3 (33.3%)
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)
2022/23	246	78 (31.5%)	15 (6.1%)	8 (53.3%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

[5] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

In der 2. Runde 2022/23 wurden insgesamt 121 Preise vergeben (49.2% aller Teilnehmer), darunter 1 zweiter und 4 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (33.3% aller sächsischen Teilnehmer, darunter 1 Starter aus den Klassenstufen 9/10). Ende November/Anfang Dezember fanden die regionalen Auszeichnungsveranstaltungen statt. Die erfolgreichen Jugendlichen aus Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen wurden am 4. Dezember in der KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft (einem internationalen Unternehmen aus dem weltweiten KPMG-Netzwerk in den Bereichen Wirtschaftsprüfung, Steuerberatung, Rechtsberatung und Unternehmens- bzw. Managementberatung mit Sitz in Berlin) empfangen, darunter aus Sachsen

II. Preis

TOBIAS PÖTZSCH	(Geschw.-Scholl-Gymn. Taucha),

III. Preise

WOLF-PETER DÖGE	(Evang. Kreuzgymn. Dresden),
TILMAN FERCHLAND	(Ostwald-Gymn. Leipzig),
MELIA HAASE	(Gymn. Zschopau),
ENRICO MUTH	(Mathesius-Gymn. Rochlitz).

Im Festvortrag zeigte Prof. Dr. GÜNTER M. ZIEGLER (Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik) Beispiele aus dem von ihm und MARTIN AIGNER 2002 erstmal in deutscher Sprache herausgegebenen „Buch der Beweise“ (M. AIGNER, G.M. ZIEGLER. *Das BUCH der Beweise.* Springer, Berlin 2014, ISBN 3-540-42535-7; 4. Auflage; ISBN 978-3-662-44456-6). Äußerst informativ und zugleich unterhaltsam referierte er über die Schönheit der Mathematik.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2023 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten. Einsendeschluss ist der 4. März 2024 (Datum des Poststempels).

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. LÖFFLER.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. LANGMANN, E. QUAISSER, E. SPECHT: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. SPECHT, E. QUAISSER und P. BAUERMANN herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396

Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids Elemente[6]

Funfzehn Bücher
auf dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[7]

[Im Zehnten Buch wird der Beweis geführt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Es werden zunächst die Textstellen aus den Büchern zitiert, auf die im Beweis hingewiesen wird.]

Erklärung
Der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen

□AB	daſ Quadrat der geraden linie AB.
A : B	die Verhältnis der A zu B.
A : B = C : D	die A verhält ſich zu B, wie C zu D.
A ∩ B	die Flächen A, B, ſind commenſurabel; oder die geraden Linien, A, B, ſind in Länge commenſurabel

(S. 23) Erſtes Buch. Der 47. Satz. In jedem rechtwinklichen Triangel, ABC, iſt das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den Quadraten der ihn einſchlieſſenden Seiten, BA, AC, gleich.

(S. 112) Siebentes Buch. Definitionen.

1. Die Einheit iſt, nach welcher jedes Ding Eins heißt.
2. Eine Zahl aber iſt die auf Einheiten beſtehende Vielheit.
3. Eine kleinere Zahl iſt ein Theil der größeren, wenn die gröſſere ſich von ihr genau meſſen läßt.

...

11. Eine Primzahl iſt, welche ſich nur von der Einheit genau meſſen läßt.

[6] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[7] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.

...

16. Wenn zwey Zahlen einander vervielfältigen, ſo heißt die daraus entſtehende Zahl, oder das Product, eine Flächenzahl; die Zahlen aber, welche einander vervielfältigt haben, heiſſen ihre Seiten (Factoren).

...

18. Eine Quadratzahl iſt, deren beyde Seiten einander gleich ſind.

(S. 127) Siebentes Buch. Der 24. Satz.

Wenn eine Verhältnis in den kleinſten Zahlen, A, B, gegeben iſt: ſo ſind ſolche Primzahlen zu einander.

(S. 143) Achtes Buch. Der 14. Satz.

Wenn Quadratzahlen, A, B, einander meſſen; ſo werden auch ihre Seiten, C, D, einander meſſen. Und wenn die Seiten, C, D, einander meſſen; ſo werden auch die Quadratzahlen, A, B, einander meſſen.

(S. 161) Neuntes Buch. Der 23. Satz.

Die Summe einer ungeraden Menge von ungeraden Zahlen, AB, BC, CD, iſt eine ungerade Zahl.

(S. 167) Zehntes Buch. Definitionen.

1. Commenſurabel heiſſen die Gröſſen, ſo ſich von einem und demſelben Maaße meſſen laſſen.

2. Incommenſurabel aber ſind die, zu denen ſich gar kein gemeinſchaftliches Maaß finden kann.

(S. 252) Zehntes Buch. Der 117. Satz.

In jedem Quadrate, ABCD, iſt die Diagonale, AC, mit der Seite, AB, in Länge incommenſurabel.

Geſetzt AC ſey ∩ AB. Folglich verhielten ſich AC, AB, wie Zahlen. Es ſeyen EF, G, die kleinſten Zahlen in dieſer Verhältnis. Nun iſt offenbar AC > AB. Folglich iſt EF unmöglich die Einheit, folglich eine Zahl.

Da AC : AB = EF : G, ſo iſt □AC : □AB = EF^2: G^2. Nun iſt (1, 47. S.) □AC =2 □AB. Folglich iſt $EF^2 = 2\ G^2$, folglich EF^2, und daher (9, 23. S.) EF, eine gerade Zahl, folglich iſt G ungerade. Denn wäre G auch gerade, ſo würden EF und G von der Zahl Zwey gemeſſen werden, da ſie doch die kleinſten in ihrer Verhältnis, folglich (7, 24. S.) Primzahlen zu einander ſind. Halbire EF in H, ſo iſt $EF = 2\ EH$, folglich (8, 11. S.) $EF^2 = 4\ EH^2$. Nun iſt $EF^2 = 2\ G^2$. Folglich $G^2 = 2\ EH^2$. Folglich G^2, und daher (9, 23. S.) G, gerade. Nun war G auch ungerade; welches offenbar ſich wiederſpricht.

Ein andrer Beweis. Wäre AC ∩ AB, ſo mache AC : AB = EF : G, ſo daß EF, G, die kleinſten Zahlen in dieſer Verhältnis, folglich (7, 24. S.) Primzahlen zu einander ſind.

Da AC : AB = EF : G, so ist □AC : □AB = EF²: G². Nun ist □AC =2 □AB. Folglich ist EF² = 2 G². Demnach wird EF² von G, folglich (8, 14. S.) EF von G gemessen. Nun wird G von sich selbst gemessen. Folglich werden EF, G, von G gemessen. Nun ist G nicht die Einheit. Denn wäre G die Einheit, so würde, weil EF² = 2 G², die EF² = 2 seyn, welches unmöglich. Demnach ist G eine Zahl, und es werden EF, G, von einer Zahl G gemessen, welches, weil EF, G, Primzahlen zu einander, unmöglich ist.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2023

Aufgabe 1-2 (Individualwettbewerb) der 14. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade (online, 2020). Wir nennen eine positive ganze Zahl N infektiös, wenn es 1000 aufeinanderfolgende nichtnegative ganze Zahlen gibt, sodass die Summe aller ihrer Ziffern N ergibt.

Bestimme alle infektiösen positiven ganzen Zahlen.

Lösungshinweise: Alle ganzen Zahlen≥ 13500 sind infektiös.

Betrachten wir 1000 beliebige nicht-negative aufeinanderfolgende ganze Zahlen, dann durchlaufen die drei letzten Ziffern die Menge $M = \{000, 001, \dots, 999\}$. Die Summe aller Ziffern dieser Menge beträgt $3 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 13500$, weil jede Ziffer an jeder der 3 Dezimalstellen genau 100-mal auftritt. Deshalb kann eine infektiöse Zahl nicht kleiner als 13500 sein.

Nun betrachten wir eine nicht-negative ganze Zahl $N \geq 13501$. Wir können N als $N = d \cdot 1000 + r$ schreiben $(d \geq 0; r \in M)$. Wir konstruieren eine Zahl X über die Zifferndarstellung

$$X = \overline{\underbrace{11\dots11}_{d-mal} r_3 r_2 r_1}$$

mit den Ziffern r_3, r_2, r_1, so dass $r = 100 \cdot r_3 + 10 \cdot r_2 + r_1$ gilt. Vernachlässigen wir zunächst die letzten drei Ziffern, so haben die $(1000 - r)$ Zahlen $X, X + 1, X + (999 - r)$ jeweils die Ziffernsumme d und die r Zahlen $X + (1000 - r), \dots, X + 999$ jeweils die Ziffernsumme $d + 1$ (weil an der Tausenderstelle eine 2 anstatt einer 1 steht). Somit beträgt die Ziffernsumme aller 1000 Zahlen $X, X + 1, \dots, X + 999$

$$(1000 - r) \cdot d + r \cdot (d + 1) + 13500 = 1000 \cdot d + r + 13500 = N$$

Damit ist gezeigt, dass jede nicht-negative ganze Zahl $N \geq 13500$ infektiös ist. ❑

Monatsaufgabe 12/2023[8]

Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

Termine

Start des Bundeswettbewerbs Mathematik
01.12.2023, Aufgaben unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/aufgaben.
(Einsendeschluss: 4. März 2024)

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter https://www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
Online-Anmeldung ab 03.01.2024 möglich, Anmeldeschluss: 08.03.2024

Weihnachtsvorlesung in Mathematik an der TU Chemnitz: Herr Prof. Dr. MARTIN STOLL (Professur für Wissenschaftliches Rechnen an der Fakultät für Mathematik) plaudert über „Komplexe Netzwerke und das Kleine-Welt-Phänomen“.
21.12.2023, 17:15 bis 18:45 Uhr, Veranstalter: Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (Reichenhainer Str. 90, Zentrales Hörsaal- und Seminargebäude 114).
https://www.tu-chemnitz.de/tu/termine/detail.html?id=22928

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Vorbereitung für die 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“ (detailliertes Programm unter http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
20.01.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. NORMAN BITTERLICH, zu Gast bei Wuttke-Ingenieure GmbH (Markt 5, 09111 Chemnitz).
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

Jugend-forscht-Regionalwettbewerb – wir kommen! Tipps zur Vorbereitung: Tipps und Erfahrungen, wie sich Jungforschenden bestmöglich auf den Wettbewerbstag vorbereiten können: vom Poster bis zur Kleidung!
23.01.2024, 17:00 bis 18:00 Uhr, online bundesweit. Anmeldung bis zum 23.01.2024 unter: https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/regionalwettbewerb-wir-kommen-tipps-zur-vorbereitung.html

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.01.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Wissenschaft:LIVE! „Climate Engineering – ein Plan zur Kühlung der Erde?“ Dr. ULRIKE NIEMEIER vom Max-Planck-Institut für Meteorologie untersucht das Ausbringen von Sulfat-Aerosolen in die Stratosphäre mit unterschiedlichen Klimamodellen. Sie erklärt in ihrem Vortrag, was die Sulfat-Partikel in der Stratosphäre bewirken und zeigt Effekte, Chancen und Risiken der Methode auf.
30.01.2024, 15:30 bis 16:45 Uhr, online bundesweit. Anmeldung bis zum 30.01.2024 unter: https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-climate-engineering-ein-plan-zur-kuehlung-der-erde.html

Inhalt

Vorwort 2
Thema 25.02 – Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken 3
Rationale und irrationale Zahlen 11
Bundeswettbewerb Mathematik 2024 16
In alten Mathe-Büchern geblättert 19
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2023 21
Monatsaufgabe 12/2023 22
Termine 22

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

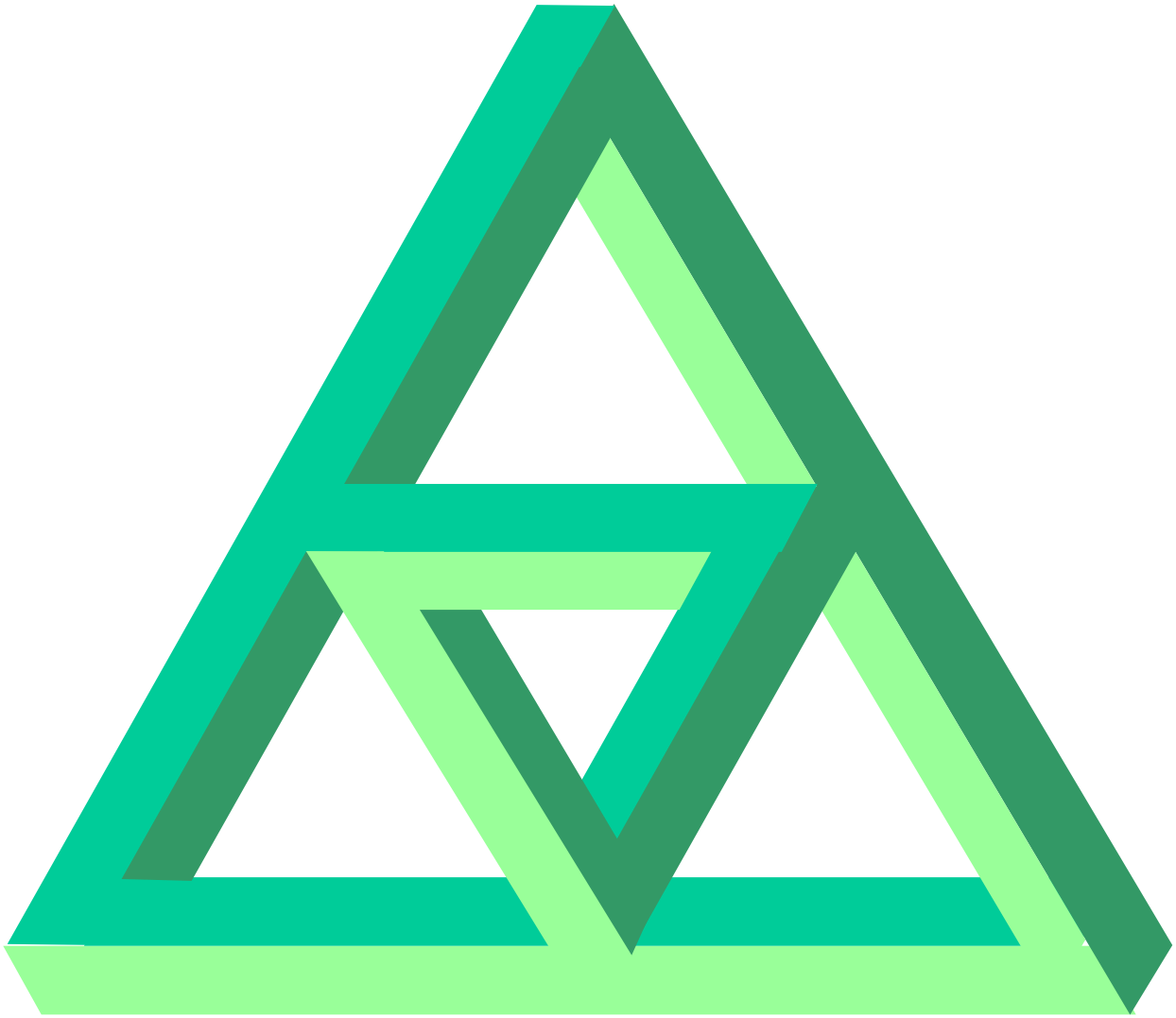
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 1/2024 (Januar 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir blicken auf die Aufgabe **MO630924** und diskutieren Flächenzerlegungen. Es ist Anliegen dieser MO-Vorbereitung, sich wiederholende Themen erneut aufzugreifen. Zuletzt waren Zerlegungen von Dreiecken und Quadraten im Heft 3/22 Gegenstand der Diskussion. In der Aufgabe **KZM 2-4** wird ebenfalls eine solche Fragestellung behandelt.

In der Mathematik-Geschichte spielten bereits vor unserer Zeitrechnung Flächenhalbierungen eine wichtige Rolle. Wir zeigen einige solche Aufgabenstellungen.

Wir setzen den Beitrag zu rationalen und irrationalen Zahlen fort und untersuchen, ob gegebene Ausdrücke rational sind. Es wird gezeigt, wie mit Abschätzungen für Wurzelausdrücke ohne Verwendung von Rechentechnik umzugehen ist.

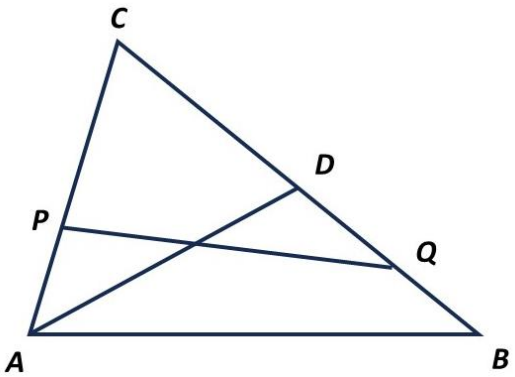
[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12.5 – Zerlegung einer Dreiecksfläche

Aufgabe 12.16 – MO630924. In einem Dreieck ABC sei ein Punkt P auf der Seite $\overline{AC}$ gegeben, wobei P näher an A als an C liegt und nicht mit A übereinstimmt. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei D. Weiter ist Q ein innerer Punkt der Strecke BD.

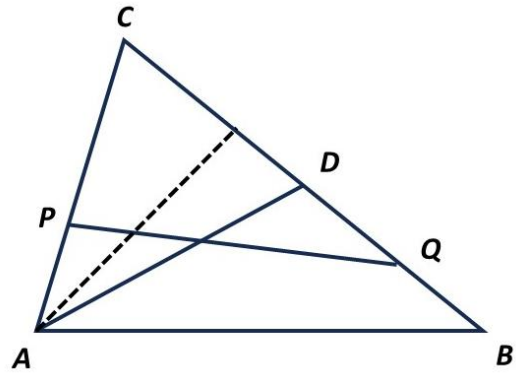
a) Weisen Sie nach: Haben die Dreiecke ADC und PQC gleiche Flächeninhalte, so teilt die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts.
b) Beschreiben Sie eine Konstruktion, mit der man für ein beliebig vorgegebenes Dreieck ABC und Punkte P und D wie oben einen Punkt Q auf der Strecke $\overline{BD}$ ohne das Abmessen konkreter Seitenlängen so konstruieren kann, dass die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt.
c) Begründen Sie, dass der nach Ihrer Konstruktion erzeugte Punkt Q im Inneren der Strecke $\overline{BD}$ liegt und die geforderte Eigenschaft besitzt, dass die Gerade $\overline{PQ}$ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt.

Hinweis: Wir beginnen die Lösungssuche immer mit einer Skizze und vermeiden dabei die Darstellung von Spezialfällen (soweit diese nicht im Aufgabentext gefordert werden), um nicht scheinbare Zusammenhänge fälschlicherweise zu verallgemeinern. Erst wenn kein Lösungsansatz gelingt, versuchen wir uns an Spezialfällen, z.B. am gleichseitigen Dreieck.



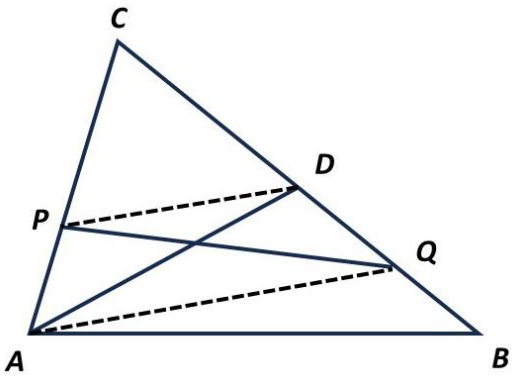
Lösungshinweise zu Teil a): Betrachten wir in den Dreiecken ADC und ABC den Abstand von A zu BC als gemeinsame Höhe, dann ist die Grundseite DC des Dreiecks ADC halb so lang wie die Grundseite BC des Dreiecks ABC, womit der Flächeninhalt des Dreiecks ADC (aufgrund der Flächenformel $F = \frac{1}{2}gh$ für die Grundseite g und die darauf stehende Höhe h) halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Haben die Dreiecke ADC und PQC gleiche Flächeninhalte, so ist damit aber auch der Flächeninhalt des Dreiecks PQC halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, womit die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt.



Lösungshinweise zu Teil b): Wir konstruieren eine Parallele zu PD durch den Punkt A. Da die Gerade PD die Gerade BC in einem Punkt schneidet, gilt dies auch für diese Parallele. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden BC ist der gesuchte Punkt Q.

Lösungshinweise zu Teil c): Nach Konstruktion liegt Q auf derselben Seite von PD wie A (und B) und nach Voraussetzung gilt $|\overline{AP}| < |\overline{PC}|$. Daraus folgt nach dem 1. Strahlensatz (für die Geraden CA und CB mit deren Schnittpunkt C und den Parallelen PD und AQ) auch $|\overline{QD}| < |\overline{DC}| = |\overline{BD}|$. Da Q auf derselben Seite von PD liegt wie B und $|\overline{QD}| < |\overline{BD}|$ gilt, muss Q im Inneren der Strecke BD liegen.



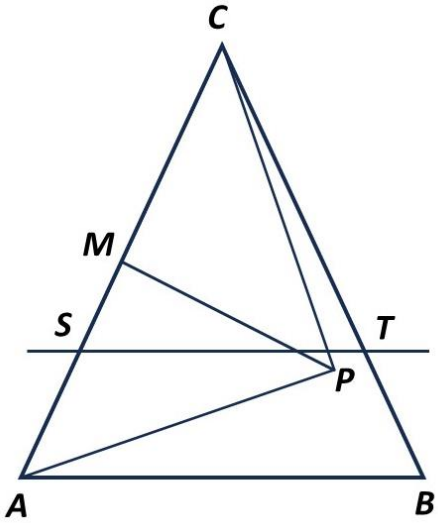
Da A und Q auf einer Parallelen zu PD liegen, haben in den beiden Dreiecken ADP und PQD die Höhen aus A bzw. Q auf die Gerade PD die gleiche Länge. Da die beiden Dreiecke ADP und PQD die Seite PD gemeinsam haben, haben sie auch gleichen Flächeninhalt. Fügen wir zu beiden Dreiecken das Dreieck PDC hinzu, so haben auch die beiden Dreiecke ADC und PQC gleiche Flächeninhalte. Mit dem Ergebnis aus Teil a) teilt dann die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts.

❑

Aufgabe 12.17 – MO101032. Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.

Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise:
Analyse. Sei *ST* die gesuchte Parallele zu *AB*. Die Dreiecke *STC* und *ABC* sind einander ähnlich, weil deren entsprechenden Innenwinkeln gleich groß sind. Damit der Flächeninhalt des Dreiecks *STC* halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*, muss das Dreieck *STC* durch eine Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ aus dem Dreieck *ABC* hervorgehen. Dieser Faktor kann geometrisch aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck konstruiert werden.



Konstruktionsbeschreibung:
1) Die Kreise um A durch C sowie um C durch A schneiden sich in zwei Punkten. Sie seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.
2) Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade AC im Punkt M.
3) Der Kreis um M durch C schneidet die Gerade P_1P_2 in zwei Punkten. Einer davon werde mit P bezeichnet.
4) Der Kreis um C durch P schneide die Gerade AC im Punkt S.
5) Die Parallele zu AB durch S ist die gesuchte Gerade.

Begründung: Der mit den Schritten 1) und 2) konstruierte Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\ddot{AC}$ und die Gerade P_1P_2 ist ihre Mittelsenkrechte (in der Skizze hier nur als $\overline{MP}$ eingezeichnet). Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AC}$, sodass das Dreieck ACP nach dem Satz des THALES rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P ist.

Weiterhin liegt P auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$, sodass $|\overline{AP}| = |\overline{CP}|$, also auch $\sphericalangle PAC = \sphericalangle ACP = 45°$ gilt (letzteres aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck *APC*). Dann ist auch $|\overline{CS}| = |\overline{CP}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |\overline{AC}|$.

Sei T der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch S mit BC. Dann geht das Dreieck STC also aus dem Dreieck ABC durch Streckung um den Faktor $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mit Zentrum *C* hervor. Damit ist $F_{\Delta STC} = k^2 \cdot F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot F_{\Delta ABC}$, wie gewünscht. ❑

Bemerkung: Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC wurde nicht benutzt und kann demnach auch als Bedingung gestrichen werden.

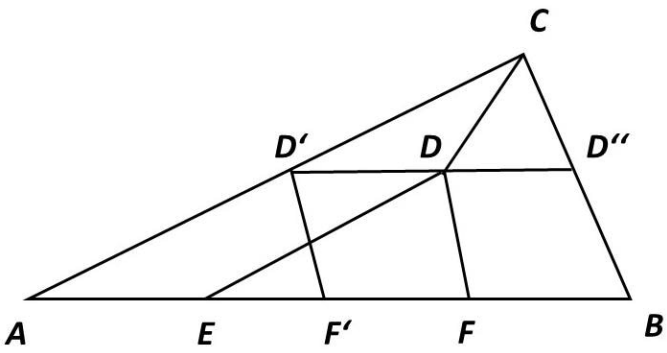
Bereits in der nächsten Runde dieser MO wurde die Thematik wieder aufgegriffen,

Aufgabe 12.18 – MO101046. Die Fläche eines Dreiecks *ABC* soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf $\overline{AB}$ zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und *F* liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks ABC, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks EFD sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.

Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise: Unter der Annahme, dass in einem Dreieck *ABC* ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck *EFD* existiert, können wir folgende Aussagen machen:



(1) Dreieck *EFD* ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck *ABC*.
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.
(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke $\overline{AE}$ in Richtung der Strecke $\overline{BA}$ entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.
(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt

$$\left|\overline{AD'}\right| : |\overline{AC}| = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $\overline{F'D'}$ und $\overline{FD}$ folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz

$$2 \cdot |\overline{FB}| = \left|\overline{F'B'}\right|, \text{ also } |\overline{FB}| = \left|\overline{F'F}\right|.$$

Konstruktionsbeschreibung: Wir teilen die Strecke $\overline{AC}$ im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3} \cdot AC$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3} \cdot AC$. Die zweite Kathete ist dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot AC$.

Durch den Teilpunkt D‘ wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D‘‘ und F‘.

Der Mittelpunkt von D’D‘‘ ist d, der von F‘B ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Begründung: Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets der Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Zusammenhänge:

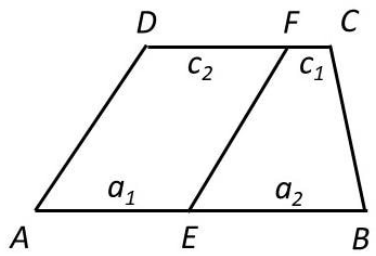
Wegen $\left|\overline{AD'}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot |\overline{AC}|$ und F’D‘ ∥ BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks AF’D‘ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke AF’D‘ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu. Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes F’BCD‘ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke D’D‘‘ und *F* die Strecke F‘B halbiert und *F’D*‘ gleich *FD* ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes *F’BCD*‘, also gleich dem des Dreiecks EFD. Damit muss auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muss. ❑

Aufgabe 12.18 – MO291023. Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $AB > CD$.

Man zeige, dass sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, wenn $|\overline{AB}| < 3 \cdot |\overline{CD}|$ gilt.

Lösungshinweise: Die Aufgabenstellung „genau dann…, wenn“ erfordert zwei Beweise.

Teil 1: Wenn sich das Trapez durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, dann gilt $|\overline{AB}| < 3 \cdot |\overline{CD}|$.



O.B.d.A. nehmen wir an, es gibt eine Gerade EF parallel zu AD mit der geforderten Eigenschaft $A_{AEFD} = A_{EBCF}$. Mit den Bezeichnungen $|\overline{AE}| = a_1$, $|\overline{EB}| = a_2$ sowie $|\overline{DF}| = c_1$, $|\overline{FC}| = c_2$ gilt laut Voraussetzung $a_1 + a_2 > c_1 + c_2$.

Laut Konstruktion ist $AEFD$ ein Parallelogramm und mithin gilt $a_1 = c_1$. Der Flächeninhalt ist also für die Höhe h durch $A_{AEFD} = h \cdot a_1$ festgelegt. Der Flächeninhalt des Trapezes $EBCF$ lautet: $A_{EBCF} = h \cdot \frac{1}{2} \cdot (a_2 + c_2)$. Nach Gleichsetzen beider Flächeninhalte finden wir:

$$\begin{aligned} h \cdot a_1 &= h \cdot \frac{a_2 + c_2}{2} && I \cdot 2 \\ 2 \cdot a_1 &= a_2 + c_2 && I + a_1 \\ 3 \cdot a_1 &= a_1 + a_2 + c_2 && I - c_2 \\ a_1 + a_2 &= 3 \cdot a_1 - c_2 \end{aligned}$$

Weil im Parallelogramm $a_1 = c_1$ gilt, können wir in der Gleichung a_1 durch c_1 ersetzen. Dann gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 3 \cdot c_1 - c_2 \\ |\overline{AB}| = a_1 + a_2 &= 3 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 - 4 \cdot c_2 < 3 \cdot (c_1 + c_2) = 3 \cdot |\overline{CD}| \end{aligned}$$

❑

Teil 2: Wenn $|\overline{AB}| < 3 \cdot |\overline{CD}|$ gilt, dann lässt sich das Trapez durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen.

Beweis: Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die Flächengleichheit erreicht werden kann, wann also die Gleichung $h \cdot a_1 = h \cdot \frac{a_2 + c_2}{2}$ erfüllt werden kann. Die einfache Umformung zu $2 \cdot a_1 = a_2 + c_2$ können wir wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot c_1 &= a_1 + a_2 + c - c_1 \\ a + c &= 4 \cdot c_1 \end{aligned}$$

Setzen wir $x = \frac{c_1}{c}$ (wobei $0 \leq x \leq 1$ gilt), und dividieren wir die letzte Gleichung durch c, erhalten wir:

$$\frac{a}{c} + 1 = 4x$$

also

$$a = (4x - 1) \cdot c$$

Die erhaltene Funktion für die Variable x ist linear. Betrachten wir die Werte an den Grenzen des Bereiches für x, so ergibt sich für $x \geq 0$ die Ungleichung $a \geq -c$. Jedoch wurde $a > c$ vorausgesetzt, so dass dies für alle $x > 1$ erfüllt ist. Für $x \leq 1$ erhalten wir $a \leq 3c$. Dies wiederum ist durch die Voraussetzung im Teil 2 erfüllt. Das heißt: Es existiert eine Parallele zu AD so, dass sie das Trapez in zwei Vierecke teilt und die Flächeninhalte der entstehenden Vierecke gleich groß sind. ❑

Rationale und irrationale Zahlen[3]

Aufgabe – MO031043. Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$. Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

Lösungshinweise: Wir vermuten $Z_1 < Z_2$. Da beide Seiten der Ungleichung positiv sind, kann quadriert werden und wir erhalten

$$7 + 2\sqrt{70} + 10 < 3 + 2\sqrt{57} + 19$$
$$2\sqrt{70} < 5 + 2\sqrt{57}$$

Nach erneutem Quadrieren finden wir

$$280 < 253 + 20\sqrt{57}$$

Da $\sqrt{57}$ größer als 2 ist, gilt diese Aussage und wegen der Umkehrbarkeit aller Schlüsse die Behauptung. ❑

Hinweis: Die Lösungsdarstellung ausgehend von der letzten Ungleichung wäre eleganter, jedoch erfordert dieser Ansatz sicherlich erst die gezeigten Umformungen.

Ein Ergebnisvergleich mittels Taschenrechner (5,809 < 6,090) ist wegen der Aufgabenstellung trotz der eindeutigen Aussage als Beweis nicht zulässig. Er sollte auch vermieden werden, weil dies für geringe Abstände nicht verallgemeinerungsfähig ist, zumindest aber eine Diskussion der Auswirkungen von möglichen Rundungsfehlern erfordert. Eine solche Diskussion kann in dieser Aufgabe wie in folgender Abschätzung geführt werden, die tatsächlich ohne technische Hilfsmittel ausgeführt werden kann:

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{7{,}29} + \sqrt{10{,}24} = 2{,}7 + 3{,}2 = 5{,}9$$
$$6{,}0 = 1{,}7 + 4{,}3 = \sqrt{2{,}89} + \sqrt{18{,}43} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$$

Aufgabe – MO251011

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, dass $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$ gilt!

[3] Fortsetzung zum Beitrag im Heft 12/2023.

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

Lösungshinweise zu Teil a): Aus den Angaben im Tafelwerk[4] ergibt sich, dass für die Wurzeln folgende Ungleichungen gelten

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \quad (1), \quad 2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83 \quad (2)$$
$$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45 \quad (3), \quad 2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65 \quad (4)$$

Aus (1) und (2) bzw. (3) und (4) folgt

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < 2{,}24 + 2{,}83 = 5{,}07 < 5{,}08 = 2{,}44 + 2{,}64 < \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

Lösungshinweise zu Teil b): Es gilt $\sqrt{40} < \sqrt{42}$. Daraus folgt

$$2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} < 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$$

Wegen $5 + 8 = 6 + 7$ erhalten wir

$$5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} + 8 < 6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} + 7$$
$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{8}\right)^2 < \left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)^2$$

Da beide Ausdrücke in den Klammern positiv sind, folgt unmittelbar die behauptete Ungleichung. ❑

Die Aufgabenstellung lässt vermuten, dass die Zahlenkonstellation verallgemeinert werden kann.

Aufgabe. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 0$ die folgende Ungleichung gilt

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+3} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}.$$

Lösungshinweise: Die Lösungsidee kann aus der vorhergehenden Aufgabe übernommen werden. Es gilt

$$\sqrt{n \cdot (n+3)} = \sqrt{n^2 + 3n} < \sqrt{n^2 + 3n + 2} = \sqrt{(n+1)(n+2)}$$

Daraus folgt

$$2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3} < 2 \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}$$

Wegen $n + n + 3 = n + 1 + n + 2$ erhalten wir schließlich

$$n + 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3} + n + 3 < n + 1 + 2 \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} + n + 2$$

[4] Eine schriftliche Berechnung der Wurzelabschätzungen auf dem Konzeptpapier wäre ebenfalls zulässig (aber aufwändig).

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right)^2 < \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$$

❑

Die bereits diskutierte Aufgabe der 25. MO verallgemeinert den Zahlenvergleich auf andere Weise. Für beliebige natürliche Zahlen $a > 0$ haben wir mit $b = 1$ den Beweis für folgende Aufgabe bereits erbracht.

Aufgabe - MO251022[5]. Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}.$$

Wir finden auch für die Aufgabe **MO031043** eine Verallgemeinerung. Für $n = 3$ wurde der Beweis bereits erbracht.

Aufgabe. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ die folgende Ungleichung gilt

$$\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{6n+1}.$$

Lösungshinweise: Es gilt

$$\sqrt{(2n+1)\cdot(3n+1)} = \sqrt{6n^2+5n+1} < \sqrt{6n^2+6n+1} = \sqrt{n\cdot(6n+1)}$$

Daraus folgt

$$2\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{3n+1} < 2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{6n+1}$$

Wegen $2n+1+3n+1 < n+6n+1$ für $n > 1$ erhalten wir schließlich

$$2n+1+2\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{3n+1}+3n+1 < n+2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{6n+1}+6n+1$$
$$\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}\right)^2 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{6n+1}\right)^2$$

❑

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Hinweis: Nutzen wir zur Kontrolle einen Taschenrechner, so finden wir für die linke Seite 0,1451... und für die rechte Seite 0,1823..., so dass an der Gültigkeit der Ungleichung keine Zweifel bestehen. Trotz des großen Unterschiedes beider Seiten ist diese Erkenntnis jedoch kein Beweis (zumal in der Aufgabenstellung das Ausrechnen ausdrücklich untersagt wurde).

Lösungshinweise: Da beide Seiten positiv sind, können wir die behauptete Ungleichung mit Exponent 3 potenzieren:

[5] s. Heft 12/2023

$$4 - 3 \cdot \sqrt[3]{4^2 \cdot 3} + 3 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 3^2} - 3 < 3 - 3 \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot 2} + 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 2^2} - 2$$

Fassen wir zusammen, erhalten wir

$$\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36}$$

Die Anzahl der Wurzeln hat sich nicht verringert und das Zwischenergebnis vereinfacht auf den ersten Blick nicht den Beweis.

Wir versuchen deshalb einen indirekten Beweis, d.h. wir nehmen an, es gelte $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. Da beide Seiten positiv sind, können wir mit Exponent 3 potenzieren:

$$4 - 3 \cdot \sqrt[3]{4^2 \cdot 3} + 3 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 3^2} - 3 \geq 3 - 3 \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot 2} + 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 2^2} - 2$$

Wir fassen zusammen und erhalten

$$\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36} \leq \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$$

Nach Division durch $\sqrt[3]{12}$ führt dies zu

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \leq \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

Weil aber $\sqrt[3]{2}$ größer als 1 ist, lässt sich die rechte Seite der letzten Ungleichung weiter nach oben abschätzen und es ergibt sich die Aussage: Aus $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ folgt $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Also muss die Annahme falsch sein und es gilt die Behauptung. ❑

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}} = 2$.

Hinweis: Hier verbietet sich prinzipiell ein Rechnereinsatz für einen Beweis, da die Gleichheit mit gerundeten Werten nicht gezeigt werden kann, auch wenn auf dem TR-Display eine „2.000“ angezeigt wird. Bei Gleichungen mit Quadratwurzeln lässt sich die Wurzelanzahl durch Quadrieren im Allgemeinen verringern (sofern das Quadrieren als äquivalente Umformung erlaubt ist).

Lösungshinweise: Offenbar gilt $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} < 2 \cdot 1.5 = 3$. Damit sind die Wurzeln definiert. Außerdem ist auch $0 < \sqrt{3 - \sqrt{8}} < \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, so dass die linke Seite der behaupteten Gleichung positiv ist. Wir können also mittels Quadrierens äquivalent umformen und erhalten:

$$\left(3 + \sqrt{8}\right) - 2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \left(3 - \sqrt{8}\right) = 6 - 2 \cdot \sqrt{3^2 - \sqrt{8}^2} = 4.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Die Gleichheit lässt sich aber auch einfacher beweisen, wenn wir die Aussage $3 \pm \sqrt{8} = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2$ erkennen, denn dann gilt

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left|\sqrt{2}+1\right| - \left|\sqrt{2}-1\right|$$

Da aber beide Terme in den Betragsstrichen positiv sind, wir die Betragsstriche als weglassen können, finden wir sofort die Behauptung.

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

Lösungshinweise: Die Ähnlichkeit zu vorheriger Aufgabe erscheint groß, zumal $5\sqrt{2} \pm 7 = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^3$ gilt. Wollen wir aber die Aufgabe durch wiederholtes Potenzieren mit dem Exponent 3 lösen, erkennen wir, dass wir damit die Anzahl der Wurzeln im Allgemeinen nicht reduzieren können und somit nicht zu einem Ergebnis finden. Setzen wir aber die linke Seite gleich a, so gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} a^3 &= \left(5\sqrt{2}+7\right) - 3\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)} \cdot \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right) \\ &= -\left(5\sqrt{2}-7\right) = 14 - 3a \end{aligned}$$

Folglich ist der gesuchte Wert gleich der Lösung der Gleichung $a^3 + 3a - 14 = 0$. Durch Probieren bestätigen wir, dass $a = 2$ eine Lösung ist. Weiter gilt

$$0 = a^3 + 3a - 14 = (a-2) \cdot (a^2 + 2a + 7).$$

Wir erkennen, dass es keine weiteren reellwertigen Lösungen geben kann, weil für alle reellen Zahlen a stets $a^2 + 2a + 7 = (a+1)^2 + 6 \geq 6 > 0$ gilt. Also wird $a = 2$ bestätigt. ❑

Aufgabe – MO380932. Jemand bildet aus zwei beliebigen rationalen Zahlen x, y mit $x \neq -y$ zunächst die Zahl $z = \frac{xy}{x+y}$ und dann die Zahl $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Man beweise, dass jede so entstehende Zahl w eine rationale Zahl sein muss.

Lösungshinweise: Wir suchen einen Ausdruck für w^2:

$$w^2 = x^2 + y^2 + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 = (x+y)^2 - 2xy + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2$$

Dies können wir weiter so umformen, dass wir ein vollständiges Quadrat erhalten:

$$w^2 = (x+y)^2 - 2\cdot(x+y)\cdot\frac{xy}{x+y} + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 = \left(x+y-\frac{xy}{x+y}\right)^2.$$

Da w aufgrund der Bildungsvorschrift eine positive Zahl ist, gilt also

$$w = \left|x+y-\frac{xy}{x+y}\right|$$

und w ist offenbar als Produkt, Quotient und Summe bzw. Differenz von rationalen Zahlen selbst eine rationale Zahl. ❑

Aufgabe – MO481042. Bestimmen Sie alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(1) $x^3+y^3=1$,
(2) $\sqrt[3]{|x+y|}$ ist rational,
(3) $\sqrt[3]{|(1-x)(1-y)|}$ ist rational.

Lösungshinweise: Wir schreiben $x+y=a^3$ und $(1-x)(1-y)=b^3$ mit rationalen Zahlen a und b (um die Bedingungen (2) und (3) zu erfüllen). Es ist $a\neq 0$, denn $a=0$ führt zu $x=-y$ und damit zu $x^3+y^3=0$ im Widerspruch zur Bedingung (1).

Wegen $b^3=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$ erhalten wir

$$xy = b^3+x+y+1 = a^3+b^3-1$$

Wir werten nun die Bedingung (1) aus:

$$1 = x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3\cdot xy\cdot(x+y) = a^9 - 3\cdot a^3\cdot(a^3+b^3-1)$$

Diese Gleichung können wir umformen und erhalten

$$3\cdot a^3\cdot b^3 = a^9 - 3\cdot a^6 + 3\cdot a^3 - 1 = (a^3-1)^3,$$

also (falls auch $b\neq 0$ gilt)

$$\sqrt[3]{3} = \frac{a^3-1}{ab}.$$

Nun ist aber $\sqrt[3]{3}$ irrational im Widerspruch zur rechten Seite dieser Gleichung. Also muss $b=0$ gelten. Daraus folgt aber $a=1$ und $xy=1^3+0^3-1=0$. Somit finden wir $x=0$ oder $y=0$, so dass wegen der Bedingung (1) nur die Paare $(0;1)$ oder $(1;0)$ alle Bedingungen erfüllen können.

Mit der Probe bestätigen wir, dass beide Paare tatsächlich Lösungen sind (aus Symmetriegründen genügt die Probe für eines dieser Paare):

(1) $x^3 + y^3 = 1^3 + 0^3 = 1,$

(2) $\sqrt[3]{|x+y|} = \sqrt[3]{|1+0|} = 1,$ also rational,

(3) $\sqrt[3]{|(1-x)(1-y)|} = \sqrt[3]{|0 \cdot 1|} = 0,$ also rational. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 3 – Mathematik in Mesopotamien
Abschnitt 3.4.4 – Die Flächenhalbierende eines Vierecks (Seite 245f)

Die Babylonier und Ägypter verwandten vor unserer Zeitrechnung für die Flächenberechnung bei Vierecken die

Landvermesser-Formel: Bezeichnen a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Seitenlängen eines Vierecks, so gilt

$$F \approx \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Für diese Formel gilt die Gleichheit jedoch nur für Rechtecke. Dennoch war sie weit verbreitet. Im Papyrus BM 10520 (im Besitz des Britischen Museums) wird eine solche Berechnung gezeigt:

> *„Gegeben ein Stück Land, sein Plan [Viereck mit den Seiten 10, 12, 10, 10]. Addiere Süden und Norden, Resultat 20, die Hälfte 10. Addiere Osten und Westen, Resultat 24., die Hälfte 12. Rechne 10 mal 12, ergibt 120.“*

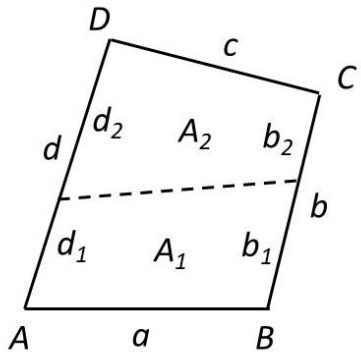
Mit dieser Formel wurden zum Beispiel in der Regierungszeit von PTOLEMAIOS X. (107 – 88 v. Chr.) die Flächen von etwa 150 Feldern berechnet und die Ergebnisse mit Hieroglyphen in eine Inschrift eingemeißelt.

Von besonderem Interesse waren in den alten Schriften die Beschreibung der Flächenhalbierenden. Ist ein beliebiges konvexes Viereck gegeben, so wurde die Länge der Transversale, die die Figur in zwei flächengleiche Teile zerlegt, mittels Landvermesser-Formel berechnet. Mit Verwendung der in der Skizze angegebenen Bezeichnungen finden wir aus den Forderungen $A_1 = A_2$ und $A_1 + A_2 = A$ die Gleichungen:

$$(x+c)(b_2+d_2) = (a+x)(b_1+d_1)$$
$$(x+c)(b_2+d_2) + (a+x)(b_1+d_1) = (a+c)(b_1+b_2+d_1+d_2)$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen können wir die zweite Gleichung umformen zu

$$(x-c)(b_1+d_1) = (a-x)(b_2+d_2)$$



Multiplizieren wir nun diese mit der ersten Gleichung, erhalten wir:

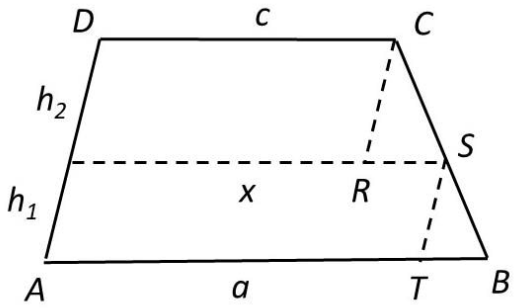
$$(x+c)(b_2+d_2)(x-c)(b_1+d_1) = \\ = (a-x)(b_2+d_2)(a+x)(b_1+d_1)$$

Nach Umformung und Vereinfachung führt dies zu

$$x^2 - c^2 = a^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

Das Ergebnis erscheint überraschend, da b und d und die Lage der Transversale keinen Einfluss hat. Es wird offensichtlich nur eine bestimmte Transversale berechnet. Wenden wir das Verfahren auf ein Trapez an, finden wir eine exakte Berechnung für die Transversale, die parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes verläuft.

Es wird deshalb ein Trapez betrachtet, bei dem die Flächenhalbierende parallel zu den parallelen Trapezseiten verläuft. Aus der geforderten Flächenteilung gilt einerseits



$$(a+x)\cdot h_1 = (x+c)\cdot h_2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{x+c}{a+x}$$

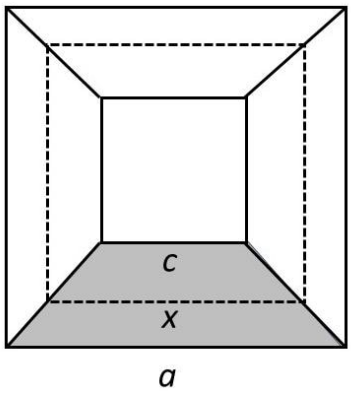
Andererseits erhalten wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke STB und CRS die Verhältnisgleichung

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a-x}{x-c}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt $x^2 - c^2 = a^2 - x^2$, also $x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$. Die Herleitung ist in diesem Fall tatsächlich korrekt, denn die Flächeninhalte werden über die Höhen berechnet. Aber auch bei Anwendung der unkorrekten Landvermesser-Formel würden wir das gleiche exakte Ergebnis erhalten!

Die Historiker diskutieren, ob zur damaligen Zeit der Zusammenhang in dieser Weise rein algebraisch erschlossen werden konnte. Aber es gibt eine geometrische Interpretation, die besser zum Stand der Mathematik zu passen scheint.

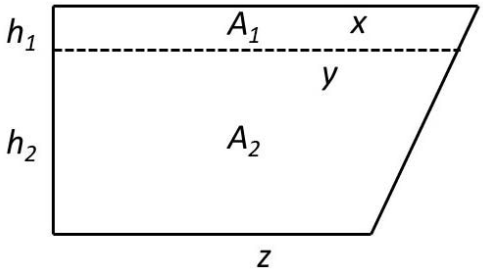
Über den Parallelseiten a und c des Trapezes werden Quadrate gezeichnet. (Der Einfachheit halber wird es hier mit einem symmetrischen Trapez dargestellt.) Verbinden wir die jeweils nahe beieinander liegenden Quadratecken, so sind vier kongruente Trapeze zu sehen.



Der Quadrat-„ring“ hat den Flächeninhalt $(a^2 - c^2)$ und beträgt das Vierfache des Flächeninhaltes des Trapezes. Für die untere Hälfte des Trapezes beträgt der Flächeninhalt $\frac{1}{4} \cdot (a^2 - x^2)$. Weil das Trapez durch x flächengleich geteilt wird, erhalten wir

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (a^2 - x^2) = \frac{1}{4} \cdot (a^2 - c^2) \quad \Rightarrow \quad a^2 + c^2 = 2 \cdot x^2$$

Auch in den Tafeln der **Yale Babylonian Collection**[6] finden wir unter 4608 #1 eine ähnliche Aufgabe zu Flächenteilung: „Gegeben ist ein rechtwinkliges Trapez, das durch eine Parallele zur Grundlinie geteilt wird. Die Länge der Grundlinie ist 52.5, die Flächen der Teiltrapeze betragen $A_1 = 843.75$ und $A_2 = 2531.25$. Die zugehörigen Abschnitte des senkrechten Schenkels verhalten sich wie 1 : 5. Gesucht sind Längen des senkrechten Schenkels.“



Für die Trapezflächen gilt

$$(x + y) \cdot h_1 = 2 \cdot A_1, (y + z) \cdot h_2 = 2 \cdot A_2$$
$$(x + z) \cdot (h_1 + h_2) = 2 \cdot (A_1 + A_2)$$

Wir setzen probeweise $h_1^* = 1$, $h_2^* = 5$ und finden

$$x^* + y^* = 1687.5 \;;\; y^* + z^* = 1012.5 \;;\; x^* + z^* = 1125$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist einfach lösbar, wir erhalten das Lösungstripel $x^* = 900;\ y^* = 787.5; z^* = 225$. Damit ergibt sich der Skalierungsfaktor f für die Höhen

$$f = \frac{h^*}{h_1} = \frac{y^*}{y} = \frac{787.5}{52.5} = 15 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 1 \cdot 15 = 15;\ h_2 = 5 \cdot h_1 = 75$$

Da bei konstantem Flächeninhalt die Seiten indirekt proportional zu den Höhen sind, beträgt der Skalierungsfaktor für die Seiten $1/f$:

$$x = \frac{1}{15} \cdot x^* = 60; y = \frac{1}{15} \cdot y^* = 52.5; z = \frac{1}{15} \cdot z^* = 15$$

[6] Die **Yale Babylonian Collection** ist eine umfassende Sammlung von Keilschrifttafeln (die an der Yale University aufbewahrt werden). aus dem Zeitraum zwischen 3000 v. Chr. und ca. 500 n. Chr.

In den altbabylonischen **Tafeln aus Susa**[7] steht folgende Aufgabe: „Gegeben ist ein (allgemeines) Viereck mit den Seiten $s_1 = 1.20$, $s_2 = 0.80$, $u_1 = 1.42$ und $u_2 = 0.58$.“ Mit der Landvermesser-Formel finden wir für den Flächeninhalt 1.00. (Aufgrund des normierten Flächeninhaltes vermutet man, dass dies eine Übungsaufgabe ist und keine reale Sachaufgabe darstellt.)

Man ermittle für das Viereck mit den gegenüberliegenden Seiten $(s_1; s_2)$ die Transversale d, die dieses Viereck flächenmäßig halbiert. Die beiden Teilvierecke mit den gegenüberliegenden Seiten $(s_1; d)$ bzw. $(d; s_2)$ haben die Transversalen zur Flächenhalbierung d_1 bzw. d_2. Man untersuche, ob d auch die Flächenhalbierende des Vierecks mit den gegenüberliegenden Seiten $(s_1; s_2)$ ist.

Geometrisch ist die Aussage anschaulich zu bejahen. Wir können aber auch zunächst die Länge von d als quadratisches Mittel von s_1 und s_2 berechnen, also

$$d = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.75^2 + 0.25^2}{2}} = 1.25$$

Nun können wir mit gleicher Methode die Transversalen der Teilvierecke berechnen

$$d_1 = \sqrt{\frac{s_1^2+d^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.75^2+1.25^2}{2}} = 1.52, d_2 = \sqrt{\frac{d^2+s_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.25^2+0.25^2}{2}} = 0.90$$

Letztlich wenden wir das quadratische Mittel noch einmal an:

$$\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.52^2 + 0.90^2}{2}} = 1.25 = d$$

Unter gleicher Quelle steht unter 4675 eine Aufgabe mit folgenden Zahlenwerten: Seitenlängen eines Vierecks $a = 17$, $b = 4\frac{5}{6}$, $c = 7$, $d = 5\frac{1}{6}$. Nach Landvermesser-Formel beträgt der Flächeninhalt

$$\frac{17 + 7}{2} \cdot \frac{4\frac{5}{6} + 5\frac{1}{6}}{2} = 12 \cdot 5 = 60.$$

Wie damals üblich wird die Länge der flächenhalbierenden Transversale berechnet:

$$\sqrt{\frac{7^2 + 17^2}{2}} = \sqrt{169} = 13.$$

Versuchen wir aber, das Viereck zu zeichnen, so sehen wir $4\frac{5}{6} + 7 + 5\frac{1}{6} = 17$, d.h., das Viereck entartet zu einer Linie!

[7] Funde aus Susa (Persien) aus der Zeit um 3000 v. Chr.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/23.

Aufgabe. Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu zwei fest vorgegebenen Punkten A und B einen konstanten Wert $|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 = e^2 = const$ annimmt.

Lösungshinweise: Für einen Punkt P der Ebene sei die Bedingung $|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = e^2$ erfüllt. Wir ziehen durch die Punkte A und B die Gerade und fällen darauf das Lot von P mit dem Fußpunkt Q.

Wir nehmen zunächst an, Q liege außerhalb der Strecke $\overline{AB}$ mit $|\overline{AQ}| > |\overline{BQ}|$. Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck AQP mit den Abkürzungen $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{BQ}| = x$ und $|\overline{PQ}| = y$

$$|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = e^2 = (c + x)^2 + y^2 + x^2 + y^2$$
$$\frac{e^2}{2} = x^2 + cx + \frac{c^2}{2} + y^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}$$
$$\frac{e^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2$$

Mit O als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2e^2 - c^2}$ folgt aus der letzten Gleichung nach Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS, dass das Dreieck OQP stets ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q und mit den Katheten $|\overline{OQ}| = x + \frac{c}{2}$ und $|\overline{PQ}| = y$ (einschließlich $y = 0$) sowie der Hypotenuse $\overline{OP}$ ist.

Wir nehmen nun an, Q liege innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ mit $|\overline{AQ}| \geq |\overline{BQ}|$. Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck AQP mit den Abkürzungen $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{BQ}| = x$ und $|\overline{PQ}| = y$

$$|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = e^2 = (c - x)^2 + y^2 + x^2 + y^2$$
$$\frac{e^2}{2} = x^2 - cx + \frac{c^2}{2} + y^2 = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}$$
$$\frac{e^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2$$

Mit O als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2e^2 - c^2}$ folgt auch in diesem Fall aus der letzten Gleichung nach Umkehrung des Satzes des Pythagoras, dass das Dreieck OQP stets ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q mit den Katheten $|\overline{OQ}| = x - \frac{c}{2}$ und $|\overline{PQ}| = y$ sowie der Hypotenuse $\overline{OP}$ ist.

Da in beiden Fällen O und r unabhängig von der konkreten Lage des Punktes P sind, ist der gesuchte geometrische Ort die Kreislinie um O mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2e^2 - c^2}$. Die Punktmenge ist leer, falls $2 \cdot e^2 < c^2$ (d.h. $e < \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot c$) gilt.❑

Monatsaufgabe 1/2024[8]

Aufgabe. Es sei α eine reelle Zahl. Bestimme alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen *x* gilt

$$P(2x + \alpha) \leq (x^{20} + x^{19})\, P(x).$$

Termine

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter https://www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
Online-Anmeldeschluss: 08.03.2024.

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Vorbereitung für die 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“ (detailliertes Programm unter http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
20.01.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. NORMAN BITTERLICH, zu Gast bei Wuttke-Ingenieure GmbH (Markt 5, 09111 Chemnitz).
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

Wissenschaft:LIVE! „Climate Engineering – ein Plan zur Kühlung der Erde?“ Dr. ULRIKE NIEMEIER vom Max-Planck-Institut für Meteorologie untersucht das Ausbringen von Sulfat-Aerosolen in die Stratosphäre mit unterschiedlichen Klimamodellen. Sie erklärt in ihrem Vortrag, was die Sulfat-Partikel in der Stratosphäre bewirken und zeigt Effekte, Chancen und Risiken der Methode auf.
30.01.2024, 15:30 bis 16:45 Uhr, online bundesweit. Anmeldung bis zum 30.01.2024 unter: https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-climate-engineering-ein-plan-zur-kuehlung-der-erde.html

6. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz mit Team-Wettbewerben für Schülerinnen und Schüler (Klassenstufen 8-9 und 10-12), zwei Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen, Lehrer und alle anderen Mathematik-Interessierte sowie einer Mitmach-Ausstellung.
23.03.2024, 09:00 bis 16:30 Uhr im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude ("Orangerie") in der Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz, ausführliche Information unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2024/index.php

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 29.02.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 12.5 – Zerlegung einer Dreiecksfläche 3
Rationale und irrationale Zahlen 8
In alten Mathe-Büchern geblättert 14
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/23. 18
Monatsaufgabe 1/2024 19
Termine 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	Nr.	Thema	Aufgabe
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

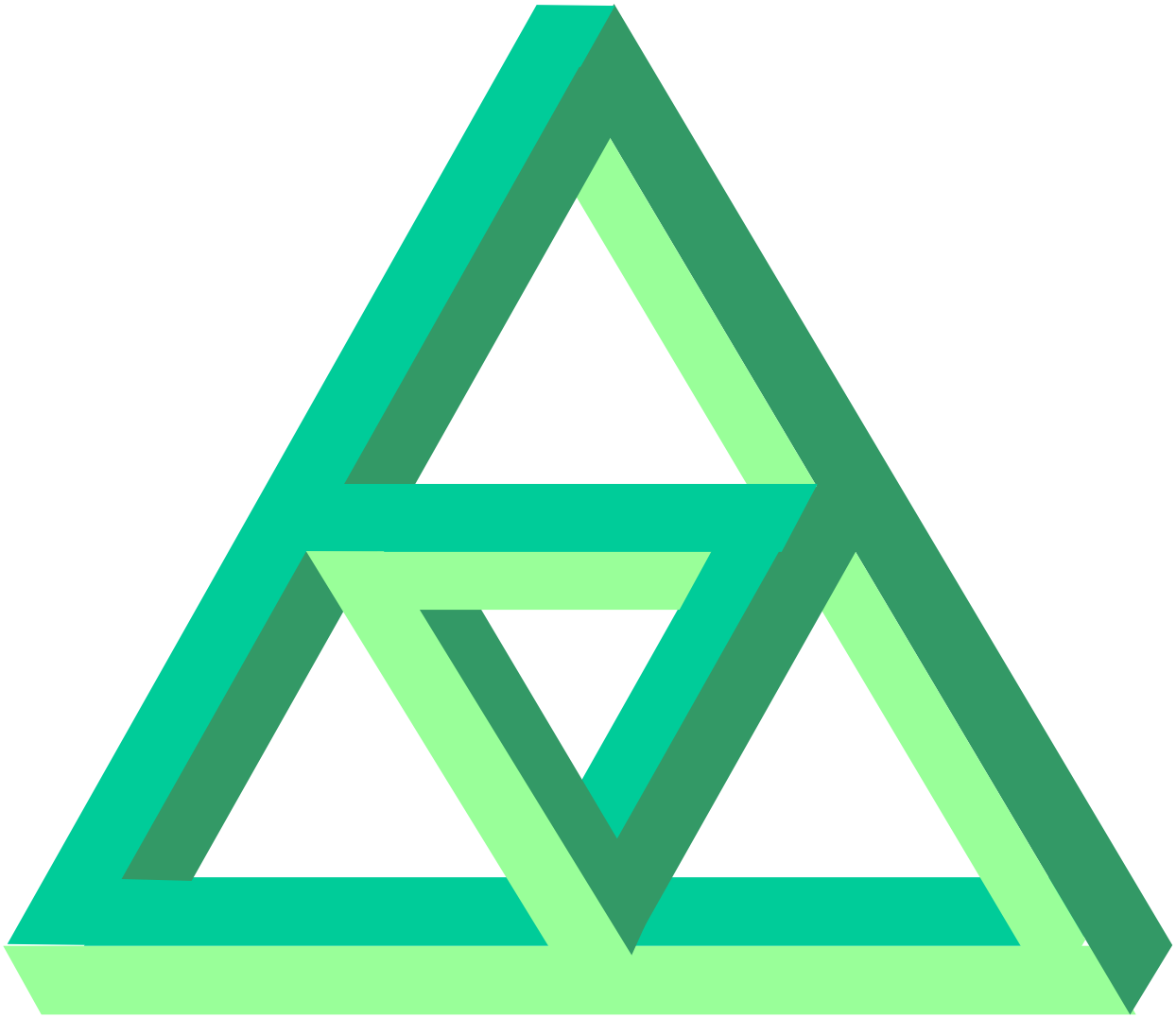
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 2/2024 (Februar 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

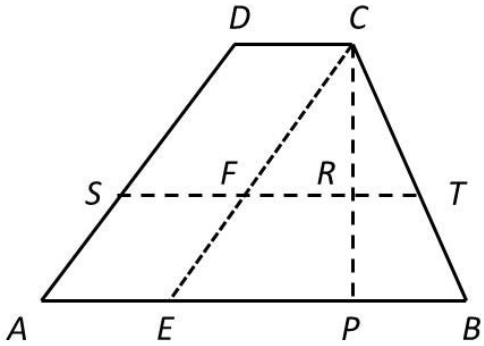
Wir greifen im Zusammenhang mit der Aufgabe **MO630924** noch einmal die Teilung einer Figur in zwei flächengleiche Teile auf und untersuchen diese Fragestellung am Trapez. Dabei zeigen wir eine verblüffende Anwendung aus der zweiten Hälfte der altbabylonischen Epoche.

Angeregt durch die Aufgaben **MO630923/MO631023** untersuchen wir Teleskopsummen und -produkte, d.h., wir suchen nach Darstellungsformen für Summen und Produkte, so dass sich benachbarte Summanden und Faktoren aufheben.

Wir blicken auf das Präsenzseminar der „Mathematischen Kostproben“ vom 20. Januar 2024 zurück und weisen auf den 6. Tag der Mathematik, hin, den die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz am 23. März 2024 durchführen wird.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12.6 – Flächenhalbierung eines Trapezes



Aufgabe 12.20. Angeregt durch die Aufgabe **MO100935** suchen wir zunächst für ein Trapez $ABCD$ eine Flächenteilung durch eine Parallele ST zur Grundseite $\overline{AB}$. Wir markieren den Punkt E auf $\overline{AB}$ mit der Eigenschaft $EC \parallel AD$. Den Schnittpunkt von EC mit ST bezeichnen wir mit F.

Für die Längen $|\overline{AB}| = a$, $|\overline{CD}| = c$ und $|\overline{ST}| = x$ und die Längen der Höhen $|\overline{PC}| = h$ (im Dreieck ΔPBC auf der Strecke $\overline{PB}$) bzw. $|\overline{RC}| = h_1$ (im Dreieck ΔRTC auf der Strecke $\overline{RT}$ finden wir über den Flächenvergleich

$$h_1 \cdot \frac{x+c}{2} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{a+c}{2}$$

In den ähnlichen Dreiecken ΔPBC und ΔRTC (nach WWW) gilt zudem

$$\frac{h_1}{|\overline{FT}|} = \frac{h}{|\overline{EB}|}$$

Die betrachteten Strecken können wir wegen $|\overline{AE}| = |\overline{CD}|$ durch a, c und x ausdrücken:$|\overline{FT}| = x - c$ und $|\overline{EB}| = a - c$. Setzen wir $h_1 = h \cdot \frac{x-c}{a-c}$ in die Gleichung des Flächenvergleiches ein, erhalten wir

$$h \cdot \frac{(x-c)(x+c)}{2 \cdot (a-c)} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{a+c}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - c^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 - c^2)\,,$$

also

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+c^2}\,.$$

Die Streckenlänge x ist gleich dem quadratischen Mittel[3] von a und c. Aus der rechten Darstellung in dieser Gleichung erkennen wir, wie wir diese Streckenlänge konstruieren können:

(1) Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Längen a und c, die Länge seiner Hypotenuse bezeichnen wir mit y.
(2) Wir konstruieren ein Quadrat mit der Seitenlänge y und zeichnen dessen Diagonalen ein, die sich mit ihrem Schnittpunkt halbieren. Die halbe Diagonale hat die gesuchte Länge x.

[3] s. Heft 12/2023

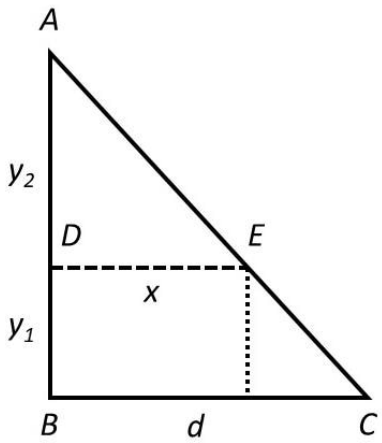
(3) Wir konstruieren auf $\overline{AB}$ den Punkt T' als Schnittpunkt des Kreises um A mit dem Radius x.
(4) Wir konstruieren die Parallele zu AD durch T'. Ihren Schnittpunkt mit der Trapezseite $\overline{BC}$ bezeichnen wir mit T.
(5) Wir konstruieren die Parallele zu AB durch T. Ihren Schnittpunkt mit der Trapezseite $\overline{AD}$ bezeichnen wir mit S.

Die Gerade $\overline{ST}$ erfüllt die Aufgabenstellung und halbiert den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$. Die Argumentation der Analyse beinhaltet den Beweis, wenn wir ausgehend von der Gleichung $x^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2)$ den Vergleich der Flächeninhalte und die Ähnlichkeit der betrachteten Dreiecke nachweisen. Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Für $a \geq c > 0$ gilt nämlich wegen

$$c = \frac{1}{2} \cdot 2c = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2 \cdot c^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} = x\,,$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2 \cdot a^2} = \frac{1}{2} \cdot 2a = a\,,$$

also $c \leq x \leq a$, so dass der Punkt T' stets auf $\overline{AB}$ liegt. ❑

Ein kurzer Ausflug in die Geschichte der Mathematik: Im Vorderasiatischen Museum Berlin werden Tontafeln aus der zweiten Hälfte der altbabylonischen Epoche aufbewahrt. Darunter auch die Tafel aus LARSA VAT 8512, auf der in Keilschrift folgende Aufgabe angegeben ist[4].



Aufgabe 12.22. (Text angepasst; in Dezimalzahlen[5]) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit den Katheten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ ($|\overline{BC}| = d = 30$). Das Dreieck wird durch eine Gerade DE mit D auf $\overline{AB}$ und E auf $\overline{BC}$ in zwei Flächen geteilt, für die $F_{BCED} - F_{ADE} = 420$ gelte. Außerdem ist bekannt, dass $|\overline{AD}| - |\overline{BD}| = 20$ beträgt.

Man bestimme die Länge der Strecke $\overline{DE}$.

Lösungshinweise: Setzen wir zur Abkürzung der Schreibweise $|\overline{AD}| = y_2$ und $|\overline{BD}| = y_1$, so lässt sich einerseits die Aussage über die Flächeninhalte wie folgt formulieren:

[4] Dietmar Herrmann. Mathematik im Vorderen Orient - Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien. Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019. (Kapitel 3, Abschnitt 3.7.10, Seite 310f)
[5] Zu dieser Zeit wurden Zahlen im Hexagesimalsystem verwendet (Zahlensystem zur Basis 60). Wir verwenden nur die Zähler der 60-stel und beachten, dass der Flächenunterschied in ganzen Zahlen angegeben wurde und deshalb anzupassen ist. Da Missverständnisse auszuschließen sind, verwenden wir keine Längen- oder Flächeneinheiten.

$$F_{BCED} - F_{ADE} = \frac{x+d}{2} \cdot y_1 - \frac{1}{2} x \cdot y_2 = \frac{1}{2}(x+30) \cdot y_1 - \frac{1}{2} x \cdot (y_1 + 20)$$
$$= 15y_1 - 10x = 420\,.$$

und andererseits die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC und ΔADE ausnutzen:

$$y_2 : y_1 = x : (30 - x) \quad \Rightarrow \quad (y_1 + 20)(30 - x) = x \cdot y_1\,.$$

Wir lösen die letzte Gleichung nach y_1 auf und erhalten

$$y_1 = \frac{20x - 600}{30 - 2x}\,.$$

Substituieren wir damit y_1 in der Beziehung über die Flächeninhalte, finden wir eine quadratische Gleichung in x,

$$15y_1 - 10x = 15 \cdot \frac{20x - 600}{30 - 2x} - 10x = 420$$

d.h.

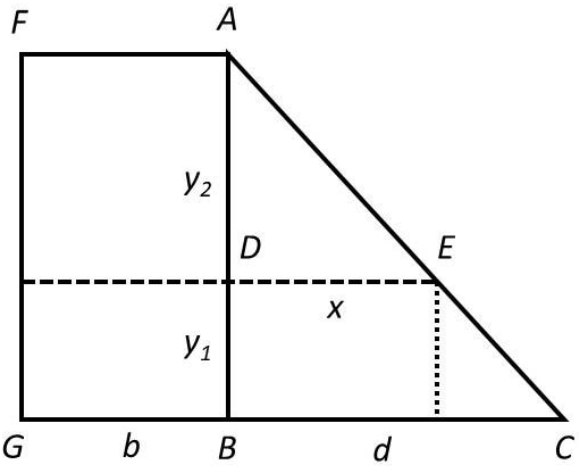
$$20x^2 + 840x - 21600 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 42x - 1080 = 0$$

$$x_{1,2} = -21 \pm \sqrt{21^2 + 1080} = -21 \pm 39$$

Da hier nur die positive Nullstelle gesucht wird, erhalten wir für die Strecke $\overline{DE}$ die Länge $x = 18$. ❑

Historiker bezweifeln jedoch, dass damals bereits das algebraische Lösen von quadratischen Funktionen beherrscht wurde. Stattdessen gehen sie davon aus, dass es für diese Aufgabenstellung eine verblüffende geometrische Lösung gibt.

Lösungsvariante: Wir erweitern das rechtwinklige Dreieck ΔABC um ein Rechteck $AFGB$ mit der gemeinsamen Seite $\overline{AB}$ und der Breite $\overline{BG}$ mit der Länge b. Die Verlängerung der Transversalen DE teilt das Trapez $GCAF$ in zwei Teile. Wir wählen nun b so, dass diese beiden Teile flächengleich sind, also



$$F_{ADE} + b \cdot y_2 = F_{BCED} + b \cdot y_1$$
$$\Rightarrow \quad b = \frac{F_{BCED} - F_{ADE}}{y_2 - y_1} = \frac{420}{20} = 21$$

Wenden wir nun die Landvermesser-Formel[6] für das Trapez $GCAF$ an, erhalten wir

[6] s. Heft 01/2024, Abschnitt „In alten Mathe-Büchern geblättert“ (S. 14)

$$(x+b) = \sqrt{\frac{b^2 + (b+30)^2}{2}}$$

und können den Zahlenwert bestimmen

$$x = \sqrt{\frac{21^2 + 51^2}{2}} - 21 = 39 - 21 = 18\,.$$

❑

Aufgabe 12.23. Wir wollen die Trapezfläche mit einer Geraden halbieren, die jeweils durch das Innere der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ verläuft. Wir denken dabei zuerst an die Gerade durch die Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Bei Anwendung der Flächenformel für ein Trapez ist die Richtigkeit dieses Ansatzes sofort ersichtlich. Um diese Konstruktion zu verallgemeinern, suchen wir für einen fixierten Punkt X im Innern von $\overline{CD}$ den Punkt Y im Innern von $\overline{AB}$, so dass die Flächengleichheit $F_{AYXD} = F_{YBCX}$ erfüllt ist. Offenbar muss für diesen Fall für $\overline{DX} = x$, $\overline{AY} = y$ und der Höhe h auf AB gelten

$$h \cdot \frac{x+y}{2} = h \cdot \frac{a-y+c-x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a+c-2x}{2}\,.$$

Die Konstruktion der Streckenlänge y als Hälfte einer Summe bzw. Differenz von gegebenen Streckenlängen bereitet keine Schwierigkeit. ❑

Betrachten wir einige Spezialfälle: Aus $x = \frac{c}{2}$ folgt $y = \frac{a}{2}$ und wir erhalten die Flächenhalbierung durch die Verbindung beide Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

Soll $y = x$ gelten (d.h. die Gerade XY verläuft parallel zu AD), so ist $x = \frac{a+c}{4}$. Jedoch liegt x nur dann im Innern von $\overline{CD}$, wenn die Ungleichung $x < c$ und damit $a < 3c$ erfüllt ist.

Soll $a - y = c - x$ gelten (d.h. die Gerade XY verläuft parallel zu BC), so ist

$$a - y = c - x = a - \frac{a+c-2x}{2} = \frac{a-c+2x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3c-a}{4}$$

Jedoch liegt x nur dann im Innern von $\overline{CD}$, wenn die Ungleichung $x < c$ und damit $a < 3c$ erfüllt ist[7].

Aufgabe 12.24. Nun suchen wir für die Flächenhalbierung eines Trapezes *ABCD* eine Teilungsgerade g, die durch den Punkt *A* verlaufen soll. Den Schnittpunkt mit einer

[7] s. Heft 01/2024, Seite 6, Aufgabe 12.18 – MO291023.

Trapezseite bezeichnen wir mit X. Dieser Punkt liegt nicht auf $\overline{CD}$, denn wegen $c < a$ wäre in diesem Fall $F_{AXD} < \frac{1}{2} \cdot F_{ABCD}$. Also liegt X stets auf der Trapezseite $\overline{BC}$.

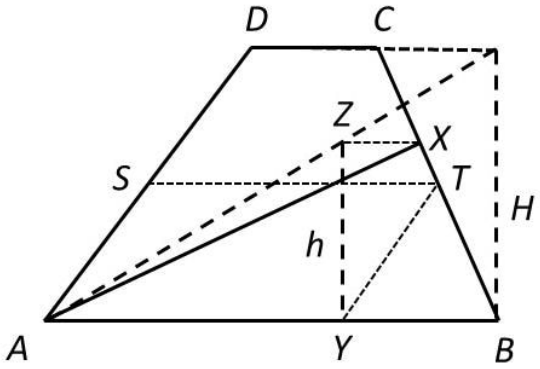
Für die Konstruktion des Punktes *X* sind mehrere Lösungsvarianten möglich:

(1) Da es genügt, die Höhe $\overline{YZ} = h$ des Dreiecks ΔABX zu ermitteln, können wir für die Dreieckshöhe h, die Trapezhöhe H und die Seitenlängen$|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{CD}| = c$ die Gleichung über die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a + c}{2} \cdot H \right)$$

umformen zu

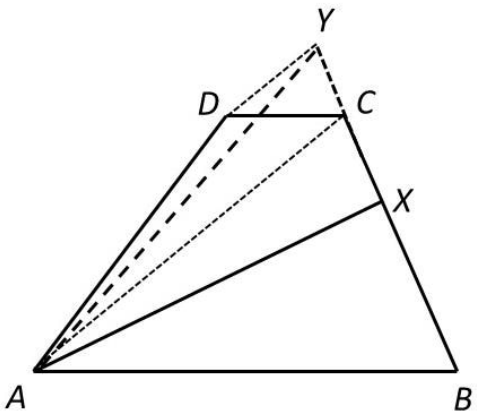
$$h : H = \frac{a + c}{2} : a$$



Diese Verhältnisgleichung kann unmittelbar in der Trapezfigur wiedergefunden werden. Dazu projizieren wir die Trapez-Mittellinie $\overline{ST}$ (mit der Länge $\frac{a+c}{2}$) wie in der Skizze angedeutet auf die Grundseite mit $|\overline{AY}| = |\overline{ST}|$, konstruieren die Senkrechte im Punkt Y und die Trapezhöhe H im Punkt B. Gemäß dem Strahlensatz mit $\overline{YZ} \parallel H$ und den Strahlen durch A und Y sowie durch A und Z finden wir für h die geforderte Länge. Mittels Parallele zu AB durch Z erhalten wir den Schnittpunkt X mit der Trapezseite BC. Die Gerade AX teilt das Trapez in zwei flächengleiche Figuren.

(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ΔACD. Dazu konstruieren wir die Parallele zu AC durch D und bezeichnen deren Schnittpunkt mit der Verlängerung von BC über C hinaus mit Y. Weil die Dreiecke ΔACD und ΔACY die gleiche Grundseite $\overline{AC}$ und wegen $AC \parallel DY$ die gleiche Höhe haben, sind beide Dreiecke flächengleich (Scherung). Nun gilt

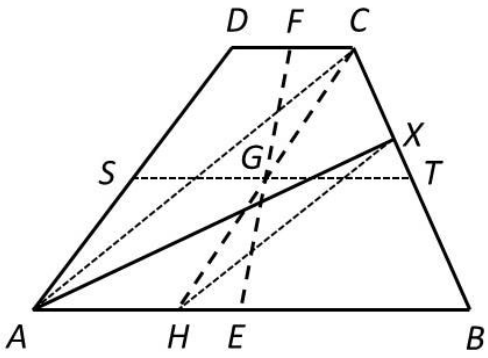
$$F_{ABCD} = F_{ABC} + F_{ACD} = F_{ABC} + F_{ACY} = F_{ABY}$$



Das Dreieck ΔABY ist also flächengleich zum Trapez $ABCD$. Somit zerlegt die Seitenhalbierende $\overline{AX}$ das Trapez in zwei flächengleiche Figuren.

(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$. Den Schnittpunkt diese Gerade mit der Mittellinie $\overline{ST}$ bezeichnen wir mit G.

Wir drehen die Gerade EF um G, so dass die gedrehte Gerade durch C verläuft und dabei die Grundseite $\overline{AB}$ in H schneidet. Nun sind die Dreiecke ΔHEG und ΔCFG nach WSW kongruent und somit flächengleich. Damit ist auch $\overline{HC}$ eine Flächenhalbierende für das Trapez $ABCD$.

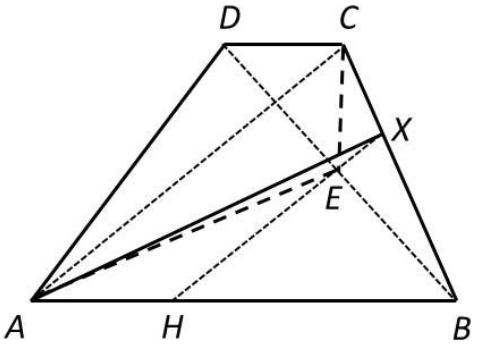


Wir konstruieren die Parallele zu AC durch H, deren Schnittpunkt mit der Trapezseite $\overline{BC}$ bezeichnen wir mit X. Weil die Dreiecke ΔHXC und ΔHXA die gleiche Grundseite $\overline{AC}$ und wegen $AC \parallel HX$ die gleiche Höhe haben, sind beide Dreiecke flächengleich (Scherung). Es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot F_{ABCD} = F_{HBC} = F_{HBX} + F_{HXC} = F_{HBX} + F_{AHX} = F_{ABX}$$

Somit teilt $\overline{AX}$ die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks ΔAHX bzgl. $\overline{HX}$ in das (flächengleiche) Dreieck ΔHXC ist der gesuchte Punkt X gefunden.

(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Wir suchen überhaupt eine Halbierung und versuchen, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$, dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke ΔABD und ΔBCD jeweils halbiert werden. Nun konstruieren wir die Parallele zu AC durch E, deren Schnittpunkte mit $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ bezeichnen wir mit H bzw. X.



Weil die Dreiecke ΔAEC und ΔAXC die gleiche Grundseite $\overline{AC}$ und wegen $AC \parallel HX$ die gleiche Höhe haben, sind beide Dreiecke flächengleich (Scherung). Nun gilt

$$\frac{1}{2} \cdot F_{ABCD} = F_{ABCE} = F_{ABC} - F_{AEC} = F_{ABC} - F_{AXC} = F_{ABBX}$$

Somit teilt $\overline{AX}$ die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. ❑

Teleskopieren von Summen und Produkten

Ähnlich wie in den Aufgaben **MO630923/MO631023** finden wir bei der folgenden Fragestellung den Lösungsansatz durch Analyse der Summen für kleine Werte für die Indexvariable n.

Aufgabe MO410944.

(a) Berechnen Sie den Wert der Summe $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (-1)^n \cdot n$ in Abhängigkeit von n, wobei n eine natürliche Zahl mit $n > 0$ ist.

(b) Bestimmen Sie $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2001} + S_{2002}$.

Lösungshinweise zu Teil a): Wir berechnen für kleine n die Summen S_n.

n	1	2	3	4	5
S_n	1	$1-2$ $=-1$	$1-2+3$ $=2$	$1-2+3-4$ $=-2$	$1-2+3-4+5$ $=3$

Wir können bereits vermuten, dass für gerade n der Wert $S_n = -\frac{n}{2}$ und für ungerade n der Wert $S_n = \frac{n+1}{2}$ beträgt. Mit der Methode der vollständigen Induktion beweisen wir diese Vermutung.

Induktionsanfang: Für $n = 1,2,3,4,5$ haben wir die Richtigkeit bereits in der Wertetabelle gezeigt.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für gerade n beträgt der Wert $S_n = -\frac{n}{2}$ und für ungerade n beträgt der Wert $S_n = \frac{n+1}{2}$.

Induktionsbehauptung: Für gerade n beträgt der Wert $S_{n+2} = -\frac{n+2}{2}$ und für ungerade n beträgt der Wert $S_{n+2} = \frac{n+3}{2}$.

Induktionsbeweis:

Fall 1: Es sei n eine gerade Zahl. Dann ist auch $n + 2$ geradzahlig und es gilt

$$S_{n+2} = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (n-1) - n + (n+1) - (n+2)$$
$$= S_n - 1 = -\frac{n}{2} - 1 = -\frac{n+2}{2}.$$

Fall 2: Es sei n eine ungerade Zahl. Dann ist auch $n + 2$ ungeradzahlig und es gilt

$$S_{n+2} = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (n-1) + n - (n+1) + (n+2)$$
$$= S_n + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}.$$

Induktionsschluss: Aus den Aussagen des Induktionsanfangs und des Induktionsschritts folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle $n > 0$. ❑

Eine korrekte formale Darstellung der Methode der vollständigen Induktion wird bei der Lösungsdarstellung zu MO-Aufgaben in den Klassenstufen 9/10 nicht verlangt. Es ist ausreichend, ausgehend von den Beispielen für $n = 1,2,$ … die Argumentation des Induktionsbeweises zu führen und mit einem Antwortsatz ähnlich zum Induktionsschluss zu vollenden.

Allerdings können wir den Beweis durch Zusammenfassen benachbarter Summanden wesentlich vereinfachen:

Fall 1: Für gerade Zahlen n gilt

$$S_n = \underbrace{(1-2)}_{=-1} + \underbrace{(3-4)}_{=-1} + \cdots + \underbrace{\big((n-1)-n\big)}_{=-1} = \frac{n}{2}\cdot(-1) = -\frac{n}{2}.$$

Fall 2: Für ungerade Zahlen n gilt

$$S_n = 1 + \underbrace{(-2+3)}_{=1} + \underbrace{(-4+5)}_{=1} + \cdots + \underbrace{\big((-n+1)+n\big)}_{=1} = 1 + \tfrac{n-1}{2}\cdot 1 = \tfrac{n+1}{2}.$$

Lösungshinweise zu Teil b): Wir setzen die in a) gefundenen Werte ein und finden leicht eine hilfreiche Zusammenfassung benachbarter Summanden:

$$S = \underbrace{\frac{1+1}{2} - \frac{2}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{3+1}{2} - \frac{4}{2}}_{=0} + \cdots + \underbrace{\frac{2001+1}{2} - \frac{2002}{2}}_{=0} = 0$$

❑

Während in Summen wie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

das Rationalmachen der Nenner unter Anwendung der 3. Binomischen Formel direkt zu Vereinfachungen führt (zu Teleskopsummen, bei denen je zwei Nachbarglieder, außer dem ersten und dem letzten, sich gegenseitig aufheben), ist in folgender Aufgabe erst eine geeignete Umformung zu finden.

Aufgabe MO371045. Beweisen Sie folgende Aussage.

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} < 1999\,.$$

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die zu untersuchende Summe mit S. Wir leiten zunächst für $n > 0$ Abschätzungen für $\frac{1}{\sqrt{n}}$ her.

$$4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2n+1 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{n}\sqrt{n-1} < 2n - 1 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Nutzen wir diese Ungleichungskette und schreiben die mittleren Summanden für n untereinander, erkennen wir, wie eine Vereinfachung zur Lösung führt.

$$2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$$
$$2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$
$$\dots$$
$$2\sqrt{1.000.001} - 2\sqrt{1.000.000} < \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} < 2\sqrt{1.000.000} - 2\sqrt{999.999}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$2\sqrt{1.000.001} - 2\sqrt{2} + 1 < S < 2\sqrt{1.000.000} - 2\sqrt{1} + 1\,.$$

Offenbar gilt

$$2\sqrt{1.000.001} - 2\sqrt{2} + 1 > 2\sqrt{1.000.000} - 2 \cdot 1.5 + 1 = 2000 - 2 = 1998$$
$$2\sqrt{1.000.000} - 2\sqrt{1} + 1 = 2000 - 1 = 1999$$

und folglich $1998 < S < 1999$. ❑

Aufgabe. Berechnen Sie den Wert der Summe

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{100}\right) + \dots + \left(\frac{98}{99} + \frac{98}{100}\right) + \frac{99}{100}\,.$$

Lösungshinweise: Um die Teilsummen der Reziproken zu berechnen, versuchen wir zunächst, die Abschätzungen wie oben anzuwenden, nämlich

$$2\sqrt{n^2+1} - 2\sqrt{n^2} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} < 2\sqrt{n^2} - 2\sqrt{n^2-1}\,.$$

Setzen wir jedoch die ersten konkreten Zahlen ein, erkennen wir, dass das Teleskopieren der Summanden misslingt, denn es gilt:

$$2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{2^2+1} - 2\sqrt{2^2} < \frac{1}{2} < 2\sqrt{2^2} - 2\sqrt{2^2-1} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}\,,$$
$$2\sqrt{10} - 2\sqrt{9} = 2\sqrt{3^2+1} - 2\sqrt{3^2} < \frac{1}{3} < 2\sqrt{3^2} - 2\sqrt{3^2-1} = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{8}\,.$$

Wir ordnen deshalb die Summanden anders an:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \cdots + \frac{99}{100}\right).$$

Nun können wir in jeder Klammer die GAUßsche Summenformel[8] $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ anwenden und die Summe wie folgt darstellen:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \cdots + \frac{1}{100} \cdot \frac{99 \cdot 100}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) = \frac{1}{2} \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 2475\,,$$

wobei wir auch in der zweiten Zeile noch einmal die Summenformel verwendeten. ❑

Es fällt nicht schwer, das Produkt $P(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$ (Teleskopprodukte) auszurechnen. Da wir benachbarte Faktoren kürzen können, verbleibt $P = \frac{1}{n+1}$. Dies wollen wir auch bei folgender Aufgabe anwenden.

Aufgabe (nach WURZEL 2020-56). Man zeige die folgenden Ungleichungen:

$$0.01 < x = \prod_{k=1}^{1012} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} < 0.03\,.$$

Lösungshinweise: Da sich in diesem Produkt benachbarte Faktoren nicht kürzen lassen, betrachten wir ein ähnliches Produkt y der Form

$$y = \prod_{k=1}^{1012} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2025}.$$

Weil für jedes $k > 0$ die Ungleichung

$$(2k-1) \cdot (2k+1) = 4k^2 - 1 < 4k^2 = 2k \cdot 2k$$

erfüllt ist, gilt auch $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$. Somit folgt aus dem paarweisen Vergleich der Faktoren von x die Relation $x^2 < x \cdot y$. Daraus können wir wie folgt schlussfolgern:

$$x^2 < xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} \cdot \frac{2024}{2025} = \frac{1}{2025} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt{2025}} = \frac{1}{45}\,.$$

[8] Die GAUßsche Summenformel darf als bekannt vorausgesetzt werden, sollte aber immer mit Angabe der Formel zitiert werden.

Wegen $\frac{1}{45} < \frac{1}{40} = 0.025 < 0.03$ ist die rechte Seite der Ungleichung bewiesen.

Nun betrachten wir die Zahl $x^* = 2 \cdot x \cdot \frac{2025}{2026}$. Schreiben wir die Faktoren aus, also

$$x^* = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2025}{2026},$$

so können wir wieder die Faktoren von x^* mit denen von y vergleichen. Es gilt für alle $k > 0$

$$2k \cdot (2k+2) = 4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2k}{2k+1} < \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Daraus können wir schlussfolgern:

$$x^{*2} > x^* y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2025} \cdot \frac{2025}{2026} = \frac{2}{2026} \quad \Rightarrow \quad x^* > \frac{1}{\sqrt{1013}}.$$

Aus der Bildungsvorschrift für x^* können wir nun auch x abschätzen

$$x = \frac{2026}{2025 \cdot 2} \cdot x^* > \frac{1013}{2025} \cdot \frac{1}{\sqrt{1013}} = \frac{\sqrt{1013}}{2025} > \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 45} > 0.7 \cdot 0{,}02 = 0.014 > 0.01\,.$$

Somit ist auch die linke Seite der Ungleichung bewiesen. ❑

Aufgabe. Für natürliche Zahlen $n > 0$ sei $T(n) = \frac{n^3-1}{n^3+1}$. Zeigen Sie

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = T(2) \cdot T(3) \cdot \ldots \cdot T(100) < \frac{2}{3}\,.$$

Lösungshinweise: Wenn wir einige Faktoren als Zahlenwerte aufschreiben, also

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = \frac{7}{9} \cdot \frac{26}{28} \cdot \frac{63}{65} \cdot \frac{124}{126} \cdot \ldots \cdot T(100)\,,$$

erkennen wir erst durch Faktorisierung das Potenzial für ein Kürzen benachbarter Faktoren

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 13}{4 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 13} \cdot \frac{4 \cdot 31}{6 \cdot 21} \cdot \ldots \cdot T(100)\,.$$

Wir schreiben für $n > 0$

$$T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

und verwenden die Abkürzungen

$$a_n = n - 1 \quad ; \quad b_n = n^2 + n + 1$$
$$c_n = n + 1 \quad ; \quad d_n = n^2 - n + 1$$

Wir finden die Zusammenhänge

$$a_{n+2} = (n+2) - 1 = n + 1 = c_n$$
$$d_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1 = b_n$$

Somit können wir in

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = \frac{a_2 b_2}{c_2 d_2} \cdot \frac{a_3 b_3}{c_3 d_3} \cdot \frac{a_4 b_4}{c_4 d_4} \cdot \frac{a_5 b_5}{c_5 d_5} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{100} b_{100}}{c_{100} d_{100}}$$

a_4 mit c_2, a_5 mit c_3, …, a_{100} mit c_{98} sowie b_2 mit d_3, b_3 mit d_4, …, b_{99} mit d_{100} kürzen. Übrig bleiben die Faktoren $a_2, a_3, c_{99}, c_{100}, b_{100}$ und d_2. Somit vereinfacht sich das gesuchte Produkt zu

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot b_{100}}{c_{99} \cdot c_{100} \cdot d_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot (100^2 + 100 + 1)}{100 \cdot 101 \cdot (2^2 - 2 + 1)} = \frac{2 \cdot 10101}{3 \cdot 10100} > \frac{2}{3},$$

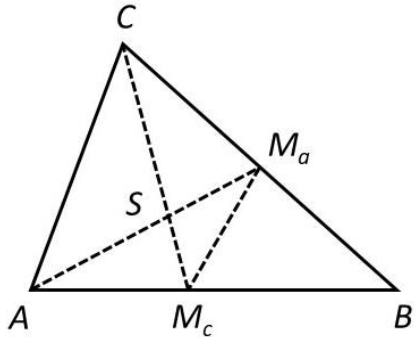
wobei wir $\frac{10101}{10100} > 1$ verwendeten. ❑

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden in Abschnitte mit dem Längenverhältnis 1 : 2.

Beweis: Wir betrachten ein Dreieck ΔABC und verbinden die Seitenmittelpunkte M_a (bzgl. Seite $\overline{BC}$) und M_c (bzgl. Seite $\overline{AB}$). Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC und $\Delta M_a M_c B$ gilt

$|\overline{AB}| : |\overline{M_c B}| = 2 : 1$ und $|\overline{CB}| : |\overline{M_a B}| = 2 : 1$.



Damit sind die beiden Strecken $\overline{M_a M_c}$ und $\overline{AC}$ parallel.

Gemäß Strahlensatz mit diesen Parallelen und den Strahlen durch B und A sowie durch B und C folgt daraus auch $|\overline{AC}| : |\overline{M_a M_b}| = 2 : 1$.

Für die beiden Seitenhalbierenden $\overline{AM_a}$ und $\overline{CM_c}$ lässt sich daraus – wieder auf der Grundlage des Strahlensatzes mit den Parallelen $\overline{AC} \parallel \overline{M_aM_c}$ und den Strahlen durch A und M_a sowie durch C und M_c (deren Schnittpunkt wir mit S bezeichnen) – ableiten:

$$|\overline{AS}| : |\overline{SM_a}| = |\overline{AC}| : |\overline{M_aM_c}| = 2 : 1$$
$$|\overline{CS}| : |\overline{SM_c}| = |\overline{AC}| : |\overline{M_aM_c}| = 2 : 1$$

Mit gleicher Argumentation, angewandt auf die ähnlichen Dreiecke ΔABC und ΔM_bM_aC (mit M_b als Seitenmittelpunkt der Seite $\overline{AC}$), erhalten wir auch

$$|\overline{BS}| : |\overline{SM_b}| = |\overline{AB}| : |\overline{M_aM_b}| = 2 : 1$$

❑

Folgerung. Nicht jede Gerade durch den Schwerpunkt teilt die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teilfiguren.

Beweis: Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a (und dem Flächeninhalt $F = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$) und wählen als Schnittgerade eine Parallele zu einer Dreiecksseite durch den Schwerpunkt. Dann beträgt der Flächeninhalt des „abgeschnittenen“ Dreiecks $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \sqrt{3}$, also $\frac{4}{9} \cdot F$ und somit kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks. ❑

Einladung zum 6. Tag der Mathematik der TU Chemnitz

Am 23. März 2024 findet der nunmehr 6. Tag der Mathematik im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude der TU Chemnitz („Orangerie“, Reichenhainer Str. 90, 09126 Chemnitz) statt (Registrierung ab 09:30 Uhr). Ausführliche inhaltliche Informationen und organisatorische Hinweise sind verfügbar unter

https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2024/index.php

Im Mittelpunkt stehen ab 11:00 Uhr wieder die Teamwettbewerbe (jeweils 3 bis 5 Teilnehmende pro Team) in den Klassenstufen 8/9 und 10-12. Natürlich gibt es für die erfolgreichsten Teams wieder Preise. Es ist eine online-Anmeldung erforderlich!

Lehrerinnen, Lehrer, Begleitpersonen und alle Mathematik-Interessierten können an zwei Fortbildungsvorträgen teilnehmen

- 11:00 bis 12:00 Uhr: Frau ANJA KLUGE (CAC ENGINEERING GmbH Chemnitz, Abiturientin der TUC): "Die Rolle der Mathematik im internationalen Anlagenbau"
- 12:00 bis 13:00 Uhr: Frau Prof. Dr. IMMA VALENTINA CURATO (Professur Statistik): "Die Superkräfte einer Mathematikausbildung, um künstliche Intelligenz zu beherrschen".

(*Hinweis:* Ebenfalls bitte online anmelden. Das Landesamt für Schule und Bildung (LASUB) wird für Lehrkräfte, die mit Einverständnis ihrer Schulleitung einen

Fortbildungsreiseantrag beim LASUB stellen, die Teilnahme am Tag der Mathematik ggf. als Fortbildung anerkennen.)

Nach der Mittagspause wird ab 13:30 Uhr Herr Dr. FRANK GÖRING zur Diskussion über "Die Fakultät für Mathematik als außerschulischer Lernort" einladen. Ab 14:00 Uhr hält Herr Prof. Dr. SEBASTIAN NEUMAYER (Professur Inverse Probleme) den Plenarvortrag mit dem Thema „Wie viel Information steckt eigentlich in einem Bild?“.

Die Veranstaltung schließt mit der Preisverleihung (ca. 16:00 bis 16:30 Uhr).

Präsenzseminar am 20. Januar 2024 (Rückblick)

Am Samstag, dem 20. Januar 2024, fand das 2. Präsenzseminar der „Mathematischen Kostproben“ statt. Wir waren zu Gast beim Öffentlich bestellten Vermessungsingenieur Detlef Wuttke (www.wuttke-vermessung.de) und der Wuttke Ingenieure GmbH (www.wuttke-ingenieure.de) in Chemnitz. Gemäß der Seminar-Thematik „Aufgabenanalyse in der Nachbereitung der Regionalrunde zur Vorbereitung des Landesausscheids der 63. MO“ ergänzten wir die Lösungshinweise der MO-Aufgabenkommission durch Lösungsvarianten und blickten auf Aufgaben mit ähnlichen Lösungsstrategien aus vergangenen MO-Jahrgängen[9].

Unter den Olympiade-Aufgaben finden wir einen Aufgabetyp, bei dem erst durch geschicktes Anordnen oder Umformen geeignete Term-Pärchen gebildet werden können, die die geforderten Berechnungen deutlich vereinfachen. Dies war für die Lösungsfindung bei den Aufgaben **MO630923/MO631023** hilfreich. Mittels Rationalmachen von Brüchen wie $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ lässt sich die Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ drastisch vereinfachen. Ebenso kann in Aufgabe **MO301024** die erforderliche Berechnung gelingen. Im Aufgabenpaar **MO370945** und **MO380943** basiert der Lösungsansatz auf der bekannten (bzw. leicht beweisbaren) Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für positive reelle Zahlen. Zugleich sind sie ein Beispiel für die Idee des Seminars, sich durch Nachbereitung aktueller Aufgaben auf mögliche Fortsetzung der Thematik vorzubereiten.

Mit Bezug zu den Aufgaben **MO630922/MO631022** konzentrierten wir uns bei der Lösungsdarstellung auf Untersuchungen des Monotonieverhaltens von Folgen. Mit diesem Ansatz lassen sich auch solche Ungleichungen wie in **MO410945** lösen. Auch für die Diskussion zur Existenz von Nullstellen von Polynomen eignet sich diese Methode. Im Allgemeinen ist es bei diesem Aufgabentyp erforderlich, mit Hilfe einer Wertetabelle zunächst eine Vermutung über die Extremwerte zu formulieren und nach der Monotoniebetrachtung diese Extremwerte explizit anzugeben.

[9] Auf Anfrage ist eine Zusammenfassung dieser Aufgabendiskussion als Zusatz zu Heft 02/2024 erhältlich.

Zur Vorstellung des Gastgebers stellte TONI WÜSTENHAGEN das Berufsbild eines Vermessers vor. Aus seinen Schilderungen über die vielfältigen Aufgaben war die Begeisterung für seinen Traumberuf greifbar. Am Beispiel eines Tachymeters und eines GNSS (System zur Positionsbestimmung via Satellit) demonstrierte er die Datenerfassung. Anschließend zeigte NICO CASPAR eindrucksvolle Anwendungen von digitalen Raumdaten. Wir konnten den Weg von der Datenerfassung über die Generierung von Modellen aus den messtechnisch erfassten Punktwolken bis zur digitalen Vermessung vielfältiger Größen am Objekt verfolgen. Das Leistungspotenzial basiert auf *Building Information Modeling (BMI)* als digitales Gebäudemodell, das sich über den gesamten Lebenszyklus eines Bauwerks – also von der ersten Idee, über die Planung und Ausführung bis zur Bewirtschaftung und schließlich zum Rückbau – erstreckt. Herzlichen Dank an MANJA REICHEL und Team für die Unterstützung für das Seminar in so angenehmen Rahmenbedingungen!

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2023

Aufgabe T-1 (Teamwettbewerb) der 10. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade (Vöcklabruck/Österreich, 2016). Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^2 + ab + c = 0 \quad ; \quad b^2 + bc + a = 0 \quad ; \quad c^2 + ca + b = 0.$$

Lösungshinweise: Die Lösungsmenge ist $(a; b; c) = \left\{(0; 0; 0), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Wegen $0^2 + 0 \cdot 0 + 0 = 0$ bzw. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ sind beide Tripel tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems. Wir zeigen nun, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Ist eine der Zahlen a, b oder c gleich Null, so finden wir unmittelbar die Lösung (0;0;0).

Wir nehmen nun an, dass alle Zahlen von Null verschieden sind, und führen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Wären alle Zahlen positiv, so wären die linken Seiten der Gleichungen ebenfalls positiv, im Widerspruch zu den rechten Seiten.

Fall 2: Es sind genau zwei der drei Zahlen positiv und die dritte Zahl ist negativ. O.B.d.A. nehmen wir an, es gelte $a, b > 0$ und $c < 0$.

Aus der zweiten Gleichung finden wir $b \cdot (b + c) = -a < 0$ und folglich $b + c < 0$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir $c \cdot (c + a) = -b < 0$ und folglich $c + a > 0$. Addieren wir zur ersten Gleichung $a + b$, so können wir umformen:

$$a^2 + ba + a + b + c = a + b$$
$$a + b + c = a + b - a^2 - ba = (1 - a)(a + b)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus der zweiten bzw. dritten Gleichung

$$a+b+c=(1-b)(b+c) \quad ; \quad a+b+c=(1-c)(c+a)$$

Nun ist aber wegen $c<0$ und $c+a>0$ das Produkt in der letzten Gleichung positiv. Somit sind auch die Produkte der anderen beiden Gleichungen positiv und es gelten deshalb die Ungleichungen $1-a>0$ (d.h. $a<1$) und $1-b<0$ (d.h. $1<b$). Nun können wir folgende Ungleichungskette aufstellen:

$$0<a+c<1+c<b+c<0$$

Dies ist aber ein Widerspruch, so dass es in diesem Fall keine Lösung geben kann.

Fall 3: Nehmen wir an, genau eine der drei Zahlen a, b und c sei positiv (o.B.d.A. sei dies a), dann folgt aus der zweiten Gleichung $b^2+b\cdot c+a>0$, was aber ebenfalls im Widerspruch zum Gleichungssystem steht.

Fall 4: Alle drei Zahlen sind negativ. Wir substituieren $a=-x, b=-y, c=-z$ mit positiven Zahlen x, y und z. Dann lässt sich das Gleichungssystem schreiben als:

$$x^2+xy=z \quad ; \quad y^2+yz=x \quad ; \quad z^2+zx=y$$

Da die Gleichungen durch zyklisches Vertauschen der Variablen auseinander hervorgehen, können wir o.B.d.A. $x\le y\le z$ annehmen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2+xy=z\ge x \quad &\Rightarrow \quad x+y\ge 1 \\ y^2+yz=x\le y \quad &\Rightarrow \quad y+z\le 1 \end{aligned}$$

Die letzten beiden Ungleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$y+z\le 1\le x+y \quad \Rightarrow \quad z\le x$$

Wegen $x\le y\le z$ finden wir deshalb $x=y=z$. Setzen wir dies in eine der Gleichungen des Gleichungssystems ein, führt dies zur quadratischen Gleichung $x^2+x\cdot x-x=0$. Wegen $x\neq 0$ ist dies gleichbedeutend zu $x=-\frac{1}{2}$ und damit zu $a=b=c=-\frac{1}{2}$.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine weiteren Lösungen geben. ❑

Monatsaufgabe 2/2024[10]

Seien ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Strecke $\overline{BC}$. Die Punkte E und F liegen derart in der von der Geraden BC bestimmten Halbebene, die A enthält, dass DE senkrecht auf BE steht und DE eine Tangente an den Umkreis

[10] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.03.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

von ΔACD ist, während DF senkrecht auf CF steht und DF eine Tangente an den Umkreis von ΔABD ist.

Man zeige, dass die Punkte A, D, E und F auf einem Kreis liegen.

Termine

Landesrunden der 63. Mathematik-Olympiade
24./25.02.2024

Regionalwettbewerbe „Jugend forscht/Schüler experimentieren“ (Sachsen)
29.02.2024: Region Nordwestsachsen – Universität Leipzig Zentrum für Lehrerbildung und Schulforschung
01./02.03.2024: Region Südwestsachsen – solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen
02.03.2024: Region Ostsachsen - KLA-Tencor GmbH, SachsenEnergie AG, Wandelbots GmbH

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
08.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

6. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz mit Team-Wettbewerben für Schülerinnen und Schüler (Klassenstufen 8-9 und 10-12), zwei Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen, Lehrer und alle anderen Mathematik-Interessierte sowie einer Mitmach-Ausstellung.
23.03.2024, 09:30 bis 16:30 Uhr im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude in der Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz, ausführliche Information unter www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2024/index.php
10.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

Landeswettbewerb „Jugend forscht/Schüler experimentieren“
23.03.2024: Land Sachsen - BGH Edelstahlwerke GmbH, DAS Environmental Expert GmbH, GLOBALFOUNDRIES Management Services LLC & Co. KG
www.jugend-forscht-sachsen.de

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Nachtrag zur 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“ (detailliertes Programm ab Anfang März unter www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
13.04.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast bei ICM - Institut Chemnitzer Maschinen- und Anlagenbau e.V. (Otto-Schmerbach-Straße 19, Hochhaus 6. 09117 Chemnitz)
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 12.6 – Flächenhalbierung eines Trapezes 3
Teleskopieren von Summen und Produkten 8
Bekannte Sätze der Mathematik 14
Einladung zum 6. Tag der Mathematik der TU Chemnitz 15
Präsenzseminar am 20. Januar 2024 (Rückblick) 16
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2023 17
Monatsaufgabe 2/2024 18
Termine 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

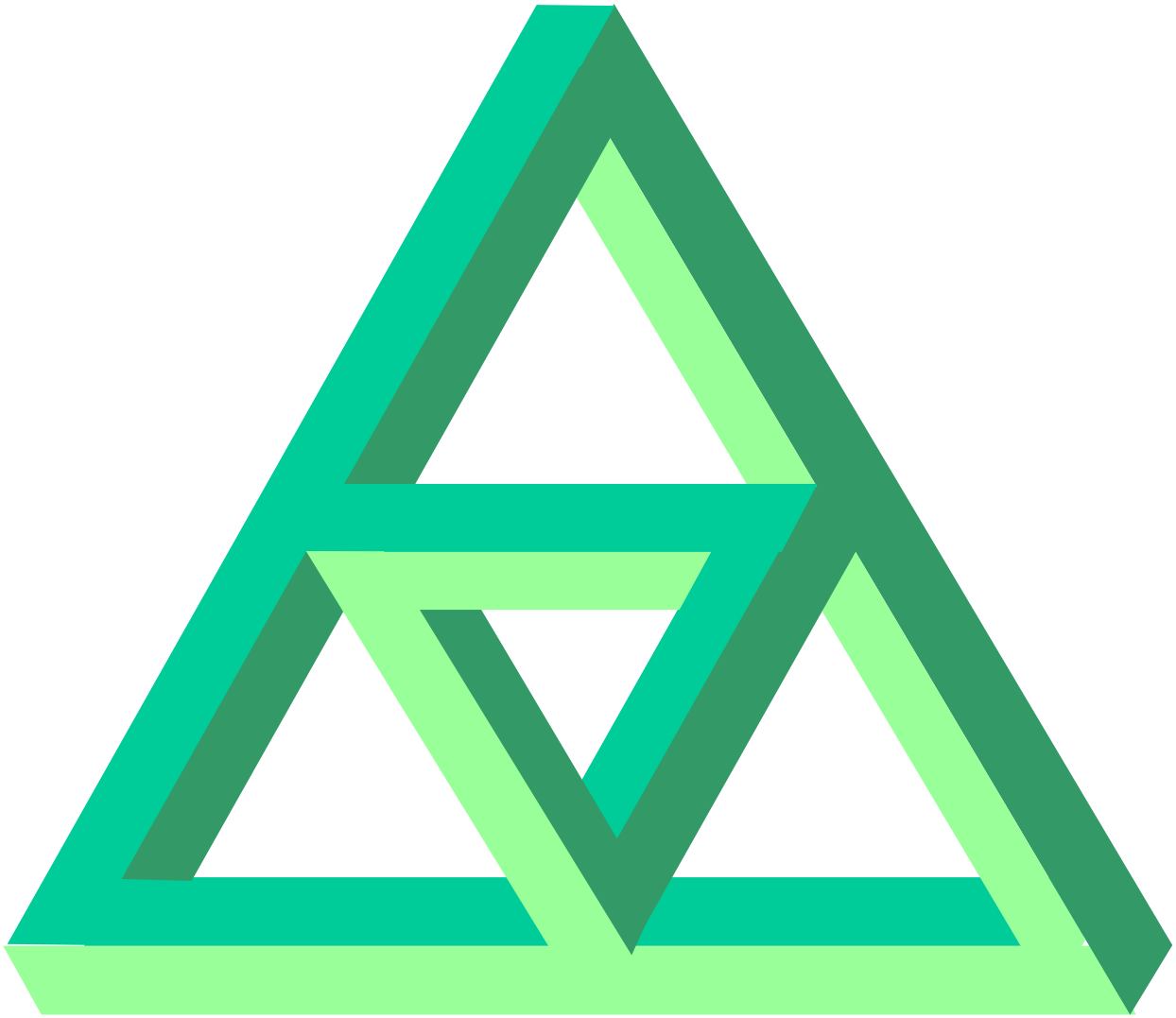
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 3/2024 (März 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Um der Veröffentlichung der Aufgaben und Lösungen zur Landesrunde der 63. MO nicht vorzugreifen, diskutieren wir in Bezug auf die **Aufgabe 5A** der **4. KZM-Serie** das Rechnen mit Polynomen als **Thema 27**. Insbesondere untersuchen wir die Restpolynome bei Partialdivision, ohne dabei die Division vollständig ausführen zu müssen.

Im zweiten Beitrag werden Problemstellungen zum **Goldenen Schnitt** behandelt. Es werden verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für den Punkt gezeigt, der eine gegebene Strecke im Goldenen Schnitt teilen soll. Auf der Basis dieser Zusammenhänge lässt sich ein regelmäßiges Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Es gibt einige Ansätze, diese Konstruktion zu vereinfachen – aber nicht immer erzeugen sie tatsächlich regelmäßige Fünfecke. Im **historischen Rückblick** blättern wir dazu in einem Werk von Albrecht Dürer aus dem Jahre 1525, in dem er auch die Konstruktion regelmäßiger Figuren behandelt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 27 – Rechnen mit Polynomen

Ein (reellwertiges) Polynom ist eine Funktion der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^k + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (\#)$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, die für alle reellen Zahlen x definiert ist. Polynome können addiert, subtrahiert und multipliziert werden[3], indem punktweise die Addition, Subtraktion oder Multiplikation ausgeführt wird:

$$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)\ ,\ (P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Das Ergebnis ist stets wieder ein Polynom, da es offensichtlich wieder in der beschriebenen Form (#) zusammengefasst werden kann. Die Division eines Polynoms durch ein anderes führt dagegen im Allgemeinen nicht wieder zu einem Polynom.

Aufgabe 27.01 – KZM 2023/24, 4-5A. Es sei P ein Polynom der Form (#) vom Grad n ($n > 0$) mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.
(b) Man zeige: Ist x eine rationale Nullstelle von P (also $P(x) = 0$) und gilt $a_n = 1$, so ist x ganzzahlig.
(c) Man zeige: Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt P keine ganzzahlige Nullstelle.

Lösungshinweise zu Teil a): Angenommen, ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ habe die Funktionswerte $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$. Dann gilt $P(2019) - P(2015) = 2$. Für die Differenz zweier Funktionswerte finden wir aber allgemein

$$P(x) - P(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x^k - y^k)$$

Für $k = 0$ ist der entsprechende Summand gleich Null. Für $k = 1$ steht $a_1 \cdot (x - y)$. Für $k = 2$ finden wir $(x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x + y)$ und auch für $k > 2$ können wir ebenfalls stets den Faktor $(x - y)$ ausklammern:

$$(x^k - y^k) = (x - y) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

Folglich können wir in jedem Summanden der Differenz zweier Polynome den Faktor $(x - y)$ ausklammern und wir erhalten mit geeignet gewählten Termen C_k:

$$P(x) - P(y) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot C_k.$$

[3] Wir können für Polynome auch kurz $P \pm Q$ oder $P \cdot Q$ schreiben.

Setzen wir nun $x = 2019$ und $y = 2015$, so steht auf der linken Seite dieser Gleichung die Zahl 2 und auf der rechten Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $2019 - 2015 = 4$, was sich widerspricht. Folglich können die angegebenen Funktionswerte nicht richtig sein.

Lösungshinweise zu Teil b): Ist x eine rationale Nullstelle von $P(x)$, dann existieren teilerfremde ganze Zahlen r und s $(s > 0)$ mit $x = \frac{r}{s}$. Eingesetzt in die Polynomgleichung finden wir

$$0 = \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{r}{s} + a_0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s^n und formen äquivalent um, so führt dies zu

$$r^n = -s \cdot (a_{n-1} \cdot r^{n-1} + a_{n-2} \cdot r^{n-2} \cdot s + \ldots + a_1 \cdot r \cdot s^{n-2} + a_0 \cdot s^{n-1}).$$

Damit ist s ein Teiler von r^n und somit sind entweder r und s nicht teilerfremd oder es gilt $s = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

Lösungshinweise zu Teil c): Ist $P(x)$ für ein ganzzahliges Argument x ungeradzahlig, so ist auch $P(y)$ mit $y = x + 2 \cdot m$ (m ganzzahlig) ungeradzahlig, da nach (a) für zwei Zahlen x und y die Gleichung

$$P(x) - P(y) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot C_k$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k und ganzzahligen Termen C_k $(k = 1, \ldots, n)$ gilt. Da der Faktor $(x - y)$ geradzahlig ist, ist auch die Differenz $P(x) - P(y)$ geradzahlig.

Wäre nun $P(z) = 0$ für ein ganzzahliges z, so ist entweder die Differenz $(2020 - z)$ oder die Differenz $(2019 - z)$ durch 2 teilbar. Da der Wert 0 geradzahlig ist, müsste demnach entweder $P(2020)$ oder $P(2019)$ auch geradzahlig sein. Da dies in beiden Fällen laut Voraussetzung nicht der Fall ist, kann es keine derartige Zahl z geben. ❑

Aufgabe 27.02 – MO390945. Gegeben sei für alle reellen Zahlen x das Polynom der Form $P(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit ganzen Zahlen a, b, c, d. p und q seien zwei Primzahlen, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt, und es sei bekannt, dass $P(p) = 1234$ und $P(q) = 4321$ gilt.

Stellen Sie fest, ob sich aus diesen Angaben p und q eindeutig bestimmen lassen und ermitteln Sie gegebenenfalls p und q.

Lösungshinweise: Wie in der Argumentation zur obigen Teilaufgabe a) erkennen wir die Möglichkeit, die Differenz von $P(p)$ und $P(q)$ folgendermaßen darzustellen:

$$P(q) - P(p) = (q - p) \cdot R,$$

wobei R abkürzend einen konstanten ganzzahligen Wert beschreibt. Also ist $q-p$ ein Teiler von $4321-1234=3087$. Da diese Differenz ungeradzahlig ist, muss auch der Teiler $p-q$ ungeradzahlig sein. Wären beide Primzahlen ungeradzahlig, wäre $q-p$ geradzahlig. Folglich kann nur $p=2$ und (weil keine weitere Primzahl dazwischen liegt) $q=3$ gelten. ❑

Aufgabe 27.03. Gesucht sind alle ganzzahligen Zahlenpaare (p,q) mit $p,q \in \{1,2,3,\dots,100\}$, für die das Polynom $P(x)=x^5+px+q$ rationale Lösungen besitzt.

Lösungshinweise: Wie in der Argumentation zur obigen Teilaufgabe b) erkennen wir, dass die erwarteten Lösungen sogar ganzzahlig sind. Wir suchen also alle Paare (p,q), für die es ganze Zahlen a gibt, so dass $a\cdot(a^4+p)+q=0$ gilt. Wegen $p,q>0$ finden wir $a<0$.

Wir beginnen mit systematischem Probieren:

$$\begin{aligned} a=-1 \quad &\Rightarrow \quad -(1+p)+q=0 \quad \Rightarrow \quad q=p+1,\\ a=-2 \quad &\Rightarrow \quad -2\cdot(16+p)+q=0 \quad \Rightarrow \quad q=2p+32,\\ a=-3 \quad &\Rightarrow \quad -3\cdot(81+p)+q=0 \quad \Rightarrow \quad q=3p+243>100. \end{aligned}$$

Im Fall von $a=-3$ stellen wir fest, dass es kein Zahlenpaar aus dem vorgegebenen Bereich geben kann. Dies trifft auch für betragsmäßig größere Zahlen a zu, denn für $a=-n$ mit $n\geq 4$ erhalten wir stets $q=n\cdot p+n^5>3^5=243>100$.

Folglich sind nur die Paare $(p,p+1)$ für $p=1,2,3,\dots,99$ und $(p,2p+32)$ für $p=1,2,3,\dots,34$ Lösungen der Aufgabe. ❑

Der Grad $grad(P)$ eines Polynoms $P(x)$ ist definiert als der höchste Exponent n von x, dessen zugehöriger Koeffizient von Null verschieden ist, also $grad(P)=n$, falls $a_n\neq 0$ und $a_m=0$ für alle $m>n$. Der Grad des Nullpolynoms wird als $-\infty$ definiert.

Satz. Sind P und Q Polynome mit $grad(P)=n$ und $grad(Q)=m$, so gilt:

$$grad(P\pm Q)\leq max\{n;m\}\ ,\ grad(P\cdot Q)=n+m.$$

Bemerkung: Der Grad des Nullpolynoms 0 ordnet sich sinnvoll in die Graddefinition ein, denn wir erhalten:

$$\begin{aligned} grad(P)&=grad(P\pm 0)\leq max\{-\infty;n\}=n,\\ grad(0)&=grad(P\cdot 0)=\text{n}+(\text{-}\infty)=-\infty. \end{aligned}$$

Satz. Ein Polynom $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i$ ist genau dann identisch Null, wenn alle seine Koeffizienten $a_0,a_1,\dots,a_n$ gleich Null sind.

Bewei: Wir betrachten zunächst ein Polynom des Grades 1 und behaupten, es gelte für alle x die Gleichung $P(x)=a_1\cdot x+a_0=0$. Nehmen wir $a_1\neq 0$ an (andernfalls folgt sofort $a_0=0$ und alles wäre bewiesen), so können wir den Wert für die

Nullstelle ausrechnen ($x = \frac{-a_0}{a_1}$) und es ist ersichtlich, dass jeder andere Wert für x der geforderten Gleichung widerspricht. Also muss $a_1 = 0$ und daraus folgend $a_0 = 0$ gelten. Jedoch ist dieser Weg nicht ohne Weiteres verallgemeinerungsfähig.

Wir finden einen allgemeineren Zugang, wenn wir die Ausgangsgleichung $P(x) = 0$ im Fall von $a_1 \neq 0$ zu $x + \frac{a_0}{a_1} = 0$ umformen. Setzen wir $C = \frac{a_0}{a_1}$, dann ist offensichtlich für $x > |C|$ wegen $x + C > 0$ ein Widerspruch zur Forderung "$P(x) = 0$ für alle x" gefunden.

Wir verallgemeinern nun für ein Polynom mit Grad n, d.h. mit $a_n \neq 0$. Wir setzen $C = max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \dots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right\}$. Gilt $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = 0$, so gilt wegen $a_n \neq 0$ auch $x^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot x^k$, woraus $|x|^n \leq C \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k$ folgt. Für positive Zahlen $x > 1$ kennen wir die Summe der geometrischen Folge

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Es muss also die Ungleichung $x^{n+1} - x^n \leq C(x^n - 1)$ bzw. gleichbedeutend

$$x^{n+1} \leq x^n \cdot (C + 1) - C \ < x^n \cdot (C + 1) \quad \Rightarrow \quad x \leq C + 1$$

für alle $x > 1$ erfüllt sein. Diese Ungleichung ist jedoch für $x > C + 1$ nicht erfüllt. Somit kann $P(x)$ mit $a_n \neq 0$ nicht für alle reellen Zahlen x den Wert 0 annehmen.

Ist dagegen $a_n = 0$, so wiederholen wir die Betrachtung für das Polynom mit Grad $n - 1$, also mit $a_{n-1} \neq 0$. Setzen wir dies fort, erhalten wir $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$. ❑

Folgerung. Zwei Polynome stimmen genau dann überein, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen (Methode des Koeffizientenvergleichs).

Satz. Für zwei nichttriviale Polynome P und Q gibt es Polynome T und R, so dass die Gleichung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Das (Rest-) Polynom R kann so gewählt werden, dass $grad(R) < min\{grad(T), grad(Q)\}$ ist. In diesem Fall sind die Polynome T und R eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir betrachten die Menge $M = \{P - T \cdot Q \mid T\ beliebige\ Polynome\}$. Enthält diese Menge das Nullpolynom, dann gilt der Satz offenbar, denn es gibt in diesem Fall ein Polynom T mit $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen x, wobei $R(x) \equiv 0$ selbst das Nullpolynom ist. Wenn M jedoch das Nullpolynom nicht enthält, dann gibt es in M Polynome mit kleinstem Grad (da der Grad eines Polynoms eine nichtnegative Zahl ist). Davon wählen wir ein Polynom R mit minimalem Grad (es sei $grad(R) = k$) aus, das mit einem geeigneten (Teiler-)Polynom T die folgende Gleichung erfüllt:

$$R(x) = P(x) - T(x) \cdot Q(x)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $grad(R) < grad(Q)$ gewählt werden kann. Um dies zu beweisen, nehmen wir indirekt an, dass $m = grad(Q) \leq grad(R) = k$ sei. Mittels der Koeffizienten bei den jeweils höchsten Exponenten von Q und R (q_m bzw. r_k) bilden wir die Polynome

$$T^*(x) = T(x) + \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \ , \ R^*(x) = R(x) - \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \cdot Q(x)$$

Wir erkennen, dass T^* und R^* die Gleichung $P(x) = T^*(x) \cdot Q(x) + R^*(x)$ erfüllen. Außerdem ist R^* so konstruiert, dass der Grad von R^* mindestens um 1 geringer als der Grad von R ist. Dies widerspricht aber der Auswahl von R mit minimalem Grad. Folglich ist die behauptete Ungleichung $grad(R) < grad(Q)$ erfüllt.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe Polynome T_1, T_2, R_1 und R_2 mit $grad(R_1), grad(R_2) < grad(Q)$ und mit der Eigenschaft

$$P(x) = T_1(x) \cdot Q(x) + R_1(x) = T_2(x) \cdot Q(x) + R_2(x).$$

Durch einfache Umformung finden wir daraus die Beziehung

$$\big(T_1(x) - T_2(x)\big) \cdot Q(x) = R_2(x) - R_1(x).$$

Die rechte Seite ergibt ein Polynom, dessen Grad kleiner als $grad(Q)$ beträgt. Sind T_1 und T_2 voneinander verschieden, so wäre der Grad des Polynoms auf der linken Seite mindestens $grad(Q)$. Da dies zu einem Widerspruch führt, muss $T_1 = T_2$ und daraus folgend $R_1 = R_2$ gelten. ❑

Folgerung (Abspaltung von Linearfaktoren). Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms $P(x)$ mit reellwertigen Koeffizienten, so existiert ein Polynom $Q(x)$ mit reellwertigen Koeffizienten mit der Eigenschaft

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x).$$

Lösungshinweise: Wir wählen für eine Zerlegung von P das Polynom $T(x) = x - x_0$. Dann können wir das (Rest-) Polynom $R(x)$ mit $grad(R) < grad(T) = 1$ wählen, also mit $grad(R) = 0$, gleichbedeutend zu $R(x) = c$ mit einer Konstanten c. Also gilt

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + c.$$

Setzen wir nun x_0 ein, so finden wir

$$P(x_0) = 0 = 0 \cdot Q(x_0) + c \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Somit ist für alle reellen Zahlen x die behauptete Darstellung bewiesen. ❑

Aufgabe 27.04 – MO580924. Man zeige, dass der Ausdruck $\frac{1}{20} \cdot x^5 - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x$ für jedes ganzzahlige x ebenfalls ganzzahlig ist.

Lösungshinweise: Der Ausdruck lässt sich zu $A(x) = \frac{1}{20} \cdot x \cdot (x^4 - 5 \cdot x^2 + 4)$ umformen. Eine Zahl ist genau dann durch 20 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 5 teilbar ist. Aus $x^4 - 5 \cdot x^2 + 4$ ergibt sich durch Substitution $x^2 = y$ der Term $y^2 - 5 \cdot y + 4$. Dieser Term hat die Nullstellen $y_1 = 4$ und$y_2 = 1$ und lässt sich durch Linearfaktorzerlegung in der Form $(y - 4) \cdot (y - 1)$ schreiben. Setzen wir die Substitution zurück, erhalten wir $(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$ bzw. nach Anwenden der dritten binomischen Formel $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$.

Damit lässt sich A(x) in die Form $A(x) = \frac{1}{20} \cdot (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$ bringen. Da unter fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets eine durch 5 und mindestens eine durch 4 teilbar ist, sind $(x - 2)(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)(x + 2)$ stets durch 20 teilbar und somit der betrachtete Ausdruck ganzzahlig. ❑

Hinweis: Eine Herleitung der Darstellung in fünf Linearfaktoren ist nicht erforderlich, jedoch muss dann durch Ausmultiplizieren nachgewiesen werden, dass diese Darstellung korrekt ist.

Aufgabe 27.05 – MO321043B[4]. Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a und b, für die sich bei Division des Polynoms $f(x) = x^4 + 2a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2$ durch das Polynom $g(x) = x^2 + a \cdot x + b$ erweist, dass ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

Lösungshinweise: Wenn für ganze Zahlen a und b die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind, so hat dieses Polynom $h(x)$ mit Zahlen p und q die Gestalt $h(x) = x^2 + p \cdot x + q$ und es gilt:

$$(x^2 + p \cdot x + q) \cdot (x^2 + a \cdot x + b) = x^4 + 2a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2.$$

Nach Ausmultiplizieren erhalten wir auf der linken Seite dieser Gleichung

$$x^4 + (p + a) \cdot x^3 + (ap + b + q) \cdot x^2 + (bp + aq) \cdot x + bq.$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten bei den Potenzen von x auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} p + a &= 2a && (1)\\ ap + b + q &= 2 && (2)\\ bp + aq &= 1 && (3)\\ bq &= -2 && (4) \end{aligned}$$

[4] In Aufgabe 3 konnte zwischen zwei Aufgaben A und B genau eine gewählt werden.

Aus der Gleichung (1) folgt unmittelbar $p = a$. Dann gilt nach (2) $b + q = 2 - a^2$ bzw. nach (3) $a \cdot (b + q) = 1$. Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$a \cdot (2 - a^2) = 1$$

Da sowohl a als auch $2 - a^2$ ganzzahlig sind, muss a ein Teiler von 1 sein. Für $a = -1$ wäre $(-1) \cdot (2 - (-1)^2) - 1 \neq 1$, also widersprüchlich. Folglich muss $a = 1$ gelten. Damit verbleibt ein Gleichungssystem in b und q:

$$b + q = 1$$
$$bq = -2$$

dessen Lösungen nach dem Satz von VIETA aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0$$

gefunden werden: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$. Wir erhalten $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$.

Also können die Bedingungen der Aufgabe nur durch

$$a = 1, p = 1, b = 2, q = -1$$

und

$$a = 1, p = 1, b = -1, q = 2$$

erfüllt werden, d.h. für die Paare $(a; b)$ sind die Lösungen $(1; 2)$ und $(1; -1)$ möglich.

Die Probe bestätigt das Ergebnis, denn es gilt:

$$(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x - 1) = x^4 + 2a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2.$$

❑

Aufgabe 27.06. Welchen Rest lässt das Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{100} x^k = x^{100} + x^{99} + \ldots + x + 1$ bei Division durch $(x^2 + x + 1)$?

Lösungshinweise: Wir wissen, dass wir das Polynom P in der Form $P = T \cdot Q + R$ darstellen können. Durch einfaches Zusammenfassen erkennen wir für das (Teiler-) Polynom $T(x) = (x^2 + x + 1)$ die Struktur

$$P(x) = x^{98} \cdot (x^2 + x + 1) + x^{95} \cdot (x^2 + x + 1) + \ldots + x^2 \cdot (x^2 + x + 1) + x + 1$$

Wir können folglich ablesen: $Q(x) = x^{98} + x^{95} + \cdots + x^2$ und $R(x) = x + 1$. ❑

Aufgabe 27.07. Welchen Rest lässt das Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{100} x^k = x^{100} + x^{99} + \ldots + x + 1$ bei Division durch $(x^2 - 1)$?

Lösungshinweise: Obwohl die Aufgabenstellung so ähnlich aussieht, erscheint hier die konstruktive Lösungssuche nach dem Polynom Q aufwändig. Wir verwenden stattdessen die Darstellung $P(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x) + R(x)$.

Wegen $grad(T) = 2$ ist das Restpolynom R höchstens linear ($grad(R) \leq 1$), also $R(x) = a \cdot x + b$. Setzen wir nacheinander für x die Werte –1 und 1 in die Polynomgleichung ein, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$P(-1) = 1 = 0 \cdot T(-1) + R(-1) = R(-1) = -a + b$$
$$P(1) = 101 = 0 \cdot T(1) + R(1) = R(1) = a + b$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten a, b ermitteln: $R(x) = 50x + 51$. ❑

Der Divisionsalgorithmus für Polynome (Partialdivision) wird als bekannt vorausgesetzt. Damit ist es keine Schwierigkeit, die Division von $x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ durch $x^2 + 2x + 1$ auszuführen:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) + x + 3.$$

Hinweis: Wie häufig bei solchen Aufgaben kann man die aufwändige Division durch geschicktes Zusammenfassen vereinfachen, denn es gilt

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x + 1)^3 + x + 3\ ,\ x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

woraus die obige Zerlegung unmittelbar folgt.

Aufgabe 27.08. Welchen Rest lässt das Polynom $(x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x)$ bei der Division durch $(x^3 - x)$?

Lösungshinweis: Da das Restpolynom höchstens vom Grad 2 ist, gibt es Koeffizienten a, b, c, so dass gilt:

$$x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x = T(x) \cdot (x^3 - x) + (ax^2 + bx + c).$$

Setzen wir nun für x nacheinander die drei Nullstellen des Polynoms $(x^3 - x)$ ein, also $-1, 0$ und 1, so finden wir ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen,

$$(-1)^{81} + (-1)^{49} + (-1)^{25} + (-1)^9 + (-1) = -5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$
$$= a - b + c,$$
$$0^{81} + 0^{49} + 0^{25} + 0^9 + 0 = 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c,$$
$$1^{81} + 1^{49} + 1^{25} + 1^9 + 1 = 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c,$$

aus denen wir $a = 0, b = 5$ und $c = 0$ ermitteln. Damit lautet das Restpolynom $R(x) = 5 \cdot x$. ❑

Aufgabe 27.09. Ein Polynom P lasse bei Division durch $(x - 1)$ den Rest 1, bei Division durch $(x - 2)$ den Rest 2 und bei Division durch $(x - 3)$ den Rest 3. Man zeige, dass P bei Division durch $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$ den Rest $R(x) = x$ lässt.

Lösungshinweis: Es sei P das Polynom, dessen Zerlegung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ gesucht wird. Laut Voraussetzung gilt:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q_1(x) + 1$$

$$P(x) = (x-2) \cdot Q_2(x) + 2$$
$$P(x) = (x-3) \cdot Q_3(x) + 3$$

Also finden wir $P(1) = 1, P(2) = 2$ und $P(3) = 3$. Betrachten wir nun

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \cdot Q(x) + R(x)$$

so können wir nacheinander für x die Werte 1, 2 und 3 einsetzen. Außerdem ist $R(x)$ ein Polynom höchstens vom Grad 2, also $R(x) = ax^2 + bx + c$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem für die Unbekannten a, b und c,

$$P(1) = 1 = a + b + c$$
$$P(2) = 2 = 4 \cdot a + 2 \cdot b + c$$
$$P(3) = 3 = 9 \cdot a + 3 \cdot b + c$$

dessen Lösung zu $a = 0$, $b = 1$ und $c = 0$ und somit zu $R(x) = x$ führt. ❑

Aufgabe 27.10. Man finde alle Polynome P, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung $x \cdot P(x-1) = (x-2) \cdot P(x)$ erfüllen.

Lösungshinweise: Setzen wir $x = 2$, so folgt unmittelbar $P(1) = 0$. Daraus lässt sich für $x = 1$ auch $P(0) = 0$ erkennen. Also sind 0 und 1 Nullstellen des Polynoms P und wir können zwei Linearfaktoren abspalten, d.h. es gibt ein Polynom Q mit

$$P(x) = x \cdot (x-1) \cdot Q(x)$$

Setzen wir diese Darstellung von P in die Ausgangsgleichung ein, führt dies zu

$$x \cdot ((x-1) \cdot (x-2) \cdot Q(x-1)) = (x-2) \cdot (x \cdot (x-1) \cdot Q(x)).$$

Somit gilt für alle x mit $x \neq 0,\ 1,\ 2$ die Gleichung $Q(x-1) = Q(x)$. Deshalb ist $Q(x) = c$ eine Konstante und wir erhalten $P(x) = c \cdot x \cdot (x-1)$. ❑

Abschließend noch eine historische Aussage von CHRISTIAN GOLDBACH (1690 bis 1764) aus dem Jahr 1752:

Satz. Sei $P(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann können nicht alle Glieder der Folge $|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|, \ldots$ Primzahlen sein.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe ein solches Polynom. Es kann in der Form $P(x) = P(0) + x \cdot Q(x)$ mit einem geeigneten Polynom $Q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden. Ist $|P(0)|$ eine Primzahl p, so ist der Ausdruck $P(py) = P(0) + py \cdot Q(py)$ für alle positiven ganzen Zahlen y durch p teilbar. Wenn alle Funktionswerte Primzahlen sind, gilt somit $P(py) = p$ für alle diese y. Ein Polynom ist aber für ausreichend große Argumente stets monoton, so dass nicht an unendlich vielen ganzzahligen Argumenten der Wert p auftreten kann. ❑

Der Goldene Schnitt

LEONHARD EULER (1707 – 1783) formulierte den Goldenen Schnitt so: *Er entsteht, wenn man eine gegebene Strecke so schneidet, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.*

Mögen die Abschnitte der Strecke die Längen a und b haben. Es soll gelten:

$$b \cdot (a + b) = a^2$$

Somit gilt für das Verhältnis $a : b$

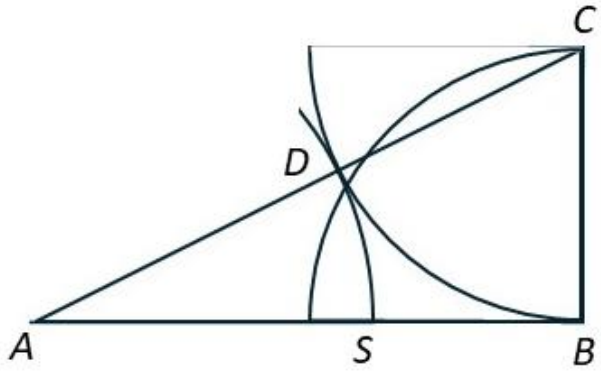
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

also

$$\Phi := \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

(Die zweite Lösung $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ entfällt, da Φ positiv sein soll).

Konstruktionsbeschreibung. Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ der Länge c soll im Goldenen Schnitt geteilt werden.



1) Konstruiere den Kreis um B mit Radius $c/2$. Er schneidet die Senkrechte auf $\overline{AB}$ mit Fußpunkt B in einem Punkt, der C genannt wird. (der zweite Schnittpunkt liefert dasselbe Ergebnis).
2) Konstruiere den Kreis um C mit Radius $c/2$. Er schneidet die Strecke $\overline{AC}$ (zwischen A und C) in einem Punkt, der D genannt wird.
3) Konstruiere den Kreis um A mit Radius $|\overline{AD}|$. Er schneidet die Strecke $\overline{AB}$ (zwischen A und B) im gesuchten Punkt S.

Beweis: Laut Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt B. Die Kathetenlängen betragen $|\overline{AB}| = c$ und $|\overline{BC}| = \frac{c}{2}$. Mithilfe des Satzes des PYTHAGORAS im rechtwinkligem Dreieck ΔABC mit rechten Winkel im Punkt B ermitteln wir daraus die Länge $|\overline{AC}| = c\frac{\sqrt{5}}{2}$. Nach dem dritten Konstruktionsschritt erhalten wir schließlich

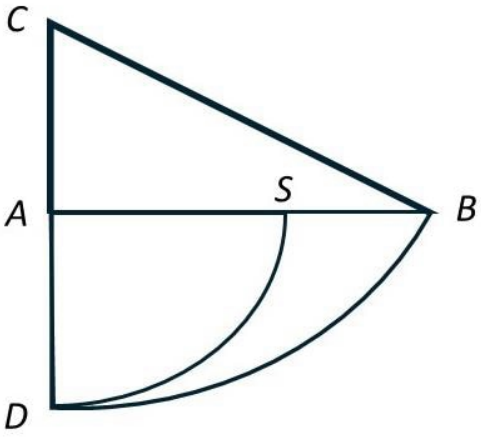
$$|\overline{AS}| = |\overline{AD}| = |\overline{AC} - \overline{DC}| = c \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) = c \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Somit gilt

$$\frac{|\overline{SB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(3-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

d.h. $|\overline{AS}| : |\overline{AB}| = |\overline{SB}| : |\overline{AS}|$ und S teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt. ❑

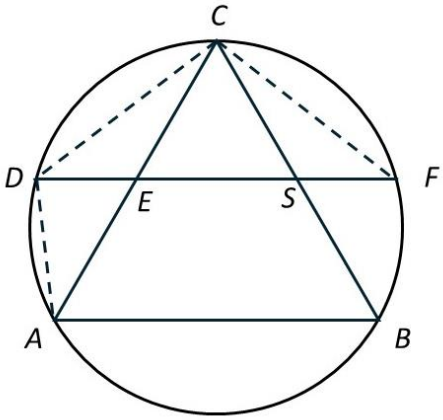
Diese Konstruktion des Goldenen Schnitts ist als innere Teilung nach HERON VON ALEXANDRIA (ca. 1. Jh. u.Z.) bekannt. Auf EUKLID VON ALEXANDRIA (ca. 3. Jh. v.u.Z.) geht folgende **Konstruktion** zurück:



1) Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$ der Länge c. Errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt A eine Senkrechte und markiere auf ihr den Punkt C mit $|\overline{AC}| = \frac{c}{2}$.
2) Konstruiere den Kreis um C mit dem Radius $|\overline{CB}|$. Er schneidet die Verlängerung von AC über A hinaus in einem Punkt, der D genannt wird.
3) Konstruiere den Kreis um A mit dem Radius $|\overline{AD}|$. Er schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt S, der die Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.

Beweis: In Analogie zu oben finden wir (ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel im Punkt A und den Kathetenlängen $|\overline{AB}| = c$ und $|\overline{AC}| = \frac{c}{2}$) die Längen $|\overline{AD}| = c \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $|\overline{AS}| = c \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, woraus der Nachweis des Goldenen Schnitts wie oben zu vollenden werden kann. ❑

Aufgabe 1. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ΔABC mit Umkreis. Die Gerade durch die Seitenmitten von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ schneiden den Kreis und das Dreieck in den Punkten D, E und S und F (von links nach rechts).

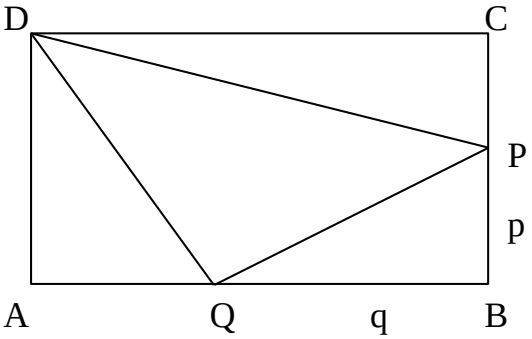


Man zeige: Der Punkt S teilt die Strecke $\overline{EF}$ im Goldenen Schnitt.

Beweis: Über der Sehne $\overline{CD}$ sind die Peripheriewinkel $\angle DAC$ und $\angle DFC$ gleich groß. Folglich sind die Dreiecke ΔAED und ΔCEF ähnlich (www) und es gilt $|\overline{AE}| : |\overline{DE}| = |\overline{EF}| : |\overline{EC}|$. Wegen der Symmetrie der Konstruktion gilt $|\overline{SF}| = |\overline{DE}|$. Außerdem gilt im gleichseitigen Dreieck $|\overline{AE}| = |\overline{EC}| = |\overline{ES}|$. Somit erhalten wir daraus

$$|\overline{ES}| : |\overline{EF}| = |\overline{SF}| : |\overline{ES}|$$ ❑

Hinweis: Diese Konstruktionsmöglichkeit des Goldenen Schnitts stammt von GEORG PHILLIP ODOM (1941 bis 2010) aus dem Jahr 1982.



Aufgabe 2. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{BC}| = b$. Gesucht sind Punkte P auf $\overline{BC}$ und Q auf $\overline{AB}$ so, dass die Dreiecke ΔAQD, ΔQBP und ΔPCD denselben Flächeninhalt haben.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Längen $|\overline{QB}| = q$ und $|\overline{PB}| = p$ und vergleichen die Doppelten der Flächeninhalte der genannten drei Dreiecke:

$$(a - q) \cdot b = (b - p) \cdot a = p \cdot q$$

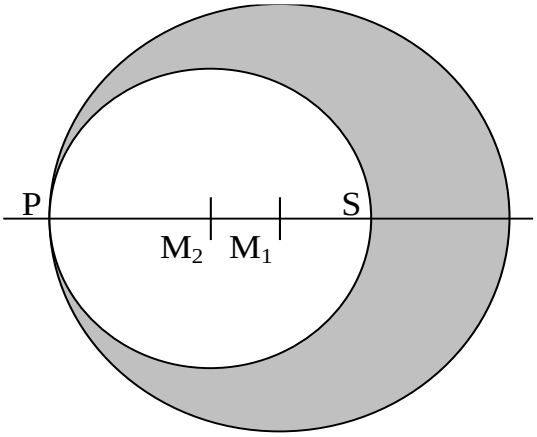
Durch einfaches Umformen finden wir

$$a(a - q) = q^2 \qquad \text{und} \qquad b(b - p) = p^2,$$

d.h. die Punkte P und Q teilen die entsprechenden Rechteckseiten im Goldenen Schnitt. ❑

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Peripheriepunkt P. Gesucht ist ein den Kreis K_1 von innen in P berührender Kreis K_2 mit Mittelpunkt M_2 so, dass der Schwerpunkt S des Halbmondes K_1 ohne K_2 (graue Fläche) genau der Schnittpunkt des Durchmessers durch P mit K_2 ist.

Lösungshinweise: Wir betrachten die „Waage“ mit Drehpunkt M_1 und Armen M_1M_2 sowie M_1S. Auf die „Waagschalen“ kommen die Flächeninhalte des Kreises K_2 über M_2 bzw. des Halbmondes über S, d.h. es gilt (unter Vernachlässigung des Faktors π auf beiden Seiten):



$$M_1M_2 \cdot r_2^2 = M_1S \cdot (r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $|\overline{M_1M_2}| = r_1 - r_2$ und $|\overline{M_1S}| = 2r_2 - r_1$ gilt $r_2^2 = (2r_2 - r_1) \cdot (r_1 + r_2)$. Die letzte Gleichung ist äquivalent zu $r_1^2 = r_2 \cdot (r_1 + r_2)$. Folglich verhalten sich r_1, r_2 und deren Summe nach dem Goldenen Schnitt. ❑

Aufgabe 4. Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$. Konstruiere den Punkt C auf der Geraden AB, so dass B die Strecke $\overline{AC}$ im Goldenen Schnitt teilt.

Lösungshinweise: Der gesuchte Punkt C (auf der Geraden AB rechts von B gelegen) soll die Gleichung $|\overline{AB}| : |\overline{AC}| = |\overline{BC}| : |\overline{AB}|$ erfüllen. Wir konstruieren zunächst den Punkt C‘, der die Strecke AB im Innern nach dem Goldenen Schnitt teilt, erhalten also

$$\left|\overline{AC'}\right| : |\overline{AB}| = \left|\overline{BC'}\right| : \left|\overline{AC'}\right|$$

Wir strecken die Figur aus den Punkten A, C‘ und B aus A mit dem Faktor $f = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|}$. Dabei geht C‘ in B über. Den Bildpunkt von B nennen wir C.

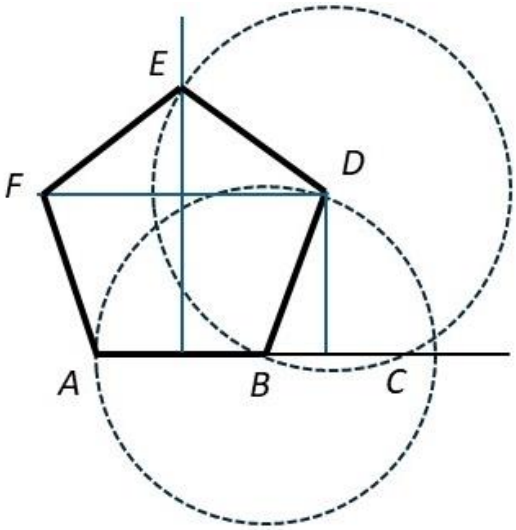
$$\left|\overline{AC'}\right| \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|} = |\overline{AB}| \quad ; \quad |\overline{AC}| = |\overline{AB}| \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|} \quad ; \quad |\overline{BC}| = \left|\overline{C'B}\right| \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|}$$

Damit teilt B die Strecke AC im Goldenen Schnitt, denn es gilt

$$\frac{\left|\overline{AC'}\right|}{|\overline{AB}|} = \frac{\left|\overline{BC'}\right|}{\left|\overline{AC'}\right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left|\overline{AC'}\right| \cdot f}{|\overline{AB}| \cdot f} = \frac{\left|\overline{BC'}\right| \cdot f}{\left|\overline{AC'}\right| \cdot f} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|},$$

d.h., dieser Punkt erfüllt die Forderung. ❑

Auf diesem Zusammenhang basiert eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ mit der Seitenlänge $|\overline{AB}| = c$. Die Seite des Fünfecks befindet sich im goldenen Verhältnis zu seinen Diagonalen, d.h. die Länge d einer Diagonalen des Fünfecks beträgt $d = c \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) \approx 1.618 \cdot c$.



Konstruktionsbeschreibung.

(1) Konstruiere den Punkt C auf der Geraden AB, so dass der Punkt B die Strecke $\overline{AC}$ im Goldenen Schnitt teilt.
(2) Konstruiere die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$.
(3) Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und dem Kreisbogen des Kreises um B mit dem Radius $|\overline{AB}| = c$ werde D genannt.
(4) Konstruiere die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.
(5) Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und dem Kreisbogen des Kreises um D mit dem Radius $|\overline{BD}|$, dessen Abstand zu AB größer als der Abstand von D zu AB ist, werde E genannt.
(6) Der Spiegelpunkt von D an der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ werde F genannt.

Das Fünfeck $ABDEF$ ist regelmäßig mit der Seitenlänge c.

Beweis: Wir berechnen die Länge $|\overline{HD}|$ der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$. Da B die Strecke $\overline{AC}$ im Goldenen Schnitt teilt, gilt $c^2 = |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| = |\overline{AC}| \cdot (|\overline{AC}| - c)$. Mit $|\overline{AC}| = x$ erhalten wir für x die quadratische Gleichung $x^2 - c \cdot x - c^2 = 0$. Die positive Nullstelle lautet nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen $x = \frac{1}{2}c \cdot \left(1+\sqrt{5}\right)$. Somit finden wir $|\overline{BH}| = \frac{1}{2} \cdot (x - c) = \frac{1}{4}c \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)$.

Mit Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS im Dreieck ΔBHD mit dem rechten Winkel bei H erhalten wir $|\overline{HD}| = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}\right)} = \frac{c}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Damit können wir nun auch die Länge der Strecke $|\overline{AD}|$ berechnen, indem wir den Satz des PYTHAGORAS im Dreieck ΔAHD mit dem rechten Winkel bei H anwenden.

$$|\overline{AD}| = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{24+8\sqrt{5}} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

Wegen $6+2\sqrt{5} = \left(1+\sqrt{5}\right)^2$ erkennen wir $|\overline{AD}| = |\overline{AB}| \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$. ❑

Immer wieder in der Geschichte haben sich Künstler und Mathematiker herausgefordert gefühlt, das Konstruktionsverfahren regelmäßiger Fünfecke zu vereinfachen. Von LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) stammt folgender Vorschlag:

Konstruktionsbeschreibung.

(1) Konstruiere über der gegebenen Strecke $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck ΔABG.
(2) Konstruiere den Fußpunkt des Lotes von B auf die Seite $\overline{AG}$. Dieser Fußpunkt werde H genannt.
(3) Der Kreis um B mit dem Radius $|\overline{BH}|$ schneidet die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ im Punkt M.
(4) Konstruiere den Kreis um M mit dem Radius $|\overline{MB}|$, den Umkreis des gesuchten Fünfecks.
(5) Konstruiere den Punkt $C \neq A$ auf diesem Umkreis mit $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$.
(6) Konstruiere den Punkt $D \neq B$ auf diesem Umkreis mit $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$.
(7) Konstruiere den Punkt $E \neq C$ auf diesem Umkreis mit $|\overline{CD}| = |\overline{DE}|$.

Bemerkung: Der Umkreisradius r_u eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge a hat die Länge $r_u = a \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \approx 0.851 \cdot a$. Die Konstruktion von DA VINCI erzeugt jedoch einen Umkreisradius $r = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.866 \cdot a$. Die Konstruktion ist also nicht korrekt. Auch die folgende zweite Konstruktion von ALBRECHT DÜRER ist nicht korrekt.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) steht eine umfangreiche Sammlung digitalisierter Dokumente zur Verfügung. Darunter ist ein 178-seitiges Werk von ALBRECHT DÜRER (1471 BIS 1528), das er 1525 in Nürnberg drucken ließ:

https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/17139/1

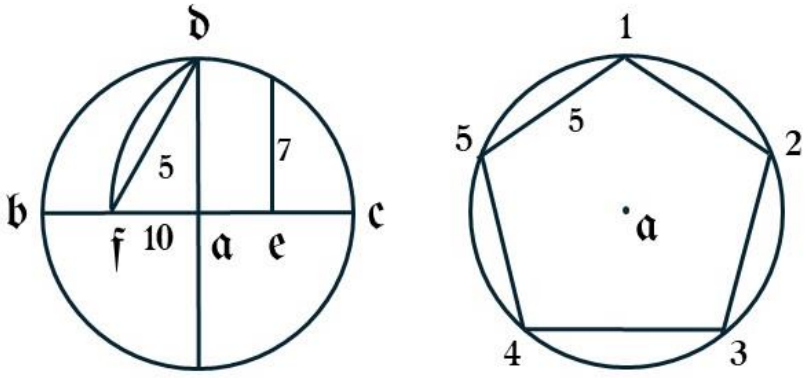
Während im ersten Teil der goldene Schnitt für die Konstruktion verwendet wird, erfolgt die zweite Konstruktion mit einem „rostigen“ Zirkel (d.h. mit unveränderter Zirkelspanne) – jedoch wird nicht gezeigt, dass das konstruierte Fünfeck regelmäßig ist. Für diesen Auszug wurde versucht, die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beizubehalten. In Anlehnung an den Schrifttyp des Originals wird der Schrifttyp Bertholdr Mainzer Fraktur verwendet. Die Grafiken wurden nachgezeichnet.

Underweysung der messung / mit dem zirckel vn richt scheyt / in Linien ebnen vnnd gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zusamen getzoge / vnd zu nutz alle kunstlieb habenden mit zu gehörigen figuren / in truck gebracht / im jar M. D. X X v.

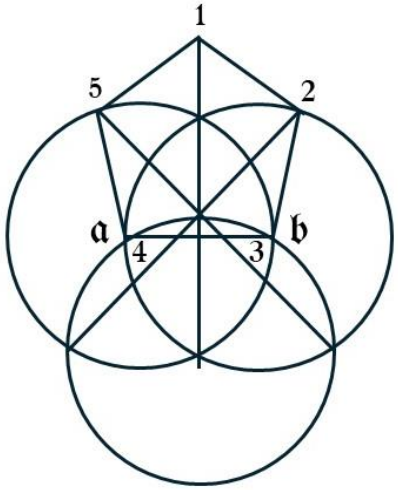
[S. 57] Nun will ich anzeige wie man auf einer ebne gleych ecket figure / gerad od ungerad / als da sind / drey / fier / fünf / sechs ecket figuren rc. sol mache.

…

Nun ist von nötten ein fünfeck zumachen / in ein zirckelryß / dem thue also / Reiß auß eine Centrum.a. ein zirckelryß / und zeuch ein zwerchlini durch das Centru.a. und da sie zu beden seyten die zirckellini durch schneidet / da setz.b.c. Darnach zeuch durch de Centru.a. ein aufrechte lini zu gleyche wincklen / von wo sy eben die zirkellini durch schneydet / do setz ein.d. Darnach reiß ein gerade lini.e.d. vn nym ein zirckel / setz jn mit dem ein fuß in den punckte.e. den andern in das.d. vn reiß von dan herab aus die zwerchlini.b.c. wo sie die durchschneidt da setz ein,f, vn reiß.f.d. gerad zusame / dise lenge.f.d. ist ein seite eins fünfteyls /de ecket im zirckel herum dryt / so ist.f.a. ein seyte eins zehenecks / Darnach teyl.a.c.mit einem punckten.e.in zwey gleiche teyl / so du dan auß dem punckten.e.mit einer aufrechten lini vbersich ferst / biß an die zirckellini / so hast du ein sibenteil des zirckels Mechanice / wie ich das vnden hab aufgeryssen.



Aber ein Fünfeck auß vnuertuckten zirckel zu machenn / dem thue alſo / Reiß zwen zirckel durch einander / alſo das eins ytlichen runde / durch des andern Centrum gee / vnd die zwey Cetra a.b.zeuch mit einer geraden lini / zuſamen / daſ wirdet ein leng einer ſeyten deſ fünften eckeſ / wo aber die zirckellini an einander durchſchneiden / da ſetz oben ein.c.vnden ein.d.vn reiß ein gerade lini.c.d.Darnach nym den vnuerruckten zirckel vnd ſetz jn mit dem ein fuß in den punckten.d. vn mit dem andern reiß durch die zwen zirckelryß / vn jre bede Centro.a.b. vnd do die zwen runden ryß durch ſchnitten werden / da ſetz.e.f. Aber wo die aufrecht.c.d.duch ſchnitte wirdet / da ſetz ein.g. Darnach zeuch ein gerade lini.e.g.gar hynauß byß an den zirckellini / da ſetz ein.h. darnach zeuch ein andre gerade lini.f.g. biß an die zirckellini da ſetz ein.i. zeuch darnach.i.a. vn.h.b. gerad zuſamen / ſo werden drey ſeyten des fünfecks/ vnd von dan laß zwu gleich ſeyten leng vom.i.h. oben zuſam reichen / ſo wirdet ein fünfeck / wie ich das vnden hab aufgeryſſen.



Termine

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
08.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

6. Tag der Mathematik[5] der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz mit Team-Wettbewerben für Schülerinnen und Schüler (Klassenstufen 8-9 und 10-12), zwei Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen, Lehrer und alle anderen Mathematik-Interessierte sowie einer Mitmach-Ausstellung.
23.03.2024, 09:30 bis 16:30 Uhr im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude in der Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz, ausführliche Information unter
www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2024/index.php
10.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

Landeswettbewerb „Jugend forscht/Schüler experimentieren“
23.03.2024: Land Sachsen - BGH Edelstahlwerke GmbH, DAS Environmental Expert GmbH, GLOBALFOUNDRIES Management Services LLC & Co. KG
www.jugend-forscht-sachsen.de

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Nachtrag zur 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“.
13.04.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast bei ICM - Institut Chemnitzer Maschinen- und Anlagenbau e.V. (Otto-Schmerbach-Straße 19, Hochhaus 6, 09117 Chemnitz)
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

[5] Siehe auch „Mathematische Kostproben“ Heft 2/2024

Lösungshinweise zu Monatsaufgabe 1/2024

Aufgabe. Es sei α eine reelle Zahl. Bestimme alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, so dass folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen x gilt

$$P(2x + \alpha) \leq (x^{20} + x^{19})\, P(x).$$

Lösungshinweise: Wir zeigen, dass nur das Nullpolynom $P(x) \equiv 0$ die geforderte Eigenschaft hat. Das Nullpolynom erfüllt offensichtlich die Aufgabe.

Nehmen wir an, dass das Polynom P nicht das Nullpolynom ist. Es sei n sein Grad mit einem Koeffizienten $a_n \neq 0$ bei x^n. Das Polynom

$$Q(x) = (x^{20} + x^{19}) \cdot P(x) - P(2x + \alpha)$$

hat den Grad $n + 20$. Der Koeffizient x^{n+20} ist ebenfalls a_n. Erfüllt das Polynom Q die geforderte Ungleichung, ist $Q(x)$ nicht-negativ für alle reellen Zahlen x. Daraus folgt, dass $n + 20$ (und auch n) eine gerade Zahl ist und $a_n > 0$ gilt.

Setzen wir in die Ungleichung $x = -1$ und $x = 0$ erhalten wir $P(-2 + \alpha) \leq 0$ bzw. $P(\alpha) \leq 0$. P hat also reelle Nullstellen. Wir bezeichnen mit m die minimale reelle Nullstelle und mit M die maximale reelle Nullstelle. Wegen $a_n > 0$ sind die Werte $P(x)$ außerhalb des Intervalls $\langle m, M\rangle$ positiv. Also finden wir $\{-2 + \alpha, \alpha\} \subset \langle m, M\rangle$, d.h. das Intervall $\langle m, M\rangle$ ist nicht entartet und hat eine Länge von mindestens 2.

Für die Nullstelle $x = m$ finden wir $P(2m + \alpha) \leq 0$. Dies impliziert $m \leq 2m + \alpha$ (weil m offenbar im Intervall $\langle m, M\rangle$ liegt) und somit $-\alpha \leq m$.

Analog dazu erhalten wir für die Nullstelle $x = M$ die Abschätzung $P(2M + \alpha) \leq 0$. Daraus ergibt sich (weil M offenbar im Intervall $\langle m, M\rangle$ liegt) $2M + \alpha \leq M$ und somit $M \leq -\alpha$.

Es folgt insgesamt $-\alpha \leq m < M \leq -\alpha$, also $m = M = -\alpha$ im Widerspruch zur obigen Erkenntnis, dass dieses Intervall mindestens die Länge 2 besitzt. Damit kann es kein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom geben, dass die Ungleichung erfüllt. ❑

Monatsaufgabe 3/2024[6]

Es seien *a*, *b*, *c* positive reelle Zahlen mit $a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Man zeige, dass

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2 + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1}$$

gilt. Man finde alle Tripel (a, b, c), für die Gleichheit gilt.

[6] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.04.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 27 – Rechnen mit Polynomen 3
Der Goldene Schnitt 12
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Termine 18
Lösungshinweise zu Monatsaufgabe 1/2024 19
Monatsaufgabe 3/2024 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[7]	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4.2
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042, MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

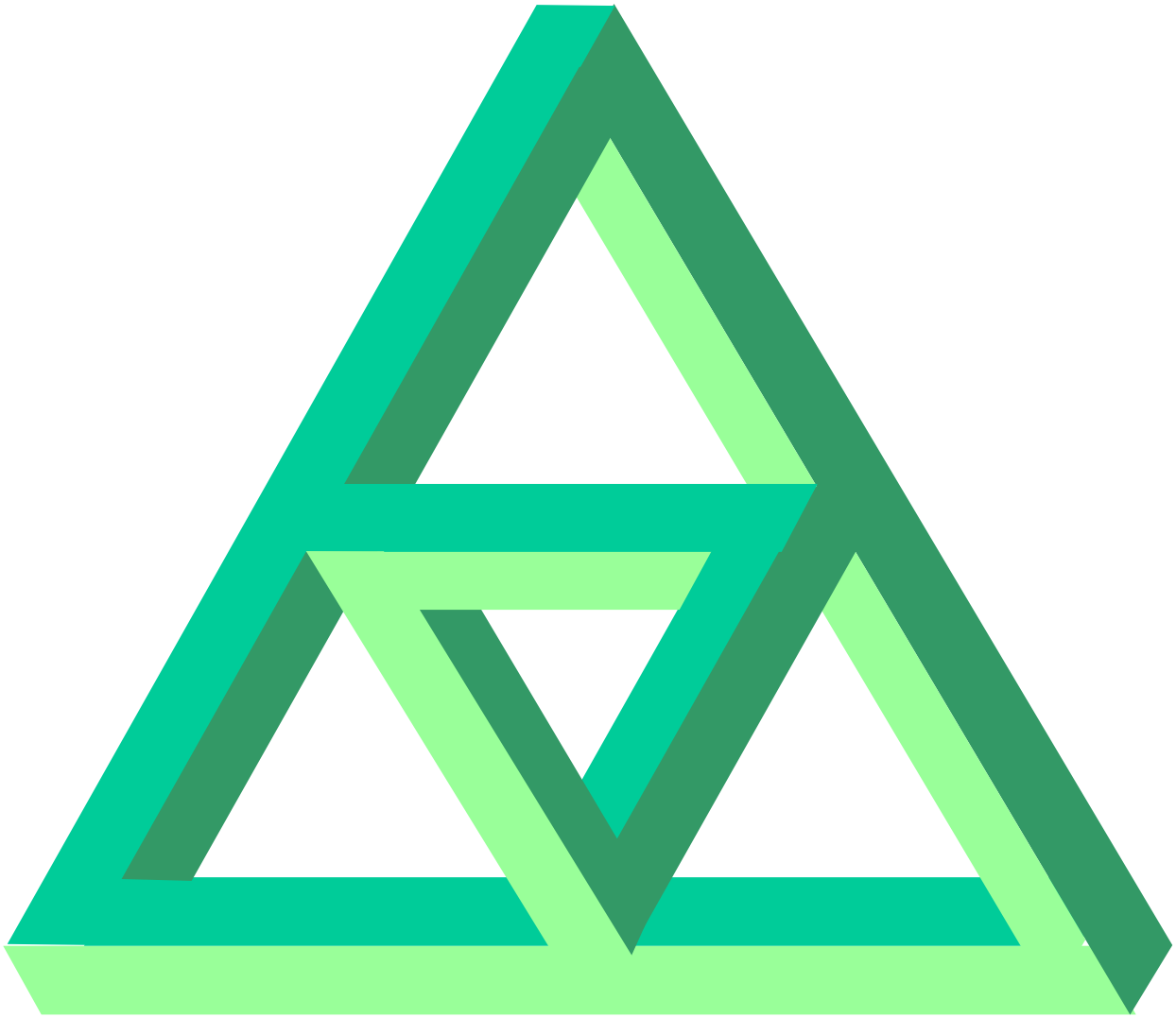
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[7] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 04/2024 (April 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Im ersten Rückblick auf die Aufgaben der diesjährigen Landesrunde der MO greifen wir die Aufgabe **MO630931** auf. Bereits mehrfach spielten Summen von Quadratzahlen in den letzten Jahrgängen eine Rolle, die wir im Thema 9 (s. Hefte 09/2021 und 11/2022) untersuchten. Nun setzen wir die Betrachtungen für Differenzen von Quadratzahlen fort. Dabei finden wir vergleichbare Lösungsansätze:

- Finden von konkreten Zahlenbeispielen,
- Nachweis der Existenz unendlich vieler Lösungen mittels konstruktiver Bildungsvorschriften,
- Beweis der Nicht-Existenz von Lösungen durch Untersuchungen zu Resten bei Division von Quadratzahlen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 9.3 – Differenzen und Summen von Quadratzahlen

Aufgabe 9.11 – MO630931. In dieser Aufgabe betrachten wir das Produkt von zwei (verschiedenen) Primzahlen.

a) Geben Sie zwei Beispiele an, bei denen das Produkt von zwei Primzahlen nicht die Differenz von zwei Quadratzahlen ist.
b) Für welche Paare von Primzahlen ist ihr Produkt die Differenz von zwei Quadratzahlen?

Hinweis: Als Quadratzahlen werden die Quadrate ganzer Zahlen bezeichnet.

Lösungshinweise zu Teil a): Es genügt, geeignete Beispiele durch systematisches Probieren zu finden, und dabei zu hoffen, dass es mit kleinen Werten von Primzahlen p und q bereits gelingt.

Primzahlenprodukte	3	5	7	11
2	6	10	14	22
3	x	$15 = 4^2 - 1^2$	$21 = 5^2 - 2^2$	$33 = 7^2 - 4^2$
5	x	x	$35 = 6^2 - 1^2$	$55 = 8^2 - 3^2$

Lassen sich Differenzen von Quadraten angeben, entfallen die zugehörigen Paare als Beispiele mit der geforderten Eigenschaft (Zeilen 3 und 4 der Tabelle). Finden wir jedoch spontan keine solchen Differenzen (Zeile 2 der Tabelle), müssen wir einen Nachweis führen, dass es tatsächlich keine solchen gibt. Insbesondere ist es erforderlich, zu erklären, dass u und v nicht beliebig groß werden können (dass also die Suche nach u und v nur in einem endlichen Bereich erfolgen muss).

Möglichkeit 1 (durch Probieren): Seien v und $u = v + x$ (mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl x) zwei Zahlen mit $pq = u^2 - v^2 = 2xv + x^2$. Weil daraus $x^2 < pq$ folgt, können wir die möglichen Werte für x ausprobieren und untersuchen, ob $\frac{pq-x^2}{2x}$ zu einer ganzen Zahl v führt:

Aus $p \cdot q = 6$ folgt $x < 3$.

Setzen wir $x = 1$ erhalten wir $6 - 1 = 2v$, also $v = \frac{5}{2}$.

Setzen wir $x = 2$ erhalten wir $6 - 4 = 4v$, also $v = \frac{1}{2}$.

Aus $p \cdot q = 10$ folgt $x < 4$.

Setzen wir $x = 1$ erhalten wir $10 - 1 = 2v$, also $v = \frac{9}{2}$

Setzen wir $x = 2$ erhalten wir $10 - 4 = 4v$, also $v = \frac{3}{2}$

Setzen wir $x = 3$ erhalten wir $10 - 9 = 6v$, also $v = \frac{1}{6}$

Damit haben wir für $(2;3)$ und $(2;5)$ gezeigt, dass die Produkte nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar sind. Auch für die anderen Produkte der 2. Zeile könnten wir so den Nachweis führen. Jedoch steigt der Aufwand schnell an und die Vorgehensweise kann wohl nicht verallgemeinert werden.

Möglichkeit 2 (mittels Primfaktorenzerlegung): Anhand der Tabelle vermuten wir, dass es für Primzahlen $2 = p < q$ keine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen u^2 und v^2 gibt. Gelte $2q = u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, so ist mindestens einer der Faktoren der rechten Seite geradzahlig. Sei dies $u - v$, so ist auch $u + v = (u - v) + 2v$ geradzahlig (bzw. wenn $u + v$ geradzahlig ist, so ist auch $u - v = u + v - 2v$ geradzahlig). Somit ist die Differenz beider Quadratzahlen stets durch 4 teilbar, während im Produkt $2q$ wegen der Primzahl $q > 2$ kein weiterer Faktor 2 möglich ist. Insbesondere sind die Beispiele in der 2. Zeile der Tabelle nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.

Möglichkeit 3 (Reste bei Division durch 4): Wir untersuchen für die Differenz zweier Quadratzahlen die Reste bei Division durch 4 in Abhängigkeit von der Paarigkeit der Quadratzahlen:

u	v	$u^2 - v^2$	Rest bei Division durch 4
$2x$	$2y$	$4(x^2 - y^2)$	0
$2x + 1$	$2y$	$4(x^2 + x) - 4y^2 + 1$	1
$2x$	$2y + 1$	$4x^2 - 4(y^2 + y) - 1$	$-1 \equiv 3$
$2x + 1$	$2y + 1$	$4(x^2 + x) - 4(y^2 + y)$	0

In keinem Fall tritt bei der Differenz zweier Quadratzahlen bei Division durch 4 der Rest 2 auf. Somit können alle Produkte $2q$ mit einer ungeraden Zahl $q > 2$ (und erst recht mit einer ungeraden Primzahl) nicht als eine solche Differenz dargestellt werden. Insbesondere sind die Produkte in der 2. Zeile der Tabelle geeignete Beispiele.

Lösungshinweise zu Teil b): Für jedes Paar $(p; q)$ ungerader Zahlen (und erst recht für Primzahlen größer als 2) sind sowohl $p + q$ als auch $q - p$ geradzahlig. Folglich ist der Ausdruck

$$\left(\frac{q+p}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-p}{2}\right)^2$$

eine Differenz zweier ganzzahliger Quadratzahlen.

Zusammen mit der Erkenntnis aus Teil a) können genau die Produkte zweier verschiedener ungerader Primzahlen als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden. ❑

Ergänzung. Zur ausführlichen Diskussion dieser Aufgabe wollen wir die Möglichkeiten untersuchen, Vielfache von 4 als Differenz zweier Quadratzahlen darzustellen.

Fall 1: Es sei $n = 4^k \cdot q$ mit einer ungeraden Zahl q. Wir wissen bereits, dass es für eine solche Zahl q Quadratzahlen u^2 und v^2 mit $q = u^2 - v^2$ gibt. Dann gilt aber auch

$$n = 4^k \cdot q = 4^k \cdot (u^2 - v^2) = (2^k \cdot u)^2 - (2^k \cdot v)^2$$

d.h., es gibt eine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen.

Fall 2: Es sei $n = 4^k \cdot 2 \cdot q$ mit einer ungeraden Zahl q und $k > 0$. Eine Argumentation, dass es keine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen geben kann, weil dies für $2q$ nicht möglich ist, wird durch das Beispiel $24 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 5^2 - 1^2$ widerlegt. Stattdessen betrachten wir die Differenz

$$4^k \cdot \left(\frac{q+2}{2}\right)^2 - 4^k \cdot \left(\frac{q-2}{2}\right)^2 = 4^k \cdot \frac{1}{4} \cdot (8q) = 4^k \cdot 2 \cdot q$$

wobei die Terme auf der linken Seite dieser Gleichung wegen $k > 0$ ganzzahlig sind. Also existiert auch in diesem Fall stets eine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen.

Um die Nichtexistenz von solchen Darstellungen zu beweisen, können die Untersuchungen zu Resten bei Division von Quadratzahlen hilfreich sein.

Aufgabe 9.12 – MO370921. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Wenn eine Quadratzahl ungerade ist, dann lässt sie bei Division durch 8 den Rest 1.
b) Wenn eine Quadratzahl ungerade, aber nicht durch 3 teilbar ist, dann lässt sie bei Division durch 24 den Rest 1.

Lösungshinweise zu Teil a): Wenn eine Quadratzahl n^2 ungeradzahlig ist, dann ist auch n ungeradzahlig. Wir finden also eine ganze Zahl m mit $n = 2m + 1$. Mit dieser Darstellung erhalten wir für n^2

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4 \cdot m \cdot (m+1) + 1$$

Da von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen m und $m + 1$ stets genau eine durch 2 teilbar ist, ist der Term $4 \cdot m \cdot (m+1)$ stets durch 8 teilbar. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Lösungshinweise zu Teil b): Wenn eine Quadratzahl n^2 ungeradzahlig ist, dann ist auch n ungeradzahlig. Wenn eine Quadratzahl n^2 nicht durch 3 teilbar ist, dann ist auch n nicht durch 3 teilbar (weil sonst n^2 sogar durch 9 teilbar wäre). Wir finden also eine ganze Zahl m mit $n = 6m \pm 1$. Mit dieser Darstellung erhalten wir für n^2

$$n^2 = (6m \pm 1)^2 = 12 \cdot m \cdot (3m + 1) + 1$$

Da von zwei natürlichen Zahlen m und $3m + 1 = m + 1 + 2m$ stets genau eine durch 2 teilbar ist, ist der Term $12 \cdot m \cdot (3m + 1)$ stets durch 24 teilbar. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Aufgabe 9.13 – MO050931. Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Lösungshinweise. Es sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar). Die Zahl n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und wir können eine ganze Zahl m finden, so dass $n = 3m + 1$ oder $n = 3m + 2$ gilt. Dann erhalten wir aber

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$$

bzw.

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1. ❑

Aufgabe 9.14 – MO210935. Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Lösungshinweise: Wir überzeugen uns leicht durch Einsetzen der Zahlen ±5, ±4, ±3, ±2, ±1 und 0, dass Quadratzahlen bei der Teilung durch 11 nur die Reste 3, 5, 9, 4, 1 und 0 lassen. Damit die Summe zweier Quadratzahlen durch 11 teilbar ist, muss die Summe ihrer Reste durch 11 teilbar sein. Dies ist aber offenbar nur genau dann der Fall, wenn beide Quadratzahlen den Rest 0 lassen, also durch 11 teilbar sind. ❑

Aufgabe 9.15 – KZM 4-2. Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzten n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

Lösungshinweise: Durch Probieren (mit Zahlen, die auf 2 oder 8 enden) finden wir $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Somit gilt die Aussage mindestens für $n = 1, 2, 3$.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2, deren letzte vier Ziffern gleich 4 sind, also $k^2 = 10^4 \cdot a + 4444$ mit einer geeignet gewählten ganzen Zahl a. Weil 10^4 durch 16 teilbar ist und 4444 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt, lässt auch k^2 bei Division durch 16 den Rest 12. Somit ist k^2 durch 4, nicht aber durch 8 teilbar und k ist das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $k = 2 \cdot (2 \cdot b + 1)$. Daraus folgt

$$k^2 = (4 \cdot b + 2)^2 = 16 \cdot b^2 + 16 \cdot b + 4.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass k^2 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt. Die Aussage gilt also nicht für $n = 4$ und somit auch nicht für alle $n \geq 4$. ❑

Ergänzung. Wir betrachten diese Aufgabenstellung für andere Ziffern außer 4. Untersuchen wir die Quadratzahlen der Ziffern von 0 bis 9, stehen nur die Einerziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9 für Quadratzahlen zur Diskussion.

Fall 1: Endziffern 0. Offenbar gibt es für alle geraden Zahlen n Quadratzahlen, deren letzten n Ziffern sämtliche gleich 0 sind. Betrachten wir eine ungerade Zahl n, so können wir zunächst den Faktor $100^k = (10^k)^2$ abspalten, so dass es o.B.d.A. genügt, die Endziffern …10 zu untersuchen. Da aber eine Quadratzahl bei Division durch 4 nie den Rest 2 lässt (und die Teilbarkeit durch 4 durch die beiden letzten Ziffern der Dezimaldarstellung festgelegt ist), kann es keine Quadratzahl mit diesen Endziffern geben.

Fall 2: Endziffern von 0 verschieden. Für $n = 1$ existieren Quadratzahlen, die auf 1, 5, 6 oder 9 enden. Betrachten wir nun $n = 2$, so stellen wir fest, dass 11, 55, 66 und 99 bei Division durch 4 die Reste 2 oder 3 lassen – dies ist aber für Quadratzahlen nicht möglich. Die Aussage gilt also nicht für $n = 2$ und somit auch nicht für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 9.16 – MO220934. Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann. Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

Lösungshinweise: Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden lässt aber wegen

$$(2m + 1)^2 = 4 \cdot (m^2 + m) + 1$$

bei der Teilung durch 4 immer den Rest 1. Also lässt die Summe zweier Quadratzahlen bei der Teilung durch 4 immer einen der Rest $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ oder $1 + 1 = 2$, nie aber den Rest 3, sodass alle unendlich vielen natürlichen Zahlen der Form $4k + 3$ (mit einer ganzen Zahl $k = 0, 1, 2, \ldots$) sich nicht als Summe zweiter Quadratzahlen darstellen lassen. Dirk hat also recht. ❑

Aufgabe 9.17 – MO100922. Jemand behauptet: Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
b) Beweisen Sie diesen Satz!

Lösungshinweise zu Teil a): Da im Teil b) dieser Zusammenhang allgemein zu beweisen ist, können wir davon ausgehen, dass keine Einschränkungen an a und b zu stellen sind. So finden wir ohne Schwierigkeiten geeignete Zahlenbeispiele:

$$2 \cdot 5 = (1^2 + 1^2)(4^2 + 1^2) = 10 = 3^2 + 1^2$$
$$5 \cdot 25 = (4^2 + 1^2)(4^2 + 3^2) = 125 = 5^2 + 10^2$$

Lösungshinweise zu Teil b): Wir nehmen an, die Zahlen a und b haben die geforderte Eigenschaft. Dann gibt es geeignete natürliche Zahlen p, q, r und s mit $a = p^2 + q^2$ sowie $b = r^2 + s^2$. Wir formen nun das Produkt $a \cdot b$ um:

$$ab = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr)^2 + (ps)^2 + (qr)^2 + (qs)^2$$
$$= (pr)^2 - 2prqs + (qs)^2 + (ps)^2 + 2psqr + (qr)^2$$
$$= (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2$$

Damit haben wir für das Produkt ab eine Darstellung als Summe zweier Quadratzahlen gefunden. ❑

Hinweis: Zählen wir die Null nicht zu den natürlichen Zahlen, so gilt die Aussage nicht mehr allgemein, falls a und b Zahlen derart sind, dass $pr = qs$ gilt. So lassen sich zwar die Zahlen $a = b = 2 = 1^2 + 1^2$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen, für ihr Produkt $ab = 4$ gibt es aber nur die Summendarstellung $2^2 + 0^2$. Vermeiden Sie es, aufgrund eines solchen Widerspruchs die Bearbeitung der Aufgabe sofort mit der Aussage „Es gibt ein Gegenbeispiel, das den zu beweisenden Satz widerlegt“ zu beenden. Fällt der Widerspruch noch während der Zeit der Fragen an die Jury ein, zögern Sie nicht, nach der Rolle der Null bei den natürlichen Zahlen zu fragen.

Wird dagegen die Null zu den natürlichen Zahlen gezählt, dann wäre auch $a = b = 0 = 0^2 + 0^2$ ein korrektes Zahlenbeispiel bei dieser Aufgabenstellung. Sie sollten aber nicht die Lösungsdarstellung auf solch triviale Beispiele beschränken.

Auch wenn wir gleich mit der Bearbeitung von Teil b) beginnen, ist es nachträglich erforderlich, ein konkretes Zahlenbeispiel zur Beantwortung von Teil a) anzugeben.

Aufgabe 9.18 – MO361023. Beweisen Sie die folgende Aussage!

Für jede gerade natürliche Zahl n, von der vorausgesetzt wird, dass sie die Summe zweier Quadratzahlen ist, folgt: Auch $\frac{1}{2}n$ ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(Zwei Beispiele dafür, dass sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung erfüllt sein kann, sind etwa:

1. Beispiel: für $8 = 2^2 + 2^2$ gilt $4 = 2^2 + 0^2$;
2. Beispiel: für $34 = 5^2 + 3^2$ gilt $17 = 4^2 + 1^2$.

Natürlich ist mit solchen Beispielen die zu beweisende allgemeine Aussage nicht erbracht.)

Lösungshinweise: Wir nehmen an, für eine gerade Zahl n sei die Voraussetzung erfüllt, d.h. es gibt natürliche Zahlen a und b mit $a \geq b$ und $n = a^2 + b^2$. Da n geradzahlig ist, sind die Zahlen a und b entweder beide geradzahlig oder beide ungeradzahlig. In jedem Fall sind die Summe und die Differenz von a und b jeweils geradzahlig. So finden wir

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}n$$

Da die Basen der Quadrate auf der linken Seite dieser Gleichung natürliche Zahlen sind, ist eine geforderte Darstellung gefunden. ❑

Aufgabe 9.19 – MO150921. Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.

Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Lösungshinweise: Sind *a* und *b* die Basen der zwei Quadrate, so soll gelten

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b) = a + b$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$(a + b)(a - b - 1) = 0$$

Weil $a + b = 0$ wegen $a > b \geq 0$ entfällt, erhalten wir als notwendige Bedingung $a - b - 1 = 0$. Somit erfüllen alle Paare $(k + 1; k)$ mit natürlichen Zahlen k die Bedingung, da stets $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1 = (k + 1) + k$ gilt. ❑

Aufgabe 9.20 – MO540944. Wir betrachten die Menge $Q = \{25, 49, 121, \dots\}$ der Quadrate aller derjenigen Primzahlen, die größer als 4 sind. Hieraus konstruieren wir die Menge D aller derjenigen positiven Zahlen, die sich als Differenz zweier Zahlen aus Q schreiben lassen.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Menge D.

Lösungshinweise: Jede Primzahl $p \geq 5$ lässt sich in der Form $p = 6k \pm 1$ darstellen. Damit gilt stets

$$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36 \cdot k^2 \pm 12 \cdot k + 1 = 12 \cdot (3 \cdot k^2 \pm k) + 1$$

Nun ist $(3 \cdot k^2 \pm k)$ stets eine gerade Zahl, da $3 \cdot k^2$ und k entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Die Differenz je zweier Zahlen aus Q ist also stets durch 24 teilbar, und daher sind alle Elemente von D durch 24 teilbar.

