

BLUMENTHAL

EINFÜHRUNG
IN DIE
MATRIZEN
RECHNUNG

EINFÜHRUNG IN DIE MATRIZENRECHNUNG

**ALLGEMEINVERSTÄNDLICHE DARSTELLUNG
FÜR NICHTMATHEMATIKER**

von

DR. BERNHARD BLUMENTHAL

Hochschule für Maschinenbau, Karl-Marx-Stadt

2., unveränderte Auflage



B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT LEIPZIG

1 9 6 3

ES 19 B 2

Best.-Nr. 0/4/2506

204/375/112/63

Printed in the German Democratic Republic

Druck: (III/18/6) VEB Reprocolor, Leipzig C 1

Vorwort

In der Literatur und in den Diskussionen anlässlich von Tagungen usw. stößt man in den letzten Jahren häufig auf die Anwendung eines mathematischen Verfahrens – der Matrizenrechnung – auf verschiedenen betriebswirtschaftlichen Gebieten. Es handelt sich dabei besonders um die technische und ökonomische Planung, um die Soll-Ist-Abrechnung, um die Lösung von Optimalproblemen und andere Fragen. Bekannt ist, daß der VEB Leuna-Werke „Walter Ulbricht“ und andere Betriebe diese Methode bereits eingeführt haben. Die Anwendung der Matrizenrechnung in der Betriebswirtschaft geht auf die grundlegenden Arbeiten eines Mitarbeiters dieses Betriebes, Herrn Dr. *Pichler*, zurück, der sich damit große Verdienste erworben hat.

Da die Matrizenrechnung dort, wo man sie bereits anwendet, zweifellos u. a. die Beweglichkeit und Schnelligkeit der Planung erheblich vergrößern konnte und sich somit als Mittel zur Rationalisierung und zur Verbesserung der Wirtschaftlichkeit bewährt hat, ist die Frage von großer Bedeutung, ob man sie mit Vorteil auch in anderen Industriezweigen und auf weiteren Arbeitsgebieten anwenden kann. Zur Beurteilung dieser Frage wäre es wertvoll, wenn sich ein größerer Kreis von Fachleuten des ökonomischen und technischen Sektors mit den Problemen der betriebswirtschaftlichen Anwendung der Matrizenrechnung befaßte.

Das Interesse dazu ist sicher vorhanden, aber das Vorhaben scheitert oft daran, daß man dazu das Rechnen mit Matrizen natürlich in einem gewissen Umfange erlernen und beherrschen muß. Erfahrungsgemäß ist es für die Nichtmathematiker schwer, sich diese Kenntnisse aus der vorhandenen Literatur anzueignen, da im allgemeinen zu viel an mathematischem Wissen vorausgesetzt wird. Diese Arbeit soll deshalb ein Versuch sein, interessierte Kollegen in das Gebiet der Matrizenrechnung einzuführen.

Bei der Ausarbeitung wurden zum Teil auch wertvolle Hinweise und Unterlagen von Kollegen des VEB Leuna-Werke „Walter Ulbricht“ verwendet; ihnen, vor allem Herrn Dr. *Pichler*, gilt mein besonderer Dank.

Dr. B. *Blumenthal*

Vorwort zur 2., unveränderten Auflage

Mit der wachsenden Bedeutung der Anwendung mathematischer Methoden zur Lösung ökonomischer und technologischer Probleme in allen Ebenen der Volkswirtschaft ist auch das Interesse an einführender Literatur — insbesondere für Nichtmathematiker — stark gewachsen. In Zusammenarbeit mit der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, bereite ich deshalb eine allgemeinverständliche Einführung in die wichtigsten Methoden und Anwendungsgebiete vor. Bis zur Drucklegung wird jedoch verständlicherweise noch einige Zeit vergehen. Wir halten es deshalb für richtig, zur Überbrückung kurzfristig einen unveränderten Nachdruck der „Einführung in die Matrizenrechnung“ herauszubringen. Die erste Auflage ist seit längerer Zeit vergriffen, und viele Anfragen weisen auf den Bedarf hin. Wir hoffen, auf diese Weise zunächst wenigstens einen Teil des vorhandenen Informationsbedürfnisses befriedigen zu können.

Für diejenigen Leser, die sich besonders für den Einsatz der maschinellen Lochkartentechnik zur Lösung von Aufgaben der Matrizenrechnung interessieren, gestatte ich mir noch den Hinweis auf meine Arbeit „Die Umkehrung und Multiplikation von Matrizen mit Hilfe von Arithmaschinen“, erschienen 1962 im Verlag Die Wirtschaft, Berlin.

Dr. B. Blumenthal

Inhalt

Vorwort	3
1 Allgemeines	7
2 Addition und Subtraktion	8
3 Multiplikation	9
3.1 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl (Skalar)	9
3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	9
3.3 Multiplikation von Matrizen	10
4 Umkehrung von Matrizen	15
4.1 Problemstellung	15
4.2 Lösung	15
4.3 Matrizenschreibweise	17
4.4 Kehrmatrix (reziproke Matrix, inverse Matrix)	17
4.5 Einiges aus der Determinantenrechnung	19
4.6 Umkehrung von Matrizen mit Hilfe von Unterdeterminanten	22
4.7 Umkehrung von Matrizen durch Matrizenaufspaltung	24
4.8 Umkehrung von Matrizen durch schrittweise Umformung	26
4.9 Umkehrung von Dreiecksmatrizen	28
5 Matrizenumkehr unter Einsatz von Lochkartentechnik und Elektronik	30
5.1 Einführende Bemerkungen	30
5.2 Einsatz von Lochkartenmaschinen	30
5.3 Einsatz elektronischer Rechengeräte	38
6 Zusammenfassung und Ausblick auf die Anwendung im Industriebetrieb	41
6.1 Zusammenfassung	41
6.2 Beispiel für die Anwendung der Matrizenrechnung für die Planung	41
6.21 Aufgabe	41
6.22 Fließbild	43
6.23 Verbrauchsnormen	43
6.24 Aufstellung der Kopplungs- und Aufwandsmatrix	43
6.25 Aufstellung und Anwendung der Strukturmatrix	44
6.26 Weitere Bemerkungen	46
6.3 Anwendung in der Soll-Ist-Rechnung	46
6.4 Anwendung auf die Lösung von Optimalproblemen	47
6.5 Schluß	47

I Allgemeines

Unter einer *Matrix* versteht man ein System von rechteckig in m Zeilen und n Spalten angeordneten Größen, d. h. von $m \cdot n$ Elementen. Ist $m = n$, dann handelt es sich um eine quadratische Matrix von der Ordnung m bzw. n . Die Matrix wird üblicherweise von runden oder auch eckigen Klammern umschlossen und zusammengefaßt mit großen deutschen Buchstaben (Fraktur) bezeichnet, z. B.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

oder

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = (b_{ik})$$

Die Indizes i und k bezeichnen die Zeilen und Spalten und durchlaufen 1, 2, ..., m bzw. 1, 2, ..., n

Aus der Literatur ist darüber hinaus noch folgende Darstellungsweise (Doppelstrich) bekannt:

$$\mathfrak{C} = \left\| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{array} \right\| = (c_{ik})$$

Die von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonale nennt man *Hauptdiagonale*, die von links unten nach rechts oben verlaufende ist die *Nebendiagonale*.

Zwei Matrizen heißen gleich, wenn sie in der Zahl der Zeilen und Spalten und in den entsprechenden Elementen übereinstimmen.

Beispiel:

Wenn $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, so heißt das $x_{11} = 1$ usf. $x_{12} = 0$

2 Addition und Subtraktion

Voraussetzung für diese Rechenoperationen ist eine gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten in den Matrizen. Die entsprechenden Elemente werden addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Summanden können vertauscht werden:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

Außerdem gilt

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

3 Multiplikation

3.1 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl (Skalar)

Jedes Element wird mit der Zahl multipliziert. Die Vertauschung der Faktoren ist möglich:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Es können weiter die bekannten Rechenregeln angewandt werden:

$$k\mathfrak{A} + l\mathfrak{B} = (k+l)\mathfrak{A}$$

$$k\mathfrak{A} + l\mathfrak{A} = (k+l)\mathfrak{A}$$

3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Unter *Vektoren* versteht man Matrizen, die nur aus einer Zeile oder einer Spalte bestehen. Man bezeichnet sie mit kleinen deutschen Buchstaben.

Zeilenvektoren kennzeichnet man normalerweise durch einen Strich, z. B. α' , β' .

$$\text{Zeilenvektor: } \alpha' = (1 \ 4 \ 3)$$

$$\text{Spaltenvektor: } \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix, so erhält man die transponierte Matrix.

$$\alpha' = (1 \ 4 \ 3), \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta' = (2 \ 5 \ 4 \ 3)$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bei der *Multiplikation mit einem Rechtsvektor* muß dieser – hier mit ξ bezeichnet – so viele Komponenten (Zeilen) haben, wie $\mathfrak{A}$ Spalten hat. Die Multiplikation ist nur unter dieser Voraussetzung möglich. Als Produkt ergibt sich ein Spaltenvektor mit der Zeilenzahl von $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \cdot \xi &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \cdot \xi = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 - 5 \cdot a_3 \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-5) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung wurden die Spalten von $\mathfrak{A}$ als Vektoren betrachtet und mit a_1 , a_2 und a_3 bezeichnet.