Da sich jedoch auch die Differenz $7^2 - 5^2 = 24 \text{ in } D$ befindet, ist dies zugleich der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen in D. Also ist 24 der gesuchte größte gemeinsame Teiler. ❑

Wir untersuchen abschließend[3], welche natürliche Zahlen n sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen, d.h. für welche Zahlen n es natürliche Zahlen a, b, c und d gibt mit

$$n = a^2 + b^2 = d^2 - c^2$$

Wir wissen bereits, dass nicht jede natürliche Zahl diese Eigenschaft hat. Durch Probieren finden wir schnell, dass z.B. 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 - 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Im Zusammenhang mit der Aufgabe MO630931 haben wir bereits bewiesen:

Satz. Eine natürliche Zahl n lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder
(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Weiterhin gilt allgemein:

Satz. Eine natürliche Zahl m lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

(a) $m = \prod_{j=1}^{k} {p_j}^{a_j}$ (wobei die Faktoren p_j Primzahlen der Form $4n + 1$ und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)
(b) $m = 2 \cdot a^2$
(c) $m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$
(d) $m = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ (mit natürlichen Zahlen *n, r, a, b*)

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist[4] und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$
$$n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) = (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2$$

[3] Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173, siehe auch Heft 09/2021

[4] Diese Aussage ist als Zwei-Quadrate-Satz von FERMAT bekannt. Erstmalig wurde dieser Satz 1625 von ALBERT GIRARD (1595 - 1632) veröffentlicht und 1640 von PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665) erweitert. Ein erster Beweis wurde von LEONARD EULER (1707 – 1783) um 1755 veröffentlicht.

$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$ ❑

Unter Anwendung beider Aussagen finden wir durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 38 Möglichkeiten. Ordnen wir diese Tupel (a, b, c, d) nach der Größe der vierten Zahl d, so stellen wir fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätten wir das Suchverfahren bis $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$ führen müssen!

Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d < 50$ zu finden? Wegen $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$ wird m in zwei Faktoren $d + c = t_1,\ \ d - c = t_2,\ \ t_1 \geq t_2,$ zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit $(m; 1)$ und $\left(\sqrt{m}; \sqrt{m}\right)$ gegeben. Die Zahl d erhalten wir daraus als $d = \frac{t_1 + t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen m bis 2401 zu untersuchen.

Rückblick auf den 6. Tag der Mathematik[5]

Am Samstag, dem 23. März 2024, fand der 6. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Mehrere Hundert Gäste nutzten die Gelegenheit, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter knapp 220 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Mit 57 Mannschaften in den Klassenstufen 8-9 und 10-12 aus über 30 sächsischen Gymnasien und Gästen aus Tschechien, Polen und der Ukraine war die Neugierde auf die Aufgaben-Rallye wieder groß.

Die rund 30 begleitenden Lehrerinnen und Lehrer sowie weitere Mathe-Interessierte erhielten in der Wettbewerbszeit in Fortbildungsvorträgen praktische Einblicke: ANJA KLUGE, Kalkulatorin bei der CAC ENGINEERING GmbH[6], sprach über „Die Rolle der Mathematik im internationalen Anlagenbau“. Prof. Dr. IMMA VALENTINA CURATO, Inhaberin der Professur Statistik der TU Chemnitz, berichtete über die Mathematik

[5] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/12372 (Stand 26.03.2024)
[6] https://karriere.cac-chem.de/fileadmin/cac-karriere/documents/Interview_Anja_Kluge.pdf

des Deep-Learnings (eine Methode des maschinellen Lernens). Der Plenarvortrag „Wie viel Information steckt eigentlich in einem Bild?“ von Prof. Dr. SEBASTIAN NEUMAYER, Inhaber der Professur Inverse Probleme, zeigte den Weg von einem einfachen diskreten Modell für die Speicherung digitaler Abbilder (das jedoch einen erheblichen Speicherbedarf erfordert) zu effizienten Kodierungsansätzen, die schließlich zum JPEG 2000 Standard führten.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit. In der Klassenstufe 8-9 siegte ein Team des Kepler-Gymnasiums Chemnitz knapp vor der Konkurrenz aus dem Städtischen Gymnasium Mittweida, gefolgt von zwei Teams des Schmidt-Rottluff-Gymnasiums Chemnitz und des Teams aus dem Gymnasium Olbernhau.

In der Klassenstufe 10-12 behaupteten sich zwei Teams des Kepler-Gymnasiums Chemnitz an der Spitze. Auf den Plätzen folgten gemischte Teams aus dem Lessing-Gymnasium Kamenz, dem Evangelischem Kreuzgymnasium Dresden und dem Sächsisches Landesgymnasium Sankt Afra bzw. aus dem Sportcampus Klingenthal, dem Wieck-Gymnasium Zwickau und dem Gymnasium Dresden-Bühlau. Das Team der Landesschule Pforta schaffte es punktgleich auf Rang 5, so dass hier die benötigte Bearbeitungszeit über die Platzierung entscheiden musste.

Außerdem gewannen unter den internationalen Teams das Team aus dem Gymnasium „F. X. ŠALDY“ Liberec den Sonderpreis des Rektors der TU Chemnitz, Prof. Dr. GERD STROHMEIER, sowie das Team „UKR-Mathezirkel TUC“ den Sonderpreis des Dekans der Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. DANIEL POTTS.

Termine

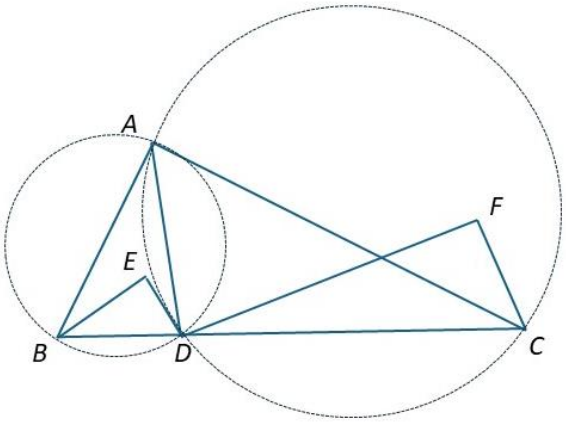
Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html

Spotlight Mathe: Lösungsupdate aus dem Bundeswettbewerb Mathematik.
Wettbewerbseinblicke im Livestream (Bildung & Begabung gGmbH Bonn), 24. April 2024, 17:30 - 18:30 Uhr.
Online-Anmeldung bis 24. April 12:00 Uhr unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/erwachsene/mathematiklehrkraefte-2024-1 erforderlich.

63. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde. 6. bis 9. Juni 2024, Flensburg (Schleswig-Holstein). Informationen unter https://mo2024.de/.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 2/2024

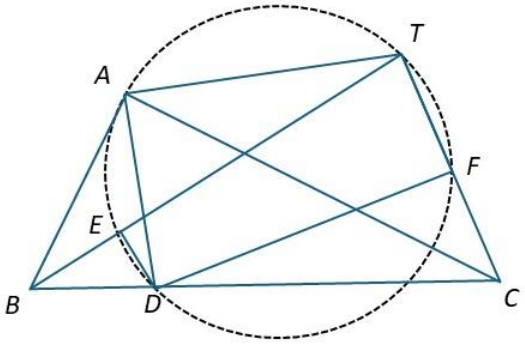
Aufgabe I-3 (15. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (Zagreb, Kroatien, 2021). Seien ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Strecke $\overline{BC}$. Die Punkte E und F liegen derart in der von der Geraden BC bestimmten Halbebene, die A enthält, dass DE senkrecht auf BE steht und DE eine Tangente an den Umkreis von ΔACD ist, während DF senkrecht auf CF steht und DF eine Tangente an den Umkreis von ΔABD ist.



Skizze[7]

Man zeige, dass die Punkte A, D, E und F auf einem Kreis liegen.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit T den Schnittpunkt von BE und CF. Da im Viereck $DFTE$ wegen $\angle DFT + \angle TED = 90° + 90° = 180°$ die Summen gegen-überliegender Winkel 180° betragen, ist $DFTE$ ein Sehnenviereck und die Punkte D, F, T, E liegen auf dessen Umkreis.



Weil DE eine Tangente am Umkreis des Dreiecks ΔACD ist, gilt nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz über der Sehne $\overline{AD}$ die Winkelgleichheit $\angle ADE = \angle ACD$. Weil DF eine Tangente am Umkreis des Dreiecks ΔABD ist, gilt ebenso nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz über der Sehne $\overline{AB}$ auch die Winkelgleichheit $\angle FDA = \angle DBA$. Damit finden wir die Gleichung $\angle FDE = \angle ACD + \angle DBA$. Weil D ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, gilt also auch $\angle FDE = \angle ACB + \angle CBA$ und nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔABC auch $\angle FDE = 180° - \angle ACB$.

Unter Berücksichtigung, dass E ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BT}$ ist, erhalten wir wegen $\angle ETF + \angle FDE = 180°$ im Sehnenviereck $DFTE$ die Gleichung

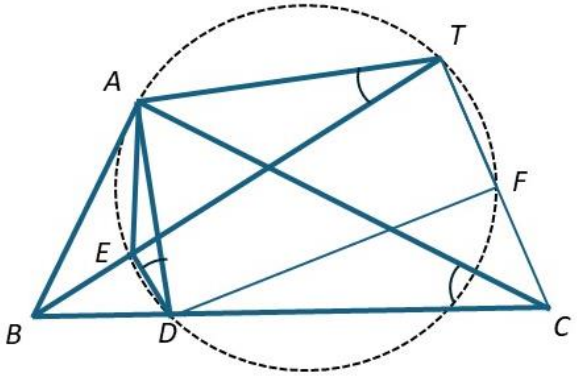
$$\angle BTC = \angle ETF = 180° - \angle FDE = 180° - (180° - \angle BAC) = \angle BAC$$

Folglich liegt nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes über der Seite $\overline{BC}$ der Punkt T auf dem Umkreis des Dreieckes ΔABC.

Weiterhin finden wir

[7] Bei geometrischen Aufgabenstellungen sind im Allgemeinen keine Skizzen enthalten. Es gehört zur vollständigen Lösungsdarstellung, die Zusammenhänge zu visualisieren und dabei die gegebenen Punkte und erforderlichen Hilfspunkte anzugeben.

$\angle ATE = \angle ATB$ (weil E ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BT}$ ist)
$= \angle ACB$ (nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AB}$ im Umkreis des Dreiecks ΔABC)
$= \angle ACD$ (weil D ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$ ist)
$= \angle ADE$ (nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AE}$ im Umkreis des Dreiecks ΔAED).



Damit liegt nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes über der Seite $\overline{AE}$ der Punkt T auch auf dem Umkreis des Dreieckes ΔAED.

Die Kreise durch D, F, T, E und durch A, E, D, T sind durch die drei Punkte D, E und T bereits eindeutig bestimmt und fallen somit zusammen, Insbesondere liegen auch A, E, F und D auf diesem Kreis. ❑

Monatsaufgabe 04/2024[8]

Bestimme sowohl den größtmöglichen als auch den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)$$

für nichtnegative reelle Zahlen a, b und c mit $ab + bc + ca = 1$ annehmen kann.

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.05.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 9.3 – Differenzen und Summen von Quadratzahlen 3
Termine 12
Bekannte Sätze der Mathematik ..... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 2/2024 13
Monatsaufgabe 04/2024 14

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
04/2024 (April)	Thema 9.3	Differenzen von Quadraten	MO630931 KZM 4-2
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4-5A
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044 MO621022 MO620944 MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041 MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

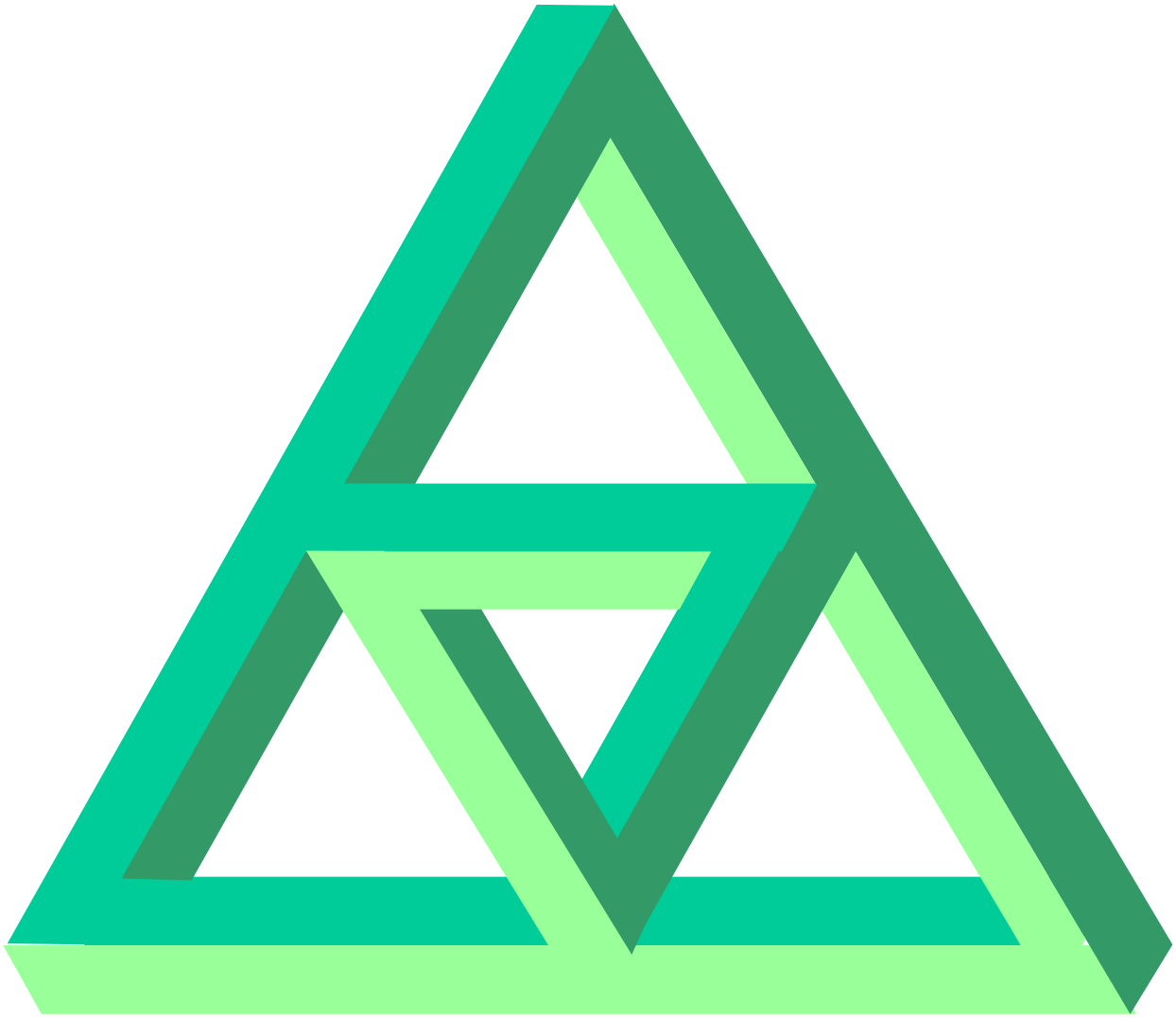
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2024 (Mai 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Aufgaben **MO630933/MO631033** zeigt sich, dass die sehr ausführliche offizielle Lösungsdiskussion zur Thematik „Geometrische Örter“ (s. Heft 11/2023) nun eine Fortsetzung fand. Die Diskussion ähnlicher Aufgabenstellungen in der Nachbereitung der Aufgabe **MO631015** führte uns bereits auf die aktuelle Aufgabenstellung. Auch dieses Mal ist es bemerkenswert, wie vielfältig die Lösungsdiskussion geführt wird.

Auch für die Aufgaben **MO630936/MO631036** finden wir in den MO-Aufgabensammlungen vergleichbare Fragestellung, mit denen wir die Lösungsstrategien üben können. Interessant erscheint hierbei die Mischung von systematischem Probieren und allgemeinen Lösungsansatz für eine erfolgreiche Bearbeitung.

Aus der Vielfalt der mathematischen Wettbewerbe wird in diesem Heft die Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen (EGMO) vorgestellt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 26.2 – Geometrische Örter

Aufgabe 26.7 – MO630933/MO631033. In einer Ebene ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC mit Mittelpunkt M gegeben.

Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}|$$

minimal wird.

Hinweis: Im Heft 11 (November 2023) wurde in der Nachbereitung der 1. Runde der 63. MO folgende Aufgabe formuliert:

Aufgabe 26.4. Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck genau einen Punkt mit minimaler Abstandsumme zu den Eckpunkten des Dreiecks gibt.

In den Lösungshinweisen wurde der Mittelpunkt M (als Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ΔABC) als der gesuchte geometrische Ort nachgewiesen. Wegen

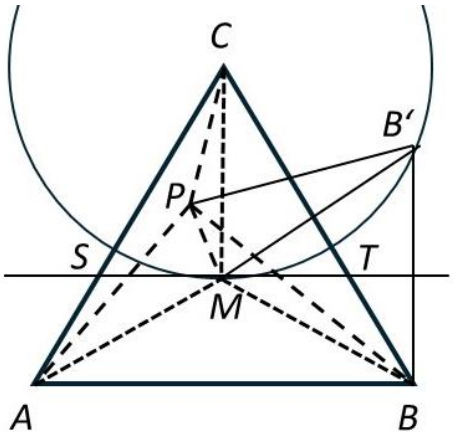
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}|$$

ergibt sich die aktuelle MO-Aufgabe als einfache Folgerung.

Antwort zu Aufgabe 26.07: Die Abstandssumme wird genau dann minimal, wenn P der Mittelpunkt M ist; in diesem Fall beträgt sie $m = |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}|$.

Lösungshinweise – Variante 1: Für diesen Beweis nehmen wir an, dass wir einen Punkt P gefunden haben, für den die Abstandssumme m nicht übersteigt, also

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \leq m.$$



Zunächst erkennen wir, dass eine der Ungleichungen $|\overline{AP}| \leq |\overline{AM}|$, $|\overline{BP}| \leq |\overline{BM}|$ oder $|\overline{CP}| \leq |\overline{CM}|$ gelten muss, da ansonsten

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}| = m$$

im Widerspruch zur Annahme wäre. O.B.d.A., aufgrund der Symmetrie, gelte $|\overline{CP}| \leq |\overline{CM}|$. Dann liegt P im Inneren oder auf dem Rand des Kreises k um C, der durch M verläuft. Die Tangente an k im Punkt M sei t. Aufgrund der Symmetrie ist dann t parallel zur Geraden AB, wobei B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden t liegen. Das Bild unter der Spiegelung von B an t sei B'. Da t die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{BB'}$ ist und P auf derselben Seite von t liegt wie B', folgt $|\overline{BP}| \geq |\overline{PB'}|$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn P auf t liegt, was nur für $P = M$ der Fall ist. Wegen der Dreiecksungleichung im Dreieck $\Delta AB'P$ folgt

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{B'P}| > |\overline{AB'}|$$

Bezeichnen S und T den jeweiligen Schnittpunkt von t mit den Geraden AC und BC, so gilt wegen Symmetrie und Wechselwinkelsatz

$$|\angle SMA| = |\angle BAM| = 30° = |\angle MBA| = |\angle BMT| = |\angle TMB'|$$

Da M zwischen S und T auf der Geraden ST liegt und $|\angle SMA| = |\angle TMB'|$ gilt, liegt M auch zwischen A und B' auf der Geraden AB'. Mit (2) folgt

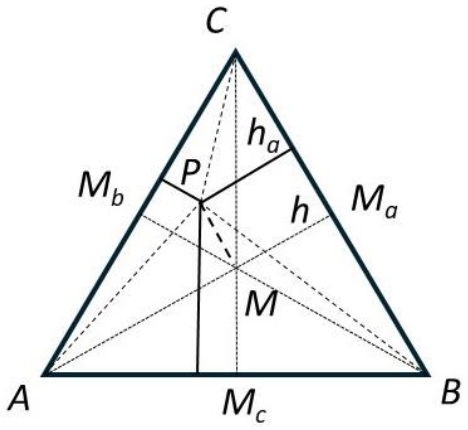
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{B'P}| > |\overline{AB'}| = |\overline{AM}| + |\overline{B'M}| = |\overline{AM}| + |\overline{BM}|$$

Gleichheit gilt hier wieder genau im Fall $P = M$. Addieren wir zur Ungleichung (3) die Dreiecksungleichung $|\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{CM}|$, so erhalten wir

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}| = m$$

Gleichheit gilt genau für $P = M$. ❑

Lösungshinweise – Variante 2: Wir bezeichnen mit M_a, M_b und M_c jeweils den Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$ und mit h die Länge der drei gleich langen Höhen des gleichseitigen Dreiecks ΔABC. Weiter seien h_a, h_b und h_c die Abstände von P zu den jeweiligen Geraden BC, CA und AB. Offenbar gilt $|\overline{AP}| + h_a \geq h$, da die (einzige) kürzeste Verbindung von A zur Geraden BC die entsprechende Höhe $\overline{AM_a}$ ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn P auf der Strecke $\overline{AM_a}$ liegt.



Also gilt $|\overline{AP}| \geq h - h_a$ mit Gleichheit genau dann, wenn P auf der Strecke $\overline{AM_a}$ liegt. Analog gilt $|\overline{BP}| \geq h - h_b$ und $|\overline{CP}| \geq h - h_c$, wobei Gleichheit jeweils dann eintritt, wenn P auf der Strecke $\overline{BM_b}$ bzw. $\overline{CM_c}$ liegt. Addieren wir diese drei Ungleichungen, so erhalten wir

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq 3 \cdot h - (h_a + h_b + h_c)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn P der Schnittpunkt der drei Höhen $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ und $\overline{CM_c}$ ist, was $P = M$ entspricht.

Wir betrachten zunächst Punkte P, die im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks ΔABC liegen. Es bezeichne s die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ΔABC und F den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Da die Dreiecke ΔBCP, ΔCAP und ΔABP jeweils eine Seite $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$ der Länge s mit zugehöriger Höhe h_a, h_b bzw. h_c haben und diese Dreiecke das Dreieck ΔABC zerlegen, gilt

$$\frac{1}{2} \cdot (h_a + h_b + h_c) \cdot s = F = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$$

und damit $h_a + h_b + h_c = h$. (Für Punkte P auf dem Rand des Dreiecks ΔABC entarten bis zu zwei dieser Dreiecke und die entsprechenden Höhen haben die Länge null.) Zusammen mit (4) ergibt sich die Ungleichungskette

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq 3 \cdot h - (h_a + h_b + h_c) = 2h = m$$

mit Gleichheit genau für $P = M$.

Sei nun P ein Punkt außerhalb des Dreiecks ΔABC. Das Dreieck ΔABC ergibt sich als Durchschnitt von drei Halbebenen, die von den Trägergeraden der drei Dreiecksseiten gebildet werden. P und das Dreieck liegen also auf verschiedenen Seiten von einer dieser Trägergeraden und wir können o.B.d.A. annehmen, dass P und C auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen. Es ist M_c der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und nach Dreiecksungleichung gilt

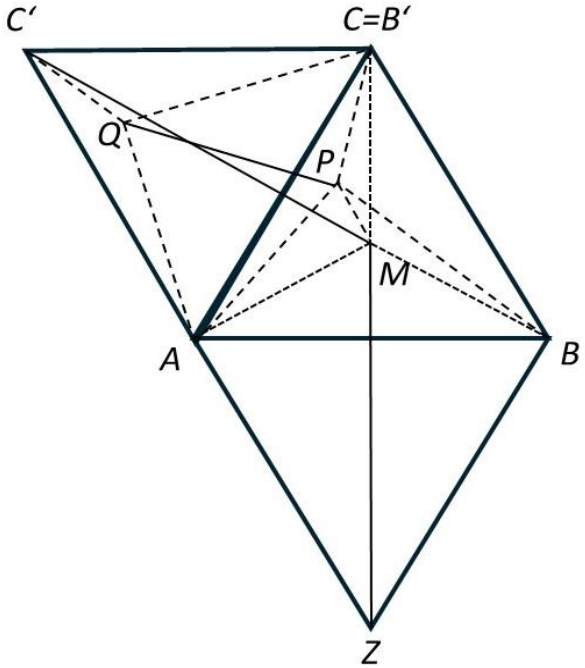
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| > |\overline{AB}| = |\overline{AM_c}| + |\overline{BM_c}|$$

und $|\overline{CP}| > |\overline{CM_c}|$, da der Winkel bei M_c im Dreieck ΔCM_cP stumpf ist und im Dreieck dem größeren Winkel die längere Dreiecksseite gegenüberliegt. Es gibt in diesem Fall also einen Punkt M_c auf dem Rand des Dreiecks ΔABC, für den

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AM_c}| + |\overline{BM_c}| + |\overline{CM_c}| \geq m$$

gilt. Der letzte Teil der Ungleichung folgt aus dem ersten Teil der Argumentation.

Lösungshinweise – Variante 3: Eine $60°$-Drehung um den Punkt A überführt den Punkt B in den Punkt C. Es bezeichne D das Bild von C und Q das Bild von P unter dieser Drehung. Der Punkt Z sei so gewählt, dass er unter der $60°$-Drehung auf B abgebildet wird.



Es gilt dann insbesondere $|\overline{CP}| = |\overline{QD}|$, und das Dreieck ΔAPQ ist gleichseitig mit $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| = |\overline{BP}| + |\overline{PQ}| + |\overline{QD}| \geq |\overline{BD}|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn B, P, Q und D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Beachten wir dabei, dass die $60°$-Drehung um den Punkt A den Punkt

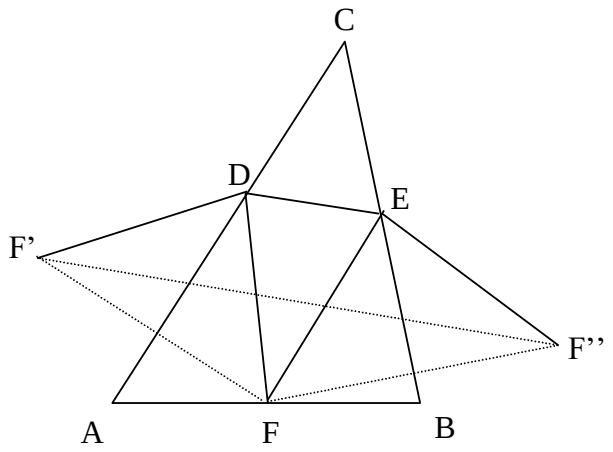
P auf Q und die Strecke $\overline{ZC}$ auf $\overline{BD}$ abbildet, so folgt, dass Q genau dann auf der Strecke $\overline{BD}$ liegt, wenn P auf der Strecke $\overline{ZC}$ liegt. Gleichheit kann in (5) somit nur dann eintreten, wenn P der Schnittpunkt der Strecken $\overline{ZC}$ und $\overline{BD}$ ist. In diesem Fall liegt P im Inneren des Dreiecks ΔABC und Q im Inneren des Dreiecks ΔACD, womit die Punkte B, P, Q und D tatsächlich in der erforderlichen Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Aufgrund der $60°$-Drehung sind die beiden Dreiecke ΔABC und ΔACD gleichseitig und kongruent. Das Viereck $ABCD$ ist damit ein Rhombus und $\overline{BD}$ ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$.

Völlig analog ist $\overline{ZC}$ die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Gleichheit tritt in (5) somit genau dann ein, wenn P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ des Dreiecks ΔABC ist, also wenn $P = M$ gilt. Abschließend folgt

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{BD}|,$$

wieder mit Gleichheit genau dann, wenn $P = M$. ❑

Aufgabe 26.8 – Das Problem von FAGNANO. Im Jahre 1775 stellte GIOVANNI FAGNANO (1715 bis 1797):



Einem spitzwinkligen Dreieck ΔABC ist ein Dreieck ΔDEF mit minimalem Umfang einzubeschreiben, wobei auf jeder Dreiecksseite des Dreiecks ΔABC eine Ecke des Dreiecks ΔDEF liegt.

Lösungshinweise: Wir legen einen Punkt F beliebig auf $\overline{AB}$ fest und suchen Punkte D und E auf $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ so, dass das Dreieck ΔDEF minimalen Umfang besitzt.

Zunächst wählen wir beliebige Punkte D und E. Den Umfang des Dreiecks ΔDEF erhalten wir als Streckenzug $F'DEF''$, wobei F' und F'' die Spiegelpunkte vom Punkt F an den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind. Wir finden also zu einem fest auf der Seite $\overline{AB}$ gewählten Punkt F ein Dreieck ΔDEF mit minimalem Umfang, wenn die Punkte D und E auf der Strecke $F'F''$ liegen.

Dafür verwenden wir, dass das Dreieck $\Delta F'CF''$ unabhängig von der Lage des Punktes F gleichschenklig mit dem Winkel $\angle F'CF'' = 2 \cdot \angle ACB$ ist. Denn (da F' und F'' die Spiegelpunkte von Punkt F an den Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ des Dreiecks ΔABC sind) folgt: $\left|\overline{CF'}\right| = \left|\overline{CF}\right| = \left|\overline{CF''}\right|$ und $\angle F'CA = \angle ACF$ sowie $\angle FCB = \angle BCF''$.

Der Umfang des Dreiecks ΔDEF wird nun umso kleiner, je kleiner die Länge der Strecke $\overline{F'F''}$ ist. Diese wiederum wird am kleinsten, wenn die Strecke $\overline{FC}$ am kleinsten wird. Dies tritt ein, wenn F der Fußpunkt der Höhe h_c ist. Da diese

Überlegungen auch für einen Ausgangspunkt auf den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gelten, folgt als Lösung des Problems von FAGNANO: Das einem spitzwinkligen Dreieck einbeschriebene Dreieck mit kleinstem Umfang ist das Höhenfußpunktdreieck. ❑

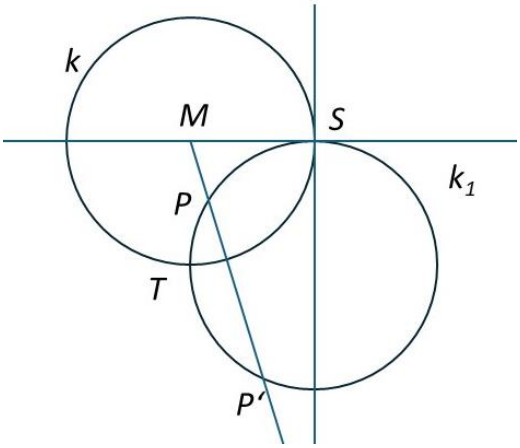
Aufgabe 26.9 – MO091233. Gegeben sei in einer Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P' der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P' auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $|\overline{MP}| \cdot \left|\overline{MP'}\right| = r^2$ ist.

Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε, der k orthogonal schneidet, d.h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.

Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Lösungshinweise: Wir zeigen, dass k_1 auf sich selbst abgebildet wird.

Es seien S und T die beiden Schnittpunkte von k und k_1. Dann gilt offensichtlich $|\overline{MS}| \cdot |\overline{MS}| = r^2 = |\overline{MT}| \cdot |\overline{MT}|$, sodass die Punkte S und T ihre eigenen Spiegelpunkte bezüglich k sind.



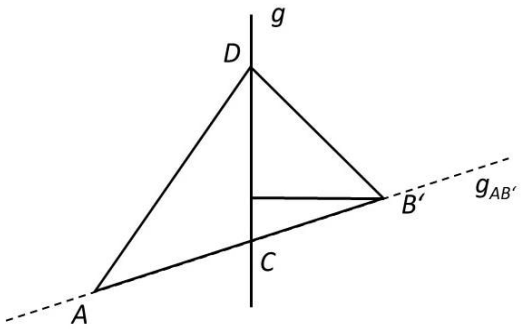
Sei nun P ein Punkt auf k_1, der verschieden von diesen beiden Schnittpunkten ist. Dann schneidet der von M ausgehende Strahl durch P den Kreis k_1 in einem zweiten Punkt, da es sich nicht um eine Tangente handeln kann, da die beiden von M ausgehenden Tangenten an k_1 durch S und T verlaufen. Nennen wir diesen zweiten Schnittpunkt P'. Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz[3] (bezogen auf k_1, die Sehne $\overline{PP'}$ und die Tangente MS) die Beziehung $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = |MS|^2 = r^2$, sodass jeder Punkt auf k_1 wieder auf einen Punkt auf k_1 abgebildet wird.

Offensichtlich ist diese Spiegelungsoperation aber auch umkehrbar: Wird sie zwei Mal angewendet, erhalten wir wieder den Ausgangspunkt. Demzufolge muss auch jeder Punkt auf k_1 der Spiegelungspunkt eines anderen (oder sich selbst) auf k_1 sein, sodass der geometrische Ort aller Spiegelungspunkte bezüglich k von Punkten auf k_1 wieder genau k_1 selbst ist. ❑

Aufgabe 26.10 – MO091243. Gegeben seien eine Gerade g und eine Strecke $\overline{AB}$, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks ΔABC möglichst klein ist.

[3] s. Heft 07/2021, „Bekannte Sätze der Mathematik“, S. 20

Lösungshinweise: Wir betrachten die Ebene ε, in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Wir drehen die Ebene, die g und B enthält, so um g, dass das Bild B' von B bei dieser Drehung in der Ebene ε liegt, und zwar so, dass B' und A nicht auf derselben Seite von g liegen.



Sei D ein beliebiger Punkt der Geraden g. Dann gilt: $\overline{DB} = \overline{DB'}$. Daher gilt auch

$$\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB'}$$

Nun ist aufgrund der Dreiecksgleichung stets $\overline{AD} + \overline{DB'} \geq \overline{AC} + \overline{CB'}$ wobei das Gleichheitszeichen genau für $D = C$ gilt. Damit ist der Schnittpunkt C der Strecke $\overline{AB'}$ mit der Geraden g ein Punkt der geforderten Art und der einzige. ❑

Thema 10.2 - Beschränkte und kürzbare Brüche

Aufgabe 10.6 – MO630936/MO631036. Wie viele rationale Zahlen r mit $\frac{5}{2024} < r < \frac{6}{2024}$ lassen sich als Bruch mit einem positiven Nenner kleiner als 2024 darstellen?

Lösungshinweise: Jede positive rationale Zahl r lässt sich eindeutig als vollständig gekürzter Bruch $r = \frac{z}{n}$ mit teilerfremden positiven ganzen Zahlen z und n darstellen, wobei dann n der kleinstmögliche positive Nenner einer Bruchdarstellung von r ist. Insbesondere lässt sich r damit genau dann als Bruch mit einem positiven Nenner kleiner als 2024 darstellen, wenn in dieser vollständig gekürzten Darstellung der Nenner $n < 2024$ ist.

Es ist somit die Anzahl aller Paare (z, n) teilerfremder positiver ganzer Zahlen mit

$$\frac{5}{2024} < \frac{z}{n} < \frac{6}{2024}$$

und $n < 2024$ zu bestimmen. Die Ungleichungskette ist für positives n äquivalent zu $5n < 2024z < 6n$ und damit zu

$$\frac{2024}{6} z < n < \frac{2024}{5} z$$

Daraus folgt mit $n < 2024$ insbesondere

$$z < \frac{6}{2024} n < \frac{6}{2024} \cdot 2024 = 6$$

womit sich $z \in \{1,2,3,4,5\}$ als notwendige Bedingung ergibt.

Für z ∈ {1, 2, 3, 4, 5} folgt andererseits aus den Ungleichungen

$$n < \frac{2024}{5} z \leq \frac{2024}{5} \cdot 5 = 2024$$

Es genügt somit, die Anzahl aller Paare (z, n) teilerfremder positiver ganzer Zahlen mit $z \in \{1,2,3,4,5\}$ zu bestimmen, für die (2) erfüllt ist. Wir unterscheiden dazu die folgenden fünf Fälle.

Fall 1: $z = 1$. In diesem Fall sind laut (2) alle ganzen Zahlen n mit

$$337\frac{1}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 1 < n < \frac{2024}{5} \cdot 1 = 404\frac{4}{5}$$

also $338 \leq n \leq 404$ zu zählen, was 67 Lösungspaare $(1, n)$ ergibt. Wegen $z = 1$ sind alle diese Lösungspaare teilerfremd.

Fall 2: $z = 2$. In diesem Fall sind laut (2) alle ungeraden Zahlen n mit

$$674\frac{2}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 2 < n < \frac{2024}{5} \cdot 2 = 809\frac{3}{5}$$

also $675 \leq n \leq 809$ zu zählen. Dieses Intervall enthält 135 ganze Zahlen, von denen 67 gerade sind, was $135 - 67 = 68$ teilerfremde Lösungspaare $(2, n)$ ergibt.

Fall 3: $z = 3$. Es sind laut (2) alle nicht durch 3 teilbaren Zahlen n mit

$$1012 = \frac{2024}{6} \cdot 3 < n < \frac{2024}{5} \cdot 3 = 1214\frac{2}{5}$$

also $1013 \leq n \leq 1214$ zu zählen. Dieses Intervall enthält 202 ganze Zahlen, von denen 67 durch 3 teilbar sind, was $202 - 67 = 135$ teilerfremde Lösungspaare $(3, n)$ ergibt.

Fall 4: $z = 4$. In diesem Fall sind alle ungeraden Zahlen n mit

$$1349\frac{1}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 4 < n < \frac{2024}{5} \cdot 4 = 1619\frac{1}{5}$$

also $1350 \leq n \leq 1619$ zu zählen. Dieses Intervall enthält 270 ganze Zahlen, von denen 135 gerade sind, was $270 - 135 = 135$ teilerfremde Lösungspaare $(4, n)$ ergibt.

Fall 5: $z = 5$. Es sind alle nicht durch 5 teilbaren Zahlen n mit

$$1686\frac{2}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 5 < n < \frac{2024}{5} \cdot 5 = 2024$$

also $1687 \leq n \leq 2023$ zu zählen. Dieses Intervall enthält 337 ganze Zahlen, von denen 67 durch 5 teilbar sind, was $337 - 67 = 270$ teilerfremde Lösungspaare $(5, n)$ ergibt.

Zusammenfassung: $67 + 68 + 135 + 135 + 270 = 675$ rationale Zahlen genügen der Aufgabenstellung. ❑

Aufgabe 10.7 – MO500923.

a) Der Bruch $\frac{62}{63}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die sowohl verschiedene Zähler als auch verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 63 sein.

   Bestimmen Sie drei verschiedene solche Darstellungen. Dabei zählen zwei Darstellungen auch als gleich, wenn sie sich allein in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

b) Der Bruch $\frac{20}{21}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die gleiche Zähler, aber verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 21 sein.

   Bestimmen Sie alle solchen Darstellungen. Auch hier soll die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielen.

Hinweis: Ein *Bruch* b ist stets eine *positive* rationale Zahl. Die Darstellung $b = \frac{p}{q}$ heißt *vollständig gekürzt*, wenn $p > 0$ und $q > 0$ gilt und p, q teilerfremd sind.

Lösungshinweise zu Teil a): Die Lösungen können wir erraten. Begründungen, wie wir auf diese gekommen sind, werden bei solcher Aufgabenstellung „Bestimmen Sie drei Beispiele …“ nicht verlangt. Allerdings ist nachzuweisen bzw. darauf hinzuweisen, dass die Rechnungen aufgehen und die Brüche gekürzt sind.

Um Lösungen zu finden, versuchen wir, den Zähler so in eine Summe von zwei Summanden zu zerlegen $62 = z_1 + z_2$, dass sich jeder der Summanden mit 63 kürzen lässt. Dabei probieren wir, ob der zweite Summand $ggT(z_2, 63) > 1$ erfüllt, wenn wir z_1 mit $ggT(z_1, 63) > 1$ wählen. Als größte gemeinsame Teiler können wegen der Primfaktorenzerlegung von 63 nur 21, 9, 7 und 3 in Frage kommen.

Diese Suche muss in der Lösungsdarstellung nicht angegeben werden, wir können sie also auf Konzeptpapier durchführen.

62 =	21+41	42+20						
62 =	9+53	18+44	**27+35**	36+26	45+17	54+8		
62 =	7+55	**14+48**	21+41	28+34	**35+27**	42+20	49+13	**56+6**

Die fettmarkierten Zerlegungen erfüllen die Anforderungen und wir haben damit drei verschiedene Beispiele gefunden:

$$\frac{62}{63} = \frac{3}{7} + \frac{5}{9} = \frac{2}{9} + \frac{16}{21} = \frac{5}{9} + \frac{3}{7} = \frac{8}{9} + \frac{3}{21}$$

Wir wollen hier die systematische Suche noch formalisieren: Wir suchen Zerlegungen in der Form $\frac{62}{63} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, wobei wir die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung mit ganzen Zahlen b‘ bzw. d‘ auf den Nenner 63 erweitern können, d.h. es gilt $62 = b'a + d'c$ mit $b \cdot b' = d \cdot d' = 63$.

Aus Symmetriegründen können wir $1 < b < d < 63$ voraussetzen. Weiterhin müssen b und d echte Teiler von 63, also aus der Menge $M = \{3; 7; 9; 21\}$ sein. In diesem Fall ist $62 = b'a + d'c$ eine lineare diophantische Gleichung, aus der wir a und c bestimmen können.

- *Fall* 1: $b = 3, d = 7$. Die Gleichung lautet $62 = 21a + 9c$ und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall* 2: $b = 3, d = 9$. Die Gleichung lautet $62 = 21a + 7c$ und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 7 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall* 3: $b = 3,\ d = 21$. Die Gleichung lautet $62 = 21a + 3c$ und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall* 4: $b = 7,\ d = 9$. Die Gleichung lautet $62 = 9a + 7c$ und hat die einzige positive ganzzahlige Lösung $a = 3, c = 5$. Dies liefert die Lösung $\frac{62}{63} = \frac{3}{7} + \frac{5}{9}$.
- *Fall* 5: $b = 7, d = 21$. Die Gleichung lautet $62 = 9a + 3c$ und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall* 6: $b = 9, d = 21$. Die Gleichung lautet $62 = 7a + 3c$ und hat die positiven ganzzahligen Lösungen $a = 2 + 3t,\ c = 16 - 7t,\ t \in \{0,1,2\}$. Dies liefert die Zerlegungen

  $$\frac{62}{63} = \frac{2}{9} + \frac{16}{21} = \frac{5}{9} + \frac{9}{21} = \frac{8}{9} + \frac{2}{21}$$

  Von diesen enthält die zweite Zerlegung einen weiter kürzbaren Summanden (und führt dann auf die Lösung aus Fall 4), während die anderen beiden Zerlegungen auch Lösungen im Sinne der Aufgabenstellung sind.

Lösungshinweise zu Teil b): Wir wollen in Analogie zu Teil a) den Zähler so in eine Summe von zwei Summanden zerlegen $20 = z_1 + z_2$, dass sich jeder der Summanden mit 21 kürzen lässt. Dabei probieren wir, ob der zweite Summand $ggT(z_2, 21) > 1$ erfüllt, wenn wir z_1 mit $ggT(z_1, 21) > 1$ wählen. Als größte gemeinsame Teiler können wegen der Primfaktorenzerlegung von 21 nur 7 und 3 in Frage kommen.

20 =	7 + 13	**14 + 6**				
20 =	3 + 17	**6 + 14**	9 + 11	12 + 8	15 + 5	18 + 2

Aus den fettmarkierten Zerlegungen finden wir folgende (bereits gekürzte) Brüche

$$\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{3}$$

Da die Zähler beider Summanden übereinstimmen, haben wir eine Lösung gefunden. Gleichzeitig vermuten wir, dass es keine weiteren Lösungen gibt, da unsere systematische Suche keine weiteren Zerlegungen ergab.

Ist $\frac{20}{21} = \frac{z}{a} + \frac{z}{b}$ eine Zerlegung in der gesuchten Form, so folgt daraus die Gleichung $21 \cdot z \cdot (a + b) = 20 \cdot a \cdot b$. Folglich ist 21 ein Teiler von $20 \cdot a \cdot b$ und da 20 und 21 teilerfremd sind, ist 21 auch ein Teiler von $a \cdot b$. Damit müssen a und b die Primfaktoren 3 und 7 enthalten. Wegen $a < 21, b < 21$ kann keine der beiden Zahlen beide Primfaktoren enthalten.

Wir können also o.B. d. A. annehmen, dass $a = 3 \cdot a'$ und $b = 7 \cdot b'$ gilt. Wegen $1 < b < 21$ gilt $1 \leq b' \leq 2$ und analog $1 \leq a' \leq 6$. Es bleibt zu untersuchen, für welche der Paare $(a'; b')$ die Zahl $z = \frac{20a'b'}{3a'+7b'}$ ganzzahlig ist. Für die 12 möglichen Fälle erhalten wir jeweils

	$a' = 1$	$a' = 2$	$a' = 3$	$a' = 4$	$a' = 5$	$a' = 6$
$b' = 1$	$\boldsymbol{z = \frac{20}{10}}$	$z = \frac{40}{13}$	$z = \frac{60}{16}$	$z = \frac{80}{19}$	$z = \frac{100}{22}$	$z = \frac{120}{25}$
$b' = 2$	$z = \frac{40}{17}$	$\boldsymbol{z = \frac{80}{20}}$	$z = \frac{120}{23}$	$z = \frac{160}{26}$	$z = \frac{200}{29}$	$z = \frac{240}{32}$

Wir stellen fest, dass z nur für $(a', b') = (1; 1)$ oder $(a', b') = (2; 2)$ ganzzahlig ist. Die Lösung $a' = b' = 2$ führt jedoch auf die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{4}{6} + \frac{4}{14}$, in der die Brüche nicht vollständig gekürzt sind.

Somit ist die oben gefundene Lösung die einzige Lösung der Aufgabenstellung. ❑

Aufgabe 10.8 – MO490946.

a) Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{41}{2010} < \frac{x}{y} < \frac{1}{49}$ erfüllt ist.

b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $qr - ps = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben. Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ erfüllt ist.

Lösungshinweise Teil a): Im Thema 10.1 im Heft 10/2021 wurde – angeregt durch die Aufgabe MO611013 – ein geeigneter Bruch mit $\frac{41}{2010} < \frac{41+1}{2010+49} = \frac{42}{2059} < \frac{1}{49}$ angegeben und gezeigt, dass stets $y \geq 2059$ gelten muss.

Lösungshinweise Teil b): Analog zu Teil a) setzen wir $t = qx - py$ und $u = ry - sx$. Für ganzzahlige p, q, x, y, r, s sind t, u ganzzahlig und die gegebene Ungleichungskette ist äquivalent zu $t \geq 1$ und $u \geq 1$.

Wie im Teil a) lösen wir das System der zwei Gleichungen nach x, y auf, indem wir geeignete Kombinationen der beiden Gleichungen bilden. Wegen $qr - ps = 1$ finden wir zwei besonders interessante Kombinationen:

$$rt + pu = (rq - ps) \cdot x - (rp - pr) \cdot y = x,$$
$$st + qu = (sq - qs) \cdot x - (sp - qr) \cdot y = y.$$

Für jedes Paar $(x; y)$, für welches die Ungleichungskette gilt, ist $u; t \geq 1$ und daher

$$y = st + qu \geq s + q,$$
$$x = rt + pu \geq r + p.$$

Umgekehrt gilt für $y = s + q$ und $x = r + p$ die Ungleichungskette

$$\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}.$$

Damit ist gezeigt, dass $y = s + q$ der minimale Wert für y ist, für den die genannte Ungleichungskette erfüllt werden kann. ❑

Aufgabe MO491046. Zwei verschiedene, vollständig gekürzte Brüche p, q, r und s mit $p, q, r, s > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ seien so gewählt, dass sie folgende Eigenschaft besitzen:

Für jeden Bruch $\frac{x}{y}$ mit $x, y > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ gilt $y > max(q; s)$, d.h. der Nenner y ist also sowohl größer als q als auch größer als s.

a) Beweisen Sie, dass $\frac{x}{y} = \frac{p+r}{q+s}$ ein Bruch mit kleinstmöglichem positiven Nenner ist, der die Ungleichung erfüllt.
b) Beweisen Sie, dass für Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ mit dieser Eigenschaft $qr - ps = 1$ gilt.

Vorbemerkung: Für reelle Zahlen $p, q, r, s > 0$ gilt stets $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$, wie wir durch folgende Umformungen nachweisen können:

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps < qr \Leftrightarrow ps + qp < qr + qp \Leftrightarrow p(q+s) < q(r+p) \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$$
$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps < qr \Leftrightarrow ps + sr < qr + sr \Leftrightarrow s(p+r) < r(q+s) \Leftrightarrow \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$$

Lösungshinweise zu Teil a): Nach der Vorbemerkung erfüllt der angegebene Bruch $\frac{p+r}{q+s}$ die Ungleichungskette. Aus ihr folgt aus der linken Ungleichung $q \cdot x - p \cdot y > 0$, und die rechte Ungleichung ist äquivalent zu $r \cdot y - s \cdot x > 0$.

Setzen wir $t = q \cdot x - p \cdot y$ und $u = r \cdot y - s \cdot x$, so sind *t* und *u* positive ganze Zahlen mit $t, u \geq 1$. Stellen wir diese Gleichungen nach x und y um, erhalten wir aus

$$r \cdot t = r \cdot q \cdot x - r \cdot p \cdot y \qquad s \cdot t = s \cdot q \cdot x - s \cdot p \cdot y$$
$$p \cdot u = r \cdot p \cdot y - p \cdot s \cdot x \qquad q \cdot u = q \cdot r \cdot y - q \cdot s \cdot x$$

Also $x \cdot (r \cdot q - p \cdot s) = r \cdot t + p \cdot u$ bzw. $y \cdot (q \cdot r - s \cdot p) = s \cdot t + q \cdot u$. Gilt $r \cdot q - p \cdot s = 1$, so folgt daraus

$$x = r \cdot t + p \cdot u \geq r + p \qquad y = s \cdot t + q \cdot u \geq s + q$$

Weil Gleichheit für $t = u = 1$ gilt, ist in diesem Fall stets $y \geq q + s$.

Wir müssen nun in Teil b) noch zeigen[4], dass unter den gegebenen Voraussetzungen $d = r \cdot q - p \cdot s$ nicht größer als 1 sein kann.

Lösungshinweise zu Teil b): Wir betrachten die Zahlen p, q, r, s mit $d = r \cdot q - p \cdot s$ und $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$. Für teilerfremde Zahlen p und d, also $ggT(p; d) = 1$, gibt es stets positive ganze Zahlen a und b mit $ad - bp = 1$. Daraus folgt $rbp + r = ard$. Wir wählen nun die natürliche Zahl n mit $nd \leq rb = nd + k < (n+1)d$ und können weiter umformen zu $kp + r = (ar - np)d$. Folglich ist d ein Teiler von $kp + r$. Dann ist aber d auch ein Teiler von

$$(kp + r)(q - s) = kpq - kps + rq - rs = kpq + ps - kps - rs + rq - ps$$
$$= p(kq + s) - \underbrace{s(kp + r)}_{Vielfaches\ von\ d} + \underbrace{rq - ps}_{=d}.$$

Wegen $ggT(p; d) = 1$ ist also auch d ein Teiler von $kq + s$.

Durch wiederholte Anwendung des Zusammenhangs aus der Vorbemerkung erhalten für jede ganze Zahl k

$$\frac{p}{q} < \frac{kp + r}{kq + s} < \frac{r}{s}$$

Nun können wir den mittleren Bruch dieser Ungleichungskette mit d kürzen. Wir führen den Größenvergleich für die Nenner:

[4] Es ist nicht zulässig, mit Verweis auf die Aussage von Teil b) ohne Beweis (weil z.B. die Zeit dafür nicht ausreicht) den Beweis zu Teil a) zu beenden. Es könnte sein, dass der Beweis von Teil b) auf der Aussage von Teil a) basiert. Umgekehrt dürfen wir aber beim Beweis nachfolgender Aufgabenteile die Aussagen vorangehender Teile als bewiesen betrachten.

Für $q < s$ folgt

$$\frac{kq+s}{d} \leq \frac{(d-1)q+s}{d} \leq \frac{(d-1)s+s}{d} = s \leq max\{q;s\}$$

und für $s \leq q$ folgt

$$\frac{kq+s}{d} \leq \frac{kq+q}{d} = \frac{(k+1)q}{d} \leq q \leq max\{q;s\}.$$

In jedem Fall kann die Voraussetzung an die Ungleichungen nicht erfüllt werden, so dass $d > 1$ nicht möglich ist.

Ist $ggT(p;d) = t > 1$, so finden wir wegen $d = r \cdot q - p \cdot s$ und $ggT(p;q) = 1$, dass t auch Teiler von r ist, also $r = t \cdot r'$.

Wir betrachten nun die Zahlen $p' = \frac{p}{t}, q,\ r' = \frac{r}{t}, s$ mit $\frac{d}{t} = d' = r' \cdot q - p' \cdot s$ und $\frac{p'}{q} < \frac{r'}{s}$ und folgen für $t < d$ der obigen Argumentation. Für $t = d$ zeigen wir direkt $d\mathrm{I}(p+r)$ und $d\mathrm{I}(q+s)$ und können den mittleren Bruch mit d kürzen. ❑

Aufgabe MO361042. Es seien 100 Brüche $Q_i = \frac{a_i}{b_i}$ $(i = 1,\ldots,100)$ mit natürlichen Zahlen a_i und b_i beliebig gewählt, nur mit der Bedingung, dass mindestens ein Paar (i,j) mit $Q_i \neq Q_j$ existiert.

Beweisen Sie, dass der Bruch $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{b_1+b_2+\cdots+b_{100}}$ größer als das Minimum der Q_i und kleiner als das Maximum der Q_i ist!

Lösungshinweise: Damit alle Brüche existieren, gilt $b_i > 0$ für alle b_i. Es sei h ein Index, für den Q_h das Minimum der Q_i ist. Dann gelten für alle $i = 1,\ldots,100$ die Ungleichungen $\frac{a_h}{b_h} \leq \frac{a_i}{b_i}$ bzw. gleichbedeutend $a_h \cdot b_i \leq b_h \cdot a_i$. In einer dieser Ungleichungen gilt sogar die echte Ungleichung, weil andernfalls $Q_h = Q_i$ für alle $i = 1,\ldots,100$ gelten würde – im Widerspruch zur Voraussetzung. Ebenso können wegen dieser Voraussetzung nicht alle a_i gleich Null sein. Nach Addition der 100 Ungleichungen erhalten wir $a_h \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}) < b_h \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})$.

Da beide Klammerausdrücke positive Zahlen sind, folgt daraus wie behauptet

$$\frac{a_h}{b_h} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}}$$

Entsprechend gilt für das Maximum $Q_k$aller Q_i die zweite Behauptung

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}} < \frac{a_k}{b_k}$$

❑

13. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen

Vom 11. bis 17. April 2024 fand in Tskaltubo (Georgien) die europäische Mathematik-Olympiade (European Girl's Mathematical Olympiad – EGMO) für junge Frauen statt. Obwohl die 1. EGMO in Cambridge (UK, 2012) als europäischer Wettbewerb ausgeschrieben war, nahmen bereits drei nicht-europäische Teams teil. In diesem Jahr (siehe egmo2024@gmail.com) stellten sich 54 Teams mit 212 Teilnehmerinnen dem Wettbewerb, darunter 148 aus 37 europäischen Ländern. Die vier talentiertesten Nachwuchsmathematikerinnen aus den bundesweiten Mathematik-Wettbewerben haben sich über das Auswahlverfahren zur IMO qualifiziert und nahmen als deutsche Delegation mit Erfolg teil – sie erreichten eine Gold- und zwei Silbermedaillen. Aus Sachsen trug MELIA HAASE (Kl. 12, Gymnasium Zschopau) mit einer Silbermedaille zum guten Abschneiden bei. Mit 32 von 42 möglichen Punkten verfehlte sie den Goldrang nur um einen Punkt.

Die Ausrichtung der EGMO orientiert sich an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Es werden zwei Klausuren (je 4½ Stunden Arbeitszeit) mit je drei Aufgaben geschrieben. Pro Aufgabe werden maximal sieben Punkte ergeben. Die Teamstärke ist auf vier begrenzt.

Für die Länderwertung werden die erreichten Punktzahlen der Teilnehmerinnen addiert, so dass maximal 168 Punkte möglich sind. Mit 104 Punkten nahm Deutschland den 7. Platz ein. Angeführt wird die Länderliste von den USA (151 Punkte, 4 Goldmedaillen) und Australien (143 Punkte, 4 Goldmedaillen), gefolgt von der Volksrepublik China (141 Punkte, 3 Gold-, 1 Silbermedaille). Die nächsten Plätze belegen die Ukraine, Rumänien und Türkei, so dass Deutschland den vierten Platz unter den europäischen Ländern schaffte.

Die 14. EGMO wird im April 2025 in Prishtina (Kosovo) stattfinden.

Aufgaben der 13. EGMO

Hinweis zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben: Während die Teams bei Aufgabe 1 im Mittel 16.1 Punkte (von 28 möglichen Punkten, Top 10: 25.6, D: 25) erreichten, waren es bei Aufgabe 6 im Durchschnitt lediglich 1.5 Punkte (Top 10: 4.4, D: 4).

Aufgabe 1. Zwei verschiedene ganze Zahlen u und v stehen an einer Tafel. Wir führen eine Reihe von Schritten durch. In jedem Schritt machen wir einen der folgenden beiden Züge:

(i) Wenn zwei verschiedene Zahlen a und b an der Tafel stehen, dann können wir die Zahl $a + b$ an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.

(ii) Wenn drei paarweise verschiedene Zahlen a, b und c an der Tafel stehen, und eine ganze Zahl x die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ erfüllt, dann können wir die Zahl x an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.

Bestimme alle Paare von Startzahlen (u, v), für die wir jede beliebige ganze Zahl nach einer endlichen Anzahl von Schritten irgendwann an die Tafel schreiben können.

Aufgabe 2. Sei ΔABC ein Dreieck mit Umkreis Ω und Inkreismittelpunkt I, sodass $|\overline{AC}| > |\overline{AB}|$. Der Inkreis von ΔABC berühre die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ in den Punkten D, E und F. Sei X beziehungsweise Y ein Punkt auf dem kürzeren der beiden Bögen $\tilde{}DF$ beziehungsweise $\widehat{DE}$, sodass $\angle BXD = \angle DYC$. Die Gerade XY schneide die Gerade BC in K. Sei T der Punkt auf Ω, sodass KT den Kreis Ω berührt und T auf derselben Seite der Geraden BC liegt wie A. Zeige, dass sich die Geraden TD und AI auf Ω schneiden.

Aufgabe 3. Eine positive ganze Zahl n heiße *eigenartig*, falls für jeden positiven Teiler d von n gilt, dass $d(d+1)$ ein Teiler von $n(n+1)$ ist.

Zeige, dass für vier paarweise verschiedene eigenartige positive ganze Zahlen A, B, C und D gilt: $ggT(A, B, C, D) = 1$.

Anmerkung: $ggT(A, B, C, D)$ bezeichne die größte positive ganze Zahl, die alle vier Zahlen A, B, C und D teilt.

Aufgabe 4. Für eine Folge $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ von ganzen Zahlen heiße ein Paar (a_i, a_j) mit $1 \leq i < j \leq n$ *interessant*, falls es ein Paar (a_k, a_l) mit $1 \leq k < l \leq n$ gibt, sodass $\frac{a_l - a_k}{a_j - a_i} = 2$.

Bestimme für jedes $n \geq 3$ die größtmögliche Anzahl interessanter Paare in einer Folge der Länge n.

Aufgabe 5. Sei N die Menge der positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f: N \to N$, sodass für alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) x und $f(x)$ haben die gleiche Anzahl von positiven Teilern.
(ii) Falls y nicht durch x teilbar ist und x nicht durch y teilbar ist, dann gilt $ggT(f(x), f(y)) > f(ggT(x\, y))$.

Anmerkung: $ggT(m, n)$ bezeichne die größte positive ganze Zahl, die m und n teilt.

Aufgabe 6. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen d, für die es ein Polynom P von Grad d mit reellen Koeffizienten gibt, sodass unter $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ höchstens d verschiedene Werte sind.

Termine

59. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, 30 Mai. bis 2. Juni 2024, Science Center experimenta in Heilbronn (Baden-Württemberg). Informationen unter https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2024.html

63. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde. 6. bis 9. Juni 2024, Flensburg (Schleswig-Holstein). Informationen unter https://mo2024.de/.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/2024

Aufgabe I-1 (Individual-Wettbewerb, 7. MeMO, 2013, Veszprem/Ungarn) Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Man zeige, dass

$$2(a+b+c)\geq \sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}$$

gilt. Man finde alle Tripel (a,b,c), für die Gleichheit gilt.

Lösungshinweise: Basierend auf der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel erhalten wir

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}=2\cdot\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\left(\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\right)}\leq\frac{2}{3}\cdot\left(a+a+\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\right)$$

Verwenden wir für $\sqrt[3]{7b^2c+1}$ und $\sqrt[3]{7c^2a+1}$ entsprechende Abschätzungen und addieren die drei Terme, erhalten wir

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}\leq\frac{2}{3}\left(\frac{23(a+b+c)}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right)$$

Setzen wir nun auf der rechten Seite die Voraussetzung über a,b,c ein, führt dies zu

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}\leq 2(a+b+c)$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn bei Anwendung der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel die Gleichheit erfüllt ist, also im Fall von

$$a=\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\quad,\quad b=\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2}\quad,\quad c=\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}$$

Wir definieren die Funktion $f(x)=\frac{7}{8}\left(x-\frac{1}{8x^2}\right)$. Damit können wir die drei Gleichungen schreiben als $b=f(a), c=f(b), a=f(c)$.

Wir stellen fest, dass diese Funktion f nicht fallend ist. Nehmen wir zwei reelle Zahlen $u\geq v$, dann finden wir nämlich:

$$f(u)-f(v)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{1}{8v^2}-\frac{1}{8u^2}\right)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{u^2-v^2}{8u^2v^2}\right)$$

also

$$f(u)-f(v)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{(u-v)(u+v)}{8u^2v^2}\right)=\frac{8}{7}(u-v)\left(1+\frac{u+v}{8u^2v^2}\right)\geq 0$$

Weil das Gleichungssystem symmetrisch ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a=max\{a,b,c\}$ gelte. Dann finden wir wegen $a\geq b$ und der Monotonie von f auch $b=f(a)\geq f(b)=c$ sowie $c=f(b)\geq f(c)=a$, also insgesamt $c\geq a\geq b\geq c$, woraus $a=b=c$ folgt.

Wir suchen nun alle Zahlen a mit $f(a)=a$, also

$$a=\frac{8}{7}\left(a-\frac{1}{8a^2}\right)\quad\Rightarrow\quad 7a=8a-\frac{1}{a^2}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{a^2}\quad\Rightarrow\quad a^3=1$$

Somit ist die Gleichheit erfüllt, wenn $a=b=c=1$ gilt, was durch eine Probe

Monatsaufgabe 5/2024[5]

Seien ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB\neq AC$ und O sein Umkreismittelpunkt. Die Gerade AO schneide den Umkreis I von ΔABC ein weiteres Mal im Punkt D und die Gerade BC im Punkt E. Der Umkreis von ΔCDE schneide die Gerade CA ein weiteres Mal im Punkt P. Die Gerade PE schneide die Gerade AB im Punkt Q. Die Gerade durch O parallel zu PE schneide die Höhe im Dreieck ΔABC durch A im Punkt F.

Zeige $|\overline{FP}|=|\overline{FQ}|$.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 26.2 – Geometrische Örter 3
Thema 10.2 - Beschränkte und kürzbare Brüche 8
13. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen 16
Termine 18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/2024 18
Monatsaufgabe 5/2024 19

[5] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.06.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[6]	Nr.	Thema	Aufgabe
05/2024 (Mai)	Thema 10.2	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO630936 MO631036
05/2024 (Mai)	Thema 26.2	Geometrischer Ort	MO630933 MO631033
04/2024 (April)	Thema 9.3	Differenzen von Quadraten	MO630931 KZM 4-2
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4-5A
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26.1	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044 MO621022 MO620944 MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041 MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

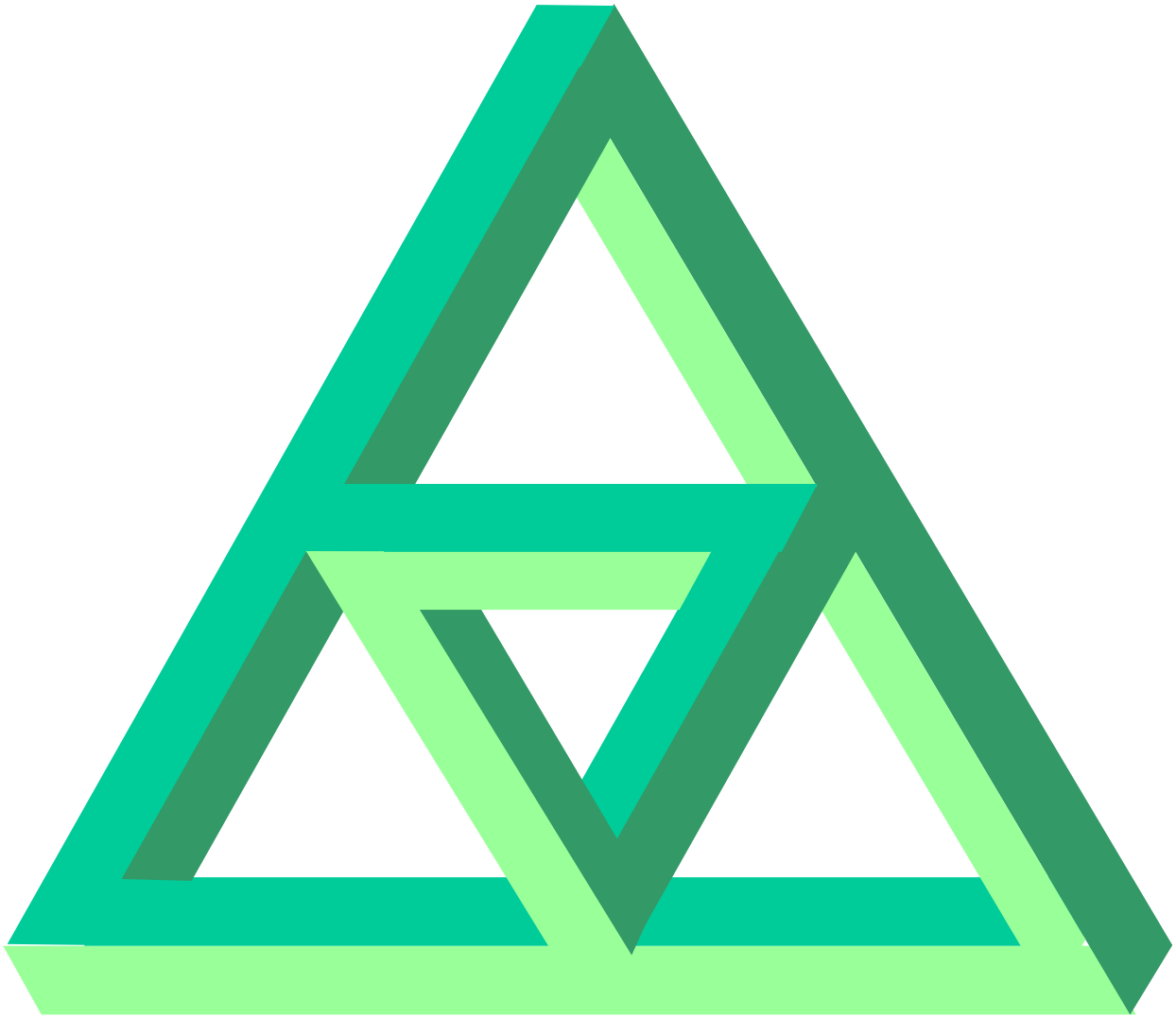
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[6] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06+07/2024 (Juni & Juli 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Zum Schuljahresabschluss blicken wir noch einmal die Aufgaben der diesjährigen Landesrunde der MO zurück und diskutieren zur Aufgabe **MO631031** im Thema 28 „Geometrie am Rechteck“. Bemerkenswert ist hierbei die Vielfalt der Lösungsansätze, die in den offiziellen Lösungshinweisen dargestellt werden. Dies greifen wir ebenfalls auf.

In Ergänzung zu den Lösungshinweisen erläutern wir den Südpolsatz und den Winkelhalbierendensatz für die eigene Lösungsdarstellung als zitierfähige „Aussagen mit eigenem Namen“. Für letzteren verweisen wir auf den Beweis aus dem sechsten Buch der Elemente von EUKLID.

Als Ferienkost untersuchen wir Fragestellungen, die auf PELLsche Gleichungen führen.

Wie schon im Heft 06/2023 zeigen wir mit **MO221013** eine weitere MO-Aufgabe in gereimter Form – als Kuriosum der MO-Geschichte.

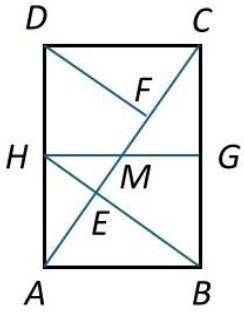
Bevor wir im Heft 08/2024 die Aufgaben der Bundesrunde analysieren werden, geben wir eine Auswertung zum Abschneiden des sächsischen Teams und gratulieren den erfolgreichen Teilnehmenden, die mit einem I. Preis, drei III. Preisen und vier Anerkennungsurkunden ausgezeichnet wurden.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 28 – Geometrie am Rechteck

Aufgabe 28.1 – MO631031. Zeigen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein Rechteck $ABCD$ mit $|\overline{AD}| = 1$ gibt, für welches die Fußpunkte E und F der Lote aus B und D auf die Diagonale $\overline{AC}$ diese Diagonale in drei gleich lange Teile $\overline{AE}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FC}$ teilen.

Bestimmen Sie die Länge $|\overline{AB}| = x$ dieses Rechtecks.



Vorbemerkung: Wir zeigen, dass genau für $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ das Rechteck $ABCD$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Hinweis: Diese Form des Rechtecks kennen wir aus den Papierformaten A0, A1, …

Lösungshinweise – Variante 1: Im Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 1$ und $|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = x > 0$ ergibt sich aus dem Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligem Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel $\angle CBA$ die Diagonalenlänge $|\overline{AC}| = \sqrt{1 + x^2}$.

Mit $\angle DCA = \angle DCF$ sind die rechtwinkligen Dreiecke ΔCDA und ΔCDF ähnlich, und zwar mit

$$|\overline{FC}| : |\overline{DC}| = |\overline{DC}| : |\overline{AC}|,$$

woraus sich wegen $|\overline{DC}| = x$ sowie $|\overline{AC}| = \sqrt{1 + x^2}$

$$|\overline{FC}| = \frac{|\overline{DC}|^2}{|\overline{AC}|} = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ergibt. Die Lotfußpunkte E und F müssen in der Reihenfolge wie in der Abbildung auf der Diagonalen $\overline{AC}$ liegen, denn läge F zwischen A und E, so wäre $|\overline{EF}| < |\overline{AE}|$.

Die geforderte Teilung $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}|$ gilt genau dann, wenn für jede Teilstrecke $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ erfüllt ist. Dafür ist $|\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ bereits ausreichend, da wegen der Symmetrie des Rechtecks dann auch $|\overline{AE}| = |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ und $|\overline{EF}| = |\overline{AC}| - |\overline{AE}| - |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ gilt.

Wir erkennen, dass $|\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$ genau dann erfüllt ist, wenn

$$|\overline{FC}| = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + x^2}$$

gilt. Dies ist äquivalent zur Gleichung $1 + x^2 = 3x^2$ und wegen $x > 0$ zu $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lösungshinweise – Variante 2: Es ist $|\overline{AF}| : |\overline{FC}| = 2 : 1$ genau dann, wenn

$$2 = \frac{|\overline{AF}|}{|\overline{FC}|} = \frac{|\overline{AC}| - |\overline{FC}|}{|\overline{FC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{FC}|} - 1$$

gilt, was äquivalent ist zu $|\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|$. Wegen der Punktsymmetrie des Rechtecks $ABCD$ ist dies aber äquivalent dazu, dass E und F die Diagonale $\overline{AC}$ wie gefordert teilen.

Die rechtwinkligen Dreiecke ΔAFD und ΔCDF haben die gemeinsame Höhe $\overline{DF}$ auf den Grundseiten $\overline{AF}$ und $\overline{FC}$. Damit gilt das Verhältnis $|\overline{AF}| : |\overline{FC}| = 2 : 1$ genau dann, wenn der Flächeninhalt A_{AFD} doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt A_{CDF}, wenn also $A_{AFD} : A_{CDF} = 2 : 1$ gilt.

Mit $|\angle FAD| = 90° - |\angle ADF| = |\angle FDC|$ sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔAFD und ΔCDF ähnlich. Ein Vergleich der Hypotenusenlängen dieser beiden Dreiecke ergibt den Ähnlichkeitsfaktor $|\overline{AD}| : |\overline{CD}| = 1 : x$.

Für das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{AFD} : A_{CDF} =$ ergibt sich damit

$$A_{AFD} : A_{CDF} = |\overline{AD}|^2 : |\overline{CD}|^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Damit ist A_{AFD} genau dann doppelt so groß wie A_{CDF} , wenn $\frac{1}{x^2} = 2$ gilt, was wegen $x > 0$ äquivalent zu $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

Lösungshinweise – Variante 3: Da die Lotfußpunkte E und F immer im Inneren der Diagonalen $\overline{AC}$ liegen, gilt $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}|$ genau dann, wenn die Punkte A, E, F und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen mit

$$|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AC}|.$$

In diesem Fall gilt $|\overline{EC}| = |\overline{EF}| + |\overline{FC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$.

Gilt andererseits $|\overline{EC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$, so teilt der Punkt E die Diagonale $\overline{AC}$ im Verhältnis 1 : 2. Der Punkt F teilt dann die Diagonale $\overline{AC}$ wegen der Punktsymmetrie des Rechtecks $ABCD$ im Verhältnis 2 : 1, womit E und F die Diagonale $\overline{AC}$ wie gefordert teilen. Die Bedingung der Aufgabe ist damit äquivalent zu $|\overline{EC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$.

Mit dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AE}| \cdot |\overline{AC}|$ und $|\overline{BC}|^2 = |\overline{EC}| \cdot |\overline{AC}|$ und somit

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{EC}|} = \frac{|\overline{AE}| \cdot |\overline{AC}|}{|\overline{EC}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB}|^2}{|\overline{BC}|^2} = \frac{x^2}{1^2} = x^2$$

Damit ist jedoch $|\overline{EC}| = 2 \cdot |\overline{AE}|$ äquivalent zu $x^2 = \frac{1}{2}$, was wegen $x > 0$ äquivalent ist zu $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lösungshinweise – Variante 4: Wir halbieren das Rechteck $ABCD$ durch die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, die die Diagonale im Punkt M schneide. Bezeichnen wir die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten mit $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit G beziehungsweise mit H, so gilt wegen der Punktsymmetrie des Rechtecks um M die Gleichheit $|\overline{GM}| = |\overline{MH}|$. Gilt die geforderte Teilung $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FC}|$, dann gilt – wieder wegen der Symmetrien – im Rechteck $AGHD$ auch $|\overline{AE}| = 2 \cdot |\overline{EM}|$

Wir verlängern das Lot von B auf $\overline{AC}$ über E hinaus bis zum Schnittpunkt H' mit der Geraden durch G und H. Dann können wir für die von E ausgehenden Strahlen an den Parallelen AB und GH den Strahlensatz anwenden und finden die Verhältnisgleichung

$$2 : 1 = |\overline{AE}| : |\overline{EM}| = |\overline{AB}| : |\overline{MH'}|,$$

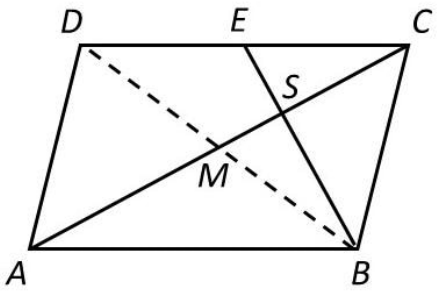
also $MH' = \frac{x}{2}$, d.h. es gilt $H' = H$. Aufgrund der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ΔABC und ΔABH (nach WWW mittels $|\angle HBA| = |\angle ACB|$) sind auch die Rechtecke $ABGH$ und $ABCD$ ähnlich. Insbesondere erhalten wir deshalb

$$|\overline{AH}| : |\overline{AB}| = |\overline{AB}| : |\overline{AD}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} : x = x : 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Somit erhalten wir abschließend $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. ❑

Die Lösungsvariante 4 zur Aufgabe **MO631031** wird durch folgende Aufgabenstellung motiviert.

Aufgabe 28,2 – WiFo[3] 14/89. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Punkt E als Halbierungspunkt der Seite $\overline{CD}$. In welchem Verhältnis teilt die Verbindungslinie BE die Diagonale $\overline{AC}$?



Lösungshinweise: Es sei M der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms. Wir betrachten das Dreieck ΔDBC. In ihm sind $\overline{CM}$ und $\overline{BE}$ Seitenhalbierende, weil sich im Parallelogramm die Diagonalen halbieren bzw. entsprechend der Definition des Punktes E. Ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt (nach dem bekannten Satz über das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden eines Dreiecks) $|\overline{CS}| : |\overline{SM}| = 2 : 1$. Damit gilt aber auch

[3] Populärwissenschaftliche Monatszeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt“, Akademieverlag Berlin, 1951 bis 1993.

$$|\overline{CS}| : |\overline{SA}| = 2 : (1+3) = 2 : 4 = 1 : 2 \;\Rightarrow\; |\overline{AS}| : |\overline{SC}| = 2 : 1.$$

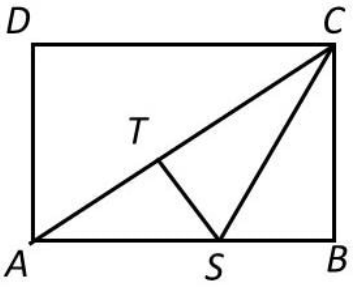
Das heißt aber, die Gerade BE drittelt die Diagonale $\overline{AC}$. ❑

Folgerung: Ist $ABCD$ ein Rechteck, so wird die Forderung aus Aufgabe **MO631031** zur Teilung der Diagonalen genau dann erfüllt, wenn die Lote aus den Eckpunkten B und D durch die Mittelpunkite der Seiten $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AB}$ verlaufen.

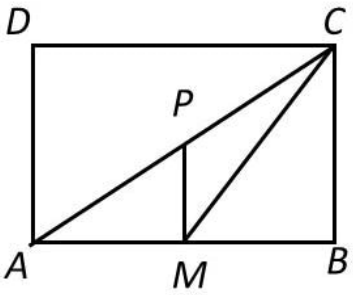
Aufgabe 28.3 – MO280935. Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck *ABCD* gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke *AB* geht!

Vorbemerkung: Es kann kein solches Rechteck geben.

Lösungshinweise – Variante 1: Die Winkelhalbierende[4] von $\angle ACB$ im Dreieck ΔABC teilt die gegenüberliegende Seite $\overline{AB}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so gilt also $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel in B ist. Somit ist die Hypotenuse $\overline{AC}$ länger als die Kathete $\overline{BC}$.



Lösungshinweise – Variante 2: Im Rechteck $ABCD$ sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle ACB$ mit der Seite $\overline{AB}$. Weiter sei T der Fußpunkt des Lotes von S auf die Diagonale $\overline{AC}$. Mit $\overline{CS} = \overline{CS}$, $|\angle TCS| = |\angle SCB|$ und $|\angle STC| = |\angle CBS| = 90°$ und damit nach Innenwinkelsummensatz auch $|\angle CST| = |\angle BSC|$ folgt, dass die Dreiecke ΔCTS und ΔSBC kongruent sind. Somit finden wir auch die Gleichheit der Streckenlängen $|\overline{SB}| = |\overline{ST}|$. Da das Dreieck ΔAST rechtwinklig mit dem rechten Winkel in T ist, folgt für die Hypotenuse $\overline{AS}$ und die Kathete $\overline{TS}$ die Relation $|\overline{AS}| > |\overline{TS}|$. Damit gilt auch $|\overline{AS}| > |\overline{SB}|$, d.h. S kann nicht der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ sein.



Lösungshinweise – Variante 3: Wir errichten in M die Mittelsenkrechte, die die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkt P schneide. Im Dreieck ΔCMP gilt $|\angle PCM| < |\angle CMP|$, weil der kürzeren Seite (die halbe Seitenlänge $\overline{MP}$ ist kleiner als die halbe Diagonalenlänge $\overline{CP}$) der kleinere Winkel gegenüberliegt. Nach dem Wechselwinkelsatz an den Parallelen MP und BC folgt $|\angle PCM| = |\angle MCB|$. Damit erhalten wir $|\angle PCM| = |\angle ACM| < |\angle MCB|$. Also kann CM nicht die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ sein.

[4] S. Bekannte Sätze der Mathematik – Winkelhalbierendensatz; in diesem Heft, S. 14

Lösungshinweise – Variante 4: Wir wenden auf das Dreieck ΔABC den Südpolsatz[5] an, der besagt, dass sich in einem Dreieck die Winkelhalbierende eines Winkels und die Mittelsenkrechte der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite auf dem Umkreis des Dreiecks schneiden. Da der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ nicht auf dem Umkreis des Dreiecks ΔABC liegen kann, kann die Winkelhalbierende des Winkels$A\Delta ACB$ nicht durch M verlaufen, da diese im rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel in B nicht mit der Mittelsenkrechten zusammenfällt. ❑

Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte[6]

Aufgabe MO221013. **Zehn kleine Zifferlein**

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
”Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen.”
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
”Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen.”
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!
Erstens sei sogleich gesagt,
dass nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei’n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da ’s möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.
Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, dass zehn Ziffern man
für diesen Fall gut brauchen kann:
Die Ziffern sei’n ’s von 0 bis 9,
die uns zu diesem Zweck erfreun!
Und jede Ziffer treffe man

[5] s. Bekannte Sätze der Mathematik – Südpolsatz; in diesem Heft S. 14.
[6] Siehe auch Aufgabe MO201014, Heft 07/2023

in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd' vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)
Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?
Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen Endbeträge!
Dabei beweise man recht rege,
dass es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)
Nun frisch ans Werk und nicht verzagt!
Denn nicht alleine nur im Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen ...

Lösungshinweise:

In dem Ergebnis mit vier Stellen
wird jedem Löser gleich erhellen,
dass vorn stets nur die 1 kann sein:
Sie kommt vom Übertrag herein,
den man erhält in Spalte "Hundert"
(Wenn's anders wär', wär' man verwundert.)
Die 0, die kann in den Summanden
auf keinen Fall hier sein vorhanden,
da eine andre Ziffer man
ja niemals zweimal nehmen kann;
denn, wie soeben wurd' verraten,
der Übertrag ist schon "verbraten".

Auch bei den Einern und bei Zehn
darf im Ergebnis 0 nicht stehn,
sonst gäb's den zweiten Übertrag,
den, wie wir wissen, keiner mag.
Nun ist die Lösung halb gewonnen,
es wird mit 1 und 0 begonnen.

```
    -  -  -
+   -  -  -
=   1  0  -  -
```

Jetzt denkt man nach bei den Summanden,
was ist an Hunderten vorhanden?
Zunächst hat man vielleicht gedacht
so an die Ziffern 2 und 8
jedoch es geh'n auch 3 und 7;
und 4 und 6 sind noch geblieben.
Darum mach man sich "auf die Schnelle"
aus diesen eine Art Tabelle:

Verbrauchte Ziffern	Restliche Ziffern	Einzig brauchbare Summenbildungen
0, 1, 2, 8	3, 4, 5, 6, 7, 9	-
0, 1, 3, 7	2, 4, 5, 6, 8, 9	2 + 6 = 8, 4 + 5 = 9
0, 1, 4, 6	2, 3, 5, 7, 8, 9	2 + 7 = 9, 3 + 5 = 8

Nun muss man schließlich noch probieren,
so den Rest zu kombinieren,
dass kein Übertrag entsteht,
wenn man ans Addieren geht.
Überlegt man eine Weile,
sieht man bei der ersten Zeile,
dass es hier nicht funktioniert,
wie und was man auch probiert.
Zeile zwei und drei sodann
bieten je 'ne Lösung an:
Erstens 1, 0, 9 und 8.
Und, falls man es anders macht,
auch an 1, 0, 8 und 9.
kann man zweitens sich erfreu'n
Diese beiden Summen sind
einzig möglich. Jedes Kind
sieht, dass es nur so kann sein,
wenn man hält die Regeln ein. ❑

Gleichungspyramiden

Aufgabe. Gibt es unendlich viele Gleichungsbeispiele der folgenden Art?

$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 15 + 16 + \ldots + 20$$

Lösungshinweise: Die Gleichung wird durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$1 + 2 + \ldots + m = (m + 1) + (m + 2) + \ldots + n.$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen können wir dies zusammenfassen zu

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}$$

Lösen wir diese Gleichung nach n auf, finden wir

$$n = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8m(m+1)+1}.$$

Die Zahl n ist nur dann wie gefordert ganzzahlig, wenn der Radikant eine Quadratzahl ist, also wenn es eine ganze Zahl x mit $x^2 = 8m(m+1) + 1$ gibt. Setzen wir nun noch $y = (2m + 1)$, so gibt es offensichtlich unendlich viele Gleichung der geforderten Art, wenn es unendlich viele Lösungen $(x; y)$ der Gleichung

$$x^2 - 2y^2 = 8m^2 + 8m + 1 - 2(4m^2 + 4m + 1) = -1$$

gibt[7]. Mit $(1; 1)$ finden wir eine erste Lösung, zu der aber die triviale (Pyramiden-) Gleichung 0 = 0 gehört. Auch $(7; 5)$ erfüllt die Gleichung. Dieses Lösungspaar führt zur ersten Gleichung der Pyramide:

$$m = \frac{y-1}{2} \quad ; \quad n = \frac{x-1}{2}$$

Das nächste, durch systematisches Probieren zu findende Lösungspaar $(41; 29)$ passt zur 2. Gleichung. Da jedes solches Lösungspaar mit ungeraden Zahlen eine Gleichung der geforderten Art liefert, wäre die eingangs gestellte Frage bejahend zu beantworten, wenn die Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$ unendlich viele Lösungen besitzt.

Kennen wir ein Paar $(p; q)$ mit $p^2 - 2q^2 = 1$ (zum Beispiel $p = 3$ und $q = 2$), finden wir ausgehend von einem Lösungspaar $(x_0; y_0)$ mit $x_0^2 - 2 \cdot y_0^2 = -1$ rekursiv weitere Lösungspaare $(x_n; y_n)$, mittels

[7] Die Gleichungen $x^2 - N \cdot y^2 = \pm 1$ werden PELLsche Gleichungen genannt. Sie waren schon im 6. Jh. u.Z. bekannt. LEONHARD EULER (1707 – 1783) stieß auf Lösungen, veröffentlichte selbst dazu 1732 und benannte die Gleichung fälschlich nach JOHN PELL (1611 – 1685), der sich jedoch nicht mit dieser Problematik befasst hat.

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + 2 \cdot q \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = p \cdot y_n + q \cdot x_n.$$

Tatsächlich führt dieses Gleichungssystem mit $(p; q) = (3; 2)$ und $(x_0; y_0) = (7; 5)$ auf

$$x_1 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 41$$
$$y_1 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 29$$

mit $x_1^2 - 2 \cdot y_1^2 = 41^2 - 2 \cdot 29^2 = 1681 - 2 \cdot 841 = -1$.

Ohne auf theoretische Hintergründe einzugehen, prüfen wir die Rekursionsgleichungen bzgl. der Erfüllung der PELLschen Gleichung:

$$x_{n+1}^2 = p^2 \cdot x_n^2 + 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n + 4 \cdot q^2 \cdot y_n^2,$$
$$-2 \cdot y_{n+1}^2 = -2 \cdot p^2 \cdot y_n^2 - 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n - 2 \cdot q^2 \cdot x_n^2.$$

Addieren wir beide Gleichungen, erhalten wir für $n = 0{,}1{,}2$ …

$$x_{n+1}^2 - 2 \cdot y_{n+1}^2 = p^2 \cdot \left(\underbrace{x_n^2 - 2 \cdot y_n^2}_{=-1} \right) + 2 \cdot q^2 \cdot \left(\underbrace{2 \cdot y_n^2 - x_n^2}_{=1} \right) = -p^2 + 2 \cdot q^2 = -1$$

Es gibt also unendlich viele Gleichungen der Gleichungspyramide.

Ein ähnliches Beispiel ergibt folgende Gleichungspyramide:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 3 \cdot 6$$
$$15 + 16 + \ldots + 34 + 35 = 15 \cdot 35$$

Die Gleichung wird ebenfalls durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$m + (m+1) + \ldots + (n-1) + n = m \cdot n$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen können wir dies zusammenfassen zu

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{m \cdot (m+1)}{2} = m \cdot n,$$

d.h.

$$m^2 + 2mn - m - n - n^2 = 0$$

also

$$m = -\frac{2n-1}{2} + \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4} + n^2 + n} = \frac{1}{2} \cdot \left(-(2n-1) + \sqrt{8n^2+1} \right).$$

Wieder gibt es nur dann ganzzahlige Lösungen, wenn der Radikand eine Quadratzahl ist, also wenn eine natürliche Zahl x mit $x^2 = 8 \cdot n^2 + 1$ existiert. Setzen wir nun $y = 2n$, so lässt sich die Frage nach der Existenz unendlich vieler Gleichungen der

geforderten Art bejahend beantworten, wenn es unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen für die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ gibt.

Wir haben oben schon mit $(p; q) = (3\,; 2)$ eine Lösung dieser Gleichung mit $n = 1$ gefunden (sie führt zu der trivialen Gleichung $1 = 1 \cdot 1$) und können daraus mittels Rekursion unendlich viele weitere Lösungen generieren, wobei wir als Startwert $(x_0; y_0) = (3; 2)$ verwenden:

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + 2 \cdot q \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = p \cdot y_n + q \cdot x_n.$$

Wir bestätigen wieder die Erfüllung der PELLschen Gleichung:

$$x_{n+1}^2 = p^2 \cdot x_n^2 + 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n + 4 \cdot q^2 \cdot y_n^2,$$
$$-2 \cdot y_{n+1}^2 = -2 \cdot p^2 \cdot y_n^2 - 4 \cdot p \cdot q \cdot x_n \cdot y_n - 2 \cdot q^2 \cdot x_n^2.$$

Addieren wir beide Gleichungen, erhalten wir für $n = 0{,}1{,}2$ …

$$x_{n+1}^2 - 2 \cdot y_{n+1}^2 = p^2 \cdot \left(\underbrace{x_n^2 - 2 \cdot y_n^2}_{=1} \right) + 2 \cdot q^2 \cdot \left(\underbrace{2 \cdot y_n^2 - x_n^2}_{=-1} \right) = p^2 - 2 \cdot q^2 = 1$$

Somit haben wir die Existenz unendlich vieler Pyramidengleichungen der geforderten Art nachgewiesen und können insbesondere die Pyramide fortsetzen:

$x_1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 17, y_1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ mit $n = 6; m = 3,$
$x_2 = 3 \cdot 17 + 2 \cdot 2 \cdot 12 = 99, y_1 = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 17 = 70$ mit $n = 35; m = 15,$
$x_3 = 3 \cdot 99 + 2 \cdot 2 \cdot 70 = 577, y_1 = 3 \cdot 70 + 2 \cdot 99 = 408$ mit $n = 204; m = 85,$

also $85 + 86 + 87 + \cdots + 203 + 204 = 86 \cdot 204.$

Auch die folgende Fragestellung führt auf die PELLsche Gleichung: Es kann keine gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen geben, da nach Satz des PYTHAGORAS für gleiche Kathetenlängen $a = b$ aus der Gleichung $2 \cdot a^2 = c^2$ kein ganzzahliger Wert für die Länge der Hypotenuse c möglich ist ist. Man nennt rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen *fast gleichschenklig*, wenn sich zwei Seitenlängen nur um eine Längeneinheit (LE) unterscheiden (Beispiel: 3 ; 4 ; 5).

Wir können leicht zeigen, dass es unendlich viele fast gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke gibt, bei denen die Hypotenuse um eine Längeneinheit länger als eine Kathete ist (Beispiele: 3 ; 4 ; 5 oder 5 ; 12 ; 13). Setzen wir im Dreieck mit den Kathetenlängen a und b für die Hypotenusenlänge $c = b + 1$, so folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS $a^2 + b^2 = (b + 1)^2$, woraus wir $a^2 = 2b + 1$ schließen können. Für jede ungerade Seitenlänge a können wir also mit $b = \frac{a^2 - 1}{2}$ und $c = b + 1 = \frac{a^2 + 1}{2}$ ein pythagoräisches Tripel bilden, denn es gilt

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4}\cdot(a^4 - 2\cdot a^2 + 1) = \frac{1}{4}\cdot(a^4 + 2\cdot a^2 + 1) = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2.$$

Betrachten wir dagegen fast gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, bei denen eine Kathete um eine Längeneinheit länger als die andere Kathete ist (Beispiel: 3 ; 4 ; 5 oder 20 ; 21 ; 29), so soll also $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ gelten. Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Umformung $2\cdot a^2 + 2\cdot a + 1 = c^2$, woraus nach Multiplikation mit 2 und weiterer Umformung $(2a+1)^2 - 2\cdot c^2 = -1$ folgt. Wir können deshalb die Rekursion von oben mit $(p;q) = (3;2)$ und wegen des Dreiecks (3 ; 4 ; 5) mit $(x_0;y_0) = (2a+1;c) = (7;5)$ durchführen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\cdot 7 + 2\cdot 2\cdot 5 = 41 \quad &\Rightarrow \quad a &= \frac{41-1}{2} = 20; b = 21, \\ y_1 &= 3\cdot 5 + 2\cdot 7 = 29 \quad &\Rightarrow \quad c &= 29, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x_2 &= 3\cdot 41 + 2\cdot 2\cdot 29 = 239 \quad &\Rightarrow \quad a &= \frac{239-1}{2} = 119; b = 120, \\ y_2 &= 3\cdot 29 + 2\cdot 41 = 169 \quad &\Rightarrow \quad c &= 169. \end{aligned}$$

Eine bestimmte Anzahl gleichartiger Münzen kann sowohl in Form eines Quadrats als auch in Form eines Dreiecks angeordnet werden. Trivialerweise ist dies für $n = 1$ richtig. Für welche anderen Anzahlen von Münzen ist das ebenfalls möglich?

Die gesuchte Anzahl muss sowohl eine Dreieckszahl mit der Seitenlänge von n Münzen als auch eine Quadratzahl mit der Seitenlänge von m Münzen sein. Daraus erhalten wir die folgenden Gleichungen

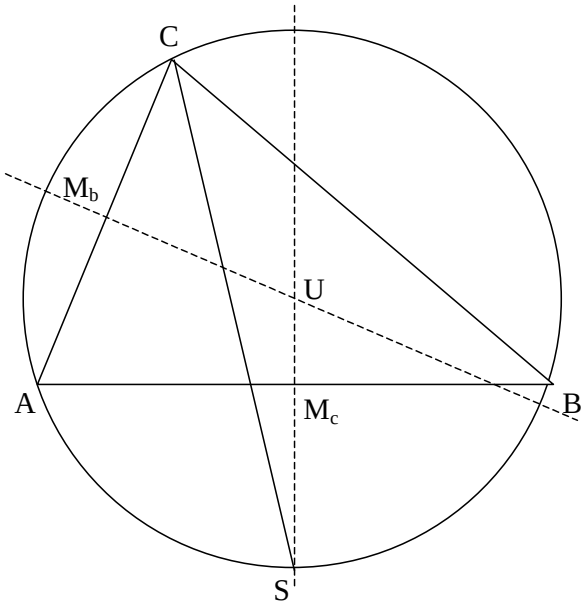
$$\begin{aligned} &\frac{n\cdot(n+1)}{2} = m^2 \\ &n^2 + n = 2\cdot m^2 \\ &(2n+1)^2 - 1 = 2\cdot(2\cdot m)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung können wir nun mit den Substitutionen $x = 2n+1$ und $y = 2m$ als PELLsche Gleichung $x^2 - 2\cdot y^2 = 1$ schreiben und finden dafür unendlich viele Möglichkeiten für die Lösung des Problems.

Bekannte Sätze der Mathematik

Im Vorwort zu den MO-Aufgaben steht der Hinweis „Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“ Wird dieser Satz korrekt zitiert, ist dessen Verwendung in der eigenen Lösungsdarstellung möglich.

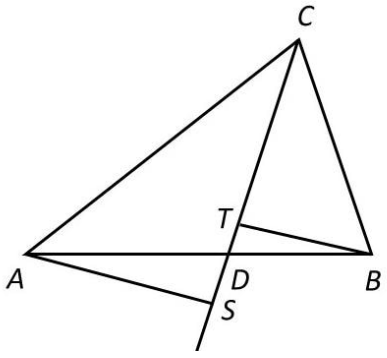
Südpolsatz. In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende durch die gegenüberliegende Ecke auf dem Umkreis[8].



Beweis: Wir betrachten o.B.d.A. die Mittelsenkrechte m_c auf der Seite $\overline{AB} = c$ und die Winkelhalbierende w_γ für den gegenüberliegenden Winkel $\angle ACB$. S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_c mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C. Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist über der Sehne $\overline{AS}$ der Peripheriewinkel $\angle ACS$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle AUS$. Entsprechend ist der Winkel $\angle SCB$ halb so groß wie der Winkel $\angle SUB$. Da die Winkel $\angle AUS$ und $\angle SUB$ aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich groß sein. Folglich liegt die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ auf CS, woraus die Behauptung des Satzes folgt. ❑

Winkelhalbierendensatz. In einem Dreieck ΔABC sei D ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{CD}$ teilt den Winkel $\angle ACB$ in die Winkel $\gamma_1 = \angle ACD$ und $\gamma_2 = \angle DCB$. Diese beiden Winkel sind genau dann gleich groß, das heißt $\overline{CD}$ ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$, wenn für die Streckenverhältnisse $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|}$ gilt.

Beweis – Variante 1 (Strahlensatz mit dem Zentrum D): Wir fällen von A und B die Lote auf $\overline{CD}$ und nennen die Fußpunkte S bzw. T. Die Gerade CD ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$, d.h. es gilt $\angle ACD = \angle DCB$ genau dann, wenn die rechtwinkligen Dreiecke ΔASC (mit dem rechten Winkel in S) und ΔTBC (mit dem rechten Winkel in T) ähnlich sind.

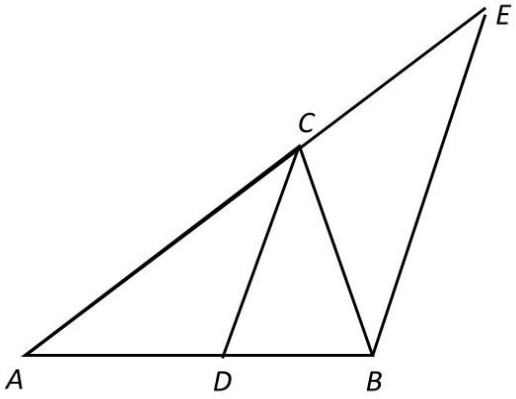


Somit erhalten wir die Verhältnisgleichung entsprechender Dreiecksgrößen $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BT}|}$ und folglich auch $\frac{|\overline{AC}|}{|BC|} = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{BT}|}$.

Nun wenden wir für die von D ausgehenden Strahlen an den Parallelen AS und BT den Strahlensatz an und erhalten die Verhältnisgleichung $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|} = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{BT}|}$.

[8] Der Schnittpunkt wird Südpol genannt.

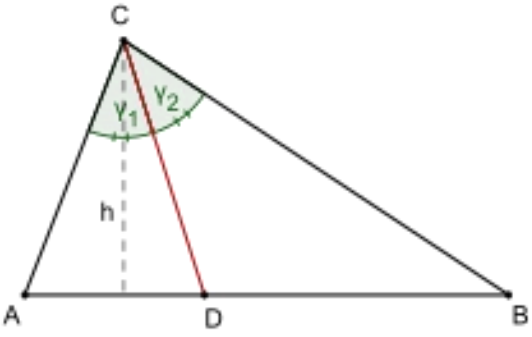
Aufgrund der Drittengleichheit ist die Behauptung bewiesen: Die Gerade CD ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ (d.h. es gilt $|\angle ACD| = |\angle DCB|$ genau dann), wenn die Verhältnisgleichung $\frac{|\overline{AC}|}{|BC|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|}$ gilt.



Beweis – Variante 2 (Strahlensatz mit dem Zentrum A, nach EUKLID): Wie konstruieren durch den Punkt B die Parallel zu CD. Deren Schnittpunkt mit der Verlängerung der Seite $\overline{AC}$ bezeichnen wir mit E. Wir erkennen die Winkelgleichheit $|\angle ACD| = |\angle AEB|$ (Stufenwinkel an den Parallelen $CD \parallel BE$) und $|\angle DCB| = |\angle EBC|$ (Wechselwinkel). Daraus folgt: Das Dreieck ΔBEC ist genau dann gleichschenklig mit $|\overline{BC}| = |\overline{EC}|$, wenn die Gerade CD Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ mit $|\angle ACD| = |\angle DCB|$ ist.

Wenden wir nun den Strahlensatz für die von A ausgehenden Strahlen mit den Parallelen CD und BE an, so finden wir die behauptete Verhältnisgleichung:

$$|\overline{AC}| : |\overline{CE}| = |\overline{AD}| : |\overline{DB}| = |\overline{AC}| : |\overline{CB}| \,.$$



Beweis – Variante 3 (Flächenvergleiche): Wir berechnen die Flächeninhalte der Dreiecke ΔADC und ΔDBC: Verwenden wir zunächst die allgemeine Formel über die Grundseite und Höhe, erhalten wir:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h \text{ bzw. } A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DB}| \cdot h.$$

Ausgehend von den Innenwinkeln am Punkt C können wir aber auch formulieren:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{DC}| \cdot sin(\gamma_1) \quad \text{bzw.} \quad A_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DC}| \cdot |\overline{BC}| \cdot sin(\gamma_2).$$

Betrachten wir jeweils die Verhältnisse der beiden Dreiecksflächen, führt dies einerseits zu $\frac{A_{ACD}}{A_{DBC}} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|}$ und andererseits zu $\frac{A_{ACD}}{A_{DBC}} = \frac{|\overline{AC}| \cdot sin(\gamma_1)}{|\overline{BC}| \cdot sin(\gamma_2)}$.

Damit gilt: Genau dann, wenn CD die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ ist, gilt mit $\gamma_1 = \gamma_2 < 90°$ auch $sin(\gamma_1) = sin(\gamma_2)$, womit die behauptete Verhältnisgleichung erfüllt ist. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids Elemente[9]

Funfzehn Bücher
auf dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[10]

[Es werden zunächst die Textstellen aus dem ersten und fünften Buch zitiert, auf die im Beweis hingewiesen wird.]

Erſtes Buch. Der 6. Satz. Wenn in einem Triangel, ABC, zwey Winkel, ABC, ACB, einander gleich ſind: ſo ſind auch die Gegenſeiten ſolcher Winkel, AC, AB, einander gleich.

Erſtes Buch. Der 9. Satz. Gröſſen, A, B, welche zu Einer dritten, C, einerley Verhältniſ haben, oder zu denen Eine dritte, C, einerley Verhältniſ hat, ſind einander gleich.

Erſtes Buch. Der 29. Satz. Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel ſind: ſo macht eine dritte ſchneidende, EF, mit ihnen die Wechſelwinkel, AGH, GHD, einander; desgleichen den Auſſenwinkel, EGB, dem ihm an derſelben Seite gegenüberlegenden innern Winkel, GHD, ferner die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, EGH, GHD, zweyen rechten, gleich.

Erſtes Buch. Der 31. Satz. Durch einen gegebnen Punkt, A, eine gerade Linie einer gegebnen, BC, parallel zu ziehen.

Fünftes Buch. Der 7. Satz. Gleiche Gröſſen, A, B, haben zu Einer Gröſſe, C, auch eine Gröſſe, C, hat zu gleichen Gröſſen, A, B, einerley Verhältniſ.

Fünftes Buch. Der 11. Satz. Verhältniſſe, A : B, E : F, welcher Einer dritten, C : D, gleich; ſind ſelbſt einander gleich.

[S. 87ff]

Sechſtes Buch.
Der 2. Satz.

[9] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

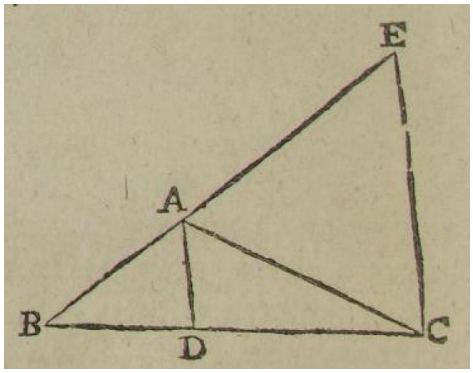
[10] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.

Wenn in einen Triangel, ABC, eine gerade Linie, DE, einer seiner Seiten, EC, parallel ist: so schneidet sie die beyden andern Seiten, AB, AC, proportionirt. Und wenn eine gerade Linie, DE, zwey Seiten eines Triangels, AB, AC, proportionirt schneidet: so ist sie der dritten Seite, BC, parallel.

Der 3. Satz

Wenn in einem Triangel, ABC, eine gerade Linie, AD, einen seiner Winkel, BAC, halbiert: so schneidet sie die Gegenseite solchen Winkels, BC, den beyden anderen Seiten, BA, AC, proportionirt. Und wenn sie die eine Seite, BC, den beyden übrigen Seiten, BA, AC, proportionirt schneidet, so halbirt sie den Gegenwinkel solcher Seite, BAC.

Erster Theil.



Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD die CE parallel, und verlängere BA bis E, so ist (1, 29. S.) ACE = CAD, und CEA = DAB. Nun ist angenommen CAD = DAB. Folglich ist (1, 6. S.) AE = AC. Nun ist, weil AD, CE, im ΔBEC, parallel, (6. 2. S,) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5. 7. S.) ED : DC = BA : AC.

Zweyter Theil.

Es sey ED : DC = BA : AC. Nun ist, weil AD, CE, im ΔBEC parallel, (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5, 12. S.) BA : AC = BA : AC. Folglich (5, 9.S.) AE = AC, folglich (1, 5. S.) AEC = ACE. Nun ist (1, 29. S.) AEC = BAD, und ACE = DAC. Folglich ist BAD = DAC.

Wettbewerbe: Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade fand vom 6. bis 9. Juni 2024 in Flensburg (Schleswig-Holstein) statt. Die Veranstaltung stand unter der Schirmherrschaft von KARIN PRIEN, Ministerin für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein. Das Institut für Mathematik der Europa-Universität Flensburg (www.uni-flensburg.de/mathematik) organisierte den Wettbewerb mit rund 200 Teilnehmenden. Unter www.mo2024.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Alle Teilnehmenden wurden am Donnerstag, dem Anreisetag, im Audimax der Europa-Universität Flensburg (EUF) begrüßt. Für die Übernachtungen waren verschiedene Hotels der Stadt gebucht. Die beiden Klausuren wurden am Freitag und Samstag im Gebäude Oslo der EUF geschrieben. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in und um Flensburg sowie Möglichkeiten des kreativen Gestaltens. Am Samstag trafen sich alle zum Begegnungsabend in der Mensa der EUF.

Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand in der Campushalle statt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weitere vier Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 11 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 75 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 30 Anerkennungsurkunden[11]. Die sächsische Mannschaft konnte in der (inoffiziellen) Länderwertung eine mittlere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[12] belegte sie mit 14 Punkten lediglich den siebenten Platz. Bayern mit 38 Wertungspunkten und Niedersachsen mit 37 Wertungspunkten führen die Länderliste souverän an, gefolgt von Hessen (19), Nordrhein-Westfalen (18) und Berlin (17). Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen ein I. Preis und drei III. Preise den Platz 6 (insgesamt vier Preise). Auch hier führen Bayern (vier I. Preise, insgesamt zwölf Preise) und Niedersachsen (drei I. Preise, insgesamt 13 Preise) vor Hessen (ein I. Preis, insgesamt sieben Preise).

Den sächsischen Preisträgern gilt unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

I. Preis	Tilman Ferchland, Kl. 9, Ostwald-Gymn. Leipzig
III. Preise	Nora Louise Stoppel, Kl. 8, Nexö-Gymn. Dresden
	Tobias Pötzsch, Kl. 11, Geschw.-Scholl-Gymn. Taucha
	Melia Haase, Kl. 12, Gymn. Zschopau
Anerkennung:	Anton Schur, Kl. 8, Ostwald-Gymn. Leipzig
	Leopold Schuster, Kl. 9,Nexö-Gymn. Dresden
	Lilia Dieterlen, Kl. 10, Freies Gymn. Naunhof
	Amos Vogel, Kl. 10, Lessing-Gymn. Hohenstein-Ernstthal

Die Bundesrunde der 64 Mathematik-Olympiade wird vom 23. bis 26. Mai 2025 in Göttingen (Niedersachsen) stattfinden.

Termine

65. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), 11. bis 22. Juli 2024, Bath (Vereinigtes Königreich), Informationen unter www.imo2024.uk.

Start zur Runde 1 der 64. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde. August 2024, Informationen unter www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine.

18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 24. bis 30. August 2024, Szeged (Ungarn), Informationen unter https://memo2024.bolyai.hu.

[11] Die vollständige Liste ist unter www.mo2024.de verfügbar (Stand: 09.06.2024).
[12] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2024

Aufgabe T-1 (Teamwettbewerb), 13. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (Pardubice, Czech Republic, 2019)

Bestimme sowohl den größtmöglichen als auch den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)$$

für nichtnegative reelle Zahlen a, b und c mit $ab+bc+ca=1$ annehmen kann.

Lösungshinweise: Wir führen abkürzende Schreibweisen ein:

$$x=\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right) \quad ; \quad y=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

In x können wir die Nenner mittels der Voraussetzung umformen zu

$$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$$
$$b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c)$$
$$c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+b)(c+a)$$

Damit finden wir einen Zusammenhang zwischen x und y:

$$x=\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1-\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1-y$$

Verwenden wir die Gleichungen

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{c^2+1}=1-\frac{c^2}{c^2+1}$$

so erhalten wir daraus weiter

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)=(3-x)x$$

Wegen $(3-x)x=(2+y)(1-y)=2-y-y^2$ können wir y abschätzen. Offensichtlich gilt $y\geq 0$, wobei die Gleichheit beispielsweise für $(a,b,c)=(0,1,1)$ gilt. Außerdem finden wir $y\leq\frac{1}{4}$, wie wir aus der Multiplikation der drei folgenden Gleichungen erkennen (die jeweils aus der Ungleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels resultieren)

$$a+b\geq 2\sqrt{ab} \quad ; \quad b+c\geq 2\sqrt{bc} \quad ; \quad c+a\geq 2\sqrt{ca}$$

Die Gleichheit wird dabei für $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$ realisiert.

Abschließend berechnen wir

$$\frac{27}{16} = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \leq 2 - y - y^2 \leq 2$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{27}{16} \leq \left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1}\right) \leq 2$$

❑

Monatsaufgabe 06/2024[13]

Ein Landstück hat die Form eines 8×8 – Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd- beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus 64 kleineren quadratischen 1×1 – Grundstücken.

Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem 1×1 – Grundstück. Wir sagen, ein Haus *steht im Schatten*, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen.

Was ist die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht?

Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 28 – Geometrie am Rechteck 3
Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte 7
Gleichungspyramiden 10
Bekannte Sätze der Mathematik 13
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Wettbewerbe: Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade 17
Termine 18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2024 19
Monatsaufgabe 06/2024 20

[13] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.08.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[14]	Nr.	Thema	Aufgabe
06+07/2024 (Juni/Juli)	Thema 28	Geometrie am Rechteck	MO631031
05/2024 (Mai)	Thema 10.2	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO630936 MO631036
05/2024 (Mai)	Thema 26.2	Geometrischer Ort	MO630933 MO631033
04/2024 (April)	Thema 9.3	Differenzen von Quadraten	MO630931 KZM 4-2
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4-5A
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26.1	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044 MO621022 MO620944 MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041 MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar.

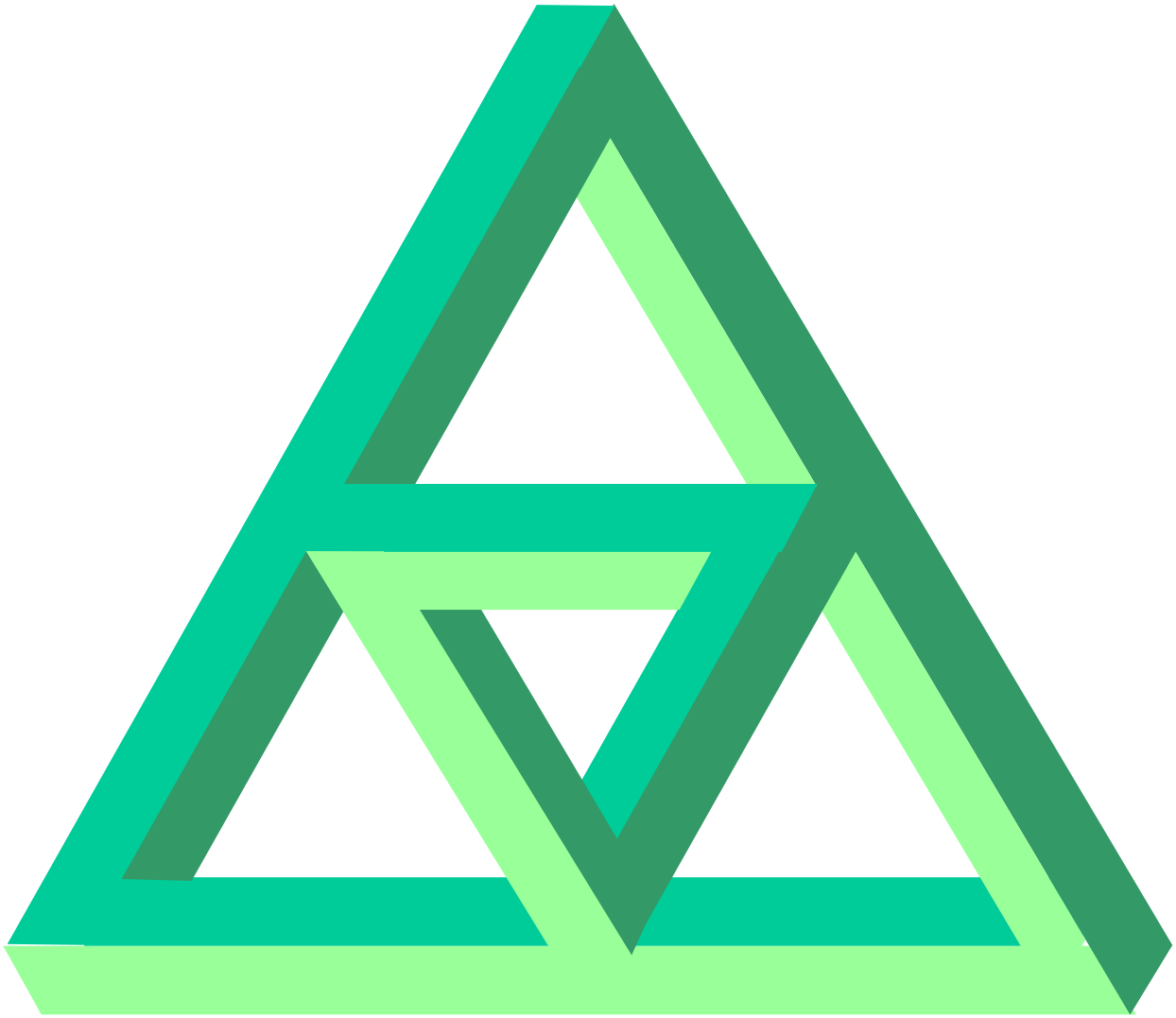
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 08/2024 (August 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir starten in das Schuljahr 2024/25 mit einem Rückblick auf die Aufgaben der Bundesrunde der 63. MO und greifen mit den Aufgaben **MO630941/MO631041** das Thema Schubfachprinzip auf. Während dieses grundlegende Prinzip häufig nur die Argumentation innerhalb eines Beweises vereinfacht (wie beispielsweise unlängst bei den Aufgaben **MO630934/MO631034**), basieren die aktuellen Aufgaben maßgeblich auf der Konstruktion geeigneter „Schubfächer“.

Mit dem Aufgabenpaar **MO630944/MO631044** sehen wir ein weiteres Beispiel, in dem die Erfahrungen aus Aufgaben vergangener Olympiaden einen Zugang zum Lösungsansatz vereinfachen. Ergänzend betrachten wir eine Aufgaben-„Familie“ zu rationalen Zahlen, in der über mehrere Jahrgängen eine gemeinsame Problemstellung präsent war.

Wir informieren über die **65. Internationale Mathematik-Olympiade** (IMO), bei der das deutsche Team mit zwei Silber- und vier Bronzemedaillen erfolgreich abschnitt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 29 – Schubfachprinzip

Aufgabe MO630941/MO631041. Gegeben ist eine Menge von 115 Punkten, die alle im Inneren eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge 2 liegen[3].

Zeigen Sie, dass es einen Kreis mit dem Radius 1 gibt, in dessen Inneren mindestens 20 dieser Punkte liegen.

Vorbemerkung: Aufgabenstellungen des Typs *„Man zeige: Bei beliebiger Anordnung ... gibt es mindestens ...“* sind häufig mit dem Schubfachprinzip[4] lösbar, insbesondere dann, wenn eine vollständige Fallunterscheidung für die „beliebigen Anordnungen“ nicht möglich oder nur sehr komplex erscheint. Das DIRICHLETsche Schubfachprinzip (engl. pigeon-hole principle) wurde von PETER GUSTAV DIRICHLET (1805 – 1859) explizit formuliert[5]:

> *Werden (für natürliche Zahlen n und k) $n \cdot k + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als k Objekte.*

So einfach dieses Prinzip auch erscheinen mag, es wird dennoch nur selten vollständig zur Beweisführung bei Olympiade- und KZM-Aufgaben genutzt. Dabei ist seine Anwendungsvielfalt enorm, wir müssen „nur“ die geeigneten Objekte und Schubfächer definieren können, was sich aber durchaus als schwierig erweisen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe MO630941: Offenbar könnten die 115 Punkte die Objekte sein. Wegen $6 \cdot 19 = 114$ würde es genügen, 6 geeignete Figuren („Schubfächer“) zu finden, die das gegebene Sechseck vollständig überdecken. Wären in keinem dieser Schubfächer 20 Punkte, könnten nur maximal 114 Punkte erfasst werden. Also muss in mindestens einem dieser Schubfächer 20 (oder mehr) Punkte liegen. *Geeignet* bedeutet dabei, dass um die Figuren ein Kreis mit dem Radius 1 beschrieben werden kann.

Da ein regelmäßiges Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken (jeweils mit der Seitenlänge $a = 2$) zusammengesetzt werden kann, versuchen wir in naheliegender Weise als Figuren diese Teildreiecke zu verwenden, also die sechs Dreiecke A_1A_2M, …, A_6A_1M. Dann ist bereits die Aussage nach dem Schubfachprinzip richtig, dass in mindestens einem dieser Dreiecke mindestens 20 Punkte liegen. Aber für einen Kreis, der beispielsweise das Dreieck A_1A_2M umschreibt, liegt dessen Umkreismittelpunkt

[3] Da die Maßeinheit für die Lösung unerheblich ist, werden Längenangaben ohne Einheiten angegeben.

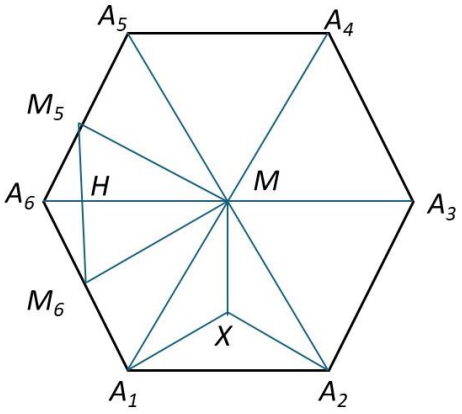
[4] siehe MathKost, Hefte 12/2022 und 01/2023

[5] Eine frühe, aber nur anschauliche Beschreibung des Schubfachprinzips finden wir bereits 1636 in Daniel Schwenters „Deliciae physico-mathematicae“ (siehe MatheKost Heft 01/2023).

X im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, der zugleich Schnittpunkt der Höhen ist. Damit beträgt der Radius $\frac{2}{3}$ einer Höhe und wir finden (wegen $1.5^2 = 2.25 < 3$) die Abschätzung

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1.5}{3} \cdot a = \frac{a}{2} \geq 1$$

Diese Schubfächer sind im Sinne der Aufgabenstellung offenbar zu groß!



Fällen wir dagegen von M aus die Lote auf die Dreiecksseiten, so sind deren Fußpunkte die Seitenmitten des Sechsecks. Betrachten wir die Figur $A_6M_6MM_5$. Wegen der Rechtwinkligkeit in den Punkten M_5 und M_6, liegen beide Punkte jeweils auf einem THALESkreis mit dem Durchmesser $\overline{A_6M}$. Also wird jedes dieser Drachenvierecke von einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ umschrieben.

Da die gegebenen 115 Punkte im Innern des Sechsecks liegen, liegt keiner der Punkte auf dem Rand und somit weder auf $A_1, \ldots, 6$ noch auf $M_1, \ldots, M_6$. Allerdings könnten Punkte auf M liegen und wären dann nicht im Innern der überdeckenden Kreise. Da es aber nur endlich viele Punkte sind, finden wir ein regelmäßiges Sechseck, dass vollständig im Innern des gegebenen Sechsecks liegt und alle 115 Punkte im Innern oder auf dem Rand enthält. Konstruieren wir wie eben die zugehörigen Drachenvierecke, so werden sie durch Kreise mit einem Radius kleiner als 1 überdeckt, Wir können also diese Kreise um deren Mittelpunkte strecken, bis der Radius 1 beträgt, so dass eventuelle Randpunkte nun im Inneren der gestreckten Kreise liegen. ❑

Mit der Anwendung des Schubfachprinzips können manchmal trivial erscheinende Entscheidungen prägnant begründet werden (auch wenn es wie bei folgender Aufgabe in den Musterlösungen nicht erwähnt wird).

Aufgabe MO630934/MO631034. Es sei n eine positive ganze Zahl mit folgender Eigenschaft: Je zwei aufeinander folgende Ziffern bilden eine Primzahl, und diese Primzahlen sind paarweise verschieden.

a) Zeigen Sie, dass n höchstens 12 Stellen hat.
b) Untersuchen Sie, ob es eine solche Zahl n mit 12 Stellen gibt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Da zweistellige Primzahlen ungerade sind und auch nicht auf 5 enden, müssen alle Ziffern von n bis auf möglicherweise die erste

eine der Ziffern 1, 3, 7 oder 9 sein. Alle zweistelligen Primzahlen nur aus diesen Ziffern sind genau die zehn Primzahlen 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 und 97.

Eine k-stellige Zahl enthält $k - 1$ Paare aufeinander folgender Ziffern, von denen sich alle bis auf das erste zu einer der aufgelisteten zehn zweistelligen Primzahlen zusammensetzen sollen, und jede dieser Primzahlen kommt höchstens einmal vor. ***Nach dem Schubfachprinzip*** können nur 10 solche Paare aufeinanderfolgender Ziffern in Frage kommen, denn bei 11 und mehr Paaren würde mindestens eine der 10 Primzahlen mindestens zweifach auftreten.

Ist n eine k-stellige Zahl mit der in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaft, so muss also $k - 2 \leq 10$ und damit $k \leq 12$ gelten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Wir versuchen, die Ziffernpaare 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 und 97 zu einer 11-stelligen Zahl zusammenzusetzen. Da im Innenteil jede Ziffer einmal die erste und einmal die zweite Ziffer eines Paares ist, muss diese 11-stellige Zahl mit 1 beginnen und 9 enden, denn in den zehn Ziffernpaaren kommt die 1 viermal als erste und nur dreimal als zweite Ziffer vor. Umgekehrt ist es bei der 9. Diese kommt nur einmal als erste Ziffer, aber zweimal als zweite Ziffer vor. Die anderen beiden Ziffern treten gleich oft als erste und als zweite Ziffer auf.

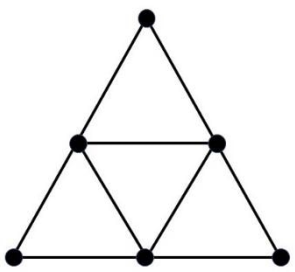
Geeignete 11-stellige Zahlen sind beispielsweise n = 11 317 197 379 oder n = 19 737 131 179. Nun müssen wir noch die Zehnerziffer einer zweistelligen Primzahl, die auf 1 endet und noch nicht in der oben genannten Liste der 10 Primzahlen steht, voranstellen, also 4 oder 6, um die geforderte 12-stellige Zahl zu finden. Eine Herleitung wie hier ist bei dieser Aufgabenstellung jedoch nicht erforderlich. Es genügt die Angabe einer Lösung, die durch die Folge der aneinandergereihten Primzahlen erläutert werden:

n = 411 317 197 379 (mit der paarweisen Folge 41-11-13-31-17-71-19-97-73-37-79)
n = 611 317 197 379 (mit der paarweisen Folge 61-11-13-31-17-71-19-97-73-37-79)
n = 419 737 131 179 (mit der paarweisen Folge 41-19-97-73-37-71-13-31-11-17-79)
n = 619 737 131 179 (mit der paarweisen Folge 61-19-97-73-37-71-13-31-11-17-79)

❑

Aufgabe MO291045. Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

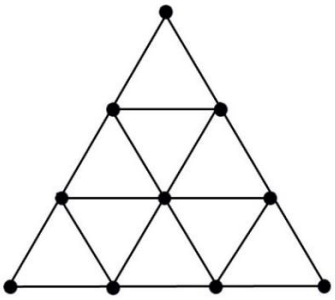
Lösungshinweise: Es sei a die Seitenlänge des Dreiecks. Dann können die fünf (und sogar sechs) Punkte wie in der Abbildung gelegt werden: Werden die Mittelpunkte der Dreiecksseiten verbunden, beträgt der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten hierbei $\frac{a}{2}$.

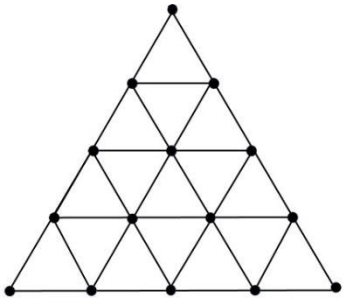


Wir zeigen nun, dass bei keiner Lage von fünf Punkten im Dreieck der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten größer als $\frac{a}{2}$ sein kann. Gäbe es nämlich eine solche Lage, so wäre jeder dieser Abstände größer als $\frac{a}{2}$. Daher könnte dann in jedem der vier in der Abbildung gezeigten Teildreiecke höchstens ein Punkt liegen, also lägen insgesamt höchstens vier Punkte im ganzen Dreieck. Damit ist bewiesen, dass der größte Mindestabstand zweier Punkte von 5 in einem gleichseitigen Dreieck befindlichen Punkte höchstens $\frac{a}{2}$ beträgt und die gezeigte Verteilung diesen Mindestabstand realisiert.

Lösungsvariante: Wir betrachten die fünf zu verteilenden Punkte als *5 Objekte* und die vier Teildreiecke wie in obiger Skizze als *4 Schubfächer*. Nach dem **Schubfachprinzip** befinden sich in mindestens einem Teildreieck mindestens zwei Punkte. Deren Abstand kann aber nicht größer als $\frac{a}{2}$ sein. Da mit Verteilung der fünf Punkte auf die Eckpunkte der Teildreiecke eine Verteilung mit diesem Mindestabstand gefunden wurde, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Wir wollen diese Aufgabe verallgemeinern: Ermitteln Sie eine Verteilung von möglichst vielen verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!





Lösungshinweise: Wir betrachten zwei Beispiele, indem wir die Dreiecksseiten dritteln bzw. vierteln und daraus Dreiecksgitter mit 9 bzw. 16 Teildreiecken konstruieren. Mittels **Schubfachprinzips** können wir zeigen, dass es im ersten Fall mindestens zwei Punkte unter den 10 Punkten gibt, deren Abstand nicht größer als $\frac{a}{3}$ ist. Um diesen Abstand zu gewährleisten, lassen sich die 10 Punkte auf die Gitterpunkten legen.

In Analogie könnten wir erwarten, dass im zweiten Fall 17 Punkte auf die 16 Teildreiecke verteilt werden können, so dass der Mindestabstand nicht größer als $\frac{a}{4}$ beträgt. Aber da nur 15 Gitterpunkte zur Verfügung stehen, finden wir in diesem Fall keine Verteilung mit dem Mindestabstand von $\frac{a}{4}$.

Dieser Aspekt wird mit folgender Aufgabe vertieft.

Aufgabe. Von zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 haben mindestens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$.

Lösungshinweise: Wir betrachten die zehn beliebig vorgegebenen Punkte als 10 Objekte und die neun Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ als Schubfächer. Nach dem **Schubfachprinzip** befinden sich in mindestens einem der Teilquadrate mindestens zwei Punkte, deren Abstand die Diagonale des Teilquadrates nicht übersteigen kann. ❑

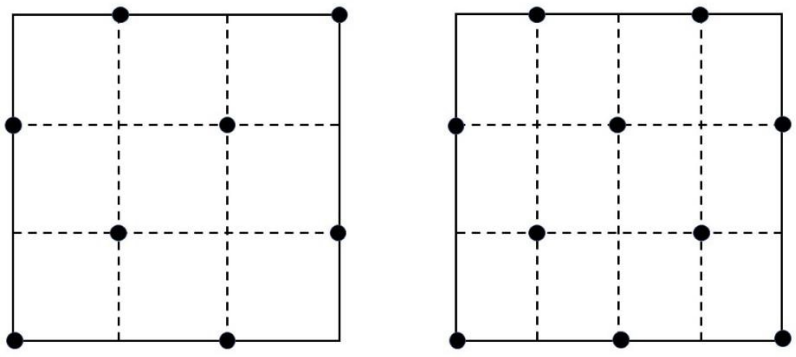
Wir bemerken, dass hiermit nur eine obere Grenze des maximalen Mindestabstandes angegeben werden kann. Es lässt sich mit dem Schubfachprinzip zunächst nur schlussfolgern, dass der maximale Mindestabstand den angegebenen Wert nicht übersteigt. Ob es eine Verteilung gibt, die diese Grenze auch tatsächlich annimmt, muss zusätzlich gezeigt werden. Dafür genügt es jedoch, ein Beispiel anzugeben.

Aufgabe. Man finde eine Verteilung von $n = 10$ Punkten in einem Quadrat mit möglichst großem Mindestabstand.

Hinweis: Im Gegensatz zu „der Abstand von zwei Punkten ist höchstens …“ bedeutet „möglichst großer Mindestabstand“, dass jedes Paar von Punkten mindestens diesen Mindestabstand einhält.

Lösungshinweise: Wie eben gezeigt gilt für den maximalen Mindestabstand von 10 Punkten in einem Quadrat $d_{10} \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471$.

Es gelingt aber nicht, die 10 Punkte so zu verteilen, dass dieser Grenzwert der maximale Mindestabstand ist: Wählen wir eine Zerlegung in neun Teilquadrate (linke Abbildung), so ist für die Einhaltung des Mindestabstandes erforderlich, die Punkte jeweils diagonal auf die Eckpunkte der Teilquadrate zu verteilen. Dies gelingt aber nur für maximal 8 Punkte.



Wir zeigen nun, dass der maximale Mindestabstand mindestens mehr als 0,4 beträgt. Teilen wir nämlich das Quadrat in 12 Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ (rechte Abbildung) und verteilen die 10 Punkte wie angegeben auf den Gitterpunkten, so beträgt der Mindestabstand

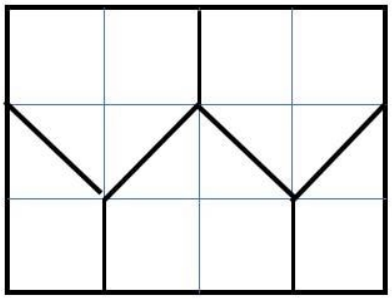
$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9+16}{144}}=\frac{5}{12}>0{,}416.$$

❑

Aufgabe MO221034. Beweisen Sie folgende Aussage: In einem Quadrat der Seitenlänge a gibt es 10 Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}\cdot a$ zueinander haben.

Lösungshinweise: Für die Beantwortung der Aufgabe genügt es, ein Beispiel einer solchen Verteilung anzugeben und den Nachweis zu führen, dass der genannte Mindestabstand bei jedem Punktepaar eingehalten wird. Die Gitterpunkte in der oben dargestellten Teilung des Quadrates in 3×4 Rechtecke bieten den Lösungsansatz. ❑

Die Schubfächer müssen nicht alle die gleiche Form oder Größe haben:



Aufgabe. Man zeige, dass von 6 Punkten in einem 3×4-Rechteck wenigstens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{5}$ haben.

Lösungshinweise: Wir zerlegen das Rechteck in 5 Teilfiguren, wie in der Abbildung ersichtlich. Nun betrachten wir die vorgegebenen 6 Punkte als sechs Objekte und die konstruierten 5 Teilfiguren als 5 Schubfächer. In mindestens einer der Teilfiguren befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens 2 Punkte. Der maximale Abstand zweier Punkte in so einer Teilfigur beträgt

$$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,.$$

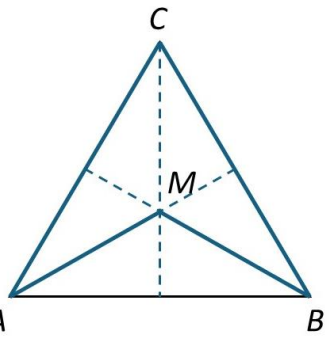
Aufgabe MO211042. Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand XY zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $|\overline{XY}|\leq d$.
(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $|\overline{PQ}|=d$ beträgt.

Untersuchen Sie, ob man jede Viereckfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, dass jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat!

Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Lösungshinweise: So eine Zerlegung ist nicht immer möglich. Es seien A, B, C die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 und es sei M der Mittelpunkt dieses Dreiecks. Dann hat das konkave Viereck $AMBC$ Durchmesser 1, denn es gilt beispielsweise $|\overline{AB}| = 1$ und für kein Punktepaar aus dem Viereck ist der Abstand größer als 1.



Zerlegen wir das Viereck $AMBC$ *nun* in zwei (beliebige) Teilflächen, so muss ***nach Schubfachprinzip***[6] eine dieser Teilflächen mindestens zwei der Punkte A, B, C enthalten (die paarweise den Abstand 1 haben). Diese Teilfläche hat somit einen Durchmesser von 1. ❑

Hinweis: Betrachten wir ein Viereck mit den Seitenlängen 2×1, so bildet die Diagonale den Durchmesser der Länge $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Teilen wir dieses Rechteckfläche in zwei kongruente Quadrate jeweils der Seitenlängen 1×1, so betragen die Durchmesser dieser Quadrate $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Wegen $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ gibt es also Vierecke mit der beschriebenen Eigenschaft.

Eine aktuelle MO-Aufgabe und ihre Vorgängerin

Aufgabe MO630944/MO631044. Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) $x^2 + y^2 = 1$.
(2) $a = x + y$ ist rational.
(3) $b = \sqrt{(1 + x)(1 + y)}$ ist rational.

Vorbemerkungen: Spontan könnten uns drei Lösungsansätze einfallen:

- Wir wollen nachweisen, wie im Allgemeinen mit der Eigenschaft (1) gleichzeitig a und b rationale Zahlen sein können.
- Wir lösen das (nicht-lineare) Gleichungssystem nach (x, y) auf und lassen dabei zu, dass a und b freie Parameter sein könnten.
- Wir suchen nach einem Zusammenhang zwischen a und b, der die Vielfalt für (a, b) einschränkt und auf die Lösungsmenge (x, y) schließen lässt.

Bevor wir jedoch die Lösung der Aufgabe MO631044 beginnen, erinnern wir uns an eine sehr ähnlich formulierte Aufgabenstellung und deren Lösungshinweise:

Aufgabe MO480943. Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(1) $(1 + x^3)(1 + y^3) = 1$.

[6] Drei Objekte (Eckpunkte des Dreiecks ΔABC) und zwei Schubfächer (Teilflächen)

(2) $\sqrt[3]{|(1+x)(1+y)|}$ ist rational.
(3) $\sqrt[3]{|xy(x+y)|}$ ist rational.

Lösungshinweise: Wir formen die Aussage (2) um zu $a^3 = (1+x)(1+y)$ und die Aussage (3) um zu $b^3 = xy(x+y)$. Laut Aufgabenstellung sind a und b rationale Zahlen. Wir erkennen

(4) $(1+x^3)(1+y^3) = 1 \;\Leftrightarrow\; x^3+y^3+(xy)^3 = 0$
und
(5) $(1+x)(1+y) = a^3\; x+y+xy = a^3-1$

Durch fortlaufendes äquivalentes Umformen erhalten wir eine Beziehung zwischen a und b:

$$\begin{aligned}
&0 = x^3+y^3+(xy)^3 = (x+y)^3+(xy)^3-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)\cdot((x+y)^2-xy(x+y)+(xy)^2)-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)\cdot\big((x+y+xy)^2-3xy(x+y)\big)-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)^3-3xy(x+y)(x+y+xy)-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)^3-3xy(x+y)(1+x+y+xy)\\
&= (a^3-1)^3-3a^3b^3
\end{aligned}$$

Also gilt $3a^3b^3 = (a^3-1)^3$. Bei jeder von null verschiedener rationaler Zahl lässt sich der Betrag eindeutig in ein Produkt von Potenzen mit ganzzahligen Exponenten zerlegen. Offenbar ist die linke Seite durch 3 teilbar. Wir betrachten also den Primfaktor 3.

Wären die beiden Seiten in dieser Gleichung ungleich null, so wäre für den Exponenten p des Primfaktors 3 einerseits $p \equiv 0 \pmod 3$ (rechte Seite), andererseits $p \equiv 1 \pmod 3$ (linke Seite). Wegen des Widerspruchs sind folglich beide Seiten gleich null.

Somit muss $ab = a^3-1 = 0$, also $a = 1, b = 0$ gelten. Damit finden wir abschließend

$$b^3 = xy(x+y) = xy(a^3-1-xy) = -(xy)^2$$

Damit gilt $xy = 0$ und deshalb $x = 0$ oder $y = 0$. Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, verbleibt als einziges Lösungspaar $(x,y) = (0;0)$. Ein Probe bestätigt, dass $(0;0)$ tatsächlich alle drei Bedingungen der Aufgabe erfüllt. ❑

Lösungshinweise zu Aufgabe MO641044: Auch wenn die Umformungen in der Lösung zu Aufgabe MO480943 sehr komplex und „gekünstelt“ erscheinen, können wir die Lösungsstrategie auf die Aufgabe MO641044 übertragen.

Wir formen Aussage (3) um zu $(1+x)(1+y)=b^2$ und finden unter Verwendung von Aussage (2) $xy=b^2-x-y-1=b^2-a-1$. Setzen wir dies in Aussage (1) ein, erhalten wir die Gleichung

$$1=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-\ 2(b^2-a-1).$$

Weiter führt dies zu

$$2b^2=a^2+2a+1=(a+1)^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{2}\cdot|b|=|a+1|.$$

Wäre $b\neq 0$, so folgte aus der letzten Gleichung, dass mit den rationalen Zahlen a und b auch $\sqrt{2}=\frac{|a+1|}{|b|}$ eine rationale Zahl wäre. Wegen des Widerspruchs zur bekannten Irrationalität von $\sqrt{2}$ muss $|b|=|a+1|=0$ und folglich $a=\ -1$ und $b=0$ gelten.

Es gilt $xy=b^2-a-1=0$. Es ist also $x=0$ oder $y=0$. Einsetzen in Aussage (2) $x+y=a=-1$ liefert $(0;-1)$ und $(-1;0)$ als einzige Kandidaten für Lösungspaare. Eine Probe bestätigt, dass $(0;-1)$ und $(-1;0)$ in der Tat alle Forderungen der Aufgabenstellung erfüllen. ❑

Rationale Zahlen – eine MO-Aufgabenfamilie

Wir betrachten im Folgenden eine Aufgabe, bei deren Lösungshinweisen der Ausruf *„Wie soll man darauf kommen!“* nahe liegt. Es zeigt sich aber, dass in einer Reihe von hinführenden Aufgaben die Thematik umfassend vorbereitet wurde.

Aufgabe MO331042. Man beweise, dass es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Für den Beweis wäre es ausreichend, geeignete rationale Zahlen anzugeben. So leisten für jede natürliche Zahl n die rationalen Zahlen $t=\frac{1}{(n^2-1)^2}$ das Geforderte, denn es gilt

$$\sqrt{t+\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2}+\frac{1}{(n^2-1)}}=\sqrt{\frac{1+(n^2-1)}{(n^2-1)^2}}=\frac{n}{n^2-1}.$$

Um solche geeignete Zahlen t zu finden, versuchen wir den Wurzelausdruck zu analysieren. Da wir nicht alle Zahlen finden müssen, ist es zulässig, Vereinfachungen in den Betrachtungen vorzunehmen. Sicher ist es günstig für die Zielstellung, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also wenn es natürliche Zahlen p und q mit $q>0$ gibt, so dass $t=\frac{p^2}{q^2}$ gilt. Dann bleibt die innere Wurzel rational. Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2}+\frac{p}{q}}=\sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p+q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p=1$ und $q=n^2-1$ erhalten wir die oben angegebene Zahlenfolge. ❑

Ergänzend fragen wir uns, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ irrational ist. Betrachten wir beispielsweise die Zahlen $t=\frac{1}{n^4}$, so erkennen wir aus

$$\sqrt{t+\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n>0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Bereits in der Runde 1 des MO-Jahrgangs wurde die Struktur der zu untersuchenden Zahlen verwendet, die es für ganze Zahlen zu analysieren galt.

Aufgabe MO330913/MO331013. Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen *t* ist

$$z=\sqrt{t+\sqrt{t}}$$

eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösungshinweise: Für $t=0$ ist $z=\sqrt{0+\sqrt{0}}=0$, also eine rationale Zahl.

Angenommen, für eine ganze Zahl $t>0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2=t+\sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t}=z^2-t$ rationale Zahlen wären. Dann muss es eine positive ganze Zahl m mit $t=m^2$ geben. Mit dieser wäre demnach $z=\sqrt{m^2+m}$, woraus weiterhin folgt, dass auch m^2+m eine Quadratzahl sein muss.

Wegen $m^2<m^2+m<(m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war. Also haben wir bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t>0$ ist z keine rationale Zahl. Dagegen ist für $t=0$ die Zahl z rational. ❑

Bereits zwei Jahre davor wurde die Struktur in Aufgaben schon verwendet und dabei besonders auf die Darstellung rationaler Zahlen als Quotient zweier ganzer Zahlen hingewiesen.

Aufgabe MO311034.
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen

(1) Es gilt $t > 1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n, m ist $n = 1000$.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Falls $t, s \in Q$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}} = s$ ist, gilt $\sqrt{t} = s^2 - t^2 \in Q$. Also ist t das Quadrat einer rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t = \frac{n}{m}$ müssen n, m Quadrate von natürlichen Zahlen sein. Dieses ist für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Wir setzen $r := \sqrt{t} = \frac{100}{q} \in Q$ mit $q^2 = m$. Aus der Bedingung (1) folgt $q < 100$. Nun ist die Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}} = s$ äquivalent zu

$$r \cdot (r+1) = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot (100+q) = (qs)^2$$

Die Gleichung rechts hat offenbar genau dann eine Lösung in natürlichen Zahlen, wenn $100 + q$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21, 44, 69, 96\}$.

Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, entfallen die geraden Zahlen $q = 44$ und $q = 96$ als Lösung und somit gibt es für t die zwei Lösungen $\frac{100^2}{21^2}, \frac{100^2}{69^2}$. ❑

Bemerkung: Ohne die Bedingung (1) gibt es für die Teilaufgabe b) unendlich viele Lösungen

$$t = \frac{10000}{(a^2-100)^2}$$

mit natürlichen Zahlen a ($a > 10$ und $ggT(a, 10) = 1$). Diese ergeben somit eine weitere konstruktive Lösung zu Aufgabe MO331042.

Aufgabe MO311024. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24 \cdot \sqrt{t}}$ rational ist!

Lösungshinweise: Es sei $r^2 = t + 24 \cdot \sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer

natürlichen Zahl t ist aber genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24 \cdot n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot 12 \cdot n + 12^2 = (n + 12)^2$.

Setzen wir zur Vereinfachung $m := n + 12 > 0$, erhalten wir $144 = m^2 - r^2 = (m + r)(m - r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist dabei $m + r$ der größere und $m - r$ der kleinere Teiler und wegen $(m + r) - (m - r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, so dass (da 144 durch 2 teilbar ist) beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich folgende Lösungen:

- für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.
- für $m - r = 6$ ist $m + r = 24$, also $r = 9$, $m = 15$, $n = m - 12 = 3$ und $t = n^2 = 9$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{9 + 24 \cdot \sqrt{9}} = \sqrt{9 + 24 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ rational.
- für $m - r = 8$ ist $m + r = 18$, also $r = 5$, $m = 13$, $n = 13 - 12 = 1$ und $t = n^2 = 1$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{1 + 24 \cdot \sqrt{1}} = \sqrt{25} = 5$ rational.

Damit ergeben sich genau vier Lösungen $t \in \{1,9,64,625\}$. ❑

Aufgabe MO301043A. Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Wir vermuten, dass es eine derartige Zahl *m* nicht gibt und wollen deshalb die folgende Aussage beweisen:

Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als *m* natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}}$ für alle $i = 1,2,\dots,m+1$ als rational nachzuweisen.

Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \dots \cdot ((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \qquad (i = 2, 3, \dots, m+1)$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen. k ist wie gefordert positiv. Weiter gilt $t_2 > t_3 > \dots > t_{m+1} > 0$, also sind $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen $t_1 = 0$ und

$$\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2-1)^2} + k \cdot \frac{k}{i^2 - 1}} = \frac{k}{i^2 - 1} \cdot \sqrt{1 + (i^2 - 1)} = \frac{k \cdot i}{i^2 - 1}$$

Sind für alle $i = 2, \dots, m+1$ (natürliche, also) rationale Zahlen. ❑

65. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 11. bis 22. Juli 2024 in Bath (Vereinigtes Königreich) statt. Mit 81 teilnehmenden Schülerinnen und 528 Schülern aus 108 Ländern lag die Teilnahme wieder nahe an den bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern, ebenfalls in Bath).

Insgesamt wurden 54 Gold-, 121 Silber- und 145 Bronzemedaillen vergeben, somit erhielten 320 Teilnehmende (52.9%) einen Preis. Mit zwei Silber- und vier Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 120 Punkten von 252 möglichen Punkten (47.6%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **31. Platz** erreichen (2021: 129 Punkte/12. Platz; 2022: 192 Punkte/7. Platz; 2023: 156/20. Platz). Angeführt wird diese Länderliste vom Vorjahreszweiten, den USA (192 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaillen), gefolgt von der Volksrepublik China (190 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaillen) und der Republik Korea (168 Punkte, zwei Gold- und vier Silbermedaillen). Von den europäischen Ländern erreichten nur die Mannschaften aus dem Vereinigten Königreich (162 Punkte/6. Platz), aus Ungarn (155/8), Polen und Türkei (beide 151/9) mehr als 150 Punkte.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 65. IMO

Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. Man bestimme alle reellen Zahlen α, sodass für jede positive ganze Zahl n die ganze Zahl $\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$ ein Vielfaches von n ist.

(Dabei bezeichnet $\lfloor z\rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich z. Beispielsweise gilt $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ und $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

Aufgabe 2. Man bestimme alle Paare $(a; b)$ positiver ganzer Zahlen, für die es positive ganze Zahlen g und N gibt, sodass $ggT(an + b, bn + a) = g$ für alle ganzen Zahlen $n > N$ gilt.

(Dabei bezeichnet $ggT(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen x und y.)

Aufgabe 3. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen, und es sei N eine positive ganze Zahl. Für jedes $n > N$ komme die Zahl a_{n-1} unter $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ genau a_n mal vor.

Man beweise, dass mindestens eine der Folgen $a_1, a_3, a_5, \ldots$ und $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ab einer gewissen Stelle periodisch ist.

(Eine unendliche Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ist ab einer gewissen Stelle periodisch, falls es positive ganze Zahlen p und M gibt, sodass $b_{m+p} = b_m$ für alle $m > M$ gilt.)

Aufgabe 4. Es sei ΔABC ein Dreieck mit $|\overline{AB}| < |\overline{AC}| < |\overline{BC}|$. Weiterhin seien I der Inkreismittelpunkt und ω der Inkreis des Dreiecks ΔABC. Sei X der von C verschiedene Punkt auf der Geraden BC, sodass die Parallele zu AC durch X den Kreis ω berührt. Analog sei Y der von B verschiedene Punkt auf der Geraden BC, sodass die Parallele zu AB durch Y den Kreis ω berührt. Die Gerade AI schneide den Umkreis des Dreiecks ΔABC erneut in $P \neq A$. Es seien K und L die Mittelpunkte von $\overline{AC}$ beziehungsweise $\overline{AB}$.

Man beweise, dass $\angle KIL + \angle YPX = 180°$ gilt.

Aufgabe 5. Die Schnecke Turbo spielt auf einem Brett mit 2024 Zeilen und 2023 Spalten. Auf 2022 Feldern befinden sich versteckte Monster. Zu Beginn weiß Turbo nicht, wo sich Monster befinden, aber sie weiß, dass es in jeder Zeile, außer der ersten und der letzten, genau ein Monster gibt und dass es in jeder Spalte höchstens ein Monster gibt.

Turbo unternimmt eine Reihe von Versuchen, von der ersten Zeile zur letzten Zeile zu gelangen. In jedem Versuch wählt sie ein Startfeld in der ersten Zeile und kriecht dann

wiederholt auf ein Nachbarfeld mit einer gemeinsamen Seite. (Sie darf auf bereits besuchte Felder zurückkehren.) Wenn sie auf ein Feld mit einem Monster kommt, dann endet der Versuch und sie muss in der ersten Reihe einen neuen Versuch beginnen. Die Monster bleiben immer am selben Ort, und Turbo merkt sich für jedes besuchte Feld, ob dort ein Monster ist oder nicht. Wenn sie ein Feld in der letzten Zeile erreicht, dann endet ihr Versuch und das Spiel endet.

Man bestimme das kleinstmögliche n, für das Turbo eine Strategie hat, sicher in höchstens n Versuchen die letzte Zeile zu erreichen, unabhängig von der Position der Monster.

Aufgabe 6. Es sei Q die Menge der rationalen Zahlen. Eine Funktion $f: Q \to Q$ heißt *aquäsulisch*[7], wenn sie die folgende Eigenschaft hat: für alle $x, y \in Q$ gilt

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \text{ oder } f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Man zeige, dass es eine ganze Zahl c gibt, sodass es für jede *aquäsulische* Funktion f höchstens c verschiedene rationale Zahlen der Form $f(r) + f(-r)$ mit rationalem r gibt, und man bestimme den kleinstmöglichen Wert für ein solches c.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen erwartet werden. Dennoch können wir uns mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1: (mit einem Punktedurchschnitt von 5.6 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 6.7 Punkte und insgesamt 413-mal volle Punktzahl gehörte diese Aufgabe zu den leichteren Problemen) Man untersuche die Aufgabenstellung für $n = 2$ und $n = 3$.

zu Aufgabe 2: (durchschnittlich 2.5 Punkte alle Teilnehmer/4.5 Punkte deutsches Team) Man prüfe, ob es Lösungen für $a = 1$ oder $a = 2$ gibt.

zu Aufgabe 3: (mit einem Punktedurchschnitt von 0.4 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 0.3 Punkte und insgesamt 501-mal 0 Punkte die „Knalleraufgabe“) Finden Sie eine Folge, die das Konstruktionsprinzip erfüllt.

zu Aufgabe 4: (durchschnittlich 4.9 Punkte alle Teilnehmer/3.2 Punkte deutsches Team) Zeichnen Sie eine Skizze zur Aufgabe und prüfen Sie für einen selbstgewählten Spezialfall die Behauptung.

zu Aufgabe 5: (durchschnittlich 2.2 Punkte alle Teilnehmer/5.3 Punkte deutsches Team) Übertragen Sie die Problemstellung auf kleinere Spielfelder

[7] Aquae Sulis war eine römische Stadt in der Provinz *Britannia* (Britannien) an der Stelle des heutigen Bath in der Grafschaft Somerset, England. Der Ort gelangte vor allem wegen seiner heißen Quellen und eines damit verbundenen Heiligtums der Göttin Sulis zu überregionaler Bedeutung.

(z.B. 4 Zeilen, 3 Spalten und 2 Monster) und lösen Sie die entsprechende Aufgabe.

zu Aufgabe 6: (mit einem Punktedurchschnitt von 0.4 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 0.0 Punkte und insgesamt 482-mal 0 Punkte die zweite „Knalleraufgabe“) Gibt es aquäsulische lineare Funktionen? Falls ja, lösen Sie für diese die Aufgabenstellung.

Termine

Start zur Runde 1 der 64. Mathematik-Olympiade. August 2024, Informationen unter www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine.

18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 24. bis 30. August 2024, Szeged (Ungarn), Informationen unter https://memo2024.bolyai.hu.

Wissenschaft LIVE! Die Online-Veranstaltungsreihe der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e. V. und der Stiftung Jugend forscht e. V.: 19. September 2024 von 15:30 bis 16:45 Uhr zum Thema „Laser und Attosekundenphysik“ mit ALEXANDER WEIGEL, Max-Planck-Institut für Quantenoptik (Garching bei München). Informationen und Online-Anmeldung bis 19.09.2024 unter https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-laser-und-attosekundenphysik.html

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 5/2024

Aufgabe T-5 (Teamwettbewerb der 10. MeMO, 2016, Vöcklabruck/Österreich). Seien ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und O sein Umkreismittelpunkt. Die Gerade AO schneide den Umkreis I von ΔABC ein weiteres Mal im Punkt D und die Gerade BC im Punkt E. Der Umkreis von ΔCDE schneide die Gerade CA ein weiteres Mal im Punkt P. Die Gerade PE schneide die Gerade AB im Punkt Q. Die Gerade durch O parallel zu PE schneide die Höhe im Dreieck ΔABC durch A im Punkt F.

Zeige $|\overline{FP}| = |\overline{FQ}|$.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen $\angle ABC$ mit β und $\angle BCA$ mit γ. O.B.d.A. sei $|\overline{AB}| > |\overline{AC}|$, oder gleichwertig, $\beta > \gamma$.

Die Strecke $\overline{AD}$ ist ein Durchmesser des Umkreises von Dreieck ΔABC. Also erhalten wir nach dem Satz von THALES $\angle DCA = 90°$. Da die Punkte D, E, C und P laut Konstruktion auf einem Kreis liegen, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz über der

Sehne $\overline{DP}$ die Winkelgleichheit $\angle PED = \angle PCD = \angle DCA = 90°$, woraus unmittelbar $\angle AEQ = 90°$ folgt.

Da $\angle EAQ = \angle OAB = 90° - \gamma$ ist, erhalten wir auch $\angle AQP = \angle AQE = \gamma$. Im Sehnenviereck $CEDP$ finden wir zudem

$$\angle ADP = \angle EDP = 180° - \angle PCE = \angle ACB = \gamma.$$

Dies bedeutet, dass auch das Viereck $AQDP$ ein Sehnenviereck ist.

Wir bezeichnen den Kreismittelpunkt des Umkreises von $AQDP$ mit F‘. Ausgehend von $\angle APQ = 180° - \angle CAB - \angle AQP = \beta$ folgt $\angle F'AQ = 90°$. Also liegt F‘ auf der Höhe des Dreiecks ΔABC, die durch A verläuft.

Außerdem muss F‘ per Definition auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AD}$ liegen, also auf der Linie durch O parallel zu PE. Wir erhalten also $F‘ = F$. Daraus folgt unmittelbar für die Radien $\overline{FP}$ und $\overline{FQ}$ wie behauptet $|\overline{FP}| = |\overline{FQ}|$. ❑

Monatsaufgabe 8/2024[8]

Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8×8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen

[8] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.09.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort ... 2
Thema 29 – Schubfachprinzip ... 3
Eine aktuelle MO-Aufgabe und ihre Vorgängerin ... 9
Rationale Zahlen - eine MO-Aufgabenfamilie ... 11
65. Internationale Mathematik-Olympiade ... 15
Aufgaben der 65. IMO ... 16
Termine ... 18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 5/2024 ... 18
Monatsaufgabe 8/2024 ... 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
08/2024 (August)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

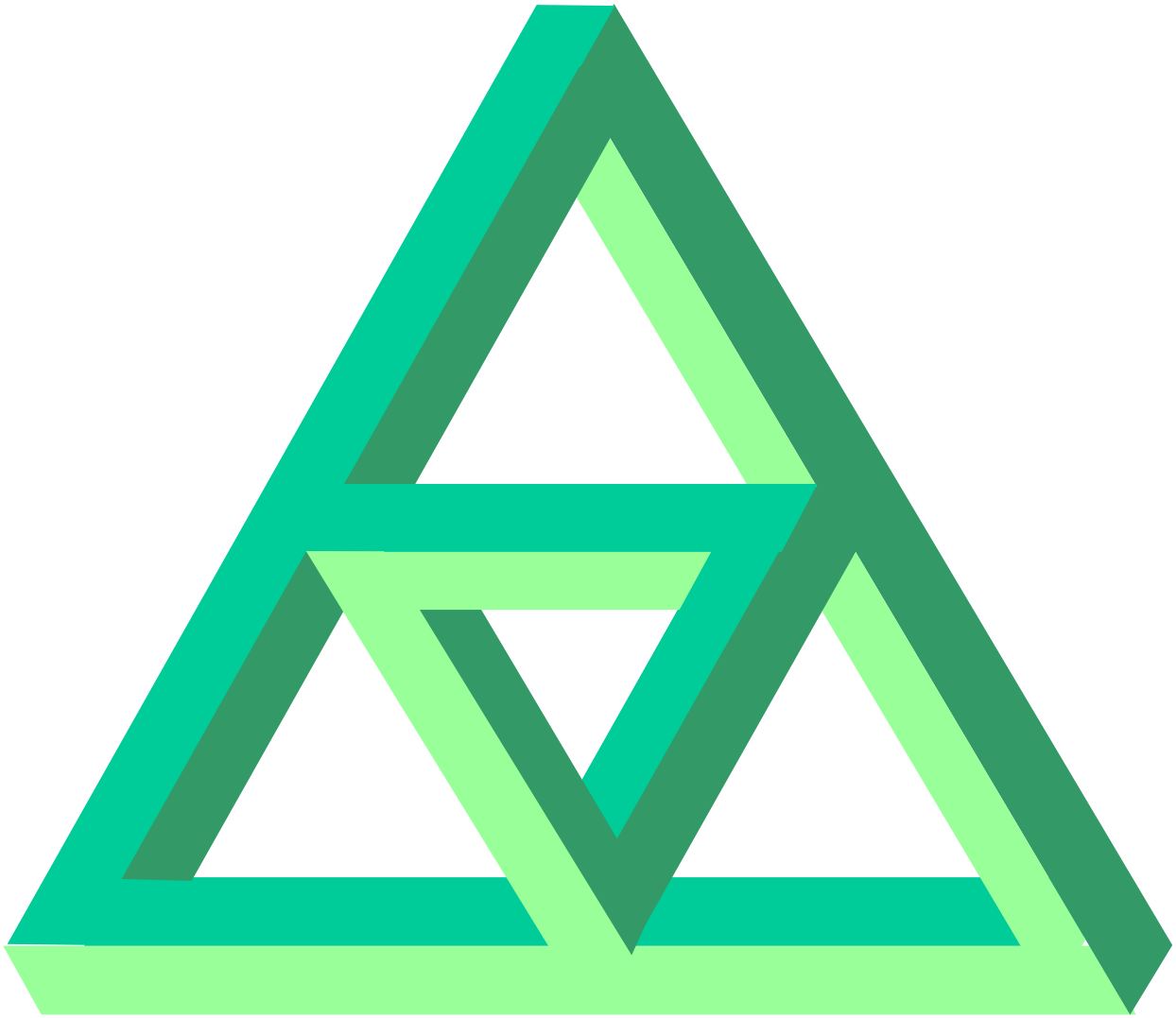
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 09/2024 (September 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir setzen den Rückblick auf die Aufgaben der Bundesrunde der 63. MO fort und greifen mit der Aufgabe **MO630946** das Thema Flächenberechnung auf. Bemerkenswert ist bei dieser Aufgabenstellung die Vielfalt der vom Aufgabenausschuss vorgestellten Lösungsmethoden – in den „Musterlösungen“ zur Bundesrunde werden fünf Varianten diskutiert! Wir ergänzen die Thematik durch Aufgaben, in denen die Eckpunkte der zu untersuchenden Figuren durch Koordinaten eines ebenen kartesischen Koordinatensystems beschrieben werden.

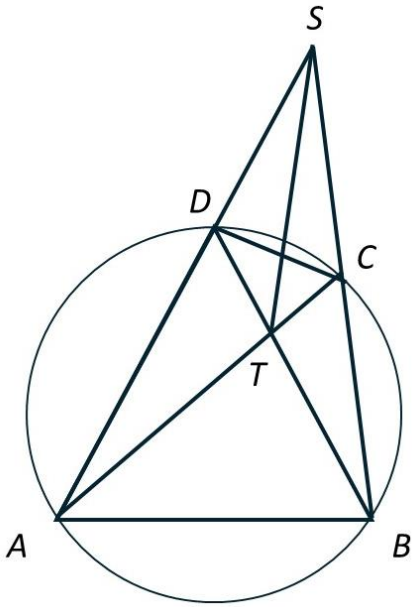
Wir nehmen die Aufgabe MO631041 zum Anlass, an den Binomialkoeffizient zu erinnern. Zur Einführung zitieren wir dazu aus einem Lehrbuch von 1895.

Wir informieren über das Fachgebiet Mathematik/Informatik im Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, der 2025 zum 60. Mal ausgetragen wird. Wir möchten damit alle Jugendlichen motivieren, mathematische Fragestellungen zu untersuchen und im Wettbewerb zu präsentieren!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 04.2– Flächenberechnung[3]

Aufgabe 4.06 – MO630946. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem ΔABD ein gleichseitiges Dreieck ist. Der Schnittpunkt der Geraden AD und BC sei S, der Schnittpunkt der Geraden AC und BD sei T. Man zeige, dass die Dreiecke ΔATS und ΔBSD den gleichen Flächeninhalt haben.



Lösungshinweise: Es sei zunächst allgemein angemerkt, dass bei dieser Aufgabe der Punkt S immer auf derselben Seite der Geraden AB liegt wie die Punkte C, D und T. Dies folgt, da mit Umfangswinkelsatz[4] $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAD| < |\sphericalangle BAD| = 60°$ und somit

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| < 60° + 60° + 60° = 180°.$$

Erste Lösung: Wir vergleichen beide Flächeninhalte mit dem Flächeninhalt des Dreiecks ΔACS. Zunächst gilt

$$A_{ATS} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AC}|} \cdot A_{ACS}\,,$$

denn das Verhältnis der Grundseiten auf der Geraden AC entspricht bei gleicher Höhe dem Verhältnis der Flächeninhalte. Weiterhin ist das Dreieck ΔBSD ähnlich zum Dreieck ΔASC, weil außer der Winkelgleichheit $|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle DSB|$ auch die Winkel $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle CAD|$ und $|\sphericalangle SBD| = |\sphericalangle CBD|$ aufgrund des Umfangswinkelsatzes gleich groß sind. Somit ergibt sich

$$A_{BSD} = \left(\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AC}|}\right)^2 \cdot A_{ACS}\,.$$

Zu zeigen ist also noch

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AC}|} = \left(\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AC}|}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{BD}|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AC}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}\,.$$

Letzteres folgt aber aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC und ΔATB (wegen $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle BAC|$ und $|\sphericalangle TBA| = 60° = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$ aufgrund des Umfangswinkelsatzes).

---

[3] Thema 04.1 im Heft 03/2021 mit Bezug zu Aufgabe MO601023.

[4] Umfangswinkelsatz (Peripheriewinkelsatz): Alle Umfangswinkel (Peripheriewinkel, d.h. Winkel mit Scheitelpunkt auf der Kreislinie) über einem Kreisbogen sind gleich groß. Dies gilt insbesondere über den Sehnen eines Sehnenvierecks, für dass es stets einen Umkreis gibt, auf dem die vier Eckpunkte liegen.

Zweite Lösung: Wir haben

$$|\sphericalangle DCT| = |\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle DBA| = 60° = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAS|$$

aufgrund Umfangswinkelsatz und

$$|\sphericalangle CTD| = 180° - |\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle TCB| = |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle ACB|$$
$$= |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle SBD| + 60° = |\sphericalangle SBA| .$$

Daher haben die Dreiecke ΔCDT und ΔASB gleich große Innenwinkel und sind damit ähnlich. Aus der Gleichseitigkeit des Dreiecks ΔABD folgt

$$\frac{|\overline{CT}|}{|\overline{DT}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{SB}|}$$

und weiter

$$|\overline{AD}| \cdot |\overline{DT}| = |\overline{SB}| \cdot |\overline{CT}| . \qquad (1)$$

Die Höhe h_{AD} von T auf AD ist durch $h_{AD} = |\overline{DT}| \cdot \sin|\sphericalangle ADT|$ gegeben und die Höhe h_{SB} von T auf SB durch $h_{SB} = |\overline{CT}| \cdot \sin|\sphericalangle TCB|$.

Wegen $|\sphericalangle ADT| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TCB|$ folgt hieraus mit (1)

$$A_{ATD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_{AD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot |\overline{DT}| \cdot \sin|\sphericalangle ADT|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |\overline{SB}| \cdot |\overline{CT}| \cdot \sin|\sphericalangle TCB| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{SB}| \cdot h_{SB} = A_{BST}$$

und durch Addition der Fläche des Dreiecks ΔDTS schließlich $A_{ATS} = A_{BSD}$, was zu zeigen war.

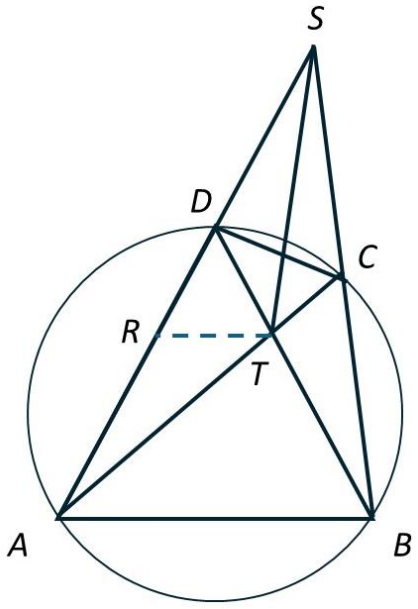
Dritte Lösung: Es sei R der Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden AB durch T mit AD. Nun ist mit Wechselwinkel- und Nebenwinkelsatz im gleichseitigen Dreieck ΔABD

$$|\sphericalangle ART| = 120° = |\sphericalangle BDS|$$
und $|\sphericalangle TAR| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD|$

mit Umfangswinkelsatz. Daher sind die Dreiecke ΔATR und ΔBSD ähnlich, also

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AR}|} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{BD}|}$$

und wegen $|\overline{BD}| = |\overline{AD}|$ und $|\overline{AR}| = |\overline{BT}|$ im gleichschenkligen Trapez $ABTR$ auch



$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{BT}|} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{AD}|},$$

also

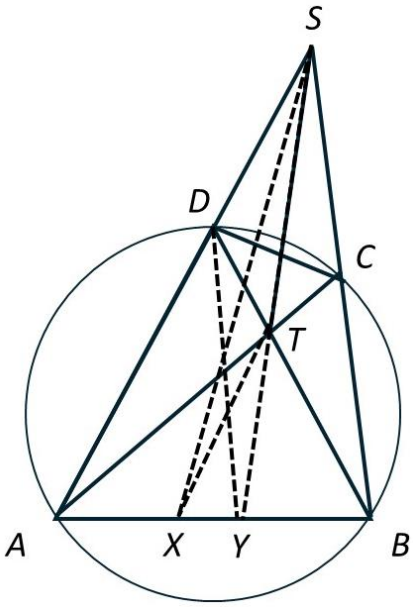
$$|\overline{AT}| \cdot |\overline{AD}| = |\overline{BS}| \cdot |\overline{BT}|.$$

Wegen $|\sphericalangle TAD| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle SBT|$ mit Umfangswinkelsatz folgt daraus

$$A_{ATD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AT}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin|\sphericalangle TAD| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BS}| \cdot |\overline{BT}| \cdot \sin|\sphericalangle SBT| = A_{BST}$$

und durch Addition der Fläche des Dreiecks ΔDTS schließlich $A_{ATS} = A_{BSD}$, was zu zeigen war.

Vierte Lösung: (Mit Scherung und ohne Verwendung ähnlicher Dreiecke.) Es seien X und Y die Schnittpunkte der Strecke $\overline{AB}$ mit der Parallelen zur Geraden AS durch T bzw. mit der Parallelen zur Geraden BS durch D. Dann gilt $A_{ATS} = A_{AXS}$ und $A_{BSD} = A_{BSY}$. Es genügt also zu zeigen, dass die Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{BY}$ gleich lang sind. Da aber nach Konstruktion $|\overline{BD}| = |\overline{DA}|$, $|\sphericalangle DBY| = 60° = |\sphericalangle ADT|$ und mit Wechselwinkel- und Umfangswinkelsatz $|\sphericalangle YDB| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle TAD|$ gilt, ergibt sich die Kongruenz der Dreiecke ΔBDY und ΔDAT (Kongruenzsatz (WSW)), womit $|\overline{BY}| = |\overline{DT}|$ gilt. Ferner ist $DAXT$ ein gleichschenkliges Trapez, womit $|\overline{AX}| = |\overline{DT}| = |\overline{BY}|$ gilt, was zu zeigen war.

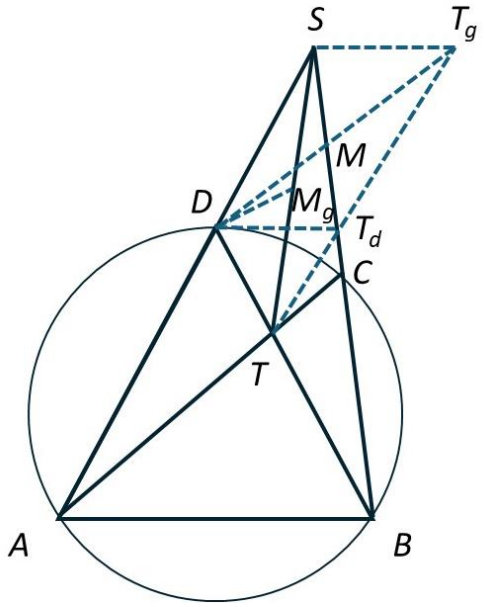


Fünfte Lösung: (Über Zerlegungsgleichheit mit Kongruenzabbildungen.) Es bezeichne d die Drehung um D, welche A in B überführt, und $T_d := d(T)$ das Bild von T unter d. Sei g die Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{DS}$ und p die Punktspiegelung am Mittelpunkt M der Strecke ST_d. Weiter sei $T_g := g(T)$ und $M_g := g(M)$.

Konstruktionsbedingt ist ΔDTT_d gleichseitig, also $TT_d \parallel DS$ (wegen $|\sphericalangle T_dTD| = 60° = |\sphericalangle ADT|$ und Umkehrung des Wechselwinkelsatzes) und $DT_d \parallel AB$ (wegen $|\sphericalangle BDT_d| = 60° = |\sphericalangle DBA|$ und Umkehrung des Wechselwinkelsatzes).

Konstruktionsbedingt ist DTT_gS ein gleichschenkliges Trapez mit Basiswinkel $|\sphericalangle T_gTD| = |\sphericalangle ADT| = 60°$ an der Basis $\overline{TT_g}$, die damit den Punkt T_d enthält. Mit $T_gT_d \parallel DS$ und $DT_d \parallel ST_g$ (wegen $|\sphericalangle DST_g| = 180° - |\sphericalangle T_gTD| = 120° = |\sphericalangle ADT_d|$ und Umkehrung des Stufenwinkelsatzes) ist folglich DT_dT_gS ein Parallelogramm mit Symmetriezentrum M. Insbesondere liegt M somit auf DT_g und M_g auf $ST = g(DT_g)$.

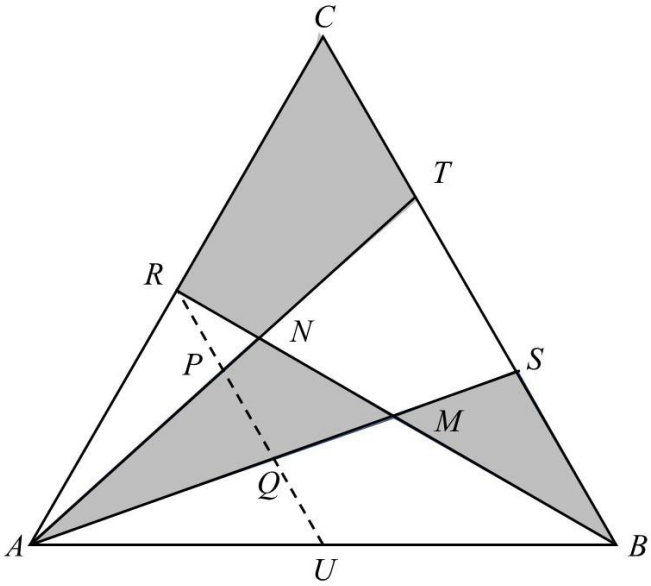
Konstruktionsbedingt sind die Dreiecke ΔATD und ΔBT_dD kongruent, da $\Delta BT_dD = d(\Delta ATD)$. Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt aber auch $|\measuredangle TAD| = |\measuredangle SBD|$, weswegen T_d auf BS liegen muss. Damit setzt sich das Dreieck ΔBSD aus den Dreiecken ΔBT_dD, ΔDT_dM und ΔDMS zusammen; ebenso setzt sich das Dreieck ΔATS aus den Dreiecken ΔATD, ΔTDM_g und ΔSM_gD zusammen. Weiter gilt:



$$\Delta BT_dD = d(\Delta ATD)$$
$$\Delta DT_dM = p(\Delta T_gSM) = p(g(\Delta TDM_g))$$
$$\Delta DMS = g(\Delta SM_gD)$$

Die Behauptung folgt, da die Dreiecke ΔBSD und ΔATS somit zerlegungsgleich sind. ❑

Aufgabe 4.07 – MO430936/MO431036. Im Entwurf für ein Logo der Vereinigung „Innovative Mathematik“ bilden die getönten Flächen die stilisierten Buchstaben I und M (siehe Abbildung). Das Dreieck ΔABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge $a = 6$ cm, $\overline{AC}$ wird von R halbiert und $\overline{BC}$ von S und T in drei gleich große Teile geteilt. Welchen Anteil der Dreiecksfläche überdecken die stilisierten Buchstaben zusammen?



Lösungshinweise: Zusätzlich zu den gegebenen Punkten der Aufgabenstellung bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden AS und AT mit der Geraden BR mit M bzw. N. Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a beträgt $\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}$. Die gesuchte Fläche A ergibt sich aus der Flächenzerlegung:

$$A = A_{BCR} - (A_{AST} - A_{AMN}) + A_{AMN}$$
$$A = A_{BCF} - A_{AST} + 2 \cdot A_{AMN}$$

Laut Konstruktion sind A_{BCF} die Hälfte von A_{ABC} und A_{AST} ein Drittel von A_{ABC}. Außerdem gilt $A_{AMN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot|MN|$, weil $\overline{AR}$ die Höhe im Dreieck ΔAMN ist. Wenn wir die Länge der Strecke $\overline{MN}$ in Abhängigkeit von a ermitteln können, lässt sich der gesuchte Flächeninhalt berechnen.

Fügen wir die Mittelparallele zu BC durch R (mit dem Schnittpunkt U auf AB) ein, so wird die Strecke $\overline{RU}$ durch die Schnittpunkte von RP mit AT und AS (P bzw. Q)

gedrittelt, d.h. es gilt $|\overline{RP}| = \frac{1}{6}a$. Aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum N und den Parallelen RQ und BC finden wir

$$\frac{|\overline{RN}|}{|\overline{NB}|} = \frac{|\overline{RP}|}{|\overline{BT}|} = \frac{\frac{1}{6}\cdot a}{\frac{2}{3}\cdot a} = \frac{1}{4}$$

Wegen $|\overline{RN}| + |\overline{NB}| = h$ erhalten wir $|\overline{RN}| = \frac{1}{5}\cdot h$. Aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum M und den Parallelen RQ und BC finden wir außerdem

$$\frac{|\overline{RM}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{BS}|} = \frac{\frac{2}{6}\cdot a}{\frac{1}{3}\cdot a} = 1$$

also $|\overline{RM}| = \frac{1}{2}\cdot h$

Wegen $|\overline{MN}| = |\overline{RM}| - |\overline{RN}|$ erhalten wir $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}\cdot h - \frac{1}{5}\cdot h = \frac{3}{10}\cdot h$. Insgesamt finden wir also:

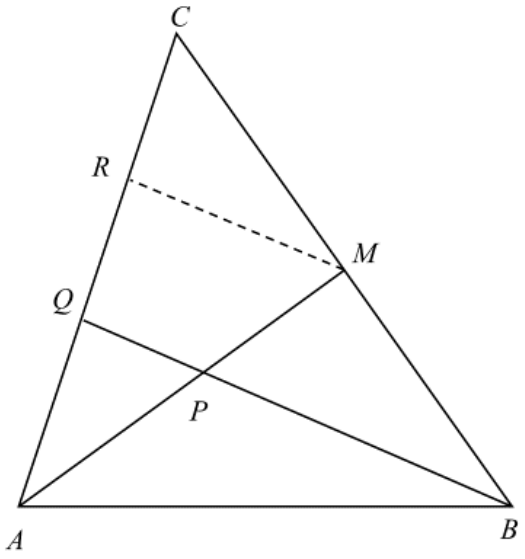
$$A = A_{BCF} - A_{AST} + 2\cdot A_{AMN} = \frac{1}{4}\cdot ah - \frac{1}{6}\cdot ah + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot h\cdot\frac{1}{2}a = \frac{14}{30}\cdot\frac{ah}{2}$$

Die gesuchte Fläche beträgt also $\frac{7}{15}$ der Fläche des Dreiecks ΔABC. ❑

Auf dem ersten Blick sehr ähnlich wurde auch in der 57. MO eine Aufgabe mit Flächenberechnung gestellt. Allerdings erwies sich die Ermittlung der Teilflächen als viel einfacher.

Aufgabe 4.08 - MO570935. Gegeben ist ein Dreieck $A\Delta BC$ mit dem Flächeninhalt $AABC = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und P der Mittelpunkt von $\overline{AM}$. Weiter schneide die Gerade BP die Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt Q.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$.



Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Vierecks ist die Differenz aus dem Flächeninhalt des Dreiecks A_{AMC} und dem Dreieck A_{APG}. Da der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAMC die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔABC ist, genügt es, den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPG zu bestimmen.

Ist *R* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$, dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck ΔQBC und folglich $MR \parallel BQ$. Da P auf der Strecke $\overline{BQ}$ liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck *AMR*, also gilt $|\overline{AQ}| = |\overline{QR}| = |\overline{RC}|$.

Damit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABQ ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔABC, da die Längen der Grundseiten $\overline{AQ}$ und $\overline{AC}$ zur selben Höhe im Verhältnis 1 : 3 stehen. Da P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist zudem der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABP halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABM. Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, ist auch der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABM halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC. Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPQ:

$$A_{APQ} = A_{ABQ} - A_{ABP} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Wir erhalten deshalb für den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$:

$$A_{MCQP} = A_{AMC} - A_{APQ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$ ❑

Werden die zu untersuchende Figuren in einem kartesischen Koordinatensystem angeordnet, können Bestimmungsstücke für den Flächeninhalt oft ohne unmittelbare geometrische Lösungsansätze berechnet werden.

Aufgabe 4.09 – MO611023. In einem Koordinatensystem befindet sich ein Quadrat mit den Eckpunkten $A = (0;\ 0), B = (12;\ 0), C = (12;\ 12)$ und $D = (0; 12)$. Eine Gerade durch B schneidet die Strecke $\overline{CD}$ in dem Punkt $E = (7; 12)$. Auf der Strecke $\overline{BE}$ befindet sich ein Punkt P.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade BE durch die Gleichung $y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$ beschreiben lässt.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE den Flächeninhalt 28 besitzt.
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE gleichschenklig ist.

Lösungshinweise zu Teil a) Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt der Nachweis, dass die Koordinaten von $B = (12, 0)$ und $E = (7, 12)$ die vorgegebene Geradengleichung erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\text{sowohl } 0 = -\frac{12}{5} \cdot 12 + \frac{144}{5} \text{ als auch } 12 = -\frac{12}{5} \cdot 7 + \frac{144}{5}.$$

Lösungshinweise zu Teil b) Betrachten wir im Dreieck ΔDPE die Strecke $\overline{DE}$ als Grundseite mit der Länge 7, muss mit dem vorgegebenen Flächeninhalt der Punkt P den Abstand 8 von der Geraden DE haben und somit die y-Koordinate $12 - 8 = 4$ besitzen. Somit hat das Dreieck ΔABP den Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$ und das Dreieck ΔBCE den von der Lage des Punktes P unabhängigen Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$. Flächensubtraktion liefert das Ergebnis $144 - 28 - 24 - 30 = 62$.

Lösungsvariante: Der Inhalt des Dreiecks ΔAPD lässt sich auch direkt berechnen, wenn wir die Strecke $\overline{AD}$ als Grundseite mit der Länge 12 betrachten und die x-Koordinate von P als Maßzahl für die Höhe verwenden. Durch Einsetzen von $y = 4$ in $y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$ erhalten wir $x = \frac{31}{3}$ und somit $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{31}{3} = 62$.