Liegt eine *Multiplikation mit einem Linksvektor* ξ' vor, so muß dieser so viele Komponenten (Spalten) haben wie $\mathfrak{A}$ Zeilen. Das Produkt stellt einen Zeilenvektor mit der Spaltenzahl von $\mathfrak{A}$ dar. Die Zeilenvektoren werden in diesem Beispiel mit a'_1 , a'_2 und a'_3 bezeichnet.

$$\begin{aligned}\xi' \cdot \mathfrak{A} &= (2 \ 3 \ -5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2 \ 3 \ -5) \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot a'_1 + 3 \cdot a'_2 - 5 \cdot a'_3 \\ &= 2 \cdot (1 \ 3 \ -5) \\ &\quad + 3 \cdot (2 \ 1 \ 0) \\ &\quad - 5 \cdot (0 \ 5 \ 1) \\ &= (2 \ 6 \ -10) + (6 \ 3 \ 0) + (0 \ -25 \ -5) \\ &= (8 \ -16 \ -15)\end{aligned}$$

3.3 Multiplikation von Matrizen

Bei der Matrizenmultiplikation sind folgende wichtige Regeln zu beachten:

a) Die beiden Faktoren, also Linksmatrix (Multiplikand) und Rechtsmatrix (Multiplikator), müssen *verkettbar* sein, d. h., die Linksmatrix muß die gleiche Anzahl von Spalten haben, wie die Rechtsmatrix Zeilen hat. Die Produktmatrix hat stets so viele Zeilen wie die Linksmatrix und so viele Spalten wie die Rechtsmatrix.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

2 Zeilen, 3 Spalten 3 Zeilen, 4 Spalten

Verkettung möglich

Ergebnis 2 Zeilen, 4 Spalten,
d. h. (2,4) — Matrix ($m=2, n=4$)

b) Die miteinander zu multiplizierenden Matrizen können im allgemeinen nicht vertauscht werden; das kommutative Gesetz gilt also hier nicht.

Beispiel:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier können, wie man sieht, die Produkte $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$ zwar beide gebildet werden, die Produktmatrizen sind aber voneinander verschieden (Rechnungsgang siehe unten).

Unter Hinweis auf den Abschnitt 4.5 soll an dieser Stelle der Vollständigkeit halber erwähnt werden, daß im Gegensatz hierzu die Determinanten beider Produktmatrizen den gleichen Wert haben, nämlich 18 (Differenz von Produkt der Hauptdiagonale und Produkt der Nebendiagonale).

c) Das sog. assoziative Gesetz gilt jedoch auch bei der Matrizenmultiplikation, also

$$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}$$

Erwähnt sei noch, daß die Multiplikation mit der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ (quadratisch, alle Elemente der Hauptdiagonale gleich 1, alle anderen Elemente gleich 0) keine Veränderung ergibt. Die Multiplikation mit $\mathfrak{E}$ entspricht also derjenigen mit 1 im Bereich der gewöhnlichen Zahlen. In diesem Fall ist – Verkettbarkeit vorausgesetzt – auch eine Vertauschung möglich.

Matrizen lassen sich miteinander multiplizieren, indem der Multiplikand nacheinander mit den Spaltenvektoren des Multiplikators, wie im Abschnitt 3.2 beschrieben, malgenommen wird und die Ergebnisse als Matrix zusammengefaßt werden (spaltenweise Berechnung). Man kann auch umgekehrt verfahren, d. h., man löst den Multiplikanden in Zeilenvektoren auf und multipliziert diese nacheinander mit dem Multiplikator (zeilenweise Berechnung):

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Spaltenweise Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{1. Spalte des Pro-} \\ \text{duktes} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{2. Spalte des Pro-} \\ \text{duktes} \end{array}$$

Zeilenweise Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (1 \ 3) + 1 \cdot (2 \ 0) = (2 \ 6) + (2 \ 0) \\ = (4 \ 6) \quad \text{1. Zeile des Produktes}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot (1 \ 3) + 0 \cdot (2 \ 0) = (3 \ 9) + (0 \ 0) \\ = (3 \ 9) \quad \text{2. Zeile des Produktes}$$

Normalerweise geht man diesen ausführlichen Weg nicht, sondern gelangt wie folgt zum richtigen Ergebnis:

Jede Zeile des Multiplikanden wird mit jeder Spalte des Multiplikators multipliziert, die Produkte der entsprechenden Elemente werden addiert. Aus dem Schnittpunkt der entsprechenden Spalte und Zeile ergibt sich die Stellung des Ergebnisses als Element in der Produktmatrix.

Normale Berechnung:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Summe der Produkte aus den Elementen der 1. Zeile und 1. Spalte
= Element 1. Zeile, 1. Spalte: $(2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) = 4$

Summe der Produkte aus den Elementen der 1. Zeile und 2. Spalte
= Element 1. Zeile, 2. Spalte: $(2 \cdot 3) + (1 \cdot 0) = 6$

Summe der Produkte aus den Elementen der 2. Zeile und 1. Spalte
= Element 2. Zeile, 1. Spalte: $(3 \cdot 1) + (0 \cdot 2) = 3$

Summe der Produkte aus den Elementen der 2. Zeile und 2. Spalte
= Element 2. Zeile, 2. Spalte: $(3 \cdot 3) + (0 \cdot 0) = 9$

Für weniger Geübte läßt sich die Berechnung durch Verwendung der transponierten Matrix von $\mathfrak{B}$, d. h. von $\mathfrak{B}'$, und durch eine andere Anordnung übersichtlicher gestalten und erleichtern.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$$

Es werden wieder die entsprechenden Elemente multipliziert und die Ergebnisse addiert. Durch die Verwendung der transponierten Matrix $\mathfrak{B}'$ werden aber nur noch Zeilen zueinander in Beziehung gesetzt:

Summe der Produkte aus 1. Zeile und 1. Zeile = 1. Zeile, 1. Spalte

Summe der Produkte aus 1. Zeile und 2. Zeile = 2. Zeile, 1. Spalte

Summe der Produkte aus 2. Zeile und 1. Zeile = 1. Zeile, 2. Spalte

Summe der Produkte aus 2. Zeile und 2. Zeile = 2. Zeile, 2. Spalte

Diese Form eignet sich für den Einsatz von Hilfskräften.

An die Stelle einer unmittelbaren Division von Matrizen, die nicht möglich ist, tritt die Multiplikation mit der Kehrmatrix, inversen oder reziproken Matrix ($\mathfrak{A}^{-1}$), die in den nächsten Abschnitten behandelt wird.

Die Richtigkeit der Produkte aus der Multiplikation von Matrizen kann mit Hilfe von Spalten- und Zeilensummen wie folgt kontrolliert werden:

Vom Multiplikanden werden die Spaltensummen und vom Multiplikator die Zeilensummen gebildet. Die Summen der Zeilen und Spalten mit gleichem Index (z. B. 1. Spalte und 1. Zeile) werden multipliziert und die dabei gewonnenen Produkte addiert. Diese Summe muß gleich der Summe der Elemente der Produktmatrix sein.

Zwei Zahlenbeispiele sollen das erläutern:

$$\text{a) } \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Spaltensummen von $\mathfrak{A}$: $2 + 3 = 5$ (1. Spalte)

$1 + 0 = 1$ (2. Spalte)

Zeilensummen von $\mathfrak{B}$: $1 + 3 = 4$ (1. Zeile)

$2 + 0 = 2$ (2. Zeile)

Multiplikation der zusammengehörenden Summen: $5 \cdot 4 = 20$

$$1 \cdot 2 = 2$$

Addition der Produkte:

$$\underline{\underline{22}}$$

Addition der Elemente

der Produktmatrix: 1. Zeile: $4 + 6 = 10$

2. Zeile: $3 + 9 = 12$

Addition der Summen

$$\underline{\underline{22}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$12 \cdot 2 = 24 \quad 16$$

$$4 \cdot 3 = 12 \quad 12$$

$$6 \cdot 1 = 6 \quad 14$$

$$\underline{\underline{42}} \quad \underline{\underline{42}}$$

Nach dem gleichen Prinzip läßt sich die Kontrolle auch so durchführen, daß eventuelle Fehler bereits abgegrenzt werden. Zu diesem Zweck erweitert man die beiden Matrizen (Multiplikand und Multiplikator) um die Spalten- bzw. Zeilensummen und multipliziert erst anschließend. Wenn das Ergebnis fehlerfrei ist, so entspricht das rechte untere Eckelement der (erweiterten) Produktmatrix jeweils der Summe der Elemente der letzten Zeile und Spalte. Diese Elemente sind außerdem die Summe der darüber- bzw. danebenstehenden. Entsprechen sie nicht dem Ergebnis der zugehörigen Addition, so liegt in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte ein Fehler vor.

Am Beispiel a) soll dies abschließend dargestellt werden:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ 3 & 0 & \\ \hline 5 & 1 & \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 12 \\ \hline 7 & 15 & 22 \end{array} \right)$$

4 Umkehrung von Matrizen

4.1 Problemstellung

Die Problematik der Matrizenumkehr wird am besten verständlich, wenn man von einem linearen Gleichungssystem ausgeht, z. B. von

$$\begin{aligned} 1 x_1 - 5 x_2 &= y_1 \\ -0,04 x_1 + 1 x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Sind für y_1 und y_2 bestimmte Werte gegeben, so lassen sich die Unbekannten x_1 und x_2 – von Spezialfällen abgesehen – eindeutig berechnen. Man kann aber auch die Frage so stellen, daß man für beliebige y -Werte möglichst schnell die zugehörigen Werte für die Unbekannten x_1, x_2 usw. finden will, d. h., es wird die „allgemeine Lösung“ des Gleichungssystems gesucht. Zu diesem Zweck drückt man die Unbekannten unter Zuhilfenahme der die Relationen festlegenden Koeffizienten durch die absoluten Glieder y_1, y_2 usw. aus. Durch Einsetzen jeweils vorliegender y -Werte kann man dann verhältnismäßig rasch die entsprechenden x -Werte ausrechnen.

4.2 Lösung

Die Lösung ergibt sich ohne weiteres nach einem der üblichen Verfahren, etwa wie folgt:

$$\begin{array}{r|l|l} x_1 - 5 x_2 = y_1 & | & + \\ -0,04 x_1 + x_2 = y_2 & | \cdot 5 & + \\ \hline 0,8 x_1 & = & y_1 + 5 y_2 \end{array}$$

Durch Multiplikation mit 5 und anschließender Addition beider Gleichungen kann x_1 zunächst eliminiert werden. x_1 wird durch y_1 und y_2 definiert.

$$x_1 = \frac{y_1 + 5 y_2}{0,8} = \underline{\underline{1,25 y_1 + 6,25 y_2}}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5 x_2 &= y_1 \\ 1,25 y_1 + 6,25 y_2 - y_1 &= 5 x_2 \end{aligned}$$

Wird x_1 durch den angegebenen Ausdruck ersetzt, kann x_2 ebenfalls durch y_1 und y_2 definiert werden.

$$x_2 = \frac{0,25 y_1 + 6,25 y_2}{5} = \underline{\underline{0,05 y_1 + 1,25 y_2}}$$

Ein anderer Weg ist der, daß man dieses Gleichungssystem für eine der Anzahl der Gleichungen entsprechende Anzahl von Spezialfällen löst,

bei denen der Reihe nach das absolute Glied y einer Gleichung gleich 1 gesetzt wird und die der übrigen Gleichungen gleich 0. In obigem Beispiel hätte man also nachstehende zwei Gleichungssysteme zu berechnen:

$$\text{I.} \quad x_1 - 5 x_2 = 1 \qquad \text{III.} \quad x_1 - 5 x_2 = 0$$

und

$$\text{II.} \quad -0,04 x_1 + x_2 = 0 \qquad \text{IV.} \quad -0,04 x_1 + x_2 = 1$$

Das ergibt:

$$x_1 = 1,25 \qquad x_1 = 6,25$$

und

$$x_2 = 0,05 \qquad x_2 = 1,25$$

Durch Einsetzen der gefundenen Größen läßt sich die Richtigkeit leicht beweisen.

$$\text{I.} \quad (1 \cdot 1,25) - (5 \cdot 0,05) = 1$$

$$\text{II.} \quad (-0,04 \cdot 1,25) + (1 \cdot 0,05) = 0$$

$$\text{III.} \quad (1 \cdot 6,25) - (5 \cdot 1,25) = 0$$

$$\text{IV.} \quad (-0,04 \cdot 6,25) + (1 \cdot 1,25) = 1$$

Zu der oben bereits erwähnten allgemeinen Lösung von x_1 und x_2 kommt man durch folgende Rechnung:

Erweiterung der Gleichungen I. und II. durch Multiplikation mit y_1
 Erweiterung der Gleichungen III. und IV. durch Multiplikation mit y_2
 und Addition der erweiterten Gleichung I. und III., sowie II. und IV.

$$\begin{array}{l} \text{I. } y_1: \quad 1,25 y_1 - 0,25 y_1 = y_1 \\ \text{III. } y_2: \quad 6,25 y_2 - 6,25 y_2 = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right.$$

$$1,25 y_1 + 6,25 y_2 - 0,25 y_1 - 6,25 y_2 = y_1$$

umstellen und anders zusammenfassen

$$= 1 \underbrace{(1,25 y_1 + 6,25 y_2)}_{x_1} - 5 \underbrace{(0,05 y_1 + 1,25 y_2)}_{x_2} = y_1$$

$$\begin{array}{l} \text{II. } y_1: \quad -0,05 y_1 + 0,05 y_1 = 0 \\ \text{IV. } y_2: \quad -0,25 y_2 + 1,25 y_2 = y_2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right.$$

$$-0,05 y_1 - 0,25 y_2 + 0,05 y_1 + 1,25 y_2 = y_2$$

umstellen und anders zusammenfassen

$$= -0,04 \underbrace{(1,25 y_1 + 6,25 y_2)}_{x_1} + 1 \underbrace{(0,05 y_1 + 1,25 y_2)}_{x_2} = y_2$$

Auch auf diesem Wege ergibt sich also wieder die allgemeine Lösung:

$$x_1 = 1,25 y_1 + 6,25 y_2$$

$$x_2 = 0,05 y_1 + 1,25 y_2$$

4.3 Matrizenschreibweise

Das Ausgangsgleichungssystem läßt sich als Matrixgleichung schreiben, in unserem Beispiel also folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -0,04 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden beiden Matrizen nach den in Abschnitt 3 behandelten Regeln, so erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1 - 5 x_2 \\ -0,04 x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

und sieht somit die Übereinstimmung mit dem Ausgangsgleichungssystem.

In der gleichen Weise läßt sich auch die allgemeine Lösung, d. h. also das allgemeine Gleichungssystem, darstellen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 & 6,25 \\ 0,05 & 1,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 y_1 + 6,25 y_2 \\ 0,05 y_1 + 1,25 y_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1,25 & 6,25 \\ 0,05 & 1,25 \end{pmatrix}$$

deren Spalten aus den speziellen Lösungen für

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder auch nach einem anderen Verfahren ermittelt wurden, liefert also die Lösungen für beliebige y_1 und y_2 . Sie speichert sozusagen die Lösungen.

4.4 Kehrmatrix (reziproke Matrix, inverse Matrix)

Wie bereits im Abschnitt 4.1 erwähnt, kann man in der Regel zu einem speziellen linearen Gleichungssystem ein umgekehrtes Gleichungssystem finden. Der Matrix aus den Koeffizienten des Ausgangssystems läßt sich dann die Matrix des umgekehrten Systems gegenüberstellen; das ist die Kehrmatrix. Auf das benutzte Beispiel angewandt, bedeutet das

$$\begin{pmatrix} 1,25 & 6,25 \\ 0,05 & 1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -0,04 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \text{Kehrmatrix}$$

Durch Multiplikation einer Matrix mit ihrer Kehrmatrix ergibt sich die Einheitsmatrix $\mathcal{E}$, die bereits im Abschnitt 3.3 erwähnt wurde, also in unserem Fall

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -0,04 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,25 & 6,25 \\ 0,05 & 1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder allgemein

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathbb{E}$$

In diesem Fall ist die Vertauschung möglich.

Wichtig ist, daß sich nur quadratische Matrizen umkehren lassen. Sie müssen außerdem regulär sein, d. h., ihre Determinante (s. Abschnitt 4.5) darf nicht 0 sein. Im letzten Fall nennt man die Matrix singulär. Derartige singuläre Matrizen ergeben sich aus Gleichungssystemen, die linear abhängige Zeilen oder Spalten aufweisen.

Die Bildung der erwähnten speziellen Fälle führt dann nämlich zu sich offenbar widersprechenden Relationen, z. B. bei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Zu berechnen wäre zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0, \end{aligned}$$

das natürlich unlösbar ist.

Um die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ zu berechnen, muß man also das Gleichungssystem

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \quad [\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{x}]$$

für folgende Spezialfälle auflösen (n = Zahl der Gleichungen = Zahl der Unbekannten):

$$\begin{array}{cccc} y_1 = 1 & y_1 = 0 & y_1 = 0 \dots & y_1 = 0 \\ y_2 = 0 & y_2 = 1 & y_2 = 0 \dots & y_2 = 0 \\ y_3 = 0 & y_3 = 0 & y_3 = 1 \dots & y_3 = 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ y_n = 0 & y_n = 0 & y_n = 0 \dots & y_n = 1 \end{array}$$

Die Lösungen ergeben die Spalten der Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$.

Praktisch sei dies an folgendem Beispiel dargestellt:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Matrizengleichung ist

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

An die Stelle von

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

treten der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d. h.}$$

Der zweite Index
von x kennzeichnet
hier gleichzeitig
das spezielle
Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sind die entsprechenden Gleichungssysteme zu lösen. Das erste von ihnen lautet demnach wie folgt:

$$10 x_1 + 3 x_2 + x_3 = 1$$

$$2 x_1 + 5 x_2 + 7 x_3 = 0$$

$$6 x_1 + 4 x_2 + 9 x_3 = 0$$

Die Ergebnisse, die den Spalten der Kehrmatrix entsprechen, sind in folgender Tabelle festgehalten:

y_1	1	0	0
y_2	0	1	0
y_3	0	0	1
x_1	0,078	— 0,105	0,073
x_2	0,109	0,382	— 0,309
x_3	— 0,100	— 0,100	0,200

Zur Probe werden Ausgangsmatrix und Kehrmatrix multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,078 & -0,105 & 0,073 \\ 0,109 & 0,382 & -0,309 \\ -0,100 & -0,100 & 0,200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

Durch diese Probe ist bewiesen, daß die Umkehrung stimmt. (Da die Errechnung der Unbekannten nur bis zu drei Dezimalstellen geführt wurde, ergeben sich in der Matrix $\mathbb{E}$ Abweichungen in der dritten Stelle nach dem Komma, die der Klarheit wegen oben weggelassen wurden.)

4.5 Einiges aus der Determinantenrechnung

Bei der Umkehrung von Matrizen kann man verschiedene Methoden anwenden. Eine davon bedient sich der Determinantenrechnung. Es soll deshalb jetzt zunächst eine auszugsweise Einführung in dieses Verfahren gegeben werden, die selbstverständlich den für notwendig gehaltenen Umfang nicht übersteigt.

Wie bei den Matrizen handelt es sich bei den Determinanten um ein System von Größen, das jedoch *stets* quadratisch ist, also eine gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten aufweist. Das System wird durch zwei senkrechte Striche begrenzt. Im Gegensatz zur Matrix hat die Deter-

minante als Gesamtheit einen Wert, über dessen Größe im folgenden einiges gesagt werden soll.

Der Wert einer *zweireihigen Determinante*, z. B.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix},$$

ergibt sich aus der Differenz der Produkte der Hauptdiagonale und der Nebendiagonale, also

$$(3 \cdot 7) - (2 \cdot 5) = 21 - 10 = 11$$

Allgemein läßt sich dies folgendermaßen darstellen:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

In ähnlicher Weise wird der Wert einer dreireihigen Determinante nach der Regel von *Sarrus* ermittelt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Auch hier errechnet man den Wert als Differenz, und zwar als Unterschied der Summe der Produkte der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen und der Summe der Produkte der von links nach rechts oben laufenden. Klarer wird dies, wenn man die beiden ersten Spalten nochmals rechts an das Zahlenschema anfügt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Es ergibt sich

$$(a_{11} a_{22} a_{33}) + (a_{12} a_{23} a_{31}) + (a_{13} a_{21} a_{32}) \\ - (a_{31} a_{22} a_{13}) - (a_{32} a_{23} a_{11}) - (a_{33} a_{21} a_{12})$$

Determinanten mit mehr als drei Reihen sind nicht mehr so einfach zu berechnen, da die Anzahl der Summanden progressiv wächst. Sie richtet sich nach den Regeln der Kombinatorik und ist $n!$, wenn n die Anzahl der Glieder kennzeichnet. Bei einer viergliedrigen Determinante ergeben sich also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Summanden, bei einer fünfgliedrigen bereits 120 Summanden usw.