Lösungshinweise zu Teil c) Wegen des stumpfen Winkels bei E kann die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ΔDPE nur durch $|\overline{DE}| = |\overline{EP}| = 7$ erreicht werden. Nach dem Satz des PYTHAGORAS im Dreieck ΔBEP mit der Hypotenuse $\overline{BE}$ hat die Strecke $\overline{BE}$ die Länge $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ und die Strecke $\overline{BP}$ die Länge $13 - 7 = 6$. Die y-Koordinate von P ergibt sich durch senkrechte Parallelprojektion von BE auf BC und ist deshalb nach Strahlensatz $\frac{6}{13}$ von 12, also $\frac{72}{13}$. Für die x-Koordinate von P gilt dann $\frac{72}{13} = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{144}{5}$, also $x = \frac{126}{13}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD beträgt nun $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{126}{13} = \frac{756}{13}$. ❑

Aufgabe 4.10 – MO591011. Es sei m eine von null verschiedener und ansonsten beliebiger rationaler Zahl. In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m \cdot (x - 5) + 2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der $x - y$ −Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B. Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P = (5, 2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m den Punkt P enthalten.
b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOAB.
c) Nun gelte $m = -0.3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck ΔOAB in die Teildreiecke ΔOPB und ΔOAP. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.
d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl? (Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (so dass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Lösungshinweise zu Teil a) Das Einsetzen der Zahl 5 für x in $y = m(x-5)+2$ liefert unabhängig vom konkreten Wert für m stets $y = m(5-5)+2 = 2$. Damit liegt P mit den Koordinaten $P = (5;2)$ stets auf g.
Lösungshinweise zu Teil b) Für $m = -0.8$ gilt $y = -0.8 \cdot (x-5)+2 = -0.8+6$. Somit hat B als Schnittpunkt von g mit der y-Achse die Koordinaten $B = (0;6)$. Die Strecke $\overline{OB}$ hat damit die Länge 6 cm. Für den Punkt A als Schnittpunkt von g mit der x-Achse muss $0 = -0.8 \cdot x + 6$ gelten, was uns auf $x = 7.5$ führt. Die Strecke $\overline{OA}$ hat damit eine Länge von 7.5 cm. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔOAB beträgt deshalb $A_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7.5 = 22.5$ cm².

Lösungshinweise zu Teil c) Für $m = -0.3$ gilt $y = -0.3 \cdot (x-5)+2 = -0.3x + 3.5$. Wir erhalten damit für den Punkt B die Koordinaten B$= (0;3.5)$ und die Länge $\overline{OB} = 3.5$ cm. Den Wert $y = 0$ erhalten wir für $x = \frac{-3.5}{-0.3} = \frac{35}{3}$. Damit sind für den Punkt A die Koordinaten $A = \left(\frac{35}{3};0\right)$ und die Länge beträgt $|\overline{OA}| = \frac{35}{3}$ cm. Die Höhen über den Grundseiten dieser beiden Dreiecke entsprechen den jeweiligen Koordinaten des Punktes P. Wir finden also $A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot 3.5 \cdot 5 = \frac{35}{4}$ cm² bzw. $A_{OAP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{3} \cdot 2 = \frac{35}{3}$ cm².

Für das gesuchte Verhältnis $A_{OPB}: A_{OPA}$ folgt daraus $\frac{35}{4} : \frac{35}{3} = 3:4$.

Lösungshinweise zu Teil d) Neben dem im Aufgabentext bereits ausgeschlossenen Wert $m = 0$ müssen wir auch $m = -0.4$ ausschließen, weil in diesem Fall die Geradengleichung $y = -0.4 \cdot (x-5)+2$ auf $y = -0.4 \cdot x$ reduziert wird. Damit wird für $x = 0$ auch $y = 0$ und umgekehrt für $y = 0$ auch $x = 0$. Die Punkte A und B fallen somit mit dem Koordinatenursprung O zusammen und die Dreiecke ΔOPB und ΔOAP existieren nicht.

Für $m \neq -0.4$ gilt $y = m \cdot (x-5)+2 = m \cdot x + 2 - 5 \cdot m$. Wir erhalten damit für den Punkt B die Koordinaten $B = (0; 2-5 \cdot m)$ und für die Länge $\overline{OB} = |5 \cdot m - 2|$ cm. Den Wert $y = 0$ erhalten wir für $x = \frac{2-5 \cdot m}{m}$. Somit hat der Punkt A die Koordinaten $A = \left(\frac{2-5 \cdot m}{m};0\right)$, und für die Länge gilt $|\overline{OA}| = \left|\frac{5 \cdot m-2}{m}\right|$ cm. Die Höhen über den Grundseiten dieser beiden Dreiecke entsprechen den jeweiligen Koordinaten des Punktes P. Wir finden also

$$A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot |5 \cdot m - 2| \cdot 5 \text{ cm}^2 \text{ bzw. } A_{OAP} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{5 \cdot m-2}{m}\right| \cdot 2 = \left|\frac{5 \cdot m-2}{m}\right| \text{ cm}^2.$$

Für das Verhältnis $A_{OPB}: A_{OPA}$ folgt daraus $\frac{5}{2} \cdot |5m-2| : \left|\frac{5m-2}{m}\right| = \frac{5}{2}|m|$. Für jedes $m \neq 0$ und $m \neq 0.4$ existiert das Verhältnis und ist für alle rationale Zahlen m ebenfalls rational. ❑

Bei Kenntnis der Koordinaten der Eckpunkte der zu untersuchende Fläche ist die GAUßsche Flächenformel[5] ein geeignetes Hilfsmittel:

Satz. Sind die Eckpunkte eines ebenen n-Ecks in einem Koordinatensystem durch die Punkte $P_i = (x_i; y_i)$ mit $i = 1,2, \dots n$ gegeben, so gilt für den Flächeninhalt:

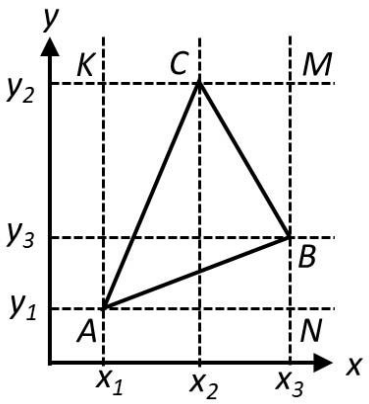
$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})$$

wobei $y_0 = y_n$ und $y_{n+1} = y_1$ gelte.

Wenden wir diese Formel auf Aufgabe MO591011 an, so finden wir die Flächeninhalte

- in Teilaufgabe b) für das Dreieck ΔOAB mit den Eckpunkten
  $O = (x_1; y_1) = (0\,;0), A = (x_2; y_2) = (7.5\,;0), B = (x_3; y_3) = (0\,;6)$:
  $A = \frac{1}{2} \cdot \big(0 \cdot (0-6) + 7.5 \cdot (6-0) + 0 \cdot (0-0)\big) = \frac{1}{2} \cdot 7.5 \cdot 6 = 22.5$
- in Teilaufgabe c) für das Dreieck ΔOAP mit den Eckpunkten
  $O = (x_1; y_1) = (0\,;0), A = (x_2; y_2) = \left(\frac{35}{3}\,;0\right), P = (x_3; y_3) = (5\,;2)$:
  $$A = \frac{1}{2} \cdot \left(0 \cdot (0-2) + \frac{35}{3} \cdot (2-0) + 5 \cdot (0-0)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{3} \cdot 2 = \frac{35}{3}$$
  und für das Dreieck ΔOPB mit den Eckpunkten
  $O = (x_1; y_1) = (0\,;0), P = (x_2; y_2) = (5\,;2), B = (x_3; y_3) = (0\,;3.5)$:
  $A = \frac{1}{2} \cdot \big(0 \cdot (2-3.5) + 5 \cdot (3.5-0) + 0 \cdot (0-2)\big) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3.5 = \frac{35}{4}$

Elementargeometrischer Beweis zur GAUßschen Flächenformel: Wir betrachten ein Dreieck ΔABC und zeichnen das kleinste umschreibende Rechteck $AKMN$, dessen Seiten achsenparallel zum Koordinatensystem verlaufen. Dann erhalten wir den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC als Differenz des Flächeninhaltes des Rechtecks $AKMN$ und der Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ΔAKC, ΔCMB und ΔBNA, also

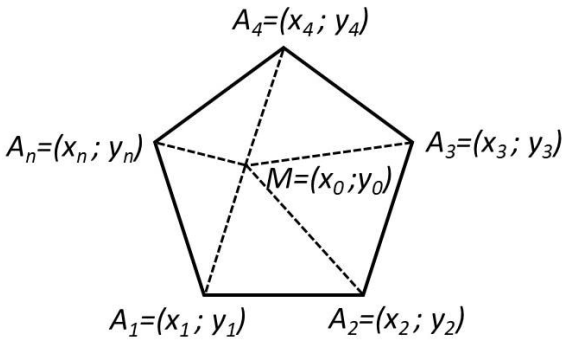


[5] Nach CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855), der dies für das Vermessungswesen zunächst mit Trapezzerlegung formuliert hat.

$$2 \cdot A = 2 \cdot \underbrace{(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}_{A_{AKMN}} -$$
$$\underbrace{(x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)}_{A_{AKC}} - \underbrace{(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_3)}_{A_{CMB}} - \underbrace{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}_{A_{BNA}}$$

Nach Ausmultiplizieren der Produkte und Zusammenfassung der Summanden erhalten wir die genannte Formel. Um den Beweis abzuschließen, muss aber noch diskutiert werden, wie die konkrete Lage des Dreiecks zu berücksichtigen ist. ❑

Ist der Flächeninhalt eines konvexen n-Ecks mit den Eckpunkten $A_i = (x_i\,;y_i)\ (i = 1, 2, \dots\ n)$ zu berechnen, führen wir einen inneren Punkt $M = (x_0\,;y_0)$ ein und zerlegen das n-Eck in n Dreiecke ΔMA_iA_{i+1}. Für jedes dieser Dreiecke können wir die GAUßsche Flächenformel anwenden. Die Summation dieser n Flächeninhalte führt zur allgemeinen Darstellung (wobei für Index $n+1$ der Index 1 und für Index $1-1$ der Index n gesetzt wird):



$$2 \cdot A = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot A_{MA_iA_{i+1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i \cdot (y_{i+1} - y_0) + x_{i+1} \cdot (y_0 - y_i) + x_0 \cdot (y_i - y_{i+1})\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) + y_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)}_{=0} + x_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1})}_{=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1})\big) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} \cdot y_i}_{=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1})\big)$$

❑

Aufgabe 4.11 – MO491036. Im Koordinatensystem bezeichnet man Punkte $(x\,;y)$ mit ganzzahligen Koordinaten x und y als Gitterpunkte. Weiter sei für $n \geq 3$ ein n-Eck gegeben, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Es bezeichne r die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des n-Ecks (die Eckpunkte eingeschlossen), i die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des n-Ecks und F seinen Flächeninhalt.

Die Formel von PICK[6] besagt nun $F = \frac{r}{2} + i - 1$.

a) Es seien x, y positive ganze Zahlen. Beweisen Sie die Formel von PICK für das Rechteck mit den Eckpunkten $(0;\ 0), (x;\ 0), (0;\ y)$ und $(x;\ y)$.
b) Beweisen Sie die Formel von PICK für rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.
c) Beweisen Sie die Formel von PICK für beliebige Dreiecke.

Lösungshinweise zu Teil a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $F = x \cdot y$. Auf dem Rand liegen $r = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ Gitterpunkte, im Inneren liegen $(x-1) \cdot (y-1)$ Punkte. Also finden wir

$$\frac{r}{2} + i - 1 = x + y + (x-1) \cdot (y-1) - 1$$
$$= x + y + xy - x - y + 1 - 1 = xy = F\ .$$

Lösungshinweise zu Teil b) Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen x und y. Der Flächeninhalt beträgt $F = \frac{1}{2}xy$. O.B.d.A. platzieren wir das Koordinatensystem so, dass die Katheten auf den Koordinatenachsen liegen und der Eckpunkt mit dem rechten Winkel mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

Wir zählen nun die Gitterpunkt im Dreieck und auf dessen Rand aus. Auf den Katheten liegen x Gitterpunkte auf der x-Achse, y Gitterpunkte auf der y-Achse und ein Gitterpunkt im Koordinatenursprung. Wir nehmen an, auf dem Inneren der Diagonalen des Rechtecks, dass dem Dreieck umschrieben ist und dessen zwei Seiten mit den Katheten übereinstimmen, seien a Gitterpunkte. Dann liegen auf dem Rand des Dreiecks $r = x + y + a$ Gitterpunkte und im Innern des Dreiecks $i = \frac{(x-1)(y-1)-a}{2}$ Gitterpunkte. Insgesamt finden wir

$$\frac{r}{2} + i - 1 = \frac{x+y+1+a}{2} + \frac{(x-1)(y-1)-a}{2} - 1$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (x + y + a + 1 + xy - x - y + 1 - a) - 1 = \frac{1}{2}xy = F.$$

Lösungshinweise zu Teil c) (skizziert). In Analogie zum Nachweis, dass die Formel von PICK bei Zerlegen eines Rechtecks in zwei Dreiecke korrekt angewandt werden kann, können wir zeigen, dass auch das Zusammenfügen zweier Dreiecke entlang einer gemeinsamen Seite zu einem Dreieck oder Rechteck mit der Formel von PICK korrekt berechnet werden kann. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass Randpunkte nur „halb“ gezählt werden und damit beim Aneinanderfügen entlang einer Seite die scheinbar doppelte Zählung der neuen inneren Punkte aufgehoben wird. Konstruieren wir nun um das beliebige Dreieck ein achsenparalleles Rechteck, so ergibt sich der Flächeninhalt (ähnlich wie bei der GAUßschen Flächenformel) aus Summen und

[6] Erstmalig beschrieben vom österreichischen Mathematiker GEORG ALEXANDER PICK (1859 – 1942)

Differenzen von Flächeninhalten von Rechtecken und Dreiecken. Allerdings sind die möglichen Lagen der Eckpunkte im umschriebenen Rechteck gewissenhaft zu berücksichtigen.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [7]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.
Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[8] (FG) Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu drei Teilnehmenden können Mädchen und Jungen bis 14 Jahre („Jugend forscht junior“[9]) bzw. Jugendliche zwischen 15 und 21 Jahre („Jugend forscht“) starten. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres wird eine maximal 15-seitige Darstellung des Projektes vorgelegt. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmenden Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Standpräsentation und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2021/22	8.527	*FORSCHUNGSFORUM Schleswig-Holstein e.V. Lübeck*

[7] www.jugend-forscht.de
[8] schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.
[9] bislang als „Schüler experimentieren“ bekannt

2022/23	9.386	*Unternehmensverbände im Lande Bremen e. V. Bremen*
2023/24	10.492	*experimenta gGmbH, Heilbronn*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **FG Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch im Jahr 2024 bundesweit mit 866 Teilnehmenden (8.3%) wieder beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft (600 Teilnehmende, 5.7%) und deutlich weniger als zum Beispiel im FG Biologie (2.516 Teilnehmende, 24.0%) oder im FG Technik (2.016 Teilnehmende, 19.2%).

Der Landeswettbewerb Sachsen fand am 23. März 2024 bei DAS Environmental Expert GmbH statt. Zwei weitere Patenunternehmen unterstützten die Veranstaltung: GLOBALFOUNDRIES Dresden und BGH Edelstahlwerke GmbH. Es waren 22 Jugendliche mit 21 Projekten am Start. Dazu hatten sich noch 13 Schülerinnen und Schüler mit sechs Projekten in der Sparte „Jugend forscht junior“ qualifiziert. Das FG Mathematik/Informatik war mit vier Projekten „Jugend forscht“ (19.0%) und zwei Projekten der Jüngeren (33.3%) überdurchschnittlich vertreten.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und oder der außerschulischen Betreuersuche gegeben – aber jede Lehrerin und jeder Lehrer fürs Fach Mathematik ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der sächsischen Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik – auch wenn manche Projekttitel nur wenig über den Inhalt[10] verraten:

Benedix, Alexander (Student): **Integration über sphärische Dreiecke** *2. Platz, Sonderpreis c’t Magazin, Sonderpreis Studienseminar im Kerschensteiner Kolleg des Deutschen Museums in München*	2023
Benedix, Alexander (Student) **Simulation supraleitender Lager**	2024
Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Einsatz effektiverer Transformer-Encoder** *2. Platz, Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik*	2023

[10] ausführliche Beschreibungen zu den Projekten 2024 unter https://www.jugend-forscht-sachsen.de/jugend-forscht/teilnehmer/

Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Geschwindigkeits-optimierung des IMoJIE-Modells** *2. Platz, Sonderpreis c't Magazin, Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2022
Droste, Alexander (Universität Leipzig, vormals Ostwald-Gymn. Leipzig): **Penrose-Parkettierung** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale 2022 (2. Preis)*	2022
Goncharov, Denis (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Modellierung der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Radfahrers** *2. Platz, Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2024
Hertel, Christian (Nexö-Gymn. Dresden): **Echtzeit-Synchronisierung von Audio-Streams** *Sonderpreis „Jugend unternimmt" – Summer School, Sonderpreis futureSAX*	2022
Jaretzki, Lennart (Student) **Geometrischer deep-Learning Ansatz zur Knotentheorie** *2. Platz*	2024
Lowa, Alexander/ Voigtmann, Richard (TU Dresden): **Falschinformationen erkennen mithilfe von KI** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis Staatsministerium für Wirtschaft, Arbeit und Verkehr, futureSAX Sonderpreis*	2023
Neubauer, Hannah (Mosen-Gymn. Oelsnitz/Vogtl.): **Simulation des Covid-19-Pandemieverlaufes** *3. Platz, Sonderpreis Thinkig Safety*	2022
Riedel, Max (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse und Visualisierung von SingleCell-Sequenzierungen** *3. Platz, Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik, Sonderpreis futureSAX*	2024

Im Schuljahr 2023/24 wurde im FG Mathematik/Informatik kein Landessieger gekürt. Damit konnte sich aus Sachsen in diesem Fachgebiet leider kein Teilnehmer fürs Bundesfinale qualifizieren.

Das Bundesfinale des 59. Bundeswettbewerbs richtete die Stiftung Jugend forscht e.V. gemeinsam mit der experimenta gGmbH[11] in Heilbronn vom 30. Mai bis 2. Juni 2024 aus. Insgesamt 175 Finalisten hatten sich mit ihren 107 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 21 Teilnehmende mit 14 Projekten im FG Mathematik/Informatik. Hier errangen ALEXANDER REIMER und MATTEO FRIEDRICH vom Gymnasium Eversten Oldenburg mit ihrem Projekt „Training für lernfähige Materialien – Analyse der Optimierungsverfahren mechanischer neuronaler Netzwerke" den 1. Preis. Der

[11] https://www.experimenta.science/

Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) und dem Sonderpreis der Bundespateninstitution „Einladung zu einem Praktikum im Science Dome der experimenta“ verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre[12] lesen:

> *Hinter mancher KI steckt ein neuronales Netzwerk – eine Software, die der Funktionsweise des menschlichen Gehirns nachempfunden ist. Seit Kurzem experimentiert die Fachwelt jedoch auch mit lernfähigen Netzen, die mechanisch arbeiten, indem etwa viele kleine Massen durch Federn verbunden werden. Faszinierenderweise ist es möglich, diesem Netzwerk durch Anpassen der Federn verschiedene Verhaltensweisen anzutrainieren. Alexander Reimer und Matteo Friedrich wollten herausfinden, wie so ein Training aussehen kann. Dazu simulierten sie ein mechanisches neuronales Netzwerk im Computer, spielten verschiedene Szenarien durch und untersuchten die Details vielversprechender Trainingsansätze. Sie fanden heraus, dass lernfähige Materialien denkbar sind, die sich ihrer Umwelt ganz von selbst anpassen.*

Die Jury überzeugte die Begeisterung und Beharrlichkeit von ALEXANDER REIMER und MATTEO FRIEDRICH, sich in ein hochkomplexes Thema der Informatik einzuarbeiten. Dabei haben sie die theoretischen Grundlagen mechanischer neuronaler Netze tief durchdrungen und daraus Lösungen für hochrelevante Anwendungen entwickelt. Ihre Arbeit ist äußerst innovativ, brillant umgesetzt und eindrucksvoll visualisiert (Auszug aus der Laudatio).

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[13].
Zweiter Cursus

Abschnitt XVIII
Das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten

§ 276.

Der binomische Lehrsatz

[12] https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2023/preistraegerinnen-und-preistraeger.html

[13] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Im Original sind Variablen und Gleichungen bereits in „gerader“ Schrift gedruckt.

Die nte Potenz des Binoms (x + a), wenn n eine ganze positive Zahl ist, wird in entwickelter Form durch folgende nach Potenzen von x geordnete Reihe dargestellt:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot r}x^{n-r}a^r + \cdots + a^n.$$

Beweis: Setzt man in der Entwicklung des Produkts n binomische Faktoren des vor. §, also in

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n) = x^n + C^1(a_n)x^{n-1}$$
$$+C^2(a_n)x^{n-2} + \cdots + C^r(a_n)x^{n-r} + \cdots + C^n(a_n),$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n,$$

so wird aus dem Produkte links $(x+a)^n$, rechts aber ist:

$$C^1(a_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = C(n)\cdot a = \frac{n}{1}a;$$
$$C^2(a_n) = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots = C^2(n)\cdot a^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2;$$
$$C^3(a_n) = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \cdots = C^3(n)\cdot a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3;$$
$$\vdots$$
$$C^r(a_n) = C^r(n)\cdot a^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot r}a^r;$$
$$\vdots$$
$$C^n(a_n) = C^n(n)\cdot a^n = 1\cdot a^n.$$

Folglich ist:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot r}x^{n-r}a^r + \cdots + a^n.$$

Über diese Binomialreihe ist folgendes zu bemerken:

1. Für x ist dieselbe fallend und für a steigend geordnet. Die Exponenten von x und a in jedem Gliede ergänzen sich zu n. Die Reihe hat daher stets (n+1) Glieder.
2. Die Coeffizienten der Glieder, d. s. Binomialcoeffizienten, sind die Combinationszahlen der einzelnen Klassen von n Elementen ohne Wiederholung. Betrachtet man das Anfangsglied x^n als das 0te, so ist sein Coeffizient $C^0(n) = 1$, der Coeffizient des rten Gliedes $C^r(n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot r}$, der Coeffizient des letzten oder nten $= C^n(n) = 1$. – Für die ersten bestimmten Werte von n liefert das Pascalsche Dreieck § 272 in seinen Horizontalreihen die Binomialcoeffizienten. Z.B.

$$(x+a)^7 = x^7 + 7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 + 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7xa^6 + a^7.$$

3. Da nach § 271 $C^r(n) = C^{n-r}(n)$, so sind die Binomialcoeffizienten paarweise in gleichen Abstand von den Enden der Reihe einander gleich. Ist n eine gerade Zahl, so steht in der Mitte der Reihe ein Glied mit dem größten Coeffizienten einzeln, ist n ungerade, so steht in der Mitte ein Paar von Gliedern mit gleichen Coeffizienten. Bemerkung: Die Binomialcoeffizienten werden auch abgekürzt bezeichnet vom 1ten ab durch:

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \dots, \binom{n}{r},$$

und dann gelesen: „n tief 1“, „n tief 2“, „n tief r“, so daß der binomische Lehrsatz geschrieben werden kann:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{r} x^{n-r}a^r + \cdots + \binom{n}{n} a^n.$$

4. Wenn a negativ ist, so sind die Glieder der Binomialreihe abwechselnd positiv und negativ:

$$(x-a)^n = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 - \binom{n}{3} x^{n-3}a^3 + \cdots.$$

Der binomische Lehrsatz bildet das Schema, vermöge dessen man jedes Binom mit einem ganzen positiven Exponenten potenzieren, und jedes beliebige Glied, dessen Index gegeben ist, finden kann, ohne die ganze Entwicklung zu machen.

Bekannte mathematische Sätze

Der Binomialkoeffizient. Es seinen k und n natürlichen Zahlen mit $k \leq n$. Dann nennt man $\binom{n}{k} \coloneqq \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$ den Binomialkoeffizient *„n über k“*. Die Ganzzahligkeit des Koeffizienten folgt unmittelbar aus folgendem

Satz. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$.

Beweis: Es sei M eine n-elementige Menge und $T \subseteq M$ eine k-elementige Teilmenge von M. Wir betrachten die Menge aller bijektiven Abbildungen $\{1,2,\dots,n\} \to M$, die zusätzlich $\{1,2,\dots,k\}$ auf T (und damit) $\{k+1,\dots,n\}$ auf $M \setminus T$ abbilden. Weil es $k!$ bijektive Abbildung der k-elementigen Menge nach T und $(n-k)!$ bijektive Abbildungen der $(n-k)$-elementigen Menge nach $M \setminus T$ gibt, sind es insgesamt $k! \cdot (n-k)!$ solche Abbildungen. Insgesamt gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach M. Daher ist Insbesondere $k! \cdot (n-k)!$ ein Teiler von $n!$ und es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M.

Bemerkung: Den Namen erhielten diese Zahlen, da sie als Koeffizienten beim Potenzieren eines Binoms auftreten (siehe binomischer Lehrsatz unter „In alten Mathe-Büchern geblättert“). Die englische Übersetzung zu "n über k" lautet "n $choose$ k" mit der Taschenrechner-Abkürzung nCr.

Folgerung: **Aufgabe MO631045.** Beweisen Sie: Ist n eine positive ganze Zahl, so ist

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$$

ganzzahlig.

Lösungshinweise: Wir schreiben zunächst die Fakultät im Zähler aus.

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot \ldots \cdot (n^2-n+1) \cdot \ldots \cdot n^2}{n^{n+1} \cdot \big((n-1)!\big)^{n+1}}$$

Wir schreiben den Zähler unter Verwendung von

$$(rn+1) \cdot (rn+2) \cdot \cdots \cdot (rn+n-1) = \frac{\big((r+1)n-1\big)!}{(rn)!}$$

um und erhalten:

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{\left((n-1)! \cdot n \cdot \frac{(2n-1)!}{(n)!} \cdot 2n \cdot \frac{(3n-1)!}{(2n)!} \cdot 3n \cdot \ldots \cdot \frac{(n^2-1)!}{((n-1)n)!} \cdot n^2\right)}{n^{n+1} \cdot \big((n-1)!\big)^{n+1}}$$

Wir können nun $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \cdots \cdot (n-1)n \cdot n^2$ als $n^{n+1} \cdot (n-1)!$ zusammenfassen und kürzen damit mit den entsprechenden Faktoren im Nenner. Danach lassen sich die Terme im Zähler und im Nenner so umordnen, dass Binomialkoeffizienten erkennbar werden:

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n-1)! \cdot (2n-1)! \cdot (3n-1)! \cdot \ldots \cdot \big((n-1)n\big)! \cdot (n^2-1)!}{\big((n-1)!\big)^n \cdot n! \cdot (2n)! \cdot (3n)! \cdot \cdots \cdot \big((n-1)n\big)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n)!} \cdot \frac{(3n-1)!}{(n-1)!\,(2n)!} \cdots \cdot \frac{\big((n-1)n\big)!}{(n-1)!\,((n-2)n)!} \cdot \frac{(n \cdot n-1)!}{((n-1)n)!}$$

$$= \binom{n-1}{n-1} \cdot \binom{2n-1}{n-1} \cdot \binom{3n-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \binom{(n-1)n-1}{n-1} \cdot \binom{n \cdot n-1}{n-1}$$

Als Produkt von (ganzzahligen) Binomialkoeffizienten ist der zu untersuchende Ausdruck auch ganzzahlig. ❑

Termine

Online-Veranstaltung „Jugend forscht für Einsteigende“ vermittelt das wichtigste Rüstzeug, das beim Start in den Wettbewerb hilft, und gibt Gelegenheit, sich mit Vertreterinnen und Vertretern aus dem Jugend-forscht-Netzwerk auszutauschen.
11. September 2024, 17:00 bis 18:00 Uhr, Veranstalter: Stiftung Jugend forscht e.V. Hamburg. Anmeldung bis 11.09.2024 16:00 Uhr unter:
https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/jugend-forscht-fuer-einsteigende-september-2024.html

Spotlight Mathe – Einblicke in en Bundeswettbewerb Mathematik (online-Seminar), 18. September .2024, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung:
https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10160

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade für Grundschulen (online-Seminar), 19. September 2024, 16:00 bis 17:00 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung:
https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10161

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade (online-Seminar), 19. September 2024, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung:
https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10162

Wissenschaft LIVE! Die Online-Veranstaltungsreihe der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e. V. und der Stiftung Jugend forscht e. V., 19. September 2024 von 15:30 bis 16:45 Uhr zum Thema „Laser und Attosekundenphysik“ mit ALEXANDER WEIGEL, Max-Planck-Institut für Quantenoptik (Garching bei München). Informationen und Anmeldung bis 19.09.2024 unter
https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-laser-und-attosekundenphysik.html

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 6/2024

Aufgabe T–3 (Teamwettbewerb der 10. MeMO, 2016, Vöcklabruck/Österreich). Ein Landstück hat die Form eines 8×8-Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd- beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus 64 kleineren quadratischen 1×1-Grundstücken. Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem 1×1-Grundstück. Wir sagen,

ein Haus *steht im Schatten*, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen.

Was ist die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht?

Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten.

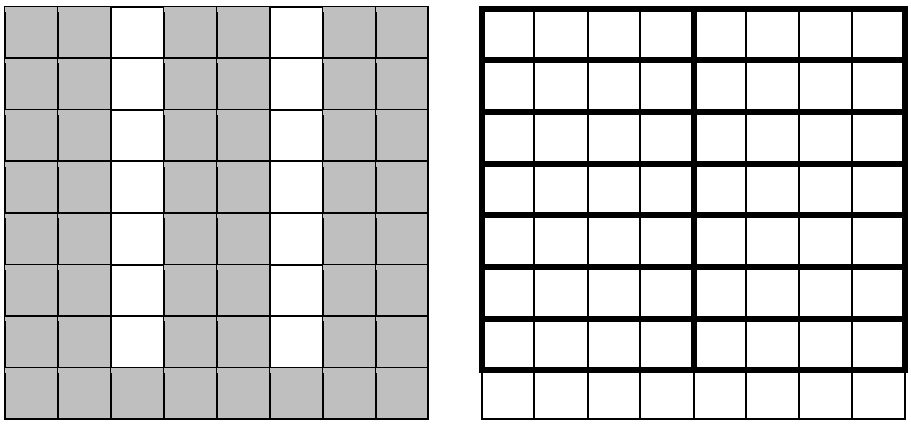
Lösungshinweise: Die maximale Anzahl von Häusern mit der geforderten Eigenschaft ist 50. Für den Nachweis stellen wir uns das Landstück wie ein Schachbrett vor. Wir färben ein Feld mit einem Haus schwarz und ohne Haus weiß. Wie üblich bezeichnen wir mit $(i; j)$ das Feld in der i-ten Zeile und j-ten Spalte (wobei die erste Zeile die nördlichste und die erste Spalte die westlichste ist).

Wir stellen fest, dass eine optimale Konfiguration erreicht werden kann, indem wir alle Felder entlang der Ost-, Süd- und Westgrenze einfärben. Nehmen wir nämlich an, dass es eine optimale Konfiguration gibt, bei der eines dieser Felder, zum Beispiel $(i\,;1)$, weiß bleibt. Da wir eine optimale Konfiguration haben, kann dieses Feld nicht schwarz gefärbt werden. Das bedeutet, dass wir durch das Einfärben von $(i\,;1)$, das Feld $(i\,;2)$ blockieren würden. Mit anderen Worten, wir wissen, dass die Felder $(i\,;2)$, $(i\,;3)$ und $(i+1\,;2)$ in dieser optimalen Konfiguration alle schwarz gefärbt sind.

Wir sehen jedoch, dass wir $(i\,;1)$ anstelle von $(i\,;2)$ einfärben können, indem wir die gleiche Anzahl schwarzer Felder beibehalten und $(i\,;1)$ einfärben, ohne die anderen Felder zu verändern. Wir können dieselbe Überlegung auf jede der Felder $(1\,;1)$ … $(8\,;1)$, $(8\,;1)$ … $(8\,;8)$ und in ähnlicher Weise auf $(8\,;8)$ … $(1\,;8)$ anwenden und damit zeigen, dass es eine optimale Konfiguration gibt, bei der alle Felder entlang der Grenzen Ost, Süd und West schwarz gefärbt sind. Da diese Zellen eingefärbt sind, verbleibt ein 7×6-Bereich des Spielbretts.

Wir können nun zeigen, dass nicht mehr als 28 Felder in diesem Bereich schwarz gefärbt sein können. Um 28 zu erhalten, muss die durchschnittliche Anzahl der schwarzen Felder pro Reihe 4 betragen. Wenn jedoch eine Reihe sechs schwarze Felder enthält, kann die nächste Reihe keine schwarzen Felder enthalten, da ein solches schwarzes Feld das Feld unmittelbar nördlich von ihr blockieren würde. Wenn eine Reihe 5 schwarze Felder enthält, kann die nächsttiefere Reihe höchstens 3 schwarze Felder enthalten (und zwar in dem Feld unmittelbar unter dem einzelnen weißen Feld und den beiden benachbarten Feldern). Dies zeigt, dass die durchschnittliche Anzahl schwarzer Felder pro Reihe in unserem 7×6-Bereich nicht größer als 4 sein kann. Daraus ergibt sich eine Obergrenze für die Gesamtzahl der schwarzen Felder: die 22 Randfelder plus 28 Felder in der verbleibenden 7×6-Fläche, d. h. insgesamt 50 Felder. Ein Beispiel, das zeigt, dass 50 tatsächlich erreicht werden

können, ist das folgende. Wir färben die Spalten 1, 2, 4, 5, 7, 8 und die Reihe 8 schwarz und lassen die übrigen Felder weiß. Diese Färbung erfüllt eindeutig die Bedingungen und enthält genau 50 schwarze Felder, womit der Beweis erbracht ist.



Wenn wir auf jedem dunkelgrauen Feld in der linken Abbildung ein Haus bauen, sehen wir, dass 50 Häuser entsprechend gebaut werden können.

Lösungsvariante: Haben wir die Lösung gemäß der linken Abbildung erraten, können wir beweisen, dass nicht mehr als 50 Häuser gebaut werden können, oder, äquivalent dazu, dass mindestens 14 Grundstücke leer bleiben. Betrachten wir die 14 4×1-Rechtecke in der rechten Abbildung, die durch ihre dicke Umrandung gekennzeichnet sind.

Wir ordnen jedem dieser 14 Rechtecke eindeutig ein leeres Grundstück zu, und zwar wie folgt

- wenn das Rechteck mindestens eine leere Fläche enthält, ordnen wir ihm die östlichste dieser Flächen zu;
- wenn das Rechteck keine leeren Parzellen enthält, ordnen wir ihm die westlichste leere Parzelle des unmittelbar südlich davon gelegenen Rechtecks zu.

Um zu sehen, dass diese Zuordnung machbar ist, ist zu beachten, dass, wenn ein Rechteck keine leeren Grundstücke enthält, seine beiden zentralen Häuser von der Sonneneinstrahlung von Osten und Westen her blockiert sind. Daher müssen die beiden zentralen Grundstücke des Rechtecks direkt südlich davon leer sein, was zeigt, dass wir das westlichste leere Grundstück tatsächlich dem ursprünglichen Rechteck zuordnen können, während das östlichste leere Grundstück nicht zugeordnet wird. Die obige Zuordnung ist also machbar und zeigt, dass es mindestens 14 leere Parzellen gibt, womit der Beweis abgeschlossen ist. ❑

Monatsaufgabe 09/2024[14].

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, n Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre $2n$ Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau k andere Sehnen schneidet, wobei:

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Bemerkung: Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 04.2 – Flächenberechnung 3
Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“ 14
In alten Mathe-Büchern geblättert 17
Bekannte mathematische Sätze 19
Termine 21
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 6/2024 21
Monatsaufgabe 09/2024 24

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[15]	Nr.	Thema	Aufgabe
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

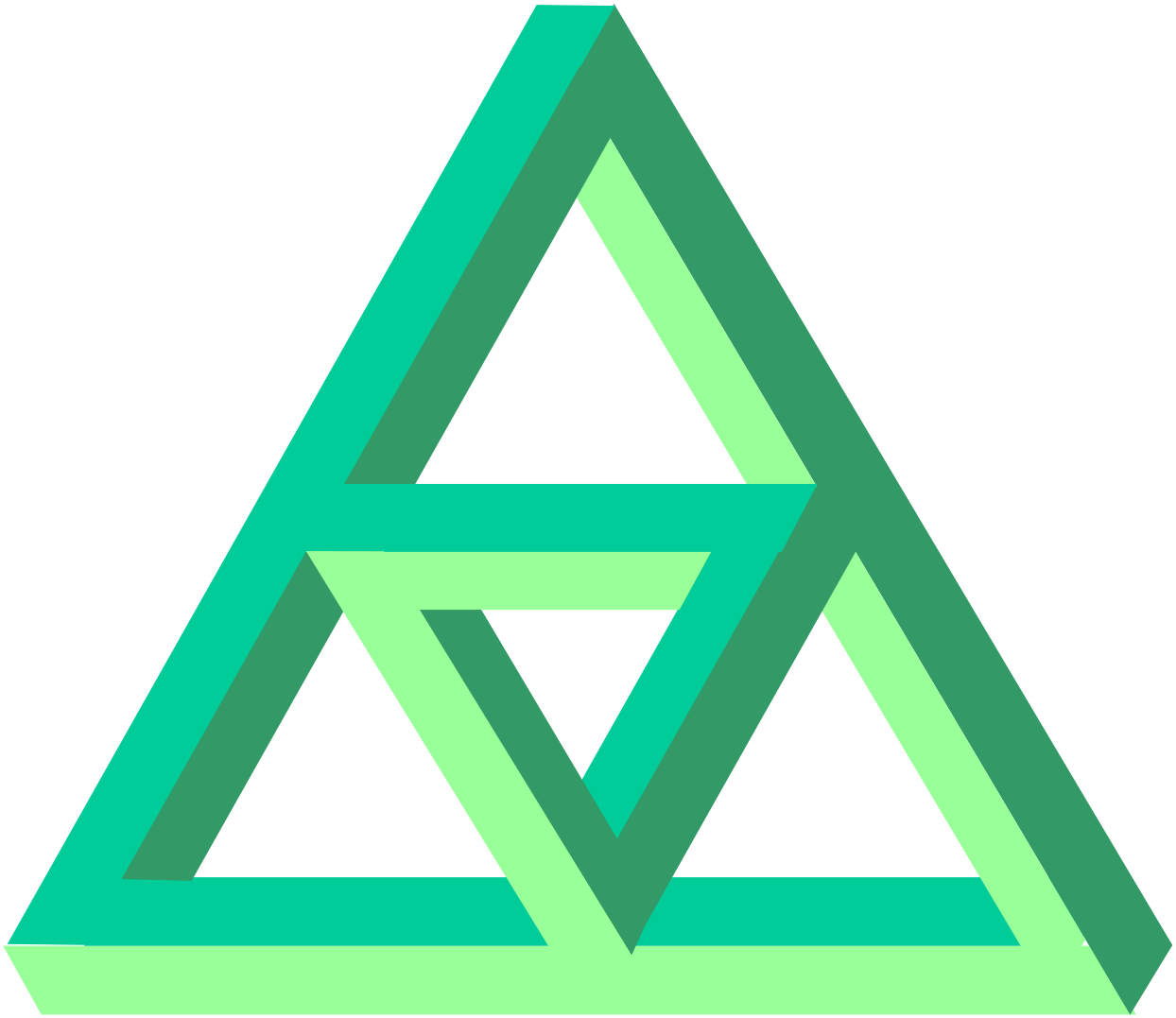
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.10.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.
[15] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2024 (Oktober 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir schließen die Diskussion zum Thema Flächenberechnung ab. Dabei betrachten wir Aufgaben mit ähnlichen Fragestellungen, entweder durch Differenzierung der Schwierigkeiten zwischen den Olympiadeklassen 9 und 10 oder durch aufsteigende Schwierigkeiten in den MO-Runden und Jahrgängen. In beiden Fällen zeigt sich, wie eine intensive Nachbereitung von Aufgaben erfolgreich geführt werden kann.

Passend zum Thema blicken wir im historischen Teil in die antike Mathematik zurück und zeigen Beispiele zur Quadratur von (geometrischen) Möndchen. Neben dem interessanten Einblick in die Leistungen der Mathematiker vor über 2000 Jahren finden wir hier Übungsaufgaben für Flächenberechnungen.

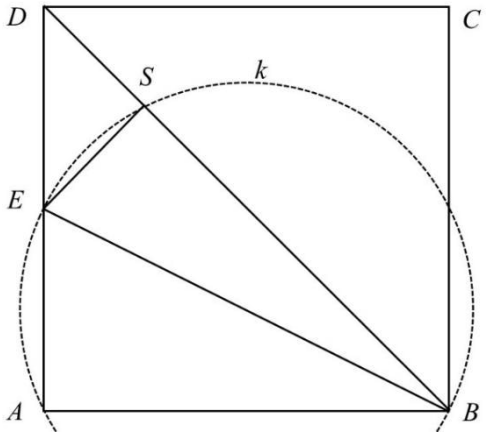
Wir informieren über die 18. Mitteleuropäische Mathematikolympiade (MeMO), bei der das deutsche Team im Mannschaftswettbewerb einen hervorragenden 2. Platz erreichte! Wir verbinden damit die Vorfreude auf die nächste MeMO[3], die vom 25. bis 31. August 2025 in der Kulturhauptstadt Europas Chemnitz stattfinden wird.

Wir vertiefen die Lösungsdiskussion der aktuellen **Aufgabe 1-5A** des diesjährigen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik und beschäftigen uns mit dem Verhältnis von arithmetischen und geometrischen Mittelwerten.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1
[3] https://www.memo2025.de/

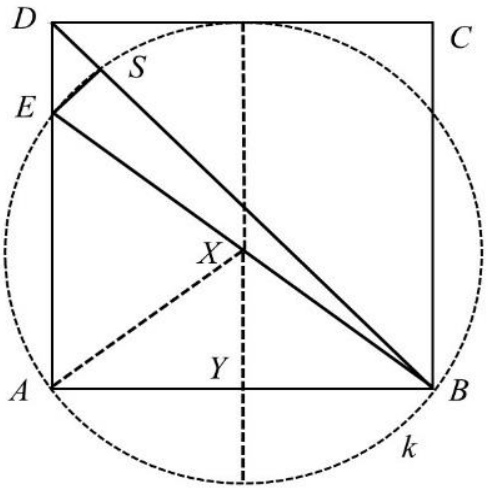
Thema 04.3 – Flächenberechnung

Vorbemerkungen: Ein wesentliches Motiv für eine intensive Nachbereitung aktueller MO-Aufgaben sollte darin bestehen, Lösungsstrategien für Aufgaben zu verstehen und anwenden zu können. Wir können nicht vorhersagen, ob und wann eine Aufgabenidee (in abgewandelter Form) erneut erscheint. Aber weil wir diesen Effekt beobachten können, lohnt es sich stets. Zur Landesrunde der 60. MO fanden wir wieder „verwandte“ Aufgabenstellungen:



Aufgabe 4.12 – MO601023. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Es sei E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises k. Der Kreis k schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in S.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔEBS.



Aufgabe 4.13 – MO600932. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Ferner sei E ein Punkt auf der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ sei ein Durchmesser eines Kreises k. Der Kreis k schneide die Diagonale $\overline{BD}$ in einem von B verschiedenen Punkt S und berühre die Quadratseite $\overline{CD}$.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AE}$ und den Flächeninhalt des Dreiecks ΔEBS.

Lösungshinweise: Die Ähnlichkeit des Aufgabentextes und die der zugehörigen Skizzen lässt vermuten, dass auch der Lösungsansatz ähnlich sein wird. Tatsächlich werden wir die neue Aufgabe leicht lösen können, wenn wir die Länge der Strecke $\overline{ED}$ ermitteln (was durch die Aufgabenstellung explizit gefordert wird). Dann können wir die Argumentation aus der Aufgabe MO601032[4] übernehmen: Das Dreieck ΔDES ist rechtwinklig-gleichschenklig und das Dreieck ΔEBS ist wegen des THALESsatzes rechtwinklig. Somit können wie die Längen $\overline{ES}$ und $\overline{BS}$ explizit berechnen.

Verwenden wir im rechtwinkligen Dreieck ΔAYX mit der Hypotenuse $\overline{AX} = r$ und der Kathete $\overline{XY} = x$ den Satz des PYTHAGORAS, so gilt $r^2 - x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Wegen $r + x = 1$ (Länge der Quadratseite) folgt daraus unmittelbar

[4] Siehe Heft 03/2021

$$r^2 - x^2 = (r - x) \cdot (r + x) = r - x = \frac{1}{4}.$$

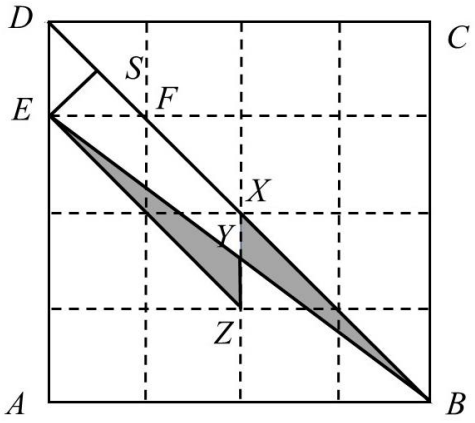
Addieren wir auf beiden Seiten der rechten Gleichung r, so finden wir (wieder unter Verwendung von $r + x = 1$) $2r = \frac{5}{4}$. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS auf das rechtwinklige Dreieck ΔABE mit der Hypotenuse $\overline{BE} = 2r$ und der Kathete $|AB| = 1$ an, so erhalten wir

$$|AE| = \sqrt{4r^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$

Aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ΔDES erhalten wir $|ES| = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ und $|BS| = |BD| - |SD| = |BD| - |ES| = \sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{7}{8}\sqrt{2}$. Somit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔBSE:

$$A_{BSE} = \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |ES| = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{7}{64}$$ ❑

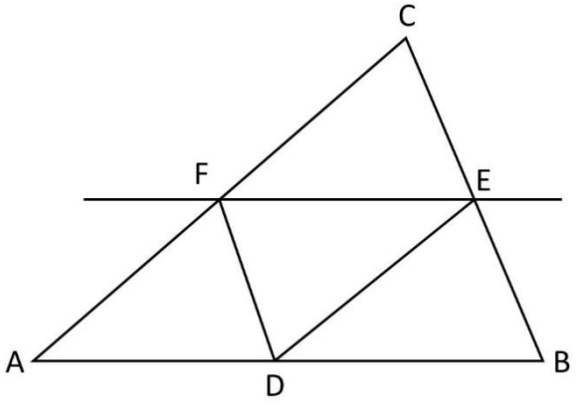
Lösungsvariante: Aber auch der Lösungsansatz über eine Flächenzerlegung gelingt, wenn das Zwischenergebnis $|ED| = \frac{1}{4}$ bekannt ist. Dafür bietet sich ein 4 x 4 – Gitter an, in dem insgesamt 64 Teilflächen der Größe des Dreiecks ΔEFS enthalten sind. Es fällt uns nun leicht, die Flächengleichheit der beiden grau hinterlegten Dreiecke ΔEZY und ΔBXY nachzuweisen. Dann überdeckt das Trapez $EZXS$ insgesamt 7 solche Teilflächen – flächengleich zum Dreieck ΔBSE. Also beträgt die gesuchte Fläche $\frac{7}{64}$. ❑



Solche Aufgaben-"Verwandschaften" finden wir in der MO-Geschichte immer wieder, manchmal auch Jahre auseinander:

Aufgabe 4.14 – MO370946: Von einer Figur (s. Skizze) sei bekannt:

- Die Gerade durch E und F ist parallel zu der Geraden durch A und B.
- Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔFEC beträgt 40 cm², die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ΔADF und ΔDBE beträgt 150 cm².



Stellen Sie fest, ob aus diesen Angaben der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF eindeutig folgt und berechnen Sie gegebenenfalls diesen Flächeninhalt.

Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF sei x, seine Höhe bezeichnen wir mit h_1. Weil die Gerade durch A und B parallel zur Geraden durch E und F ist, haben die Dreiecke ΔADF, ΔDBE und ΔDEF die gleiche Höhe, also ebenfalls h_1. Dann gilt aufgrund der Flächenformel eines Dreiecks ΔXYZ mit der Grundseite $\overline{XY}$ für die zugehörige Höhe $h_{XY} = \frac{A_{XYZ}}{2 \cdot |\overline{XY}|}$. Dies wenden wir nun an:

$$h_1 = \frac{A_{DEF}}{2 \cdot |\overline{EF}|} = \frac{x}{2 \cdot |\overline{FE}|} \,, h_1 = \frac{A_{ADF} + A_{DBE}}{2 \cdot |\overline{AB}|} = \frac{150}{2 \cdot |\overline{AB}|} .$$

Damit finden wir

$$x : 150 = |\overline{EF}| : |\overline{AB}| .$$

Zudem gilt $A_{FEC} + A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{EF}| \cdot \big((h - h_1) + h_1\big) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{EF}| \cdot h$, wobei h die Höhe auf $\overline{AB}$ im Dreieck ΔABC bezeichnet. Damit gilt auch

$$(A_{FEC} + A_{DEF}) : (A_{ABC}) = |EF| : |AB| = (x + 40) : (x + 40 + 150) ,$$

also

$$x : 150 = (x + 40) : (x + 190)$$

bzw.

$$x^2 + 40 \cdot x - 6000 = 0 .$$

Diese quadratische Gleichung ist gleichbedeutend zu $(x + 100) \cdot (x - 60) = 0$. Somit finden wir $A_{DEF} = 60$ cm² (diesen Wert erhalten wir natürlich auch aus der quadratischen Gleichung unter Benutzung der Lösungsformel). ❑

Die entsprechende Aufgabe für die Klassenstufe 10 ist eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe, wurde aber ohne Skizze gestellt. Damit wird der Zusammenhang beider Aufgaben erst deutlich, wenn eine passende Skizze wie in MO370946 angefertigt wird.

Aufgabe 4.15 – MO371046. Axel zeichnet ein Dreieck ΔABC und eine zu AB parallele Gerade, die $\overline{AC}$ in F und $\overline{BC}$ in E schneidet, auf $\overline{AB}$ legt er einen Punkt D fest. Er beginnt, die Flächeninhalte der Dreiecke ΔADF, ΔDBE, ΔDEF und ΔFEC auszumessen. Ingrid behauptet, dass sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF eindeutig durch Berechnung ermitteln könne, wenn ihr die Flächeninhalte der Dreiecke ΔADF, ΔDBE und ΔFEC bekannt seien. Wie könnte Ingrid vorgehen? Welche Begründung müsste sie für ihr Vorgehen angeben?

Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF sei x, seine Höhe bezeichnen wir mit h_1. Weil die Gerade durch A und B parallel zur Geraden durch E und F ist, haben die Dreiecke ΔADF, ΔDBE und ΔDEF die gleiche Höhe, also ebenfalls h_1.

Dann gilt aufgrund der Flächenformel eines Dreiecks ΔXYZ mit der Grundseite $\overline{XY}$ für die zugehörige Höhe $h_{XY} = \frac{A_{XYZ}}{2 \cdot |\overline{XY}|}$. Dies wenden wir nun an:

$$h_1 = \frac{A_{DEF}}{2 \cdot |\overline{EF}|} = \frac{x}{2 \cdot |\overline{FE}|}\ , h_1 = \frac{A_{ADF} + A_{DBE}}{2 \cdot |\overline{AB}|}\ .$$

Damit finden wir $x : (A_{ADF} + A_{DBE}) = |\overline{EF}| : |\overline{AB}|$.

Zudem gilt $A_{FEC} + x = \frac{1}{2} \cdot |\overline{EF}| \cdot \big((h - h_1) + h_1\big) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{EF}| \cdot h$, wobei h die Höhe auf $\overline{AB}$ im Dreieck ΔABC bezeichnet. Damit gilt auch

$$(A_{FEC} + x) : (A_{ABC}) = |\overline{EF}| : |\overline{AB}| = x : (A_{ADF} + A_{DBE})\ .$$

Wir stellen diese Gleichung nach x um, wobei wir $A_{ABC} = x + A_{ADF} + A_{DBE} + A_{FEC}$ verwenden:

$$(A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot A_{FEC} + (A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot x = x \cdot (x + A_{ADF} + A_{DBE} + A_{FEC}),$$

also

$$x^2 + A_{FEC} \cdot x - (A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot A_{FEC} = 0\ .$$

Diese quadratische Gleichung ist lösbar, da die Diskriminante

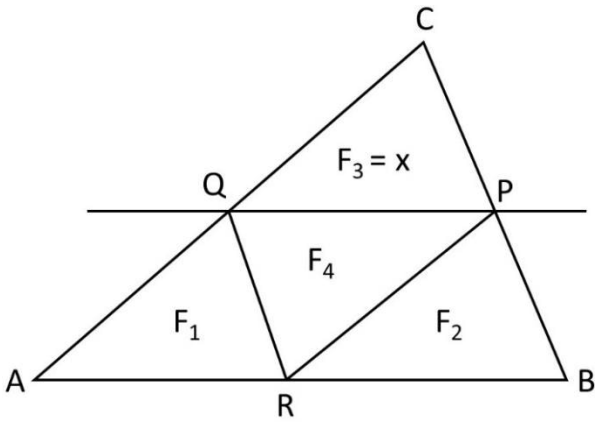
$$D = \left(\frac{A_{FEC}}{2}\right)^2 + (A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot A_{FEC}$$

stets positiv ist. Da zudem $\sqrt{D} > \frac{A_{FEC}}{2}$ gilt, existiert nach dem Ergebnis gemäß Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{A_{FEC}}{2} \pm \sqrt{D}$ genau eine positive Lösung der quadratischen Gleichung, die die Aufgabenstellung beantwortet. ❑

Hinweis: Setzen wir die konkreten Werte aus Aufgabe MO370946 ein, so stimmt die quadratische Gleichung mit dem obigen Ergebnis überein.

Aufgabe 4.16 – MO530945. Im Dreieck ΔABC sind im Inneren der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt P, im Inneren der Seite $\overline{AC}$ ein Punkt Q und im Inneren der Seite $\overline{AB}$ ein Punkt R so gegeben, dass die Gerade PQ parallel zur Geraden AB verläuft. Weiter führen wir die Bezeichnungen $F(ARQ) = F_1$, $F(BPR) = F_2$ und $F(CQP) = F_3 = x$ für die Flächeninhalte dieser bezeichneten Teildreiecke ein.

Bestimmen Sie eine Formel für $F = F(ABC)$ in Abhängigkeit von x, wenn bekannt ist, dass $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ gilt.



Lösungshinweise: Fertigen wir die zur Aufgabe passende Skizze an, erkennen wir den Zusammenhang zur vorigen Aufgabe. Natürlich lässt sich diese Aufgabe unabhängig von dem speziellen Vorgänger lösen, doch wenn wir die Gleichung

$$x : 150 = (x + 40) : (x + 190)$$

auf die nun gegebenen Größen anwenden, erhalten wir

$$F_4 : (F_1 + F_2) = (F_4 + F_3) : (F_4 + F_1 + F_2 + F_3) .$$

Dies Gleichung vereinfacht sich, wenn wir die Voraussetzung $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ einsetzen:

$$F_4 : (6 \cdot F_3) = (F_4 + F_3) : (F_4 + 7 \cdot F_3) .$$

Substituieren wir zur Vereinfachung der Schreibweise $F_4 = y$, so können wir die Gleichung zu $y^2 + x \cdot y - 6 \cdot x^2 = 0$ umformen. Entweder aus der Lösungsformel für die quadratische Gleichung für die Variable y oder aus der Zerlegung in Linearfaktoren $(y - 2 \cdot x) \cdot (y + 3 \cdot x) = 0$ finden wir $y = 2 \cdot x$. Dann gilt aber

$$F(ABC) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 6 \cdot F_3 + F_3 + 2 \cdot F_3 = 9 \cdot F_3 = 9 \cdot x \qquad \square$$

Zwischenzeitlich kehrte dieser Aufgabentyp etwas abgewandelt bereits zurück. Auch hier geht es um die Zerlegung der Dreiecksfläche in vier Teilflächen:

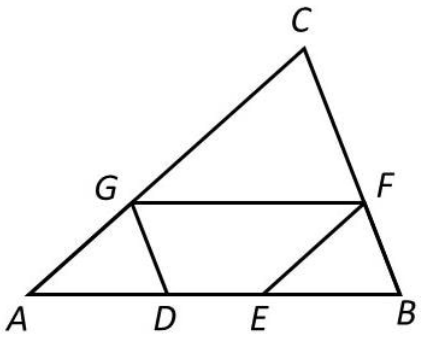
Aufgabe 4.17 – MO470933. Gegeben sind ein Dreieck ΔABC sowie eine Parallele g zur Seite $\overline{AB}$, welche die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ im Inneren in den Punkten G bzw. F schneidet. Weiter schneide die Parallele zu $\overline{AC}$ durch F die Seite $\overline{AB}$ in E und die Parallele zu $\overline{BC}$ durch G die Seite $\overline{AB}$ in D. Dabei möge g so gewählt sein, dass D auf der Strecke $\overline{AE}$ liegt.

a) Wie muss man g wählen, damit die Dreiecke ΔADG, ΔBFE und ΔCGF flächengleich sind?
b) Wie muss man g wählen, damit die Fläche des Vierecks $DEFG$ maximal wird?

Lösungshinweise – allgemeine Vorbemerkungen: Die Dreiecke ΔADG, ΔEBF und ΔGFC sind sämtlich ähnlich zum Dreieck ΔABC (Stufenwinkel an parallelen Geraden). Die Dreiecke ΔADG und ΔEBF sind sogar kongruent, da sie eine gemeinsame Höhe

haben. Bezeichnen wir mit f den Streckfaktor $|\overline{AG}| : |\overline{AC}|$, so gilt für die Flächeninhalte

$$F(ADG) = F(EBF) = f^2 \cdot F(ABC)$$
$$F(GFC) = (1-f)^2 \cdot F(ABC)$$



Lösungshinweise zu Teil a): Die Dreiecke sind also genau für $f = \frac{1}{2}$ flächengleich. Dies ist genau dann der Fall, wenn g die Mittellinie ist. Dann ist $D = E$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

Lösungshinweise zu Teil b): Für den Flächeninhalt des Vierecks erhalten wir nach dem Subtraktionsprinzip

$$F(DEFG) = F(ABC) - F(ADG) - F(EBF) - F(GFC)$$
$$= (1 - 2f^2 - (1-f)^2) \cdot F(ABC) = (2f - 3f^2) \cdot F(ABC)\,.$$

Dieser Ausdruck wird genau dann maximal, wenn $(2f - 3f^2)$ seinen kleinsten Wert annimmt, was wegen

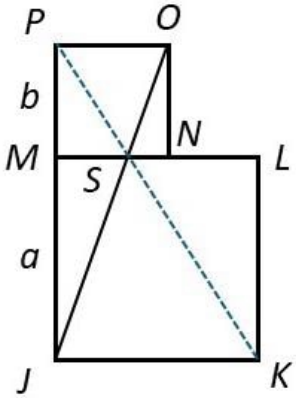
$$3f^2 - 2f = 3 \cdot \left(f - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$$

genau für $f = \frac{1}{3}$ der Fall ist. In diesem Fall gilt $F(DEFG) = \frac{1}{3} \cdot F(ABC)$ und g ist die Parallele durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Hier wird die Seite $\overline{AB}$ durch D und E in drei gleichlange Strecken zerlegt. ❑

Abschließend zum Thema 4 vergleichen wir das folgende Aufgaben-Paar:

Aufgabe 4.18 – MO580923. Auf ein Quadrat $JKLM$ mit der Seitenlänge a wird ein kleineres Quadrat $MNOP$ mit der Seitenlänge b aufgesetzt, wobei N auf der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es gelte $|LN| = 16$ cm und $|JP| = 80$ cm. Die Strecken $\overline{JO}$ und $\overline{MN}$ schneiden sich in einem Punkt S.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen a und b.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔJSP.
c) Zeigen Sie, dass S auf der Strecke $\overline{KP}$ liegt.



Lösungshinweise Teil a): Es gilt a > b. Die Summe der Seitenlängen ist $a + b = 80$ cm, die Differenz $a - b = 16$ cm. Die Seitenlängen betragen deshalb $a = \frac{((a+b)+(a-b))}{2} = 48$ cm und $b = \frac{((a+b)-(a-b))}{2} = 32$ cm.

Lösungshinweise Teil b): Da S auf der P gegenüberliegenden Seite des Dreiecks ΔJOP liegt, zerlegt die Strecke $\overline{PS}$ dieses Dreieck in die beiden Teildreiecke ΔJSP und ΔPSO.

Die Fläche des Dreiecks ΔJSP erhalten wir daher, wenn wir vom Flächeninhalt des Dreiecks ΔJOP den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPSO subtrahieren.

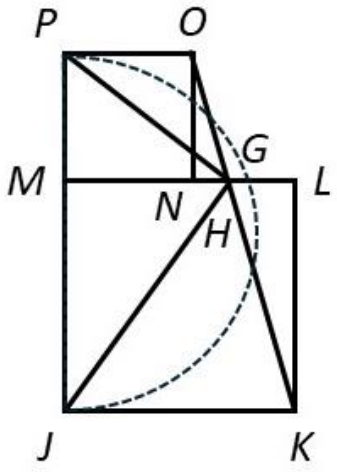
- Das Dreieck ΔJOP hat den Flächeninhalt $A_{JOP} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (a+b) = 16 \cdot 80\ \text{cm}^2 = 1280\ \text{cm}^2$.
- Das Dreieck ΔSOP hat den Flächeninhalt $A_{SOP} = \frac{1}{2} \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 32\ \text{cm}^2 = 512\ \text{cm}^2$.
- Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔJSP insgesamt $A_{JSP} = 1280\ \text{cm}^2 - 512\ \text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2$.

Lösungshinweise zu Teil c): Analog zu Teilaufgabe b) erhalten wir: Die Strecken $\overline{KP}$ und $\overline{ML}$ schneiden sich im Punkt T und es gilt:

$$A_{JTP} = A_{JKP} - A_{JKT} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\ ,$$

also $A_{JTP} = A_{JSP}$. Da die Dreiecke ΔJTP und ΔJSP in der Seite $\overline{JP}$ übereinstimmen und S und T auf $\overline{ML}$ liegen, muss auch für die zugehörigen Dreieckshöhen $\overline{MT} = \overline{MS}$ und damit $S = T$ gelten. ❑

Aufgabe – MO580946. Auf ein Quadrat $JKLM$ wird ein kleineres Quadrat $MNOP$ so außen aufgesetzt, dass der Punkt N im Inneren der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es sei H der Schnittpunkt der Geraden KO und ML. Zeigen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle PHJ$ stumpf ist.



Lösungshinweise: Es seien $a = |\overline{LM}|, b = |\overline{NM}|$ und G der Schnittpunkt des THALESkreises über $\overline{JP}$ mit dem Strahl $\overrightarrow{ML}$. Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ΔJGP mit der Hypotenuse $\overline{JP}$ und zugehöriger Höhe $\overline{GM}$ ist

$$|\overline{GM}| = \sqrt{|\overline{JM}| \cdot |\overline{MP}|} = \sqrt{a \cdot b}$$

das geometrische Mittel der beiden Zahlen a und b.

Da O und K auf verschiedenen Seiten der Geraden ML liegen, befindet sich H auf der Strecke $\overline{OK}$. Da diese zwischen den Parallelen ON und KL liegt, befindet sich H auch auf der Strecke $\overline{NL}$. Insbesondere gilt $|\overline{HL}| = |\overline{LN}| - |\overline{HN}|$.

Wegen $a > b$ ist $|\overline{LN}| = a - b$, und nach dem Strahlensatz mit den Geraden OK und ML sowie dem Zentrum H gilt

$$\frac{|\overline{HN}|}{|\overline{NO}|} = \frac{|\overline{HL}|}{|\overline{LK}|} = \frac{|\overline{LN}| - |\overline{HN}|}{|\overline{LK}|}\ ,$$ also $|\overline{HN}| \cdot (|\overline{LK}| + |\overline{NO}|) = |\overline{NO}| \cdot |\overline{LN}|$.

Damit erhalten wir $|\overline{HN}| = \frac{b(a-b)}{a+b}$. Deswegen ist

$$|\overline{HM}| = |\overline{HN}| + |\overline{NM}| = \frac{b \cdot (a-b)}{a+b} + b = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$$

das harmonische Mittel der beiden Zahlen a und b.

Nach der bekannten Ungleichung zwischen geometrischen und harmonischen Mittelwerten zweier ungleicher positiver Zahlen gilt also $|\overline{GM}| > |\overline{HM}|$. Damit liegt H im Inneren des THALESkreises über $\overline{JP}$, und daher ist der Winkel $\sphericalangle PHJ$ stumpf.

Um diese (als bekannt voraussetzbare) Folgerung näher zu begründen, stellen wir fest, dass H im Inneren der Strecke $\overline{GM}$ liegt und deshalb gilt

$$|\sphericalangle JPH| = |\sphericalangle MPH| < |\sphericalangle MPG| = |\sphericalangle JPG|$$

sowie $|\sphericalangle HJP| = |\sphericalangle HJM| < |\sphericalangle GJM| = |\sphericalangle GJP|$.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck folgt hieraus $|\sphericalangle PHJ| > |\sphericalangle PGJ| = 90°$. ❑

Über ein Verhältnis von arithmetischen und geometrischen Mittelwerten

Aufgabe KZM 2024/25, 1-5A. Es sind $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ der arithmetische Mittel wert und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ der geometrische Mittelwert der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$. Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

Lösungshinweise zu Teil a): Es genügt, für $n = 3$ ein konkretes Beispiel anzugeben, das die Behauptung widerlegt. Für $x_1 = 27$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 1$ finden wir

- für den arithmetischen Mittelwert $a_3 = \frac{27+8+1}{3} = \frac{36}{3} = 12$ und
- für den geometrischen Mittelwert $g_3 = \sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$.

Folglich ist $\frac{a_3}{g_3} = \frac{12}{6} = 2$ eine ganze Zahl, jedoch gilt nicht die Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3$. Also ist die Behauptung im Fall $n = 3$ im Allgemeinen falsch. ❑

Lösungshinweise zu Teil b): Setzen wir $m = 81 = 3^4$, so ist der zu untersuchende Quotient eine ganze Zahl, denn es gilt für $x_1 = 81$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$

- für den arithmetischen Mittelwert $a_4 = \frac{81+1+1+1}{4} = \frac{84}{4} = 21$ und
- für den geometrischen Mittelwert $g_4 = \sqrt[4]{81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt[4]{3^4} = 3$,

also ist der Quotient $\frac{a_4}{g_4} = \frac{21}{3} = 7$ eine natürliche Zahl. ❑

Ergänzung: Setzen wir allgemein für eine natürliche Zahl m voraus, dass das Verhältnis aus arithmetischem und geometrischem Mittelwert, also $v = \frac{m+1+1+1}{4 \cdot \sqrt[4]{m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}}$, eine ganze Zahl ist, so muss auch $\sqrt[4]{m}$ rational (und damit ganzzahlig) sein. Sei deshalb $m = y^4$ mit einer natürlichen Zahl y. Dann gilt:

$$v = \frac{y^4 + 3}{4y} = \frac{1}{4} \cdot \left(y^3 + \frac{3}{y}\right).$$

Weil v laut Voraussetzung eine ganze Zahl ist, ist der Zähler $y^4 + 3$ durch 4 teilbar. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, muss $y = 1$ oder $y = 3$ sein. Folglich ist $m = 81$ die einzige nichttriviale Lösung für diese Aufgabenstellung.

Lösungshinweise zu Teil c): Es sei $a = \frac{x_1+x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v. Da a rational ist, ist folglich auch g rational und als Wurzel aus einem Produkt natürlicher Zahlen sogar ganzzahlig. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2a \cdot x + g^2 = 0.$$

Die Diskriminante D dieser quadratischen Gleichung

$$D = a^2 - g^2 = (v \cdot g)^2 - g^2 = g^2 \cdot (v^2 - 1)$$

ist aber nur dann eine Quadratzahl, wenn der Klammerausdruck eine Quadratzahl ist. Dies kann aber nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, da für größere Werte von v der Abstand zweier Quadratzahlen größer als 1 ist. Folglich ist wegen $D = 0$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Auch ohne die etwas trickreiche Anwendung des Satzes von VIETA gelingt der Nachweis, wenn wir $x_2 = x_1 + 2 \cdot z$ mit einer geeignet gewählten Zahl z festlegen. Dann bedeutet die Aussage, dass aus einem ganzzahligen Quotienten aus arithmetischen und geometrischen Mittelwerten $z = 0$ folgt.

Ausgehend von $a = \frac{x_1+x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v folgt

$$x_1 + z = v \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_1 + 2z)}$$

also $\quad x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z + z^2 = v^2 \cdot (x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z)$

Betrachten wir die letzte Gleichung als Funktion der Variablen z, so können wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach z auflösen:

$$z^2 + 2 \cdot (1 - v^2) \cdot x_1 \cdot z + (1 - v^2) \cdot x_1^2 = 0$$
$$z_{1/2} = -(1 - v^2) \cdot x_1 \pm \sqrt{(1 - v^2)^2 \cdot x_1^2 - (1 - v^2) \cdot x_1^2}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann zu $x_1^2 \cdot v^2 \cdot (v^2 - 1)$ zusammengefasst werden. Wie oben bereits diskutiert, kann dies nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, was aber *z* = 0 bedeutet.

Die Aufgabe wurde aus der Aufgabe 3 der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1975 abgeleitet[5]. Ursprünglich lautete sie

„Man beweise S_2 und widerlege S_n mindestens für alle geraden Zahlen $n > 2$".

Den Beweis für $n = 2$ haben wir oben in der Teilaufgabe c) bereits erbracht.

In Teilaufgabe a) wurde gezeigt, dass die Aussage S_3 im Allgemeinen falsch ist. Es genügt bei solcher Fragestellung, ein geeignetes Beispiel „vorzurechnen".

In Teilaufgabe b) wurde gezeigt, dass auch die Aussage S_4 im Allgemeinen falsch ist. Wir zeigen nun, dass die Konstruktionsidee für dieses Gegenbeispiel auf alle geraden Zahlen $n > 2$ übertragbar ist.

Wir setzen $x_1 = (n-1)^n$ und $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$. Wir erhalten

$$a_n = \frac{(n-1)^n + (n-1) \cdot 1}{n} = (n-1) \cdot \frac{(n-1)^{n-1} + 1}{n},$$

$$g_n = \sqrt[n]{(n-1)^n \cdot 1^{n-1}} = n - 1,$$

d.h. es gilt $\frac{a_n}{g_n} = \frac{(n-1)^{n-1}+1}{n}$. Um nachzuweisen, dass $\frac{a_n}{g_n}$ für gerade Zahlen ganzzahlig ist, verwenden wir die bekannte Formel für reelle Zahlen a, b und ungerade Zahlen m

$$a^m + b^m = (a+b) \cdot (a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \qquad (\#),$$

mit der wir mit den Festlegungen $m = n - 1$, $a = n - 1$ und $b = 1$ erhalten, dass $(n-1)^{n-1} + 1^{n-1}$ durch $(n-1) + 1 = n$ teilbar ist.

[5] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1975 (2. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

Die Aufgabenformulierung „mindestens für gerade Zahlen $n > 2$“ lässt vermuten, dass der Nachweis für ungerade Zahlen n besonders anspruchsvoll sein wird (und für eine vollständige Lösungsdarstellung im Wettbewerb nicht erforderlich war).

Für Primzahlen $p > 5$ zeigt sich, dass das p-Tupel mit

$$x_1 = (p-2)^{p-1},\ x_2 = (p-2)\cdot\left(\tfrac{p-1}{2}\right)^p \text{ und } x_3 = x_4 = \cdots = x_p = 1$$

die Aussage S_p widerlegt. (Für die Angabe dieses Tupel ist keine Beschreibung einer Herleitung erforderlich.) Wir erhalten tatsächlich

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{p}\cdot\left((p-2)^{p-1} + (p-2)\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^p + (p-2)\cdot 1\right) \\ &= \frac{p-2}{p}\cdot\left((p-2)^{p-2} + \left(\frac{p-1}{2}\right)^p + 1\right), \end{aligned}$$

$$g_p = \sqrt[p]{(p-2)^{p-1}\cdot(p-2)\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^p\cdot 1^{p-2}} = (p-2)\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $S_p = \frac{(p-2)^{p-2}+\left(\frac{p-1}{2}\right)^p+1}{p\cdot\frac{p-1}{2}}$ für alle $p > 3$ eine ganze Zahl ist.

Mit Anwendung der Gleichung (#) mit den Festlegungen $m = p-2$, $a = p-2$ und $b = 1$ ist $(p-2)^{p-2} + 1^{p-2}$ durch $(p-2)+1 = p-1$ und damit erst recht durch $\frac{p-1}{2}$ teilbar. Damit ist der Zähler des Quotienten durch $\frac{p-1}{2}$ teilbar.

Multiplizieren wir diesen Zähler Z mit 2^p, so können wir dessen Teilbarkeit durch p wie folgt nachweisen:

$$2^p\cdot Z = 2^p(p-2)^{p-2} + (p-1)^p + 2^p = 2^p(up - 2^{p-2}) + vp - 1 + 2^p,$$

wobei die ganzzahligen Faktoren u und v aus der jeweiligen Zusammenfassung aller Glieder mit dem Faktor p nach Anwendungen der binomischen Formel resultieren. Wir setzen die Umformung fort und erhalten

$$\begin{aligned} 2^p\cdot Z &= p\cdot(2^p\cdot u + v) - 2^{2p-2} + 2\cdot 2^{p-1} - 1 \\ &= p\cdot(2^p\cdot u + v) - (2^{p-1}-1)^2\,. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$2^{p-1} - 1 = \frac{1}{2}\left((1+1)^p - 2\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i} + 1 - 2\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}.$$

Da die verwendeten Binomialkoeffizienten durch p teilbar sind, ist auch $2^{p-1}-1$ und damit $2^p\cdot Z$ und deshalb auch Z durch p teilbar. Insgesamt ist der Zähler also durch $p\cdot\frac{p-1}{2}$ teilbar, d.h. $\frac{a_p}{g_p}$ ist ganzzahlig und damit S_p widerlegt.

Für alle ungeraden Zahlen $n > 1$, die keine Primzahlen sind, existiert eine Primzahl $p > 2$ und eine ungerade Zahl m mit $n = m \cdot p$. Für p haben wir gezeigt, dass es ein p-Tupel $x_1, x_2, \dots, x_p$ aus nicht lauter gleichen Zahlen gibt, für die $\frac{a_p}{g_p}$ ganzzahlig ist. Betrachten wir das $m \cdot p$-Tupel

$$\underbrace{x_1}_{m-mal}\ ,\ \underbrace{x_2}_{m-mal}\ ,\dots,\ \underbrace{x_p}_{m-mal}\ ,$$

so finden wir $a_n = a_{mp} = a_p$ und $g_n = g_{mp} = g_p$ und damit ist auch $\frac{a_n}{g_n} = \frac{a_p}{g_p}$ ganzzahlig, obwohl das $m \cdot p$-Tupel aus nicht lauter gleichen Zahlen besteht. Dies widerlegt die Aussage S_n. ❑

Die Idee der Vervielfachung der Tupel lässt sich auch für eine rekursive Konstruktion nutzen. Wir betrachten dazu ein m-Tupel $x_1, x_2, \dots, x_m$ mit arithmetischem Mittelwert a_x und geometrischem Mittelwert g_x sowie ein n-Tupel $y_1, y_2, \dots, y_n$ mit arithmetischem Mittelwert a_y und geometrischem Mittelwert g_y. Sind diese Mittelwerte jeweils gleich, gilt also $a_x = a_y = a$ und $g_x = g_y = g$, dann hat auch das $(m+n)$-Tupel, bestehend aus $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$, den arithmetischen Mittelwert $a_{xy} = a$ und den geometrischen Mittelwert $g_{xy} = g$.

$$a_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{m+n} = \frac{m \cdot a_x + n \cdot a_y}{m+n} = \frac{(m+n) \cdot a}{m+n} = a\ .$$

$$g_{xy} = \sqrt[m+n]{\prod_{i=1}^{m} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i} = \sqrt[m+n]{g_x^m \cdot g_y^n} = \sqrt[m+n]{g^{m+n}} = g\ .$$

Wenn es uns nun gelingt, einige Tupel mit gleichem arithmetischem Mittelwert sowie gleichem geometrischem Mittelwert zu finden, die die dazu passende zu untersuchende Aussage widerlegen, so können wir daraus weitere Tupel mit gleichen Eigenschaften konstruieren[6]. Eine Beschreibung der Herleitung der (zweifellos schwierig zu findenden) Beispiele ist dafür nicht erforderlich.

S_n	Tupel	a_n	g_n
S_3	27, 8, 1	$\frac{27+8+1}{3} = \frac{36}{3} = 12$	$\sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1} = 6$
S_5	27,24,6,2,1	$\frac{27+24+6+2+1}{5} = \frac{60}{5} = 12$	$\sqrt[5]{27 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1} = 6$
S_7	36,18,18,6,4,1,1	$\frac{36+18+18+6+4+1+1}{7} = \frac{84}{7} = 12$	$\sqrt[7]{36 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1} = 6$

(a) Mit der Widerlegung von S_3 sind somit auch $S_{3+3}, S_{3+2\cdot 3}, \dots, S_{3+k\cdot 3}$ widerlegt $(k = 1,2,3, \dots)$.

[6] Siehe Beitrag „Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion“, Heft 06/2022.

(b) Mit der Widerlegung von S_5 sind somit auch $S_{5+3}, S_{5+2\cdot3}, \dots, S_{5+k\cdot3}$ widerlegt $(k = 1,2,3, \dots)$.
(c) Mit der Widerlegung von S_7 sind somit auch $S_{7+3}, S_{7+2\cdot3}, \dots, S_{7+k\cdot3}$ widerlegt $(k = 1,2,3, \dots)$.

Wir erkennen, dass S_4 bei diesen Ergebnissen noch nicht erfasst ist. Wir haben aber oben in Teilaufgabe b) bereits gezeigt, dass das 4-Tupel (81, 1, 1, 1) die betreffende Aussage widerlegt. Wir prüfen noch, dass mit dem Konstruktionsprinzip tatsächlich alle Zahlen $n > 2$ erfasst werden.

- Ist $n > 5$ eine durch 3 teilbare Zahl, dann lässt sie sich mit dem Konstruktionsschritt (a) erfassen.
- Lässt $n > 6$ bei Division durch 3 den Rest 1, dann gibt es eine Zahl k mit $n = 3k + 1 = 7 + 3(k - 2)$. Somit kann dieses n mit dem Konstruktionsschritt (c) erfasst werden.
- Lässt $n > 4$ bei Division durch 3 den Rest 2, dann gibt es eine Zahl k mit $n = 3k + 2 = 5 + 3(k - 1)$. Somit kann dieses n mit dem Konstruktionsschritt (b) erfasst werden.
- Zusammen mit den gesondert überprüften Fällen $n = 3$ und $n = 4$ werden also alle natürlichen Zahlen $n > 2$ erfasst.

Auch wenn es für den Beweis nicht erforderlich ist, wollen wir noch zeigen, dass mit den Konstruktionsschritten (a) bis (c) die Darstellung der Zahl n eindeutig bestimmt ist. Nehmen wir für einen indirekten Beweis an, es gäbe Zahlen $j_1, j_2 \in \{3; 5; 7\}$ und natürliche Zahlen $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ mit

$$n = j_1 + 3 \cdot k_1 = j_2 + 3 \cdot k_2 \,.$$

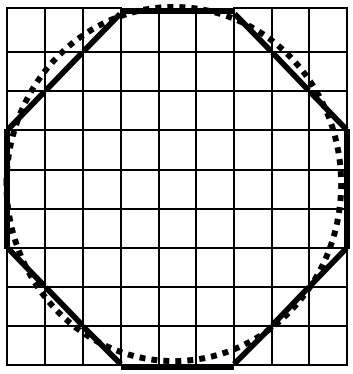
Dann gilt offenbar $j_1 - j_2 = 3 \cdot (k_2 - k_1)$. Im Fall $k_1 \neq k_2$ wäre die linke Seite dieser Gleichung ungleich 0 und durch 3 teilbar. Es ist aber nicht möglich, zwei Elemente aus $\{3; 5; 7\}$ so auszuwählen, dass sie diese Eigenschaften haben. Also gilt $k_1 = k_2$ und somit auch $j_1 = j_2$, d.h. die Darstellung für n ist eindeutig.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Quadratur des Kreises gehört zu den klassischen Problemen der Geometrie: Man konstruiere mit Zirkel und Lineal aus einem gegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat. Über Jahrtausende versuchten Mathematiker, aber auch Laien, nach einer Lösung. Jedoch erst im Jahre 1882 wurde vom deutschen Mathematiker FERDINAND VON LINDEMANN[7] bewiesen, dass die Kreiszahl π transzendent und somit die Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal unmöglich ist. Es sind viele Näherungskonstruktionen[8] für die Quadratur bekannt. Die Beschäftigung mit deren

[7] geb. 12. April 1852 in Hannover; gest. 6. März 1939 in München
[8] Siehe beispielsweise https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratur_des_Kreises

Approximationsgüte ist eine interessante (leichte) Übung zur Berechnung von Dreiecksflächen. Durch Vergleich der Kreis- und Quadratflächen kann der dabei verwendete Näherungswert für π angegeben werden.



In einer der ältesten bekannten Quadratur-Konstruktion aus dem *Papyrus Rind*[9] wird der Kreisdurchmesser in neun gleichgroße Teile ($d = 9$) geteilt, so dass die Kreisfläche mit $A_{Kreis} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2 \approx 63.617$ angegeben werden kann. Nun konstruierte man als Näherung ein Achteck in das 9×9-Feld (s. Abbildung). An jeder Ecke wurde also eine Fläche von 4.5 Kästchen abgeschnitten. Damit hat das Achteck die Fläche von $A_{Achteck} = 9^2 - 4 \cdot 4.5 = 63$. Dies entspricht ein Näherungswert für die Kreiszahl von $\pi = \frac{A_{Achteck}}{\frac{1}{4} \cdot 9^2} \approx 3.111$ (ungefähr 99% des tatsächlichen Wertes!).

Während man nach Möglichkeiten der Quadratur des Kreises suchte, wurden auch für andere krummlinig begrenzte Flächen die vergleichbare Fragestellung gestellt. Mit den Möndchen des HIPPOKRATES, die dem griechischen Mathematiker HIPPOKRATES VON CHIOS (um 450 v. Chr.) zugeschrieben werden, konnte man bereits im antiken Griechenland nachweisen, dass solche Flächenstücke durch rationale Zahlen berechnet werden können.

In

Dietmar Herrmann

Die antike Mathematik
Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus

Springer-Verlag GmbH Berlin, (2. Auflage) 2020.

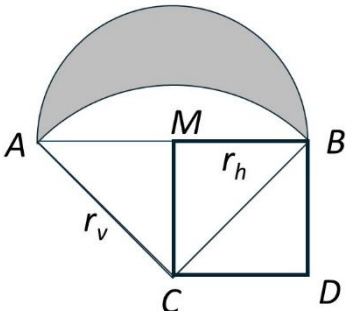
Kapitel 5 – Hippokrates von Chios (Seiten 69 – 76)

werden vier Konstruktionsmöglichkeiten[10] angegeben, die eine Quadratur mit Zirkel und Lineal ermöglichen. Aufgrund der speziellen Maße dieser Konstruktionen bieten diese Untersuchungen (jedoch anders als ursprünglich beabsichtigt) keinen Ansatz zur Lösung des eigentlichen Problems zwischen Kreis und Quadrat.

[9] altägyptische, auf Papyrus verfasste Abhandlung zu verschiedenen mathematischen Themen, (um 1550 v. Chr.)

[10] Die Werke des HIPPOKRATES VON CHIOS sind nicht überliefert. Jedoch werden die nachfolgenden Konstruktionen ihm zugeschrieben, da in späteren Schriften auf ihn Bezug genommen wird.

Konstruktion 1: (nach ALEXANDER VON APHRODISIAS[11]) Über der Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ΔABC wird (außerhalb des Dreiecks) ein Halbkreis gezeichnet (THALESkreis). Die Spitze S des Dreiecks ist der Mittelpunkt eines Viertelkreises.



Es gilt: Die Fläche zwischen Halb- und Viertelkreis wird als Möndchen bezeichnet. Die Fläche des Möndchens entspricht der Fläche des Quadrates $MCDB$.

Beweis: Laut Konstruktion gilt für die Radien des Halbkreises r_h und des Viertelkreises r_v der Zusammenhang $r_v = r_h \cdot \sqrt{2}$.

Weiterhin lesen wir für die Flächeninhalte aus der Skizze ab:

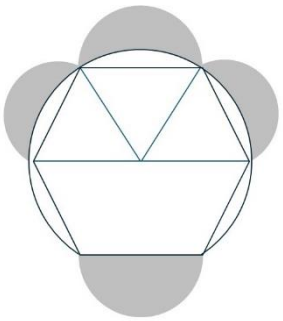
$$A_{Möndchen} + A_{Viertelkreis} = A_{Halbkreis} + A_{ABC} \,,$$

d.h.,

$$A_{Möndchen} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_h^2 + \frac{1}{2} \cdot r_v^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_v^2 \,,$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_h^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r_h^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 \cdot r_h^2 = r_h^2 \,.$$

Die Quadratur des Möndchens ist gelungen! ❑

Konstruktion 2: Ein gleichschenkliges Trapez ist gegeben als Hälfte eines regulären Sechsecks mit der Seitenlänge a. Über den drei gleichlangen Seiten des Trapezes werden Halbkreise konstruiert, die zusammen mit dem Umkreis des Sechsecks drei Möndchen bilden.
Es gilt: Die Flächensumme der drei Möndchen zusammen mit dem Halbkreis über dem Umkreisradius ist flächengleich zum Trapez.



Beweis: Für den gesuchten Flächeninhalt lesen wir aus der Skizze ab:

$$A_{Möndchen} = A_{Halbkreis} + A_{Dreieck} - A_{Sechstelkreis}$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{24} \cdot \pi \cdot a^2 \,.$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt A

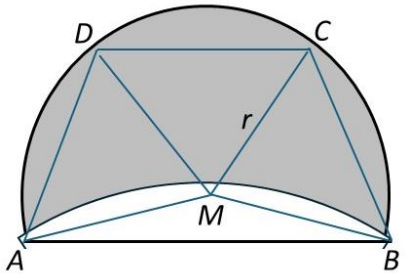
$$A = 3 \cdot A_{Möndchen} + A_{Halbkreis}$$

[11] 2. Jh. n. Chr.

$$= \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2 + \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,.$$

Die betrachtete Fläche ist somit mit rationalen Zahlen darstellbar. ❑

Nun können wir mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten $\frac{3}{2} \cdot a$ und $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$ die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrates konstruieren: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}$.



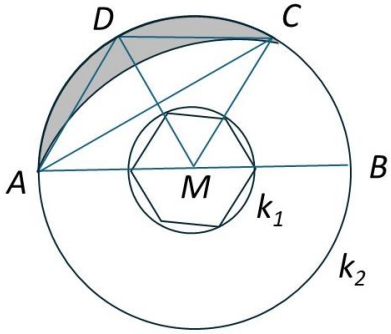
Konstruktion 3: (nach EUDEMOS VON RHODOS[12]) Ein Trapez $ABCD$ mit drei gleichlangen Seiten $|\overline{BC}| = a$, $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ sowie der Grundseite $\overline{AB}$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| \cdot \sqrt{3}$ ist gegeben. Dieses Trapez ist ein Sehnenviereck, weil $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle DCB| = 180°$ aufgrund der Parallelen AB und CD und deshalb auch $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ADC| = 180°$. Deshalb existiert ein Umkreis um dieses Trapez, der nun konstruiert wird. Zudem wird der zum Kreisbogen $\widehat{AD}$ ähnlichen Kreisbogen über $\widehat{AB}$ konstruiert.

Es gilt: Der Flächeninhalt des Möndchens ist so groß wie der Flächeninhalt des Trapezes.

Beweis: Die Ähnlichkeit der Kreisbögen überträgt sich auf deren Flächeninhalte, d.h. es gilt $A_{\widehat{AB}} = 3 \cdot A_{\widehat{AD}}$. Damit finden wir (ohne die Trapezfläche konkret auszurechnen)

$$A_{Möndchen} = A_{Trapez} + 3 \cdot A_{\widehat{AD}} - A_{\widehat{AB}} = A_{Trapez}\,.$$

❑



Konstruktion 4: Wir zeichnen ein reguläres Sechseck und seinen Umkreis k_1 mit Mittelpunkt M. Nun konstruieren wir um M einen zu k_1 konzentrischen Kreis k_2. Die Radien sollen sich dabei wie $1 : \sqrt{6}$ verhalten. Von M aus zeichnen wir die drei Geraden durch benachbarte Eckpunkte des Sechsecks, deren Schnittpunkte mit der Kreislinie von k_2 mit A, D bzw. C bezeichnet werden. Schließlich sei der Kreisbogen über AC äquivalent zum Kreisbogen auf k_2 über AD.

Es gilt: Die Flächensumme des Möndchens und des Kreises k_1 ist gleich der Flächensumme des Dreiecks ΔACD und des von k_1 umschriebenen Sechsecks.

Beweis: Da $\overline{AC}$ gleich der doppelten Höhe im gleichseitigen Dreieck ΔAMD ist, gilt $|\overline{AC}| = |\overline{AM}| \cdot \sqrt{3}$. Für die äquivalenten Kreisbögen folgt daraus $A_{\widehat{AC}} = 3 \cdot A_{\widehat{AD}}$. Aufgrund des Verhältnisses $1 : \sqrt{6}$ der Radien der Kreise k_1 und k_2 finden wir

[12] um 325 v. Chr.

$$A_{Möndchen} + A_{k_1} = A_{Kreissegment\ AMCD} - A_{\widehat{AC}} - A_{AMC} + A_{k_1}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 - 3 \cdot A_{\widehat{AD}} - \frac{1}{2} \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3} + \pi \cdot r_1^2 .$$

Wir verwenden $A_{\widehat{AD}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \pi \cdot r_1^2 - 3 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3}$ und vereinfachen die bisherige Gleichung zu

$$A_{Möndchen} + A_{k_1} = 3 \cdot \pi \cdot r_1^2 - 3 \cdot \left(\pi \cdot r_1^2 - 3 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3}\right) - 3 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$= 6 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} r_1^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$= A_{Sechseck} + A_{ACD} .$$

❑

Bekannte Sätze der Mathematik[13]

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen zwischen den harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittelwerten:

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

Beweise:

(1) Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittelwerten: Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.
Addieren wir auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividieren wir beide Seiten durch 4, so finden wir

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4},$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Ungleichung zwischen harmonischen und geometrischen Mittelwerten: Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachten wir ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

[13] Siehe auch Heft 01/2022

Bilden wir von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittelwerten: Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$, also $2ab \leq a^2 + b^2$, folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \,.$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4 und radizieren, so erhalten wir die behauptete Ungleichung.

(4) Gilt $a \leq b$ und damit $\min\{a;b\} = a \leq b = \max\{a;b\}$, so erhalten wir einerseits $\frac{a}{b} \leq 1$. Damit finden wir aus $2 \geq 1 + \frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ die linke äußere Abschätzung $a \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$. Andererseits folgt wegen $b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ die rechte äußere Abschätzung.

18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO[14]) ist ein staatenübergreifender Mathematikwettbewerb, der 2007 erstmalig ausgerichtet wurde und an dem seit 2014 die zehn Länder Deutschland, Kroatien, Litauen, Polen, Österreich, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn teilnehmen. Er bietet Jugendlichen (in Deutschland der Jahrgangsstufen 10 und 11) eine zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) zusätzliche Möglichkeit, an internationalen Vergleichen teilzunehmen. Dabei wird jedoch die Doppel-Teilnahme an MeMO und IMO in einem Kalenderjahr per Reglement ausgeschlossen.

Jedes teilnehmende Land entsendet sechs Schüler zur MeMO. Es gibt sowohl einen Einzel- als auch einen Mannschaftswettbewerb. Jeder Teilnehmende schreibt am ersten Wettkampftag eine fünfstündige Individualklausur. Am Folgetag steht die ebenfalls fünfstündige Teamklausur auf dem Programm. Die vier Aufgabenstellungen des Einzelwettbewerbs und die acht Probleme für die Teamentscheidung orientieren sich im Schwierigkeitsgrad am Niveau der IMO. Es sind je Aufgabe 8 Punkte möglich. Wie auch zur IMO wird die siebentägige Veranstaltung von einem reichhaltigen Exkursionsprogramm umrahmt.

In diesem Jahr fand die MeMO vom 24. bis 30. August 2024 in Szeged (Ungarn) statt. Insgesamt wurden an die 60 Teilnehmenden 4 Gold-, 12 Silber- und 15 Bronze-Medaillen vergeben. Zusätzlich erhielten 17 Teilnehmende, die es nicht auf einen Medaillenplatz schafften, aber bei mindestens einer Aufgabe die volle Punktzahl

[14] www.memo-official.org

erreichten, eine ehrende Erwähnung. Zwei Starter (aus Kroatien und Ungarn) schafften im Individualwettbewerb die Idealpunktzahl 32.

Verwenden wir für eine Länderwertung den Modus der IMO, die Platzierung anhand der Summe der sechs Einzelleistungen festzulegen, erreichte Deutschland mit 114 von 192 möglichen Punkten den Platz 4 (2023: 112 Punkte/Platz 5; 2022: 104 Punkte/Platz 2; 2021: 59 Punkte/Platz 4).

Platz	2024	Punkte	Gold	Silber	Bronze	Ehrende Erwähnung
1	Polen	151	2	3	1	-
2	Kroatien	135	1	3	1	1
3	Ungarn	116	1	-	4	1
4	Deutschland	114	-	2	2	2
5	Slowakei	112	-	1	3	2
6	Tschechien	109	-	1	3	2
7	Schweiz	84	-	1	-	4
8	Litauen	64	-	-	1	2
9	Österreich	59	-	1	-	1
10	Slowenien	55				2

Für die offizielle Länderwertung wird aber der Teamwettbewerb zugrunde gelegt, in dem insgesamt 64 Punkte erreicht werden können. Das deutsche Team kam hierbei auf Platz 2 und erreichte damit ein hervorragendes Ergebnis im Vergleich zu den Vorjahren (nach 2023: 22 Punkte mit Platz 7 und 2022: 37 Punkte sowie 2021: 47 Punkte mit jeweils Platz 6).

Platz	Team	Punkte
1	Polen	56
2	Deutschland	49
3	Schweiz	48
	Slowakei	48
5	Ungarn	47
6	Litauen	39
7	Kroatien	33
	Tschechien	33
9	Slowenien	24
10	Österreich	18

Turnusgemäß wurde nach der 8. MeMO 2014 in Dresden die 19. MeMO wieder nach Deutschland vergeben[15]. Sie wird vom 25. bis 31. August 2025 in der Kulturhauptstadt Europas Chemnitz (siehe www.memo2025.de) stattfinden.

Termine

Technische Universität Chemnitz, Campustage für Schüler und Studieninteressierte, vom 15. bis 17. Oktober 2024, täglich von 09:00 bis 15:00 Uhr. Um sich seinen individuellen Besuchsplan vorzubereiten, gibt es Informationen unter https://www.tu-chemnitz.de/studierendenservice/zsb/campustage/

„Jugend forscht“ Onlineveranstaltung „Offene Sprechstunde – Tipps zur Anmeldung" (am 07. November 2024, 17:00 bis 18:00 Uhr) klärt zu Teilnahmebedingungen, dem Anmeldeprozess und der Datenbank, in der die Anmeldungen registriert werden, auf. Eigene konkrete Fragen können in die Veranstaltung eingebracht werden. Informationen und online-Anmeldung unter jugend-forscht.de

64. Mathematik-Olympiade, Runde 2 (Regionalausscheid), 18. November 2024.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 8/2024

Aufgabe T–3 (Teamwettbewerb der 17. MeMO, 2023, Strečno/Slovakia)
Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8 × 8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen stehen.

Lösungshinweise: Wir platzieren 40 Läufer auf 6 Diagonalen, wie in Abbildung 1 gezeigt. Wenn wir 7 beliebige der platzierten Läufer auswählen, befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei der ausgewählten Läufer auf derselben Diagonale, so dass sie sich gegenseitig angreifen. Die Anzahl b der ausgewählten Läufer ist also mindestens 41.

[15] Pandemie-bedingt wurde die 14. MeMO 2020 virtuell durchgeführt und damit keinem Veranstalterland zugeordnet.

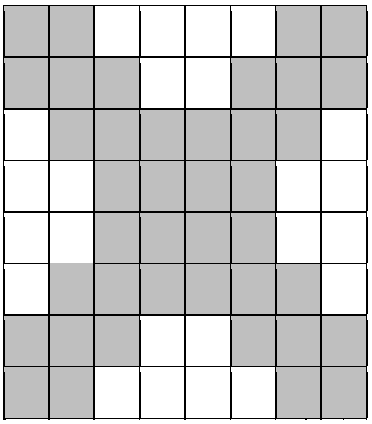


Abbildung 1

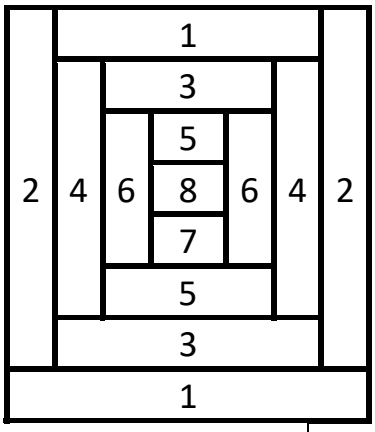


Abbildung 2

Nehmen wir nun an, dass die 41 Läufer so platziert sind, dass es keine 7 nicht angreifenden Läufer gibt. Unterteilen wir alle Spielsteine in 8 Gruppen, wie in Abbildung 2 gezeigt. Es ist leicht zu erkennen, dass zwei Läufer, die zur gleichen Gruppe gehören, sich nicht gegenseitig angreifen. Daher enthält jede Gruppe höchstens 6 Läufer. Außerdem enthalten die Gruppen 7 und 8 aufgrund ihrer Größe höchstens 2 Läufer. Wir haben also höchstens $6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 40$ Läufer, was ein Widerspruch ist. Daher ist es möglich, aus einer beliebigen Anordnung von 41 Läufern 7 so auszuwählen, dass sich keine zwei Läufer gegenseitig angreifen. Zusammen mit der unteren Schranke von $b \geq 41$ ist diese Lösung damit abgeschlossen. ❑

Anmerkung (1). Eine schwächere Obergrenze von 49 kann wie folgt gezeigt werden: Betrachten wir eine Platzierung von 49 Läufern. Wir haben 8 Reihen und 49 : 8 > 6, also gibt es nach dem Schubfachprinzip eine Reihe mit mindestens 7 Läufern. Es ist klar, dass Läufer in der gleichen Reihe sich nicht gegenseitig angreifen.

Anmerkung (2). Dieses Problem kann für größere Dimensionen des Schachbretts und auch für eine größere Anzahl von gesuchten nicht angreifenden Läufern verallgemeinert werden.

Monatsaufgabe 10/2024[16].

Sei ΔABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60$. Sei D ein Punkt auf der Gerade AC, sodass $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ gilt und A zwischen C und D liegt. Angenommen, es existieren zwei Punkte $E \neq F$ auf dem Umkreis des Dreiecks ΔDBC, sodass $|\overline{AE}| = |\overline{AF}| = |\overline{BC}|$ gilt.

Zeige, dass die Gerade EF duch den Umkreismittelpunkt von ΔABC verläuft.

[16] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.11.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 04.3 – Flächenberechnung 3
Über ein Verhältnis von arithmetischen und geometrischen Mittelwerten 8
In alten Mathe-Büchern geblättert 13
Bekannte Sätze der Mathematik 17
18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade 18
Termine 20
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 08/2024 20
Monatsaufgabe 10/2024 21

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[17]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

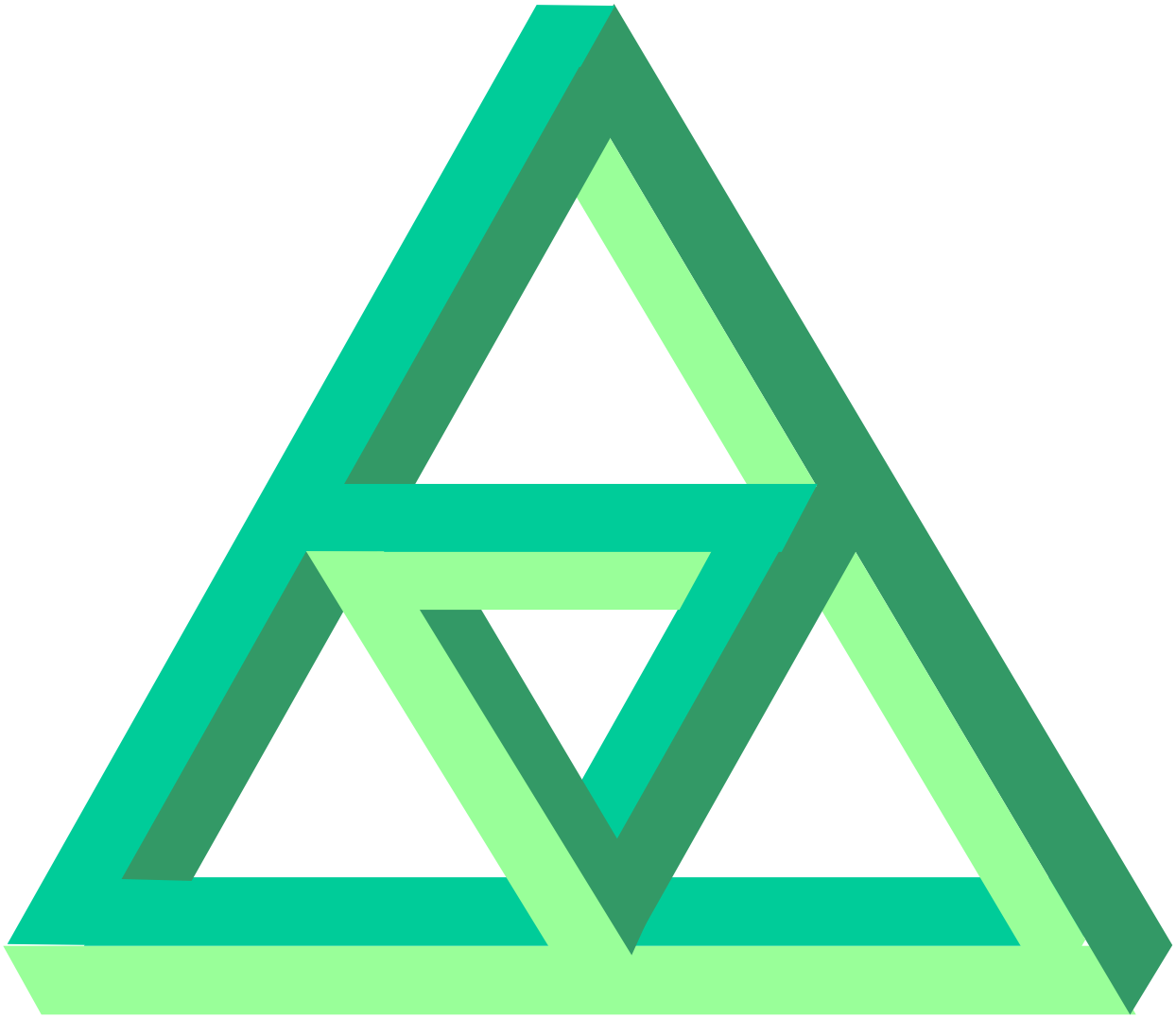
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

[17] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 11/2024 (November 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir blicken auf die Aufgaben der ersten Runde der 64. MO zurück. Wir erkennen in mehreren Aufgaben Themen wieder, die in früheren Ausgaben der „Mathematischen Kostproben“ diskutiert wurden. Insbesondere greifen wir für die Aufgabe **MO641012** das **Thema 19** „Maximale Flächeninhalte“ mit der Suche nach extremalen Situationen in ebenen Figuren auf. Neben dem Prinzip der schrittweisen konstruktiven Vergrößerung vorgegebener Größen bis zu Extremwerten untersuchen wir auch die Optimierung von Streckenzügen mittels Konstruktion kürzester Verbindungsgeraden.

Mit dem Aufgabenpaar **MO641015 und MO641016** sehen wir weitere Beispiele, in denen die Erfahrungen aus Aufgaben vergangener Olympiaden einen Zugang zum Lösungsansatz vereinfachen. Während das **Thema 3** „Gleichungssysteme“ schon länger zurück liegt, wurde das **Thema 22** „Zahlenverteilungen auf ebenen oder räumlichen Figuren“ erst 2023 intensiv diskutiert. Die damals gezeigten Lösungsstrategien lassen sich auf die aktuellen Aufgaben übertragen.

Im historischen Einblick nutzen wir einen Beitrag von Karl Wilhelm Feuerbach aus dem Jahr 1822, in dem er den Umfang des Höhenfußpunktes berechnete.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 19.2 – Maximale Eigenschaften von ebenen Figuren

Aufgabe 19.06 – MO641012. In einem gegebenen Kreis betrachten wir konvexe Vierecke. Die Ecken der Vierecke dürfen im Innern des Kreises liegen oder auf diesem Kreis.

Zeigen Sie, dass jedes solcher Vierecke mit größtem Flächeninhalt dann ein Quadrat ist.

Hinweis: In jedem konvexen Viereck sind alle Innenwinkel kleiner als 180°.

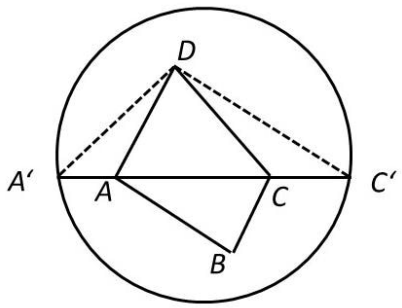
Im ersten Teil der Thematik 19 „Maximale Flächeninhalte“ (s. Heft 12/2022) diskutierten wir u.a. folgende

Aufgabe 19.01 – MO620924. Zeigen Sie: Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks ΔXYZ alle auf dem Rand oder im Inneren eines Quadrats $ABCD$, so ist der Flächeninhalt des Quadrats mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks.

Ein Lösungsansatz beruhte auf der schrittweisen Vergrößerung des gegebenen Dreiecks ΔXYZ, so dass schließlich die Eckpunkte des vergrößerten Dreiecks $\Delta X'Y'Z'$ auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Quadrates $ABCD$ liegen. Es ist einfach zu zeigen, dass ein solches Dreieck nur einen Flächeninhalt haben kann, der halb so groß wie der des Quadrates ist. Es bedurfte allerdings einer sorgfältigen Fallunterscheidung zur Lage der drei Punkte X, Y, Z, um sicherzustellen, dass die Punkte X', Y' und Z' die gewünschte Lage einnehmen. Für die aktuelle Aufgabe erscheint die Lösung ohne derartige Probleme.

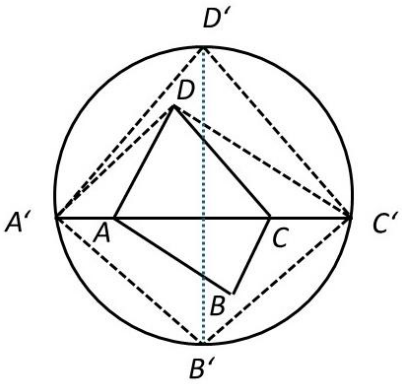
Lösungshinweise zu MO641012: Da die Innenwinkel im konvexen Viereck $ABCD$ kleiner als 180° sind, liegen die Diagonalen des Vierecks stets vollständig in ihm. Liegen nicht alle Eckpunkte auf dem Rand des Kreises, so wählen wir eine Diagonale aus, bei der mindestens ein Endpunkt im Innern des Kreises liegt. Es sei dies o.B.d.A. die Diagonale $\overline{AC}$. Wir verlängern $\overline{AC}$ über A und C hinaus, so dass Schnittpunkte A' bzw. C' mit der Kreislinie entstehen (dabei ist $A' = A$ oder $C' = C$ möglich).

Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'C'D$ ist wegen $\left|\overline{A'C'}\right| \geq |\overline{AC}|$ bei gleicher Höhe nicht kleiner als der des Dreiecks $A\Delta CD$.



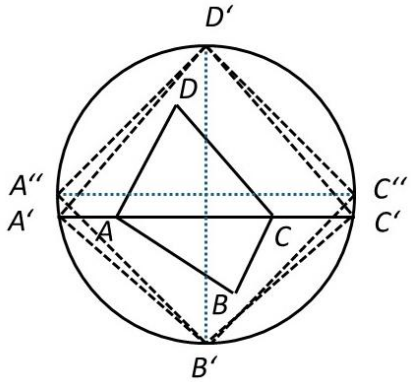
Betrachten wir nun den Schnittpunkt D' der Mittelsenkrechten von $\overline{A'C'}$ mit der Kreislinie (auf der gleichen Seite wie D). Wir erkennen: Da der Abstand des Punktes D' zu $A'C'$ nicht kleiner als der Abstand des

Punktes D zu $A'C'$ ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'C'D'$ nicht kleiner als der des Dreiecks $\Delta A'C'D$ und deshalb nicht kleiner als der des Dreiecks ΔACD.



Mit analoger Argumentation konstruieren wir den Punkt B' als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{A'C'}$ mit der Kreislinie (auf der gleichen Seite wie B). Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'C'B'$ nicht kleiner als der des Dreiecks ΔACB.

Weil der Mittelpunkt des Kreises auf der Mittelsenkrechten liegt, ist $\overline{B'D'}$ ein Durchmesser des Kreises. Nun konstruieren wir dessen Mittelsenkrechte, die die Kreislinie in A'' (auf der Seite wie A) und C'' (auf der Seite wie C) schneidet. Wie oben erkennen wir, dass die Flächen der Dreiecke $\Delta A''B'D'$ und $\Delta B'C''D'$ nicht kleiner als die der Dreiecke ΔABD bzw. ΔBCD sind.



Insgesamt ist somit der Flächeninhalt des Vierecks $A''B'C''D'$ maximal. Da seine Diagonalen als Durchmesser des Kreises gleich lang sind und nach Konstruktion senkrecht aufeinander stehen, ist $A''B'C''D'$ ein Quadrat. ❑

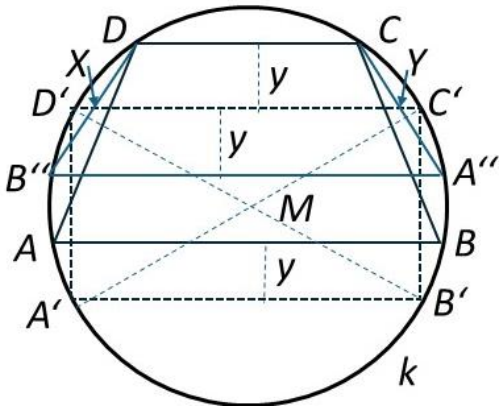
Lösungsvariante: Wir wählen eine Diagonale des Vierecks $ABCD$ aus, o.B.d.A. $\overline{AC}$. Da die Strecke $\overline{AC}$ innerhalb des Kreises einschließlich seines Randes liegt, gilt für den Kreisdurchmesser d stets $|\overline{AC}| \leq d$. Wir fällen von B und von D die Lote auf $\overline{AC}$ mit den Fußpunkten H_B bzw. H_D. Wir finden nun $|\overline{BH_B}| + |\overline{DH_D}| \leq d$, denn entweder liegen die Lote bereits auf dem zu $\overline{AC}$ senkrechten Durchmesser oder sie können dahin verschoben werden, ohne die Kreislinie zu schneiden. Damit erhalten wir

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BH_B}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{DH_D}|$$
$$\leq \frac{1}{2} \cdot d \cdot (|\overline{BH_B}| + |\overline{DH_D}|) \leq \frac{1}{2} \cdot d^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\overline{AC}$ ein Durchmesser ist und B und D die Endpunkte des zu $\overline{AC}$ senkrecht stehenden Durchmessers sind. Unter diesen Bedingungen ist das Viereck $ABCD$ aber ein Quadrat.

Aufgabe 19.07 – MO461033. Gegeben ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie eine reelle Zahl h mit $0 < h < 2r$. Wir betrachten Trapeze $ABCD$, deren Eckpunkte auf k liegen und deren parallele Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ den Abstand h haben.

Finden Sie unter all diesen Trapezen eines mit größtmöglichem Flächeninhalt.



Lösungshinweise: Es sei $ABCD$ ein Trapez mit der Höhe h gemäß der Aufgabenstellung. Weiter sei $A'B'C'D'$ ein weiteres solches Trapez, bei dem zusätzlich der Mittelpunkt M auf der Diagonalen $\overline{A'C'}$ liegt. Dieses Trapez ist sogar ein Rechteck, da nach Satz des THALES die Winkel bei B' und bei D' 90° betragen. Außerdem ist dieses Rechteck punktsymmetrisch bzgl. M.

Wir zeigen nun: Der Flächeninhalt von $A'B'C'D'$ ist mindestens so groß wie der von $ABCD$. O.B.d.A. können wir $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ und deshalb auch $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ annehmen. Die Geraden AB und CD entstehen deshalb durch Parallelverschiebung von $A'B'$ bzw. $C'D'$, wobei wegen der gleichen Höhe h der beiden Trapeze die Verschiebungen um einen gleichen Betrag y erfolgen.

Wir spiegeln die Punkte A und B bzgl. M zu A'' bzw. B''. Die Spiegelpunkte liegen ebenfalls auf dem Kreis k. Außerdem gilt $\left|\overline{A''B''}\right| = |\overline{AB}|$. Die Gerade $A''B''$ erhalten wir aber auch durch Parallelverschiebung von $C'D'$ in Richtung AB um den Betrag y.

Damit ist $\overline{C'D'}$ die Mittelparallele zu zwischen $\overline{CD}$ und $\overline{A''B''}$. Folglich schneiden die Sehnen $\overline{DB''}$ und $\overline{CA''}$ die Sehne $\overline{C'D'}$ in inneren Punkten, die wir X bzw. Y nennen. Laut Konstruktion ist $\overline{XY}$ die Mittellinie des Trapezes $B''A''CD$. Es folgt:

$$\left|\overline{C'D'}\right| \geq |\overline{XY}| = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overline{CD}| + \left|\overline{A''B''}\right|\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overline{CD}| + |\overline{AB}|\right)$$

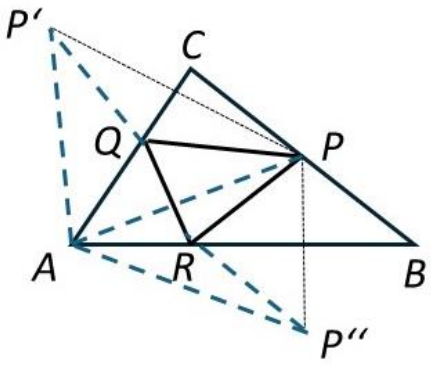
Da der Flächeninhalt des Rechtecks $A'B'C'D'$ durch $h \cdot \left|\overline{C'D'}\right|$ und der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ durch $\frac{1}{2} \cdot \left(|\overline{CD}| + |\overline{AB}|\right) \cdot h$ gegeben ist, folgt aus dieser Ungleichung die Behauptung: Das Rechteck hat den größtmöglichen Flächeninhalt. ❑

Während obige Aufgaben durch (konstruktive) Vergrößerungen einer gegebenen Figur gelöst werden, können auch geschickte Hilfslinien für die Optimierung von Streckenzügen zum Erfolg führen, wie bei

Aufgabe 19.08 – Das Problem von Fagnano[3]. Das einem spitzwinkligen Dreieck ABC einbeschriebene Dreieck kleinsten Umfangs ist das Höhenfußpunktdreieck.

[3] GIOVANNI FRANCESCO FAGNANO DEI TOSCHI (1715 bis 1797) veröffentlichte 1775 dieses Optimierungsproblem und bewies die Aussage mit Methoden der Differentialrechnung. LEOPOLD FEJÉR (1880 bis 1959) fand einen elementar-geometrischen Beweis

Lösungshinweise: Dem Dreieck ΔABC wird ein beliebiges Dreieck ΔPQR einbeschrieben. Dabei liegen P auf der Seite $\overline{BC}$, Q auf $\overline{CA}$ und R auf $\overline{AB}$. Es seien P' der an CA gespiegelte Punkt zu P und P'' der an AB gespiegelte Punkt zu P.



Wir wollen die Summe der Seitenlängen des Dreiecks ΔPQR bilden, also den Umfang u dieses Dreiecks: $u = |\overline{PQ}| + |\overline{QR}| + |\overline{RP}|$. Dafür lässt sich wegen der Spiegelungen auch setzen:

$$u = \left|\overline{P'Q}\right| + |\overline{QR}| + \left|\overline{RP''}\right|.$$

Wir bemerken, dass (wie in der Skizze) dieser Streckenzug im Allgemeinen nicht geradlinig ist. Soll er so kurz wie möglich sein, wäre es erforderlich, dass er geradlinig ist, d.h. die Punkte Q und R müssten für jede Wahl des Punktes P auf $\overline{AB}$ auf der zugehörigen Geraden $P'P''$ liegen.

Für jede Wahl von P auf $\overline{AB}$ besitzt dasjenige einbeschriebene Dreieck ΔPQR den kleinsten Umfang, dessen Ecken Q und R auf der Verbindungsgeraden der Spiegelpunkte P' und P'' liegen.

Wir erkennen: $\overline{AP'}$ und $\overline{AP''}$ sind die Bilder der Strecken $\overline{AP}$ bei den Spiegelungen. Somit gilt die Gleichheit der Streckenlängen: $\left|\overline{AP'}\right| = \left|\overline{AP''}\right| = |\overline{AP}|$, d.h. das Dreieck $AP'P''$ ist gleichschenklig und der Winkel $\sphericalangle P''AP'$ ist doppelt so groß wie der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ des Dreiecks ΔABC bei A, also: $|\sphericalangle P''AP'| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$.

Wir stellen fest, dass der Winkel $\sphericalangle P''AP'$ an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks konstant ist und nicht von der Wahl des Punktes P auf der Seite $\overline{BC}$ abhängt! Wir erhalten deshalb eine möglichst kurze Basis $\overline{P'P''}$ des gleichschenkligen Dreiecks $AP'P''$, wenn wir einen Schenkel minimalisieren, d.h. wenn wir erreichen, dass $\overline{AP}$ möglichst klein wird. Dies ist genau dann erreicht, wenn $\overline{AP}$ der kürzeste Abstand des Punktes A von der Seite $\overline{BC}$ ist. Wir finden also: $\overline{AP}$ muss senkrecht auf $\overline{BC}$ stehen, d.h. P ist der Fußpunkt der Höhe h_a durch A auf der Seite $\overline{BC}$.

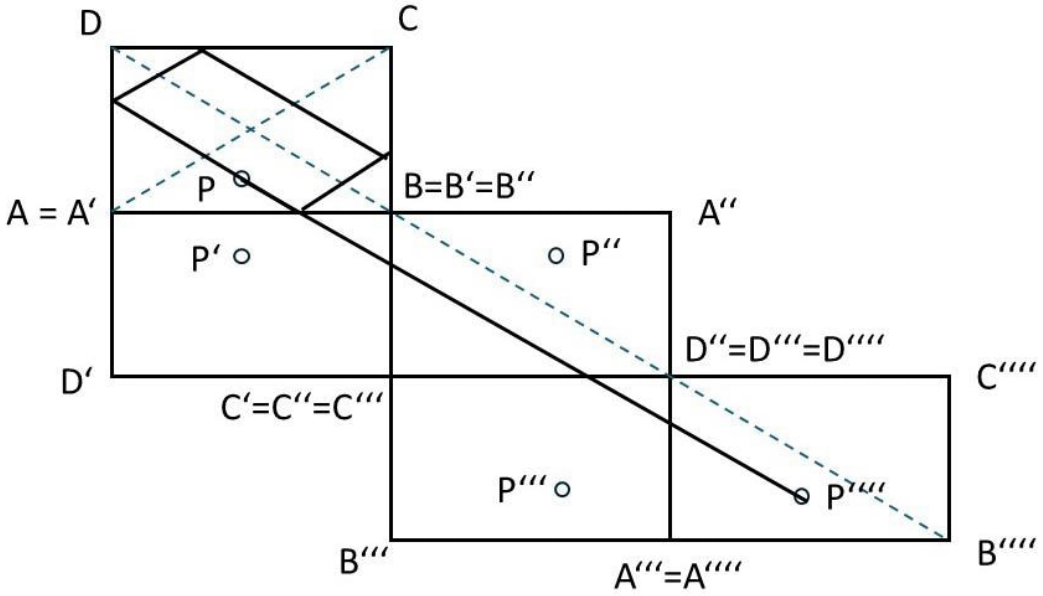
Dieselben Überlegungen gelten für die beiden anderen Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$: Im gesuchten Minimalfall sind $\overline{BQ}$ und $\overline{CR}$ die Höhen von B und C aus. Damit hat das Höhenfußpunktdreieck den minimalen Umfang aller einbeschriebenen Dreiecke. ❑

Wir finden diese Lösungsstrategie auf Basis der kürzesten Verbindung bereits in frühen MO-Aufgaben.

Aufgabe 19.09 – MO070932. Auf einem rechtwinkligen Billardtisch *ABCD* befindet sich im Punkt *P* eine Kugel.

Nach welchem Punkt von *AB* muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten *AB, BC, CD* und *DA* des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Lösungshinweise: Man muss auf den Schnittpunkt von $\overline{AB}$ mit der Parallelen zu BD durch P zielen. Dieser Punkt wird gefunden, indem man durch P eine zur Diagonalen $\overline{BD}$ parallele Gerade legt. (Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn P im Dreieck ΔABD liegt.) Zum Beweis reicht es aus, ein einfaches Bild zu zeichnen:



Wir spiegeln $ABCD$ an $\overline{AB}$. Das dadurch erhaltene neue Rechteck $A'B'C'D'$ spiegeln wir an der Seite, die $\overline{BC}$ entspricht, und erhalten das Rechteck $A''B''C''D''$. Dieses Rechteck wiederum spiegeln wir an der Seite von $A''B''C''D''$, die $\overline{CD}$ entspricht, und erhalten das Rechteck $A'''B'''C'''D'''$. Dieses Rechteck spiegeln wir an der Seite, die $\overline{DC}$ entspricht, und erhalten $A''''B''''C''''D''''$.

Sei P'''' der Punkt in $A''''B''''C''''D''''$, der P entspricht. (Wir beobachten, dass $A''''B''''C''''D''''$ durch Verschiebung von $ABCD$ parallel zur Diagonalen $\overline{BD}$ entsteht.) Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass, wenn wir die Kugel im Punkt P in die Richtung von P'''' stoßen, wir die Seiten in der gewünschten Reihenfolge treffen und anschließend wieder bei P landet.

Analog zeigen wir, dass wir auch zu Punkt P zurückkehren, wenn wir die Kugel parallel zur Diagonalen $\overline{AC}$ anstoßen. ❑

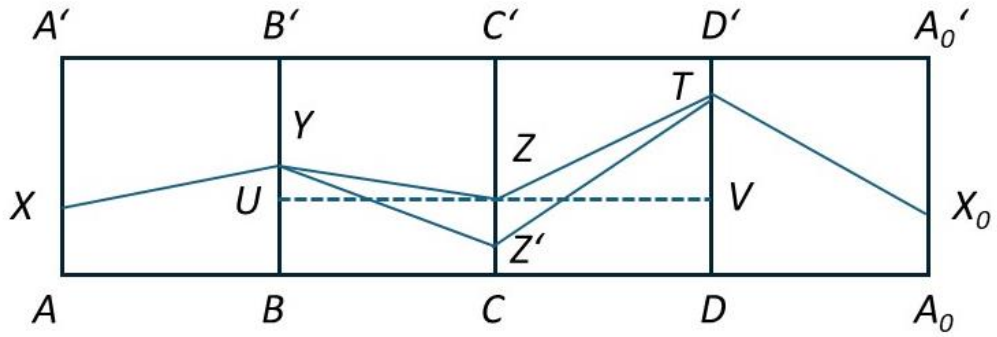
Aufgabe 19.10 – MO160923. Gegeben sei ein Würfel *ABCDA'B'C'D'*. Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge *XYZTX*, wobei *X*, *Y* , *Z* und *T* in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten *AA'*, *BB'*, *CC'* bzw. *DD'* seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte *X, Y, Z, T* so gibt, dass der Streckenzug *XYZTX* unter allen betrachteten Streckenzügen

a) minimale,
b) maximale

Gesamtlänge besitzt!

Lösungshinweise: Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den "Mantel" aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:



Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0, da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da die so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $|\overline{AX}| = |\overline{BY}| = |\overline{CZ}| = |\overline{DT}| = |\overline{A_0X_0}|$ im Innern von $\overline{BB_0}$, $\overline{CC_0}$, bzw. $\overline{DD_0}$, liegen.

Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYZTX_0$ ist $|\overline{XX_0}| = |\overline{AA_0}|$, also für alle X dieselbe Länge.

Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

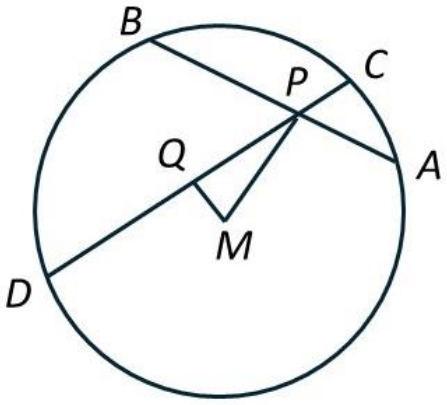
Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es sei $XYZTX$ ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug. Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, dass $|\overline{CZ}| \leq |\overline{BY}|$ und $|\overline{CZ}| \leq |\overline{DT}|$ gilt.

Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu $\overline{AA_0}$ durch Z dann $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ in Punkten U bzw. V auf $\overline{BY}$ bzw. $\overline{DT}$. Daher ist $|\sphericalangle CZY| \geq |\sphericalangle CZU| = 90°$ und $|\sphericalangle CZT| \geq |\sphericalangle CZV| = 90°$. Wählen wir nun einen Punkt Z' zwischen C und Z, so gehört auch $XYZ'TX$ zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck $Z'ZY$ der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z', also gilt $|\overline{YZ'}| > |\overline{YZ}|$.

Ebenso folgt $|\overline{Z'T}| > |\overline{ZT}|$.. Daher hat $XYZ'TX$ eine größere Gesamtlänge als $XYZTX$. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge. ❑

Aufgabe 19.11 – MO060922. Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!



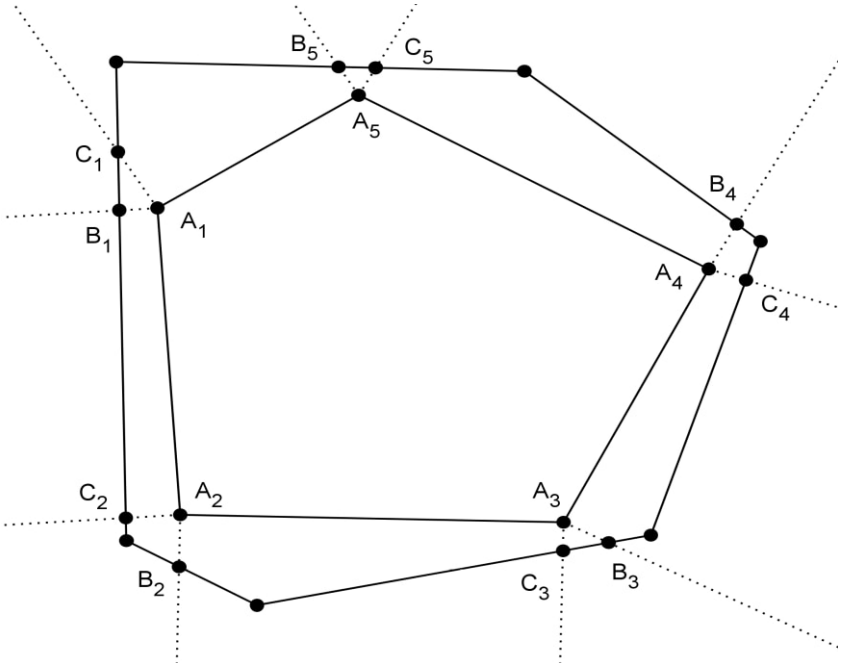
Lösungshinweise - Konstruktion: Wir verbinden P mit dem Mittelpunkt M des Kreises und konstruieren die Senkrechte zu $\overline{MP}$ in P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten A und B. $\overline{AB}$ ist die gesuchte Sehne.

Beweis: Zum Nachweis, dass $\overline{AB}$ die kürzeste durch P verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten C und D. Dann ist der Abstand der Sehne $\overline{CD}$ von M kleiner als $\overline{MP}$.

Enthält $\overline{CD}$ den Punkt M, dann ist der Abstand der Strecke $\overline{CD}$ von M gleich Null. Enthält aber $\overline{CD}$ den Punkt M nicht, dann fällen wir das Lot von M auf $\overline{CD}$ und nennen seinen Fußpunkt Q. Im rechtwinkligen Dreieck ΔMQP ist $\overline{MP}$ die Hypotenuse, und daher gilt $|\overline{MQ}| < |\overline{MP}|$. Nun ist von Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen von Mittelpunkt diejenige die kürzere, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat. Deshalb folgt $|\overline{AB}| < |\overline{CD}|$. Da $\overline{CD}$ (durch P) beliebig angenommen wurde, muss $\overline{AB}$ die kürzeste durch P verlaufende Sehne dieses Kreises sein.

Existenz und Eindeutigkeit: Da es stets genau eine Gerade durch M und P gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig. ❑

Aufgabe 19.12. Es seien P und Q zwei konvexe Polygone, sodass P im Inneren von Q liegt. Man beweise, dass der Umfang von P kleiner als der Umfang von Q ist.



Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Ecken von P mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Die in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ errichteten Senkrechten zu $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ schneiden Q in $B_1, B_2, \ldots, B_n$ die in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ errichteten Senkrechten zu $A_nA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ schneiden Q in $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Wenn wir den Umfang von Q und P mit U_Q bzw. U_P bezeichnen, so gilt unter Verwendung der Dreiecksungleichung:

$$U_Q > |B_1C_2| + |B_2C_3| + \ldots + |B_nC_1| > |A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_nA_1| = U_P$$

Also ist der Umfang von P kleiner als der Umfang von Q. ❑

MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Gleichungssysteme

Aufgabe 3.11 – MO641015. Ein Schaf und eine Ziege können eine Wiese gemeinsam in 50 Minuten abfressen. Eine Ziege allein hätte 80 Minuten gebraucht, um die Wiese abzufressen.

Ermitteln Sie die Zeit, in der 5 Schafe und 2 Ziegen die Wiese abfressen können, wenn gilt: Alle Schafe fressen gleich schnell und alle Ziegen fressen auch gleich schnell. Die Fressgeschwindigkeit eines Tieres ändert sich nicht, wenn weitere Tiere anwesend sind.

Lösungshinweise (mit ganzen Zahlen): Wenn 1 Ziege die Wiese in 80 min abfrisst, fressen 8 Ziegen die Wiese in 10 min ab. Wenn (1 Schaf und 1 Ziege) die Wiese in 50 min abfressen, fressen (5 Schafe und 5 Ziegen) die Wiese in 10 min ab. Somit fressen 5 Schafe so viel wie (8 – 5 =) 3 Ziegen. Aus diesem Grund fressen (5 Schafe und 2 Ziegen) so viel wie (3 Ziegen + 2 Ziegen), also wie 5 Ziegen.

Wenn 1 Ziege die Wiese in 80 min abfrisst, fressen 5 Ziegen die Wiese in (80 : 5 =) 16 min ab. ❑

Lösungshinweise (mit Normierung): Wenn 1 Ziege die Wiese in 80 min abfrist, frisst sie in einer Minute $\frac{1}{80}$ der Wiese. Wenn (1 Schaf und 1 Ziege) die Wiese in 50 min abfressen, fressen sie in einer Minute $\frac{1}{50}$ der Wiese. Daraus ermitteln wir, wie viel 1 Schaf in einer Minute frisst, nämlich:

$$\frac{1}{50} - \frac{1}{80} = \frac{8-5}{400} = \frac{3}{400}.$$

Deshalb fressen 5 Schafe und 2 Ziegen in einer Minute insgesamt

$$5 \cdot \frac{3}{400} + 2 \cdot \frac{1}{80} = \frac{15+10}{400} = \frac{25}{400} = \frac{1}{16}.$$

Wir erhalten also: 5 Schafe und 2 Ziegen fressen die Wiese in 16 min ab. ❑

Diese Aufgabenstellung erscheint sehr ähnlich zur

Aufgabe 3.05 – MO570934. Drei Mähdrescher A, B und C besitzen unterschiedliche Mähleistungen. Folgendes ist bekannt:

(1) Wird ein Feld 9 Stunden von A und 2 Stunden von B bearbeitet, ist es komplett abgeerntet.
(2) Würde das gleiche Feld 4 Stunden von A und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{2}{3}$ des Feldes abgeerntet.
(3) Würde das gleiche Feld 2 Stunden von B und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{7}{12}$ des Feldes abgeerntet.

Ermitteln Sie, wie lange jeder einzelne der drei Mähdrescher brauchen würde, um das komplette Feld allein abzuernten.

Anmerkung: In den Aussagen (1) bis (3) wird vorausgesetzt, dass die Mähdrescher stets mit voller Leistung arbeiten.

Tatsächlich können wir die Lösungsidee (s. Thema 3.1 „Lineare Gleichungssysteme“ im Heft 02/2021) direkt übertragen und erhalten einen Lösungsansatz, der der obigen zweiten Variante entspricht:

Lösungshinweise: Es sei z die Fläche der Wiese, die eine Ziege in einer Zeiteinheit (hier: 10 min) abfrisst. Weiter sei s die Fläche der Wiese, die ein Schaf in einer Zeiteinheit abfrisst. Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$z = \frac{1}{8} \qquad z + s = \frac{1}{5}$$

Nach Umformungen wie oben erhalten wir $s = \frac{3}{40}$, woraus wir die Fragestellung mit $5 \cdot \frac{3}{40} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{40}$ die Fläche erhalten, die 5 Schafe und 2 Ziegen in der Zeiteinheit (10 min) abfressen.

Die gesamte Fläche fressen sie also in $10 : \frac{25}{40} = \frac{400}{25} = 16$ Minuten ab. ❑

Aufgabe 3.12 – MO330922. Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen. Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.

Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn *A* und *B* von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Lösungshinweise: Es seien x und y die prozentualen Leistungen des Mahlwerks je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$\frac{8}{x}+\frac{18}{y}=1$$

und

$$\frac{10}{x}+\frac{15}{y}=1$$

mit der Lösung $x=20, y=30$. Arbeiten beide t Stunden zusammen, wird damit

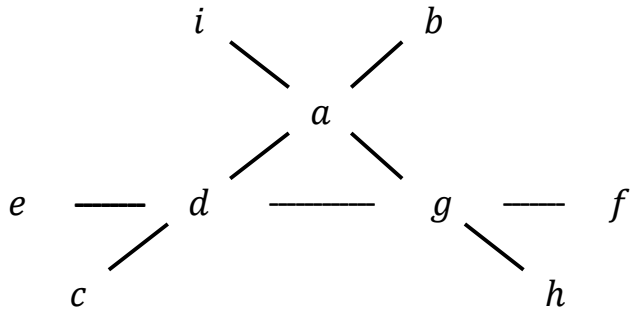
$$\frac{t}{20}+\frac{t}{30}=1$$

mit der Lösung $t=12$. Beide Mahlwerke benötigen also 12 Stunden, wenn sie von Anfang an gemeinsam arbeiten.

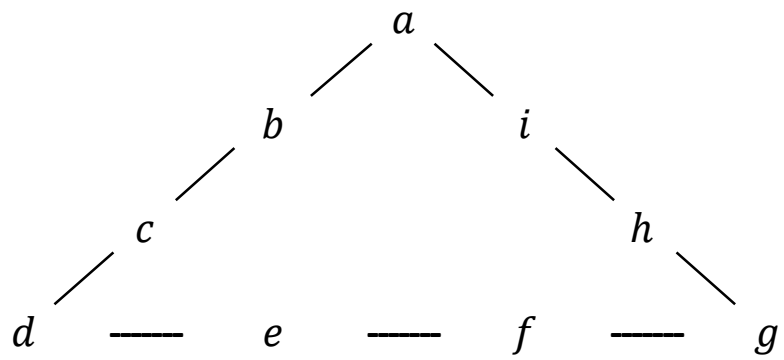
MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren

Aufgabe 22.15 – MO641016. In der unten abgebildeten Figur ist jeder der neun eingezeichneten Kreise mit je einer der jeweils in den Teilaufgaben festgelegten Zahlen so zu beschriften, dass alle neun Zahlen verwendet werden und auf jedem der drei geradlinigen Abschnitte (auf denen sich jeweils vier Kreise befinden) die Summe s der vier Zahlen in jedem geradlinigen Abschnitt stets die gleiche ist.

a) Hier sollen die neun Zahlen 2021, 2022, 2023, . . . , 2029 eingetragen werden. Geben Sie eine derartige Beschriftung und die mit dieser Beschriftung erreichte Abschnittssumme s an.
   Überprüfen Sie außerdem, ob es derartige Beschriftungen mit den gegebenen Zahlen gibt, bei denen die Abschnittssumme s den Wert 8097 bzw. den Wert 8104 hat.
b) In dieser Teilaufgabe tragen wir die neun Zahlen $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^8$ ein. Wie viele Werte kann die gemeinsame Abschnittssumme s annehmen?



Wir erkennen, dass die Struktur wie nachfolgend vereinfacht werden kann. Zudem genügt es, in Teilaufgabe a) für die Variablen die Werte 1, 2, …, 9 zu untersuchen, wenn wir für die originale Aufgabe stets den Wert 2020 addieren. Dann finden wir aber im **Thema 22.1** im Heft 05/2023 in den Diskussionen zu **Aufgabe 22.03 – MO270911, Aufgabe 22.04 – MO270921** und **Aufgabe 22.05 – MO310924** vielfältige Anregungen zur Lösungsfindung.



Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Laut Aufgabenstellung gilt

$$a + b + c + d = d + e + f + g = g + h + i + a$$

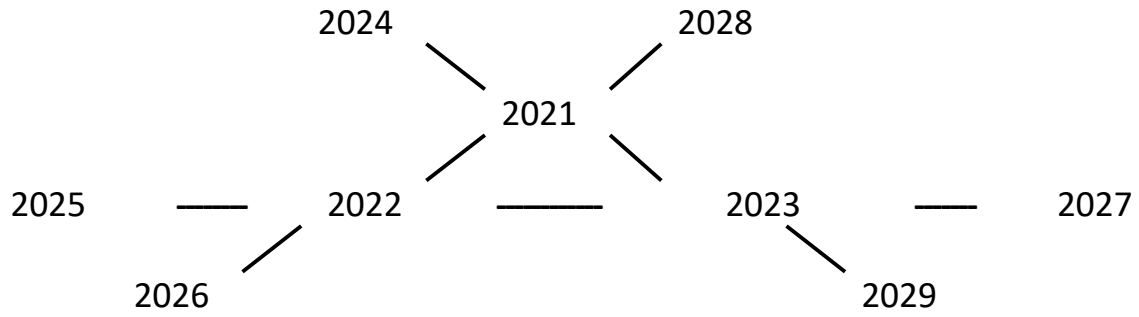
Verwenden wir für die Variablen die Zahlen 1, 2, …, 9, so folgt daraus für die (reduzierte) Abschnittssumme s'

$$3 \cdot s' = 1 + 2 + \cdots + 9 + a + d + g = 45 + a + d + g$$

Damit s' eine ganze Zahl ist, muss $a + d + g$ durch 3 teilbar sein. Da es genügt, eine Belegung ohne Herleitung anzugeben, versuchen wir es mit $a = 1$, $d = 2$ und $g = 3$. In diesem Fall gilt $s' = 17$. Außerdem finden wir folgende Zusammenhänge:

$$b + c = 17 - a - d = 17 - 3 = 14,$$
$$e + f = 17 - d - g = 17 - 5 = 12,$$
$$h + i = 17 - a - g = 17 - 4 = 13.$$

Da eine der Variablen 9 sein muss, könnte wegen $9 + 4 = 13$ die Festlegung $h = 9$ und $i = 4$ zu einer Belegung führen. Da dann $b + c = 14$ und $e + f = 12$ gerade Summen ergeben, kann (bis auf Vertauschung) nur $b = 8, c = 6$ bzw. $e = 5, f = 7$ gelten. Weiter erhalten wir $s = s' + 4 \cdot 2020 = 8097$.



Hinweis: Da eine der Variablen 9 sein muss, könnte wegen $9 + 5 = 14$ die Festlegung $b = 9$ und $c = 5$ auch zu einer Belegung führen. Wir finden in diesem Fall $e + f = 12$ und $h + i = 13$. Da nur noch eine ungerade Zahl verfügbar ist, kann (bis auf Vertauschung) nur $e = 8, f = 6$ bzw. $h = 8, i = 6$ gelten. Auch bei dieser Variante erhalten wir $s = s' + 4 \cdot 2020 = 8097$.

Mit diesen Beispielen haben wir zudem gezeigt, dass die Abschnittssumme 8097 möglich ist. Für $s = 8104$ beträgt die zugehörige reduzierte Abschnittssumme (8104 – 4 · 2020 =) 24. Um dies zu erreichen, müssen wir $\frac{a+d+g}{3} = 9$ wählen, also $a + d + g = 27$. Da aber die Summe der drei Variablen nicht größer als $7 + 8 + 9 = 24$ sein kann, kann es keine Belegung mit der Abschnittssumme 8104 geben.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Eines der Felder wird mit 2^8 belegt. Dann gibt es mindestens einen geradlinigen Abschnitt, auf dem dieser Wert nicht liegt. Bezeichnen wir die vier Werte dieses Abschnitts mit $2^w, 2^x, 2^y, 2^z$ mit $w, x, y, z < 8$, dann erkennen wir

$$s > 2^8 > \sum_{k=0}^{7} 2^k > 2^w + 2^x + 2^y + 2^z$$

Es ist also nicht möglich, dass alle Abschnittssummen gleich groß sein können. ❑

Lösungsvariante: Unter den neun aufzuteilenden Zahlen ist mit 1 nur genau eine Zahl ungerade. Damit gibt es unter den geraden Abschnitten mindestens einen Abschnitt, der diese 1 enthält und damit eine ungerade Abschnittssumme besitzt. Es gibt aber unter den geraden Abschnitten mindestens einen Abschnitt, der diese 1 nicht enthält und damit eine gerade Abschnittssumme besitzt. Damit können nicht alle Abschnittssummen gleich sein.

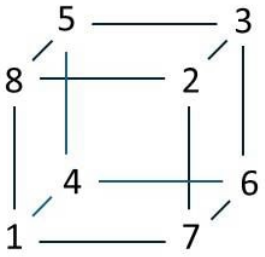
Aufgabe 22.16 – MO310911. Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als ”Flächensumme” dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Wenn man an die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4

schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Die genannte Aussage ist falsch, denn eine Seitenfläche des Tetraeders muss die Flächensumme $1 + 2 + 3 = 6$ haben, eine andere Seitenfläche z.B. die Flächensumme $1 + 2 + 4 = 7$.

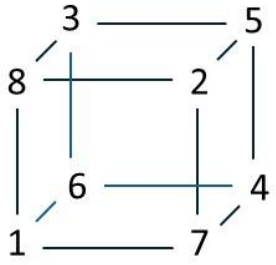


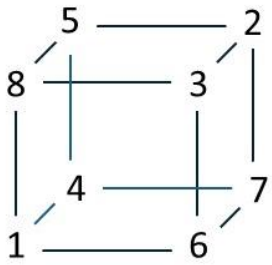
Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es ist möglich, die Zahlen in der genannten Weise an die Ecken eines Würfels zu schreiben. Eine solche Möglichkeit zeigt die Abbildung; denn bei ihr entstehen die Flächensummen

1 + 7 + 6 + 4 = 18 ; 1 + 7 + 2 + 8 = 18 ; 7 + 6 + 3 + 2 = 18 ;
6 + 4 + 5 + 3 = 18 ; 4 + 1 + 8 + 5 = 18 ; 8 + 2 + 3 + 5 = 18. ❑

Bemerkung: Um eine solche Reihenfolge zu finden, berücksichtigen wir zunächst, dass das Sechsfache der einheitlichen Flächensumme s gleich dem Dreifachen von 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 sein muss, da beim Addieren der sechs einander gleichen Flächensummen jede Ecke genau dreimal erfasst wird. Also gilt $s = 18$.

Dann können wir alle Zerlegungen von 18 in eine Summe aus vier verschiedenen unter den Zahlen 1, 2, ..., 8 bilden und eine Verteilung suchen, bei der sechs solche Zerlegungen als Flächensummen auftreten. Man kann zeigen, dass es bis Spiegelung und Drehung genau die drei Verteilungen (obere und nebenstehende Abbildungen) gibt.





Aufgabe 22.17 - MO310931. Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als ”Flächensumme” dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Lösungshinweise: Nein, dies ist nicht möglich: Gabe es eine solche Verteilung, dann müsste die Summe aller acht Flächensummen einerseits das Vierfache der Summe der sechs Zahlen, also 4 · (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 · 21 = 84, betragen, da jeder Eckpunkt an genau vier Flächen beteiligt ist, aber andererseits natürlich durch acht teilbar sein, da die acht Flächensummen alle gleich groß sein sollen.

Es ist aber 84 nicht durch 8 teilbar, sodass eine solche Verteilung der Zahlen an die Eckpunkte, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, nicht möglich ist. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Eigenſchaften[4]
einiger merkwürdigen Punkte
des
geradlinigen Dreiecks
und
mehrerer durch ſie beſtimmten
Linien und Figuren.

Eine
analytiſch-triogonometriſche Abhandlung
von
Karl Wilhelm Feuerbach[5]
der Philoſophie Doktor.

Nürnberg, 1822.
Bei Riegel und Wießner.

[Seite 15ff]

Zweiter Abſchnitt

Von Durchſchnittspunkte der Senkrechten, welche auf den Winkelpunkten des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten, gefällt ſind.

§. 19.

Wenn man auf den drei Winkelpunkten eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüberliegenden Seiten deſſelben die Senkrechten AM, BN, CP fällt, welche ſich bekanntlich in einem und eben demſelben Punkt O ſchneiden, ſo beſtimmen die Fußpunkte dieſer Senkrechten ein Dreieck MNP, welches darum merkwürdig iſt, weil es unter allen in das Dreieck ABC beſchriebenen Dreiecken den kleinſten Umfang hat *).

Es wird daher nicht unintereſſant ſeyn, dieſes Dreieck näher zu betrachten, und vor allem ſeinen Umfang und Inhalt ſelbſt, ſo wie das Verhältnis beider zum Umfang und Inhalt des vorgegebenen Dreiecks ABC zu beſtimmen.

Wenn wir die im vorigen Abſchnitt gebrauchte Bezeichnungsart für das Dreieck ABC beibehalten, ſo iſt $AP = b\cos\alpha$, $AN = c\cos\alpha$, alſo $\overline{NP}^2 = (b^2 + c^2 -$

[4] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Bertholdtr Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt. Digitalisiert zugänglich im Göttinger Digitalisierungszentrum der niedersächsischen Staats- und Universitätbibliothek Göttingen unter https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN512512426, zitiert am 02.11.2024.

[5] KARL WILHELM FEUERBACH, deutscher Mathematiker (1800 bis 1834)

$2bc\cos\alpha)\cos\alpha^2$; allein $b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2$, folglich $\overline{NP}^2=a^2\cos\alpha^2$ und $NP=a\cos\alpha$; ebenso $MP=b\cos\beta$, und $MN=c\cos\gamma$; oder, wenn man die Cosinus durch die Seiten ausdrückt:

$$MN=\frac{c\,(a^2+b^2-c^2)}{2ab}, MP=\frac{b\,(a^2-b^2+c^2)}{2ac}, NP=\frac{a\,(-a^2+b^2+c^2)}{2bc}.$$

Addirt man diese drei Werthe, so wird, weil:

$$a^2(-a^2+b^2+c^2)+b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=16\Delta^2\,,$$

$MN+MP+NP=\frac{8\Delta^2}{abc}$; und, da $\frac{abc}{4\Delta}=R$, wo R wie bisher den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises vorstellt, so kommt der gesuchte Umfang,

$$MN+MP+NP=\frac{2\Delta}{R}.$$

Zugleich ist $R(MN+MP+NP)=2\Delta$.

d.h. Das Rechteck aus dem Umfang des Dreiecks MNP in den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, ist gleich dem doppelten Inhalt des letzten Dreiecks.

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig z. B. bei A, so wird die, diesem stumpfen Winkel gegenüberliegende, Seite NP des Dreiecks MNP im Umfange negativ, so daß alsdann $MN+MP-NP=\frac{2\Delta}{R}$. Diese Bemerkung gilt eben so für die folgenden Sätze.

*) Fagnani lehrte dieß vielleicht zuerst in der Abhandl. Problemata quaedam ad methodum max, et min. spectantia. Acta Erud, mens. Juni 1775.

Termine

Runde 2 (Regionalausscheid) der 64. Mathematik-Olympiade. 13. November 2024, Informationen unter www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine.

Wissenschaft LIVE! „Epigenetik“. 0nline-Seminar am 26. November 2024, ab 15:30 Uhr. Referent: Alexander Meissner vom Max-Planck-Institut für molekulare Genetik. Information und Anmeldung unter https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-epigenetik.html

60. Wettbewerb „Jugend forscht“. 30. November 2024 online-Anmeldeschluss unter https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular.

Ab sofort neue Übersicht für Schülerangebote an der TU Chemnitz unter https://www.tu-chemnitz.de/tu/schuelerangebote/

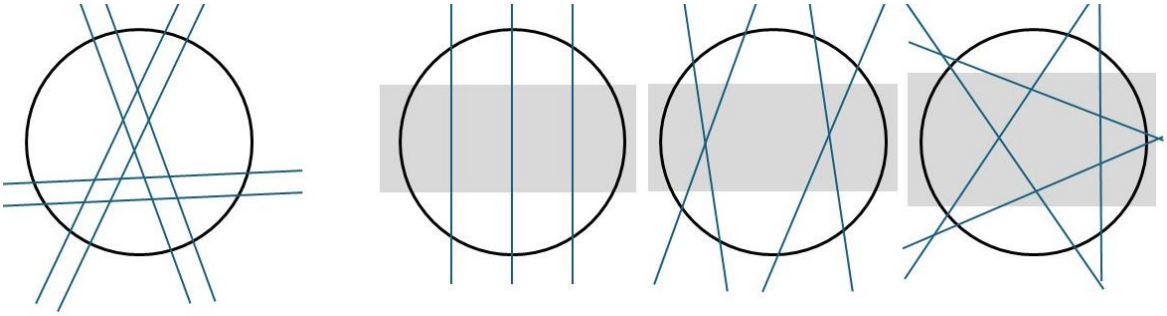
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 09/2024

Aufgabe I-2 (Individualwettbewerb der 17. MeMO, 2023, Strečno/Slowakei). Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, n Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre $2n$ Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau k andere Sehnen schneidet, wobei:

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Bemerkung: Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

Lösungshinweise zu Teil a): Jede Sehne schneidet sich und genau eine andere Sehne nicht, daher bilden die sich nicht schneidenden Sehnen Paare und n muss gerade sein. Andererseits ist die Konstruktion für jedes gerade $n \geq 2$ einfach (siehe die linke Abbildung), wenn wir die Paare als parallele Sehnen wählen.



Lösungshinweise zu Teil (b): Für $n = 3, 4, 5$ können wir die Sehnen wie in den drei rechten Abbildungen zeichnen: Jede eingezeichnete Sehne schneidet genau 0, 1 bzw. 2 der anderen Sehnen. Von einer solchen Zeichnung mit $n = 3, 4, 5$ können wir nun eine passende Zeichnung mit $n + 3k$ erstellen, indem wir k Dreiergruppen von parallelen Linien innerhalb des grauen Streifens hinzufügen: Jede bestehende Sehne kreuzt alle neu hinzugefügten Sehnen, schneidet also genau die 2 anderen Sehnen nicht, die sie vorher nicht geschnitten hat. Jede neu hinzugefügte Sehne kreuzt alle anderen Sehnen mit Ausnahme der beiden anderen Sehnen in seinem Tripel. ❑

Monatsaufgabe 11/2024[6]

Betrachte die zwei unendlichen Folgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$ reeller Zahlen mit $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ und $a_{k+1} = b_k$, $b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$.

Zeige, dass $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

[6] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.12.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 19.2 – Maximale Eigenschaften von ebenen Figuren 3
MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Lineare Gleichungssysteme 10
MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren 12
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Termine 17
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 9/2024 17
Monatsaufgabe 11/2024 18

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[7]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (August)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

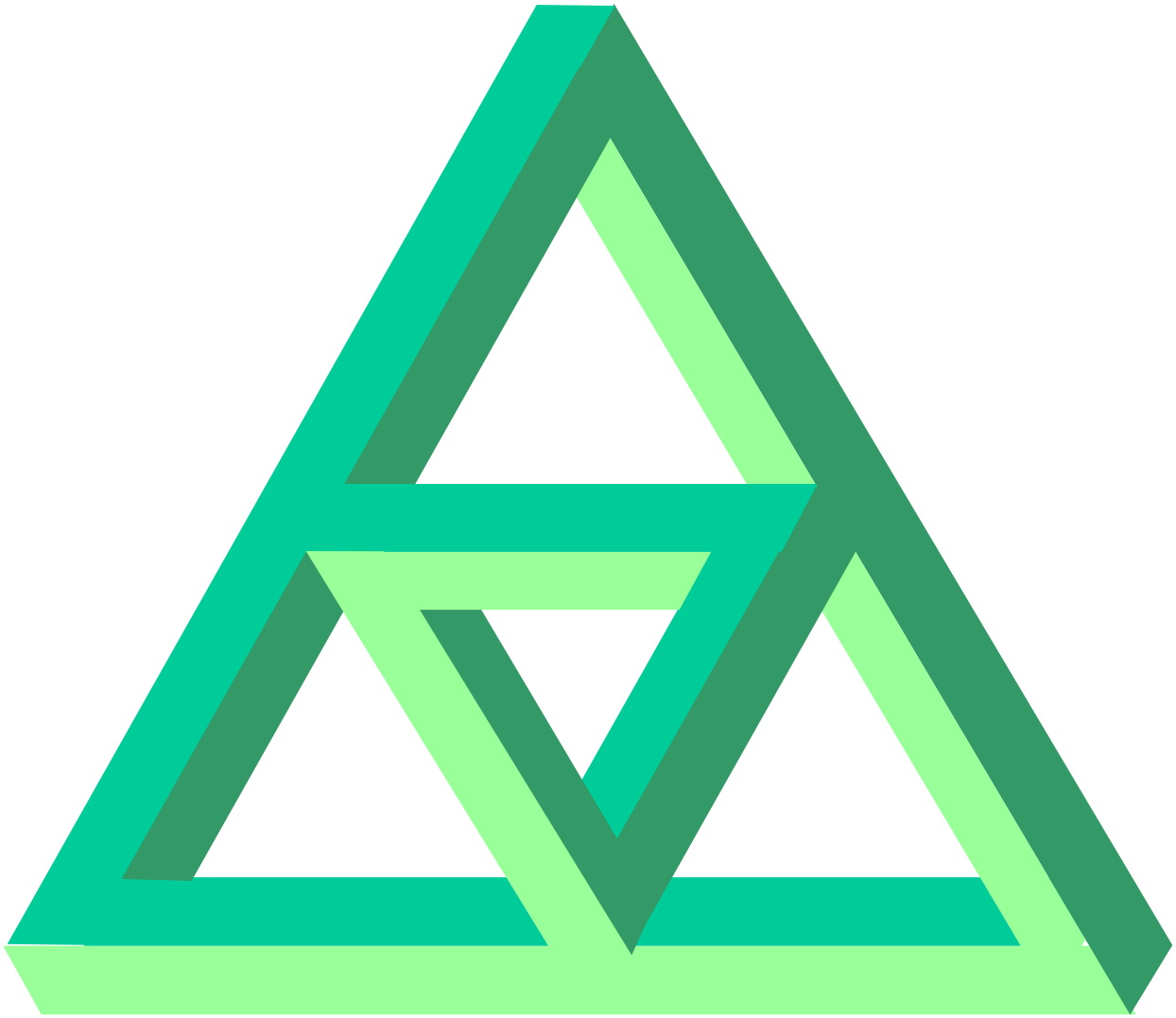
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

[7] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2024 (Dezember 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir setzen den Rückblick auf die Aufgaben der Schulrunde der 64. MO fort und diskutieren mit Bezug zur Aufgabe **MO641011** das Thema diophantische Gleichungen. Aufgrund der geforderten Ganzzahligkeit der Lösungen sind für diese Gleichungen diese durch systematisches Probieren leicht zu finden. Im Kern der Aufgabe geht es dann um die Ermittlung aller Lösungen, die durch Vertauschen der Variablenbelegung möglich sind. Komplexere Vorgänger begegnen uns in den Aufgaben **MO601012** und **MO621046.** Auch hierbei hilft systematische Probieren für Lösungsideen. Für einen allgemeinen Zugang ist jedoch ein geeigneter Ausdruck zu finden, dessen Herleitung aber nicht in der Lösungsdarstellung angegeben werden muss. In den offiziellen Musterlösungen der Aufgabenkommission wird ein Verfahren gezeigt, wie solche passenden Lösungen generiert werden können, das wir in diesem Heft widergeben.

Wir greifen die Aufgabe **KZM 2-5A** des diesjährigen sächsischen Korrespondenzzirkels auf und untersuchen den FERMAT-Punkt. Dabei können wir erneut Konstruktions-methoden verwenden, die dessen Lage als Optimierungsaufgabe verstehen.

Wir informieren über den Bundeswettbewerb Mathematik, der mit der Veröffentlichung der Aufgaben zur 1. Runde in den Jahrgang 2025 startet.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 30 – Diophantische Gleichungen

Eine **diophantische Gleichung** ist eine Gleichung mit mehreren Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden. Diese Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (um 250) benannt. Mit Bezug zur 1. Stufe der diesjährigen MO betrachten wir Gleichungen zweiten Grades. Typische Fragestellungen umfassen die Suche nach einer, mehrerer oder aller ganzzahligen Lösungen. Oft ist auch die Frage interessant, ob es unendlich oder endlich viele verschiedene Lösungen gibt, wobei im letzten Fall die Anzahl gesucht wird:

Aufgabe MO641011.

a) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
b) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Hinweis: Eine Lösung ist ein geordnetes Tripel (x, y, z), welches die jeweilige Gleichung erfüllt.

Hinweis: Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2 = 4$ hat genau sechs ganzzahlige Lösungen, die alle (paarweise) verschieden sind: (0, 0, 1), (0, 0,−1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (−2, 0, 0), (0,−2, 0).

Lösungshinweise: Als Stammlösung bezeichnen wir eine Lösung mit nichtnegativen, aufsteigend angeordneten Komponenten, also eine solche mit $0 \leq x \leq y \leq z$. Zu jeder Lösung gibt es genau eine Stammlösung, die wir erhalten, wenn wir zu Beträgen übergehen und dann das Tripel aufsteigend anordnen. Umgekehrt können aus den Stammlösungen alle anderen Lösungen durch Permutation und Vorzeichenwechsel gewonnen werden, was in jedem Fall genauer zu untersuchen ist.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Es gibt offensichtlich keine Stammlösungen mit $z \leq 1$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen 3 nicht übersteigt) oder $z \geq 3$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen mindestens 9 beträgt). Also muss für eine Stammlösung $z = 2$ gelten und weiter $x^2 + y^2 = 1$ Die einzige Stammlösung ist also $(x, y, z) = (0,1,2)$, woraus durch Vorzeichenwechsel vier Lösungen $(x, y, z) = (0, \pm 1, \pm 2)$ und daraus durch Permutation insgesamt $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Lösungen erzeugt werden können. Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ hat also genau 24 ganzzahlige Lösungen.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es gibt offensichtlich keine Stammlösungen mit $z \leq 1$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen 3 nicht übersteigt) oder $z \geq 4$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen mindestens 16 beträgt). Also muss für eine Stammlösung $z = 2$ oder $z = 3$ gelten.

Ist in einer Stammlösung $z = 3$, so muss $x^2 + y^2 = 0$ sein, was zur Stammlösung $(x, y, z) = (0,0,3)$ führt, aus der durch Vorzeichenwechsel und Permutation insgesamt 6 Lösungen erzeugt werden können: (0, 0, 3), (0, 0,−3), (0, 3, 0), (0,−3, 0), (3, 0, 0) und (−3, 0, 0).

Ist in einer Stammlösung $z = 2$, so gilt $x^2 + y^2 = 5$. Damit muss $y = 2$ sein und $x = 1$, woraus sich die einzige Stammlösung $(x, y, z) = (1,2,2)$ ergibt. Um alle Lösungen aus dieser Stammlösung zu ermitteln, wird eine Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl a der positiven Zahlen im Tripel durchgeführt.
Fall 1: $a = 3$: Durch Vertauschungen (Permutationen) erhalten wir aus (1, 2, 2) noch zwei weitere Lösungen: (2, 1, 2) und (2, 2, 1).

Fall 2: $a = 2$: Ausgangspunkt der Überlegungen sind die drei Lösungen (−1, 2, 2), (1,−2, 2) und (1, 2,−2). Aus der ersten erhalten wir durch Vertauschen zwei weitere Lösungen: (2,−1, 2) und (2, 2,−1). Vertauschungen von (1,−2, 2) ergeben fünf weitere Lösungen: (1, 2,−2), (−2, 1, 2), (−2, 2, 1), (2, 1,−2) und (2,−2, 1), also insgesamt sechs Lösungen. Die Permutationen von (1, 2,−2) führen auf dieselben sechs Lösungen.

Fall 3: $a = 1$: Hier gehen wir von den drei Lösungen (−1,−2, 2), (−1, 2,−2) und (1,−2,−2) aus. Permutiert man (−1,−2, 2), so erhält man fünf weitere Lösungen: (−1, 2,−2), (−2,−1, 2), (−2, 2,−1), (2,−1,−2) und (2,−2,−1). Die Permutationen von (−1, 2,−2) führen auf dieselben sechs Lösungen. Aus (1,−2,−2) ergeben sich weiterhin (−2, 1,−2) und (−2,−2, 1). Insgesamt sind es in diesem Fall neun Lösungen.

Fall 4: $a = 0$: Die zugehörigen Lösungen sind hier die Tripel (−1,−2,−2), (−2,−1,−2) und (−2,−2,−1).

An der Aufzählung der Lösungen in den Fällen wird deutlich, dass keine Lösung doppelt auftritt. Weiterhin kann keine Lösung fehlen, denn bei der Untersuchung der einzelnen Fälle wurden durch die Systematik alle Möglichkeiten erfasst.

Die Gesamtzahl der ganzzahligen Lösungen beträgt in diesem Aufgabenteil also 6 + 3 + 3 + 6 + 9 + 3 = 30. ❑

Aufgabe MO601012. Wir betrachten in dieser Aufgabe Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen und untersuchen, welche von ihnen Lösungen der Gleichung $a^2 + 3 \cdot a \cdot b = c^2$ (1) sind. So ist das Tripel (2, 16, 10) eine Lösung von (1), weil $2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 16 = 10^2$ wahr ist.

a) Geben Sie zwei weitere Lösungen von (1) an.
b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele Lösungen hat.
c) Wie viele Lösungen gibt es, wenn zusätzlich $c = 2 \cdot a + 3$ gilt?

$Lösungshinweise$: Wir erkennen, dass a Teiler von c^2 ist, da

$$a^2 + 3 \cdot a \cdot b = a \cdot (a + 3 \cdot b) = c^2$$

gilt. Allerdings folgt daraus nicht, dass a ein Teiler von c ist, wie das zweite Beispiel in Teil a) zeigt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a):

(1, 1, 2) ist Lösung, da $1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4 = 2^2$ gilt.

(4, 7, 10) ist ebenfalls Lösung, da $4^2 + 3 \cdot 4 \cdot 7 = 100 = 10^2$ gilt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Zunächst formen wir die Gleichung (1) um zu $3 \cdot a \cdot b = c^2 - a^2 = (c - a) \cdot (c + a)$.

Wählen wir z.B. $c = 4 \cdot a$, dann folgt für b die Beziehung $b = 5 \cdot a$. Tatsächlich ist $(a, 5a, 4a)$ Lösung, denn es gilt $a^2 + 3 \cdot a \cdot 5 \cdot a = 16 \cdot a^2 = (4 \cdot a)^2$. Da a aus der Menge der positiven ganzen Zahlen frei wählbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen.

Lösungsvariante: Wie oben festgestellt, ist (4, 7, 10) Lösung. Wählen wir nun eine beliebige positive ganze Zahl g, dann ist auch $(4 \cdot g, 7 \cdot g, 10 \cdot g)$ Lösung, da $(4 \cdot g)^2 + 3 \cdot (4 \cdot g) \cdot (7 \cdot g) = (10 \cdot g)^2$ ebenfalls wahr ist.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Wenn $c = 2a + 3$ ist, dann erhalten wir aus (1) die Bedingung $a^2 + 3 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 9$ und daraus

$$b = \frac{a^2 + 4a + 3}{a} = a + 4 + \frac{3}{a}.$$

Da a und b (positive) ganze Zahlen sind, muss auch $\frac{3}{a}$ eine ganze Zahl sein. Das ist nur für $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ der Fall. Die zugehörigen Tripel lauten (1, 8, 5) und (3, 8, 9). Sie sind tatsächlich Lösungen, da $1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 8 = 25 = 5^2$ und $3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 8 = 81 = 9^2$ ist. Es gibt also genau zwei Lösungen.

Lösungsvariante: Aus der Gleichung $a^2 + 3 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 9$ erhalten wir $a \cdot b = a^2 + 4 \cdot a + 3$ und daraus $a \cdot b = (a + 1) \cdot (a + 3)$.

Fall 1: Wenn $a = 1$ ist, dann erhalten wir $b = 8$ und $c = 5$. Die Probe (siehe oben) bestätigt, dass (1, 8, 5) tatsächlich Lösung ist.

Fall 2: Wenn $a > 1$ und somit $a \geq 2$ ist, dann muss a ein Teiler von $a + 3$ sein, da in diesem Fall $a + 1$ als Nachfolger von a keine gemeinsamen Teiler größer als 1 mit a haben kann. Wenn a ein Teiler von $a + 3$ ist, dann muss a ein Teiler von 3 sein. Die (positiven) Teiler von 3 sind 1 und 3 und es geht weiter wie oben. ❑

Aufgabe MO621036. Wir betrachten im Folgenden ganzzahlige Lösungen (x, y) der Gleichung $y^2 - x \cdot y + 2x^2 = n$, wobei n eine ganze Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass für jedes n die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) dieser Gleichung endlich ist.
b) Zeigen Sie: Wenn $n > 0$ keine Quadratzahl und nicht das 7-Fache einer Quadratzahl ist, dann ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) dieser Gleichung durch 4 teilbar.
c) Beweisen Sie: Für jede ganze Zahl $k \geq 0$ ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $y^2 - x \cdot y + 2x^2 = 2023^k$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): $y^2 - x \cdot y + 2x^2 = n$ gilt genau dann, wenn

$$\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \cdot x^2 = n$$

ist. Daraus folgt, dass für ein Lösungspaar (x, y) stets $\frac{7}{4} \cdot x^2 \leq n$ und somit $|x| \leq \sqrt{\frac{4}{7} \cdot n}$, also

$$-\sqrt{\frac{4}{7} \cdot n} \leq x \leq \sqrt{\frac{4}{7} \cdot n}$$

erfüllt sein muss. Für die Anzahl $M(n)$ der Möglichkeiten für die x-Werte der Lösungen zu gegebenem n gilt also $M(n) \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{7} \cdot n} + 1$. Für gegebenes n und x handelt es sich dabei um eine quadratische Gleichung in y mit maximal zwei Lösungswerten. Insgesamt gibt es also höchstens $2 \cdot M(n)$ Lösungspaare zu gegebenem n, also endlich viele.

Bemerkung: Für $n < 0$, aber auch für manche positive n wie z.B. $n = 3$, gibt es gar keine Lösungen (x, y).

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es bezeichne (a, b) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl $n > 0$. Ist (a, y) eine weitere Lösung der Gleichung, so gilt

$$y^2 - a \cdot y + 2 \cdot a^2 = n = b^2 - a \cdot b + 2 \cdot a^2$$

Es folgt

$$(y^2 - ay + 2 \cdot a^2) - (b^2 - a \cdot b + 2 \cdot a^2)$$
$$= (y^2 - b^2) - (ay - ab) = (y - b) \cdot (y + b - a) = 0$$

also $y = b$ oder $y = a - b$, womit $(a, a - b)$ als einzige weitere Lösung in Frage kommt. Eine Probe bestätigt, dass $(a, a - b)$ der Gleichung

$$(a - b)^2 - a \cdot (a - b) + 2 \cdot a^2 = b^2 - ab + 2 \cdot a^2 = n$$

genügt. Damit sind (a, b) und $(a, a-b)$ die einzigen Lösungen der Gleichung mit $x = a$. Diese beiden Lösungen fallen genau dann zusammen, wenn $b = a - b$, also $a = 2b$ gilt. In diesem Fall ist $n = b^2 - ab + 2 \cdot a^2 = 7 \cdot b^2$ das 7-Fache einer Quadratzahl, was jedoch ausgeschlossen ist.

Mit $(-y)^2 - (-x) \cdot (-y) + 2(-x)^2 = y^2 - x \cdot y + 2x^2$ ist (x, y) genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn $(-x, -y)$ eine Lösung ist. Insbesondere sind damit $(-a, -b)$ und $(-a, -(a - b))$ die einzigen Lösungen der Gleichung mit $x = -a$. Diese zwei Lösungen sind von den Lösungen (a, b) und $(a, a - b)$ verschieden, es sei denn, wir haben $a = -a$, also $a = 0$. In diesem Fall ist $n = b^2 - ab + 2 \cdot a^2 = b^2$ eine Quadratzahl, was jedoch ausgeschlossen ist.

Zusammenfassung: Falls zu gegebenem n eine ganzzahlige Lösung (a, b) der Gleichung existiert, so sind $(a, b), (a, a-b), (-a, -b)$ und $(-a, -(a-b))$ die einzigen Lösungen der Gleichung mit $|x| = |a|$. Falls n weder eine Quadratzahl noch das 7-Fache einer Quadratzahl ist, so sind diese vier Lösungen jeweils paarweise verschieden und die Lösungsmenge lässt sich in Teilmengen zu je vier Elementen aufteilen. Die Anzahl der Lösungen ist damit aber durch 4 teilbar.

Falls zu dem gegebenen n keine ganzzahlige Lösung (a, b) der Gleichung existiert, so ist die Anzahl der Lösungen gleich null, also ebenfalls durch 4 teilbar.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Wie bereits in Teilaufgabe b) gesehen, lässt sich die Lösungsmenge, falls sie nicht leer ist, in Teilmengen aufteilen, die jeweils aus Lösungspaaren $(a, b), (a, a-b), (-a, -b)$ und $(-a, -(a-b))$ bestehen. Diese Teilmengen enthalten dabei im Regelfall jeweils vier Elemente. Ausnahmen sind nur möglich, wenn n eine positive Quadratzahl oder das 7-Fache einer positiven Quadratzahl ist.

Falls $n = m^2$ mit $m > 0$ eine positive Quadratzahl ist, so existiert eine Lösung, nämlich $(a, b) = (0, m)$. Genau für $a = 0$ fallen Lösungen zusammen. In diesem Fall besteht die zugehörige Teilmenge aus genau den zwei Elementen $(0, m)$ und $(0, -m)$. Falls es weitere Teilmengen gibt, haben sie alle genau vier Elemente.

Falls $n = 7 \cdot m^2$ mit $m > 0$ das 7-Fache einer positiven Quadratzahl ist, so existiert eine Lösung, nämlich $(a, b) = (2m, m)$. Genau für $a = 2b$ fallen Lösungen zusammen. In diesem Fall besteht die zugehörige Teilmenge aus genau den zwei Elementen $(2m, m)$ und $(-2m, -m)$. Falls es weitere Teilmengen gibt, haben sie alle genau vier Elemente.

Ergänzend zur Teilaufgabe b) folgt damit: Die Anzahl der Lösungen ist gerade, aber nicht durch 4 teilbar, wenn n eine positive Quadratzahl oder das 7-Fache einer positiven Quadratzahl ist.

Für gerades $k = 2m$ ist $2023^k = (2023^m)^2$ eine positive Quadratzahl, für ungerades $k = 2m + 1$ ist $2023^k = 7 \cdot (17 \cdot 2023^m)^2$ das 7-Fache einer positiven Quadratzahl, womit der Beweis abgeschlossen ist. ❑

Aufgabe MO621046. Zu jeder positiven ganzen, nicht durch 3 teilbaren Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Lösungspaare (a, b) der Diophantischen Gleichung $a^2 + 2 \cdot b^2 = 3 \cdot n$ (1) mit positiven ganzen Zahlen a, b.

Beweisen Sie, dass $r(n)$ genau dann ungerade ist, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl m gibt, für die $n = m^2$ oder $n = 2 \cdot m^2$ gilt.

Vorbemerkungen: Um uns dem Lösungsansatz zu nähern, betrachten wir zunächst die genannten Sonderfälle. Offenbar ist für $n = m^2$ das Paar (m, m) wegen der Gleichung $m^2 + 2 \cdot m^2 = 3 \cdot m^2$ eine Lösung. Für kleine Werte von n finden wir außer dieser trivialen Lösung keine weiteren ganzzahligen Lösungen. Also ist dafür die Anzahl der Lösungen gleich 1 und somit ungerade. Zudem ist für $n = 2 \cdot m^2$ das Paar $(2 \cdot m, m)$ wegen der Gleichung $(2 \cdot m)^2 + 2 \cdot m^2 = 6 \cdot m^2 = 3 \cdot 2 \cdot m^2$ eine Lösung. Für kleine Werte von n finden wir auch unter dieser Voraussetzung keine weiteren ganzzahligen Lösungen. Also ist auch dafür die Anzahl der Lösungen gleich 1 und somit ungerade.

Durch systematisches Probieren finden wir zum Beispiel für $n = 11$:

$$3 \cdot 11 = 1^2 + 2 \cdot 4^2 = 5^2 + 2 \cdot 2^2$$

und erhalten so die beiden Lösungen $(1, 4)$ und $(5, 2)$. Für $n = 17$ finden wir wegen

$$3 \cdot 17 = 51 = 1^2 + 2 \cdot 5^2 = 7^2 + 2 \cdot 1^2$$

die beiden Lösungen (1, 5) und (7, 1). Durch vollständiges Probieren können wir nachweisen, dass es jeweils keine weiteren Lösungen gibt. Somit gibt es jeweils eine gerade Anzahl von Lösungspaaren.

Finden wir für einige Werte von n keine ganzzahligen Lösungen, so gilt $r(n) = 0$ und die Behauptung ist ebenfalls erfüllt.

Lösungshinweise: Die Anzahl der Lösungen von (1) in positiven ganzen Zahlen ist wegen $|a|, |b| < \sqrt{3 \cdot n}$ endlich. Für jedes Lösungspaar (a, b) ist keine der beiden Zahlen durch 3 teilbar. In der Tat, wäre etwa a durch 3 teilbar, so müsste es auch b sein. Dann wäre aber $a^2 + 2 \cdot b^2 = 3 \cdot n$ durch 9 teilbar, was im Widerspruch zur Voraussetzung an n steht.

Wenn wir ein Lösungspaar (a, b) gefunden haben, dann suchen wir ein dazu eindeutig passendes Lösungspaar (a', b'). Lassen a und b bei Division durch 3 unterschiedliche Reste (wie zum Beispiel bei (2, 5) für $n = 17$), so ist $a' = \frac{a+b}{3}$ wieder eine positive ganze Zahl. Nehmen wir an, dass es dazu ein passendes b‘ gibt, so muss gelten

$$a'^2 + 2 \cdot b'^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} + 2 \cdot b'^2 = 3n$$

Diese Gleichung wäre erfüllt, wenn

$$2 \cdot b'^2 = \frac{8}{9}a +^2 \frac{17}{9} \cdot b^2 - \frac{2ab}{9}$$

gilt. Es ist nicht erkennbar, ob auf diese Weise b' für alle a' als ganze Zahl definiert werden kann. Es ist aber auch $a' = \frac{a+4b}{3} = \frac{a+b}{3} + b$ wieder eine positive ganze Zahl. Damit finden wir

$$a'^2 + 2 \cdot b'^2 = \frac{a^2 + 8ab + 16b^2}{9} + 2 \cdot b'^2 = 3n$$

Diese Gleichung wäre erfüllt, wenn

$$2 \cdot b'^2 = \frac{8}{9}a^2 + \frac{2}{9} \cdot b^2 - \frac{8ab}{9}$$

gilt. Dies gelingt uns aber mit $b'^2 = \frac{1}{9}(4a^2 - 4ab + b^2) = \frac{1}{9}(2a - b)^2$. Also erhalten wir für $b' = \frac{|2a-b|}{3}$ ein zu (a, b) passendes Lösungspaar (a', b'). Damit treten im Fall, dass a und b bei Division durch 3 unterschiedliche Reste lassen, Lösungspaare in gerader Zahl auf, wenn die passenden Lösungspaare tatsächlich verschieden sind. Eine Ausnahme finden wir im Fall $a = a'$ und $b = b'$, also wenn gilt

$$a = \frac{a + 4b}{3} \quad \leftrightarrow \quad a = 2b.$$

Diese Bedingung führt gleichzeitig zu $b' = b$, d.h. in diesem Fall existiert eine einzelne Lösung, so dass $r(n)$ ungerade ist. Gilt $a = 2b$, so lautet die Gleichung (1)

$$a^2 + 2 \cdot b^2 = 4 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 = 6 \cdot b^2 = 3 \cdot (2 \cdot b^2) = 3 \cdot n,$$

also ist $r(n)$ genau dann ungerade, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl b gibt, für die $n = 2 \cdot b^2$ gilt. In diesem Fall existiert immer diese einzelne Lösung, unabhängig davon, ob es weitere paarweise Lösungspaare gibt.

Mit ähnlicher Argumentation setzen wir fort: Lassen a und b bei Division durch 3 gleiche Reste (wie zum Beispiel für $n = 11$), so ist $a' = \frac{|a-4b|}{3}$ wieder eine positive ganze Zahl. Nehmen wir an, dass es ein dazu einpassendes b' gibt, so muss gelten

$$a'^2 + 2 \cdot b'^2 = \frac{a^2 - 8ab + 16b^2}{9} + 2 \cdot b'^2 = 3n$$

Diese Gleichung wäre erfüllt, wenn

$$2 \cdot b'^2 = \frac{8}{9}a^2 + \frac{2}{9} \cdot b^2 + \frac{8ab}{9}$$

gilt. Dies gelingt uns aber mit $b'^2 = \frac{2}{9}(4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{1}{9}(2a + b)^2$. Also erhalten wir für $b' = \frac{2a+b}{3}$ ein zu (a, b) passendes Lösungspaar (a', b'). Damit treten im Fall, dass a und b bei Division durch 3 gleiche Reste lassen, Lösungspaare in gerade Zahl auf, wenn die passenden Lösungspaare tatsächlich verschieden sind. Eine Ausnahme finden wir im Fall $a = a'$ und $b = b'$, also wenn gilt

$$b = \frac{2a + b}{3} \quad \leftrightarrow \quad a = b.$$

Diese Bedingung führt gleichzeitig zu $a' = a$, d.h. in diesem Fall existiert eine einzelne Lösung, so dass $r(n)$ ungerade ist. Gilt $a = b$, so lautet die Gleichung (1)

$$a^2 + 2 \cdot b^2 = a^2 + 2 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot n,$$

also ist $r(n)$ genau dann ungerade, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl a gibt, für die $n = a^2$ gilt. In diesem Fall existiert immer diese einzelne Lösung, unabhängig davon, ob es weitere paarweise Lösungspaare gibt.

Außerdem können nicht beide einzelnen Lösungen gleichzeitig auftreten, da sich die Bedingungen gegenseitig ausschließen. ❑

Anmerkung der Aufgabenkommission: Eine grundsätzliche heuristische Vorgehensweise ist nicht als Teil einer vollständigen Lösung zu erwarten. Für eine vollständige Lösung reicht es, f wie in (2) zu definieren und die danach zusammengefassten Eigenschaften zu zeigen (was einfach ist); die Angabe, wie man auf so ein f kommt, ist nicht notwendig (und würde sich im Zweifel partiell auf einem Konzeptblatt wiederfinden). In den Lösungshinweisen wird die grundsätzliche heuristische Vorgehensweise erläutert, die zu den Lösungspaaren führt. Dazu wird die

Involution

als eine selbstinverse Abbildung eingeführt. Die Bezeichnung leitet sich von dem lateinischen Wort *involvere* „einwickeln“ ab.

Definition. Eine Abbildung $f: A \to A$ mit übereinstimmender Definitions- und Zielmenge A heißt genau dann eine *Involution*, wenn für alle $x \in A$ gilt: $f(f(x)) = x$.

Beispiele. Negatives und Kehrwert: Die Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$$

und

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$$

sind Involutionen, denn es gilt

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R}\text{: } -(-x) = x$$

bzw.

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R}, x \neq 0\text{: } \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

Logik: Die Negation in der klassischen Logik ist ebenfalls eine Involution, denn es gilt für alle x: $\neg(\neg x) \leftrightarrow x$.

Es sei $L = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + 2 \cdot b^2 = 3 \cdot n\}$ die Lösungsmenge der Gleichung (1) mit ganzen Zahlen. Wir untersuchen, ob Lösungen $s \in L$ „normalerweise“ in Paaren vorkommen, indem wir nach einer zu sich selbst inversen Abbildung $f: L \to L$ (einer Involution) suchen, die $s = (a,b) \in L$ auf $s' = f(s) = (a',b') \in L$ und s' auf $f(s') = s$ abbildet. Die Zuordnung $s \leftrightarrow s'$ induziert dann eine Paarbildung, wenn $s \neq s'$ gilt. Ist $s = s'$ möglich, so gibt es in L auch gewisse bzgl. f „singuläre“ Elemente.

Um eine solche Involution f zu finden, setzen wir $a' = u_1 a + u_2 b, b' = v_2 a + v_2 b$ mit unbestimmten Koeffizienten u_1, u_2, v_1, v_2 und leiten (hinreichende – wir wollen nicht alle denkbaren Involutionen, sondern nur eine für unsere Zwecke geeignete finden) Bedingungen für diese Koeffizienten ab. Damit f eine Involution ist, muss

$$a'' = u_1 a' + u_2 b' = u_1(u_1 a + u_2 b) + u_2(v_1 a + v_2 b) = a$$

und

$$b'' = v_1 a' + v_2 b' = v_1(u_1 a + u_2 b) + v_2(v_1 a + v_2 b) = b$$

gelten. Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$u_1^2 + u_2 \cdot v_1 = 1\,, u_2 \cdot (u_1 + v_2) = 0\,, v_1 \cdot (u_1 + v_2) = 0, v_2^2 + u_2 \cdot v_1 = 1$$

die für $v_2 = -u_1$ und $u_1^2 + u_2 \cdot v_1 = 1$ erfüllt sind.
Damit $s' = f(s) \in L$ für $s \in L$ erfüllt ist, muss

$$3 \cdot n = a^2 + 2 \cdot b^2 = a'^2 + 2 \cdot b'^2 = (u_1 \cdot a + u_2 \cdot b)^2 + 2 \cdot (v_1 \cdot a + v_2 \cdot b)^2$$
$$= (u_1^2 + 2 \cdot v_1^2) \cdot a^2 + (2 \cdot u_1 \cdot u_2 + 4 \cdot v_1 \cdot v_2) \cdot a \cdot b + (u_2^2 + 2 \cdot v_2^2) \cdot b^2$$

gelten, was für $u_1^2 + 2 \cdot v_1^2 = 1, u_2 - 2v_1 = 0, u_2^2 + 2u_1^2 = 2$ erfüllt ist, wobei in den letzten beiden Beziehungen $v_2 = -u_1$ verwendet wurde. Setzen wir $u_1 = -v_2 = u$, $v_1 = v$ und damit $u_2 = 2 \cdot v_1 = 2 \cdot v$, so sind die linearen Transformationen $a' = u \cdot a + 2 \cdot v \cdot b$, $b' = v \cdot a - u \cdot b$ mit rationalen u, v, die $u^2 + 2 \cdot v^2 = 1$ erfüllen, gute Kandidaten für eine Involution f mit den oben beschriebenen Eigenschaften.

Eine rationale Lösung der Gleichung $u^2 + 2 \cdot v^2 = 1$ ist $\left(u = \frac{1}{3}, v = \frac{2}{3}\right)$. Diese Lösung führt auf die Involutionen

$$f(a,b) = \left(a' = \frac{a+4b}{3}, b' = \frac{|2a-b|}{3}\right) \quad (2.1)$$

$$f(a,b) = \left(a' = \frac{|a-4b|}{3}, b' = \frac{2a+b}{3}\right) \quad (2.2)$$

Damit die Involution für unsere Zwecke verwendet werden kann, müssen a' und b' noch ganzzahlig sein. Das ist genau für (2.1) dann der Fall, wenn $a + 4 \cdot b$ und $2 \cdot a - b$ durch 3 teilbar sind, also im Fall $a + 4 \cdot b \equiv a + b \equiv 0 \ (mod\ 3)$ und genau für (2.2) dann der Fall, wenn $a - 4 \cdot b$ und $2 \cdot a + b$ durch 3 teilbar sind, also im Fall $a - 4 \cdot b \equiv a - b \equiv 0 \ (mod\ 3)$. Das ist jeweils in der „Hälfte“ der Fälle so, denn zwei nicht durch 3 teilbare Zahlen a und b lassen bei Division durch 3

– entweder denselben Rest, dann ist $a - b \equiv 0 \ (mod\ 3)$,
– oder verschiedene Reste, dann ist $a + b \equiv 0 \ (mod\ 3)$.

Wir fassen das Ergebnis der Untersuchungen zusammen: Auf der Menge $L = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + 2b^2 = 3n, a \pm b \equiv 0 \ (mod\ 3)\}$ sind die in (2.1) bzw. (2.2) beschriebenen Abbildungen Involutionen, also Abbildungen, bei denen für $s = (a,b) \in L$ stets $s' = f(s) \in L$ und $s'' = f(s') = s$ gilt. Wegen

$$a' + b' = \frac{a+4b}{3} + \frac{|2a-b|}{3} = a + b \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

$$a' + b' = \frac{|a-4b|}{3} + \frac{2a+b}{3} = a - b \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

ist in der Tat mit $s \in L$ auch $s' \in L$.

Die Fachbegriffe werden in der Musterlösung lediglich verwendet, um eine Verbindung der benutzten Ideen zur weiterführenden Literatur zu schaffen. Die hier genutzte Art der Paarbildung, um gerade Anzahlen von ungeraden zu unterscheiden, ist eben eine so oft hilfreiche Heuristik, dass die verwendete Sorte von Funktionen sogar einen eigenen Namen bekommen hat. Es ist nicht nötig, diese Fachbegriffe zu kennen oder zu verwenden.

Die grundsätzliche heuristische Vorgehensweise für sich genommen ist aber durchaus ein wesentlicher Schritt hin zur Lösung der Aufgabe und das Verfolgen des dort geschilderten Ansatzes ist durchaus bei nicht gelungenem Beweis Teilpunkte wert, selbst wenn in der Abgabe nur relevante Teile dieses heuristischen Vorgehens geschildert sind.

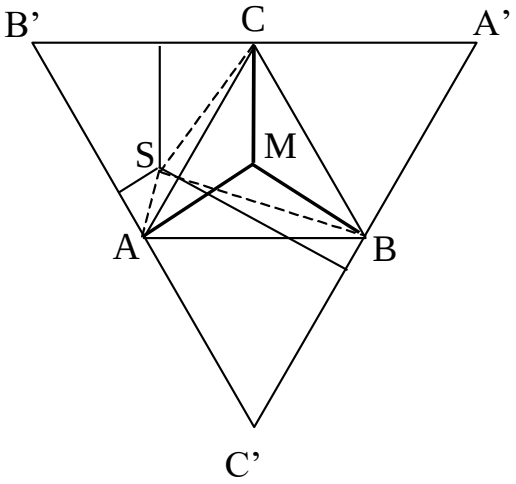
Hat man den Beweis also auf Konzeptpapier nicht gefunden, ist es durchaus sinnvoll, kluge Ideen zum Finden eines Beweises auf die Reinschrift zu übertragen, die man bei gefundenem Beweis dort nicht mehr benötigt.

Konstruktion des Fermat-Punktes[3]

Aufgabe KZM 2-5A. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, sodass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker, 1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.
(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT -Punkt.
(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180° einen FERMAT -Punkt?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Schnittpunkt M der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der FERMAT-Punkt. Betrachten wir das gleichseitige Dreieck $\Delta A'B'C'$, das aus ΔABC durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist M auch der Höhenschnittpunkt von $\Delta A'B'C'$.

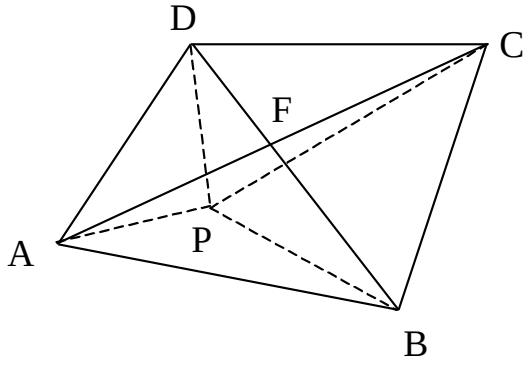


Im gleichseitigen Dreieck $\Delta A'B'C'$ ist nach dem Satz von VIVIANI[4] die Summe der Abstände eines inneren Punktes S zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant und gleich der Höhe des Dreiecks $\Delta A'B'C'$.

Der *Beweis* dieser Aussage ist einfach: Man betrachte die Dreiecke $\Delta A'B'S$, $\Delta B'C'S$ und $\Delta A'C'S$. Die Summe der drei Flächeninhalte ist so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'B'C'$. Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks als das halbe Produkt von Grundseite und Höhe berechnet und in den Teildreiecken die Grundseiten jeweils der Grundseite des Gesamtdreiecks entsprechen, folgt die Behauptung, dass die Summe der Höhen der Teildreiecke gleich der Höhe im Gesamtdreieck ist.

[3] Nach Engelhaupt, H.: Kürzeste Wege (Teil I). In: Mathematikinformation Nr. 41. Universität Gesamthochschule Kassel, 2004.
[4] VINCENZO VIVIANI, italienischer Mathematiker, 1622–1703

(Für M stimmt die gesuchte Summe mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein.) Die Abstände von S zu den Eckpunkten A, B und C können aber nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten sein. Liegt dagegen S außerhalb des Dreiecks $\Delta A'B'C'$, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von M aus.



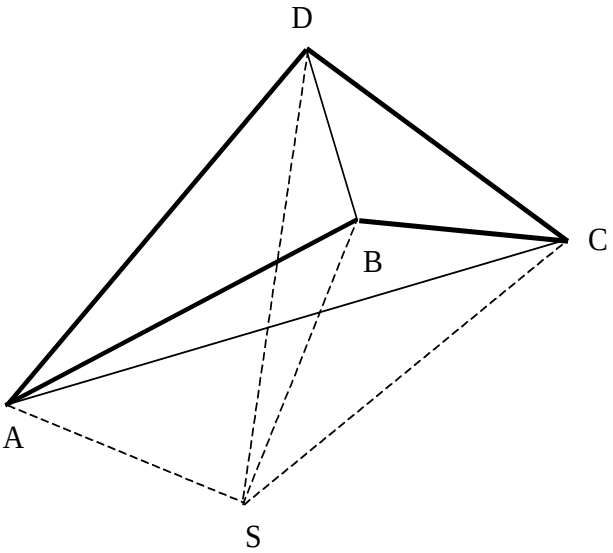
Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es sei F der Schnittpunkt der Diagonalen und P ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken ΔAPC bzw. ΔDPB:

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{CP}\right| \geq \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FC}\right|$$
$$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PD}\right| \geq \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{FD}\right|$$

Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der beiden Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von P zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalenschnittpunktes zu allen Eckpunkten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (in der Skizze B) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist dieser Eckpunkt der FERMAT-Punkt. Es sei S ein beliebiger, von B verschiedener Punkt der Ebene.

Die drei Dreiecke ΔASC, ΔCSD und ΔDAS überdecken das Dreieck ΔACD und somit das konkave Viereck $ABCD$. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt B. Es sei dies das Dreieck ΔSCD. Dann liegt der Streckenzug CBD vollständig innerhalb des Dreiecks ΔSCD und somit gilt:



$$\left|\overline{CS}\right| + \left|\overline{SD}\right| \geq \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BD}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.)
Im Dreieck ΔABS gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt, falls S zwischen AB liegt.) Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von S zu allen 4 Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von B zu den Eckpunkten A, C und D. Der Punkt B ist somit der FERMAT-Punkt des konkaven Vierecks. ❑

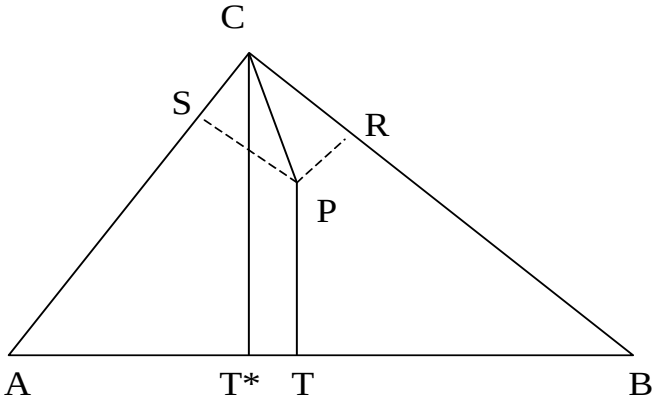
Wir betrachten nun ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit der Basisseite $\overline{AB} = c$ und den Schenkeln der Länge a, dessen Winkel an der Basisseite größer als 60° sind. Gibt es dafür eine ähnliche Eigenschaft?

Für einen beliebigen Punkt P im Innern des Dreiecks und dessen Abständen zu den Dreiecksseiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$, die wir wieder mit h_c, h_a und h_b bezeichnen, gilt

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = c \cdot h = a \cdot (h_a + h_b) + c \cdot h_c$$

Wenn $h_c = 0$ gilt, liegt P auf der Seite $\overline{AB}$. Damit ist für alle Punkte P auf der Basisseite die Summe der Abstände konstant, denn wir finden $h_a + h_b = \frac{c \cdot h}{a}$. Wählen wir dagegen $P = C$, so reduziert sich die Summe der Abstände auf h_c.

Seien T^* der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC und R, S, T die Fußpunkte der Lote von P auf die Dreiecksseiten. Dann ist die die Summe der Strecken PR und PS größer als die Strecke $\overline{CP}$ (als Diagonale im Rechteck $CSPR$). Weiterhin ist $|\overline{CP}| + |\overline{PT}|$ größer als $|\overline{CT^*}|$. Also gilt für jeden Punkt P:



$$\left|\overline{PR}\right| + \left|\overline{PS}\right| + \left|\overline{PT}\right| \geq \left|\overline{PT}\right| + \left|\overline{PC}\right| \geq \left|\overline{PT^*}\right|.$$

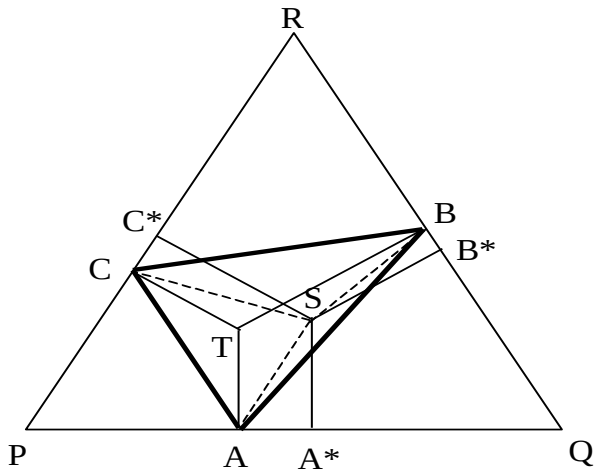
Im Folgenden untersuchen wir nicht die Summe der Abstände zu den Dreiecksseiten, sondern die Summe der Abstände zu den Eckpunkten eines Dreiecks. Wenn es einen Punkt gibt, der diese Summe minimiert, so wird er FERMAT-Punkt genannt (da FERMAT in seinem Manuskript „MAXIMA ET MINIMA“ die Aufgabe stellte *„Gegeben sind drei Punkte, gesucht ist ein vierter Punkt, so dass die Summe seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird.“*, selbst aber keine Lösung veröffentlichte).

Es sei also ΔABC ein beliebiges Dreieck. Der Punkt T sei so gewählt, dass die Strecken $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ und $\overline{TC}$ bei T gleiche Winkel bilden (also jeweils 120°). Nun zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck ΔPQR derart, dass dessen Seiten auf TA, TB und TC senkrecht stehen. Dies ist möglich, da im Viereck $TBRC$ die gegenüberliegenden Winkel zusammen 180° ergeben, folglich beträgt der Innenwinkel bei R $180° - 120° = 60°$.

Fällen wir nun von einem beliebigen, von T verschiedenen inneren Punkt S die Lote auf die Seiten des gleichseitigen Dreiecks PQR, so gilt

$$\left|\overline{TA}\right| + \left|\overline{TB}\right| + \left|\overline{TC}\right| = \left|\overline{SA^*}\right| + \left|\overline{SB^*}\right| + \left|\overline{SC^*}\right|$$

Nun gelten aber im rechtwinkligen Dreieck ΔA^*SA die Ungleichung $\left|\overline{SA^*}\right| \leq \left|\overline{SA}\right|$ und ebenso die entsprechenden Ungleichungen für die Punkte B, B^* bzw. C, C^*, also minimiert der Punkt T die Summe.



Wir konstruieren nun einen solchen Punkt. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz. In einem Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° schneiden sich die Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ΔABD, ΔBCF und ΔACG in einem Punkt.

Beweis: Die Umkreise der Dreiecke ΔACG und ΔABE schneiden sich im Punkt A und in einem weiteren Punkt P. Betrachten wir das Viereck $GAPC$, das laut Konstruktion ein Sehnenviereck ist (alle vier Eckpunkte liegen auf dem Umkreis). Da sich im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen und im aufgesetzten gleichseitigen Dreieck ΔACG der Winkel $|\sphericalangle CGA| = 60°$ beträgt, finden wir $|\sphericalangle APC| = 120°$. Auch das Viereck $ADBP$ ist ein Sehnenviereck, so dass wir mit ähnlicher Argumentation von $|\sphericalangle BDA| = 60°$ auf $|\sphericalangle APB| = 120°$ schließen können.

Wegen $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPA| + |\sphericalangle BPC| = 360°$ erhalten wir $|\sphericalangle BPC| = 120°$.

Nach Umkehrung des Sehnensatzes ist das Viereck ebenfalls ein Sehnenviereck, weil sich die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle BPC$ und $\sphericalangle CFB$ zu 180° ergänzen. Somit liegt der Punkt P auch auf dem Umkreis des Dreiecks ΔBCF.

Wir zeigen nun noch, dass sich dieser gemeinsame Punkt P sehr leicht konstruieren lässt.

Satz. In einem Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° sei P der gemeinsame Punkt der Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ΔABD, ΔBCF und ΔACG. Dann liegen A, P, F und B, P, G und C, P, E jeweils auf einer Geraden.

Beweis: Die Dreiecke ΔADC und ΔABG sind ähnlich (SWS), denn

- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ΔACG gilt $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$,
- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ΔABD gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AE}|$ und
- $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BAC| = 60° + |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle GAC| + |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAG|$.

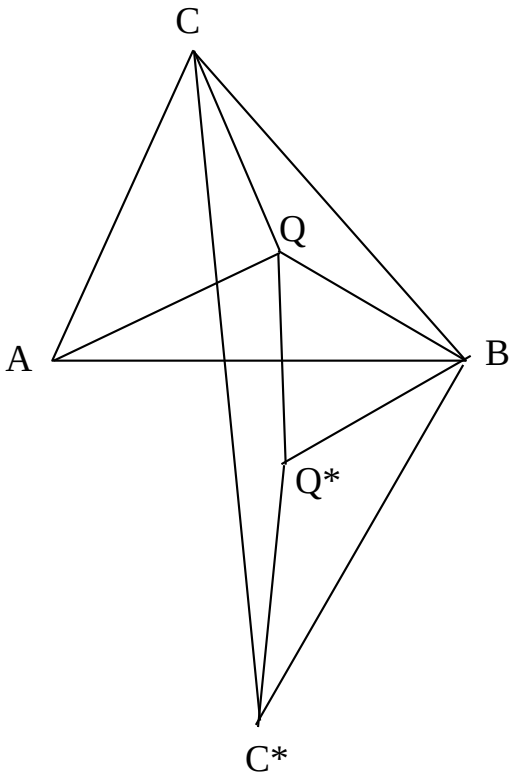
Damit stimmen auch die Winkel $\sphericalangle AGB$ und $\sphericalangle ACE$ in ihren Größen überein. Wenden wir im Dreieck ΔCGP den Innenwinkelsummensatz an, erhalten wir:

$$|\sphericalangle CPG| + (60° - |\sphericalangle AGB|) + (60° + |\sphericalangle ACE|) = 180°, \text{ also } |\sphericalangle CPF| = 60°.$$

Mit ähnlicher Argumentation zeigen wir, dass auch $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPE| = 60°$ gilt.

Da wir die Größen der Winkel $|\sphericalangle FPD| = |\sphericalangle DPE| = |\sphericalangle EPF| = 120°$ kennen, erhalten wir $|\sphericalangle APE| = |\sphericalangle BPF| = |\sphericalangle CPD| = 180°$ und schließen daraus, dass A, P, F und B, P, G und C, P, E jeweils kollinear sind. ❑

Aufgrund dieser Überlegung finden wir für ein beliebiges Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° folgende Konstruktionsvorschrift für den FERMAT-Punkt: Wir konstruieren die gleichseitigen Dreiecke über den Dreiecksseiten nach außen (z.B. ΔABC^* über $\overline{AB}$) und verbinden die neuen Ecken A^*, B^* und C^* mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B bzw. C. Diese drei Verbindungsstrecken schneiden sich ein einem Punkt P, dem gesuchten FERMAT-Punkt.



Im Jahr 1929 wird von J. E. HOFMANN[5] die Existenz des FERMAT-Punktes geometrisch begründet: Gegeben sei ein Dreieck ΔABC, dessen Innenwinkel alle kleiner als 120° sind. Wir wählen im Innern einen Punkt Q und verbinden ihn mit den Ecken des Dreiecks. Drehen wir die Figur um den Punkt B um 60°, so sind die Dreiecke ΔBQQ^* und ΔABC^* gleichseitig (Bezeichnung wie in nebenstehender Skizze).

Die Streckenzüge $|\overline{CQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{AQ}|$ und $|\overline{CQ}| + |\overline{QQ^*}| + |\overline{QC^*}|$ haben die gleiche Länge, wobei der zweitgenannte Streckenzug unabhängig von Q immer in C^* endet.

Offensichtlich ist die Länge des zweitgenannten Streckenzuges minimal, wenn Q und Q^* auf der Geraden durch C und C^* liegen.

Aus dieser Argumentation lässt sich folgende Konstruktion herleiten:

Wir konstruieren auf $\overline{AB}$ das gleichseitige Außendreieck ΔABC^* und verbinden C mit C^*. Um auf CC^* den Punkt F zu finden, für den $|\sphericalangle AFB| = 120°$ erfüllt wird, zeichnen wir den Umkreis des Dreiecks ΔABC^*. Der Schnittpunkt F mit CC^* ist der FERMAT-Punkt, da das Viereck AC^*BF ein Sehnenviereck ist.

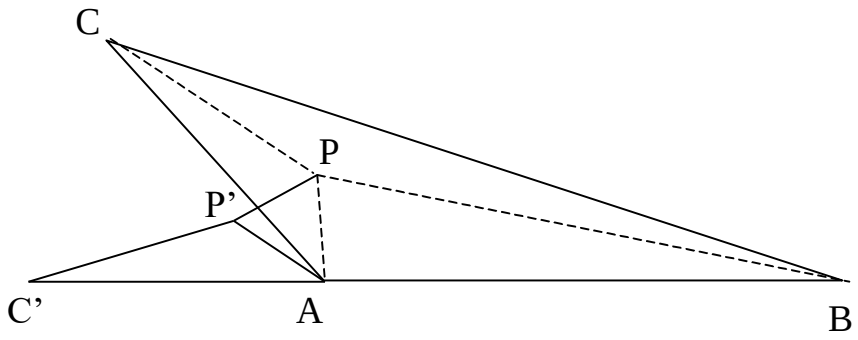
Den FERMAT-Punkt können wir auch experimentell finden: Wir zeichnen das Dreieck ΔABC auf eine Tischplatte und bohren an den Eckpunkte Löcher durch die Platte. Drei

[5] JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN (deutscher Mathematik-Historiker, 1900 - 1973)

Schnüre werden in einem Punkt P verknotet. Die drei Enden werden durch diese Löcher geführt (möglichst über Rollen, um die Reibungsverluste zu minimieren) und mit gleich schweren Gewichten belastet. Dann werden die drei in P angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Dies ist nur möglich, wenn die Richtungen der drei Kräfte jeweils einen Winkel von 120° einschließen.

Gibt es auch in stumpfwinkligen Dreiecken, bei denen der stumpfe Winkel größer als 120° ist, einen FERMAT-Punkt?

Wir nehmen an, im Dreieck ΔABC mit$|\sphericalangle BAC| > 120°$ gäbe es einen Punkt P im Innern des Dreiecks, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten minimal sei.



Wir drehen das Dreieck ΔAPC um den Punkt A gegen den Uhrzeiger so, dass der Punkt C' auf die Gerade AB fällt. Der Drehwinkel ist (wegen $|\sphericalangle BAC| > 120°$) kleiner als $60°$. Deshalb ist die Strecke $\overline{PP'}$ kleiner als die Strecke $\overline{AP}$. Somit gilt:

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| > |\overline{PP'}| + |\overline{PB}| + |\overline{P'C'}|$$
$$> |\overline{BC'}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC'}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität der Abstandssumme für den Punkt P.

Satz. In einem Dreieck mit einem stumpfen Winkel realisiert der Eckpunkt mit dem stumpfen Winkel die kleinste Summe der Abstände zu den Eckpunkten.

Beweis: Wir betrachten dazu ein Dreieck ΔABC mit $|\sphericalangle BAC| > 120°$. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt P im Innern des Dreiecks mit minimaler Summe

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| < |\overline{AC}| + |\overline{AB}|.$$

Da wegen $|\sphericalangle BAC| > 120°$ erst recht $|\sphericalangle BPC| > 120°$ gilt, muss mindestens einer der Winkel $\sphericalangle APC$ oder $\sphericalangle APC$ kleiner als 120° sein. O.B.d.A. nehmen wir an, dass dies im Dreieck ΔABP erfüllt sei. Dann gibt es im Innern dieses Teildreiecks einen Punkt F mit

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FP}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}|.$$

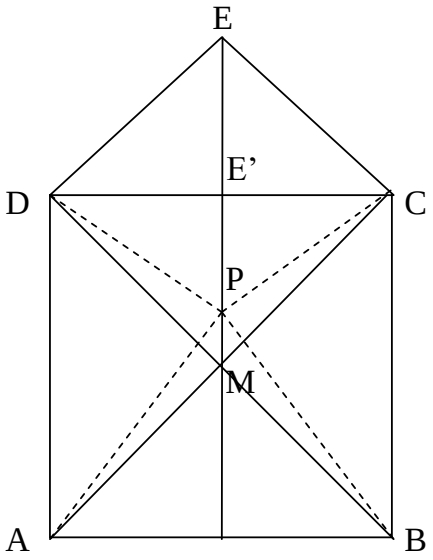
Nach der Dreiecksungleichung gilt zudem $|\overline{CF}| < |\overline{CP}| + |\overline{PF}|$. Die Addition der beiden Ungleichungen führt zu

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}|,$$

im Widerspruch zur angenommenen Minimalität der Summe für den Punkt P. Also realisiert C den Fermat-Punkt im Dreieck mit stumpfem Winkel bei C. ❑

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und mit einem auf $\overline{CD}$ aufgesetzten Dreieck ΔCDE. Man bestimme die Lage des Punktes P, für den die Summe der Abstände zu den 5 Eckpunkten dieser Figur minimal wird.

Beweisskizze: Aus Symmetriegründen liegt der Punkt P auf der Verbindung des Mittelpunktes M des Quadrates $ABCD$ und E. Sei der Abstand des gesuchten Punkts P zum M gleich x. Es genügt zunächst, die Summe $S(x)$ der Abstände von P zu den Quadratecken und dem Schnittpunkt E' von ME mit CD zu ermitteln. Dafür gilt:



$$S(x) = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} + \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

Wir finden ein Minimum für $S(x)$ bei $x \approx 0{,}3122 \cdot a$. Da der Punkt P im Innern des Quadrates liegt, ist P auch der FERMAT-Punkt des Fünfecks *ABCDE*. ❑

Aufgabe. Es sei $ABCD$ eine gerade dreiseitige Pyramide mit der gleichseitigen Grundfläche ΔABC (Seitenlänge a) und der Spitze D (Höhe h). Man finde den Punkt F, so dass die Summe der Abstände von F zu den Eckpunkten minimal wird.

Beweisskizze: Wieder aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Punkt F auf der Höhe der Pyramide. Es sei sein Abstand zur Grundfläche x. Da die Höhe auf dem Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche steht, gilt für die Summe der Abstände $S(x)$:

$$S(x) = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + x^2} + (h - x).$$

Wir finden das Minimum für $S(x)$ bei $x = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Damit F der FERMAT-Punkt ist, darf h nicht kleiner als x sein, andernfalls ist D der FERMAT-Punkt. ❑

Bundeswettbewerb Mathematik 2025

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist die Bildung & Begabung gGmbH mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung gGmbH von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs sind die LEPPER Stiftung und der Arbeitgeberverband Gesamtmetall.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In zwei Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.

In der dritten Runde, dem Kolloquium, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit

Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt."

Die Teilnehmerzahlen[6] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Schuljahr 2021/22).

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)
2022/23	1764	576 (32.7%)	67 (3.8%)	36 (53.7%)
2023/24	1189	378 (31.8%)	62 (5.2%)	28 (45.1%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2023/24 in Sachsen wieder weit über dem Durchschnitt!

Unter den 67 sächsischen Teilnehmern wurden 3 erste, 2 zweite und 25 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmenden gehörte zu den Preisträgern (44.8%, bundesweit 26.5%). Dazu kamen noch 30 Anerkennungsurkunden (44.8%). Somit wurden in Sachsen 89.6% aller Teilnehmenden ausgezeichnet (bundesweit 87.6%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 30 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)
2022/23	246	78 (31.5%)	15 (6.1%)	8 (53.3%)
2023/24	289	110 (38.1%)	14 (4.8%)	7 (50.0%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2023/24 wurden insgesamt 198 Preise vergeben (68.5% aller Teilnehmer), darunter 4 erste, 2 zweite und 4 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (71.4% aller sächsischen Teilnehmer, darunter 5 Starter aus den Klassenstufen 9/10). Ende November/Anfang Dezember fanden die regionalen Auszeichnungsveranstaltungen statt. Die erfolgreichen Jugendlichen aus Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen wurden am 28.

[6] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

November bei der Investitionsbank Berlin (IBB) empfangen. Frau CHRISTINA HENKE (Staatssekretärin für Bildung der Berliner Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie) begrüßte die Teilnehmer der Veranstaltung. Den Festvortrag hielt Dr. HINRICH HOLM (Vorstandsvorsitzender IBB)

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2025 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten. Einsendeschluss ist der 4. März 2025 (Datum des Poststempels).

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. LÖFFLER.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. LANGMANN, E. QUAISSER, E. SPECHT: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. SPECHT, E. QUAISSER und P. BAUERMANN herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

Termine

Bildung & Begabung gGmbH Bonn, 1. Dezember 2024: Start des Bundewettbewerbs Mathematik 2025. Ausschreibung und Aufgaben unter www.mathe-wettbewerbe.de/bwm (Einsendeschluss 3. März 2025)

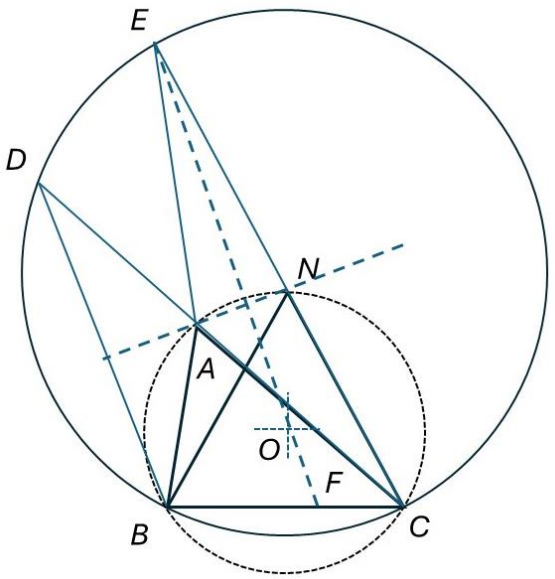
Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 19. Dezember 2024: Weihnachtsvorlesung *"Macht hoch die Tür, Tor 3 macht weit! - Das Ziegenproblem und andere Paradoxien der Stochastik", Prof.* Dr. UTA FREIBERG (Professor Stochastik), 09126 Chemnitz, Reichenhainer Str. 90, Zentrales Hörsaal- und Seminargebäude, Hörsaal C10.114, Beginn 17:15 Uhr.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2024.

Aufgabe T-3 (Teamwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Sei ΔABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60°$. Sei D ein Punkt auf der Geraden AC, sodass $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ gilt und A zwischen C und D liegt. Angenommen, es existieren zwei Punkte $E \neq F$ auf dem Umkreis des Dreiecks ΔDBC, sodass $|\overline{AE}| = |\overline{AF}| = |\overline{BC}|$ gilt.

Zeige, dass die Gerade EF durch den Umkreismittelpunkt von ΔABC verläuft.

Lösungshinweise: Es sei N der Mittelpunkt des Bogens $\overset{\frown}{BAC}$. Dann ist das Dreieck ΔNBC gleichseitig, denn $|\sphericalangle BNC| = 60°$ und N liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$. Außerdem liegt N auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle DAB$, der die Mittelsenkrechte des Segments $\overline{BD}$ ist, wenn wir das gleichschenklige Dreieck ΔABD betrachten. Daher ist N der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔDBC.



Da das Dreieck ΔNBC gleichseitig ist, ist der Umfangsradius des Dreiecks ΔDBC die Länge von $\overline{BC}$. Wir haben also $|\overline{BC}| = |\overline{NE}| = |\overline{NF}|$ und wissen, dass $|\overline{AE}| = |\overline{AF}| = |\overline{BC}|$, also das Viereck $AENF$ ein Rhombus ist. Daher ist die Linie EF die Mittelsenkrechte von $\overline{AN}$. $\overline{AN}$ ist jedoch eine Sehne des Umkreises des Dreiecks ΔABC, so dass seine Mittelsenkrechte durch O verläuft. ❑

Monatsaufgabe 12/2024[7].

Für eine positive ganze Zahl n bezeichne $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n.

Bestimme alle Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle positiven ganzen Zahlen k der Wert $P(k)$ durch $\sigma(k)$ teilbar ist.

[7] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.01.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort ... 2
Thema 30 – Diophantische Gleichungen ... 3
Involution ... 10
Konstruktion des Fermat-Punktes ... 13
Bundeswettbewerb Mathematik 2025 ... 20
Termine ... 22
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2024 ... 23
Monatsaufgabe 12/2024 ... 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[8]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

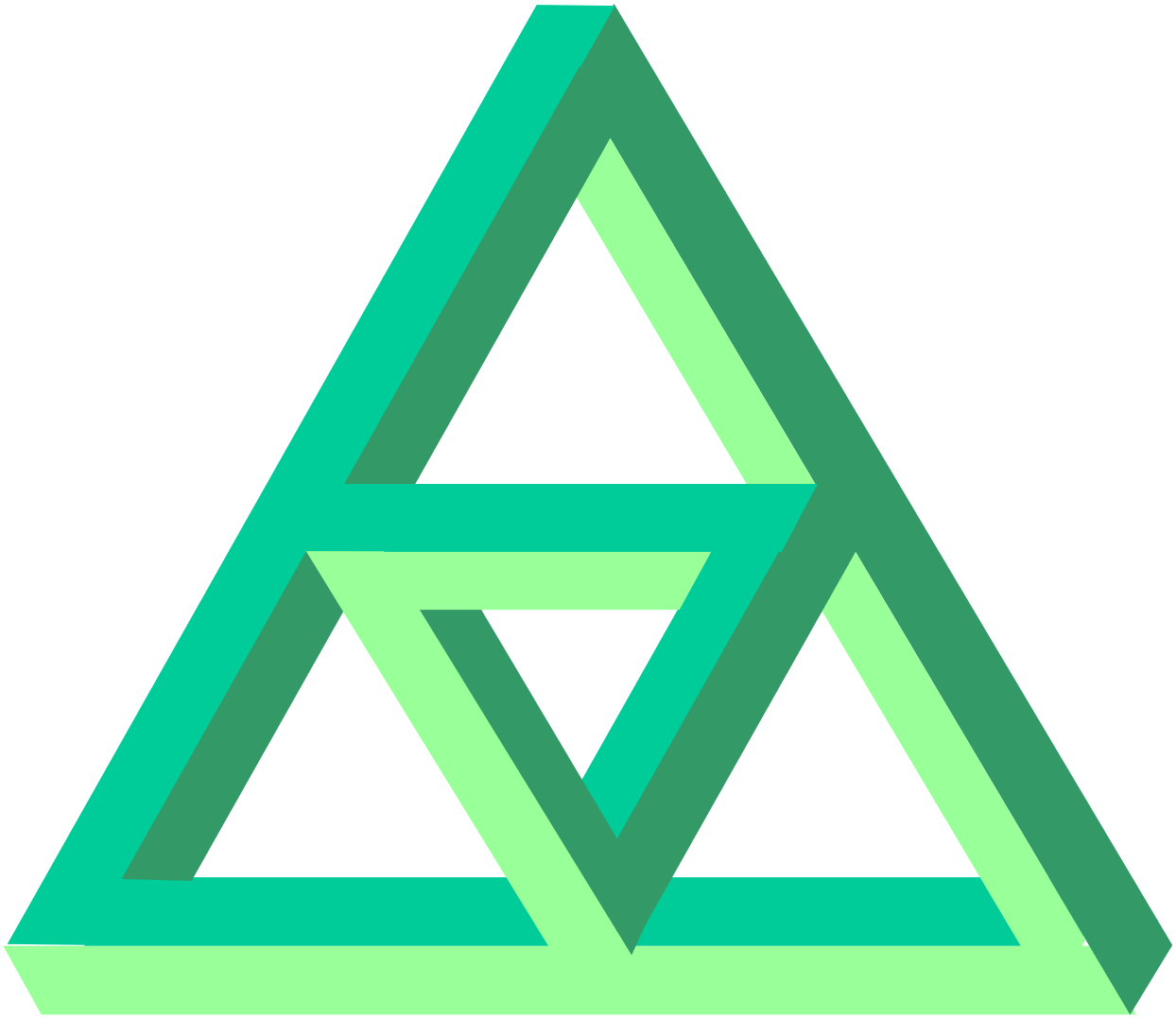
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[8] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 01/2025 (Januar 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugnehmend zur 2. Runde der diesjährigen Mathematik-Olympiade greifen wir das Thema „Kombinatorik“ auf, dass wir bereits in der Nachbereitung der Bundesrunde der 62. MO diskutierten. Mit den aktuellen Aufgaben **MO640923/MO641023** werden typische Fragestellungen zu allen Möglichkeiten gestellt. Dabei ist aber für eine vollständige Lösungsdarstellung nicht erforderlich (aber zulässig), bekannte Formeln anzuwenden.

Mit den Aufgaben **MO640921/MO641021** wird die Thematik 3 unmittelbar fortgesetzt, so dass ein zielorientierter Lösungsansatz leicht zu finden war.

Im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM 3-5A** des diesjährigen sächsischen Korrespondenzzirkels diskutieren wir die Verwendung von Summen- und Produktzeichen. Hiermit lassen sich Aussagen kompakt und unmissverständlich formulieren. Insbesondere ausgehend von Spezialfällen mit wenigen Variablen können oft gefundene Aussagen formal verallgemeinert werden. Allerdings wird nicht erwartet, in Lösungsdarstellungen die Summen- und Produktzeichen selbst aktiv anzuwenden, jedoch sollte stets kritisch geprüft werden, ob Formulierungen mittels „+ … +“ im Kontext eindeutig sind.

Im historischen Rückblick schauen wir erneut (wie im Heft 8+9/2023) in ein Mathematik-Buch von 1895, um an die Einführung zur Kombinatorik zu erinnern, wobei zwar in den Abschnitten zu Kombinationen einige Begriffe ungewöhnlich erscheinen, die Inhalte und Formeln aber wie heute präsentiert werden.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Aufgabe zum Jahreswechsel

Aufgabe – MO251046[3]. Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 5$; sie bilden also die Teilfolge (2, 0, 2, 5).
(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und (2, 0, 2, 5) lautet.

Wir verbinden diese Aufgabe mit den besten Wüschen für eine gesundes und friedvolles Jahr 2025! Möge auch im neuen Jahr die Begeisterung für Mathematik erhalten bleiben und die Beschäftigung mit Wettbewerbsaufgaben durch Erfolg in der Mathematik-Olympiade belohnt werden!

Die folgende Zahlenspielerei zum Jahreswechsel ist den Grüßen vom Vorsitzenden des Vereins MO e.V., Professor UWE LECK, mit Verweis an KERSTIN HANSEN, JÜRGEN PRESTIN, FRANK REHM, HEINZ KLAUS STRICK und ÅSA VOGL, entnommen.

$$2025$$
$$MMXXV$$
$$45^{4-5+4-5+4}$$
$$(44+4:4)^{\sqrt{4}}$$
$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$$
$$(76+5)(4\cdot 3\cdot 2+1)$$
$$-1+2\cdot(34\cdot 5\cdot 6-7)$$
$$333\cdot 3!+3\cdot 3!+3\cdot 3$$
$$5^5-555-555+5+5$$
$$88\cdot\sqrt{8+8}!-88+8:8$$
$$44\cdot 44+44+44+44:44$$
$$13\cdot 13\cdot 13-13\cdot 13-1\cdot 3$$
$$12\cdot 3+(4+5)\cdot(6+7)\cdot(8+9)$$
$$55^2-10^3=51^2-4!^2=53^2-28^2$$
$$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7-\frac{7!}{7+7}-\frac{7+7}{7}-7-7$$
$$6^4+3^6=205^2-200^2=117^2-108^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$$
$$5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5-4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4-3\cdot 3\cdot 3\cdot 3+2\cdot 2+1\cdot 1$$
$$37^2+20^2+16^2=20^2+25^2+26^2+18^2=30^2+23^2+20^2+14^2$$
$$1\cdot 1025=3\cdot 675=5\cdot 405=9\cdot 225=15\cdot 135=25\cdot 81=27\cdot 75$$
$$11111101001_2=2210000_3=31100_5=2700_9=2025_{10}=441_{22}=360_{25}$$
$$1013^2-1012^2=339^2-336^2=205^2-200^2=117^1-108^2=51^2-24^2=45^2$$
$$\sum_{k=11}^{64} k=\sum_{k=11}^{64}(-1)^k k^2$$
$$999+\sqrt{9}^{\sqrt{9}}+999$$

[3] Lösungshinweise im Heft 02/2025

MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Thema 3 – Gleichungssysteme

Nach der Aufgabe **MO641015** finden wir die Thematik 3 auch in der 2. Runde der diesjährigen MO wieder:

Aufgabe 03.12 – MO640921/MO641021. Zum Abmähen eines Fußballplatzes stehen 3 Rasenmäher mit unterschiedlicher Leistung zur Verfügung. Rasenmäher A und Rasenmäher B würden 110 Minuten brauchen, um gemeinsam das Spielfeld abzumähen. Rasenmäher B und Rasenmäher C würden 120 Minuten brauchen, um gemeinsam das Spielfeld abzumähen. Rasenmäher A und Rasenmäher C würden 132 Minuten brauchen, um gemeinsam das Spielfeld abzumähen.

Ermitteln Sie, in welcher Zeit das Feld bei gleichzeitiger Arbeit aller drei Geräte abgemäht werden kann.

Lösungshinweise (mit ganzen Zahlen): Wenn A und B in 110 min das Spielfeld abmähen, können sie in (110 · 12 =) 1320 min 12 Spielflächen abmähen. Wenn B und C in 120 min das Spielfeld abmähen, können sie in (120 · 11 =) 1320 min 11 Spielflächen abmähen. Wenn A und C in 132 min das Spielfeld abmähen, können sie in (132 · 10 =) 1320 min 10 Spielflächen abmähen. Also können 2·A, 2·B und 2·C zusammen in 1320 min (11 + 12 + 10 =) 33 Spielflächen abmähen. Somit können A, B und C in 1320 min (33 : 2 =) 16,5 Spielflächen abmähen.

Somit können A, B und C zusammen 1 Spielfläche in (1320 : 16,5 =) 80 min abmähen.

Lösungshinweise (mit Normierung): Seien a, b, c die Anteile des Platzes, die von A bzw. B bzw. C pro Minute gemäht werden können. Dann ist $a + b = \frac{1}{110}$, $b + c = \frac{1}{120}$ und $a + c = \frac{1}{132}$. Addieren wir diese Gleichungen auf und teilen durch 2, so erhalten wir $a + b + c = \frac{1}{80}$.

Bei gleichzeitiger Arbeit aller drei Geräte kann das Spielfeld also in 80 Minuten abgemäht werden.

Lösungshinweise (mit Berechnung der Einzelleistungen): Wir bezeichnen mit a den Flächenanteil, den der Rasenmäher A innerhalb von 120 min vom Spielfeld abmähen kann. Entsprechend führen wir b und c ein. Dann können wir die Aussagen als folgendes Gleichungssystem schreiben:

$$a + b = \frac{120}{110} \quad ; \quad b + c = 1 \quad ; \quad a + c = \frac{120}{132}$$

Wir lösen das Gleichungssystem auf und erhalten schrittweise mit $c = 1 - b$:

$$a = \frac{120}{110} - b = \frac{120}{132} + b - 1$$

$$\frac{120}{110}+1-\frac{120}{132}=\frac{12\cdot 120+1320-10\cdot 120}{1320}=\frac{1560}{1320}=\frac{13}{11}=2\cdot b$$

$$c=1-b=1-\frac{13}{22}=\frac{9}{22}$$

$$a=\frac{120}{132}-c=\frac{120}{132}-\frac{9}{22}=\frac{120-54}{132}=\frac{66}{132}=\frac{11}{22}$$

Damit finden wir den Flächenanteil, den die drei Rasenmäher gemeinsam in 120 min abmähen können:

$$a+b+c=\frac{11}{22}+\frac{13}{22}+\frac{9}{22}=\frac{33}{22}=\frac{3}{2}$$

Somit können die drei Rasenmäher in 120 min das $\frac{3}{2}$-Fache der Fläche abmähen. Folglich schaffen die drei Rasenmäher gemeinsam die Fläche in $\frac{3}{2}\cdot 120$ min = 80 min. ❑

Thema 24.2 – Kombinatorik[4]

Aufgabe 24.09 – MO640923. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus zwanzig aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zwei verschiedene Zahlen auszuwählen, deren Summe gerade ist.

Hinweis: Zwei Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge der beiden Summanden unterscheiden, sollen hierbei als eine Möglichkeit gezählt werden.

Lösungshinweise: Eine Summe aus zwei natürlichen Zahlen ist genau dann gerade, wenn entweder beide Summanden gerade oder beide Summanden ungerade sind. Nun befinden sich unter 20 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau zehn gerade und genau zehn ungerade Zahlen. Es müssen also entweder aus zehn geraden Zahlen genau zwei verschiedene gewählt werden – dafür gibt es $\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$ verschiedene Möglichkeiten – oder aus den zehn ungeraden Zahlen zwei gewählt werden – auch dafür gibt es 45 Möglichkeiten.

Insgesamt erhalten wir also 45 + 45 = 90 Möglichkeiten für die Auswahl. ❑

Aufgabe 24.10 – MO641023. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus den dreißig natürlichen Zahlen von 1 bis 30 drei paarweise verschiedene Zahlen so auszuwählen, dass deren Summe durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge der drei Summanden unterscheiden, sollen hierbei als eine Möglichkeit gezählt werden.

[4] s. Teil 1, Heft 8+9/2023

Lösungshinweise: Die drei ausgewählten Zahlen bezeichnen wir mit x, y und z. Zur Untersuchung der Teilbarkeit der Summe $x + y + z$ durch 3 führen wir eine vollständige Fallunterscheidung durch.

Fall 1: x, y, z lassen denselben Rest bei der Division durch 3.
Fall 2: x, y, z lassen paarweise verschiedene Reste bei der Division durch 3.
Fall 3: Genau zwei der Zahlen x, y, z lassen denselben Rest bei der Division durch 3.

Fall 3: Es ergeben sich drei Möglichkeiten, den Rest zu wählen, der doppelt auftritt. Wenn zwei der drei Zahlen den Rest 0 lassen und die dritte den Rest 1 oder 2, dann ist die Summe nicht durch 3 teilbar. In analoger Weise zeigt sich bei den verbleibenden zwei Möglichkeiten, wenn also zwei Zahlen den Rest 1 bzw. zwei den Rest 2 lassen, dass die Summe nicht durch 3 teilbar ist. Also sind nur die ersten beiden Fälle zu untersuchen.

Fall 1: In diesem Fall gibt es drei Möglichkeiten, den Rest zu wählen. Wenn alle drei Zahlen den Rest 0 lassen, dann lässt auch die Summe den Rest 0 (weil 0 + 0 + 0 = 0) und ist somit durch 3 teilbar. Lassen alle drei Zahlen den Rest 1, dann lässt die Summe wegen 1 + 1 + 1 = 3 ebenfalls den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar. Und lassen schließlich alle drei Zahlen den Rest 2, so lässt die Summe erneut den Rest 0 (wegen 2 + 2 + 2 = 6) und ist ebenfalls durch 3 teilbar.

Fall 2: Wenn alle drei Summanden paarweise verschiedene Reste bei Division durch 3 lassen, dann ist die Summe wegen 0 + 1 + 2 = 3 durch 3 teilbar.

Um abzählen zu können, zerlegen wir die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 30 in drei Mengen:

A = {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28},
B = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29} und
C = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}.

In A sind die Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, in B sind diejenigen, die den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen und C enthält die durch 3 teilbaren Zahlen. Jede dieser drei Mengen enthält 10 Zahlen.

Im ersten Fall sind aus A, B, C jeweils drei verschiedenen Zahlen auszuwählen. Wenn wir aus A auswählen, so gibt es $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ Möglichkeiten, wenn die Anordnung der ausgewählten Zahlen keine Berücksichtigung finden soll. Für B und C ergeben sich ebenfalls jeweils 120 Möglichkeiten und daher insgesamt 360.

Im zweiten Fall gibt es $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Möglichkeiten, denn es wird aus jeder der drei Mengen A, B, C genau ein Element gewählt.

Insgesamt erhalten wir also 360 + 1000 = 1360 Möglichkeiten. ❑

Ergänzung: In den offiziellen Lösungshinweisen wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass für die Beantwortung sowohl für die Aufgabe MO640923 als auch für den ersten Fall der Aufgabe MO641023 die Anwendung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für die Anzahl der Kombinationen[5] (ohne Wiederholung) von k Elementen aus n Elementen nicht erforderlich ist. Es genügt folgende Herleitung: Für die erste auszuwählende Zahl gibt es n Möglichkeiten. Für die zweite auszuwählende Zahl gibt es noch $n-1$ Möglichkeiten, usw. Schließlich gibt es für die k-te auszuwählende Zahl noch $n-k+1$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten, k Zahlen aus n Zahlen auszuwählen (in der Aufgabe $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$).

Da aber die Reihenfolge keine Rolle spielt, müssen wir berücksichtigen, wie viele verschiedene Permutationen[6] (ohne Wiederholung, d.h. verschiedene Möglichkeiten einer Anordnung von k verschiedenen Elementen) es für die ausgewählten k Zahlen gibt. Mit ähnlicher Argumentation erhalten wir: Für die Zahl an erster Stelle in einer Reihenfolge gibt es k Möglichkeiten. Für die Zahl an zweiter Stelle in einer Reihenfolge gibt es $k-1$ Möglichkeiten, usw. Schließlich gibt es für die letzte auszuwählende Zahl noch 1 Möglichkeit. Also gibt es $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$ Möglichkeiten, k Zahlen in einer Reihenfolge anzuordnen (in der Aufgabe $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$).

Um die gesuchte Anzahl der Möglichkeiten zu berechnen, müssen wir also die Anzahl der möglichen Kombinationen von k Zahlen aus n Zahlen durch die Anzahl der Permutationen dieser k Zahlen dividieren. Wir erhalten also

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(in den Aufgaben also $90 : 2 = 45$ bzw. $720 : 6 = 120$).

Aufgabe 24.11 – MO500922

a) Geben Sie die Anzahl aller zweistelligen Zahlen an, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten.
b) Ermitteln Sie die Anzahl aller dreistelligen Zahlen, die keine Ziffer 5 enthalten.
c) Untersuchen Sie, ob es mehr 50-stellige Zahlen gibt, in denen die Ziffer 5 nicht vorkommt, als solche, in denen sie mindestens einmal vorkommt.

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste Ziffer nicht Null sein darf. Beispielsweise ist die Zahl 3462 vierstellig, die Ziffernfolge 0743 stellt hingegen keine vierstellige Zahl dar.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil a): Es gibt 18 zweistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5. Dies kann durch Aufschreiben aller Fälle bewiesen werden: 15, 25, 35,

[5] lateinisch *combinatio*
[6] lateinisch *permutare* (vertauschen)

45, 50, 51, …, 55, …, 59, 65, 75, 85, 95. Der Anteil zweistelliger Zahlen ohne 5 beträgt also $\frac{72}{90} = 0.8$.

Lösungsvariante: Um die (als vollständige Lösung zulässige) Auflistung zu vermeiden, wollen wir die gesuchte Anzahl berechnen (und dabei auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten achten):

- Offenbar gibt es genau eine zweistellige Zahl mit zwei Fünfen (55).
- Für die Anzahl der zweistelligen Zahlen mit genau einer Ziffer 5 unterscheiden wir zwei Fälle:
    - Die Ziffer 5 steht an erster Stelle: Es gibt 9 Möglichkeiten, nämlich (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).
    - Die Ziffer 5 steht an zweiter Stelle: Es gibt 8 Möglichkeiten, nämlich (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).

  Wir finden also (8 + 9 =) 17 zweistellige Zahlen mit genau einer Ziffer 5.

Insgesamt erhalten wir (17 + 1 =) 18 zweistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5.

Lösungsvariante: Wir können auch zunächst die Anzahl der zweistelligen Zahlen ohne Ziffer 5 berechnen. An der Zehnerstelle können 8 verschiedene Ziffern stehen, an der Einerstelle 9 verschiedene Ziffern, insgesamt also 8 · 9 = 72 Möglichkeiten. Da es von 10 bis 99 insgesamt 90 Zahlen sind, besitzen (90 – 72 =) 18 Zahlen mindestens einmal die Ziffer 5.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil b): Dreistellige Zahlen können 9 verschiedene Ziffern an der ersten und je 10 verschiedene Ziffern an den anderen beiden Stellen haben, insgesamt also 9 · 10 · 10 = 900. Ohne die Ziffer 5 gibt es noch 8 · 9 · 9 = 648 Möglichkeiten (Kombination mit Berücksichtigung der Reihenfolge). Ihr Anteil beträgt also $\frac{648}{900} = 0.72$.

Lösungsvariante: Auch wenn es im Vergleich zu der kurzen Lösung unnötig erscheint, wollen wir zunächst die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5 berechnen.

- Offenbar gibt es genau eine dreistellige Zahl mit drei Fünfen (555).
- Für die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit genau zwei Ziffern 5 stelle wir fest:
    - Es gibt 8 dreistellig Zahlen, die auf 55 enden.
    - Es gibt je 9 dreistellige Zahlen der Darstellung 5_5 bzw. 55_

  Insgesamt finden wir (8 + 9 + 9 =) 26 dreistellige Zahlen mit genau zwei Ziffern 5.
- Für die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit genau einer Ziffer 5 unterscheiden wir zwei Fälle:

- Die Ziffer 5 steht an erster Stelle: Es gibt 9 · 9 = 81 Möglichkeiten, nämlich an jeder der beiden anderen Stellen eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).
- Die Ziffer 5 steht nicht an erster Stelle: Es gibt 2 · 8 · 9 = 144 Möglichkeiten, nämlich an erster Stelle eine der Ziffern (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) und an zweiter oder an dritter Stelle eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).

Wir finden also (81 + 144 =) 225 dreistellige Zahlen mit genau einer Ziffer 5.

Insgesamt erhalten wir (225 + 26 + 1 =) 252 dreistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5. Da es von 100 bis 999 insgesamt 900 Zahlen sind, besitzen (900 – 252 =) 648 dreistellige Zahlen mindestens einmal die Ziffer 5.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil c): Wir zeigen, dass es weniger 50-stellige Zahlen ohne 5 als mit 5 gibt.

Die Anzahl der 50-stelligen Zahlen ist $9 \cdot 10^{49}$, davon haben $8 \cdot 9^{49}$ Zahlen keine Ziffer 5. Für deren Anteil an der Gesamtzahl erhalten wir $A = \frac{8 \cdot 9^{49}}{9 \cdot 10^{49}}$. Ausgehend von Teilaufgaben a) und b) vermuten wir, dass der Anteil geringer wird und unter 50% liegen wird. Wir beweisen also die Ungleichung: $A < \frac{1}{2}$, gleichbedeutend mit $\left(\frac{9}{10}\right)^{49} < \frac{9}{16} = 0.5625$. Mit Verwendung von Rechentechnik würden wir natürlich ohne Probleme $0.9^{49} \approx 0.0057$ finden. Für die gesuchte Abschätzung genügen aber die Ergebnisse für kleine n. So erhalten wir (mit Kopfrechnen) $0.9^3 = 0.729$ und können daraus abschätzen: $0.9^6 = (0.9^3)^2 = 0.729^2 < 0.75^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0.5625$. Da die Werte von 0.9^n mit wachsendem n ständig abnehmen, ist diese Ungleichung in der Tat erfüllt.

Lösungsvariante: Wir verwenden ebenfalls die Anzahl der 50-stelligen Zahlen $9 \cdot 10^{49}$, davon haben $8 \cdot 9^{49}$ Zahlen keine Ziffer 5. Anstatt den Quotienten abzuschätzen berechnen wir (nach Anregung aus Teilaufgabe b) die Anzahl der 50-stelligen Zahlen mit genau einer Ziffer 5.

- Die Ziffer 5 steht an erster Stelle: Es gibt 9^{49} Möglichkeiten, nämlich an jeder der 49 anderen Stellen eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).
- Die Ziffer 5 steht nicht an erster Stelle: Es gibt $49 \cdot 8 \cdot 9^{48}$ Möglichkeiten, nämlich an erster Stelle eine der Ziffern (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) und an jeder Stelle eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9), wenn jeweils eine der 49 Stellen durch 5 besetzt ist.

Folglich gibt es $(9 + 49 \cdot 8) \cdot 9^{48}$ Zahlen mit 50 Stellen mit genau einer Ziffer 5. Diese Anzahl ist bereits größer als $8 \cdot 9^{49} = 8 \cdot 9 \cdot 9^{48}$. ❑

Aufgabe 24.12 – MO410921/MO411021. Beim Sportunterricht wird zum Federballspiel eine Klasse mit 22 Schülern in 11 Gruppen zu je 2 Schülern aufgeteilt. Wie viele verschiedene solcher Aufteilungen sind möglich?

Hinweise:

1) Vertauscht man die beiden Schüler einer Gruppe G miteinander, so gilt die entstehende Gruppe nicht als verschieden von G.
2) Ändert man in einer Aufteilung A die Reihenfolge der 11 Gruppen, so gilt die entstehende Aufteilung nicht als verschieden von A.

Lösungshinweise: Zunächst nummerieren wir die Gruppen von 1 bis 11. Für den ersten Schüler der ersten Gruppe gibt es 22 Möglichkeiten, für den zweiten Schüler der ersten Gruppe noch 21 Möglichkeiten. Da es auf die Reihenfolge der beiden Schüler in dieser Gruppe nicht ankommt, gibt es für die erste Gruppe $\binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{2 \cdot 1} = 11 \cdot 21$ Möglichkeiten. Für die zweite Gruppe gibt es $\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 10 \cdot 19$ Möglichkeiten. Für die dritte Gruppe gibt es $\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 17$ Möglichkeiten. Dies setzen wir fort bis zur elften Gruppe: $\binom{2}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 1$ Möglichkeiten. Insgesamt führt das auf

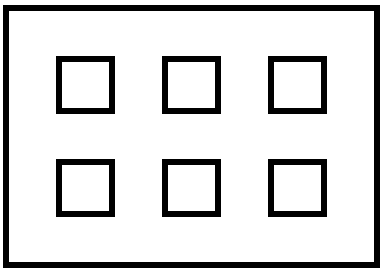
$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1$$

Möglichkeiten der Aufteilung auf 11 Gruppen. Nun kommt es aber auf die Reihenfolgen der Gruppen ebenfalls nicht an, so dass wir die Anzahl durch $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = 11!$ teilen müssen (für die erste Gruppe gibt es 11 Möglichkeiten, für die zweite Gruppe gibt es noch 10 Möglichkeiten, …, für die 11. Gruppe gibt es 1 Möglichkeit). Damit erhalten wir die gesuchte Anzahl

$$\frac{11! \cdot 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1}{11!} = 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1 = 13\,749\,310\,575$$

❑

Aufgabe 24.13 – MO360921. Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern über seine Arbeit herstellen. Jedes Blatt soll genau 6 Bilder enthalten, wie in der Abbildung ersichtlich; die Motive der 6 Bilder auf je einem Blatt sollen voneinander verschieden sein. Insgesamt stehen 10 verschiedene Motive zur Verfügung.



Welches ist die größtmögliche Anzahl voneinander verschiedener Blätter, die sich in dieser Art herstellen lassen? Dabei gelten zwei Blätter bereits dann als voneinander

verschieden, wenn eines dieser beiden Blätter mindestens ein Motiv enthält, das auf dem anderen Blatt nicht vorkommt. Enthalten zwei Blätter dagegen beide genau dieselben 6 Motive, nur möglicherweise in unterschiedlicher Reihenfolge, so gelten sie nicht als verschieden.

Aufgabe 24.14 – MO360941. Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern zum Verteilen herstellen. Auf jedem Blatt sollen 6 Bilder sein, wie in der Abbildung gezeigt. Für solche Bilder stehen insgesamt 10 verschiedene Motive zur Verfügung. Jede mögliche Zusammenstellung von 6 verschiedenen dieser Motive soll in einer beliebigen Reihenfolge auf genau einem Blatt vorkommen. Wie viele Exemplare (kleinstmögliche Anzahl) von jedem der 10 Motive reichen aus?

Hinweis zu beiden Aufgabenstellungen: Bei diesen Aufgaben würde es nicht ausreichen, etwa eine (für Aufgaben dieses Typs) anwendbare fertige Formel (z.B. für Permutationen oder Variationen) als bekannten Sachverhalt anzuführen und dann nur formal anzuwenden. Vielmehr ist, wenn eine solche Formel benutzt werden soll, zusätzlich zu ihr eine Begründung zu nennen (die wenigstens für die hier gestellte spezielle Aufgabe ausreicht).

Lösungshinweise: Wir ermitteln die Anzahl der Möglichkeiten, 6 verschiedene Motive aus 10 gegebenen Motive auszuwählen. Für die Auswahl des ersten Motivs haben wir 10 Möglichkeiten, für die Auswahl des zweiten Motivs haben wir noch 9 Möglichkeiten, …, für die Auswahl des sechsten Motivs haben wir noch 5 Möglichkeiten, insgesamt also $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten. Da die Platzierung eines ausgewählten Motives unerheblich ist, stellen wir noch fest: für den Platz des ersten Motivs gibt es 6 Möglichkeiten, für den Platz des zweiten Motivs gibt es noch 5 Möglichkeiten, …, für den Platz des sechsten Motivs gibt es 1 Möglichkeit, insgesamt also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Wir finden also, dass es $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ verschieden Blätter gibt.

Fortsetzung der Lösung für die Aufgabe MO360941: Wenn es 210 verschiedene Blätter gibt, müssen insgesamt $6 \cdot 210 = 1260$ Motive vorhanden sein. Da alle Motive gleich oft vorkommen, muss jedes der 10 Motive mindestens $1260 : 10 = 126$ Mal verfügbar sein. ❑

Ergänzung: Mit dem Hinweis zur Aufgabenstellung sollte vermieden werden, für die Anzahl der verschiedenen Blätter als Auswahl von 6 Motiven aus 10 Motiven ohne Wiederholung ohne weitere Erläuterung den Binomialkoeffizienten $\binom{10}{6}$ anzugeben.

Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen

Das Summenzeichen Σ (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *S*) wird für alle ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen

$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

Die Verwendung des Summenzeichens wie bei Aufgabe **KZM 3-5A**[7] kann helfen, mathematische Texte übersichtlicher und unmissverständlich zu formulieren. Es wird jedoch nicht erwartet, in einer Lösungsdarstellung selbst das Summenzeichen zu verwenden. Stattdessen können solche Summen ausgeschrieben werden. Allerdings ist darauf zu achten, dass bei abkürzenden Schreibweisen mit „+ … +“ keine Missverständnisse über den Inhalt der Summe möglich sind – so wie es in der Aufgabe KZM 3-5A thematisiert wird. So könnte 1 + 3 + … + 31 verschiedene Summationen bedeuten:

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31
1 + 3 + 7 + 13 + 21 + 31
1 + 3 + 7 + 15 + 31

Mit den folgenden Regeln können wir mit Summenzeichen rechnen. Zur anschaulichen Darstellung dieser Regeln sind Beispiele mit konkreten Zahlenwerten hilfreich:

(1) Freie Wählbarkeit des Summationsindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$

Beispiel: $\sum_{j=3}^{8} j = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{k=3}^{8} k$

(2) Ausklammern eines konstanten Faktors: $\sum_{j=m}^{n} (c \cdot a_j) = c \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{k=2}^{5} (2 \cdot k) = 4 + 6 + 8 + 10 = 2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{5} k$

(3) Zerlegen in Teilsummen ($m < k < n$): $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{j=-3}^{3} j^2 = \sum_{j=-3}^{-1} j^2 + \sum_{j=0}^{0} j^2 + \sum_{j=1}^{3} j^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2$

$$\sum_{j=-3}^{3} j^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2$$

(4) Zusammenfassen von Summen: $\sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j = \sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j)$

Beispiel für die aufeinanderfolgende Ausführung dieser Regeln:

$$\sum_{k=1}^{4} (10 + k) + \sum_{m=1}^{4} (10 - m)$$
$$= \sum_{j=1}^{4} (10 + j) + \sum_{j=1}^{4} (10 - j) \quad \text{(Regel 1)}$$
$$= \sum_{j=1}^{4} \big((10 + j) + (10 - j)\big) \quad \text{(Regel 4)}$$
$$= \sum_{j=1}^{4} 20$$
$$= 20 \cdot \sum_{j=1}^{4} 1 = 20 \cdot 4 = 80 \quad \text{(Regel 2)}$$

[7] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Dieses Beispiel überprüfen wir durch die ausführliche Summendarstellung:

$$\sum_{k=1}^{4}(10+k)+\sum_{m=1}^{4}(10-j)=(11+12+13+14)+(9+8+7+6)=80$$

(5) Umkehrungsregel: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j}$

Beispiel: $1234 = 1\cdot 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+4\cdot 10^0 = \sum_{k=1}^{4} k\cdot 10^{4-k}$
$= \sum_{k=1}^{4}(5-k)\cdot 10^{4-(5-k)} = \sum_{k=1}^{4}(5-k)\cdot 10^{k-1}$
$= 4\cdot 10^0+3\cdot 10^1+2\cdot 10^2+3\cdot 10^3$

(6) Transformation des Summenindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$

Beispiel: $\sum_{j=4}^{8} j = 4+5+6+7+8 = \sum_{j=6}^{10}(j-2)$

Die bekannte Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen, die bereits im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (1492 bis 1559) zu finden ist, aber im Allgemeinen mit dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) in Verbindung gebracht wird, d.h.

$$S(n) = 1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

finden wir unter Verwendung der obigen Rechenregeln mit Summenzeichen auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
&S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right) && \text{(Regel 5)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\big(k+(n+1-k)\big) && \text{(Regel 4)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+1) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n} 1 && \text{(Regel 2)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot n
\end{aligned}$$

Für allgemeinere Ausdrücke, wie etwa $S(a,d,n)=\sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d)$ ergeben sich nun deren Summenformeln als unmittelbare Folgerung:

$$\begin{aligned}
&S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d) \\
&= a\cdot\sum_{k=0}^{n} 1 + d\cdot\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{(Regel 3)} \\
&= a\cdot(n+1)+d\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Leicht können wir nachprüfen, dass wir – bis auf Regel (2) – in jeder der angegebenen Regeln das Summenzeichen durch das Produktzeichen ersetzen können:
Das Produktzeichen Π (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *P*) wird für alle nichtnegativen ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \le n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m\cdot a_{m+1}\cdot\ldots\cdot a_n$.

In Analogie muss die Regel des Ausklammerns eines Faktors (Regel 2) für das Produktzeichen lauten:

(2') $\prod_{j=m}^{n}(c \cdot a_j) = c^{(n-m+1)} \cdot \prod_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\prod_{j=1}^{4}(2 \cdot j) = 2^4 \cdot \prod_{j=1}^{4} j = 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 384$

Allerdings können Summen- und Produktzeichen im Allgemeinen nicht innerhalb eines Ausdruckes vertauscht werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2} 1 = \sum_{i=1}^{2}(1 \cdot 1) = 1 + 1 = 2\,, \quad \text{aber}$$
$$\prod_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} 1 = \prod_{j=1}^{2}(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Bezeichnen $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ die Ziffern einer $(m+1)$-stelligen Zahl im Dezimalsystem, so können wir die Aufgabe des diesjährigen Korrespondenzzirkels

Aufgabe KZM 1-3. Man finde alle positiven ganzen Zahlen n, die gleich der Summe ihrer Quersumme $QS(n)$ und ihres Querproduktes $QP(n)$ sind, d.h. es gilt $n = QS(n) + QP(n)$.

mit Summen und Produktzeichen so formulieren:

Aufgabe. Man finde alle positiven ganzen Zahlen n mit den Ziffern $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ (häufig als $n = \overline{a_m a_{m+1} \ldots a_1 a_0}$ dargestellt), die folgende Gleichung erfüllen:

$$n = \sum_{i=0}^{m}\left(10^{m-i} \cdot a_i\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i + \prod_{i=0}^{m} a_i.$$

Lösungshinweise: Wir betrachten zunächst Spezialfälle.

Fall 1: $m = 0$, d.h. wir suchen eine Lösung für $n = a_0 = a_0 + a_0$. Dies ist offenbar nur für $n = 0$ erfüllt.

Fall 2: $m = 1$, d.h. wir suchen eine Lösung für $n = 10 \cdot a_1 + a_0 = a_1 + a_0 + a_1 \cdot a_0$. Wir fassen in der Gleichung zusammen und erhalten: $a_1 \cdot (9 - a_0) = 0$. Da vereinbarungsgemäß die führende Ziffer einer Dezimaldarstellung von 0 verschieden sein soll, führt dies zu $a_0 = 9$ und somit zur Lösungsmenge $L = \{19, 29, \ldots, 99\}$.

Die Probe bestätigt das Ergebnis: Es gilt

$19 = 1 + 9 + 1 \cdot 9 = 19$, $29 = 2 + 9 + 2 \cdot 9 = 11 + 18 = 29$, …, bzw. allgemein $10 \cdot a_1 + 9 = a_1 + 9 + a_1 \cdot 9$.

Fall 3: $m > 1$. Hier finden wir folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i + \prod_{i=0}^{m} a_i = n \geq 10^m \cdot a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i\,.$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\sum_{i=0}^{m-1} a_i$ und teilen anschließend beide Seiten durch $a_m \neq 0$, so erhalten wir

$$1 + \prod_{i=0}^{m-1} a_i \geq 10^m$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber (wenn alle anderen Ziffern den Wert 9 haben) höchstens $1 + 9^m$, was aber offensichtlich für $m = 2$ bereits kleiner als 10^m ist ($1 + 81 < 100$). Dies gilt erst recht für $m > 2$. Es kann also keine weiteren Lösungen der Aufgabenstellung geben. ❑

Hinweis: Die Argumentation für mindestens dreistellige Zahlen lässt sich auch auf zweistellige Zahlen übertragen, also für $m = 1$. Dann untersuchen wir die Abschätzung $1 + a_0 \geq 10$ und erkennen, dass diese nur für $a_0 = 9$ erfüllt werden kann.

Viele andere Aufgaben wirken mit Summen- und Produktzeichen recht kompakt.

Aufgabe – MO221041. Beweisen Sie folgende Aufgabe: Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $\sum_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$ gilt.

Lösungshinweise[8]*:* Zur Erfüllung der Aufgabe genügt es, geeignete Zahlenbeispiele (ohne Herleitung) anzugeben und die Richtigkeit der Gleichung zu prüfen. So ist es möglich, die Zahlen für jedes $n \geq 2$ wie folgt zu wählen:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2}, a_{n-1} = 2, a_n = n.$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2} \cdot 2 \cdot n = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad ❑$$

Aufgabe Wurzel-2019-36. Für welche natürlichen Zahlen n ist $\sum_{i=1}^{n} i$ ein Teiler von $\prod_{i=1}^{n} i$?

Lösungshinweise: Wir schreiben $S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (nach der bekannten Gaußschen Summenformel) und $P = \prod_{i=1}^{n} i = n!$ (Fakultät).

a) Sei $n + 1 = p$ eine ungerade Primzahl. Dann ist zwar $\frac{n}{2}$ ein Teiler von $n!$, aber p kann kein Teiler von $n!$ sein. Folglich ist S kein Teiler von P.
b) Für $n + 1 = 2$ gilt $n = 1$ und somit $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1!$ und S ist ein Teiler von P.

[8] Eine ausführliche Diskussion zu allen n-Tupeln $mit\ n = 5$ mit dieser Eigenschaft wird im Heft 8+9/2023 geführt.

c) Sei $n+1$ eine gerade Zahl. Dann sind sowohl n als auch $\frac{n+1}{2} < n$ Teiler von $n!$ Also ist S ein Teiler von P.

d) Sei $n+1$ ungerade, aber keine Primzahl. Wir nehmen an, es gibt eine Zerlegung $n+1 = a \cdot b$ mit ungeraden Zahlen $1 < a < b < n$. Somit sind $\frac{n}{2}$, a und b paarweise verschiedene Teiler von $n!$ und somit teilt S das Produkt P. Gibt es aber eine solche Zerlegung nicht, muss $n+1 = p^2$ mit einer Primzahl p gelten. Wegen $2 \cdot p < p^2$ sind dann $\frac{n}{2}$, p und p^2 paarweise verschiedene Teiler von $n!$ und somit teilt S das Produkt P.

Fazit: Für alle natürlichen Zahlen n, für die $n+1$ keine Primzahl ist, ist die Aussage erfüllt. ❑

Aufgabe. Es gelte für $k = 1, 2, 3, \dots, 100$: $x_k \in \{-1\,;1\}$ mit $\prod_{k=1}^{100} x_k > 0$. Man beweise, dass dann stets gilt:

$$\prod_{i=0}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} \neq 0.$$

Lösungshinweise: Wegen $\prod_{k=1}^{100} x_k > 0$ ist die Anzahl der negativen Faktoren geradzahlig.

Angenommen, es gelte $\prod_{i=0}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} = 0$. Da aber jeder Summand -1 oder +1 beträgt, ist die Anzahl der negativen Summanden gleich der Anzahl der positiven Summanden, also 25. Dann ist aber auch die Anzahl der negativen Werte x_i ungeradzahlig, denn in den 25 negativen Summanden ist genau ein Faktor negativ und in den anderen 25 positiven Summanden treten negative Faktoren paarweise auf. Eine Anzahl kann aber nicht gleichzeitig geradzahlig und ungeradzahlig sein. Also ist die Annahme falsch und es gilt wie behauptet $\prod_{i=0}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} \neq 0$. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch[9] der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895.

Zweiter Cursus

Abschnitt XVII – Die Combinationslehre

[9] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

§ 259. - § 262[10].

b. Combinationen und Variationen

§ 263.

Die Combinationen unterscheidet man als solche der 1sten, 2ten, 3ten … n ten Klasse, oder als Unionen, Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), Quaternionen (Quaternen), je nachdem jede Complexion 1, 2, 3, … n Elementen des Zeigers enthält. Ebenso nennt man die Variationen nach der Zahl der in ihnen zusammengefassten Elemente der 1sten, 2ten, 3ten, … n ten Klasse.

Ferner unterscheidet man Combinationen und Variationen ohne Wiederholung und mit Wiederholung, je nachdem jedes Element des Zeigers in der Complexion nur einmal vorkommen, oder beliebig oft wiederholt werden darf.

Man bezeichnet die Inbegriffe der Combinationen und Variationen der r ten Klasse aus den n Elementen 1, 2, 3, …n

ohne Wiederholung mit $C^r(1\ 2\ 3 \dots n)$ und $V^r(1\ 2\ 3 \dots n)$.
Derselben mit W. mit $C^r(1\ 2\ 3 \dots n)^w$ und $V^r(1\ 2\ 3 \dots n)^w$.
Die Anzahl dieser Combinationen ohne W. mit $C^r(n)$ und $V^r(n)$.
“ “ “ “ mit W. “ $C^r(n)^w$ “ $V^r(n)^w$.

§ 264.

Ableitung sämtlicher Combinationen der r ten Klasse von n Elementen in lexicographischer Ordnung.

1. Für Combinationen ohne Wiederholung

Die r ersten Elemente des geordneten Zeigers bilden die erste Combination. Um die übrigen daraus abzuleiten, ersetze man die letzte Stelle nach und nach durch die nächst folgenden Elemente bis zum höchsten des Zeigers. Wo man daraus diese letzte Combination rückwärts durchlaufend, in der fallenden Anordnung der Elemente eine Lücke trifft, ersetze man dieses Element durch das nächst höhere, und schließe die folgenden des Zeigers an. Die letzte Complexion wird von den letzten r Elementen des Zeigers gebildet. – Nirgends darf ein niedrigeres Element auf ein höheres folgen.

Beispiel: $C^4(123456)$ =

1234	1256	2345
1235	1345	2346
1236	1346	2356
1245	1356	2456
1246	1456	3456

§ 265.

Ableitung aller Klassen der Combinationen eines gegebenen Zeigers aus der je vorhergehenden.

1. Bei Combinationen ohne Wiederholung erhält man die folgende Klasse, indem man jedes Element des Zeigers allen den Combinationen der vorigen Klassen voranstellt, welche mit einem höheren Element anfangen.

[10] S. Heft 8+9/2023

2. Bei Combinationen mit Wiederholung erhält man die folgende Klasse, indem man jedes Element des Zeigers allen Combinationen der vorigen Klasse voranstellt, welche mit demselben oder einem höheren Element anfangen.

...

§ 266.

Lehrsatz. Wenn man in den Combinationen der r ten Klasse auf n Elementen mit W, die Elemente der 1ten, 2ten, 3ten, ... r ten Stelle um bezügl. 0, 1, 2, ... r − 1 erhöht, so entstehen daraus die Combinationen der r ten Klasse aus (n + r − 1) Elementen ohne W.

Folgerung. Die Anzahl der Combinationen der r ten Kl. aus n Elementen mit W. und der Combinationen derselben Klasse aus (n + r − 1) Elementen ohne W. ist gleich.

$$C^r(n)^w = C^r(n + r - 1)$$

c. Die Combinations- und Variations-Zahlen

§ 269.

Variationsformel.

1. Die Anzahl der Variationen der r ten Klasse aus n Elementen ohne Wiederholung ist:

$$V^r(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

...

§ 270.

Combinationsformeln

1. Die Anzahl der Combinationen der r ten Klasse aus n Elementen ohne Wiederholung ist:

$$C^r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Denn nach dem Bildungsgesetze der Variationen § 267 ist

$$V^r(n) = P(r) \cdot C^r(n); \text{ daher}$$

$$\mathrm{C^r(n)} = \frac{\mathrm{V^r(n)}}{\mathrm{P(r)}} = \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{r}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{r!\,(n-r)!}}$$

Der Zähler dieser Combinationsformel enthält r absteigende Faktoren.

Beispiel. $C^4(10) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/2024

Aufgabe T-1 (Teamwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Betrachte die zwei unendlichen Folgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$ reeller Zahlen mit $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ und

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$. Zeige, dass $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Lösungshinweise: Wir stellen fest, dass die Folge $\{a_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$ mit der um einen Index verschobenen Folge $\{b_i\}_{i=0,1,2,\ldots}$ übereinstimmt. Wir können also die Bildungsvorschrift umformulieren:

$$b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k + a_k + 1}{b_k + 1} = a_k + \frac{1}{b_k + 1} = b_{k-1} + \frac{1}{b_k + 1}$$

Nun definieren wir eine neue Folge $B_0, B_1, B_2, \ldots$ mit $B_i = b_i + 1$ für alle $i = 0,1,2, \ldots$ Damit erhalten wir

$$B_{k+1} = B_{k-1} + \frac{1}{B_k}$$

Nach Multiplikation mit B_k folgt daraus

$$B_k \cdot B_{k+1} = B_{k-1} \cdot B_k + 1$$

Wegen $B_0 = 1$ und $B_1 = 2$ erhalten wir $B_0 \cdot B_1 = 2, B_1 \cdot B_2 = 3$ und deshalb auch $B_{2023} \cdot B_{2024} = 2025$. Nun gilt weiter

$$2025 = B_{2023} \cdot B_{2024} = (b_{2023} + 1) \cdot (b_{2024} + 1) = (a_{2024} + 1) \cdot (b_{2024} + 1)$$

Verwenden wir die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel, so können wir abschließend folgern:

$$45 = \sqrt{2025} = \sqrt{(a_{2024} + 1) \cdot (b_{2024} + 1)} \leq \frac{a_{2024} + b_{2024} + 2}{2}$$

also

$$a_{2024} + b_{2024} \geq 88$$

❑

Monatsaufgabe 01/2025[11]

Aufgabe. Bestimme alle $k \in \mathbb{N}_0$, für die eine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ existiert, die $f(2024) = k$ und $f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Bemerkung: Hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0$ die Menge nichtnegativer ganzer Zahlen.

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 28.02.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Termine

Tag der offenen Tür an der Technischen Universität Chemnitz, 09. Januar 2025. Hörsaalgebäude der TUC, Reichenhainer Str. 90, 09126 Chemnitz. Ausführliche Informationen einschließlich des Programms unter
https://www.tu-chemnitz.de/tu/veranstaltungen/tuctag/index.html

Känguru-Wettbewerb 2025: Anmeldung bis 31. Januar 2025 unter
https://www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html#anmeldung
Der Wettbewerb findet traditionell am 3. Donnerstag im März statt (25. März 2025).

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[12]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
01/2025 (Jan.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641021 MO640921
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

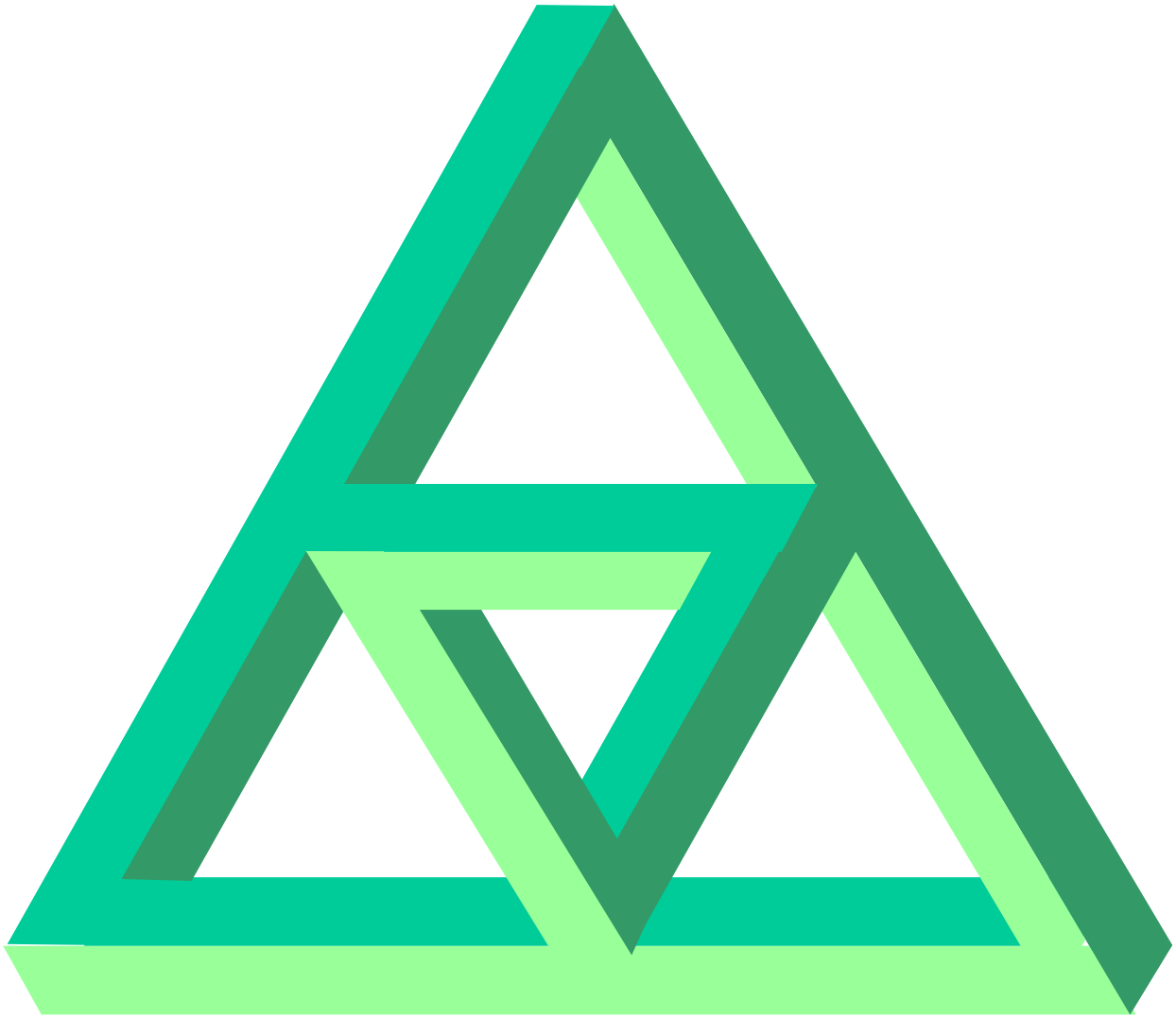
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 02/2025 (Februar 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Ein wesentlicher Schluss im Beweis der Aufgabe zum Jahreswechsel basiert auf dem Schubfachprinzip. Aber auch in der aktuellen Aufgabe **MO640924** können wir dieses allgemeingültige Prinzip wirkungsvoll einsetzen.

Wir setzen die Diskussion zum Thema „Kombinatorik“ fort und betrachten Aufgaben, die sich auf den Begriff der (klassischen) Wahrscheinlichkeit beziehen. Derartige Problemstellungen waren für die Klassenstufe 12 schon bei den frühen Mathematik-Olympiaden präsent. Zur 32. MO finden wir erstmalig die Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit auch in einer Aufgabe für die Klassenstufe 10. Seitdem werden kombinatorische Fragestellungen mitunter so verpackt, letztmalig mit der Aufgabe **MO610935**.

Die Aufgaben **MO630943/MO631042** lassen sich auf die Catalanische Vermutung zurückführen. Wer diese Aussage kannte (die bereits 1844 publiziert, aber erst 2002 bewiesen wurde), war offensichtlich für die Lösungsfindung im Vorteil. Da in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich die Anwendung bekannter Sätze ausgeschlossen wurde, waren Lösungen mit Bezug zu solchen Aussagen als vollständig anzuerkennen, auch wenn die von der Aufgabenkommission erwartete Lösungsidee viel aufwändiger war. Unter der Rubrik „In alten Mathe-Büchern geblättert“ zeigen wir die vierzeilige Notiz von 1844, in der die Catalanische Vermutung publiziert wurde.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 29.2 – Schubfachprinzip

In Heft 08/2024 wurde das Schubfachprinzip erläutert und seine vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten anhand von Aufgaben diskutiert. Während bei den Aufgaben **MO630941/MO631041** die Lösungsidee maßgeblich auf diesem Prinzip basierte, hilft oftmals der Hinweis darauf, einen Zwischenschritt in der Beweisführung zu begründen. So auch in der Aufgabe zum Jahreswechsel:

Aufgabe 29.09 – MO251046. Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 5$; sie bilden also die Teilfolge (2, 0, 2, 5).
(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und (2, 0, 2, 5) lautet.

Lösungshinweise: Alle Glieder der Folge F sind (weil Einerziffer einer Zahl) Zahlen kleiner als 10. Es gibt aber nur endlich viele 4-Tupel solcher Zahlen, nämlich 10^4. **Nach dem Schubfachprinzip**[3] muss es in einer unendlichen Folge mindestens ein 4-Tupel geben, dass mehrfach vorkommt (sogar unendlich oft vorkommt). Es gibt also zwei Indizes k und m ($k < m$) mit

$$a_k = a_m \ , a_{k+1} = a_{m+1}, a_{k+2} = a_{m+2}, a_{k+3} = a_{m+3}$$

Wir wissen, dass sowohl a_{k+4} als auch a_{m+4} die Einerziffer der Summe aus den davorliegenden 4 Folgenglieder ist, so dass auch $a_{k+4} = a_{m+4}$ folgt. Das können wir nun fortsetzen und erkennen, dass sich ab a_k bis a_{m-1} die Folgenglieder periodisch wiederholen, denn wir können diese Betrachtung statt mit k auch mit $k + 1, k + 2, \dots$ fortsetzen.

Wir vermuten, dass sich diese Eigenschaft auch in die andere Richtung fortsetzen lässt. Wir betrachten entsprechend der Bildungsvorschrift die Summen

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 10x + a_{k+3}$$
$$a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} = 10y + a_{m+3}$$

bzw.

$$a_{k-1} = 10x + a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2}$$
$$a_{m-1} = 10y + a_{m+3} - a_m - a_{m+1} - a_{m+2}$$

[3] Auch wenn die folgende Aussage einsichtig erscheint, würde bei Fehlen dieses Hinweises die Nachfrage nach einer Begründung gerechtfertigt sein.

wobei x und y geeignete Zehnerziffern darstellen, die jeweils als Summe von 4 einstelligen Zahlen einen der Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen können. Da in beiden Gleichungen die Terme mit den Variablen a übereinstimmen, beschränken wir unsere Betrachtung auf die Terme $10x + z$ und $10y + z$ mit

$$z = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2} = a_{m+3} - a_m - a_{m+1} - a_{m+2}$$

Wir nehmen an, es sei $x \neq y$ und o.B.d.A. $x < y$, also $y \geq x + 1$. Wir erhalten folglich $a_{m-1} = 10y + z \geq 10(x + 1) + z = 10x + z + 10 \geq a_{k-1} + 10$ im Widerspruch zu $a_{m-1} < 10$. Also stimmen x und y und deshalb auch a_{k-1} und a_{m-1} überein. Auch diese Argumentation können wir fortsetzen und haben bewiesen, dass die periodische Wiederholung bereits ab $k = 1$ bis $k = m - 1$ zu beobachten ist. Also gibt es tatsächlich eine (und sogar unendlich viele) Teilfolgen (2 , 0 , 2 , 5) in der Folge F. ❑

Ergänzung: Die Aufgabe stammt aus der MO im Jahr 1986. Es wurde damals natürlich die Startfolge (1, 9, 8, 6) vorgegeben. Als Nachtrag zum Lösungsvorschlag wurde informiert, dass für $m = 1561$ die Teilfolge erstmalig in F wieder erscheint. Die Periode umfasst also 1560 verschiedene 4-gliedrige Teilfolgen.

Es ist nicht schwer, computergestützt für jeder Startfolge die Länge der Periode zu ermitteln. Überraschend stellen wir fest, dass wir auch für die Startfolge (2, 0, 2, 5) den Wert $m = 1561$ erhalten. Wir nehmen dies zum Anlass, den Einfluss der Startfolgen genauer zu untersuchen:

Fall 1: Die Startfolge (0, 0, 0, 0) führt zur Folge identisch 0.

Fall 2: Sind alle Glieder der Startfolge geradzahlig, so sind auch alle Folgenglieder von F geradzahlig. Es gibt außer (0, 0, 0, 0) insgesamt $5^4 = 624$ verschiedene 4-gliedrige Teilfolgen mit geradzahligen Gliedern. Wir stellen fest, dass (0, 0, 0, 2) und (0, 0, 2, 0) zu zwei unterschiedlichen Folgen jeweils mit Periodenlänge 312 führen.

Fall 3: Sind in der Startfolge außer 0 nur die Ziffern 5 enthalten, so führen (0, 0, 0, 5), (0, 0, 5, 0) und (5, 5, 5, 5) zu drei unterschiedlichen Folgen jeweils mit der Periodenlänge 5.

Fall 4: Sind in der Startfolge ein ungerades Glied und drei gerade Glieder, so besteht jeder 4-gliedrige Teilfolge von F aus einem ungeraden Glied und drei geraden Gliedern oder aus zwei ungeraden und zwei geraden Gliedern. Wir finden, dass zu den Startfolgen (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0) und (0, 1, 0, 0) drei verschiedene Folgen F jeweils mit Periodenlänge 1560 gehören. (Die Startfolge (1, 0, 0, 0) führt bereits nach dem ersten Schritt auf (0, 0, 0, 1)).

Fall 5: Sind in der Startfolge drei ungerade Glieder und ein gerades Glied, so besteht jeder 4-gliedrige Teilfolge von F aus drei ungeraden Gliedern oder aus vier ungeraden

Gliedern. Wir finden, dass zu den Startfolgen (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1) und (1, 1, 1, 0) drei verschiedene Folgen F jeweils mit Periodenlänge 1560 führen. (Die Startfolge (1, 1, 0, 1) führt bereits nach dem 920 Schritten auf (1, 0, 1, 1)).

Fassen wir die fünf Fälle zusammen, so erhalten wir als Anzahl der erfassten Teilfolgen

$$1 + 2 \cdot 312 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1560 + 3 \cdot 1560 = 10000,$$

d.h., es sind alle möglichen 4-gliedrigen Teilfolgen und die Fallunterscheidung ist vollständig.

Aber auch in aktuellen Aufgaben erweist sich das Schubfachprinzip als hilfreich:

Aufgabe 29.10 – MO640924. Gegeben seien zwei Mengen A und B aus positiven ganzen Zahlen. Aus diesen beiden Mengen bilden wir eine neue Menge, indem wir alle Zahlen der beiden Mengen A und B für diese neue Menge auswählen und zusätzlich noch alle möglichen Summen von einer Zahl aus A und einer Zahl aus B hinzufügen. Bezeichnet man die so gebildete Menge mit $A + B$, so kommt das Gesagte in $A + B = A \cup B \cup \{a + b \text{ mit } a \in A, b \in B\}$ zum Ausdruck.

a) In diesem Aufgabenteil betrachten wir zwei spezielle Mengen für A und B:

$$A = \{3 \cdot k - 1 \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots\} = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$$
$$B = \{5 \cdot m - 4 \text{ mit } m = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen außer 4, 7 und 10 ist, also $A + B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$ gilt.

b) In diesem Aufgabenteil betrachten wir zwei beliebige Mengen A und B positiver ganzer Zahlen und untersuchen die Menge $A + B$. Dazu bezeichnen wir mit $a(n)$ und $b(n)$ die Anzahl der Elemente aus A bzw. B, die nicht größer als n sind.

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage für jede positive ganze Zahl n. Gilt die Ungleichung $a(n) + b(n) \geq n$, so ist n ein Element von $A + B$.

Hinweis zur Aufgabenstellung: Die Objekte in einer Menge (in unserer Aufgabe sind es Zahlen) heißen Elemente und werden als paarweise verschieden angenommen. Mehrfachnennungen von Elementen spielen dabei keine Rolle bei der Beschreibung einer Menge. Ebenso spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Elemente einer Menge angegeben werden. So beschreiben {4, 6}, {6, 4} und {4, 6, 4} alle die Menge aus den zwei Elementen 4 und 6, also {4, 6} = {6, 4} = {4, 6, 4}.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe Teil a): Wir bestimmen zunächst explizit alle Zahlen kleiner als 11 in $A + B$. Einige dieser Zahlen stammen direkt aus A, was die Elemente 2, 5 und 8 liefert, bzw. direkt aus B, was die Elemente 1 und 6 liefert. Alle übrigen

Zahlen kleiner als 11 in $A + B$ sind die Summe einer Zahl kleiner als 10 aus A und einer Zahl kleiner als 10 aus B, was durch systematisches Probieren zusätzlich die Summen 2 + 1 = 3, 2 + 6 = 8, 5 + 1 = 6, 5 + 6 = 11, 8 + 1 = 9 und 8 + 6 = 14 liefert. Zusammenfassend haben wir damit 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 $\in A + B$ und 4, 7, 10 $\notin A + B$.

Es bleibt zu zeigen, dass alle positiven ganzen Zahlen $n \geq 11$ Elemente von $A + B$ sind. Jede solche Zahl lässt sich als $3k - 1$, $3k$ oder $3k + 1$ für eine positive ganze Zahl $k \geq 4$ schreiben.

Fall 1: $n = 3k - 1$. Dann ist n ein Element von A und damit auch von $A + B$.

Fall 2: $n = 3k$. Dann lässt sich n als Summe $n = (3k - 1) + 1$ mit $3k - 1 \in A$ und $1 \in B$ schreiben, womit $n \in A + B$ ist.

Fall 3: $n = 3k + 1$. Dann lässt sich n als Summe $n = (3k - 10) + 11$ schreiben, wobei $3k - 10 = 3(k - 3) - 1 \in A$ und $11 \in B$ erfüllt ist, also $n \in A + B$ ist.

Ergänzung zur Übung (aufgrund des höheren Aufwandes bei gleicher Lösungsidee sollte es nicht als Lösungsvariante verstanden werden): Da A und B inhaltlich gleichberechtigt in die Aufgabenstellung einfließen, sollte die Argumentation auch aus Sicht der Menge B gelingen. Dafür wissen wir, dass sich jede Zahl $n \geq 11$ als $5k - 4, 5k - 3, 5k - 2, 5k - 1$ oder $5k$ für eine positive ganze Zahl $k \geq 3$ darstellen lässt.

Fall 1: $n = 5k - 4$. Dann ist n ein Element von B und damit auch von $A + B$.

Fall 2: $n = 5k - 3$. n lässt sich als Summe $n = (5k - 14) + 11 = 5(k - 2) - 4 + 11$ mit $11 \in A$ und $5(k - 2) - 4 \in B$ schreiben, womit $n \in A + B$ ist.

Fall 3: $n = 5k - 2$. n lässt sich als Summe $n = (5k - 4) + 2$ mit $2 \in A$ und $5k - 4 \in B$ schreiben, womit $n \in A + B$ ist.

Fall 4: $n = 5k - 1$. n lässt sich als Summe $n = (5k - 9) + 8 = 5(k - 1) - 4 + 8$ mit $8 \in A$ und $5(k - 1) - 4 \in B$ schreiben, womit $n \in A + B$ ist.

Fall 5: $n = 3k$. n lässt sich als Summe $n = (5k - 14) + 14 = 5(k - 2) - 4 + 14$ mit $14 \in A$ und $5(k - 2) - 4 \in B$ schreiben, womit $n \in A + B$ ist.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für $n = 1$ folgt aus $a(1) + b(1) \geq 1$, dass 1 in A oder B, also auch in $A + B$ vorkommt, daher dürfen wir $n > 1$ annehmen.

Falls $n \in A$ oder $n \in B$ gilt, so ist auch $n \in A + B$. Sei daher im Folgenden $n \notin A$ und $n \notin B$. Wir betrachten nun die $n - 1$ Paare

$$(1, n - 1), (2, n - 2), (3, n - 3), \ldots, (n - 2, 2), (n - 1, 1),$$

also die $n-1$ Paare $(k, n-k)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Für jedes dieser Paare $(k, n-k)$ markieren wir die erste Komponente k, falls $k \in A$, und die zweite Komponente $n-k$, falls $n-k \in B$. Es wurden dann insgesamt

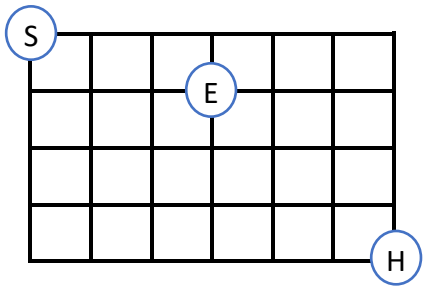
$$a(n-1) + b(n-1) = a(n) + b(n) \geq n$$

Komponenten dieser $n-1$ Paare markiert. Damit muss es **nach dem Schubfachprinzip** aber ein Paar $(k, n-k)$ geben, in dem beide Komponenten markiert wurden. Für dieses Paar $(k, n-k)$ gilt dann $k \in A$ und $n-k \in B$, womit $n = k + (n-k) \in A + B$ folgt, was zu zeigen war. ❑

Thema 24.3 – Kombinatorik[4]: klassische Wahrscheinlichkeit

Unter der klassischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird der Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle verstanden. Erstmalig in der Klassenstufe 9/10 wurde dieser Hintergrund in der 32. MO verwendet, ohne es allerdings im Aufgabentext so zu benennen.

Aufgabe 24.15 – MO321045. In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.



Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis. Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.

a) Er erklärt dazu: ”Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H fuhren über die Ecke E.” Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: ”Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn – durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen.” Trifft das zu?

[4] s. Teil 1, Heft 8+9/2023, Teil 2: Heft 1/2025

Lösungshinweis zu Teilaufgabe a): Um auf einem möglichst kurzen Weg nach Hause zu kommen, muss er – in beliebiger Reihenfolge – 6 Wegstücke nach rechts und 4 nach unten zurücklegen. Dafür gibt es

$$\binom{6+4}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

Möglichkeiten, sodass Robert genauso viele Wege prinzipiell zur Verfügung hat.

Bei *E* kommt er nur genau dann vorbei, wenn unter den ersten vier Wegstücken genau eines nach unten dabei war. Dafür gibt es $\binom{4}{1} = 4$ mögliche Wege von S nach E. Um nach dem Eiskauf noch nach Hause zu kommen, müssen weitere 3 Wegstücke nach rechts und 3 nach unten zurückgelegt werden, wofür es

$$\binom{3+3}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Möglichkeiten gibt, sodass genau $4 \cdot 20 = 80 > 70 = \frac{1}{3} \cdot 210$ möglichst kurze Wege von S nach H über E führen. Robert hat also mit seiner Aussage recht.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Robert durch Zufallsentscheidungen von S nach E gelangt, genügt es, die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Wege von S nach E zu bestimmen und diese zu addieren. Jeder dieser Wege besitzt eine Länge von 4 und tatsächlich ist sowohl zu Beginn als auch an jedem Zwischenpunkt eine Entscheidung zu treffen, da an jeder dieser Stelle zwei mögliche Fortsetzungen für kürzeste Wege nach *H* existieren. Also hat jeder dieser Wege eine Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, sodass Robert nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ in *E* vorbeikommen dürfte. Roberts Mutter hat also mit ihrer Aussage auch recht. ❑

Bemerkung der MO-Aufgabenkommission: Der Unterschied kommt dadurch zu Stande, dass die weiteren Wege, die nach H führen, nicht gleichwahrscheinlich sind, da nicht gleich viele Entscheidungen zu treffen sind: Ab Erreichen des rechten bzw. unteren Rands ist der Restweg eindeutig vorgegeben. Erreicht man diesen früher, ist der entsprechende Weg also aufgrund geringerer Anzahl an zu treffenden Entscheidungen also wahrscheinlicher.

Aufgaben zur klassischen Wahrscheinlichkeit wurden dagegen in der Klassenstufe 12 schon seit der 5. MO häufig gestellt:

Aufgabe 24.16 – MO051214. Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel: Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so dass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die

Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?
b) In wie vielen Fällen r erhält man einen einzigen Ring?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, dass ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabenstellung verbunden, z.B. o.B.d.A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten durch Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also $m = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.

Nehmen wir an, dass 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich dass 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach $r = 4 \cdot 2 = 8$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{r}{m} = \frac{8}{15} = 0.533 \ldots$$

Dieter hat also die größeren Gewinnchancen. ❑

Aufgabe 24.17 - 111236B. 50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.

Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise zur Aufgabenstellung:
1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.

2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ anzusetzen.

3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu $p = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2$.

Lösungshinweise: Es seien w und s die Anzahlen der weißen bzw. schwarzen Kugeln, die in Urne 1 gelegt werden. Nach Voraussetzung ist dann $(w, s) \neq (0, 0)$ und $(w, s) \neq (50, 50)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus Urne 1 bzw. Urne 2 gezogene Kugel weiß ist, beträgt $p_1(w, s) = \frac{w}{w+s}$ bzw. $p_2(w, s) = \frac{50-w}{100-w-s}$.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist also

$$p(w, s) = \frac{1}{2} \cdot (p_1(w, s) + p_2(w, s))$$

Gesucht sind w und s, sodass $p(w, s)$ maximal wird. Für $w = s$ gilt $p(w, s) = \frac{1}{2}$. später werden wir sehen, dass dies nicht der gesuchte Maximalwert ist. Sei nun vorerst $w \neq s$. Da nicht in beiden Urnen mehr schwarze als weiße Kugeln sein können, wird ohne Einschränkung angenommen, dass in Urne 1 mehr weiße als schwarze Urnen sind, also dass $s < w$ gilt. Einfache algebraische Umformungen zeigen dann:

Für $0 < s < w \leq 50$ gilt

$$p_1(w - 1, s - 1) > p_1(w, s) \text{ und } p_2(w - 1, s - 1) > p_2(w, s).$$

Somit kann das Maximum von $p(w, s)$ nicht für $0 < s < w \leq 50$ angenommen werden, da $p(w - 1, s - 1) > p(w, s)$.

Das Maximum von $p(w, s)$ wird also für $s = 0$ (und $w > 0$) angenommen. Es gilt $p(w, s) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{50-w}{100-w}\right) = 1 - \frac{25}{100-w}$. Dies wird für $w = 1$ maximal, und dann ist $p(1,0) = \frac{74}{99}$. Wegen $\frac{74}{99} > \frac{1}{2}$ ist also $\frac{74}{99}$ die größtmögliche erreichbare Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen.

Diese Wahrscheinlichkeit wird erreicht, wenn in Urne 1 eine weiße und keine schwarze Kugel (oder 49 weiße und 50 schwarze Kugeln gelegt) werden. ❑

Aufgabe 24.18 – MO191246B. In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

- 5 weiße Handschuhe für die rechte Hand
- 5 weiße Handschuhe für die linke Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein passendes Paar, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist. Unter einem Zug sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein Spiel von n Zügen bestehe darin, dass man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als erfolgreich.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl *n* mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Gemäß Angabe haben wir hier vier Gruppen von je 5 Handschuhen zu folgenden Typen

- WL (= weiß und für linke Hand)
- WR (= weiß und für rechte Hand)
- SL (= schwarz und für linke Hand)
- SR (= schwarz und für rechte Hand)

Bei einer Ziehung von k Handschuhen, d.h., nach k "Zügen", kommt es genau dann zu einem Erfolg, wenn zwei Handschuhe der Typen WL und WR oder zwei Handschuhe der Typen SL und SR darunter sind. Diese Paarungen müssen aber spätestens nach 11 (= 5 + 5 + 1) Zügen auf jeden Fall auftreten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs nach k Zügen, wobei hier das kleinste k zu berechnen ist, für welches diese kleiner als 0.01. Wir gehen daher im Folgenden davon aus $k > 5$ sein wird, was dann auch durch die Rechnung nachträglich bestätigt wird.

Damit dann ein Misserfolg nach $k \in \{6,7,8,9,10\}$ Zügen eintritt, dürfen für gezogene Handschuhe natürlich nur einer der 4 Typenkombinationen WL-SL, WL-SR, WR-SL, WR-SR auftreten. Die Wahrscheinlichkeit P_k für einen Misserfolg nach k Zügen beträgt daher

$$P_k = 4 \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{11-j}{22-1}$$

und speziell für $k = 6$ und $k = 7$ erhalten wir so die Werte $P_6 \approx 0.02167$ bzw. $P_7 \approx 0.00619$. Die Antwort auf die Frage ist somit $k = 7$. ❑

Aufgabe 24.19 – MO610935. Das Fußball-Pokalspiel geht nach 120 spannenden Minuten ins Elfmeterschießen. Dabei bestimmt jede der beiden Mannschaften zunächst 5 Schützen, die abwechselnd versuchen, vom Elfmeterpunkt ein Tor zu erzielen: erst der erste Schütze der ersten Mannschaft, dann der erste Schütze der zweiten Mannschaft, dann der zweite Schütze der ersten Mannschaft usw. Hat danach eine Mannschaft mehr Tore erzielt, hat diese gewonnen. Wenn bereits vorher der Vorsprung einer Mannschaft nicht mehr aufholbar ist, wird das Elfmeterschießen sofort vorzeitig beendet.

Lionels Mannschaft ist der große Favorit – wir nehmen an, dass jeder ihrer Schützen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ein Tor erzielt, während jeder der Schützen der anderen Mannschaft nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ trifft. Lionels Mannschaft schießt zuerst, und Lionel ist als fünfter Schütze seiner Mannschaft aufgestellt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lionel zum Schuss kommt, dabei trifft und das entscheidende Tor zum Sieg schießt (womit das Elfmeterschießen direkt nach seinem Treffer beendet ist)?

Lösungshinweise: Wir nehmen an, dass das Spiel torlos ins Elfmeterschießen ging. Damit Lionel den Siegtreffer schießen kann, muss seine Mannschaft zuvor genau einmal mehr getroffen haben als der Gegner.

Direkt vor seinem Schuss stand es aus Sicht seiner Mannschaft also $(k+1) : k$ mit einem k ∈ {0, 1, 2, 3}. Da das Spiel beim Stand von $(k+1) : k$ nach 8 Schüssen noch nicht entschieden ist, ist keine Verteilung der Treffer auf die 8 Schüsse denkbar, bei der die Partie schon vorher entschieden gewesen wäre. Daher können die Treffer jeweils beliebig auf die 4 Elfmeterschüsse der beiden Mannschaften verteilt sein. Für die Auswahl der $k+1$ Torschützen aus Lionels Mannschaft gibt es $\binom{4}{k+1}$ Möglichkeiten, wobei $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{4}{4} = 1$ gilt. Jeder dieser $k+1$ Spieler trifft mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, die anderen $3-k$ Spieler schießen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ daneben. Für die Auswahl der k Torschützen aus der gegnerischen Mannschaft gibt es $\binom{4}{k}$ Möglichkeiten. Jeder dieser k Spieler trifft mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, jeder der anderen $4-k$ Spieler schießt mit

Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ daneben. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Torstands $(k+1):k$ beträgt also

$$\binom{4}{k+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}\cdot\binom{4}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}=\binom{4}{k+1}\cdot\binom{4}{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$$

Addition über alle $k = 0,1,2,3$ liefert

$$(4\cdot 1+6\cdot 4+4\cdot 6+1\cdot 4)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=56\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$$

Da überdies auch Lionel treffen muss und dies mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ geschieht, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit für Lionels Siegtreffer gleich

$$6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{56\cdot 2^6}{3^9}=\frac{3584}{19683}$$

Lösungsvariante: Für die folgenden Überlegungen nehmen wir zunächst an, dass das Elfmeterschießen nicht vorzeitig abgebrochen wird. Es werden also in jedem Fall 10 Elfmeter geschossen, wonach die Mannschaft mit den meisten Toren gewinnt. Wir sagen, ein Elfmeter geht positiv für Lionels Mannschaft aus, wenn entweder sein Team den Elfmeter schießt und trifft oder das gegnerische Team schießt und nicht trifft. Ansonsten nennen wir den Ausgang negativ.

Lionels Mannschaft hat genau dann gewonnen, wenn mehr als die Hälfte der 10 Elfmeter für sie positiv ausgegangen ist. Die gegnerische Mannschaft gewinnt dagegen, wenn mehr als die Hälfte der 10 Elfmeter negativ ausgeht. Zum sofortigen Abbruch des Elfmeterschießens kommt es jeweils direkt nach dem sechsten positiven bzw. dem sechsten negativen Elfmeter.

Lionels Elfmeter muss also genau der sechste positive Elfmeter sein. Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Ausgang ist bei jedem Schuss $\frac{2}{3}$. Von den 8 Elfmetern vor Lionel müssen also genau 5 positiv ausgehen, und Lionel muss selbst treffen. Da die Ereignisse unabhängig voneinander sind, müssen die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also genau

$$\binom{8}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{56\cdot 2^6}{3^9}=\frac{3584}{19683}$$

Aufgabe 24.20 – MO531041. Doppelkopf ist ein Spiel für vier Spieler. Zwei Varianten dieses Spiels sind im Gebrauch. In jeder der beiden Varianten werden Spielkarten verwendet, die sich durch ihre Farbe (etwa Eichel) und ihre Höhe (etwa König) unterscheiden. Es sind die Farben Eichel, Grün, Rot und Schellen sowie die Höhen As, Zehn, König, Ober, Unter und Neun in Gebrauch, wobei jede Spielkarte (also etwa „Rot Ober“) doppelt vorhanden ist (daher auch der Name Doppelkopf). Alle Unter,

Ober sowie die beiden Karten „Rot Zehn“ werden als Trumpfkarten bezeichnet, da ihnen im Spiel eine besondere Rolle zukommt. Alle anderen Karten werden als Farbkarten bezeichnet, wobei meistens die Farbkarten der Farbe Schellen auch Trumpf sind. Die Karten werden anfangs vollständig und zu gleicher Anzahl unter den Spielern verteilt, dann kann das Spiel beginnen.

In der ersten Variante wird ohne Neunen, also mit 40 Karten gespielt. Jeder Spieler erhält in dieser Variante folglich 10 Karten und es gibt genau vier Farbkarten Rot (zwei Asse und zwei Könige). In der zweiten Variante wird mit Neunen, also mit 48 Karten gespielt. Jeder Spieler erhält in dieser Variante folglich 12 Karten und es gibt genau acht Farbkarten Grün (zwei Asse, zwei Zehnen, zwei Könige und zwei Neunen).

Man vergleiche die Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel mit Neunen die acht grünen Farbkarten unter den Spielern gleich verteilt sind (jeder Spieler hat zwei grüne Farbkarten), mit der Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel ohne Neunen die vier roten Farbkarten gleich verteilt sind (jeder Spieler hat eine rote Farbkarte).

Lösungshinweise: Die zu vergleichenden Wahrscheinlichkeiten bestimmen sich jeweils als Quotient $p_1 = \frac{G_1}{A_1}$ bzw. $p_2 = \frac{G_2}{A_2}$ aus der Anzahl der für den betrachteten Fall günstigen (G_1, G_2) zur Anzahl der möglichen (A_1, A_2) Kartenverteilungen unter den vier Spielern, die wir mit Anton, Bernd, Claus und Detlef bezeichnen wollen. Wir denken uns die Karten auf der Rückseite mit den Zahlen 1 bis 40 bzw. 1 bis 48 durchnummeriert, so dass diese wohlunterscheidbar sind und wir sagen können, welche Kartennummern jeweils Anton, Bernd, Claus und Detlef zugeteilt wurden.

Bei jeder einzelnen Anzahlbestimmung ist aus einer Gesamtheit der Kardinalität N eine Teilmenge der Kardinalität $M \leq N$ auszuwählen. Dies ist bekanntlich auf genau

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M! \cdot (N-M)!}$$

Arten möglich.

Variante ohne Neunen: A_1 kann wie folgt berechnet werden: Für Anton werden 10 der 40 Karten ausgewählt, für Bernd weitere 10 der restlichen 30, für Claus weitere 10 der restlichen 20 und Detlef bekommt die verbleibenden 10 Karten. Damit ergibt sich

$$A_1 = \binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} = \frac{40! \cdot 30! \cdot 20!}{10! \cdot (40-10)! \cdot 10! \cdot (30-10)! \cdot 10! \cdot (20-10)!}$$
$$= \frac{40!}{10!^4}$$

G_1 kann wie folgt berechnet werden: Wir bilden zwei Stapel, einen mit den vier roten Farbkarten und einen zweiten mit den restlichen 36 Karten. Dann wählen wir nacheinander für Anton eine der vier roten Farbkarten und 9 der 36 Restkarten, für

Bernd eine der verbliebenen drei roten Farbkarten und 9 der 27 verbliebenen Restkarten, für Claus eine der verbliebenen zwei roten Farbkarten und 9 der 18 verbliebenen Restkarten. Die restlichen 10 Karten bekommt Detlef. Damit ergibt sich

$$G_1 = \binom{36}{9} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{2}{1} = \frac{36!}{9!^4} \cdot 4!$$

Variante mit Neunen: Ähnlich ergibt sich

$$A_2 = \binom{48}{12} \cdot \binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} = \frac{48!}{12!^4}$$
$$G_1 = \binom{40}{10} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{4}{2} = \frac{40!}{10!^4} \cdot \frac{8!}{2!^4}$$

Damit gilt

$$p_1 = \frac{G_1}{A_1} = \frac{36! \cdot 4!}{9!^4} : \frac{40!}{10!^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10^4}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = \frac{1000}{9132} > \frac{1}{10}$$

und

$$p_2 = \frac{G_2}{A_2} = \frac{40! \cdot 8!}{10!^4 \cdot 2!^4} : \frac{48!}{12!^4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11^4 \cdot 12^4}{2^4 \cdot 41 \cdot 42 \cdot \dots \cdot 48} =$$
$$= \frac{11^3 \cdot 2 \cdot 6^2}{41 \cdot 43 \cdot 23 \cdot 47} = \frac{95832}{1905803} < \frac{1}{10}$$

also $p_1 > p_2$. ❑

Anmerkung: Es gilt $p_1 \approx 0.109$ und $p_2 \approx 0.0503$.

Aufgabe 24.21 – MO361041. In einem „$4 \times n$ Kartenspiel'" gebe es 4 „Farben" und von jeder Farbe n „Bilder"; dabei sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 5$. Gefragt wird nun, wie groß die Chance ist, bei zufälligem Ziehen von fünf Karten des Spiels solche Karten zu ziehen, die alle fünf einander gleiche Farbe haben. Jemand bemerkt, dass diese Chance umso größer ist, je größer n ist. Bei einem Skatspiel ($n = 8$) beispielsweise haben etwa 0.1112 % aller Möglichkeiten, fünf Karten zu ziehen, die Eigenschaft, dass es fünf Karten einander gleicher Farbe sind, bei einem Rommésspiel ($n = 13$) sind es bereits etwa 0.1981 % aller Möglichkeiten.

Kann n so groß gewählt werden, dass der Anteil der Möglichkeiten, fünf Karten gleicher Farbe zu ziehen, 0.5 % aller Möglichkeiten erreicht oder übersteigt?

Lösungshinweise: Wir wenden die Formeln zur Anzahl der Möglichkeiten, 5 gleichfarbige Karten auszuwählen, sowohl für die günstigen als auch für die möglichen Fälle an und bilden zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit deren Quotient

$$w_n = \frac{4 \cdot \binom{n}{5}}{\binom{4 \cdot n}{5}} = \frac{\frac{4 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{\frac{4 \cdot n \cdot (4 \cdot n - 1) \cdot (4 \cdot n - 2) \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}$$

$$= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{(4\cdot n-1)\cdot(4\cdot n-2)\cdot(4\cdot n-3)\cdot(4\cdot n-4)}$$

Wir überprüfen die angegebenen Beispiele für $n = 8$ und $n = 13$:

$$w_8 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{31\cdot 30\cdot 29\cdot 28} = \frac{1}{31\cdot 29} \approx 0.1112\%$$
$$w_{13} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} = \frac{11\cdot 9}{51\cdot 5\cdot 49\cdot 4} \approx 0.1981\%$$

Wir schätzen den Bruch ab, indem wir im Zähler den kleinsten Faktor und im Nenner den größten Faktor wählen:

$$\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{(4\cdot n-1)\cdot(4\cdot n-2)\cdot(4\cdot n-3)\cdot(4\cdot n-4)} < \frac{(n-1)^4}{(4\cdot n-4)^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 < 0.391.$$

Somit muss die Frage verneint werden: Es ist nicht möglich, n so groß zu wählen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0.5 übersteigt. ❑

Bekannte Sätze der Mathematik[5]

EUGÈNE CHARLES CATALIN[6] stellte 1844 die nach ihm benannte ***Catalanische Vermutung*** auf: Die einzige ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^p - y^q = 1$ mit $x, y, p, q > 1$ lautet $x = 3, p = 2, y = 2$ und $q = 3$.

Erst nach über 150 Jahren wurde diese Vermutung 2002 von PREDA MIHĂILESCU[7] bewiesen. In der Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade gab es passend zu dieser Vermutung die

Aufgabe – MO630943/MO631042. Bestimmen Sie alle Lösungspaare (m, n) ganzer Zahlen m und n, für die $2^m = 255^n + 1$ gilt.

Vorbemerkung: Wir können negative Zahlen m und n leicht ausschließen, denn 255^n ist stets positiv und so ist die linke Seite der Gleichung größer als 1. Weiter impliziert $2^m > 1$ positives $m \geq 1$. Damit ist die linke Seite der Gleichung mindestens 2, woraus $n \geq 0$ folgt. Bis auf die Sonderfälle $m = 1$, $n = 1$ oder $n = 0$ erinnert die Aufgabe also an die Catalanische Vermutung. Der folgende kurze Lösungsweg erweist sich damit als vollständig:

Lösungshinweise: Nach der Catalanischen Vermutung können nicht beide Exponenten m und n größer als 1 sein (weil dafür die Lösung bereits eindeutig bestimmt und abweichend von der Aufgabenstellung ist).

[5] Nach Fricke, Jan, Die Catalanische Vermutung in der Mathematik-Olympiade. In: Mitteilungen des Mathematik-Olympiade e.V., Heft 57, November 2024, S. 56f.
[6] Belgischer Mathematiker, geb. 1814, gest. 1894
[7] Rumänischer Mathematiker, geb. 1955

Für $n = 0$ finden wir $m = 1$. Für $n = 1$ finden wir $m = 8$. Weitere Lösungen als $(1, 0)$ und $(8, 1)$ kann es also nicht geben. ❑

Der Beweis von PREDA MIHĂILESCU ist so komplex, dass er nicht im Rahmen der MO zu erwarten ist. Es gibt einen schwächeren Satz, der auf KARL ZSIGMONDY[8] aus dem Jahr 1892 zurückgeht:

Satz von ZSIGMONDY. Seien $a > b$ teilerfremde positive ganze Zahlen und $n > 1$ ganzzahlig. Dann gibt es einen Primteiler p von $a^n - b^n$, der für kein k mit $0 < k < n$ ein Teiler von $a^n - b^n$ ist, ausgenommen

- $n = 2$ und $a + b$ ist eine Zweierpotenz
- $n = 6$, $a = 2$ und $b = 1$.

Lösungsvariante zur MO-Aufgabe, basierend auf dem Satz von Zsigmondy: Wir wissen bereits, dass n nicht negativ ist. Für $n = 0$ und $n = 1$ finden wir wie oben die Lösungspaare (1, 0) und (8, 1).

Angenommen, es gibt eine Lösung (m, n) mit $n > 1$. Dann ist $m > 8$ und es gilt $2^m - 1 = 255^n = 3^n \cdot 5^n \cdot 17^n$. Wegen $2^8 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ kommt jeder Primfaktor von $2^m - 1$ bereits in $2^8 - 1$ vor, was dem Satz von ZSIGMONDY widerspricht – es kann also keine weiteren Lösungen geben. ❑

Lösungsvariante der MO-Aufgabe (des MO-Aufgabenausschusses): Es wird eine Fallunterscheidung bezüglich m durchgeführt.

Fall 1: $m \leq 0$. Dann ist $2^m \leq 1$. Da stets $255^n + 1 > 1$ ist, gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 2: $m = 1$. Hier erhalten wir $2^1 = 2 = 255^n + 1$, also $255^n = 1$ und daher $n = 0$. Die Probe bestätigt, dass (1, 0) tatsächlich ein Lösungspaar ist.

Fall 3: $m \geq 2$. In diesem Fall gilt $2^m \geq 4$, also $255^n \geq 3$. Somit muss $n > 0$ gelten. Dann endet $255^n + 1$ stets auf die Ziffer 6. Da sich die Einerziffern von 2^m periodisch wiederholen (2, 4, 8, 6, 2, 4, …), kommen für m nur die Vielfachen von 4 in Frage, also $m = 4 \cdot k$ mit $k \geq 1$ und ganzzahlig. Wir erhalten $2^m = 2^{4 \cdot k} = 16^k$. Die zu lösende Gleichung lautet dann $(4^k)^2 = 255^n + 1$. Umformen und Faktorisieren unter Verwendung der Primfaktorzerlegung $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ ergeben

$$(4^k - 1) \cdot (4^k + 1) = 255^n = 3^n \cdot 5^n \cdot 17^n$$

bzw.

$$(2^k - 1) \cdot (2^k + 1) \cdot (4^k + 1) = 255^n = 3^n \cdot 5^n \cdot 17^n$$

[8] Österreichischer Mathematiker, geb. 1867, gest. 1925

Die Faktoren 3, 5 und 17 sind Primzahlen, und $4^k - 1$ und $4^k + 1$ sind teilerfremd wegen $ggT(4^k - 1, 4^k + 1) = ggT(2, 4^k + 1) = 1$.[9] Damit gilt erst recht $ggT(4^k + 1, 2^k - 1) = 1$ und $ggT(4^k + 1,\ 2^k + 1) = 1$. $2^k - 1$ und $2^k + 1$ sind wegen $ggT(2^k - 1, 2^k + 1) = ggT(2, 2^k + 1) = 1$ ebenfalls teilerfremd. Wegen $2^k - 1 < 2^k + 1 < 4^k + 1$ ergeben sich für nun die folgenden Möglichkeiten.

Fall 3.1: $2^k - 1 = 1$ und $(2^k + 1) \cdot (4^k + 1) = 255^n$, was keine Lösung liefert.

Fall 3.2: $2^k - 1 > 1$ bzw. $k > 1$. Da die Zahl 255^n nur drei verschiedene Primfaktoren besitzt, lässt sie sich eindeutig als Produkt von drei der Größe nach geordneten paarweise teilerfremden Faktoren größer als 1 schreiben und es muss $2^k - 1 = 3^n$, $2^k + 1 = 5^n$ und $4^k + 1 = 17^n$ gelten, also insbesondere auch $3^n + 2 = 5^n$ oder äquivalent $\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{2}{5^n} = 1$. Für $n = 1$ ist dies richtig, und eine Probe bestätigt, dass mit $k = 2$ und $m = 8$ alle Gleichungen erfüllt sind. Für $n > 1$ ist die linke Seite aber kleiner als $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$ und es gibt keine weitere Lösung. ❑

Die Jury der Bundesrunde musste entscheiden, ob die Kurzfassungen auf der Basis der Catalanischen Vermutung oder des Satzes von ZSIGMONDY als vollständige Lösung anzuerkennen sind. Aufgrund des Hinweises auf dem Aufgabenblatt

„… Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“

wurde zugunsten der Teilnehmer ein solcher Lösungsweg akzeptiert. Will man so eine Vereinfachung vermeiden, ist die Aufgabenstellung etwa wie folgt zu ergänzen: *Für die Lösungsdarstellung genügt es nicht, einen geeigneten Satz zu zitieren und anzuwenden.*

Monatsaufgabe 02/2025[10]

Es sitzen 2024 Mathematigerinnen[11] in einer Reihe am Ufer des Flusses Tisza. Jede von ihnen arbeitet an genau einem Forschungsthema. Falls zwei Mathematigerinnen am selben Thema arbeiten, arbeiten auch alle Mathematigerinnen, die zwischen ihnen sitzen, an diesem Thema.

[9] Dabei wurde von der Beziehung $ggT(A, B) = ggT(B - A, B)$ Gebrauch gemacht.

[10] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.03.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[11] Die Mathematigerin (anstelle des Genderns für „Mathematiker“) (https://www.mathe-wettbewerbe.de/fileadmin/Mathe-Wettbewerbe/Mathematik-Olympiade/Fotos/Mathematik-Olympiade_2023/Originaltiger.JPG) ist seit 2007 das Maskottchen der Wettbewerbsteilnehmerinnen und -teilnehmer bei jeder IMO, EGMO, Mathematik-Olympiaden Bundesrunde und vielen weiteren mathematischen Events.

Marvin versucht, für jedes Paar von Mathematigerinnen herauszufinden, ob sie am selben Forschungsthema arbeiten. Er darf dafür jeder Mathematigerin die folgende Frage stellen: „Wie viele von diesen 2024 Mathematigerinnen arbeiten an deinem Forschungsthema?“ Er stellt diese Fragen nacheinander. Er kennt also alle bisherigen Antworten, bevor er die nächste Frage stellt.

Bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, sodass Marvin sein Ziel stets mit höchstens k Fragen erreichen kann.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2024

Aufgabe I-4 (Individualwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Für eine positive ganze Zahl n bezeichne $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n.

Bestimme alle Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle positiven ganzen Zahlen k der Wert $P(k)$ durch $\sigma(k)$ teilbar ist.

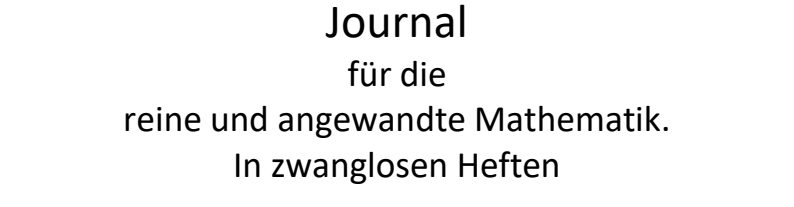
Lösungshinweise: Wir verwenden mehrfach die bekannte Aussage für Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten und ganzen Zahlen a und b, nach der die Differenz $a - b$ ein Teiler von $P(a) - P(b)$ ist.

Wir betrachten zwei Primzahlen p und q mit $p \neq q$. Zudem sei P ein Polynom mit der geforderten Eigenschaft. Weil das Produkt $p \cdot q$ die Teiler 1, p, q und $p \cdot q$ besitzt, gilt $\sigma(p \cdot q) = 1 + p + q + p \cdot q = (1 + p) \cdot (1 + q)$. Weil $\sigma(p \cdot q)$ ein Teiler von $P(p \cdot q)$ sein soll, gilt auch $(p + 1)(q + 1) \mid P(p \cdot q)$. Dies ist äquivalent zu $p \cdot q - (-p - q - 1) | P(p \cdot q)$.

Setzen wir $a = p \cdot q$ und $b = -p - q - 1$, so folgt aus $a - b | P(a) - P(b)$ auch $(p + 1) \cdot (q + 1) | P(q \cdot p)$ und wir erhalten $(p + 1) \cdot (q + 1) | P(-p - q - 1)$. Dann ist aber auch jeder der beiden Faktoren ein Teiler von $P(-p - q - 1)$ und folglich gilt auch $-p - 1 | P(-p - q - 1)$.

Setzen wir nun $a = -p - q - 1$ und $b = -q$, so erhalten wir die Aussage $-p - 1 | P(-p - q - 1) - P(-q)$. Weil bereits $-p - 1 | P(-p - q - 1)$ gilt, folgt auch $p + 1 | P(-q)$ für alle Primzahlen p und q. Dies ist jedoch nur für $P(-q) = 0$ erfüllbar. Da es unendlich viele Primzahlen q gibt, besitzt das Polynom unendlich viele Nullstellen. Daraus folgt unmittelbar $P = 0$, also das Nullpolynom, als einzige Möglichkeit, die geforderte Eigenschaft zu erfüllen. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert


Journal
für die
reine und angewandte Mathematik.
In zwanglosen Heften

herausgegeben von
A.L. Crelle
Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preusicher Behörden
Sieben und zwanzigster Band
Berlin, 1844

S. 192

13.
Note

extraite d'une lettre adressée à l'éditeur par Mr. *E. Catalan*, Répétiteur à l'école polytechnique de Paris.

„Je vous prie, Monsieur, de vouloir bien énoncer, dans votre recueil, le „théorème suivant, que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à „le démontrer complètement: d'autres seront peut-être plus heureux:

„Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être „des puissances exactes; autrement dit: l'équation $x^m - y^n = 1$, dans „laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admèt qu'une seule „solution."

Ich bitte Sie, Herr, in Ihrer Sammlung zu erwähnen. Ich glaube, dass das folgende Theorem wahr ist, obwohl es mir noch nicht gelungen ist, es vollständig zu beweisen: Andere werden vielleicht glücklicher sein: „Zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen außer 8 und 9 können keine exakten Potenzen sein; mit anderen Worten: Die Gleichung, in der die Unbekannten ganzzahlig und positiv sind, hat nur eine einzige Lösung."

Termine

Wettbewerb „Jugend forscht", Regionalwettbewerb Nordwestsachsen, 13.02.2025 in Leipzig, 14.00 – 18.30 Uhr, Universität Leipzig

64. Mathematik-Olympiade, Landesausscheid Sachsen, 01./02.03.2025

Wettbewerb „Jugend forscht", Regionalwettbewerb Südwestsachsen, 07.03.2025 in Chemnitz, 13.00 – 17.00 Uhr, IHK Chemnitz

Wettbewerb „Jugend forscht", Regionalwettbewerb Ostsachsen, 08.03.2025 in Dresden 14.00 – 18.30 Uhr, Sachsen Energie Dresden

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 29.2 – Schubfachprinzip 3
Thema 24.3 – Kombinatorik: klassische Wahrscheinlichkeit 7
Bekannte Sätze der Mathematik 16
Monatsaufgabe 02/2025 18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2024 19
In alten Mathe-Büchern geblättert 19
Termine 20

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[12]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

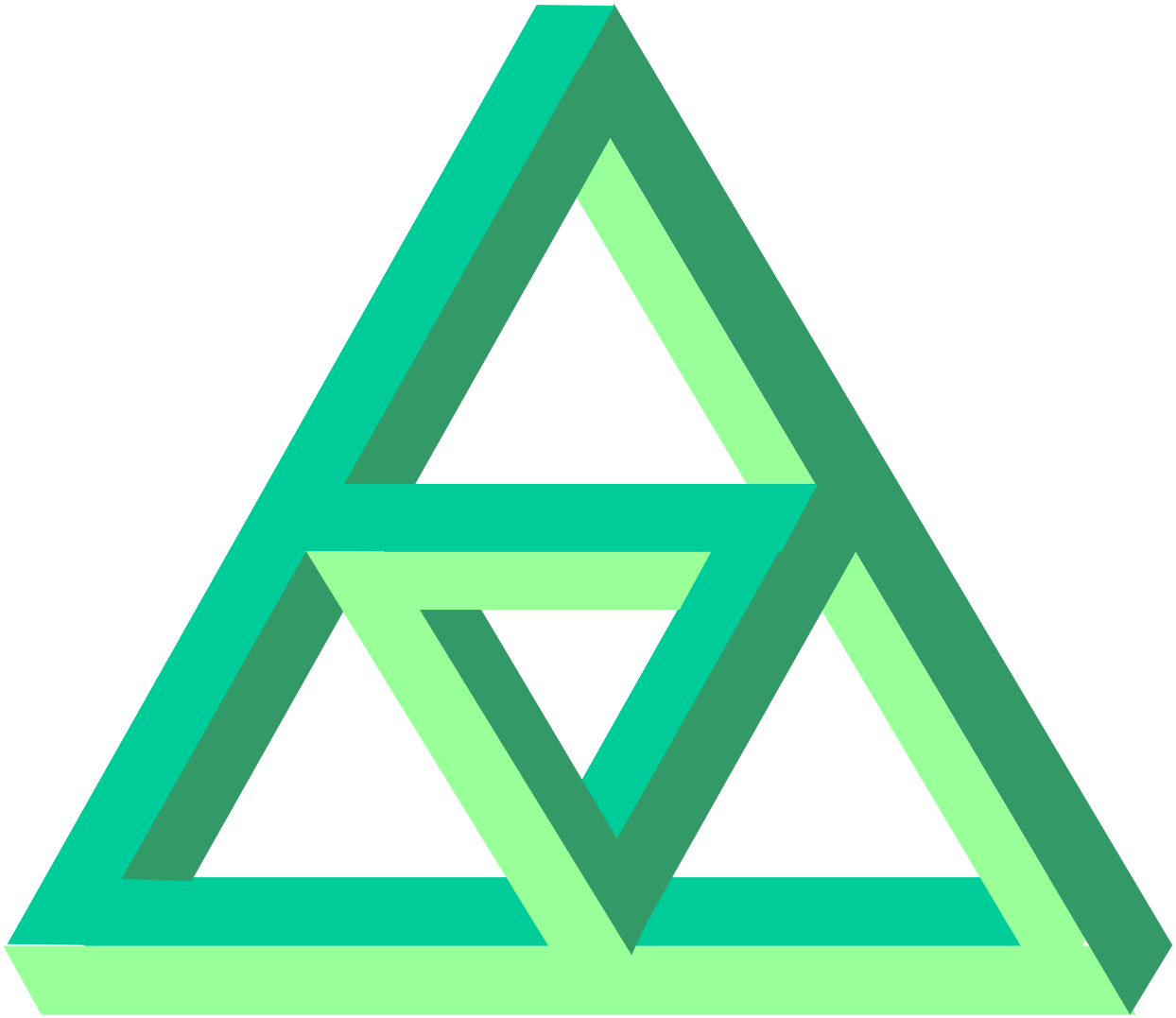
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 03/2025 (März 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit Bezug zur Aufgabe **MO641024** setzen wir das Thema 25 „Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken“ mit weiteren Aufgaben fort und verweisen auf die Notwendigkeit, deren Lösungen stets mit der Bestimmung des Definitionsbereiches zu beginnen.

Die offiziellen Lösungshinweise zur Aufgabe **MO640922** enthalten verschiedene Lösungsvarianten, darunter auch eine mit Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wir finden in der Sammlung der MO-Aufgaben wiederholt Aufgaben, bei denen ein solcher Lösungsansatz zielführend ist. Die damit verbundene Möglichkeit, z.B. die Lage von Punkten oder die Längen von Strecken berechnen zu können, kann die Lösungsdarstellung vereinfachen. Wir verzichten in den Beispielen jedoch, einen rein geometrischen Lösungsansatz gegenüberzustellen. Dies sollte aber zur Übung stets versucht werden.

Das Thema „Koordinatensystem“ ist eng mit RENE DESCARTES verbunden. Ein Auszug aus seinem Werk „La Géométrie“ aus dem Jahr 1637 zeigt, wie er algebraische Grundoperationen auf geometrische Objekte übertrug.

Unter Terminen sei ausdrücklich auf den **7. Tag der Mathematik** der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz am Samstag, dem 5. April 2025 hingewiesen. Die Anmeldung zu den beliebten Team-Wettbewerben in den Klassenstufen 8 – 10 sowie 11/12 muss bis 20. März 2025 erfolgen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25.2 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken[3]

Aufgabe 25.07 – MO641024. Für die reellen Zahlen x und y betrachten wir den Ausdruck

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}$$

a) Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen x und y der Ausdruck definiert ist.
b) Geben Sie drei Beispiele für Werte von x und y an, für die der Wert des Ausdrucks -1 beträgt.
c) Zeigen Sie, dass es keine reellen Zahlen x und y gibt, für die der Ausdruck definiert und größer als 1 ist.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Ausdruck ist genau dann definiert, wenn die Radikanden der auftretenden Wurzeln nichtnegativ sind, also wenn $x^2 \leq 1$ und $y^2 \leq 1$ gilt. Der Ausdruck ist also genau für alle (x, y) mit $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$ definiert.

(Hinweis: Auch wenn es nicht als Teilaufgabe formuliert wäre – die Diskussion zum Definitionsbereich ist eine wesentliche Komponente der Lösungsdarstellung bei Wurzelaufgaben.)

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da die Wurzeln stets nichtnegativ sind, müssen x oder y (oder beide Variablen) negativ sein.

Wir finden mit $(-1; 0)$ und $(0; -1)$ Beispiele für Lösungen der geforderten Gleichung, denn es gilt:

$$-1 \cdot \sqrt{1-0^2} + 0 \cdot \sqrt{1-(-1)^2} = -1$$
$$0 \cdot \sqrt{1-(-1)^2} - 1 \cdot \sqrt{1-0^2} = -1$$

Wir suchen weitere Lösungen und nehmen zur Vereinfachung beispielsweise $x = y$ an und erhalten damit $2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} = -1$. Nach Quadrieren führt dies zu $4 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2 + 1 = 0$ mit den Lösungen (gemäß der bekannten Lösungsformel) $x_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Somit ist (weil $x < 0$ erforderlich) auch $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ ein geeignetes Beispiel, das durch eine Probe bestätigt wird:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -1$$

[3] S. Thema 25.1 in Heft 11/2023

Wir können bei der Suche nach weiteren Beispielen y in Abhängigkeit von x beschreiben. Setzen wir beispielsweise $x = -\frac{1}{2}$, so finden wir:

$$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -1 \qquad \text{I Umformen}$$

d.h.,

$$\sqrt{1-y^2} = 2 + y \cdot \sqrt{3} \qquad \text{I Quadrieren}$$
$$1 - y^2 = 4 + 4y\sqrt{3} + 3y^2 \qquad \text{I Zusammenfassen und Umformen}$$
$$4y^2 + 4y\sqrt{3} + 3 = 0 \qquad \text{I : 4}$$
$$y^2 + y\sqrt{3} + \frac{3}{4} = 0 \qquad \text{I Anwendung der Löungsformel}$$
$$y_{1/2} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Damit sind $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$ weitere Beispiele der geforderten Art, denn es gilt:

$$-\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1-\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} = -1$$

Wir verallgemeinern diesen Ansatz und wählen $-1 < x < 0$ beliebig, aber fest. Dann formen wir die gegebene Gleichung äquivalent um:

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} = -1 - y \cdot \sqrt{1-x^2}$$
$$x^2 - x^2y^2 = 1 + 2y \cdot \sqrt{1-x^2} + y^2 - x^2y^2$$
$$y^2 + 2y \cdot \sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 0$$
$$y_{1/2} = \sqrt{1-x^2} \pm \sqrt{\sqrt{1-x^2}^2 - 1 + x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

Somit sind auch alle Punktepaare $(x; y)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ für $x; y \leq 0$ ebenfalls Lösungen der geforderten Gleichung, denn es gilt:

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2} = x \cdot |x| + y \cdot |y| = -x^2 - y^2 = -1$$

Wir können deshalb sogar unendlich viele Beispiele der geforderten Art angeben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Angenommen, es gibt Zahlen x und y aus dem Definitionsbereich, für die $x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2} > 1$ erfüllt ist. Dann gilt auch

$$\left(x \cdot \sqrt{1-y^2}\right)^2 > \left(1 - y \cdot \sqrt{1-x^2}\right)^2$$

weil der Wert von $1 - y \cdot \sqrt{1-x^2}$ wegen $y \leq 1$ und $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ nichtnegativ ist. Daraus folgt

$$x^2 \cdot (1-y^2) \quad > 1 - 2y \cdot \sqrt{1-x^2} + y^2 \cdot (1-x^2)$$

und weiter

$$0 > y^2 - 2y\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) = \left(y - \sqrt{1-x^2}\right)^2$$

wobei im letzten Schritt wieder die binomische Formel angewendet wurde. Wir erhalten einen Widerspruch, da das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist. Die Annahme war also falsch. Es gibt keine reellen Zahlen x, y, für die der Ausdruck definiert und größer als 1 ist.

Aufgabe 25.08 – MO071046. Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

Lösungshinweise: Wir bestimmen zunächst den Definitionsbereich. Einerseits muss $x \geq \sqrt{x}$ gelten, damit der mittlere Wurzelausdruck definiert ist. Dies ist äquivalent zu $x \geq 1$ oder $x = 0$. Dabei entfällt $x = 0$, weil sonst der Nenner im rechten Ausdruck gleich 0 wäre. Weil $x + \sqrt{x} \geq 0$ sein muss (damit der linke Wurzelausdruck definiert ist, muss auch $x \geq 0$ sein (damit der rechte Wurzelausdruck definiert ist). Es gilt also $x \geq 1$.

Durch Multiplikation mit $x + \sqrt{x}$ geht die Gleichung äquivalent in

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} \quad &\Longrightarrow \quad x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} \qquad \mathrm{I} : \sqrt{x} > 0 \\
\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x-1} \qquad \mathrm{I}: \text{quadrieren} \\
x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Wir erhalten als einzige Lösung $x = \frac{25}{16}$. Da alle Umformungen als äquivalent ausgewiesen wurden (was aber explizit formuliert sein muss!), ist keine Probe erforderlich. Sie sollte aber dennoch ausgeführt werden:

$$\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}}}$$

$$\sqrt{\frac{45}{16}} - \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{16}{45}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \sqrt{5} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} \qquad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

❑

Aufgabe 25.09 - MO211034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3 \cdot x^2}}{x} < 1$$

Lösungshinweise: Wir untersuchen zunächst den Definitionsbereich. Damit der Bruch existiert, ist $x \neq 0$. Damit der Wurzelausdruck existiert, muss $|x| \leq \frac{1}{3}$ gelten.

Wegen $0 < |x| \leq \frac{1}{3}$ ist $1 - 3 \cdot x^2 < 1$, d.h. $\sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < 1$. Also ist der Zähler auf der linken Seite positiv. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x.

Ist dieser negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, so dass wir ein erstes Lösungsintervall $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;0\right)$ erhalten.

Ist dagegen $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von 1 äquivalent zu $-\sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < x - 1$ bzw. $\sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < 1 - x$. Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu

$$1 - 3 \cdot x^2 > (1 - x)^2 = 1 - 2 \cdot x + x^2$$

bzw.

$$0 > -2 \cdot x + 4 \cdot x^2 = (-2 \cdot x) \cdot (1 - 2 \cdot x).$$

Wegen $x > 0$ ist $-2 \cdot x < 0$, die Ungleichung also äquivalent zu $1 - 2 \cdot x > 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, sodass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).

Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ die Ungleichung erfüllen. ❑

Ergänzende Diskussion: Bei Gleichungen ist der Verzicht auf die Bestimmung des Definitionsbereiches meist durch das Ausführen der Probe auszugleichen. Hier werden Scheinlösungen erkannt, was nachträglich dazu führen wird, den Definitionsbereich zu beachten. Wollen wir jedoch die Ungleichung

$$\frac{1-\sqrt{1-3\cdot x^2}}{x} < 1$$

lösen, beachten wir natürlich die Bedingung $x \neq 0$. Damit können wir in zwei Fällen auswerten und umformen:

Fall (1) $\quad x > 0\colon\ 1-\sqrt{1-3\cdot x^2} < x \quad \Longrightarrow \quad 1-x < \sqrt{1-3\cdot x^2}$

Beachten wir weiter die Einschränkung $x \leq 1$ (damit die linke Seite der Ungleichung nicht-negativ ist), so können wir beide Seiten quadrieren und erhalten

$$1-2\cdot x+x^2 < 1-3\cdot x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x\cdot(2x-1) < 0\,.$$

Das Produkt beider Faktoren ist negativ, wenn $2x-1<0$, also $0<x<\frac{1}{2}$ (wie auch bei obiger Lösung).

Fall (2) $\quad x < 0\colon\ 1-\sqrt{1-3\cdot x^2} > x \quad \Longrightarrow \quad 1-x > \sqrt{1-3\cdot x^2}$

Für negative x ist die linke Seite der Ungleichung nicht-negativ (ebenso wie der Wurzelausdruck#) und wir können beide Seiten quadrieren und erhalten

$$1-2\cdot x+x^2 > 1-3\cdot x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x\cdot(2x-1) > 0\,.$$

Das Produkt beider Faktoren ist positiv, wenn $2x-1<0$, also wenn $x<\frac{1}{2}$ (und gleichzeitig $x<0$) gilt. Damit scheinen alle negativen Zahlen die Ungleichung zu erfüllen. Würden wir einige spezielle Werte für x einsetzen, erkennen wir schnell, dass dies im Allgemeinen nicht richtig ist: der Wurzelausdruck # darf nur quadriert werden, wenn er überhaupt existiert (also reellwertig ist)!

Thema 31 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem

Für geometrische Aufgabenstellungen kann es hilfreich sein, das Problem in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen. Dann lassen sich häufig die Lage von Punkten, die Länge von Strecken oder die Abstände von Punkten und Geraden berechnen. Wenn nicht ausdrücklich die Verwendung eines Koordinatensystems in der Aufgabenstellung gefordert wird, gibt es im Allgemeinen eine Lösung ohne dessen Verwendung[4]. So auch in folgender Aufgabe der 2. Runde dieses Jahrgangs, bei der in der Lösungsdiskussion der Aufgabenkommission dieser Ansatz als dritte Lösungsvariante angegeben wurde.

Aufgabe 31.01 – MO640922. Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke ΔABC mit den Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$, also mit rechtem Winkel bei C. Weiterhin betrachten wir in beiden Teilaufgaben die Winkelhalbierende des rechten Winkels, die wir mit CW

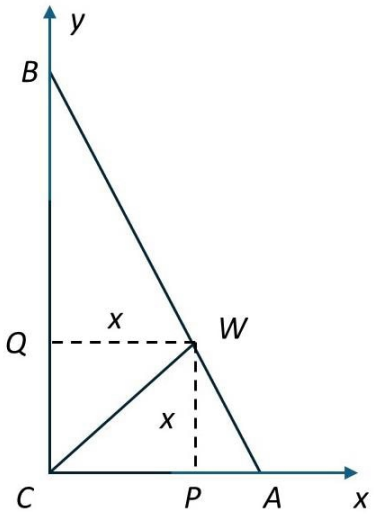
[4] Zur Übung sollte ein solcher Beweis dargestellt werden.

bezeichnen. Der Punkt W liegt somit auf der Winkelhalbierenden und der Hypotenuse $\overline{AB}$.

a) In dieser Teilaufgabe ist $|\overline{BC}| = 12$ und $|\overline{AC}| = 6$. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der Teildreiecke ΔAWC und ΔWBC.
b) Auch hier soll $|\overline{BC}| = 12$ sein. Aber die Länge der Strecke $|\overline{AC}|$ soll so bestimmt werden, dass sie und die Abstände des Punktes W zu den Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ alle ganzzahlig sind.
Für welche Werte von $|\overline{AC}|$ ist das der Fall?

Lösungshinweise: Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem die gegebenen Punkte die Koordinaten $C(0,0)$, $A(b,0)$ und $B(0,12)$ haben, d.h., die Katheten liegen auf den Achsen und der rechte Winkel fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen. Wir berechnen zunächst die Koordinaten für den allgemeinen Fall.

Die Winkelhalbierende durch C hat die Gleichung $y = x$, die Gerade durch A und B führt mit dem allgemeinen Ansatz $y = mx + n$ zu folgenden Gleichungen:



$$A(b,0): \quad 0 = mb + n$$
$$B(0,a): \quad a = m0 + n$$

Damit erhalten wir aus der zweiten Gleichung $n = a$ und folglich aus der ersten Gleichung $m = -\frac{a}{b}$. Setzen wir laut Voraussetzung $a = 12$, finden wir die Funktionsgleichung

$$y = -\frac{12}{b} \cdot x + 12 \quad \Longrightarrow \quad 12 \cdot x + b \cdot y = 12 \cdot b.$$

Die Koordinaten von $W(w,w)$ ergeben sich damit aus der Bestimmungsgleichung $12 \cdot w + b \cdot w = 12 \cdot b$ zu $w = \frac{12b}{12+b}$. Da die Fußpunkte der Lote von W auf die Koordinatenachsen die Punkte $P(w,0)$ und $Q(0,w)$ sind, ist w auch der Abstand von W zu den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es ist $b = 6$, womit sich $w = 4$ ergibt. Für die Flächeninhalte der zu untersuchenden Dreiecke erhalten wir daraus

$$A_{AWC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \quad \text{und} \quad A_{BCW} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$$

woraus $A_{AWC} : A_{BCW} = 1 : 2$ folgt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Den Ausdruck $x = \frac{12b}{12+b}$ formen wir um zu

$$x = \frac{12b + 144 - 144}{12 + b} = 12 \cdot \left(1 - \frac{12}{12 + b}\right) = 12 + \frac{144}{12 + b}.$$

Weil x ganzzahlig sein soll, muss auch $\frac{144}{12+b}$ ganzzahlig sein, also $12 + b$ ein Teiler von 144. Die Teiler von 144, die größer als 12 sind, lauten 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144. Daraus ergeben sich als notwendige Bedingung die folgenden Werte für b und x:

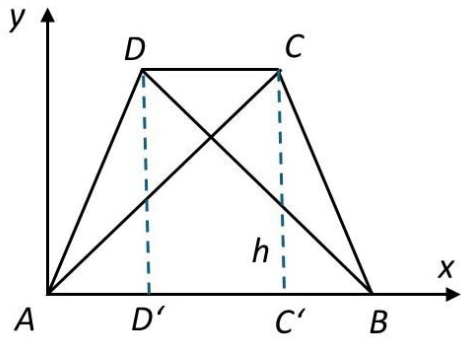
b	4	6	12	24	36	60	132
x	3	4	6	8	9	10	11

Alle Werte sind ganzzahlig und erfüllen somit die Aufgabenstellung. Die Bedingung ist also auch hinreichend. Damit kann $|\overline{AC}|$ die Werte für b aus der Tabelle annehmen.❑

Auch in der aktuellen Auflage des sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik lässt sich eine Lösung im Koordinatensystem finden:

Aufgabe 31.02 – KZM-4-4. Das Viereck $ABCD$ sei ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $|\overline{DA}| = |\overline{BC}|$, in dem die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht zueinander stehen.
Beweisen Sie: Die Mittellinie und die Höhe des Trapezes $ABCD$ sind gleich lang.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Länge der Grundseite $\overline{AB}$ mit a und die der Höhe mit h. Weiter seien C' und D' die Fußpunkte der Lote von C und D auf $\overline{AB}$ mit $\left|\overline{C'D'}\right| = |\overline{CD}|$.



Wir legen das Trapez $ABCD$ so in ein (zweidimensionales) kartesisches Koordinatensystem, dass $A(0;0)$ mit dem Ursprung zusammenfällt und B auf der x-Achse liegt, also $B(a;0)$.

Wir betrachten m_{AC} als Anstieg der Diagonale $\overline{AC}$ und m_{BD} als Anstieg der Diagonale $\overline{BD}$. Aus Symmetriegründen sind beide Anstiege betragsmäßig gleich groß, d.h. $|m_{AC}| = |m_{BD}|$. Weil die Diagonalen laut Voraussetzung senkrecht aufeinander stehen, gilt zudem $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$. Dies kann nur durch $m_{AC} = 1$ und $m_{BD} = -1$ erfüllt werden.

Damit ist das Dreieck $\Delta AC'C$ gleichschenklig-rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C'. Deshalb gilt $C'(h;0)$. Ebenso ist das Dreieck $\Delta BDD'$ gleichschenklig-rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D'. Deshalb gilt $D'(a-h;0)$. Aus den Koordinaten von C' und D' finden wir die Länge der Strecke $\left|\overline{C'D'}\right| = |\overline{CD}| = h - (a-h) = 2h - a$. Abschließend gilt für die Länge der Mittellinie des Trapezes wie behauptet

$$\frac{|\overline{AB}| + |\overline{CD}|}{2} = \frac{a + (2h - a)}{2} = h$$

❑

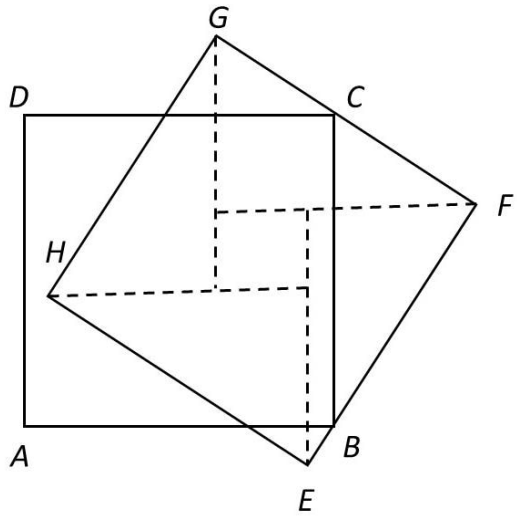
Aufgabe 31.03 – MO621033. In der Ebene liegen zwei Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ der Seitenlänge 1 derart, dass der Punkt F außerhalb des Quadrates $ABCD$, der Punkt B im Inneren der Strecke $\overline{EF}$ und der Punkt C im Inneren der Strecke $\overline{FG}$ liegt.

Ermitteln Sie, welche der folgenden Fälle unter den gegebenen Voraussetzungen eintreten können:

– Der Punkt H liegt im Inneren des Quadrates $ABCD$.
– Der Punkt H liegt auf dem Rand des Quadrates $ABCD$.
– Der Punkt H liegt außerhalb des Quadrates $ABCD$.

Die Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Das Innere einer Strecke besteht aus allen Punkten der Strecke, die keine Endpunkte der Strecke sind; der Rand eines Quadrates besteht aus allen Punkten der vier Seiten, und das Innere eines Quadrats besteht aus allen Punkten der Quadratfläche, die keine Randpunkte sind.



Lösungshinweise: Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so in die Ebene, dass A der Koordinatenursprung ist und B und D die Koordinaten $B(1\,;0)$ und $D(0\,;\,1)$ haben. Der Punkt C hat dann die Koordinaten $C(1\,;\,1)$, der Punkt F habe die Koordinaten $F(x\,;\,y)$.

Das Dreieck ΔBFC ist rechtwinklig bei F, es gilt $0 < y < 1$, und die Hypotenusenabschnitte haben die Längen y und $1 - y$. Wegen des Höhensatzes hat die Höhe von F auf BC die Länge $\sqrt{y(1-y)}$, und da F außerhalb des Quadrates $ABCD$ liegt, folgt $x = 1 + \sqrt{y(1\,-\,y)}$. Aus dem Kathetensatz folgt $|\overline{BF}| = \sqrt{y}$ und $|\overline{CF}| = \sqrt{1-y}$.

Mit Hilfe der Parallelen zur x-Achse durch H und durch F sowie der Parallelen zur y-Achse durch G und durch E zeichnen wir nun vier rechtwinklige Steigungsdreiecke in das Quadrat $EFGH$ ein[5]:

[5] Die resultierende Zerlegung des Quadrats $EFGH$ ist für $y > \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$ unterschiedlich, dies spielt im Folgenden aber keine Rolle

Die Steigungsdreiecke haben die Hypotenusenlänge 1 und gleiche Winkel wie das Dreieck ΔBFC, sie sind also alle kongruent zum Dreieck ΔBFC. Somit ergeben sich die Koordinaten

$$E = \left(1 + \sqrt{y \cdot (1-y)} - \sqrt{1-y}\,;\, y - \sqrt{y}\right)$$
$$H = \left(h_x\,;\, h_y\right) = \left(1 + \sqrt{y \cdot (1-y)} - \sqrt{1-y} - \sqrt{y}\,;\, y - \sqrt{y} + \sqrt{1-y}\right)$$

Es gilt $h_x = \left(1 - \sqrt{y}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{1-y}\right)$, wegen $0 < y < 1$ folgt also $0 < h_x < 1$. Außerdem gilt $y < \sqrt{y}$ und $\sqrt{1-y} < 1 - y$ und somit

$$h_y = y - \sqrt{y} + \sqrt{1-y} < \sqrt{y} - \sqrt{y} + \sqrt{1-y} < 1 - y < 1$$
$$h_y = y - \sqrt{y} + \sqrt{1-y} > y - \sqrt{y} + 1 - y = 1 - \sqrt{y} > 0$$

also $0 < h_y < 1$. Der Punkt H liegt also im Inneren des Quadrats $ABCD$. ❑

Vielleicht als Nachbereitung dieser Aufgabe, um den Umgang mit Koordinaten zu vertiefen, wurde im Folgejahr das Thema in Runde 1 erneut aufgegriffen.

Aufgabe 31.04 – MO631012. Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$g_1\colon \quad y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{9},$$
$$g_2\colon \quad y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{59}{6},$$
$$g_3\colon \quad 7 \cdot x - 6 \cdot y = 8,$$
$$g_4\colon \quad 2 \cdot x - 9 \cdot y = -56$$

Klassifizieren Sie das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, so dass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

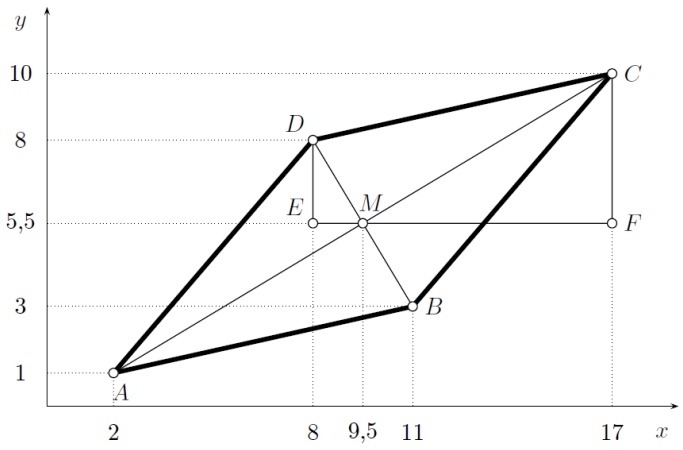
Lösungshinweise: Durch Umformen der Gleichungen von g_3 und g_4 erhalten wir für g_3 die Gleichung $y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{4}{3}$ und für g_4 folgt $y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{56}{9}$.

Wegen der jeweils gleichen Anstiege und der verschiedenen Schnitt-stellen mit der y-Achse gibt es zwei Paare zueinander paralleler Gera-den: g_1 und g_4 sowie g_2 und g_3. Daher gibt es genau vier Schnitt-punkte, die ein Parallelogramm aufspannen.

Um entscheiden zu können, ob dieses Parallelogramm vielleicht noch besondere Eigenschaften hat, werden die Koordinaten der Schnittpunkte berechnet. Dazu sind

jeweils ein System aus zwei linearen Gleichungen in den zwei Unbestimmten x und y zu lösen[6].

Wir erhalten, dass sich g_1 und g_3 in $A(2\,;1)$, g_1 und g_2 in $B(11\,,3)$, g_2 und g_3 in C$(17\,;10)$ und g_3 und g_4 in $D(8\,;8)$ schneiden. Die Diagonalen des Parallelogramms liegen dann auf der Geraden AC mit der Bezeichnung h und auf der Geraden BD, die wir mit k bezeichnen. Den Schnittpunkt der beiden Diagonalen nennen wir M.



Die Anstiege der Geraden h und k können aus den Koordinaten der Punkte, die auf ihnen liegen, berechnet werden. Wir erhalten für h den Anstieg $m_1 = \frac{10-1}{17-2} = \frac{3}{5}$ und für k den Anstieg $m_2 = \frac{8-3}{8-11} = -\frac{5}{3}$. Die Geraden h und k haben demzufolge die Gleichungen

$$h\colon \quad y = \frac{3}{5}\cdot x - \frac{1}{5} \quad ; \quad k\colon \quad y = -\frac{5}{3}\cdot x + \frac{64}{3}$$

woraus wir durch Schnittpunktberechnung die Koordinaten $M\left(\frac{19}{2}\,;\,\frac{11}{2}\right)$ erhalten.

Das Anstiegsdreieck ΔMFC der Geraden h hat den rechten Winkel bei F und die Kathetenlängen $|\overline{MF}| = 7{,}5$ und $|\overline{FC}| = 4{,}5$. Das Anstiegsdreieck ΔDEM der Geraden k hat den rechten Winkel bei E und Katheten der Längen $|\overline{DE}| = 2{,}5$ und $|\overline{EM}| = 1{,}5$. Diese sind genau ein Drittel Mal so lang wie die Kathetenlängen des Dreiecks ΔMFC. Die Dreiecke ΔMFC und ΔDEM sind daher ähnlich. Da jeweils ein Schenkel der Winkel $\sphericalangle DME$ und $\sphericalangle FMC$ auf einer Parallelen zur x-Achse liegt und sich beide Winkel wegen der Rechtwinkligkeit der ähnlichen Anstiegsdreiecke zu 90° ergänzen, ist der Winkel $\sphericalangle CMD$ ein rechter Winkel. Die Geraden h und k stehen also senkrecht aufeinander. Damit ist das Parallelogramm $ABCD$ ein Rhombus (eine Raute, ein gleichseitiges Parallelogramm).

Hinweis: Zur Begründung der letzten Aussage überlegen wir uns, dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in M senkrecht aufeinander stehen und sich als Diagonalen im Parallelogramm halbieren. Sie zerlegen dadurch das Viereck $ABCD$ in vier kongruente

[6] Die offiziellen Lösungshinweise zeigen, dass die Fertigkeiten beim Umgang in Koordinatensysteme erwartet werden. Da hier die Gleichungssysteme gelöst werden müssen, sollten diese Lösungsschritte auch ausführlich dargestellt werden.

Dreiecke. Daraus folgt dann, dass die Seiten gleich lang sind, also $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}|$ gilt.
Die Orthogonalität von h und k folgt auch aus $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$.

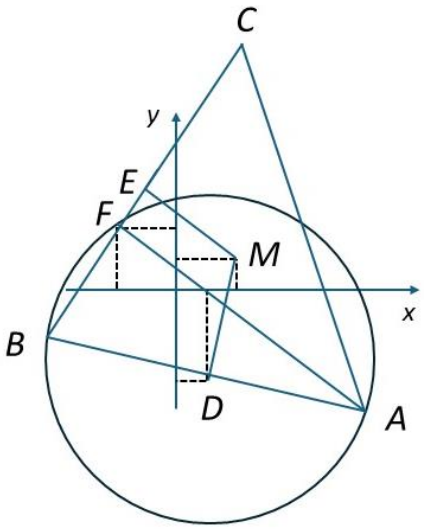
Aufgaben im Koordinatensystem gab es bereits bei den ersten Wettbewerben. Allerdings wurde hier das Koordinatensystem nur verwendet, um die Lage der drei gegebenen Punkte zu beschreiben. Die geforderte Konstruktionsbeschreibung folgt elementar-geometrischen Zusammenhängen.

Aufgabe – V00912[7]. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:

a) Fußpunkt F der Höhe $h_a = (-2;\ +2)$,
b) Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB} = c$ $(+1; -3)$,
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2;\ +1)$.

Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm ≅ 1 Einheit im Koordinatensystem).

Konstruktionsbeschreibung:
(1) Wir zeichnen die Punkte D, F, M in ein Koordinatensystem ein (gestrichelte Linien).
(2) Der Höhenfußpunkt F liegt dann auf dem THALESkreis über $\overline{AB}$, d.h. auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius gleich $\overline{DF}$. Wir zeichnen diesen Kreis.
(3) Der Umkreismittelpunkt M liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$. Wir zeichnen $\overline{DM}$ und konstruieren dazu eine Senkrechte s.
(4) Diese Senkrechte s schneidet den THALESkreis über $\overline{AB}$ in den Punkten A und B. Wir konstruieren A und B.



(5) Wir verbinden A mit dem Höhenfußpunkt F und konstruieren zu $\overline{AF}$ eine Senkrechte (die laut Konstruktionsschritt (2) durch B geht). Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Da M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ liegt, erhalten wir den Mittelpunkt E der Strecke $\overline{BC}$, indem wir das Lot von M auf die Senkrechte durch F fallen. Der Lotfußpunkt ist E.
(6) Der Punkt C ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von B an E.

Die Längen der Dreiecksseiten betragen: $c = 11{,}7$ cm, $a = 12{,}3$ cm, $b = 13{,}3$ cm. ❑

[7] 1960 und 1961 wurden Vorolympiaden ausgerichtet, bevor im Schuljahr 1961/62 die Zählung der Mathematik-Olympiaden begann.

Aufgabe 31.05– MO080936. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.
Lösungshinweise: Wir legen alle Punkte so in ein (dreidimensionales) kartesisches Koordinatensystem, dass o.B.d.A. $P(0,0)$ im Ursprung liegt, die Punkte A, B, C (und damit auch D) die gleiche z-Koordinate haben und die Rechteckseite $\overline{AB}$ parallel zur x-Achse liegt. Betrachten wir zunächst den Eckpunkt A mit den Koordinaten $(a_x\,;a_y\,;z)$. Für den Abstand von P zu A gilt dann: $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + z^2$ (dies erhalten wir geometrisch durch zweimalige Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck ΔAPP_0, wobei P_0 der Fußpunkt des Lotes von P auf das Rechteck $ABCD$ sei).

Aufgrund der gewählten Lage des Rechtecks lauten die Koordinaten des Punktes $B(b_x\,;a_y\,;z)$, des Punktes $C(b_x\,;c_y\,;z)$ und des Punktes $D(a_x\,;c_y\,;z)$. Entsprechend finden wir für die Abstände

von P zu B: $b^2 = b_x^2 + a_y^2 + z^2$
von P zu C: $c^2 = b_x^2 + c_y^2 + z^2$ und
von P zu D: $d^2 = a_x^2 + c_y^2 + z^2$.

Wir erhalten:

$$d^2 = a_x^2 + c_y^2 + z^2 = a_x^2 + a_y^2 + z^2 + b_x^2 + c_y^2 + z^2 - b_x^2 - a_y^2 - z^2$$
$$= a^2 + c^2 - b^2$$

Also lässt sich der Abstand von P zu D eindeutig aus den Abständen a, b und c ermitteln. ❑

Aufgabe 31.06 – MO210932. Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = |\overline{AD}| = 6$ cm und $a = |\overline{AB}| > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Lösungshinweise: Wir legen in die Ebene des Rechtecks derart ein Koordinatensystem, dass A im Koordinatenursprung $(0,0)$, B im Punkt $(a\,,0)$ und D im Punkt $(0\,,b)$ zu liegen kommt. Dann gilt nach Konstruktion für die übrigen Punkte, dass sie folgende Koordinaten besitzen:

$$C(a,b), F(b,0), E(b,b), H(a-b,0), G(a-b,b).$$

Die Gerade *AC* hat den Anstieg $m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$.

Die Gerade *EH* den Anstieg $m_2 = \frac{b-0}{b-(a-b)} = \frac{b}{2b-a}$, sofern $a \neq 2b$ gilt.

Wäre $a = 2b$, so würde H mit F zusammenfallen, die Gerade EH wäre senkrecht zu AB, also insbesondere nicht senkrecht zu AC, so dass sich in diesem Fall keine Lösung ergibt. Wir können also im Weiteren $a \neq 2b$ annehmen.

Zwei nicht zu den Koordinatenachsen parallele Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sich ihre Anstiege zu -1 multiplizieren, d.h., es ist

$$EH \perp AC \Leftrightarrow m1 \cdot m2 = -1 \Leftrightarrow -1 = \frac{b}{2b-a} \cdot \frac{b}{a}$$

Aus der rechten Beziehung können wir a in Abhängigkeit von b ermitteln. Wir erhalten:

$b^2 = a \cdot (a-2b) = a^2 - 2ab$	$\mathrm{I} + b^2$
$2b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	I binomische Formel
$a - b = b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b(1+\sqrt{2})$	I unter Beachtung von $a > b > 0$

Also existiert für festes b genau ein a, mit dem die beiden Geraden EH und AC senkrecht aufeinander stehen. Im konkreten Fall mit $b =$ 6 cm ist dafür dann $a = (1+\sqrt{2}) \cdot 6$ cm $\approx$ 14.5 cm. ❑

Aufgabe 31.07 – MO220923. Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:

(1) P liegt auf der Strecke $\overline{AB}$ zwischen A und B,
(2) Q liegt auf der Strecke $\overline{BC}$ zwischen B und C,
(3) R liegt auf der Strecke $\overline{CD}$ zwischen C und D,
(4) S liegt auf der Strecke $\overline{DA}$ zwischen D und A,
(5) es gilt $PR \perp QS$.

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $|\overline{PR}| < |\overline{QS}|, |\overline{PR}| = |\overline{QS}|, |PR| > |\overline{QS}|$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Lösungshinweise: Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung $(0,0)$, B im Punkt (1,0) und D im Punkt (0,1) zu liegen kommen. Dann liegt C im Punkt (1,1). Weiterhin existieren reelle Zahlen p, q, r, s, sodass P die Koordinaten $(p, 0)$, Q die Koordinaten $(1, q)$, R die Koordinaten $(r, 1)$ und S die Koordinaten $(0, s)$ besitzt.

Gilt dabei $p = r$, so liegt die Gerade PR parallel zur y-Achse und damit parallel zur x-Achse. Damit muss wegen (5) die Strecke $\overline{QS}$ parallel zur x −Achse liegen, sodass $q = s$ gilt. Damit ergibt sich für beide Strecken eine Länge von

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = \left|\widetilde{QS}\right|$$

Gilt jedoch $p \neq r$, so hat die Gerade PR den Anstieg $m_1 = \frac{1-0}{r-p} = \frac{1}{r-p}$ und die Gerade QS den Anstieg $m_2 = \frac{s-q}{1-0} = s-q$.

Nach Aussage (5) stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, so dass sich ihre Anstiege zu (-1) multiplizieren. Somit gilt $\frac{1}{r-p} \cdot (s-q) = -1$ bzw. $s-q = -(r-p)$, also $(s-q)^2 = (r-p)^2$. Für die Längen der Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{QS}$ erhalten wir damit wieder

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |\overline{QS}|$$

sodass in jedem Fall $|\overline{PR}| = |\overline{QS}|$ gilt. ❑

Bemerkung: Wir haben von den Bedingungen (1) bis (4) nur genutzt, dass die Punkte P bis S auf den angegebenen Geraden liegen. Damit kann die Zusatzvoraussetzung, die dort gefordert wird, dass die Punkte jeweils im Inneren der jeweiligen Quadratseiten liegen sollen, entfallen.

Aufgabe 31.08 – MO320924. Auf einer Geraden g seien A, B, C drei Punkte; B liege zwischen A und C. Über der Strecke $\overline{AC}$ sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ΔACP errichtet, über die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ΔABQ und ΔBCR.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{BC}| = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ΔACP, ΔABQ und ΔBCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

Lösungshinweise: Wir legen ein Koordinatensystem in die Ebene, sodass A im Punkt $(-a, 0)$, B im Koordinatenursprung $(0,0)$ und C im Punkt $(b, 0)$ liegt. In jedem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge s besitzt die Höhe genau die Länge $s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und fällt mit der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite zusammen. Gleichzeitig fällt sie mit der entsprechenden Seitenhalbierenden zusammen, welche vom Schwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt wird, so dass der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf der Mittelsenkrechten einer Seite in der Höhe von $s \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3}$ liegt. Wenden wir dies auf die gegebene Situation an, so haben die Punkte L, M und N demnach die Koordinaten

$$|\overline{LM}|^2 = \left(\frac{b-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)\right)$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2a+b)\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$|\overline{LN}|^2 = \left(\frac{b-a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+2b)\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$|\overline{MN}|^2 = \left(-\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2$$

$$= \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a)\right)^2$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Wir erhalten also $|\overline{LM}| = |\overline{LN}| = |\overline{MN}| = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$, so dass das Dreieck ΔLMN gleichseitig ist. ❑

Aufgabe 31.09 – MO340943/MO341042. Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{XD}$ in vier Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Lösungshinweise: Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass *A* im Koordinatenursprung $(0,0)$ liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine reelle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten $(a, 0)$. Dann liegt X auf der Strecke $\overline{AB}$, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$$

und die Gerade *AC* durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S, y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a} \cdot x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S$ gleichbedeutend zu $y_S = x_S = \frac{a}{1+a}$.
Damit hat die Hohe h_a von S auf $\overline{AB}$ die Länge $h_a = y_S = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von S auf $\overline{AD}$ die Länge $h_d = x_S = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck ΔASX der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AX}| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2 \cdot (a+1)}$$

und analog für das Dreieck ΔASD der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2 \cdot (a+1)}$$

Da das Dreieck ΔACD den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke $\overline{DS}$ in die beiden Dreiecke ΔASD und ΔDCS zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDCS

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{1}{2 \cdot (a+1)}.$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{a+1-a^2}{2 \cdot (a+1)}.$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : (a + 1 - a^2) : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, damit auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzen wir das Verhältnis mit a^2, erhalten wir

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1\right) : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}.$$

Die Werte $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1\right), \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : (r + r^2 - 1) : r^2 : r$$

mit $p = r + r^2 - 1$ und $q = r^2$ von der gewünschten Form.

Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke $\overline{AB}$ ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke $\overline{AX}$ ist bzw. $|\overline{AX}| = \frac{1}{r} \cdot |\overline{AB}|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt. ❑

Aufgabe 31.10 – MO141013. In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2}\ ;\ 0)$ und $B(\frac{1}{2};\ 0)$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ so anzugeben, dass für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind!

   (1) Die Längen aller Strecken $\overline{AP_i}$ und $\overline{BP_i}$ sind ganzzahlig.
   (2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.

b) Beweisen Sie, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1) und (2) gibt!

Lösungshinweise: Angenommen, für einen Punkt *P* seien $|\overline{AP}| = a$ und $|\overline{BP}| = b$ ganzzahlig. Wegen $|\overline{AB}| = 1$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $a - 1 \leq b = a + 1$.

Ist $a - 1 = b$ oder $b = a + 1$, so bilden A, B, P kein Dreieck, sondern es gibt eine Gerade, die A, B und P enthält; dann liegt also P auf der x-Achse.

Ist $a - 1 < b < a + 1$, so folgt, da a, b ganzzahlig sind, $a = b$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AP}$, d. h. auf der y-Achse. Hieraus folgt bereits die Behauptung b), da unter den Punkten P_i einer Menge mit den Eigenschaften (1) und (2) höchstens zwei Punkte auf der x-Achse und höchstens zwei Punkte auf der y-Achse auftreten können.

Um a) nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel anzugeben. Dies können wir folgendermaßen finden: Für einen Punkt $P(x, 0)$ auf der x-Achse sind

$$|\overline{AP}| = \left|x + \tfrac{1}{2}\right| \text{ und } |\overline{BP}| = \left|x - \tfrac{1}{2}\right|$$

genau dann ganzzahlig, wenn $x - \frac{1}{2} = m$ ganzzahlig ist, also $x = m + \frac{1}{2}$ mit ganzer Zahl *m* gilt. Für einen Punkt $P(0, y)$ auf der y-Achse ist

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = n$$

genau dann ganzzahlig, wenn

$$y = \pm\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

mit ganzer Zahl n gilt. Daher erhalten wir z.B. dadurch vier derartige Punkte, dass wir $(x, 0)$ mit x wie oben für $m = -1$ und $m = 0$ sowie $(0, y)$ mit y wie oben für $n = 1$ wählen. In diesem Fall ergeben sich die Punkte

$$P_1\left(-\frac{1}{2}\,;0\right) = A\,;\; P_2\left(\frac{1}{2}\,;0\right) = B\,;\; P_3\left(0\,;\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\,;\; P_4\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Diese erfüllen nach dem eben Gezeigten die Bedingung (1). Sie erfüllen aber auch die Bedingung (2), denn unter je dreien von ihnen gibt es zwei, deren Verbindungsgerade eine Koordinatenachse ist, die nicht durch den dritten geht. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Der Begriff *kartesisches* Koordinatensystem bedeutet allgemein *von Cartesius eingeführt* und bezieht sich auf René Descartes (latinisiert *Renatus Cartesius;* geb. 1596, gest. 1650). Der französische Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler leistete u.a. Beiträge zur Geometrie: Er verknüpfte Geometrie und Algebra und gehört damit zu den Wegbereitern der analytischen Geometrie, die die rechnerische Lösung geometrischer Probleme ermöglicht. Allerdings hat er das Koordinatensystem nicht erfunden, jedoch dessen Konzept bekannt gemacht. In seinem Werk „La Géométrie“ aus dem Jahr 1637 demonstrierte er im ersten der drei Bücher, dass geometrische Probleme mit wesentlichen algebraischen Grundoperationen beschrieben werden können.

Die

Geometrie[8]

von

Réné Descartes.

Deutsch herausgegeben von
Ludwig Schlesinger.

BERLIN.
Mayer & Müller.
1894.

Vorbemerkung.

Bisher war ich bestrebt, für Jedermann verständlich zu sein; aber von diesem Werke fürchte ich, dass es nur von solchen wird gelesen werden

[8] [8] s. http://books.google.com. Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten

können, die sich das, was in den Büchern über Geometrie enthalten ist, angeeignet haben; da diese manche sehr gut bewiesene Wahrheiten enthalten, schien es mir überflüssig, solche hier zu wiederholen, ich habe es aber darum nicht vermieden, mich ihrer zu bedienen.

Erstes Buch.

Über Probleme, die mit alleiniger Anwendung von geraden Linien und Kreisen construirt werden können.

Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nacher nur der Kenntniss der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um dieselben zu construiren.

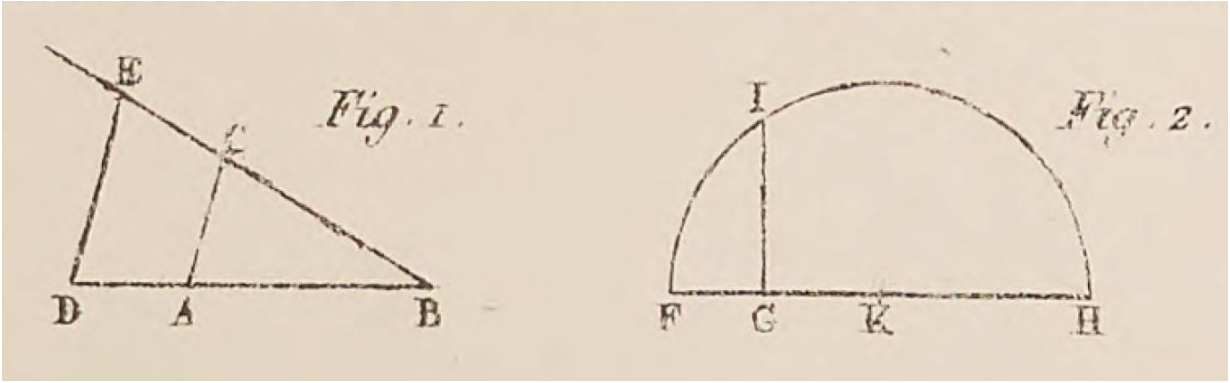
Und gleichwie sich die gesammte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraction, der Multiplication, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, welches ja auch als eine Art von Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, dass sie auf Bekanntes führen, nichts Anderes zu thun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen; oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde, und die gewöhnlich ganz nach Belieben angenommen werden kann, und man hat noch zwei andere, eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer dieser beiden verhält, wie die andere zur Einheit, was dasselbe ist, wie die Multiplication; oder aber eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer der beiden verhält, wie die Einheit zur anderen, was dasselbe ist wie die Division; oder endlich eine oder mehrere mittlere Proportionalen zu finden zwischen der Einheit und irgend welchen anderen Linien, was dasselbe ist wie das Ausziehen der Quadrat- oder Cubikwurzel u.s.w. – Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen.