Für die Berechnung des Wertes solcher Determinanten wendet man den Weg der Zerlegung an.

Man geht dabei von einer Spalte aus, z. B. von der ersten. Die ausgewählte Spalte wird gestrichen. Der Reihe nach streicht man dann jeweils die Zeile des Schnittpunktelements. Die verbleibenden Elemente bilden die verschiedenen Unterdeterminanten. Diese werden mit den zugehörigen Schnittpunktelementen multipliziert. Dadurch ergeben sich die Summanden der nächsten Rechenstufe. Sie sind positiv, wenn die

Summe der Zeilen- und Spaltenindizes des im Schnittpunkt liegenden Elementes gerade ist, sie sind negativ, wenn diese Summe eine ungerade Zahl ergibt.

Das folgende Beispiel geht der Einfachheit wegen wieder von der bereits benutzten dreireihigen Determinante aus:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &= [a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23})] - [a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13})] \\
 &\quad + [a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13})] \\
 &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} \\
 &\quad + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13}
 \end{aligned}$$

Die Bildung der Unterdeterminanten und der Summanden sei nachstehend nochmals schematisch dargestellt:

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{c} \boxed{a_{11}} \text{---} a_{12} \text{---} a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array} \right\} \text{ ergibt } + a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ \boxed{a_{21}} \text{---} a_{22} \text{---} a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array} \right\} \text{ ergibt } - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ \boxed{a_{31}} \text{---} a_{32} \text{---} a_{33} \end{array} \right\} \text{ ergibt } + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Da die Reihenfolge nach dem kommutativen Gesetz bei Addition und Multiplikation von Zahlen beliebig ist, sieht man, daß die sich am Ende der Rechnung ergebenden sechs Summanden denen gleichen, die nach der Regel von *Sarrus* ermittelt wurden. Bei mehrreihigeren Determinanten verfährt man in der gleichen Weise, wobei der Umfang der Rechenarbeiten – wie bereits erwähnt – progressiv anwächst.

Dieser kurze Auszug aus der Determinantenrechnung reicht für die folgenden Ausführungen. Die zahlreichen Regeln dieses Zweiges der Mathematik sind der Literatur zu entnehmen.

Interessant ist dabei z. B., daß die Multiplikation von Determinanten anders vorgenommen werden kann als die von Matrizen.

Erwähnt sei bereits hier (siehe auch S. 32), daß man sich der Determinantenrechnung bei der Auflösung linearer Gleichungssysteme bedienen kann. Ein kurzes Beispiel soll dies zum Schluß dieses Abschnittes noch erläutern. Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$10x + 5y = 40$$

$$2x + 2y = 10$$

Aus den Koeffizienten der Unbekannten bildet man die Determinante D :

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Zur Berechnung der ersten Unbekannten x benötigt man die Determinante D_1 , die dadurch gewonnen wird, daß man an die Stelle der ersten Spalte von D die absoluten Glieder des Gleichungssystems setzt:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 40 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$$

Entsprechend verfährt man zur Berechnung von y unter Veränderung der zweiten Spalte von D und erhält

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 40 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

Die Unbekannten ergeben sich dann als Quotienten von D_1 und D bzw. D_2 und D :

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{80 - 50}{20 - 10} = 30 : 10 = 3$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 40 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{100 - 80}{20 - 10} = 20 : 10 = 2$$

Durch Einsetzen dieser Werte in das Gleichungssystem kann man sich leicht von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugen.

4.6 Umkehrung von Matrizen mit Hilfe von Unterdeterminanten

Im vorigen Abschnitt wurde u. a. auch der Begriff der Unterdeterminante erläutert. Mit ihrer Hilfe kann man die Umkehrung einer Matrix auf einem anderen Wege als dem bisher gezeigten vornehmen. Dabei sollen die Unterdeterminanten durch große lateinische Buchstaben

bezeichnet werden, deren Indizes die jeweils gestrichenen Zeilen und Spalten angeben:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} i = \text{Zeile} \\ k = \text{Spalte} \end{matrix}$$

Die Ausgangsmatrix sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann ist die Kehrmatrix

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Folgendes Zahlenbeispiel soll dies verständlicher machen:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Der Wert der Determinante $|\mathfrak{A}|$ von $\mathfrak{A}$ ist gleich -12 .

Der Wert der Unterdeterminanten A_{11} und A_{12} ergibt sich aus nachstehender Rechnung:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= +1 \cdot (-6 - 0) = -6 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-2 - 4) = 6 \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die Werte der übrigen Unterdeterminanten zu ermitteln. Alle so errechneten Werte werden – dem oben dargestellten Schema entsprechend – in transponierter Form eingesetzt. Danach ist

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 6 & 10 & -5 \\ 12 & 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,25 \\ -0,5 & -0,83 & 0,42 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 6 & 10 & 5 \\ 12 & 12 & -12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

Die allgemeine Formel dazu lautet

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathbb{E}$$

4.7 Umkehrung von Matrizen durch Matrizenauflösung

Bei diesem Verfahren spaltet man die umzukehrende Matrix $\mathfrak{A}$ so in Untermatrizen, die dann als Elemente betrachtet werden können, auf, daß das linke obere ECKELEMENt durch eine quadratische Matrix gebildet wird. Über eine Hilfsmatrix $\mathfrak{B}$ werden die Untermatrizen von $\mathfrak{A}^{-1}$ errechnet. Am besten wird dies am nachstehenden allgemeinen Fall verständlich:

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{D}_{11} & \mathfrak{D}_{12} \\ \hline \mathfrak{D}_{21} & \mathfrak{D}_{22} \end{array} \right)$$

Der im rechten unteren Feld enthaltene Ausdruck wurde zur Vereinfachung in den anderen Feldern mit $(\dots)^{-1}$ dargestellt.

$$\mathfrak{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{D}_{11}^{-1} & -\mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} \\ \hline \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} & \mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} \end{array} \right)$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{D}_{11}^{-1} + \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} (\dots)^{-1} \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} & -\mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} (\dots)^{-1} \\ \hline -(\dots)^{-1} \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} & (\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12})^{-1} \end{array} \right)$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{E} \end{array} \right)$$

Ein Zahlenbeispiel zeigt die Richtigkeit des Verfahrens. Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden.

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ \hline -1 & -3 \\ 4 & 0 \end{array} \right)$$

Die Umkehrung von $\mathfrak{D}_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ erfolgt nach einer der gezeigten Methoden und ergibt

$$\mathfrak{D}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ -0,083 & -0,417 \end{pmatrix}$$

Es folgen die weiteren Rechenschritte zur Ermittlung von $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} &= (4 \ 0) \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ -0,083 & -0,417 \end{pmatrix} = (1 \ 1) \\ -\mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} &= \begin{pmatrix} -0,25 & -0,25 \\ 0,083 & 0,417 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,417 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} &= (2) - (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2) - (1) = (1) \\ \mathfrak{B} &= \left(\begin{array}{cc|c} 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ -0,083 & -0,417 & 0,417 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

Die Kehrmatrix $\mathfrak{U}^{-1}$ wird nun in nachstehenden Teilschritten berechnet:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12})^{-1} &= \left[(2) - (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= [(2) - (1)]^{-1} = (1)^{-1} = (1) \\ -\mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} (\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12})^{-1} &= \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,417 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,417 \end{pmatrix} \\ -(\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12})^{-1} \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} &= (-1) (1 \ 1) = (-1 \ -1) \\ \mathfrak{D}_{11}^{-1} + \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12} (\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \mathfrak{D}_{12})^{-1} \mathfrak{D}_{21} \mathfrak{D}_{11}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ -0,083 & -0,417 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,417 \end{pmatrix} (1 \ 1) \\ &= \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ -0,083 & -0,417 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ -0,417 & -0,417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,834 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ordnet man die eben ermittelten Teilergebnisse entsprechend an, so ergibt sich

$$\mathfrak{U}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0,5 & 0,5 & -0,25 \\ -0,5 & -0,834 & 0,417 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,25 \\ -0,5 & -0,834 & 0,417 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gleiche Proberechnung wurde schon auf S. 24 vorgenommen.

Bei einiger Übung kann man auf den Umweg über die Hilfsmatrix $\mathfrak{B}$ verzichten.

Bei praktischen Aufgaben versucht man die Untermatrix $\mathfrak{D}_{11}$ so zu wählen, daß sie eine Dreiecksmatrix darstellt, denn diese spezielle Matrix

läßt sich bedeutend leichter umkehren, wie in Abschnitt 4.9 gezeigt wird.

4.8 Umkehrung von Matrizen durch schrittweise Umformung

Von diesem Verfahren hörte der Verfasser erstmalig bei einem Gedanken austausch mit tschechoslowakischen Kollegen vom Institut für Luftfahrtindustrie, Prag. Dr. *Popelka* verwendet es zur Matrizenumkehrung mit Hilfe von Lochkartenmaschinen. Da diese Methode besonders einfach erscheint, wurde sie noch mit in die vorliegende Arbeit aufgenommen.

Aus einer Ausgangsmatrix $\mathfrak{A}_1$ wird durch Subtraktion des Produktes der Summe der Elemente der Hauptdiagonale (Hilfsfaktor) und der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ eine Hilfsmatrix $\mathfrak{B}_1$ gewonnen. Die Multiplikation von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ ergibt die umgeformte Ausgangsmatrix nach dem ersten Schritt, nämlich $\mathfrak{A}_2$. Es schließt sich die Ermittlung der Hilfsmatrix $\mathfrak{B}_2$ an. Man geht in der gleichen Weise vor wie oben, wobei die Subtraktion von $\mathfrak{A}_2$ (Minuend) ausgeht. Subtrahend ist jetzt das Produkt der Summe der Elemente der Hauptdiagonale, geteilt durch 2 (Hilfsfaktor, 2. Schritt!) und der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$. Dem Grad der umzukehrenden Matrix (n) entsprechend, wird in dieser Art weitergerechnet, bis sich $\mathfrak{B}_n$ ergibt, das stets eine Nullmatrix darstellt.