Sei z.B. (Fig. 1) AB die Einheit und es wäre BD mit BC zu multipliciren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen, und BE ist das Product dieser Multiplication.

Oder aber wenn man BE durch BD zu dividiren hätte, so wäre, nachdem die Punkte E und D verbunden und AC parallel mit DE gezogen worden ist, BC das Resultat dieser Division.

Soll endlich aus GH (Fig. 2) die Quadratwurzel ausgezogen werden, so füge ich zu GH in geradliniger Fortsetzung die Einheit FG hinzu, und beschreibe, nachdem ich FH im Punkte K in zwei gleiche Theile getheilt,

von K als Mittelpunkt aus den Kreis FJH, errichte dann in G unter rechtem Winkel zu FH eine gerade Linie bis nach J, so ist GJ die gesuchte Wurzel. Ich sage hier nichts über die Cubik- und anderen Wurzeln, da ich an späterer Stelle bequemer von denselben handeln kann.



Oftmals aber ist es gar nicht nöthig, diese Linien so auf's Papier zu zeichnen, sondern es genügt, sie jede einzeln mit einem Buchstaben zu bezeichnen. So nenne ich um die Linie BD zu GH hinzuzufügen, die eine a, die andere b und schreibe a + b; und a - b, um b von a abzuziehen; und ab, um sie mit einander zu multipliciren; und $\frac{a}{b}$, um a durch b zu dividiren; und aa oder a^2 um a mit sich selbst zu multipliciren, und a^3, um dies noch einmal mit a zu multipliciren und so bis in's Unendliche; …

Monatsaufgabe 03/2025[9]

Sei ΔABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis ω von ΔABC berühre die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D. Wir bezeichnen mit E und F diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90°$ gelten. Die Geraden DE und DF schneiden ω jeweils ein weiteres Mal in den Punkten E' bzw. F'.

Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2025

Aufgabe I-1 (Individualwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Bestimme alle $k \in \mathbb{N}_0$, für die eine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ existiert, die $f(2024) = k$ und $f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Bemerkung: Hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0$ die Menge nichtnegativer ganzer Zahlen.

Lösungshinweise: Wegen $0 \leq f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$ ist die Funktion f nicht-fallend. Wir zeigen nun, dass $f(n) \leq n$ für alle $n \in N_0$ gilt.

[9] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.04.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Wir nehmen für einen indirekten Beweis an, es gelte $f(n) > n$, d.h. wegen der Ganzzahligkeit, $f(n) \geq n + 1$. Wegen der Monotonie von f führt dies zu $f(f(n)) \geq f(n + 1)$. Daraus folgt $f(n + 1) \leq f(f(n)) \leq f(n + 1) - f(n)$, was aber $f(n) \leq 0$ bedeutet – im Widerspruch zur Annahme $0 \leq n < f(n)$.

Es gilt also insbesondere $f(2024) \leq 2024$. Jedoch ist $f(2024) = 2024$ nicht möglich, denn die Gleichheit würde bedeuten:

$$f(f(2024)) = f(2024) = 2024 \leq f(2025) - f(2024) = f(2025) - 2024,$$

also $4048 \leq f(2025)$, im Widerspruch zu $f(2025) < 2025$.

Andererseits, für alle k mit $0 \leq k \leq 2023$ erfüllt die Funktion f mit

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq 2023 \\ k & \text{für } n \geq 2024 \end{cases}$$

die geforderte Bedingung, da $f(0) = f(k) = 0$ und somit $f(f(n)) = 0$ für alle $n \in N_0$. ❑

Termine

Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Südwestsachsen, 07.03.2025 in Chemnitz, 13.00 – 17.00 Uhr, IHK Chemnitz

Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Ostsachsen, 08.03.2025 in Dresden 14.00 – 18.30 Uhr, Sachsen Energie Dresden

7. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, Anmeldung bis 20.03.2025 unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2025/index.php

Känguru-Wettbewerb 2025 traditionell am dritten Donnerstag im März statt, also am 20. März 2025.

7. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz am 05.04.2025 im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude ("Orangerie"), Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz: u.a. mit Team-Wettbewerben für Klassenstufen 8-10 und 11/12, mit Fortbildungsvorträgen „Der rote Faden: Was hinter Schätzen und Testen steckt“ (Prof. Dr. OLIVER ERNST/TUC) und „Sichere medizinische Laserbehandlung und stabile Hochhäuser durch Optimale Steuerung“ (Jun.-Prof. Dr. MANUEL SCHALLER/TUC) sowie mit dem Plenarvortrag: „Mit Mathematik in die Zukunft schauen: Die Mathematik der Wettervorhersage“ (UNIV.-PROF. DR. MELINA FREITAG/Universität Potsdam).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 25.2 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken 3
Thema 31 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem 7
In alten Mathe-Büchern geblättert 20
Monatsaufgabe 03/2025 22
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2025 22
Termine ..... **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[10]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
03/2025 (März)	Thema 31	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922
03/2025 (März)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

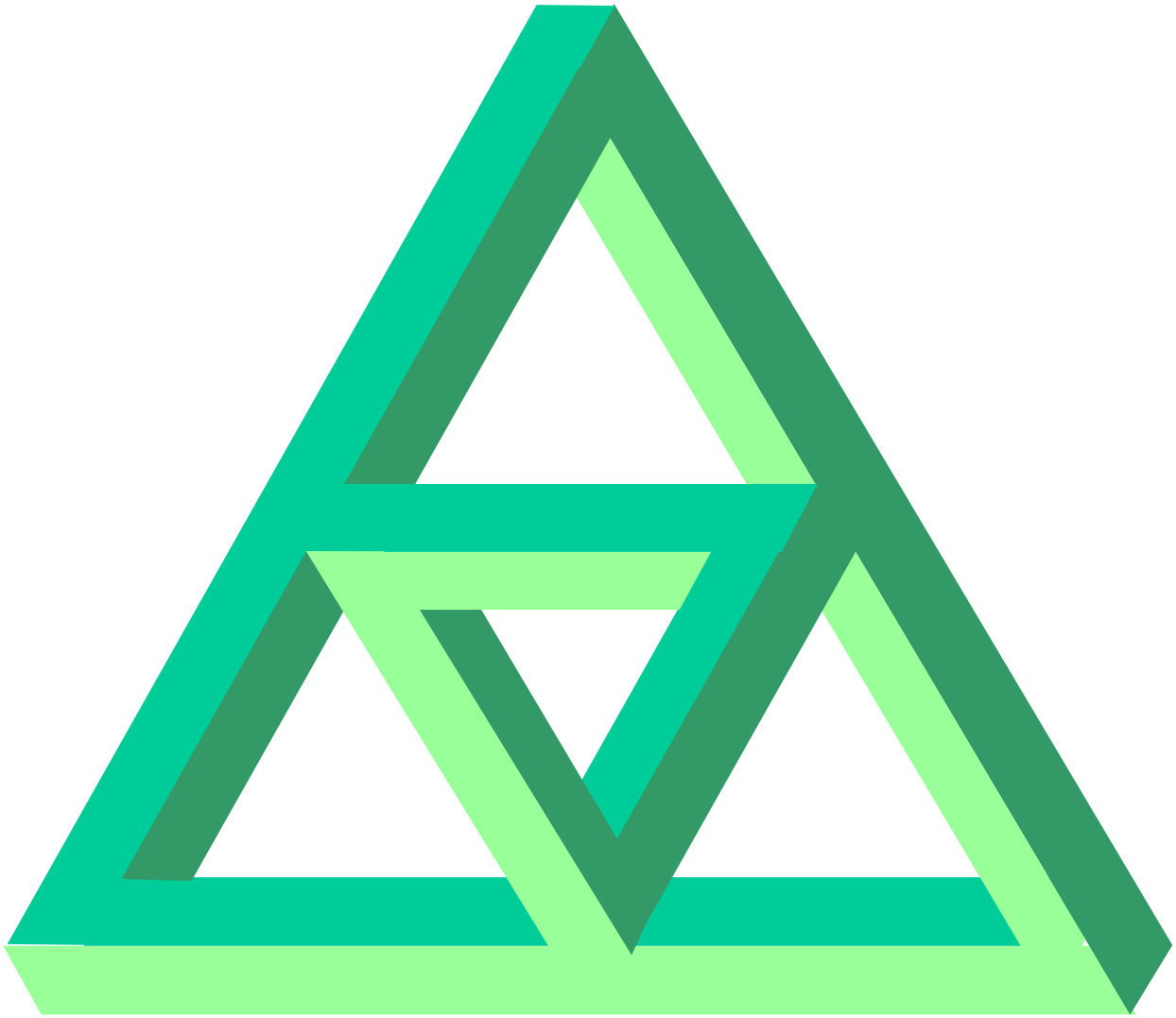
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 04/2025 (April 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir folgen einem roten Faden der diesjährigen Mathematik-Olympiaden und setzen die Diskussion zu Lösungsstrategien im Koordinatensystem fort. Nach den Aufgaben **MO641013** und **MO640922** basiert auch die Aufgabe **MO641032** auf dieser Thematik. Wir betrachten diesmal solche Aufgaben, die eng mit Geradengleichungen verbunden sind. Dies begegnete uns auch in der **Aufgabe 1** der **5. Serie** des Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM).

Im historischen Rückblick zeigen wir dazu Aufgaben aus Abiturprüfungen aus dem 19. Jahrhundert.

Mit Bezug zur **Aufgabe 5A** der **4. Serie** des diesjährigen KZM wiederholen wir die Diskussion um Verteilungen von Punkten in einer Quadratfläche. Diese Aufgabenstellung vereint viele Möglichkeiten, zu experimentieren, abzuschätzen und zu beweisen.

Mit einer Zusammenfassung zum online-Seminar über die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik wollen wir bereits jetzt auf die nächsten Seminarangebote im September hinweisen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 31.2 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem

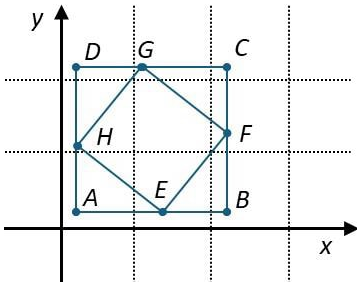
Während im Teil 1 dieser Thematik die Beschreibung geometrischer Objekte im Koordinatensystem im Vordergrund stand, bei denen es aber auch immer Lösungsansätze der Elementargeometrie gibt, beziehen sich die folgenden Aufgaben auf die analytische Lösung mit Hilfe von Geradengleichungen. Dabei darf in der Lösungsdarstellung ohne Beweis als bekannt vorausgesetzt werden:

- Der (EUKLIDische) Abstand zweier Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ berechnet sich als $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
- Der Anstieg m_{AB} einer Geraden durch die Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ ist durch $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ gegeben (für $x_A = x_B$ ist die Gerade parallel zur y-Achse).
- Zwei Geraden mit den Anstiegen m_1 und m_2 stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$ erfüllt ist.
- Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ kann durch $y = m_{AB} \cdot (x - x_A) + y_A$ angegeben werden.
- Der Schnittpunkt von Geraden mit den Geradengleichungen $y = m_1 \cdot x + n_1$ bzw. $y = m_2 \cdot x + n_2$ ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems für den gemeinsamen Punkt (x_S, y_S) mit $x_S = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$ und $y_S = m_2 \cdot \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} + n_2$ (im Fall $m_1 = m_2$ sind die Geraden parallel und haben keinen Schnittpunkt).

Aufgabe 31.11 – MO641013. Wir betrachten Figuren, die durch die Koordinaten einiger ihrer Punkte und die zur jeweiligen Figur gehörenden Verbindungsstrecken gegeben sind.

a) $A(2,2), E(14,2), B(23,2), F(23,14), C(23,23), G(11,23), D(2,23), H(2,11)$ mit den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ und $\overline{HE}$. Zeigen Sie, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist und bestimmen Sie seine Seitenlänge.

b) $A(1,2), B(13,2), C(25,2), D(25,11)$ und $E(1,18)$ mit den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{BE}$ und $\overline{BD}$. Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{BD}$ den Winkel $\sphericalangle EDC$ halbiert.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir ermitteln zunächst die Längen der Strecken $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{EH}$ über die Koordinaten der Eckpunkte:

$$|\overline{EF}|^2 = (14-23)^2 + (2-14)^2 = 9^2 + 12^2 = 225; \quad |\overline{EF}| = 15.$$

$$|\overline{FG}|^2 = (23-11)^2 + (14-23)^2 = 12^2 + 9^2 = 225; \quad |\overline{FG}| = 15.$$

$$|\overline{GH}|^2 = (11-2)^2 + (23-11)^2 = 9^2 + 12^2 = 225; \quad |\overline{GH}| = 15.$$

$$|\overline{EH}|^2 = (14-2)^2 + (2-11)^2 = 12^2 + 9^2 = 225; \quad |\overline{EH}| = 15.$$

Somit ist das Viereck $EFGH$ ein Rhombus mit vier gleichlangen Seiten. Nun ermitteln wir auch die Längen der Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$:

$$|\overline{EG}|^2 = (14-11)^2 + (2-23)^2 = 3^2 + 21^2 = 450;\ \ |\overline{EG}| = 15 \cdot \sqrt{2}.$$
$$|\overline{FH}|^2 = (23-2)^2 + (14-11)^2 = 21^2 + 3^2 = 450;\ \ |\overline{FH}| = 15 \cdot \sqrt{2}.$$

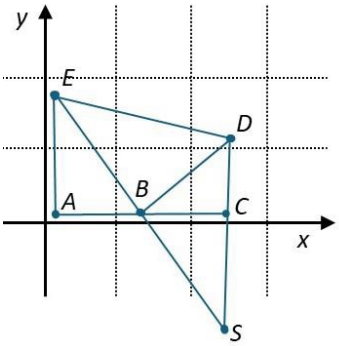
Somit sind beide Diagonalen gleich lang und der Rhombus ist ein Quadrat. Die Rechtwinkligkeit erkennen wir auch aus der Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS, denn es gilt mit obigen Ergebnissen:

$$|\overline{EF}|^2 + |\overline{FG}|^2 = 225 + 225 = 450 = |\overline{EG}|^2,$$
$$|\overline{FG}|^2 + |\overline{HG}|^2 = 225 + 225 = 450 = |\overline{FH}|^2,$$

also sind die Dreiecke ΔEFG und ΔFGH rechtwinklig mit den rechten Winkeln in F bzw. in G.

Alternativ können wir auch die Anstiege der Geraden durch E und F bzw. durch F und G ermitteln: $m_{EF} = \frac{2-14}{14-23} = \frac{12}{9}$ und $m_{FG} = \frac{14-23}{23-11} = -\frac{9}{12}$.

Wegen $m_{EF} \cdot m_{FG} = \frac{12}{9} \cdot \left(-\frac{9}{12}\right) = -1$ stehen die Geraden EF und GF im Punkt F senkrecht aufeinander. Ebenso finden wir $m_{GH} = \frac{23-11}{11-2} = \frac{12}{9}$. Deshalb ist auch $m_{FG} \cdot m_{GH} = -\frac{9}{12} \cdot \frac{12}{9} = -1$ und die Geraden FG und GH stehen im Punkt G senkrecht aufeinander.



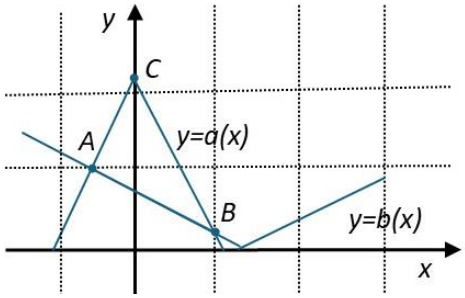
Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Die Geraden EB und CD können wir durch die Geradengleichung $y = -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{58}{3}$ bzw. die Parallele zur y-Achse mit $x = 25$ beschreiben. Damit finden wir für die y-Koordinate ihres Schnittpunktes $y = -\frac{4}{3} \cdot 25 + \frac{58}{3} = 14$, die Geraden schneiden sich folglich im Punkt $S(25; -14)$, wobei B wegen $\frac{1+25}{2} = 13$ und $\frac{18-14}{2} = 2$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{ES}$ ist. Aus den Punktkoordinaten lassen sich die Längen der Strecken $|\overline{ED}|$ und $|\overline{DS}|$ berechnen:

$$|\overline{ED}|^2 = (1-25)^2 + (18-11)^2 = 24^2 + 7^2 = 625;\ \ |\overline{ED}| = 25.$$
$$|\overline{DS}|^2 = (25-25)^2 + (11+14)^2 = 0^2 + 25^2 = 625;\ \ |\overline{DS}| = 25.$$

Das Dreieck ΔSDE ist also gleichschenklig. Die Seitenhalbierende $\overline{DB}$ ist damit gleichzeitig die Symmetrieachse dieses Dreiecks und damit auch Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Schenkeln ED und CD. ❑

Aufgabe 31.12 – KZM-5-1 (MO571014). Gegeben sind die beiden Funktonen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -2|x| + 11$ und $b(x) = \frac{1}{2}|x-7|$.

(a) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.
(b) Der Punkt C sei der Schnittpunkt des Graphen der Funktion a mit der y−Achse. Beweisen Sie, dass der Punkt C und zwei der Schnittpunkte der Graphen von a und b ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen.



Vorbemerkung: Die Formulierung der Aufgabenstellung mit Hinweis auf die Graphen der Funktionen inspiriert, die Funktionen in einem Koordinatensystem zu skizzieren und die Lösungsstrategie anschaulich zu erschließen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Aus der grafischen Darstellung leiten wir ab, dass die Untersuchungen zur Teilaufgabe a) in drei Abschnitten erfolgen sollte:

(I) $x \leq 0$ und damit $x - 7 \leq 0$ führt zu

$f(x) = -2 \cdot (-x) + 11 = 2x + 11$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(-(x-7)\big) = -\frac{1}{2} \cdot (x-7)$.

Aus $2x + 11 = -\frac{1}{2}(x-7)$ folgt $5 \cdot x = -15$, also $x = -3$ und somit $y = 5$.

(II) $x \geq 0$ und $x - 7 \leq 0$ führt zu

$f(x) = -2 \cdot x + 11 = -2x + 11$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(-(x-7)\big) = -\frac{1}{2} \cdot (x-7)$.

Aus $-2x + 11 = -\frac{1}{2}(x-7)$ folgt $-3 \cdot x = -15$, also $x = 5$ und somit $y = 1$.

(III) $x \geq 7$ und damit $x - 7 \geq 0$ und auch $x \geq 0$ führt zu

$f(x) = -2 \cdot x + 11 = -2x + 11$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-7)$.

Aus $-2x + 11 = \frac{1}{2}(x-7)$ folgt $-5 \cdot x = 29$, also $x = \frac{29}{5}$, jedoch liegt $x < 6$ nicht im betrachteten Abschnitt, d.h. in diesem Abschnitt gibt es keine Schnittpunkte.

Die Schnittpunkte lauten also $A(-3; 5)$ und $B(5; 1)$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Punkt C hat die Koordinaten $(0; 11)$. Wir berechnen die drei Abstände zwischen den Punkten A, B und C:

$$|\overline{AB}|^2 = (-3-5)^2 + (5-1)^2 = 8^2 + 4^2 = 80$$
$$|\overline{BC}|^2 = (5-0)^2 + (1-11)^2 = 5^2 + 10^2 = 125$$
$$|\overline{AC}|^2 = (-3-0)^2 + (5-11)^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

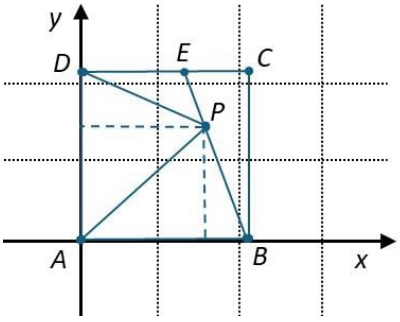
Offenbar gilt $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 80 + 45 = 125 = |\overline{BC}|^2$. Somit ist nach Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt A.

Alternativ können wir die Rechtwinkligkeit über die Anstiege der Punktverbindungen nachweisen. Laut Konstruktion liegen die Punkte A und C auf dem Teil der Funktion

a mit Anstieg $m_{AC} = 2$, die Punkte B und C auf dem Teil der Funktion a mit dem Anstieg $m_{BC} = -2$, und die Punkte A und B auf der Geraden mit dem Anstieg $m_{AB} = \frac{5-1}{-3-5} = -\frac{1}{2}$. Wegen $m_{AC} \cdot m_{AB} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ steht die Gerade durch A und C senkrecht auf der Geraden durch A und B. Somit ist das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt A. ❑

Aufgabe 31.13 – MO611023. In einem Koordinatensystem befindet sich ein Quadrat mit den Eckpunkten $A(0,0), B(12,0), C(12,12)$ und $D(0,12)$. Eine Gerade durch B schneidet die Strecke $\overline{CD}$ in dem Punkt $E(7,12)$. Auf der Strecke $\overline{BE}$ befindet sich ein Punkt P.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade BE durch die Gleichung $y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$ beschreiben lässt.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE den Flächeninhalt 28 besitzt.
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE gleichschenklig ist.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt der Nachweis, dass die Koordinaten von $B(12,0)$ und $E(7,12)$ die vorgegebene Geradengleichung erfüllen:

Es gilt sowohl $0 = -\frac{12}{5} \cdot 12 + \frac{144}{5}$
als auch $12 = -\frac{12}{5} \cdot 7 + \frac{144}{5}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Inhalt des Dreiecks ΔAPD lässt sich direkt berechnen, wenn wir die Strecke $\overline{AD}$ als Grundseite mit der Länge 12 betrachten und die x-Koordinate von P als Maßzahl für die Höhe verwenden. Durch Einsetzen von $y = 4$ in $y = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{144}{5}$ erhalten wir $x = \frac{31}{3}$ und somit $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{31}{3} = 62$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wegen des stumpfen Winkels bei E kann die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ΔDPE nur durch $|\overline{DE}| = |\overline{EP}| = 7$ erreicht werden. Nach dem Satz des PYTHAGORAS hat die Strecke $\overline{BE}$ die Länge $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ und somit die Strecke $\overline{BP}$ die Länge 13 − 7 = 6. Die y-Koordinate von P ergibt sich durch senkrechte Parallelprojektion von $\overline{BE}$ auf BC und ist deshalb nach Strahlensatz $\frac{6}{13}$ von 12, also $\frac{72}{13}$. Für die x-Koordinate von P gilt dann $\frac{72}{13} = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{144}{5}$, also $x = \frac{126}{13}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD beträgt nun $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{126}{13} = \frac{756}{13}$. ❑

Aufgabe 31.14 – MO591011. Es sei m eine von null verschiedene und ansonsten beliebige rationale Zahl. In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m \cdot (x - 5) + 2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der x-y-Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B. Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P(5, 2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m) den Punkt P enthalten.
b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOAB.
c) Nun gelte $m = -0{,}3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck ΔOAB in die Teildreiecke ΔOPB und ΔOAP. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.
d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl? (Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (so dass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Ein Punkt $P(x, y)$ liegt genau dann auf einer Geraden mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = m \cdot x + n$, wenn die Gleichung $y = m \cdot x + n$ erfüllt ist. Wegen $2 = m \cdot (5 - 5) + 2$ liegt also P auf jeder der Geraden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für $y = f(x) = -0.8 \cdot x + 2$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse durch Einsetzen $x = 0$ ermittelbar, nämlich $A(0; 2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = -0.8 \cdot x + 2$ ermittelt, also $B(10; 0)$. Damit erhalten wir für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOAB gemäß der Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke $A_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 10$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Nun gelte $m = -0{,}3$. Wie in Teil a) ist der Schnittpunkt mit der y-Achse der Punkt $A(0; 2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = -0.3 \cdot x + 2$ ermittelt, also $B\left(\frac{20}{3}; 0\right)$.

Für die Höhe im Teildreieck ΔOPB ermitteln wir den Schnittpunkt der Funktionen $f(x)$ und $g(x) = \frac{2}{5} \cdot x$. Aus $-0.3 \cdot x + 2 = 0.4 \cdot x$ erhalten wir $x = \frac{20}{7}$ und folglich für

die Höhe $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{8}{7}$. Schließlich finden wir $A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{80}{21}$ und über die Differenz $A_{QAP} = A_{OAB} - A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot 2 - \frac{80}{21} = \frac{140-80}{21} = \frac{20}{7}$. Somit gilt:

$$A_{OPB} : A_{OAP} = \frac{80}{21} : \frac{20}{7} = \frac{4}{3}.$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Es sei nun m beliebig. Wie in Teil a) ist der Schnittpunkt mit der y −Achse der Punkt $A(0; 2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = m \cdot x + 2$ ermittelt, also $B\left(-\frac{2}{m}; 0\right)$. Dieser Punkt existiert nur für $m \neq 0$. Damit das Dreieck ΔAOB durch die Gerade durch O und P geteilt wird, muss zudem $m < 0$ gelten.

Für die Höhe im Teildreieck ΔOPB ermitteln wir den Schnittpunkt der Funktionen $f(x)$ und $g(x) = \frac{2}{5} \cdot x$. Aus $m \cdot x + 2 = 0.4 \cdot x$ erhalten wir $x = \frac{2}{0.4-m}$ und folglich für die Höhe $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{0.4-m} = \frac{4}{2-5 \cdot m}$. Schließlich finden wir $A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-m} \cdot \frac{4}{2-5 \cdot m} = \frac{4}{m \cdot (5 \cdot m-2)}$ und über die Differenz $A_{QAP} = A_{OAB} - A_{OPB}$

$$A_{QAP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-m} \cdot 2 - \frac{4}{m \cdot (5 \cdot m - 2)} = \frac{2 \cdot (2 - 5m) - 4}{m \cdot (5 \cdot m - 2)} = \frac{10}{2 - 5 \cdot m}$$

Damit gilt:

$$A_{OPB} : A_{OAP} = \frac{4}{m \cdot (5 \cdot m - 2)} : \frac{10}{2 - 5m} = -\frac{2}{5 \cdot m}.$$

Dieses Verhältnis ist für jede rationale Zahl $m < 0$ wieder eine rationale Zahl. ❑

Hinweis: Setzen wir im Verhältnis in Teil d) den Wert $m = -0.3$ ein, erhalten wir $-\frac{2}{5 \cdot (-0.3)} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$. Wir können also damit das Ergebnis aus Teil c) bestätigen.

Aufgabe 31.15 – MO570922. Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -4 \cdot |x - 4| + 8$ und $b(x) = -|x - 8| + 6$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen a und b in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
b) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle haben.
c) Ermitteln Sie für die Funktion b alle weiteren Nullstellen.
d) Ermitteln Sie reelle Zahlen p, q, r, für die die Funktion c mit der Gleichung $c(x) = p \cdot |x - q| + r$ eine Nullstelle $x_1 = 2$ hat und ihren größten Wert 7 für $x_2 = 6$ annimmt.
e) Ergänzen Sie im Koordinatensystem aus a) den Graphen der Funktion c.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Aufgrund der Aufgabenstellung genügt es, eine gemeinsame Nullstelle ohne Herleitung zu „erraten“ und die Übereinstimmung zu zeigen. Aus der Zeichnung zu Teil a) können wir $x = 2$ ablesen und bestätigen

$$a(2) = -4 \cdot |2 - 4| + 8 = 0 \text{ und } b(2) = -|2 - 8| + 6 = 0$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es gilt $b(x) = 0$ genau dann, wenn $|x - 8| = 6$ ist, also für $x - 8 = 6$ oder für $x - 8 = -6$. Der zweite Fall führt zu der bereits bekannten Nullstelle $x = 2$, der erste Fall führt zu $x = 14$.

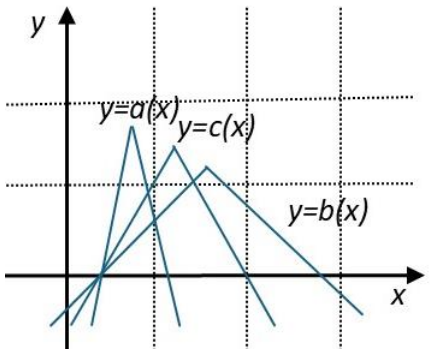
Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Solche reellen Zahlen sind $p = -\frac{7}{4}$, $q = 6$ und $r = 7$, denn für $c(x)$ ergibt sich:

$$c(2) = -\frac{7}{4} \cdot |2 - 6| + 7 = -\frac{7}{4} \cdot 4 + 7 = 0$$
$$c(6) = -\frac{7}{4} \cdot |6 - 6| + 7 = -\frac{7}{4} \cdot 0 + 7 = 7$$
$$c(x) = -\frac{7}{4} \cdot |x - 6| + 7 \leq 7$$

Anmerkung: Aufgrund der Aufgabenformulierung ist keine Herleitung des Ergebnisses gefordert. Wir können die Parameter – z.B. anhand einer Skizze im Koordinatensystem – erraten bzw. anhand einer Skizze schätzen. Eine rechnerische Probe ist jedoch erforderlich! Eine Herleitung könnte so geführt werden:

Wäre $p = 0$, so wäre $c(x)$ konstant, was nicht sein kann, da c unter anderem die Werte 0 und 7 annimmt. Damit c einen größten Wert annehmen kann, muss $p < 0$ gelten (da sonst c beliebig große Werte annimmt); den größten Wert nimmt c dann für $x = q$ an, und zwar ist der Wert dort gleich r. Wir erhalten also direkt $q = 6$ und $r = 7$. Wegen $c(2) = 0$ folgt $p \cdot |2 - 6| + 7 = 0$ und somit $p = -\frac{7}{4}$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Betragsfunktion muss die zweite Nullstelle bei $x = 10$ liegen. Die Lösung ergibt sich daher wegen $c(x) = p \cdot |x - q| + r$ aus folgendem Gleichungssystem:

$$c(2) = 0 = p \cdot |2 - q| + r\,, \quad (1)$$
$$c(6) = 7 = p \cdot |6 - q| + r\,, \quad (2)$$
$$c(10) = 0 = p \cdot |10 - q| + r, \quad (3)$$



Gleichsetzen von (1) und (3) ergibt $p \cdot |2 - q| + r = p \cdot |10 - q| + r$. Nach Subtraktion von r auf beiden Seiten erhalten wir $p \cdot |2 - q| = p \cdot |10 - q|$ und nach Division durch p (p muss ungleich null sein, da $c(x)$ sonst eine konstante Funktion wäre) folgt $|2 - q| = |10 - q|$. q hat also von 10 und 2 den gleichen Abstand, liegt also in der Mitte und es folgt $q = 6$. Einsetzen in (2)

ergibt $7 = p \cdot |6-6| + r$ und damit $r = 7$. Anschließendes Einsetzen in (3) führt zu $0 = p \cdot |4| + 7$ und damit zu $p = -\frac{7}{4}$.

Aufgabe 31.16 – MO570946. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(a+2) \cdot x + (a+3) \cdot y = a + 3\,,$$
$$(a+7) \cdot x + (11-a) \cdot y = a + 13$$

in den reellen Variablen a, x und y.

(a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung (x, y) hat.

(b) Bestimmen Sie die Menge M aller Paare (x, y) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung a hat.
Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Lösungshinweise: Wir beginnen mit einer Vorüberlegung zum Gleichungssystem. Angenommen, das Tripel (a, x, y) ist eine Lösung des Gleichungssystems.

Multiplikation der ersten Gleichung mit $(11-a)$, der zweiten Gleichung mit $(a+3)$ und anschließende Subtraktion führt zu

$$((11-a)(a+2) - (a+3)(a+7)) \cdot x = (11-a)(a+3) - (a+3)(a+13)$$

was vereinfacht werden kann zu $(-2 \cdot a^2 - a + 1) \cdot x = (a+3) \cdot (a+13)$. Weitere Faktorisierung führt schließlich auf die Gleichung

$$(2a-1) \cdot (a+1) \cdot x = (a+3) \cdot (a+13)$$

Analog führt Multiplikation der ersten Gleichung mit $(a+7)$, der zweiten Gleichung mit $(a+2)$ und anschließende Subtraktion zu

$$((a+7)(a+3) - (a+2)(11-a)) \cdot y = (a+7)(a+3) - (a+2)(a+13)$$

nach Vereinfachung zu $(2a^2 + a - 1) \cdot y = -5a - 5$, was weiter in Faktoren

$$(2a-1) \cdot (a+1) \cdot y = -5 \cdot (a+1)$$

zerlegt werden kann.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Angenommen, a ist weder gleich -1 noch gleich $\frac{1}{2}$. Dann erhalten wir direkt

$$x = \frac{2 \cdot (a+3)}{2a-1} \quad , y = \frac{-5}{2a-1}\,.$$

Diese Ergebnisse sind zunächst eine notwendige Bedingung für eine Lösung. Es bleibt zu prüfen, dass es auch eine hinreichende Bedingung ist. Die folgende Probe bestätigt, dass dieses Tripel (a, x, y) tatsächlich das Gleichungssystem löst:

$$(a+2)\cdot x + (a+3)\cdot y = \frac{2\cdot(a+3)\cdot(a+2) - 5\cdot(a+3)}{2a-1} = a+3$$
$$(a+7)\cdot x + (11-a)\cdot y = \frac{2\cdot(a+7)\cdot(a+3) - 5\cdot(11-a)}{2a-1} = a+13$$

Für jedes a mit $a \neq -1$ und $a \neq \frac{1}{2}$ hat das Gleichungssystem also genau eine Lösung (x, y). Das oben angegebene Paar (x, y) ist auch für $a = -1$ definiert und eine Lösung des Gleichungssystems. Für $a = \frac{1}{2}$ steht auf der linken Seite der Gleichung null, auf der rechten Seite jedoch nicht. In diesem Fall hat das Gleichungssystem also keine Lösung (x, y).

Das Gleichungssystem hat also für jedes $a \neq \frac{1}{2}$ mindestens eine Lösung (x, y), für $a = \frac{1}{2}$ gibt es hingegen keine Lösung.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Die gesuchte Menge M ist die Vereinigung der beiden Mengen

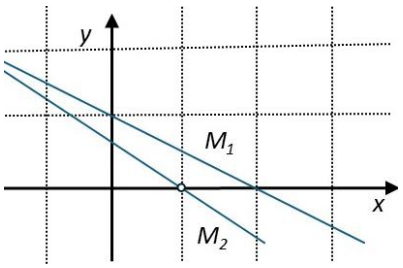
$$M_1 = \{(x, y) \mid \mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 2\}$$
$$M_2 = \left\{(x, y) \mid (x, y) = \left(\frac{2(a+3)}{2a-1}, \frac{-5}{2a-1}\right) \text{ für ein reelles } a \neq \frac{1}{2}\right\}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Überlegungen in Teil a), mit denen wir bewiesen haben, dass M_1 die Lösungen für $a = -1$ und M_2 die Lösungen für $a \neq \frac{1}{2}$ sind.

Die Menge M_1 beschreibt die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Um die Gestalt der Menge M_2 zu bestimmen, führen wir nacheinander die Ersetzungen $a = \frac{t+1}{2}$ und $t = \frac{1}{r}, r = \frac{x-1}{7}$ durch, um die Beschreibung der Menge M_2 zu vereinfachen:

$$M_2 = \left\{(x, y) \mid (x, y) = \left(\frac{t+7}{t}, \frac{-5}{t}\right) \text{ für ein reelles } t \neq 0\right\}$$
$$= \left\{(x, y) \mid (x, y) = \left(1 + \frac{7}{t}, \frac{-5}{t}\right) \text{ für ein reelles } t \neq 0\right\}$$
$$= \{(x, y) \mid (x, y) = (1 + 7r, -5r) \text{ für ein reelles } r \neq 0\}$$
$$= \left\{(x, y) \mid (x, y) = \left(x, \frac{-5}{7}\cdot(x-1)\right) \text{ für ein reelles } x \neq 0\right\}$$



Die Menge M_2 beschreibt also die Gerade mit der Steigung $-\frac{5}{7}$, welche durch den Punkt (1, 0) verläuft, abzüglich dieses Punktes selbst. ❑

Aufgabe 31.16 – MO240932. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Lösungshinweise: Die zu g parallelen Geraden haben den gleichen Anstieg wie g, also -1. Darüber hinaus stehen die Berührungsradien senkrecht auf den Tangenten, haben also den Anstieg 1 und verlaufen durch den Mittelpunkt des Kreises, besitzen also die Gleichung $y_r = x$, sodass sich die Berührungspunkte an den Koordinaten $(1{,}1)$ bzw. $(-1, -1)$ befinden. (Wir rechnen leicht nach, dass diese den Abstand $\sqrt{2}$ vom Kreismittelpunkt, also dem Koordinatenursprung, besitzen und damit auf k liegen.)

Damit haben die beiden Tangenten die Gleichungen

$$y_{t1} = -(x-1) + 1 = -x + 2 \text{ und } y_{t2} = -(x+1) - 1 = -x - 2. \quad ❑$$

Aufgabe 31.17 – MO081034. Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0;\ 8)$.

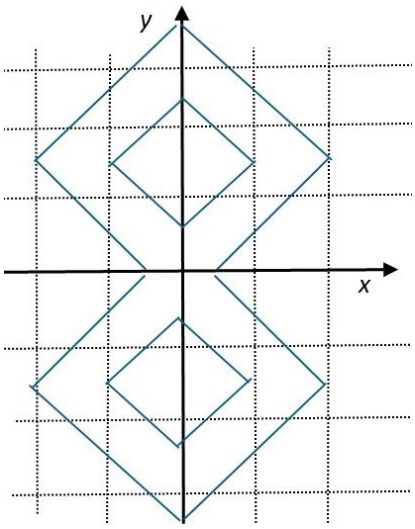
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Lösungshinweise: Aufgrund des angegebenen Punkts S_y auf der Parabel ist $q = 8$. Die Nullstellen der Funktion können angegeben werden durch $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sodass sich ihr Abstand berechnet zu $2 \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - 4q}$. Dieser ist nach Aufgabenstellung gleich 7, sodass sich $p^2 - 4q = 49$ bzw. $p^2 = 81$, also $p = \pm 9$ ergibt. Damit ergeben sich zwei Lösungspaare: $(p, q) = (-9, 8)$ oder $(p, q) = (9, 8)$. Die Probe bestätigt beide Ergebnisse. ❑

Aufgabe 31.18 – MO131045. Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$\Big||x| + \big||y| - 3\big| - 3\Big| = 1.$$

Lösungshinweise: Zunächst stellen wir fest, dass $f(x,y) = f(-x,y)$ und $f(x,y) = f(x,-y)$, es liegt also eine Symmetrie zur x-Achse und zur y-Achse vor. Wir können uns also auf den ersten Quadranten beschränken. Es gilt dann $x, y > 0$ und die Gleichung geht über in $|x + |y - 3| - 3| = 1$.



Sei nun $0 < y < 3$. Wir erhalten $|x - y + 3 - 3| = |x - y| = 1$. Für $x > y$ erhalten wir dann $y = x - 1$ und für $y > x$ folgt $y = x + 1$.

Sei nun $y \geq 3$. Dann geht unsere Gleichung über in $|x + y - 6| = 1$. Für $x + y < 6$ erhalten wir $y = -x + 5$ und für $x + y \geq 6$ folgt $y = 7 - x$.

Zeichnen wir die 4 Geraden und spiegeln diese, so erhalten wir also nebenstehendes Bild.

Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat

In der **KZM-Aufgabe A-4-5A** sind n Punkte $(n > 1)$ so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Eine Verteilung, die den maximal möglichen Mindestabstand realisiert, nennen wir im Weiteren „beste Verteilung“.

Für $\boldsymbol{n = 2}$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und wir finden eine beste Verteilung, indem wir die zwei Punkte in gegenüberliegende Eckpunkte platzieren. Der Abstand $d_2 = \sqrt{2}$ kann von keiner Konfiguration übertroffen werden, da die Diagonale eines Quadrates die längste Strecke innerhalb des Quadrates ist. Diese intuitiv anschauliche Lösung basiert auch auf dem

Hilfssatz. Bei einer Verteilung von zwei und mehr Punkten mit maximalem Mindestabstand in einem Quadrat befindet sich auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt[3].

Lösungshinweise: Wir nehmen an, wir haben im Quadrat $ABCD$ eine Verteilung gefunden, bei der auf der Seite $\overline{AB}$ kein Punkt platziert ist. Dann gibt es (mindestens) einen Punkt X dieser Verteilung mit minimalem Abstand zur Seite $\overline{AB}$. Wir fällen das Lot von diesem Punkt X auf $\overline{AB}$ und verschieben den Punkt entlang dieses Lotes, bis

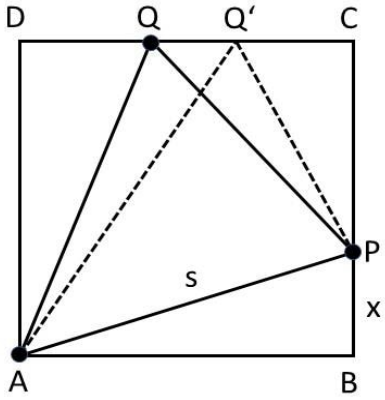
[3] Ein Punkt auf einem Eckpunkt des Quadrates gilt als zugehörig zu den beiden anliegenden Quadratseiten.

er $\overline{AB}$ erreicht. Bei dieser neuen Verteilung ist der Mindestabstand nicht kleiner als vor der Verschiebung:

- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X nicht enthält, bleibt bei dieser Verschiebung unverändert.
- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X enthält, vergrößert sich bei dieser Verschiebung.

Dieses Verfahren wiederholen wir mit den anderen Quadratseiten. ❑

Mit dem Hilfssatz kann die beste Verteilung von zwei Punkten formal begründet werden.



$\boldsymbol{n = 3}$. Wir erhalten aus dem Hilfssatz für eine beste Verteilung von drei Punkten die Aussage, dass ein Punkt in einer Quadratecke platziert werden muss und sich die beiden anderen Punkte auf den gegenüberliegenden benachbarten Quadratseiten befinden. Die drei Punkte der gesuchten Verteilung bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks ΔAPQ mit $|\overline{AQ}| = |\overline{PQ}|$. Betrachten wir nämlich ein Dreieck $\Delta APQ‘$ mit $\left|\overline{AQ‘}\right| > \left|\overline{PQ‘}\right|$ und verschieben wir den Punkt $Q‘$ in Richtung des Eckpunktes D, so vergrößert sich die Streckenlänge $\overline{PQ'}$, während sich gleichzeitig die Streckenlänge $\overline{AQ'}$ verringert. Solange bei dieser Verschiebung $\left|\overline{AQ‘}\right| > \left|\overline{PQ‘}\right|$ gilt, hat sich der Mindestabstand nicht verkleinert (denn entweder realisierte die Verbindungsstrecke $\overline{PQ'}$ den Mindestabstand, dann wird dieser bei der Verschiebung größer, oder $\overline{AP}$ realisierte den Mindestabstand, dann bleibt dieser bei der Verschiebung unverändert). Da wir aber in gleicher Weise argumentieren können, dass im Dreieck ΔAPQ auch $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$ gelten wird, ist das gesuchte Dreieck sogar gleichseitig.

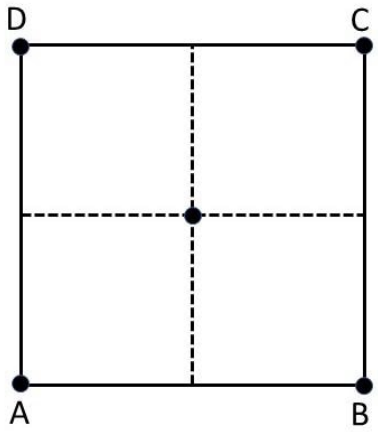
Wir können für die Seitenlänge d_3 des gleichseitigen Dreiecks ΔAPQ durch zweimalige Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS (im Dreieck ΔABP mit Hypotenuse $\overline{AP}$ bzw. im Dreieck ΔPCQ mit Hypotenuse $\overline{PQ}$) den Betrag der Strecke $x = |\overline{BP}|$ aus der Gleichung $x^2 + 1 = {d_3}^2 = 2 \cdot (1 - x)^2$ berechnen. Wir erhalten daraus die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ und finden mit der Lösungsformel $x = 2 - \sqrt{3}$ (die zweite Lösung entfällt wegen $x > 1$). Setzen wir diesen Wert für x in $x^2 + 1 = s^2$ ein, erhalten wir

$$d_3 = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.035.$$

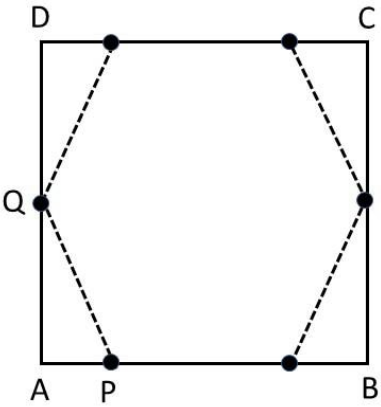
$\boldsymbol{n = 4}$. Bei einer besten Verteilung von vier Punkten befinden sich aufgrund der Aussage des Hilfssatzes mindestens zwei Punkte in den Eckpunkten des Quadrates.

Damit finden wir unmittelbar, dass alle Punkte dieser Verteilung Eckpunkte des Quadrates sind und somit $d_4 = 1$ gilt.

$\boldsymbol{n = 5}$. Die vier Eckpunkte des Quadrates und der Schnittpunkt seiner Diagonalen bilden eine beste Verteilung für 5 Punkte. Zum Beweis unterteilen wir das Quadrat in vier kongruente Teilquadrate. Nach dem Schubfachprinzip existiert davon mindestens ein Teilquadrat, in dem sich zwei (oder mehr) Punkte von den 5 Punkten befinden müssen. Der maximale Abstand dieser zwei kann aber die halbe Diagonallänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Die beschriebene Verteilung von 5 Punkten realisiert damit den Mindestabstand von $d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

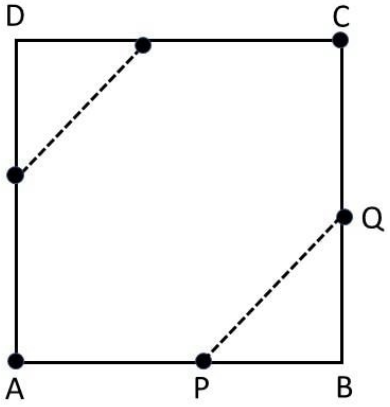


$\boldsymbol{n = 6}$. Es gibt verschiedene Verteilungen von 6 Punkten, die einen großen Mindestabstand haben. Wir können beispielsweise die Punkte als Eckpunkte eines Sechsecks in das Quadrat so wie in nebenstehender Abbildung legen, dass alle Seitenlängen gleich lang sind. (*Hinweis:* Dieses Sechseck ist nicht regelmäßig, denn die horizontale Diagonale ist kleiner als die beiden anderen Diagonalen.) Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck ΔAPQ mit der Hypotenuse $d_6 = |\overline{PQ}|$ und wenden den Satz des PYTHAGORAS an, so erhalten wir $|\overline{AP}| = \sqrt{d_6^2 - |\overline{AQ}|^2} = \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}}$. So können wir aus $2 \cdot \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}} + d_6 = 1$ die quadratische Gleichung $d_6^2 + \frac{2}{3} \cdot d_6 - 2 = 0$ herleiten und finden mit der Lösungsformel $d_6 = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{7} - 1\right) \approx 0.549$.

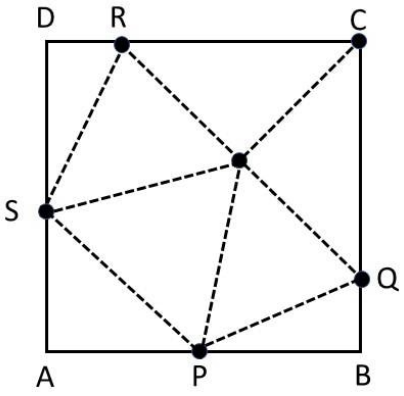


Platzieren wir die 6 Punkte so wie in nebenstehender Abbildung, wobei alle Seiten des Sechsecks gleichlang sind (*Hinweis:* Auch dieses Sechseck ist nicht regelmäßig), so finden wir, dass in diesem Fall wegen $|\overline{PB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6$ (als Kathete im gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck ΔBQP mit der Hypotenuse $\overline{PQ}$) gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6 + d_6 = 1, \text{ also } d_6 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.585.$$

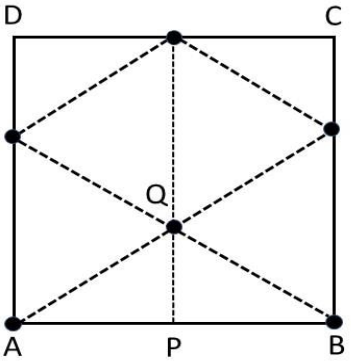


Für die nebenstehende Verteilung seien alle eingezeichneten Punktverbindungen gleichlang. Das Dreieck ΔCRQ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{RQ}$ mit $|\overline{RQ}| = 2 \cdot d_6$ und daraus folgend $|\overline{QC}| = \sqrt{2} \cdot d_6$. Auch das Dreieck ΔAPS ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{PS}$ mit $|\overline{PS}| = d_6$, woraus $|\overline{AP}| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6$ folgt. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck ΔPBQ an, so finden wir für diese Verteilung den Mindestabstand von $d_6 = \sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0.597$ aus



$$\sqrt{2} \cdot d_6 + \sqrt{d_6^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6\right)^2} = 1$$

Der maximale Mindestabstand wird für die nebenstehende Verteilung erreicht. Er berechnet sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ΔAPQ mit den Kathetenlängen $|\overline{AP}| = \frac{1}{2}$ und $|\overline{PQ}| = \frac{1}{3}$, also



$$(\overline{AQ}) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{13} \approx 0.601.$$

Diese Verteilung hat eine alltägliche Realisierung: Wenn 5 einander fremde Personen in einem Fahrstuhl stehen, werden sie sich etwa in der Verteilung für $n = 5$ aufstellen, um sich nicht gegenseitig zu belästigen. Tritt eine weitere Person herein (in der Abbildung von oben kommend), rücken die bereits im Fahrstuhl stehenden Personen ein Stück nach hinten (in der Abbildung nach unten) und die hinzu gekommene Person bleibt an der Türmitte (in der Abbildung in der Mitte von von $\overline{CD}$) stehen.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Argumentation *„ausgehend von einer (scheinbar) besten Verteilung verschlechtert sich der maximale Mindestabstand, wenn wir Punkte verschieben“* nicht ausreicht. Vermuten wir nämlich, dass die beste Verteilung eingenommen wird, wenn die Punkte ein konvexes Sechseck bilden, so verschlechtert sich der Mindestabstand tatsächlich, wenn wir die Lage der Punkte nur wenig „stören“. Verändern wir aber die Lage wesentlich, ist eine Verbesserung zu erreichen!

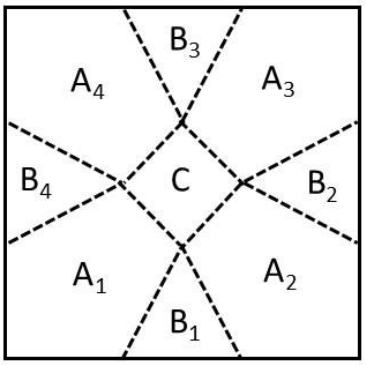
Beweise zum Fall mit sechs Punkten wurden erst in den 1960-er Jahren veröffentlicht. Ein erster Beweis wird RONALD LEWIS GRAHAM (1935 – 2020, US-amerikanischer Mathematiker) zugeschrieben. Wir skizzieren hier einen Beweis von HANS MELISSEN[4] (geb. 1949).

[4] Melissen, Hans. Densest Packing of Six Equal Circles in a Square. In: Elemente der Mathematik, Jahrgang 49 (1994), S. 27-31.

Er konstruierte eine Hilfsfigur, indem er die Quadratseiten jeweils in drei Strecken teilte und die langen Diagonalen der Gebiete $A_1, \dots, A_4$ der Länge d_6 aus der obigen, vermutlich besten Verteilung entsprechen. An dieser Figur führt er die Annahme, dass es eine Verteilung mit größerem Mindestabstand gäbe, zum Widerspruch.

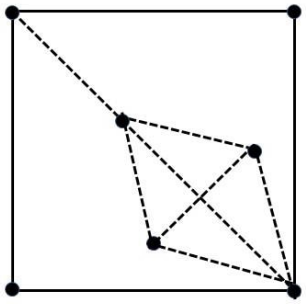
Zunächst stellte er fest: Liegen drei Punkte in den benachbarten Gebieten der Form ABA, so ist deren Mindestabstand nicht größer als d_6.

Nun untersuchte er den Fall, dass kein Punkt der Verteilung im Gebiet C liegt. Liegen in drei oder vier Gebieten der Form A jeweils ein Punkt, kann alles mit Situationen der Form ABA erklärt werden und der Mindestabstand ist nicht größer als d_6. Liegen jedoch nur in zwei Gebieten der Form A Punkte, müssen in jedem Gebiet der Form B jeweils ein Punkt enthalten sein. Nun lässt sich zeigen, dass dann der Abstand zweier Punkte in benachbarten Gebieten der Form B nicht größer als d_6 sein kann.



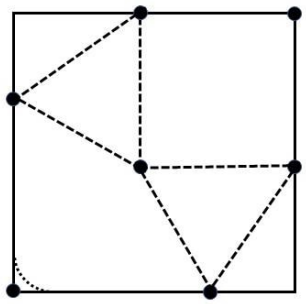
Abschließend untersuchte er den Fall, dass genau ein Punkt im Gebiet C liegt. Entweder gibt es für die anderen fünf Punkte wieder die Situationen ABA, oder die Punkte liegen beispielsweise[5] in A_2, A_3, A_4, B_1, B_4. Doch bei einer solchen Aufteilung zeigte er rechnerisch durch Abschätzungen, dass der Mindestabstand den Wert d_6 nicht übertreffen kann.

Für $\boldsymbol{n = 7, 8, 9}$ fand JONATHAN SCHAER beste Verteilungen mit maximalem Mindestabstand.



Wählen wir eine Verteilung von $\boldsymbol{n = 7}$ Punkten, indem 4 Punkte in die Eckpunkte gelegt werden und die verbleibenden 3 Punkte im Innern ein gleichseitiges Dreieck bilden, erreichen wir nicht den maximal möglichen Mindestabstand!

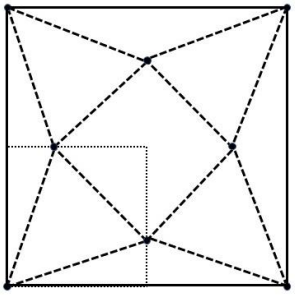
Die Lage wie nebenstehend dagegen bietet eine beste Verteilung. Erstaunlicherweise kann der siebente Punkt in einer Umgebung des (linken unteren) Eckpunktes verschoben werden, ohne den Mindestabstand zu verkleinern. Aus der Skizze ist die Konstruktion leicht zu erkennen (die markierten Dreiecke sind gleichseitig) und die Berechnung des Mindestabstandes ist nicht schwer:



$$d_7 = 2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \approx 0.536.$$

[5] Andere Indizes können durch Umbenennung aus dieser Situation gewonnen werden.

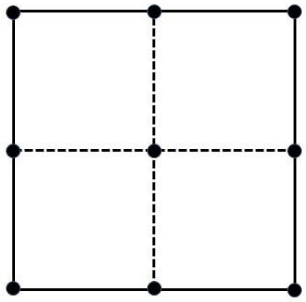
Eine vermutlich beste Anordnung für $\boldsymbol{n = 8}$ Punkte finden wir durch Probieren, wenn wir 4 Punkte in die Quadratecken legen und die verbleibenden 4 Punkte als Eckpunkte eines Quadrates im Inneren anordnen. Wir erkennen die Verteilungsstruktur des Falls $n = 3$ wieder. Es ergibt sich deshalb ein Mindestabstand von



$$d_8 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot d_3 \approx 0.518\,,$$

der auch tatsächlich als maximal möglicher Mindestabstand bewiesen werden kann. Jedoch erweist sich der Beweis[6] als vergleichbar aufwändig wie im Fall $n = 6$. Es ist jedoch nicht verallgemeinerungsfähig, dass durch Zusammensetzung verkleinerter bester Verteilungen mit weniger Punkten wieder eine beste Verteilung mit maximalem Mindestabstand erreicht werden kann.

Schließlich[7] betrachten wir $\boldsymbol{n = 9}$. Teilen wir das Quadrat in vier gleichgroße Teilquadrate, wissen wir mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass in (mindestens) einem dieser Teilquadrat drei Punkte liegen. Mit dem Ergebnis für $n = 3$ folgt daraus, dass der Mindestabstand nicht größer als $\frac{1}{2}d_3$ sein kann. Dies kann aber nicht der größte Mindestabstand sein, weil in der Anordnung für acht Punkte kein weiterer Punkt eingefügt werden kann. J. SCHAER wies nach, dass $d_9 = 0.5$ der größte Mindestabstand ist und bei der Anordnung im 3×3-Gitter realisiert wird.



Unter http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/csq/csq.html hat ECKARD SPECHT (Universität Magdeburg) die besten Verteilungen für $n = 1, \ldots, 10000$ beschrieben, illustriert und mit Literaturhinweisen untersetzt.

Bundeswettbewerb Mathematik 2025

Das Online-Seminar „Spotlight Mathe - Einblicke in den Bundeswettbewerb Mathematik“ am 26. März 2025 vermittelte mathematische Grundlagen und Problemlösestrategien, die sowohl im Unterricht als auch vor allem bei der Wettbewerbsteilnahme unterstützen und motivieren können. PATRICK BAUERMANN (Projektleiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe, Bildung & Begabung gGmbH Bonn) hatte dazu StD Dr. ROBERT STRICH (Vorsitzender des Aufgabenausschusses), BEN ROHLFS (Mitglied Korrekturkommission) sowie drei Teilnehmerinnen der 1. Runde ins Studio eingeladen. Anhand der Aufgaben der ersten Runde 2025 teilten sie ihre

[6] Schaer J. and Meir A. On a geometric extremum problem. In: Can. Math. Bull. 8 (1965), 21-27.
[7] Schaer, J. The Densest Packing of 9 Circles in a Square. In: Can. Math. Bull. vol. 8 (1965), p. 273-277.

Perspektiven auf die Genese einer Lösung, die mathematischen Hintergründe sowie die Korrektur. Dabei gaben sie Einblicke, wie Jugendliche mit Begeisterung und Erfolg am Wettbewerb teilnehmen können und wie Lehrkräfte ihre Schülerinnen und Schüler auf die Teilnahme vorbereiten können. So berichteten die Schülerinnen, wie sie sich in ihrer Gruppenarbeit die Lösung der Aufgabe 4 erarbeiteten: Von Spezialfällen mit geringer Dimension fanden sie zur Methode der gespiegelten Zug-Antwort. Dr. ROBERT STRICH gab Einblicke in die Aufgabenfindung bei Aufgabe 1 und ging auf die Lösungsfindung ein. Ausführlich diskutierte BEN ROHLFS einen Lösungsansatz zur Aufgabe 2: Der Zusammenhang der letzten von null verschiedenen Ziffer eines Produktes zu den letzten von null verschiedenen Ziffern ihrer Faktoren lieferte einen Schlüssel zur Lösung.

Wie schon im vergangenem online-Seminar wurde erneut die Rolle der Künstlichen Intelligenz im Hausaufgabenwettbewerb diskutiert. Bezüglich der bisherigen Selbstständigkeitsverpflichtung hat sich eigentlich nichts geändert: „Die Verpflichtung zur Selbstständigkeit gilt schon für die Phase der Lösungsfindung und nicht erst für die endgültige Formulierung. Diskussionen von Lösungswegen, insbesondere im Internet, sind nicht zulässig. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen die Selbstständigkeitsverpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.“ Die Aufgabenkommission wird die KI-Lösungen deshalb intensiv erproben.

Mit zwischenzeitlich 170 Zuschauer fand das Seminar große Resonanz. Die nächsten Spotlight-Seminare werden im September zur Mathematik-Olympiade und zur 2. Runde des Bundeswettbewerbs angeboten.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Mathematiſche Aufgaben[8]
zum Gebrauch in den
oberſten Claſſen höherer Lehranſtalten.

Aus den bei Abiturienten-Prüfungen
an preußiſchen Gymnaſien und Realſchulen geſtellten Aufgaben, aufgewählt von und mit Hinzufügung der Reſultate zu einem Uebungsbuche vereint von

H.C.E. Martus
Oberlehrer an der Königlichen Realſchule in Berlin

Greifswald, 1865[9]

[8] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[9] Digitalisiert zugänglich in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen unter https://www.sub.uni-goettingen.de/sub-aktuell/ , Suchbegriff „Martus Aufgaben“, zitiert am 05.04.2025.

Vorrede.

Bei der schriftlichen Prüfung der Abiturienten an preußischen Gymnasien und Realschulen werden vier Aufgaben aus den verschiedenen, in den Kreis des Schulunterrichts fallenden Theilen der Mathematik gestellt. Zur Anfertigung dieser Arbeit sind den Examinanden mit Einschluß der Reinschrift fünf Vormittagsstunden zugestanden.

Bei der Auswahl der Aufgaben achtet der Lehrer mit größter Sorgfalt darauf, ob die Aufgabe bei ihrer Behandlung dem Abiturienten Gelegenheit giebt, von den in den verschiedenen Gebieten erworbenen Kenntnissen Gebrauch zu machen; ferner, ob der Wortlaut der Aufgabe so klar gefasst ist, daß die Schüler das Geforderte ohne tiefe Ueberlegung erkennen; besonders aber, ob die Aufgabe zu ihrer Lösung nicht eines ungewöhnlichen Kunstgriffe bedarf; ob sie vielmehr sich dennoch elegant und, wenn irgend möglich, auf mehreren Wegen auflösen lasse; und endlich, ob die vollständige Entwicklung aller vier Aufgaben bei dem von den Abiturienten zu fordernden Maße von Geläufigkeit im Rechnen und Darstellen in der vorgeschriebenen Arbeitszeit wirklich geliefert werden könne. Kommt hinzu, daß das Resultat der Auflösung ein einfaches ist, so daß sich etwa ganze, ja abgerundete Zahlen ergeben[10], oder daß die Wurzeln aufgehen: so ist die Aufgabe besonders geeignet, weil es dem unter dem Drucke des Examens Arbeitenden bei solchen Eintreffen sehr wahrscheinlich wird, daß seine Auflösung richtig sei, und er dadurch die Sicherheit gewinnt, getrost weiterarbeiten zu können.

...

S. 85

D.

Coordinaten-Geometrie

(„Analytische Geometrie“)

1. Gerade Linie

676. Wenn man von einem Dreieck die Grundlinie und die Lage seines Schwerpunktes über derselben kennt, wie construirt man geometrisch das ganze Dreieck? Und wie ist dasselbe vollständig zu berechnen, wenn die Grundline $AB = g$ die Abscissenaxe, A der Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems und die Coordinatenbestimmung des Schwerpunktes $x = \alpha$ und $y = \beta$ ist?

Ausführung für den Fall $g = 9;\ a = 5{,}3\ \text{ß} = 2.1$

677. Für rechtwinkelige Coordinatenaxen ist die Gleichung einer Geraden, welche die Axen in A und B schneidet, durch den Abstand p derselben vom Anfangspunkte der Coordinaten und durch den Winkel α gegeben, den dieser Abstand mit der X-Axe bildet; ebenso sind die Coordinaten (a, b) eines Punktes C außerhalb AB bekannt. Es werden die drei Seiten, die Fläche und die Höhe auf C in dem Dreiecke ABC gesucht.

Beispiel: $\alpha = 60°, p = 3“, a = 7“, b = 10“$.

678. Welchen Winkel bilden die beiden geraden Linien, deren Gleichungen $y = 5x + 6$ und $2y = 3x + 7$ sind, miteinander, und wie groß sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes?

679. Durch einen Punkt, der durch die rechtwinkeligen Coordinaten $x = 5, y = 7$ bestimmt ist, geht eine Linie, welche die Abscissenlinie unter einem Winkel von $40°$

[10] Im Resultate-Teil werden Längen mit sieben Stellen nach dem Komma und Winkel mit hundertstel Sekunden angegeben.

durchſchneidet; man ſoll die Gleichung einer Linie finden, die auf dieſer in dem gegebenen Punkte ſenkrecht ſteht.

680. Analytiſch zu beweiſen, daß der geometriſche Ort aller Punkte, für welche der Unterſchied der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten conſtant iſt, eine auf der Verbindungslinie der Punkte ſtehende Senkrechte iſt.

681. Innerhalb eines Winkels iſt ein veränderlicher Punkt P gegeben. Auf welchem geometriſchen Ort liegt derſelbe, wenn die Summe der von P auf die Schenkel gefällten Perpendikel gleich einer conſtanten Größe s iſt?

Monatsaufgabe 04/2025[11]

Wir betrachten die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ mit positiven ganzen Zahlen a, b, c. Zeige:

a) Für $n = 2017$ gibt es keine Lösungen (a, b, c).
b) Für $n = 2016$ muss in jeder Lösung (a, b, c) die Zahl a durch 3 teilbar sein.
c) Für $n = 2016$ hat die Gleichung unendlich viele Lösungen (a, b, c).

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 02/2025

Aufgabe T-3 (Teamwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Es sitzen 2024 Mathematigerinnen in einer Reihe am Ufer des Flusses Tisza. Jede von ihnen arbeitet an genau einem Forschungsthema. Falls zwei Mathematigerinnen am selben Thema arbeiten, arbeiten auch alle Mathematigerinnen, die zwischen ihnen sitzen, an diesem Thema.

Marvin versucht, für jedes Paar von Mathematigerinnen herauszufinden, ob sie am selben Forschungsthema arbeiten. Er darf dafür jeder Mathematigerin die folgende Frage stellen: „Wie viele von diesen 2024 Mathematigerinnen arbeiten an deinem Forschungsthema?“ Er stellt diese Fragen nacheinander. Er kennt also alle bisherigen Antworten, bevor er die nächste Frage stellt.

Bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, sodass Marvin sein Ziel stets mit höchstens k Fragen erreichen kann.

Lösungshinweise: Wir betrachten allgemein n Mathematigerinnen[12]. Indem Marvin die links stehenden $n - 1$ Mathematigerinnen befragt, kann er die Arbeitsgruppen von links nach rechts bestimmen. Insbesondere weiß er nach der Frage an die vorletzte Mathematigerin, ob die letzte Mathematigerin ein eigenes Thema oder das Thema ihrer linken Nachbarin bearbeitet. Folglich ist $k \leq n - 1$.

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.05.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[12] Die Verallgemeinerung der Anzahl eröffnet die Möglichkeit, anhand kleiner n Lösungsstrategien zu erproben.

Jedoch können $n-2$ Fragen möglicherweise nicht ausreichen. Nehmen wir an, x_i sei die Antwort der i-ten Mathematigerin. Es ist leicht zu sehen, dass $x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1}$ die Anzahl der verschiedenen Themen und insbesondere eine ganze Zahl ist: Bearbeiten k Mathematigerinnen das gleiche Thema, so gibt es k Antworten mit dem Wert k und folglich ergibt die Summe von k reziproken Antworten $\frac{1}{k}$ den Wert 1.

Verfolgen wir die Strategie von oben, so kann es eine Verteilung geben, dass bereits die Summe $x_1^{-1}+\cdots+x_{n-2}^{-1}$ ganzzahlig ist (zum Beispiel für $x_i=1$ für alle $i=1,..,n-2$). Tritt dieser Fall ein, kann nicht entschieden werden, ob die verbleibenden zwei Mathematigerinnen das gleiche oder unterschiedliche Themen bearbeiten. Es ist also eine weitere Frage erforderlich. Diese Situation tritt auch ein, wenn von rechts beginnend noch die Antworten x_1 und x_2 ausstehen.

Wir untersuchen nun eine allgemeine Reihenfolge der Fragen. Wir bezeichnen mit a und b den kleinsten bzw. größten Index, so dass die a-te und b-te Mathematigerin noch nicht von Marvin gefragt wurde. Für jedes Zahlenpaar (a,b) konstruieren wir eine Verteilung, bei der $n-2$ Fragen nicht ausreichen: Wir nehmen an, dass die Verteilung so sei, dass nach jeder Frage die Summen $x_1^{-1}+\cdots+x_{a-1}^{-1}$ und $x_{b+1}^{-1}+\cdots+x_n^{-1}$ ganzzahlig sind (mit $a>1$ und $b<n$ ist dies möglich für $x_i=1$ für $i=1,\dots,a-1,b+1,\dots,n$, für $a=1$ bzw. $b=n$ ist die betreffende Summe leer), und dass für alle Werte x_i mit $a<i<b$, die bereits gefragt wurden, $x_i=2$ gelte.

Wir stellen fest, dass für einen Wert $x_i=2$ ohne weitere Fragen noch keine Entscheidung über das Thema der Nachbarinnen der i-ten Mathematigerin möglich ist, denn es könnte sowohl die linke als auch die rechte Nachbarin das gleiche Thema wie die i-te Mathematigerin bearbeiten. Aber auch für $x_i=x_{i+1}=2$ bleibt die Unkenntnis über die Themen der $(i-1)$ −ten und $(i+2)$-ten Mathematigerin.

Nach $n-2$ Fragen ergibt sich also Folgendes: Nur die a-ten und b-ten Mathematigerinnen wurden von Marvin nicht gefragt, alle dazwischen haben mit 2 geantwortet, und alle, die nicht dazwischen sitzen, haben ein anderes Forschungsthema als die a-te und b-te Mathematigerin.

- Wenn $b-a$ ungerade ist, dann kann $x_a=1$ und $x_b=1$ oder $x_a=2$ und $x_b=2$ auftreten, so dass Marvin nicht entscheiden kann, welche Mathematigerinnen das gleiche Thema haben.
- Wenn $b-a$ gerade ist, dann kann $x_a=1$ und $x_b=2$ oder $x_a=2$ und $x_b=1$ auftreten, so dass Marvin wieder nicht entscheiden, welche Mathematigerinnen dasselbe Thema teilen.

Es kann also für jede Reihenfolge der Fragestellungen eine Verteilung gefunden werden, so dass $n-2$ Fragen noch nicht ausreichen. Es gilt also $k=2023$. ❑

Termine

Wettbewerb „Jugend forscht“, Landeswettbewerb Sachsen, 12. April 2025 in Leipzig, 14.00 – 18.30 Uhr, VDI-Garage (Karl-Heine-Str. 97).
https://www.jugend-forscht-sachsen.de/

64. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde, 23. – 26. Mai 2025, Universität Göttingen (www.mo2025.de).

Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, 29. Mai bis 1. Juni 2025, Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg.
https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2025.html

Gauß-Vorlesung der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 5. Juni 2025, in der Universitätsbibliothek der TU Chemnitz, Referent: Prof. Dr. KARL-THEODOR STURM (Universität Bonn) „Optimaler Transport, Brownsche Bewegung und Krümmung in nicht glatten Räumen“. https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/gauss2025/

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 31.2 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem 3
Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat 13
Bundeswettbewerb Mathematik 2025 18
Monatsaufgabe 04/2025 21
In alten Mathe-Büchern geblättert 19
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 02/2025 21
Termine 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[13]	Nr.	Thema	Aufgabe
04/2025 (Apr.)	Thema 31.2	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641013 MO611023
03/2025 (März)	Thema 31.1	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922 MO621033
03/2025 (März)	Thema 25.2	Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

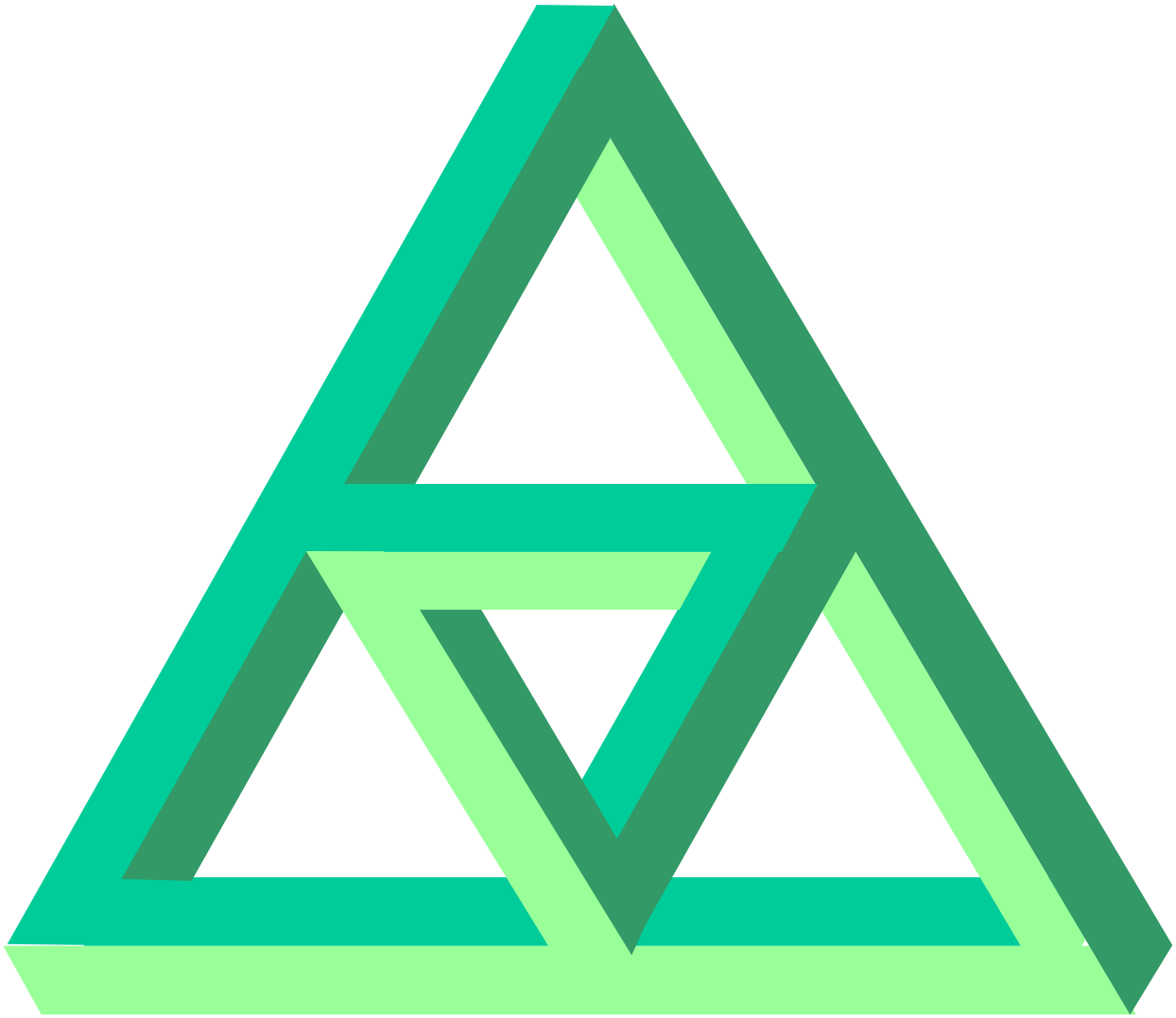
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[13] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2025 (Mai 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir setzen die Diskussion zum Thema „Koordinatensysteme“ fort. Auch in der Landesrunde der diesjährigen Mathematik-Olympiade wurden mit **MO640332/ MO641032** entsprechende Aufgaben gestellt. In der Olympiadeklasse 9 gab es am zweiten Tag sogar eine weitere Aufgabe **MO640935**, die sich mit Lösungsstrategien im Koordinatensystem vorteilhaft bearbeiten ließ. Zudem finden wir in der Lösungshinweisen der MO-Aufgabenkommission zu dieser Aufgabe eine lesenswerte Diskussion über geeignete Auswahlen der Lage des Quadrates im Koordinatensystem – woraus sich verschiedene Übungen ableiten lassen.

Mit den Aufgaben **MO640936/MO641036** knüpfen wir an das Thema 9 über Summen von Quadratzahlen an. Kern der Untersuchungen zu den Summen von zwei bzw. vier Quadratzahlen besteht in den Resten bei Division durch 3 bzw. 8, womit die Anzahlen der möglichen Lösungen drastisch reduziert werden können. Interessant sind aber auch die Lösungsansätze, mit denen die Anzahlen rekursiv auf kleine Zahlen n zurückgeführt werden können. Es zeigt sich einmal mehr, dass es bei solchen Aufgaben mit Jahreszahlen lohnenswert ist, zunächst systematisch einige spezielle Lösungen zu suchen.

Im historischen Rückblick zitieren wir eine Arbeit von 1908, in der der mathematische Weg zur Lösung der Frage „Wie viele Biquadrate sind höchstens für die Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe von Biquadraten erforderlich?“ verfolgt werden kann – ohne aber schon die kleinste derartige Anzahl gefunden zu haben.

Wir berichten von der 14. EGMO, in der das deutschen Mädchen-Team besonders erfolgreich abgeschnitten hat.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

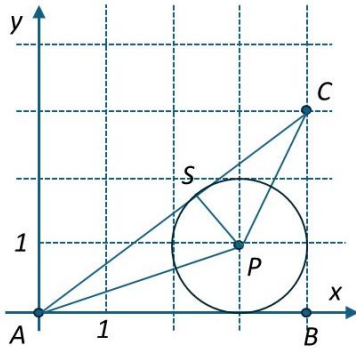
Thema 31.3 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[3]

Aufgabe 31.19 – MO640932. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0,0), B(4,0), C(4,3)$ und $P(3,1)$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPC.
b) Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand des Punktes P zur Geraden AC.
c) Das Dreieck ΔABC besitzt einen Inkreis mit dem Radius r.
Weisen Sie nach, dass $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{|\overline{BP}|}{r}$ gilt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Im Dreieck ΔABP ist die x-Koordinate von B die Länge der Grundseite $\overline{AB}$ und die y-Koordinate von P die Höhe auf dieser Grundseite. Es gilt also $A_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPC ergibt sich als Differenz $A_{\Delta APC} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABP} - A_{\Delta BCP}$.

Für die Dreiecke ΔABC und ΔBCP lassen sich ebenfalls die Längen der Grundseiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ sowie die Höhenlängen auf diesen Grundseiten aus den Koordinaten der entsprechenden Punkte ablesen. Es gilt



$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

und

$$A_{\Delta BCP} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Daraus ergibt sich $A_{\Delta APC} = 6 - 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Das Dreieck ΔAPC hat die Seitenlänge $|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ und (gemäß Teilaufgabe a) den Flächeninhalt 2,5. Damit hat die Höhe zur Grundseite $\overline{AC}$ in diesem Teildreieck die Länge 1. Das ist aber gerade der gesuchte Abstand von P zu AC.

Hinweis: Wenn auch rechnerisch aufwendiger, so sollte zur Übung der Abstand aus den Geradengleichungen ermittelt werden: Die Punkte A und C liegen auf der Geraden $y = \frac{4}{3}x$. Eine dazu senkrechte Gerade hat den Anstieg $m = -\frac{3}{4}$. Somit finden wir für die Geradengleichung einer zu AC senkrechten Geraden durch den Punkt P die Darstellung $y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 3) + 1 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{13}{4}$.

Wir ermitteln den Schnittpunkt $S(x_s, y_s)$ beider Geraden aus der Gleichheit

$$\frac{4}{3}x_S = -\frac{3}{4} \cdot x_S + \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{16+9}{12} \cdot x_S = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{39}{25}$$

[3] siehe auch Thema 31.1 in Heft 03/2025 und Thema 31.2 in Heft 04/2025

$$y_S = \frac{4}{3} \cdot \frac{39}{25} = \frac{52}{25}.$$

Damit beträgt der Abstand von P zu S

$$|\overline{PS}| = \sqrt{\left(3 - \frac{39}{25}\right)^2 + \left(1 - \frac{52}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(\frac{27}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1296}{2025} + \frac{729}{2025}} = 1$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Die Abstände von P zu A, B bzw. C sind nach der Abstandsformel aus den Koordinaten der Punkte gleich $|\overline{AP}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\overline{BP}| = \sqrt{(4-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ bzw. $|\overline{CP}| = \sqrt{(4-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$.

Der Punkt P hat auch von den beiden anderen Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ jeweils den gleichen Abstand 1,

- weil die Gerade AB auf der x-Achse liegt und deshalb deren Abstand zu P der y-Koordinate des Punktes P entspricht bzw.
- weil die Gerade BC parallel zur y-Achse durch den Punkt $(4{,}1)$ verläuft und deshalb deren Abstand zu P der Differenz der x-Koordinaten $4 - 3 = 1$ entspricht.

Somit ist P der Inkreismittelpunkt, und es gilt $r = 1$. Setzen wir die ermittelten Längen in die Verhältnisgleichung ein, können wir die Gleichheit bestätigen:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{|\overline{BP}|}{r}.$$

❑

Anmerkung: Da die Eckpunkte der zu untersuchenden Dreiecke ganzzahlige Koordinaten haben, kann deren Flächeninhalt A auch nach dem Satz von PICK durch Abzählen ganzzahliger Gitterpunkte bestimmt werden. Es gilt

$$A = I + \frac{1}{2} \cdot R - 1\,,$$

wobei I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des jeweiligen Dreiecks bezeichnet. Es ergibt sich auf diese Weise[4]

$$A_{\Delta APC} = 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = \frac{5}{2}.$$

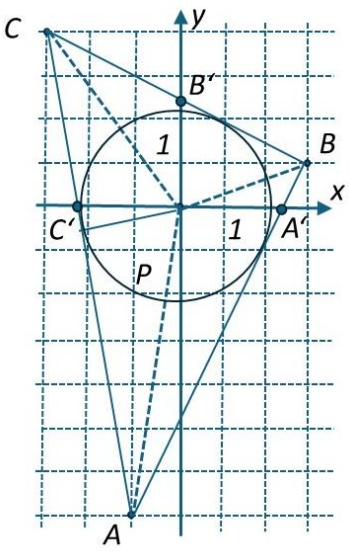
[4] Ein Abzählen der Punkte anhand einer Skizze wird im Allgemeinen ausreichend sein. Bei knapp erscheinenden Lagen sollte aber rechnerisch bestätigt werden, dass die gezählten Punkte auch tatsächlich im Innern oder auf dem Rand liegen.

Der Satz von PICK war Inhalt der **Aufgabe MO491036[5]:** Im Koordinatensystem bezeichnet man Punkte $(x\,;y)$ mit ganzzahligen Koordinaten x und y als Gitterpunkte. Weiter sei für $n \geq 3$ ein n-Eck gegeben, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Es bezeichne R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des n-Ecks (die Eckpunkte eingeschlossen), I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des n-Ecks und A seinen Flächeninhalt. Die Formel von PICK[6] besagt nun $A = I + \frac{R}{2} - 1$.

a) Es seien x, y positive ganze Zahlen. Beweisen Sie die Formel von PICK für das Rechteck mit den Eckpunkten $(0;\ 0), (x;\ 0), (0;\ y)$ und $(x;\ y)$.
b) Beweisen Sie die Formel von PICK für rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.
c) Beweisen Sie die Formel von PICK für beliebige Dreiecke.

Aufgabe 31.20 – MO641032 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1,-7), B(3,1), C(-3,4)$ und $P(0,0)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABP, ΔBCP und ΔCAP.
b) Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand des Punktes P zur Geraden AC.
c) Das Dreieck ΔABC besitzt einen Inkreis mit dem Radius r.
Weisen Sie nach, dass $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{|\overline{BP}|}{r}$ gilt.



Lösungshinweise: Wir ermitteln die Geradengleichungen, auf denen die Dreiecksseiten liegen:

$$f_{AB}(x) = y = \frac{1+7}{3+1} \cdot (x+1) - 7 = 2 \cdot x - 5$$

$$f_{BC}(x) = y = \frac{4-1}{-3-3} \cdot (x-3) + 1 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2}$$

$$f_{AC}(x) = y = \frac{4+7}{-3+1} \cdot (x+1) - 7 = -\frac{11}{2} \cdot x - \frac{25}{2}$$

Wir ermitteln die Koordinaten des Punktes A' als Nullstelle der Funktion f_{AB} und erhalten aus $0 = 2 \cdot x - 5$ die Koordinaten $A'\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
Wir ermitteln die Koordinaten des Punktes B' als Schnittpunkt der Funktion f_{BC} mit der y-Achse und erhalten die Koordinaten $B'\left(0, \frac{5}{2}\right)$.
Wir ermitteln die Koordinaten des Punktes C' als Nullstelle der Funktion f_{AC} und erhalten aus $0 = -\frac{11}{2} \cdot x - \frac{25}{2}$ die Koordinaten $C'\left(-\frac{25}{11}, 0\right)$.

[5] s. Heft mit Lösungshinweisen
[6] Erstmalig beschrieben vom österreichischen Mathematiker GEORG ALEXANDER PICK (1859 – 1942)

(Die Schnittpunkte können wir anhand der Skizze bestätigen. Würden wir dagegen die Schnittpunkte anhand der Skizze ablesen, sind die rechnerischen Proben erforderlich, um diese Koordinaten zu bestätigen.)

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir bestimmen die Flächeninhalte als Summe von Flächeninhalten zweier geeigneter Dreiecke:

$$A_{\Delta ABP} = A_{\Delta AA'P} + A_{\Delta A'BP} = \frac{|\overline{A'P}|\cdot h_{A:A'P}}{2} + \frac{|\overline{A'P}|\cdot h_{B:A'P}}{2} = \frac{5\cdot 1}{2} + \frac{5\cdot 3}{2} = 10$$
$$A_{\Delta BCP} = A_{\Delta BB'P} + A_{\Delta B'CP} = \frac{|\overline{B'P}|\cdot h_{B:B'P}}{2} + \frac{|\overline{B'P}|\cdot h_{C:B'P}}{2} = \frac{\frac{5}{2}\cdot 3}{2} + \frac{\frac{5}{2}\cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$
$$A_{\Delta APC} = A_{\Delta APC'} + A_{\Delta PCC'} = \frac{|\overline{C'P}|\cdot h_{A:C'P}}{2} + \frac{|\overline{C'P}|\cdot h_{C:C'P}}{2} = \frac{\frac{25}{11}\cdot 7}{2} + \frac{\frac{25}{11}\cdot 4}{2} = \frac{25}{2}$$

Lösungsvariante: Elementargeometrisch ermitteln wir die Flächen, indem wir das jeweilige Dreieck in ein kleinstmögliches achsenparalleles Rechteck einschließen. Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann als Differenz des Flächeninhalts dieses Rechtecks und der Summe der Flächeninhalte mehrerer rechtwinkliger Dreiecke oder kleinerer Rechtecke. Dazu bezeichnen wir mit $R(a,b)$ den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b sowie mit $D(a,b)$ den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b. So finden wir:

$$A_{\Delta ABP} = R(4,8) - D(4,8) - D(3,1) - D(7,1) - R(1,1) = 4\cdot 8 - \frac{4\cdot 8}{2} - \frac{3\cdot 1}{2} - \frac{7\cdot 1}{2} = 10,$$
$$A_{\Delta BCP} = R(6,4) - D(3,1) - D(3,6) - D(3,4) = 6\cdot 4 - \frac{3\cdot 1}{2} - \frac{3\cdot 6}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} = \frac{15}{2},$$
$$A_{\Delta APC} = R(3,11) - D(1,7) - D(3,4) - D(2,11) = 3\cdot 11 - \frac{1\cdot 7}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot 11}{2} = \frac{25}{2}.$$

Lösungsvariante: Da die Eckpunkte der zu untersuchenden Dreiecke ganzzahlige Koordinaten haben, kann deren Flächeninhalt A mit Hilfe des Satzes von PICK durch Abzählen ganzzahliger Gitterpunkte bestimmt werden.

Es gilt $A = I + \frac{1}{2}\cdot R - 1$, wobei I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des jeweiligen Dreiecks bezeichnet. Für die Flächeninhalte erhalten wir so:

$$A_{\Delta ABP} = 8 + \frac{1}{2}\cdot 6 \; - 1 = 10\,,$$
$$A_{\Delta BCP} = 6 + \frac{1}{2}\cdot 5 \; - 1 = \frac{15}{2}\,,$$
$$A_{\Delta CAP} = 12 + \frac{1}{2}\cdot 3 \; - 1 = \frac{25}{2}\,.$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Aufgrund der Geradengleichung $f_{AC}(x) = y = -\frac{11}{2}\cdot x - \frac{25}{2}$ hat die dazu senkrecht stehende Gerade den Anstieg $m = \frac{2}{11}$, so dass wir den geforderten Abstand aus dem Schnittpunkt $S(x_s, y_s)$ von f_{AC}

und der Geraden $y = \frac{2}{11} \cdot x$ berechnen können. Aus $-\frac{11}{2} \cdot x_S - \frac{25}{2} = \frac{2}{11} \cdot x_S$ folgt $\frac{4+121}{22} \cdot x_S = -\frac{25}{2}$, also $x_S = -\frac{11}{5}$ und deshalb $y_S = -\frac{2}{11} \cdot \frac{11}{5} = -\frac{2}{5}$. Daraus berechnen wir den Abstand $|\overline{SP}| = \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{121+4}{25}} = \sqrt{5}$.

Lösungsvariante: Das Dreieck ΔCAP hat die Seitenlänge $|\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 5\sqrt{5}$ und nach Aufgabe a) den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$. Damit hat die Höhe zur Grundseite $\overline{AC}$ in diesem Teildreieck die Länge $h_{AC} = \sqrt{5}$. Das ist gerade der Abstand von P zu AC.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wir berechnen zunächst aus den Koordinaten der Dreieckspunkte die Längen der Dreiecksseiten:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + (1+7)^2} = 4 \cdot \sqrt{5}\,,$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (4-1)^2} = 3 \cdot \sqrt{5}\,,$$
$$]\overline{AC}[= \sqrt{(-3+1)^2 + (4+7)^2} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Nun können wir mittels der Flächenformel für allgemeine Dreiecke aus den (in Teilaufgabe a) berechneten) Flächeninhalten die Höhen von P auf den Dreiecksseiten ermitteln:

$$h_{AB} = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABP}}{|\overline{AP}|} = \frac{2 \cdot 10}{4 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,,$$
$$h_{BC} = \frac{2 \cdot A_{\Delta BCP}}{|\overline{BC}|} = \frac{2 \cdot \frac{15}{2}}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,,$$
$$h_{AC} = \frac{2 \cdot A_{\Delta APC}}{|\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot \frac{25}{2}}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,.$$

Der Punkt P hat also von den drei Dreiecksseiten jeweils den gleichen Abstand $\sqrt{5}$ und ist somit der Inkreismittelpunkt. Es gilt also $r = \sqrt{5}$.

Alternativ können wir r aus der Formel $A_{\Delta ABC} = r \cdot s$ bestimmt werden, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ΔABC ist:

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABP} + A_{\Delta BCP} + A_{\Delta APC} = 10 + \frac{15}{2} + \frac{25}{2} = 30\,.$$
$$s = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{AC}|) = \frac{4 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{5} + 5 \cdot \sqrt{5}}{2} = 6 \cdot \sqrt{5}\,.$$

Daraus erhalten wir $r = \frac{30}{6 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Um die geforderte Verhältnisgleichung nachzuweisen, berechnen wir abschließend die Abstände von P zu den Dreieckspunkten:

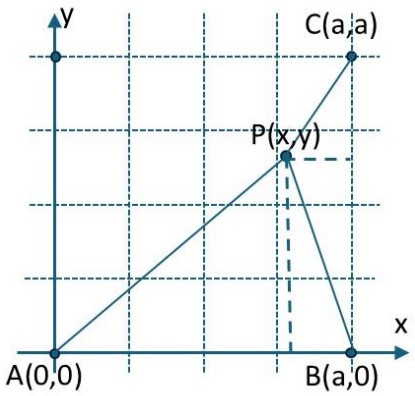
$$|\overline{AP}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5 \cdot \sqrt{2}\,,$$
$$|\overline{BP}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\,,$$
$$|\overline{CP}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,.$$

Wir setzen die ermittelten Werte in die Verhältnisgleichung ein:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{5} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{|\overline{BP}|}{r}$$

Aufgabe 31.21 – MO640935. Ein Punkt P habe zu den Eckpunkten eines Quadrats $ABCD$ die Abstände $|\overline{PA}| = 17$, $|\overline{PB}| = 11$ und $|\overline{PC}| = 5$.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Quadrats. Sollte dieser Flächeninhalt durch die Angaben nicht eindeutig bestimmt sein, so sind alle möglichen Antworten anzugeben.



Hinweis: Aufgrund der rechten Winkel in der Grundfigur (hier Quadrat) und der gegebenen Abstände von Punkten kann ein Lösungsansatz im Koordinatensystem erfolgreich sein, da sich Abstände leicht berechnen lassen (Euklidischer Abstand zwei Punkte). Insbesondere ersparen wir uns Fallunterscheidungen bzgl. der Lage des Punktes P zum Quadrat, die bei der Analyse von Teildreiecken ggf. berücksichtigt werden muss.

Lösungshinweise: In naheliegender Weise legen wir das Quadrat $ABCD$ achsenparallel in ein Koordinatensystem mit den Punkten $A(0{,}0)$ und $B(a, 0)$. Dann ist die Seitenlänge des Quadrates a und der Flächeninhalt $F = a^2$. Außerdem finden wir unmittelbar die Koordinaten der anderen zwei Eckpunkte: $C(a, a)$ und $D(0, a)$. Für den Punkt P wählen wir die Koordinaten $P(x, y)$. Mithilfe der gegebenen Abstände erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$(1) \quad |\overline{PA}|^2 = x^2 + y^2 = 17^2$$
$$(2) \quad |\overline{PB}|^2 = (a - x)^2 + y^2 = 11^2$$
$$(3) \quad |\overline{PC}|^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2 = 5^2$$

Wir stellen die Gleichung (2) nach x um und verwenden dabei die Gleichung (1).

$$a^2 - 2ax + \underbrace{x^2 + y^2}_{=289} = 121 \quad \Longrightarrow \quad (2') \qquad x = \frac{168 + a^2}{2a}$$

Nun stellen wir die Gleichung (3) nach y um und verwenden dabei die Gleichungen (1) und (2‘):

$$2a^2 \underbrace{-2ax}_{-168-a^2} + \underbrace{x^2+y^2}_{=289} - 2ay = 25 \quad \Longrightarrow \quad (3') \quad y = \frac{96+a^2}{2a}$$

Schließlich setzen wir (2‘) und (3‘) in die Gleichung (1) ein und erhalten:

$$(168+a^2)^2 + (96+a^2)^2 = 4 \cdot a^2 \cdot 289$$
$$2 \cdot a^4 + (2 \cdot 168 + 2 \cdot 96 - 1156) \cdot a^2 + 168^2 + 96^2 = 0$$
$$a^4 - 628 \cdot a^2 + 18720 = 0$$

Mit Hilfe der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden wir für $F = a^2$

$$F_{1,2} = 157 \pm \sqrt{157^2 - 18720} = 157 \pm \sqrt{5929} = 157 \pm 77$$

Somit gibt es zwei Lösungen, $F = 80$ und $F = 234$, die die gegebenen Bedingungen erfüllen. ❑

Ergänzung: Mit $F = 80$ erhalten wir $a = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5} \approx 8.94$ und damit $x = \frac{168+80}{8 \cdot \sqrt{5}} = \frac{31}{5} \cdot \sqrt{5} \approx 13.86$ bzw. $y = \frac{96+80}{8 \cdot \sqrt{5}} = \frac{22}{5} \cdot \sqrt{5} \approx 9.84$. Der Punkt P liegt folglich rechts der Seite $\overline{BC}$ und oberhalb der Seite $\overline{CD}$.

Mit $F = 234$ erhalten wir $a = \sqrt{234} = 3 \cdot \sqrt{26} \approx 15.30$ und damit $x = \frac{168+234}{´6 \cdot \sqrt{26}} = \frac{67}{26} \cdot \sqrt{26} \approx 8.17$ bzw. $y = \frac{96+234}{6 \cdot \sqrt{26}} = \frac{55}{26} \cdot \sqrt{26} \approx 10.79$. Der Punkt P liegt folglich im Inneren des Quadrates $ABCD$.

Lösungsvariante: In des Lösungshinweisen der Aufgabenkommission wird ausführlich die geschickte Wahl des Koordinatensystems diskutier. So basiert dort eine Lösungsidee auf der achsenparallelen symmetrischen Lage des Quadrates $ABCD$ zum Koordinatenursprung. Für einen geeigneten positiven Wert für q sind dabei die Koordinaten der Eckpunkte $A(-q,-q), B(-q,q), C(q,q), D(-q,q)$ sowie $P(x,y)$. Auch hier entsteht aus den gegebenen Abständen ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, dass zu der quadratischen Gleichung in F wie oben führt. Man löse zur Übung die Aufgabe mit diesem Ansatz!

Lösungsvariante: Für einen prinzipiell anderen Lösungsansatz (nämlich ohne ein achsenparallel festgelegtes Quadrat) legen wir ein Quadrat $ABCD$ mit dem Flächeninhalt F so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass B die Koordinaten (0, 0) und P die Koordinaten $(b, 0)$ erhält, wodurch $|\overline{PB}| = b$ gilt. Die Koordinaten von A bezeichnen wir mit (a_x, a_y). Das Lot von A auf die x-Achse schneide diese in $X(a_x, 0)$. Aufgrund des EUKLIDischen Abstandes der Punkte A und B ist die Bedingung für den Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ durch $F = a_x^2 + a_y^2$ gegeben. Weil der

Funktionsgraph durch A und B den Anstieg $\frac{a_y}{a_x}$ hat, liegt der Eckpunkt C des Quadrates auf dem Funktionsgraph mit der Gleichung $y = -\frac{a_x}{a_y} \cdot x$. Setzen wir die Koordinaten für C als $C(a_y, -a_x)$ fest, so liegt C wegen $-a_x = -\frac{a_x}{a_y} \cdot a_y$ auf dem Graph durch B und C und es ist die Gleichheit der Seitenlängen im Quadrat $ABCD$ wegen $|\overline{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_y^2 + (-a_x)^2} = |\overline{BC}|$ erfüllt. Das Lot von C auf die x-Achse schneide diese in $Y(a_y, 0)$.

Die Bedingung $|\overline{PA}| = a$ ist äquivalent zu $(b - a_x)^2 + a_y^2 = a^2$ (EUKLIDischer Abstand der Punkte $A(a_x, a_y)$ und $P(b, 0)$), also $b^2 - 2 \cdot b \cdot a_x + a_x^2 + a_y^2 = a^2$ und wegen $F = a_x^2 + a_y^2$ auch äquivalent zu $x = \frac{b^2+F-a^2}{2b}$. Mit ähnlicher Argumentation ist $|\overline{PC}| = c$ äquivalent zu $y = \frac{b^2+F-c^2}{2c}$.

Damit finden wir für die Quadratfläche die folgende Berechnungsformel

$$\left(\frac{b^2 + F - a^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + F - c^2}{2b}\right)^2 = F$$

Wir setzen die gegebenen Zahlenwerte ein und erhalten die in F quadratische Gleichung

$$(F - 168)^2 + (F + 96)^2 = 22^2 \cdot F$$

also

$$2 \cdot F^2 - 2 \cdot (168 - 96 + 242) + 168^2 + 96^2 = 0$$
$$F^2 - 314 \cdot F + 18720 = 0$$

Wir erhalten aus der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$F_{1,2} = 157 \pm \sqrt{5929} = 157 \pm 77.$$

Es sind also zwei verschiedene Lösungen mit $F_1 = 80$ und $F_2 = 234$ gefunden. ❑

Thema 9.4 – Summen von Quadratzahlen[7]

Aufgabe 9.21 – MO640936. Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sei mit $A(n)$ die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $A(1)$ und $A(2)$.
b) Bestimmen Sie weiterhin $A(2025)$ und $A(2026)$.

[7] siehe Thema 9.1 in Heft 09/2021, Thema 9.2 in Heft 11/2022 und Thema 9.3 in Heft 04/2024

Hinweise: Die nichtnegativen ganzen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, … Die verschiedenen Paare (6, 4) und (4, 6) sind beide keine Lösungen für $n = 3$, weil $6^2 + 4^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \neq 2 \cdot 3^3 = 54$ gilt.

Lösungshinweise: Sei (x, y) eine nichtnegative ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n$. Aus Symmetriegründen können wir zunächst $x \geq y$ annehmen. Daraus ergeben sich alle anderen Lösungen durch Vertauschen von x und y. Wegen $x^2 \leq x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n \leq 2 \cdot x^2$ muss $3^n \leq x^2 \leq 2 \cdot 3^n$ für eine Lösung der geforderten Gleichung mit $x \geq y$ gelten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):
Wir untersuchen $n = 1$: Für eine Lösung der Gleichung mit $x \geq y$ muss $3 \leq x^2 \leq 6$ und somit $x = 2$ gelten. Da aber $6 - 2^2 = 2$ keine Quadratzahl ist, führt dies zu keiner Lösung. Wir erhalten somit $A(1) = 0$.

Es sei nun $n = 2$: Für eine Lösung der Gleichung mit $x \geq y$ muss $9 \leq x^2 \leq 18$, also $x = 3$ oder $x = 4$ gelten. Für $x = 3$ ist (3, 3) wegen $3^2 + 3^2 = 18 = 2 \cdot 3^2$ eine Lösung. Für $x = 4$ erhalten wir für $y^2 = 2 \cdot 3^2 - 4^2 = 18 - 16 = 2$ keine Quadratzahl, also keine weitere Lösung. Insgesamt gilt damit $A(2) = 1$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Um eine Gesetzmäßigkeit für $A(n)$ zu finden, untersuchen wir weitere Fälle mit kleinen n.

Für $n = 3$ muss mit obiger Argumentation $3^3 = 27 \leq x^2 \leq 2 \cdot 3^3 = 54$ gelten, was nur für $x = 6$ oder 7 erfüllbar ist. Allerdings ist weder $2 \cdot 3^3 - 6^2 = 54 - 36 = 18$ noch $2 \cdot 3^3 - 7^2 = 54 - 49 = 5$ eine Quadratzahl. Wir finden also $A(3) = 0$. Damit liegt bereits die Vermutung nahe, es gilt $A(n) = 0$ für ungerade Zahlen n.

Sei also $n = 2 \cdot m + 1$. Dann können wir die Gleichung als $x^2 + y^2 = 6 \cdot z^2$ mit $z = 3^m$ schreiben. Da Quadratzahlen bei Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide Summanden durch 3 teilbar sind. Dann sind aber auch x und y beide durch 3 teilbar. Somit lässt sich auf der linken Seite der Primfaktor 3 in gerader Potenz ausklammern, während auf der rechten Seite der Primfaktor 3 in ungerader Potenz vorkommt. Es kann also keine Lösung geben und wir erhalten tatsächlich $A(n) = 0$ für ungerade Zahlen n.

Wir untersuchen $n = 4$: Mit der obigen Argumentation erhalten wir die Abschätzung $3^4 = 81 \leq x^2 \leq 2 \cdot 3^4 = 162$, was nur für $x = 9$, 10, 11 oder 12 erfüllbar sein kann. Wir prüfen jeweils die Eignung für eine Lösung:

- $2 \cdot 3^4 - 9^2 = 162 - 81 = 81$, d.h. $y = 9$.
- $2 \cdot 3^4 - 10^2 = 162 - 100 = 62$, d.h. keine Quadratzahl.
- $2 \cdot 3^4 - 11^2 = 162 - 121 = 41$, d.h. keine Quadratzahl.
- $2 \cdot 3^4 - 12^2 = 162 - 144 = 18$, d.h. keine Quadratzahl.

Es gilt also $A(4) = 1$ und wir vermuten $A(n) = 1$ für alle geraden Zahlen n. Es sei also $n = 2 \cdot m$. Dann können wir die Gleichung als $x^2 + y^2 = 2 \cdot z^2$ mit $z = 3^m$ schreiben. Offenbar ist $x = y = 3^m$ eine Lösung der Gleichung. Wir untersuchen nun die Lösbarkeit für $x \neq y$. Da Quadratzahlen bei Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide Summanden durch 3 teilbar sind. Dann sind aber auch x und y beide durch 3 teilbar. Somit enthalten x^2 den Primfaktor $2k_x$-mal und y^2 den Primfaktor $2k_y$-mal, wobei eine dieser Anzahlen kleiner als $2 \cdot m$ sein muss. Somit gibt es auf der linken Seite der Gleichung $2 \cdot min\{k_x, k_y\} < 2 \cdot m$ den Primfaktor 3. Es kann also keine weitere Lösung geben und wir finden tatsächlich $A(n) = 1$ für gerades n.

Damit haben wir $A(2025) = 0$ und $A(2026) = 1$ bewiesen. ❑

Aufgabe 9.22 – MO641036. Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sei mit $A(n)$ die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen (w, x, y, z) der Gleichung $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $A(0)$ und $A(1)$.
b) Bestimmen Sie weiterhin $A(2025)$ und $A(2026)$.

Hinweise: Die nichtnegativen ganzen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, … Die verschiedenen Tupel (0, 1, 2, 0) und (1, 0, 2, 0) sind beide keine Lösungen für $n = 0$, weil $0^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \neq 3 \cdot 2^0 = 3$ gilt.

Lösungshinweise: Sei (w, x, y, z) eine nichtnegative ganzzahlige Lösung der Gleichung $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$. Aus Symmetriegründen können wir zunächst $w \geq x \geq y \geq z$ annehmen. Daraus ergeben sich alle anderen Lösungen durch Vertauschen von w, x, y und z. Wegen $w^2 \leq w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n \leq 4 \cdot w^2$ muss $\frac{3}{4} \cdot 2^n \leq w^2 \leq 3 \cdot 2^n$ für eine Lösung der geforderten Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ gelten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir untersuchen $n = 0$. Für eine Lösung der Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ muss $\frac{3}{4} \leq w^2 \leq 3$ gelten, was nur durch $w = 1$ erfüllbar ist. Somit ist (1, 1, 1, 0) offensichtlich eine Lösung. Aus dieser Lösung erhalten wir durch Vertauschen genau vier verschiedene Lösungen, womit $A(0) = 4$ gilt.

Es sei nun $n = 1$. Für eine Lösung der Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ muss $\frac{3}{2} \leq w^2 \leq 6$ gelten, was nur durch $w = 2$ erfüllbar ist. Es ergibt sich (2, 1, 1, 0) als Lösung der Gleichung, woraus sich $A(1) = 4 \cdot 3 = 12$ berechnet, da die Zahl 2 auf alle vier Variablen und die Zahl 0 auf die verbleibenden 3 Variablen verteilt werden können.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Zunächst betrachten wir den Fall $n = 2$. Für eine Lösung der Gleichung mit $w \geq x \geq y \geq z$ muss $3 \leq w^2 \leq 12$ gelten, was nur durch $w = 2$ oder $w = 3$ erfüllbar ist. Es ergeben sich (2, 2, 2, 0) und (3, 1, 1, 1) als Lösungen, woraus sich $A(2) = 4 + 4 = 8$ berechnet.

Wir untersuchen nun $n \geq 3$. Für die Gleichung schreiben wir

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n = 3 \cdot 8 \cdot 2^{n-3}$$

Offenbar ist die rechte Seite für $n \geq 3$ stets durch 8 teilbar. Wir betrachten deshalb die Reste, die Quadratzahlen bei Division durch 8 lassen[8]:

- Das Quadrat einer geraden Zahl lässt bei Division durch 8 den Rest 0 oder 4.
- Das Quadrat einer ungeraden Zahl lässt bei Division durch 8 stets den Rest 1.

Für eine durch 8 teilbare (und damit geradzahlige) Summe $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ bedarf es einer geraden Anzahl ungerader Summanden.

- Sind alle vier Zahlen w, x, y und z ungerade, so lässt die Summe ihrer Quadratzahlen bei Division durch 8 den Rest 4. Es kann also in diesem Fall keine Lösung für $n \geq 3$ geben.
- Sind genau zwei der Zahlen w, x, y, z ungerade, so lässt die Summe ihrer Quadratzahlen bei Division durch 8 entweder den Rest 2 oder den Rest 6. Es gibt damit auch in diesem Fall keine ganzzahligen Lösungen, für die $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ durch 8 teilbar ist.
- Sind alle vier Zahlen w, x, y und z gerade, so gibt es eine größte Zweierpotenz 2^k, durch die alle vier Zahlen teilbar sind. Dann ist die Summe ihrer Quadratzahlen durch $2^{2 \cdot k}$ ohne Rest teilbar. Es gibt also Zahlen w_0, x_0, y_0 und z_0 (die nicht alle geradzahlig sind) mit der Eigenschaft (#) $w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 \cdot 2^{n-2 \cdot k}$.
    - Für $2 \cdot k = n$ ist (1, 1, 1, 0) eine Lösung für (#), die zur Lösung $(2^k, 2^k, 2^k, 0)$ mit $2^n + 2^n + 2^n = 3 \cdot 2^n$ führt, aus der wir durch Vertauschen 4 verschiedene Lösungen erhalten.
    - Für $2 \cdot k = n - 2$ ist (3, 1, 1, 1) eine Lösung für (#), die zur Lösung $(3 \cdot 2^{k-1}, 2^{k-1}, 2^{k-1}, 0)$ mit $9 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} = 12 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$ führt, aus der wir durch Vertauschen 4 verschiedene Lösungen erhalten.
    - Für $2 \cdot k = n - 2 \cdot m$ mit einer Zahl $m > 1$ gibt es keine Lösung zu (#), da auf der rechten Seite der geforderten Gleichung der Faktor 8 vorkommt, aber die Summe der Quadratzahlen eines Tupels mit mindestens einer ungeraden Zahl kann nicht durch 8 teilbar sein.
    - **Für eine gerade Zahl n gibt es folglich $A(n) = 4 + 4 = 8$ Lösungen.**

[8] s. Aufgabe 9.13

- Für $2 \cdot k = n - 1$ ist (2, 1, 1, 0) eine Lösung für (#), die zur Lösung $(2 \cdot 2^k, 2^k, 2^k, 0)$ mit $4 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$ führt, aus der wir durch Vertauschen 12 verschiedene Lösungen erhalten.
- Für $2 \cdot k = n - 2 \cdot m - 1$ mit einer Zahl $m > 1$ gibt es keine Lösung zu (#), da auf der rechten Seite der geforderten Gleichung der Faktor 8 vorkommt, aber die Summe der Quadratzahlen eines Tupels mit mindestens einer ungeraden Zahl kann nicht durch 8 teilbar sein.
- **Für eine ungerade Zahl n gibt es folglich $A(n) = 12$ Lösungen.**

Folglich erhalten wir $A(2025) = 12$ und $A(2026) = 8$. ❑

Aufgaben zur Untersuchung der Reste bei Division von Quadratzahlen waren in der MO schon frühzeitig vertreten.

Aufgabe 9.23 – MO370921. Beweisen Sie die folgende Aussage (a)!

a) Wenn eine Quadratzahl ungerade ist, dann lässt sie bei Division durch 8 den Rest 1.

Beweisen Sie auch die folgende Aussage (b)!

b) Wenn eine Quadratzahl ungerade, aber nicht durch 3 teilbar ist, dann lässt sie bei Division durch 24 den Rest 1.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es sei q eine Quadratzahl, d.h. das Quadrat $q = n^2$ einer natürlichen Zahl n. Wenn q ungerade ist, ist auch n ungerade (denn wäre n gerade, so wäre auch $n^2 = q$ gerade). Also können wir $n = 2 \cdot k + 1$ mit geeigneter natürlicher Zahl k schreiben. Daraus folgt:

$$q^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 = 4 \cdot k \cdot (k + 1) + 1.$$

Da von den aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k + 1$ eine Zahl gerade ist, ist $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$ eine ganze Zahl. Somit finden wir wie behauptet $q = 8 \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2} + 1$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es sei q eine Quadratzahl der geforderten Art, dann gibt es eine Zahl k mit $q = n^2 = (6 \cdot k \pm 1)^2$, da n^2 und damit auch n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. Multiplizieren wir das Quadrat aus, erhalten wir

$$q = 36 \cdot k^2 \pm 12 \cdot k + 1 = 12 \cdot k \cdot (3 \cdot k \pm 1) + 1$$

Das Produkt $k \cdot (3 \cdot k \pm 1)$ ist geradzahlig, denn entweder ist k bereits gerade oder - falls k ungerade ist- ist $3 \cdot k$ ungerade und somit $3 \cdot k \pm 1$ gerade. Damit finden wir wie behauptet $q = \underbrace{12 \cdot 2}_{=24} \cdot \frac{k \cdot (3 \cdot k \pm 1)}{2} + 1$. ❑

Aufgabe 9.24 – MO400941/MO401021.

a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4 \cdot k$ oder von der Form $8 \cdot k + 1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.

b) Gibt es eine n-stellige Quadartzahl mit $n > 1$, die aus lauter gleichen Ziffern besteht? Beweisen Sie Ihre Antwort.,

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Für jede natürliche Zahl a trifft einer der folgenden Fälle zu:

1. a ist von der Form $a = 2 \cdot m$ mit einer natürlichen Zahl m. Dann gilt $a^2 = 4 \cdot m^2$, mit $k = m^2$ also $a^2 = 4 \cdot k$.
2. a ist von der Form $a = 2 \cdot m + 1$ mit einer natürlichen Zahl m. Dann gilt $a^2 = 4 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 1 = 4 \cdot m \cdot (m + 1) + 1$. Da eine der aufeinanderfolgenden Zahlen m und $m + 1$ geradzahlig sein muss, ist $k = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$ eine ganze Zahl, also $a^2 = 8 \cdot k + 1$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Ist a^2 eine Quadratzahl aus n lauter gleichen Ziffern x, so gilt

$$a^2 = x \cdot (10^{n-1} + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1).$$

Offenbar ist $x \neq 0$, da 0 zu keiner mehrstelligen Quadratzahl führt. Da es keine zweistellige Quadratzahl aus zwei gleichen Ziffern gibt, muss $n > 2$ gelten. Deshalb können wir a^2 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} a^2 &= x \cdot (100 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) + 11) \\ &= 4 \cdot x \cdot \big((25 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) + 3) - 1\big) = 4 \cdot m - x \end{aligned}$$

mit geeigneter ganzer Zahl m. Nach den Ergebnissen aus der Teilaufgabe a) untersuchen wir nun die zwei möglichen Fälle:

1. a ist gerade und mit einer natürlichen Zahl k gilt: $4 \cdot m - x = 4 \cdot k$. Dann ist x durch 4 teilbar und kann deshalb nur 4 oder 8 sein. x ist aber die Einerziffer der Quadratzahl einer geraden Zahl a (auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endend), so dass nur 0, 4, 6, 6, 4 möglich ist. Also müsste $x = 4$ sein. Dann wäre aber auch $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \underbrace{11 \ldots 1}_{n-mal}$ eine Quadratzahl. Dafür untersuchen wir den Fall
2. a ist ungerade und mit einer natürlichen Zahl k gilt: $4 \cdot m - x = 8 \cdot k + 1$. Wegen $x = 4(m - 2k) - 1$ kann x nur 3 oder 7 sein. x ist aber die Einerziffer der Quadratzahl einer ungeraden Zahl a (auf 1, 3, 5, 7 oder 9 endend), so dass nur 1, 9, 5, 9, 1 möglich ist. Der Fall einer ungeraden Zahl a ist also nicht möglich.

Aufgabe 9.25 – MO050931. Beweisen Sie die folgende Behauptung! Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Lösungshinweise: Sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar). n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als $n = 3 \cdot m + 1$ oder $n = 3 \cdot m + 2$ mit passend gewählter ganzzahliger Zahl m. Dann ist

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$$

oder

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1.$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1. ❑

Aufgabe 9.26 – MO280931. Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Lösungshinweise: Sind a und b nicht durch 5 teilbar, lassen sie aber wegen

$$(5k \pm 1)^2 = 25 \cdot k^2 \pm 10 \cdot k + 1$$
$$(5k \pm 2)^2 = 25 \cdot k^2 \pm 20 \cdot k + 4$$

beide die Reste 1 oder 4 bei der Division durch 5. Damit lässt $a^2 + b^2$ also einen der Reste 1 + 1 = 2, 1 + 4 = 4 + 1 = 5 (also 0) oder 4 + 4 = 8 (also 3) bei der Division durch 5. Da aber auch c^2 als Quadratzahl nur einen der Reste 0, 1 oder 4 bei der Division durch 5 lassen kann, fallen der erste und der letzte Fall für den Rest der Summe $a^2 + b^2$ weg und $a^2 + b^2 = c^2$ muss durch 5 teilbar sein. ❑

Aufgabe 9.27 – MO630932. Wie viele Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen gibt es, die das System von Ungleichungen

$$(x + y - z)^2 < 50$$
$$(y + z - x)^2 < 140$$
$$(z + x - y)^2 < 180$$

erfüllen?

Lösungshinweise: Sei (x, y, z) eine Lösung des Ungleichungssystems in ganzen Zahlen. Setzen wir $a = y + z - x$, $b = z + x - y$ und $c = x + y - z$, so gilt $|a| \leq 11$, $|b| \leq 13$ und $|c| \leq 7$. Außerdem sind $a + b = 2 \cdot z$, $b + c = 2 \cdot x$ und $c + a = 2 \cdot y$ gerade ganze Zahlen, und daher haben a, b und c die gleiche Parität.

Sind umgekehrt drei ganze Zahlen a, b, c gleicher Parität gegeben, für die $|a| \leq 11$, $|b| \leq 13$ und $|c| \leq 7$ gilt, so sind die Zahlen $x = \frac{1}{2} \cdot (b + c)$, $y = \frac{1}{2} \cdot (c + a)$, $z = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$ ganz und erfüllen die Bedingung der Aufgabenstellung. Die gesuchte

Anzahl ist also gleich der Anzahl aller Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen gleicher Parität, für die $|a| \leq 11$, $|b| \leq 13$ und $|c| \leq 7$ gilt.

Fall 1: a, b und c sind ungerade. Für a gibt es die 12 Möglichkeiten {±1, ±3, ±5, ±7, ±9, ±11}, für b die 14 Möglichkeiten {±1, ±3, ±5, ±7, ±9, ±11, ±13} und für c die 8 Möglichkeiten {±1, ±3, ±5, ±7}. Insgesamt gibt es also $12 \cdot 14 \cdot 8 = 1344$ solche Tripel.

Fall 2: a, b und c sind gerade. Für a gibt es die 11 Möglichkeiten {0, ±2, ±4, ±6, ±8, ±10}, für b die 13 Möglichkeiten {0, ±2, ±4, ±6, ±8, ±10, ±12} und für c die 7 Möglichkeiten {0, ±2, ±4, ±6}. Insgesamt gibt es also $11 \cdot 13 \cdot 7 = 1001$ solche Tripel.

Zusammen macht das 1344 + 1001 = 2345 Lösungstripel. ❑

Ein Vergleich der Lösungsmengen über die möglichen Reste bei Quadratzahlen gelingt auch bei den aktuellen Aufgaben**.**

Lösungsvariante zu MO640936: Wir bezeichnen mit $G(n)$ die Gleichung der Form $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3^n$ für $n \geq 2$. Es sei (x_n, y_n) eine Lösung der Gleichung $G(n)$. Da Quadratzahlen bei Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur dann durch 3 teilbar, wenn beide Summanden durch 3 teilbar sind. Dann sind aber auch x und y beide durch 3 teilbar und somit x^2 und y^2 durch 9 teilbar. Somit erhalten wir für $x_{n-2} = \frac{1}{3} \cdot x_n$ und $y_{n-2} = \frac{1}{3} \cdot y_n$ mit $x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2 = \frac{1}{9} \cdot x_n^2 + \frac{1}{9} \cdot y_n^2 = \frac{2 \cdot 3^n}{9} = 2 \cdot 3^{n-2}$ ein Lösungspaar für die Gleichung $G(n-2)$. Umgekehrt existiert auch für jedes Lösungspaar (x_{n-2}, y_{n-2}) der Gleichung $G(n-2)$ mit $(x_n, y_n) = (3 \cdot x_{n-2}, 3 \cdot y_{n-2})$ ein Lösungspaar der Gleichung $G(n)$. Somit stimmen die Anzahlen der Lösungen der Gleichungen $G(n-2)$ und $G(n)$ für $n \geq 2$ überein.

Insbesondere gilt damit $A(2025) = A(1) = 0$ und $A(2026) = A(2) = 1$. ❑

Lösungsvariante zu MO641036: Wir bezeichnen mit $G(n)$ die Gleichung der Form $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$ für $n \geq 3$. Es sei (w_n, x_n, y_n, z_n) eine Lösung der Gleichung $G(n)$. Da Quadratzahlen bei Division durch 8 nur die Reste 0, 4 oder 1 lassen, ist die Summe von vier Quadratzahlen nur dann durch 8 teilbar, wenn alle Summanden durch 2 teilbar sind. Dann sind aber auch w, x, y und z durch 2 teilbar und somit w^2, x^2, y^2 und z^2 durch 4 teilbar. Somit erhalten wir für $w_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot w_n, x_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot x_n, y_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot y_n$ und $z_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot z_n$mit

$$w_{n-2}^2 + x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2 + z_{n-2}^2 = \frac{1}{4} \cdot w_n^2 + \frac{1}{4} \cdot x_n^2 + \frac{1}{4} \cdot y_n^2 + \frac{1}{4} \cdot z_n^2 = \frac{3 \cdot 2^n}{4} = 4 \cdot 3^{n-2}$$

ein Lösungstupel für die Gleichung $G(n-2)$. Umgekehrt existiert auch für jedes Lösungstupel $(w_{n-2}, x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$ der Gleichung $G(n-2)$ mit $(w_n, x_n, y_n, z_n) = (2 \cdot w_{n-2}, 2 \cdot x_{n-2}, 2 \cdot y_{n-2}, 2 \cdot z_{n-2})$ ein Lösungstupel der Gleichung $G(n)$. Somit

stimmen die Anzahlen der Lösungen der Gleichungen $G(n-2)$ und $G(n)$ für $n \geq 2$ überein.

Insbesondere gilt damit $A(2025) = A(1) = 12$ und $A(2026) = A(2) = 8$. ❑

14. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen

Vom 11. bis 17. April 2025 fand in Prishtina (Kosovo) die europäische Mathematik-Olympiade (European Girl's Mathematical Olympiad – EGMO) für junge Frauen statt. Obwohl die 1. EGMO in Cambridge (UK, 2012) als europäischer Wettbewerb ausgeschrieben war, nahmen bereits drei nicht-europäische Teams teil. In diesem Jahr stellten sich 56 Teams mit 219 Teilnehmerinnen dem Wettbewerb, darunter 135 aus 36 europäischen Ländern.

Die vier talentiertesten Nachwuchsmathematikerinnen aus den bundesweiten Mathematik-Wettbewerben nahmen als deutsche Delegation sehr erfolgreich teil – sie erreichten eine Gold-, zwei Silber- und eine Bronzemedaille. Insgesamt wurden 27 Mal Gold vergeben (12.3% aller Teilnehmerinnen, mindestens 27 Punkte), 38 Mal Silber (17.4%, mindestens 20 Punkte) und 53 Mal Bronze (24.2%, mindestens 15 Punkte) vergeben, so dass 118 der 219 Starterinnen (53.8%, darunter 71 von 135 Europäerinnen, 52.6%).

Die Ausrichtung der EGMO orientiert sich an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Es werden zwei Klausuren (4½ Stunden) mit je drei Aufgaben geschrieben. Pro Aufgabe werden maximal sieben Punkte ergeben (gesamt 42 Punkte). Die deutschen Teilnehmerinnen qualifizierten sich über das Auswahlverfahren zu IMO. Die Teamstärke ist auf vier begrenzt.

Für die Länderwertung werden die erreichten Punktzahlen der vier Teilnehmerinnen addiert, so dass maximal 168 Punkte möglich sind. Mit 96 Punkten nahm Deutschland den 6. Platz ein. Angeführt wird die Länderliste von der Volksrepublik China (134 Punkte, 3 Gold-, 1 Silbermedaille), den USA (123 Punkte, 4 Goldmedaillen) und Australien (115 Punkte, 3 Gold-, 1 Silbermedaille). Die nächsten Plätze belegten Italien und Polen, so dass Deutschland den dritten Platz unter den europäischen Ländern schaffte – das bisher beste Ergebnis eines deutschen Teams!

Die 15. EGMO wird im April 2026 in Bordeaux (Frankreich) stattfinden.

Aufgaben der 14. EGMO

Hinweis zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben: Jedes Team aus vier Teilnehmerinnen konnte pro Aufgabe 28 Punkte erreichen.

Durchschnittlich erreichte Punktzahl pro Team	Gesamt	Top Ten	Deutschland
Aufgabe 1	21.8	27.0	28.0
Aufgabe 2	8.0	19.9	21.0
Aufgabe 3	2.5	9.3	7.0
Aufgabe 4	19.1	25.7	16.0
Aufgabe 5	9.5	18.2	20.0
Aufgabe 6	1.2	4.7	4.0

Aufgabe 1. Für eine positive ganze Zahl N seien $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ alle positiven ganzen Zahlen kleiner als N, die teilerfremd zu N sind. Bestimme alle $N \geq 3$, sodass $ggT(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$ für alle $1 \leq i \leq m-1$.

Hier sei $ggT(a,b)$ die größte positive ganze Zahl, die sowohl a als auch b teilt. Zahlen a und b sind teilerfremd, falls $ggT(a,b) = 1$.

Aufgabe 2. Eine unendliche, aufsteigende Folge $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ positiver ganzer Zahlen heiße *zentral*, wenn für jede positive ganze Zahl n das arithmetische Mittel der ersten a_n Folgenglieder gleich a_n ist.

Zeige, dass es eine unendliche Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiver ganzer Zahlen gibt, sodass für jede zentrale Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unendlich viele positive ganze Zahlen n mit $a_n = b_n$ existieren.

Aufgabe 3. Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Punkte B, D, E und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, sodass $BD = DE = EC$ gilt. Seien M beziehungsweise N die Mittelpunkte der Strecke $\overline{AD}$ beziehungsweise $\overline{AE}$. Angenommen das Dreieck ΔADE ist spitzwinklig. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ΔADE. Seien P und Q Punkte auf den Geraden BM beziehungsweise CN, sodass D, H, M, und P auf einem Kreis liegen und paarweise verschieden sind, beziehungsweise sodass E, H, N, und Q auf einem Kreis liegen und paarweise verschieden sind.

Zeige, dass P, Q, N und M auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 4. Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und Inkreismittelpunkt I. Die Geraden BI und CI schneiden den Umkreis von ΔABC in $P \neq B$ beziehungsweise $Q \neq C$. Seien die Punkte R und S so gewählt, dass $AQRB$ und $ACSP$ Parallelogramme sind (mit $AQ \parallel RB, AB \parallel QR, AC \parallel SP$ und $AP \parallel CS$). Sei T der Schnittpunkt der Geraden RB und SC.

Zeige, dass die Punkte R, S, T und I auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 5. Sei $n > 1$ eine ganze Zahl. In einer *Konfiguration* eines $n \times n$ −Bretts enthält jedes der n^2 Felder einen Pfeil, der entweder nach oben, unten, links oder rechts zeigt. Für eine gegebene Start-Konfiguration startet die Schnecke Turbo in

einem der Felder des Bretts und bewegt sich von Feld zu Feld. In jedem Schritt bewegt sich Turbo in die Richtung des Pfeils, auf dem sie steht, genau ein Feld weit (wobei sie möglicherweise das Brett verlässt). Nach jedem Schritt drehen sich die Pfeile in allen Feldern um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Wir nennen ein Feld *gut*, wenn Turbo auf diesem Feld beginnend jedes Feld genau einmal besucht und dann auf ihrem Startfeld endet, ohne dabei das Brett zu verlassen.

Bestimme in Abhängigkeit von n die maximale Anzahl guter Felder unter allen möglichen Start-Konfigurationen.

Aufgabe 6. In jedem Feld eines 20252025Bretts steht eine nicht-negative reelle Zahl, sodass die Summe der Zahlen in jeder Reihe gleich 1 ist und die Summe der Zahlen in jeder Spalte gleich 1 ist.

Sei r_i die größte Zahl in Reihe i, und sei $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Analog sei c_i die größte Zahl in Spalte i und sei $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.

Was ist der größtmögliche Wert von $\frac{R}{C}$?

In alten Mathe-Büchern geblättert.

Der Vier-Quadrate-Satz (auch Satz von LAGRANGE) besagt, dass jede natürliche Zahl als ***Summe von vier Quadraten*** geschrieben werden kann[9]. Diese Aussage wurde schon 1621 von CLAUDE GASPARD BACHET DE MÉZIRIAC (1581 – 1638) vermutet und 1770 von JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE (1736 – 1813) bewiesen. Jede positive ganze Zahl lässt sich als ***Summe von höchstens neun ganzen Kubikzahlen*** darstellen[10]. Diese Aussage wurde erstmals 1770 von EDWARD WARING (1736 – 1798) vermutet und 1912 von ARTHUR JOSEF ALWIN WIEFERICH (1884 – 1954) bewiesen. Bereits 1909 hat DAVID HILBERT (1862 – 1943) das allgemeine WARINGsche Problem bewiesen, dass nämlich zu jedem natürlichen Exponenten k eine natürliche Zahl $g(k)$ existiert, dass jede Zahl n als Summe von höchstens $g(k)$ k-ten Potenzen dargestellt werden kann. Dabei sind die kleinsten Zahlen $g(k)$ gesucht. Auf dem schwierigen Weg zum Minimum im Fall $k = 4$ ist folgender Beitrag interessant.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

[9] Diese Aussage kann nicht verschärft werden, denn alle Zahlen der Form $4^a \cdot (8 \cdot b + 3)$ lassen sich nicht als Summe dreier Quadratzahlen darstellen.

[10] Auch diese Aussage kann nicht verschärft werden, denn für die Zahlen $29 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8$ und $239 = 1 + 8 + 8 + 8 + 8 + 27 + 27 + 27 + 125$ sind neun Kubikzahlen erforderlich.

gegenwärtig herausgegeben von

Felix Klein	Walther v. Dyck	David Hilbert	Otto Blumenthal
in Göttingen	in München	in Göttingen	in Aachen

66. Band 1. Heft

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B.G.TEUBNER
1908

Seite 105 ff.

Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten

von
Arthur Wieferich in Münster i/W.

Anknüpfend an die Abhandlung des Herrn E. Landau „Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten in den „Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo“, Bd. 23 (1907), p. 91-96 soll im vorliegenden nachgewiesen werden, daß sich eine jede ganz Zahl als Summe von 37 Biquadraten darstellen lässt.
Liouville hat zuerst bewiesen, dass sich eine jede Zahl additiv in 53 Biquadrate zerlegen lässt. Diese Zahl wurde von Realis auf 47, von Lucas auf 45, resp. 41 und von Herrn Fleck auf 39 reduziert. Herr E. Landau hat sodann in der oben zitierten Arbeit die Zerlegbarkeit in 38 Biquadrate nachgewiesen.

1.

Herr Landau hat für jede der 48 Restklassen modulo 48 die geringste Anzahl der Zerlegung hinreichenden Biquadrate angegeben. Bezeichnet B_i diese Zahl, so hat er gefunden, daß alle Restklassen mit Ausnahme von $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ sich als Summe von höchstens 37 Biquadraten darstellen lassen. Er setzte diese nun folgendermaßen zusammen:

$$48n + 11 = (48n + 9) + 1^4 + 1^4$$
$$48n + 27 = (48n + 25) + 1^4 + 1^4$$
$$48n + 43 = (48(n - 1) + 9) + 1^4 + 3^4$$

und erhielt so, da er $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich B_{36} bestimmt hatte, eben die drei Klassen gleich B_{38}. Kann demnach gezeigt werden, daß sowohl $48n + 9$ wie $48n + 25$ gleich B_{35} ist, so wäre beweisen, daß obige drei Klassen gleich B_{37} sind, d.h. daß eine jede Zahl in 37 Biquadrate zerlegbar ist.

2.

Es sei zunächst

$$24N_i = 48n + 9 - (6\varepsilon_i + 3)^4 = 24\,[2n - 54\varepsilon_i^4 - 108\varepsilon_i^3 - 81\varepsilon_i^2 - 27\varepsilon_i - 3],$$

wo ε_i der Reihe nach gleich 0, 1, …, 7 sein möge. Es ergeben sich dann leicht folgende Kongruenzen:

$N_0 \equiv 2n + 13$, $N_1 \equiv 2n + 15$, $N_2 \equiv 2n + 3$,
$N_3 \equiv 2n + 9$, $N_4 \equiv 2n + 1$, $N_5 \equiv 2n + 11$ (mod. 16)
$N_6 \equiv 2n + 7$, $N_7 \equiv 2n + 5$,

aus denen sofort folgt, daß für eine der Zahlen ε_i N_i die Form $16n_1 + 13$ haben muss. Ich kann also stets $\varepsilon_i = 0, 1, \ldots, 7$ so bestimmen, daß

$$48n + 9 = (6\varepsilon_i + 3)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

3.

Ebenso erhält man, falls man:

$$24N_i = 48n + 25 - (6\varepsilon_i + 3)^4 = 24[2n - 54\varepsilon_i^4 - 36\varepsilon_i^3 - 9\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i + 1],$$

setzt, die Kongruenzen

$$\begin{array}{lll} N_0 \equiv 2n + 1, & N_1 \equiv 2n + 13, & N_{-1} \equiv 2n + 7, \\ N_2 \equiv 2n + 11, & N_{-2} \equiv 2n + 15, & N_{-3} \equiv 2n + 9, \text{ (mod. 16)} \\ N_{-4} \equiv 2n + 5, & N_{-5} \equiv 2n + 3, & \end{array}$$

d.h. für eine der Zahlen $\varepsilon_i = 0, \pm1, \pm2, -3, -4, -5$ muss N_i die Form $16n_1 + 13$ annehmen. Ich kann demnach durch geeignete Wahl von ε_i bewirken, daß

$$48n + 25 = (6\varepsilon_i+1)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

4.

Wie leicht zu verifizieren, kann nun eine Zahl $16n_1 + 13$ nur auf folgende Weise als Summe dreier Quadrate dargestellt werden:

$$16n_1 + 13 = (4x)^2 + (8y \pm 2)^2 + (8z \pm 3)^2.$$

Es wird also

$$24(16n_1 + 13) = 6(8x)^2 + 6 \cdot 2^4 \cdot (4y \pm 1)^2 + 24(8z \pm 3)^2.$$

Nun ist, wie Herr Landau zeigte: $6 \cdot 2^4 \cdot (4y \pm 1)^2 = B_{11}$. Ferner folgt aus der Identität:

$$\begin{aligned} 24(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 = {} & 2(z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(-z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 - z_2 + z_3)^4 \\ & + 2(z_1 + z_2 - z_3)^4 + (2z_1)^4 + (2z_2)^4 + (2z_3)^4, \end{aligned}$$

daß auch $24(8z \pm 3)^2 = B_{11}$ ist. Da bekanntlich $6m^2 = B_{12}$ ist, ergibt sich

$$24\,(16n_1 + 13) = B_{34}.$$

5.

Es ist also jede der Formen $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich B_{35} und demnach eine jede Zahl der Restklassen $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ als Summe von 37 Biquadraten darstellbar, falls diese Zahl $> 45^4$ ist, da 45^4 das größte von $48n + 9$ abzusondernde Biquadrat ist. Es lässt sich nun leicht zeigen, daß auch jede Zahl $< 45^4$ gleich B_{37} ist. Subtrahiert man nämlich von einer Zahl $< 45^4$ das größte sie nicht übertreffende Biquadrat, so findet man, daß die Differenz $< 45^4 - 44^4 = 352\,529$ ist; ferner, daß ihr Übermaß über das größte sie nicht übertreffende Biquadrat $< 24^4 - 23^4 = 51\,935$ ist. Da nun, wie schon Herr Landau zeigte, jede Zahl $< 21^4$ gleich B_{26} ist, ergibt sich leicht, daß jede Zahl $< 45^4$ gleich B_{28}, d.h. sicher gleich B_{37} wird. Hiermit ist also allgemein bewiesen, daß alle Zahlen sich als Summen von 37 Biquadraten darstellen lassen. Sehr viel weitergehenden Reduzierungen dürften sich jedoch aus den bisher benutzten Identitäten kaum mehr ergeben.

Hinweis: Mit seinem letzten Satz irrte sich ARTHUR WEIFERING jedoch. Im Jahr 1986 veröffentlichten RAMACHANDRAN BALASUBRAMANIAN (geb. 1951), FRANÇOIS DRESS (geb. 1967) und JEAN-MARC DESHOUILLERS (geb. 1946) den Beweis für $g(4) = 19$.

Monatsaufgabe 05/2025[11]

Auf einer Tafel stehen $n \geq 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-degenerierten (d.h. nicht-entarteten) und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a + b - c$, $b + c - a$ und $c + a - b$ zu ersetzen.

Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 03/2025

Aufgabe I-3 (Individualwettbewerb der 17. MeMO, 2023, Strečno, Slowakei).
Sei ΔABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis ω von ΔABC berühre die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D. Wir bezeichnen mit E und F diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $|\sphericalangle BEI| = |\sphericalangle CFI| = 90°$ gelten. Die Geraden DE und DF schneiden ω jeweils ein weiteres Mal in den Punkten E' bzw. F'.

Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit B‘ den Fußpunkt des Lotes von I auf AC und mit C‘ den Fußpunkt des Lotes von I auf AB. Betrachten wir das Viereck $DCB'I$, so ist dies wegen $|\sphericalangle CDI| + |\sphericalangle IB'C| = 90° + 90° = 180°$ ein Sehnenviereck. Deshalb liegen diese vier Punkte auf einem Kreis. Betrachten wir das Viereck $DCFI$, so ist dies wegen $|\sphericalangle CDI| + |\sphericalangle IFC| = 90° + 90° = 180°$ ebenfalls ein Sehnenviereck. Deshalb liegen auch diese vier Punkte auf einem Kreis. Da ein Kreis aber bereits durch drei Punkte (hier D, C und I) festgelegt ist, liegen auch C, F, B‘ und D auf einem Kreis, den wir mit K bezeichnen.

- Es gilt $|\sphericalangle F'IB'| = 2 \cdot |\sphericalangle F'DB'|$ (Zentriwinkel und Peripheriewinkel im Umkreis des Dreiecks ΔABC über der Sehne $\overline{F'B'}$).
- Weiter gilt $\sphericalangle F'DB' = \sphericalangle FDB'$ (die Geraden durch F‘ und D sowie durch F und D fallen aufeinander).
- Außerdem finden wir $|\sphericalangle FDB'| = |\sphericalangle FCB'|$ (Peripheriewinkel im Kreis K über der Sehne $\overline{FB'}$).
- Aufgrund der Parallelität von AI und CF gilt aber auch $|\sphericalangle FCB'| = |\sphericalangle IAC|$ (Wechselwinkel).

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.06.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

- Schließlich erkennen wir noch $2 \cdot |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle BAC|$ (weil AI die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist).

Insgesamt folgt daraus $|\sphericalangle F'IB'| = |\sphericalangle BAC|$.

Laut Voraussetzungen ist $|\sphericalangle FIA| = 90°$, also ergibt sich

$$|\sphericalangle FIB'| = 90° - |\sphericalangle AIB'| = |\sphericalangle IAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|.$$

Zusammengefasst finden wir

$$|\sphericalangle F'IF| = |\sphericalangle F'IB'| - |\sphericalangle FIB'| = |\sphericalangle BAC| - \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|.$$

Mit ähnlicher Argumentation finden wir mit Hilfe des Punktes C' die Gleichung $|\sphericalangle E'IE| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|$. Also ist die Gerade EIF eine äußere Winkelhalbierende im Dreieck $\Delta E'IF'$. Da $AI \perp EF$ ist, ist die Gerade AI eine innere Winkelhalbierende im Dreieck $\Delta E'IF'$. Aber das Dreieck $\Delta E'IF'$ ist gleichschenklig, also ist die Gerade AI auch eine Höhe, also gilt wie behauptet $AI \perp E'F'$. ❑

Termine

Wettbewerb „Jugend forscht“, Bundeswettbewerb, 29.05. bis 01.06.2025 an der Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg (https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2025.html)

64. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde, 23. bis 26.05.2025, Universitätsstadt Göttingen (https://mo2025.de)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 31.3 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem 3
Thema 9.4 – Summen von Quadratzahlen 10
14. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen 18
In alten Mathe-Büchern geblättert. 20
Monatsaufgabe 05/2025 23
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 03/2025 23
Termine 24

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[12]	Nr.	Thema	Aufgabe
05/2025 (Mai)	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641032 MO640935 MO640932
05/2025 (Mai)	Thema 9.4	Summen von Quadraten	MO641036 MO640936
04/2025 (Apr.)	Thema 31.2	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641013 MO611023
03/2025 (März)	Thema 31.1	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922 MO621033
03/2025 (März)	Thema 25.2	Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

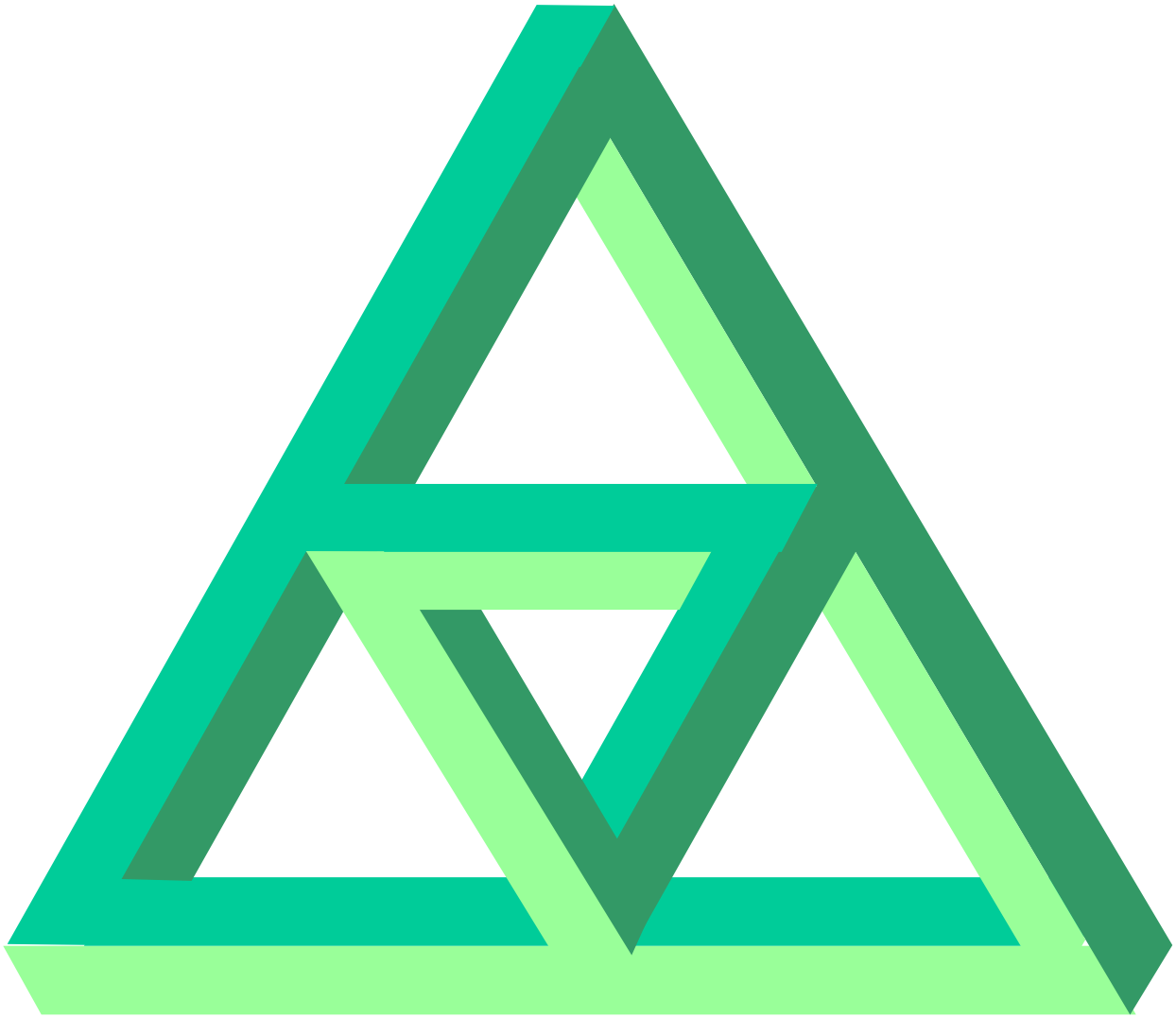
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06+07/2025 (Juni/Juli 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den Aufgaben **MO640933/MO641033** eröffnen wir ein neues Thema zu „Spielen im Wettbewerb“. Wir betrachten dazu in diesem Heft Spiele, für die die Erhaltung von symmetrischen Spielsituationen zu Gewinnstrategien führen. In Heimarbeit wie in der 1. Runde des diesjährigen Bundeswettbewerb Mathematik (Aufgabe 4) lassen sich solche Aufgaben günstig in Gruppenarbeit „erspielen“. Wenn auch für eine Klausuraufgabe diese Möglichkeit entfällt, so kann die Analyse für kleine n zum Ziel führen.

Wir beenden das Schuljahr mit dem neuen Thema 33 „Rationale Zahlen“ und zeigen an einem Beispiel in der MO-Geschichte, wie kompliziert erscheinende Aufgabenstellungen durch vorangestellte hinführende Aufgaben zu bewältigen waren. Auf diese Weise motiviert diese Aufgabenfamilie zur intensiven Nachbereitung der Olympiaden-Runden. Im historischen Rückblick zeigen wir aus EUKLIDS „Elemente“ (aus der deutschen Übersetzung von 1781), wie er die Begriffe „rational“ und „irrational“ in Länge und Quadrat diskutiert.

Wir blicken auf die **Bundesrunde der 64. MO** zurück und freuen uns über das erfolgreiche Abschneiden des sächsischen Teams. Wir fassen die Ergebnisse des **7. Tags der Mathematik** der TU Chemnitz zusammen. Schließlich verweisen wir auf die **19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade**, die Ende August in Chemnitz stattfinden wird.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 32 – Zug um Zug: Spiele im Wettbewerb

Aufgabe 32.01 – MO640933/MO641033. Anton und Berta spielen ein Spiel: Es liegt zu Spielbeginn ein Haufen mit 2025 Steinen auf dem Tisch. Ein Zug besteht darin, einen Haufen auf dem Tisch zu wählen und diesen in zwei oder drei Haufen zu zerlegen, wobei jeder neue Haufen mindestens einen Stein enthalten muss. Wenn nur noch Haufen mit einem Stein auf dem Tisch liegen, hat der Spieler, der am Zug ist, verloren und der andere gewonnen. Anton beginnt.

a) Zeigen Sie, dass das Spiel irgendwann enden muss.
b) Kann einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen? Falls ja, wer? Die Antwort ist zu begründen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): In jedem Zug nimmt die Zahl der Haufen um eins oder zwei zu. Spätestens nach 2024 Zügen sind also mindestens 2025 Haufen auf dem Tisch, welche somit alles Einer-Haufen sein müssen. Daher muss das Spiel enden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Anton hat eine Gewinnstrategie. Er beginnt damit, den Haufen mit 2025 Steinen in zwei Haufen zu je 1012 Steinen und einen Haufen mit einem Stein zu zerlegen. Der Haufen mit einem Stein kann nicht mehr für einen Zug gewählt werden. Anton teilt (gedanklich) die neu entstehenden Haufen in zwei Spielfelder: Solche, die aus dem ersten 1012er Haufen entstehen, und solche, die aus dem zweiten 1012er Haufen entstehen.

Beide Spielfelder bestehen vor dem ersten Zug von Berta aus der gleichen Anzahl von Haufen (nämlich einem) mit gleichen Anzahlen von Steinen. Anton kann durch geschickte Spielweise nach jedem Zug von Berta diese symmetrische Situation wieder herstellen: Wählt Berta einen Haufen aus dem einen Spielfeld und führt einen Zug aus, so wählt Anton einen gleichgroßen Haufen aus dem anderen Spielfeld und führt dort denselben Zug aus. Nach jedem Zug von Anton sind in beiden Spielfeldern wieder die gleiche Anzahl von Haufen mit den gleichen Anzahlen von Steinen.

Anton kann so auf jeden Zug von Berta antworten und kann somit nicht verlieren. Da ein Spieler verlieren muss, ist dies Berta und Anton gewinnt. ❑

Hinweis: Für kleine n lässt sich die Spielidee leicht erschließen. Bei $n = 2$ gibt es nur einen Zug, A: 1-1 und Anton gewinnt. Für $n = 3$ ist die Zugfolge ebenfalls eindeutig festgelegt, denn Antons Zug führt zu A: 2-1 und Berta kann auf B: 1-1-1 ziehen und gewinnt. Im Falle von $n = 4$ finden wir bereits unterschiedliche Spielverläufe, wobei wir optimale Züge für Berta suchen:

4 → A: 3-1	→ B: 1-1-1-1	und B gewinnt.
4 → A: 2-1-1	→ B: 1-1-1-1	und B gewinnt.
4 → A: 2-2	→ B: 1-1-2 → A: 1-1-1-1	und A gewinnt.

Nur im vierten Fall kann A stets gewinnen. Analysieren wir noch den Fall $n = 5$:

5 → A: 4-1 → B: 2-2-1	und B kann gewinnen.
5 → A: 3-2 → B: 2-1-2	und B kann gewinnen.
5 → A: 3-1-1	und B kann gewinnen.
5 → A: 2-2-1 → B: 2-1-1-1	und A gewinnt.

Da die Einerhaufen keinen Einfluss auf den weiteren Spielverlauf haben, können wir hier die Symmetrie-Strategie bereits erahnen.

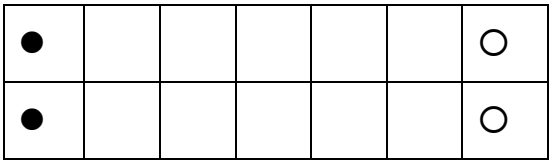
Für das Prinzip der symmetrischen Spielsituationen gibt es ein sehr einfaches Beispiel: Wir betrachten ein Spielfeld, bestehend aus einem Streifen von n Spielfeldern. An den Enden des Streifens befinden sich zu Spielbeginn für jeden Spieler je ein Spielstein. Ein Zug besteht für einen Spieler darin, seinen Spielstein um beliebig viele freien Felder zu bewegen (ohne den gegnerischen Stein überspringen zu dürfen). Wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann, hat verloren.



Es ist offensichtlich, dass der beginnende Spieler (hier: schwarz) stets gewinnen kann – er bewegt seinen Spielstein bis unmittelbar vor den Spielstein des Gegenspielers.



Wir betrachten wir nun ein Spielfeld, bestehend aus zwei Streifen von n Spielfeldern. In einem Zug kann jeder Spieler nur einen seiner beiden Spielsteine bewegen. Verloren hat, wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann.



Nun kehrt sich die Gewinnmöglichkeit um: Egal wie der beginnende Spieler spielt, es gewinnt immer der Gegenspieler. Dazu muss der Gegenspieler lediglich den Zug, den der beginnende Spieler auf einem Streifen ausführte, auf dem anderen Streifen kopieren.

Bei einem Spielfeld, bestehend aus drei Streifen, kann der beginnende Spieler mit dem ersten Zug einen Streifen „ausschalten“. Damit beginnt das Spiel für den Gegenspieler wie ein Spiel auf einem zweistreifigen Spielfeld und er steht als Verlierer bereits fest. In ähnlicher Weise lässt sich nun ein Spiel auf einem Spielfeld aus m Streifen mit je n Spielfeldern diskutieren.

Auch im diesjährigen Bundeswettbewerb Mathematik (BWM) beinhaltete die Runde 1 eine Aufgabe mit einem Zwei-Personen-Spiel, dessen Gewinnstrategie wesentlich auf Symmetrie beruhte.

Aufgabe 32.02 – BWM-2025-Runde 1.4: Für ganze Zahlen $m, n \geq 3$ besteht ein $m \times n$–Rechteckrahmen aus den $2 \cdot m + 2 \cdot n - 4$ Randquadraten eines in $m \cdot n$ Quadrate unterteilten rechteckigen Feldes. Auf einem solchen $m \times n$–Rechteckrahmen spielen Renate und Erhard nach folgenden Regeln, wobei Renate beginnt.

Wer am Zug ist, färbt eine rechteckige Fläche, die aus einem einzelnen weißen Quadrat oder mehreren weißen Quadraten besteht; gibt es danach noch weiße Quadrate, so müssen diese weiterhin eine zusammenhängende Fläche bilden. Wer den letzten Zug macht, hat gewonnen.

Bestimme alle Paare (m, n), für die Renate eine Gewinnstrategie hat.

Lösungshinweise: Wir geben eine konkrete Gewinnstrategie für Renate an und zeigen, dass diese durchführbar ist und stets zu einem Gewinn führt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $m = n$, d.h. der Rechteckrahmen ist quadratisch und damit symmetrisch bezüglich der beiden Diagonalen. Eine davon nennen wir d, die beiden Quadrate, die auf d liegen, nennen wir R und Q.

Gewinnstrategie: Wir beginnen mit Färbung von R. Bei allen weiteren Zügen färben wir alle restlichen Quadrate, wenn dies möglich ist. Wenn es nicht möglich ist, dann färben wir immer so, dass nach der Färbung der Rechteckrahmen unter Berücksichtigung der Färbung symmetrisch bzgl. d ist.

Renate kann offensichtlich den ersten Zug gemäß Strategie. Danach ist der Rechteckrahmen unter Berücksichtigung der Färbung symmetrisch bezgl. d. Nach den Spielregeln kann Erhard in seinem ersten Zug nur Quadrate auf der gleichen Seite von d färben. Dadurch wird in jedem Fall diese Symmetrie zerstört. Renate kann im folgenden Zug diese Symmetrie wieder herstellen, indem sie jeweils die auf der anderen Seite symmetrisch gelegenen Quadrate färbt.

Dies gilt für alle folgenden Zügen von Erhard, solange Erhard nicht das Quadrat Q färbt. Nach einigen Zügen werden dabei die ungefärbten Eckwinkel (eine Kombination von drei ungefärbten Quadraten, die aus einem ungefärbten Eckquadrat und zwei an diesem Eckquadrat anliegenden ungefärbten Quadraten bestehen), die nicht auf d liegen, entfernt, nach weiteren endlich vielen Zügen muss Erhard eines der beiden an Q angrenzenden Quadrate färben, dabei ist unerheblich, ob er das zugehörige Eckquadrat Q auch färbt oder nicht. In beiden Fällen bleibt mindestens das andere an Q anliegende Quadrat ungefärbt und die restlichen ungefärbten

Quadrate bilden ein Rechteck. Diese kann nun Renate in einem Zug färben und gewinnt.

Fall 2: $m \neq n$. O.B.d.A. sei $m > n$, also $n \leq m - 1$.
Gewinnstrategie: Wir färben im ersten Zug alle m Quadrate einer langen Seite des Rechteckrahmens. Die ungefärbten Quadrate des Rechteckrahmens haben nun die Form eines U (dessen beide Schenkel jeweils $n - 1$ ungefärbte Quadrate enthalten und dessen Verbindungsstück m ungefärbte Quadrate enthält. Falls Erhard nicht einen ungefärbten Eckwinkel entfernt, färben wir so, dass die Längen der beiden Schenkel des U gleich lang sind. Falls Erhard einen Eckwinkel entfernt, also die ungefärbten Quadrate die Form eines L haben, färben wir immer so, dass die beiden Schenkel des L gleich lang sind. Wenn Erhard den letzten Eckwinkel entfernt, färben wir den Rest.

Renate kann sicher den ersten Zug ihrer Strategie machen. Danach enthalten die beiden Schenkel des U jeweils gleichviele ungefärbte Quadrate, nämlich $n - 1 < m - 1$. Erhard kann nun nur auf einem Schenkel Quadrate färben; solange er dies tut, ohne den ungefärbten Eckwinkel zu entfernen, kann Renate sicher immer auf dem anderen Schenkel gleich viele ungefärbte Quadrate färben und so den Zustand erhalten, dass die beiden Schenkel wieder gleich viele ungefärbte Quadrate haben. Wenn Erhard den ungefärbten Eckwinkel entfernt, haben die ungefärbten Quadrate die Form eines L, wobei ein Schenkel m oder $m - 1$ ungefärbte Quadrate hat und der andere Schenkel höchstens $n - 1 \leq m - 2$ ungefärbte Quadrate. Die Anzahl der ungefärbten Quadrate auf den beiden Schenkel des L ist also verschieden, eine ist größer als 1 und die andere größer als 2. Nun kann Renate durch geeignete Färbung die Anzahl der gefärbten Quadrate auf den Schenkeln gleich machen. Wieder kann Erhard nur auf einem Schenkel des L Quadrate färben, und Renate kann stets wieder so färben, dass auf beiden Schenkeln gleich viele Quadrate gefärbt sind. Wenn allerdings Erhard den letzten Eckwinkel entfernt, liegen die ungefärbten Quadrate in einer Reihe, diese enthält mindestens ein ungefärbtes Quadrat, und Renate kann nun die restlichen Quadrate färben und damit gewinnen. ❑

Hinweis: Es ist immer informativ, zunächst Spezialfälle zu untersuchen. Verwenden wir zunächst Quadrate mit kleinen Seitenlängen, finden wir (im günstigen Fall in der Heimarbeit bei einem realen Zwei-Personen-Spiel – Gruppenarbeit ist in der 1. Runde des BWM ausdrücklich erlaubt!) eine Gewinnstrategie, die die Symmetrie ausnutzt. Eine solche noch unvollständige Lösung ist bereits ein Lösungserfolg! Bei der Verallgemeinerung des Spielfeldes erkennen wir die Grenzen dieser Strategie und wir müssen die Symmetrie-Betrachtung anpassen.

Untersuchungen von Spielen hinsichtlich der Gewinnchancen wurden schon oft in Aufgabe der MO gefordert. So gab es in jüngerer Vergangenheit folgende Spielideen:

Aufgabe 32.03 – MO620921/MO621021. Jan und Henry spielen ein Schokoladenspiel. Sie beginnen mit einer in 4×5 –Felder unterteilten Tafel Schokolade. Wer am Zug ist, darf an einer Seite eine Reihe abbrechen und aufessen; danach ist der andere am Zug. Jan beginnt.

Ein möglicher Spielverlauf ist in dieser Grafik dargestellt.

J1	J1	J1	J1	J1
H2	J3	H4	H4	H4
H2	J3	J5	J5	J5
H2	J3	H6	H6	H6

Hier hat Jan im ersten Zug die oberste Zeile genommen (5 Felder J1). Danach hat Henry die linke Spalte gewählt (3 Felder H2), danach Jan die Spalte an der dann linken Seite (3 Felder J3). Danach haben Henry und Jan abwechselnd die jeweils oberste Zeile (3 Felder H4, 3 Felder J5 und 3 Felder H6) genommen. Insgesamt hat Jan 11 und Henry 9 Schokoladenfelder bekommen.

a) Jan ist recht gierig. Er spielt immer so, dass er im aktuellen Zug möglichst viel Schokolade erhält. Henry kennt Jan und seine Strategie genau. Zeigen Sie: Wenn Henry schlau spielt, erhält Jan insgesamt höchstens 10 Schokoladenfelder.
b) Jan will seine Strategie ändern. Damit weiß Henry auch nicht mehr, wie Jan spielt. Zeigen Sie: Wenn Jan schlau spielt, kann er so spielen, dass er am Ende mindestens 12 Schokoladenfelder hat.
c) [3]Jetzt wollen beide nicht mehr nach Strategie spielen. Jeder soll in jedem Zug auswürfeln, ob er sich für die Zeile oder für die Spalte entscheidet. Jan behauptet: Wenn ein solches ausgewürfeltes Spiel eine Dauer von genau 8 Zügen hat, gewinne ich in jedem Fall, d.h., ich bekomme mehr Schokolade. Untersuchen Sie, ob Jan recht hat.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Jan hat im ersten Zug die Wahl zwischen 5 Stück einer Zeile oder 4 Stück einer Spalte. Mit seiner gierigen Strategie wird er die 5 Stück einer Zeile entfernen. Henry muss diesen Zug nur kopieren (*Symmetrie-Strategie!*) und ebenfalls 5 Stück einer Zeile nehmen. Jan muss nun nach seiner Strategie wieder eine Zeile nehmen, weil die Zeile mit 5 Stücken mehr Stücke enthält als jede Spalte mit nur 2 Stücken. Henry kann sich danach die letzte Zeile aneignen, und die gesamte Tafel ist alle. Damit hat Jan nur 10 Schokoladenfelder erhalten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wenn Jan zu Beginn die Spalte mit 4 Stück nimmt, bleibt eine 4×4 –Tafel übrig. Henry muss somit jetzt 4 Felder einer Zeile oder Spalte

[3] Nur in Aufgabe MO621021

entfernen, und Jan kann diesen Zug kopieren (*Symmetrie-Strategie!*) und die 4 benachbarten Felder nehmen. Übrig bleibt eine $4 \times 2 -$ bzw. eine $2 \times 4 -$Tafel. Nimmt Henry die 4 Felder, entfernt Jan die restlichen 4 Felder. Nimmt Henry nur 2 Felder, antwortet Jan auf gleiche Weise. Von der verbleibenden $2 \times 2 -$-Tafel muss Henry 2 Stücke nehmen und Jan kann den Rest erhalten. Somit kann Jan erzwingen, dass nach der Entnahme der ersten Spalte mit 4 Stücken er von den restlichen 16 Stücken noch die Hälfte und somit insgesamt 8 + 4 = 12 Stücke erhält.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Jan hat nicht recht, denn bei folgendem Spielverlauf mit 8 Zügen endet das Spiel unentschieden:

J1	H2	H2	H2	H2
J1	J3	H4	J5	J5
J1	J3	H4	H6	H6
J1	J3	H4	J7	J8

❑

Aufgabe 32.04 – MO571011. Bernd und Inge spielen folgendes Spiel: Zu Beginn liegt ein Stapel Karten auf dem Tisch, der mindestens drei Karten enthält. Die beiden sind abwechselnd am Zug.

Im ersten Zug teilt Bernd den Stapel in zwei kleinere Stapel auf. Es sind nur Stapel mit mindestens einer Karte zugelassen. Jeder folgende Zug besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist ein Stapel zu entfernen. Danach ist der andere in zwei kleinere Stapel zu zerlegen. Am Ende eines Zuges liegen also stets genau zwei Stapel auf dem Tisch. Damit ein Zug möglich ist, muss wenigstens einer der Stapel auf dem Tisch mehr als eine Karte aufweisen.

Gewonnen hat, wer den letzten (möglichen bzw. gültigen) Zug machen konnte.

a) Der (Start-)Stapel enthält genau vier Karten. Wie kann Bernd gewinnen? Besteht die Möglichkeit, dass Inge gewinnt?
b) Für welche Größen des Startstapels (bzw. für welche Anzahl der Karten im Startstapel) kann Bernd den Gewinn erzwingen, für welche Größen gelingt dies Inge?

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Bernd hat zwei Möglichkeiten, den Viererstapel zu zerlegen: erstens in einen Einer- und einen Dreierstapel und zweitens in zwei Zweierstapel.

Fall 1: Inge muss den Einerstapel entfernen und den Dreierstapel in einen Einer- und einen Zweierstapel zerlegen. Bernd gewinnt nun, indem er den Einerstapel entfernt und den Zweierstapel zerlegt. Inge kann bei zwei Einerstapeln keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Fall 2: Inge gewinnt. Sie entfernt einen der Zweierstapel und zerlegt den zweiten in zwei Einerstapel. Bernd kann dann keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Hat der Stapel eine ungerade Größe, so kann Inge den Sieg erzwingen, ansonsten gewinnt Bernd (bei einer geraden Größe des Stapels).

Beweis: Haben die zwei Stapel auf dem Tisch beide eine ungerade Größe (mindestens eine größer als eins), so entsteht im nächsten Zug ein Stapel gerader Größe, der im übernächsten Zug (immer möglich) wieder in zwei Stapel ungerader Größe zerlegt werden kann. Die Gewinnstrategie ist für beide gleich und besteht bei vorliegenden Stapeln unterschiedlicher Parität darin, den Stapel ungerader Größe zu entfernen und den Stapel gerader Größe in zwei Stapel ungerader Größe zu zerlegen.

Bei jedem Zug werden die Stapel kleiner, daher endet das Spiel nach endlich vielen Zügen. Da jemand, der die Gewinnstrategie kennt und spielen kann (er findet einen geraden und einen ungeraden Stapel vor), stets einen geraden Stapel vorfindet und jemand, der sie nicht spielen kann (er findet zwei ungerade Stapel vor), stets einen geraden Stapel erzeugt, endet das Spiel mit zwei Stapeln aus nur einer Karte mit Bernd am Zug, wenn der Ausgangsstapel ungerade war, und Inge am Zug, wenn er gerade war. ❑

Thema 33 – Rationale Zahlen – eine MO-Aufgabenfamilie

Wir betrachten im Folgenden eine Aufgabe, bei deren Lösungshinweisen der Ausruf *„Wie soll man darauf kommen!“* nahe liegt. Es zeigt sich aber, dass in einer Reihe von hinführenden Aufgaben die Thematik umfassend vorbereitet wurde.

Aufgabe 33.01 – KZM-2024/25-5-5A.

(a) Man entscheide, ob die Zahl $r = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{2020}}}}$ rational oder irrational ist.

(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

- unendlich viele Paare $(x;y)$ gibt, so dass z rational ist,
- unendlich viele Paare $(x;y)$ gibt, so dass z irrational ist.

(c: **Aufgabe MO331042**) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir verwenden die Aussagen, dass die Summe einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl stets irrational und die Wurzel aus

einer irrationalen Zahl stets irrational sind. Da 2020 keine Quadratzahl ist (wegen $44^2 = 1936 < 2020 < 2025 = 45^2$), ist die Zahl $\sqrt{2020}$ irrational. Damit ist auch $2019 + \sqrt{2020}$ irrational und folglich auch $\sqrt{2019 + \sqrt{2020}}$ irrational. Diese Argumentation können wir nun fortsetzen und kommen zur Aussage, dass r irrational ist.

Hinweis: Eine Anpassung an die aktuelle Jahreszahl 2025 verändert den Beweis nicht. Zwar erhalten wir im ersten Schritt, dass $\sqrt{2025} = 45$ rational ist und demzufolge auch $2019 + \sqrt{2025} = 2064$ rational ist, aber wegen $45^2 = 2025 < 2064 < 2116 = 46^2$ können wir mit dem um eine innere Wurzel verkürzten Ausdruck unsere Argumentation beginnen.

Ein Beweis ist auch indirekt möglich: Nehmen wir an, dass r eine rationale Zahl ist, dann ist auch $r^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{2020}}}$ rational. Durch wiederholtes Quadrieren und Subtrahieren erhalten wir schließlich einen rationalen Ausdruck, der gleich $\sqrt{2020}$ sein muss. Dies ist aber ein Widerspruch. (Würden wir jedoch ein weiteres Mal Quadrieren, gelingt der Beweis nicht mehr!)

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Laut Aufgabenstellung genügt es, Beispiele für (x, y) anzugeben, bei denen ersichtlich ist, dass es unendlich viele solche Paare gibt. Ein Verweis auf Pythagoreische Zahlentripel (a, b, c) mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist ausreichend, da als bekannt zitiert werden darf, dass es unendlich viele davon gibt. Wir setzen also $x = a^2$ und $y = b^2$ und erhalten $z = a + b + c$ eine rationale Zahl.

Eleganter ist es aber, wenn wir eine Folge unendlich vielen Paare (x, y) konkret angeben. Dazu wählen wir für jede natürliche Zahl k die Variablen $x = 9 \cdot k^2$ sowie $y = 16 \cdot k^2$ und erhalten mit $z = 3 \cdot k + 4 \cdot k + 5 \cdot k = 12 \cdot k$ stets eine rationale (und sogar eine natürliche) Zahl. Diesen Ansatz können wir nun aber auch verwenden, um die zweite Behauptung zu beweisen: Wir setzen für jede natürliche Zahl k die Variablen $x = k^2$ sowie $y = k^2$ und erhalten mit $z = 2 \cdot k + k \cdot \sqrt{2} = k \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$ stets eine irrationale Zahl (wobei die Irrationalität von $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt werden darf).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Für den Beweis wäre es ausreichend, geeignete rationale Zahlen anzugeben. So leisten für jede natürliche Zahl n die rationalen Zahlen $t = \frac{1}{(n^2-1)^2}$ das Geforderte, denn es gilt

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{1}{(n^2-1)}} = \sqrt{\frac{1 + (n^2-1)}{(n^2-1)^2}} = \frac{n}{n^2-1}.$$

Um solche geeignete Zahlen t zu finden, versuchen wir den Wurzelausdruck zu analysieren. Da wir nicht alle Zahlen finden müssen, ist es zulässig, Vereinfachungen

in den Betrachtungen vorzunehmen. Sicher ist es günstig für die Zielstellung, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also wenn es natürliche Zahlen p und q mit $q > 0$ gibt, so dass $t = \frac{p^2}{q^2}$ gilt. Dann bleibt die innere Wurzel rational. Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p+q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p = 1$ und $q = n^2 - 1$ erhalten wir die oben angegebene Zahlenfolge. ❑

Ergänzend fragen wir uns, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ irrational ist. Betrachten wir beispielsweise die Zahlen $t = \frac{1}{n^4}$, so erkennen wir aus

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n > 0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Aufgrund der Vorgeschichte dieser Aufgabe erscheint der Ansatz nicht überraschend. Bereits in der Runde 1 dieses MO-Jahrgangs wurde die Struktur der zu untersuchenden Zahlen verwendet, die es für ganze Zahlen zu analysieren galt.

Aufgabe 33.02 – MO330913/MO331013. Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen *t* ist

$$z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$$

eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösungshinweise: Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale Zahlen wären. Dann muss es eine positive ganze Zahl m mit $t = m^2$ geben. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus weiterhin folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein muss.

Wegen $m^2 < m^2 + m < (m+1)^2$ liegt aber $m^2 + m$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl. Dieser Widerspruch

zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war. Also haben wir bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl. Dagegen ist für $t = 0$ die Zahl z rational. ❑

Bereits zwei Jahre davor wurde diese Struktur in der Aufgabe schon verwendet und dabei besonders auf die Darstellung rationaler Zahlen als Quotient zweier ganzer Zahlen hingewiesen.

Aufgabe 33.03 – MO311034.
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen

(1) Es gilt $t > 1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n, m ist $n = 1000$.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Falls eine rationale Zahl t eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t + \sqrt{t}} = s$ für eine rationale Zahl s ist, ist auch $\sqrt{t} = s^2 - t^2$ rational. Also ist t das Quadrat einer rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t = \frac{n}{m}$ müssen n, m Quadrate von natürlichen Zahlen sein. Dieses ist für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Wir setzen $r = \sqrt{t} = \frac{100}{q}$ mit $q^2 = m$. Also ist r rational. Aus der Bedingung (1) folgt $q < 100$. Nun ist die Gleichung $\sqrt{t + \sqrt{t}} = s$ äquivalent zu

$$r \cdot (r + 1) = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot (100 + q) = (qs)^2$$

Die Gleichung rechts hat offenbar genau dann eine Lösung in natürlichen Zahlen, wenn $100 + q$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21, 44, 69, 96\}$.

Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, entfallen die geraden Zahlen $q = 44$ und $q = 96$ als Lösung und somit gibt es für t die zwei Lösungen $\frac{100^2}{21^2}, \frac{100^2}{69^2}$. ❑

Bemerkung: Ohne die Bedingung (1) gibt es für die Teilaufgabe b) unendlich viele Lösungen

$$t = \frac{10000}{(a^2 - 100)^2}$$

mit natürlichen Zahlen a ($a > 10$ und $ggT(a, 10) = 1$). Diese ergeben somit eine weitere konstruktive Lösung zu **Aufgabe MO331042**.

Aufgabe 33.04 – MO311024. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24 \cdot \sqrt{t}}$ rational ist!

Lösungshinweise: Es sei $r^2 = t + 24 \cdot \sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl t ist aber genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24 \cdot n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot 12 \cdot n + 12^2 = (n + 12)^2$.

Setzen wir zur Vereinfachung $m = n + 12 > 0$, erhalten wir $144 = m^2 - r^2 = (m + r)(m - r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist $m + r$ der größere und $m - r$ der kleinere Teiler und wegen $(m + r) - (m - r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, so dass (da 144 durch 2 teilbar ist) beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich folgende Lösungen:

- für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.
- für $m - r = 6$ ist $m + r = 24$, also $r = 9$, $m = 15$, $n = m - 12 = 3$ und $t = n^2 = 9$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{9 + 24 \cdot \sqrt{9}} = \sqrt{9 + 24 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ rational.
- für $m - r = 8$ ist $m + r = 18$, also $r = 5$, $m = 13$, $n = 13 - 12 = 1$ und $t = n^2 = 1$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{1 + 24 \cdot \sqrt{1}} = \sqrt{25} = 5$ rational.

Insgesamt ergeben sich genau vier Lösungen $t \in \{1, 9, 64, 625\}$. ❑

Aufgabe 33.05 – MO301043A. Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Wir vermuten, dass es eine derartige Zahl m nicht gibt und wollen deshalb die folgende Aussage beweisen:

Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}}$ für alle $i = 1,2, \dots, m+1$ als rational nachzuweisen. Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \dots \cdot ((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \qquad (i = 2, 3, \dots, m+1)$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen. k ist wie gefordert positiv. Weiter gilt $t_2 > t_3 > \dots > t_{m+1} > 0$, also sind $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen $t_1 = 0$ und

$$\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} + k \cdot \frac{k}{i^2 - 1}} = \frac{k}{i^2 - 1} \cdot \sqrt{1 + (i^2 - 1)} = \frac{k \cdot i}{i^2 - 1}$$

sind für alle $i = 2, \dots, m+1$ (natürliche, also) rationale Zahlen. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids
Elemente[4]

Funfzehn Bücher
auf dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781

[4] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[5]

Erklärung[6]
der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen.

□AB	das Quadrat der geraden Linie AB.
A : B	die Verhältnis der A zu B.
A : B = C : D	die A verhält ſich zu B, wie C zu D.
A ∩ B	die Flächen A, B, ſind commenſurabel; oder die geraden Linien, A, B, ſind in Länge commenſurabel.
A ∪ B	die Flächen A, B, ſind incommenſurabel; oder die geraden Linien A, B, ſind in Länge incommenſurabel.
A ⌒ B	die geraden Linien A, B, ſind nur im Quadrat commenſurabel.

Sechſtes Buch.

[Seite 87]

Der 1. Satz.

Triangel, ABC, ACD, wie auch Parallelogramme EC, CF, von einerley Höhe, verhalten ſich, wie ihre Grundlinien, BC, CD.

[Seite 167]

Zehntes Buch.

Definitionen.

Def. 1. Commenſurabel heiſſen die Gröſſen, ſo ſich von einem und demſelben Maaße meſſen laſſen.
Def. 2. Incommenſurabel aber ſind die, zu denen ſich gar kein gemeinſchaftliches Maaß finden läſſt.
Def. 6. und die mit ihr commenſurabel ſind, es ſey in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein, nenne man auch rational.
Def. 8. Auch heiſſe das Quadrat der angenommenen Linie rational.
Def. 11. Desgleichen nenne man die Quadratſeiten ſolcher Irrationalflächen, irrational: nämlich, wenn ſolche Flächen Quadrate ſind, ihre eigenen Seiten; wenn ſie aber andre geradlinigen Figuren ſind, diejenigen geraden Linien, deren Quadrate ſolchen Figuren gleich ſind.
9. Satz. Zuſatz. Hierauf erhellet, daß die in Länge commenſurabel, auch immer in Quadrat commenſurabel ſind, aber die in Quadrat, nicht immer auch in Länge. Desgleichen, daß die in Länge incommenſurabel, nicht auch in Quadrat incommenurabel ſind, aber die in Quadrat, auch immer in Länge.
10. Satz. Wenn vier Gröſſen, A, B, C, D, proportionirt, und die beyden erſten, A, B, entweder commenſurabelk, oder incommenſurabel ſind: ſo ſind auch die beyden letzten, C, D, im erſten Fall commenſurabel, im anderen incommenſurabel.
12. Satz. Zwey Gröſſen, A, B, welche mit einer dritten, C, commenſurabel, ſind ſelbſt commenſurabel.

[5] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.
[6] Wir zitieren zunächst die Verweise, die ab Seite 187 verwendet werden.

[Seite 187]

Erſte Anmerkung.

Da (10, 6. Def.) Rationallinien diejenigen heiſſen, welche mit einer angenommenen geraden Linie entweder in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein commenſurabel ſind, und (10, 9. Zuſ.) alle Linien, welche in Länge commenſurabel, auch in Quadrat commenſurabel ſind; diejenigen hingegen, welche im Quadrat commenſurabel ſind, in Länge entweder commenſurabel, oder incommenſurabel ſeyn können: ſo entſtehen auf dreyerley Art Rationallinien.

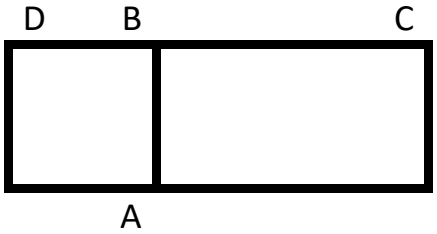
1. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Länge, folglich auch in Quadrat, commenſurabel iſt. Dieſe heißt rational, und mit der Angenommenen in Länge und Quadrat commenſurabel.
2. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Quadrat commenſurabel, und es auch in der Länge iſt. Auch dieſe heißt rational und mit der Angenommenen in Länge und Quadrat commenſurabel.
3. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Quadrat commenſurabel, aber in der Länge incommenſurabel iſt. Dieſe heißt rational, und mit der Angenommenen nur in Quadrat commenſurabel.

Zweyte Anmerkung.

Auſſer der gedachten geraden Linie, giebt es noch unzählige andre, welche mit der Angenommenen nur in Quadrat commenſuravel ſind, und deshalb rational, auch mit einander commenſurabel heiſſen, in ſo fern ſie rational ſind; ſonſt aber mit einander entweder in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein commenſurabel ſind. Iſt das erſte, ſo heiſſen ſie rational und in Länge commenſurabel, um anzuzeigen, daß ſie es auch in Quadrat ſind. Iſt das zweyte, ſo heißen ſie rational nur in Quadrat commenſurabel. Daß aber die Rationallinien commenſurabel ſind, iſt (10, 12. Satz) offenbar, weil ſie alle mit der Angenommenen commenſurabel ſind, und eben deſwegen rational heiſſen.

Der 20. Satz

Jedes Rectangel, AC, auf rationalen in Länge commenſurabeln Seiten, AB, BC, iſt rational.

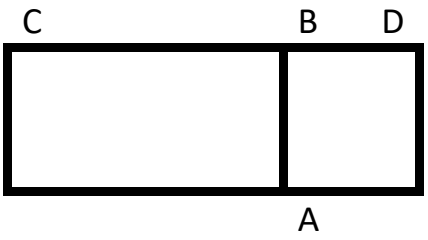


Beſchreibe von AB, das Quadrat AD, welches daher rational iſt. Da AB ∩ BC, und AB = BD, ſo iſt BD ∩ BC. Nun iſt (6, 1. S.) BD : BC = DA : AC. Folglich iſt (10, 10. S.) DA ∩ AC. Nun iſt DA rational, folglich auc

Der 21. Satz.

Iſt von den Seiten eines Rationalrectangels, AC, die eine, AB, rational: ſo iſt die andere, BC, auch rational, und mit der erſten, AB, in Länge commenſurabel.

Von AC mache das Quadrat AD, welches daher rational ist. Nun ist auch AC rational. Folglich ist (10, 19. Anm.) AD ∩ AD. Nun ist (6, 1. S.) AD : AC = DB : BC. Folglich ist auch DB ∩ BC, aber DB = AB, demnach AB ∩ BC. Nun ist AB rational, folglich auch BC. Demnach ist BC rational, und mit AB in Länge commensurabel.



Lehrsatz.

Die Quadratseite, A, einer Irrationalfigur (das ist, eine gerade Linie, A, deren Quadrat einer Irrationalfigur gleich) ist irrational.
Denn wäre A rational, so wäre (10, 8. Def.) □ A auch rational, gegen das Angenommene.

Der 22. Satz.

Jedes Rectangel, AC, auf rationalen nur in Quadrat commensurabeln Linie, AB, BC, ist irrational. Auch ist dessen Quadratseite irrational. Sie heisse Mediallinie.

Mache von AB das Quadrat AD, welches daher rational. Nun ist AB ∩̲ BC, folglich BD ∪ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = AD : AC. Folglich ist AD ∪ AC. Nun ist AD rational, folglich AC irrational, folglich (10, 11. Def.) die Quadratseite der AC, irrational. Sie heißt aber Mediallinie, oder die mittlere, weil ihr Quadrat der AC, das ist, dem Rect. ABBC gleich, folglich sie die mittlere Proportionalgrösse zwischen AB, BC, ist.

Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte[7]

Aufgabe MO181014

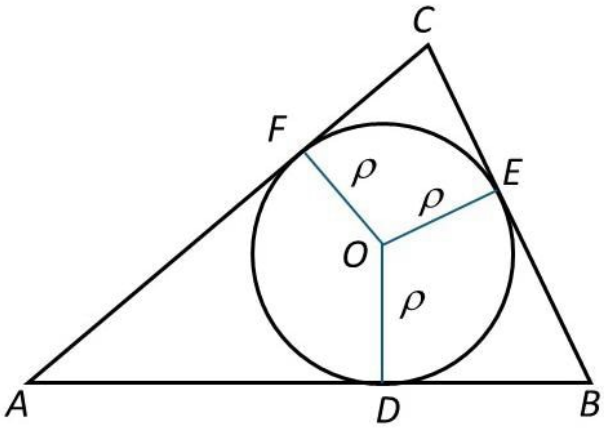
Da sei ein Dreieck ΔABC
mit rechtem Winkel $\sphericalangle ACB$.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muss sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

Lösungshinweise:

Der Inkreismittelpunkt sei O
Dann steht gewiss der Radius ρ
stets senkrecht einmal auf AB,
zum zweiten tut er's mit BC.

[7] Siehe auch Aufgaben MO201014 (in Heft 07/2023) oder MO221013 (in Heft 06/2024)

Auch mit AC, der dritten Strecke,
da bildet er ’ne rechte Ecke.



Die Punkte, wo jeweils der Treff,
bezeichnet man mit D, E, F.
Das Dreieck ΔABO dabei,
des Inhalt $c \cdot \rho : 2$
wird durch DO nochmals geteilt.
Wenn man bei ΔADO verweilt
und es mit ΔAFO vergleicht,
so sieht man - wie so üblich ”leicht”
dass beide Flächen kongruent,
falls man den Kongruenzsatz kennt,
den man mit ssw beschreibt,
AO sich nämlich selbst gleich bleibt;
dann ist CD genau gleich ρ
und für OF gilt’s ebenso;
der Winkel $\sphericalangle ADO$ ist Rechter,
und $\sphericalangle AFO$ macht’s auch nicht schlechter.
Auch für das Dreieck ΔBOD
stimmt der Vergleich mit ΔBOE.
Das Viereck mit $FCEO$
bleibt noch als Rest. Jetzt denkt man so:
Da drei der Winkel 90 Grad,
wohl auch der vierte so viel hat.
Darum muss es ein Rechteck sein.
Setzt man die Seitenlängen ein,
erkennt man, dass es folglich hat
den Flächeninhalt ρ^2.
Und unsre Lösung heißt nun so:

$$\rho^2 + c \cdot \rho$$

❑

Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade fand vom 23. bis 26. Mai 2025 in Göttingen (Niedersachsen) statt. Die Veranstaltung wurde vom Verein Mathematik-Olympiade in Niedersachsen e.V. (Vorsitzende IMKE CLAUßEN) mit Unterstützung des Landes Niedersachsens und der GEORG-AUGUST-Universität Göttingen organisiert. Frau JULIA WILLIE HAMBURG, Kultusministerin des Landes Niedersachsens, begrüßte die 197 Teilnehmenden und die zahlreichen Mitwirkenden. Unter www.mo2025.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Alle Teilnehmenden wurden am Freitag, dem Anreisetag, im Freibad Brauweg begrüßt. Die beiden Klausuren fanden am Samstag und Sonntag im Verfügungsgebäude des Zentralcampus statt. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in und um Göttingen. Am Sonntag trafen sich alle zum Grillabend im Mathematischen Institut der Uni Göttingen. Die Abschluss-veranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand in der Aula der GEORG-AUGUST-Universität Göttingen statt, Auf der MO-Webseite sind zahlreiche Fotos eingestellt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weitere fünf Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 74 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 33 Anerkennungsurkunden[8]. Die sächsische Mannschaft konnte in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[9] belegte sie mit 21 Punkten den vierten Platz. Bayern mit 39 Wertungspunkten, Niedersachsen mit 35 Wertungspunkten und Nordrhein-Westfalen mit 29 Wertungspunkten führen die Länderliste souverän an. Auch nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen ein I. Preis, ein II. Preis und sieben III. Preise den Platz 4 (insgesamt neun Preise, keine Anerkennung). Auch hier führen Bayern (drei I. Preise, insgesamt 14 Preise), Niedersachsen (drei I. Preise, insgesamt 11 Preise) und Nordrhein-Westfalen (zwei I. Preise, insgesamt neun Preise).

Den sächsischen Preisträgern gilt unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

I. Preis	Bhuvan Chalamala, Okl 8, Nexö-Gymn. Dresden (Bhuvan erhielt einen Sonderpreis der Bildung und Begabung gGmbH)
II. Preis	Martin Brill, Okl 8, Sächs. Landesgymn. Sankt Afra Meißen

[8] Die vollständige Liste ist unter www.mo2025.de verfügbar (Stand: 26.05.2025).

[9] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

III. Preise Rishi Kumar, Okl 8, Nexö-Gymn. Dresden
Nora Louise Stoppel, Okl 9, Nexö-Gymn. Dresden
Aaron Adler, Okl 9, Ostwald-Gymn. Leipzig
Tilman Ferchland, Okl 10, Ostwald-Gymn. Leipzig
Julius Morgenstern, Okl 10, Nexö-Gymn. Dresden
Tobias Pötzsch, Okl 12, Geschwister-Scholl-Gymn. Taucha

Die Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade wird vom 7. bis 10. Juni 2026 in Hamburg ausgetragen.

Rückblick auf den 7. Tag der Mathematik[10]

Am Samstag, dem 6. April 2025, fand der 7. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Prof. Dr. ALOIS PICHLER, Dekan der Fakultät für Mathematik, begrüßte alle, die die Gelegenheit nutzen wollten, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter 240 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Mit 13 Mannschaften in den Klassenstufen 8 und 9 sowie 53 (!) Mannschaften in den Klassenstufen 10 bis 12 und 25 Schülerinnen und Schüler aus Polen und Tschechien im Rahmen des DAAD-Projektes „BIDS“ (Betreuungsinitiative Deutsche Auslands- und Partnerschulen) des Deutschen Akademischen Austauschdienstes und sieben derzeit in Chemnitz lebenden ukrainischen Jugendlichen war die Neugierde auf die Aufgaben-Rallye wieder groß.

Parallel zum Teamwettbewerb fanden auch in diesem Jahr praxisnahe Fortbildungsvorträge für Lehrerinnen und Lehrer sowie Referendarinnen und Referendare statt. Prof. Dr. OLIVER ERNST (Professur Numerische Mathematik) zeigte, was hinter Schätzen und Testen steckt. Anschließend berichtet Jun.-Prof. Dr. MANUEL SCHALLER (Juniorprofessur Numerische Mathematik) über Verlässlichkeit und Robustheit durch optimale Steuerung am Beispiel medizinischer Laserbehandlung und stabiler Hochhäuser. Insgesamt 40 Lehrkräfte nahmen dieses Bildungsangebot der Fakultät für Mathematik wahr. Beide Vorträge wurden in Sachsen als Fortbildungsveranstaltung anerkannt.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit[11]. In der Klassenstufe 8/9 setzten sich gleich drei Mannschaften aus dem Chemnitzer Kepler-Gymn. durch, knapp gefolgt von den Teams aus dem Goethe-Gymn. Chemnitz und dem André-Gymn. Chemnitz. Das Sieger-Team in dieser Klassenstufe hätte mit ihrer Punktzahl auch im Wettbewerb 10-12 gewonnen!

In der Klassenstufe 10-12 behaupteten sich punktgleich drei Teams, zwei aus dem Kepler-Gymn. Chemnitz und ein als gemischte Mannschaft vom Freien Gymn.

[10] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/12882 (Stand 05.04.2025)
[11] Ausführliche Ergebnisse unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2025/eval.php

Naunhof/Ostwald-Gymn. Leipzig/Landesschule Pforta und BIP-Kreativitätsgymn. Leipzig. Die Platzierung wurde schließlich aufgrund der Bearbeitungszeit an den Stationen ermittelt.

Bei der Lösung der vier kniffligen und teilweise auch ungewöhnlichen Aufgaben kam unter dem Motto *„Mit Spaß muss man rechnen“* gute Laune auf. Beispielsweise mussten die Teams an der Station „Grid-World“ optimale Routen durch eine digitale Spielwelt mit maximalem Zeitbonus finden und an einer weiteren Station aus vorgegeben Tönen die Frequenzen und ihre Lautstärke ermitteln und erkunden, wie „Noise Cancelling“ funktioniert. An der Station „Flugplanung“ sollte die Distanz zwischen Chemnitz und Calgary auf der Weltkugel ermittelt werden. Wichtig war dabei zu erkennen, dass die herkömmliche Geometrie auf der Ebene, die aus der Schule bekannt ist, hier zu völlig falschen Entfernungen führt. An der vierten Station zum Thema „Kreuzeltest“ wurden die Chancen beim Raten in Multiple-Choice-Tests ermittelt.

Nach dem Mittag begrüßten auch der sächsische Kultusminister CONRAD CLEMENS und der Rektor der TU Chemnitz, Prof. Dr. GERD STROHMEIER, die Teilnehmenden und Gäste des TdM. Minister CLEMENS zollte allen Schülerinnen und Schülern, die am Samstag an der Uni am Wettbewerb teilgenommen haben, und dem Organisationsteam des Tages der Mathematik Applaus. Zudem machte er deutlich, dass der Freistaat Sachsen die Absolventinnen und Absolventen der MINT-Fächer benötigt und warb besonders für das Berufsbild der MINT-Lehrkräfte an den Schulen. Prof. STROHMEIER verdeutlichte, dass dafür die TU Chemnitz herausragende Studienbedingungen biete, denn sie wurde 2025 vom Bewertungsportal www.StudyCheck.de als beliebteste Universität Deutschlands ausgezeichnet. Den unterhaltsamen Hauptvortrag zum Thema „Mit Mathematik in die Zukunft schauen“ hielt Prof. Dr. MELINA FREITAG von der Universität Potsdam, die selbst auch an der TU Chemnitz studiert hat. Sie erklärte anschaulich die Mathematik hinter der Wettervorhersage.

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade in Chemnitz

Seit Anfang des Schuljahres 2024/25 entnahmen wir die Monatsaufgaben aus dem Aufgabenarchiv der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiaden (MeMO)[12]. Nun steht die 19. MeMO kurz bevor. Das Organisationsteam und viele Freunde und Förderer der Mathematik-Olympiaden freuen sich, Ende August die Teilnehmenden begrüßen zu können. Im Programm der Kulturhauptstadt Europas wird das Ereignis wie folgt angekündigt:

[12] Siehe https://www.memo-official.org/MEMO/

C THE UNSEEN, Chemnitz, Kulturhauptstadt Europas 2025
Programmheft[13], Seite 333
AUG, 2025-08-25 – 2025-08-31, MEMO 2025

„Wer sind die nächsten Mathematik-Champions aus Mitteleuropa? Gefunden werden diese im Jahr 2025 in der Kulturhauptstadt Europas – Chemnitz. Etwa 60 Jugendliche aus zehn Ländern nehmen an der 19. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade teil. Die besten jungen Mathematiker:innen aus ganz Europa messen sich in Einzel- und Teamwettbewerben und zeigen ihre kreativen Lösungsansätze. Neben der Olympiade lernen die Teilnehmenden die Stadt sowie ihre Kultur, Wissenschaft und Wirtschaft kennen. Die internationale Atmosphäre wird dabei ein besonderes Highlight. Interessierte Chemnitzer:innen und Freund:innen der Mathematik sind sehr herzlich zu den öffentlichen Veranstaltungen eingeladen. Ob Eröffnung, Begegnungsabend oder Preisverleihung – es gibt viele Gelegenheiten für die Chemnitzer:innen und ihre Gäste, die Teams aus den verschiedenen Ländern kennenzulernen und für die Kulturhauptstadtideen zu werben.“

Ort: TU Chemnitz
Partner: Stadt Chemnitz, TU Chemnitz, Landesamt für Schule und Bildung, Chemnitz
Siehe: www.memo2025.de

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2025

Aufgabe T-8 (Teamwettbewerb, 10. MeMO, 2016, Vöcklabruck, Österreich) Wir betrachten die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ mit positiven ganzen Zahlen a, b, c. Zeige:

a) Für $n = 2017$ gibt es keine Lösungen (a, b, c).
b) Für $n = 2016$ muss in jeder Lösung (a, b, c) die Zahl a durch 3 teilbar sein.
c) Für $n = 2016$ hat die Gleichung unendlich viele Lösungen (a, b, c).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir unterscheiden Fälle entsprechend der Parität der Variablen a, b, c.

Fall 1: Sind alle Variablen a, b, c ungeradzahlig, so sind auch a^2, b^2, c^2, abc ungeradzahlig und es kann keine Lösung mit ungerader Zahl $n = 2017$ geben, da auf der linken Seite der Gleichung die Summe von vier ungeraden Zahlen zu bilden ist, also geradzahlig wird.

Fall 2: Ist genau eine der Variablen geradzahlig, o.B.d.A. sei dies a, so ist $abc - a^2$ geradzahlig, aber auf der linken Seite der Gleichung ist die Summe von drei ungeraden Zahlen b^2, c^2 und $n = 2017$ zu bilden, also ungeradzahlig.

[13] Siehe: https://chemnitz2025.de/programm/

$Fall\ 3$: Sind genau zwei der Variablen geradzahlig, o.B.d.A. seien dies a und b, so sind a^2, b^2 und abc ohne Rest durch 4 teilbar. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl bei Division durch 4 stets den Rest 1 lässt und $n = 2017$ ebenfalls bei Division durch 4 den Rest 1 lässt, kann $c^2 + 2017$ nicht restlos durch 4 teilbar sein, im Widerspruch zu $abc - a^2 - b^2$ als Vielfaches von 4.

Fall 4: Alle Variablen a, b, c sind geradzahlig. Dann ist auch $abc - a^2 - b^2 - c^2$ geradzahlig, im Widerspruch zur ungeraden Zahl $n = 2017$.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine Lösung der gegebenen Gleichung für $n = 2017$ geben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir betrachten die Reste bei Division durch 3 und verwenden die bekannte Aussage, dass Quadratzahlen bei Division durch 3 den Rest 0 oder 1 lassen. Außerdem ist $n = 2016$ ebenfalls durch 3 teilbar, $n = 3 \cdot 672$.

Fall 1: ist keine der Variablen durch 3 teilbar, dann ist auch das Produkt abc nicht durch 3 teilbar. Im Widerspruch dazu ist die Summe von drei (nicht durch 3 teilbaren) Quadratzahlen restlos durch 3 teilbar, so dass die linke Seite der Gleichung durch 3 teilbar ist. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Fall 2: Ist wenigstens eine der drei Variablen durch 3 teilbar, dann ist auch das Produkt abc restlos durch 3 teilbar. Die linke Seite der Gleichung kann aber nur dann durch 3 teilbar sein, wenn auch die beiden anderen Variablen durch 3 teilbar sind, weil andernfalls ein Rest von 1 (Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren Zahl) oder 2 (Summe zweier Quadrate von nicht durch 3 teilbaren Zahlen) bei Division durch 3 verbleibt.

Wenn es eine Lösung gibt, so sind also alle drei Variablen und insbesondere auch a ohne Rest durch 3 teilbar.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Nach Teilaufgabe b) gibt es für eine Lösung (a, b, c) der gegebenen Gleichung mit $n = 2016$ ganze Zahlen x, y, z, so dass auch $(3x, 3y, 3z)$ Lösung dieser Gleichung ist. Setzen wir diese Lösung in die Gleichung ein und dividieren beide Seiten durch 9, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + z^2 + 224 = 3xyz.$$

Setzen wir $x = 1$, so reduziert sich die Gleichung wegen $225 = 15^2$ zu

$$y^2 + z^2 + 225 = 3yz.$$

Offenbar ist diese Gleichung für $y = z = 15$ erfüllt. Sei nun (y_0, z_0) mit $y_0 \geq z_0$ eine Lösung der Gleichung, dann suchen wir die zweite Lösung z_1 für dieses festes y_0

$y_0^2 + z^2 + 225 = 3y_0 z$, also $z^2 - 3y_0 \cdot z + 225 + y_0^2 = 0$.

Nach dem Satz von VIETA gilt für die Summe der beiden Lösungen $z_0 + z_1 = 3y_0$. Offenbar ist für ganze Zahlen y_0 und z_0 auch die zweite Lösung z_1 ganzzahlig. Außerdem gilt $z_1 = 3y_0 - z_0 \geq 2y_0 > y_0$. Wir erhalten also mit (z_1, y_0) eine Lösung der gegebenen Gleichung mit $z_1 \geq y_0$ und $y_0 \geq z_0$. Diese iterative Lösungsfindung können wir immer wieder anwenden, so dass wir unendlich viele Lösungstupel finden. ❑

Anmerkung: Die Lösungsdarstellung über die Existenz unendlich vieler Lösungstupel können wir mit der expliziten Angabe geeigneter Tupel ergänzen:

$(3,45,45)$: $9 + 2025 + 2025 + 2016 = 3 * 2025 = 3 \cdot 45 \cdot 45$
$3 \cdot 45 - 45 = 90, (3,90,45)$: $9 + 8100 + 2025 + 2016 = 12150 = 3 \cdot 90 \cdot 45$
$3 \cdot 90 - 45 = 225, (3,225,90)$: $9 + 50625 + 8100 + 2016 = 60750 = 3 \cdot 225 \cdot 90$

usw.

Monatsaufgabe 06/2025[14]

Gesucht sind alle natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt.

Termine

66. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), 10. bis 20.07.2025, Sunshine Coast (Australien), www.imo2025.au

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 25. bis 31.08.2025, Chemnitz, www.memo2025.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort ... 2
Thema 32 – Zug um Zug: Spiele im Wettbewerb ... 3
Thema 33 – Rationale Zahlen – eine MO-Aufgabenfamilie ... 9
In alten Mathe-Büchern geblättert ... 14
Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte ... 17
Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade ... 19
Rückblick auf den 7. Tag der Mathematik ... 20
19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade in Chemnitz ... 21
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2025 ... 22
Monatsaufgabe 06/2025 ... 24
Termine ... 24

[14] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.08.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[15]	Nr.	Thema	Aufgabe
06+07/2025 (Juni/Juli)	Thema 33	Rationale Zahlen	
	Thema 32	Zug und Zug – Spiele im Wettbewerb	MO641033 MO640933
05/2025 (Mai)	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641032 MO640935 MO640932
	Thema 9.4	Summen von Quadraten	MO641036 MO640936
04/2025 (Apr.)	Thema 31.2	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641013 MO611023
03/2025 (März)	Thema 31.1	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922 MO621033
	Thema 25.2	Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzeln	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

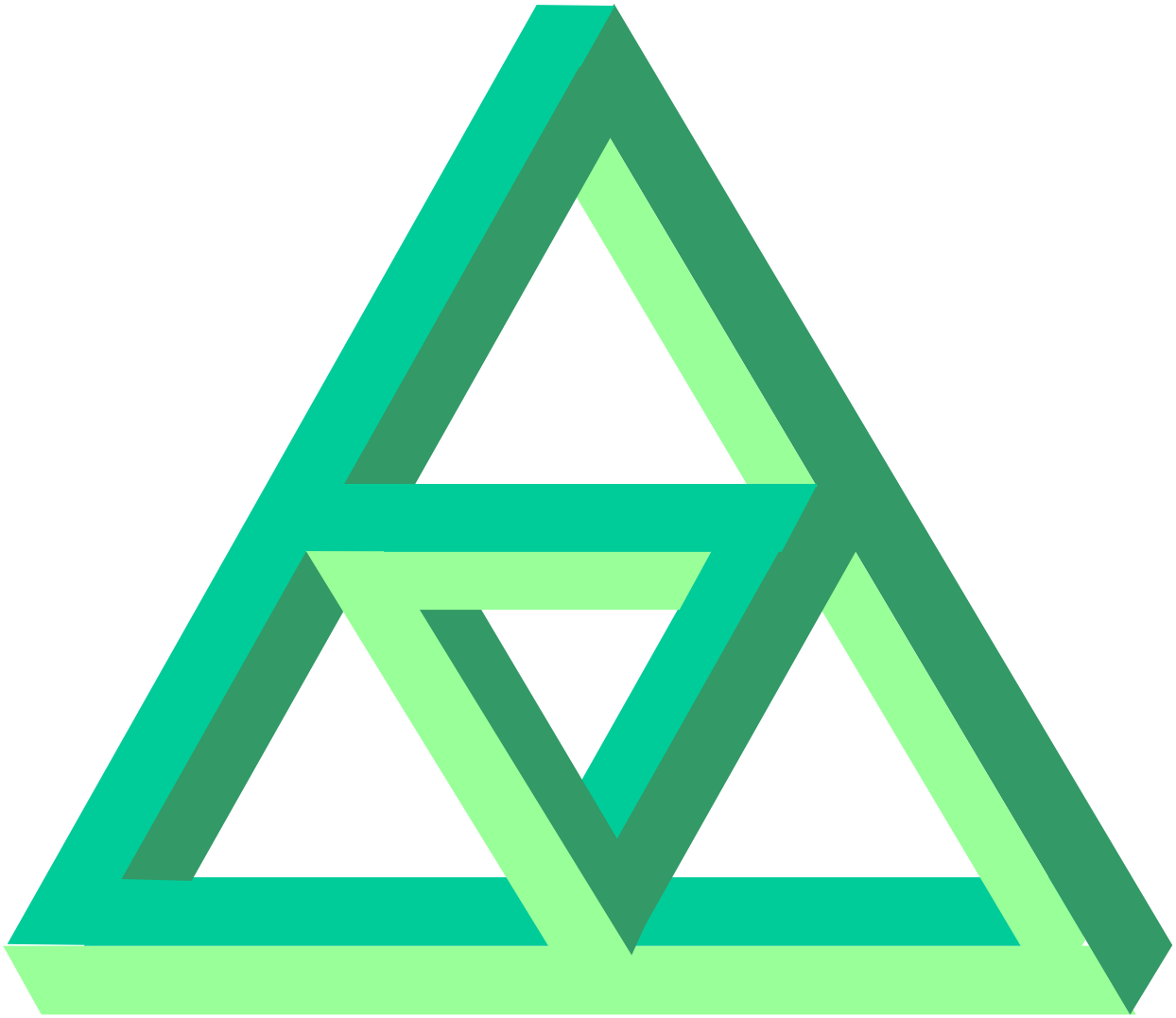
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[15] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 08/2025 (August 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir eröffnen das neue Schuljahr mit dem Rückblick auf die Aufgaben der Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade. Das „Leitthema“ des vergangenen Schuljahres konnte erneut mehrfach angewandt werden. Während in Aufgabe **MO641043** bereits in der Aufgabenstellung auf ein Koordinatensystem hingewiesen wurde, erscheint diese Lösungsvariante in den Aufgaben **MO640942/MO641042** überraschend. Die beiden Aufgaben passen aber ebenso zum Thema 25 „Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken“.

Mit den Aufgaben **MO640946/MO641046** untersuchen wir das neue Thema „Zyklische Aufgabenformulierungen“. Diese Probleme haben oft den Vorteil, Verallgemeinerungen zu finden, so dass damit eine intensive Nachbereitung zur MO erfolgen kann. Weil dabei die (allgemein bekannten) Mittelungleichungen oft als Lösungsansatz hilfreich sein können, fassen wir diese Ungleichungen nebst Beweisen zusammen.

Wir berichten von der **66. Internationalen Mathematik-Olympiade**, bei der das deutsche Team den 29. Platz erreichte. Auch wenn die sechs Aufgaben sehr hohen Schwierigkeitsgrad haben, lassen sich Einstiegsprobleme formulieren, die zum Verständnis der Herausforderungen beitragen können.

Unter Termine wird ausdrücklich auf die **19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade** in Chemnitz hingewiesen – Gäste sind zur Abschlussveranstaltung herzlich willkommen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25.3 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken[3]

Aufgabe 25.07 – MO640942. Betrachtet wird die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+5}\geq\sqrt{17}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen Zahlen x definiert ist.
b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit beider Seiten?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wegen $x^2+4\geq 4$ und $x^2-2x+5=(x-1)^2+4\geq 4$ sind beide Wurzeln für alle reellen x definiert, damit ist der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen x definiert.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir gehen von der allgemeingültigen Ungleichung $4\cdot(2\cdot x-1)^2\geq 0$ aus[4], multiplizieren das Quadrat aus und formen wie folgt äquivalent um.

$$\begin{aligned}
&16\cdot x^2-16\cdot x+4\geq 0 && |+x^2+16\cdot x-4\\
&17\cdot x^2\geq x^2+16\cdot x-4 && |+68\\
&17\cdot x^2+68\geq x^2+16\cdot x+64 && |\text{Zusammenfassen}\\
&17\cdot(x^2+4)\geq(x+8)^2 && |\text{ Radizieren}\\
&\sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+4}\geq x+8 && |\cdot(-2)\\
&-2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+4}\leq -2\cdot x-16 && |+17+x^2+4\\
&17-2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+4}+x^2+4\leq x^2+4-2\cdot x-16+17 && |\text{Zus.}\\
&\left(\sqrt{17}-\sqrt{x^2+4}\right)^2\leq x^2-2\cdot x+5 && |\text{Radizieren}\\
&\sqrt{17}-\sqrt{x^2+4}\leq\sqrt{x^2-2\cdot x+5} && |+\sqrt{x^2+4}
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung: $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2\cdot x+5}\geq\sqrt{17}$.

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn in der ersten Ungleichung die Gleichheit erfüllt ist, also wenn $x=\frac{1}{2}$ gilt, wie die Probe bestätigt:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+5}=\sqrt{\frac{17}{4}}+\sqrt{\frac{17}{4}}=\sqrt{17}.$$

❑

Aufgabe 25.08 – MO641042. Betrachtet wird die Ungleichung

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}\geq A.$$

[3] siehe auch Thema 25.1 in Heft 11/2023, Thema 25.2 in Heft 03/2025
[4] Diese Ungleichung finden wir natürlich durch Herleitung in umgekehrter Richtung.

a) Zeigen Sie, dass der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen Zahlen x definiert ist.
b) Bestimmen Sie die größtmögliche reelle Zahl A so, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wegen $x^2+1 \geq 1$ und $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 1$ sind beide Wurzeln für alle reellen x definiert, damit ist der Term auf der linken Seite der Ungleichung für alle reellen x definiert.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Ist der Wert für A bekannt, kann der Beweis wie in Aufgabe MO640942 geführt werden. Wir könnten vermuten, dass der minimale Wert angenommen wird, wenn die beiden Wurzelausdrücke gleich groß sind. Dies ist wegen $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2-2\cdot x+2}$ für $x = \frac{1}{2}$ der Fall, was uns zu $A = \sqrt{5}$ führt. Mit dieser Annahme finden wir ausgehend von einer allgemeingültigen Ungleichung folgende Umformungen:

$$
\begin{array}{ll}
(2\cdot x-1)^2 \geq 0 & |\text{Ausmultiplizieren} \\
4\cdot x^2-4\cdot x+1 \geq 0 & |+x^2+4x+4 \\
5\cdot(x^2+1) \geq x^2+4\cdot x+4 & |\text{ Radizieren} \\
\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1} \geq x+2 & |\cdot(-2) \\
-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1} \leq -2\cdot x-4 & |+x^2+6 \\
5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1}+x^2+1 \leq x^2-2\cdot x+2 & |\text{ vollständiges Quadrat} \\
\left(\sqrt{5}-\sqrt{x^2+1}\right)^2 \leq x^2-2\cdot x+2 & |\text{ Radizieren} \\
\sqrt{5}-\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x^2-2\cdot x+2} & |+\sqrt{x^2+1}
\end{array}
$$

und schließlich $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2\cdot x+2} \geq \sqrt{5}$

Gehen wir aber davon aus, dass wir A nicht vorab bestimmen (schätzen) können, formen wir die gegebene Ungleichung wie folgt äquivalent um:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{x^2-2\cdot x+2} \geq A-\sqrt{x^2+1} \\
x^2-2\cdot x+2 \geq A^2-2\cdot A\cdot\sqrt{x^2+1}+x^2+1 \\
A^2+2\cdot x-1 \leq 2\cdot A\cdot\sqrt{x^2+1} \\
A^4+2\cdot A^2\cdot(2\cdot x-1)+4\cdot x^2-4\cdot x+1 \leq 4\cdot A^2\cdot(x^2+1) \\
x^2\cdot(4-4\cdot A^2)+x\cdot(4\cdot A^2-4)+A^4-6\cdot A^2+1 \leq 0
\end{array}
$$

Da wir in Teilaufgabe a) gesehen haben, dass jeder Wurzelausdruck mindestens den Wert 1 hat, ist A mindestens 2. Somit ist $4-4\cdot A^2 < 0$. Wir können also die Ungleichung durch $4-4\cdot A^2$ teilen und müssen dabei allerdings auf die Umkehrung des Relationszeichen achten:

$$x^2 - x + \frac{A^4 - 6 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{A^2 - 6 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen Zahlen x erfüllt, wenn $\frac{A^4-6\cdot A^2+1}{4-4\cdot A^2} - \frac{1}{4} \geq 0$ gilt. Es genügt deshalb $A^4 - 6 \cdot A^2 + 1 - 1 + A^2 = 0$ zu untersuchen. Aus dieser Gleichung erhalten wir $A^2 \cdot (A^2 - 5) = 0$. Auf diese Weise finden wir $A = \sqrt{5}$ (da $A = 0$ nicht der größtmögliche Wert sein kann). ❑

Nachtrag zur Aufgabe MO640942: Wir bestimmen die größtmögliche reelle Zahl A so, dass die Ungleichung $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq A$ für alle reellen x erfüllt ist.

$$\sqrt{x^2 - 2 \cdot x + 5} \geq A - \sqrt{x^2 + 4}$$
$$x^2 - 2 \cdot x + 5 \geq A^2 - 2 \cdot A \cdot \sqrt{x^2 + 4} + x^2 + 4$$
$$A^2 + 2 \cdot x - 1 \leq 2 \cdot A \cdot \sqrt{x^2 + 4}$$
$$A^4 + 2 \cdot A^2 \cdot (2 \cdot x - 1) + 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 \leq 4 \cdot A^2 \cdot (x^2 + 4)$$
$$x^2 \cdot (4 - 4 \cdot A^2) + x \cdot (4 \cdot A^2 - 4) + A^4 - 18 \cdot A^2 + 1 \leq 0$$

Wir haben in Teilaufgabe a) die Abschätzung $A \geq 5$. Somit ist $4 - 4 \cdot A^2 < 0$. Wir können also die Ungleichung durch $4 - 4 \cdot A^2$ teilen und müssen dabei allerdings auf die Umkehrung des Relationszeichen achten:

$$x^2 - x + \frac{A^4 - 18 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{A^2 - 18 \cdot A^2 + 1}{4 - 4 \cdot A^2} \geq 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen Zahlen x erfüllt, wenn $\frac{A^4-18\cdot A^2+1}{4-4\cdot A^2} - \frac{1}{4} \geq 0$ gilt. Es genügt deshalb, die Gleichung $A^4 - 18 \cdot A^2 + 1 - 1 + A^2 = 0$ zu untersuchen. Aus dieser Gleichunge erhalten wir $A^2 \cdot (A^2 - 17) = 0$. Auf diese Weise finden wir $A = \sqrt{17}$ (da $A = 0$ nicht der größtmögliche Wert sein kann).

Thema 31.4 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[5]

Dem Leitthema dieses MO-Jahrganges folgend gibt es für Teil b) der **Aufgaben MO640942** bzw. **M0641042** überraschende Lösungsansätze:

[5] siehe auch Thema 31.1 in Heft 03/2025, Thema 31.2 in Heft 04/2025 und Thema 31.3 in Heft 05/2025

Aufgabe 31.20. Betrachtet wird die Ungleichung $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+5}\geq\sqrt{17}$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit beider Seiten?

Lösungshinweise: Wir betrachten in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(0,-2)$ und $B(1,2)$ sowie den (variablen) Punkt $C(x,0)$ mit reeller Variablen x. Wir bestimmen die Streckenlängen mit dem EUKLIDischen Abstand:

$$\overline{AC}=\sqrt{(0-x)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{x^2+4}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(1-x)^2+(2-0)^2}=\sqrt{x^2-2\cdot x+5}$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$$

Im Dreieck ΔABC gilt stets die Dreiecksungleichung, also gilt wie behauptet für jede reelle Zahl x

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2\cdot x+5}\geq\overline{AB}=\sqrt{17}$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn das Dreieck zu einer Strecke entartet und $C(x,0)$ im Innern der Strecke $\overline{AB}$ liegt, also im Fall von $x=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 31.21. Betrachtet wird die Ungleichung $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}\geq A$. Bestimmen Sie die größtmögliche reelle Zahl A so, dass die Ungleichung für alle reellen x erfüllt ist. Für welche x gilt Gleichheit beider Seiten?

Lösungshinweise: Um die gegebenen Wurzelausdrücke zu erhalten, betrachten wir in einem kartesischen Koordinatensystem (in Anlehnung an obige Aufgabe) die Punkte $A(0,-1)$ und $B(1,1)$ sowie den (variablen) Punkt $C(x,0)$ mit reeller Variablen x. Wir bestimmen die Streckenlängen mit dem EUKLIDischen Abstand:

$$\overline{AC}=\sqrt{(0-x)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{x^2+1}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(1-x)^2+(1-0)^2}=\sqrt{x^2-2\cdot x+2}$$

Dann ergibt sich die Länge

$$\overline{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

Im Dreieck ΔABC gilt stets die Dreiecksungleichung, also gilt wie behauptet für jede reelle Zahl x

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}\geq\overline{AB}=\sqrt{5}.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn das Dreieck zu einer Strecke entartet und $C(x,0)$ im Innern der Strecke $\overline{AB}$ liegt, also im Fall von $x=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 31.22 – MO641043. In einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene sei eine endliche Anzahl von Quadraten gegeben. Dabei sind diese Quadrate alle paarweise kongruent und alle ihre Seiten sind parallel zu den Achsen des Koordinatensystems. Des Weiteren bezeichne S die Menge aller Punkte der Ebene, die zu mindestens einem dieser Quadrate gehören.

Zeigen Sie: Hat S die Fläche 6, so kann man immer eines oder mehrere der gegebenen Quadrate derart auswählen, dass die ausgewählten Quadrate paarweise disjunkt sind und zusammen eine Fläche ≥ 1 haben.

Hinweis: Zu einem Quadrat gehören alle Punkte im Inneren und auf den Kanten sowie die vier Ecken. Quadrate heißen paarweise disjunkt, falls es keinen Punkt der Ebene gibt, der zu mindestens zweien der Quadrate gehört.

Lösungshinweise: Ohne Einschränkung seien die gegebenen kongruenten Quadrate als $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ für eine positive ganze Zahl $n > 0$ aufgelistet, wobei wir eine Auflistung ohne Wiederholungen annehmen, d.h. die Mittelpunkte der Quadrate $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sind paarweise verschieden.

Es sei (x_k, y_k) der Mittelpunkt des Quadrates Q_k. Die Reihenfolge wählen wir dabei so, dass gilt: $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. Desweiteren bezeichne $2 \cdot a$ die gemeinsame Seitenlänge der kongruenten Quadrate. Das Quadrat Q_k hat somit den Flächeninhalt $4 \cdot a^2$ und die Eckpunkte

$$(x_k - a, y_k - a); (x_k + a, y_k - a); (x_k + a, y_k + a); (x_k - a, y_k + a)$$

Es lassen sich nun aus $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ rekursiv Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$ mit den geforderten Eigenschaften wie folgt auswählen:

(I) Als Q'_1 wählen wir das Quadrat Q_1.

(II) Sind $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_j$ bereits gesetzt, so wählen wir als Q'_{j+1} das erste Quadrat aus der Liste $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, welches verschieden und disjunkt ist zu $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_j$. Lässt sich kein geeignetes Quadrat Q'_{j+1} finden, so endet der Prozess mit $m = j$ und der Auswahl $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_j$.

Mit (II) sind die ausgewählten Quadrate $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$ offensichtlich paarweise disjunkt.

Nach der erfolgten Auswahl gilt für alle $1 \leq j \leq m$, dass das Quadrat Q'_j eines der ursprünglichen Quadrate ist, beispielsweise $Q'_j = Q_{i_j}$ mit $1 \leq i_j \leq n$. Mit (I) ist $i_1 = 1$ und mit (II) gilt $i_j < i_{j+1}$ für alle $1 \leq j < m$. Es folgt somit die Monotonie der Indizes $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$.

Zum Quadrat Q'_j bezeichne R'_j das Rechteck mit den Eckpunkten

$$\left(x_{i_j} - 3 \cdot a, y_{i_j} - a\right);\ \left(x_{i_j} + a, y_{i_j} - 3 \cdot a\right);$$
$$\left(x_{i_j} + 3 \cdot a, y_{i_j} + 3 \cdot a\right);\ \left(x_{i_j} - 3 \cdot a, y_{i_j} + 3 \cdot a\right)$$

und zugehörigem Flächeninhalt $24 \cdot a^2$. Wir stellen fest: Die Rechtecke $R'_1, R'_2, \ldots, R'_m$ überdecken zusammen die Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Um dies zu beweisen, sei Q_k mit $1 \leq k \leq n$ ein beliebiges der Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

- Ist dabei $Q_k = Q'_j$ eines der ausgewählten Quadrate $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$, so wird Q_k offensichtlich vom Rechteck R'_j überdeckt.
- Ist jedoch Q_k keines der Quadrate $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$, folgt $k > 1 = i_1$. Wir wählen nun $1 \leq j \leq m$ maximal mit $i_j < k$. Mit (II) ist dann mindestens eines der Quadrate $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_j$ nicht disjunkt zu Q_k, da sich ansonsten der Widerspruch $Q_k = Q'_{j+1}$ ergibt. Es findet sich daher ein $1 \leq l \leq j$, so dass Q'_l nicht disjunkt ist zu Q_k. Damit liegt der Mittelpunkt (x_k, y_k) des Quadrates Q_k aber im Inneren oder auf dem Rand des Quadrates mit den Eckpunkten

  $$\left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l} - 2 \cdot a\right);\left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l} - 2 \cdot a\right);$$
  $$\left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right);\left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right)$$

Da zudem $i_l \leq i_j < k$, folgt $y_{i_l} \leq y_k$ mit (1). Der Mittelpunkt (x_k, y_k) des Quadrates Q_k liegt somit im Inneren oder auf dem Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten

$$\left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l}\right);\left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l}\right);\left(x_{i_l} + 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right);\left(x_{i_l} - 2 \cdot a, y_{i_l} + 2 \cdot a\right)$$

womit Q_k vom Rechteck R'_l überdeckt wird, also gilt die Überdeckung.

Laut Aufgabenstellung überdecken die Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ zusammen eine Fläche S der Größe 6. Mit (3) überdecken somit auch $R'_1, R'_2, \ldots, R'_m$ zusammen eine Fläche der Größe ≥ 6. Da jedes der Rechtecke einen Flächeninhalt $24 \cdot a^2$ hat, ergibt sich eine Gesamtfläche $m \cdot 24 \cdot a^2 \geq 6$. Es folgt daraus $m \cdot 4 \cdot a^2 \geq 1$, womit die disjunkten Quadrate $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$ eine Gesamtfläche ≥ 1 haben. ❑

Thema 34 – Zyklische Aufgabenformulierungen

In einer Aufgabe nennen wir die Variablen zyklisch angeordnet, wenn sich durch zyklische Vertauschung der Variablen der Aufgabenstellung inhaltlich nicht verändert. So sind beispielsweise die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 im Term $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_1}$ zyklisch angeordnet, weil eine Index-Verschiebung

$$x_2 \coloneqq x_1, x_3 \coloneqq x_2, x_4 \coloneqq x_3, x_1 \coloneqq x_4$$

die Aufgabenstellung $\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ nicht verändert.

Aufgabe 34.01 – MO640946. Es seien $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ nicht-negative Zahlen mit Summe 1. Was ist der größte Wert, den der Ausdruck

$$X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_4 \cdot x_5 + x_5 \cdot x_6 + x_6 \cdot x_1$$

annehmen kann?

Aufgabe 34.02 – MO641046. Es seien $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ nicht-negative reelle Zahlen mit Summe 1. Was ist der größte Wert, den der Ausdruck

$$X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + x_4 \cdot x_5 + x_5 \cdot x_6 + x_6 \cdot x_7 + x_7 \cdot x_1$$

annehmen kann?

Die formale Ähnlichkeit beider Aufgaben motiviert, eine Verallgemeinerung zu untersuchen.

Aufgabe 34.03. Es seien $n \geq 2$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht-negative reelle Zahlen mit Summe 1. Was ist in Abhängigkeit von n der größte Wert, den der Ausdruck

$$X = x_1 \cdot x_2 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1$$

annehmen kann?

Lösungshinweise: Untersuchen wir zunächst den Fall $n = 2$. Dann ist der größte Wert für $X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2$ mit $x_1 + x_2 = 1$ gesucht.

Verwenden wir die als bekannt vorausgesetzte Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel[6], so erhalten wir für positive Zahlen x_1, x_2 mit $x_1 + x_2 = 1$ die Abschätzung

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2},$$

woraus unmittelbar $x_1 \cdot x_2 \leq \frac{1}{4}$ und somit $X \leq \frac{1}{2}$ folgt. Die Gleichheit gilt im Fall von $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Ist eine der Variablen gleich null, dann gilt diese Abschätzung trivialerweise.

Um die Abschätzung direkt herzuleiten, schreiben wir $y = x_1$. Damit erhalten wir wegen $1 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$

$$1 = y^2 + (1 - y)^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot y^2 - 2 \cdot y + 1 + X.$$

Nach einfacher Umformung können wir diese Gleichung mittels quadratischer Ergänzung als

[6] Siehe Beitrag am Ende des Heftes

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = X$$

schreiben. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist, folgt unmittelbar $X \leq \frac{1}{2}$. Dabei wird der maximale Wert $\frac{1}{2}$ im Fall von $y = x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ tatsächlich auch angenommen.

Untersuchen wir mit diesem Ansatz nun eine beliebige gerade Zahl $n = 2 \cdot m$ mit $m > 1$. Aus $1 = \left((x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m})\right)^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &1 - (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1})^2 - (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m})^2 \\ &= 2 \cdot (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1}) \cdot (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}). \end{aligned}$$

Schreiben wir $y = x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1}$, so gilt $1 - y = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}$. Folglich können wir die linke Seite der Gleichung zu $2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)$ umformen. Das Ausmultiplizieren des Produktes auf der rechten Seite der Gleichung führt zu einer Summe von nicht-negativer Summanden, unter denen alle in X vorkommenden paarweisen Produkte enthalten sind,

$$\frac{1}{4} - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1}) \cdot (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}) \geq X\,.$$

Somit kann X den Wert $\frac{1}{4}$ nicht übersteigen. Da im Fall $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = \cdots = x_{2m} = 0$ sogar $X = \frac{1}{4}$ gilt, kann der Ausdruck den maximalen Wert auch annehmen.

Wir erkennen nun, dass dieser Ansatz nicht unmittelbar auf eine ungerade Zahl $n = 2m + 1$ übertragen werden kann. Mit einer Aufteilung der ungeraden Indizes in den ersten Klammerausdruck und der geraden Indizes in den zweiten Klammerausdruck lässt sich das Produkt $x_{2m+1} \cdot x_1$ nicht erzeugen. Schnell stellen wir fest, dass auch bei anderen Aufteilungen der Summanden in zwei Klammerausdrücke nicht alle paarweisen Produkte erzeugt werden können.

Untersuchen wir deshalb zunächst den Fall $n = 3$. Es ist hierbei der größte Wert von $X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ gesucht.

Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ erhalten wir für $x_1 \neq 1$ in Analogie zur obigen Überlegung

$$\frac{x_2}{1 - x_1} + \frac{x_3}{1 - x_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_2}{1 - x_1} \cdot \frac{x_3}{1 - x_1} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_2 \cdot x_3 \leq \frac{1}{4} \cdot (1 - x_1)^2,$$

wobei die Gleichheit bei $x_2 = x_3 = \frac{1 - x_1}{2}$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} &X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 \\ &= x_1 \cdot (x_2 + x_3) + x_2 \cdot x_3 \leq x_1 \cdot (1 - x_1) + \frac{1}{4} \cdot (1 - x_1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{3}{4} \cdot x_1^2 \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung können wir zu $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} - \left(x_1 - \frac{1}{3}\right)^2\right)$ umformen. Somit finden wir die Abschätzung $X \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$, weil das Quadrat in der Klammer stets nicht-negativ ist. Der Maximalwert wird für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$ auch angenommen.

Betrachten wir nun die Summe für ungerade Zahlen $n = 2m + 1$ mit $m > 2$

$$X = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2m-1} \cdot x_{2m} + x_{2m} \cdot x_{2m+1} + x_{2m+1} \cdot x_1$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass keine dieser $2m + 1$ Variablen kleiner als x_{2m+1} ist (andernfalls können wir die Variablen zyklisch entsprechend umbenennen). Wenn wir im vorletzten Summanden x_{2m+1} durch x_1 ersetzen und den positiven Summanden $x_{2m-1} \cdot x_{2m+1}$ anfügen, erhalten wir

$$X \leq x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2m-1} \cdot x_{2m} + x_{2m} \cdot x_1 + x_{2m+1} \cdot x_1 + x_{2m-1} \cdot x_{2m+1}$$
$$X \leq x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2m-1} \cdot (x_{2m} + x_{2m+1}) + (x_{2m} + x_{2m+1}) \cdot x_1$$

Damit haben wir aber die Situation für $2m$ Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m} + x_{2m+1})$ mit Summe 1, für die wir den Maximalwert $\frac{1}{4}$ bereits kennen. ❑

Aufgabe 34.04. Es seien $n > 1$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen. Man zeige die Ungleichung

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Lösungshinweise: Für $n = 2$ lautet die Ungleichung $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$, die als allgemein bekannt vorausgesetzt werden darf. Um diese Aussage dennoch zu beweisen, kennen wir zwei Ansätze:

- *Quadrat einer reellen Zahl:* Aus $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0$ erhalten wir $x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \cdot x_1 \cdot x_2$, woraus nach Division durch $x_1 \cdot x_2 > 0$ die Behauptung folgt.
- *Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel:* Aus $1 = \sqrt{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}} \leq \frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}}{2}$ erhalten wir nach Multiplikation mit 2 die Behauptung.

Während der erstgenannte Ansatz eine Verallgemeinerung nicht unmittelbar erkennen lässt, hilft die verallgemeinerte Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel: Aus der Ungleichung

$$1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_1}} \leq \frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1}}{n}$$

folgt nach Multiplikation mit n die Behauptung. ❑

Aufgabe 34.05 – MO520943. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x}$$

Lösungshinweise: Eine notwendige Bedingung an jede Lösung (x, y, z) ist $x, y, z \neq 0$. Wir formen die erste Gleichung $x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z}$ um zu $x - y = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{y-z}{y \cdot z}$. In ähnlicher Weise erhalten wir $y - z = \frac{z-x}{z \cdot x}$; $z - x = \frac{x-y}{x \cdot y}$. Multiplikation dieser drei Gleichungen liefert

$$(x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x) = -(x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x) \cdot \frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}$$

oder äquivalent

$$(x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x) \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}\right) = 0$$

Da offensichtlich der Ausdruck $1 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} > 1$ stets positiv ist, gilt die Gleichung genau dann, wenn $x = y$ oder $y = z$ oder $z = x$ erfüllt ist. Es sei deshalb o.B.d.A. $x = y$. Dann folgt aber aus

$$x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z}, \quad \text{also} \quad x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{z}$$

die Gleichheit $x = z$, also ist $x = y = z$ und (x, x, x) für $x \neq 0$ ist die einzig mögliche Lösung des Gleichungssystems. Eine Probe bestätigt, dass dieses Ergebnis wirklich Lösung ist. ❑

Aufgabe 34.06 – MO521043. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$

Lösungshinweise: Eine notwendige Bedingung an jede Lösung (x, y, z) ist $x, y, z \neq 0$. Wir setzen $a = x + \frac{1}{y}$. Dann gilt $\frac{1}{y} = a - x$, also $y = \frac{1}{a-x}$, und wegen $a = z + \frac{1}{x}$ auch $z = a - \frac{1}{x}$. Verwenden wir diese Zusammenhänge in der Gleichung $a = y + \frac{1}{z}$, so erhalten wir nacheinander

$$a = \frac{1}{a - x} + \frac{x}{a \cdot x - 1},$$
$$a \cdot (a - x) \cdot (ax - 1) - (ax - 1) - (a - x) \cdot x = 0,$$
$$(1 - a^2) \cdot (x^2 - a \cdot x + 1) = 0.$$

Es gilt also $a = 1, a = -1$ oder $x^2 - a \cdot x + 1 = 0$.

Fall 1: Aus $a = 1$ folgt wegen $a = x + \frac{1}{y} \neq x$ sofort $x \neq 1, y = \frac{1}{1-x}, z = -\frac{1-x}{x}$.

Fall 2: Aus $a = -1$ folgt wie im Fall 1 sofort $x \neq -1, y = -\frac{1}{1+x}, z = -\frac{1+x}{x}$.

Fall 3: Aus $x^2 - a \cdot x + 1 = 0$ erhalten wir (wegen $x \neq 0$) $a = x + \frac{1}{x}$. Mit $a = x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x}$ folgt daraus unmittelbar $x = y = z$.

Eine Probe bestätigt[7], dass die Tripel

$$(x, x, x) \quad \text{für} \quad x \neq 0\,,$$
$$\left(x, \frac{1}{1-x}, -\frac{1-x}{x}\right) \quad \text{für} \quad x \notin \{0\,, 1\}\,,$$
$$\left(x, -\frac{1}{1+x}, -\frac{1+x}{x}\right) \quad \text{für} \quad x \notin \{-1\,, 0\}$$

auch wirklich Lösungen und damit (genau) alle Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$x + \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = x + 1 - x = 1; \frac{1}{1-x} - \frac{1}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1; -\frac{1-x}{x} + \frac{1}{x} = 1.$$

$$x - \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = x - 1 - x = -1; -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\frac{1+x}{x}} = -\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x} = -1\,;$$
$$-\frac{1+x}{x} + \frac{1}{x} = -1\,.$$

❑

Aufgabe 34.07 – MO430933/MO431032. Bestimmen Sie alle reellen Lösungstripel (a, b, c) des Gleichungssystems

$$a + bc = 1 \qquad b + ca = 1 \qquad c + ab = 1$$

Lösungshinweise: Wir multiplizieren die ersten beiden Gleichungen mit a bzw. mit b und subtrahieren die Ergebnisse voneinander. Dies führt zu

$$a^2 - b^2 = a - b$$

Wegen $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ gilt diese Gleichheit für $a = b$ oder (falls $a \neq b$) für $a = -b$.

Fall 1: $a = b$, eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $c + a^2 = 1$. Somit ist das Tripel $(a, a, 1 - a^2)$ ein Lösungskandidat. Setzen wir ein solches Tripel in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$a + a \cdot (1 - a^2) = 2 \cdot a - a^3 = 1 \quad \text{also} \quad a^3 - 2 \cdot a + 1 = 0$$

[7] Während für das erste Tripel die Probe als offensichtlich angesehen werden kann, sind die Proben der anderen Lösungstripel vorzurechnen.

Wir erkennen wegen $1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 1$, dass $a = 1$ eine Lösung dieser Gleichung ist. Somit sind $(1, 1, 0)$ und alle Vertauschungen $(1, 0, 1)$ und $(0, 1, 1)$ Lösungstripel des gegebenen Gleichungssystems. Klammern wir aus der kubischen Gleichung den Linearfaktor $(a - 1)$ aus, finden wir

$$a^3 - 2 \cdot a + 1 = a^3 - a^2 + a^2 - a - a + 1 = a^2(a - 1) + a(a - 1) - (a - 1)$$

Somit kann es auch Lösungstripel geben, wenn $a^2 + a - 1 = 0$ gilt. Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist dies für

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

erfüllt. Wegen $c = 1 - a^2 = a$ ist also (a, a, a) mit $a = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ein weiteres Lösungstripel, wie eine Probe bestätigt.

Fall 2: $a = -b \neq 0$, eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $c = \frac{a-1}{a}$. Somit ist das Tripel $\left(a, a, \frac{a-1}{a}\right)$ ein Lösungskandidat. Setzen wir ein solches Tripel in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$\frac{a - 1}{a} - a^2 = 1 \quad \text{also} \quad -a^3 - 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad a = -1.$$

Dies ergibt aber keine Lösung, weil wir mit $c = \frac{-1-1}{-1} = 2$ in der zweiten Gleichung $1 + 2 \cdot (-1) = -1 \neq 1$ finden. ❑

Aufgabe 34.08 – MO431043. Bestimmen Sie alle reellen Tupel (a, b, c, d), welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$a + bc = 1 \qquad b + cd = 1 \qquad c + da = 1 \qquad d + ab = 1$$

Lösungshinweise: Wir multiplizieren die ersten beiden Gleichungen mit d bzw. mit b und subtrahieren die Ergebnisse voneinander. Dies führt zu

$$ad - b^2 = d - b$$

Durch in ähnlicher Weise paarweise geeignete Multiplikationen und Subtraktionen finden wir auch

$$ba - c^2 = a - c \qquad cb - d^2 = b - d \qquad dc - a^2 = c - a.$$

Addieren wir die vier Gleichungen, erhalten wir

$$ab + bc + cd + da - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 0$$

Nach Multiplikation mit -2 und anschließendem Zusammenfassen ist die gleichbedeutend zu

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$$

Die Summe der vier Quadrate kann aber nur dann 0 ergeben, wenn alle Summanden gleich 0 sind, also wenn $a=b=c=d$ gilt. Setzen wir in den Ausgangsgleichung entsprechend a für die Variablen b, c oder d ein, erhalten wir jeweils

$$a+a^2=1 \quad \text{mit den Lösungen} \quad a_{1,2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1\pm\sqrt{5}\right).$$

Daher hat das Gleichungssystem genau die beiden Lösungen (a,b,c,d) mit $a=b=c=d=-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. ❑

Aufgabe 34.09 – MO450945/MO451046. Bestimmen Sie alle reellen Tripel $(x\,,y\,,z)$, welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x+y+\frac{1}{z}=3 \qquad y+z+\frac{1}{x}=3 \qquad z+x+\frac{1}{y}=3.$$

Lösungshinweise: Durch Multiplikation mit dem jeweiligen Hauptnenner folgt

$$\begin{aligned} x\cdot z+y\cdot z+1&=3z \qquad (1)\\ y\cdot x+z\cdot x+1&=3x \qquad (2)\\ z\cdot y+x\cdot y+1&=3y \qquad (3)\end{aligned}$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten Gleichung, erhalten wir $(z-x)\cdot(y-3)=0$, also $z=x$ oder $y=3$, und analog aus der dritten und zweiten Gleichung sowie aus der ersten und dritten Gleichung $x=y$ oder $z=3$ bzw. $y=z$ oder $x=3$. D.h., entweder sind zwei der Variablen gleich oder die dritte Variable ist gleich 3.

Fall 1: x,y und z sind paarweise verschieden. Wegen $x\neq y$ und $y\neq z$ muss gleichzeitig $z=x=3$, im Widerspruch zur Annahme $z\neq x$. Dieser Fall liefert somit keine Lösungen.

Fall 2: Genau zwei der Zahlen x,y und z sind gleich. Da das gegebene Gleichungssystem in den drei Variablen symmetrisch ist, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $x=y\neq z$ gilt. Mit obiger Aussage folgt damit $x=y=3$ und Einsetzen in Gleichung (3) liefert $3z+9+1=9$, also $z=-\frac{1}{3}$. Wir erhalten somit das Tripel $\left(3\,,3\,,-\frac{1}{3}\right)$ als einen Lösungskandidaten des Gleichungssystems. Die Symmetrie des Gleichungssystems liefert $\left(3\,,-\frac{1}{3}\,,3\right)$ und $\left(-\frac{1}{3}\,,3\,,3\right)$ als weitere mögliche Lösungen.

Fall 3: Es sind alle drei Variablen gleich, $x=y=z$. Dann wird Gleichung (1) zur quadratischen Gleichung $2x^2-3\cdot x+1=0$, aus der nach der Faktorisierung $(2\cdot x-1)\cdot(x-1)=0$ oder mittels der Lösungsformel $x_{1,2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}$ die

Lösungen $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ abgelesen werden können. Dies liefert weitere Lösungskandidaten $(1\,,1\,,1)$ und $\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$.

Eine Probe bestätigt, dass alle fünf gefundenen Lösungskandidaten auch wirklich Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems sind.

$$3 + 3 - \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad ; \quad 1 + 1 + \frac{1}{1} = 3 \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet also

$$L = \left\{\left(3, 3, -\tfrac{1}{3}\right), \left(3, -\tfrac{1}{3}, 3\right), \left(-\tfrac{1}{3}, 3\,, 3\right), (1\,,1\,,1), \left(\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2}\right)\right\}. \qquad \square$$

Aufgabe 34.10 – MO360923. Es seien a, b, c und d positive Zahlen. Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets die Ungleichung

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} > \frac{4}{a+b+c+d}$$

gilt!

Lösungshinweise: Da die gegebenen Variablen alle positiv sind, ist jede Summe von drei dieser Werte kleiner als die Summe aller vier Werte, zum Beispiel

$$0 < a + b + c < a + b + c + d.$$

Durch Übergang zu den Reziproken erhalten wir für dieses Beispiel $\frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{a+b+c+d}$. Addieren wir nun die in Analogie erhaltenen vier Ungleichungen, folgt daraus unmittelbar die Ungleichung. $\square$

Folgerung. Setzen wir in Aufgabe 33.10 beispielsweise $a = b = c = d = 1$, so lautet die Ungleichung $4 \cdot \frac{1}{3} > \frac{4}{4} = 1$. Offenbar ist diese Abschätzung recht grob. Deshalb stellen wir uns die Frage, ob es eine größte Zahl G gibt, so dass

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq G \cdot \frac{1}{a+b+c+d}$$

für alle positiven Zahlen a, b, c und d gilt.

Lösungshinweis: Wir verwenden die Ungleichung zwischen harmonischen und arithmetischen Mittel[8] für positive Zahlen, die besagt

[8] Siehe den Beitrag am Ende dieses Heftes

$$\frac{4}{\frac{1}{\left(\frac{1}{a+b+c}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{a+b+d}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{a+c+d}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1}{b+c+d}\right)}} \leq \frac{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d}}{4}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung vereinfachen wir zu $\frac{4}{3\cdot(a+b+c+d)}$. Somit gilt

$$\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d},$$

also $G \geq \frac{16}{3}$. Da wir oben schon gesehen haben, dass für $a=b=c=d=1$ die Ungleichung zur Gleichung $4\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}$ wird, gilt sogar $G=\frac{16}{3}$. ❑

66. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 10. bis 20. Juli 2025 in Sunshine Coast (Australien) statt. Mit 69 teilnehmenden Schülerinnen und 555 Schülern wurde ein neuer Rekord aufgestellt (bisher 621, 60. IMO in Bath, Vereinigtes Königreich). Sie kamen aus 110 Ländern (bisheriger Rekord 112 Länder zur 64. IMO in Chiba, Japan, und zur 60. IMO).

Insgesamt wurden 67 Gold-, 103 Silber- und 145 Bronzemedaillen vergeben, somit erhielten 315 Teilnehmende (50.5%) einen Preis. Mit zwei Silber- und vier Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer wieder erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 157 Punkten von 252 möglichen Punkten (62.3%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **29. Platz** erreichen (2023: 156/20. Platz; 2024: 120 Punkte/31. Platz). Angeführt wird diese Länderliste vom Vorjahreszweiten, der Volksrepublik China (231 Punkte, sechs Goldmedaillen), gefolgt von den USA (216 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaillen) und der Republik Korea (203 Punkte, vier Gold- und zwei Silbermedaillen). Von den europäischen Ländern erreichten nur die Mannschaften aus Polen (196 Punkte/4. Platz), Türkei (186/10), Rumänien (181/13), Ungarn (180/14) und aus dem Vereinigten Königreich (178/16) mehr als 175 Punkte. Vor Deutschland lagen noch weiterer fünf europäische Länder[9].

[9] Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 66. IMO

Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. Eine Gerade in der Ebene heiße *sonnig*, falls sie weder zur x-Achse noch zur y-Achse noch zur Geraden $x + y = 0$ parallel ist.

Gegeben sei eine ganze Zahl $n \geq 3$ Man bestimme alle nichtnegativen ganzen Zahlen k, sodass es n paarweise verschiedene Geraden in der Ebene gibt, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- Für alle positiven ganzen Zahlen a und b mit $a + b \leq n + 1$ liegt der Punkt (a, b) auf mindestens einer der Geraden.
- Genau k der n Geraden sind sonnig.

Aufgabe 2. Es seien Ω und Γ Kreise mit den Mittelpunkten M beziehungsweise N, wobei der Radius von Ω kleiner ist als der Radius von Γ. Die Kreise Ω und Γ schneiden einander in verschiedenen Punkten A und B. Die Gerade MN schneide Ω in C und Γ in D, wobei die Punkte C, M, N und D in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔACD sei P. Die Gerade AP schneide Ω in einem weiteren Punkt $E \neq A$. Die Gerade AP schneide Γ in einem weiteren Punkt $F \neq A$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks *PMN* sei *H*.

Man beweise, dass die durch H verlaufende Parallele zu AP eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔBEF ist.

Aufgabe 3. Die Menge der positiven ganzen Zahlen sei mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heiße *bonzig*, falls für alle positiven ganzen Zahlen a und b der Funktionswert $f(a)$ ein Teiler von $b^a - f(b)^{f(a)}$ ist.

Man bestimme die kleinste reelle Konstante c, für die $f(n) \leq cn$ für alle bonzigen Funktionen f und alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

Aufgabe 4. Ein *strenger Teiler* einer positiven ganzen Zahl N ist ein von N verschiedener positiver Teiler von N.

Die unendliche Folge $a_1, a_2, \ldots$ besteht aus positiven ganzen Zahlen, von denen jede mindestens drei strenge Teiler besitzt. Für jedes $n \geq 1$ ist a_{n+1} die Summe der drei größten strengen Teiler von a_n.

Man bestimme alle möglichen Werte von a_1.

Aufgabe 5. Alice und Bazza spielen das *Inekoalaty-Spiel*. Dabei handelt es sich um ein Spiel für zwei Personen, dessen Regeln von einer positiven reellen Zahl λ abhängen, die beiden Spielern bekannt ist. Beginnend mit $n = 1$ geschieht im n-ten Zug des Spiels Folgendes:

• Ist n ungerade, dann wählt Alice eine nichtnegative reelle Zahl x_n mit

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$

• Ist n gerade, dann wählt Bazza eine nichtnegative reelle Zahl x_n mit

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$

Kann ein Spieler keine passende Zahl x_n wählen, endet das Spiel und der andere Spieler gewinnt. Geht das Spiel unendlich lange, gewinnt keiner der Spieler. Beide Spieler kennen alle gewählten Zahlen.

Man bestimme alle Werte von λ, für die Alice eine Gewinnstrategie besitzt, und alle Werte, für die Bazza eine Gewinnstrategie besitzt.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein aus Einheitsquadraten bestehendes (2025×2025)-Spielbrett. Matilda möchte rechteckige Kacheln, die unterschiedliche Größen haben können, derart auf das Spielbrett legen, dass der Rand jeder Kachel entlang der Ränder von Einheitsquadraten verläuft und jedes Einheitsquadrat von höchstens einer Kachel überdeckt wird.

Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Kacheln, die Matilda so auf dem Spielbrett platzieren kann, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Einheitsquadrat von keiner der Kacheln überdeckt ist.

Hinweise: Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen erwartet werden. Dennoch können wir uns mit diesen Aufgaben beschäftigen, zum Beispiel wie folgt.

zu Aufgabe 1: (mit einem Punktedurchschnitt von 5.2 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 7.0 Punkte und insgesamt 368-mal volle Punktzahl gehörte diese Aufgabe zu den leichteren Problemen) Man untersuche die Fälle $n = 3$ und $n = 4$.

zu Aufgabe 2: (durchschnittlich 3.3 Punkte alle Teilnehmer/3.8 Punkte deutsches Team) Man fertige eine geeignete Zeichnung an, um die Aufgabenstellung zu visualisieren.

zu Aufgabe 3: (mit einem Punktedurchschnitt von 1.6 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 2.3 Punkte und insgesamt 418-mal 0 Punkte eine schwierige Aufgabe) Man finde bonzige Funktionen.

zu Aufgabe 4: (durchschnittlich 5.1 Punkte alle Teilnehmer/6.8 Punkte deutsches Team und insgesamt 342-mal volle Punktzahl gehörte diese Aufgabe auch zu den leichteren Problemen) Man finde drei geeignete Anfangswerte.

zu Aufgabe 5: (durchschnittlich 3.0 Punkte alle Teilnehmer/6.2 Punkte deutsches Team) Man spiele für ausgewählte Werte von λ das Spiel.

zu Aufgabe 6: (mit einem Punktedurchschnitt von 0.2 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 0.0 Punkte und insgesamt 569-mal 0 Punkte die „Knalleraufgabe“). Man untersuche das Spiel für kleine Spielfeldgrößen.

Bekannte Sätze der Mathematik: Mittelungleichungen

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

(1) Beweis der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel. Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Addieren wir auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividieren wir beide Seiten durch 4, so finden wir

$$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Beweis der Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel. Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachten wir ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

Bilden wir von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Beweis der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel. Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4 und radizieren, so erhalten wir die behauptete Ungleichung.

(4) Gilt $a \leq b$, also $\frac{a}{b} \leq 1$, so finden wir aus $2 \geq 1 + \frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ die linke äußere

Abschätzung $a = \min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Zudem folgt aus $b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ die rechte äußere Abschätzung $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b) = b$.

Folgerung. Die Ungleichungskette zwischen den Mitteln kann auf endlich viele positive reelle Zahlen $a_1,\ a_2, \ldots, a_n\ (n > 1)$ verallgemeinert werden:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}.$$

Für den Beweis nutzen wir folgenden

Hilfssatz. Für positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ gilt stets

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Beweis mittels der Methode der vollständigen Induktion[10].
(1) Induktions-Anfang: Für $n = 1$ gilt laut Voraussetzung $x_1 = 1$ und damit $x_1 \leq 1$
(2) Induktions-Schritt

Ind.-Voraussetzung: Es gelte für ein n:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Ind.-Behauptung: Es ist zu zeigen, dass dann gilt:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1$$

Ind.-Beweis: O.B.d.A. sortieren wir die Folge mit $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}$. Dann ist $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \\ \Rightarrow \quad & x_2 + x_3 + \cdots + x_n + (x_1 + x_{n+1} - 1) = n \\ \Rightarrow \quad & x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1 \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$(x_{n+1} - 1)(x_1 - 1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_{n+1}x_1 \leq x_{n+1} + x_1 - 1$$

Insgesamt folgt also:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \leq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

(3) Induktions-Schluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt somit die behauptete Gleichung für alle $n > 0$. ❑

Für den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung setzen wir nun

[10] In den Wettbewerben der Mathematik-Olympiade wird die korrekte Anwendung der Methode der vollständigen Induktion in Klassenstufen 9/10 nicht erwartet.

$$c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad ; \quad x_i = \frac{a_i}{c} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

dann gilt $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{c} = n.$

Daraus folgt wegen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{c^n} \leq 1$$

also

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

unmittelbar die Behauptung der Folgerung. Die Beweise zu (2) und (3) lassen sich nun auf *n* reelle Zahlen übertragen:

(2‘) Aus

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

folgt nach Übergang zu den Reziproken auf beiden Seiten mit Umkehrung des Relationszeichen die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel.

(3‘) Wegen $(x_i - x_j)^2 \geq 0$ mit $1 \leq i, j \leq n$ folgt $2x_i x_j \leq x_1^2 + x_2^2$. Damit finden wir

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n)$$
$$\leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (n-1) \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = n \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

Teilen wir beide Seiten durch n^2 und ziehen wir die Quadratwurzel, so erhalten wir die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und quadratischen Mittel.

Den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung können wir auch ohne diesen Hilfssatz führen, indem wir zunächst die Variablenanzahl in jedem Schritt verdoppeln (anstatt um eine Variable zu erhöhen, „Vorwärts“-Induktionsschritt). Dazu betrachten wir die positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Gilt sowohl

$$x_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = x_{arithm} \text{ und}$$
$$y_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} = y_{arithm},$$

so können wir die Mittelungleichung für die Mittelwerte anwenden:

$$\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k}} = \sqrt{x_{geom} \cdot y_{geom}} \leq \frac{x_{arithm} + y_{arithm}}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k}{2n},$$

also gilt die Mittelungleichung auch für $2 \cdot n$ Variablen. Nun gehen wir schrittweise zurück ("Rückwärts"-Induktionsschritt):

Es sei n keine Zweierpotenz mit $n < 2^k$. Wir setzen $a = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ und (mit $m = 2^k$) definieren wir weitere Variablen $x_{n+1} = \cdots = x_m = a$. Nun gilt bereits $\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k}{m}$. Wir formen weiter um:

$$a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\frac{m}{n} \cdot (x_1 + \cdots + x_n)}{m} = \frac{x_1 + \cdots + x_n + (m-n) \cdot a}{m}$$

Für $(m-n) \cdot a$ können wir nun aber $x_{n+1} + \cdots + x_m$ einsetzen und haben somit eine Zweierpotenz als Anzahl der Variablen. Deshalb gilt

$$a \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a^{m-n}}$$

Nach Potenzieren finden wir

$$a^m \geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a^{m-n}, \text{ also } a^n \geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

womit die verallgemeinerte Mittelungleichung für n Variablen bewiesen ist. ❑

Monatsaufgabe 08/2025[11]

Finde alle natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt!

Termine

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 25. bis 30. August 2025 in Chemnitz (www.memo2025.de), unter der Schirmherrschaft von Bundespräsident FRANK-WALTER STEINMEIER.

Darunter:

- „Come together" mit den MeMO-Teilnehmenden für alle Freunde und Förderer der Mathematik, Beginn 16:00 Uhr.
- Öffentliche Abschlussveranstaltung mit Preisverleihung, Beginn 19:00 Uhr.

Jeweils im Fraunhofer-Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik IWU, Reichenhainer Str. 88, 09126 Chemnitz (Anmeldung an memo2025sl@gmx.de erbeten).

65. Mathematik-Olympiade, Runde 1, zum Schuljahresbeginn (August/September 2025) https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.09.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Spotlight Mathe – Einblicke in en Bundeswettbewerb Mathematik (online-Seminar), 17. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10210

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade (online-Seminar), 18. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10211

Inhaltsverzeichnis

Vorwort ... 2
Thema 25.3 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken ... 3
Thema 31.4 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem ... 5
Thema 33 – Zyklische Aufgabenformulierungen ... 8
66. Internationale Mathematik-Olympiade ... 17
Aufgaben der 66. IMO ... 18
Bekannte Sätze der Mathematik: Mittelungleichungen ... 20
Monatsaufgabe 08/2025 ... 23
Termine ... 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[12]	Nr.	Thema	Aufgabe
08/2025	Thema 33	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

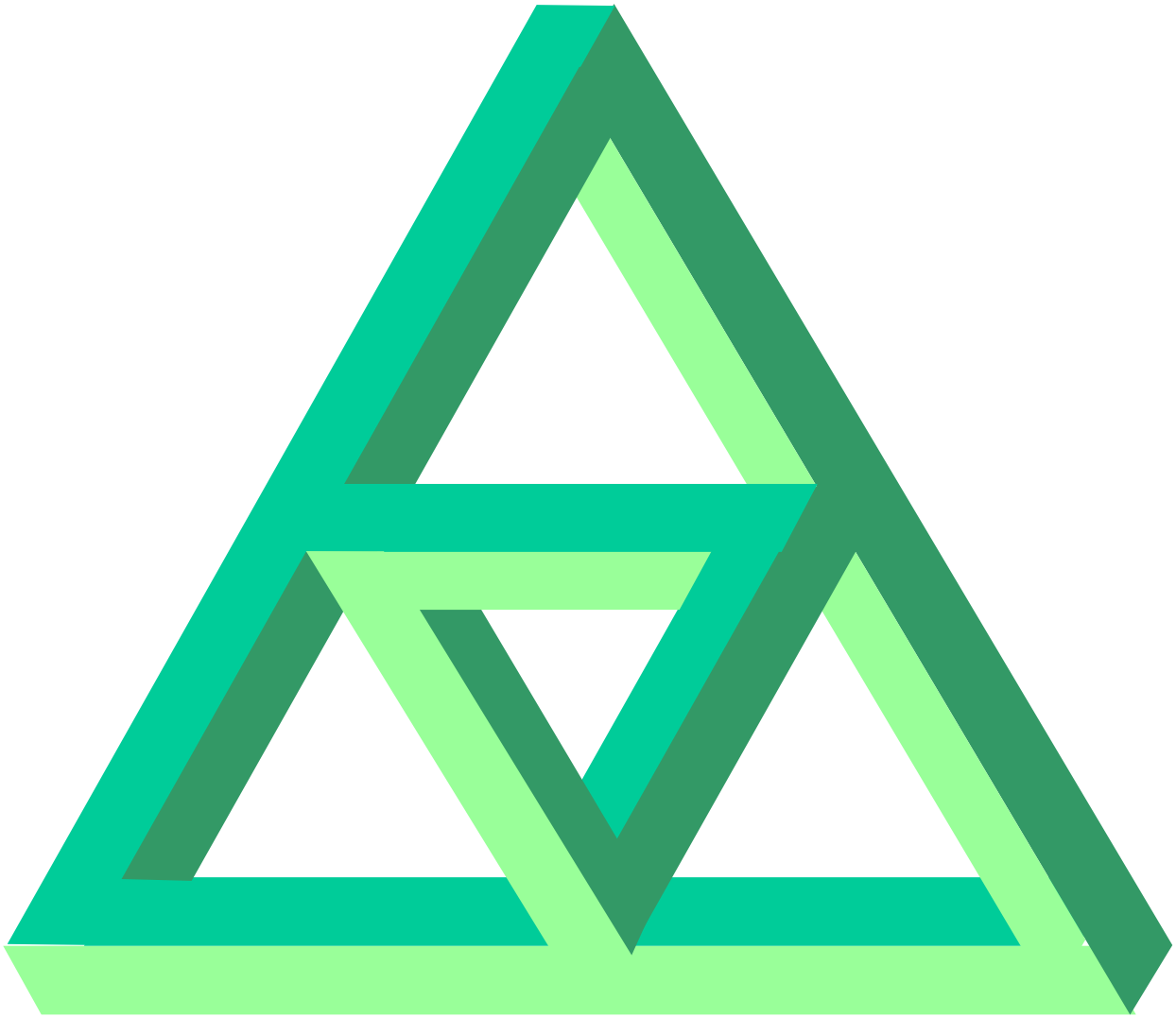
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 09/2025 (September 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Um der noch laufenden Schulrunde der 65. Mathematik-Olympiade nicht vorzugreifen, setzen wir das Thema „Zyklische Aufgabenformulierungen“ und diskutieren weitere Aufgaben. Obwohl hierbei die (allgemein bekannten) Mittelungleichungen und davon abgeleitete Ungleichungen (wir verweisen in der Rubrik „Bekannte Sätze“ auf die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung) als Lösungsansatz hilfreich sein können, erscheinen die Strategien dennoch oft als trickreich.

Im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM-1.5B** aus der ersten Serie des diesjährigen Korrespondenzzirkels Mathematik untersuchen wir Fragestellungen zur Fakultät. Insbesondere erläutern wir Möglichkeiten, die Anzahl der Stellen eines solchen Produktes zu ermitteln.

Im historischen Rückblick verwenden wir ein Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra aus dem Jahr 1906, um die Potenzgesetze in Aufgaben anzuwenden. Diese Anforderungen an damalige Realschüler sind auch heute noch aktuell, so dass diese Sammlung von 150 Aufgaben weiterhin hilfreich ist

Wir berichten ausführlich von der **19. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade**, die Ende August Chemnitz zur „Europäischen Hauptstadt für Mathematik“ aufstiegen ließ (so Medien-Überschriften). Wir freuen uns nicht nur über eine gelungene Veranstaltung in Sachsen, sondern auch über das erfolgreiche Abschneiden des deutschen Teams!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 34.2 – Zyklische Aufgabenformulierungen

Aufgabe 34.11. Beweise für alle natürliche Zahlen $n > 3$ und alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ mit $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2 \cdot x_3} + \dots + \frac{1}{1 + x_n + x_n \cdot x_1} > 1$$

Lösungshinweise: Wir substituieren $x_1 = \frac{a_2}{a_1}, x_2 = \frac{a_3}{a_2}, \dots, x_n = \frac{a_1}{a_n}$ mit positiven Zahlen a_i $(i = 1, \dots, n)$. Dies ist immer möglich: Es genügt $a_1 = 1$ festzulegen. Dann erhalten wir $a_2 = x_1, a_3 = x_1 \cdot x_2, \dots, a_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$. Laut Voraussetzung ist dann $x_n = \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \frac{a_1}{a_n}$. Mit dieser Substitution nimmt die Ungleichung wegen

$$\frac{1}{1 + x_k + x_k \cdot x_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{a_{k+1}}{a_k} + \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}} = \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$

die folgende Form an

$$X = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1 + a_2} > 1\,.$$

Da aber für alle k $(k = 1, \dots, n-2)$ stets $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} < \sum_{i=1}^{n} a_i$ gilt, können wir weiter abschätzen:

$$X > \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \frac{a_2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \dots + \frac{a_n}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = 1\,.$$

❑

Aufgabe 34.12. Finde den maximalen Wert des Ausdrucks

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_3 + \dots + x_n^2 \cdot x_1\,,$$

für nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ $(n > 2)$.

Lösungshinweise: Diese Aufgabe erinnert an die Aufgaben **MO640946/MO641046**. Wir versuchen deshalb einen ähnlichen Ansatz zur Lösungsdarstellung.

Für die Festlegungen $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \dots = x_n = 0$ finden wir, dass das Maximum mindestens $\frac{4}{27}$ beträgt. Wir vermuten, damit bereits den maximalen Wert gefunden zu haben. Wir untersuchen zunächst den Fall $n = 3$ und wollen den Spezialfall beweisen: Für $a + b + c = 1$ gilt $a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}$.

Wir können die Bezeichnungen aufgrund der zyklischen Aufgabenstellung stets so wählen, dass a ein größter Wert der drei Variablen ist. Damit gelten die Abschätzungen $abc \geq b^2c$ und $a^2c \geq ac^2$. In diesem Fall erhalten wir

$$\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)=a^2b+abc+b\frac{c^2}{4}+\frac{a^2c}{2}+\frac{ac^2}{2}+\frac{c^3}{8}\geq a^2b+b^2c+c^2a\,.$$

Mit der (trickreichen) Zerlegung

$$\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+\frac{a+\frac{c}{2}}{2}+b+\frac{c}{2}=a+b+c=1$$

können wir die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel anwenden und erhalten

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{a+\frac{c}{2}}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)}\leq\frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3}.$$

Schätzen wir in der linken Seite dieser Ungleichung das Produkt durch den zu untersuchenden Term ab, finden wir

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot(a^2b+b^2c+c^2a)}\leq\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\left(a+\frac{c}{2}\right)^2\cdot\left(b+\frac{c}{2}\right)}\leq\frac{1}{3},$$

also

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

In Anlehnung an die Beweismethode der vollständigen Induktion nehmen wir an, dass für n Variablen das Maximum $\frac{4}{27}$ beträgt. Nun betrachten wir die Summe mit $n+1$ Variablen, also $x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2x_1$.

Da die Variablen zyklisch in der Aufgabenstellung vorkommen, können wir annehmen, dass x_2 den kleinsten Wert aller Variablen hat (andernfalls können wir die Variablen zyklisch so umbenennen). Dann gilt $x_1^2x_2\leq x_1^2x_3$. Außerdem ist für nichtnegative Variablen stets $2x_1x_2x_3\geq 0$ und $x_{n+1}^2x_2\geq 0$. Wir können deshalb den zu untersuchenden Term wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2x_1&\leq x_1^2x_3+2x_1x_2x_3+x_2^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2x_1+x_{n+1}^2x_2\\&=(x_1+x_2)^2x_3+\cdots+x_{n+1}^2(x_1+x_2)\,.\end{aligned}$$

Damit ist das Maximum des Terms mit den $n+1$ nichtnegativen Variablen $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}$ (mit Summe gleich 1) nicht größer als das Maximum des Terms mit den n (ebenfalls nichtnegativen) Variablen $(x_1+x_2),x_3\ldots,x_n,x_{n+1}$ (ebenso mit Summe gleich 1). Damit ist der Beweis vollständig, denn wir können für jedes n auf diese Weise das vermutete Maximum bestätigen, das für die Festsetzungen $x_1=\frac{2}{3},x_2=\frac{1}{3},x_3=\cdots=x_n=0$ wegen

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + \cdots + x_n^2x_1 = x_1^2x_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

auch angenommen werden kann. ❑

Aufgabe 34.13. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive ganze Zahlen ($n > 1$). Man beweise, dass mindestens ein Wert der Form $\sqrt[x_1]{x_2}, \sqrt[x_2]{x_3}, \ldots, \sqrt[x_{n-1}]{x_n}, \sqrt[x_n]{x_1}$ kleiner oder gleich $\sqrt[3]{3}$ ist.

Lösungshinweise: Wir beweisen die Aussage indirekt und nehmen an, dass für alle Indizes i ($i = 1, \ldots, n$) die Abschätzung $\sqrt[x_i]{x_{i+1}} > \sqrt[3]{3}$ gilt (wobei wir $x_{n+1} = x_1$ verstehen).

Wir verwenden die Ungleichung $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, gleichbedeutend zu $n \leq \sqrt[3]{3^n}$. Für $n = 1{,}2{,}3{,}4$ ist die Aussage offensichtlich richtig, was wir durch Berechnung der Werte $\sqrt[1]{1} = 1, \sqrt[2]{2} < 1.42, \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4} = \sqrt[2]{2} < 1.42$ bestätigen (mit $\sqrt[3]{3} > 1.44$).

Gilt die Ungleichung nun für eine Zahl $k > 3$ $\left(\text{d. h. } k \leq \sqrt[3]{3^k}\right)$, so überzeugen wir uns (im Sinne der Methode der vollständigen Induktion), dass die Ungleichung auch für die Zahl $k + 1$ $\left(\text{d. h. } k + 1 \leq \sqrt[3]{3^{k+1}}\right)$richtig ist:

$$1 + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{4} < \sqrt[3]{3} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{3^{k+1}} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^k} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot k = k + 1$$

Aus unserer Voraussetzung und aus dieser Beziehung folgt

$$\sqrt[x_i]{x_{i+1}} > \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[x_{i+1}]{x_{i+1}}, \quad \text{also} \quad x_{i+1} > x_i$$

Setzen wir dies in die zyklische Formulierung ein, erhalten wir mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1$, das heißt wir erhalten einen Widerspruch. Unsere Annahme kann also nicht gelten. Damit haben wir die Behauptung bewiesen. ❑

Aufgabe 34.14. Man beweise: Wenn *a, b, c, d* positive reelle Zahlen sind, so gilt

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0\,.$$

Lösungshinweise: Wir addieren auf beiden Seiten dieser Ungleichung den Ausdruck

$$\frac{b+c}{b+c} + \frac{c+d}{c+d} + \frac{d+a}{d+a} + \frac{a+b}{a+b} = 4$$

und können dann die Brüche mit dem gleichen Nenner zusammenfassen zu

$$\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4\,.$$

Wir klammern die gemeinsamen Zähler aus und erhalten

$$(a+c)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\cdot\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 4\,.$$

Mithilfe der allgemein bekannten Ungleichung $x+\frac{1}{x}\geq 2$ für alle positiven reellen Zahlen x gilt auch

$$1+\frac{d+a}{b+c}+1+\frac{b+c}{d+a}\geq 4 \quad ; \quad 1+\frac{a+b}{c+d}+1+\frac{c+d}{a+b}\geq 4,$$

äquivalent zu

$$\frac{(b+c)+(d+a)}{b+c}+\frac{(d+a)+(b+c)}{d+a}\geq 4 \implies \frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\geq\frac{4}{a+b+c+d}$$

bzw.

$$\frac{(c+d)+(a+b)}{c+d}+\frac{(a+d)+(c+d)}{d+a}\geq 4 \implies \frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{a+b+c+d}.$$

Wir setzen diese Ungleichungen das oben erhaltene Zwischenergebnis ein:

$$\begin{aligned}&\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}-4=\\&=(a+c)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\cdot\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)-4=\\&\geq\frac{4\cdot(a+c)+4\cdot(b+d)}{a+b+c+d}-4=0\,.\end{aligned}$$

❑

Aufgabe 34.15. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ paarweise disjunkte ganze Zahlen ($n>0$). Man beweise die Ungleichung

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+\cdots+x_n\cdot x_1+2\cdot n-3\,.$$

Lösungshinweise: Wir bilden vollständige Quadrate und schreiben die Ungleichung als

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2\geq 2\cdot(2\cdot n-3)$$

(wobei $x_{n+1}=x_1$ zu verstehen ist). Wir bezeichnen den Index, der das Minimum der Variablen realisiert, mit m, und den Index, der das Maximum der Variablen realisiert, mit M. Aufgrund der zyklischen Aufgabenformulierungen können wir die Variablen o.B.d.A. zyklisch so umbenennen, dass $m<M$ gilt. Dann können wir die Summen S_1, S_2 wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}S_1&=(x_m-x_{m+1})^2+\cdots+(x_{M-1}-x_M)^2,\\S_2&=(x_M-x_{M+1})^2+\cdots+(x_n-x_1)^2+\cdots+(x_{m-1}-x_m)^2.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel als einfache Folgerung aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung[3], erhalten wir die Abschätzungen

$$S_1 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{M-m} \quad ; \quad S_2 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{n-(M-m)}$$

Deshalb gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 = S_1 + S_2 \geq (x_M - x_m)^2 \cdot \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{n-(M-m)}\right)$$

Da die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ paarweise disjunkte ganze Zahlen sind, gilt $(x_M - x_m)^2 \geq (n-1)^2$, denn die kleinste Zahl und die größte Zahl müssen mindestens den Abstand $n-1$ haben. Außerdem finden wir

$$\frac{1}{M-m} + \frac{1}{n-(M-m)} = \frac{n}{(M-m)\cdot\big(n-(M-m)\big)}.$$

Für reelle Zahlen x, y gilt stets für Nenner der Form $x \cdot (y-x) = x \cdot y - x^2$ die Abschätzung $\frac{y^2}{4} - \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \leq \frac{y^2}{4}$, so dass mit $y = n$ der Nenner kleiner als $\frac{n^2}{4}$ ist. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 \geq (n-1)^2 \cdot \frac{4}{n} = 4 \cdot n - 8 + \frac{4}{n} > 4 \cdot n - 8$$

Abschließend wenden wir an, dass das Quadrat einer Differenz ganzer Zahlen den gleichen Rest bei Division durch 2 lässt wie die Differenz selbst. D.h. aber auch, dass $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2$ den gleichen Rest wie $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})$ lässt, also eine gerade Zahl ist. Damit kann der Beweis beendet werden:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 \geq 4 \cdot n - 6$$

❑

Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen [4]

Der sächsische Korrespondenzzirkel Mathematik[5] (KZM) ist mit der Serie 1 (Einsendetermin: 24.09.2925) in die neue Auflage 2025/26 gestartet. Da eine Anmeldung zum KZM mit der Einsendung der Lösungsvorschläge genügt, kann noch

[3] Siehe Beitrag „Bekannte Sätze der Mathematik“ am Ende des Heftes

[4] vgl. Gardner, M. Mathematische Hexereien. Verlag Ullstein GmbH Berlin 1990.

[5] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

direkt teilgenommen werden (wobei auch zu einem späteren Zeitpunkt ein Einstieg möglich ist). Die Teilnahme am KZM ist als Wettbewerbsvorbereitung besonders empfehlenswert. Anders als mit den „Mathematischen Kostproben“, in denen der schnelle Blick auf die Lösung lockt und die Lösungsstrategien damit eher passiv studiert werden, ist die selbständige Lösungsfindung und -darstellung nachhaltiger. Alle Informationen und das aktuelle Aufgabenblatt sind auf der KZM-Webseite verfügbar.

In der **Aufgabe KZM-1.5B** sind Problemstellungen rund um die Fakultät[6] zu bearbeiten. Die Anzahl der Ziffern von $n!$ wächst mit zunehmenden n schnell an. Während 6! noch eine dreistellige Zahl ist, besitzt 10! bereits 7 Ziffern und 20! gar 19 Stellen. Dies war Inhalt der

Aufgabe MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an.

Zwei Jahre vorher wurden bereits ähnliche Problemstellungen mit gleichartigem Fragetext in der 4. Stufe gestellt:

Aufgabe MO330944. 22! = 1124000727**607680000
Aufgabe MO331044. 23! = 2585201673*8849*6640000

Lösungshinweise: In diesen beiden Aufgaben ist es ein nahe liegender Lösungsansatz, die fehlenden Ziffern anhand von Teilbarkeitsregeln zu ermitteln. Die Division durch 9 und durch 11 lieferen hierfür ausreichende Argumente, da sowohl 9 als auch 11 unter den Faktoren vorkommt. In der Aufgabe der 35. MO war zudem zunächst die Anzahl der Endnullen zu ermitteln. Dann verbleiben wiederum nur zwei Ziffern, die es zu finden gilt.

Bezeichnen wir die fehlenden Ziffern in 22! (von links) mit a und b, so muss wegen der Teilbarkeit durch 9 die Summe $58 + a + b$ ein Vielfaches von 9 sein. Außerdem muss wegen der Teilbarkeit durch 11 die alternierende Summe $-22 - a + b$ durch 11 teilbar sein. Aus letzterem folgen unmittelbar $a = b$ und deshalb aus der ersten Aussage $a = b = 7$.

Mit analoger Argumentation bezeichnen wir die fehlenden Ziffern in 23! Mit a und b und erhalten die Bedingungen, dass $84 + a + b$ durch 9 und $10 + a - b$ durch 11

[6] Für natürliche Zahlen $n > 0$ wird das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ als n-Fakultät bezeichnet.

teilbar sein müssen. Aus letzterem folgen unmittelbar $a = b + 1$ und aus der ersten Aussage die Möglichkeiten $a + b = 6$ oder $a + b = 15$. Nur $a = 8 \text{ und } b = 7$ erfüllen beider Teilbarkeitsaussagen.

In 20! wird die Anzahl der Nullen durch die Anzahl des Auftretens des Primfaktors 5 bestimmt (da der Primfaktor 2 häufiger als 5 auftritt). Unter den Faktoren bis 20 tragen also 5, 10, 15 und 20 eine Endnull bei, so dass 20! auf 4 Nullen endet. Somit verbleiben zwei unbekannte Ziffern in der Darstellung. Wir wenden dieselbe Strategie an: Wir bezeichnen die fehlenden Ziffern (von links) mit a und b und erkennen, dass die Quersumme $50 + a + b$ durch 9 teilbar und die alternierende Quersumme $-4 + a + b$ durch 11 teilbar sein müssen. Aus letzterem folgen unmittelbar $a + b = 4$ und aus der ersten Aussage die Möglichkeiten $a + b = 4$ oder $a + b = 13$. Nur $a = 0 \text{ und } b = 4$ erfüllen beider Teilbarkeitsaussagen, da b keine weitere Null am Ende der Zahl sein darf. ❑

Wollen wir abschätzen, wie viele Stellen 1000! besitzt, so könnten wir zunächst so vorgehen: In 1000! trägt jeder Faktor, der kleiner als 1000 ist, höchstens 3 Stellen zu 1000! bei. Folglich ist die Abschätzung $1000! < 10^{3000}$ sicherlich richtig.

Eine Verbesserung der Abschätzung ist wie folgt möglich: Aus der bekannten Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels von n Zahlen und der Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen wissen wir, dass auch folgende Abschätzung gilt:

$$\sqrt[1000]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1000} \leq \frac{1+2+\ldots+1000}{1000} = \frac{500 \cdot 1001}{1000} = 500{,}5\,.$$

Also ist

$$1000! < 501^{1000} < (2^9)^{1000} < (2^{13})^{693} < 10000^{693} = 10^{2772}.$$

Dabei beinhalten die mittleren Abschätzungen lediglich Umformungen, die eine Berechnung ohne Taschenrechner erleichtern, denn die Zweierpotenzen $501 < 512 = 2^9$ und $2^{13} = 8 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 1024 < 10000$ sind bekannt (bzw. leicht ermittelbar). Mit Taschenrechner geht es auch so:

$$1000! < 501^{1000} < (10^{2{,}7})^{1000} = 10^{2700}\,.$$

Die Güte der Abschätzung lässt sich nur schwer bewerten. Hilfreich ist da die STIRLINGsche Formel[7], die die Fakultät mit den beiden mathematischen Konstanten e und π in Verbindung bringt: Es gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n}\,.$$

Diese Abschätzung liefert praktikable Aussagen zur Stellenzahl:

[7] JAMES STIRLING, schottischer Mathematiker (1692 bis 1770)

$$lg(n!) \sim n \cdot lg\left(\frac{n}{e}\right) + 0{,}5 \cdot lg(2\pi \cdot n).$$

Für $n = 20$ finden wir auf diese Weise $lg(n!) \approx 18{,}38$. Der daraus resultierende Wert $n! \approx 2{,}39 \cdot 10^{18}$ stimmt recht gut mit dem wirklichen Wert überein. Verlassen wir uns (hier ohne weiteren Beweis) darauf, dass die Güte dieser Abschätzung auch bei großen n gilt, erhalten wir für $n = 1000$:

$$lg(1000!) \sim 2566{,}61$$

so dass 1000! insgesamt 2567 Ziffern umfassen könnte. Es kann bewiesen werden, dass der relative Fehler der STIRLINGschen Formel mit wachsender Zahl n kleiner wird, so dass die Formel eine verlässliche Abschätzung liefert. Für Werte über $n = 20$ beträgt der Fehler weniger als 0,5%.

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO[8]) ist ein staatenübergreifender Mathematikwettbewerb, der 2007 erstmalig ausgerichtet wurde und an dem seit 2014 die zehn Länder Deutschland, Kroatien, Litauen, Polen, Österreich, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn teilnehmen. Das Ausrichterland darf eine weitere Mannschaft ihrer Wahl einladen. Der Wettbewerb bietet Jugendlichen (in Deutschland im Allgemeinen aus der Jahrgangsstufen 10 und 11) eine zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) zusätzliche Möglichkeit, an internationalen Vergleichen teilzunehmen. Dabei wird jedoch die Doppel-Teilnahme an MeMO und IMO in einem Kalenderjahr per Reglement ausgeschlossen.

Jedes teilnehmende Land entsendet sechs Schüler zur MeMO. Es gibt sowohl einen Einzel- als auch einen Teamwettbewerb. Jeder Teilnehmende schreibt am ersten Wettkampftag eine fünfstündige Individualklausur. Am Folgetag steht die ebenfalls fünfstündige Teamklausur auf dem Programm. Die vier Aufgabenstellungen des Einzelwettbewerbs und die acht Probleme für die Teamentscheidung orientieren sich im Schwierigkeitsgrad am Niveau der IMO. Es sind je Aufgabe 8 Punkte möglich. Wie auch zur IMO wird die siebentägige Veranstaltung von einem reichhaltigen Exkursionsprogramm umrahmt.

Die Ausrichtung rotiert durch die zehn mitteleuropäischen Länder. In diesem Jahr wurde die MeMO deshalb turnusmäßig wieder nach Deutschland vergeben, nachdem bereits die 8. MeMO 2014 in Dresden ausgerichtet wurde[9]. Die für bundesweite Wettbewerbe zuständige Bildung & Begabung gGmbH Bonn hatte im November 2023 offiziell den Zuschlag nach Chemnitz gegeben – in Erinnerung an die erfolgreiche

[8] www.memo-official.org

[9] Dazwischen liegt 2020 coronabedingt eine virtuelle MeMO, die nur als Individualwettbewerb durchgeführt und keinem Gastgeberland zugeschrieben wurde.

Ausrichtung der Bundesrunde[10] der 58. MO 2019 und in Erwartung an die Kulturhauptstadt Europas. Die Schirmherrschaft übernahm der Bundespräsident FRANK-WALTER STEINMEIER.

Nun fand die 19. MeMO vom 25. bis 31. August 2025 in Chemnitz statt. Als Gastland war ein Team aus der Ukraine eingeladen (das außerhalb der Wertung teilnahm). Das lokale Organisationsteam wurde maßgeblich von Angehörigen der TU Chemnitz geprägt: Prof. Dr. DANIEL POTTS (vormals Dekan der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz), Dr. FRANK GÖRING (Ansprechpartner für die Zusammenarbeit Fakultät und Schule) und Dr. LAURA WEIDENSAGER (2014 Teilnehmerin an der MeMO) brachten ihre Erfahrungen zu mathematischen Veranstaltungen und deren Rahmenprogramm ein. Mit OStD STEPHAN LAMM (ehemals Schulleiter am Kepler-Gymnasium Chemnitz) und Vertretern der Stadtverwaltung Chemnitz, der Industrie- und Handelskammer Chemnitz und des Landesamtes für Schule und Bildung war das Org.-Team breit aufgestellt, um einen attraktiven Wettbewerb und einen erlebnisreichen Aufenthalt in Chemnitz zu gewährleisten.

Offizieller Empfang im Chemnitzer Rathaus durch den Oberbürgermeister SVEN SCHULZE am Eröffnungstag, Rundgang durch das Sächsische Museum für Archäologie in Chemnitz (smac), Abendveranstaltung im Sächsischen Industriemuseum Chemnitz, Exkursionen durch Chemnitzer Unternehmen und im Fraunhofer Institut für Werkzeugmaschinenbau und Umformtechnik (IWU) sowie ein Bowling-Wettstreit boten ein abwechslungsreiches Programm. Touristischer Höhepunkt war der Ausflug nach Freiberg mit Besuch der Mineralienschau „Terra Mineralia“, einer Einfahrt unter Tage und einem wissenschaftlichen Abstecher an die Bergakademie TU Freiberg. Immer dabei: Dr. LAURA WEIDENSAGER und 22 Guides, die den Gästen rund um die Uhr zur Seite standen und einen reibungslosen Ablauf gewährleisteten. In ihren gelben MeMO-Shirts waren sie immer präsent – und damit die engagierten Botschafter für Sachsen und Mathematik! Unter https://www.memo2025.de/Fotos.html sind zahlreiche Eindrücke im Bild festgehalten.

Für die internationale Jury unter Leitung von Prof. Dr. ELIAS WEGERT und Cheforganisator Dr. BERND MULANSKY waren die Wettbewerbstage voller Arbeit, beginnend mit der Aufgabenauswahl aus den Ländervorschlägen, Jury-Tätigkeit während der Wettbewerbe, vor allem natürlich Korrektur und Preisentscheidungen. Für die Klausuren, Korrekturen und Jury-Arbeit boten die Räume der TU Chemnitz beste Arbeitsbedingungen

Zur Abschlussveranstaltung (moderiert vom Dekan der Fakultät für Mathematik der TUC, Prof. Dr. ALOIS PICHLER) im Fraunhofer Institut IWU wurden an die 66 Teilnehmenden 8 Gold- (für 32 und 31 von 32 möglichen Punkten), 10 Silber- (für 28 bis 24 Punkte) und 18 Bronze-Medaillen (für 18 bis 21 Punkte) vergeben. Zusätzlich

[10] https://www.mo2019.de/

erhielten 20 Teilnehmende, die es nicht auf einen Medaillenplatz schafften, aber bei mindestens einer Aufgabe die volle Punktzahl erreichten, eine ehrende Erwähnung.

Verwenden wir für eine inoffizielle Länderwertung im Individualwettbewerb den Modus der IMO, die Platzierung anhand der Summe der sechs Einzelleistungen festzulegen, erreichte Deutschland mit 131 von 192 möglichen Punkten den Platz 2 (2024: 114 Punkte/Platz 4; 2023: 112 Punkte/Platz 5; 2022: 104 Punkte/Platz 2) und behauptete damit erneut eine Spitzenposition.

Platz	2025	Punkte	Gold	Silber	Bronze	Ehrende Erwähnung
1	Polen	161	3	1	2	-
2	Deutschland	131	2	-	2	2
3	Ungarn	128	1	2	1	2
4	Slowakei	125	-	2	3	1
	Ukraine	125	2	1	-	2
5	Tschechien	115	-	2	2	1
6	Kroatien	105	-	-	4	2
7	Litauen	88	-	1	1	2
8	Österreich	86	-	1	1	2
9	Schweiz	80	-	-	1	2
10	Slowenien	79	-	-	1	4

Für die offizielle Länderwertung wird aber der Teamwettbewerb zugrunde gelegt, in dem insgesamt 64 Punkte erreicht werden können. Das deutsche Team kam hierbei auf Platz 2 und erreichte damit wie schon im Vorjahr ein hervorragendes Ergebnis (2024: 49 Punkte/Platz 2; 2023: 22 Punkte/Platz 7; 2022: 37 Punkte/Platz 6).

Platz	Team	Punkte
1	Ukraine	54
	Slowakei	46
2	Deutschland	45
3	Tschechien	42
	Polen	42
5	Ungarn	41
	Schweiz	41
7	Litauen	34
8	Österreich	25
9	Slowenien	17
10	Kroatien	13

Leider hatten es sächsische Jugendliche nicht ins deutsche Team geschafft.

Aufgaben des Individual-Wettbewerbes.

Aufgabe I–1 (5.5/6.6/6.5[11])**.** Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Funktion, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $yf^{2025}(x) \geq xf(y)$.

Man beweise: Es existiert eine positive ganze Zahl n_0, so dass für alle positiven ganzen Zahlen $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $f^n(x) \geq x$.

Bemerkung. Dabei bezeichnet f^n die n-fache Anwendung von f, d. h. $f^n(x) = \underbrace{f(f(f \ldots (f}_{n-mal}(x) \ldots))$.

Aufgabe I–2 (6.5/7.2/7.0). Auf einem unendlich großen Quadratgitter, von dem einige Felder rot gefärbt sind, sei ein *Roter Turm* eine Figur, die sich in einem Zug um eine beliebige Anzahl an Feldern parallel zu einer der Gitterachsen (vertikal oder horizontal) bewegen kann, wobei sie während des gesamten Zuges auf roten Feldern bleiben muss.

Ausgehend von einem ungefärbten unendlich großen Quadratgitter führt Alice den folgenden Prozess durch: Zunächst färbt sie höchstens 2025 Felder rot. Anschließend platziert sie einige Rote Türme auf paarweise verschiedenen roten Feldern, so dass folgende zwei Regeln erfüllt sind:

- Kein Roter Turm kann einen anderen Roten Turm in einem Zug erreichen.
- Jeder Rote Turm kann jeden anderen Roten Turm in zwei Zügen erreichen.

Man bestimme die größtmögliche Anzahl an Roten Türmen, die Alice in diesem Prozess platzieren kann.

Aufgabe I–3 (3.1/4.5/4.8). Sei ΔABC ein Dreieck. Sein Inkreis ω berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Seien P und Q Punkte auf der Geraden BC, die jeweils von D verschieden sind und $|\overline{PB}| = |\overline{BD}|$ bzw. $|\overline{QC}| = |\overline{CD}|$ erfüllen.

Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke ΔPCE und ΔQBF und der Kreis ω in einem gemeinsamen Punkt treffen.

Aufgabe I–4 (3.4/5.3/3.5)**.** Eine Teilmenge S der ganzen Zahlen heiße *sächsisch*, wenn für je drei paarweise verschiedene Elemente $a, b, c \in S$ die Zahl $ab + c$ eine Quadratzahl ist.

Man zeige, dass jede sächsische Menge endlich ist. Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Elementen, die eine sächsische Menge haben kann.

Aufgaben des Team-Wettbewerbes Es sind alle 8 Aufgaben zu bearbeiten. Die sechsköpfigen Teams können frei entscheiden, wer für welche Aufgabe

[11] durchschnittlich erreichte Punktzahle aller 66 Teilnehmenden/der 36 Medaillengewinner/des deutschen Teams von 8 möglichen Punkten

verantwortlich ist. Auch gemeinsame Bearbeitung von Aufgaben und Beratung untereinander darüber ist zugelassen.

Aufgabe T–1 (5.2[12]). Bob hat n Münzen mit ganzzahligen Werten $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n > 0$. Er steht vor einem Süßigkeitenautomaten, der n Schokoladenriegel mit positiven ganzzahligen Preisen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ verkauft. Bob bemerkt, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_i \geq c_i + c_2 + \cdots + c_i.$$

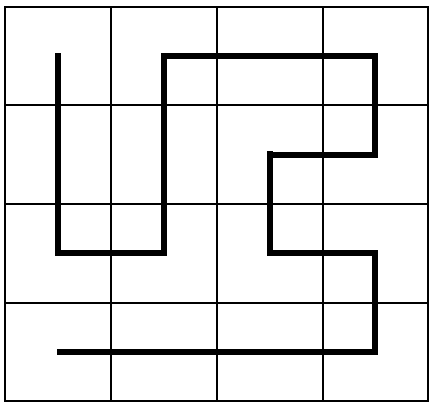
Außerdem stimmt der Gesamtwert von Bobs Münzen mit der Summe der Preise aller Schokoladenriegel überein. Die Schokoladenriegel können in jeder beliebigen Reihenfolge gekauft werden. Um den i-ten Schokoladenriegel zu kaufen, muss Bob Münzen mit einem Gesamtwert von mindestens b_i einwerfen. Allerdings gibt der Automat kein Wechselgeld zurück.

Man beweise, dass Bob mindestens die Hälfte aller Schokoladenriegel kaufen kann.

Aufgabe T–2 (3.0). Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

- Für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$.
- Es gibt höchstens eine Zahl $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(a) = 1$.

Aufgabe T–3 (7.1)**.** Eine *Schlange* in einem $n \times n$-Quadratgitter ist ein Pfad, der aus Strecken zwischen Mittelpunkten benachbarter Felder zusammengesetzt ist, durch die Mittelpunkte aller n^2 Felder verläuft und jedes Feld genau einmal betritt. Dabei heißen zwei Felder benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Man beachte, dass alle Stücke der Schlange parallel zu Gitterachsen sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel einer Schlange in einem 4×4-Quadratgitter. Diese Schlange hat neun 90°-Winkel.



Man betrachte nun eine Schlange durch die 2025 Felder eines 45 × 45-Quadratgitters. Was ist die größtmögliche Anzahl an 90°-Winkeln, die eine solche Schlange haben kann?

Aufgabe T–4 (1.7)**.** Sei n eine positive ganze Zahl. In der Provinz Lappland gibt es $100 \cdot n$ Städte, von denen je zwei durch eine direkte Straße verbunden sind. Auf jeder dieser Straßen steht eine Mautstation, die einen positiven Geldbetrag an Maut einnimmt. Für jede Straße werden die Einnahmen der Maut zu gleichen Teilen

[12] durchschnittlich erreichte Punktzahle aller 11 Teams von 8 möglichen Punkten

zwischen den beiden Städten an den Enden der Straße aufgeteilt (d. h. beide Städte erhalten jeweils die Hälfte der Einnahmen). Die Gesamteinnahmen einer Stadt errechnen sich aus der Summe der Einnahmen, die die Stadt von den Mautstationen der $100 \cdot n - 1$ anliegenden Straßen erhält.

Gemäß einem neuen Gesetz sollen nun die Einnahmen einiger Mautstationen nicht mehr an die anliegenden Städte, sondern direkt an die Bundesregierung fließen. Der Gouverneur von Lappland darf diese Mautstationen auswählen. Die Bürgermeister der Städte fordern, dass für jede Stadt die Summe der Einnahmen, die sie nach der Änderung aus den verbleibenden Mautstationen noch erhält, mindestens 99% der früheren Gesamteinnahmen beträgt.

Man bestimme, in Abhängigkeit von n, die größte positive ganze Zahl k, sodass der Gouverneur immer k Mautstationen auswählen kann, deren Einnahmen zukünftig an die Bundesregierung fließen, und dabei die Forderung der Bürgermeister erfüllt wird.

Aufgabe T–5 (6.5). Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|\overline{AB}| < |\overline{AC}|$. Sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf BC. Sei E der Punkt, für den $ABEC$ ein Parallelogramm ist. Sei M ein Punkt im Inneren des Dreiecks ΔABC, für den $|\overline{MB}| = |\overline{MC}|$ gilt. Sei F der Punkt, den man erhält, wenn man D an der Tangente an den Umkreis des Dreiecks ΔADM durch M spiegelt.

Man beweise, dass $|\overline{AF}| = |\overline{DE}|$.

Aufgabe T–6 (4.6)**.** Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit einem inneren Punkt D, für den $|\sphericalangle BDC| = 180° - |\sphericalangle BAC|$ gilt. Die Geraden BD und AC schneiden einander im Punkt E, und die Geraden CD und AB schneiden einander im Punkt F. Die Punkte $P \neq E$ und $Q \neq F$ liegen auf der Geraden EF und erfüllen $|\overline{BP}| = |\overline{BE}|$ bzw. $|\overline{CQ}| = |\overline{CF}|$. Angenommen, die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{AQ}$ schneiden den Umkreis ω des Dreiecks ΔABC erneut in den Punkten $R \neq A$ bzw. $S \neq A$.

Man beweise, dass die Geraden RF und SE einander auf ω schneiden.

Aufgabe T–7 (7.0)**.** Sei n eine positive ganze Zahl, sodass die *Summe* der positiven Teiler von $n^2 + n + 1$ durch 3 teilbar ist.

Man beweise: Die Menge der positiven Teiler von $n^2 + n + 1$ kann so in drei Mengen partitioniert werden, dass für jede der drei Mengen das *Produkt* ihrer Elemente dasselbe ist.

Aufgabe T–8 (1.2)**.** Man entscheide, ob folgende Aussage für jedes Polynom P mit Grad mindestens 2 und nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten gilt:

Es existiert eine positive ganze Zahl m, sodass für unendlich viele positive ganze Zahlen *n* die Zahl $P^n(m)$ mehr als n paarweise verschiedene positive Teiler besitzt.

Bemerkung. Dabei bezeichnet P^n die n −fache Anwendung von P, d. h. $P^n(x) = \underbrace{P(P(\ldots P}_{n-mal}(x)\ldots))$.

Hinweis: Man versuche, für einige dieser Aufgaben die Probleme mit speziellen Fällen zu veranschaulichen oder Lösungsansätze mit kleinen Zahlen für n zu finden.

Die 20. MeMO wird Ende August 2026 in Slowenien stattfinden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Lehrbuch

Dr. E. Bardeys
Arithmetiſche Aufgaben
nebſt Lehrbuch der Arithmetik

vorzugsweiſe für
Realſchulen, höhere Bürgerſchulen und verwandte Anſtalten

Siebente Auflage
Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906

werden Arithmetik (von den Grundrechenarten bis zu Logarithmen) und Algebra (Bestimmungsgleichungen ersten und zweiten Grades mit einer oder mehreren Unbekannten) behandelt. Nach jeweils kurzen theoretischen Einführungen folgen zahlreiche Übungsaufgaben. Man versuche, die zitierte kleine Auswahl zu bearbeiten, um die eigenen mathematischen Fertigkeiten zu prüfen. Es wird erwartet, dass Jugendliche aktuell derartige Aufgaben ohne Schwierigkeiten lösen können.

Erſter Teil. Allgemeine Arithmetik.

X. Potenzen mit ganzen poſitiven Exponenten.

A. Theorie

Unter der Potenz a^n verſteht man eine abkürzende Bezeichnung für ein Produkt auf n gleichen Faktoren a.

$a^3 = a \cdot a \cdot a$ $\qquad a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n}$ (Def. der Potenz)

Benennungen: a = Baſis, n = Exponent
Daſ Aufſuchen des Wertes einer Potenz nennt man Potenzieren[13].

I. $a^5 \cdot a^3 = a^8$ $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Pot. I)

[13] In Barth, F., Federle, R., Haller, R. Algebra 10. Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München (s. https://mathematikalpha.de/mathematikbuecher-barth) lesen wir auf Seite 13: **Definition 13.1:** Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n, gesprochen „a hoch n“, und nennt es n-te Potenzt von a, kurz. Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt Grundzahl oder Basis, n heißt Hochzahl oder Exponent.

Beweis: $a^5 \cdot a^3 = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{5} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{3} = a^8$ (n. Def. der Potenz)

$a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{m} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n} = a^{m+n}$ (n. Def. der Potenz)

Satz I: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

II. $\left.\begin{cases} \frac{a^8}{a^5} = a^3 & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{für} \quad m > n \\ \frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3} & \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{n-m} \quad \text{für} \quad m < n \end{cases}\right\}$ (Pot. II)

Beweis:

$\frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^3$ (n. Def. der Potenz und Brüche I)

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots \overbrace{a}^{m}}{a \cdot a \cdot a \cdots \overbrace{a}^{n}} = a^{m-n}$ (n. Def. der Potenz und Brüche I)

[… es folgen in ähnlicher Weise Beispiele, Verallgemeinerungen und Beweise zu folgenden Sätzen]

Satz II: Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Satz IIIa: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Satz IIIb: Ein Produkt wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Faktor mit der Zahl potenziert.

Satz IVa: Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Satz IVb: Ein Bruch wird mit einer Zahl potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln mit der Zahl potenziert.

Satz V: Eine Potenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Exponenten mit der Zahl multipliziert (und die Basis mit dem Produkte potenziert).

VI. Merke noch

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad \text{usw.}$$

B. Aufgaben (Auswahl) [14]

2. $3^5 - 5^3$ … $2^6 - 8^2$ 4. $5 \cdot 2^7 - 2 \cdot 5^3$

5. *) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$ … $\left(1\frac{1}{7}\right)^7$ 6. $0{,}938^4$ … $1{,}2037^5$

[14] Eine Kopie aller 150 Aufgaben ist als pdf-Kopie erhältlich.

*) Wo es nicht anders vermerkt ist, soll die Rechnung bis auf 5 Dezimalstellen aufgeführt werden. Um der 5. Stelle sicher zu sein, muß man die 6. Stelle noch mitrechnen.

7. $\frac{7^3-3^4}{3^5-5^3}$ … $\frac{8^4-4^6}{9^7-7^9}$
11. $(x-y)^3-(y-x)^3$
23. $(+x)^3\cdot(-x)^6$
30. $2a^2\cdot 3b^3\cdot 5c^5\cdot\frac{2}{5}ab^2c$
31. $\frac{1}{2}ab^2\cdot\frac{3}{4}ax^3\cdot 5\frac{1}{3}a^{n-1}x^{n-3}$
49. $\frac{a^{n+1}}{a}$ … $\frac{bx}{b^{2x+1}}$
52. $\frac{a^5b^7}{a^2b^4}$
58. $\frac{24a^2bx^{n+1}}{25c^3y^2z^{n-1}}:\frac{36ab^3x^{n-1}}{35c^2y^4z^{n-2}}$
66. $\frac{15^3}{3^3}$ … $\frac{2000000^3}{500000^3}$
73. $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4$
80. $\left(\frac{a}{x^7}+\frac{b}{x^5}+\frac{c}{x^3}\right)\cdot x^7$
87. $(9a^5b^2-12a^3b^5):3a^4b^4$
107. $(2+x)^5+(2-x)^5$
138. $\frac{x^4-y^4}{x-y}$
143. $\frac{a^{x+1}-a^{x-1}}{a-1}$
150. $(a^{4x}-a^4):(a^{x-1}+1)$

Bekannte Sätze der Mathematik

Wir betrachten positive Zahlen $x_1,\dots,x_n$ und $y_1,\dots,y_n$ $(n>0)$. Wir setzen $a_i=\frac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}}$ und $b_i=\frac{|y_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}}$ für alle $i=1,2,\dots,n$. Dann gilt $\sum_{j=1}^n a_j^2=1$ und $\sum_{j=1}^n b_j^2=1$. Verwenden wir nun die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel, so erhalten wir die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j|\cdot|y_j|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_j^2\cdot b_j^2}\le\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j^2+b_j^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j^2+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}b_j^2=1$$

woraus die so genannte CAUCHY[16]-SCHWARZ[17]sche Ungleichung folgt:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot y_j\right)^2\le\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)$$

Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung kann in der Lösungsdarstellung als Aussage mit einem festen Namen ohne Beweis angewandt werden. Es gibt viele Folgerungen dieser Ungleichung, deren Namensgebung aber möglicherweise nicht einheitlich geführt wird. Damit ist eine beweislose Anwendung ggf. kritisch.

[16] AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789 – 1857)
[17] HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843 – 1921)

Beispiel I. Die Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel kann als allgemein bekannt vorausgesetzt werden: Betrachten wir positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ $(n > 0)$, so lautet diese Ungleichung:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Diese Abschätzung resultiert unmittelbar aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, wenn wir in ihr $b_1 = \ldots = b_n = \frac{1}{n}$ setzen. Dann lautet die Ungleichung

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \frac{1}{n} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right)$$

woraus wir durch Radizieren beider Seiten die Behauptung bestätigen können.

Beispiel II. Betrachten wir positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ $(n > 0)$, und setzen wir $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ und $y_i = \sqrt{b_i}$, so erhalten wir aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung die weniger bekannte ANDREESCU[18]-Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{b_j} \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2}{\sum_{j=1}^{n} b_j},$$

denn es gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\sqrt{b_j}} \cdot \sqrt{b_j} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{\sqrt{b_j}} \right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{b_j} \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{b_j} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

woraus die gesuchte Ungleichung unmittelbar folgt.

Monatsaufgabe 09/2025[19]

Man löse die Aufgabe T-3 der 19. MeMO für eine selbstgewählte Zahl $n \geq 4$.

Bemerkung: Team-Wettbewerbe sind bei mathematischen Wettbewerben unüblich. Es ist dabei eine besondere Anforderung, im Team eine effiziente Arbeitsteilung zu finden. Dabei können im Bedarfsfall auch mehrere Teilnehmenden an einer Aufgabe arbeiten. Auf Vorschlag der Jury vergab die Stadt Chemnitz durch den Bürgermeister RALPH BURGHART (Dezernat 1, Personal, Finanzen und Bildung) einen Sonderpreis an das Team aus Litauen für besonderen Teamgeist bei Aufgabe T-3. In der Laudatio

[18] TITU ANDREESCU (1956 - …)

[19] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.09.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

wurde diese Auszeichnung damit begründet, dass zur Angabe des gesuchten Maximums neben dessen zahlenmäßige Angabe auch ein Existenzbeweis für das gefundene Maximum und der Nachweis, dass es keinen größeren Wert geben kann, erforderlich ist. Den Existenznachweis erbrachte das Team, indem sie ein Teammitglied „abstellte“, die maximale Lösung zu zeichnen, also in ein 45 x 45-Quadratgitter die Schlange korrekt einzuzeichnen. Aufgrund des erforderlichen Zeitaufwandes für eine solche Zeichnung wäre dies im Individual-Wettbewerb kaum realisierbar, im Team aber hervorragend gelöst Und mit voller Punktzahl belohnt)!

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 1, zum Schuljahresbeginn (August/September 2025) https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

Spotlight Mathe – Einblicke in en Bundeswettbewerb Mathematik (online-Seminar), 17. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10210

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade (online-Seminar), 18. September 2025, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/bwmw/?event=10211

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[20]	Nr.	Thema	Aufgabe
09/2025	Thema 33.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 33.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

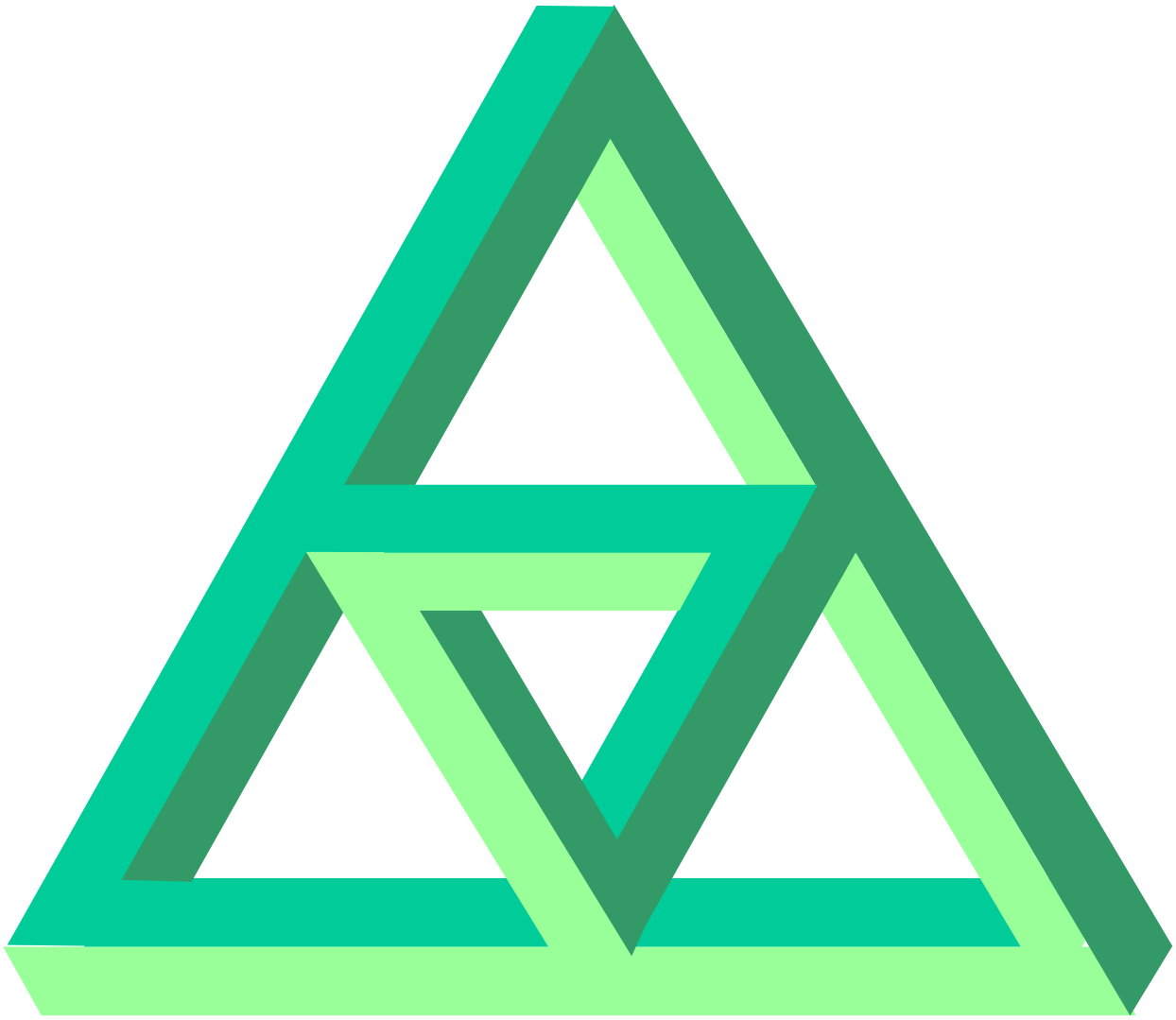
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[20] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2025 (Oktober 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir vertiefen noch einmal Aufgaben mit rationalen Zahlen. Die Aufgabe **MO641041** mit doppelrunden Dezimalzahlen führen uns zur Diskussion der Möglichkeit, mittels Taschenrechner aus einem Dezimalbruch einen passenden gewöhnlichen Bruch zu ermitteln. Doch auch in der Geschichte der Mathematik waren reguläre Zahlen im Sexagesimalsystem um 3000 Jahre v. Chr. von Bedeutung.

Wir beschäftigen uns im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM-1-5B** mit Fakultäten und untersuchen allgemeine Aussagen zu rationalen und irrationalen Zahlen in entsprechenden Olympiade-Aufgaben.

Wir informieren über den **Wettbewerb „Jugend forscht“**. Mit einer statistischen Übersicht zu den Wettbewerbsprojekten im Fachgebiet Mathematik/Informatik wollen wir zur Teilnahme anregen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 33.2 – Rationale Zahlen[3]

Aufgabe 33.05 – MO641041. Eine reelle Zahl z heiße doppelrunder Dezimalbruch der Länge n, falls sowohl z als auch $\frac{1}{z}$ in der üblichen Dezimaldarstellung höchstens n Stellen nach dem Komma benötigt.

Wie viele positive doppelrunde Dezimalbrüche der Länge n gibt es in Abhängigkeit von n?

Lösungshinweise: Damit eine reelle Zahl x eine endliche Dezimaldarstellung hat, muss sie eine rationale Zahl sein und darf in ihrer vollständig gekürzten Form als Quotient ganzer Zahlen im Nenner keine Primfaktoren verschieden von 2 und 5 aufweisen (denn es muss möglich sein, die Zahl x mit einer geeigneten Zehnerpotenz zu multiplizieren, um eine ganze Zahl zu erhalten).

Schreiben wir diesen Nenner als $2^k \cdot 5^l$ mit ganzzahligen Exponenten $k, l \geq 0$, so entspricht dabei die größere der beiden Zahlen k und l der Anzahl der benötigten Nachkommastellen in der Dezimaldarstellung von x (denn dies ist der Exponent der kleinsten Zehnerpotenz, deren Produkt mit x eine ganze Zahl ergibt). Ein positiver doppelrunder Dezimalbruch z der Länge n hat damit in seiner vollständig gekürzten Form sowohl im Zähler als auch im Nenner ein Produkt aus höchstens n Faktoren 2 und höchstens n Faktoren 5. Wir haben damit $z = 2^a \cdot 5^b$ mit ganzen Zahlen $-n \leq a \leq n$ und $-n \leq b \leq n$, womit sich $(2n+1)^2$ als gesuchte Anzahl doppelrunder Dezimalbrüche ergibt. ❑

Ergänzung[4]: Die Eigenschaft rationaler Zahlen, in der Dezimalbruchdarstellung nur endliche oder periodische Ziffernfolgen nach dem Komma zu zeigen, können wir nutzen, um eine gegebene Dezimaldarstellung in einen (ggf. näherungsweise) gewöhnlichen Bruch umzuwandeln. Ist die Darstellung endlich (wie zum Beispiel bei Taschenrechneranzeige unumgänglich), so können wir die Ziffernfolge nach dem Komma als einen Zähler Z und die dazu passende Zehnerpotenz als Nenner N wählen. Mit $Z < N$ gibt es stets eine ganze Zahl k mit $k \cdot Z \leq N < (k+1) \cdot Z$. Bilden wir den Kehrwert von $\frac{Z}{N}$ und betrachten davon nur den gebrochenen Teil, so erhalten wir einen Bruch $\frac{Z_1}{N_1}$ mit $Z_1 = N - k \cdot Z < Z$ und $N_1 = Z < N$. Diesen Prozess können wir fortsetzen, bis wir $Z_n = 0$ erhalten. Da aber bei jedem Schritt die Zähler und Nenner kleiner werden, können wir eventuell bereits früher den „Rest-“Dezimalbruch als gewöhnlichen Bruch erkennen (um dann den Ausgangsbruch leicht zu ermitteln).

[3] s. Teil 1 in Heft 06/2025.

[4] Nach: Brockmeyer, H. Umwandlung von Dezimalbrüchen in Näherungsbrüche mit Hilfe eines Taschenrechner. MNU 46/1 (1995) S. 22.

Betrachten wir zum Beispiel den periodischen Dezimalbruch $0,\overline{714285}$. Wie bekannt können wir dafür $\frac{714285}{999999}$ schreiben und finden durch (durchaus mühseliges) vollständiges Kürzen den Bruch $\frac{5}{7}$. Zu gleichem Ergebnis kommen wir aber auch mit dem Kehrwert von $\frac{714285}{1000000}$, also 1,4000014, indem wir die Näherung 1,4 leicht als $\frac{7}{5}$ erkennen. Zurück gerechnet geben wir für den gesuchten Bruch $\frac{7}{5}$ an. Offenbar genügen sogar die Nachkommastellen 0,7142, um diesen Bruch zu vermuten.

Wollen wir nun zum Beispiel für 0,538461… einen passenden echten Bruch angeben, erhalten wir für den Kehrwert 1,857144… Noch lässt sich kein passender Bruch erkennen, also bilden wir zu 0,857144 noch einmal den Kehrwert und sehen beim Ergebnis, dass 1,166665… durch $\frac{7}{6}$ angenähert werden kann. Rückwärts gerechnet erhalten wir nacheinander $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{7}$ und $\frac{7}{13}$.

Gehen wir von einem echten Bruch aus, so führt das Verfahren auf eine Kettenbruchdarstellung, für das Beispiel $\frac{73}{97} = 0.75257731958\ldots$ auf

$$\frac{73}{97} = \frac{1}{1+\frac{24}{73}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{24}}}$$

Aus einer Kettenbruchdarstellung lassen sich (theoretisch beweisbar) gute Näherungen für den Ausgangsbruch erzeugen, wenn die Darstellung abgebrochen wird. Dieser Effekt führt dazu, dass wir auch für die abgekürzte Dezimaldarstellung 0.752577 den passenden echten Bruch finden: Kehrwert 1.328767, Kehrwert zu 0.328767 ergibt 3.041667, nochmals Kehrwert zu 0,041667 ergibt 23.999808. Diesen Wert runden wir auf den ganzzahligen Teil 24. Wir erkennen, dass wir mit den Vorkommastellen offenbar die Zahlen der Kettenbruchdarstellung gefunden haben: 1 – 3 – 24. Der Nachweis der Allgemeingültigkeit des Verfahrens einschließlich einer Abschätzung des zulässigen Fehlers beim Runden ist eine lohnende Untersuchung für den Umgang mit Kettenbrüchen.

Interessant ist diese Methode, wenn wir irrationale Zahlen durch Brüche darstellen wollen. Gehen wir von $\pi \approx 3.1415926$ aus, finden wir schon nach dem zweiten Schritt die Kettenbruch-Nenner 3 – 7 – 16, gleichbedeutend mit dem Bruch $3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}} = 3+\frac{16}{113} = \frac{355}{166}$. Also finden wir die Näherung $\pi \approx \frac{355}{113} \approx 3.1415929$ (die schon ZU CHONGZHI[5] angegeben hat).

[5] chinesischer Mathematiker (430 – 500 n. Chr.), ermittelte einen Näherungswert für π mittels eines 12.288 (= 2^{12} x 3) seitigen Polygons.

Auch für die Aufgabe **MO631034**[6] beruht der Lösungsansatz auf der Darstellung rationaler Zahlen als Quotient von ganzen Zahlen mit nichtnegativem Nenner.

Eine Vielzahl von Aufgaben der MO zu dieser Thematik beschäftigt sich grundsätzlich mit der Unterscheidung von rationalen und irrationalen Zahlen. Dabei sind zudem Fertigkeiten im Koordinatensystem (s. Thema 31) oft hilfreich.

Aufgabe 33.06 – MO601033. Einen Punkt im kartesischen Koordinatensystem nennen wir rational, wenn beide Koordinaten rationale Zahlen sind. Eine Gerade nennen wir rational, wenn sie einer Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ mit ganzen Zahlen u, v und w genügt, wobei u und v nicht gleichzeitig null sein dürfen. Wir betrachten nun den Einheitskreis, beschrieben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

a) Weisen Sie nach, dass jede rationale Gerade, die den Einheitskreis nicht tangiert, mit dem Kreis entweder keinen oder genau 2 gemeinsame rationale Punkte hat.
b) Zeigen Sie, dass jeder von (−1, 0) verschiedene rationale Punkt des Einheitskreises auf einer rationalen Geraden durch den Punkt (−1, 0) liegt. Bestimmen Sie anschließend die Koordinaten dieses rationalen Punktes in Abhängigkeit von den Parametern v und w der Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ der zugehörigen rationalen Geraden.
c) Zeigen Sie: Zu jedem Zahlentripel (a, b, c) nichtnegativer ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und einander teilerfremden a und b, wobei b gerade ist, existieren zwei teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $0 \leq w < v$ derart, dass $a = v^2 - w^2$, $b = 2vw$ und $c = v^2 + w^2$ gilt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Gegeben sei eine rationale Gerade, die den Einheitskreis nicht tangiert. Diese Gerade hat dann entweder keine oder zwei Schnittpunkte mit dem Kreis. Gibt es dabei keine rationalen Schnittpunkte, so ist der Nachweis bereits erbracht. Wir nehmen daher an, dass die Gerade einen rationalen Schnittpunkt mit dem Kreis hat. Dann gibt es genau einen weiteren Schnittpunkt, und von diesem müssen wir zeigen, dass er rational ist.

Die rationale Gerade genüge der Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$. Für $v = 0$ ist die Gerade parallel zur y-Achse und die beiden Schnittpunkte mit dem Einheitskreis sind symmetrisch zur x-Achse, also beide rational.

Es sei daher $v \neq 0$. Stellen wir die Geradengleichung nun nach $v \cdot y$ um, ergibt sich $v \cdot y = w - u \cdot x$. Einsetzen in die mit v^2 multiplizierte Kreisgleichung führt zu $v^2x^2 + (w - ux)^2 = v^2$. Durch äquivalente Umformungen erhalten wir

$$(v^2 + u^2) \cdot x^2 - 2wux + w^2 - v^2 = 0\,,$$

[6] s. Heft 08/2024.

mit $v^2 + u^2 > 0$ eine echt quadratische Gleichung in x, deren Lösungen x_1 und x_2 die x-Werte der beiden Schnittpunkte sein müssen und deren Koeffizienten ganzzahlig sind. Nach dem Satz von VIETA gelten die Gleichungen

$$x_1 + x_2 = \frac{2wu}{v^2 + u^2} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{w^2 - v^2}{v^2 + u^2} \ .$$

Da wir schon wissen, dass eine der Nullstellen rational ist, folgt daraus, dass die andere Nullstelle auch rational ist. Der y-Wert des zweiten Schnittpunktes ergibt sich durch Einsetzen des eben gewonnenen x-Wertes in die umgestellte Geradengleichung $y = \frac{w - u \cdot x}{v}$ und ist damit ebenfalls rational.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Punkt $A(-1, 0)$ liegt offensichtlich auf dem Einheitskreis. Ist nun $B(b_x, b_y)$ ein von A verschiedener rationaler Punkt des Einheitskreises, so gilt $b_x \neq -1$, und die Gerade durch A und B wird durch die Geradengleichung

$$y = \frac{b_y}{b_x + 1} \cdot (x + 1)$$

beschrieben. Die Zahl $\frac{b_y}{b_x + 1}$ ist dabei rational, und wir können $\frac{b_y}{b_x + 1} = \frac{m}{n}$ mit ganzen Zahlen m, n und $n \neq 0$ schreiben. Die Geradengleichung lässt sich damit umformen zu $-m \cdot x + n \cdot y = m$.

Zusammenfassend liegt damit jeder von A verschiedene rationale Punkt des Einheitskreises auf einer rationalen Geraden durch den Punkt A, die den Einheitskreis nicht tangiert. Insbesondere können wir uns deshalb auch auf die Betrachtung der rationalen Schnittpunkte solcher Geraden mit dem Einheitskreis beschränken.

Es sei daher $u \cdot x + v \cdot y = w$ die Geradengleichung einer rationalen Geraden durch A, die den Einheitskreis nicht tangiert. Da A ein Punkt dieser Geraden ist, folgt $w = -u$ bzw. $u = -w$. Die Geradengleichung wird zu $-wx + vy = w$.

Für $v = 0$ ist diese Gerade parallel zur y-Achse und damit tangential am Kreis. Somit gilt $v \neq 0$. Sind dabei v und w Vielfache einer ganzen Zahl $c \neq 0$, so lässt sich diese Gleichung durch c teilen. Wir können daher ohne Einschränkung v und w als teilerfremd mit $v > 0$ annehmen.

Die Überlegungen zur allgemeinen Geradengleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ aus Aufgabenteil a) behalten weiterhin ihre Gültigkeit. Insbesondere gilt, dass das Produkt der x-Koordinaten der Punkte A und B gleich

$$\frac{w^2 - v^2}{v^2 + u^2} = \frac{w^2 - v^2}{v^2 + w^2}$$

sein muss, die x-Koordinate von B hat also den Wert $\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}$. Einsetzen in obige Gleichung liefert als entsprechenden y-Wert von B

$$\frac{1}{v}\cdot\left(w-u\cdot\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)=\frac{1}{v}\cdot\left(w+w\cdot\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)=\frac{w}{v}\cdot\left(1+\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\right)=$$
$$=\frac{w}{v}\cdot\frac{2\cdot v^2}{v^2+w^2}=\frac{2vw}{v^2+w^2}.$$

Der Punkt B lässt sich also darstellen als $B\left(\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2},\frac{2vw}{v^2+w^2}\right)$ mit teilerfremden ganzen Zahlen v und w mit $v>0$. Gemeinsam mit dem Punkt $A(-1,0)$ sind so alle rationalen Punkte auf dem Einheitskreis beschrieben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es seien a, b und c nichtnegative ganze Zahlen mit $a^2+b^2=c^2$ derart, dass a und b zueinander teilerfremd sind und b gerade ist. Wir betrachten zunächst den Fall $b=0$. Weil a zu b teilerfremd ist, folgt $a=1$ und somit $c=1$. Die Zahlen $v=1$ und $w=0$ haben dann die gewünschten Eigenschaften.

Nun sei $b>0$. Dann ist auch $c>0$, und $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$ ist ein von (−1, 0) verschiedener rationaler Punkt des Einheitskreises. Gemäß Aufgabenteil b) gibt es also teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $v>0$ und

$$\frac{a}{c}=\frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}\quad,\quad\frac{b}{c}=\frac{2vw}{v^2+w^2}$$

Wegen $b, c>0$ ist mit v auch w positiv, und aus den beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{a}{\frac{1}{2}b}=\frac{v^2-w^2}{vw}.$$

Da v und w teilerfremd sind, ist v^2-w^2 zu v, zu w und damit auch zu $v\cdot w$ teilerfremd. Weil auch a zu $\frac{b}{2}$ teilerfremd ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Bruchdarstellung von positiven rationalen Zahlen als Quotient zweier teilerfremder positiver Zahlen, dass $a=v^2-w^2$ und $\frac{b}{2}=v\cdot w$, also $b=2\cdot vw$ ist. Damit folgt dann direkt $c=v^2+w^2$. Weil b gerade ist und a teilerfremd zu b, muss a ungerade sein und deshalb $a>0$ gelten. Aus $a=v^2-w^2$ folgt also $w<v$. Die Zahlen v und w haben also die gewünschten Eigenschaften. ❑

Aufgabe 33.06 – MO180922. In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:

(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.

Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösungshinweise: Die Zahl $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ist dagegen rational. Aussage (1) ist also falsch.
Es sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ zwei verschiedene irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$, für die gilt

$$r = \frac{a}{b} \;;\quad r + x = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

Damit ergibt sich der Widerspruch, dass x rational wäre. Damit ist bewiesen, dass Aussage (3) wahr ist. ❑

Aufgabe 33.07 – MO290934. Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Lösungshinweise: Wir wählen $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b - a)$ und $y = a + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (b - a)$. Dann ist wegen $b - a > 0$ und $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ auch

$$a < a + \frac{1}{2} \cdot (b - a) = x < a + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (b - a) = y < a + 1 \cdot (b - a) = b$$

Da a und b rationale Zahlen sind, ist auch x eine rationale Zahl. Weil dagegen $\sqrt{2}$ irrational ist, sind auch $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (b - a)$ und somit y irrational. ❑

Aufgabe 33.08 – MO330945/MO331045. Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene ”rational” genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde ”irrational” genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde ”gemischt” genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten ”rational”, ”irrational”, ”gemischt”!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt. Analog schließen wir aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt.

Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen wird. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, so dass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für jede Kombination gibt es solche Geraden: Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate). Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Auch solche Geraden gibt es, z.B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1, \sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$. ❑

Aufgabe 33.09 – MO341035. Hat man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, so werde ein Punkt der Ebene genau dann ein rationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde genau dann ein irrationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten

irrationale Zahlen sind; er werde genau dann ein gemischter Punkt genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational, die andere irrational ist.

a) Gibt es eine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?
b) Für jede der drei Sorten beantworte man folgende Frage: Gibt es eine Gerade, auf der sich von dieser Sorte genau ein Punkt, dagegen von jeder der beiden anderen Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?

Lösungshinweise: Wir zeigen zuerst: Befinden sich auf einer Gerade mindestens zwei rationale Punkte, dann enthält diese Gerade keine irrationalen oder keine gemischten Punkte.

Beweis: Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei verschiedene rationale Punkte, die auf der Geraden liegen. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x_1 = x_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur y-Achse und jeder Punkt auf der Gerade besitzt die gleiche x-Koordinate. Also hat jeder Punkt mindestens eine rationale Koordinate, sodass es auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

2. Fall: $y_1 = y_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur x-Achse, sodass alle Punkte auf ihr die gleiche – eine rationale – y-Koordinate besitzen und es wieder auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

3. Fall: $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Dann verläuft die Gerade weder parallel zur x- noch zur y-Achse und es gibt reelle Zahlen $m \neq 0$ und n, sodass die Punkte (x, y) auf der Geraden alle die Gleichung $y = m \cdot x + n$ erfüllen. Dabei sind jedoch $m = \frac{y_2 - .y_1}{x_2 - x_1}$ und $n = y_1 - m \cdot x_1$ beide rational, sodass für rationale x auch $y = m \cdot x + n$ rational ist. Umgekehrt ist aber auch für jedes rationale y auch $x = \frac{y-n}{m}$ rational, sodass es auf der Geraden keine gemischten Punkte gibt.

Mit dieser Vorbemerkung können wir die Frage aus Aufgabenteil a) sowie die Fragen aus Aufgabenteil b), die sich auf die Sorten gemischter bzw. irrationaler Punkte beziehen, leicht negativ beantworten, da in all diesen Situationen jeweils mindestens zwei rationale Punkte auf der Geraden liegen müssten, was dazu führt, dass eine der beiden anderen Sorten nicht auf der Gerade vertreten sein kann.
Es bleibt noch der Fall zu betrachten, ob es eine Gerade gibt, die genau einen rationalen und jeweils mindestens zwei gemischte und irrationale Punkte enthält.

Dies ist der Fall, wie etwa die Gerade, die durch die Gleichung $y = \sqrt{2} \cdot x$ beschrieben wird, zeigt. Diese enthält nämlich den rationalen Punkt $(0{,}0)$, die gemischten Punkte $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$ und die irrationalen Punkte $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6})$, wobei jeweils in der x- und y-Koordinate das gleiche Vorzeichen zu wählen ist. ❑

Aufgabe 33.10 – MO321041. Gibt es in einer Ebene mit einem x,y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Lösungshinweise: Der Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius $\sqrt[4]{3}$ ist ein solcher. Die Koordinaten aller Punkte auf diesem erfüllen die Gleichung $x^2+y^2=\sqrt[4]{3}^2=\sqrt{3}$. Wären sowohl x als auch y rational, wäre auch x^2+y^2 rational, im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{3}$. Also kann kein Punkt dieser Kreisline nur rationale Koordinaten haben. ❑

Aufgabe 33.11 – MO101031

a) Beweisen Sie folgenden Satz!
   Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x,y,z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x,y,z mit der Eigenschaft $x^2+y^2=z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x,y und z mit einer von Eins verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Sei k eine ganze Zahl. Dann ist

$$k+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2=\frac{4k+(k-1)^2}{4}=\frac{k^2-2k+1+4k}{2^2}=\frac{k^2+2k+1}{2^2}$$
$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

Da der Ausdruck in der Klammer rational für rationales k ist, ist die gesuchte Quadratzahl gefunden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Ist $k=n^2$ eine Quadratzahl, so erhalten wir

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

bzw. nach Multiplikation mit 4 die Gleichung

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2-1)^2,$$

sodass wir mit $(x, y, z) = (2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ ein pythagoräisches Zahlentripel erhalten. Setzen wir hierin für n die Zahlen 3; 4; 5 und 6 ein, erhalten wir die paarweise voneinander verschiedenen pythagoräischen Tripel (6; 8; 10) , (8; 15; 17), (10; 24; 26) und (12; 35; 37). ❑

Bemerkung: Die Definition der Verschiedenheit ist mit seiner Einschränkung auf natürliche "Streckungsfaktoren" ungünstig, da dann z.B. auch die Tripel (6; 8; 10) und (9; 12; 15) nach dieser Definition voneinander verschieden wären, obwohl beide nicht vom Tripel (3; 4; 5) verschieden sind.

Sehr ähnlich dazu sind auch die folgenden Aufgabenstellungen.

Aufgabe 33.12 – MO381024. Beweisen Sie: Zu jeder rationalen Zahl a existiert ein Paar (x, y) von rationalen Zahlen, so dass $x^2 = y^2 + a$ gilt.

Lösungshinweise: Ein derartiges Paar (x, y) können wir für jedes a folgendermaßen festlegen: Setzen wir $y = \frac{a-1}{2}$, so bedeutet dies für x

$$x^2 = y^2 + a = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + a = \frac{a^2 - 2a + 1 + 4a}{4} = \frac{a^2 + 2a + 1}{4} = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2,$$

also $x = \frac{a+1}{2}$. Diese Zahlen x und y sind für rationale Zahlen a selbst wieder rational und erfüllen die geforderte Gleichung. ❑

Aufgabe 33.13 – MO470931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen a gibt, für welche die Zahl $a + 0{,}25$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Lösungshinweise: Für jede positive, ganze Zahlen k ist $a = k \cdot (k + 1)$ eine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe erfüllt, denn es gilt

$$a + 0{,}25 = k \cdot (k + 1) + \frac{1}{4} = \frac{k^2 + 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

Da $k \cdot (k + 1)$ unendlich viele Werte annehmen kann, ist damit die Existenz unendlich vieler geeigneter Zahlen a nachgewiesen[7]. ❑

Fakultät – Umgang mit großen Zahlen (Teil 2[8])

Aufgabe – MOV11035[9]. Unter der Zahl $n!$, gelesen „n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

[7] In den Lösungshinweisen der Aufgabenkommission wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Lösungsdarstellung explizit die Existenz unendlich vieler Zahlen zeigt.

[8] Teil 1 – siehe Heft 09/2025

[9] Die Mathematik-Olympiade begann vor der offiziellen Nummerierung mit zwei Vorolympiaden.

Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungshinweise: Es sei x die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl 50! Dann gilt $50! = z \cdot 10^x$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl 50! enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl 50! mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 50! enthält.

- Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 50 genau zwei durch $25 = 5^2$ teilbare Zahl, nämlich 25 und 50,
- und unter den verbleibenden 48 Zahlen genau $10 - 2$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 50$ und $n \neq 25, 50$.

Daher enthält die Zahl 50! wegen $2 \cdot 2 + 8 = 12$ genau 12 Faktoren 5 und endet somit auf genau 12 Nullen. ❑

Aufgabe MO130914. Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d.h., es gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endet.

Lösungshinweise: Mit der Argumentation von oben ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 1000! enthält.

- Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl,
- unter den restlichen 999 Zahlen genau $8 - 1$ durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$;
- unter den übrigen 992 Zahlen genau $40 - 8$ durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ mit $n \neq 5, 10, 15, \ldots, 40$, d.h. $n \neq k \cdot 5$ $(k = 1, \ldots, 8)$;
- schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200 - 40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5$ $(k = 1, \ldots, 40)$.

Daher enthält die Zahl 1000! Wegen

$$4 + 3 \cdot (8 - 1) + 2 \cdot (40 - 8) + (200 - 40) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen. ❑

Aufgabe KZM-1-5B. Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$

(a) Man finde die größte ganze Zahl s, so dass $2019!$ durch 2019^s teilbar ist.

(b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a, b, c > 1$ keine Lösungen besitzt.
(c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir verwenden die Argumentation wie oben. Es sei s die gesuchte Zahl. Dann gilt $2019! = z \cdot 2019^s$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die teilerfremd zu 2019 ist. Wegen der Primfaktorenzerlegung $2019^s = 3^s \cdot 673^s$ ist s gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 3 bzw. 673, die in der Zahl 2019! enthalten sind. Da jede dritte natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, enthält die Zahl 2019! mehr Faktoren 3 als Faktoren 673. Mithin ist s gleich der Anzahl der Faktoren 673, die 2019! enthält.

Wir finden genau die drei Zahlen 673, 1346 = 673 · 2 und 2019 = 673 · 3, die den Teiler 673 beitragen. Somit ist $s = 3$ die größte Zahl mit $2019^s | 2019!$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Gilt $a = b$, so reduziert sich die Gleichung auf $2 \cdot a! = c! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot c$. Wegen $a > 1$ gilt $c! \geq 4$ und deshalb $c \geq 3$. Teilen wir nun beide Seiten durch 2, so verbleibt auf der linken Seite eine vollständige Fakultät, aber auf der rechten Seite ist das Produkt keine vollständige Fakultät. Deshalb nehmen wir o.B.d.A. $a < b$ an. Offenbar gilt dann auch $b < c$, d.h. die Zahl b ist Faktor in $c!$ Weil nun alle Faktoren von $a!$ auch unter den Faktoren in $b!$ sind, gilt

$$a! + b! = a! \cdot (1 + (a + 1) \cdot \ldots \cdot b) = c!,$$

jedoch ist b in dieser Gleichung kein Teiler von $c!$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Für eine einstellige Zahl n $(n > 2)$ gilt stets: $n < n!$ Folglich kann es unter den einstelligen Zahlen nur die trivialen Lösung 1 = 1! und 2 = 2! geben.

Es seien a $(a > 0)$ und b Ziffern einer zweistelligen Zahl, so dass für $n = 10a + b$ gilt: $n = a! + b!$ Keine der Ziffern ist größer als 4, da sonst n mindestens dreistellig wäre. Wäre eine Ziffer 1, so muss für ein zweistelliges n die andere Ziffer 4 sein, doch weder 14 noch 41 erfüllen die Forderung, denn $1! + 4! = 25$. Gleiches gilt für die Ziffer 2, da die Zahlen 24 und 42 ebenfalls nicht die Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind $(2! + 4! = 26)$. Somit bleiben nur noch die Zahlen 33, 34, 43, 44 zu prüfen, die aber ebenfalls als Lösung entfallen. Es gibt folglich keine zweistelligen Zahlen der geforderten Art.

Es seien a $(a > 0), b$ und c Ziffern einer dreistelligen Zahl, so dass für $n = 100a + 10b + c$ gilt: $n = a! + b! + c!$ Mindestens eine der drei Ziffern ist größer als 4, da sonst $n \leq 3 \cdot 4! = 72$ nicht dreistellig wäre. Keine der Ziffern ist dagegen größer als 6, da in diesem Fall n mindestens vierstellig würde. Auch die Ziffer 6 kann

nicht auftreten, da dann $n \geq 6! = 720$ gelten würde und somit wenigsten eine Ziffer 7 oder größer wäre. Dies wurde bereits ausgeschlossen.

Folglich ist mindestens eine Ziffer gleich 5. Alle drei Ziffern können wegen $555 \neq 3 \cdot 5!$ nicht 5 sein. Auch zwei Fünfen sind nicht möglich, weil wegen $2 \cdot 5! = 240 \leq n \leq 2 \cdot 5! + 4! = 264$ nur die Zahl 255 möglich wäre, aber offensichtlich $255 \neq 2! + 2 \cdot 5! = 242$ gilt.

Folglich ist genau eine Ziffer gleich 5. Wegen $n \leq 3 \cdot 5! = 360$ kann nicht die Hunderterstelle 5 sein. Wegen $120 = 5! \leq n \leq 5! + 2 \cdot 4! = 168$ folgt deshalb $a = 1$. Somit bleiben die Möglichkeiten mit $b = 5$:

$$150 + c = 1! + 5! + c! = 121 + c! \implies 29 = c! - c = c((c-1)! - 1)$$

oder mit $c = 5$:

$$105 + 10b = 1! + b! + 5! = 121 + b! \implies 16 = 10b - b! = b(10 - (b-1)!))$$

Wegen der Primzahleigenschaft von 29 müsste jedoch im ersten Fall $c = 1$ oder $(c - 1)! = 2$ sein. Beides führt zu keiner Lösung.

Im zweiten Fall muss b ein Teiler von 16 sein, also $b = 1, 2, 4$ oder 8. Nur $b = 4$ erfüllt die gegebene Gleichung. Folglich kann nur $n = 145$ die Aufgabe erfüllen.

Die Probe $145 = 1 + 24 + 120 = 1! + 4! + 5!$ bestätigt diese Zahl als Lösung. ❑

Bemerkung 1: Die Zahlen 1, 2, 145 und 40585 sind die einzigen natürlichen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Bemerkung 2: Auch wenn durch die Einschränkung der Suche nach allen höchstens dreistelligen Zahlen die systematische Untersuchung aller Zahlen von 0 bis 999 praktisch und ohne rechentechnische Hilfsmittel möglich ist, sollte dies als Lösungsweg vermieden werden. Wie gezeigt, geht es darum, durch Vorüberlegung zunächst die Anzahl der zu probierenden Fälle zu reduzieren. Bleiben am Ende dann doch noch einige Fälle übrig, ist eine tabellarische Übersicht für die Korrektur zulässig.

Aufgabe MO241044. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;\ b)$ natürlicher Zahlen, für die $a! + b! = (a + b)!$ gilt!

Lösungshinweise: Aufgrund der Symmetrie gilt allgemein, dass $(b; a)$ eine Lösung ist, wenn $(a; b)$ eine Lösung ist. Wir betrachten nachfolgend daher nur Fälle mit $a \leq b$.

Da $0! = 1$ ist, ist offensichtlich, dass $a > 0$ sein muss, denn sonst müsste $1 + b! = b!$ gelten, was nicht möglich ist. Wir wollen beweisen:

$$\prod_{k=1}^{a} k + \prod_{k=1}^{b} k = \prod_{k=1}^{a+b} k$$

Wir teilen beide Seiten durch $b!$ und erhalten

$$\frac{\prod_{k=1}^{a} k}{\prod_{k=1}^{b} k} + 1 = \frac{\prod_{k=1}^{a+b} k}{\prod_{k=1}^{b} k}$$

Wegen $b < a + b$ können wir im Fall $a < b$ die Brüche kürzen

$$\frac{1}{\prod_{k=a+1}^{b} k} + 1 = \prod_{k=b+1}^{a+b} k$$

Rechts steht eine natürliche Zahl, so dass der Bruch links auch eine natürliche Zahl ergeben muss. Das ist für $b > a$ nicht möglich. Es bleibt also nur noch der Fälle $a = b > 0$ zu untersuchen. Dann muss gelten

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{b} k = \prod_{k=1}^{2b} k \quad \Longrightarrow \quad 2 = \frac{\prod_{k=1}^{2b} k}{\prod_{k=1}^{b} k} = \prod_{k=b+1}^{2b} k$$

Das ist nur für $b = 1$ erfüllt, für größere b gilt immer $2 \cdot b! < (2a)!$ Daher ist das triviale Paar (1; 1) die einzige Lösung. ❑

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [10]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[11] (FG) Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu drei Teilnehmenden können Mädchen und Jungen bis 14 Jahre („Jugend forscht junior“[12]) bzw. Jugendliche zwischen 15 und 21 Jahre („Jugend forscht“) starten. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres wird eine maximal 15-seitige Darstellung des Projektes vorgelegt. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich

[10] www.jugend-forscht.de

[11] schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

[12] bislang als „Schüler experimentieren“ bekannt

vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmenden Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Standpräsentation und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2022/23	9.386	*Unternehmensverbände im Lande Bremen e. V. Bremen*
2023/24	10.492	*experimenta gGmbH, Heilbronn*
2024/25	10.350	*Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **FG Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch im Jahr 2025 bundesweit mit 759 Teilnehmenden (7.3%) wieder beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft (594 Teilnehmende, 5.7%) und deutlich weniger als zum Beispiel im FG Biologie (2.587 Teilnehmende, 25.0%) oder im FG-Technik (1.996 Teilnehmende, 19.3%).

Der Landeswettbewerb Sachsen fand am 12. April 2025 in der VDI-Garage Leipzig statt und wurde gemeinsam mit drei Patenunternehmen ausgerichtet: Porsche Leipzig GmbH, DAS Environmental Expert GmbH Dresden, BGH Edelstahlwerke GmbH Freital. Zudem ist die Siemens AG langjähriger Unterstützer des Landeswettbewerbs. Es waren 25 Jugendliche mit 20 Projekten am Start. Dazu hatten sich noch 9 Schülerinnen und Schüler mit acht Projekten in der Sparte „Jugend forscht junior“ qualifiziert. Das FG Mathematik/Informatik war mit drei Projekten „Jugend forscht“ (15.0%) und einem Projekt der Jüngeren gut vertreten.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und oder der außerschulischen Betreuersuche gegeben – aber jede Lehrerin und jeder Lehrer fürs Fach Mathematik ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der sächsischen Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik – auch wenn manche Projekttitel nur wenig über den Inhalt[13] verraten:

Becker, Sophie (Sächs. Landesgymn. Sankt Afra, Meißen) **Bestimmung von Mineralen in Gesteinsproben mit maschinellem Lernen**	2025
Benedix, Alexander (Student): **Integration über sphärische Dreiecke** *2. Platz; Sonderpreis c't Magazin; Sonderpreis Studienseminar im Kerschensteiner Kolleg des Deutschen Museums in München*	2023
Benedix, Alexander (Student) **Simulation supraleitender Lager**	2024
Beyer, Henning (Rossbach-Schule, Berufl. Schulzentrum der Stadt Leipzig) **Einsatz effektiverer Transformer-Encoder** *2. Platz; Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik*	2023
Goncharov, Denis (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Modellierung der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Radfahrers** *2. Platz; Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2024
Jaretzki, Lennart (Rossbach-Schule, Berufl. Schulzentrum der Stadt Leipzig) **Geometrischer deep-Learning Ansatz zur Knotentheorie** *2. Platz*	2024
Li, Chenpan (Nexö-Gymn. Dresden): **C2P-Net: Zweistufige nicht-starre Punktwolkenregistrierung für die Mittelohrdiagnostik** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale; Sonderpreis Elektrotechnik und Informationstechnik (FBTEI e.V.)*	2025
Lowa, Alexander/ Voigtmann, Richard (TU Dresden) **Falschinformationen erkennen mithilfe von KI** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale; Sonderpreis Staatsministerium für Wirtschaft, Arbeit und Verkehr; futureSAX Sonderpreis*	2023
Riedel, Max (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse und Visualisierung von SingleCell-Sequenzierungen** *3. Platz; Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik, Sonderpreis futureSAX*	2024
Uhlig, Emma (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Verbreitung von Fake News — Stochastische Simulation zur Modellierung sozialer Netzwerke** *2. Preis; Sonderpreis Forschungspraktikum am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) im Institut für Datenwissenschaft Jena*	2025

[13] ausführliche Beschreibungen zu den Projekten 2024 unter https://www.jugend-forscht-sachsen.de/jugend-forscht/teilnehmer/

Das Bundesfinale des 60. Bundeswettbewerbs richtete die Stiftung Jugend forscht e.V. gemeinsam mit der HELMUT-SCHMIDT-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg vom 29. Mai bis 1. Juni 2025 aus. Insgesamt 167 Finalisten hatten sich mit ihren 112 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 20 Teilnehmende mit 16 Projekten im FG Mathematik/Informatik. Hier errang SIMON NEUENHAUSEN vom ALEXANDER-VON-HUMBOLDT-Gymnasium (Neuss/Nordrhein-Westfalen) mit seinem Projekt „Mehr Freiheit für den Mini-Computer - Open Source WLAN auf dem ESP32“ den 1. Preis. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld von 2.500 € der KLAUS-TSCHIRA-Stiftung verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre[14] zu lesen:

> *Was tun, wenn ein Chip viel kann, aber nicht alles erlaubt? SIMON NEUENHAUSEN wollte das nicht akzeptieren. Er nahm sich einen verbreiteten, kostengünstigen Mini-Computer vor und fand heraus, was dieser wirklich kann. Die Herausforderung bestand darin, dass die eingebaute WLAN-Funktion vom Hersteller weitgehend abgeschlossen war und sich kaum überprüfen und verändern ließ. Also analysierte der Jungforscher den Programmcode und entwickelte eine eigene, frei zugängliche Version. Damit lässt sich der Chip nutzen, um Netzwerke einzurichten, neue Anwendungen zu testen oder Sicherheitslücken zu erkennen. Die Software macht teure Spezialgeräte überflüssig. Der günstige Chip kann nun Aufgaben übernehmen, für die sonst deutlich mehr Technik nötig wäre.*

Die Jury überzeugte vor allem die systematische Vorgehensweise, die enorme fachliche Tiefe des Projekts und die Beharrlichkeit, mit der SIMON NEUENHAUSEN sein Projektziel verfolgte und erreichte. Sein fundiertes Verständnis der Mikrocontroller-Architektur beeindruckte ebenso wie die ausgezeichnete Qualität seiner fachlichen Arbeit (Auszug aus der Laudatio).

Der sächsische Teilnehmer CHENPAN LI vom MARTIN-ANDERSEN-NEXÖ-Gymnasium (Dresden) in Zusammenarbeit mit dem Nationalem Centrum für Tumorerkrankungen Dresden wurde für sein Projekt „KI schärft den Blick ins Ohr – C2P-Net: zweistufige nicht-starre Punktwolkenregistrierung für die Mittelohrdiagnostik“ mit dem 3. Preis ausgezeichnet, verbunden mit einem Preisgeld von 1.000 € von der KLAUS-TSCHIRA-Stiftung verbunden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die doppelrunden Dezimalbrüche aus Aufgabe MO641041 haben in der Geschichte der Mathematik eine Bedeutung. In

[14] https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2025/preistraegerinnen-und-preistraeger.html

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesoptanien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 3.3 – Rechentechniken (Seiten 225ff)

wird über die Rechentechniken im Sexagesimalsystem aus der Zeit um 3000 Jahre vor Chr. berichtet, also im Zahlensystem, das mit den Zahlzeichen 1, …, 59 geschrieben wurde. Der Wert einer Zeichenfolge wurde mit den 60er-Potenzen berechnet. So entspricht der Folge (12, 23, 49)[15] der Wert

$$12 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60^1 + 49 \cdot 60^0 = 44629.$$

Allerdings gab es für die Zahlendarstellung keinen Stellenwert wie heute im Dezimalsystem, so dass diese Zeichenfolge auch $12 \cdot 60^3 + 23 \cdot 60^0 + 49 \cdot 60^{-1} = 2.592.023{,}816\ldots$ oder anderes bedeuten konnte. Zudem gab es in der Zahlendarstellung keine Null. Heute würden wir ein Festkommaformat wählen und im ersten Beispiel (12, 23, 49; 0) und im zweiten Beispiel (12, 0, 0, 23; 49) schreiben.

Es gibt verschiedene Erklärungen für die Verwendung des Sexagesimalsystems, das uns heute noch in der Winkeleinteilung oder Zeitmessung begegnet. Ein Vorteil gegenüber dem Dezimalsystem besteht in der Teilervielfalt der Zahl 60. Während die Zahl 10 nur die vier Teiler 1, 2, 5 und 10 besitzt, sind es bei 60 insgesamt 12 Teiler. Eine Division zweier Zahlen kann damit ohne Rest durchgeführt werden, wenn der Nenner auf eine Potenz 60^k erweitert werden kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Nenner nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 enthält. Solche Zahlen werden reguläre Zahlen (des Sexagesimalsystems) genannt. Reguläre Zahlen sind abgeschlossen gegenüber der Multiplikation und Division (ähnlich wie die doppelrunden Dezimalbrüche). Da zur damaligen Zeit die Division als Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ausgeführt wurden, mussten die Kehrwerte der regulären Zahlen beherrscht werden. Diese können wir heute leicht ausrechnen, beispielsweise

$$6^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{10}{60} = (0; 10),$$

$$18^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{2^3 \cdot 5^2}{(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2} = \frac{200}{3600} = \frac{180}{3600} + \frac{20}{3600} = \frac{3}{60} + \frac{20}{60^2} = (0;\ 3, 20)$$

oder

$$32^{-1} = (0; 1, 52, 30).$$

[15] Wir verwenden die Schreibweise in Klammern als Darstellung im Sexagesimalsystem, in der das Semikolon als (Dezimal-) Komma geschrieben wird.

Um das „Kleine Einmaleins“ mit der Basis 60 nicht lernen zu müssen, wurden Multiplikationstabellen erstellt. Es gab zur damaligen Zeit sogar Tafelwerke für Quadratzahlen und Wurzelwerte. Wesentlich für die Division waren zudem Reziprokentabellen, in denen die (endlichen) Reziprokwerte der regulären Zahlen aufgeführt wurden.

Zahl	Reziproke	Zahl	Reziproke	Zahl	Reziproke
2	30	12	5	30	2
3	20	15	4	32	1, 52, 30
4	15	16	3, 45	36	1, 40
5	12	18	3, 20	40	1, 30
6	10	20	3	45	1, 20
8	7, 30	24	2, 30	48	1, 15
9	6, 40	25	2, 24	50	1, 12
10	6	27	2, 13, 20	54	1, 6, 40

Dabei ist zu beachten, dass in der Tabelle keine Stellenwerte angegeben werden. Diese müssen entsprechend der konkreten Aufgabenstellung noch festgelegt werden. So ist für (2; 0) das Reziproke (0; 30), aber ebenso wird für (0; 2) aus der Tabelle das Reziproke (30; 0) zugeordnet.

Die Reziproken von irregulären Zahlen bereiteten offenbar größere Schwierigkeiten. Aber es gab bereits Näherungswerte, z.B. für $7^{-1} \approx (0; 8, 34, 17, 8, \dots)$, indem der zu berechnende Bruch zunächst so erweitert wurde, dass der Nenner in die Nähe einer regulären Zahl kam:

$$7^{-1} = 13 \cdot 91^{-1} \approx 13 \cdot 90^{-1} = (0; 8, 40).$$

Mit $0.1\overline{4}$ wird damit der periodische Dezimalbruch $0.\overline{142857}$ angenähert. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wurden auch Tafeln für Näherungen der Reziproken von irregulären Zahlen erstellt. Aus heutiger Sicht ist es interessant, wie möglicherweise für manche Zahlen die darin enthaltenden Näherungen berechnet wurden: Für Werte, die nicht in der Reziprokentabelle enthalten sind, zerlege man den Nenner in eine Summe, die zu einem Produkt zweier Reziproken führt:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$$

Beispiele: Gesucht wird das Reziproke von (2; 5). Da nur die Primfaktoren 2 und 5 auftreten, entsteht ein endlicher Bruch. Wir zerlegen in $a = (0; 5)$ und $b = (2; 0)$. Wir entnehmen der Reziprokentabelle $(0; 5)^{-1} = (12; 0)$. Problemlos finden wir damit für $1 + \frac{b}{a}$ den Wert $(25; 0)$. In der Reziprokentabelle können wir dafür $(0; 2, 24)$ ablesen. Die Multiplikation mit $(12; 0)$ bereitet keine Schwierigkeit:

$(2;\ 5)^{-1} = (12;0) \times (0;2,24) = (0;28,48)$. Mit Dezimalzahlen überzeugen wir uns von der Richtigkeit des Ergebnisses:

$$(2;5)^{-1} = \left(2 + \frac{5}{60}\right)^{-1} = 2.08\overline{3}^{-1} = 0.48 = \frac{28}{60} + \frac{48}{60^2} = (0;28,48).$$

Auch die Probe gelingt mit dem Verfahren. Wollen wir das Reziproke von (0; 28, 48) berechnen, setzen wir $a = (0;0,48)$ und $b = (0;28)$, so entnehmen wir einer Reziprokentabelle $(0;0,48)^{-1} = (1,15;0)$. Dann ist $1 + \frac{b}{a} = (36;0)$, dem laut Tabelle das Reziproke $(0;1,40)$ entspricht. Schließlich multiplizieren wir die beiden Brüche:

$$(0;28,48)^{-1} = (1,15;0) \times (0;1,40) = (2;5).$$

Wir führen eine Probe in Dezimalzahlen durch:

$$(0;28,48)^{-1} = \frac{1}{\frac{28}{60}+\frac{48}{60^2}} = \frac{3600}{1728} = 2.08\overline{3} = (1,15;0) \times (0;1,40) = \frac{75\cdot100}{3600} = \frac{125}{60} = (2;5).$$

Suchen wir einen Wert für das Reziproke der irregulären Zahl 7, so könnten wir folgende Zerlegungen probieren:

Fall 1: $a = (1;0), b = (6;0)$. Dies führt zu $a^{-1} = (1;0)$ und $1 + b \cdot a^{-1} = 7$, womit also keine Lösung gefunden werden kann, weil das Reziproke von 7 noch nicht bekannt ist.

Fall 2: $a = (2;\ 0), b = (5;0)$. Dies führt zu $a^{-1} = (0;30)$ und $1 + b \cdot a^{-1} = (3;30)$. Weil das Reziproke von (3; 30) in der Tabelle nicht angegeben wird, runden wir $(3;30) \approx (3;20)$ und verwenden das zugehörige Reziproke $(0;18)$. Die Multiplikation der Reziproken $(0;30) \times (0;18) = (0;9) = \frac{9}{60} = 0.15$ ergibt eine grobe Näherung für $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.

Fall 3: $a = (0;30), b = (6;30)$. Dies führt zu $a^{-1} = (2;0)$ und $1 + b \cdot a^{-1} = (14;0)$. Um die Tabelle zu nutzen, runden wir $(14;0) \approx (15;0)$ mit dem Reziproken $(0;4)$. Die Multiplikation der Reziproken $(2;0) \times (0;4) = (0;8) = \frac{8}{60} = 0.1\overline{3}$ ergibt eine weitere Näherung.

Monatsaufgabe 10/2025[16]

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P auf $\overline{AC}$ teile die Strecke $\overline{AC}$ innen im Verhältnis 4 : 1, so dass $|\overline{AP}| : |\overline{PC}| = 4 : 1$ gilt, und der Punkt Q auf $\overline{AB}$ teile die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis 3 : 2, so dass $|\overline{AQ}| : |\overline{QB}| = 3 : 2$ gilt.

Beweisen Sie, dass das Dreieck ΔPQD gleichschenklig-rechtwinklig ist.

[16] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.10.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 08/2025

Finde alle natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt!

Lösungshinweise: Trivialerweise erfüllen die einstelligen Quadratzahlen 0, 1, 4 und 9 die Bedingungen der Aufgabe. Wir untersuchen deshalb mehrstellige Zahlen. Dann darf keine Ziffer 0 sein, weil es dann eine Permutation mit einer einzelnen 0 als Endziffer gibt, was aber keine Quadratzahl ergibt. Weiterhin wissen wir, dass die Endziffer einer Quadratzahl nur 1, 4, 5, 6 oder 9 sein kann, da jede Quadratzahl einer einstelligen Zahl (Einerziffer) auf nur diese Zahlen enden kann. Dann können die gesuchten Quadratzahlen nur aus diesen Ziffern bestehen, weil jede andere Ziffer durch eine Permutation als Einerziffer auftreten würde. Außerdem ist bekannt, dass die Zahl aus den letzten beiden Ziffern (Zehner- und Einerziffer) bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 lassen muss.

Wir betrachten zunächst den Fall, alle Ziffern einer Quadratzahl seien gleich (und deren Permutationen verändern die Quadratzahl nicht).

Betrachten wir zunächst Quadratzahlen, die aus mindestens zwei verschiedenen Ziffern bestehen. Sie (oder eine Permutation der Ziffern) können nur auf 14, 15, 16, 19, 45, 46, 49, 56, 59, 69 oder ihre Vertauschungen 41, 51, 61, 91, 54, 64, 94, 65, 95, 96 enden. Jedoch entfallen die unterstrichenen Kombinationen, weil sie oder ihre Vertauschung (die ja bei einer Permutation ebenso auftreten kann) bei Division durch 4 den Rest 2 oder 3 lassen. Da die Endungen 11, 55, 66 und 99 auch nicht auftreten können, treten die Ziffern 1, 5, 6 und 9 nur einzeln auf (weil es sonst auch Permutationen mit diesen Endungen geben würde). Deshalb können nur solche Zahlen die Bedingungen erfüllen, die als Kombination dieser vier Ziffern entstehen, darunter sind 61, 65, 69, 159, 165, 569, 691 oder 1569. Da dies alles keine Quadratzahlen sind (und andere Zahlen aus den genannten Ziffern durch Permutationen auch zu diesen Zahlen führen würden), kann es keine Quadratzahlen der geforderten Art geben, bei denen mindestens zwei verschiedene Ziffern verwendet werden.

Untersuchen wir abschließend den Fall, dass bei den gesuchten Quadratzahlen alle Ziffern gleich sind. Dann kann dies nur die Ziffer 4 sein. Für $n \geq 2$ müsste wegen

$$\underbrace{444\ldots4}_{n-mal} = 4 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n-mal} = 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

der Zähler $10^n - 1$ selbst eine Quadratzahl sein, was nicht möglich ist.

Es gibt also außer den einstelligen Quadratzahlen keine weiteren natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt. ❑

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 2 (Regionalrunde) 13. November 2025, https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

Wettbewerb „Jugend forscht“ – Wissenschaft LIVE! „Stress – Was passiert dabei in unserem Körper?“ Darüber referiert online am 27. November 2025 (15:30 bis 16:45 Uhr) MATHIAS SCHMIDT vom Max-Planck-Institut für Psychiatrie. Anmeldung bis zum 26.11.2025 unter https://www.netigate.se/ra/s.aspx?s=1276053X501512722X64240

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ , Anmeldeschluss am 30. November 2025 unter https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[17]	Nr.	Thema	Aufgabe
10/2025	Thema 32.2	Rationale Zahlen	
09/2025	Thema 33.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 33.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

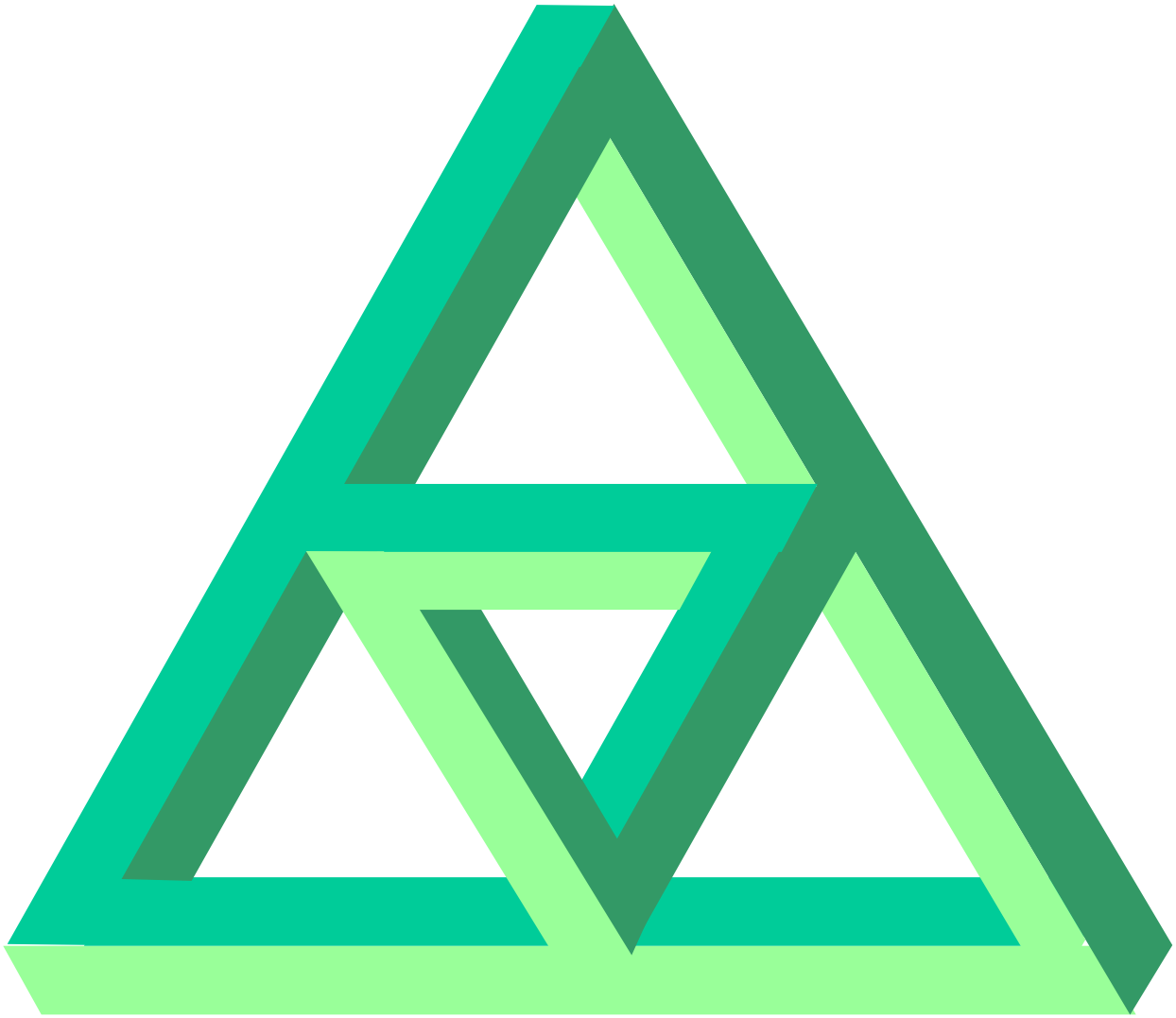
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[17] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 11/2025 (November 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Auch die 65. Auflage der Mathematik-Olympiade bietet in der Runde 1 (Schulrunde) die Aufgaben **MO651015** und **MO651016** mit Bezug zu Lösungsstrategien im Koordinatensystem. Damit lassen sich die Themen Abstand zweier Punkte, Parallelität von Geraden und Rechtwinkligkeit zur Übung wiederholen und festigen.

Auch mit Aufgabe **MO651014** wird Bekanntes aufgegriffen – Die kombinatorischen Grundlagen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von zusammengesetzten Ereignissen wurde letztmalig in der 2. Runde der 64. MO gefordert (**MO640923/MO641023**). Passend dazu nutzen wir einen Blick in ein Mathematik-Buch von 1895, um Aufgaben dieses Themenbereiches zu üben.

Mit Bezug zur Aufgabe 2-4 des diesjährigen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10 diskutieren wir die konstruktive Flächenhalbierung eines Trapezes mit Zirkel und Lineal.

Wir berichten von den online-Seminaren „Mathe-Spotlights“ der Begabung & Bildung gGmbH im September 2025.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 31.5 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[3]

Aufgabe 31.23 – MO651015. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-1,0), B(b,3), C(1,6)$ und $D(-3,2)$ gegeben. Dabei ist b eine reelle Zahl größer als −2.
Bestimmen Sie jeweils alle Werte von b, für die

a) die vier Punkte ein bei C rechtwinkliges Viereck $ABCD$ bilden,
b) die vier Punkte ein Trapez $ABCD$ bilden,
c) die vier Punkte ein Sehnenviereck $ABCD$ bilden,
d) die vier Punkte ein Viereck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 5 bilden.

Lösungshinweise (Vorbemerkung): Wir zeichnen die drei fest vorgegebenen Punkte A, C und D in ein Koordinatensystem ein. Mit der Bedingung $b > -2$ liegt der Punkt B auf der zur x-Achse parallelen Gerade mit der Gleichung $y = 3$ rechts der Seite $\overline{CD}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Winkel $\sphericalangle BCD$ beträgt nach Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS 90°, falls die Gleichung $|\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2 = |\overline{BD}|^2$ erfüllt ist. Wir erhalten mit Hilfe der Koordinaten der Punkte B, C und D:

$$((b-1)^2 + (3-6)^2) + ((1+3)^2 + (6-2)^2) = (b+3)^2 + (3-2)^2$$
$$(b-1)^2 + 9 + 16 + 16 = (b+3)^2 + 1$$
$$b^2 - 2 \cdot b + 42 = b^2 + 6 \cdot b + 10$$
$$8 \cdot b = 32 \quad \Longrightarrow \quad b = 4$$

Somit erfüllt der Punkt $B(4;\ 3)$ die Bedingung der Aufgabe.

Alternativ ermitteln wir den Anstieg m_{CD} der Geraden durch die Punkte C und D:

$$m_{CD} = \frac{1+3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

Der Winkel $\sphericalangle DCB$ beträgt 90°, wenn der Punkt B auf der Geraden durch C mit Anstieg $m_{BC} = -\frac{1}{m_{CD}} = -1$ liegt. Aus den Koordinaten der Punkte B und C erhalten wir

$$m_{BC} = \frac{3-6}{b-1} = \frac{-3}{b-1}$$

Nur im Fall von $b = 4$ gilt $m_{BC} = -1$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir stellen zunächst fest, dass auch der Winkel $\sphericalangle CDA$ ein rechter Winkel ist. Sowohl nach Satz des PYTHAGORAS mit

$$|\overline{AD}|^2 + |\overline{CD}|^2 = ((-1+3)^2 + (0-2)^2) + ((1+3)^2 + (6-2)^2) =$$
$$= 4 + 4 + 16 + 16 = 40 = 4 + 36 = (-1-1)^2 + (0-6)^2 = |\overline{AC}|^2$$

als auch mittels Vergleichs der Anstiege m_{CD} und m_{AD} wegen

[3] Siehe 31.1 (Heft 03/2025), 31.2 (Heft 04/2025), 31.3 (Heft 05/2025), 31.4 (Heft 08/2025)

$$m_{AD} = \frac{0-2}{-1+3} = \frac{-2}{2} = -1 = -\frac{1}{m_{CD}}$$

können wir die Rechtwinkligkeit des Winkels $\sphericalangle CDA$ nachweisen.

Nach Teilaufgabe a) wissen wir deshalb, dass mit $b = 4$ die Geraden AD und BC parallel sind, also das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist.

Das Viereck $ABCD$ ist aber auch dann ein Trapez, wenn die Geraden AB und CD parallel sind. Dies ist der Fall, wenn deren Anstiege $m_{AB} = m_{CD} = 1$ gleich groß sind. Es gilt

$$m_{AB} = \frac{0-3}{-1-b} = \frac{3}{b+1}$$

Es gilt in diesem Fall $m_{AB} = 1$ genau dann, wenn $b = 2$ gilt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck, wenn alle vier Punkte auf einer Kreislinie liegen. Ein solcher Kreis ist aber bereits durch 3 Punkte festgelegt. Im rechtwinkligen Dreieck $\sphericalangle ACD$ mit rechtem Winkel bei D liegt dessen Umkreismittelpunkt im Mittelpunkt M der Hypotenuse $\overline{AC}$. Dieser Mittelpunkt hat die Koordinaten $M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = M(0;3)$. Der Radius r dieses Kreises beträgt folglich

$$r = |\overline{MA}| = \sqrt{(-1+0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Damit liegt der Punkt $B\left(\sqrt{10};3\right)$ auf dieser Kreislinie wegen

$$|\overline{BM}| = \sqrt{\left(\sqrt{10}-0\right)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{10} = r$$

Das Viereck $ABCD$ ist aber auch genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen. Wegen $|\sphericalangle ADC| = 90°$ müssen wir den Punkt B so wählen, dass auch $|\sphericalangle CBA| = 90°$ gilt. Dafür können wir nach Satz des PYTHAGORAS im Dreieck ΔABC den Wert für b ermitteln:

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$$
$$((-1-b)^2 + (0-3)^2) + ((b-1)^2 + (3-6)^2) = (-1-1)^2 + (0-6)^2$$
$$(b^2 + 2b + 1 + 9) + (b^2 - 2b + 1 + 9) = 40$$
$$2 \cdot b^2 + 20 = 40 \quad \Longrightarrow \quad b_{1,2} = \pm\sqrt{10}$$

Wegen $b > -2$ entfällt wegen $\sqrt{10} > 3$ die negative Wurzel und wir finden den geeigneten Punkt $B(\sqrt{10};3)$.

Wir können aber für den Nachweis der Rechtwinkligkeit im Punkt B die Anstiege m_{AB} und m_{BC} der Geraden durch A und B bzw. durch B und C auswerten:

$$m_{AB} = \frac{0-3}{-1-b} = \frac{3}{b+1} \quad ; \quad m_{BC} = \frac{3-6}{b-1} = \frac{-3}{b-1}$$

Wir suchen nun Werte für b mit

$$-1 = m_{AB} \cdot m_{BC} = -\frac{9}{b^2-1} \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 10$$

womit wir erneut wie oben den Punkt $B(\sqrt{10}; 3)$ als Lösung finden,

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Wir wissen, dass der Punkt $B'(-2; 3)$ auf der Geraden CD liegt, denn der Anstieg $m_{B`D} = \frac{3-2}{-2+3} = 1$ stimmt mit dem Anstieg m_{CD} überein. Wir fügen einen weiteren Punkt $B''(-4;\ 3)$ ein. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta B'B''D$ beträgt $A_{\Delta B'B''D} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$. Damit können wir den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ wie folgt berechnen:

$$A_{ABCD} = A_{\Delta B'B_aC} + A_{\Delta B''B_aC} - A_{\Delta B'B''D} = \frac{(b+2)\cdot 3}{2} + \frac{(b+4)\cdot 3}{2} - 1$$

Der Flächeninhalt hat die Größe 5, falls

$$\frac{(b+2)\cdot 3}{2} + \frac{(b+4)\cdot 3}{2} - 1 = 3 \cdot b + 9 - 1 = 5$$

erfüllt ist, also $b = -1$ gilt. ❑

Aufgabe 31.24 – MO651016. Gegeben sind fünf Punkte durch ihre Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0, 18)$, $B(0, 12)$, $C(8, 12)$, $D(0, 0)$ und $E(24, 0)$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden CD und BE. Der Punkt F sei der Schnittpunkt der Gerade AS mit der x-Achse.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks ΔDFS und des Dreiecks ΔFES.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔCSE.

Lösungshinweise: Wir ermitteln vorab die Koordinaten der Punkte S und F. Dafür berechnen wir für den Punkt S den Schnittpunkt der Geraden CD und BE über die zugehörigen Geradengleichungen:

$$CD: \quad y = m_{CD} \cdot (x - x_c) + y_C = \frac{12-0}{8-0} \cdot (x-8) + 12 = \frac{3}{2} \cdot x$$

$$BE: \quad y = m_{BE} \cdot (x - x_B) + y_B = \frac{12-0}{0-24} \cdot (x-0) + 12 = -\frac{1}{2} \cdot x + 12$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden gilt also

$$\frac{3}{2} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot x + 12 \quad \Longrightarrow \quad x = 6$$

und somit

$$y = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \quad \Longrightarrow \quad S(6; 9).$$

In Analogie berechnen wir nun für den Punkt F den Schnittpunkt der Geraden AS und der x-Achse. Mit der Geradengleichung

$$AS: \quad y = m_{AS} \cdot (x - x_A) + y_A = \frac{18-9}{0-6} \cdot (x-0) + 18 = -\frac{3}{2} \cdot x + 18$$

finden wir den Schnittpunkt mit der x-Achse als Nullstelle x_0 dieser Geraden, also

$$0 = -\frac{3}{2} \cdot x_0 + 18 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 12 \quad \Longrightarrow \quad F(0;12).$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Für die Dreiecke ΔDFS und ΔFES sind die Längen der Grundseiten und die (gemeinsame) Höhe auf diesen Grundseiten als y-Koordinate des Punktes S bekannt. Damit finden wir

$$A_{\Delta DFS} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DF}| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54,$$
$$A_{\Delta FES} = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{DE}| - |\overline{DF}|) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (24-12) \cdot 9 = 54.$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir berechnen den gesuchten Flächeninhalt als Differenz bekannter bzw. leicht ermittelbarer Flächeninhalte.

$$A_{\Delta CSE} = A_{\Delta CDE} - (A_{\Delta DFS} + A_{\Delta FES}) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24 - 108 = 36.$$

❑

Es ist jedoch nicht erforderlich, die Lösung mittels Erkenntnisse aus dem Koordinatensystem darzustellen. Wir können die Angaben der Koordinaten auch nutzen, um den geometrischen Sachverhalt zu beschreiben.

Lösungsvariante mit Anwendung des Strahlensatzes: Wir ergänzen die Punkte A und D so durch zwei Punkte A' und D', dass das Viereck $DD'A'A$ ein Rechteck mit der Diagonalen $\overline{A'D}$ (und damit auch der Diagonalen $\overline{AD'}$) ergibt, also $A'(12;\ 18)$ und $D'(12;\ 0)$. Wir nennen den Schnittpunkt der Diagonalen S' und ermitteln dessen Koordinaten aus den Mittelpunkten der Diagonalen, also $S'\left(\frac{0+12}{2}; \frac{18+0}{2}\right) = S'(6;9)$. Der Fußpunkt S'' des Lotes aus S' auf die x-Achse hat die Koordinaten $S''(6;\ 0)$ und damit beträgt die Länge des Lotes 9. Betrachten wir die Verhältnisgleichung

$$|\overline{BD}| : |\overline{DE}| = 12 : 24 = 9 : 18 = |\overline{S'S''}| : |\overline{S''E}| = |\overline{S'S''}| : \left(|\overline{DE}| - |\overline{DS'}|\right)$$

Nach Umkehrung des Strahlensatzes fällt S' mit S zusammen. Damit können wir die gesuchten Flächeninhalte wie oben ermitteln.

Alternative geometrische Lösungshinweise: Wir erkennen, dass das Viereck $DECB$ ein Trapez mit den parallelen Geraden DE und BC ist. Zeichnen wir die Diagonalen des Trapezes ein, finden wir den Schnittpunkt S. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔDES und ΔBSC mit den Höhen h_{DE} bzw. h_{BC} finden wir die Verhältnisgleichung

$$h_{DE} : |\overline{DE}| = h_{BC} : |\overline{BC}|.$$

Mit der Kenntnis der Koordinaten finden wir $h_{DE} + h_{BC} = 12$. Somit erhalten wir

$$\frac{h_{DE}}{24} = \frac{12 - h_{DE}}{8} = \frac{3}{2} - \frac{h_{DE}}{8} \quad \Longrightarrow \quad h_{DE} = 9 \ ; \ h_{BC} = 3.$$

Mit den Erfahrungen im Umgang mit Punkten im Koordinatensystem lassen sich nun auch Aufgaben bearbeiten, bei denen die Lösungshinweise der Aufgabenkommission auf elementar-geometrische Herleitungen orientierten. Oft sind jedoch die Darstellungen auf der Basis geometrischer Sachverhalte kürzer und angemessener. Somit sind beide Lösungsvarianten nützliche Übungen!

Aufgabe 31.25 – MO351046. Ein Schüler zeichnet eine Strecke $\overline{AB}$ und wählt auf ihr zwei beliebige Punkte X und Y. Dann konstruiert er die vier Quadrate $AXPQ$, $XBRS$, $AYTU$ und $YBVW$, so angeordnet, wie in der Abbildung angegeben. Weiter konstruiert er die Mittelpunkte K, L, M bzw. N dieser Quadrate.

Er vermutet anhand seiner Zeichnung: Die Strecken $\overline{KN}$ und $\overline{LM}$ sind einander gleichlang und stehen aufeinander senkrecht.

Ist diese Vermutung bei jeder Wahl von X und Y auf AB wahr?

Lösungshinweise: Wir legen die gezeichnete Figur in ein Koordinatensystem, so dass wir die Koordinaten $A(0;\ 0)$ und $B(1;\ 0)$ erhalten. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte X und Y mit $X(x;\ 0)$ und $Y(y;\ 0)$ mit $0 < x < y < 1$, so können wir die Koordinaten der vier Mittelpunkte angeben:

$$K\left(\frac{x}{2};\ \frac{x}{2}\right), M\left(\frac{y}{2};\ -\frac{y}{2}\right), L\left(x + \frac{1-x}{2};\ \frac{1-x}{2}\right), N\left(y + \frac{1-y}{2};\ -\frac{1-y}{2}\right)$$

Nun können wir die Streckenlängen KN und LM berechnen

$$|\overline{KN}|^2 = \left(\frac{x}{2} - y - \frac{1-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{1-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{x^2+y^2+1-2xy-2x+2y}{4} + \frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y}{4}$$
$$= \frac{x^2+y^2-2xy}{2} = \frac{1}{2}\cdot(x-y)^2$$
$$|\overline{LM}|^2 = \left(x + \frac{1-x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-x+y+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y}{4} + \frac{x^2+y^2+1-2xy-2x+2y}{4}$$
$$= \frac{x^2+y^2-2xy}{2} = \frac{1}{2}\cdot(x-y)^2$$

Also gilt die Streckengleichheit $|\overline{KN}| = |\overline{LM}|$ für jede Lage der Punkte X und Y.

Außerdem können wir die Anstiege der Geraden KN und LM berechnen:

$$m_{KN} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{1-y}{2}}{\frac{x}{2} - y - \frac{1-y}{2}} = \frac{x-y+1}{x-y-1};\ m_{LM} = \frac{\frac{1-x}{2} + \frac{y}{2}}{x + \frac{1-x}{2} - \frac{y}{2}} = \frac{-x+y+1}{x-y+1}$$

Wegen $m_{KN} = \frac{x-y+1}{x-y-1} = \frac{1}{\frac{x-y-1}{x-y+1}} = \frac{1}{\frac{-(-x+y+1)}{x-y+1}} = -\frac{1}{\frac{-x+y+1}{x-y+1}} - \frac{1}{m_{LM}}$ stehen beide Geraden für jede Lage der Punkte X und Y senkrecht aufeinander. ❑

Ergänzung: Man überprüfe, ob sich die Aussagen auch auf Lagen X links von A (also $x < 0$) oder Y rechts von B (also $y > 1$) verallgemeinern lassen.

Aufgabe 31.26 – MO490943. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit M bzw. N. Beweisen Sie:

a) Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann sind $DM \parallel BN$ und $NC \parallel AM$.
b) Wenn $DM \parallel BN$ und $NC \parallel AM$ sind, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösungshinweise: Wir legen das Viereck $ABCD$ so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass die Punkte $A(0;0)$ im Koordinatenursprung und $B(b_x;0)$ auf der x-Achse liegen. Weiter setzen wir $D(d_x;\ d_y)$ mit reellen Koordinaten. Zudem existieren reelle Zahlen x, y mit $C(b_x + d_x + x;\ d_y + y)$. Damit ist das Viereck $ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn $x = y = 0$ gilt. Aus den Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D können wir die Koordinaten der Punkte M und N angeben:

$$M\left(\frac{b_x + d_x + x}{2}; \frac{d_y + y}{2}\right) \quad ; \quad N\left(\frac{d_x}{2}; \frac{d_y}{2}\right)$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir ermitteln die Anstiege m der Geraden AM, NC, BN und MD:

$$m_{AM} = \frac{0 - \frac{d_y + y}{2}}{0 - \left(b_x + \frac{d_x + x}{2}\right)} = \frac{d_y + y}{2 \cdot b_x + d_x + x}$$

$$m_{NC} = \frac{\frac{d_y}{2} - (d_y + y)}{\frac{d_x}{2} - (b_x + d_x + x)} = \frac{d_y + 2 \cdot y}{2 \cdot b_x + d_x + 2 \cdot x}$$

Daraus folgt: Wenn $x = y = 0$, dann gilt $m_{AM} = m_{NC}$. Dies ist gleichbedeutend mit $AM \parallel NC$.

$$m_{BN} = \frac{0 - \frac{d_y}{2}}{b_x - \frac{d_x}{2}} = \frac{-d_y}{2 \cdot b_x - d_x}$$

$$m_{MD} = \frac{\frac{d_y + y}{2} - d_y}{b_x + \frac{d_x + x}{2} - d_x} = \frac{-d_y + y}{2 \cdot b_x - d_x + x}$$

Daraus folgt: Wenn $x = y = 0$, dann gilt $m_{BN} = m_{MD}$. Dies ist gleichbedeutend mit $BN \parallel MD$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Gehen wir von

$$m_{AM} = \frac{d_y + y}{2 \cdot b_x + d_x + x} = \frac{d_y + 2 \cdot y}{2 \cdot b_x + d_x + 2 \cdot x} = m_{NC}$$

aus, so können wir den mittleren Teil äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}&\left(d_y + y\right) \cdot (2 \cdot b_x + d_x + 2 \cdot x) = \left(d_y + 2 \cdot y\right) \cdot (2 \cdot b_x + d_x + x)\\ &2 \cdot b_x d_y + d_x d_y + 2 \cdot d_y x + 2 \cdot b_x y + d_x y + 2 \cdot xy =\\ &= 2 \cdot b_x d_y + d_x d_y + d_y x + 2 \cdot b_x y + 2 \cdot d_x y + 2 \cdot xy\end{aligned}$$

Damit finden wir $d_y x - d_x y = 0$. Gehen wir von

$$m_{BN} = \frac{-d_y}{2 \cdot b_x - d_x} = \frac{-d_y + y}{2 \cdot b_x - d_x + x} = m_{MD}$$

aus, so können wir den mittleren Teil äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}&-d_y \cdot (2 \cdot b_x - d_x + x) = \left(-d_y + y\right) \cdot (2 \cdot b_x - d_x)\\ &-2 \cdot b_x d_y + d_x d_y - d_y x = -2 \cdot b_x d_y + d_x d_y + 2 \cdot b_x y - d_x y\end{aligned}$$

Damit finden wir $d_x y - d_y x = 2 \cdot b_x y$.

Da wir für linke Seite dieser Gleichung bereits den Wert 0 kennen, folgt unmittelbar (wegen $b_x \neq 0$) $y = 0$ und damit auch $x = 0$. ❑

Die entsprechende Aufgabe aus der Olympiadeklasse 10 eignet sich nun zur Übung.

Aufgabe 31.27 – MO491043. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit K, L, M bzw. N. Beweisen Sie:

a) Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann gilt $BN \parallel LD$ und $AM \parallel KC$.
b) Wenn $BN \parallel LD$ und $AM \parallel KC$, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Thema 24.4 – Klassische Wahrscheinlichkeit[4]

Die Frage nach einer Wahrscheinlichkeit kann beantwortet werden, indem die Anzahl der für das gesuchte Ereignis günstigen Fälle und die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle ins Verhältnis gesetzt wird. Damit reduzieren sich solche Aufgaben auf

[4] Siehe 24.1 (Heft 08/2023), 24.2 (Heft 01/2025) und 24.3 (Heft 02/2025)

kombinatorische Probleme. Deshalb basiert die Lösungsidee der diesjährigen Aufgabe auf MO640923/MO641023 (s. Heft 01/2025).

Aufgabe 24.22 – MO651014. In dieser Aufgabe sollen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dabei werden zufällig zwei bzw. drei Zahlen ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) aus der Menge der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen {2025, 2026, 2027, …, 2039, 2040} gezogen.

a) Es werden genau zwei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die positive Differenz der beiden Zahlen durch 6 teilbar?
b) Es werden genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens 6116?

Hinweis: Zufälliges Ziehen soll bedeuten, dass alle Möglichkeiten des Ziehens von zwei bzw. drei Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da die Menge 16 verschiedene Zahlen enthält, gibt es $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$ verschiedene Paare von zwei Zahlen.

Unter den gegebenen 16 Zahlen

- sind 3 Zahlen durch 6 teilbar {2028, 2034, 2040},
- lassen 2 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 1 {2029, 2035},
- lassen 2 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 2 {2030, 2036},
- lassen 3 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 3 {2025, 2031, 2037},
- lassen 3 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 4 {2026, 2032, 2038},
- lassen 3 Zahlen bei Division durch 6 den Rest 5 {2027, 2033, 2039}.

Wenn die positive Differenz der beiden gezogenen Zahlen durch 6 teilbar sein soll, müssen beide Zahlen bei Division durch 6 den gleichen Rest lassen, d.h. sie müssen jeweils beide gleichzeitig in einer der genannten Teilmengen enthalten sein.

- Für eine zweielementige Teilmenge gibt es jeweils nur $\binom{2}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1$ Möglichkeit, ein Paar verschiedener Zahlen auszuwählen.
- Für eine dreielementige Teilmenge gibt es jeweils $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ Möglichkeiten, ein Paar verschiedener Zahlen auszuwählen.

Somit erfüllen entsprechend der sechs Teilmengen $3 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 14$ Ziehungsergebnisse die geforderte Eigenschaft. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt deshalb $\frac{14}{120} = \frac{7}{60} \approx 11.7\%$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da die Menge 16 verschiedene Zahlen enthält, gibt es $\binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560$ verschiedene Auswahlen von drei Zahlen. Da die größtmögliche Summe dreier Zahlen $2038 + 2039 + 2040 = 6117$ beträgt, gibt es

nur noch eine weitere Auswahl von drei Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, nämlich $2037 + 2039 + 2040 = 6116$. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{560} = \frac{1}{280} \approx 0.4\%$. ❑

Wir können den (Kopf-) Rechenaufwand reduzieren, wenn wir die Aufgabenstellung gleichwertig umformulieren: Gegeben sei die Zahlenmenge $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$. Es werden daraus genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens $(6116 - 3 \cdot 2025 =)\ 41$? Da unter diesen Bedingungen die größtmögliche Summe dreier Zahlen $13 + 14 + 15 = 42$ beträgt, ist die Lösung in gleicher Weise zu finden.

In Vorbereitung der Aufgabe MO361041 (s. Heft 02/2025) wurde in der vorangehenden Runde das Kartenspiel bereits untersucht.

Aufgabe 24.23 - MO360931. Beim Kartenspiel „Doppelkopf“ gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben“ Kreuz, Pik, Herz, Karo je zwei von jedem der „Bilder“ As, König, Dame, Bube, Zehn.

Jemand stellt fest, dass die ersten sechs Karten, die er beim Geben bekommen hat, sechs Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von sechs Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, dass bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils voneinander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

Lösungshinweise: Um alle Möglichkeiten für die Farben der Damen zu erfassen, führen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Drei der 4 Farben sind mit der Anzahl 2 vertreten. Um diese Farben zu bekommen, können wir je eine Farbe weglassen. Also gibt es für diesen Fall genau 4 Möglichkeiten, oder kurz[5] $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4}{1} = 4$.

Fall 2: Zwei der 4 Farben sind jede mit der Anzahl 2 vertreten, die beiden anderen Farben jede mit der Anzahl 1. Für die Auswahl von 2 Farben (aus 4) gibt es genau 6 Möglichkeiten: Wir erhalten jede der zwei Farben nämlich genau zweimal, wenn wir erst eine beliebige der 4 Farben wählen und zu dieser dann eine beliebige der jeweils 3 verbliebenen Farben, also $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ oder kurz $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

[5] Die Darstellungsform mittels Binomialkoeffizienten ist nur zur Information angefügt und wird in der MO nicht erwartet.

Insgesamt finden wir also $4 + 6 = 10$ verschiedene Möglichkeiten. ❑

Aufgabe 24.24 - MO361031. Beim Kartenspiel „Doppelkopf“ gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben“ Kreuz, Pik, Herz, Karo je zwei von jedem der „Bilder“ As, König, Dame, Bube, Zehn.

Jemand stellt fest, dass die ersten vier Karten, die er beim Geben bekommen hat, vier Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von vier Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, dass bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils voneinander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

Lösungshinweise: Um alle Möglichkeiten für die Farben der Damen zu erfassen, führen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Jede der 4 Farben ist mit der Anzahl 1 vertreten. Dafür gibt es genau 1 Möglichkeit, kurz $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\cdot(4-0)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$.

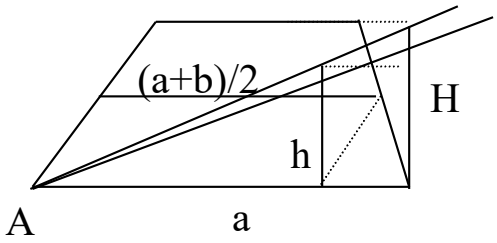
Fall 2: Eine der 4 Farben ist mit der Anzahl 2 vertreten, zwei andere Farben jeweils mit der Anzahl 1. Für die Auswahl der Farbe mit Anzahl 2 haben wir genau 4 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeit können wir, um zwei Farben aus 3 auszuwählen, eine Farbe weglassen. Wir haben also dafür jeweils 3 Möglichkeiten, gesamt also $4 \cdot 3 = 12$ oder kurz $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} \cdot \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{1} = 12$.

Fall 3: Zwei der 4 Farben sind jeweils mit der Anzahl 2 vertreten. Für die Auswahl dieser zwei Farben gibt es genau 6 Möglichkeiten: Wir erhalten jede Farbe zweimal, wenn wir erst eine beliebige der 4 Farben auswählen und dann zur ausgewählten eine der 3 verbliebenen Farben hinzunehmen, also $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ oder kurz $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$.

Insgesamt finden wir also $1 + 12 + 6 = 19$ verschiedene Möglichkeiten. ❑

Flächenhalbierung

In Anlehnung an **Aufgabe 2-4** des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik[6] der Klassenstufen 9/10 diskutieren wir die Flächenhalbierung eines Trapezes *ABCD* [7], wobei die Teilungsgerade g durch den Punkt A verlaufen soll. Für die Konstruktion des Punktes X (der Schnittpunkt der Flächenhalbierenden durch A mit der gegenüberliegenden Trapezseite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$) sind mehrere Lösungsvarianten möglich:



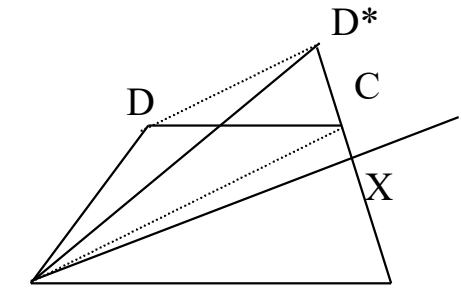
(1) Da es genügt, die Höhe h des Dreiecks ABX zu ermitteln, können wir unter Ausnutzung der Parallelität für die Höhe h und die Trapezhöhe H und die Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{CD}| = b$ die Gleichung über die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \cdot H\right)$$

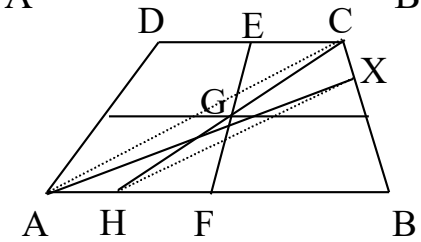
umformen zu

$$h : H = \frac{a+b}{2} : a$$

Diese Verhältnisgleichung können wir unmittelbar in der Trapezfigur wiederfinden. Dazu projizieren wir die Mittellinie (wie in der Skizze angedeutet) auf die Grundseite, zeichnen die Höhe H im Punkt B ein und erhalten h.



(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ACD. Geschieht dies nämlich so, dass das entstehende Dreieck ABD^* (mit C auf BD^*) flächengleich zum Trapez $ABCD$ wird, so ist X offensichtlich die Seitenhalbierende von BD^*.



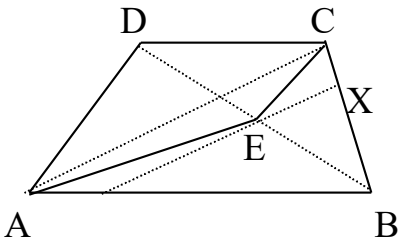
(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten. Diese Gerade schneidet die Mittellinie in G. Drehen wir die Gerade EF um G, so sind die Dreiecke HEG und CFG inhaltsgleich (sogar kongruent). Somit teilt die Gerade HC die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks AHC bzgl. $\overline{AC}$ in das (inhaltsgleiche) Dreieck AXC ist der gesuchte Punkt gefunden.

---

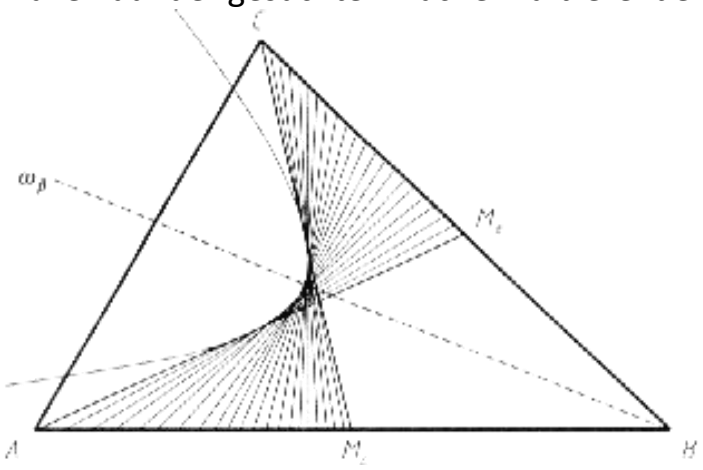
[6] Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-4, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

[7] nach MNU Vol. 47 (1994) Heft 6, S. 348-352

(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Wir suchen überhaupt eine Halbierung und versuchen, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$, dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke ABD und BCD jeweils halbiert werden. Durch Scherung des Dreiecks AEC bzgl. $\overline{AC}$ zum Dreieck AXE finden wir den gesuchten Punkt.



Die beiden letzten Lösungsvarianten legen die Frage nahe, wie sich die Lagen der Flächenhalbierenden in der KZM-Aufgabe 2-4 ändern, wenn sich die Position des Punktes D ändert. Die folgende Abbildung möge Anregungen für eigene Untersuchungen geben. Wir erkennen beispielsweise, dass der Schwerpunkt des Dreiecks nur in Grenzfällen auf der gesuchten Flächenhalbierenden liegt.



Rückblick auf die online-Seminare „Spotlight Mathe“[8]

Das Online-Seminar **„Spotlight Mathe - Einblicke in den Bundeswettbewerb Mathematik“** am 17. September 2025 vermittelte mathematische Grundlagen und Problemlösestrategien, die sowohl im Unterricht als auch vor allem bei der Wettbewerbsteilnahme unterstützen und motivieren können. PATRICK BAUERMANN (Projektleiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe, Bildung & Begabung gGmbH Bonn) hatte dazu StD i.R. KARL FEGERT (Vorsitzender der Korrekturkommission) und MAIKE KONANG (Teilnehmerin der 2. Runde) ins Studio eingeladen. Anhand der Aufgaben der ersten Runde 2025 teilten sie ihre Perspektiven auf die Genese einer Lösung (Was sind geeignete Aufgaben?), die mathematischen Hintergründe (Vielfalt der Lösungsmethoden?) sowie die Korrektur („Brillante Gedanken sind besser als perfekte Formulierungen“!). Eine Besonderheit bilden dabei geometrische Problemstellungen, die im Mathematik-Unterricht in dieser Form leider zu kurz kommen: Sie bieten eine „Spielwiese“ für Interessierte, lassen sich oft anschaulich

[8] Die online-Seminare wurden vom sächsischen Landesamt für Schule und Bildung als Fortbildungsveranstaltung anerkannt.

visualisieren, können über Spezialfälle zum Lösungsansatz führen und fördern das logische Schließen beim Zusammenführen einfacher geometrischer Sachverhalte. Deshalb diskutierte man insbesondere die Aufgabe 3, wobei MAIKE KONANG ihre „Entdeckungsreise“ bei der Bearbeitung schilderte und KARL FEGERT auf die Lösbarkeit mit Schulmitteln einging.

Zum Abschluss war Dr. JOHANN BEURICH in die Diskussionsrunde zugeschaltet. Er hat an der TU Dresden Mathematik studiert, dort am Institut für Analysis 2024 promoviert und ist unter DORFUCHS[9] als Mathematik-YouTuber bekannt. Seit einigen Jahren arbeitet er mit der Bildung & Begabung gGmbH zusammen und wählt stets eine Aufgabe aus dem Jahrgang heraus, die er als Song erläutert. Für ihn ist es die Herausforderung, schwierige Fragen spielerisch zu erklären – was ihm offenbar bestens gelingt!

Mit zwischenzeitlich 160 Zuschauer fand das Seminar erneut bundesweit große Resonanz. Das nächste Seminar ist im März 2026 vorgesehen.

Das Online-Seminar **„Spotlight Mathe - Einblicke in die Mathematik-Olympiade“** am 18. September 2025 schloss sich an. Hier war die Diskussionsrunde besonders groß: Patrick Bauermann begrüßte KERRIN BIELSER (Mitglied Aufgabenausschuss), VIOLA JÁRY (Landesbeauftragte MO in Niedersachsen, Mitglied Aufgabenausschuss), Dr. PHILIPP LAMPE (stellv. Vorsitzender im Aufgabenausschuss), Prof. Dr. UWE LECK (1. Vorsitzender des Vereins Mathematik-Olympiade e.V.), Dr. THORALF RÄSCH (Universität Bonn) und JUSSI MARTTINEN (ehemals Bundesfinalist der MO). Jeder berichtete aus seiner persönlichen Sicht über die Faszination, die von den Mathematik-Olympiaden ausgeht.

Das vierstufige Wettbewerbssystem (von der 1. Runde/Schulrunde, die in unterschiedlichster Weise an den Heimatschulen organisiert werden darf und ca. 200.000 Mädchen und Jungen von Klassenstufen 3 bis 12/13 erreicht, bis zur 4. Runde/Bundesrunde, die als zweitägige Klausur für knapp 200 Teilnehmenden durchgeführt wird) bildet eine Klammer um Breiten- und Spitzenförderung. So standen zunächst organisatorische Fragen beim Ablauf der MO im Mittelpunkt der Diskussion, die auch auf die spontanen Fragen im Chat einging. Doch auch die Anliegen der Aufgabenkultur wurde analysiert, um die Möglichkeiten von Üben und Trainieren zu thematisieren.

Mit zwischenzeitlich bis zu 200 Zuschauern fand das Seminar bundesweit eine große Resonanz.

[9] https://de.wikipedia.org/wiki/DorFuchs (am 07.11.2025)

In alten Mathe-Büchern geblättert – was man früher schon konnte und heute noch können sollte

Im

Lehrbuch[10] der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895.

Zweiter Cursus
Abschnitt XVII – Die Combinationslehre
Abschnitt XVII – Die mathematische Wahrscheinlichkeit

folgen nach den allgemeinen Ausführungen[11] 27 Übungsaufgaben zur Bestimmung der Anzahlen von Kombinationen und Variationen und 22 Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, darunter:

13. Wie viel 5 ziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 schreiben, a) wenn jede nur einmal, b) wenn jede Ziffer beliebig oft vorkommen darf?

14. Wie viel 6 ziffrige Zahlen lassen sich mit den 4 Ziffern 0, 1, 2, 3 schreiben, welche nicht mit 0 anfangen?

19. Jemand zieht auf einem Spiel mit 32 Karten 5. Auf wie viel Weisen können dies verschieden sein?

20. Von 20 Mann soll eine Wache von 15 Mann besetzt werden. Wie oft kann diese Wache in verschiedener Weise zusammengesetzt werden?

21. Wie viel Diagonalen kann man in einem Zwanzigeck ziehen?

22. Wie viel (einfache und zusammengesetzte) Teiler hat die Zahl 210?

23. Desgl. die Zahl 2310?

...

1. In einer Urne liegen 7 weiße und 10 schwarze Kugeln. Man zieht 6 Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit ist, daß es a) 3 weiße und 3 schwarze, b) 2 weiße und 4 schwarze, c) daß es nur schwarze; d) daß es nur weiße sind?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfen zu werfen a) 8 Augen, b) bis 8 Augen, c) über 8 Augen.

13. Wenn beim Spiel mit 3 Würfeln 1 Mark auf jeden Wurf über 15 gesetzt wird, wie groß muß der Gewinn sein?

[10] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

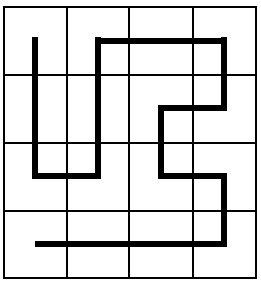
[11] S. Heft 01/2025 bzw. Heft 03/2022

17. Auf einer Urne, in welcher 3 weiße, 5 schwarze und 7 rote Kugeln liegen, werden 5 Kugeln gezogen. Welche Wahrscheinlichkeit ist, daß darunter entweder keine weiße, oder nur eine weiße ist?

20. Von einer Compagnie von 120 Mann kommt jeden dritten Tag ein Zug von 30 Mann auf Wache, welche 10 Posten mit 2 stündiger Ablösung zu besetzen haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mein Freund, der bei dieser Compagnie steht, auf einem bestimmten Posten Wache steht.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 09/2025

Aufgabe T–3 (Teamwettbewerb, 19. MeMO, 2025, Chemnitz, Deutschland)**.** Eine *Schlange* in einem $n \times n$-Quadratgitter ist ein Pfad, der aus Strecken zwischen Mittelpunkten benachbarter Felder zusammen-gesetzt ist, durch die Mittelpunkte aller n^2 Felder verläuft und jedes Feld genau einmal betritt. Dabei heißen zwei Felder benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Man beachte, dass alle Stücke der Schlange parallel zu Gitterachsen sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel einer Schlange in einem 4×4-Quadratgitter. Diese Schlange hat neun 90°-Winkel.



Man betrachte nun für eine selbst gewählte Zahl $n \geq 4$ eine Schlange durch die n^2 Felder eines $n \times n$-Quadratgitters. Was ist die größtmögliche Anzahl an 90°-Winkeln, die eine solche Schlange haben kann?

Lösungshinweise: Mit „selbst gewählt“ sollte darauf hingewiesen werden, dass die Wettbewerbsaufgabe sicherlich nicht entscheidend von der Jahreszahl 2025 abhängig ist. Wir versuchen deshalb mit kleineren Zahlen n verallgemeinerungsfähige Lösungsideen zu finden. Weil 2025 eine ungerade Zahl ist, wollen wir uns hier ebenfalls auf ungerade Zahlen n beschränken und beginnen sogar schon bei $n = 3$.

Wir färben das Feld wie ein Schachbrett. Wenn unten links ein weißes Feld liegt, gibt es $\frac{1}{2} \cdot (n^2 + 1)$ weiße und $\frac{1}{2} \cdot (n^2 - 1)$ schwarze Felder. Um auf dem Weg alle Felder genau einmal zu durchlaufen, muss der Weg auf einem weißen Feld beginnen und auf einem schwarzen Feld enden. Wir beschränken uns hier auf einen Weg, der in einem (weißen) Eckfeld beginnt und o.B.d.A. zunächst waagerecht verläuft (da wir andernfalls durch Drehung oder Spiegelung des Feldes diese Situation erzeugen können).

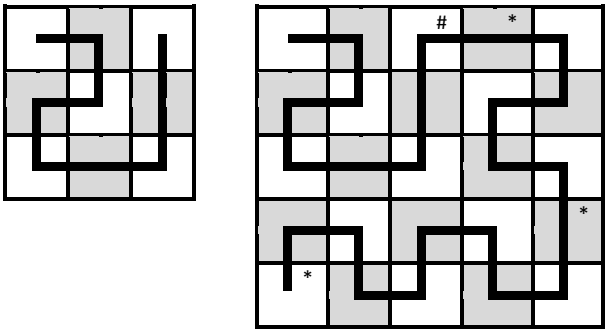
Wir nennen einen Winkel „Zeilenwechsel“, wenn durch ihn der Weg von waagerecht kommend zu senkrecht wechselt (also in eine neue Zeile wechselt). Entsprechend nennen wir einen Winkel „Spaltenwechsel“, wenn durch ihn der Weg von senkrecht kommend zu waagerecht wechselt (also in eine neue Spalte wechselt).
Außerdem erkennen wir, dass nach einem Zeilenwechsel der nächste Zeilenwechsel erst erfolgen kann, wenn zunächst ein Spaltenwechsel stattfand (und umgekehrt).

Damit wechseln sich Zeilenwechsel und Spaltenwechsel stets ab. Da wir den Weg waagerecht beginnen, tritt als erstes ein Zeilenwechsel ein.

Wir zeichnen in das 3×3-Feld einen Weg ein und können durch systematisches Probieren nachweisen, dass maximal 5 Winkel möglich sind. Wir vermuten, dass es für jedes ungerade n insgesamt $n^2 - n - 1$ solche Winkel geben kann, im Beispiel also $3^2 - 3 - 1 = 5$ Winkel).

Wir zeigen zunächst, dass diese Vermutung einer unteren Schranke für die gesuchte Maximalzahl für alle ungeraden Zahlen richtig ist.

Haben wir die Vermutung für eine ungerade Zahl n gezeigt (wobei der Weg auf einem Eckfeld endet, das an der Feldseite des Startfeldes liegt), dann erweitern wir das Feld um 2 Spalten und 2 Zeilen, d.h. um insgesamt $2 \cdot (2 \cdot n) + 4$ Felder. Diesen Streifen können wir mit mindestens $4 \cdot n + 2$ Winkeln durchlaufen (hier also $4 \cdot 3 + 2 = 14$), weil auf dem mit # markiertem Feld und auf allen nicht mit * markierten Feldern des Streifen Winkel möglich sind.



Wegen $n^2 - n - 1 + 4n + 2 = (n+2)^2 - (n+2) - 1$ ist also im Sinne der Methode der vollständigen Induktion[12] für alle ungeraden Zahlen n der Wert $n^2 - n - 1$ eine untere Schranke für die maximal mögliche Anzahl. Für $n = 45$ gibt es somit mindestens $45^2 - 45 - 1 = 1979$ Winkel.

Wir betrachten nun einen Weg mit maximaler Anzahl von Winkeln. Da im ersten Schritt der Weg waagerecht verläuft, stellen wir fest, dass sich in jeder Zeile nur $n - 1$ Winkel befinden können.

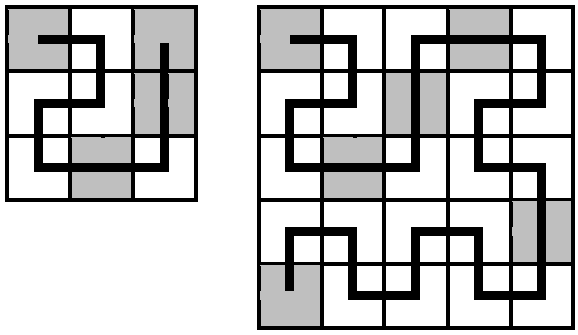
- In der obersten Zeile ist diese Aussage offensichtlich, da sich auf dem Startfeld kein Winkel befindet.
- Für eine Zeile unter der obersten Zeile nehmen wir an, es befinden sich auf allen Felder dieser Zeile Winkel. Wir erreichen diese Zeile nur durch einen Zeilenwechsel aus einer benachbarten (darüber oder darunter liegenden) Zeile. Wenn sich auf allen Feldern ein Winkel befindet, muss sich unmittelbar ein Spaltenwechsel anfügen. Da danach mit einem Zeilenwechsel diese Zeile wieder verlassen wird, treten die Felder mit Winkel immer paarweise (Zeilen-

[12] In den Mathematik-Olympiaden wird eine vollständige formale Anwendung dieser Methode nicht verlangt. Es genügt, auf das Prinzip „von n auf $n+1$“ hinzuweisen und den Nachweis dafür zu führen.

und Spaltenwechsel) auf. Bei einer ungeraden Anzahl von Feldern je Zeile wird das letzte noch nicht berührte Feld durch einen Zeilenwechsel erreicht. Da aber kein weiteres unberührtes Feld in der Zeile existiert, muss diese Zeile durch die Fortsetzung des Weges ohne Winkel verlassen werden. Es können sich also nur $n-1$ Winkel in einer Zeile befinden.

- In der obersten Zeile können sich sogar nur $n-2$ Winkel befinden. Starten wir nämlich den Weg mit einem waagerechten Schritt, muss anschließend ein Zeilenwechsel erfolgen. Dann verbleibt eine „Restzeile“ mit $n-2$ Feldern, also einer ungeraden Anzahl von Feldern. Für diese „Restzeile“ gilt wie eben, dass sich auf ihr höchsten $n-3$ Winkel befinden können.

Wir markieren zur Illustration (nicht als Beweis!) die Felder ohne Winkel in obigen Wegen:



Zusammenfassend kann es also nur maximal

$$(n-1)\cdot(n-1)+(n-2)=n^2-n-1$$

Winkel geben. Da diese Anzahl tatsächlich für jedes ungerade n erreicht werden kann, ist die maximale Anzahl damit gefunden. ❑

Monatsaufgabe 11/2025[13]

Es wird nach folgender Vorschrift einer Ziffernfolge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ gebildet:

Die erste Ziffer sei $a_1=2$, und die zweite Ziffer sei $a_2=3$. Aus dem Produkt $a_1\cdot a_2=6$ folgt als dritte Ziffer $a_3=6$. Da $a_2\cdot a_3=18$ ist, seien die vierte Ziffer $a_4=1$ und die fünfte Ziffer $a_5=8$. Nun wird wegen $a_3\cdot a_4=6$ und $a_4\cdot a_5=8$ werden $a_6=6$ und $a_7=8$ festgelegt. Bislang lautet die Folge also

$$\underbrace{2}\ \underbrace{3}\ \underbrace{6}\ \underbrace{1}\ 8\ \ 6\ \ 8$$

Die geschweiften Klammern deuten an, welche Produkte bereits ausgeführt wurden. Nun wäre das Produkt $8\cdot 6=48$ zu bilden und die Folge mit den Ziffern 4 und 8 fortzusetzen. Diese Vorschrift lässt sich beliebig fortsetzen.

Man untersuche, ob in dieser Folge die Ziffer 5 auftritt!

[13] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.11.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 2 (Regionalausscheid) am 12. November 2025

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Anmeldeschluss am 30. November 2025, https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular

Bundeswettbewerb Mathematik, Runde 1, Ausschreibung und Aufgaben am 01. Dezember 2025
(ab diesem Zeitpunkt unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/aufgaben

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 31.5 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem 3
Thema 24.4 – Klassische Wahrscheinlichkeit 9
Flächenhalbierung 13
Rückblick auf die online-Seminare „Spotlight Mathe“ 14
In alten Mathe-Büchern geblättert – was man früher schon konnte und heute noch können sollte 16
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 09/2025 17
Monatsaufgabe 11/2025 19
Termine 20

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[14]	Nr.	Thema	Aufgabe
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinaten-system	MO651015 MO651016
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

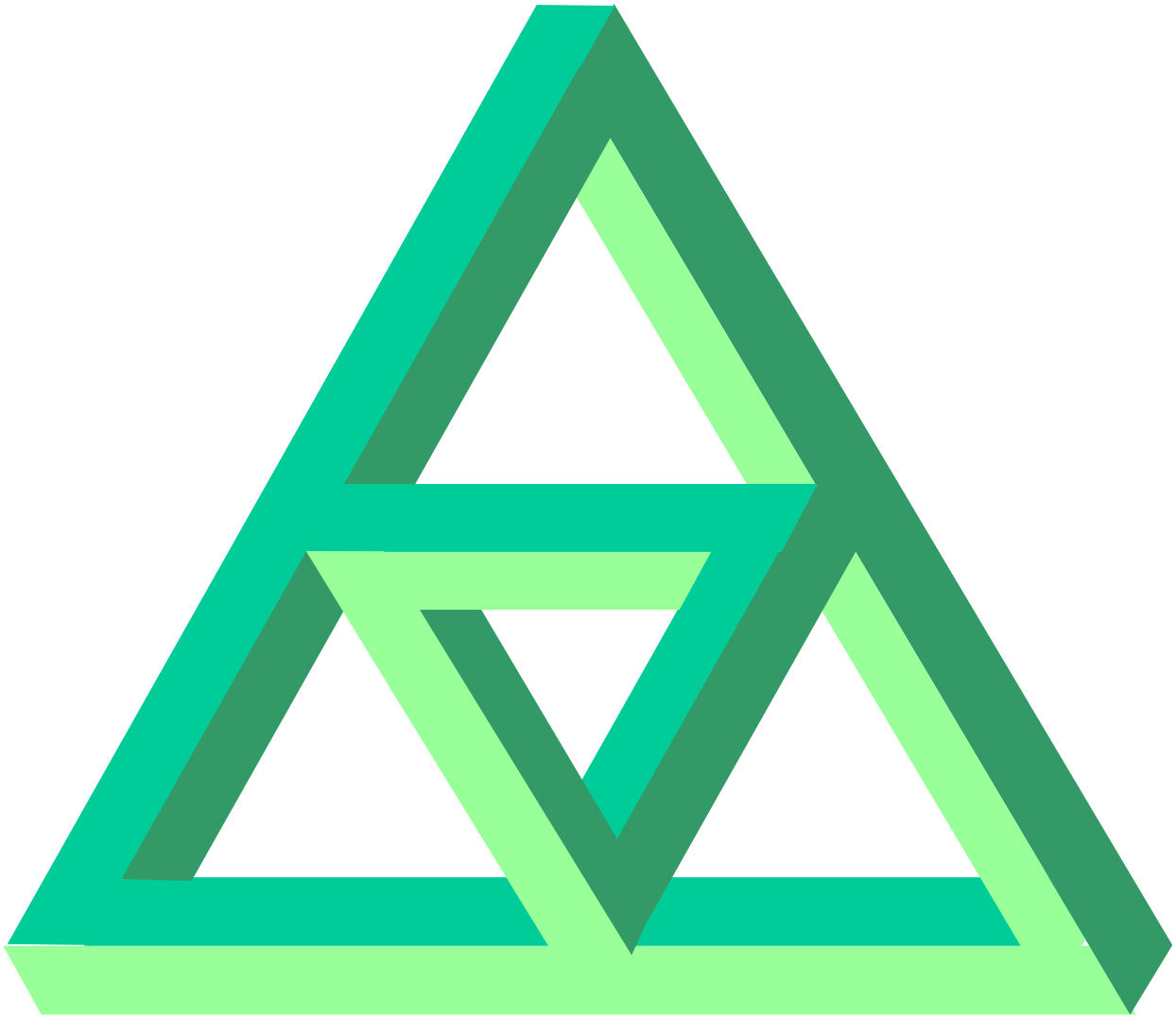
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

[14] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2025 (Dezember 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir greifen die Aufgabe **MO651011** heraus, um kombinatorische Aufgaben im Zusammenhang mit Wegbeschreibungen zu diskutieren. Es ist nur ein kleiner Schritt, aus den Anzahlen von günstigen Wegen eine Aufgabe zur Wahrscheinlichkeit zu formulieren.

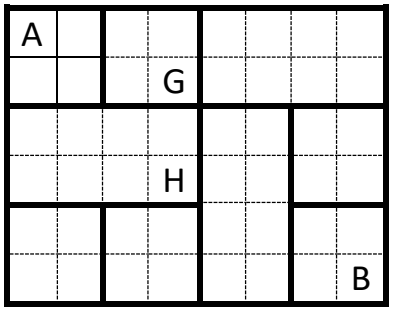
Mit dem neuen Thema „Diophantische Gleichungen ersten Grades“ stellen wir einen Aufgabenkomplex vor, der in der MO bis auf die frühen Jahre wenig Beachtung fand. Dabei hat es seinen Reiz, Lösungen nur in ganzen oder natürlichen Zahlen zu suchen. Allerdings gilt dafür der Lösungsansatz als bekannt und kann durch systematisches Probieren unterstützt werden. Im historischen Rückblick zitieren wir aus einem Lehrbuch von 1895 die Erklärungen zur Lösung solcher Aufgaben.

Am 1. Dezember startete die erste Runde des **Bundeswettbewerbs Mathematik** 2026. Im kurzen Überblick wird das Angebot, zu dem Jugendliche der Klassenstufen 9/10 ausdrücklich eingeladen werden, vorgestellt. Die statistischen Zusammenfassungen der vergangenen vier Schuljahre zeigen leider einen negativen Trend.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 24.5 – Kombinatorik[3] und klassische Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 24.25 – MO651011. In allen Aufgabenteilen betrachten wir Wegepläne, deren Wege auf den Gitterlinien eines Quadratgitters liegen und deren Zielpunkt rechts unterhalb des Startpunkts liegt. In den Grafiken sind die Gitterlinien als gepunktete und die Wege als fette Linien dargestellt. Die Wegepläne sind rechteckig, d.h. ihr äußerer Rand ist ein Rechteck, bei dem Start- und Zielpunkt einander als Eckpunkte diagonal gegenüberliegen. Die Gitterquadratseiten seien Einheitsstrecken (haben also die Länge 1). Gefragt wird jeweils nach der Anzahl der kürzesten Wege vom Start- zum Zielpunkt auf dem Wegeplan. Die Antwort kann in a) und in b) ohne Begründung angegeben werden.



a) Wie viele kürzeste Wege von A nach G und wie viele kürzeste Wege von A nach H gibt es?
b) Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es?
c) Entwerfen Sie einen rechteckigen Wegeplan mit einem Startpunkt A und einem weiter rechts und weiter unten liegenden Zielpunkt B, in welchem es genau 20 kürzeste Wege von A nach B gibt. Wege zählen dabei nur als kürzeste Wege, wenn sie nur von links nach rechts bzw. von oben nach unten durchlaufen werden. Hier ist nachzuweisen, dass es tatsächlich 20 Wege sind.

Hinweis: Das zugrunde gelegte Quadratgitter darf von der Größe 3×4 der Beispielabbildung abweichen.

Lösungshinweise: Die kürzesten Wege in den Aufgaben a) und b) führen von einem Kreuzungspunkt entweder nach rechts (R) oder nach unten (U).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Um von A nach G auf einem kürzesten Weg zu kommen, muss zweimal nach rechts und einmal nach unten gegangen werden. Wir prüfen, an welcher Stelle im Weg nach unten gegangen werden kann: RRU, RUR und URR. Es gibt also genau 3 verschiedene kürzeste Wege von A nach G.

Um von A nach H auf einem kürzesten Weg zu kommen, kann ein Weg über G gewählt werden, wenn daran einmal nach unten angefügt wird. Es gibt also genau 3 verschiedene kürzeste Wege von A nach H über G: RRUU, RURU, URRU. Zusätzlich

[3] s. Teil 1, Heft 8+9/2023, Teil 2: Heft 1/2025, Teil 3: Heft 02/2025, Teil 4: Heft 11/2025

gibt es den Weg UURR. Somit gibt es genau 4 verschiedene kürzeste Wege von A nach H.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Um von A nach B auf einem kürzesten Weg zu kommen, muss viermal nach rechts und dreimal nach unten gegangen werden.

- Wir finden den Weg RRRRUUU.
- Nach Teilaufgabe a) gibt es drei Wege von A nach G.
    - Von G nach B gibt es drei verschiedene Wege, ohne über H zu kommen: RRUU, RURU, RUUR. Insgesamt ergeben sich damit 3 · 3 = 9 verschiedene kürzeste Wege.
    - Von G nach B gibt es einen Weg über H: URRU. Insgesamt ergeben sich in diesem Fall 3 · 1 = 3 verschiedene kürzeste Wege
- Nach Teilaufgabe a) gibt es einen zusätzlichen Weg von A nach H (ohne über G zu kommen). Von H nach B gibt es aber nur einen kürzesten Weg: URR.
- Schließlich gibt es noch zwei zusätzliche Wege von A nach B, ohne über G oder H zu kommen: UURURRR und UUURRRR.

Insgesamt haben wir 1 + 9 + 3 + 1 + 2 = 16 kürzeste Wege.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Nach den Erfahrungen aus den Teilaufgaben a) und b) genügt es, in einem vollständigen Quadratgitter die erforderlichen Anzahlen für Wegstücke nach unten und nach rechts festzulegen, so dass die Anzahl der verschiedenen Anordnungen genau 20 ergibt:

1x19-Rechteck: Wegfolge einmal R und 19-mal U, also 20 kürzeste Wege, weil es 20 Möglichkeiten gibt, R in der Folge UUU…U voranzustellen, einzufügen oder nachzustellen.

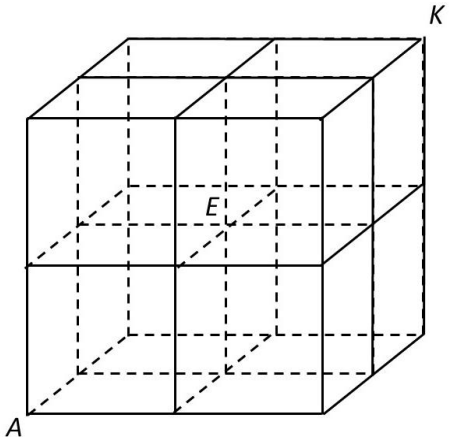
19x1-Rechteck: Wegfolge 19-mal R und einmal U, also 20 kürzeste Wege, weil es 20 Möglichkeiten gibt, U in der Folge RRR…R voranzustellen, einzufügen oder nachzustellen.

3x3-Rechteck: Wegfolge dreimal R und dreimal U, also 20 kürzeste Wege, weil es 20 Möglichkeiten gibt, R in der Folge UUU…U voranzustellen, einzufügen oder nachzustellen, nämlich 10 verschiedene kürzeste Wege, wenn wir mit R beginnen: RRRUUU, RRURUU, RRUURU, RRUUUR, RURRUU, RURURU, RURUUR, RUURRU, RUURUR, RUUURR. Entsprechend gibt es auch 10 davon verschiedene kürzeste Wege, wenn wir mit U beginnen (also R und U vertauschen).

Aufgabe 24.26 – MO430941. Die Abbildung zeigt ein aus Einheitsstrecken gebildetes kubisches Raumgitter der Kantenlänge 2. Eine Ameise bewegt sich längs der Gitterstäbe auf kürzestem Weg von A nach K. Wie viele verschiedene dieser kürzesten Wege gibt es für die Ameise, wenn sie sich

a) auf beliebigen Gitterstäben,
b) nur längs der Gitterstäbe an der Oberfläche des Würfels

bewegt?



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Ein kürzester Weg von A nach K besteht aus 6 Wegstücken – zweimal nach rechts (R), zweimal nach oben (O) und zweimal nach hinten (H). Alle möglichen Reihenfolgen dieser Wegstücke sind kürzeste Wege. Ihre Anzahl ermitteln wir wie folgt:

Zunächst suchen wir alle Möglichkeiten, zweimal R auf sechs Plätzen anzuordnen. Dies ist möglich, wenn R erstmalig auf dem

ersten Platz steht: RRxxxx, RxRxxx, RxxRxx, RxxxRx, RxxxxR – 5 Möglichkeiten,
zweiten Platz steht: xRRxxx, xRxRxx, xRxxRx, xRxxxR – 4 Möglichkeiten,
dritten Platz steht: xxRRxx, xxRxRx, xxRxxR – 3 Möglichkeiten,
vierten Platz steht: xxxRRx, xxxRxR – 2 Möglichkeiten,
fünften Platz steht: xxxxRR – 1 Möglichkeit.

Insgesamt sind es (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15, oder $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Möglichkeiten.

Nun suchen wir alle Möglichkeiten, zweimal O auf den verbleibenden vier freien Plätzen anzuordnen. Dies ist möglich, wenn O erstmalig auf deren

ersten Platz steht: OOxx, OxOx, OxxO – 3 Möglichkeiten,
zweiten Platz steht: xOOx, xOxO – 2 Möglichkeiten,
dritten Platz steht: xxOO – 1 Möglichkeit.

Insgesamt sind es (3 + 2 + 1 =) 6, oder $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Möglichkeiten.

Um abschließend zweimal H auf den verbleibenden zwei freien Plätzen anzuordnen, gibt es genau 1 Möglichkeit.

In Kombination dieser Untersuchungen ergeben sich 15 · 6 · 1 = 90 verschiedene kürzeste Wege von A nach K.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Um auf kürzesten Weg von A nach K über E zu gelangen, muss auch von A nach E ein kürzester Weg genommen werden. Ein solcher Weg besteht aus drei Wegstücken R, O und H in beliebiger Reihenfolge. Es gibt sechs Möglichkeiten einer solchen Anordnung:

ROH, RHO, ORH, OHR, HRO, HOR

bzw. 3 · 2 · 1 = 6 Möglichkeiten. Mit gleicher Argumentation gibt es auch sechs kürzeste Wege von E nach K, insgesamt also 6 · 6 = 36 kürzeste Wege von A nach K über E und entsprechend (nach Teilaufgabe a) 90 – 36 = 54 kürzeste Wege von A nach K ohne über E zu kommen. ❑

Die Hintereinanderausführung von Wegstrecken begegnet uns auch in

Aufgabe 24.27 – MO470944. In einem Wandergebiet liegen drei Rastplätze A, B und C. Ein Weg zwischen zweien dieser Rastplätze gilt als günstig, wenn er sie direkt verbindet oder auf zwei Direktverbindungen über den dritten führt.

Auf diese beiden Arten zusammen gibt es 10 günstige Wege von A nach B, 14 von B nach C und weniger als 12 von C zurück nach A. Wie viele Direktverbindungen von zweien der drei Rastplätze kann es insgesamt im Wegenetz zwischen A, B und C geben?

Lösungshinweise: Es seien x, y und z die Anzahl der Direktverbindungen von A nach B, von B nach C bzw. von C nach A. Die Zahl der günstigen Wege zwischen A und B über C ergibt sich dann als $x \cdot y$ und analog für die anderen Verbindungen. Für die Anzahlen der günstigen Wege erhalten wir also

$$x + y \cdot z = 10 \text{ Wanderwege zwischen A und B} \quad (1)$$
$$y + z \cdot x = 14 \text{ Wanderwege zwischen B und C} \quad (2)$$
$$z + x \cdot y < 12 \text{ Wanderwege zwischen A und C} \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Addition bzw. Subtraktion das äquivalente System

$$x + y + x \cdot z + y \cdot z = (x + y) \cdot (1 + z) = 24 \quad (4)$$
$$y - x + x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot (z - 1) = 4 \quad (5)$$

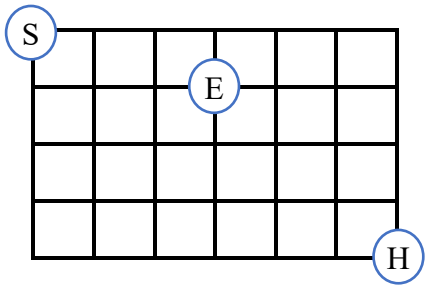
Daher muss insbesondere $z - 1$ ein Teiler von 4 sein. Es kommt nur $z \in \{2; 3; 5\}$ in Frage, und die zugehörigen Werte für x und y ergeben sich aus (4) und (5)

$$z = 2\text{: } x + y = 8;\ x - y = 4\ x = 6;\ y = 2$$
$$z = 3\text{: } x + y = 6;\ x - y = 2\ x = 4;\ y = 2$$
$$z = 5\text{: } x + y = 4;\ x - y = 1 \text{ keine Lösung}$$

Die Lösung $z = 2$ scheidet allerdings aus wegen $z + x \cdot y = 14 > 12$ aus; die Lösung $z = 3$ erfüllt dagegen $z + x \cdot y = 11 < 12$.

Die einzige Lösung, welche alle Bedingungen erfüllt, ist also $x = 4, y = 2, z = 3$. Es gibt also $2 + 3 + 4 = 9$ Wanderwege, die zwei der drei Rastplätze direkt verbinden. ❑

Wir erinnern an **Aufgabe 24.15 – MO321045**[4]**.** In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.



Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis. Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.

a) Er erklärt dazu: ”Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H fuhren über die Ecke E.” Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: ”Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn – durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen.” Trifft das zu?

Diese Verknüpfung von Wegbeschreibungen und klassischer Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde in der 56. MO wieder aufgegriffen, wenn auch mit eigenartiger textlastigen Umschreibung des Problems:

Aufgabe 24.28 – MO560922/MO561022. Ein Metallsieb für Komposterde besteht aus einem quadratischen Gitter aus senkrecht und waagerecht gespannten Drähten. Die Gitterlinien bilden dabei quadratische Kästchen wie in der Abbildung dargestellt. Forscher haben untersucht, wie sich Ameisen verhalten, wenn man sie auf diesem Gitter aussetzt. Dazu haben sie folgendes Experiment mehrfach wiederholt:

Eine Ameise wird an einem inneren Gitterpunkt, dem Startpunkt S, weit genug vom Rand des Metallsiebs entfernt ausgesetzt. Die Ameise kann nur entlang der Gitterlinien laufen. In jedem Gitterpunkt entscheidet sich die Ameise neu, in welche Richtung sie ihren Weg fortsetzt. Die Forscher interessieren sich, welche Art von Wegen die Ameisen dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen.

Ein möglicher Weg einer Ameise vom Startpunkt S über 9 weitere Gitterpunkte bis zum Ende im Gitterpunkt 10 ist in der Abbildung dargestellt.

[4] Siehe Lösungsdiskussion im Heft 02/2025.

		5	6		
S	1	4	7	8	
	2	3	10	9	

Die Forscher haben auf Grund umfangreicher Untersuchungen folgendes Modell für das Verhalten der Ameisen aufgestellt:

- Alle Ameisen verhalten sich gleich.
- Eine Ameise läuft in einer Sekunde eine Kästchenlänge ab.
- An einem Gitterpunkt laufen die Ameisen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ weiter geradeaus.
- Biegen Ameisen an einem Gitterpunkt ab, so erfolgt das mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts.
- Es kommt nicht vor, dass eine Ameise an einem Gitterpunkt umkehrt und auf dem Gitterstück weiterläuft, von dem sie gerade hergekommen ist.

Ermitteln Sie auf der Basis dieses Modells die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Eine Ameise geht dreimal hintereinander geradeaus.
b) (Klassenstufe 9) Eine Ameise läuft in 6 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).
(Klassenstufe 10) Eine Ameise läuft in 8 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Produktformel zu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Ameisen nach rechts bzw. links abbiegen. Beide Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Da die Ameisen entweder geradeaus laufen oder abbiegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Abbiegen $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Damit ergibt sich für das Abbiegen nach rechts und das Abbiegen nach links jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

Der Weg einer Ameise wird durch deren Entscheidungen auf den durchlaufenen Gitterknoten eindeutig bestimmt. Wir protokollieren l, r bzw. g, wenn sich die Ameise dabei nach links bzw. rechts wendet oder aber geradeaus weitergeht, und geben einen Weg im Ereignisraum durch die Folge der Entscheidungen der Ameise an. Alle weiteren zahlenmäßigen Längenangaben beziehen sich auf die Einheit „Kästchenlänge“.

In den folgenden Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten werden die Ereignisräume der möglichen Pfade untersucht, die eine Ameise von S aus durchlaufen kann. Dabei wird mehrfach die erste und die zweite Pfadregel (Additions- bzw. Multiplikationssatz) verwendet.

Es ist für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten unerheblich, ob sich die Ameise von S aus zuerst nach oben, unten, rechts oder links bewegt, denn die jeweiligen Ereignisteilräume kann man durch Drehen des Gitters auf den Ereignisteilraum abbilden, in dem die Ameise zunächst nach rechts geht. In allen vier Ereignisteilräumen ist deshalb die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 6 Sekunden wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, gleich. Wir können unsere Untersuchungen also auf den Ereignisteilraum beschränken, in dem die Ameise von S aus zunächst eine Einheit nach rechts läuft, und nur die Entscheidungen der Ameise in den Sekunden zwei bis sechs betrachten.

(für Klassenstufe 9) Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 6. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 2. Umläuft die Ameise ein solches (1×2)-Rechteck, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 1) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde die folgenden vier Wege lgllg, rgrrg, gllgl oder grrgr zu einem geschlossenen Rechteck und zum Ausgangspunkt S zurück. Alle vier Wege enthalten zwei Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^5}{5^5}$$

Fall 2: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt der Startpunkt auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 2. In diesem Fall führen folgende Wege llgll oder rrgrr nach der ersten Sekunde zu einem geschlossenen Rechteck und zum Ausgangspunkt S zurück. Diese zwei Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten beide eine Geradeaus-Entscheidung g der Ameise und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Falles 2 ist demnach

$$2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^5}{5^5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise in 6 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat und zum Ausgangspunkt S zurückgekehrt ist, beträgt also

$$\frac{2^5}{5^5}+\frac{2^5}{5^5}=\frac{2^6}{5^5}=\frac{2^{6+5}}{10^5}=\frac{2048}{10000}=0.02048$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 6 durchläuft also eine Ameise in knapp über 2% aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 6 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück. ❑

(für Klassenstufe 10) Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 8. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 3 oder es handelt sich bei dem zu umlaufenden Rechteck um ein Quadrat mit der Seitenlänge 2.

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise ein Quadrat der Seitenlänge 2 umläuft. Dabei kann S entweder ein Eckpunkt des Quadrates (Fall 1) oder der Mittelpunkt einer Quadratseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Quadrates, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege glglglg oder grgrgrg zu einem Quadrat und zu S zurück. Alle zwei Wege enthalten vier Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen.

$$2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^4}{5^7}$$

Fall 2: Ist S der Mittelpunkt einer Quadratseite, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege lglglgl oder rgrgrgr zu einem Quadrat und zu S zurück. Alle zwei Wege enthalten drei Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen.

$$2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{2^5}{5^7}$$

Die Ameise umläuft also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2^4}{5^7}+\frac{2^5}{5^7}=\frac{2^4+2^5}{5^7}=\frac{48}{5^7}$ ein Quadrat mit dem Umfang 8 und kehrt zu S zurück.

Umläuft die Ameise ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 3) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 4) sein.

Fall 3: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde nur die vier Wege lggllgg, rggrrgg, ggllggl oder ggrrggr zu einem Rechteck und zurück zu S. Alle

vier Wege enthalten vier Geradeaus-Entscheidungen g und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des dritten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^5}{5^7}$$

Fall 4: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt S auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 3. In diesem Fall führen nach der ersten Sekunde nur die Wege gllggll, llggllg, grrggrr oder rrggrrg zu einem Rechteck und zu S zurück. Diese vier Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten alle drei Geradeaus-Entscheidungen g und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des vierten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^6}{5^7}$$

Die Ameise umläuft somit ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2^5}{5^7} + \frac{2^6}{5^7} = \frac{2^5+2^6}{5^7} = \frac{96}{5^7}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 8 Sekunden erstmals wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, beträgt demnach

$$\frac{48}{5^7} + \frac{96}{5^7} = \frac{144}{5^7} = 0.0018432$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 8 durchläuft also eine Ameise in knapp 0.2% aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 8 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück.

❑

Thema 35 – DIOPHANTische Gleichungen

DIOPHANTische[5] Gleichungen sind Gleichungen, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden. Wir betrachten im Folgenden lineare (d.h. die Variablen treten nur in erster Potenz auf) diophantische Gleichungssysteme mit zwei oder mehr Variablen, bei denen weniger Gleichungen als Variablen angegeben werden. Diese Systeme sind also unbestimmt. Im einfachsten Fall ist es eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Solche Aufgaben finden wir vor allem in den Anfangsjahren der MO-Geschichte.

Aufgabe 35.01 – MO041041. Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden. Es stehen drei verschiedene

[5] Diese Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (um 250) benannt.

Sorten von Büchern im Wert von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.

Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Lösungshinweise: Wir nehmen zunächst je ein Buch für 30 M, 24 M und 18 M heraus. Es bleiben noch 27 Bücher für insgesamt 600 M – 30 M – 24 M – 18 M = 528 M.

27 Bücher für je 18 M kosten zusammen 486 M, es bleiben also noch 528 M – 486 M = 42 M übrig, die dazu verwendet werden können, um statt der 18 M-Bücher teurere Bücher zu kaufen. Wir unterscheiden nun danach, wie viele Bücher zu 30 M gekauft werden:

a) 4 oder mehr sind nicht möglich, da dies Mehrkosten von mindestens 48 Mark verursacht
b) 3 Bücher kosten 36 Mark zusätzlich, es bleiben noch 6 Mark, mit denen genau ein 18 M Buch durch ein 24 M-Buch ersetzt werden kann.
c) 2 Bücher zu 30 M und drei Bücher zu 24 M
d) 1 Buch zu 30 M und fünf Bücher zu 24 M
e) kein Buch zu 30 M und sieben Bücher zu 24 M

Insgesamt ergeben sich vier Möglichkeiten

30 M	24 M	18 M
4	2	24
3	4	23
2	6	22
1	8	21

Eine Probe bestätigt, dass in allen vier Fällen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Lösungsvariante: Es seien x, y und z die Anzahl der Bücher, die für 30 M, 24 M bzw. 18 M angeschafft werden. Dann soll gelten:

$$x + y + z = 30\,,\, 30 \cdot x + 24 \cdot y + 18 \cdot z = 600$$

Das ist äquivalent zu

$$x + y + z = 30\,,\, 5 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot z = 100$$

Subtrahieren wir dreimal die linke Gleichung von der rechten, ergibt sich $2x + y = 10$. Daraus können wir nun die Lösungen für x und y unmittelbar und nachfolgend für z ablesen, nämlich:

(1) $x = 4$ und $y = 2$ und $z = 24$ oder
(2) $x = 3$ und $y = 4$ und $z = 23$ oder

(3) $x = 2$ und $y = 6$ und $z = 22$ oder
(4) $x = 1$ und $y = 8$ und $z = 21$.

(Wir müssen beachten, dass $x > 0$ und $y > 0$ gelten soll.)

Mit den zugehörigen Proben bestätigen wir, dass alle vier Möglichkeiten Lösungen sind. ❑

Hinweise: Die Lösungen der Gleichung $2x + y = 10$ in ganzen Zahlen lassen sich durch einfaches Probieren finden. Wollen wir jedoch Lösungen mit einer verallgemeinerungsfähigen Methode finden, so lösen wir die gegebene Gleichung nach x auf, führen die Division so weit wie möglich aus und erhalten

$$x = \frac{10 - y}{2} = 5 - \frac{y}{2}.$$

Jetzt sind die Lösungen offensichtlich: Wegen $x > 0$ muss $y < 10$ gelten und unser Suchbereich ist eingeschränkt. Dabei müssen wir die Ganzzahligkeit des Ausdrucks $\frac{y}{2}$ beachten. Setzen wir dafür $g = \frac{y}{2}$, gleichbedeutend mit $2g = y$, so sind können nur alle geradzahligen Werte von $y < 10$ unter den gesuchten Lösungen sein.

Aufgabe 35.02 - MO111011. Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 W ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W, aber keine anderen, zur Verfügung.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

Lösungshinweise: Bezeichnen wir die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt der Reihe nach mit x, y, z, so erfüllt eine Ausstattung genau dann die Voraussetzungen der Aufgaben, wenn x, y, z natürliche Zahlen mit

$$x + y + z = 32$$
$$40 \cdot x + 60 \cdot y + 75 \cdot z = 1800$$

sind. Angenommen x, y, z seien drei solche natürlichen Zahlen. Dann folgt aus beiden Gleichungen

$$4 \cdot y + 7 \cdot z = 104 \implies y = \frac{104 - 7 \cdot z}{4} = 26 - z - \frac{3 \cdot z}{4}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl g mit $4 \cdot g = 3 \cdot z$. Also ist z durch 4 teilbar und wir können für $z = 4 \cdot z'$ die Gleichung als $z' = \frac{g}{3}$ schreiben. Weiter wissen wir, dass wegen $7 \cdot z \leq 104$ die Abschätzung $z < 15$ gilt und damit die Ungleichungen $0 \leq z' < \frac{15}{4} < 4$ folgen. Damit können wir vollständig probieren

z'	z	g	y	x	$x + y + z$	$40 \cdot x + 60 \cdot y + 75 \cdot z$
0	0	0	26	4	32	1800

1	4	3	19	9	32	1800
2	8	6	12	12	32	1800
3	12	9	5	15	32	1800

In den zwei Spalten rechts haben wir mittels Probe die Ergebnisse bestätigt. ❑

Aufgabe 35.03 – MO051024. Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt. Wieviel Autobusse jeder Art sind zu bestellen?

Lösungshinweise: Es gilt

$$20 \cdot 41 + 6 \cdot 29 + 1 \cdot 13 = 820 + 174 + 13 = 1007$$

Es gibt daher eine Lösung, die $20 + 6 + 1 = 27$ Busse benutzt. Angenommen, es gäbe eine (nichtnegative ganzzahlige) Lösung mit a Bussen mit je 41 Plätzen, b Bussen mit je 29 Plätzen und c Bussen mit je 13 Plätzen für die $a + b + c = n$ (mit ganzzahligem $n \leq 26$) und

$$41a + 29b + 13c = 1007$$

gilt. Aus beiden Gleichungen erhalten wir $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007$ (#). Wir untersuchen nun drei Fälle.

Fall 1: Für $n = 26$ vereinfacht sich die Gleichung (#) zu:

$$12b + 28c = 41 \cdot 26 - 1007 = 59$$

Dabei ist die linke Seite gerade, die rechte aber nicht. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Fall 2: Für $n \leq 24$ ergibt sich aus der Gleichung (#) die Ungleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \leq 41 \cdot 24 - 1007 = -23$$

Hier gibt es offenbar keine nichtnegativen Lösungen.

Fall 3: Für $n = 25$ ergibt sich aus der Gleichung (#) die Gleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot 25 - 1007 = 18$$

Da a, b und c nichtnegative ganze Zahlen sind, muss $c = 0$ sein, da sonst die linke Seite von (6) bereits zu groß wäre. Es bleibt also die Gleichung $12b = 18$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat.

In allen Fällen führte die obige Annahme zum Widerspruch. Es gibt also keine Lösung, die mit weniger als 27 Bussen auskommt. Die oben angegebene Lösung mit 27 Bussen benutzt also die kleinstmögliche Anzahl an Bussen. ❑

Hinweise: Die vorgeschlagene Lösung basiert auf der Angabe einer möglichen Lösung. Dabei bleibt unbeantwortet, wie schwierig diese spezielle Lösung durch Probieren zu finden ist. Betrachten wir deshalb die Gleichung $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007$ zunächst ohne Beschränkung für ganze Zahl n. Wir lösen nach c auf und erhalten

$$b = \frac{41 \cdot n - 1007 - 28c}{12} = 3 \cdot n - 83 - 2 \cdot c + \frac{5 \cdot n - 11 - 4c}{12}$$

Also gibt es eine ganze Zahl g mit

$$12 \cdot g + 4 \cdot c = 5 \cdot n - 11$$

Da die linke Seite durch 4 teilbar ist, muss auch die rechte Seite durch 4 teilbar sein. Damit haben wir eine Variante gefunden, eine möglichst kleine Zahl n zu finden. Doch wir wollen den obigen Schritt noch einmal anwenden und erhalten

$$c = \frac{5 \cdot n - 11 - 12g}{4} = n - 3 - 3g + \frac{n + 1}{4}$$

Setzen wir $n = 4n' - 1$, so erhalten wir

$$c = -3 \cdot g + 5 \cdot n' - 4 \quad \Longrightarrow c + 3 \cdot g = 5 \cdot n' - 4$$
$$b = 12 \cdot n' - 86 - 2 \cdot c + g$$

Jetzt haben wir den Aufwand für ein systematisches Probieren weitgehend reduziert und verwenden eine Tabelle zum Auffinden der kleinstmöglichen Anzahl der Busse. Wir beachten $c \geq 0$.

n'	$c + 3 \cdot g$	c	g	$b = 12 \cdot n' - 86 - 2 \cdot c + g$
1	1	1[6]	0	< 0
2	6	0	2	< 0
3	11	2	3	< 0
4	16	1	5	< 0
5	21	0	7	< 0
6	26	2	6	< 0
7	31	1	10	84 – 86 – 2 + 10 = 6

Damit könnte $n = 4 \cdot 7 - 1 = 27$ die kleinstmögliche Anzahl der Busse sein, wobei $b = 6$ und $c = 1$ gelten würde. Mit $a = \frac{1007 - 6 \cdot 29 - 1 \cdot 13}{41} = 20$ bestätigt sich, dass $n = 27$ die Lösung darstellt, da es keine kleinere Anzahl von Bussen geben kann.

Wir haben in den Lösungshinweisen intuitiv das EULERsche Reduktionsverfahren zur Lösung DIOPHANTischer Gleichungen verwendet. Es besteht darin, für eine gegebene Gleichung schrittweise die Koeffizienten zu verkleinern, bis eine Lösung offensichtlich

[6] Wir verwenden die kleinstmögliche Zahl $c \geq 0$. Wäre nämlich c größer, wäre g kleiner und die Ungleichung in der rechten Spalte gilt erst recht.

wird. Gehen wir von $ax + by = c$ aus und suchen Lösungen in ganzen Zahlen x und y, so lösen wir diese Gleichung nach der Variablen mit dem kleineren Koeffizienten auf, z.B. für $a < b$

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Wegen $a < b$ existieren ganze Zahlen n und b' mit $b = na + b'$ (wobei wir $0 \leq b' < a$ wählen). Damit können wir die Umformung fortsetzen

$$x = n + \frac{c - b' \cdot y}{a}$$

Damit x ganzzahlig ist, gibt es eine ganze Zahl g mit $a \cdot g + b' \cdot y = c$. Wegen $b' < a$ haben wir nun eine neue diophantische Gleichung mit kleineren Koeffizienten erhalten. Das Verfahren können wir nun schrittweise fortsetzen, bis ein Koeffozient den Wert 1 annimmt.

Beispiel: Man löse die DIOPHANTische Gleichung $23 \cdot x + 17 \cdot y = 41$.

Schritt 1:

$$y = \frac{41 - 23 \cdot x}{17} = 2 - x + \frac{7 - 6 \cdot x}{17}$$
$$17 \cdot g_1 + 6 \cdot x = 7$$

Schritt 2:

$$x = \frac{7 - 17 \cdot g_1}{6} = 1 - 2 \cdot g_1 + \frac{1 - 5 \cdot g_1}{6}$$
$$6 \cdot g_2 + 5 \cdot g_1 = 1$$

Schritt 3:

$$g_1 = \frac{1 - 6 \cdot g_2}{5} = -g_2 + \frac{1 - g_2}{5}$$
$$5 \cdot g_3 + g_2 = 1$$

Wählen wir nun $g = g_3$ als eine beliebige ganze Zahl, so ist $g_2 = 1 - 5 \cdot g$ nach Konstruktion ganzzahlig. Dann ist aber auch

$$g_1 = -g_2 + \frac{1 - g_2}{5} = -1 + 5 \cdot g + \frac{1 - (1 - 5 \cdot g)}{5} = -1 + 6 \cdot g$$

ganzzahlig, ebenso wie

$$x = 1 - 2 \cdot g_1 + \frac{1 - 5 \cdot g_1}{6} = 1 - 2 \cdot (-1 + 6 \cdot g) + \frac{1 - 5 \cdot (-1 + 6 \cdot g)}{6} =$$
$$= 3 - 12 \cdot g_3 + \frac{6 - 30 \cdot g}{6} = 4 - 17 \cdot g$$

und auch

$$y = \frac{41 - 23 \cdot x}{17} = \frac{41 - 23 \cdot (4 - 17 \cdot g)}{17} = -3 + 23 \cdot g.$$

Damit haben wir für jede ganze Zahl g mit $(4 - 17 \cdot g; -3 + 23 \cdot g)$ ein Lösungspaar der DIOPHANTischen Gleichung gefunden, denn es gilt für alle g:

$$23 \cdot (4 - 17 \cdot g) + 17 \cdot (-3 + 23 \cdot g) = 92 - 23 \cdot 17 \cdot g - 51 + 17 \cdot 23 \cdot g = 41$$

Setzen wir $g = 0$, so erhalten wir das Lösungspaar $(4; -3)$. Diese Lösung könnten wir sicherlich auch durch systematisches Probieren finden, indem wir für x kleine Werte einsetzen und prüfen, ob es dann für y ebenfalls eine ganze Zahl gibt, die diese Gleichung erfüllt. Haben wir aber eine spezielle Lösung $(x_0; y_0)$ gefunden, dann ist auch jedes Zahlenpaar mit $(x_0 - 17 \cdot g; y_0 + 23 \cdot g)$ Lösung der DIOPHANTischen Gleichung, weil die Gleichung

$$23 \cdot (-17 \cdot g) + 17 \cdot (23 \cdot g) = 0$$

stets erfüllt ist. Es genügt also, für $ax + by = c$ eine spezielle Lösung $(x_0; y_0)$ mit $ax_0 + by_0 = c$ (beispielsweise durch systematisches Probieren) zu finden, um mit $(x_0 - b \cdot g; y_0 + a \cdot g)$ für alle ganzen Zahlen g weitere Lösungen anzugeben.

Wir bemerken ergänzend, dass damit auch tatsächlich alle Lösungen gefunden wurde. Nehmen wir nämlich an, es gäbe eine weitere Lösung $(x_1; y_1)$ mit $ax_1 + by_1 = c$, dann folgt durch Subtraktion beider Gleichungen

$$a \cdot (x_1 - x_0) + b \cdot (y_1 - y_0) = 0$$

Wir erkennen, dass die Differenz $(y_1 - y_0)$ ein Vielfaches von a sein muss, es also eine ganze Zahl g mit $(y_1 - y_0) = a \cdot g$ gibt. Es gilt also $y_1 = y_0 + a \cdot g$. Daraus folgt unmittelbar $a \cdot (x_1 - x_0) + b \cdot a \cdot g = 0$, d.h. nach Division durch $a \neq 0$ gilt auch $x_1 = x_0 - b \cdot g$. Doch ein solches Zahlenpaar haben wir bereits in der bisherigen Darstellung erfasst.

Schließlich sei ergänzt, dass die Gleichung $ax + by = c$ genau dann in ganzen Zahlen lösbar ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b auch Teiler von c ist.

Bundeswettbewerb Mathematik 2025

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband, eine Gemeinschaftsinitiative von Unternehmen und Stiftungen, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist die Bildung & Begabung gGmbH mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband. Die Angebote von Bildung & Begabung profitieren von einem starken Netzwerk aus staatlichen Institutionen,

Stiftungen, Unternehmen und weiteren privaten Förderern. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Wenn du dich für mathematische Herausforderungen und deren Hintergründe interessiert, bist du richtig beim Bundeswettbewerb Mathematik. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben mathematischem Schulwissen musst du zur Teilnahme Interesse, Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Auch Gruppenarbeiten mit bis zu drei Teilnahmeberechtigten sind in Runde 1 zugelassen.
Wurden mindesten drei der vier Aufgaben der ersten Runde richtig gelöst, wird ein Preis vergeben. Die Einsendung mit einer richtig gelösten Aufgabe wird mit einer Anerkennungsurkunde gewürdigt.

Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Wir eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erhält jedes Gruppenmitglied die Startberechtigung für die 2. Runde. Die 2. Runde ist ein Einzelwettbewerb. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.“

Der Bundeswettbewerb Mathematik ist kein Konkurrenzwettbewerb. Die Einsendungen werden unabhängig voneinander bewertet und mit Preisen, deren Anzahl nicht eingeschränkt ist, ausgezeichnet.

Die Teilnehmerzahlen[7] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Schuljahr 2021/22).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)
2022/23	1764	576 (32.7%)	67 (3.8%)	36 (53.7%)
2023/24	1189	378 (31.8%)	62 (5.2%)	28 (45.1%)
2024/25	142	429 (30.2%)	63 (4.4%)	18 (28.6%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

[7] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2024/25 in Sachsen erstmalig unter dem Bundes-Durchschnitt!

Unter den 63 sächsischen Teilnehmern wurden 4 erste, 10 zweite und 18 dritte Preise vergeben – über die Hälfte der sächsischen Teilnehmenden gehörte zu den Preisträgern (50.8%, bundesweit 47.3%). Dazu kamen noch 19 Anerkennungsurkunden (30.2%). Somit wurden in Sachsen 81.0% aller Teilnehmenden ausgezeichnet (bundesweit 84.2%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 32 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)
2022/23	246	78 (31.5%)	15 (6.1%)	8 (53.3%)
2023/24	289	110 (38.1%)	14 (4.8%)	7 (50.0%)
2024/25	341	105 (30.8%)	13 (3.8%)	5 (38.5%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl

** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2024/25 wurden insgesamt 187 Preise vergeben (54.8% aller Teilnehmer), darunter 3 zweite und 4 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (53.8% aller sächsischen Teilnehmer, darunter zwei Starter aus den Klassenstufen 9/10). Ende November/Anfang Dezember fanden/finden die regionalen Auszeichnungsveranstaltungen statt. Die erfolgreichen Jugendlichen aus Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen werden am 9. Dezember bei der CARL-ZEISS-AG in Jena empfangen. Staatssekretär Dr. BERND UWE ALTHAUS aus dem Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur begrüßt die Anwesenden. Nach dem gemeinsamen Mittagsessen wird eine Diskussionsrunde mit Vertretern des Bundeswettbewerbs Mathematik geführt: Prof. Dr. ILKA AGRICOLA (Vorsitzende Beirat Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe), KARL FEGERT (Vorsitzender Korrekturkommission), Dr. EMESE VARGYAS (Mitglied Aufgabenausschuss) und HANNS-HEINRICH LANGMANN (Geschäftsstelle).

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2026 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten. Einsendeschluss ist der 2. März 2026 (Datum des Poststempels).

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. LÖFFLER.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. LANGMANN, E. QUAISSER, E. SPECHT: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. SPECHT, E. QUAISSER und P. BAUERMANN herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten
Professor Dr. Th. Spieker
Verlag von August Stein, Potsdam 1895[8].

Vierter Kursus
Abschnitt XXI. – Von den Diophantischen Aufgaben.
§ 297.

Sind zur Bestimmung von mehreren Unbekannten weniger unabhängige Gleichungen gegeben, als Unbekannte vorhanden, so genügen diese Gleichungen im allgemeinen unendlich viele zusammengehörige Werte der Unbekannten; die Aufgabe ist daher eine unbestimmte. Stellt man aber die Bedingung, daß den Unbekannten nur gewisse Arten von Werten, wie rationale, oder ganze, oder ganze positive Zahlen zukommen sollen, so ist die Anzahl der zusammengehörigen Wurzeln oft eine beschränkte. Die Aufgaben, ein unbestimmtes Gleichungssystem unter der Bedingung zu lösen, daß die zusammengehörigen Wurzeln nur ganze positive Zahlen sind, nennt man ein Diophantisches Problem.
Die Lösung Diophantischer Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen führen, ist sowohl nach dem Grade, als auch nach der Zahl der Gleichungen zu trennen. Ist nur eine Gleichung weniger vorhanden, als Unbekannte, so ist die Aufgabe einfach unbestimmt, sind weniger gegeben, so ist sie mehrfach unbestimmt.

a. Diophantische Aufgaben 1ten Grades
§298.

Die allgemeine Form, auf welche die Gleichung jeder Diophantischen Aufgabe 1ten Grades zwischen zwei Unbekannten durch die Operationen des Ordnens gebracht werden kann, ist:

$$ax + by = c$$

worin die Coeffizienten a, b, c ganze positive oder negative Zahlen bedeuten.
Die unbestimmte Gleichung

$$ax + by = c$$

ist aber in ganzen Zahlen unlösbar, wenn a und b einen gemeinschaftlichen Teiler haben, der nicht zugleich in c aufgeht.

[8] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp **Mainzer Fraktur** verwendet.

Denn vorausgesetzt, m wäre ein Teiler von a und b, aber nicht von c, so erhält man durch Division:

$$\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y = \frac{c}{m},$$

eine Gleichung, in welcher $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, $\frac{c}{m}$ aber gebrochen ist. Es giebt daher für x und y keine zusammengehörigen ganzzahligen Werte, welcher dieser Gleichung genügen.

§ 299.

Lösung unbestimmter Gleichungen 1ten Grades zwischen zwei Unbekannten durch die Methode der Reduktion in ganzen absoluten Zahlen.
Die gegebene Gleichung sei:

$$ax + by = c$$

in der a und b als relative Primzahlen und a < b vorausgesetzt werden. Man löse die Gleichung für diejenige Unbekannte, welche den kleineren Coeffizienten hat:

$$x = \frac{c - by}{a},$$

verwandle den Wert in eine gemischte Zahl, indem man mit a in den Zähler dividiert, und so viele Ganze als möglich herausstellt:

$$x = Q - qy + \frac{R - ry}{a}.$$

Da x eine ganze Zahl sein soll, so muß der Restbruch ebenfalls einen ganzzahligen Wert haben; derselbe sei $= \alpha$:

$$\frac{R - ry}{a} = \alpha\,.$$

Löst man darauf diese Gleichung für y, also:

$$y = \frac{R - a\alpha}{r},$$

und verwandelt wie oben in eine gemischte Zahl:

$$y = Q_1 - q_1\alpha + \frac{R_1 - r_1\alpha}{r},$$

so ist der Restbruch wieder eine ganze Zahl $= \beta$:

$$\frac{R_1 - r_1\alpha}{r} = \beta\,.$$

Aus dieser Gleichung entwickelt man den Wert für α wieder in Gestalt einer gemischten Zahl, und fährt in der obigen Weise fort bis der Nenner $= 1$ geworden ist, der Ausdruck einer der Hilfsgrößen α, β, γ also eine ganzzahlige Form erhalten hat. In dieser letzten Hilfsgröße drückt man darauf x und y, und erhält daher für dieselben Ausdrücke von ungebrochener Form. Setzt man endlich in diese Ausdrücke für die darin enthaltene Hilfsgröße nach und nach alle ganzen Zahlen ein, so erhält man alle zusammengehörigen ganzzahligen Wurzel dieser Gleichung, mithin auch die verlangten positiven.

...

Übungen[9] zum Abschnitt XXI.

1. 5x+3y=78
2. 12x+35y=156
5. 7x-9y=20
8. 17x+21y=1001
13. $\begin{cases} 13x - y = 88 \\ 17x - 3y = 20 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 5x - 3y + z = 21 \\ x + 3y - 5z = 23 \end{cases}$
24. Man hat 122 Mark zu bezahlen und besitzt nur Zehn- und Drei-Mark-Stücke. Wie ist dies möglich?
27. Die Zahl 159 in zwei Teile zu teilen, von denen der eine durch 8 und der andere durch 13 teilbar ist.

Monatsaufgabe 12/2025[10]

Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke $\overline{CD}$, einen inneren Punkt Q der Strecke $\overline{BC}$ und einen inneren Punkt R der Strecke $\overline{CD}$ zeichnen.

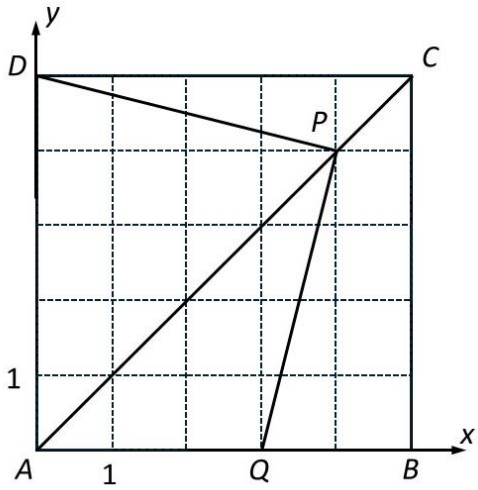
Dabei stellt sich Ulrike die Aufgabe zu erreichen, dass für die Flächeninhalte $F_1(\Delta ABP)$ und $F_2(\Delta AQR)$ die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt. Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare bzw. unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2025

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P auf $\overline{AC}$ teile die Strecke $\overline{AC}$ innen im Verhältnis 4 : 1, so dass $|\overline{AP}| : |\overline{PC}| = 4 : 1$ gilt, und der Punkt Q auf $\overline{AB}$ teile die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis 3 : 2, so dass $|\overline{AQ}| : |\overline{QB}| = 3 : 2$ gilt.

Beweisen Sie, dass das Dreieck ΔPQD gleichschenklig-rechtwinklig ist.



Lösungshinweise: Wir legen das Quadrat ABCD so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so dass der Punkt A mit dem Koordinatenursprung $(0\,;0)$ und der Punkt C mit dem Punkt $(5\,;5)$ zusammenfällt. Damit haben wir auch die Koordinaten $B(5\,;0)$ und $D(0\,;5)$.

Da die Länge der Strecke $\overline{AC}$ als Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 5 die Länge $5 \cdot \sqrt{2}$ besitzt, lauten die Koordinaten des Punktes P $(4\,;4)$, denn dafür gilt

[9] Insgesamt 39 Aufgaben zum Abschnitt XXI.a

[10] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.01.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

$$\overline{AP}:\overline{PC} = 4 \cdot \sqrt{2} : \sqrt{2} = 4 : 1.$$

Dafür benutzen wir entweder den bekannten Zusammenhang zwischen den Längen von Quadratseite und -diagonale, oder wir berechnen die Längen über den EUKLIDischen Abstand der Punkte im Koordinatensystem. Für den Punkt Q finden wir die Koordinaten $(3\,;0)$, denn dafür gilt wie gefordert $\overline{AQ}:\overline{QB} = 3 : 2$.

Nun erkennen wir bereits ohne weitere Analysen, dass die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PD}$ jeweils die Diagonalen in einem Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 4 sind, die durch Drehung um 90° ineinander übergehen. Sie sind somit gleichlang und schließen einen rechten Winkel ein, d.h., das Dreieck ΔPQD ist gleichschenklige-rechtwinklig.

Rechnerisch beweisen wir die Behauptung, indem wir die Anstiege der Geraden PQ und PD ermitteln und die Längen der Strecken $\overline{PD}$ und $\overline{PQ}$ bestimmen.

$$m_{PQ} = \frac{4-0}{4-3} = 4\,;\; m_{PD} = \frac{5-4}{0-4} = -\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad m_{PQ} = -\frac{1}{m_{PD}}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(4-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}\,;\; |\overline{PD}| = \sqrt{(0-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{17}$$
$$\Longrightarrow \quad |\overline{PQ}| = |\overline{PD}|$$

Damit haben wir auch auf diesem Weg nachgewiesen, dass das Dreieck ΔPQD gleichschenklig-rechtwinklig ist. ❑

Termine

Bundeswettbewerbs Mathematik, 1. Runde 2026 – Start am 1. Dezember 2025 – Einsendeschluss 02. März 2026

Digitale Mathe-Kalender von „Mathe im Leben“, DMV und MATH+ https://www.mathekalender.de/ : „Mathe im Advent“ für die Klassenstufen 7-9 können allein oder im Klassenverband gelöst werden. Weitere Informationen und den Anmeldelink auf https://www.mathe-im-advent.de/de/info/. Der „MATH+ Adventskalender“ ab Klasse 10 bietet knifflige Aufgaben und Einblicke in aktuelle Mathematikforschung. Links zu den Spielregeln und zur Anmeldung unter https://www.mathekalender.de/wp/de/40545-2/ .

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 24.5 – Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit 3
Thema 35 – DIOPHANTische Gleichungen 11
Bundeswettbewerb Mathematik 2025 17
In alten Mathe-Büchern geblättert 20
Monatsaufgabe 12/2025 22
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2025 22
Termine 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
12/2025	Thema 35	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.1	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

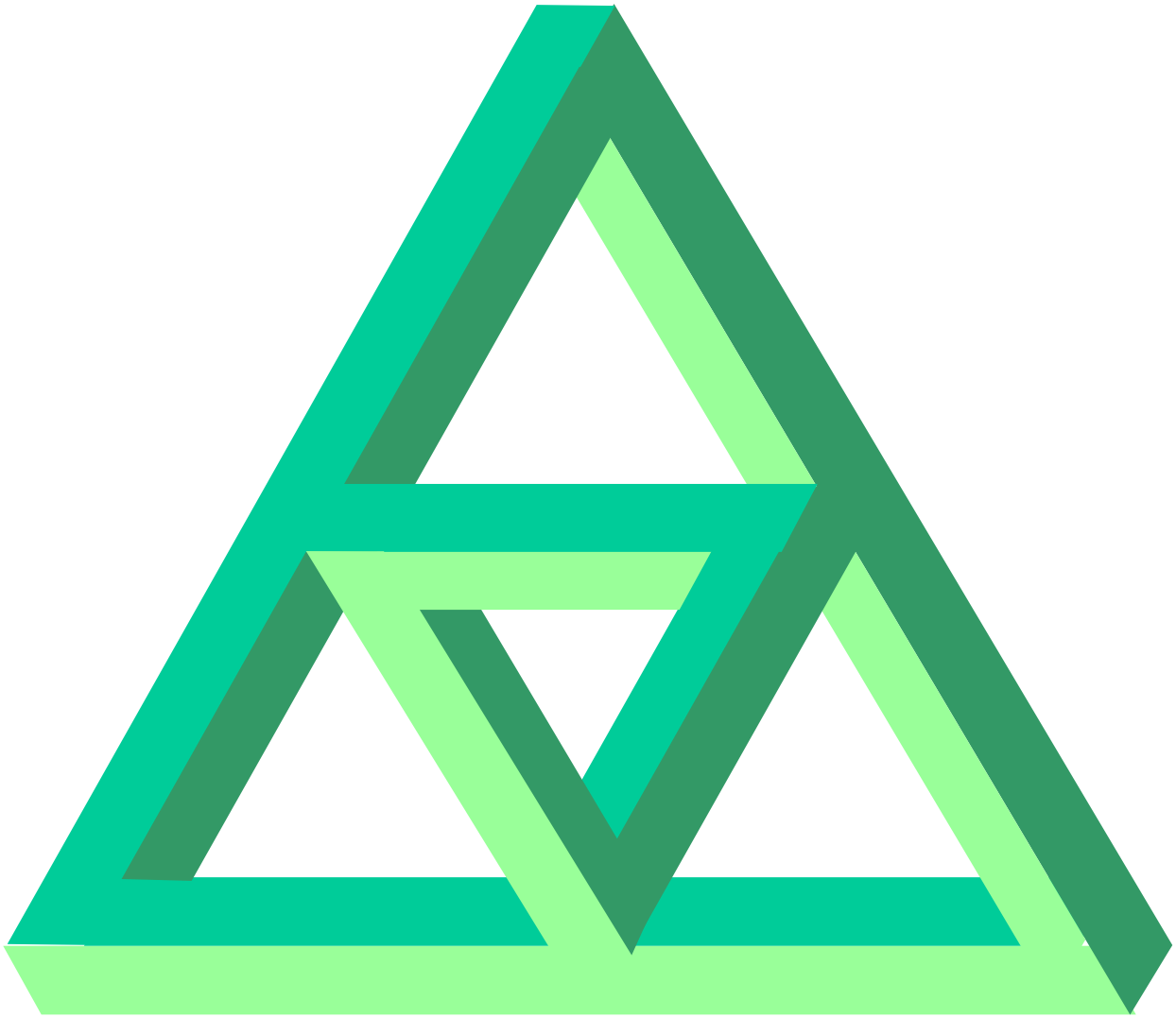
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 01+02/2026 (Januar/Februar 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den aktuellen Aufgaben **MO650923** und **MO651012** finden wir den Bezug zu bereits diskutierten Themen. Wir ergänzen deshalb das **Thema 24** „Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit“ und setzen das **Thema 9** „Differenzen und Summen von Quadratzahlen“ fort.

Weiterhin betrachten wir auch unter dem **Thema 35** „DIOPHANTische Gleichungen“ Aufgaben mit Quadratzahlen. Passend dazu zitieren wir im historischen Rückblick eine Arbeit von EULER aus dem Jahr 1758 zu den Zahlen, die sich als Summen zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

Da die „Mathematischen Kostproben“ die themenbezogene Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe fördern möchte, nehmen wir den 25. Jahrgang zum Anlass, auf zurückliegende Themen hinzuweisen und die zugehörigen Aufgabensammlungen zu wiederholen. Wir beginnen in diesem Heft mit dem **Thema 1** „Funktionalgleichungen“ aus den Jahren 2020 und 2021. Die Lösungen sind in den angegebenen Heften enthalten bzw. werden auf formlose Anfrage per pdf-Dokument zugesandt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 24.6 – Kombinatorik[3] u. klassische Wahrscheinlichkeit (Nachtrag)

Auch in der 2. Runde der diesjährigen Mathematik-Olympiade wurden Aufgaben zum Thema gestellt.

Aufgabe 24.29 – MO650923. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus den dreißig natürlichen Zahlen von 1 bis 30

a) genau zwei verschiedene Zahlen auszuwählen, deren Produkt durch 4 teilbar ist.
b) genau drei paarweise verschiedene Zahlen auszuwählen, deren Produkt durch 4 teilbar ist.

Hinweis: Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge der drei Faktoren unterscheiden, sollen hierbei nicht als verschieden angesehen werden.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Wir erhalten ein durch 4 teilbares Produkt, wenn entweder beide Zahlen gerade sind oder eine ungerade sowie eine durch 4 teilbare Zahl gewählt wird.

Im ersten Fall wählen wir zwei Zahlen aus den 15 geraden Zahlen mit einem Griff. Dafür gibt es $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$ Möglichkeiten der Auswahl.

Im zweiten Fall wählen wir genau eine aus den 15 ungeraden Zahlen und dazu jeweils genau eine aus den 7 durch 4 teilbaren Zahlen, also aus der Menge {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28}. Dafür gibt es $15 \cdot 7 = 105$ Möglichkeiten der Auswahl.

Insgesamt bekommen wir $105 + 105 = 210$ Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Insgesamt gibt es $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435$ Möglichkeiten der Auswahl von zwei verschiedenen Zahlen aus der gegebenen Menge. Wir erhalten ein nicht durch 4 teilbares Produkt, wenn entweder beide Zahlen ungerade sind oder eine ungerade sowie eine durch 2, aber nicht durch 4 teilbare Zahl gewählt wird.

Fall 1: Wählen wir zwei Zahlen aus den 15 ungeraden Zahlen mit einem Griff, so gibt es dafür $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$ Möglichkeiten der Auswahl.

[3] s. Teil 1, Heft 8+9/2023, Teil 2: Heft 1/2025, Teil 3: Heft 02/2025, Teil 4: Heft 11/2025, Teil 5: Heft 12/2025

Fall 2: Wir wählen genau eine aus den 15 ungeraden Zahlen und dazu jeweils genau eine aus den 8 durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren Zahlen, also aus der Menge {2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30}. Dafür gibt es $15 \cdot 8 = 120$ Möglichkeiten der Auswahl.

Insgesamt bekommen wir $435 - 105 - 120 = 210$ Möglichkeiten.

Anmerkung: Aus der Lösungsvariante können wir unmittelbar ablesen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Zahlenpaar zu den Bedingungen aus Teilaufgabe a) zufällig auszuwählen, $\frac{210}{435} \approx 48.3\%$ beträgt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es gibt $\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060$ Möglichkeiten der Auswahl von 3 verschiedenen Zahlen mit einem Griff aus den 30 gegebenen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge). Von diesen subtrahieren wir die Anzahl der Möglichkeiten, in denen wir kein durch 4 teilbares Produkt bekommen. Diese ergibt sich aus der folgenden Fallunterscheidung:

Fall 1: Alle drei Zahlen sind ungerade. Da es insgesamt 15 ungerade Zahlen im betrachteten Bereich gibt, haben wir $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ Möglichkeiten der Auswahl von drei ungeraden Zahlen.

Fall 2: Wir wählen genau zwei aus den 15 ungeraden Zahlen und dazu jeweils genau eine aus den 8 durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren Zahlen, also aus der Menge {2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30}. Dafür gibt es $\binom{15}{2} \cdot 8 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 840$ Möglichkeit.

Fall 3: Sind zwei gerade Zahlen unter den drei ausgewählten, ist das Produkt stets durch 4 teilbar.

Die Gesamtzahl der gesuchten Auswahlmöglichkeiten berechnet sich damit zu 4060 − 455 − 840 = 2765 Möglichkeiten. ❑

Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit, ein Zahlentripel zu den Bedingungen aus Teilaufgabe b) zufällig auszuwählen, beträgt $\frac{2765}{4060} \approx 68.1\%$.

Aufgabe – MO651024. Wir betrachten die vier Paare von Primzahlen (3, 5), (7, 11), (13, 17) und (19, 23). Aus den neun Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 werden sieben Zahlen zufällig ausgewählt (Ziehen mit einem Griff bzw. Ziehen ohne Zurücklegen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 7 ausgewählten Zahlen mindestens 2 der oben genannten Paare befinden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der 7 ausgewählten Zahlen ungerade ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 7 ausgewählten Zahlen genau 2 der oben genannten Paare befinden?

Hinweis: Alle möglichen Auswahlen von 7 Zahlen sollen jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Von den neun gegebenen Zahlen werden nur zwei nicht ausgewählt. Dadurch kann es höchstens 2 Paare geben, die nicht vollständig in der Auswahl dabei sind. Also sind immer mindestens 2 Paare unter den 7 ausgewählten Zahlen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit gleich 1.00 = 100%.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Die Summe von 7 Zahlen ist genau dann ungerade, wenn die 2 (als einzige gerade Zahl) zu den ausgewählten Zahlen gehören. Es gibt 8 Möglichkeiten, aus den 8 ungeraden Primzahlen 7 Zahlen auszuwählen, denn statt 7 Zahlen zu wählen, können wir auch eine Zahl nicht wählen.

Die Anzahl aller Auswahlmöglichkeiten von 7 aus 9 ist genauso groß wie die Anzahl der Möglichkeiten, 2 aus 9 auszuwählen, d.h. es kann die Gültigkeit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ als bekannt vorausgesetzt werden. Diese Anzahl beträgt somit $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 22.2\%$.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Für die geforderte Auswahl müssen zwei ungerade Zahlen nicht ausgewählt werden, die nicht zu einem gemeinsamen Paar gehören, denn nur in dem Fall gibt es genau 2 Paare unter den 7 ausgewählten Zahlen. Wir wählen zunächst zwei Paare aus den 4 gegebenen Zahlenpaaren aus. Dafür gibt es $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Möglichkeiten. Für die Auswahl von je einer Zahl aus jedem Paar gibt es nochmals $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten, insgesamt also $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

Jeder Auswahl von diesen zwei nicht ausgewählten Zahlen entspricht genau eine Auswahl von 7 ausgewählten Zahlen aus den 9 gegebenen Zahlen. Wie im Aufgabenteil a) gibt es insgesamt 36 Auswahlmöglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \approx 66.7\%$. ❑

Thema 9.5 – Differenzen und Summen von Quadratzahlen[4]

Aufgabe 09.28 – MO651012. In dieser Aufgabe sind a und b positive ganze Zahlen.

a) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 65$ an.
b) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 340$ an.
c) Hat die Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ Lösungen, bei denen a und b ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Hinweis: Die Gleichung $a^2 + b^2 = 13$ hat im Bereich der positiven ganzen Zahlen die Lösungen $(2,3)$ und $(3,2)$, denn es gilt $2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): (1, 8), (8, 1), (4, 7) und (7, 4) sind Lösungen, denn $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$. (Die Summanden können wir vertauschen.) Die Lösungen finden wir effektiv durch systematisches Probieren, indem wir untersuchen, ob sich für $65 - b^2$ mit $b = 1, 2, \dots, 8$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): (4, 18), (18, 4), (12, 14) und (14, 12) sind Lösungen, denn $4^2 + 18^2 = 12^2 + 14^2 = 340$. Die Lösungen finden wir auch hier durch systematisches Probieren, indem wir untersuchen, ob sich für $340 - b^2$ mit $b = 1, 2, \dots, 18$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungsvariante: Während in Teilaufgabe a) das systematische Probieren praktikabel (im Kopf) lösbar ist, erscheint diese Methode in Teilaufgabe b) unbefriedigend. Insbesondere ist der Lösungsansatz durch Probieren nicht verallgemeinerungsfähig. Wir erinnern deshalb an die Aussage aus

Aufgabe 9.17 – MO100922[5]. Jemand behauptet: Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
Beweisen Sie diesen Satz!

Die Zerlegung der rechten Seite der zu untersuchenden Gleichungen in Faktoren führt dazu, dass das systematische Probieren drastisch reduziert werden kann.

Zerlegen wir $65 = 5 \cdot 13$, finden wir wegen $5 = 1^2 + 2^2$ und $13 = 3^2 + 2^2$ die Darstellungen

$$65 = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$$

und

[4] Siehe auch Heft 09/2021, Heft 11/2022, Heft 04/2024 und Heft 05/2025
[5] Lösungshinweise s. Heft 04/2024

$$65 = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 = 1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65$$

Zerlegen wir $340 = 17 \cdot 20$, finden wir wegen $17 = 1^2 + 4^2$ und $20 = 4^2 + 2^2$ die Darstellungen

$$340 = (1 \cdot 4 + 4 \cdot 2)^2 + (4 \cdot 4 - 1 \cdot 2)^2 = 12^2 + 14^2 = 144 + 196 = 340$$

und

$$340 = (1 \cdot 4 - 4 \cdot 2)^2 + (4 \cdot 4 + 1 \cdot 2)^2 = 4^2 + 18^2 = 16 + 324 = 340$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Da 8024 durch 4 teilbar ist, müssen für eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ in ganzen Zahlen beide Zahlen gerade sein. Es gibt also ganze Zahlen m und n mit

$$a = 2m,\ b = 2n \text{ und } m^2 + n^2 = 8024 : 4 = 2006.$$

Wir können als bekannt voraussetzen: Sind a und b beide ungerade, so lässt $a^2 + b^2$ bei Division durch 4 den Rest 2. Da nun 2006 bei Division durch 4 den Rest 2 lässt, müssen für eine Lösung der Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$ in ganzen Zahlen beide Zahlen ungerade sein und sich als $m = 2u + 1$ und $n = 2v + 1$ mit den ganzen Zahlen u und v darstellen lassen. Dann folgt $(2u + 1)^2 + (2v + 1)^2 = 2006$. Daraus ergibt sich durch Umformungen

$$4u^2 + 4u + 1 + 4v^2 + 4v + 1 = 2006$$
$$4u^2 + 4u + 4v^2 + 4v = 2004$$
$$u^2 + u + v^2 + v = u(u + 1) + v(v + 1) = 501.$$

Nun sind sowohl $u(u + 1)$ als auch $v(v + 1)$ gerade Zahlen, weil eine von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gerade ist. Dann ist aber auch die Summe $u(u + 1) + v(v + 1)$ gerade und kann nicht gleich 501 sein. Es gibt also keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$, damit auch keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ und folglich erst recht nicht in positiven ganzen Zahlen. ❑

Lösungsvariante zur Teilaufgabe c): Da 8024 durch 4 teilbar ist, müssen für eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ in ganzen Zahlen beide Zahlen gerade sein. Es gibt also ganze Zahlen m und n mit

$$a = 2m,\ b = 2n \text{ und } m^2 + n^2 = 8024 : 4 = 2006.$$

Wir können als bekannt voraussetzen: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4 \cdot k$ oder von der Form $8 \cdot k + 1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.

Somit kann die Summe zweier Quadratzahlen nur einen der Reste $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1, 0 + 4 = 4, 1 + 1 = 2, 1 + 4 = 5$ oder $4 + 4 = 8$ lassen. Da nun aber 2006 bei Division durch 8 den Rest 6 lässt, gibt es also keine ganzzahligen Lösungen der

Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$, damit auch keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ und folglich erst recht nicht in positiven ganzen Zahlen.

Die oben als bekannt vorausgesetzten Aussagen[6] waren bereits in der MO Inhalt von Aufgaben, so in

Aufgabe 09.16 – MO220934[7]. Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann. Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

bzw.

Aufgabe 9.24 – MO400941/MO401021[8].

a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4 \cdot k$ oder von der Form $8 \cdot k + 1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.
b) Gibt es eine n-stellige Quadratzahl mit $n > 1$, die aus lauter gleichen Ziffern besteht? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Auch in folgender Aufgabe waren Summen zweier Quadrate zu untersuchen.

Aufgabe MO261034. Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22$$

für ganzzahlige x und *y* annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!

Geben Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in der Gleichung dieser Wert *z* ergibt!

Lösungshinweise: Die Umformung der gegebenen Gleichung ergibt

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 = (x+1)^2 + y^2 - 23$$

Damit *z* eine natürliche Zahl wird, muss $(x+1)^2 + y^2 - 23 \geq 0$ sein. Die kleinste natürliche Zahl ist 0, d.h. es müsste $(x+1)^2 + y^2 = 23$ sein. Eine Darstellung der Zahl 23 als Summe zweier Quadratzahlen existiert aber nicht, ebenso nicht für die Zahl 24 (wie wir durch systematisches Probieren nachweisen können). Erst die Zahl 25 kann

[6] Da es sicher bei solchen Aufgaben in der Klausur nicht gelingt, die entsprechenden Aufgabennummern anzugeben, sollten die Aussagen bewiesen werden (da sie sicherlich keinen eigenen, zitierfähigen Namen haben).
[7] Lösungshinweise s. Heft 04/2024
[8] Lösungshinweise s. Heft 05/2025

als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen dargestellt werden, d.h. $z = 2$ ist der kleinste Wert, der eine natürliche Zahl mit Erfüllung der Aufgabenaussage sein kann.

Zur Bestimmung der entsprechenden Paare (x, y) zerlegen wir 25.

$$(x+1)^2 + y^2 = 25 = 0 + 25 = 25 + 0 = 9 + 16 = 16 + 9$$

Damit sind folgende Möglichkeiten und die daraus resultierenden Paare möglich:

$(x+1)^2$	$x+1$	x	y^2	y	Paare (x, y)
25	±5	4 ; -6	0	0	(4, 0) ; (-6, 0)
0	0	-1	25	±5	(-1, 5) ; (-1, -5)
9	±3	2 ; -4	16	±4	(2, 4) ; (-4, 4) ; (2, -4) ; (-4, -4)
16	±4	3 ; -5	9	±3	(3, 3) ; (3, -3) ; (-5, 3) ; (-5, -3)

Es existieren 12 Paare (x, y) für die z den kleinstmöglichen Wert 2 annehmen kann, die wir durch eine Probe bestätigen können:

$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = 4^2 + 0^2 + 2 \cdot 4 - 22 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = (-6)^2 + 0^2 + 2 \cdot (-6) - 22 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = (-1)^2 + (\pm 5)^2 + 2 \cdot (-1) - 22 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = 2^2 + (\pm 4)^2 + 2 \cdot 2 - 22 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = (-4)^2 + (\pm 4)^2 + 2 \cdot (-4) - 22 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = 3^2 + (\pm 3)^2 + 2 \cdot 3 - 22 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 22 = (-5)^2 + (\pm 3)^2 + 2 \cdot (-5) - 22 = 2$$

❑

Thema 35.2 – DIOPHANTische Gleichungen[9]

Während im Teil 1 dieses Themas lineare Gleichungen ersten Grades untersucht wurden, beschäftigen wir uns nun mit Gleichungen zweiten Grades.

Für die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ mit dem ganzzahligen Faktor A ist in natürlichen Zahlen x und y zu lösen, wobei die triviale Lösung $(1; 0)$ nicht in die weitere Diskussion einbezogen wird. Die Gleichung wurde nach dem britischen Mathematiker JOHN PELL (1611 – 1685) benannt, der sich u.a. mit DIOPHANTischen Gleichungen beschäftigte (aber nicht mit dem genannten Typ).

Zunächst betrachten wir Eigenschaften der Zahl A. Es können negative Zahlen ausgeschlossen werden, denn in diesem Fall ließe sich die Gleichung als $x^2 + |A| \cdot y^2 = 1$ schreiben, die nur für $|A| > 1$ die trivialen Lösungen hat. Ist A eine Quadratzahl einer ganzen Zahl, gibt es außer der trivialen Lösung auch keine weiteren Lösungen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz zweier Quadratzahlen, die den Wert 1 annehmen soll. Folglich sind für A nur Nichtquadratzahlen interessant.

[9] s. Teil 1: Heft 12/2025

Wir können für eine vorgegebene Zahl A durch systematisches Suchen eine Lösung $(x\,;\,y)$ finden. So ist offensichtlich $(3;2)$ eine Lösung von $x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$, aber auch $(17\,;\,12)$ ist eine Lösung. Können wir alle Lösungen angeben?

Ist $(x_0;\,y_0)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$, so gilt nach Binomischer Formel

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)(x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0) = 1$$

und folglich finden wir wegen

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n \cdot (x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0)^n = 1$$

neue Lösungen mit

$$x_n + \sqrt{A} \cdot y_n = (x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n\,,$$

wenn wir nur alle Summanden der Binomischen Formel ohne den Faktor $\sqrt{A}$ zu x_n und die Summenden mit dem Faktor $\sqrt{A}$ zu y_n zusammenfassen. Damit erhalten wir

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n + \left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n\right),$$
$$y_n = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{A}} \cdot \left(\left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n - \left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n\right).$$

Wir können aber aus der Bildungsvorschrift eine praktikable Rekursionsvorschrift herleiten:

$$x_{n+1} + \sqrt{A} \cdot y_{n+1} = \left(x_n + \sqrt{A} \cdot y_n\right)\left(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0\right)$$
$$= (x_n x_0 + A \cdot y_n y_0) + \sqrt{A} \cdot (x_n y_0 + y_n x_0)$$

Am Beispiel der Lösung (3 ; 2) für $A = 2$ führt dies zu

$$x_{n+1} = 3 \cdot x_n + 4 \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = 2 \cdot x_n + 3 \cdot y_n.$$

Aus diesem Gleichungssystem wird zunächst y_n eliminiert und wir erhalten

$$3 \cdot x_{n+1} - 4 \cdot y_{n+1} = x_n.$$

Setzen wir nun für $4 \cdot y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - 3 \cdot x_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$x_{n+2} = 6 \cdot x_{n+1} - x_n.$$

Nun wird x_n eliminiert. Dies führt zu

$$3 \cdot y_{n+1} - 2 \cdot x_{n+1} = y_n.$$

Setzen wir nun für $2 \cdot x_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $y_{n+2} - 3 \cdot y_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$y_{n+2} = 6 \cdot y_{n+1} - y_n.$$

Wir verallgemeinern diese Vorgehensweise und finden die Rekursionsvorschrift wie folgt:

$$x_{n+1} = x_0 \cdot x_n + 2 \cdot y_0 \cdot y_n,$$
$$y_{n+1} = y_0 \cdot x_n + x_0 \cdot y_n.$$

Aus diesem Gleichungssystem wird zunächst y_n eliminiert und wir erhalten

$$x_0 \cdot x_{n+1} - 2 \cdot y_0 \cdot y_{n+1} = (x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot x_n.$$

Setzen wir nun für $2 \cdot y_0 \cdot y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - x_0 \cdot x_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$x_{n+2} = 2 \cdot x_0 \cdot x_{n+1} - (x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot x_n.$$

Nun wird x_n eliminiert. Dies führt zu

$$y_0 \cdot x_{n+1} - x_0 \cdot y_{n+1} = -(x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot y_n.$$

Setzen wir nun für $y_0 \cdot x_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $y_{n+2} - x_0 \cdot y_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$y_{n+2} = 2 \cdot x_0 \cdot y_{n+1} - (x_0^2 - 2 \cdot y_0^2) \cdot y_n.$$

Setzen wir das oben gefundene zweite Lösungspaar ein, führt dies zu

$$x_{n+2} = 34 \cdot x_{n+1} - 91 \cdot x_n,$$
$$y_{n+2} = 34 \cdot y_{n+1} - 91 \cdot y_n.$$

Offensichtlich sind beide Rekursionsformel nicht gleichwertig. Wie können wir sichern, alle Lösungen zu finden? Um dies zu untersuchen, definieren wir:

Eine Lösung $(x_0; y_0)$ der PELLschen Gleichung wird minimale Lösung genannt, wenn sie für alle Lösungen $(x; y)$ die Ungleichung

$$x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A} \leq x + y \cdot \sqrt{A}$$

erfüllt ist.

Die minimale Lösung ist eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei minimale Lösungen $(x_{01}; y_{01})$ und $(x_{02}; y_{02})$, so wäre

$$x_{01} + y_{01} \cdot \sqrt{A} = x_{02} + y_{02} \cdot \sqrt{A},$$
$$x_{01} - x_{02} = \sqrt{A} \cdot (y_{02} - y_{01}).$$

Auf der rechten Seite steht aber für $y_{01} \neq y_{02}$ eine irrationale Zahl, im Widerspruch zur rationalen Zahl auf der linken Seite. Folglich müssen $y_{01} = y_{02}$ übereinstimmen und damit auch $x_{01} = x_{02}$.

Wenn nun $(x'; y')$ eine weitere, nicht nach obigen Konstruktionsprinzip auffindbare Lösung der PELLschen Gleichung wäre, gilt also für alle natürlichen Zahlen n

$$x' + y' \cdot \sqrt{A} \neq \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n.$$

Aus der Minimalität von $(x_0; y_0)$ folgt

$$1 < x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A} < x' + y' \cdot \sqrt{A},$$

also gibt es einen Exponenten k mit

$$\left(x_0 + y_0.\sqrt{A}\right)^k < x' + y' \cdot \sqrt{A} < \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^{k+1}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungskette mit $\left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^k$, finden wir eine weitere Lösung $(x''; y'')$, wenn wir in folgender Ungleichungskette das mittlere Produkt ausmultiplizieren und die rationalen und irrationalen Summanden wieder entsprechend zusammenfassen.

$$1 < x'' + y'' \cdot \sqrt{A} = (x' + y' \cdot \sqrt{A})\left(x_0 - y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^k < 1 \cdot \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right).$$

Leicht überzeugen wir uns, dass $(x''; y'')$ tatsächlich die PELLsche Gleichung erfüllt:

- Sind x'' und y'' positiv, so ist aus der letzten Ungleichung bereits ein Widerspruch zur Minimalität von $(x_0; y_0)$ gegeben.

- Keine der Zahlen kann 0 sein, weil daraus entweder $-A \cdot y'^2 < 0$ oder $x'^2 = 1$ folgen würde. Beide Zahlen können aber auch nicht gleichzeitig negativ sein (wegen der linken Seite der letzten Ungleichungskette).

- Verbleiben noch folgende Fälle, die analysiert werden müssen:

$$x'' < 0 < y'' \quad \Rightarrow \quad x'' + y'' \cdot \sqrt{A} < -x'' + y'' \cdot \sqrt{A}$$
$$y'' < 0 < x'' \quad \Rightarrow \quad x'' + y'' \cdot \sqrt{A} < x'' - y'' \cdot \sqrt{A}$$

also

$$1 < x'' + y'' \cdot \sqrt{A} < \left|x'' - y'' \cdot \sqrt{A}\right|$$
$$\Rightarrow \quad 1 < \left|\left(x'' + y'' \cdot \sqrt{A}\right) \cdot \left(x'' - y'' \cdot \sqrt{A}\right)\right| = 1$$

Dieser Widerspruch (1 < 1) zeigt, dass das Paar $(x'';y'')$ aus positiven ganzen Zahlen tatsächlich alle Bedingungen einer Lösung der PELLschen Gleichung erfüllt und zudem eine neue minimale Lösung wäre.

Also hat man mit dem obigen Verfahren, ausgehend von der minimalen Lösung, alle unendlich vielen Lösungen gefunden.

Hinweis: Für jede positive Nichtquadratzahl A existieren Lösungen, und diese können mittels Kettenbrüche konstruktiv angegeben werden.

Verallgemeinern wir die PELLsche Gleichung zu $x^2 - A \cdot y^2 = C$ mit ganzahligem C, so hängt die Existenz von Lösungen vom Wert C ab. Während beispielsweise (10 ; 7) eine Lösung der Gleichung $x^2 - 2 \cdot y^2 = 2$, gibt es für $x^2 - 2 \cdot y^2 = 3$ keine Lösungen. Die Unlösbarkeit folgt aus den Restklassen bei Division durch 3:

- Wären nämlich x und y beide durch 3 teilbar, so ist die linke Seite – im Widerspruch zur rechten Seite – sogar durch 9 teilbar.
- Wäre nur eine Zahl x oder y durch 3 teilbar, muss auch die andere Zahl durch 3 teilbar sein. Sind aber beide Zahlen nicht durch 3 teilbar, so ergibt sich ein Widerspruch, weil die Quadrate dann jeweils den Rest 1 bei Division durch 3 lassen.

Wenn es aber eine Lösung gibt, so finden wir sogar unendlich viele Lösungen, indem wir die spezielle Lösung $(x_c; y_c)$ der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = C$ mit den allgemeinen Lösungen der PELLschen Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$ kombinieren:

$$\left(x_C + y_C \cdot \sqrt{A}\right) \cdot \left(x_0 + y_0 \cdot \sqrt{A}\right)^n.$$

Für jede natürliche Zahl n finden wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rationalen und irrationalen Summanden eine Lösung der verallgemeinerten PELLschen Gleichung.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Über Zahlen, die Aggregate zweier Quadrate sind[10]

LEONHARD EULER

§1 Die Natur der Zahlen pflegen die Arithmetiker auf mehrere Arten zu erforschen, während sie deren Ursprung entweder durch Addition oder durch Multiplikation

[10] _Originaltitel: „De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum“, erstmals publiziert in „Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 4, 1758, pp. 3-40“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 2, pp. 295 - 327“ und Commentat. arithm. 1, 1849, pp. 155-173 [E228b]“, Eneström Nummer E228, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Jens Becker, im Rahmen des Hauptseminars „Euler“ 2013/14

darstellen. Von der ersten Art ist ohne Zweifel die einfachste Zusammensetzung die aus Einheiten, nach welcher alle ganzen Zahlen durch die Aggregation von Einheiten zu entspringen aufgefasst werden. Dann können Zahlen auch so betrachtet werden, wie sie aus der zweier oder mehrerer ganzer Zahlen entstehen, worauf sich das Problem über die Partition von Zahlen bezieht, dessen Lösung ich vor nunmehr einigen Jahren dargelegt habe, in welchem gesucht wird, auf wie viele verschiedene Weisen jede beliebige vorgelegte Zahl durch Addition zweier oder mehrerer kleinerer Zahlen resultieren kann. Hier aber habe ich beschlossen, die Zusammensetzung von Zahlen zu betrachten, mit welcher sie durch Addition zweier Quadrate hervorgehen; und weil auf diese Weise nicht alle Zahlen entspringen, weil die Menge dieser riesig ist, die durch Addition zweier Quadrate nicht hervorgebracht werden können, möchte ich die Natur und Eigenschaften derer, die Summen zweier Quadrate sind, hier untersuchen. Auch wenn viele dieser Eigenschaften schon erkannt und quasi durch Induktion gefunden worden sind, sind sie dennoch zum größten Teil nicht mit strengen Beweisen untermauert; weil ein nicht zu verachtender Teil der Diophant'schen Analysis auf deren Gültigkeit gestützt ist, werde ich in dieser Abhandlung den Beweis vieler dieser Eigenschaften, die bis jetzt ohne Beweise zugelassen worden sind, geben, zugleich werde ich aber auch mitteilen, was es mir freilich immer noch nicht zu beweisen möglich gewesen ist, auch wenn wir über deren Gültigkeit in keinster Weise zweifeln können.

§2 Zuerst wird es also, weil die Quadratzahlen sind: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196 etc. förderlich sein, diese Zahlen, die aus der Kombination zweier Quadrate entspringen, angeschaut zu haben, welche ich deshalb bis hinzu 200 hier aufführe: 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 121, 122, 125, 128, 130, 136, 137, 144, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, 162, 164, 169, 170, 173, 178, 180, 181, 185, 193, 194, 196, 197, 200

Dies sind natürlich alle Zahlen bis hin zu 200, die aus der Addition zweier Quadrate hervorgehen, und diese Zahlen mit allen ins Unendliche folgenden werde ich als die Summen zweier Quadrate bezeichnen, welche deshalb in dieser allgemeinen Formal $xx + yy$ erfasst zu werden offenbar ist, während für x und y nacheinander alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. eingesetzt werden. Welche Zahlen also in diesen nicht aufgefunden werden, die sind nicht Summen zweier Quadrate; diese sind also bis hin zu 200: 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 75, 76, 77, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 99, 102, 103, 105, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 147, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 158, 159, 161, 163, 165,

166, 167, 168, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 179, 182, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 198, 199.

Daher tritt klar zutage, dass zumindest bis 200 die Menge der Zahlen, die nicht Summen zweier Quadrate sind, größer ist als die derer, die Summen zweier Quadrate sind. Im Übrigen wird dem Betrachtenden sofort klar werden, dass keine der beiden Reihen dieser Zahlen in einem bestimmten und angebbaren Gesetz enthalten sind und es deswegen selbst schwierig sein wird, die natürliche Beschaffenheit jeder der beiden zu untersuchen.

§3 Weil jede Quadratzahl entweder gerade und in diesem Fall durch 4 teilbar und in dieser Form $4a$ enthalten ist, oder ungerade und in diesem Fall in dieser Form $8b + 1$ enthalten ist, wird jede aus zwei Quadraten zusammengesetzte Zahl sein: Entweder erstens die Summe zweier gerader Quadrate und sich auf diese Form $4a + 4b$ beziehen und also durch 4 teilbar sein; oder zweitens die Summe zweier Quadrate, eines geraden und eines ungeraden, und deshalb in einer Form dieser Art $4a + 8b + 1$ oder in dieser $4a + 1$ enthalten sein; sie wird also ein Vielfaches von vier um die Einheit überschreiten; oder drittens die Summe zweier ungerader Quadrate und wird deshalb von dieser Form $8a + 1 + 8b + 1$ sein oder in dieser $8a + 2$ enthalten sein; sie wird natürlich eine verdoppelte ungerade Zahl sein und um zwei ein Vielfaches von acht übersteigen.

Weil also alle ungerade Zahlen entweder um die Einheit ein Vielfaches von vier übersteigen oder von dieser Form sind $4n + 1$, oder um die Einheit nach unten von einem Vielfachen von vier abweichen oder von dieser Form sind $4n - 1$, tritt es klar zutage, dass keine ungeraden Zahlen von dieser zweiten Form $4n - 1$ die Summen zweier Quadrate sind; oder aus der Reihe der Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, werden alle in dieser Form $4n - 1$ enthaltenen Zahlen ausgeschlossen.

Weil des Weiteren alle verdoppelten ungeraden Zahlen entweder um zwei ein Vielfaches von acht übersteigen, dass sie $8n + 2$ sind, oder um zwei von einem Vielfachen von acht nach unten abweichen, dass sie $8n - 2$ sind, tritt es klar zutage, dass keine Zahlen dieser letzten Form Summen zweier Quadrate sind; und so werden aus der Reihe der Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, die Zahlen von dieser Form ausgeschlossen $8n - 2$.

Dennoch ist indess sorgfältig zu bemerken, dass weder alle in dieser Form $4n + 1$ noch die in dieser $8n + 2$ enthaltenen die Summe zweier Quadrate sind. Von jener Form werden nämlich die Zahlen 21, 33, 48, 69, 77, 93, 105, 129 etc. ausgeschlossen, von dieser hingegen diese 42, 66, 114, 138, 154 etc., deren Beschaffenheit später untersucht werden wird.

§4 Dennoch sind indess die Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, so mit einem gewissen Zusammenhang miteinander verbunden, dass aus einer einzigen Zahl von

dieser natürlichen Beschaffenheit unendlich viele andere derselben Natur angegeben werden können. Damit dies leichter erkannt wird, möchte ich die folgenden Lemmata, die freilich für gewöhnlich hinreichend bekannt sind, hinzufügen.

I. Wenn die Zahl p die Summe zweier Quadrate ist, werden auch die Zahlen $4p$, $9p, 16p$ und allgemein nnp Summen zweier Quadrate sein. Weil nämlich $p = aa + bb$ ist, wird sein $4p = 4aa + 4bb, 9p = 9aa + 9bb, 16p = 16aa + 16bb$ und $nnp = nn(aa + bb)$ welche Formen gleichermaßen Summen zweier Quadrate sind.

II. Wenn die Zahl p die Summe zweier Quadrate ist, wird auch $2p$ und allgemein $2nnp$ die Summe zweier Quadrate sein.
Es sei nämlich $p = aa + bb$; es wird $2p = 2aa + 2bb$ sein. Aber es ist

$$2aa + 2bb = (a + b)^2 + (a - b)^2 \qquad (1)$$

woher sein wird

$$2p = (a + b)^2 + (a - b)^2 \qquad (2)$$

und deshalb die Summe zweier Quadrate. Daher wird in der Tat weiter sein

$$2nnp = nn(a + b)^2 + nn(a - b)^2 \qquad (3)$$

III. Wenn die Zahl $2p$ die Summe zweier Quadrate war, wird auch ihre Hälfte p die Summe zweier Quadrate sein. Es sei nämlich $2p = aa + bb$; es wird jede der beiden Zahlen a und b entweder gerade oder ungerade sein, woher in jedem der beiden Fälle so $\frac{a+b}{2}$ wie $\frac{a-b}{2}$ eine ganze Zahl sein wird. Es ist in der Tat

$$aa + bb = 2 \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

nach Einsetzen welches Wertes wird

$$p = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

Daher werden also alle geraden Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, durch wiederholte Zweiteilung schließlich auf ungerade Zahlen derselben Gestalt zurückgeführt werden. Wenn umgekehrt allein ungerade Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, erkannt werden, werden aus ihnen auch alle geraden Zahlen durch wiederholte Verdopplung deriviert werden.

§5 Des Weiteren ist das folgende Theorem des Merkens würdig, mit welchem die Natur der Zahlen, die Summen zweier Quadrate sind, nicht unwesentlich ans Licht gebracht werden.

Theorem. Wenn p und q zwei Zahlen sind, von denen jede der beiden die Summe zweier Quadrate ist, wird auch deren Produkt pq die Summe zweier Quadrate sein.

Beweis. Es sei $p = aa + bb$ und $q = cc + dd$; es wird sein

$$pq = (aa + bb)(cc + dd) = aacc + aadd + bbcc + bbdd \qquad (6)$$

welcher Ausdruck auf diese Weise dargestellt werden kann, dass ist

$$pq = aacc + 2abcd + bbdd + aadd - 2abcd + bbcc \qquad (7)$$

und daher

$$pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \qquad (8)$$

welcher das Produkt pq, die Summe zweier Quadrate sein wird. QED

Aus dieser Proposition folgt, auf welche Weise auch immer mehrere Zahlen, welche einzelnen die Summen zweier Quadrate seien, miteinander multipliziert werden, dass die Produkte immer die Summen zweier Quadrate sind. Und aus dieser angegebenen allgemeinen Form tritt es klar zutage, dass ein Produkt aus zwei Zahlen dieser Art auf zwei Weisen in zwei Quadrate aufgelöst werden kann. Wenn nämlich $p = aa + bb$ und $q = cc + dd$ ist, wird so

$$pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \qquad (9)$$

wie sein

$$pq = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \qquad (10)$$

welche Formeln verschieden sein werden, wenn nicht entweder $a = b$ oder $c = d$ ist. Weil $5 = 1 + 4$ und $13 = 4 + 9$ ist, wird das Produkt auf zwei Arten die Summe zweier Quadrate sein, es wird natürlich sein

$$65 = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 = 49 + 16 \qquad (11)$$

und

$$65 = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 = 1 + 64 \qquad (12)$$

Und wenn man ein Produkte aus mehreren Zahlen hat, welche einzelnen die Summen zweier Quadrate seien, wird es auf mehrere Arten in zwei Quadrate aufgelöst werden können. Wie wenn die Zahl $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ vorgelegt wird, werden ihre Auflösungen in zwei Quadrate diese sein

$$1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2 \qquad (13)$$

Hier haben natürlich vier Auflösungen Geltung.

§6 Obwohl aber so dargetan worden ist, wenn die Faktoren p und q Summen zweier Quadrate sind, dass auch das Produkt pq die Summe zweier Quadrate sein wird, folgt

dennoch die Umkehrung dieser Proposition nicht, dass, wenn das Produkt die Summe zweier Quadrate ist, auch ihre Faktoren Zahlen von derselben Natur sind; denn diese Schlussfolgerung würden weder die Regeln der Logik noch die Natur der Sache selbst billigen. Denn die Zahl $45 = 36 + 9$ ist die Summe zweier Quadrate, dennoch ist keiner von beiden dieser Faktoren von ihr 3, 15 die Summe zweier Quadrate. Solider mag diese Schlussfolgerung scheinen: Wenn das Produkt pq und der eine der beiden ihrer Faktoren p die Summen zweier Quadrate waren, dass dann auch der andere Faktor q die Summe zweier Quadrate sein wird. Obgleich aber diese Schlussfolgerung zufällig wahr ist, wird sie dennoch mit den Regeln das logischen Schließens nicht bestätigt, denn es kann nicht, weil bewiesen worden ist, wenn die beiden Faktoren p und q des Produktes pq Summen zweier Quadrate sind, dass pq selbst eine Summe zweier Quadrate ist, daher die legitime Konsequenz gezogen werden: Wenn sowohl das Produkt pq als auch der eine Faktor p Summe zweier Quadrate sind, dass auch der andere Faktor q eine Summe zweier Quadrate sein wird. Dass nämlich eine logische Folgerung dieser Art nicht legitim ist, wird auch dieses Beispiel ersichtlich dartun: Es ist gewiss, wenn die zwei Faktoren p und q gerade Zahlen sind, dass auch das Produkt pq eine gerade Zahl sein wird; wenn jemand aber daher folgern will, wenn das Produkt pq und der eine Faktor gerade sind, dass auch der andere Faktor q gerade sein wird, würde er sich gewaltig täuschen.

Monatsaufgabe 01/2026[11]

Man bestimme die zwei kleinsten natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die es positive natürliche Zahlen a und b gibt, so dass folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2 \,.$$

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/2025

Es wird nach folgender Vorschrift einer Ziffernfolge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ gebildet:

Die erste Ziffer sei $a_1 = 2$, und die zweite Ziffer sei $a_2 = 3$. Aus dem Produkt $a_1 \cdot a_2 = 6$ folgt als dritte Ziffer $a_3 = 6$. Da $a_2 \cdot a_3 = 18$ ist, seien die vierte Ziffer $a_4 = 1$ und die fünfte Ziffer $a_5 = 8$. Nun wird wegen $a_3 \cdot a_4 = 6$ und $a_4 \cdot a_5 = 8$ werden $a_6 = 6$ und $a_7 = 8$ festgelegt. Bislang lautet die Folge also

$$\underbrace{2}\ \underbrace{3}\ \underbrace{6}\ \underbrace{1}\ 8\ \ 6\ \ 8$$

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.03.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Die geschweiften Klammern deuten an, welche Produkte bereits ausgeführt wurden. Nun wäre das Produkt $8 \cdot 6 = 48$ zu bilden und die Folge mit den Ziffern 4 und 8 fortzusetzen. Diese Vorschrift lässt sich beliebig fortsetzen.

Man untersuche, ob in dieser Folge die Ziffer 5 auftritt!

Lösungshinweise: Wir erkennen, dass eine ungerade Ziffer nur zwischen zwei geraden Ziffern auftreten kann. Wären nämlich c und d zwei aufeinanderfolgende ungerade Ziffern der Folge, so ist entweder c oder d die Einerstelle des Produktes zwei (vorhergehender) Ziffern a und b. Diese Einerstelle ist nur dann ungerade, wenn a und b beide ebenfalls ungerade sind. Setzen wir diese Schlussweise fort, müssten unter den ersten drei Ziffern dieser Folge bereits zwei aufeinanderfolgende ungerade Ziffern sein. Da dies nicht der Fall ist, ist die Annahme falsch und eine ungerade Ziffer kann nur zwischen zwei geraden Ziffern stehen.

Da nun eine ungerade Ziffer aus den Ziffern des Produktes zweier nebeneinander stehender Ziffern entsteht, kann sie nur die Zehnerstelle eines solchen Produktes sein. Damit kommt aber die Ziffer 9 in dieser Folge nicht vor, da das Produkt zweier einstelligen Zahlen stets kleiner als 90 ist. Damit kommt aber auch die Ziffer 7 in dieser Folge nicht vor, weil die Zehnerstell 7 nur im Produkt $8 \cdot 9 = 72$ auftreten kann. Schließlich sind damit auch die Produkte $7 \cdot 8 = 56, 6 \cdot 9 = 54$ nicht möglich. Also gibt es auch kein Produkt aus zwei einstelligen Zahlen dieser Folge, bei denen die Zehnerstelle 5 beträgt.

Somit kann die Ziffer 5 in dieser Folge nicht auftreten. ❑

Rückblick: Thema 1 – Funktionalgleichungen[12]

Aufgabe 01.01 – MO601016. Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen *x* und *y* eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür *z = x # y*. (Die Zahl *z* wird also mit Hilfe einer Formel aus *x* und *y* berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung

$$a + (b \# c) = (a \# b) + (a \# c) \qquad (1)$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für *x # y* an, die nur die vier Grundrechenarten +, −, ·, : als Rechenarten verwendet, sodass (1) erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.

[12] s. Hefte 09/2020, 01/2021 und 09/2021

b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von # die Formel aus a).

Statt des allgemeinen Symbols # hätte auch eine Funktion *f* verwendet werden können, die zwei rationalen Zahlen *x* und *y* einer rationalen Zahl *z* zuordnet. Dann sind alle Funktionen *f* mit $f(x,y)=z$ für rationale Zahlen *x, y, z* gesucht, die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$a+f(b,c)=f(a,b)+f(a,c).$$

Aufgaben in dieser Schreibweise mit Funktionalgleichungen sind in der MO-Geschichte bereits häufig aufgetreten. Eine Gruppe von Aufgaben beinhaltet die Ermittlung spezieller Funktionswerte. Ziel ist also, die Zusammenhänge aus den Gleichungen für geeignete Argumente auszunutzen. Mit der Formulierung „E sei *f* eine Funktion ...“ wird vorausgesetzt, dass eine solche Funktion überhaupt existiert, d.h., für die Funktion muss keine explizite Darstellung angegeben werden.

Aufgabe 01.02 – MO271042. Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllt:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1^3)+f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1\cdot x_2)=x_1\cdot f(x_2)+x_2\cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f\left(2+\sqrt{5}\right)$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

In der folgenden Aufgabenstellung wird ausdrücklich offengelassen, ob eine Funktion mit diesen Eigenschaften existiert.

Aufgabe 01.03 – MO301044. Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen *x* definierte Funktion *f* so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen *a* und *b* die Gleichung

$f(a)+f(a+b)-f(a-b)=a^2+4b+2$ gilt!

Gibt es eine Lösungsstrategie für solche Aufgaben? Angenommen, es gibt eine Lösung, dann muss eine gegebene Gleichung erst recht für spezielle Belegungen der Veränderlichen gelte. Es kann also hilfreich sein, durch geschickte Wahl der Argumente Eigenschaften der gesuchten Funktionen zu finden, die zur expliziten Form der Lösung führen (können). Wir betrachten folgendes Beispiel.

Aufgabe 01.04. Man finde alle Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x+y)+2\cdot f(x-y)+f(x)+2\cdot f(y)=4\cdot x+y\,.$$

Aufgabe 01.05. Man finde alle Funktionen f mit

a) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2+y^2$
b) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2\cdot xy+y^2$

Natürlich führen solche einfachen Substitutionen nicht immer zum sofortigen Erfolg. Geringe Änderungen in der Funktionalgleichung können beträchtliche Wirkungen haben!

Aufgabe 01.06. Man finde alle reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sei und folgende Gleichung für alle reellen Zahlen x und y erfüllt:

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)-2\cdot f(y)=y-2$$

Aufgabe 01.07 – MO201033. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Es ist $f(1)=1$. (1)
Für jedes $x\neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$. (2)
Für alle x_1, x_2 mit $x_1, x_2, x_1+x_2\neq 0$ gilt $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. (3)

Man beweise, dass für jede Funktion *f*, die diese Voraussetzungen erfüllt, $f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}$ gilt.

Aufgabe 01.08 – MO271042. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$f(x_1+x_2)=f(x_1^3)+f(x_2^3)$ (1)
$f(x_1\cdot x_2)=x_1\cdot f(x_2)+x_2\cdot f(x_1)$ (2)

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Aufgabe 01.09. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für die für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-1 \text{ mit } f(0)=1.$$

Aufgabe 01.10. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen f, die für alle positiven reellen Zahlen definiert sind und für beliebige positive reelle Zahlen x und y die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Aufgabe 01.11. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 7;\ f(1) = 10.$$

Um den Umgang mit Funktionalgleichungen zu vertiefen, betrachten wir die

Definition. Die reelle Funktion $f: R \to R$ heißt periodisch mit der Periode $a \neq 0$, wenn für alle reellen Zahlen $x \in R$ die Gleichung $f(x + a) = f(x)$ erfüllt ist.

Aufgabe 01.12 – MO141232. Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x + p) = \frac{f(x)}{3 \cdot f(x) - 1}$$

a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist.
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an!

Aufgabe 01.13 - MO051222. Es sei a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.
2. Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt $f(x + a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist.
b) Geben Sie für $f(x)$ einen rechnerischen Ausdruck an, der die obigen Eigenschaften hat!

Offensichtlich gilt für periodische Funktionen folgende Eigenschaft: Ist a eine Periode, dann ist $2a$ ebenfalls eine Periode, denn es gilt für alle x

$$f(x + 2a) = f((x + a) + a) = f(x + a) = f(x)$$

Verallgemeinernd gilt sogar

Aufgabe 01.14. Die Zahlen a_1, a_2 seien Perioden der Funktion f. Dann ist für beliebige ganzzahlige Zahlen m und n die Zahl $a_3 = m \cdot a_1 + n \cdot a_2$ ebenfalls eine Periode von f (falls $a_3 \neq 0$).

Termine

65. Mathematik-Olympiade, Runde 3 (Landesrunde) 20. bis 22. Februar 2026.
https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Regionalausscheide Sachsen

Region Nordwestsachsen, 26. Februar 2026, Leipzig, Universität Leipzig/Augusteum, Augustusplatz 10, 04109 Leipzig

Region Ostsachsen, 28. Februar 2026, Dresden, HTWD - Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden, Friedrich-List-Platz 1, 01069 Dresden

Region Südwestsachsen, 6. bis 7. März 2026, solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen, Neefestraße 88, 09116 Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 24.6 – Kombinatorik u. klassische Wahrscheinlichkeit (Nachtrag) 3
Thema 9.5 – Differenzen und Summen von Quadratzahlen 6
Thema 35.2 – DIOPHANTische Gleichungen 9
In alten Mathe-Büchern geblättert 13
Monatsaufgabe 01/2026 18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/2025 18
Rückblick: Thema 1 – Funktionalgleichungen 19
Termine 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[13]	Nr.	Thema	Aufgabe
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015 MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041 MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

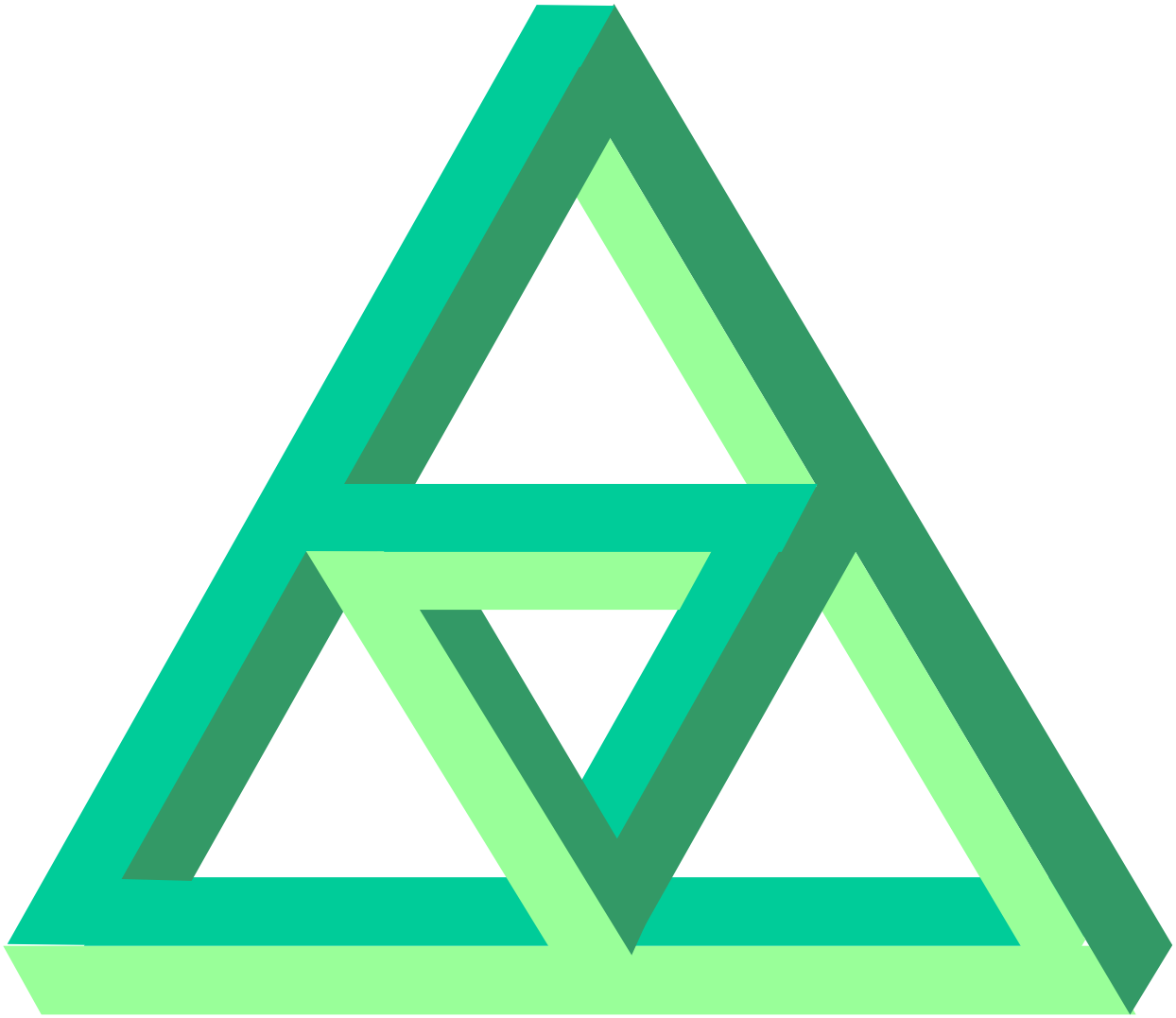
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[13] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 03/2026 (März 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den Aufgaben **MO650921** und **MO651021** der Regionalrunde greifen wir noch einmal ein sehr frühes Thema auf: „Thema 7 – Kryptogramme“. Obwohl solche Aufgaben durch systematisches Probieren gelöst werden und damit in die Unterhaltungsmathematik fallen können, sind sie eine effektive Übung für die Anwendungen von Fallunterscheidungen.

Mit der aktuellen Aufgabe **A4-4** aus dem sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik wiederholen wir das Thema 4.1 „Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung“ aus Heft 03/2021. Anstelle der Berechnung von Längen geeigneter Strecken steht hier der Lösungsansatz im Vordergrund, kongruente Teilflächen zu finden, deren Flächeninhalt ohne rechnerischen Aufwand ermittelt werden kann.

Da die „Mathematischen Kostproben“ die themenbezogene Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe fördern möchte, nehmen wir den 25. Jahrgang zum Anlass, auf zurückliegende Themen hinzuweisen und die zugehörigen Aufgabensammlungen zu wiederholen. Wir setzen dies in diesem Heft mit dem **Thema 7** „Kryptogramme“ aus dem Jahr 2021 fort. Die Lösungen sind in den angegebenen Heften enthalten bzw. werden auf formlose Anfrage per pdf-Dokument zugesandt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 7.3 – Kryptogramm

Aufgabe 7.10 – MO650921/MO651021. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Sterne bei der schriftlichen Multiplikation in der Aufgabe

6	*	*	·	*	*	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	*	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	*

so durch Ziffern von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Rechnung (im Zehnersystem) korrekt ist.

Lösungshinweise: Wir bestimmen Schritt für Schritt mögliche Werte für einzelne der Sterne, wozu wir die Bezeichnungen $a, \ldots, m$ für Ziffern im Zehnersystem einführen. Zunächst ergibt sich aus dem Additionsschema

6	*	*	·	*	*	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	b	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	a

dass $a = 4$ und $b = 8$ gilt, weil dies für $b + 4 = x \cdot 10 + 2$ im Bereich der Ziffern und mit $x \in \{0, 1\}$ die einzige Lösung ist. Im Additionsschema

6	c	d	·	e	f	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	8	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	4

ergibt sich die erste Zeile aus $\overline{6cd} \cdot e$, die zweite aus $\overline{6cd} \cdot f$ und die dritte aus $\overline{6cd} \cdot 8$, da im Multiplikationsschema der Multiplikand (linker Faktor) mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators (rechter Faktor) multipliziert und daraus das Addtionsschema gebildet wird.

Wegen der 4 am Ende der dritten Produktzeile gilt $d = 3$ oder $d = 8$, weil nur $3 \cdot 8 = 24$ und $8 \cdot 8 = 64$ auf 4 enden. Wir betrachten deshalb zwei Fälle.

Fall 1: $d = 3$: Wir setzen die Ziffer ein. Wegen der 8 am Ende der ersten und zweiten Produktzeile folgt $e = 6$ und $f = 6$, weil 18 das einzige Produkt einer Ziffer mit 3 ist, das auf 8 endet. Für die dritte Zeile des Additionsschemas ergibt sich $\overline{6c3} \cdot 8 = \overline{** 44}$, woraus $c = 4$ oder $c = 9$ folgt, denn nur $4 \cdot 8 + 2 = 34$ und $9 \cdot 8 + 2 = 74$ ergeben eine 4 an der Zehnerstelle.

6	c	3	·	e	f	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	8	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	4

Wegen der 8 am Ende der ersten und zweiten Produktzeile folgt $e = 6$ und $f = 6$, weil 18 das einzige Produkt einer Ziffer mit 3 ist, das auf 8 endet. Für die dritte Zeile des Additionsschemas ergibt sich $\overline{6c3} \cdot 8 = \overline{** 44}$, woraus $c = 4$ oder $c = 9$ folgt, denn nur $4 \cdot 8 + 2 = 34$ und $9 \cdot 8 + 2 = 74$ ergeben eine 4 an der Zehnerstelle.

Wegen $643 \cdot 668 = 429\,524$ und $693 \cdot 668 = 462924$ führen aber beide Möglichkeiten auf keine Lösung.

Fall 2: $d = 8$: Wir setzen die Ziffer ein. Wegen der 8 am Ende der ersten und zweiten Produktzeile können e und f nur 1 oder 6 sein. $e = 1$ oder $f = 1$ kommen nicht in Frage, da $\overline{6c8} \cdot 1$ nur dreistellig ist, während die entsprechenden Zeilen im Additionsschema vier Stellen haben. Es gilt also auch in diesem Fall $e = f = 6$.

6	c	8	·	e	f	8
	*	*	*	8		
		4	*	*	8	
+			*	*	4	4
	*	4	*	2	2	4

Um die Zehnerziffer 4 in der dritten Zeile des Additionsschemas zu erhalten, gibt es nur die Möglichkeiten $c = 1$ oder $c = 6$, denn im Schema $\overline{6c8} \cdot 8 = \overline{** 44}$ ergeben nur 1 · 8 + 6 = 14 und 6 · 8 + 6 = 54 eine 4 an der Zehnerstelle.

Im Fall von $c = 1$ erhalten wir 618 · 668 = 412824, was keine Lösung der Aufgabe ist. $c = 6$ dagegen liefert die Lösung 668 · 668 = 446224. Dies ist zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

6	6	8	·	6	6	8
	4	0	0	8		
		4	0	0	8	
+			5	3	4	4
	4	4	6	2	2	4

❑

Lösungsvariante: Wir untersuchen zuerst im Additionsschema das Teilergebnis $\overline{6xy} \cdot 8 = \overline{ab44}$. Da die linke Seite durch 8 teilbar ist, muss b eine ungerade Ziffer sein, weil nach den bekannten Teilbarkeitsregeln für 8 die letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden müssen. Wir formen die Multiplikationsaufgabe zunächst um zu

$$600 \cdot 8 + \overline{xy} \cdot 8 = 1000 \cdot a + \overline{b44}, \text{ also} \qquad \overline{xy} = 125 \cdot a + \overline{b44} : 8 - 600.$$

Wir setzen nun nacheinander die ungeraden Ziffern für b ein und erhalten unter Einhaltung von $0 \leq \overline{xy} < 99$ folgende Aussagen.

$b = 1$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 18 - 600 = 125 \cdot a - 582$ ist nur für $a = 5$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 43$ und $643 \cdot 8 = 5144$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	4	3	·	*	1	8
	4	*	*	8		
		c	d	3	8	
+			5	1	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, müsste $b = 6$ gelten. Jedoch gilt $643 \cdot 3 = 1829 \neq \overline{cd38}$.

$b = 3$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 43 - 600 = 125 \cdot a - 557$ ist nur für $a = 5$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 68$ mit $668 \cdot 8 = 5344$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	6	8	·	*	3	8
	4	*	*	8		
		c	d	0	8	
+			5	3	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, muss $b = 1$ oder $b = 6$ gelten. Wegen $668 \cdot 1 < 1000$ entfällt diese Lösung. Dagegen gilt $668 \cdot 6 = 4008$.

$b = 5$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 68 - 600 = 125 \cdot a - 532$ ist nur für $a = 5$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 93$ mit $693 \cdot 8 = 5544$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	9	3	·	*	b	8
	4	*	*	8		
		c	d	8	8	
+			5	5	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, muss $b = 6$ gelten. Jedoch führt dies zu keiner Lösung, denn es gilt $693 \cdot 6 = 4158 \neq \overline{cd88}$.

$b = 7$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 93 - 600 = 125 \cdot a - 507$ ist für keine ganze Zahl erfüllbar.

$b = 9$: $\overline{xy} = 125 \cdot a + 118 - 600 = 125 \cdot a - 482$ ist nur für $a = 4$ erfüllbar, d.h. $\overline{xy} = 18$ mit $618 \cdot 8 = 4944$. Es folgt daraus für die Aufgabe

6	1	8	·	*	b	8
	4	*	*	8		
		c	d	4	8	
+			4	9	4	4
	*	4	*	2	2	4

Damit das mittlere Produkt auf 8 endet, muss $b = 1$ oder $b = 6$ gelten. Wegen $18 \cdot 1 < 1000$ entfällt die Lösung mit b=1. Außerdem gilt $618 \cdot 6 = 4928 \neq \overline{cd48}$.

Folglich kann es nur eine Lösung geben, in der nun nur die folgenden Sternchen verbleiben:

6	6	8	·	*	6	8
	4	*	*	8		
		4	0	0	8	
+			5	3	4	4
	*	4	*	2	2	4

Aufgrund des mittleren Produktes finden wir unmittelbar eine Lösung der Aufgabe:

6	6	8	·	6	6	8
	4	0	0	8		
		4	0	0	8	
+			5	3	4	4
	4	4	6	2	2	4

Eine weitere Lösung kann es aber nicht geben, da der zweite Faktor wegen $668 \cdot 1 < 1000$ nicht mit 1 beginnen kann und für andere Hunderterziffer das erste Produkt nicht auf 8 endet.

Als erste Aufgabe dieses Typs in den Mathematik-Olympiaden finden wir bereits eine Aufgabe zur VIII. MO 1968.

Aufgabe 7.11 – MO081014. In

1	*	*	·	*	*
	*	*	*	1	
		*	*	*	1
	*	*	*	1	*

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Lösungshinweise: Wir können aufgrund des Verfahrens der schriftlichen Addition am rechten Rand das Schema unmittelbar ergänzen und setzen anstelle der Sternchen schrittweise Buchstaben, um die Zwischenschritte anschaulich erklären zu können.

1	a	b	·	c	d
	e	f	g	1	
		h	i	0	1
	*	*	*	1	1

Offenbar müssen im unteren Zwischenprodukt $\overline{1ab} \cdot d = \overline{hi01}$ die Ziffern b und d ungerade sein, damit das Produkt ungeradzahlig wird. Es gibt nur vier Paare von ungeraden Ziffern, deren Produkt auf 1 endet. Wir untersuchen also vier Fälle.

Fall 1: $b = 1$ und $d = 1$, also $\overline{1a1} \cdot 1 = \overline{hi01}$. Dies führt zu $a = 0$ und damit $h = 0$ und $i = 1$, also zu

1	0	1	·	c	1
	e	f	g	1	
		0	1	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Zwischenprodukt müssen wir die Aufgabe $101 \cdot c = \overline{efg}1$ lösen. Wir erkennen wegen der Einerziffern unmittelbar $f = 1$ und damit eine Lösung des Kryptogramms:

1	0	1	·	1	1
	0	1	0	1	
		0	1	0	1
	0	1	1	1	1

Fall 2: $b = 3$ und $d = 7$ hat das Kryptogramm die Darstellung

1	a	3	·	b	7
	c	d	e	1	
		f	g	0	1
	*	*	*	1	1

Für das untere Zwischenprodukt müssen wir also $\overline{1a3} \cdot 7 = \overline{fg01}$ lösen. Wegen $3 \cdot 7 = 21$ muss das Produkt $a \cdot 7$ auf 8 enden, was auf $a = 4$ führt. Wir erhalten also 143 · 7 = 1001 und somit

1	4	3	·	b	7
	c	d	e	1	
		1	0	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Produkt suchen wir nun Belegungen der Buchstaben in $143 \cdot b = \overline{cde}1$, woraus unmittelbar $d = 7$ und somit in Analogie zum unteren Produkt eine weitere Lösung gefunden wird:

1	4	3	·	7	7
	1	0	0	1	
		1	0	0	1
	1	1	0	1	1

Fall 3: b = 7 und *d* = 3 mit dem Kryptogramm

1	a	7	·	b	3
	c	d	e	1	
		f	g	0	1
	*	*	*	1	1

Für das untere Zwischenprodukt müssen wir also $\overline{1a7} \cdot 3 = \overline{fg01}$ lösen. Wegen $3 \cdot 7 = 21$ muss das Produkt $a \cdot 3$ auf 8 enden, was auf $a = 6$ führt. Wir erhalten also $167 \cdot 3 = 0501$ und somit

1	6	7	·	b	3
	c	d	e	1	
		0	5	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Produkt suchen wir nun Belegungen der Buchstaben in $167 \cdot b = \overline{cde1}$, woraus unmittelbar $b = 3$ und somit in Analogie zum unteren Produkt eine weitere Lösung gefunden wird:

1	6	7	·	3	3
	0	5	0	1	
		0	5	0	1
	0	5	5	1	1

Fall 4: b = 9 und *d* = 9 mit dem Kryptogramm

1	a	9	·	b	9
	c	d	e	1	
		f	g	0	1
	*	*	*	1	1

Für das untere Zwischenprodukt müssen wir also $\overline{1a9} \cdot 9 = \overline{fg01}$ lösen. Wegen $9 \cdot 9 = 81$ muss das Produkt $a \cdot 9$ auf 2 enden, was auf $a = 8$ führt. Wir erhalten also $189 \cdot 9 = 1701$ und somit

1	8	9	·	b	9
	c	d	e	1	
		1	7	0	1
	*	*	*	1	1

Für das obere Produkt suchen wir nun Belegungen der Buchstaben in $189 \cdot b = \overline{cde1}$, woraus unmittelbar $b = 9$ und somit in Analogie zum unteren Produkt eine weitere Lösung gefunden wird:

1	8	9	·	9	9
	1	7	0	1	
		1	7	0	1
	1	8	7	1	1

Wir haben also insgesamt vier Lösungen gefunden:

$101 \cdot 11 = 01111, 143 \cdot 77 = 11011, 167 \cdot 33 = 05511$ und $189 \cdot 99 = 18711$.

❑

Aufgabe 7.12 – MO451044. In jeder der folgenden beiden Summen sind die Sterne * durch die Ziffern 1 bis 9 so zu ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal benutzt wird und eine korrekte Rechnung entsteht. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl aller Lösungen!

	*	*	*				*	*	*
+	*	*	*			+	*	*	*
+	*	*	*			+	*	*	*
=	9	9	9			1	0	0	0

Hinweis: Aufgrund der Forderung, jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal zu verwenden, wird diese Sternchen-Aufgabe zu einem Kryptogramm im engeren Sinne, weil verschieden Buchstaben dann auch verschiedene Zahlen bedeuten.

Lösungshinweise: Der Unterscheidbarkeit wegen ersetzen wir die Sterne durch Variablen:

	a	b	c				a	b	c
+	d	e	f			+	d	e	f
+	g	h	i			+	g	h	i
=	9	9	9			1	0	0	0

Zur linken Summe: O.B.d.A. legen wir $a > d > g$, $b > e > h$ und $c > f > i$ fest, da Vertauschen der Ziffern innerhalb einer Spalte am Endergebnis der Summe nichts ändert. Alle übrigen Lösungen der Aufgabe ergeben sich aus so einer Lösung, indem wir die Ziffern geeignet innerhalb der Spalten vertauschen. Für das Vertauschen der Ziffern innerhalb einer Spalte gibt es 6 = 3 · 2 · 1 Möglichkeiten, insgesamt erzeugt jede Lösung somit 216 = 6 · 6 · 6 verschiedene Lösungen der Aufgabe.

Addieren wir die linke Summe per Hand, so ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

rechte Spalte: $c + f + i = 10 \cdot \ddot{u}_1 + 9$
mittlere Spalte: $b + e + h + \ddot{u}_1 = 10 \cdot \ddot{u}_2 + 9$
linke Spalte: $a + d + g + \ddot{u}_2 = 9$

mit geeigneten Überträgen $\ddot{u}_1$und $\ddot{u}_2$. Es gilt $\ddot{u}_1 \leq 1$ und $\ddot{u}_2 \leq 1$:

Angenommen, es wäre $\ddot{u}_2 \geq 2$. Dann gilt

$$24 = 9 + 8 + 7 \geq c + f + i = 10 \cdot \ddot{u}_1 + 9 \geq 10 \cdot 2 + 9 = 29$$

was einen Widerspruch darstellt. Also ist $\ddot{u}_1 \leq 1$.

Angenommen, es wäre $\ddot{u}_2 \geq 2$. Dann gilt

$$25 = 9 + 8 + 7 + 1 \geq b + e + h + \ddot{u}_1 = 10 \cdot \ddot{u}_2 + 9 \geq 29,$$

was einen Widerspruch darstellt. Also ist $\ddot{u}_2 \leq 1$.

Es gilt sogar $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = 1$, denn Addition der obigen drei Gleichungen liefert

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+\ddot{u}_1+\ddot{u}_2 = 27+10\cdot(\ddot{u}_1+\ddot{u}_2),$$

also $45 = 27+9\cdot(\ddot{u}_1+\ddot{u}_2)$, da die Summe der Zahlen 1, 2, …, 9 genau 45 beträgt. Also gilt $\ddot{u}_1+\ddot{u}_2 =$2, und wegen $\ddot{u}_1, \ddot{u}_2 \leq 1$ folgt daher $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = 1$.

Lösungen der linken Summe genügen also immer den Gleichungen

$$a+b+c = 19,$$
$$d+e+f = 18,$$
$$g+h+i = 8.$$

Unter Beachtung der festgelegten Monotonie liefert gezieltes Probieren für das Tripel (a,d,g) nur die Möglichkeiten (5, 2, 1) und (4, 3, 1). Daraus ergeben sich nun leicht genau fünf Grundlösungen bis auf Vertauschungen innerhalb der Spalten:

5 9 8 + 2 6 7 + 1 3 4 = 9 9 9
5 8 9 + 2 7 6 + 1 3 4 = 9 9 9
5 8 9 + 2 6 7 + 1 4 3 = 9 9 9
4 9 8 + 3 7 6 + 1 2 5 = 9 9 9
4 7 9 + 3 6 8 + 1 5 2 = 9 9 9

Durch unabhängiges Vertauschen der Ziffern in jeder der drei Spalten können aus jeder Grundlösung jeweils $6^3 = 216$ paarweise verschiedene Lösungen der Aufgabe erzeugt werden. Somit besitzt die Aufgabe $5\cdot 216 = 1080$ Lösungen.

Zur rechten Summe: Wir untersuchen die Reste der Summenden bei Division durch 9. Schreiben wir $\overline{xyz}$ für die Zahl $100x+10y+z$ und $Q(w)$ für die Quersumme einer Zahl w, so lässt die Summe der drei Zahlen bei Division durch 9 den Rest

$$Q\left(\overline{abc}\right)+Q\overline{(dfe)}+Q\left(\overline{ghı}\right) = a+b+c+d+e+f+g+h+i =$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$$

also den Rest 0. Das ist offensichtlich ein Widerspruch, da $1000 = 9\cdot 111+1$ bei Division durch 9 den Rest 1 lässt. Somit besitzt die gestellte Aufgabe keine Lösungen. ❑

Aufgabe 7.13 – MO561013. In der Gleichung * * * * * – * * * * * = 2017 Ist jeder Stern so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sterne dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Die Ziffer Null darf nicht an erster Stelle einer Zahl stehen.

a) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
b) Beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt, wenn man 2017 durch 2016 ersetzt.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen im Folgenden mit $\overline{abcde}$ die Zifferndarstellung einer fünfstelligen Zahl der Form $10000a+1000b+100c+10d+e$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a). Wir untersuchen die Aufgabe

$$\overline{abcde} - \overline{fghıȷ} = 2017,$$

wobei jeder Buchstabe eine Ziffer bezeichnet und alle Ziffern paarweise verschieden sind. Da die Differenz kleiner als 10000 ist, folgt $a = f + 1$. Dann verbleibt als Subtraktionsaufgabe

$$\overline{ghıȷ} - \overline{bcde} = 10000 - 2017 = 7983.$$

Das ist nur möglich, wenn $g - b = 7$ oder $g - b = 8$ gilt. Aus $g - b = 7$ würde $g \geq 7$ und $\overline{hıȷ} - \overline{cde} = 983$ gelten. Dies ist jedoch nicht möglich, weil $\overline{hıȷ} < 987$ und $\overline{cde} \geq 012$ erfüllt ist. Somit muss $g - b = 8$ gelten. Dafür finden wir die zwei Möglichkeiten $g = 8$ und $b = 0$ sowie $g = 9$ und $b = 1$.

In jedem Fall gilt $\overline{cde} - \overline{hıȷ} = 1000 - 983 = 17$. Wegen $0 < \overline{cde} - \overline{hıȷ} < 100$ erhalten wir wie oben $c = h + 1$.

Also finden wir die Beziehung $\overline{ıȷ} - \overline{de} = 100 - 17 = 83$. Also gilt $i - d = 8$ oder $i - d = 9$. Allerdings folgt aus $i - d = 9$, dass $i = 9$ und $d = 0$ sein muss. Jedoch sind die Ziffern 9 oder 0 schon vergeben.

Folglich gilt $i - d = 8$ und wir haben dafür die zwei Möglichkeiten $i = 9$ und $d = 1$ sowie $i = 8$ und $d = 0$, je nachdem, welche Ziffern für g und b bereits vergeben sind.

Schließlich finden wir noch $j - e = 3$.

Wir können b, d, g, i aus der Menge $\{0,1,8,9\}$ und a, c, e, f, h, j aus der Menge $\{2,3,4,5,6,7\}$ auswählen. Dafür gibt es drei Fälle:

- *Fall 1:* Wenn (j, e) = (5, 2) ist, dann sind die Paare (a, f) und (c, h) gleich den Paaren (4, 3) und (7, 6).
- *Fall 2:* Wenn (j, e) = (6, 3) ist, dann gibt es keine Lösungen.
- *Fall 3:* Wenn (j, e) = (7, 4) ist, dann sind die Paare (a, f) und (c, h) gleich den Paaren (3, 2) und (6, 5).

Daher gibt es die folgenden acht Lösungen:

40712 − 38695 = 2017 , 70412 − 68395 = 2017 ,
41702 − 39685 = 2017 , 71402 − 69385 = 2017 ,
30614 − 28597 = 2017 , 60314 − 58297 = 2017 ,
31604 − 29587 = 2017 und 61304 − 59287 = 2017 . ❑

Aufgabe 7.14. Das Aufschreiben des nachfolgend angegebenen Polynoms als Produkt zweier Linearfaktoren erfolgte so hastig, dass einige Ziffern unleserlich sind. (Jedes Sternchen bedeutet eine unlesbare Ziffer.)

$$x^2 +* x -* 1 = (x +**) \cdot (x -*).$$

Vervollständigen Sie diese Gleichung und untersuchen Sie, ob es verschiedene Möglichkeiten gibt, diese Gleichung zu vervollständigen.

Lösungshinweise: Wir schreiben die Gleichung mit Variablen, die für Ziffern stehen.

$$x^2 + a \cdot x - 10b - 1 = (x + 10c + d) \cdot (x - e)$$
$$x^2 + a \cdot x - 10b - 1 = x^2 + 10cx + dx - ex - 10ce - de$$
$$10ce + de - 10b - 1 = x \cdot (10c + d - e - a)$$

Damit die Gleichung für alle x erfüllt ist, muss $10c + d - e - a = 0$ und damit auch $10ce + de - 10b - 1 = 0$ gelten. Wegen $10c + d = e + a$ folgt also

$$e(10c + d) - 10b - 1 = e(e + a) - 10b - 1 = 0,$$

also $e^2 + ea - 10b - 1 = 0$. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichung finden wir

$$e_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 10b + 1}\,.$$

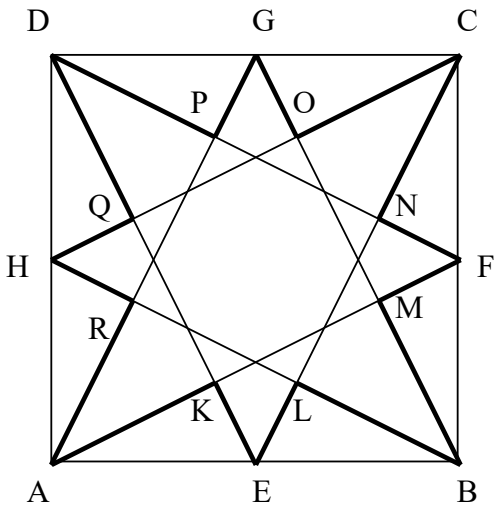
Wir suchen nun alle Paare $(a; b)$, für die die Diskriminante unter dem Wurzelzeichen das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Es genügt, geradzahlige Ziffern a zu untersuchen.

$a = 0$: $b = 8 \rightarrow e = 9$: $x^2 - 81 = (x + 10c + d)(x - 9)$,
$x + 9 = x + 10c + de, c = 0, d = 9$
$a = 2$: keine Lösung
$a = 4$: $b = 2 \rightarrow e = 3$: $x^2 + 4x - 21 = (x + 10c + d)(x - 2)$,
$a = 6$: $b = 10$
$a = 8$: keine Lösung

Thema 4.1 – Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung[3]

Aufgabe KZM 4-4. In einem Quadrat $\boldsymbol{ABCD}$ seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{BC}}, \overline{\boldsymbol{CD}}$ und $\overline{\boldsymbol{DA}}$ mit $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ bzw. $\boldsymbol{H}$ bezeichnet. In dem Streckenzug $\boldsymbol{AFDECHBGA}$ auftretende Schnittpunkte seien so mit $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ bezeichnet, dass $\boldsymbol{AKELBMFNCOGPDQHR}$ ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze). Man berechne den Flächeninhalt dieses Sechszehnecks im Verhältnis zum Flächeninhalt des Quadrates $\boldsymbol{ABCD}$.

[3] *Nach:* Ambrus A, Berta T. Zur Verwendung von Quadrat- Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben. In: Mathematikinformation, Heft Nr. 45, TU Braunschweig, klartext GmbH print- & medienservice, Göttingen, 2006.



Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Seitenlänge des Quadrates mit a. Den gesuchten Flächeninhalt erhalten wir, indem wir vom Flächeninhalt a^2 des Quadrates $ABCD$ die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke $\Delta AKE, \Delta BLE, \Delta BMF$, ΔCNF, ΔCOG, $\Delta DPG, \Delta DQH$ und ΔARH subtrahieren. Nach Konstruktion sind diese acht Dreiecke untereinander kongruent, denn sie stimmen sämtlich in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein.

Aus Symmetriegründen ist das Viereck $KMOQ$ ein Quadrat. Deshalb ist das Dreieck ΔAKE rechtwinklig und zudem ähnlich dem Dreieck ΔABF (www). Außerdem ist $KE \parallel BM$.

Aus dem Strahlensatz mit den Strahlen AB und AF sowie den Parallelen KE und BM folgt deshalb:

$$|\overline{KE}|:|\overline{MB}| = |\overline{AE}|:|\overline{AB}| = 1:2$$

d.h. wegen $|\overline{AK}| = |\overline{MB}|$ gilt $|\overline{AK}| = 2 \cdot |\overline{KE}|$. Aus dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das Dreieck ΔAKE mit dem rechten Winkel im Eckpunkt K, ergibt sich

$$|\overline{KE}|^2 + (2 \cdot |\overline{KE}|)^2 = |\overline{AE}|^2 \quad \text{d.h. } 5 \cdot |\overline{KE}|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks *AKE* beträgt folglich

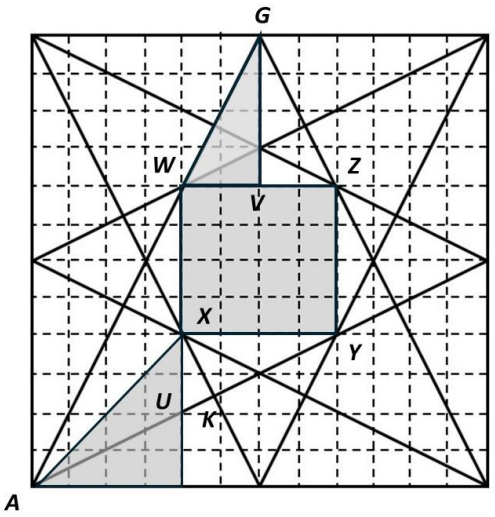
$$\frac{|\overline{KE}| \cdot 2|\overline{KE}|}{2} = |\overline{KE}|^2 = \frac{a^2}{20}.$$

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt $a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5} \cdot a^2$ und für das Verhältnis der Flächeninhalte gilt $A_{Quadrat} : A_{Sechszehneck} = 5 : 3$. ❑

Hinweis: Anstelle der Bestimmung von Streckenlängen, die zur Berechnung des Flächeninhaltes benötigt werden, kann die Zerlegung der Grundfigur in kongruente Teilflächen zum Ergebnis allein durch Auszählen der betroffenen Teilflächen gelingen.

Lösungsvariante: Wir überziehen das Ausgangsquadrat $ABCD$ mit einem 12×12 - Netz. In diesem Fall liegen auch die Eckpunkte E, F, G und H des Sechszehnecks auf Gitterpunkten und der Flächeninhalt des inneren Quadrates $WXYZ$ kann allein durch Auszählen ermittelt werden: $4 \cdot 4 = 16$ dieser Gitterquadrate. Zur gesuchten Fläche gehören weiterhin acht rechtwinklige Dreiecke wie ΔWVG mit den Katheten 2×1 (d.h. mit dem Flächeninhalt von 4 Gitterquadraten), also zusammen bereits $16 + 8 \cdot 4 = 48$ Gitterquadrate.

Zur gesuchten Fläche gehören auch weitere acht Dreiecke wie ΔAKX. Deren Flächeninhalte setzen sich jeweils zusammen aus dem Flächeninhalt solcher Dreiecke wie ΔAUX mit 4 Gitterquadraten und solcher Dreiecke wie ΔKXU. Wir verwenden, dass dieses Dreieck ähnlich zu dem Dreieck ΔXUY ist. Somit verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate ihrer Hypotenusen, also wie



$$\left(\sqrt{2^2+4^2}\right)^2 = 20 \text{ zu } 2^2 = 4, \text{ d.h. wie } 5:1.$$

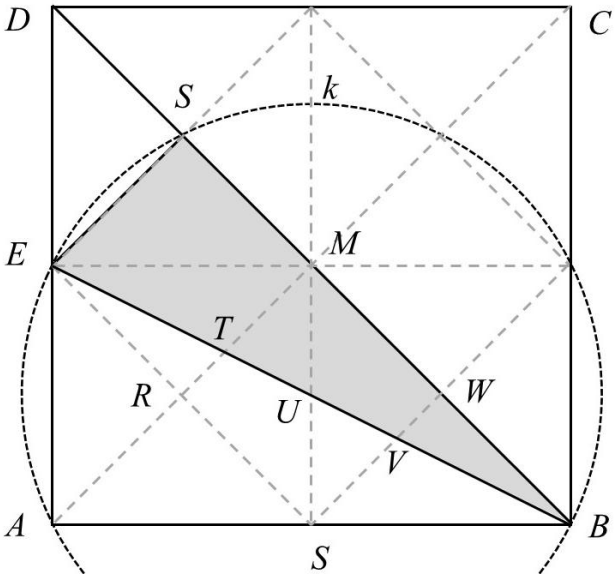
Da der Flächeninhalt des Dreiecks ΔXUY vier Kästchen umfasst, beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔKXU $\frac{4}{5}$ Kästchen. Insgesamt kommen zur Fläche noch $8 \cdot \left(4+\frac{4}{5}\right) = 38+\frac{2}{5}$ Gitterquadrate hinzu. Somit beträgt das gesuchte Verhältnis

$$144 : \left(48+38+\frac{2}{5}\right) = 144 : 86.4 = (5 \cdot 28.8) : (3 \cdot 28.8) = 5 : 3.$$

Solche Flächenzerlegungen sind auch bei den folgenden Aufgaben hilfreich.