Die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ ermittelt man nunmehr durch eine einfache Multiplikation. Der Multiplikand wird folgendermaßen errechnet: Die Summe der Elemente der zuletzt errechneten umgeformten Ausgangsmatrix ($\mathfrak{A}_n$) wird durch den Schritindex (n) geteilt. Von dem ermittelten Quotienten wird der reziproke Wert gebildet. Multiplikator ist die Hilfsmatrix des vorletzten Schrittes ($\mathfrak{B}_{n-1}$).

Am besten wird dies auch hier an einem Zahlenbeispiel klar, bei dem wieder die gleiche Ausgangsmatrix wie bisher verwendet wird. Die vor kommenden Größen bzw. Beziehungen sollen der Übersichtlichkeit wegen zunächst in allgemeiner Form zusammengestellt werden.

$\mathfrak{A}_1$	Ausgangsmatrix (Beginn des ersten Schrittes)
$\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$	umgeformte Ausgangsmatrizen (Beginn des zweiten bis n -ten Schrittes)
$\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$	Hilfsmatrizen (Ergebnis der Schritte 1 bis n)
$g_1, \dots, g_n$	Hilfsfaktoren

$$g_s = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(s)}}{s} \quad (s = \text{Schrittindex} = 1, \dots, n)$$

$$\mathfrak{B}_s = \mathfrak{A}_s - g_s \cdot \mathfrak{E}$$

z. B. $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 - g_1 \cdot \mathfrak{E}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_n &= \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_{n-1} \\ \text{z. B. } \mathfrak{A}_2 &= \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_n &= 0 \\ \mathfrak{A}^{-1} &= \frac{1}{g_n} \cdot \mathfrak{B}_{n-1}\end{aligned}$$

Beispiel:

$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	}	1. Schritt
$g_1 = \frac{5 - 3 + 2}{1} = 4$		
$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 - g_1 \cdot \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	}	2. Schritt
$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 18 & -5 \\ 12 & 12 & -4 \end{pmatrix}$		
$g_2 = \frac{2 + 18 - 4}{2} = 8$	}	3. Schritt
$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2 - g_2 \cdot \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 18 & -5 \\ 12 & 12 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 6 & 10 & -5 \\ 12 & 12 & -12 \end{pmatrix}$		
$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 6 & 10 & -5 \\ 12 & 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$	}	Ermittlung der Kehrmatrix
$g_3 = \frac{-36}{3} = -12$		
$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{A}_3 - g_3 \cdot \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = 0$		
$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{g_3} \cdot \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 6 & 10 & -5 \\ 12 & 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,25 \\ -0,5 & -0,83 & 0,42 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$		

Dieses Verfahren zeichnet sich dadurch aus, daß es auf einfachen Rechenoperationen aufbaut, die übersichtlich kombiniert sind. Es dürfte sich dadurch sowohl für die manuelle Errechnung mit Tischrechenmaschinen als auch für Rechenautomaten besonders gut eignen.

4.9 Umkehrung von Dreiecksmatrizen

Dreiecksmatrizen weisen unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen als Elemente auf. Bei der Umkehrung derartiger Matrizen wendet man Verfahren an, die von der Auflösung der zugehörigen linearen Gleichungssysteme ausgehen. Man errechnet also entweder die „allgemeine Lösung“ oder die „speziellen Gleichungssysteme“ mit den Spalten der Einheitsmatrix als absolute Glieder (s. S. 15/16). In beiden Fällen macht man sich den Vorteil zunutze, daß sich aus einer Dreiecksmatrix ein gestaffeltes Gleichungssystem ergibt, das sich von der letzten Gleichung her mühelos rückwärts auflösen läßt. In der letzten Gleichung tritt ja nur eine Unbekannte auf, die sich ohne Schwierigkeit berechnen läßt. Setzt man den gefundenen Wert in die vorletzte Gleichung ein, so bleibt ebenfalls nur noch eine Unbekannte übrig usw.

Das nachstehende Beispiel zeigt die Umkehrung durch Ermittlung der allgemeinen Lösung.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Matrizengleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das folgende gestaffelte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1x_4 &= y_1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= y_2 \\ 2x_3 + 1x_4 &= y_3 \\ 3x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

Die Werte für die Unbekannten x_1 bis x_4 lassen sich mühelos errechnen:

$$\begin{aligned} x_4 &= 1/3 y_4 \\ x_3 &= 1/2 y_3 - 1/6 y_4 \\ x_2 &= 1/2 y_2 - 1 y_3 - 1/2 y_4 \\ x_1 &= 1/5 y_1 - 3/10 y_2 + 13/30 y_4 \end{aligned}$$

Sie entsprechen den Elementen der Kehrmatrix, wie die folgende Kontrollrechnung zeigt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & -3/10 & 0 & 13/30 \\ 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt nun die Umkehrung der gleichen Dreiecksmatrix durch Auflösung der zugehörigen vier speziellen Gleichungssysteme:

	Gleichungssystem			
	I	II	III	IV
$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 1x_4 =$	1	0	0	0
$2x_2 + 4x_3 + 5x_4 =$	0	1	0	0
$2x_3 + 1x_4 =$	0	0	1	0
$3x_4 =$	0	0	0	1
$x_4 =$	0	0	0	1/3
$x_3 =$	0	0	1/2	— 1/6
$x_2 =$	0	1/2	— 1	— 1/2
$x_1 =$	1/5	— 3/10	0	13/30

In der entsprechenden umgekehrten Reihenfolge (x_1, x_2, x_3, x_4) ergeben sich wieder die Spalten der Kehrmatrix, wie sie bereits nach dem anderen Verfahren (allgemeine Lösung) ermittelt wurden.

5 Matrizenumkehr unter Einsatz von Lochkartentechnik und Elektronik

5.1 Einführende Bemerkungen

Aus den vorhergehenden Abschnitten geht hervor, daß man das Problem der Matrizenumkehrung vollständig gelöst hat und daß es eine Reihe von Verfahren dazu gibt, die natürlich nicht alle dargestellt wurden. Bei der praktischen Anwendung tritt jedoch – wie mehrfach zu erkennen war – die Schwierigkeit auf, daß die Rechenarbeiten mit zunehmender Größe der umzukehrenden Matrizen außergewöhnlich stark zunehmen, so daß verhältnismäßig schnell Grenzen gesetzt sind. Die Umkehrung einer Matrix 20. Ordnung dauert z. B. unter Einsatz der üblichen Bürorechenmaschinen etwa drei Wochen. Es ist zu bedenken, daß durch Einschaltung laufender, geeigneter Kontrollen absolute Fehlerlosigkeit garantiert werden muß, wenn das Endergebnis stimmen soll. Weiter ist zu bemerken, daß man nicht immer Dreiecksmatrizen vorzuliegen hat oder sie durch Umstellung erreichen kann.

Die Anwendung höherer Formen der Mechanisierung bzw. Automatisierung scheint also besonders dazu geeignet zu sein, die Umkehrung umfangreicher Matrizen in einer vertretbaren Zeit zu ermöglichen. Dabei sind folgende Unterschiede zu bedenken: Bedient man sich Lochkartenanlagen, dann muß ein Lösungsverfahren benutzt werden, das sich in einfache Teilschritte zerlegen läßt, die dem Leistungsvermögen dieser Maschinen entsprechen. Beim Einsatz elektronischer Rechenautomaten, denen ein ganzes Programm vorgegeben werden kann, lassen sich auch kompliziertere mathematische Methoden anwenden.

In den nächsten beiden Abschnitten wird einmal die Matrizenumkehrung mit Aritma-Lochkartenmaschinen in großen Zügen dargestellt, zum anderen wird ein Überblick über die Anwendung des Elektronenrechners Gamma 3 der französischen Firma Bull auf dieses Problem gegeben.

5.2 Einsatz von Lochkartenmaschinen

Man wendet die Methode der Lösung der zugehörigen speziellen Gleichungssysteme an. Dabei bedient man sich eines sog. Iterationsverfahrens, das sich durch einfache, aber häufig wiederkehrende Operationen auszeichnet. Es soll zunächst kurz beschrieben werden:

Umzukehren ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen speziellen Gleichungssysteme lauten:

	Gleichungssystem		
	I	II	III
$10x_1 + 2x_2 + 1x_3 =$	1	0	0
$3x_1 + 10x_2 + 3x_3 =$	0	1	0
$2x_1 + 3x_2 + 10x_3 =$	0	0	1

Der Gang der Rechnung soll an Hand des Gleichungssystems I dargestellt werden: Dieses ist so umzuformen, daß jeweils die Unbekannte des bisherigen Diagonalgliedes herausgehoben wird:

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 1 - 2x_2 - 1x_3 \\ 10x_2 &= 0 - 3x_1 - 3x_3 \\ 10x_3 &= 0 - 2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

Um spätere Divisionen zu vermeiden und damit die Rechenzeit zu vermindern, bringt man die Gleichungen durch Division mit den Koeffizienten der herausgehobenen Unbekannten auf den Wert je Einheit. Im obigen vereinfachten Beispiel sind also alle drei Gleichungen durch 10 zu teilen. Es ergibt sich:

Un- bekannte	Ausgangs- zahl	Faktoren/ abg. Unbekannte
$x_1 = 0,1$		$-0,2x_2 - 0,1x_3$
$x_2 = 0$		$-0,3x_1 - 0,3x_3$
$x_3 = 0$		$-0,2x_1 - 0,3x_2$

(Die Überschriften beziehen sich bereits auf die lochkartenmäßige Abwicklung.)

Es wird nun unterstellt, daß es sich bei den Ausgangszahlen bereits um den Wert der Unbekannten handelt. Sie sollen mit $x_{1/0}$, $x_{2/0}$ und $x_{3/0}$ bezeichnet werden. Man setzt sie in das Gleichungssystem ein – wobei die Ausgangszahlen selbst unberücksichtigt bleiben – und erhält die Werte für $x_{1/1}$, $x_{2/1}$ und $x_{3/1}$:

$$\begin{aligned} x_{1/1} &= -(0,2 \cdot 0) - (0,1 \cdot 0) = 0 \\ x_{2/1} &= -(0,3 \cdot 0,1) - (0,3 \cdot 0) = -0,03 \\ x_{3/1} &= -(0,2 \cdot 0,1) - (0,3 \cdot 0) = -0,02 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten wird die Rechnung in der gleichen Weise fortgesetzt, und man bekommt als Ergebnis dieser zweiten Umlage die Werte für $x_{1/2}$, $x_{2/2}$ und $x_{3/2}$. Führt man in dieser Art fort und addiert zum Schluß die Ausgangszahlen mit den zugehörigen Umlagewerten, so erhält man

die Werte der Unbekannten und damit der entsprechenden Spalten (hier der ersten) der Kehrmatrix, also z. B.

$$x_{1/0} + x_{1/1} + x_{1/2} + \dots + x_{1/n} = x_1$$

Die Anzahl der nötigen Umlagen richtet sich nach den Ausgangswerten, der Relation der Koeffizienten und der gewünschten Genauigkeit. Nach neun Umlagen ergeben sich bei der Genauigkeit von vier Dezimalstellen im obigen Beispiel

$$x_1 = 0,1069$$

$$x_2 = -0,0283$$

$$x_3 = -0,0130$$

Die Richtigkeit soll nun unter Anwendung der Determinantenmethode bewiesen werden:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 851$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 91$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -24$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -11$$

$$x_1 = D_{x_1} : D = 91 : 851 = 0,1069$$

$$x_2 = D_{x_2} : D = -24 : 851 = -0,0282$$

$$x_3 = D_{x_3} : D = -11 : 851 = -0,0129$$

Die geringen Abweichungen in der vierten Dezimalstelle sind lediglich Aufrundungsdifferenzen.

Voraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist, daß die Koeffizienten der Diagonalglieder der speziellen Gleichungssysteme größer sind als die Summe der übrigen Koeffizienten der gleichen Spalten. (Vorzeichen werden nicht berücksichtigt.) Die Einhaltung dieser Bedingung läßt sich, soweit sie nicht von vornherein gegeben ist, oft durch Umstellen der Reihenfolge der Gleichungen, durch Multiplizieren einzelner Gleichungen mit einem bestimmten Faktor usw. herbeiführen.

Das gezeigte Näherungsverfahren läßt sich lochkartenmäßig durchführen. Da die in der Praxis umzukehrenden Matrizen im allgemeinen sowohl positive als auch negative Elemente aufweisen und entsprechende Multiplikationen nötig sind, eignet sich von den z. Z. in der DDR vorhandenen Systemen nur das 90spaltige Aritma-Verfahren zum Einsatz

auf diesem Gebiet. Der Aritma-Rechenlocher kann Multiplikationen mit unterschiedlichen Vorzeichen durchführen und bringt das Ergebnis richtig positiv oder negativ.

Es sind zwei Kartenarten nötig: Die Karten A übernehmen die Ausgangswerte bzw. die sich nach den einzelnen Umlagen ergebenden Zwischensummen und den Index der zugehörigen Unbekannten. Die Karten B enthalten die Faktoren, d. h. die Verflechtungen, und die Indizes der abgebenden bzw. empfangenden Unbekannten sowie die sich ergebenden Einzelbeträge. Der Ablauf ist folgender:

Ausgangswerte und abgebende Unbekannte werden in die Karten A gelocht, in die Karten B abgebende und empfangende Unbekannte und Faktor. Hinter die jeweilige Karte A werden die Karten B mit der gleichen abgebenden Unbekannten sortiert. Im Rechenlocher werden die Ausgangswerte der Karten A mit den Faktoren der zugehörigen B-Karten multipliziert und das Ergebnis in die jeweilige B-Karte gelocht. Dann werden die Karten so umsortiert, daß zunächst die B-Karten mit gleicher empfangender Unbekannten kommen und ihnen immer die zugehörige A-Karte folgt. Der Rechenlocher addiert die Einzelbeträge und stanzt das Ergebnis in die jeweilige A-Karte. Mit diesen Summen beginnt der Ablauf nach entsprechendem Umsortieren von vorn.

Erreichen die Zwischensummen in der festgelegten Dezimalstelle 0, so werden die nach Unbekannten sortierten A-Karten tabelliert. Die sich dabei je Unbekannte ergebenden Summen entsprechen dem Wert dieser Unbekannten und damit dem entsprechenden Element der jeweiligen Spalte der Kehrmatrix.

Sehr vorteilhaft ist es, daß man die Arbeitsgänge gleichzeitig für alle zu lösenden Gleichungssysteme ablaufen lassen und damit die Maschinen vorteilhafter ausnutzen und die Zeiten beträchtlich verkürzen kann. Dies ergibt sich durch die Einsparung von Einstellzeiten.

Die Kontrollmultiplikation von Ausgangs- und Kehrmatrix läßt sich ebenfalls lochkartenmäßig durchführen.

Dieses Verfahren wurde im VEB Eisenhüttenkombinat Ost in Eisenhüttenstadt praktisch erprobt. Das Ergebnis war einwandfrei. Die Versuche erstreckten sich u. a. auf eine 6spaltige Matrix. Die zur Umkehrung einer 20spaltigen Matrix benötigte Zeit wird auf rd. $1\frac{1}{2}$ Woche geschätzt. Mit neueren Maschinentypen, die bereits produziert werden, lassen sich zweifellos weitere Verkürzungen erreichen.

Für Interessenten des maschinellen Lochkartenverfahrens folgen nun noch die Abbildungen der verwendeten Lochkarten. Zuerst werden die Muster gezeigt, die in Eisenhüttenstadt benutzt wurden (A und B). Es schließen sich die Muster A' und B' an, die bereits auf die neuen Aritma-Maschinen abgestellt sind (Rechenlocher T 520, alphanumerische und elektrisch gesteuerte Tabelliermaschine). Die in die Karte A und B eingelochten

Tafel 1 (Lochkarte – Muster A)

[illegible]

Tafel 2 (Lochkarte – Muster B)

KK		Unbekannte		B															
		abg.	empl.																
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				Faktor								Einzelbeträge aus Zwischenumlagen							
												1 / 3 / 5 / 7 / 9				2 / 4 / 6 / 8 / 10			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Tafel 3 (Lochkarte – Muster A')

KK	Unbekannte		Ausgangswert				Summe aus Zwischenumlagen				Summe aus Zwischenumlagen				A'			
	abg.	abg.																
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2 2 2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
3 3 3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
4 4 4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
5 5 5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
6 6 6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
7 7 7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
8 8 8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
9 9 9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
1 2 3 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
Summen aus Zwischenumlagen																		
3 / 8 / 13																		
4 / 9 / 14																		
5 / 10 / 15																		
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2 2 2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
3 3 3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
4 4 4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
5 5 5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
6 6 6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
7 7 7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
8 8 8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
9 9 9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
46 47 48 49 50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	
68 69 70 71 72 73 74 75																		
76 77 78 79 80 81 82 83 84 85																		
86 87 88 89 90																		

Zahlen entstammen der obengenannten 6spaltigen Matrix, die bei den Versuchen in Eisenhüttenstadt umgekehrt wurde.

5.3 Einsatz elektronischer Rechengерäte

Wie bereits erwähnt, soll als Beispiel die Einsatzmöglichkeit des französischen Elektronenrechners Gamma 3 (Hersteller: Compagnie des Machines Bull, Paris) geschildert werden. Er ist ein mittleres elektronisches Gerät, mit dem sich Matrizen bis zur 26. Ordnung umkehren lassen; Eingabe und Ausgabe erfolgen über einen Kartendoppler mittels Lochkarten.

Man bedient sich der sogenannten Eliminationsmethode, die an einem einfachen Beispiel dargestellt werden soll. Gegeben sei die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sie wird um den Einheitsvektor, das ist die erste Spalte der Einheitsmatrix, ergänzt:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

Es folgt die Eliminierung von x_1 , d. h. die Ersetzung der ersten Spalte durch den Einheitsvektor und die Umrechnung der übrigen Elemente. Diese wird folgendermaßen vorgenommen: Die verbliebenen $n-1$ Elemente der ersten Zeile werden durch Division mit dem ehemaligen Ekelement a_{11} – in unserem Falle 3 – umgewandelt. Die Umrechnung der Elemente in der 2. bis n -ten Spalte der übrigen Zeilen erfolgt nach der Formel

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot a_{i1}.$$

Dabei geht man zweckmäßig spaltenweise vor. Ist $a_{1j} = 0$, dann ändert sich der Wert der Elemente der betreffenden Spalte nicht. Durch diese Umrechnungen ergibt sich

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & -3 & 4 & -2/3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

Erläuterungen:

$$a'_{12} = 6 : 3 = 2$$

$$a'_{22} = 1 - \frac{6}{3} \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

$$a'_{32} = 2 - \frac{6}{3} \cdot 0 = 2$$

$$a'_{24} = 0 - \frac{1}{3} \cdot 2 = -2/3$$

Man sieht, daß sich auch die Elemente einer Zeile nicht ändern, wenn in der ersten Spalte eine 0 steht.

Nun wird die erste Spalte gestrichen, die erste Zeile als letzte gesetzt und als letzte Spalte der Einheitsvektor angefügt. Danach ergibt sich

$$\begin{array}{cccc} -3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}$$

In der gleichen Weise wird nun x_2 eliminiert:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & - & 4/3 & 2/9 & - & 1/3 \\ 0 & 7 & 2/3 & -4/9 & & 2/3 \\ 0 & 2 & 2/3 & -1/9 & & 2/3 \\ & 7 & 2/3 & -4/9 & 2/3 & 1 \\ & 2 & 2/3 & -1/9 & 2/3 & 0 \\ - & 4/3 & & 2/9 & -1/3 & 0 \end{array}$$

Es schließt sich die Elimination von x_3 an, die zur Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ führt:

$$\begin{array}{cccc} 1 & - & 4/69 & 2/23 & 3/23 \\ 0 & 9/207 & 10/23 & -8/23 & \\ 0 & 30/207 & -5/23 & 4/23 & \end{array}$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 9/207 & 10/23 & -8/23 \\ 30/207 & -5/23 & 4/23 \\ -4/69 & 2/23 & 3/23 \end{pmatrix}$$

Die Probemultiplikation bestätigt die Richtigkeit:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9/207 & 10/23 & -8/23 \\ 30/207 & -5/23 & 4/23 \\ -4/69 & 2/23 & 3/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}$$

Diese Arbeitsgänge werden der Maschine als Programm zusammen mit den Elementen der Ausgangsmatrix und den Indizes ihrer Stellung sowie dem Einheitsvektor auf Lochkarten eingegeben. Die Geschwindigkeit der Umkehrung ist bedeutend größer als bei dem gezeigten Verfahren über übliche Lochkartenmaschinen. Die Dauer läßt sich unter Berücksichtigung des Tempos des Kartendopplers nach der Formel $\frac{n^3}{120}$ berechnen, wobei n die Ordnung der Matrix ausdrückt. Sie beträgt

$$\begin{array}{ll} \text{bei } n = 10 & 8,5 \text{ Minuten} \\ \text{bei } n = 20 & 1 \text{ Stunde } 7 \text{ Minuten} \\ \text{bei } n = 26 & 2 \text{ Stunden } 27 \text{ Minuten} \end{array}$$

Hier zeigt sich deutlich die Rechengeschwindigkeit elektronischer Geräte. Sie ist noch größer, als sich in obigen Zahlen ausdrückt, da der Kartendoppler das unter Berücksichtigung von Eingabe und Ausgabe erreichbare Tempo bestimmt.

Größere elektronische Rechengeräte bzw. Anlagen sind noch weitaus leistungsfähiger und bewältigen auch die Aufgabe der Umkehrung von Matrizen in entsprechend kürzeren Zeiten.

6 Zusammenfassung und Ausblick auf die Anwendung im Industriebetrieb

6.1 Zusammenfassung

In den Abschnitten 1 bis 5 wurden zunächst die Rechenoperationen mit Matrizen – von den einfachsten Formen ausgehend und aufeinander aufbauend – erläutert. Wegen der praktischen Bedeutung der Kehrmatrix wurden verschiedene Verfahren zur Umkehrung von Matrizen besprochen. Während es theoretisch hierbei keine Unklarheiten gibt, zeigten sich erhebliche Schwierigkeiten bei der praktischen Durchführung, die sich aus der progressiv steigenden Anzahl der notwendigen Rechenoperationen ergeben. Dies führte zur Darstellung verschiedener Möglichkeiten, die Lochkartentechnik und Elektronik bieten.

Sinn dieser Arbeit ist vor allem die Vermittlung der nötigen theoretischen Grundlagen, denn sie bilden das unerläßliche Rüstzeug für alle, die sich mit der praktischen Anwendung beschäftigen wollen. Natürlich interessiert aber zumindest ein Ausblick auf die Anwendungsmöglichkeiten, der nunmehr folgen soll. Für die Anwendung auf Planungsfragen wird ein vereinfachtes, aber verhältnismäßig ausführliches Beispiel gebracht, das auch eine gewisse Fertigkeit im praktischen Umgang mit Matrizen vermitteln soll. Die Anwendung der Matrizenrechnung bei der Soll-Ist-Abrechnung und bei der Lösung von Optimalproblemen wird anschließend kurz gestreift.

6.2 Beispiel für die Anwendung der Matrizenrechnung für die Planung

6.2.1 Aufgabe

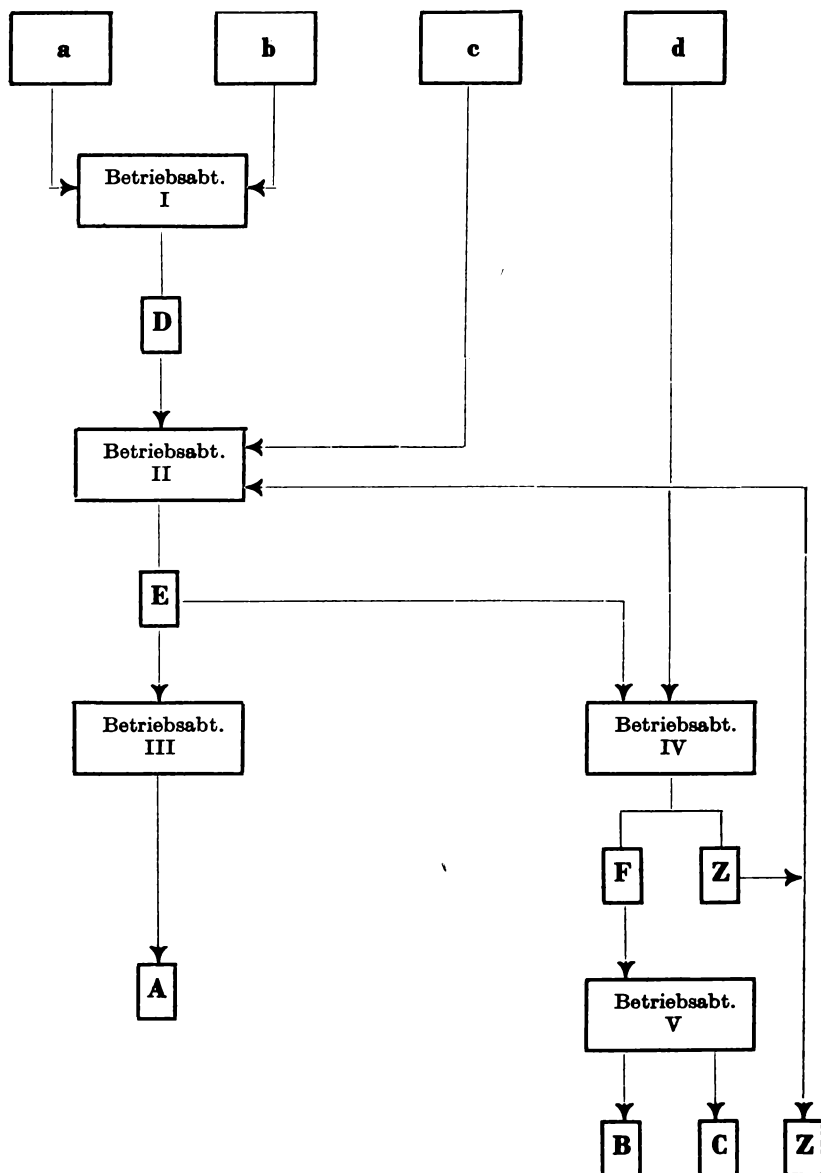
Ein Betrieb stellt die Erzeugnisse A , B und C zum Absatz her. Die Produktion läuft über mehrere Stufen. In einer bestimmten Stufe fällt ein Produkt Z an, das z. T. ebenfalls abgesetzt wird, zum anderen Teil jedoch mit dem Halbfabrikat D wieder zum Einsatz kommt, und zwar im Verhältnis 1:1.

Es sollen abgesetzt werden:

A	10 ME
B	20 ME
C	10 ME
Z	10 ME

Die Ausgangsrohstoffe bzw. Energien sind a , b , c und d .

Tafel 5. Fließbild



6.22 Fließbild (siehe Tafel 5)

6.23 Verbrauchsnormen

<i>Erzeugung ME</i>		<i>Verbrauch ME</i>
1	<i>D</i>	= 0,5 <i>a</i> 1,2 <i>b</i>
1	<i>E</i>	= 0,4 <i>D</i> 0,4 <i>Z</i> 0,6 <i>c</i>
1	<i>A</i>	= 2,0 <i>E</i>
1	<i>F</i>	= 2,2 <i>E</i> 0,4 <i>d</i>
1,2	<i>Z</i>	
1	<i>B</i>	= 0,8 <i>F</i>
1	<i>C</i>	= 1,2 <i>F</i>

6.24 Aufstellung der Kopplungs- und Aufwandsmatrix

Die in den Abschnitten 6.21 bis 6.23 enthaltenen Angaben werden in einer Matrix zusammengestellt, wobei man zweckmäßigerweise die Tabellenform anwendet. Der obere Teil enthält die Kopplungen, d. h. die gegenseitigen Verflechtungen der Halb- und Fertigerzeugnisse. Im unteren Teil ist der Einsatz des von anderen Betrieben bezogenen Materials usw. enthalten. Der Verbrauch wird stets durch negative, die Erzeugung durch positive Zahlen gekennzeichnet.

Tafel 6. Kopplungs- und Aufwandsmatrix

Gesamterzeugung								Absatz bzw. Bezug	
Erzeugnis →	D	E	F	A	B	C	Z		
ME									
Menge a) b)	1 32,64	1 81,6	1 28	1 10	1 20	1 10	1 42,64		
↓ Spalte	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	1	— 0,4						0,6	0
E		1	— 2,2	— 2				— 3,2	0
F			1		— 0,8	— 1,2		— 1,0	0
A				1				1,0	10,0
B					1			1,0	20,0
C						1		1,0	10,0
Z		— 0,4					1	0,6	10,0
a	— 0,5							— 0,5	— 16,32
b	— 1,2							— 1,2	— 39,17
c		— 0,6						— 0,6	— 48,96
d			— 0,4					— 0,4	— 11,2
Z			1,2				— 1	0,2	— 9,04

Diese Matrix gestattet es, die für den Absatz verbleibenden und die zu beziehenden Mengen auf einfache Weise zu ermitteln, die sich ergeben, wenn eine bestimmte Gesamterzeugung vorgegeben wird.

Diese kann im Grenzfall der vollen Kapazität entsprechen. Bei der Rechnung wird automatisch der Eigenverbrauch berücksichtigt.

Rechnerisch handelt es sich um die Multiplikation der Kopplungs- und Aufwandsmatrix mit dem Mengenvektor. Dieser ist an und für sich ein Spaltenvektor. Er wird hier aus Zweckmäßigkeitsgründen in seiner transponierten Form verwendet (s. auch S. 12).

Im Ergebnisvektor stehen die für den Absatz verfügbaren und die von anderen Betrieben zu beziehenden Mengen. In die Tabelle wurden zwei Fälle eingearbeitet: Einmal (Zeile a, Spalte 8) wurde je 1 ME als Produktionsmenge vorgegeben. Es zeigt sich, daß in diesem Fall die Relationen keinesfalls ausgeglichen sind, denn es müßten von den Erzeugnissen E und F noch 3,2 bzw. 1 ME von außerhalb bezogen werden, um die vorgesehenen Mengen A, B, C (je 1 ME) absetzen zu können.

Der andere Fall (Zeile b, Spalte 9) stellt bereits die Kontrollrechnung für die Lösung der in Abschnitt 6.21 gegebenen Aufgabe dar (s. Abschnitt 6.25).

6.25 Aufstellung und Anwendung der Strukturmatrix

Während die Kopplungs- und Aufwandsmatrix leicht errechnen läßt, welche Mengen absetzbar sind bzw. bezogen werden müssen, beantwortet die Strukturmatrix die umgekehrte Frage: Welche Mengen der einzelnen Erzeugnisse müssen insgesamt produziert werden und welche Mengen an Materialien usw. – evtl. auch an Halbfabrikaten – müssen von anderen Betrieben bezogen werden, wenn die vorgegebenen Absatzmengen zur Verfügung stehen sollen?

Die Strukturmatrix, die hier ebenfalls als Tabelle dargestellt wird, ermittelt man wie folgt:

Der obere Teil (Halb- und Fertigerzeugnisse) entspricht der Kehrmatrix der Kopplungsmatrix (oberer Teil der Tafel 6).

Der untere Teil ergibt sich aus der Multiplikation der Aufwandsmatrix (unterer Teil der Tafel 6) mit der genannten Kehrmatrix. In Matrizenform sieht die zuletzt genannte Operation folgendermaßen aus:

Zusammengefaßte Darstellung:

$$\begin{array}{ccc} \text{Kopplungs- und Aufwandsmatrix} & & \text{Strukturmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{11} \\ \mathfrak{D}_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{11}^{-1} \\ \mathfrak{D}_{21} \cdot \mathfrak{D}_{11}^{-1} \end{pmatrix} \\ \mathfrak{D}_{21} \cdot \mathfrak{D}_{11}^{-1} = & \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0,4 & 0,88 & 0,8 & 0,704 & 1,056 & 0 \\
0 & 1 & 2,2 & 2 & 1,76 & 2,64 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 & 1,2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0,4 & 0,88 & 0,8 & 0,704 & 1,056 & 1
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
-0,5 & -0,2 & -0,44 & -0,4 & -0,352 & -0,528 & 0 \\
-1,2 & -0,48 & -1,056 & -0,96 & -0,845 & -1,267 & 0 \\
0 & -0,6 & -1,32 & -1,2 & -1,056 & -1,584 & 0 \\
0 & 0 & -0,4 & 0 & -0,32 & -0,48 & 0 \\
0 & -0,4 & 0,32 & -0,8 & 0,256 & 0,384 & -1
\end{pmatrix}$$

Es folgt die *Strukturmatrix* in Tabellenform:

Tafel 7. Strukturmatrix

		Absatz							Gesamt- erzeugung bzw. Einsatz
		D	E	F	A	B	C	Z	
	Menge	0	0	0	10	20	10	10	
	Spalte	1	2	3	4	5	6	7	8
1	D	1	0,4	0,88	0,8	0,704	1,056	0	32,64
2	E	0	1	2,2	2	1,76	2,64	0	81,6
3	F	0	0	1	0	0,8	1,2	0	28
4	A	0	0	0	1	0	0	0	10
5	B	0	0	0	0	1	0	0	20
6	C	0	0	0	0	0	1	0	10
7	Z	0	0,4	0,88	0,8	0,704	1,056	1	42,64
8	a	-0,5	-0,2	-0,44	-0,4	-0,352	-0,528	0	-16,32
9	b	-1,2	-0,48	-1,056	-0,96	-0,845	-1,267	0	-39,17
10	c	0	-0,6	-1,32	-1,2	-1,056	-1,584	0	-48,96
11	d	0	0	-0,4	0	-0,32	-0,48	0	-11,20
12	Z	0	-0,4	0,32	-0,8	0,256	0,384	-1	-9,04

Man sieht, daß der Absatzvektor wieder in transponierter Form in den Tabellenkopf eingefügt wurde. Er enthält für die abzusetzenden Erzeugnisse die entsprechenden Mengen und im übrigen Nullen. Durch Multiplikation mit der Strukturmatrix selbst ergibt sich in Spalte 8, welche Mengen an Fertig- bzw. Halberzeugnissen insgesamt produziert werden müssen und welche bezogenen Materialien usw. einzusetzen sind. Das Beispiel zeigt, daß der Anfall vom Erzeugnis Z ($28 \cdot 1,2 = 33,6$ ME) – bedingt durch den notwendigen Eigenverbrauch – nicht ausreicht, so daß noch 9,04 ME zusätzlich von anderen Betrieben bezogen werden müssen, da insgesamt 42,64 ME benötigt werden. Setzt man die im oberen Teil der Spalte 8 gewonnenen Werte in die Kopplungs- und Aufwandsmatrix ein, wie dies in der Tafel 6 (Zeile b) bereits geschehen ist,

so sieht man dort in Spalte 9, daß die Rechnung stimmt, und hat damit die Kontrolle.

Die Aufgabe kann natürlich auch so gestellt werden, daß nur die nach Berücksichtigung des Eigenverbrauchs verbleibende Menge des Erzeugnisses Z abgesetzt wird. Dann entfällt lediglich in Spalte 7 der Strukturmatrix die Menge 10. Es ergibt sich ein Eigenverbrauch von 32,64 ME und ein verbleibender Rest von 0,96 ME, also insgesamt wieder die bereits vorher genannte Bruttoerzeugung von 33,6 ME.

6.26 Weitere Bemerkungen

Die Kehrmatrix und damit auch die Strukturmatrix halten die umgekehrten Relationen unter Berücksichtigung der Verflechtungen fest. Durch einfache Multiplikation läßt sich dann also jede neue Planvariante schnell berechnen. Die Strukturmatrix hat Gültigkeit, solange sich keine Änderungen in den Verbrauchsnormen usw. ergeben. Dieser Vorteil wiegt die Arbeit bei der nötigen Matrizenumkehrung auf. Das Verfahren ist um so vorteilhafter, je größere Verflechtungen auftreten. In einfachen Fällen, vor allem, wenn die Verflechtungen nur in einer Richtung verlaufen, läßt sich die Strukturmatrix auch durch stufenweise Auflösung errechnen.

Erwähnt sei noch, daß man in den Aufwandteil beider Matrizen auch andere Faktoren, z. B. Kosten, aufnehmen kann. Besondere Einflüsse, also etwa zeitbedingte Größen, Temperatureinwirkungen usw., lassen sich in sogenannten Parameterspalten berücksichtigen. Mit diesen Matrizen kann man Betriebsabteilungen, aber auch ganze Betriebe erfassen. Auch für die Volkswirtschaftsplanung lassen sie sich verwenden.

6.3 Anwendung in der Soll-Ist-Rechnung

Die entsprechenden Matrizen (Kopplungs- und Aufwandsmatrix, Strukturmatrix u. a.) werden hier mit dem Istvektor multipliziert, so daß sich z. B. die Sollmengen oder -werte für die Istproduktion ergeben. Der Ergebnisvektor wird dem Vektor der Istwerte gegenübergestellt. Durch Subtraktion ergeben sich die eingetretenen Überschreitungen oder Einsparungen.

Stellt man sich z. B. die in der Zeile b des Kopfes der Kopplungs- und Aufwandsmatrix (Tafel 6, S. 43) enthaltene Menge als Ist vor, so ergeben sich in Spalte 9 die entsprechenden Soll-Absatz- und Einsatzmengen, bei denen die normgemäßen Relationen berücksichtigt sind. Ihnen sind die Istmengen gegenüberzustellen.

6.4 Anwendung auf die Lösung von Optimalproblemen

Einzelheiten, vor allem im Hinblick auf die Durchführung, können in diesem Rahmen nicht gebracht werden. Es sei aber doch kurz folgendes Problem erwähnt, das einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten geben kann:

Es ist ein optimales Fertigungsprogramm zu ermitteln. Auf seine Gestaltung wirken eine Reihe einschränkender Faktoren ein. So ist z. B. die Kapazität der einzelnen Produktionsstufen begrenzt. Der Bedarf an bestimmten Rohstoffen kann nur in einem bestimmten Umfang gedeckt werden. Bei einzelnen Erzeugnissen treten Absatzschränken auf, zusätzliche Spezialarbeitskräfte können nicht eingesetzt werden usw. Zu beachten ist weiter, daß die einzelnen Erzeugnisse kosten- und preismäßig unterschiedlich liegen. Unter Berücksichtigung all dieser Bedingungen ist das Fertigungsprogramm festzustellen, bei dem die Rentabilität ein Höchstmaß erreicht. Diese Erläuterungen zeigen wohl genügend den Schwierigkeitsgrad derartiger Aufgaben.

Anmerkung:

Die Mathematik läßt im allgemeinen auch negative Lösungen zu, die aber z. B. bei der Bestimmung des optimalen Produktionssortiments im Maschinenbau sinnlos sind. Deshalb muß außer den obengenannten Einschränkungen auch eine Nebenbedingung vorgesehen sein, die zum Ausdruck bringt, daß die Ergebnisse nur größer oder gleich Null sein dürfen, aber nicht kleiner als Null. In solchen Fällen kann man eine Abwandlung der herkömmlichen Matrizenrechnung anwenden, z. B. die sogenannte „Simplexmethode“.

6.5 Schluß

Der Abschnitt 6 sollte gewisse Hinweise und Anregungen zur praktischen Anwendung der Matrizenrechnung geben. Er ging bewußt nicht auf einen bestimmten Industriezweig ein, sondern behandelte die Probleme allgemein. Das hängt auch damit zusammen, daß von den nicht zur Chemie gehörenden Industriezweigen bisher kaum Anwendungsbeispiele bekannt sind. Um so wichtiger ist es gerade deshalb, den Kreis der Interessenten an der Matrizenrechnung ständig zu vergrößern und ihre Kenntnisse zu erweitern. Das Ziel muß sein, der Matrizenrechnung überall dort Eingang und Anwendung zu verschaffen, wo sie sinnvoll einzusetzen ist und die Arbeit erleichtern und verbessern kann. Ein kleiner Beitrag dazu sollte diese Arbeit sein.