Aufgabe 4.01 – MO601023. Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Es sei *E* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises *k*. Der Kreis *k* schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in *S*.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *EBS*.

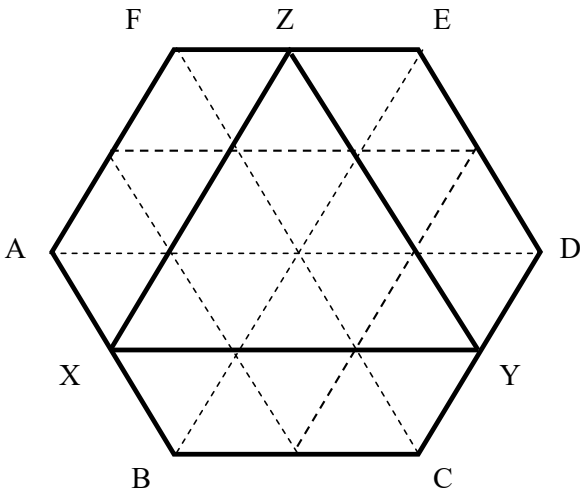
Lösungshinweise: Aufgrund der Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck ΔEBS nach dem Satz von THALES rechtwinklig mit dem rechten Winkel am Punkt *S*. Weiter gilt wegen $\sphericalangle DSE = 90°$ und $\sphericalangle EDS = 45°$ gemäß Innenwinkelsummensatzes gilt auch $\sphericalangle SED = 45°$. Das Dreieck ΔESD ist folglich gleichschenklig-rechtwinklig. So können wir das Quadrat $ABCD$ mit 16 zum Dreieck ΔESD kongruenten Dreiecken vollständig und überschneidungsfrei überdecken.



Wir beschreiben nun die gesuchte (in der Abbildung grau hinterlegte) Fläche mittels dieser Teildreiecke. Offensichtlich stimmt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔEMS mit dem eines Überdeckungsdreiecks überein. Weiterhin ist das Dreieck ΔERT kongruent zum Dreieck ΔBWV, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|BW| = |ER|$ überein. Also gilt $A_{ETM} + A_{BWV} = A_{ETM} + A_{ERT} = A_{ERM}$ und damit stimmt auch dies

mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Schließlich ist das Dreieck ΔMTU kongruent zum Dreieck ΔSVU, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|SU| = |MU|$ überein. Also stimmt die Summe $A_{MTU} + A_{MUVW} = A_{SVU} + A_{MUVW} = A_{MSW}$ mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Somit entspricht der Flächeninhalt genau dem Dreifachen des Flächeninhalts eines solchen Überdeckungsdreieck und damit $\frac{3}{16}$ der Quadratfläche. ❑

Aufgabe 4.02. In einem regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ seien X, Y und Z die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$.



Gesucht ist das Verhältnis $A_S : A_D$, wenn A_S der Flächeninhalt des Sechsecks und A_D der Flächeninhalt des Dreiecks ΔXYZ ist.

Lösungshinweise: Eine Skizze verweist bereits auf den Lösungsansatz durch „Auszählen" geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegen wir das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ in 24 kongruente Teildreiecke, von denen das Dreieck ΔXYZ insgesamt 9 dieser Teildreiecke umfasst.

Das gesuchte Verhältnis beträgt also 9 : 24 = 3 : 8. ❑

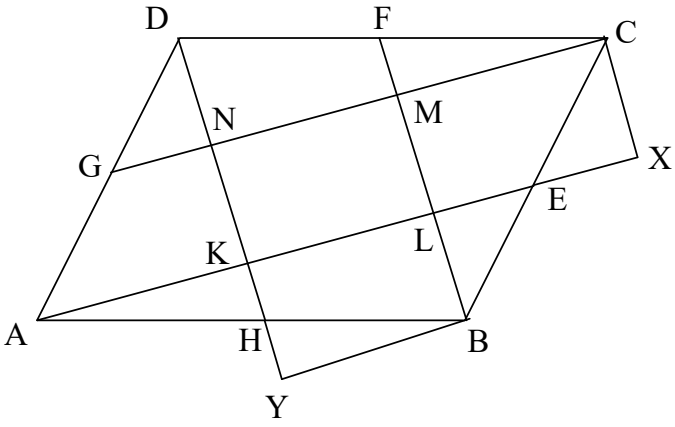
Aufgabe 4.03 – MO431024. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit H, E, F bzw. G bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck $KLMN$ aus.

(a) Zeigen Sie, dass $KLMN$ ein Parallelogramm ist.
(b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms $KLMN$ zu dem des Parallelogramms $ABCD$.

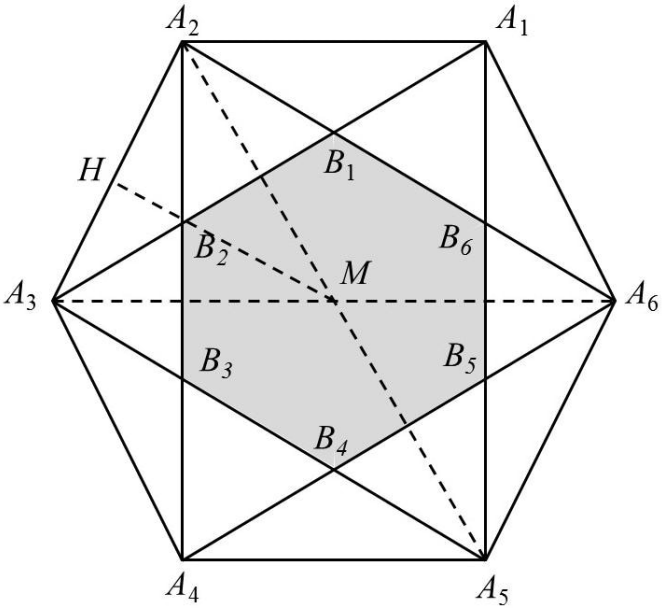
Lösungshinweise: Wieder bereitet die Teilaufgabe (a) die Lösung für (b) vor. Fertigen wir eine Skizze an und beachten die in (a) zu zeigende Streckenabschnitte, so erkennen wir die prinzipielle Möglichkeit, das Parallelogramm $ABCD$ mit zu $KLMN$ kongruenten Parallelogrammen zu überdecken, wobei allerdings Eckpunkte wie X und Y außerhalb der Fläche von $ABCD$ liegen.

Wir sehen, dass die Dreiecke ΔBEL und ΔEXC sowie ΔAKH und ΔHYB kongruent sind und die entstandenen Vierecke $LXCM$ bzw. $KYBL$ jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm $KLMN$ sind.

Ergänzen wir in analoger Weise die Figur über DF und AG wird unmittelbar ersichtlich, dass die Gesamtfläche des Parallelogramms $ABCD$ aus 5 Parallelogrammen der Größe $KLMN$ zusammensetzt werden kann. Somit ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Parallelogramms $KLMN$ zu dem des Parallelogramms $ABCD$ wie 1 : 5. ❑



Aufgabe 4.04 - MO450924. In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2...A_6$ mit dem Flächeninhalt A schneiden die sechs Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_6}$, $\overline{A_5A_1}$ und $\overline{A_6A_2}$ ein kleineres Sechseck $B_1B_2...B_6$ mit dem Flächeninhalt B aus. Berechnen Sie den Flächeninhalt B in Abhängigkeit von A.



Lösungshinweise: Zeichnen wir in die Skizze zusätzlich die Geraden A_2A_5, A_3A_6 und MB_2 ein, so erkennen wir, dass das Dreieck ΔA_2A_3M gleichseitig ist und durch die (Hilfs-) Linien in sechs flächengleiche Teildreiecke zerlegt wird. Davon gehören zwei der sechs Teildreiecke zur gesuchten Fläche B. Also nimmt im Dreieck ΔA_2A_3M die Fläche von B genau $\frac{1}{3}$ der zu A gehörenden Fläche ein. Da diese Argumentation für jedes Paar benachbarter Eckpunkte von A ebenso richtig ist, finden wir $B = \frac{1}{3} \cdot A$. ❑

Rückblick: Thema 07 – Kryptogramme[4]

Aufgabe 7.01 – MO301021. In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe O braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt werden.

		M	O	R	D
+		R	A	U	B
=	K	R	I	M	I

a) Beweisen Sie, dass in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe O durch die Ziffer 0 ersetzt wird!

[4] Siehe Heft 07/2021

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für A befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Aufgabe 7.02 – MO330923. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

		M	O	R	D
+		R	A	U	B
=	K	R	I	M	I

Geben Sie eine Lösung an! Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Aufgabe 7.03 – MO331023. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
=	F	Ü	N	F

Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!

Aufgabe 7.04. Finden Sie alle Lösungen des folgenden Kryptogramms. Dabei bezeichnen A und B (mit $B > 1$) zwei verschiedene Ziffern.

$$A^B + B^A = (A + B^B)^B$$

Aufgabe 7.05 – MO431034. Das Kryptogramm soll in einem n-adischen Positionssystem gelöst werden. Ermitteln Sie das kleinste n, für welches das Kryptogramm eine Lösung hat.

		A	S	T	A
+		E	R	N	I
=	N	A	M	E	N

Aufgabe 7.06 – MO560931/MO561031. In der Gleichung * · * * * = 6 · * * 5 + 2017 ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sternchen dürfen durch die gleichen Ziffern ersetzt werden. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Aufgabe 7.07 – MO020911. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, dass es nur eine Lösung gibt.

x	x	x	x	x	x	x	x	:	x	x	x	=	x	x	x	x	x
	x	x	x														
			x	x	x	x											
				x	x	x											
				x	x	x	x										
				8	x	x	x										
							0										

Aufgabe 7.08 – MO330944. Jemand findet die Aufgabe

22! = 11240007277**607680000.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Aufgabe 7.09 – MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2025

Aufgabe. Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke $\overline{CD}$, einen inneren Punkt Q der Strecke $\overline{BC}$ und einen inneren Punkt R der Strecke $\overline{CD}$ zeichnen.

Dabei stellt sich Ulrike die Aufgabe zu erreichen, dass für die Flächeninhalte $F_1(\Delta ABP)$ und $F_2(\Delta AQR)$ die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt. Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.

Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare bzw. unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Lösungshinweise: Offensichtlich gilt für das ΔABP die Flächenberechnung $F_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$, da das Lot von P auf $\overline{AB}$ die Länge der Seite $\overline{BC}$ hat.

Wir zerlegen die Fläche F_2 durch eine Gerade parallel zu AB durch den Punkt Q, die die Strecke AR in dem Punkt Q' schneidet. Dann gilt

$$F_2 = F_3(\Delta Q'QR) + F_4(\Delta AQQ')$$

Das Lot von Q' auf AB hat die Länge der Strecke $\overline{BQ}$. Das Lot von R auf $Q'Q$ hat die Länge der Strecke QC. Wegen $|\overline{BQ}| + |\overline{QC}| = |\overline{BC}|$ finden wir folgende Abschätzung:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{Q'Q}| \cdot |\overline{QC}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{Q'Q}| \cdot |\overline{BQ}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{Q'Q}\right| \cdot |\overline{BC}|$$

Nun gilt aber stets $\left|\overline{Q'Q}\right| < |\overline{AB}|$ (weil die Strecke AR im Inneren des Rechtecks verläuft). Somit gilt stets $F_1 > F_2$. Nur Waltraud kann ihre Aufgabe lösen. Die Aufgaben von Ulrike und Vera sind unlösbar. ❑

Monatsaufgabe 03/2026[5]

Man untersuche, ob es für $n = 2$ und für $n = 3$ jeweils positive natürliche Zahlen a und b gibt, so dass

$$\sum_{k=0}^{n} (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2$$

gilt!

Termine

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Regionalausscheid Südwestsachsen
6. bis 7. März 2026, solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen, Neefestraße 88, 09116 Chemnitz

Känguru-Wettbewerb 2026 traditionell am dritten Donnerstag im März, am 19. März 2026, https://www.mathe-kaenguru.de/

61. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, Landeswettbewerb Sachsen

28. März 2026, IHK Chemnitz, Straße der Nationen 25, 09111 Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 7.3 – Kryptogramm 3
Thema 4 – Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung 12
Rückblick: Thema 07 – Kryptogramme 16
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2025 18
Monatsaufgabe 03/2026 19
Termine 19

[5] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.04.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[6]	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2026	Thema 7.3	Kryptogramme	MO651021 MO650921 MO561013 MO451044 MO081014
03/2026	Thema 4.1	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	MO601023 MO450924 MO431024
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015 MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041 MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

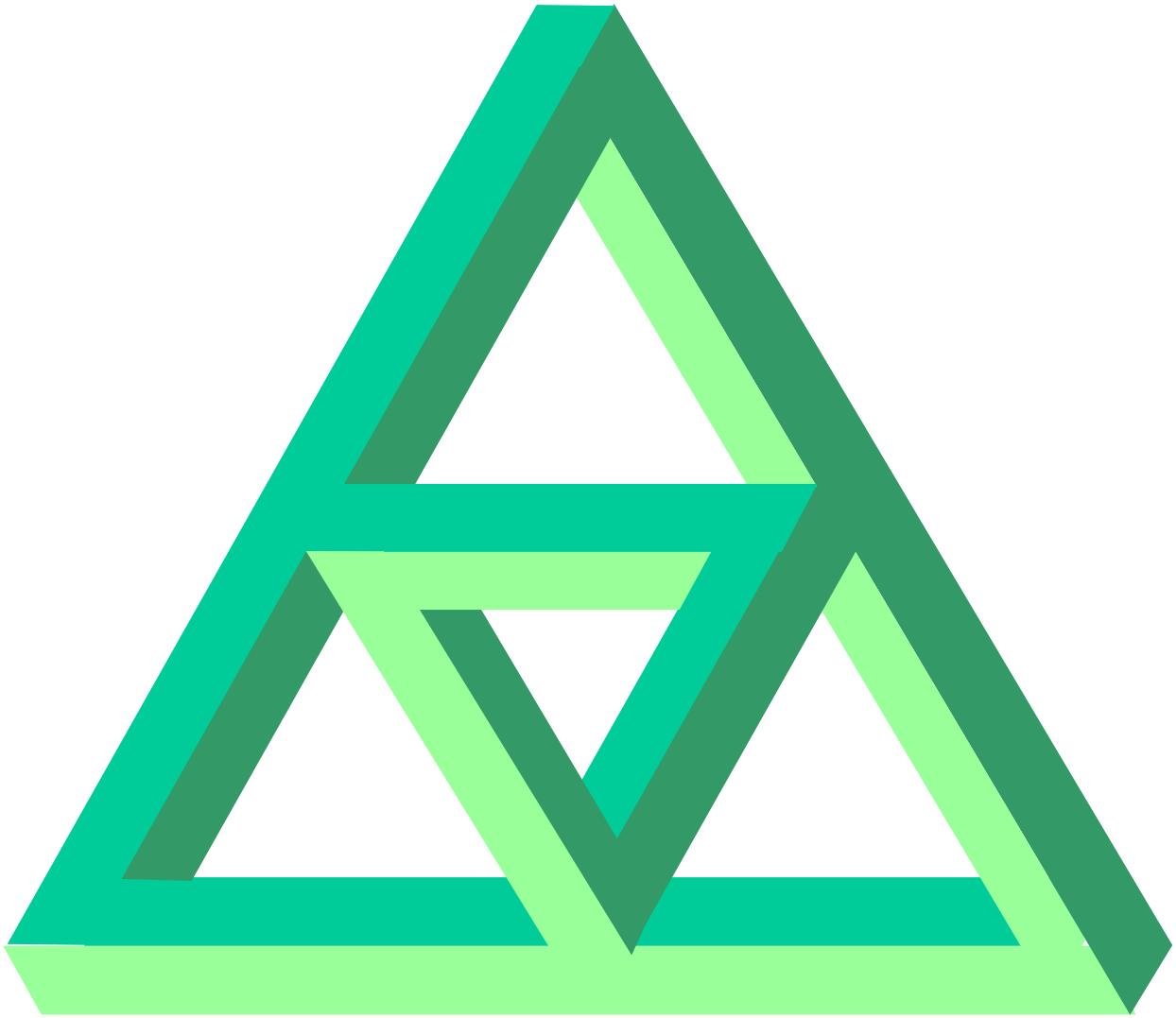
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[6] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 04/2026 (April 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den Aufgaben **MO650922** und **MO651022** der Regionalrunde schließen wir den Rückblick auf die Regionalrunde der 65. Mathematik-Olympiade ab und diskutieren quadratische Gleichungen. Dabei sehen wir die derzeit oft beobachtete Aufgabenstruktur: Es wird eine parameterhaltige Aufgabenstellung formuliert, wobei in einem ersten Teil die Lösungen für spezielle Parameter gefragt sind, bevor im zweiten Teil die allgemeine Lösung zu finden ist.

Mit der aktuellen Aufgabe **A5-5A** aus dem sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik beschreiben wir die Methode der vollständigen Induktion und verweisen insbesondere auf das Erwartungsbild entsprechend der Musterlösungen der Aufgabenkommission: Dieser Lösungsansatz darf sinngemäß angewandt werden, ohne dabei die formale Umsetzung der Methode umsetzen zu müssen. Im historischen Rückblick zitieren wir dazu die Fassung der vollständigen Induktion von RICHARD DEDEKIND von 1883.

Die Technische Universität Chemnitz begeht im Mai 2026 ihr 190-jähriges Bestehen. Aus diesem Anlass hat Dr. FRANK GÖRING von der Fakultät für Mathematik zu Zahlenspielereien rund um die Zahl 190 aufgerufen. Auch in seinem (stets lesenswerten!) monatlichen Mathe-Rätsel geht es um die Zahl 190.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Quadratische Gleichungen

Aufgaben mit (quadratischen) Gleichungen erscheinen oft unterrichtsnah. Dennoch lassen sich dabei interessante Fragestellungen verbinden.

Aufgabe MO650922.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{x-5}{x}+\frac{x}{5}=\frac{5-x}{5}+\frac{5}{x}$$

b) Gibt es Lösungspaare (a,b) reeller Zahlen, für die

$$\frac{a+b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}-\frac{b}{a}$$

gilt?

c) Bestimmen Sie alle Paare (a,b) reeller Zahlen, für die

$$\frac{a-b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}+\frac{b}{a}$$

gilt.

Hinweis: Ein Lösungspaar für die Gleichung $a^2+ab=b\cdot(a+4b)$ ist zum Beispiel das Paar $(6,-3)$, denn für $a=6$ und $b=-3$ hat die linke Seite der Gleichung den Wert $6^2+6\cdot(-3)=18$ und die rechte Seite ebenfalls $(-3)\cdot(6+4\cdot(-3))=18$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir stellen zunächst fest, dass die gegebene Gleichung $x\neq 0$ bedingt. Somit können wir beide Seiten mit $5\cdot x$ multiplizieren und erhalten die zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung

$$5\cdot(x-5)+x^2=x\cdot(5-x)+5^2\,,$$

also

$$2\cdot x^2-50=0\,,$$

woraus $x=\pm 5$ folgt. Die Probe bestätigt beide Werte als Lösungen:

$$\frac{5-5}{5}+\frac{5}{5}=1=\frac{5-5}{5}+\frac{5}{5}\quad;\quad\frac{(-5)-5}{(-5)}+\frac{(-5)}{5}=1=\frac{5-(-5)}{5}+\frac{5}{(-5)}\,.$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Damit alle Terme definiert sind, muss $a\neq 0$ und $b\neq 0$ gelten. Wir können beide Seiten mit dem Produkt $a\cdot b$ multiplizieren und erhalten

$$b\cdot(a+b)+a^2=a\cdot(b-a)-b^2.$$

Diese Gleichung formen wir äquivalent zu $2 \cdot a^2 = -2 \cdot b^2$ um. Jedoch lässt sich diese Gleichung nur mittels $a = b = 0$ erfüllen, im Widerspruch zum Definitionsbereich der Ausgangsgleichung. Es kann also keine Lösungen in reellen Zahlen geben.

Lösungsvariante: Offensichtlich gilt für die gegebene Gleichung

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 1 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}.$$

Setzen wir für $a \neq 0$ zur abkürzenden Schreibweise $z = \frac{b}{a}$, so können wir die letzte Gleichung zu $z = -\frac{1}{z}$ äquivalent umformen, was zum Widerspruch $z^2 = -1$ führt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Damit alle Terme definiert sind, muss $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gelten. Wir können die Ausgangsgleichung äquivalent umformen und erhalten

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 1 - \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

woraus wie in Teilaufgabe b) für $z = \frac{a}{b}$ der Zusammenhang $z^2 = 1$ folgt. Folglich kann nur $b = a$ oder $b = -a$ zu Lösungen führen. Beide Ansätze erweisen sich tatsächlich als Lösungen, denn es gilt für alle $a \neq 0$:

$$\frac{a-a}{a} + \frac{a}{a} = 1 = \frac{a-a}{a} + \frac{a}{a}$$

bzw.

$$\frac{a-(-a)}{a} + \frac{a}{-a} = 1 = \frac{(-a)-a}{-a} + \frac{(-a)}{a}.$$

❑

Aufgabe MO651022. In dieser Aufgabe sind a und b positive (reelle) Zahlen. Die Gleichung für x

$$\frac{a \cdot (x+b)}{x+a} + \frac{b \cdot (x-a)}{x+b} = a + b$$

soll gelöst werden.

a) Lösen Sie die Gleichung für $a = 1$ und $b = 3$.
b) Bestimmen Sie alle Lösungen für x in Abhängigkeit von a und b.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir setzen die Werte für a und b ein und erhalten die Gleichung

$$\frac{1 \cdot (x+3)}{x+1} + \frac{3 \cdot (x-1)}{x+3} = 4$$

Damit es Lösungen gibt, muss $x \neq -1$ und $x \neq -3$ gelten. Multiplizieren wir beide Seiten mit $(x+1)(x+3)$, führt dies zur Gleichung

$$(x+3)^2 + 3 \cdot (x^2 - 1) = 4(x+1)(x+3).$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung entspricht der Lösungsmenge der Gleichung

$$4 \cdot x^2 + 6x + 6 = 4x^2 + 16x + 12\,,$$

also

$$10x + 6 = 0 \;; x = -\frac{3}{5}.$$

Die Probe bestätigt diese Lösung, denn wir finden

$$\frac{1 \cdot \left(-\frac{3}{5} + 3\right)}{-\frac{3}{5} + 1} + \frac{3 \cdot \left(-\frac{3}{5} - 1\right)}{-\frac{3}{5} + 3} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{2}{5}} - \frac{\frac{24}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{12}{2} - \frac{24}{12} = 6 - 2 = 4\,.$$

Hinweis: Natürlich wäre es korrekt, gleich mit der Lösung der Teilaufgabe b) zu beginnen und anschließend die Teilaufgabe a) als Spezialfall durch Einsetzen der vorgegebenen Werte für a und b zu lösen. Anliegen der Aufgabenstellung ist es aber, zunächst mit einfacher Konstellation erfolgreich zu sein und dann die Erkenntnisse aus den Umformungen für die Lösung der Teilaufgabe b) anzuwenden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir stellen zunächst fest, dass die gegebene Gleichung $x + a \neq 0$ und $x + b \neq 0$ bedingt. Wir können die gegebene Gleichung umformen (immer in Anlehnung an die Schritte in Teilaufgabe a).

$$\frac{a \cdot (x+b)}{x+a} + \frac{b \cdot (x-a)}{x+b} = \frac{a \cdot (x+b)^2 + b \cdot (x^2 - a^2)}{(x+a) \cdot (x+b)}$$
$$= \frac{ax^2 + 2abx + ab^2 + bx^2 - ba^2}{(x+a) \cdot (x+b)} = a + b\,.$$

Daraus folgt weiter:

$$ax^2 + 2abx + ab^2 + bx^2 - ba^2 = (a+b) \cdot (x+a) \cdot (x+b)$$
$$x^2\big(a + b - (a+b)\big) + x \cdot (2ab - (a+b)^2) + ab^2 - ba^2 - ab(a+b) = 0\,.$$

Zusammengefasst gilt also:

$$x \cdot (-a^2 - b^2) - 2 \cdot a^2 \cdot b = 0$$

Voraussetzungsgemäß ist $a > 0, b > 0$ und somit auch $a^2 + b^2 > 0$. Wir können somit weiter nach x auflösen:

$$x = \frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2}\,.$$

Wir erkennen, dass für $a = b$ aus $x = \frac{-2 \cdot a^3}{2 \cdot a^2} = -a$ für den Nenner im linken Bruch $x + a = 0$ folgt und somit keine Lösung möglich ist. Wir können also im Weiteren $a \neq b$ voraussetzen.

Kontrollrechnung: Für $a = 1$ und $b = 3$ stimmt dieser Term mit der Lösung aus Teilaufgabe a) überein, denn $x = \frac{-2 \cdot 1^2 \cdot 3}{1^2 + 3^2} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$. Diese Information genügt aber nicht als Probe. Diese ist gesondert zu führen, indem wir die gefundene Zahl für x in die Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\frac{a \cdot \left(\frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} + b\right)}{\frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} + a} + \frac{b \cdot \left(\frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} - a\right)}{\frac{-2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} + b} = a + b \,.$$

Wir beseitigen die Doppelbrüche und erhalten:

$$\frac{a \cdot (-2 \cdot a^2 \cdot b + a^2 \cdot b + b^3)}{-2 \cdot a^2 \cdot b + a^3 + a \cdot b^2} + \frac{b \cdot (-2 \cdot a^2 \cdot b - a^3 - a \cdot b^2)}{-2 \cdot a^2 \cdot b + a^2 \cdot b + b^3} = a + b \,,$$
$$\frac{b \cdot (b^2 - a^2)}{(a - b)^2} + \frac{a \cdot (a + b)^2}{b^2 - a^2} = a + b \,.$$

Unter Anwendung der bekannten binomischen Formel $(b + a) \cdot (b - a) = b^2 - a^2$ vereinfachen wir

$$\frac{b \cdot (b + a) \cdot (b - a)}{(a - b)^2} + \frac{a \cdot (a + b)^2}{(b + a) \cdot (b - a)} = \frac{-b \cdot (a + b)}{(b - a)} + \frac{a \cdot (a + b)}{(b - a)} = a + b$$

❑

Interessante quadratische Gleichungen entstehen, wenn die Basis der Zahlendarstellung variieren kann.

Aufgabe – MO360945. Untersuchen Sie, ob es ein Stellenwertsystem der Basis B gibt, in dem $17^3 = 71^2$ gilt! Geben Sie im Falle der Existenz alle derartigen Basen B an!

Lösungshinweise: Wenn B eine Basis eines Stellenwertsystems ist, in dem die genannte Gleichung gilt, ist $B \geq 8$ (da mindestens Ziffern bis 7 benötigt werden. Außerdem gilt

$$(B + 7)^3 = (7B + 1)^2 \,.$$

Daraus folgt

$$B^3 + 21B^2 + 147B + 343 = 49B^2 + 14B + 1 \,,$$
$$B \cdot (B^2 - 28B + 133) + 342 = 0 \,.$$

Also ist die Zahl 342 durch B teilbar. Wegen der Primfaktorenzerlegung $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$ kann B nur eine der folgenden Zahlen sein:

B	$B+7$	$7B+1$	Bemerkung
$3^2 = 9$	16	64	
$2 \cdot 3^2 = 18$	25	127	25 durch 5 teilbar, 127 nicht durch 5 teilbar
19	26	134	26 durch 13 teilbar, 134 nicht durch 13 teilbar
$2 \cdot 19 = 38$	45	267	45 durch 5 teilbar, 267 nicht durch 5 teilbar
$3 \cdot 19 = 57$	64	400	400 durch 5 teilbar, 64 nicht durch 5 teilbar
$2 \cdot 3 \cdot 19 = 114$	121	799	121 durch 11 teilbar, 799 nicht durch 11 teilbar
$3^2 \cdot 19 = 171$	178	1198	178 durch 89 teilbar, 1198 nicht durch 89 teilbar
$2 \cdot 3^2 \cdot 19 = 342$	349	2395	2395 durch 5 teilbar, 349 nicht durch 5 teilbar

Somit kann nur $B = 9$ zu einer Lösung führen. Tatsächlich gilt:

$$(17)_9^3 = (9+7)^3 = 16^3 = 4096$$
$$(71)_9^2 = (7 \cdot 9 + 1)^2 = 64^2 = 4096$$

Aufgaben MO380935/MO381035. Jörn behauptet als Scherzaufgabe, die Zahl $z = 49858$ sei gleich der Zahl $2 \cdot z$ (obwohl diese Zahl z ja offensichtlich verschieden von der einzigen Lösung $z = 0$ der Gleichung $z = 2 \cdot z$ ist). Nora nennt eine Lösungsidee: Man verstehe die eine der Ziffernangaben für z bzw. $2 \cdot z$ im Dezimalsystem, die andere im Stellenwertsystem mit einer von 10 verschiedenen Basis B.

Man untersuche, ob diese Idee zur behaupteten Gleichheit führt. Ist das der Fall, so ermittle man alle diejenigen Basen B, für die das zutrifft.

Lösungshinweise: Wenn die gewünschte Gleichheit für eine Basis B erreichbar ist, so folgt: Da die Ziffer 9 vorkommt, muss B größer als 9, wegen $B \neq 10$ also größer als 10 sein. Daher kann Gleichheit nur so eintreten: Die Zahl 49858, im System mit der Basis B verstanden, ist gleich der Zahl $2 \cdot 49858$ im Dezimalsystem verstanden. Das bedeutet:

$$4 \cdot B^4 + 9 \cdot B^3 + 8 \cdot B^2 + 5 \cdot B + 8 = 99716\,,$$

also

$$B \cdot (4 \cdot B^3 + 9 \cdot B^2 + 8 \cdot B + 5) = 99708\,.$$

Wegen $4 \cdot 13^4 = 4 \cdot 169^2 > 4 \cdot 160^2 = 4 \cdot 25600 > 99716$ würde $B \geq 13$ zu groß werden, also ist $B \leq 12$. Jedoch entfällt $B = 11$, weil 99708 nicht durch 11 teilbar ist. Somit verbleibt nur die Möglichkeit $B = 12$. Tatsächlich gilt:

$$4 \cdot 12^4 + 9 \cdot 12^3 + 8 \cdot 12^2 + 5 \cdot 12 + 8$$
$$= 4 \cdot 20736 + 9 \cdot 1728 + 8 \cdot 144 + 5 \cdot 12 + 8$$
$$= 82944 + 15552 + 1152 + 60 + 8 = 99716\,.$$

Daher ist die gewünschte Gleichheit erreichbar, und zwar mit der Basis $B = 12$. ❑

Methode der vollständigen Induktion

Induktion (lat. inductio – *hinführen*) ist der Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen. Die Bedeutung von Verallgemeinerungen der Ergebnisse von einzelnen Beobachtungen und Experimenten, also von Induktionen, ist für das experimentelle Arbeiten wohlbekannt und unstrittig. Dagegen gilt die Mathematik schon von alters her als klassisches Beispiel der Anwendungen rein deduktiver Methoden (lat. Deductio – Abführen, Ableitung), weil hierbei stets die Auffassung besteht, dass sich alle mathematischen Sätze (außer den Grundannahmen, den Axiomen) beweisen lassen und dass die konkreten Anwendungen dieser Sätze aus den auf die allgemeinen Fälle zugeschnittenen Beweisen hergeleitet (deduziert) werden.

Die Induktion, d.h. das Hinführen auf eine Idee, auf eine Vermutung oder auf eine Hypothese besitzt in der Mathematik aber dennoch eine große, wenn auch lediglich heuristische Rolle: Sie erlaubt darauf zu kommen, wie die Lösung vermutlich beschaffen sein muss. Zu beweisen sind mathematische Sätze stets deduktiv, so auch Verallgemeinerungen von Beispielen. Folgende mathematische Probleme demonstrieren die Notwendigkeit des Beweises[3] von Vermutungen.

(1) Untersuchen wir die reellwertige Funktion $f(x) = x^2 + x + 41$, so finden wir für $x = 0$ die Primzahl $f(0) = 41$. Auch für $x = 1, 2, 3$ liefert die Funktion mit 43, 53, 61 Primzahlen. Weitere Test mit $x = 4, 5, \ldots$ ergeben immer wieder Primzahlen. Führt $f(n)$ vielleicht für alle natürlichen Zahlen n auf eine Primzahl (nach LEONHARD EULER (1707 – 1783))? Leicht sehen wir jedoch, dass für $x = 41$ der Ausdruck $f(41)$ durch 41 teilbar ist und somit keine Primzahl sein kann. Aber auch $x = 40$ ergibt wegen $40^2 + 40 + 41 = (40 + 1)^2$ eine zusammengesetzte Zahl.

(2) Offensichtlich ist $n^3 - n$ für jede natürliche Zahl n durch 3 teilbar, ebenso ist $n^5 - n$ durch 5 teilbar. Wir können auch zeigen, dass 7 ein Teiler von $n^7 - n$. Gilt vielleicht für jede ungerade natürliche Zahl k die Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^k - n$ durch k teilbar (nach GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716))?

- Für $k = 3$ gilt $n^3 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$. Die Teilbarkeit durch 3 ist für ein Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen stets gültig.
- Für $k = 5$ finden wir die Zerlegung $n^5 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$. Ist einer der Zahlen $(n - 1), n$ oder $(n + 1)$ durch 5 teilbar, ist 5 auch ein Teiler von $n^5 - n$. Andernfalls lässt n bei Division durch 5 den Rest ± 2. Für eine solche Zahl ist aber der Ausdruck $(n^2 + 1)$ durch 5 teilbar.
- Für $k = 7$ finden wir die Zerlegung

[3] Sominskij, I.S.; Golovina, L.I.; Jaglom, I.M.: Die vollständige Induktion. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

$$n^7 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1).$$

Ist einer der Zahlen $(n-1), n$ oder $(n+1)$ durch 7 teilbar, ist 7 auch ein Teiler von $n^7 - n$. Lässt n bei Division durch 7 den Rest ± 2, so ist der Faktor $(n^2 \pm n + 1)$ durch 7 teilbar. Lässt n bei Division durch 7 den Rest ± 3, so ist der Faktor $(n^2 \mp n + 1)$ durch 7 teilbar.

- Für $k = 9$ ergibt sich bereits für $n = 2$ ein Widerspruch, da $2^9 - 2 = 510$ nicht durch 9 teilbar ist.

Die obige Vermutung gilt auch allgemein nicht für gerade Zahlen k. Zwar ist 2 für jedes n ein Teiler von $n^2 - n = (n-1) \cdot n$. Aber schon für $k = 4$ ist für $n = 2$ die Vermutung widerlegt: $2^4 - 2 = 14$ ist nicht durch 4 teilbar.

In den folgenden Beispielen lassen sich die Vermutungen durch systematisches Probieren nur sehr aufwendig widerlegen:

(3) Berechnen wir für Primzahlen p = 2, 3, 5, ... den Ausdruck $2^{p-1} - 1$, so könnten wir vermuten, dass dieser stets nicht durch p^2 teilbar ist. Wir benötigen schon viel Geduld, um das Gegenbeispiel zu finden, denn erst für $p = 1093$ teilt 1093^2 die Zahl $2^{1092} - 1$ (nach DIMITRY A. GRAVE (1863 – 1939)).

(4) Ganz aussichtslos erscheint der Versuch, die Vermutung *„Für alle natürlichen Zahlen n ergibt $991 \cdot n^2 + 1$ niemals eine Quadratzahl“* mittels Gegenbeispiel zu widerlegen. Die kleinste natürliche Zahl, die der Vermutung widerspricht, lautet

$$n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.$$

Diese Beispiele erlauben den einfachen, aber wichtigen Schluss: Eine Aussage kann in einer ganzen Reihe spezieller Fälle richtig und trotzdem allgemein falsch sein.

Die Methode der vollständigen Induktion ist nun ein Prinzip, um eine Aussage für unendliche viele natürliche Zahlen zu beweisen. Es ist eine wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen und Inhalt des 5. Axioms des PEANOschen Axiomensystems („*Wenn eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 1 enthält und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, dann ist diese Teilmenge gleich der Menge aller natürlichen Zahlen*“), das zur Beschreibung der natürlichen Zahlen durch GIUSEPPE PEANO (1858-1932) aufgestellt wurde. Wir können also dieses Prinzip nicht beweisen, es sei denn, wir stützen uns auf ein anderes, gleichwertiges Axiom wie z.B. „*Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element*“.

Die Methode der vollständigen Induktion funktioniert anschaulich nach dem Domino-Prinzip: Wir werfen den ersten Stein einer Reihe um und mit einem umkippenden Stein fällt auch der darauf folgende um. Dann fallen nacheinander alle Steine um.

Aufgabe MO470924. Es wird eine Folge von n positiven rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ betrachtet, für die gilt:

$$x_2^2 = 1 + x_1 \ ; \ x_3^2 = 1 + x_2 \ ; \ldots ; \ x_n^2 = 1 + x_{n-1}.$$

Kurz: Es gilt $x_{k+1}^2 = 1 + x_k$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

a) Bestimmen Sie für $n = 3$ und $x_1 = \frac{200}{2401}$ die Werte für x_2 und x_3. Geben Sie die Werte der rationalen Zahlen x_2 und x_3 exakt in ihrer Bruchdarstellung an.
b) Geben Sie ein weiteres Beispiel $x_1, \ldots, x_5$ an, welches den obigen Bedingungen genügt und wo $x_1, \ldots, x_5$ sämtlich ganze Zahlen größer als 1 sind.
c) Beweisen Sie für jede Folge von n positiven rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ welche den obigen Bedingungen genügt, folgende Aussage: Wenn $x_1 < 2$ gilt, dann gilt $x_n < 2$.

Aufgabe MO471022. Gegeben ist eine positive reelle Zahl a. Es wird eine Folge von Zahlen $x_2, x_3, \ldots$ aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift

$$x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$$

für $n \geq 1$ berechnet.

Weisen Sie nach,

a) dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_n < x_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, und
b) dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

Ohne hier die Lösung zu diskutieren, verweisen wir auf die Hinweise aus der Aufgabenkommission zu diesen Aufgaben: *Die Lösungen lassen sich mit dem Schema der vollständigen Induktion formulieren.* ***Dies darf aber von Schülerlösungen nicht verlangt werden.***

In folgenden Jahrgängen wurden wiederholt Aufgaben gestellt, die auch mit der Methode der vollständigen Induktion gelöst werden können. Dieser Lösungsansatz wurde dann (gleichwertig) als Lösungsvariante angegeben, während die „erste“ Lösung ohne diese Methode auskam. Aber in der Lösungsdiskussion zur

Aufgabe MO631016.

a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken). Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird. Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?

wird erneut der Hinweis gegeben: Ein exakter Beweis ist mit vollständiger Induktion möglich, wobei zu berücksichtigen ist, dass von n auf $n + 2$ geschlossen wird, also die Induktionsvoraussetzung für zwei Startwerte zu prüfen ist. ***Diese exakte Argumentation wird von den Schülerinnen und Schülern nicht verlangt.***

Obwohl also weiterhin in der Mathematik-Olympiade die Methode der vollständigen Induktion nicht in korrekter formaler Form verlangt wird, lohnt es sich, damit umgehen zu können. Dabei sollte der Beweis stets folgender Form entsprechen:

Induktionsanfang:	Man zeige, dass die Aussage für einen Anfangswert gilt, zum Beispiel für $n = 1$.
Induktionsschritt:	
Voraussetzung:	Man setze voraus, dass die Aussage für ein $n = k$ wahr ist.
Behauptung:	Man behauptet, dass die Aussage für $n = k + 1$ wahr ist.
Beweis:	Man zeige, dass die Aussage für $n = k + 1$ folgt, wenn sie für $n = k$ erfüllt ist.
Induktionsschluss:	Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen ab dem Anfangswert erfüllt ist.

Aufgabe KZM 5-5A. Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mit der Methode der vollständigen Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl *n* größer als 7 existieren ganzzahlige nichtnegative Zahlen *r* und *s*, so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$.

(c) In der Ebene seien n Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):

Induktionsanfang: Für $n = 8$ ist die Aussage richtig, denn es gilt mit $r_8 = 1$ und $s_s = 1$ die Gleichung $3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$.

Induktionsschritt: Wir bezeichnen im Weiteren mit r_k und s_k die Koeffizienten, die eine geeignete Zerlegung für die Zahl k ergeben.

Voraussetzung: Die Aussage sei für eine Zahl $n = k$ richtig ($k \geq 8$).

Behauptung: Die Zerlegung einer Zahl in der geforderten Art ist auch für $n = k + 1$ möglich.

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) Die Zahl k sei ein ganzzahliges Vielfaches von 3, d.h. sie lässt sich in der Form $k = 3 \cdot r_k + 5 \cdot 0$ darstellen. Da k mindestens 8 ist, ist $r \geq 3$.

Dann gilt stets auch die Zerlegung für $k + 1$ in der Form: $k + 1 = 3 \cdot (r_k - 3) + 5 \cdot 2$ mit $r_{k+1} = r_k - 3 \geq 0$ und $s_{k+1} = 2$.

(2) Es sei k kein ganzzahliges Vielfaches von 3. Laut Voraussetzung existiert eine Zerlegung der geforderten Art, d.h. $k = 3 \cdot r_k + 5 \cdot s_k$ mit $s_k > 0$.

Dann ist aber für $k + 1$ die folgende Zerlegung richtig: $k + 1 = 3 \cdot (r_k + 2) + 5 \cdot (s_k - 1)$ mit $r_{k+1} = r_{k+2}$ und $s_{k+1} = s_k - 1 \geq 0$.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$ erfüllt.

Hinweis: Die Lösung ist auch ohne explizite Anwendung der Methode der vollständigen Induktion möglich. Wir gehen davon aus, dass sich jede natürliche Zahl $n > 10$ als $n = 3 \cdot k + a$ mit $a = 8$, 9 oder 10 darstellen lässt. Damit genügt es, die Zerlegungen für die Zahlen 8, 9 und 10 anzugeben, denn für jede Zahl größer 10 kann der Koeffizient für die Zahl 3 entsprechend um k vergrößert gewählt werden. Es gilt: $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$; $9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$; $10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):

Induktions-Anfang: Für $n = 1$ gilt $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9$.

Induktions-Schritt:

Voraussetzung: Für $n = k$ existiert eine ganze Zahl m, so dass die Gleichung $7^k + 3 \cdot k - 1 = 9 \cdot m$ gilt.

Behauptung: Für $n = k + 1$ gibt es eine ganze Zahl m', so dass die Gleichung $7^{k+1} + 3 \cdot (k + 1) - 1 = 9 \cdot m'$ gilt.

Beweis: Durch Ausmultiplizieren bestätigen wir die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$7^{k+1} + 3 \cdot (k + 1) - 1 = 7 \cdot (7^k + 3 \cdot k - 1) - 18 \cdot k + 9.$$

Da laut Voraussetzung der Ausdruck in der Klammer durch 9 teilbar ist, ist der gesamte Ausdruck offensichtlich ebenfalls durch 9 teilbar.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt.

Hinweis: Die Lösung ist auch ohne explizite Anwendung der Methode der vollständigen Induktion möglich. Wir ermitteln beispielsweise für die Summanden und daraus für die Summe in Abhängigkeit von n die Reste bei Division durch 9 und tragen die Ergebnisse tabellarisch zusammen. Da sich die Reste periodisch wiederholen, ist die Teilbarkeit durch 9 für alle n erkennbar:

n	7^n	$3 \cdot n$	$7^n + 3n - 1$
1	7	3	9
2	4	6	9
3	1	0	0
4	7	3	9
5	4	6	9
6	1	0	0

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Es sei möglich, die Schnittflächen von $n \geq 1$ Kreisen so mit zwei Farben zu färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

Behauptung: Wir können die Schnittflächen von $n + 1$ Kreisen so mit zwei Farben färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

Beweis: In der Ebene seien $n + 1$ Kreise gegeben. Entfernen wir einen dieser Kreise, so können die Schnittflächen der verbleibenden n Kreise gemäß der Voraussetzung wie gefordert gefärbt werden. Danach fügen wir den zuvor entfernten Kreis wieder hinzu und vertauschen im Innern dieses Kreises die Farbe jeder Schnittfläche mit der anderen der beiden verwendeten Farben. Leicht sehen wir, dass dadurch eine Färbung entsteht, die den Bedingungen gerecht wird:

- In dem Teil der Ebene, der außerhalb des hinzugenommenen Kreises liegt, verändern sich die Farben von sich berührenden Schnittflächen nicht, so dass sie die Bedingungen laut Voraussetzung erfüllen.

- Im Innern des hinzugenommenen Kreises werden die Farben getauscht, damit haben sich berührenden Schnittflächen wie vorher unterschiedliche Färbungen.
- Entstehen durch die Kreislinie neue Berührungslinien zweier Schnittflächen durch ein vorher gleichfarbiges Gebiet, so liegt eine dieser Schnittflächen außerhalb und die andere innerhalb des Kreises. Aufgrund der Umkehrung der Färbung im Inneren wird auch in diesem Fall die Bedingung erfüllt.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt.

❑

Manchmal soll eine Aussage nur für alle n ab einem bestimmten Startwert n_0 gezeigt werden. Dann müssen wir im Induktionsanfang natürlich zeigen, dass die Aussage für n_0 gilt, wobei der geeignete Startwert ggf. selbst zu finden ist.

Aufgabe. Man finde alle natürlichen Zahlen n, für die die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ erfüllt ist.

Lösungshinweise:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ und für $n = 2$ ist die geforderte Ungleichung erfüllt, denn es gilt $2^0 > 0^2$ und $2^1 > 1^2$.

Zwischenbemerkung: Damit erscheint der Induktionsanfang korrekt. Da Terme mit Exponenten im Allgemeinen schneller wachsen als quadratische Terme, könnten wir die Gültigkeit für alle $n > 0$ vermuten.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Es gelte die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ für $n = k$.

Behauptung: Die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ sei auch für $n = k + 1$ richtig.

Beweis: Es gilt $2^{n-1} = 2^k = 2 \cdot 2^{k-1} > 2 \cdot (k-1)^2 = 2 \cdot (n-2)^2$. Ist nun $2 \cdot (n-2)^2 > (n-1)^2$, so ist der Beweis erbracht. Schnell neigen wir zu der Aussage „wie man leicht sieht“ und betrachten den Beweis als beendet.

Allerdings finden wir aus der Ungleichung durch Ausmultiplizieren der Quadrate

$$2 \cdot n^2 - 8 \cdot n + 8 > n^2 - 2n + 1$$
$$n^2 - 6n + 7 = (n-3)^2 - 2$$

Die Ungleichung ist aber nur dann erfüllt, wenn $(n-3)^2$ größer oder gleich als 2 wird. Wir überzeugen uns leicht, dass dies für ganze Zahlen $n < 5$ nicht stimmt! Wir müssen

den Induktionsanfang noch einmal prüfen und stellen dabei fest, dass die geforderte Ungleichung für $n = 3, 4, 5$ nicht gilt, denn es ist jeweils $2^2 = 2^2, 2^3 = 8 < 9 = 3^2, 2^4 = 4^2$. Aber es gilt $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
Die Ungleichung kann also nur für alle n > 5 richtig sein.

Induktionsschluss: Nach der Methode der vollständigen Induktion folgt aus dem (präzisierten) Induktionsanfang und dem Induktionsschritt, dass die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ für alle $n \geq 5$ richtig ist. ❑

In der Lösungsvariante zu folgender Aufgabe wird noch einmal recht aktuell demonstriert, wie die Methode der vollständigen Induktion ohne Formalismus angewandt werden darf.

Aufgabe MO611033. Es sei a_0 eine positive ganze Zahl, und für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei a_n das kleinste Vielfache von n, das größer ist als a_{n-1}.

Zeigen Sie, dass es eine positive ganze Zahl k gibt, für die $a_n = k \cdot n$ für alle $n \geq k$ gilt.

Lösungshinweise: Wir betrachten zunächst für $n \geq 1$ die Folge der Quotienten $b_n = \frac{a_n}{n}$. Dies ist eine monoton fallende Folge positiver ganzer Zahlen. Nach Konstruktion ist nämlich a_n durch n teilbar und positiv, also ist b_n eine positive ganze Zahl. Da für jedes n eine der $n+1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $a_n + 1$, … , $a_n + n + 1$ durch $n+1$ teilbar sein muss, ist $a_n + 1 \leq a_n + n + 1$, also

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} \leq \frac{a_n}{n+1} + 1 < \frac{a_n}{n} + 1 = b_n + 1$$

Da links und rechts dieser Ungleichung ganze Zahlen stehen, folgt $b_{n+1} \leq b_n$.Damit ist (b_n) eine monoton fallende Folge positiver ganzer Zahlen; diese muss irgendwann konstant werden. Es gibt also positive ganze Zahlen k und N derart, dass $b_n = k$ für alle $n \geq N$ ist. Wir wählen das kleinstmögliche N, für welches dies gilt.

Angenommen, es wäre $N \geq k + 1$. Dann gilt insbesondere $N - 1 \geq k \geq 1$ und b_{N-1} ist definiert. Wir wissen bereits, dass $b_{N-1} \geq b_N = k$ gilt, und da N minimal gewählt war, haben wir sogar $b_{N-1} \geq k + 1$. Dann gilt

$$a_{N-1} = (N-1) \cdot b_{N-1} \geq (N-1) \cdot (k+1) = N \cdot k + N - k - 1 \geq N \cdot b_N = a_N,$$

da $N - k - 1 \geq 0$ gilt.

Laut Aufgabenstellung gilt aber $a_N > a_{N-1}$, womit die Annahme widerlegt ist.

Lösungsvariante: Es sei $N = a_0 > 0$. Wir verwenden die Ungleichung $a_{n+1} \leq a_n + n + 1$ für alle $n \geq 1$. Wir haben damit insbesondere die Abschätzung

$$a_{2N} \leq a_0 + 1 + 2 + \cdots + 2 \cdot N = N + \frac{2 \cdot N(2 \cdot N + 1)}{2} = 2N^2 + 2N \leq (2N)^2$$

Es existiert somit ein minimales k mit $a_n \leq k^2$. Wegen $a_0 > 0$ gilt $k > 0$ und $a_{k-1} > (k-1)^2$. Für $k - 1 > 0$ ist dabei $a_k - 1$ durch $k - 1$ teilbar und es folgt $a_{k-1} \geq k \cdot (k-1)$, während für $k - 1 = 0$ die Abschätzung $a_{k-1} \geq k(k-1) = 0$ offensichtlich ist. Da $a_k > a_{k-1} - 1 \geq k \cdot (k-1)$ gilt und a_k durch k teilbar ist, folgt $a_k \geq k^2$ und somit $a_k = k^2$.

Mit vollständiger Induktion folgt abschließend $a_n = k \cdot n$ für alle $n \geq k$. Der Fall $n = k$ wurde soeben bewiesen. Für den Induktionsschritt sei $a_n = k \cdot n$ bereits bekannt. Es gilt dann

$$k \cdot (n+1) = k \cdot n + k > a_n = k \cdot n > k \cdot n + k - n - 1 = (k-1) \cdot (n+1)\,,$$

womit sich $a_{n+1} = k \cdot (n+1)$ als kleinstes Vielfaches von $n + 1$, welches größer ist als a_n, ergibt. ❑

Technische Universität Chemnitz wird 190

Am 2. Mai 1836 wurde die Königliche Gewerbeschule zu Chemnitz in den Räumen der hiesigen Lateinschule gegründet. Dr. FRANK GÖRING, wissenschaftlicher Mitarbeiter der Professur Algorithmische und Diskrete Mathematik (Prof. CHRISTOPH HELMBERG) und sachsenweit für sein Engagement für die Verbindung der Fakultät für Mathematik mit Schulen bekannt, spielt im Jubiläumsjahr der TU Chemnitz mit der Zahl 190. In einem Beitrag[4] der TUC erläutert er: „Treffen sich 20 Leute auf einer Party und jeder begrüßt jeden mit Handschlag, so ergeben sich genau 190 Handschläge“, und fügt schmunzelnd hinzu: „Man kann natürlich auch mit Sekt anstoßen und nachzählen, wie oft die Gläser klingen.“

Weiter setzt er die Zahlenspielereien fort: 190 ist auch eine „freundliche“ Zahl. So werden Zahlen genannt, die Summe mehrerer aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sind. Das geht bei 190 auf verschiedene Weisen:

$$190 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$$
$$190 = 36 + 37 + 38 + 39 + 40$$
$$190 = 46 + 47 + 48 + 49$$

Eine besondere Eigenschaft ist außerdem, dass 190 die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist: $190 = 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$.

Mathematisch korrekt ist auch, dass die Zahl 190 durch ihre Quersumme teilbar ist. „Das ist aber nicht so ungewöhnlich“, sagt Dr. GÖRING. „Sicher finden pfiffige Menschen noch mehr Berührungspunkte zur diesjährigen Uni-Jubiläumszahl.“ Wer

[4] https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/13375

Ideen hat, kann seine Vorschläge gern unter frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de melden. Die Pressestelle sagt jedenfalls 190-mal „Danke!“ für diese kleine rechnerische Spielerei.

Zur Jubiläumszahl passt auch die März-Aufgabe aus dem Monatsrätsel[5] von Dr. FRANK GÖRING. „Bei der Suche nach besonderen Eigenschaften der Alterszahl unserer Universität als Bildungseinrichtung kann man auch die eine oder andere KI befragen. Eine interessante Antwort war, dass 190 unberührbar ist. Dazu wurde von der KI die Folge der unberührbaren Zahlen zitiert und auch ausschnittsweise angegeben -- mit 190 zwischendrin. Folgte man zur Quelle des Zitats (*Online Enzyklopädie der ganzzahligen Folgen*), stellte man überrascht fest, dass dort die 190 nicht in der Folge vorkam!

Wie ist die Eigenschaft einer natürlichen Zahl, unberührbar zu sein, eigentlich definiert? Nun, eine Zahl s ist berührbar, wenn es eine natürliche Zahl n so gibt, dass s die Summe aller echten Teiler von n ist. Dabei ist ein echter Teiler t von n eine natürliche Zahl t kleiner als n derart, dass n ein Vielfaches von t ist. So ist beispielsweise die Summe der echten Teiler von 190 gleich 170, die 170 also berührbar. Addiert man die echten Teiler einer Primzahl, erhält man immer 1, die 1 ist also auch berührbar. Addiert man die echten Teiler einer zusammengesetzten Zahl, erhält man immer mehr als 2, da in der Summe 1 und mindestens eine Primzahl auftauchen. Damit ist 2 also nicht berührbar. Die Zahlen, die nicht berührbar sind, heißen unberührbar. Was ist nun in Bezug auf 190 richtig?

Märzfrage: Ist 190 unberührbar? Wieso?

Natürlich wollen wir hier keine Diskussion der Vertrauenswürdigkeit der KI oder der Online-Enzyklopädie der ganzzahligen Folgen, sondern eine eigene logisch korrekte Begründung.“

In alten Mathebüchern geblättert

Das Induktionsprinzip ist schon lange bekannt. Bereits bei EUKLID VON ALEXANDRIA (um 300 v. Chr.) in seinen Elementen finden wir diesen Ansatz, jedoch ohne einen Beweis. RICHARD DEDEKIND (1831 – 1916) prägte schließlich 1888 den Begriff „vollständige Induktion“, wie wir ihn auch heute noch verwenden.

Was ſind und was ſollen die Zahlen[6]

[5] https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/raetsel/

[6] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt. Digitalisiert zugänglich unter https://archive.org/details/wassindundwasso00dedegoog/page/XVI/mode/2up

Von
Richard Dedekind
Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn
Braunschweig, 1893.

§. 4.
Abbildung eines Systems in sich selbst

...

59. Satz der vollständigen Induction. Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Theil irgend eines Systems Σ ist = mag letzteres Theil von S sein oder nicht =, genügt es zu zeigen,

(1) daß $A \ni \Sigma$, und

(2) daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ist.

Beweis ...

60. Der vorstehende Satz bildet, wie sich später zeigen wird, die wissenschaftliche Grundlage für die unter dem Namen der vollständigen Induction (des Schlußes von n auf $n+1$) bekannt Beweisart, und er kann auch auf folgende Weise ausgeprochen werden: Um zu beweisen, daß alle Elemente der Kette A_0 eine gewiße Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß ein Satz $\mathfrak{S}$, in welchem von einen unbestimmten Dinge n die Rede ist, wirklich für alle Elemente n der Kette A_0 gilt), genügt es zu zeigen:

(1) daß alle Elemente a des Systems A die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder daß $\mathfrak{S}$ für alle a gilt), und

(2) daß dem Bilde n' jedes solchen Elementes n von A_0, die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, dieselbe Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt (oder daß der Satz $\mathfrak{S}$, sobald er für ein Element n von A_0, gilt, gewiß auch für dessen Bild n' gelten muß).

In der That, bezeichnet man mit S das System aller Dinge, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen (oder für welche der Satz $\mathfrak{S}$ gilt), so leuchtet die vollständige Übereinstimmung der jetzigen Ausdrucksweise des Satzes mit der in 59 gebrauchten unmittelbar ein.

...

§. 6.
Einfach unendliche Systeme. Reihe der natürlichen Zahlen.

...

80. Satz der vollständigen Induction (Schluß von n auf n').
Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_0 gilt, genügt es zu zeigen,

(1) daß er für $n = m$ gilt, und

(2) daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl n der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl n' folgt.

Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem allgemeinen Satze 59 oder 60. Am häufigsten wird der Fall auftreten, wo $m = 1$, also m_0 die volle Zahlenreihe $\mathfrak{N}$ ist.

...

§. 7.
Größere und kleinere Zahlen

81. Satz. Jede Zahl n ist verschieden von der auf sie folgende Zahl n'.
Beweis durch vollständige Induction (80). Wenn (1) der Satz ist wahr für die Zahl $n = 1$, weil sie nicht in $\mathfrak{N}'$ enthalten ist (71), während die folgende Zahl 1' als Bild der in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Zahl 1 Element von $\mathfrak{N}'$ ist.

(2) Ist der Satz wahr für eine Zahl n, und setzt man die folgende Zahl $n' = p$, so ist n verschieden von p, woraus nach 26 wegen der Aehnlichkeit (71) der ordnenden Abbildung φ folgt, daß n', also p verschieden von p' ist. Mithin gilt der Satz auch für die auf n' folgende Zahl p, w. z. b. w.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2026

Man untersuche, ob es für $n = 2$ und für $n = 3$ jeweils positive natürliche Zahlen a und b gibt, so dass

$$\sum_{k=0}^{n} (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2$$

gilt!

L*ösungshinweise:* Eine solche Fragestellung wird durch geeignete Beispiele für $n = 2$ und $n = 3$ vollständig beantwortet. Mit folgenden Beispielen können wir die Frage also positiv beantworten:

$$n = 2, a = 25, b = 21\colon 25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030 = 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2$$
$$n = 3, a = 41, b = 36\colon 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = 7230$$
$$= 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2$$

Natürlich bleibt eine solche Lösung unbefriedigend, denn die erforderliche systematische Suche könnte so aufwendig sein, dass das Finden der Parameter nicht effektiv durchführbar erscheint. Wir wollen deshalb eine Lösung erarbeiten.

Wenn wir $n = 2$ setzen, sind also Parameter a und b gesucht mit

$$\sum_{k=0}^{2} (a+k)^2 = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 3 \cdot a^2 + 6 \cdot a + 5 = 3 \cdot (a+1)^2 + 2,$$
$$\sum_{k=0}^{3} (b+k)^2 = b^2 + (b+1)^2 + (b+2)^2 + (b+3)^2 = 4 \cdot b^2 + 12 \cdot b + 14$$
$$= (2 \cdot b + 3)^2 + 5.$$

Somit soll gelten

$$3 \cdot (a+1)^2 + 2 = (2 \cdot b + 3)^2 + 5$$
$$3 \cdot (a+1)^2 - (2 \cdot b + 3)^2 = 3$$

Offensichtlich muss $2 \cdot b + 3$ und damit auch b selbst durch 3 teilbar sein. Also gibt es eine ganze Zahl c mit $b = 3c$. Setzen wir nun $x = a + 1$ und $y = 2c + 1$, so erhalten wir die PELLsche Gleichung

$$x^2 - 3 \cdot y^2 = 1.$$

Im Thema 35.2 über DIOPHANTische Gleichungen[7] haben wir eine rekursive Bildungsvorschrift für alle Lösungen dieser Gleichung diskutiert. Wir probieren entsprechend nacheinander:

$(x; y) = (2; 1) \implies a = x - 1 = 1, b = 3 \cdot c = \frac{3}{2} \cdot (y - 1) = 0$: entfällt, weil b nicht positiv ist.

$(x; y) = (7; 4) \implies a = x - 1 = 6, b = 3 \cdot c = \frac{3}{2} \cdot (y - 1) = \frac{9}{2}$: entfällt, weil b nicht ganzzahlig ist.

$(x; y) = (26; 15) \implies a = x - 1 = 25, b = 3c = \frac{3}{2} \cdot (y - 1) = 21$: ergibt die oben angegebene Lösung.

Wenn wir $n = 3$ setzen, sind also Parameter a und b gesucht mit

$$\sum_{k=0}^{3} (a+k)^2 = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 = 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 14$$
$$= (2 \cdot a + 3)^2 + 5,$$

$$\sum_{k=0}^{4} (b+k)^2 = b^2 + (b+1)^2 + (b+2)^2 + (b+3)^2 + (b+4)^2$$
$$= 5 \cdot b^2 + 20 \cdot b + 30 = 5 \cdot (b+3)^2 + 10\,.$$

und folglich

$$(2 \cdot a + 3)^2 + 5 = 5 \cdot (b+2)^2 + 10\,,$$
$$(2 \cdot a + 3)^2 - 5 \cdot (b+2)^2 = 5\,.$$

Offensichtlich muss $2 \cdot a + 3$ durch 5 teilbar sein. Also gibt es eine ganze Zahl c mit $2a + 3 = 5c$, d.h. wir schreiben die Gleichung um zu

$$25c^2 - 5 \cdot (b+2)^2 = 5$$
$$(b+2)^2 - 5 \cdot c^2 = -1.$$

Setzen wir nun $x = b + 2$ und $y = c$, so erhalten wir die PELLsche Gleichung

[7] s. Heft 01/2026

$$x^2 - 5 \cdot y^2 = -1$$

Auch für diese Gleichung finden wir eine rekursive Bildungsvorschrift für alle Lösungen. Wir probieren nacheinander:

$(x; y) = (2; 1) \implies b = x - 2 = 0, a = \frac{1}{2} \cdot (5c - 3) = \frac{1}{2} \cdot (5y - 3) = 1$:
entfällt, weil b nicht positiv ist.

$(x; y) = (38; 17) \implies b = x - 2 = 36, a = \frac{1}{2} \cdot (5c - 3) = \frac{1}{2} \cdot (5y - 3) = 41$:
ergibt die oben angegebene Lösung.

Nachträglich fällt uns auf, dass mit $5^2 = 3^2 + 4^2$ auch eine Lösung für $n = 0$ existiert. Wir untersuchen deshalb auch den Fall $n = 1$. Dann soll also gelten:

$$a^2 + (a+1)^2 = b^2 + (b+1)^2 + (b+2)^2 ,$$
$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 1 = 3 \cdot b^2 + 6 \cdot b + 5 ,$$
$$2 \cdot a \cdot (a+1) = 3 \cdot (b+1)^2 + 1 .$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung offenbar nicht durch 3 teilbar ist, darf weder a noch $a + 1$ durch 3 teilbar sein. Deshalb gibt es eine ganze Zahl c mit $a = 3 \cdot c + 1$. Setzen wir dies ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot c + 1) \cdot (3 \cdot c + 2) &= 2 \cdot (9 \cdot c^2 + 9 \cdot c + 2) = 18 \cdot (c^2 + c) + 4 \\ &= 3 \cdot (b+1)^2 + 1, \end{aligned}$$

also

$$18 \cdot (c^2 + c) = 3 \cdot (b+1)^2 = -3$$
$$6 \cdot (c^2 + c) = (b+1)^2 - 1$$

Durch systematisches Probieren finden wir für $n = 1$ mit $b = 10$ und $c = 4$, also $a = 3 \cdot c + 1 = 13$, eine Lösung:

$$13^2 + 14^2 = 365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$$

Auffällig erscheint bei den gefundenen Lösungen, dass die verwendeten Quadratzahlen die Quadrate einer lückenlosen Folge von natürlichen Zahlen darstellen. Deshalb vermuten wir

Satz. Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ existiert eine positive ganze Zahl b, so dass für $a = b + n + 2$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (a+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1} (b+k)^2$$

Beweis: Unter Verwendung der bekannten Summenformeln $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ und $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$ finden wir nach (aufwendigen) äquivalenten Umformungen die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n}(b+n+2+k)^2 = \sum_{k=0}^{n}((b+n+2)^2 + 2\cdot(b+n+2)\cdot k + k^2)$$
$$= (n+1)\cdot(b+n+2)^2 + 2\cdot(b+n+2)\cdot\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2$$
$$= (n+1)\cdot b^2 + (n+1)\cdot(3n+4)b + (n+1)\cdot\frac{14\cdot n^2+37\cdot n+24}{6},$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(b+k)^2 = \sum_{k=0}^{n+1}(b^2 + 2\cdot b\cdot k + k^2)$$
$$= (n+2)\cdot b^2 + 2\cdot b\cdot\sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} k^2$$
$$= (n+2)\cdot b^2 + (n+1)\cdot(n+2)\cdot b + (n+1)\cdot\frac{2\cdot n^2+7\cdot n+6}{6}.$$

Damit erhalten wir für die Differenz

$$\sum_{k=0}^{n+1}(b+k)^2 - \sum_{k=0}^{n}(b+n+2+k)^2 = \cdots = \big(b+(n+1)\big)\cdot\big(b-(n+1)(2n+3)\big)$$

Da der linke Faktor stest positiv ist, sind beide Summen genau dann gleich groß, wenn $b = (n+1)(2n+3)$ erfüllt ist. ❑

Monatsaufgabe 04/2026[8]

Es ist zu untersuchen, ob es Quadrupel (x, y, z, a) positiver ganzer Zahlen gibt, für die die Eigenschaft (1) oder (2) erfüllt ist. Man beweise die entsprechenden Vermutungen.

(1) $x^2 + y^2 = 10\cdot(z^2 + a^2)$,
(2) $x^2 + y^2 = 11\cdot(z^2 + a^2)$.

[8] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.05.2026 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Termine

Finale des 61. Bundeswettbewerbs „Jugend forscht“, 28. bis 31. Mai 2026, Herzogenaurach, Freistaat Bayern (Bundespate: Schaeffler AG)

Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade, 07. bis 10 Juni 2026, Hamburg.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Quadratische Gleichungen 3
Methode der vollständigen Induktion 8
Technische Universität Chemnitz wird 190 16
In alten Mathebüchern geblättert 17
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2026 19
Monatsaufgabe 04/2026 22
Termine 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[9]	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2026	Thema 7.3	Kryptogramme	MO651021 MO650921 MO561013 MO451044 MO081014
03/2026	Thema 4.1	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	MO601023 MO450924 MO431024
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015 MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041 MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

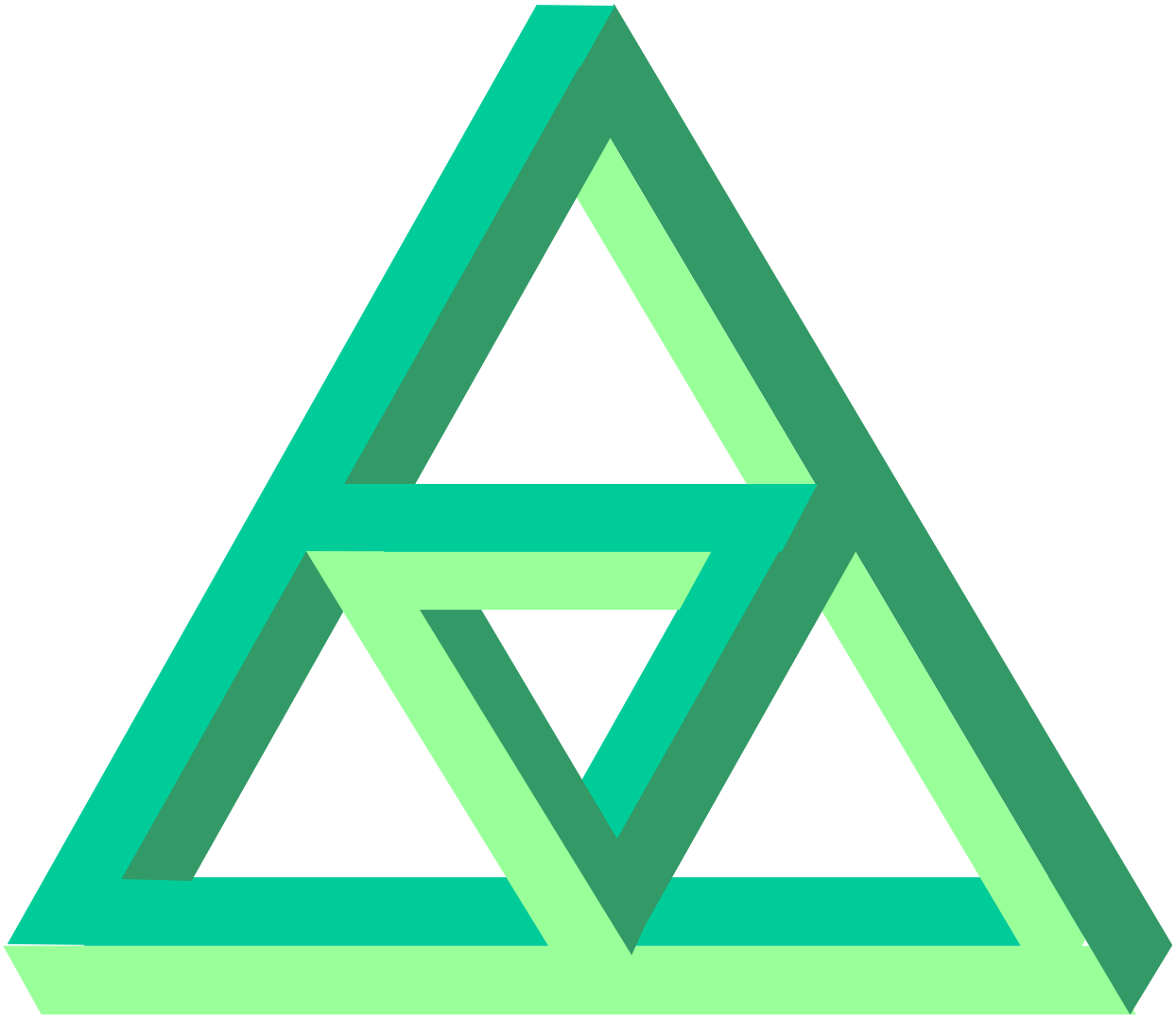
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2026 (Mai 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mehrere Aufgaben der 3. Runde (Landesausscheid) der 65. MO bestätigen das Konzept der „Mathematischen Kostproben“: Mittels intensiver Nachbereitung der bislang gestellten Aufgaben lassen sich Lösungsansätze für aktuelle Problemstellungen effektiver finden. Selbstverständlich wird im Allgemeinen nicht erwartet, dass damit eine Vorlage für die Lösungsdarstellung gegeben ist. Aber die vielseitige Beschäftigung mit der Thematik hilft, typische Strategien auszuprobieren.

Mit den Aufgaben **MO650931/MO651031** nehmen wir Bezug zum Thema 23 „Quersummen und Querprodukte“. Mit der Aufgabe **MO651036** erinnern wir an das Thema „Summe von Quadratzahlen“. Schließlich zeigen die Aufgaben **MO650934/MO651034** bekannte Lösungsansätze aus dem Thema „Bewegungsaufgaben“.

Im historischen Rückblick zeigen wir einen Ausschnitt aus der **Altindischen Mathematik**, die für viele Algorithmen für (Kopf-) Rechenvorteile bekannt ist (vedische Mathematik). Ausgehend von der Teilbarkeit durch 9 mittels Quersummenbildung lassen sich Verallgemeinerungen für die Teilbarkeitsregeln durch auf 9 endenden Zahlen formulieren.

Wir blicken auf die **15. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen** (EGMO) zurück, auf der das deutsche Team einmal mehr sehr erfolgreich abschnitt. Schließlich berichten wir vom **8. Tag der Mathematik** der TU Chemnitz, der sich weiterhin großer Belibetheit unter Jugendlichen erfreut.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 23 (Nachtrag) – Quersummen und Querprodukte[3]

Aufgabe 23.19 – MO650931. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft $3n^2 + Q(n) = 13080$, wobei $Q(n)$ die Quersumme von n ist.

Hinweis: Die Quersumme von 537 ist $Q(537) = 5 + 3 + 7 = 15$.

Lösungshinweise: N kann nicht einstellig sein, weil für $n < 10$ die Ungleichung $3n^2 + Q(n) < 310$ folgt. N kann aber auch nicht größer 99 sein, weil für $n \geq 100$ die Ungleichung $3n^2 + Q(n) \geq 30000$ folgt.

Wir setzen deshalb $n = 10a + b$ mit einstelligen Zahlen a und b. Die Gleichung lautet für diesen Fall

$$3n^2 + Q(n) = 300 \cdot a^2 + 60 \cdot ab + 3b^2 + a + b = 13080$$

Wegen $0 \leq b \leq 9$ können wir abschätzen

$$300 \cdot a^2 + a - 13080 \leq 0 \text{ , also } \quad a^2 - 44 \leq 0$$
$$300 \cdot a^2 + 541 \cdot a - 12010 \geq 0, \text{also } \quad a^2 + 2 \cdot a - 40 > 0$$

Daraus erkennen wir einerseits $a < 7$ und andererseits $a > 5$. Also kann nur $a = 6$ gelten. Dann finden wir:

$$3n^2 + Q(n) = 10806 + 361b + 3b^2 = 13080$$
$$3b^2 + 361b - 2274 = 0$$
$$b^2 + \frac{361}{3}b - 758 = 0$$
$$b_{1,2} = -\frac{361}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{361}{6}\right)^2 + 758} = -\frac{361}{6} \pm \frac{397}{6}$$

Wegen $0 \leq b \leq 9$ kann nur die positive Lösung $b_2 = 6$ die Bedingung erfüllen.

Lösungsvariante: Da $Q(n) \geq 1$ ist, folgt

$$3 \cdot n^2 \leq 13079 < 13467 = 3 \cdot 4489 \ = 3 \cdot 67^2$$

und damit $n < 67$. Wir erhalten für die Quersumme folglich $Q(n) \leq 14 = Q(59)$. Aus der Ausgangsgleichung kann damit $3n^2 \geq 13080 - 14 = 13066$, und daraus $n^2 \geq 4356 = 66^2$ und $n \geq 66$ gefolgert werden. Damit ist $n = 66$ der einzige Lösungskandidat.

Lösungsvariante: Wegen $3 \cdot 70^2 = 14700 > 13080$ muss n in grober Abschätzung kleiner als 70 sein. Da 13080 die Quersumme 12 besitzt, ist 13080 durch 3 teilbar. Weil $3 \cdot n^2$ ebenfalls durch 3 teilbar ist, muss dies auch auf $Q(n)$ und damit auf

[3] S. Hefte 07/2023 und 08/2023

n selbst zutreffen. Somit ist n unter den durch 3 teilbaren Zahlen zu suchen, die kleiner als 70 sind. Damit gilt $Q(n) < 16$, was wegen $3 \cdot 60^2 = 10800$ auf $3 \cdot 60^2 + Q(n) < 10800 + 16 < 13080$ und somit in ebenfalls grober Abschätzung auf $n > 60$ führt. Von den zwischen 60 und 70 liegenden durch 3 teilbaren Zahlen erfüllt nur 66 die Bedingung der Aufgabe.

Probe für jede der Lösungsvarianten: Die Probe $3 \cdot 66^2 + Q(66) = 13068 + 12 = 13080$ zeigt, dass 66 tatsächlich Lösung ist.

Aufgabe 23.20 – MO651031. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft $40n + Q(n) = n^2 + 402$, wobei $Q(n)$ die Quersumme von n ist.

Lösungshinweise: Wir formen die Ausgangsgleichung äquivalent um zu

$$Q(n) = (n - 20)^2 + 2$$

Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl der Stellen von n.
Fall 1: n ist einstellig. Dann können wir abschätzen:

$$10 > Q(n) = (n - 20)^2 + 2 \geq 11^2 + 2 = 123.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es in diesem Fall keine Lösung geben kann.

Fall 2: n ist zweistellig, also $n = 10a + b$ mit den Ziffern a und b. Setzen wir $a = 1$ in die zu lösende Gleichung ein, erhalten wir aus

$$b + 1 = (10 + b - 20)^2 + 2 = (b - 10)^2 + 2$$
$$b^2 - 21b + 101 = 0$$

Diese Gleichung hat mit $b_{1,2} = \frac{21}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 - 101} = \frac{1}{2} \cdot \left(21 \pm \sqrt{845}\right)$ keine ganzzahligen Lösungen.

Für $a = 2$ ergibt sich aus $2 + b = b^2 + 2$, also $b = b^2$, die Auswahl $b \in \{0, 1\}$.

Für $a \geq 3$ folgt, dass $18 \geq a + b = (n - 20)^2 + 2 \geq 10^2 + 2 = 102$ gelten muss. Dieser Widerspruch zeigt, dass es in diesem Fall keine weiteren Lösungen gibt.

Fall 3: n ist mindestens dreistellig. Offensichtlich gilt dann $n - 20 \geq 80$, und wegen $n^2 > 20$ gilt $n - 20 > n^2$, durch Multiplikation folgt also $(n - 20)^2 > 80 \cdot \frac{n}{2} = 40n$. Offensichtlich ist $n > Q(n)$, insgesamt gilt also $(n - 20)^2 > 40n > n > Q(n)$. Dies zeigt, dass es in diesem Fall keine weiteren Lösungen gibt.

Damit sind $n = 20$ und $n = 21$ die einzigen Lösungskandidaten. Die Proben

$$40 \cdot 20 + 2 = 802 = 20^2 + 402 \text{ und } 40 \cdot 21 + 3 = 843 = 21^2 + 402$$

zeigen, dass sie tatsächlich Lösungen sind. ❑

Hinweis: Anstelle der Analyse für $a \geq 3$ im Fall 2 können wir auch $n' = n - 20$ untersuchen. Ist $n < 100$, so gilt

$$Q(n') + 2 = (n')^2 + 2$$

Da eine Zahl stets mindestens so groß wie ihre Quersumme ist, kann die Gleichheit nur im Fall $n' = 0$ oder $n' = 1$ und damit $n = 20$ bzw. $n = 21$ gelten

Lösungsvariante: Da für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $Q(n) \leq n$ gilt, muss wegen $40n + Q(n) = n^2 + 402$ auch $40n + n \geq n^2 + 402$ gelten, was auf $0 \geq n^2 - 41n + 402$ und damit auf $20{,}5 - \sqrt{18{,}25} \leq n \leq 20.5 + \sqrt{18{,}25}$ führt. Das schränkt die Lösungssuche auf $n \in \{17, 18, \ldots, 24\}$ ein. Das Einsetzen dieser verbleibenden Möglichkeiten zeigt die beiden Lösungen $n = 20$ und $n = 21$ und schließt die übrigen Werte aus.

Passend dazu diskutierten wir bereits im Heft 08/2023 die

Aufgabe 23.12 – MO440924. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihres Querproduktes $QP(n)$ beträgt 2015.

Die Lösungsstrategie beruhte ebenso wie oben zunächst auf der Eingrenzung des Wertebereiches für n, um anschließend durch systematisches Probieren die Lösungsmenge zu bestimmen. Sogar ein vollständiges Probieren für alle Zahlen n<2015 wäre zwar nicht elegant, aber korrekt, da die zu probierende Menge endlich ist. Allerdings müsste in der Lösungsdarstellung für den Korrektor ohne Rechenaufwand erkennbar werden, dass die Lösungsmenge korrekt und vollständig ist. Dies ist stets mit einer tabellarischen Übersicht möglich, aber eventuell mit großem Schreibaufwand verbunden. Auch die folgende Aufgabe folgt der Lösungsstrategie.

Aufgabe 23.21 – MO441024/KZM-5-1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen *n*, für die gilt: Die Summe aus *n*, ihrer Quersumme *Q*(*n*) und deren Quersumme (*Q*(*Q*(*n*)) beträgt 2022.

Lösungshinweise: Offenbar $ist\ n \leq 2020$, wegen $Q(n) + (Q(Q(n)) \geq 2$ und $n + Q(n) + (Q(Q(n)) = 2020$.

Fall 1: Es gelte $n \geq 2000$, d.h. es gibt eine Zahl $m = 10a + b$ mit $0 \leq m \leq 22$, also $(a = 0{,}1{,}2)$ und $b = (0, \ldots, 9)$. Dann gilt:

$$2022 = n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2000 + 10a + b + 2 + a + b + Q(2 + a + b)$$

also

$$11a + 2b + Q(2 + a + b) = 20.$$

Für $a = 0$ folgt $2b + Q(2 + b) = 20$, was nach Probieren mit allen einstelligen Zahlen b nur für $b = 6$ und $b = 9$ erfüllt ist.

Für $a = 1$ folgt $2b + Q(3 + b) = 9$, was nach Probieren mit allen einstelligen Zahlen b nur für $b = 2$ erfüllt ist.

Für $a = 2$ folgt $2b + Q(4 + b) < 0$, so dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Fall 2: Angenommen, es sei $n \leq 1900$. Dann gilt $Q(n) \leq Q(1899) = 27$ und folglich gilt $Q(Q(n)) \leq Q(19) = 10$. Damit kann die geforderte Summe 2022 nicht mit $n + Q(n) + (Q(Q(n)) < 1900 + 27 + 10 = 1937$ erreicht werden.

Leicht stellen wir fest, dass wir diese Abschätzung auch für größere Schwellen als 1900 führen können. Für $n \leq 1980$ gilt nämlich auch $Q(n) \leq Q(1899) = 27$ und folglich gilt ebenfalls $Q(Q(n)) \leq Q(19) = 10$. Damit kann die geforderte Summe 2022 nicht mit $n + Q(n) + (Q(Q(n)) < 1980 + 27 + 10 = 2017$ erreicht werden.

Fall 3: Es gelte $1980 < n < 2000$, d.h. es gibt eine Zahl $m = 10a + b$ mit $0 < m < 20$, also $(a = 0; 1)$ und $b = (0, \dots, 9)$. Dann gilt:

$$2022 = n + Q(n) + Q(Q(n)) = 1980 + 10a + b + 18 + a + b + Q(18 + a + b)$$

also

$$11a + 2b + Q(18 + a + b) = 24.$$

Für $a = 0$ folgt $2b + Q(18 + b) = 24$.

- Setzen wir $b = 9$, erhalten wir $2 \cdot 9 + Q(18 + 9) = 27 > 24$.
- Setzen wir $b = 8$, erhalten wir $2 \cdot 8 + Q(18 + 8) = 24$.
- Setzen wir $b = 7$, erhalten wir $2 \cdot 7 + Q(18 + 7) = 21 < 24$.
- Setzen wir $b < 7$ ergibt sich $2 \cdot b + Q(18 + b) < 2 \cdot 7 + Q(19) < 24$.

Für $a = 1$ folgt $11 + 2b + Q(19 + b) = 24$, also $2b + Q(19 + b) = 13$.

- Setzen wir $b = 6$, erhalten wir $2 \cdot 6 + Q(19 + 6) = 19 > 13$.
- Setzen wir $b = 5$, erhalten wir $2 \cdot 5 + Q(19 + 5) = 16 > 13$.
- Setzen wir $b = 4$, erhalten wir $2 \cdot 4 + Q(19 + 4) = 13$.
- Setzen wir $b < 4$, erhalten wir $2 \cdot b + Q(19 + b) < 8 + 5 < 13$.

Somit gibt es genau fünf Lösungen: 1988, 1994, 2006, 2009, 2012:

$$1988 + Q(1988) + Q\big(Q(1988)\big) = 1988 + 26 + Q(26) = 2014 + 8 = 2022,$$
$$1994 + Q(1994) + Q(Q(1994)) = 1994 + 23 + Q(23) = 2017 + 5 = 2022,$$
$$2006 + Q(2006) + Q(Q(2006)) = 2006 + 8 + Q(8) = 2014 + 8 = 2022,$$
$$2009 + Q(2009) + Q(Q(2009)) = 2009 + 11 + Q(11) = 2020 + 2 = 2022,$$
$$2012 + Q(2012) + Q(Q(2012)) = 2012 + 5 + Q(5) = 2017 + 5 = 2022.$$

❑

Aufgaben mit Jahreszahlen (in der ursprünglichen Aufgabe aus der 44. MO war die Summe 2004 zu untersuchen) verleiten für Übungszwecke, die aktuelle Jahreszahkl zu verwenden:

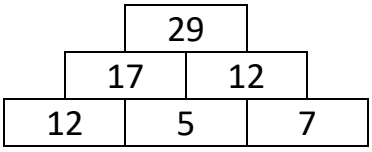
Aufgabe 23.22. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $Q(Q(n))$ beträgt 2026.

Lösungshinweise: Es gibt keine natürliche Zahl n mit der geforderten Eigenschaft.

Lässt nämlich n bei Division durch 3 den Rest r $(r = 0, 1, 2)$ so lässt auch $Q(n)$ und damit auch $Q(Q(n))$ den gleichen Rest r. Somit lässt die Summe der drei Zahlen den Rest $3 \cdot r$, d.h. die Summe ist durch 3 teilbar. Da aber 2026 nicht durch 3 teilbar ist, kann es keine natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft geben. ❑

Thema 9 (Nachtrag) – Summen von Quadratzahlen[4]

Aufgabe 9.29 – MO651036. Eine Zahlenmauer mit n Schichten besteht aus kongruenten Rechtecken, die pyramidenförmig aufgeschichtet sind, siehe Abbildung für ein Beispiel mit $n = 3$. Die n Schichten sind von unten nach oben von 1 bis n durchnummeriert, wobei Schicht k $(k = 1, \ldots, n)$ genau $n - k + 1$ Rechtecke enthält und die Rechtecke dabei so aufgeschichtet sind, dass jedes Rechteck einer oberen Schicht über genau zwei benachbarten Rechtecken der darunterliegenden Schicht platziert ist. In jedem Rechteck steht eine positive ganze Zahl, wobei sich für Rechtecke in oberen Schichten diese Zahl als Summe der beiden Zahlen in den zwei benachbarten Rechtecken der darunterliegenden Schicht ergibt. Die Zahlen in Schicht 1 können also beliebig vorgegeben werden, woraus sich dann die Zahlen in den anderen Schichten eindeutig durch Addition ergeben. In der Abbildung ist eine solche Zahlenmauer für $n = 3$ dargestellt.



a) Geben Sie ein Beispiel einer Zahlenmauer mit $n = 3$ Schichten an, in der alle sechs Zahlen positive Quadratzahlen sind.
b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele Zahlenmauern mit $n = 3$ Schichten gibt, in denen alle sechs Zahlen positive Quadratzahlen sind und der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen in der untersten Schicht gleich 1 ist.
c) Beweisen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ eine Zahlenmauer aus n Schichten gibt, in der alle Zahlen positive Quadratzahlen sind.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Zahl in der Schicht k im Rechteck i, gezählt von links, mit $z_{k,i}$ und schreiben $(z_{k,i}, z_{k,i+1}, z_{k+1,i})$ für die Zahl $z_{k+1,i}$ in der Schicht $k + 1$ und die beiden Zahlen $z_{k,i}$ und $z_{k,i+1}$ in den zwei benachbarten Rechtecken der

[4] s. Hefte 09/2021, 11/2022, 04/2024 und 05/2025

darunterliegenden Schicht, für die laut Aufgabenstellung $z_{k+1,i} = z_{k,i} + z_{k,i+1}$ gelten muss.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Eine Zahlenmauer, in der alle Zahlen Quadratzahlen sind, enthält viele pythagoräische Zahlentripel. Um eine solche Zahlenmauer zu bauen, starten wir mit einem pythagoräischen Zahlentripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$ und erzeugen daraus durch Vielfachenbildung weitere pythagoräische Zahlentripel, aus denen sich dann die geforderte Mauer aufbauen lässt. Wir beginnen mit

$$(z_{11},\ z_{12}, z_{21}) = (a \cdot a)^2\,, (a \cdot b)^2\,, (a \cdot c)^2$$

und

$$(z_{12},\ z_{13}, z_{22}) = (b \cdot a)^2\,, (b \cdot b)^2\,, (b \cdot c)^2$$

Dann ergibt sich

$$(z_{21},\ z_{22}, z_{31}) = (c \cdot a)^2\,, (c \cdot b)^2\,, (c \cdot c)^2$$

Beispiel: Für $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ erhalten wir

$$z_{11} = (3 \cdot 3)^2 = 81,\ z_{12} = (3 \cdot 4)^2 = 144,\ z_{13} = (4 \cdot 4)^2 = 256,$$
$$z_{21} = 81 + 144 = 225 = (5 \cdot 3)^2,\ z_{22} = 144 + 256 = 400 = (5 \cdot 4)^2$$

und

$$z_{31} = 225 + 400 = 625 = (5 \cdot 5)^2.$$

		625		
	225		400	
81		144		256

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es gibt unendlich viele pythagoräische Zahlentripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$ und a, b teilerfremd. Dann gilt aber auch $ggT(a^2, b^2) = 1$ und $ggT(a^2, ab, b^2) = 1$, und es gibt eine Zahlenmauer mit der unteren Schicht $(a^2)^2, (ab)^2, (b^2)^2$, der mittleren Schicht $(ac)^2$, $(bc)^2$ und der oberen Schicht $(c^2)^2$. Das Beispiel aus Lösungsteil a) ist von dieser Form für $a = 3, b = 4, c = 5$.

Eine unendliche Familie geeigneter pythagoräischer Zahlentripel (a, b, c) ist z. B. durch

$$(a, b, c) = \left(\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$$

für ungerade Zahlen $m \geq 3$ gegeben. In der Tat gilt

$$a^2 + b^2 = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{4} + m^2 = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{4} = c^2$$

wobei jeder gemeinsame Teiler von a und b auch $b^2 - 2a = 1$ teilt, womit $ggT(a,b) = 1$ folgt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Zu jedem pythagoräischen Zahlentripel (a,b,c) positiver ganzer Zahlen a, b, c ist durch

$$z_{k,i} = \left(a^{n-k-i+1} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2$$

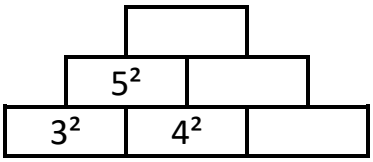
für alle $1 \le k \le n$ und $1 \le i \le n-k+1$ eine geeignete Zahlenmauer aus n Schichten gegeben. In der Tat gilt für alle $1 \le k < n$ und $1 \le i < n-k+1$

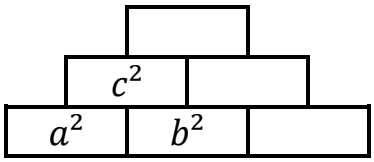
$$\begin{aligned} z_{k,i} + z_{k,i+1} &= \left(a^{n-k-i+1} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 + \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i} \cdot c^{k-1}\right)^2 \\ &= a^2 \cdot \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 + b^2 \cdot \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 \\ &= c^2 \cdot \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 = \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k}\right)^2 = z_{k+1,i} \end{aligned}$$

❑

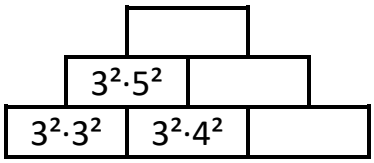
Hinweise: Der offizielle Lösungshinweis zu Teilaufgabe c) wirkt wenig konstruktiv – und rechtfertig die resignierende Frage „Wie sollen wir darauf kommen?“. Versuchen wir die Teilaufgabe konstruktiv zu lösen, so finden wir einen zielführenden Ansatz:

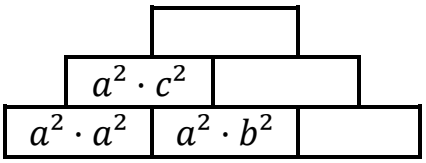
Wir beginnen in der linken unteren Ecke mit einem bekannten pythagoreischen Tripel (a,b,c).



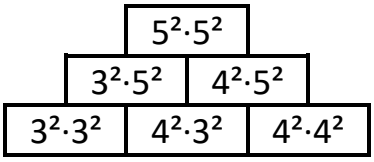


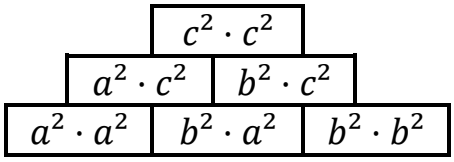
Beim Versuch, die untere Schicht zu vervollständigen, stellen wir fest, dass wir keine pythagoreischen Tripel kennen, die mit 4 beginnen. Wir untersuchen deshalb Vielfache des verwendeten Tripels und kommen dabei nach wenigen Versuchen auf die folgende Idee:





Vertauschen wir im mittleren Feld der unteren Schicht die Faktoren, ist die Lösungsidee erkennbar und leicht zu vervollständigen. So füllen wir die Rechenmauer aus:





Damit ist zugleich die Teilaufgabe b) beantwortet. Um einen Lösungsansatz für die Teilaufgabe c) zu finden, verallgemeinern wir die Vervollständigung: Wir multiplizieren die untere Schicht nochmals mit a^2 und können anschließend das

rechte Feld der unteren Schicht mit $b^4 \cdot b^2$ vervollständigen. Es zeigt sich, dass damit die Rechenmauer wie gefordert gefüllt werden kann.

	$c^2 \cdot c^2 \cdot c^2$		
$a^2 \cdot c^2 \cdot c^2$		$b^2 \cdot c^2 \cdot c^2$	
$a^4 \cdot c^2$	$(a^2 \cdot b^2) \cdot c^2$	$b^4 \cdot c^2$	
$a^4 \cdot a^2$	$a^4 \cdot b^2$	$b^4 \cdot a^2$	$b^4 \cdot b^2$

Damit können wir eine Beschreibung formulieren, mit der wir aus einer Rechenmauer mit n Schichten konstruktiv eine Rechenmauer mit $n + 1$ Schichten erhalten.

Thema 13 (Nachtrag) - Bewegungsaufgaben[5]

Aufgabe 13.09 - MO650934/MO651034. Die Häuser von Alfons und Bertram sind durch einen langen geradlinigen Waldweg verbunden. Eines Tages machen sich beide von zu Hause mit dem Fahrrad auf den Weg zum Haus des jeweils anderen. Sie starten zur gleichen Uhrzeit, jeder fährt mit einer eigenen konstanten Geschwindigkeit bis zum Haus des jeweils anderen. Von den Fahrten ist bekannt:

(1) Als Alfons 30 km gefahren ist, ist er von Bertram 7 km entfernt.
(2) Als Bertram 30 km gefahren ist, ist er von Alfons 18 km entfernt.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Gesamtlänge des Waldweges.

Hinweis: Es ist nicht bekannt, in welcher Reihenfolge (1) und (2) stattfanden.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit v_A die Geschwindigkeit von Alfons und mit v_B die Geschwindigkeit von Bertram. Es gibt eine positive (reelle) Zahl x mit $v_B = x \cdot v_A$. Zu einem Zeitpunkt t legte Alfons die Strecke $s = v_A \cdot t$ zurück. Alle Zahlenangaben verstehen sich (soweit nicht anders angegeben) als Kilometer-Angabe.

Wir betrachten die möglichen Situationen, wann die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sein können.

Fall 1a: Zum Zeitpunkt t gemäß (1) haben sich Alfons und Bertram noch nicht getroffen. Alfons hat zu diesem Zeitpunkt $v_A \cdot t = 30$ zurückgelegt. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_A \cdot t + 7 + v_B \cdot t = v_A \cdot t + 7 + x \cdot v_A \cdot t = 37 + x \cdot 30.$$

Fall 1b: Zum Zeitpunkt t gemäß (1) hatten sich Alfons und Bertram bereits getroffen und sind (sich wieder entfernend) weitergefahren. Alfons hat zu diesem Zeitpunkt $v_A \cdot t = 30$ zurückgelegt. Bertram ist noch nicht am Haus von Alfons angekommen, denn

[5] s. Heft 01/2022 und 10/2023.

dann wäre ihr Abstand 30 km. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_A \cdot t - 7 + v_B \cdot t = v_A \cdot t - 7 + x \cdot v_A \cdot t = 23 + x \cdot 30.$$

Fall 2a: Zum Zeitpunkt t gemäß (2) haben sich Alfons und Bertram noch nicht getroffen. Bertram hat zu diesem Zeitpunkt $v_B \cdot t = 30$ zurückgelegt. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_B \cdot t + 18 + v_A \cdot t = v_B \cdot t + 18 + \frac{v_B \cdot t}{x} = 48 + \frac{30}{x}.$$

Fall 2b: Zum Zeitpunkt t gemäß (2) hatten sich Alfons und Bertram bereits getroffen und sind (sich wieder entfernend) weitergefahren. Bertram hat zu diesem Zeitpunkt $v_B \cdot t = 30$ zurückgelegt. Alfons ist noch nicht am Haus von Bertram angekommen, denn dann wäre ihr Abstand 30 km. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_B \cdot t - 18 + v_A \cdot t = v_B \cdot t - 18 + \frac{v_B \cdot t}{x} = 12 + \frac{30}{x}.$$

Nun können wir jeden Ansatz aus dem Fall 1 mit jedem Ansatz aus dem Fall 2 kombinieren und erhalten durch Gleichsetzung der gegebenen Ausdrücke vier quadratische Gleichungen in x, deren positive Lösungen zu möglichen Weglängen führen.

Fälle 1a und 2a:

$$37 + 30x = 48 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \frac{11}{30} \cdot x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11}{60} \pm \frac{1}{60} \cdot \sqrt{121 + 3600} = \frac{11}{60} \pm \frac{61}{60}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{72}{60} = \frac{6}{5}$ und daraus $W = 37 + 30 \cdot \frac{6}{5} = 73$.

Probe[6]*:*

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(x \cdot 30 = \frac{6}{5} \cdot 30 =\right) 36$ km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|73 - 30 - 36| =) 7$ km[7].

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{5}{6} \cdot 30 =\right) 25$ km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|73 - 25 - 30| =) 18$ km.

[6] Da die Lösung der quadratischen Gleichung auf äquivalenten Umformungen beruht, ist eine Probe im engeren Sinne nicht erforderlich. Da aber eine Probe auch die Richtigkeit des Modellansatzes prüft, ist deren Durchführung zu empfehlen.

[7] Ist die Differenz innerhalb der Betragszeichen positiv, so sind sich beide noch nicht begegnet. Ist die Differenz innerhalb der Betragszeichen dagegen negativ, fand das Treffen bereits statt und beide entfernen sich wieder.

Fälle 1a und 2b:

$$37 + 30x = 12 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{5}{6} \cdot x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{5}{12} \pm \frac{1}{12} \cdot \sqrt{25 + 144} = -\frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ und daraus $W = 37 + 30 \cdot \frac{2}{3} = 57$.

Probe:

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(x \cdot 30 = \frac{2}{3} \cdot 30 = \right) 20$ km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|57 - 30 - 20| =) 7$ km.

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \cdot 30 = \right) 45$ km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|57 - 45 - 30| =) 18$ km.

Fälle 1b und 2a:

$$23 + 30x = 48 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \frac{5}{6} \cdot x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \frac{1}{12} \cdot \sqrt{25 + 144} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ und daraus $W = 23 + 30 \cdot \frac{3}{2} = 68$.

Probe:

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(\frac{30}{x} = \frac{2}{3} \cdot 30 = \right) 20$ km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|68 - 30 - 20| =) 18$ km.

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \cdot 30 = \right) 45$ km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|68 - 45 - 30| =) 7$ km.

Fälle 1b und 2b:

$$23 + 30x = 12 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{11}{30} \cdot x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{11}{60} \pm \frac{1}{60} \cdot \sqrt{121 + 3600} = -\frac{11}{60} \pm \frac{61}{60}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ und daraus $W = 23 + 30 \cdot \frac{5}{6} = 48$.

Probe:

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(\frac{30}{x} = \frac{6}{5} \cdot 30 = \right) 25$ km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|48 - 30 - 25| =) 7$ km.

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{6}{5} \cdot 30 = \right) 36$ km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|48 - 30 - 36| =) 18$ km.

Zusammenfassung: Für die Gesamtlänge des Weges gibt es genau die vier Möglichkeiten 48 km, 57 km, 68 km und 73 km. ❑

Die besondere Anforderung der aktuellen Aufgabe besteht in der wechselnden Sichtweise auf die Bewegung. In (1) werden die Berechnungen aus Sicht von Alfons und in (2) aus Sicht von Bertram geführt. Damit wird die Lösung über quadratische Gleichungen gefunden. Üblicherweise genügt aber ein linearer Lösungsansatz, wie in dem folgenden Aufgabenpaar.

Aufgabe 13.10 – MO490932. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. AIs der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Hinweis: Der Einfachheit halber wird für diese Aufgabe angenommen, dass die Züge auf den jeweiligen Strecken mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

Lösungshinweise: Sofern Missverständnisse nicht möglich sind, lassen wir die Maßeinheiten weg und verstehen Längen in km, Zeiten in Stunden und Geschwindigkeiten in km/h. Die Zeitmessung erfolgt mit dem Losfahren der Züge in C. Mit a, b, d und e werden die Abstände von C zu A, B, D bzw. E bezeichnet.

Es ergeben sich aus den Geschwindigkeiten der Regionalbahn (RB) bzw. des Regionalexpresses (RE) und der Gesamtzeit zwischen 09:00 Uhr und 21:30 Uhr von 12,5 Stunden die Entfernungen $a = v_{RB} \cdot t = 25 \cdot 12{,}5 = 312{,}5$ und $e = v_{RE} \cdot t = 40 \cdot 12{,}5 = 500$.

Für den Punkt B gilt, dass er von der Regionalbahn in der Zeit t_B erreicht wird und dass der ICE in der Zeit $12{,}5 - t_B$ die Strecke $e + b$, also die Strecke $e + 25 \cdot t_B$ zurücklegt. Damit ergibt sich

$$100 \cdot (12{,}5 - t_B) = 500 + 25 \cdot t_B \,,$$

also

$$t_B = 6 \quad \Longrightarrow \quad b = 25 \cdot t_B = 150 \,.$$

Für den Punkt D gilt, dass er vom Regionalexpress in der Zeit t_D erreicht wird und dass der IC in der Zeit $12{,}5 - t_D$ die Strecke $a + 40 \cdot t_D$ zurücklegt. Somit gilt

$$62{,}5 \cdot (12{,}5 - t_D) = 312{,}5 + 40 \cdot t_D \,,$$

also

$$t_D = \frac{375}{82} \quad \Longrightarrow \quad d = 40 \cdot t_D = \frac{7500}{41} \,.$$

ICE und IC treffen sich folglich 16:30 Uhr in C, da die Gesamtzeit für das Erreichen von C jeweils 7,5 Stunden beträgt:

$$6+\frac{150}{100}=\frac{15}{2} \quad ; \quad \frac{375}{82}+\frac{\frac{7500}{41}}{62{,}5}=\frac{15}{2} \ .$$

Für die Geschwindigkeiten der Güterzüge ergibt sich

$$\frac{b}{12{,}5-t_B}=\frac{150}{6{,}5}=\frac{300}{13} \quad ; \quad \frac{d}{12{,}5-t_D}=\frac{40\cdot\frac{375}{82}}{12{,}5-\frac{375}{82}}=\frac{300}{13} \ .$$

Die Geschwindigkeiten sind folglich gleich. ❑

Im Vergleich beider Klassenstufe 9 und 10 werden nun die Zeitangaben im Aufgabentext weggelassen. Somit ist die Gesamtfahrzeit nicht gegeben. Es zeigt sich, dass diese zur Beantwortung der Fragen nicht erforderlich ist.

Aufgabe 13.10 – MO491032. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. AIs der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Lösungshinweise: Wie oben verstehen sich Längen in km, Zeiten in Stunden und Geschwindigkeiten in km/h.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass der ICE für die Strecke von C nach E genauso lange braucht wie der IC für die Strecke von C nach A („alle Züge erreichen zur gleichen Zeit ihr Ziel“). Der ICE braucht für die Strecke von C nach E genau $\frac{40}{100}=0{,}4$ mal so lange, wie der Regionalexpress für diese Strecke benötigt, und der IC braucht für die Strecke von C nach A genau $\frac{25}{62{,}5}=0{,}4$ mal so lange, wie die Regionalbahn für die Strecke von C nach A benötigt. Regionalexpress und Regionalbahn brauchen für ihre jeweiligen Strecken aber gleich lange, da alle Züge gleichzeitig ihr Ziel erreichen. Damit ist Teilaufgabe a) gezeigt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir bezeichnen mit a, b, d und e die Abstände von C zu A, B, D bzw. E. Der Güterzug von B nach C habe die Geschwindigkeit v, der Güterzug von D nach C habe die Geschwindigkeit w. Wir müssen $v=w$ zeigen.

Die Zeit t_1, in der der ICE bzw. die Regionalbahn von B nach E bzw. A fahren, ist genauso lang wie die Zeit, die der Güterzug von B nach C braucht. Das heißt

$$t_1 = \frac{b+e}{100} = \frac{a-b}{25} = \frac{b}{v}.$$

Verwenden wir die Beziehung $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \implies \frac{p}{q} = \frac{m+r}{n+s}$ für reelle Zahlen m, n, r, s, p und q, finden wir

$$\frac{a+e}{25+100} = \frac{b}{v}.$$

Analog ist die Zeit t_2, die der IC und Regionalexpress von D nach A bzw. E brauchen, genauso lang wie die Zeit, die der Güterzug von D nach C braucht. Das heißt

$$\frac{a+e}{62{,}5+40} = \frac{d}{40}.$$

Lassen wir aber zunächst die Regionalbahn von C nach B und dann den ICE von B nach C fahren, dauert dies (gemäß Teilaufgabe a) genauso lange, wie wenn man den Regionalexpress von C nach D und dann den IC von D nach C fahren lässt. Also

$$\frac{b}{25} + \frac{b}{100} = \frac{5b}{100} = \frac{d}{40} + \frac{d}{62{,}5} = \frac{102{,}5d}{2500}$$

woraus folgt

$$\frac{b}{d} = \frac{102{,}5 \cdot 100}{2500 \cdot 5} = \frac{41}{50}.$$

Dividieren wir die Quotienten $\frac{b}{v} : \frac{d}{w}$, ergibt sich

$$\frac{b}{v} : \frac{d}{w} = \frac{b}{d} \cdot \frac{v}{w} = \frac{102{,}5}{125} = \frac{41}{50}.$$

Damit finden wir wegen $\frac{b}{d} = \frac{41}{50}$ die Gleichheit $v = w$. ❑

15. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen

Vom 9. bis 15. April 2026 fand in Bordeaux (Frankreich) die europäische Mathematik-Olympiade (European Girl's Mathematical Olympiad – EGMO) für junge Frauen statt. Obwohl die 1. EGMO in Cambridge (UK, 2012) als europäischer Wettbewerb ausgeschrieben war, nahmen bereits drei nicht-europäische Teams teil. In diesem Jahr stellten sich 67 Teams mit 260 Teilnehmerinnen dem Wettbewerb, darunter 161 aus 41 europäischen Ländern.

Die vier talentiertesten Nachwuchsmathematikerinnen aus den bundesweiten Mathematik-Wettbewerben nahmen als deutsche Delegation sehr erfolgreich teil – sie erreichten drei Silber- und eine Bronzemedaille. Insgesamt wurden 30-mal Gold (12.5% aller Teilnehmerinnen, mindestens 23 Punkte), 39-mal Silber (15.0%, mindestens 18 Punkte) und 59-mal Bronze (22.7%, mindestens 11 Punkte) vergeben, so dass 128 der 260 Starterinnen (49.2%, darunter 80 von 161 Europäerinnen, 49.7%) Preise errangen.

Die Ausrichtung der EGMO orientiert sich an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Es werden zwei Klausuren (4½ Stunden) mit je drei Aufgaben geschrieben. Pro Aufgabe werden maximal sieben Punkte ergeben (gesamt 42 Punkte). Die deutschen Teilnehmerinnen qualifizierten sich über das Auswahlverfahren zu IMO. Die Teamstärke ist auf vier begrenzt.

Für die Länderwertung werden die erreichten Punktzahlen der vier Teilnehmerinnen addiert, so dass maximal 168 Punkte möglich sind. Mit 80 Punkten nahm Deutschland den 7. Platz ein. Angeführt wird die Länderliste von der Volksrepublik China (148 Punkte, 4 Goldmedaillen), Rumänien (94 Punkte, 3 Gold-, 1 Bronzemedaille) und Türkei (86 Punkte, 2 Gold-, 2 Silbermedaillen). Die nächsten Plätze belegten Australien, Indien und die USA, so dass Deutschland wie im Vorjahr wieder den dritten Platz unter den europäischen Ländern schaffte!

Die 16. EGMO wird im April 2027 in Šibenik (Kroatien) stattfinden.

Aufgaben der 15. EGMO

Hinweis: Zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben: Jedes Team aus vier Teilnehmerinnen konnte pro Aufgabe 28 Punkte erreichen.

Durchschnittlich erreichte Punktzahl	Gesamt	Top Ten	Deutschland
Aufgabe 1	15.7	25.2	27
Aufgabe 2	7.0	16.6	17
Aufgabe 3	1.6	5.8	1
Aufgabe 4	14.7	23.3	25
Aufgabe 5	6.5	14.1	10
Aufgabe 6	0.6	3.4	0

Aufgabe 1. Ein 2026 × 2026 Brett heiße *bordeaux*, falls mindestens eines seiner 2026^2 Felder rot ist. Eine rechteckige Fläche von Feldern heiße toll, falls sie eine ungerade Anzahl roter Felder enthält.

Bestimme die größte positive ganze Zahl M, sodass in jedem möglichen 2026 × 2026 bordeaux Brett eine tolle rechteckige Fläche mit mindestens M Feldern existiert.

Bemerkung: Die Seiten einer rechteckigen Fläche sind parallel zu den Seiten des Bretts.

Aufgabe 2. Sei n eine positive ganze Zahl. Marie spielt ein Spiel, in dem sie mit der Zahl 1 an der Tafel beginnt. Sie kann beliebig oft eine ganze Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ auswählen und die Zahl V an der Tafel durch die Zahl $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ ersetzen. Dabei bezeichne $R(x)$ die am nächsten an x gelegene ganze Zahl; wobei aufgerundet wird, falls x genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegt. Zum Beispiel gilt $R(1{,}3) = 1$ und $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Zeige, dass es für jedes n eine positive ganze Zahl B gibt, sodass Marie nie eine Zahl größer als B an die Tafel schreiben kann.
b) Für ein gegebenes n sei $f(n)$ die größte Zahl, die durch endlich viele Ersetzungen erreicht werden kann. Zeige, dass es eine positive ganze Zahl N gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass 2026 die Zahl $f(n)$ teilt.

Aufgabe 3. Sei R die Menge der reellen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x, y gilt, dass

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y) \cdot f(x + y).$$

Aufgabe 4. Sei $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ eine unendliche Folge reeller Zahlen, sodass $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt. Zeige, dass für $r = 2026^{2026}$ gilt, dass

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Aufgabe 5. Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|\overline{AC}| > |\overline{AB}|$, Umkreis ω und Umkreismittelpunkt O. Sei K der Schnittpunkt der beiden Tangenten an ω bei B und C. Der Kreis durch A, B und K schneide die Gerade BC erneut in $Z \neq B$. Sei L der Mittelpunkt von $\overline{ZK}$, und X der Schnittpunkt der Geraden ZK und AB. Sei V derjenige Punkt auf dem Kreis durch A, B und L, der auf der gleichen Seite von BC wie A liegt, sodass OV senkrecht auf ZK steht.

Zeige, dass LV senkrecht auf CX steht.

Aufgabe 6. Sei p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl, sodass p die Zahl n **nicht** teilt. Sei k die Anzahl positiver Teiler von n und seien $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ die positiven Teiler von n. Für $i = 1, 2, \ldots, k$ sei c_i die Anzahl positiver Teiler ℓ von d_i^2, sodass $d_i - \ell$ durch p teilbar ist.

Zeige, dass $(p-1) \cdot (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2$.

Rückblick auf den 8. Tag der Mathematik[8]

Am Samstag, dem 21. März 2026, fand der 8. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Der Rektor der TUC, Prof. Dr. GERD STROHMEIER, begrüßte alle, die die Gelegenheit nutzen wollten, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter 240 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Der Dekan der Fakultät, Prof. Dr. ALOIS PICHLER, beschrieb in einem Einführungsbeitrag die Rolle der Mathematik als universelle Sprache der Naturwissenschaften.

Mit 19 Mannschaften in den Klassenstufen 8 bis 10 sowie 38 Mannschaften in den Klassenstufen 11 und 12 war die Neugierde auf die Aufgaben-Rallye wieder groß wie im Vorjahr. Unter den Teilnehmenden konnten erneut Schülerinnen und Schüler aus Polen, Tschechien und der Ukraine begrüßt werden.

Parallel zur Rallye nutzten zahlreiche Lehrkräfte die angebotenen Fortbildungen. So stieß der Vortrag von Prof. Dr. OLIVER ERNST zum Thema „Signifikant oder nicht: Hypothesentests und Konfidenzintervalle" ebenso auf großes Interesse wie die anschließende Diskussionsrunde zur Weiterentwicklung der mathematischen Bildung an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule. Diese wurden von Prof. Dr. MARTIN STOLL, Inhaber der Professur Wissenschaftliches Rechnen an der TU Chemnitz, begleitet. Beide Vorträge wurden in Sachsen als Fortbildungsveranstaltung anerkannt.

Nach der Mittagspause – in der man in einer interaktiven Mitmach-Ausstellung vielfältige Möglichkeiten hatte, Mathematik praktisch zu erleben und die Vielfalt der Mathematik sowie deren berufliche Perspektiven kennenzulernen – zeigte im anschließenden Plenarvortrag Prof. Dr. MARTIN STOLL anschaulich, wie mathematische Methoden in der Musiktechnologie Anwendung finden. Unter dem Titel „Von Lil Uzi zu Cher: Die Mathematik von Autotune" erklärte er die Funktionsweise der automatischen Tonhöhenkorrektur am Beispiel von Hip-Hop-Musik und schlug damit eine Brücke zwischen Mathematik, Digitalisierung und Popkultur.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit[9]. Im Rahmen der folgenden feierlichen Preisverleihung wurden die besten Teams der beiden Altersklassen für ihre Leistungen ausgezeichnet. Die Auszeichnung wurde durch den Hochschulratsvorsitzenden der TU Chemnitz und Chemnitzer Bürgermeister für Personal, Finanzen und Bildung, RALPH BURGHART, den Dekan der Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. ALOIS PICHLER, sowie die wissenschaftliche Mitarbeiterin der Professur Finanzmathematik, Dr. DANA UHLIG, vorgenommen.

[8] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/13400 (Stand 24.03.2026)

[9] Ausführliche Ergebnisse unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2026/eval.php

In der Klassenstufe 8 bis 10 setzte sich die Mannschaft „DIE PARALLEN UNGERADEN“ aus dem Chemnitzer KEPLER-Gymn. mit deutlichem Vorsprung vor dem Team „EGT RUNNER“ aus dem Evangelischen Gymn. Tharandt durch. Mit einem Punkt Rückstand erreichten die Mannschaften „SCH8ER“ aus dem HERDER-Gymn. Schneeberg und „SPINAT-KÄSESOßE“ aus dem KEPLER-Gymn. Chemnitz punktgleich die nächsten Plätze, wobei aufgrund der kürzeren Gesamtzeit der dritte Preis nach Schneeberg ging.

In der Klassenstufe 11/12 siegte „DIE RIEMANNSCHAFT“, eine gemischte Mannschaft aus dem Freien Gymn. Naunhof, dem OSTWALD-Gymn. Leipzig, dem BIP Kreativitätsgymn. Leipzig und der Landesschule Pforta. Sie verwiesen jeweils knapp die Teams „NULLKOMMANIX“ aus dem LESSING-Gymn. Hohenstein-Ernstthal und „IMAGINÄRE KEPLER-KONSTANTEN“ aus dem KEPLER-Gymn. Chemnitz auf die Plätze.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In *Schonard A., Kokot C. Der Matheknüller – Schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt. CPI books GmbH, Ulm 2013,* werden Algorithmen gezeigt, die ihren Ursprung in der Altindischen Mathematik haben, heute auch unter vedischer Mathematik bekannt[10]. Solche Rechenregeln wurden Anfangs des 20. Jahrhundert von BHARATI KRISHNA TIRTHAJI (1884 – 1960) zusammengetragen und posthum 1965 veröffentlicht. Allerdings sind diese Ergebnisse nicht historisch belegbar, da aus Indien erst um ca. 500 n. Chr. schriftliche Überlieferungen bekannt sind.

Die Berechnung der Quersumme kann für die Untersuchung der Teilbarkeit durch 3 und 9 eingesetzt werden. Ist eine ganze Zahl n mit den $k+1$ Ziffern $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ gegeben, so wird die Quersumme $Q(n)$ als Summe ihrer Ziffern ermittelt, $Q(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Statt dieser einfachen Prozedur können wir aber auch ein iteratives Verfahren beschreiben:

Wir setzen $n_0 = n$ und berechnen für jedes $0 \leq j$ die Summen

$$n_{j+1} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1}} + a_j \, .$$

so lange, bis problemlos entschieden werden kann, ob die zuletzt berechnete Zahl durch 9 teilbar ist. Beispiel:

$$\begin{aligned} n = n_0 &= 281619 \, , \\ n_1 &= 28161 + 9 = 28170 \, , \\ n_2 &= 2817 + 0 = 2817 \, , \\ n_3 &= 281 + 7 = 288 \, , \\ n_4 &= 28 + 8 = 36 \, , \\ n_5 &= 3 + 6 = 9 \, . \end{aligned}$$

[10] S. auch: Herrmann, D. Mathematik im Mittelalter. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016, Abschnitt 3 „Mathematik in Indien bis 1400“, S. 65ff.

Bereits bei n_4 und erst recht bei n_5 erkennen wir, dass n durch 9 ohne Rest teilbar ist. Die Richtigkeit des Verfahrens beweisen wir mit dem bekannten Hilfssatz *„Eine ganze Zahl x ist genau dann durch eine ganze Zahl w teilbar, wenn die Summe $y = x + w$ durch w teilbar ist.*

Somit gilt in jedem Schritt des Verfahrens

$n_j = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_j}$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn $n_{j+1} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1}} + a_j =$
$= \frac{(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} 0} + 10 a_j)}{10} = \frac{(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} a_j} + 9 a_j)}{10}$ durch 9 teilbar ist.

Da aber die Division durch 10 wegen $g.g.T(9;10) = 1$ die Teilbarkeit durch 9 nicht verändert, gilt die Aussage „n_j ist genau dann durch 9 teilbar, wenn n_{j+1} durch 9 teilbar ist“ für alle $j \geq 0$.

Der umständlich wirkende Algorithmus hat den Vorteil, dass er verallgemeinert werden kann, um für jede Zahl $10 \cdot x + 9$ mit nichtnegativer ganzer Zahl x die Teilbarkeit einer ganzen Zahl n durch $10 \cdot x + 9$ zu prüfen:

$$n_{j+1} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1}} + (x+1) \cdot a_j$$
$$= \frac{\left(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} 0} + 10 \cdot (x+1) \cdot a_j\right)}{10} = \frac{\left(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} a_j} + (10 \cdot x + 9) \cdot a_j\right)}{10}$$

Beispiel: Wir prüfen die Teilbarkeit der Zahl $n = 281619$ durch 29:

$n = n_0 = 281619$,
$n_1 = 28161 + 3 \cdot 9 = 28188$,
$n_2 = 2818 + 3 \cdot 8 = 2842$,
$n_3 = 284 + 3 \cdot 2 = 290$,
$n_4 = 29 + 3 \cdot 0 = 29$,
$(n_5 = 2 + 3 \cdot 9 = 29)$.

Mit n_4 haben wir die Bestätigung der Teilbarkeit gefunden. Die Fortsetzung des Algorithmus führt zu keinen weiteren Veränderungen.

Termine

Finale des 61. Bundeswettbewerbs „Jugend forscht“, 28. bis 31. Mai 2026, Herzogenaurach, Freistaat Bayern (Bundespate: Schaeffler AG)

Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade, 07. bis 10 Juni 2026, Hamburg.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 23 (Nachtrag) – Quersummen und Querprodukte 3
Thema 9 (Nachtrag) – Summen von Quadratzahlen 7
Thema 13 (Nachtrag) - Bewegungsaufgaben 10
15. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen 15
Rückblick auf den 8. Tag der Mathematik 18
In alten Mathe-Büchern geblättert 19
Termine 20

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben**
05/2026	Thema 13 (Nachtrag)	Bewegungsaufgaben	MO650934, MO651034, MO491032, MO490932
05/2026	Thema 9 (Nachtrag)	Summen von Quadratzahlen	MO651036
05/2026	Thema 23 (Nachtrag)	Quersummen und Querprodukte	MO651031, MO650931, MO441024, MO440924
04/2026	.	Methode der vollständigen Induktion	MO631016, MO611033, MO471022, MO470924
04/2026	-	Quadratische Gleichungen	MO650922, MO651022, MO380935, MO381035, MO360945
03/2026	Thema 7.3	Kryptogramme	MO651021, MO650921, MO561013, MO451044, MO081014
03/2026	Thema 4.1	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	MO601023, MO450924, MO431024
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	

[11] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015, MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041, MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgaben-formulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

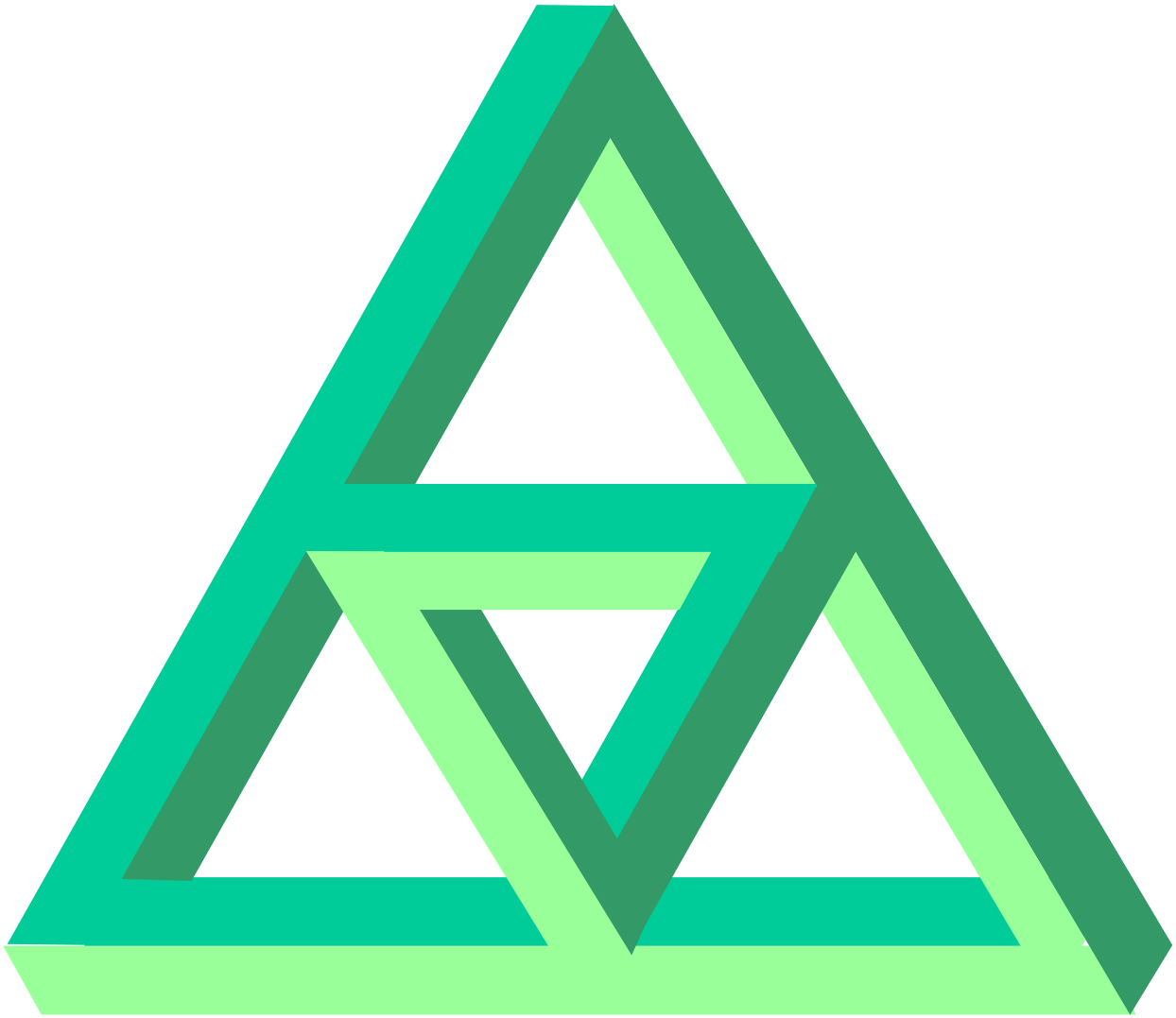
Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06/2026 (Juni 2026) 25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit der Aufgabe **MO651032** greifen wir noch einmal auf das Thema 31 „Lösungsansätze im Koordinatensystem“ zurück. Wir zeigen daran und an anderen Aufgaben vergangener MO-Jahrgänge, wie sich geometrische Problem analysieren lassen. Diese Lösungen sind zwar meist nicht so prägnant und elegant wie rein geometrische Ansätze ermöglichen. Aber mit Fertigkeiten bei der Ermittlung von Geradengleichungen und Schnittpunkten lassen sich die Lage von Punkten, Verhältnisse von Strecken und vieles mehr sehr zielorientiert bewältigen.

Als historischen Rückblick zeigen wir die Veröffentlichung von ADAM RIES zu **magischen Quadraten** von 1522, eingebettet in eine unterhaltsame Diskussion zu diesen mathematischen Objekten.

Wir blicken auf die **Bundesrunde der 65. MO** zurück und freuen uns über das erfolgreiche Abschneiden des sächsischen Teams.

Mit diesem Heft endet die Herausgabe der „Mathematischen Kostproben“. Es steht nun mit den Ausgaben der letzten fünf Jahre[3] eine Sammlung themenbezogener Aufgaben zur Verfügung, die in der individuellen Vor- und Nachbereitung der MO-Runden ständig vervollständigt werden kann.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1
[3] https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben

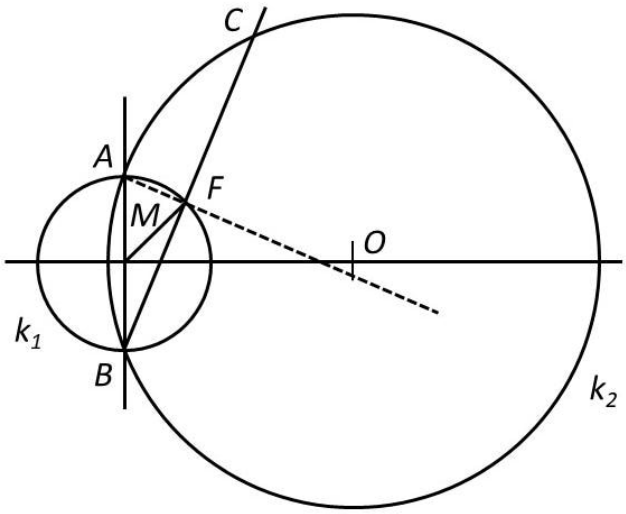
Thema 31.6 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem[4]

Aufgabe 31.28 – MO651032. Zu drei paarweise verschiedenen Punkten M, F und O sollen paarweise verschiedene Punkte A, B und C derart konstruiert werden, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
(2) Der Punkt F ist der Fußpunkt des von A auf die Gerade $\overline{BC}$ gefällten Lotes.
(3) Der Punkt O hat von den drei Punkten A, B und C den gleichen Abstand.

Geben Sie eine einfache Bedingung für die drei Punkte M, F und O an, welche notwendig und hinreichend dafür ist, dass Punkte A, B und C wie beschrieben existieren. Beschreiben Sie außerdem in dem Fall, dass die Bedingung erfüllt ist, wie man (mittels Zirkel und Lineal) ein Tripel (A, B, C) konstruieren kann, welches die Bedingung erfüllt.

Lösungshinweise: Wir können (Konstruktionsschritt I) um M einen Kreis k_1 konstruieren, auf dessen Peripherie der Punkt F liegt. Konstruieren wir in M eine Senkrechte zur Geraden $\overline{MO}$ (Konstruktionsschritt II), so schneidet diese den Kreis k_1 in zwei Punkten, die wir A und B nennen. Wir konstruieren nun den Kreis k_2 um O (Konstruktionsschritt III), auf dessen Peripherie der Punkt B und damit auch der Punkt A liegen. Den Schnittpunkt des Kreises k_2 mit der Geraden durch B und F (Konstruktionsschritt IV) bezeichnen wir mit C. Die Punkte A, B und C erfüllen die Bedingungen (1) bis (3), denn



- laut Konstruktion ist $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises k_1 und der Mittelpunkt M halbiert diesen Durchmesser,
- da F auf dem Kreis über $\overline{AB}$ um M liegt (THALESkreis), ist das Dreieck ΔBFA rechtwinklig und $\overline{AF}$ ist das Lot auf die Gerade durch B und F,
- laut Konstruktion liegen die Punkte A, B und C auf der Kreislinie um O und haben damit den gleichen Abstand zu O.

Wir untersuchen die Ausführbarkeit der vier Konstruktionsschritte.

(I) Stets ausführbar, wenn $M \neq F$.

[4] Siehe 31.1 (Heft 03/2025), 31.2 (Heft 04/2025), 31.3 (Heft 05/2025), 31.4 (Heft 08/2025), 31.5 (Heft 11/2025)

(II) Stets ausführbar, wenn $M \neq O$.
(III) Stets ausführbar.
(IV) Wir stellen fest, dass die Punkte A, B und C genau dann existieren, wenn M nicht der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FO}$ ist.

Die (bei der Konstruktion anschaulich korrekte) Aussage zum Konstruktionsschritt IV ist jedoch nachzuweisen! Wir suchen einen Nachweis durch Analyse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Dazu legen wir die drei gegebenen Punkte so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dass die Koordinaten durch $M(0;0), O(m,0)$ und $F(x,y)$ gegeben sind, wobei die Parameter $m > 0, x, y$ aus der gegebenen Lage bekannt und fixiert sind. Dabei können wir $x \neq 0$ annehmen, denn andernfalls läge der Punkt F auf der Senkrechten zu $\overline{MO}$. Insbesondere wäre auch $C \in \overline{BF}$ auf dieser Senkrechten. Da aber ein Kreis um O nur zwei Schnittpunkte mit einer Geraden haben kann, fielen die Punkte A und C im Widerspruch zu den Forderungen zusammen.

Der Radius r (mit $r > 0$ weil $M \neq F$) des Kreises um M durch F beträgt

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Somit können wir die Punkte $A(0,r)$ und $B(0,-r)$ angeben. Zur Geraden durch B und F gehört die Geradengleichung (mit $x \neq 0$)

$$g_{BF}(t) = \frac{y+r}{x} \cdot t - r\,.$$

Wir suchen nun die Punkte $C(t, g_{BF}(t))$ auf dem Kreis um O mit dem Radius

$$r_O = \sqrt{(0-m)^2 + (r-0)^2} = \sqrt{m^2 + r^2}.$$

Für diese Punkte gilt

$$(t-m)^2 + \left(\frac{y+r}{x} - r\right)^2 = m^2 + r^2\,.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhalten wir daraus die Gleichung

$$t^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{y+r}{x}\right)^2\right) - 2 \cdot t \cdot \left(m + r \cdot \frac{y+r}{x}\right) = 0$$

Wie oben erklärt, können wir $t = 0$ dem Punkt B zuordnen. Da wir diesen Schnittpunkt mit dem Kreis um O hier nicht suchen, setzen wir $t \neq 0$. Der Faktor bei t^2 ist stets positiv, deshalb können wir nach t auflösen:

$$t = \frac{2 \cdot \left(m + r \cdot \frac{y+r}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y+r}{x}\right)^2}\,.$$

Ist der Zähler dieses Ausdrucks von Null verschieden, existiert also stets ein zweiter von A oder B verschiedener Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis um O, den wir als Punkt C wählen.

Ist der Zähler dieses Ausdrucks jedoch gleich Null, also $m + r \cdot \frac{y+r}{x} = 0$, so fällt C mit dem Punkt B zusammen, d.h. es gibt keine Lösung der geforderten Art. Wir formen diese Gleichung wie folgt um

$$\begin{aligned}
&m \cdot x + r \cdot y + r^2 = 0\,,\\
&m \cdot x + y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = 0\,,\\
&\left(y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (x^2 + y^2 + m \cdot x)^2\,,\\
&x^3 + x \cdot m^2 + x \cdot y^2 + 2 \cdot x^2 \cdot m + 2 \cdot y^2 \cdot m\,,\\
&y^2 \cdot (2 \cdot m + x) = -x \cdot (x + m)^2.
\end{aligned}$$

Wir erkennen: Für $x = -m$ wird $y = 0$ (da $2 \cdot m + x = m > 0$). Folglich gibt es im Fall $F(-m; 0)$ keinen dritten Punkt C, der den Anforderungen entspricht.

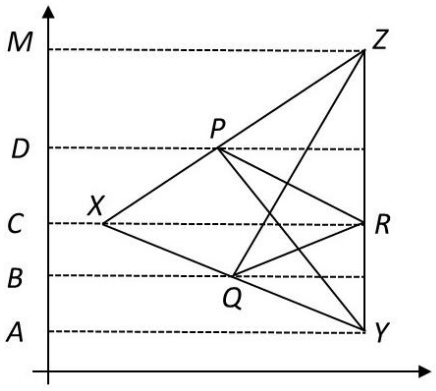
Den Fall $2 \cdot m + x = 0$ können wir ausschließen, weil für $x = -2 \cdot m$ die rechte Seite der letzten Gleichung von Null verschieden ist. ❑

Aufgabe 31.29 – MO490932. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. AIs der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Lösungshinweise: Wir tragen die Positionen der Züge in ein Koordinatensystem ein: Entlang der x-Achse tragen wir den Zeitablauf ab (eine LE entspricht einer Stunde), und entlang der y-Achse tragen wir die Position auf der Bahnstrecke ab (eine LE entspricht 50 km). Die Wege der Züge werden durch Strecken dargestellt, deren Steigungen durch die Geschwindigkeiten gegeben sind.

Wir erhalten folgendes Bild. Dabei entsprechen



- die Strecke $\overline{XY}$ der Regionalbahn von C nach A,
- die Strecke $\overline{XZ}$ dem Regionalexpress von C nach E,
- die Strecke $\overline{QZ}$ dem ICE von B nach E,
- die Strecke $\overline{QR}$ dem Güterzug 1 von B nach C,
- die Strecke $\overline{QR}$ auch dem IC von D nach A und
- die Strecke $\overline{PR}$ dem Güterzug 2 von D nach C.

Für das Produkt der Steigungen der Strecken $\overline{XY}$ und $\overline{QZ}$ ergibt sich:

$$m_{XY} \cdot m_{QZ} = \frac{-25}{50} \cdot \frac{100}{50} = -1$$

Die beiden Strecken stehen also im Koordinatensystem senkrecht aufeinander. Analog gilt:

$$m_{XZ} \cdot m_{PY} = \frac{40}{50} \cdot \frac{-62.5}{50} = -1\,.$$

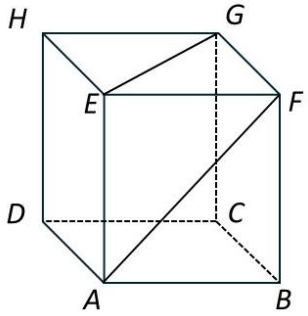
Also stehen auch $\overline{XZ}$ und $\overline{PY}$ senkrecht aufeinander. Die Strecken $\overline{PY}$ und $\overline{QZ}$ sind also Höhen im Dreieck ΔXYZ und schneiden sich deshalb auf der dritten Höhe, welches die durch X verlaufende Parallele zur x-Achse ist. Dies beweist Teilaufgabe a).

Bekanntlich gilt nun $|\sphericalangle PRX| = |\sphericalangle XRQ|$ (Eigenschaft des Höhenfußpunktdreiecks). Die Strecken $\overline{PE}$ und $\overline{QE}$ haben also (bis auf das Vorzeichen) dieselbe Steigung. Das beweist Teilaufgabe b). ❑

Aufgabe 31.30 – MO491032. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Lösungshinweise: Es lassen sich die Überlegungen aus der Lösung zur Aufgabe MO490932 übertragen. Insbesondere erweisen sich die Angaben der Uhrzeiten als nicht erforderlich.



Aufgabe 31.31 – MO271024. Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in der Abbildung bezeichnet. Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.

Ermitteln Sie den Abstand von g und h!

Hinweis: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke $\overline{XY}$, die so gelegen ist, dass X auf g, Y auf h liegt und dass XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.

Lösungshinweise: Wir legen den Würfel in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem mit $A(0,0,0), B\ (a,0,0), D(0,a,0)$ und $E(0,0,a)$. Der Hinweis zur Definition des Abstandes ist gleichbedeutend zu der Aussage, dass die Streckenlänge $\overline{XY}$ minimal wird. Deshalb gelingt eine Lösung durch Bestimmung der Geradengleichungen g durch A und F bzw. h durch E und G, um damit den Abstand beider Geraden abzuschätzen. Wir finden für reelle Zahlen t und s

$$g(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \cdot t \quad ; \quad h(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s$$

Um die Richtigkeit der Geradengleichungen zu begründen, genügt es, die Punkte für die Spezialfälle $t = 0, t = 1, s = 0, s = 1$zu bestimmen und mit den Eckpunkten des Würfels zu vergleichen.

Der (EUKLIDische) Abstand zwischen zwei Punkten X auf g und Y auf h beträgt

$$\frac{|\overline{XY}|^2}{a^2} = (t-s)^2 + (0-s)^2 + (t-1-0)^2 \ .$$

Offenbar können nicht alle drei Quadrate gleichzeitig 0 werden. Durch Probieren finden wir für $t = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{1}{3}$ den Abstand $\frac{1}{3}$. Wir vermuten, dass dies ein minimaler Abstand sein könnte, und untersuchen den Abstand für die Punkte X mit $t = \frac{2}{3} + t_x$ und Y mit $s = \frac{1}{3} + s_y$ (d.h., wir variieren die vermuteten günstigsten Punkte um deren Koordinaten herum):

$$\frac{|\overline{XY}|^2}{a^2} = \left(t_x - s_y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(s_y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(t_x - \frac{1}{3}\right)^2$$
$$= t_x^2 + s_y^2 + \frac{1}{9} - 2 \cdot t_x \cdot s_y + \frac{2}{3} \cdot t_x - \frac{2}{3} \cdot s_y + s_y^2 + \frac{2}{3} \cdot s_y + \frac{1}{9} + t_x^2 - \frac{2}{3} \cdot t_x + \frac{1}{9}$$

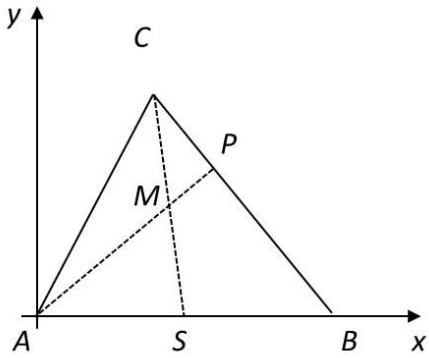
$$= t_x^2 + s_y^2 + \left(t_x - s_y\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3}$$

Das Gleichheitszeichen wird genau dann angenommen, wenn $t_x = s_y = 0$ erfüllt ist. Also beträgt die minimale Länge der Verbindung (also der Abstand) zweier Punkte X und Y

$$|\overline{XY}| = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot a^2} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt{3}\,.$$

❑

Aufgabe 31.32 – MO271035. Es sei ΔABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei S, der Mittelpunkt von $\overline{CS}$ sei M, der Schnittpunkt von $\overline{BC}$ mit der Geraden durch A und M sei P.



Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $|\overline{BP}| : |\overline{PC}|$ und $|\overline{AM}| : |\overline{MP}|$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

Lösungshinweise: Wir legen das Dreieck in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so dass die Eckpunkte die Koordinaten $A(0,0), B(a,0)$ und $C\left(c_x, c_y\right)$ haben. Ohne Probleme können wir die Koordinaten weiterer Punkte der Figur angeben (wobei wir zunächst o.B.d.A. $c_x \leq \frac{a}{2}$ annehmen):

$$S\left(\frac{a}{2}, 0\right) \quad ; \quad M\left(c_x + \frac{\frac{a}{2} - c_x}{2}; \frac{c_y}{2}\right) = M\left(\frac{c_x + \frac{a}{2}}{2}; \frac{c_y}{2}\right)$$

Um die Koordinaten des Punktes P zu finden, berechnen wir den Schnittpunkt der Geraden g durch A und M mit der Geraden h durch B und C. Es gilt:

$$g(t) = \frac{c_y}{c_x + \frac{a}{2}} \cdot t \quad ; \quad h(t) = -\frac{c_y}{a - c_x} \cdot t + \frac{a \cdot c_y}{a - c_x}$$

Wir suchen den Wert t mit

$$\frac{c_y}{c_x + \frac{a}{2}} \cdot t = -\frac{c_y}{a - c_x} \cdot t + \frac{a \cdot c_y}{a - c_x}$$

$$(a - c_x) \cdot c_y \cdot t = -\left(c_x + \frac{a}{2}\right) \cdot c_y \cdot t + a \cdot \left(c_x + \frac{a}{2}\right) \cdot c_y$$

$$a \cdot c_y \cdot t - c_x \cdot c_y \cdot t = -c_x \cdot c_y \cdot t - \frac{a}{2} \cdot c_y \cdot t + a \cdot c_x \cdot c_y + \frac{a^2}{2} \cdot c_y$$

$$\frac{3}{2}\cdot c_y\cdot t = a\cdot c_y\cdot\left(c_x+\frac{a}{2}\right)$$
$$t = \frac{2}{3}\cdot\left(c_x+\frac{a}{2}\right)$$

Für dieses Argument beträgt der Funktionswert der Geradengleichung g

$$\frac{c_y}{c_x+\frac{a}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(c_x+\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot c_y$$

Nun bestimmen wir die geforderten Streckenlängen als EUKLIDischen Abstand ihrer Endpunkte.

$$|\overline{BP}|^2 = \left(a-\frac{2}{3}\cdot\left(c_x+\frac{a}{2}\right)\right)^2+\left(0-\frac{2}{3}\cdot c_y\right)^2 = \frac{4}{9}\cdot a^2-\frac{4}{9}\cdot a\cdot c_x+\frac{4}{9}\cdot c_x^2+\frac{4}{9}\cdot c_y^2$$

$$|\overline{PC}|^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\left(c_x+\frac{a}{2}\right)-c_x\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot c_y-c_y\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot c_x^2-\frac{1}{9}\cdot a\cdot c_x+\frac{1}{9}\cdot a^2+\frac{1}{9}\cdot c_y^2$$

Wir erhalten das Verhältnis $|\overline{BP}|^2 : |\overline{PC}|^2 = 4:1$, also $|\overline{BP}| : |\overline{PC}| = 2:1$.

$$|\overline{AM}|^2 = \left(0-\frac{c_x+\frac{a}{2}}{2}\right)^2+\left(0-\frac{c_y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(c_x^2+2\cdot a\cdot c_x+\frac{a^2}{4}+c_y^2\right)$$

$$|\overline{MP}|^2 = \left(\frac{c_x+\frac{a}{2}}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(c_x+\frac{a}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{c_y}{2}-\frac{2}{3}\cdot c_y\right)^2 = \left(\frac{a}{12}+\frac{c_x}{6}\right)^2+\left(\frac{c_y}{6}\right)^2$$
$$= \frac{1}{36}\cdot\left(\frac{a^2}{4}+2\cdot a\cdot c_x+c_x^2+c_y^2\right)$$

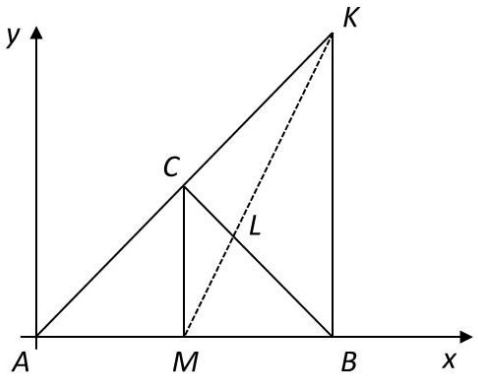
Wir erhalten das Verhältnis $|\overline{AM}|^2 : |\overline{MP}|^2 = 36:4$, also $|\overline{AM}| : |\overline{MP}| = 3:1$.

Schließlich müssen wir noch nachweisen, dass die Verhältnisse in den Fällen $\frac{a}{2} < c_x < a$ und $a \le c_x$ nicht verändert werden. ❑

Aufgabe 13. – MO331023. Beweisen Sie, dass für jedes gleichschenklige Dreieck ΔABC mit $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ die folgende Aussage gilt!

Verlängert man die Strecke $\overline{AC}$ über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke $\overline{CB}$ zwischen C und B, dass $3\cdot|\overline{CL}| = |\overline{CB}|$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.

Lösungshinweise: Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $|\overline{AB}| = 1$ gilt. Wir legen das Dreieck in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Eckpunkte haben die Koordinaten $A(0{,}0), B(1{,}0)$ und $C\left(\frac{1}{2}; c\right)$. Dann kennen wir auch die Koordinaten $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ und $K(1; 2 \cdot c)$. Außerdem gilt wegen der Bedingung $3 \cdot |\overline{CL}| = |\overline{CB}|$ für die Koordinaten $L\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}; \frac{2}{3} \cdot c\right)$.



Mit der Geradengleichung g durch M und K,

$$g(t) = \frac{2 \cdot c}{\frac{1}{2}} \cdot t - 2 \cdot c = 2 \cdot c \cdot (2 \cdot t - 1)$$

ermitteln wir den Funktionswert für das Argument $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ und erhalten den Wert $2 \cdot c \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} \cdot c$. Somit liegt der Punkt L auf der Geraden durch $\overline{MK}$. ❑

Magische Quadrate für die Urlaubszeit

Zu einem der ältesten Themen mathematischer Unterhaltung zählen **magische Quadrate**:

> *Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine $n \times n$-Matrix, die die Zahlen 1 bis n^2 enthält und die Eigenschaft hat, dass die Summen der n Elemente in jeder Spalte, in jeder Zeile und in den beiden Diagonalen gleich sind.*

Der Summenwert S wird **magische Konstante** genannt und beträgt nach der Summenformel der ersten n^2 natürlichen Zahlen

$$S = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}$$

Für $n = 1$ existiert trivialerweise nur ein magisches Quadrat, nämlich das mit der Zahl 1. Leicht können wir zeigen, dass es kein magisches Quadrat zweiter Ordnung gibt. Bei der Suche nach der Anzahl der verschiedenen magischen Quadrate ab $n = 3$ ist es zunächst zweckmäßig, die magischen Quadrate als gleich zu betrachten, die durch Spiegelung (an einer der Symmetrieachsen der Matrix) oder Drehungen (um Vielfache von 90°) ineinander überführt werden können. Unter dieser Voraussetzung gibt es nur ein magisches Quadrat 3. Ordnung, das schon 4000 Jahre v.u.Z. in China bekannt war:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Für $n = 4$ existieren bereits 880 im oben genannten Sinne verschiedene magische Quadrate. Diese Zahl ist schon seit dem 17. Jh. bekannt und wurde erstmals von Bernard FRÉNICLE DE BESSY (1605 – 1675) ermittelt. Das wohl berühmteste derartige Quadrat ist sicherlich das von ALBRECHT DÜRER (1471- 1528) in seinem Stich „Melancholie“ von 1514:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Für $n = 5$ beträgt die Zahl der verschiedenen magischen Quadrate immerhin schon über 275 Millionen. Auch wenn dieser Wert bereits 1973 veröffentlicht wurde, war diese Fragestellung ein erfolgreiches Thema einer „Jugend forscht“-Arbeit. HEINRICH FRANK (damals Schüler am Humboldt-Gymnasium Werdau) erreichte mit seiner Computerlösung zur Ermittlung dieser Anzahl einen 2. Preis im sächsischen Landesausscheid 1995.

Verzichten wir auf die Bedingung, dass magische Quadrate die Zahlen 1 bis n^2 enthalten sollen und lassen eine beliebige Zahlenauswahl (jedoch ohne Wiederholungen) zu, so kann die Frage nach **magischen Primzahlquadraten** gestellt werden, also nach solchen Quadraten, bei denen nur Primzahlen verwendet werden. Bereits HENRY ERNEST DUDENEY (1857 – 1930) entwarf 1900 ein solches – allerdings zählte er die 1 zu den Primzahlen:

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Die magische Konstante beträgt 111. Es ist beweisbar, dass für magische Primzahlquadrate 3. Ordnung kein kleinerer Summenwert existiert. Verwenden wir nicht die Zahl 1, so wurde für $S = 177$ das nächste derartige Quadrat gefunden:

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Bezeichnen wir die Zahl in der Mitte der Matrix als **Kernzahl**, so können wir feststellen, dass es kein (echtes, also ohne die Zahl 1 verwendendes) magisches Primzahlquadrat gibt, dass eine kleinere Primzahl als Kernzahl besitzt. Durch Vorgabe der Kernzahl und zwei weiterer Zahlen ist das Quadrat vollständig bestimmt. Es ist dann mit einem Computer recht einfach, systematisch zu probieren, ob es zu einer Kernzahl auch wirklich ein Primzahlquadrat gibt. Notwendig ist allerdings eine Abschätzung bis zu welchen Werten wir das Probieren durchführen müssen, um keine Möglichkeiten auszuschließen! Interessanterweise gibt es für die Kernzahl 127 erstmalig zwei verschiedene Primzahlquadrate, die sich nicht nur in der Anordnung, sondern auch in der Auswahl der Primzahlen unterscheiden. Bei 241 existieren bereits drei verschiedene Lösungen.

Eine weitere amüsante Variante der magischen Quadrate sind **bimagische Quadrate**: Einerseits ist es ein ganz normales magisches Quadrat der Zahlen 1 bis n^2 mit der magischen Konstante S_1, andererseits ergeben die quadrierten Zahlen (an den gleichen Plätzen belassen) ebenfalls ein magisches Quadrat mit der Konstanten S_2. Da sich S_2 als Summe der ersten n^2 Quadratzahlen berechnen lässt, ist das Verhältnis von S_2 und S_1 bekannt:

$$S_2 :\ S_1 = \frac{1}{3}(2n^2 + 1)$$

Solche bimagischen Quadrate gibt es wirklich, das kleinstmögliche wurde ebenfalls von H. E. DUDENEY gefunden. Es ist 8. Ordnung und besitzt die magische Konstante $S_1 = 260$.

Die Fortsetzung der Spielerei ist naheliegend: Gibt es auch **trimagische Quadrate**, also solche, bei denen zusätzlich auch die Kuben der Zahlen ein magisches Quadrat bilden? Ja, das kleinste bisher bekannte trimagische Quadrat besitzt die Ordnung 32 und wurde von WILLIAM H. BENSON (1902 – 1984) gefunden.

Eine ganz andere Idee: Das Gegenstück zu magischen Quadraten heißt **antimagisches Quadrat**. Sie wurden erstmals von J. A. LINDON entdeckt. Bei diesen Gebilden sind die Summen der n Zeilen und n Spalten und 2 Diagonalen jeweils paarweise verschieden, wobei die $2 \cdot n + 2$ Summen eine ununterbrochene Folge aufsteigender Zahlen bilden sollen. Antimagische Quadrate der Ordnung 1 bis 3 gibt es nicht, ein Beispiel vierter Ordnung lautet:

11	14	1	4
5	2	16	10
15	3	8	9
6	12	7	13

Über antimagische Quadrate ist bislang wenig publiziert, Konstruktionsalgorithmen sollen noch nicht bekannt sein. Es gibt noch weitere Sonderheiten: Zunächst mag beim folgenden magischen Quadrat nichts Besonderes auffallen:

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Doch wir können es um 180° drehen – und das neue Quadrat mit dem auf den Kopf stehenden Zahlen ist wieder magisch, wenn die gedrehte 96 und 11 wieder als 96 und 11, die 89 als 68 usw. gelesen wird.

Schreiben wir die Zahlen in der Display-Art eines Taschenrechners, gibt es viel mehr Möglichkeiten, weil dann auch ohne Probleme die Zahl 2 und die Zahl 5 auf den Kopf gestellt werden können, beispielsweise

29	15	61	52
51	62	19	25
12	21	55	69
65	59	22	11

In alten Mathe-Büchern geblättert

Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist ein Quadrat der Seitenlänge n, auf dessen Feldern n^2 paarweise verschiedene natürliche Zahlen so platziert werden, dass jede Zeile und jede Spalte sowie die beiden Diagonalen die gleiche Summe ergeben. Sie sind bereits aus China seit ca. 2800 v.u.Z. bekannt.

AUCH ADAM RIES (1496 – 1559) beschäftigt sich zum Schluss seines 2. Rechenbuchs „Rechenung auff der Linihen vnd Federn“ (1522, gedruckt in Erfurt) mit magischen

Quadraten der Ordnung 3. Abschließend gibt er ohne weitere Erläuterungen ein magisches Quadrat der Ordnung 4 an – das DÜRER-Quadrat, in dem die zwei mittleren Spalten vertauscht sind. RIES nimmt später in seinem 3. Rechenbuch (1550, gedruckt in Leipzig) darauf Bezug und diskutiert ausführlich die Bildung magischer Quadrate[5].

Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones / Practica genant /

Mit grüntlichem vnterricht des viſierens.

Durch Adam Rieſen
im 1550. jar.

[... Seiten 103 bis 106]

Zum beſchlus der federn / will ich dir alhie erzehlen ſo etlich zaln / natürlicher ordenung / oder gleichen mitteln in ein geuierdt geſatzt werden / wie du die ordnen ſolt / hiermit in einer zal fur ſich oder vnderſich / des gleichen creutzweis eine zal wird / das iſt in einer zeil ſovil als in der andern.

Item in 3 mal 3 als 9 velder gleich einem gevierden quadraten / ſollen geſatzt werden 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. das vberal ein Summa wirt alhie thu 1 zu 9 wird 10 derhalbe teil iſt 5. kompt in die mitte des geviertdes als in das fünffte feldt / vnder dem ſetz 1 als die erſte zal und zele diametraliter / das iſt von einem winckel zum anderen / wie die zaln angegeben ſeind / kanſtu nicht vnderſich / ſetz das ſelb in die oberſte zeil gerad vberſich zele fort / kompt auſſerhalb der rechten handt / ſetz zu forderſt gen der lincke hand zele alſo nach den winckeln / Begibt ſich das ein zall ſter / nach der ſeiren darunter / ſetz du die letzte zal gen der lincken handt / zele fort / bis du die letzte zal erreichſt / vnd alle felder mit zaln beſchrieben ſeind / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern.

4	9	2	
3	5	7	~~3~~
8	1	6	~~8~~
~~4~~	~~9~~	~~2~~	~~7~~

Nach 1 volget 2 kompt auſſerhalb des gevierds/ ſetz 2 zu oberſt / ſo komen 3 auch auſſerhalb des gevierden / ſetz zu forderſt gen der lincken handt / zele fort / quemen 4 an ſtatt des 1 ſetz 4 nachm winckel zu rück / thu die auf kompt auſſerhalb / ſetz zu oberſt / zele herab 4 / 5 / 6 wie hie obe komen 7 auſſerhalb / ſetz in das euſſerſte mittlere felt / ſo komet 8 auſſerhalb / ſetz gerad gen der lincken hant zele alſo fort / kompt wie oben / vnd ſeind in jeder zal 15.

[5] Es wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen.

Item 1/2/3/4/5/6 etc, in 5 mal 5 felder zu ſetzen / al hie iſt die erſte zal .1 die letzte zal 25 thut 26 / der halbe theil iſt 13 komet in die mitte als an das dreizehende feldt / wu ſchacht weis gemacht ſetz 1 vnder 13 zele fort wie hie oben gethan / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern wie hie 65 in jder zeil.

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	5
30	6	24	49	18	36	12	30
13	31	7	25	43	19	37	13
38	14	32	1	26	44	20	38
21	39	8	33	2	27	45	21
46	15	40	9	34	3	28	46
22	47	16	41	10	35	4	29

Desgleichen kanſtu auch in 9 mal 9 als in 81 feldern ſetzen das allenthalben ein zal kompt wie hie 361.

11	24	7	20	3				
4	12	25	8	16	4			
17	5	13	21	9	17			
10	18	1	14	22	10			
23	6	19	2	15	23			
11	24	7	20	3	16			

Desgleichen in 7 mal 7 zu ſetzen von 1 an zuheben iſt 1 vnd 49 gerad 50 der halbe theil iſt 25 komet in die mitte darunter heb an zu zeln / nach den winckeln gen der rechten handt 1/2/3 etc. wie alhie wirt 175.

37	78	29	70	21	62	13	54	5	
6	38	79	30	71	22	63	14	46	6
47	7	39	80	31	72	23	55	15	47
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57
26	58	18	50	1	42	74	34	66	26
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67
36	68	19	60	11	52	3	44	76	36
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77
37	78	29	70	21	62	13	54	5	46

Mit 11 mal 11 / 13 mal 13 vnd allen ungeraden zaln thu gleicher weis / allhie thut 11 mal 11 / 121 iſt 61 der eine teil vnd 60 der ander teil kompt 61 in die mitte deſ gevierdes / gleich wie das punct in der mitte deſ Circkels iſt / darunter ſetz 1 danach winckelmeſſig 2 / 3 / 4 etc.

Wirt alſo von 56 dem obern eck bis auff 66 das vnder eck gezelt / thut die Summa jder zeil 671 / furſich / vnderſich / auch creutzweis.

Von den ungeraden / oder ungleichen zaln / hab ich bis here gnugſame vnterict gethan / wie ein jede in ſich multiplicirt / ein gevierte flech auff alle ſeitten gleich brengt / vnd auff alle ſeitten / furſich / vnderſich auch creutzweis eine Suzmma komet / Nach dem die zaln / Natürlicher ordenung einander volgen / gleich en mitteln / oder irgent einer quantiter / will ich itzt ein wenig melden wan ein gerade zal alſ 2 / 4 / 6 / 8 etc. in ſich gefürt / vnd ein gevierd mache / wie gleicherweis zaln / natürlicher / vnderſcheidener des gleichen der quantiteten geſatzt ſolln werden / das allenthalben gleiche ſumma wie hie oben angezeigt kome.

Hie ſol ein jder wiſſen / das 2 mal 2 als 4 nicht zu gleich komen kan / dan 1 / 2 / 3 / 4 in eine gevierdt geſetzt ſo an jmezehent thut / in vier gantze das nicht bleibt vnmüglich / Creutzweis mag das ſein / oder fur ſich vnd vnderſich nicht.

1 2
3 4

Nach zweien in ſich volget die an der gerade zal / natürlicher ordenung / 4 / ſo die in ſich gefürt / werden 16 müſſen alda vier für ſich vnd 4 vnderſich ſein / es kann von 1 oder einer anderen zal angehoben werden / jdoch das Natürlich / oder vnterſchiedtlich etc. zeln da iſt / hie vnd im volgenden zaln ſo gerad vnd in ſich gefürt / kann allenthalben gleicheit gehalten / welche in zwei mal zwei nicht ſein mag.

In 4 mal 4 das iſt ein Roſt 4 löcher fur ſich vnd 4 vnderſich / zu ſetzen.

5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16
17 18 19 20

In meinem vorigen Büchlein / ſo 1522 in Erffurdt gedruckt hab ich gelernt / vor wechſſelung auſwendig vnd inwendig vber eck / darbey las ichs noch beruhen / ſtet.

20 6 7 17
9 15 14 12
13 11 10 16
8 18 19 5

Iſt alhie in jeder zeil / furſich / auch vnderſich desſgleichen vber eck 50.

Dem nach mag ein jeder von jeme ſelbſt / machen in 6 mal 6 / oder 8 mal 8 zu ſetzen / wie der ausganck der erſten vnd oberſten zeil gen der vnderſten / alſo iſt der ausganck der anderen zeil / gegen an einer der letzten / wu zuvor von der rechten / wirt als dan von der lincken / gen der rechten handt gegangen / alſo hinfort wie hie klerlich vor augen.

In ſechs felder fur ſich / auch vnderlich zu ſetzen /

6 32 3 34 35 1
7 11 27 28 8 30
19 14 16 15 23 24
18 20 22 21 17 13
25 29 10 9 26 12
36 5 33 4 2 31

Volgendt werden in 64 felder geſetzt zaln / als 1 2 3 4 5 6 alſo hinfort das an einer zeil / ſovill als an der andern komen den ausganck / ſiheſtu vor augen / magſt mit andern geraden zaln / gleich meſſig handeln wirt vberal 260.

In acht feldern zu ſetzen das allenthalben gleich werde 260.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	41	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Themen 2020 – 2026 (Übersicht)

Nr.	Thema	Heft(e)
01	Funktionalgleichungen	09/2020, 01/2021, 09/2021, 01/2026
02	Ungleichungen mit vollständigen Quadraten	01/2021
03	Lineare Gleichungssysteme und Satz von Vieta	02/2021, 11/2024, 01/2025
04	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	03/2021, 09/2024, 10/2024, 03/2026
05	Quadratische Funktionen	05/2021
06	Einbeschriebene Figuren und Körper	04/2021, 05/2022
07	Kryptogramme	07/2021, 03/2026
08	Sehnen-Tangenten-Winkelsatz, Sekanten-Tangenten-Satz	08/2021
09	Pythagoreische Zahlentripel, Summen von Quadratzahlen	09/2021, 11/2022, 04/2024, 05/2025, 01/2026, 05/2026
10	Beschränkte und kürzbare Brüche	10/2021, 05/2024
11	Streckenberechnung	10/2021
12	Ebene Bedeckungen	11/2021, 03/2022, 01/2024
13	Bewegungsaufgaben	01/2022, 10/2023
14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	02/2022
15	Stammbrüche	04/2022
16	Betragszeichen: Gleichungen und Gleichungssysteme	06/2022
17	Größter gemeinsamer Teiler	09/2022
18	Der Satz des Thales	10/2022, 03/2023
19	Flächenabschätzung	12/2022, 11/2024
20	Rechnen mit großen Zahlen	01/2023
21	Mischungsverhältnisse	04/2023

22	Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren und Körpern	05/2023, 06/2023, 11/2024
23	Quersummen und Querprodukte	07/2023, 08/2023
24	Kombinatorik und klassische Wahrscheinlichkeit	08/2023, 01/2025, 02/2025, 11/2025, 12/2025, 01/2026
25	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	11/2023, 03/2025, 08/2025
26	Geometrische Örter	11/2023, 05/2024
27	Rechnen mit Polynomen	03/2024
28	Geometrie am Rechteck	06/2024
29	Schubfachprinzip	08/2024, 02/2025
30	Diophantische Gleichungen	12/2024, 12/2025, 01/2026
31	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	03/2025, 04/2025, 05/2025, 08/2025, 11/2025
32	Spieltheorie	06/2025
33	Rationale Zahlen	06/2025, 10/2025
34	Zyklische Aufgabenformulierungen	08/2025, 09/2025

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2026

Es ist zu untersuchen, ob es Quadrupel (x, y, z, a) positiver ganzer Zahlen gibt, für die die Eigenschaft (1) oder (2) erfüllt ist. Man beweise die entsprechenden Vermutungen.

(1) $x^2 + y^2 = 10 \cdot (z^2 + a^2)$,
(2) $x^2 + y^2 = 11 \cdot (z^2 + a^2)$.

Lösungshinweise zu (1): Wie eine Probe beweist, gilt beispielsweise $6^2 + 8^2 = 10 \cdot (1^2 + 3^2)$. Damit ist gezeigt, dass es Quadrupel gibt, die die Bedingung (1) erfüllen.

Lösungshinweise zu (2): Angenommen, es gibt ein Quadrupel, das die geforderte Eigenschaft (2) besitzt. Dann gibt es (da die Menge der positiven ganzen Zahlen ein kleinstes Element besitzt) mindestens ein Quadrupel mit kleinster Summe $x^2 + y^2$ (Extremalprinzip). Es sei dies das Quadrupel (c, d, e, f) mit positiven Zahlen c, d, e, f mit kleinster Summe und $c^2 + d^2$ und $c^2 + d^2 = 11 \cdot (e^2 + f^2)$.

Offensichtlich ist die linke Seite der Gleichung durch 11 teilbar. Die Summe zweier Quadratzahlen ist aber nur dann durch 11 teilbar, wenn jede der beiden Zahlen bereits durch 11 teilbar ist, also teilt 11 auch c und d.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass bei Quadratzahlen die Reste bei Division durch 11 nur eine der Zahlen 0, 1, 4, 9, 5, 3 annehmen kann. Die Summe von zwei solchen Resten wird nur dann durch 11 teilbar, wenn beide Reste gleich 0 sind.

Wir finden also positive ganze Zahlen m und n mit $c = 11 \cdot m$ bzw. $d = 11 \cdot n$. Setzen wir dies in die Ausgangsgleichung ein, erhalten wir

$$11 \cdot (e^2 + f^2) = c^2 + d^2 = (11 \cdot m)^2 + (11 \cdot n)^2 = 121 \cdot (m^2 + n^2)$$

Folglich erfüllt auch das Quadrupel (e, f, m, n) die Gleichung (2). Offensichtlich ist aber $e^2 + f^2 < c^2 + d^2$ im Widerspruch zur Annahme, dass das Quadrupel (c, d, e, f) ein solches mit kleinster Summe sei.

Aus diesem Widerspruch wird ersichtlich, dass unsere Annahme, es existiere ein Quadrupel mit der Eigenschaft (2), falsch ist. ❑

Vom Korrespondenzzirkel Mathematik zu den „Mathematischen Kostproben“

Von Norman Bitterlich – ein persönlicher Rückblick

Anfang der 1970er Jahre erlebte der damalige Bezirk Karl-Marx-Stadt im DDR-Vergleich einen drastischen Rückgang in der inoffiziellen Bezirkswertung der Mathematik-Olympiade (MO). Die Ursachen waren sicher vielschichtig. Der sich schon länger anbahnende enttäuschende Negativrekord zur 14. MO (1974/75: 13. Platz von 15 Bezirken) forderte dringend eine Neukonzipierung der mathematischen Förderung. Ziel der von Dr. HELMUT KÖNIG (1929 – 2026) geführten Aktivitäten war eine solide Breitenförderung als Grundlage der Spitzenförderung. Unter anderem wurde bereits 1973 ein Bezirkskorrespondenzzirkel Mathematik (BKZM) für Schüler der Klassenstufen 7 bis 12 eingeführt. Dies und weitere Maßnahmen zur Förderung mathematisch begabter Schüler bewährten sich. Sie trugen *„zur Befähigung zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können und zur Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen“* bei (König, H.: MU Jahrgang 43, Heft 6/1997, S. 46). Die Anstrengungen zeigten schnell Erfolg – bereits zur 16. MO (1976/77) belegte der Bezirk in der inoffiziellen Bezirkswertung wieder den 1. Platz.

Ich hatte das große Glück, als Schüler die ersten beiden KZM-Jahre selbst erleben zu dürfen. Die Treffen mit meinem Zirkelleiter zur Diskussion meiner Lösungen sind mir gut in Erinnerung geblieben. Hier fand ich nicht nur Bestätigung meiner Lösungsideen oder Hinweise zur Schließung meiner Darstellungslücken, sondern lernte nachhaltig Prinzipien einer erfolgversprechenden Nachbereitung von Wettbewerbs- und KZM-Aufgaben kennen. Als ich 1986 nach meinem Mathematik-Studium und der

Assistenzzeit an der Universität Jena in meine Heimatstadt zurückkehrte, übernahm ich die Leitung des KZM der Klassenstufen 9/10.

Das Grundprinzip ist seitdem geblieben. In sieben Serien erhalten die Teilnehmenden im Verlaufe eines Schuljahres jeweils fünf Aufgaben. Die Lösungseinsendungen werden bewertet und kommentiert. Die Rücksendungen enthalten (zunehmend variantenreiche) Lösungshinweise, vertiefende Beiträge zu Lösungsstrategien, anwendungsorientierte Diskussion zu mathematischen Verfahren und Wettbewerbsinformationen (Bundeswettbewerb Mathematik, Jugend forscht, IMO).

Die Materialen zum KZM wurden – zunächst unter inhaltlicher Anleitung von Herrn Dr. KÖNIG – selbst hergestellt. Wie haben sich die technischen Möglichkeiten in diesen Jahren verändert! Aus den Anfangsjahren bleiben die sehr händischen Vervielfältigung mittels Ormig-Verfahren[6] unvergessen (ständig blaue Finger!). Auch der Einzug der Computer-Technik lief zunächst holprig (ständig irgendwelche Überraschungen auf dem Bildschirm!). Aus der einst losen Blattsammlung zum KZM ist seit 2001 (in Anlehnung an die Zeitschrift für Mathematik „$\sqrt[\text{Die}]{\text{WURZEL}}$“[7]) eine 24-seitige Broschüre mit jährlich 9 Ausgaben geworden.

Jede Serie folgte einer inhaltlichen Dreiteilung. Für die beiden einführenden Aufgaben wurden keine speziellen Kenntnisse erwartet. *„Eine Turmuhr (mit üblichem Zwölfstundenziffernblatt) zeigt genau 13:00 Uhr an. Wie oft bilden bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten zwölf Stunden einen rechten Winkel?“* (Serie 6 Aufgabe 1 [A6-1], diese und die weiteren Aufgaben stammen aus dem Schuljahr 2017/18). Doch solche Alltagsprobleme stellten durchaus eine besondere Herausforderung bzgl. der Lösungsdarstellung dar – die Einsendungen reichten von den Zeichnungen von Zeigerstellungen aller rechtwinkligen Situationen bis zu aufwendigen Gleichungssystemen. Wie soll man

[6] Ein Matrizendrucker, auch unter dem Begriff *Ormigverfahren* bekannt, ist eine Form der Hektographie, bei der ein recht einfaches Gerät zur Vervielfältigung verwendet wird. Mit dem Matrizendrucker kann man eine begrenzte Anzahl von Abzügen (je nach Qualität der Matrizen bis maximal 250 Exemplare) von einem speziell angefertigten Original – der Matrize – herstellen. Vor dem Druck muss zuerst eine Druckvorlage, die Matrize, auch *Spiritusmatrize* genannt, angefertigt werden. Sie ist ein stärkeres (120–150 g/m²), glattes (gestrichenes) Blatt Papier, das an den druckenden Stellen mit der abzugebenden Farbe beschichtet wird. Dazu legt man das Blatt auf eine spezielle Folie, die ähnlich wie Kohlepapier funktioniert. Allerdings wird der Durchschlag nicht auf ein neues Blatt geschrieben, sondern auf die Rückseite des zu beschreibenden Papieres. Diese Kopie ist somit spiegelverkehrt und dient als Vorlage für den Druck. Die Beschichtung der Folie besteht aus einem speziellen, alkohollöslichen Wachs, und durch den Druck des Schreibens bleibt diese auf der Rückseite des Papiers haften. Die Matrize wird auf eine Trommel gespannt und diese gedreht. Unter der Trommel wird das zu bedruckende saugfähige Papier hindurchgezogen, nachdem es hauchdünn durch einen feinporigen Schwamm mit Spiritus benetzt wurde. Der Alkohol löst winzige Partikel von der Matrize, und das zu bedruckende Papier nimmt diese auf – ein Abzug entsteht.

[7] www.wurzel.org

ausführlich aufschreiben, was doch eigentlich offensichtlich ist? Wie lässt sich Alltägliches in mathematische Form bringen?

Es folgten stets zwei Aufgaben aus dem Fundus der MO, wobei gern auf längst vergangene Jahrgänge zurückgegriffen wurde, aber auch stets aktuelle Aufgabenstellungen einflossen. *„Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ΔABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck ΔDEF mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat."* (A1-3, in Anlehnung an Aufgabe MO541023, in der eine solche Konstruktion mit zwei Rechtecken gefordert wurde).

Die fünfte Aufgabe mit drei Teilaufgaben ließ Spielraum für komplexe Themen, z.B. *Nullstellen von Polynomen* (A2-5A), *Methode der vollständigen Induktion* (A5-5A), oder spezielle Gleichungen wie $n^2 - 16 \cdot n + 42 = QP(n)$ mit QP als Abkürzung für das Querprodukt einer natürlichen Zahl (A7-5B). Mit A und B wurden dabei zwei Wahlaufgaben angeboten – doch für die erfolgreichsten Teilnehmenden waren Lösungseinsendungen zu beiden Aufgaben selbstverständlich, auch wenn da schon mal mehrere Seiten Lösungsdarstellung zusammenkamen.

Eine Besonderheit bildete die dritte Serie (Einsendeschluss Dezember): Alle Aufgaben entstammten dem Bundeswettbewerb Mathematik[8] (BWM), um einen Eindruck zum Schwierigkeitsgrad sowie zum Erwartungsbild zu geben und damit für die Teilnahme an diesem Angebot zu motivieren. In der fünften Serie (Einsendeschluss März) wurden zudem zwei aktuelle Aufgaben des BWM verwendet. Der Hinweis *„… [es] können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden"* verdeutlichte das Anliegen – mit Erfolg: Unter den leider (viel zu!) wenigen Teilnehmern am BWM (1. Runde 2024: 62 von bundesweit 1189, 5.2%) sind im Vergleich zur bundesweiten Gesamtzahl unter den sächsischen Schülern überdurchschnittlich viele aus den Klassenstufen 9 und 10 (1. Runde 2024: bundesweit – 31.8%, Sachsen – 45.1%).

Fester Bestandteil des KZM waren Seminare, die im Schuljahr viermal samstags angeboten wurden (September, Dezember, März, Juni). Hierbei hatten die Teilnehmenden nicht nur die Möglichkeit, Lösungsvarianten zu diskutieren, Lösungsstrategien zu üben oder Mathematik unterhaltsam zu erleben. Da jedes Mal ein schulferner Seminarort gewählt wurde, gab es zusätzlich interessante Einblicke in Anwendungen von Mathematik. Traditionell begann der Seminarzyklus an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz (TUC), natürlich mit Hinweisen zum Mathematik-Studium im Allgemeinen und an der TUC im Besonderen. Interessante Gastgeber waren beispielsweise auch immer wieder das

[8] www.bundeswettbewerb-mathematik.de

- das Vermessungsbüro Wuttke,
- das Sächsische Textilforschungsinstitut oder
- die Leadec Engineering GmbH,

die Einblicke in ihre Tätigkeiten boten, also Mathematik zum Anfassen. Aber ebenso beliebt waren kulturelle Einrichtungen der Stadt Chemnitz, wobei im Seminarprogramm ein passendes Thema angeboten wurde:

- Deutsches SPIELEmuseum (Führung mit Schwerpunkt Strategiespiele vs. Spiele in Wettbewerbsaufgaben),
- Sächsisches Industriemuseum (Führung mit Schwerpunkt Rechentechnik vs. Aufgaben mit verschiedenen Stellenwertsystemen) oder
- Tierpark Chemnitz (Zuchtprogramme vs. Wachstumsmodelle).

Zu den Gastgebervorstellungen oder Führungen waren die abholenden Eltern ausdrücklich eingeladen. Die Resonanz auf die Seminareinladungen war stets erfreulich groß. Es war erstaunlich, welche oft weiten Wege die KZM-Teilnehmenden auf sich nahmen, um knapp vier Stunden Mathematik zu erleben. Schade, dass die Corona-Pandemie diese Angebote unterbrach!

Der KZM der Klassenstufen 9/10 ordnet sich in das System der landesweiten Aktivitäten ein. Ab Klassenstufe 5 werden in den Regionen Chemnitz, Dresden und Leipzig Schülerinnen und Schüler zum KZM eingeladen. Die sachsenweite Ausschreibung ab Klassenstufe 9 erschien ab 1991 angemessen, um entsprechend der Anmeldezahlen (Klassenstufe 9 durchschnittlich 20 bis 50) effizient zu arbeiten.

Nach 35 Jahren Leitung des KZM in den Klassenstufen 9/10 übernahm Frau Prof. CORDULA BERNET (ehemals Hochschule Mittweida) diese Aufgabe. So wird die Tradition des KZM erfolgreich fortgesetzt, natürlich zunehmend in digitaler Form. Für die Teilnehmenden bleibt er eine wichtige Form der Wettbewerbsvorbereitung, denn beim Ringen um Punkte in mathematischen Wettbewerben wird die Fähigkeit einer vollständigen Lösungsdarstellung über die Platzierungen entscheiden. Während man die Lösungsfindung in unterschiedlicher Weise trainieren kann, ist für die Lösungsdarstellung das Aufschreiben und die kritische Durchsicht unerlässlich.

Eine kontinuierliche Teilnahme fördert die allgemeinen Eigenschaften wie Zielstrebigkeit und Durchhaltevermögen. Die Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen bestärkt das Interesse für das Fach. Zunehmende Erfolge bei der Lösungsfindung motivieren. Alles gute Gründe für eine Anmeldung – es lohnt, Jugendliche dafür begeistern zu wollen. **Anmeldungen sind jederzeit möglich!**[9]

[9] https://www.cb.hs-mittweida.de/webs/cbernert/korrespondenzzirkelmathematik-olympiaden/anmeldung-zum-korrespondenzzirkel-mathematik-klasse-910/

Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade fand vom 7. bis 10. Juni 2026 in Hamburg statt. Frau KATHARINA VON FINTEL, Staatsrätin für Bildung der Behörde für Schule, Familie und Berufsbildung der Freien und Hansestadt Hamburg begrüßte die 197 Teilnehmenden und die zahlreichen Mitwirkenden zur Abschlussveranstaltung mit herzlichen Worten und hoher Anerkennung der Leistung aller Anwesenden.. Unter www.mo2026.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Alle Teilnehmenden wurden am Sonntag, dem Anreisetag, mit anschließendem gemeinsamem Spaziergang durch den Alten Elbtunnel begrüßt. Die beiden Klausuren fanden am Montag und Dienstag im Christianeum. Im traditionsreichen staatlichen Gymnasium mit altsprachlichem Profil in Hamburg-Othmarschen mussten am Montag und Dienstag die Klausuren mit jeweils drei Aufgaben absolviert werden. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in Hamburg. Am Abend nach den Klausuren wurde beim Begegnungsabend im Christianeum gespannt auf die Klausurrückgabe gewartet. Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand im Haus der Patriotischen Gesellschaft (Saalhaus GmbH) statt. Im Festvortrag sprach Prof. Dr. WOLFGANG MACKENS über „KI, Mathematik und wir“. In informativer und unterhaltsamer Weise stellte er die Risiken und die Chancen der KI in den Mittelpunkt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weitere fünf Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 79 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 41% aller Teilnehmenden[10]. Dazu kommen noch 28 Anerkennungsurkunden[11]. Die sächsische Mannschaft konnte in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[12] belegte sie mit 26 Punkten den dritten Platz. Bayern mit 41 Wertungspunkten und Niedersachsen mit 30 Wertungspunkten führen die Länderliste an. Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen vier II. Preise und sechs III. Preise den Platz 8 (insgesamt 10 Preise und zwei Anerkennung). Für eine bessere Platzierung fehlen hier I. Preise, denn die elf Spitzenpreise gingen an sieben Bundesländer, darunter Bayern (drei I. Preise, insgesamt 14 Preise), Niedersachsen

[10] Bei diesen statistischen Angaben werden die Teilnehmenden aus den deutschen Auslandsschulen nicht berücksichtigt.
[11] Die vollständige Liste ist unter www.mo2026.de verfügbar (Stand: 11.06.2026).
[12] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

(zwie I. Preise, insgesamt 10 Preise), Hessen (zwei I. Preise, insgesamt 7 Preise) und Nordrhein-Westfalen (zwei I. Preise, insgesamt neun Preise).

Den sächsischen Preisträgern gilt unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

II. Preis	Rishi Kumar	(Okl. 8, Nexö-Gymn. Dresden)
	Bhuvan Chalamala	(Okl 8, Nexö-Gymn. Dresden)
	Aaron Adler	(Okl. 10, Ostwald-Gymn. Leipzig)
	Tilman Ferchland	(Okl. 10, Ostwald-Gymn. Leipzig)
III. Preise	Armin Ferchland	(Okl. 8, Ostwald-Gymn. Leipzig)
	Maria Ihsberner	(Okl. 8, Ostwald-Gymn. Leipzig)
	Martin Brill	(Okl. 9, Sächs. Landesgymn. St, Afra Meißen)
	Viktoria Fedotova	(Okl. 9, Sächs. Landesgymn. St, Afra Meißen)
	Tom Edgar Asche	(Okl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	Julius Morgenstern	(Okl 11, Nexö-Gymn. Dresden)

Die Bundesrunde der 66. Mathematik-Olympiade wird vom 30. Mai bis 2. Juni 2027 in Kaiserslautern (Rheinland-Pfalz) ausgetragen.

Termine

67. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), 10. bis 21. Juli 2026. Shanghai (Volksrepublik China).

66. Mathemtik-Olympiade, Runde 1 (Schulrunde), Schuljahresbeginn 2026.

Vorwort 2
Thema 31.6 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem 3
Magische Quadrate für die Urlaubszeit 10
In alten Mathe-Büchern geblättert 13
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2026 18
Vom Korrespondenzzirkel Mathematik zu den "Mathematischen Kostproben)..... 18
Termine 24

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	bino@hrz.tu-chemnitz.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz