

SIEGBERT FRÖHLICH

Mathematischer Vorkurs



VERLAG DIE WIRTSCHAFT BERLIN

SIEGBERT FRÖHLICH

Mathematischer Vorkurs

Vierte Auflage



VERLAG DIE WIRTSCHAFT BERLIN

Verlagsredakteur: Diplom-Wirtschaftler Karl Heinz Weber

Verlag Die Wirtschaft, Berlin NO 18, Am Friedrichshain 22

1962 veröffentlicht – Lizenz-Nr. 122 – Druckgenehmigungs-Nr. 195/95/62

Alle Rechte vorbehalten – Einbandentwurf: E. Baltsch, Berlin

Repro, Druck und Verarbeitung: Sachsendruck Plauen

ES 19 B 1. Preis 9,80 DM

VORWORT DES AUTORS

Die nunmehr 4. Auflage ist ein unveränderter Nachdruck der 3. Auflage dieses Buches, das aus den ersten mathematischen Lehrheften des wirtschaftswissenschaftlichen Fernstudiums entstand. Gegenüber den ersten beiden Auflagen wurden folgende Gebiete hinzugenommen: Ganze rationale Funktionen, Ebene Trigonometrie, Analytische Geometrie und Koordinatentransformationen.

Diese Stoffgebiete werden im allgemeinen in den Oberschulen, Volkshochschulen und Fachschulen gelehrt. Im Zuge der Weiterentwicklung des Hochschulfernstudiums können sie nicht mehr zum Pensum des Faches Mathematische Grundausbildung gehören. Um den Bewerbern für das Hochschulfernstudium die Aneignung dieser vorausgesetzten Grundkenntnisse zu erleichtern, werden sie im „Mathematischen Vorkurs“ zusammengefaßt.

Durch die stärkere mathematische Durchdringung von technischen und ökonomischen Aufgabenstellungen soll der Vorkurs auch all denen eine Hilfe sein, die sich bestimmte mathematische Kenntnisse erwerben wollen. Das betrifft vor allem Arbeiter und Angestellte in Technik, Wirtschaft und Verwaltung, aber auch Schüler der obengenannten Schulen, die manchen Hinweis zum besseren Verständnis des in der Schule behandelten Stoffes finden werden.

Die Mathematik findet außer in der Naturwissenschaft auch in der Wirtschaftswissenschaft immer größere Anwendung. Beispielsweise fordert W. Nemtschinow, Mitglied der sowjetischen Akademie der Wissenschaften, „die moderne mathematische Methodologie in möglichst großem Umfange zu entwickeln und weitgehend sowohl bei der theoretischen Analyse der sozialistischen erweiterten Reproduktion als auch bei der Lösung praktischer Probleme der Volkswirtschaftsplanung anzuwenden“.

Eine der wichtigsten Voraussetzungen dazu ist die Heranbildung von Kadern.

Auch in unserer Wirtschaft ist eine ganze Reihe von Mitarbeitern nicht genügend ausgebildet, um sich bei der Lösung ökonomischer Aufgaben mathematischer Methoden bedienen zu können. Heute ist ein Entwicklungsstand erreicht, wo es nicht mehr ausreicht, die vier Grundrechenarten anzuwenden. Der Ökonom muß, genau wie der Techniker und Ingenieur, alle Möglichkeiten ausnutzen, die ihm die Mathematik bietet.

Dieses Buch ist auch für das Selbststudium bestimmt und dementsprechend aufgebaut. Es werden in jedem Kapitel eine ganze Reihe Beispiele ausführlich durchgerechnet. Darüber hinaus sind am Ende jedes Kapitels zahlreiche Übungsaufgaben und deren Lösungen (die jeweiligen Abschnitte Ü und L) zu finden.

Der Verfasser hofft, mit diesem Buch allen Interessierten ein Mittel in die Hand zu geben, das ihm hilft, sich die für Beruf und Studium notwendigen mathematischen Grundkenntnisse anzueignen.

Siegbert Fröhlich

VORWORT DES VERLAGES

Die ersten drei Auflagen des „Mathematischen Vorkurses“ waren kurz nach ihrem Erscheinen bereits wieder vergriffen. Darin zeigt sich, daß sich der Gedanke des Autors und des Verlages, den Bewerbern für das Fernstudium ein wichtiges Hilfsmittel in die Hand zu geben, als richtig erwiesen hat. Seither haben viele Bewerber für das Fernstudium und Direktstudium und viele Fernstudenten in diesem Buch einen wertvollen Helfer gefunden. Gerade für sie waren die ersten drei Auflagen und ist auch diese vierte Auflage in erster Linie bestimmt.

Es hat sich gezeigt, daß aber auch für die in der Praxis Tätigen ein großes Bedürfnis besteht, ihre Kenntnisse auf mathematischem Gebiet zu erweitern. Dieser neue sich ständig vergrößernde Leserkreis wird die dritte bzw. die jetzige vierte Auflage besonders begrüßen, denn sie bezieht weitere Gebiete der Mathematik ein, die für die Wirtschaftspraxis von zunehmender Bedeutung sind.

Wir sind überzeugt, daß die nunmehr vierte Auflage dieses Buches immer neue Leser gewinnen wird. Für Vorschläge und kritische Hinweise, die in künftigen Auflagen berücksichtigt werden können, ist der Verlag dankbar.

Verlag Die Wirtschaft

INHALTSVERZEICHNIS

1. Der Zahlbegriff	15
1.1 Die Zahlenbereiche und die Grundrechenarten	15
1.2 Der Begriff der allgemeinen Zahlen	20
2. Rechnen mit allgemeinen Zahlen	21
2.1 Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlen	21
2.11 Addition und Subtraktion eingliedriger Ausdrücke	21
2.12 Addition und Subtraktion mehrgliedriger Ausdrücke	26
2.2 Multiplikation allgemeiner Zahlen	27
2.21 Multiplikation eingliedriger Ausdrücke	27
2.22 Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke	30
2.3 Division allgemeiner Zahlen	34
2.31 Division eingliedriger Ausdrücke	34
2.32 Division mehrgliedriger Ausdrücke	36
Ü 2 Übungsaufgaben zu den allgemeinen Zahlen	40
L 2 Lösungen zu Ü 2	41
3. Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten	42
3.1 Der Begriff der Bestimmungsgleichung ersten Grades mit einer Unbekannten	42
3.2 Aufgaben	43
Ü 3 Übungsaufgaben zu den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten	47
L 3 Lösungen zu Ü 3	47
4. Zahlenverhältnisse und Verhältnisgleichungen	48
4.1 Zahlenverhältnisse	48
4.2 Verhältnisgleichungen	49
4.3 Weitere Aufgaben zu den Zahlenverhältnissen und Verhältnisgleichungen	52
Ü 4 Übungsaufgaben zu den Zahlenverhältnissen und Verhältnisgleichungen	58
L 4 Lösungen zu Ü 4	58
5. Potenzrechnung	59
5.1 Die Potenz	59
5.11 Der Potenzbegriff	59
5.12 Potenzen relativer Zahlen	61

5.2 Die Potenzgesetze	62
5.21 Addition und Subtraktion von Potenzen	62
5.22 Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis	62
5.23 Division von Potenzen mit gleicher Basis	64
5.24 Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten	67
5.25 Division von Potenzen mit gleichen Exponenten	68
5.26 Potenzierung von Potenzen	69
5.27 Umkehrung der Potenzgesetze	71
5.3 Die Erweiterung des Potenzbegriffes	73
5.31 Potenzen mit negativen Exponenten	73
5.32 Der Exponent Null	75
5.4 Weitere Aufgaben zur Potenzrechnung	79
Ü 5 Übungsaufgaben zur Potenzrechnung	80
L 5 Lösungen zu Ü 5	81
6. Wurzelrechnung	82
6.1 Die Wurzel	82
6.11 Der Begriff der Wurzel	82
6.12 Gerade und ungerade Wurzelexponenten — Doppeldeutigkeit bei Wurzeln	85
6.13 Rationale und irrationale Zahlen	86
6.14 Das Ziehen von Wurzeln	89
6.2 Die Wurzelgesetze	90
6.21 Addition und Subtraktion von Wurzeln	90
6.22 Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	90
6.23 Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	94
6.24 Rationalmachen des Nenners	97
6.25 Potenzieren von Wurzeln	99
6.26 Radizieren von Wurzeln	100
6.27 Zusammenfassung	103
6.3 Zurückführung der Wurzeln auf Potenzen	104
6.31 Die Definition der Bruchpotenzen	104
6.32 Berechnung von Wurzelaufgaben mit Hilfe des I. Potenz- gesetzes	105
6.33 Berechnung von Wurzelaufgaben mit Hilfe des III. Potenz- gesetzes	106
6.34 Berechnung von Wurzelaufgaben mit Hilfe des V. Potenz- gesetzes	108
6.35 Zusammenfassung	109
6.4 Weitere Aufgaben zur Wurzelrechnung	110
Ü 6 Übungsaufgaben zur Wurzelrechnung	112
L 6 Lösungen zu Ü 6	112

7. Logarithmenrechnung	113
7.1 Der Logarithmus	113
7.2 Die Logarithmengesetze	114
7.21 Der Logarithmus eines Produktes	114
7.22 Der Logarithmus eines Quotienten	115
7.23 Der Logarithmus einer Potenz	116
7.24 Der Logarithmus einer Wurzel	117
7.3 Die Zehnerlogarithmen	118
7.31 Logarithmensysteme	118
7.32 Die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10	119
7.33 Die Logarithmen aller Zahlen, die größer sind als 10	120
7.34 Die Logarithmen aller Zahlen, die kleiner sind als 1	123
7.35 Das Aufschlagen der Logarithmen	124
7.36 Das Aufschlagen der Numeri	124
7.37 Das Interpolieren	126
7.38 Übungsaufgaben	128
7.4 Das Rechnen mit Zehnerlogarithmen	128
7.41 Berechnung von Produkten	128
7.42 Berechnung von Quotienten	130
7.43 Berechnung von Potenzen	132
7.44 Berechnung von Wurzeln	132
7.5 Weitere Aufgaben zur Logarithmenrechnung	133
Ü 7 Übungsaufgaben zur Logarithmenrechnung	136
L 7 Lösungen zu Ü 7	136
A 7 Anhang: Umrechnung von Logarithmensystemen	137
8. Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten	139
8.1 Der Begriff der Bestimmungsgleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten	139
8.2 Lösungsmethoden zur Auflösung von zwei Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten	140
8.3 Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten	147
8.4 Weitere Aufgaben zu den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten	153
Ü 8 Übungsaufgaben zu den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten	157
L 8 Lösungen zu Ü 8	157
9. Bestimmungsgleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten	158
9.1 Der Begriff der Bestimmungsgleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten	158

9.2 Die Auflösung der quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten	159
9.21 Spezialfälle	159
9.22 Allgemeiner Fall	160
9.23 Die Diskriminante	169
9.24 Der Vietasche Wurzelsatz	170
9.3 Weitere Aufgaben zu den quadratischen Gleichungen mit einer Un-	
bekannten	172
Ü 9 Übungsaufgaben zu den quadratischen Gleichungen mit einer	
Unbekannten	176
L 9 Lösungen zu Ü 9	176
10. Ganze rationale Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	177
10.1 Der Funktionsbegriff	177
10.2 Lineare Funktionen	177
10.3 Quadratische Funktionen	189
10.4 Ganze rationale Funktionen höheren Grades	194
11. Ebene Trigonometrie	197
11.1 Die trigonometrischen Funktionen für Winkel unter 90°	197
11.11 Der Begriff der Winkelfunktionen	197
11.12 Die Winkelfunktionen im Einheitskreis	201
11.13 Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen	210
11.2 Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck	213
11.3 Die trigonometrischen Funktionen von Winkeln, die zwischen 90°	
und 180° liegen	218
11.31 Die Sinuswerte und Cosinuswerte für Winkel zwischen 90°	
und 180°	218
11.32 Die Tangenswerte und Cotangenswerte für Winkel zwischen	
90° und 180°	221
11.4 Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck	225
11.41 Der Sinussatz	225
11.42 Der Cosinussatz	234
11.5 Additionstheoreme	242
11.6 Weitere Aufgaben zur ebenen Trigonometrie	245
Ü 11 Übungsaufgaben zur ebenen Trigonometrie	251
L 11 Lösungen zu Ü 11	251

12. Analytische Geometrie der Geraden	252
12.1 Strecke und Dreieck	252
12.11 Länge einer Strecke	252
12.12 Halbierung einer Strecke	253
12.13 Flächeninhalt eines Dreiecks	254
12.2 Geradengleichungen	256
12.21 Normalform	256
12.22 Allgemeine Form	258
12.3 Aufstellung von Geradengleichungen aus gegebenen Stücken ...	259
12.31 Punktrichtungsform	259
12.32 Zweipunkteform	261
12.33 Achsenabschnittsform	263
12.34 Hessesche Normalform	264
12.4 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	269
12.41 Schnittpunkt zweier Geraden	269
12.42 Schnittwinkel zweier Geraden	270
12.5 Weitere Aufgaben zur analytischen Geometrie der Geraden	273
Ü 12 Übungsaufgaben zur analytischen Geometrie der Geraden	277
L 12 Lösungen zu Ü 12	277
13. Koordinatentransformationen	279
13.1 Bewegungstransformation	279
13.11 Translation	279
13.12 Rotation	283
13.2 Ähnlichkeitstransformation	286
Ü 13 Übungsaufgaben zu den Koordinatentransformationen	289
L 13 Lösungen zu Ü 13	289
14. Analytische Geometrie der Kurven 2. Ordnung	290
14.1 Der Kreis	290
14.2 Die Parabel	303
14.3 Die Ellipse	314
14.4 Die Hyperbel	325
Ü 14 Übungsaufgaben zur analytischen Geometrie der Kurven 2. Ord- nung	332
L 14 Lösungen zu Ü 14	332
Literatur	334

1. Der Zahlbegriff

1.1 Die Zahlenbereiche und die Grundrechenarten

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Zahlenbereichen und Grundrechenarten beschäftigen. Dabei sei gleich erwähnt, daß sich die Ausführungen zunächst nur auf *bestimmte Zahlen* beziehen.

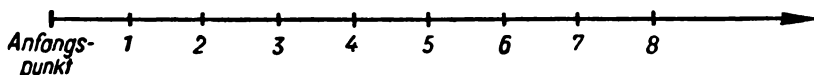
Bestimmte Zahlen sind solche, die durch einen numerischen Wert angegeben sind.

Wir beginnen damit, den Aufbau der bestimmten Zahlen, die wir im folgenden kurz als Zahlen bezeichnen wollen, zu erklären.

Die Grundlage sämtlicher Zahlen sind die *natürlichen Zahlen*; das sind die Zahlen der Folge

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, . . .

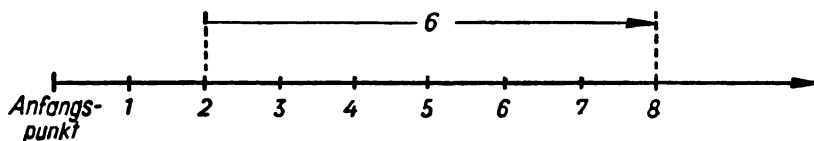
Geometrisch kann man sie sich auf einem sogenannten *Zahlenstrahl* dargestellt vorstellen:



Wir wollen nun mit den natürlichen Zahlen rechnen. Soll man zum Beispiel in der Folge der natürlichen Zahlen von 2 aus um 6 weiterzählen, so bedeutet das, daß 6 zu 2 hinzugezählt werden muß. Der Vorgang dieses Weiterzählens heißt *Addition*. Man hält ihn formelmäßig so fest:

$$2 + 6 = 8 .$$

Geometrisch kann man unser Beispiel am Zahlenstrahl wie folgt veranschaulichen:



Die zu addierenden Größen nennt man *Summanden*. Das Ergebnis heißt *Summe*. In unserem Beispiel sind die natürlichen Zahlen 2 und 6 die Summanden, deren Summe die natürliche Zahl 8 ist.

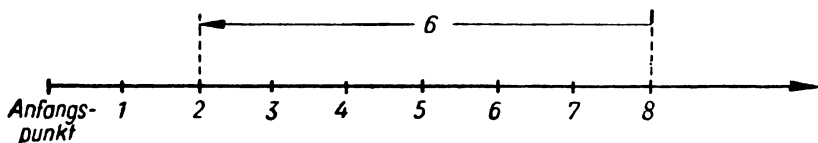
Das Plus-Zeichen (+), das in der betrachteten Aufgabe $2 + 6 = 8$ die beiden Summanden verknüpft, sagt aus, daß die Zahlen 2 und 6 zu addieren sind. Es gibt also über einen Rechenvorgang Auskunft. Man nennt es deshalb *Rechenzeichen*. Weitere Rechenzeichen werden wir im Laufe dieses Abschnitts kennenlernen.

Bei einer Addition entstehen aus natürlichen Zahlen als Summanden immer wieder natürliche Zahlen. Wir sind nicht gezwungen, irgendwelche neue Zahlen einzuführen. Wir bleiben also, wie man sagt, im Bereich der natürlichen Zahlen.

Die Umkehrung des Weiterzählens oder Vorwärtszählens ist das Rückwärtszählen. Der Vorgang des Rückwärtszählens heißt *Subtraktion*. Für diesen Vorgang des Rückwärtszählens hat man auch eine Kurzschreibweise eingeführt. Soll zum Beispiel von der Zahl 8 um 6 zurückgezählt werden, so schreibt man dafür

$$8 - 6 = 2.$$

Das Ergebnis ist die natürliche Zahl 2. Geometrisch hat dieses Beispiel am Zahlenstrahl folgendes Aussehen:

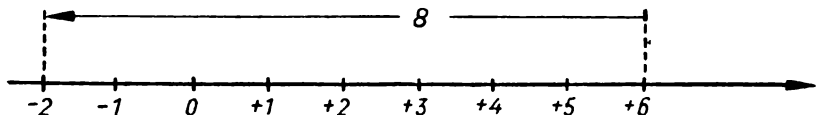


Wir führen einige Bezeichnungen für den Vorgang der Subtraktion ein. Die Zahl, von der subtrahiert wird, nennt man *Minuend*. Die Zahl, die subtrahiert wird, heißt *Subtrahend*. Das Ergebnis der Subtraktion nennt man *Differenz*. Das auftretende Minus-Zeichen ($-$) bedeutet, daß der Minuend um den Subtrahenden vermindert werden soll. Es gibt also ebenso wie das Plus-Zeichen über einen Rechengang Auskunft. Das Minus-Zeichen ist also ein weiteres Rechenzeichen.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß der Minuend größer als der Subtrahend ist. Wir wollen jetzt den Fall behandeln, daß der Minuend kleiner als der Subtrahend ist. Es soll die Aufgabe

$$6 - 8$$

gelöst werden. Innerhalb der natürlichen Zahlen ist das nicht ausführbar. Wollen wir die Aufgabe dennoch lösen, so müssen wir eine neue Zahlenart einführen. Machen wir uns dies zunächst am Zahlenstrahl klar:



Beim Zurückzählen um 8 Einheiten überschreiten wir den Anfangspunkt des Zahlenstrahls, der die Null darstellt. Um nun das Zurückzählen doch zahlenmäßig verfolgen zu können, verlängern wir den Zahlenstrahl nach

links und tragen entsprechend der rechten Seite des Zahlenstrahls Einheiten auf. Diese Einheiten verstehen wir mit dem negativen Zeichen ($-$). In unserem Beispiel kommen wir zur Zahl -2 . Es ist also

$$6 - 8 = -2.$$

Die damit eingeführte neue Zahlenart könnte man sinngemäß negative natürliche Zahlen nennen. Im allgemeinen bezeichnet man jedoch die negativen natürlichen Zahlen als negative ganze Zahlen und die natürlichen Zahlen als positive ganze Zahlen. Zusammengefaßt bilden die positiven ganzen Zahlen und die negativen ganzen Zahlen einschließlich der Null die Menge der *ganzen Zahlen*. Die Zeichen $+$ und $-$ bezeichnen in diesem Zusammenhang keinen Vorgang (Addition oder Subtraktion), sondern einen Tatbestand. Sie geben an, auf welcher Seite vom Nullpunkt aus gesehen der Punkt liegt, durch den die betreffende Zahl auf der Zahlengeraden dargestellt wird. Man nennt in diesem Fall die Zeichen $+$ und $-$ *Vorzeichen*. Es besteht also ein grundsätzlicher Unterschied zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen, obwohl die gleichen Schriftzeichen dafür Verwendung finden.

Die Zahlen, die ein Vorzeichen haben, nennt man auch *relative Zahlen*. Zahlen, bei denen vom Vorzeichen abgesehen wird, heißen *absolute Zahlen*. In diesem Abschnitt soll weiterhin zunächst nur mit natürlichen Zahlen gearbeitet werden. Auf die relativen Zahlen und besonders auf deren Rechengesetze werden wir im 2. Kapitel näher eingehen.

Kommen wir nun zur *Multiplikation* von natürlichen Zahlen. Unter einer Multiplikation versteht man eine Addition gleicher Summanden.

Als Beispiel sei angeführt:

$$3 + 3 + 3 + 3.$$

Dafür hat man als abgekürzte Darstellung folgende Schreibweise eingeführt:

$$3 \cdot 4 = 12.$$

Die Zahl 3 ist also 4 mal als Summand zu setzen. Die Zahl 3 bezeichnet man in diesem Fall als *Multiplikand*. Die Zahl 4 ist der *Multiplikator* und das Ergebnis der Multiplikation 12 das *Produkt*. Oft nennt man den Multiplikanden und den Multiplikator gleichberechtigt *Faktoren*. Die Begründung dafür ist im kommutativen Gesetz der Multiplikation zu suchen, auf das wir im nächsten Kapitel eingehen werden. Der Punkt ($\cdot$) ist das Rechenzeichen für die Multiplikation¹.

Führt man Multiplikationen nur mit natürlichen Zahlen aus, so bleibt man im Bereich der natürlichen Zahlen. Bei der Ausführung einer Multiplikation ist man also nicht gezwungen, eine neue Zahlenart einzuführen. Auf die Multiplikation relativer Zahlen soll in diesem Kapitel verzichtet werden.

¹ Gelegentlich verwendet man auch ein $\times$ als Multiplikationszeichen.

Betrachten wir nun die *Division* von natürlichen Zahlen. Der Inhalt einer Divisionsaufgabe besteht darin, zu bestimmen, wie oft eine Zahl in einer anderen enthalten ist. Es soll zum Beispiel errechnet werden, wie oft die Zahl 3 in der Zahl 12 enthalten ist. Dafür hat man folgende Kurzschreibweise eingeführt:

$$12 : 3 = 4 \text{ oder } \frac{12}{3} = 4.$$

Die Zahl 12 heißt *Dividend*. Die Zahl 3 ist der *Divisor* und das Ergebnis der Division 4 ist der *Quotient*. Der Doppelpunkt bzw. der Bruchstrich ist für die Division das Rechenzeichen.

Wenn, wie man sagt, der Divisor im Dividenten aufgeht, entsteht als Quotient wieder eine natürliche Zahl. Anders ist es, wenn die zu dividierenden Zahlen nicht ineinander aufgehen. In diesem Fall ist man gezwungen, wenn man die Division weiterhin ermöglichen will, eine neue Zahlenart einzuführen. Es sind dies die *gebrochenen Zahlen oder Brüche*. Zum Beispiel:

$$\frac{2}{3} \text{ oder } \frac{7}{3}.$$

Die ganzen Zahlen und die gebrochenen Zahlen faßt man unter dem Begriff *rationale Zahlen* zusammen. Es sei noch bemerkt, daß es natürlich auch negative Brüche gibt. Diese gehören auch zur Menge der rationalen Zahlen. Darauf soll aber im nächsten Kapitel näher eingegangen werden.

Bei der Anwendung der 4 Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) auf rationale Zahlen bleibt man stets im Bereich der rationalen Zahlen. Man braucht also dazu keine weiteren neuen Zahlenarten einzuführen. Allgemein lassen sich die rationalen Zahlen in der Form

$$\frac{p}{q}$$

darstellen, wobei p und q ganze Zahlen sind. Allerdings darf q nicht Null sein ($q \neq 0$). Auf solche allgemeinen Zahlen werden wir im nächsten Abschnitt eingehen. Es sei noch bemerkt, daß sich natürlich auch ganze Zahlen als spezielle rationale Zahlen in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen lassen. Als

Beispiele seien genannt: $2 = \frac{2}{1}$ oder $5 = \frac{5}{1}$.

Bei den eigentlichen Brüchen unterscheiden wir zwischen echten und unechten Brüchen. *Echte Brüche* sind solche, deren Nenner größer ist als ihr Zähler. *Unechte Brüche* haben einen Zähler, der größer als der Nenner ist. Unechte Brüche werden oft in *gemischte Zahlen* verwandelt, d. h. sie werden dargestellt als ganze Zahl und echter Bruch. Zum Beispiel: $\frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$ Brüche lassen sich auch in sogenannte *Dezimalbrüche*

verwandeln. Dies darf als aus der Grundschule bekannt vorausgesetzt werden.

Im folgenden wollen wir kurz die Bruchrechnung wiederholen. Es sollen einige Beispiele gerechnet werden, bei denen die Ausgangsgrößen stets positive Zahlen (positive ganze Zahlen oder positive Brüche) sind.

1) Addition und Subtraktion

Um Brüche addieren bzw. subtrahieren zu können, ist es meist notwendig, sie erst durch geeignetes Erweitern gleichnamig zu machen, d. h. sie *müssen auf den gleichen Nenner gebracht werden*. Unter dem Erweitern eines Bruches versteht man die Multiplikation des Zählers und des Nenners mit der gleichen Zahl. Dadurch ändert sich der Wert des Bruches nicht. Danach werden die gleichnamigen Brüche addiert bzw. subtrahiert. Zuletzt wird der sich nach der Rechnung ergebende Bruch noch gekürzt, d. h. Zähler und Nenner des Bruches werden durch einen eventuell vorhandenen gemeinsamen Faktor dividiert. Dadurch ändert sich der Wert dieses Bruches nicht.

Beispiele:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$$
$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{7}{15}.$$

2) Multiplikation

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner für sich multipliziert und das Zählerprodukt durch das Nennerprodukt dividiert.

Beispiele:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{7}{8} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{35}{24} \text{ oder } 1\frac{11}{24}$$
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

3) Division

Zwei Brüche werden dividiert, indem man den Dividenten-Bruch mit dem Kehrwert des Divisor-Bruches multipliziert.

Beispiele:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4} : 2\frac{2}{3} = \frac{3}{4} : \frac{8}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{8}{4} = 2.$$

1.2 Der Begriff der allgemeinen Zahlen

Im vorigen Abschnitt war gesagt worden, daß sich rationale Zahlen allgemein durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen lassen. Darin waren die Größen p und q als allgemeine Zahlen bezeichnet worden.

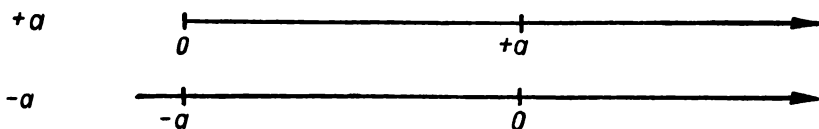
Unter allgemeinen Zahlen versteht man Symbole, die jede bestimmte Zahl vertreten können.

In der Regel werden allgemeine Zahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet: $a, b, c, \dots, x, y, z$.

Zum Beispiel könnte die allgemeine Zahl a an Stelle der bestimmten Zahlen $1, 7, -8, \frac{1}{2}$ oder auch $-\frac{3}{5}$ stehen. In der Definition der rationalen Zahlen sollten die allgemeinen Zahlen p und q ganze Zahlen vertreten. Allerdings durfte q nicht Null sein.

Man verwendet allgemeine Zahlen, um Rechengesetze kurz und allgemein auszusprechen. Weiterhin haben allgemeine Zahlen den Zweck, Rechnungen anzudeuten und vor ihrer Ausführung eventuell noch zu vereinfachen.

Für unsere weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, ebenso wie bei bestimmten Zahlen relative allgemeine Zahlen einzuführen. Die Symbole dafür sind zum Beispiel: $+a$ und $-a$. Eine Darstellung dieser Größen am Zahlenstrahl ist ohne weiteres möglich:



Um bei der Ableitung von Rechengesetzen Vorzeichen und Rechenzeichen nicht zu verwechseln und ein unmittelbares Aufeinanderfolgen derartiger Zeichen zu vermeiden, setzt man relative Zahlen meist in Klammern:

$(+a)$ und $(-a)$.

a ist eine absolute Zahl.

2. Rechnen mit allgemeinen Zahlen

Nachdem im Abschnitt 1.2 der Begriff der allgemeinen Zahlen erklärt worden ist, soll in diesem Kapitel mit allgemeinen Zahlen gerechnet werden.

2.1 Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlen

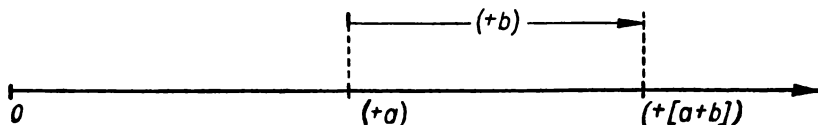
2.11 Addition und Subtraktion eingliedriger Ausdrücke

Wir wenden uns in diesem Abschnitt der Berechnung eingliedriger Ausdrücke zu und behandeln zunächst die *Addition*.

Im folgenden wollen wir voraussetzen, daß a und b positive Größen sind.

1. Fall: $(+a) + (+b)$

Diesen Fall können wir uns sofort am Zahlenstrahl klarmachen:



Allgemein kann der 1. Fall wie folgt dargestellt werden:

$$(+a) + (+b) = (+[a + b]).$$

Man kann beispielsweise von der positiven ganzen Zahl $(+3)$ um die positive ganze Zahl $(+2)$ weiterzählen und kommt dann zur positiven ganzen Zahl $(+5)$:

$$(+2) + (+3) = (+[2 + 3]) = (+5).$$

2. Fall: $(+a) + (-b)$

Wenn wir den Ausdruck $(+a) + (-b)$ bestimmen wollen, erhebt sich eine neue Frage. Was haben wir unter dem Weiterzählen um eine negative Größe zu verstehen?

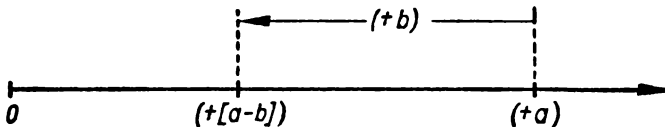
Dies erklären wir folgendermaßen:

Unter dem Weiterzählen um eine negative Zahl (Addition einer negativen Zahl) versteht man das Rückwärtszählen um die entsprechende positive Größe (Subtraktion der entsprechenden positiven Zahl).

Dies kann man als Formel so ausdrücken:

$$\boxed{+(-b) = -(+b)}.$$

Nachdem dies festgestellt worden ist, stellen wir den 2. Fall am Zahlenstrahl dar:



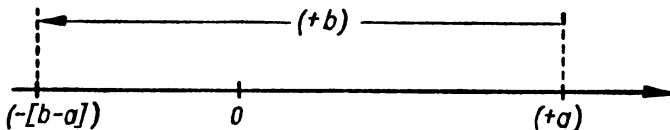
Die allgemeine Formel dafür lautet:

$$(+a) + (-b) = (+[a-b]). \quad (a > b)$$

Diese Beziehung gilt jedoch nur, wenn a größer als b ist. Man schreibt $a > b$. Wenn a kleiner als b ist, ergibt sich

$$(+a) + (-b) = (-[b-a]). \quad (a < b)$$

Die entsprechende Darstellung am Zahlenstrahl ist wie folgt:



Auch der 2. Fall soll an bestimmten Zahlen verdeutlicht werden.

$$(+5) + (-2) = (+[5-2]) = (+3)$$

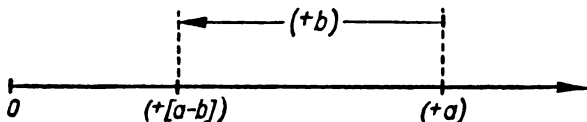
$$(+2) + (-5) = (-[5-2]) = (-3).$$

Man kann die Gesetze der *Subtraktion* für relative Zahlen in gleicher Weise wie die Gesetze der *Addition* für relative Zahlen finden.

Betrachten wir die möglichen Fälle.

3. Fall: $(+a) - (+b)$

Auch die Lösung dieses Falles kann man mit Hilfe des Zahlenstrahls leicht veranschaulichen:

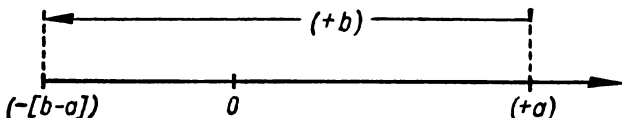


Die allgemeine Darstellung lautet in diesem Fall folgendermaßen:

$$(+a) - (+b) = (+[a - b]).$$

Allerdings gilt diese Darstellung nur, wenn $a > b$ ist. Ist $a < b$, so gilt entsprechend wie im 2. Fall:

$$(+a) - (+b) = (-[b - a]).$$



Auch hierzu seien Beispiele mit bestimmten Zahlen angegeben:

$$(+5) - (+3) = (+[5 - 3]) = (+2)$$

$$(+3) - (+5) = (-[5 - 3]) = (-2).$$

4. Fall: $(+a) - (-b)$

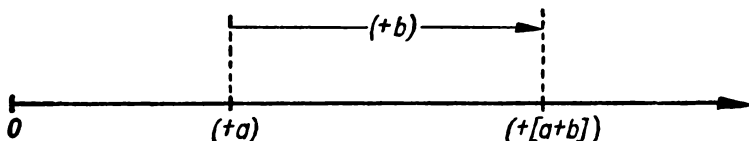
Bei der Lösung dieser Aufgabe erhebt sich die Frage, was unter dem Rückwärtszählen um eine negative Größe zu verstehen ist.

Unter dem Rückwärtszählen um eine negative Zahl (Subtraktion einer negativen Zahl) versteht man das Weiterzählen um die entsprechende positive Zahl (Addition der entsprechenden positiven Zahl).

Diese Festlegung kann als Formel wie folgt ausgedrückt werden:

$$-(-b) = +(+b)$$

Der 4. Fall hat am Zahlenstrahl folgendes Aussehen:



Oder in Formeldarstellung:

$$(+a) - (-b) = (+[a + b]).$$

Auch hierzu sei ein Beispiel mit bestimmten Zahlen angegeben:

$$(+5) - (-3) = (+[5 + 3]) = (+8).$$

Unsere bisherige Schreibweise hat den Vorteil, daß jeder Zahl sofort anzusehen ist, ob sie positiv oder negativ ist. Die Vorzeichen $+$ und $-$

wurden deutlich von den Rechenzeichen $+$ und $-$ unterschieden. Man geht aber trotz dieser Vorteile von dieser Schreibweise ab, weil sie einen großen Nachteil besitzt. Wir waren nämlich gezwungen, bei einigen Rechenregeln zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob das Ergebnis eine positive oder eine negative Zahl war.

Wir führen nun für unsere bisherigen 4 Fälle folgende Schreibweisen ein:

$$\begin{array}{l} 1. \quad (+a) + (+b) = a + b \\ 2. \quad (+a) + (-b) = a - b \\ 3. \quad (+a) - (+b) = a - b \\ 4. \quad (+a) - (-b) = a + b \end{array} .$$

Diese vereinfachte Schreibweise ist deshalb möglich, weil sowohl die Addition der positiven Zahl $(+b)$ als auch die Subtraktion der negativen Zahl $(-b)$ auf eine Addition von b hinausläuft. Entsprechend ergibt eine Addition von $(-b)$ ebenso wie die Subtraktion von $(+b)$ eine Subtraktion von b . Bei dieser vereinfachten Schreibweise bedarf es keiner besonderen Unterscheidung bei den einzelnen Fällen mehr, z. B. ob $a - b$ im Ergebnis eine positive oder eine negative Zahl ist.

Dies wollen wir noch an den in diesem Abschnitt angeführten Beispielen zeigen.

1. Fall: $(+3) + (+2) = 3 + 2 = 5$ oder $(+5)$
2. Fall: $(+5) + (-2) = 5 - 2 = 3$ oder $(+3)$
 $(+2) + (-5) = 2 - 5 = -3$ oder (-3)
3. Fall: $(+5) - (+3) = 5 - 3 = 2$ oder $(+2)$
 $(+3) - (+5) = 3 - 5 = -2$ oder (-2)
4. Fall: $(+5) - (-3) = 5 + 3 = 8$ oder $(+8)$.

An diesen Beispielen wird man die Zweckmäßigkeit der neuen Schreibweise erkennen.

Es sei noch bemerkt, daß es allgemein üblich ist, an Stelle von $(+a)$ nur a und an Stelle von $(-a)$ nur $-a$ zu schreiben.

Bei der Addition bzw. Subtraktion relativer Zahlen sind noch 4 weitere Fälle möglich, die wir gleich in der neuen Schreibweise angeben wollen.

$$\begin{array}{l} 5. \quad (-a) + (+b) = -a + b \\ 6. \quad (-a) + (-b) = -a - b \\ 7. \quad (-a) - (+b) = -a - b \\ 8. \quad (-a) - (-b) = -a + b \end{array} .$$

Auch diese 4 Fälle wollen wir an entsprechenden numerischen Beispielen verdeutlichen:

$$\begin{aligned} (-3) + (+5) &= -3 + 5 = 2 \text{ oder } (+2) \\ (-3) + (-5) &= -3 - 5 = -8 \text{ oder } (-8) \\ (-3) - (+5) &= -3 - 5 = -8 \text{ oder } (-8) \\ (-3) - (-5) &= -3 + 5 = 2 \text{ oder } (+2). \end{aligned}$$

Die Betrachtung der Addition am Zahlenstrahl führt uns zu einer weiteren Erkenntnis. Es ist nämlich für das Endergebnis der Rechnung gleichgültig, ob die 1. Größe zur 2. Größe oder die 2. Größe zur 1. Größe addiert wird. Diese Tatsache bezeichnet man als Gesetz von der Vertauschbarkeit der Summanden oder als kommutatives¹ Gesetz der Addition. Wir stellen diesen Sachverhalt in Formeln wie folgt dar:

$$\boxed{a + b = b + a},$$

wobei a und b beliebige bestimmte Zahlen vertreten können.

Im folgenden wollen wir noch einige Beispiele rechnen.

$$1) \quad 9a - 4b + a = 9a + a - 4b = 10a - 4b.$$

In dieser Aufgabe kann der Ausdruck $10a - 4b$ nicht weiter vereinfacht werden. Überlegen Sie sich dies selbst näher! Das Entsprechende ist auch bei den folgenden Rechnungen zu beachten.

$$2) \quad x - 3y + 5x - 4y + 8y - 6x = x + 5x - 6x - 3y - 4y + 8y = y$$

$$\begin{aligned} 3) \quad 10m + 11 - 5x - 12 - 4m - 3x + 1 + 9x - 5m \\ = 10m - 4m - 5m - 5x - 3x + 9x + 11 - 12 + 1 \\ = m + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \frac{4}{5}a - \frac{7}{2}b + \frac{3}{7}a - \frac{2}{3}b - a &= \frac{4}{5}a + \frac{3}{7}a - a - \frac{7}{2}b - \frac{2}{3}b \\ &= \frac{28}{35}a + \frac{15}{35}a - \frac{35}{35}a - \frac{21}{6}b - \frac{4}{6}b = \frac{8}{35}a - \frac{25}{6}b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \frac{a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{a}{20} + \frac{b}{30} &= \frac{a}{4} - \frac{a}{20} + \frac{b}{6} + \frac{b}{30} \\ &= \frac{5a}{20} - \frac{a}{20} + \frac{5b}{30} + \frac{b}{30} = \frac{4a}{20} + \frac{6b}{30} = \frac{a}{5} + \frac{b}{5} \text{ oder } \frac{a+b}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad 5,37t - 9,387n - 0,9p + 1,687n - 3,89t - 2,4p + 0,72t \\ = -9,387n + 1,687n - 0,9p - 2,4p + 5,37t - 3,89t + 0,72t \\ = -7,7n - 3,3p + 2,2t \end{aligned}$$

$$7) \quad (+2a) + (-3b) = 2a - 3b$$

$$8) \quad (+2a) + (-7b) - (-3b) - (+2a) = 2a - 7b + 3b - 2a = -4b$$

¹ commutare (lat.) = vertauschen.

2.12 Addition und Subtraktion mehrgliedriger Ausdrücke

Nachdem im Abschnitt 2.11 die Addition und Subtraktion eingliedriger Ausdrücke behandelt worden ist, sollen in diesem Abschnitt mehrgliedrige Ausdrücke addiert bzw. subtrahiert werden.

Die im Abschnitt 2.11 angegebenen Rechenregeln gelten in analoger Weise auch für mehrgliedrige Ausdrücke:

$$\begin{array}{l} a + (b + c) = a + b + c \\ a + (b - c) = a + b - c \\ a - (b + c) = a - b - c \\ a - (b - c) = a - b + c \end{array},$$

wobei a , b und c beliebige bestimmte Zahlen sein können. Man merke sich also: Beim Weglassen von Klammern kehrt ein negatives Vorzeichen die Vorzeichen der Größen innerhalb der Klammern um; ein vor der Klammer stehendes positives Vorzeichen hat diese Wirkung nicht.

Auch hierzu seien einige Beispiele gerechnet:

- 1) $7a + 9b + (a + b) = 7a + 9b + a + b = 7a + a + 9b + b = 8a + 10b$
- 2) $(a + b + c) - (a - b + c) = a + b + c - a + b - c = 2b$
- 3) $(8x - 5) + (3x - 7) - (9x - 11) = 8x - 5 + 3x - 7 - 9x + 11 = 8x + 3x - 9x - 5 - 7 + 11 = 2x - 1$
- 4) $(3m - 7n - 5p) + (3m + 4n - 2p) - (m + 6n + 3p) = 3m - 7n - 5p + 3m + 4n - 2p - m - 6n - 3p = 5m - 9n - 10p.$

In den folgenden Beispielen treten ineinander geschachtelte Klammern auf. Derartige Aufgaben löst man, indem man die Klammern von innen nach außen auflöst. Unter dem Auflösen von Klammern versteht man das Beseitigen der Klammern. Bei diesen Aufgaben wird der Rechengang im allgemeinen etwas gekürzt angegeben werden.

- 5) $(6a - 3b) - [(3a - c) - (3b - 3c)] = 6a - 3b - [3a - c - 3b + 3c] = 6a - 3b - [3a - 3b + 2c] = 6a - 3b - 3a + 3b - 2c = 3a - 2c$

- 6) $75x - 39y - \{23z - [-14x - (17y - 19z)] - (22y - 27x)\}$
 $= 75x - 39y - \{23z - [-14x - 17y + 19z] - 22y + 27x\}$
 $= 75x - 39y - \{23z + 14x + 17y - 19z - 22y + 27x\}$
 $= 75x - 39y - \{41x - 5y + 4z\}$
 $= 75x - 39y - 41x + 5y - 4z = 34x - 34y - 4z$
- 7) $17r - 13s - \{11s - [3r - (2s + 5r) - 7s] - (8r - 4s)\}$
 $= 17r - 13s - \{11s - [3r - 2s - 5r - 7s] - 8r + 4s\}$
 $= 17r - 13s - \{11s - 3r + 2s + 5r + 7s - 8r + 4s\}$
 $= 17r - 13s - \{-6r + 24s\} = 17r - 13s + 6r - 24s$
 $= 23r - 37s.$

Am Schluß dieses Abschnitts sei noch auf eine weitere Erfahrungstatsache hingewiesen.

Hat man zum Beispiel 3 Zahlen zu addieren, so ist es gleichgültig, ob man zur ersten Zahl die Summe der beiden letzten Zahlen hinzufügt, oder zuerst die Summe der beiden ersten Zahlen bildet und die dritte Zahl addiert. Man erhält in beiden Fällen das gleiche Ergebnis. Dieses Gesetz, das man das *assoziative¹ Gesetz der Addition* nennt, lautet allgemein:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

wobei a , b und c beliebige bestimmte Zahlen sein können.

Daher schreibt man in einfacher Form

$$a + b + c.$$

Wendet man jetzt noch das kommutative Gesetz der Addition an, dann folgt aus dem assoziativen Gesetz, daß das kommutative Gesetz der Addition nicht nur für 2, sondern für beliebig viele Summanden gilt.

Es gilt zum Beispiel für 3 Summanden:

$$\begin{aligned} a + b + c &= b + a + c = b + c + a \\ &= a + c + b = c + a + b \\ &= c + b + a. \end{aligned}$$

Von dieser letzten Tatsache haben wir bereits im gesamten Abschnitt 2.1 bei den Aufgaben Gebrauch gemacht. Die Berechtigung dafür haben wir uns aber erst jetzt verschafft.

2.2 Multiplikation allgemeiner Zahlen

2.21 Multiplikation eingliedriger Ausdrücke

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Multiplikation allgemeiner Zahlen zuwenden und mit der Multiplikation eingliedriger Ausdrücke beginnen. Dabei sind 4 Fälle zu unterscheiden.

¹assoziativ (neulat.) = verbindend.

1. Fall: $(+a) \cdot (+b)$

Sind zwei positive Zahlen zu multiplizieren, so ist das Ergebnis nach der Definition der Multiplikation wieder eine positive Zahl. Darauf waren wir zum Beispiel schon bei bestimmten Zahlen näher eingegangen. Für allgemeine Zahlen ergibt sich entsprechend

$$(+a) \cdot (+b) = +ab.$$

Zum Beispiel:

$$(+5) \cdot (+3) = +15 = 15.$$

2. Fall: $(-a) \cdot (+b)$

In diesem Fall ist der Multiplikand eine negative Zahl. Diese Zahl soll mit $(+b)$ multipliziert werden, d. h. es soll eine Summe aus b Summanden $(-a)$ gebildet werden. Es ergibt sich daher $-ab$ als Produkt:

$$(-a) \cdot (+b) = -ab.$$

Beispiel:

$$(-5) \cdot (+3) = -15.$$

3. Fall: $(+a) \cdot (-b)$

In diesem Fall kommen wir mit der im Abschnitt 1.1 gegebenen Erklärung der Multiplikation nicht weiter. Wir können keine Summe aus $(-b)$ Summanden $(+a)$ bilden. Wollen wir diese Multiplikation dennoch ausführbar machen, so müssen wir sagen, was wir unter einer Multiplikation eines positiven Multiplikanden mit einem negativen Multiplikator verstehen wollen.

Man multipliziert einen positiven Multiplikanden mit einem negativen Multiplikator, indem man die entsprechenden positiven Zahlen multipliziert und dem Produkt das negative Vorzeichen gibt.

Es ist also

$$(+a) \cdot (-b) = -ab.$$

Beispiel:

$$(+5) \cdot (-3) = -15.$$

4. Fall: $(-a) \cdot (-b)$

Auch in diesem Fall können wir mit der im Abschnitt 1.1 gegebenen Erklärung der Multiplikation nicht zum Ziele kommen. Wollen wir aber auch diese Multiplikation ausführen, so müssen wir festlegen, was wir unter einer Multiplikation eines negativen Multiplikanden mit einem negativen Multiplikator verstehen wollen.

Man multipliziert einen negativen Multiplikanden mit einem negativen Multiplikator, indem man die entsprechenden positiven Zahlen multipliziert und dem Produkt das positive Vorzeichen gibt.

Somit ist also

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Beispiel:

$$(-5) \cdot (-3) = +15.$$

Diese 4 Regeln fassen wir noch einmal zusammen:

$(+a) \cdot (+b) = +ab$
$(-a) \cdot (+b) = -ab$
$(+a) \cdot (-b) = -ab$
$(-a) \cdot (-b) = +ab$

,

wobei a und b beliebige absolute Zahlen sind.

Auch hierzu einige Beispiele:

- 1) $2a \cdot 5b = 10ab$
- 2) $5x \cdot 18y = 90xy$
- 3) $3x \cdot 2x = 6xx = 6x^2$.

Unter x^2 verstehen wir zunächst nur eine abgekürzte Schreibweise für $x \cdot x$. Darauf werden wir im 5. Kapitel (Potenzrechnung) eingehen.

- 4) $\frac{1}{2}u \cdot \frac{1}{3}v \cdot \frac{1}{4}w = \frac{1}{24}uvw$
- 5) $(+3ab) \cdot (-2cd) = -6abcd$
- 6) $(-3x) \cdot (-5y) = +15xy = 15xy$
- 7) $5ax \cdot (-8ay) = -40aaxy = -40a^2xy$
- 8) $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = (+ab) \cdot (-c) = -abc$
- 9) $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d) = (+ab) \cdot (+cd) = +abcd = abcd$.

Es sei noch erwähnt, daß wir wie bei der Addition auch bei der Multiplikation ein kommutatives Gesetz kennen. Es lautet:

$a \cdot b = b \cdot a$

,

wobei a und b beliebige bestimmte Zahlen sein können. Weiterhin kennen wir wie bei der Addition auch bei der Multiplikation ein assoziatives Gesetz. Es lautet:

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

,

wobei a , b und c beliebige bestimmte Zahlen sein können.

Daher kann man einfach schreiben:

$$a \cdot b \cdot c.$$

Daraus folgt mit Hilfe des kommutativen Gesetzes wie bei der Addition:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a \\ &= a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b \\ &= c \cdot b \cdot a. \end{aligned}$$

Bei einem Produkt von mehreren Faktoren ist die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluß auf das Endergebnis. Von dieser Tatsache haben wir schon in den Beispielen Gebrauch gemacht. Die Begründung dafür ist aber erst jetzt gegeben worden.

2.22 Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke

Wir wollen zunächst mit der Multiplikation eines zweigliedrigen Ausdrucks mit einem eingliedrigen Ausdruck beginnen.

Es soll $(a + b) \cdot n$ berechnet werden. Nach Definition der Multiplikation haben wir unter $(a + b) \cdot n$ eine Summe von n gleichen Summanden $(a + b)$ zu verstehen, wenn wir zunächst $n > 0$ voraussetzen.

$$(a + b) \cdot n = \underbrace{(a + b) + (a + b) + \dots + (a + b)}_{n \text{ Summanden } (a + b)}$$

Dafür können wir weiter schreiben:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot n &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ Summanden } a} + \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ Summanden } b} \\ &= a \cdot n + b \cdot n. \end{aligned}$$

Es ist also

$$(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n.$$

Diesen Ausdruck nennt man *distributives¹ Gesetz*. Es sei erwähnt, daß in diesem Ausdruck a , b und n beliebige bestimmte Zahlen sein können. Die Formel gilt auch für $n \leq 0$.

Entsprechend ergibt sich für $(a - b) \cdot n$:

$$(a - b) \cdot n = a \cdot n - b \cdot n.$$

Nachdem die Multiplikation eines zweigliedrigen Ausdrucks mit einem eingliedrigen betrachtet worden ist, wollen wir jetzt die Multiplikation von zwei zweigliedrigen Ausdrücken behandeln. Es soll der Ausdruck

¹ distribuiere (lat.) = verteilen, zuteilen.

$(a + b)(c + d)$ berechnet werden. Hier kommen wir sofort zum Ziele, wenn wir in der Formel $(a + b) \cdot n$ für $n = c + d$ setzen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot n &= a \cdot n + b \cdot n \\(a + b) \cdot (c + d) &= a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) \\&= (c + d) \cdot a + (c + d) \cdot b \\&= ac + ad + bc + bd.\end{aligned}$$

Es ist also

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (c - d) &= ac - ad + bc - bd \\(a - b) \cdot (c + d) &= ac + ad - bc - bd \\(a - b) \cdot (c - d) &= ac - ad - bc + bd.\end{aligned}$$

In Worten ausgedrückt lauten diese Formeln:

Zwei zweigliedrige Ausdrücke werden multipliziert, indem man jedes Glied des einen zweigliedrigen Ausdrucks (Klammerausdrucks) mit jedem Glied des anderen zweigliedrigen Ausdrucks (Klammerausdrucks) multipliziert.

Dabei sind die gleichen Vorzeichenregeln wie bei der Multiplikation eingliedriger Ausdrücke gültig.

Obige Regel ist in gleicher Weise für die Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke gültig. Im folgenden bleibt bei einfachen Multiplikationen der Malpunkt weg.

Hierzu wollen wir einige Beispiele rechnen:

- 1) $3(a + b) + 7(a - b) = 3a + 3b + 7a - 7b = 10a - 4b$
- 2) $3(x - y) - 3(x + y) - 7(x - y) + 8(x + y)$
 $= 3x - 3y - 3x - 3y - 7x + 7y + 8x + 8y = x + 9y$
- 3) $5a(3a - 2b - 2c) + 2b(5a - 3b + 5c) + 10c(a - b)$
 $= 15a^2 - 10ab - 10ac + 10ab - 6b^2 + 10bc + 10ac - 10bc$
 $= 15a^2 - 6b^2$
- 4) $(5a - 7b - 3c)(-2abc) = -10a^2bc + 14ab^2c + 6abc^2$
- 5) $(7x - 3)(5x - 4) = 35x^2 - 28x - 15x + 12$
 $= 35x^2 - 43x + 12$
- 6) $(8x - 7y)(7x + 6y) = 56x^2 + 48xy - 49xy - 42y^2$
 $= 56x^2 - xy - 42y^2$

$$7) (x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 + xy^2 + y^3 \\ = x^3 + y^3$$

$$8) (-3a - 5b)(7a - b) = -21a^2 + 3ab - 35ab + 5b^2 \\ = -21a^2 - 32ab + 5b^2$$

$$9) (x - 1)(x - 2)(x - 3) = (x^2 - 2x - x + 2)(x - 3) \\ = (x^2 - 3x + 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 \\ = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$10) (2a + 3b - 5c)(a - b + c) = 2a^2 - 2ab + 2ac + 3ab - 3b^2 \\ + 3bc - 5ac + 5bc - 5c^2 \\ = 2a^2 + ab - 3ac - 3b^2 + 8bc - 5c^2.$$

Jetzt wollen wir noch Spezialfälle der oben angegebenen Formeln behandeln.

Es soll der Ausdruck $(a + b)^2$ berechnet werden.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) \\ = a^2 + ab + ab + b^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Entsprechend kann der Ausdruck $(a - b)^2$ berechnet werden.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) \\ = a^2 - ab - ab + b^2 \\ = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Weiterhin berechnen wir $(a + b)(a - b)$:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 \\ = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Es ist zweckmäßig, sich diese 3 Formeln einzuprägen.

Auch hierzu betrachten wir einige Beispiele:

$$1) (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$2) (3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$$

$$3) (a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$4) (6c - 7d)^2 = 36c^2 - 84cd + 49d^2$$

- 5) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$
 6) $(7x - 6y)(7x + 6y) = 49x^2 - 36y^2$.

Die eben hergeleiteten Formeln lassen sich gut zu abgekürzten Berechnungen von Quadratzahlen und speziellen Produkten verwenden.

Dies wollen wir an einigen Beispielen zeigen:

- 1) $13^2 = (10 + 3)^2 = 100 + 60 + 9 = 169$
 2) $21^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$
 3) $18^2 = (20 - 2)^2 = 400 - 80 + 4 = 324$
 4) $29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$
 5) $18 \cdot 22 = (20 - 2)(20 + 2) = 400 - 4 = 396$
 6) $29 \cdot 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 900 - 1 = 899$.

Die beiden Formeln

$$(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$$

und

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

sowie die weiteren Varianten dieser Ausdrücke können auch wegen der Symmetrie des Gleichheitszeichens seitenvertauscht geschrieben werden:

$$a \cdot n + b \cdot n = (a + b) \cdot n \text{ bzw. } n \cdot (a + b)$$

bzw.

$$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d).$$

Liegt eine Aufgabenstellung vor, die die Anwendung dieser umgeformten Formeln verlangt, so spricht man von der Zerlegung einer Produktsumme in Faktoren oder vom Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus den Gliedern einer Summe oder Differenz.

Dies wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

- 1) $7a + 7b = 7(a + b)$
 2) $4ab - 6bc = 2b(2a - 3c)$
 3) $ax - bx + cx = x(a - b + c)$
 4) $63xy - 84y^2 + 98yz = 7y(9x - 12y + 14z)$
 5) $a(x - y) - b(x - y) = (a - b)(x - y)$
 6) $2x(3p - q) - (3p - q) = (2x - 1)(3p - q)$
 7) $ax - a - x + 1 = a \cdot (x - 1) - (x - 1) = (a - 1)(x - 1)$
 8) $2ax - 3by - 2bx + 3ay = (a - b) \cdot 2x + (a - b) \cdot 3y$
 $= (a - b)(2x + 3y)$
 9) $40x^2 - 2p + 5x - 16px = 5x(8x + 1) - 2p(8x + 1)$
 $= (5x - 2p)(8x + 1)$
 10) $30ax - 34bx - 15a + 17b = 30ax - 15a - 34bx + 17b$
 $= 15a(2x - 1) - 17b(2x - 1) = (15a - 17b)(2x - 1).$

2.3 Division allgemeiner Zahlen

2.31 Division eingliedriger Ausdrücke

Analog der Multiplikation eingliedriger Ausdrücke gelten für die Division eingliedriger Ausdrücke folgende Regeln:

$$\frac{(+a)}{(+b)} = +\frac{a}{b}$$

$$\frac{(+a)}{(-b)} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{(-a)}{(+b)} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{(-a)}{(-b)} = +\frac{a}{b}.$$

Ist bei derartigen Divisionen der Dividend ein Vielfaches des Divisors, so ist der Quotient eine ganze Zahl. Im anderen Falle ergeben sich, wie bereits bei der Division bestimmter Zahlen erläutert wurde, Brüche. Die bei der Division allgemeiner Zahlen entstehenden Brüche wollen wir allgemeine Brüche nennen. Mit den so entstandenen allgemeinen Brüchen kann man in gleicher Weise rechnen wie mit Brüchen, die durch die Division bestimmter Zahlen entstanden sind. Dies sei erwähnt, da auf einen Beweis hierfür verzichtet werden soll.

Im folgenden werden Aufgaben zur Division eingliedriger Ausdrücke behandelt. Weiterhin sollen die vier Grundrechenarten mit den dabei entstehenden allgemeinen Brüchen ausgeführt werden. Der Rechengang der Aufgaben wird in einigen Fällen in etwas gekürzter Form angegeben werden.

$$1) \frac{54xy}{18x} = 3y$$

$$2) \frac{76abxy}{19aby} = 4x$$

$$3) (-12) : (-3) = \frac{(-12)}{(-3)} = +4 = 4$$

$$4) \frac{+\frac{5}{12}}{-\frac{10}{3}} = \left(+\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{15}{120} = -\frac{1}{8}$$

$$5) \frac{(-24np)}{(+4n)} = -6p$$

$$6) \frac{5ab}{10ab^2} = \frac{1}{2b}$$

$$7) \frac{(-6bcd^2)}{(-3b^2c^3d)} = +\frac{2d}{bc^2} = \frac{2d}{bc^2}$$

- $$8) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}$$
- $$9) \frac{2a}{5x} - \frac{3a}{8x} = \frac{16a - 15a}{40x} = \frac{a}{40x}$$
- $$10) \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{c+b+a}{abc} = \frac{a+b+c}{abc}$$
- $$11) \frac{3x-2}{5} - \frac{5x-3}{2} = \frac{(3x-2) \cdot 2 - (5x-3) \cdot 5}{10}$$
- $$= \frac{6x-4-25x+15}{10} = \frac{-19x+11}{10}$$
- $$12) \frac{a-3b}{6a} + \frac{4a-b}{2b} = \frac{(a-3b) \cdot b + (4a-b) \cdot 3a}{6ab}$$
- $$= \frac{ab-3b^2+12a^2-3ab}{6ab} = \frac{12a^2-2ab-3b^2}{6ab}$$
- $$13) \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{1 \cdot (a-b) - 1 \cdot (a+b)}{(a+b)(a-b)}$$
- $$= \frac{a-b-a-b}{a^2-b^2} = \frac{-2b}{a^2-b^2}$$
- $$14) \frac{5}{3x-9} - \frac{8}{5x-15} = \frac{5}{3(x-3)} - \frac{8}{5(x-3)}$$
- $$= \frac{5 \cdot 5 - 8 \cdot 3}{15(x-3)} = \frac{25-24}{15(x-3)} = \frac{1}{15(x-3)} \text{ oder } \frac{1}{15x-45}$$
- $$15) \frac{5ax}{6by} \cdot \frac{3x}{5y} = \frac{5ax \cdot 3x}{6by \cdot 5y} = \frac{ax^2}{2by^2}$$
- $$16) \frac{4a}{3b} \cdot \frac{3}{8}b = \frac{4a}{3b} \cdot \frac{3b}{8} = \frac{4a \cdot 3b}{3b \cdot 8} = \frac{a}{2}$$
- $$17) (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{x^3} = ax^2 \cdot \frac{1}{x^3} + bx \cdot \frac{1}{x^3} + c \cdot \frac{1}{x^3}$$
- $$= \frac{ax^2}{x^3} + \frac{bx}{x^3} + \frac{c}{x^3} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3}$$
- $$18) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \cdot \frac{ab}{c} = \frac{a \cdot ab}{b \cdot c} + \frac{b \cdot ab}{c \cdot c} + \frac{c \cdot ab}{a \cdot c}$$
- $$= \frac{a^2}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + b$$
- $$19) \left(\frac{x}{y} - \frac{2}{3} \right) (3x + 2y) = \frac{x}{y} \cdot 3x + \frac{x}{y} \cdot 2y - \frac{2}{3} \cdot 3x - \frac{2}{3} \cdot 2y$$
- $$= \frac{3x^2}{y} + 2x - 2x - \frac{4y}{3} = \frac{3x^2}{y} - \frac{4y}{3}$$

$$20) \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{4}$$

$$21) \left(a + \frac{1}{c}\right) \left(a - \frac{1}{c}\right) = a^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{c^2}$$

$$22) \frac{a}{x} : \frac{b}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{b} = \frac{a}{b}$$

$$23) \frac{ax}{by} : \frac{3ab}{5xy} = \frac{ax}{by} \cdot \frac{5xy}{3ab} = \frac{5x^2}{3b^2}$$

$$24) \frac{2(m-1)}{(a-1)x} : \frac{2(1-m)}{(a+1)x} = \frac{2(m-1)}{(a-1)x} \cdot \frac{(a+1)x}{2(1-m)} \\ = \frac{(m-1)(a+1)}{(a-1)(1-m)} = \frac{(m-1)(a+1)}{(a-1)(-1)(m-1)} = \frac{a+1}{-a+1} = \frac{1+a}{1-a}$$

$$25) \frac{\frac{8}{5} - 1}{2 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$$

$$26) \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{ab}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{a^2 - b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2 - b^2}{a+b} \\ = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)} = a-b$$

$$27) \frac{a-b}{a+b} : \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab + b^2} \\ = \frac{(a-b)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2}.$$

2.32 Division mehrgliedriger Ausdrücke

In den letzten Beispielen des vorigen Abschnitts entstanden Quotienten, deren Zähler und Nenner mehrgliedrige Ausdrücke waren. Solche Quotienten lassen sich oft weiter vereinfachen, und zwar dann, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Diesem Sachverhalt wollen wir uns jetzt zuwenden.

Wir beginnen zunächst mit dem einfachen Fall der Division eines mehrgliedrigen Ausdrucks durch einen eingliedrigen Ausdruck.

Man dividiert einen mehrgliedrigen Ausdruck durch einen eingliedrigen Ausdruck, indem man jedes Glied des mehrgliedrigen Ausdrucks durch den eingliedrigen Ausdruck dividiert.

Dies läßt sich aus der Allgemeingültigkeit des distributiven Gesetzes entwickeln. Man kann nämlich die Division eines Dividenten durch einen

Divisor als eine Multiplikation des Dividenden mit dem Faktor $\frac{1}{\text{Divisor}}$ auffassen.

Zum Beispiel:

$$(a + b) : c = (a + b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Ähnlich war bereits die Aufgabe 17 des vorigen Abschnitts.

Dazu rechnen wir einige Beispiele:

$$1) (8a - 6b + 10c) : 2 = \frac{8a}{2} - \frac{6b}{2} + \frac{10c}{2} = 4a - 3b + 5c$$

$$2) (8a^2 - 4ac + 12a) : 4a = \frac{8a^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} + \frac{12a}{4a} = 2a - c + 3$$

$$\begin{aligned} 3) \left(\frac{3}{4}axy - \frac{2}{5}bxy + \frac{7}{10}cxy \right) : \frac{1}{20}xy \\ = \frac{\frac{3}{4}axy}{\frac{1}{20}xy} - \frac{\frac{2}{5}bxy}{\frac{1}{20}xy} + \frac{\frac{7}{10}cxy}{\frac{1}{20}xy} = 15a - 8b + 14c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (24ab - 21b^2 - 3b) : (-3b) = \frac{24ab}{(-3b)} - \frac{21b^2}{(-3b)} - \frac{3b}{(-3b)} \\ = -8a - (-7b) - (-1) = -8a + 7b + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \left(\frac{5a}{3bc} - \frac{3b}{2ac} + \frac{4c}{3ab} \right) : \frac{6}{abc} \\ = \frac{5a}{3bc} : \frac{6}{abc} - \frac{3b}{2ac} : \frac{6}{abc} + \frac{4c}{3ab} : \frac{6}{abc} \\ = \frac{5a^2}{18} - \frac{b^2}{4} + \frac{2c^2}{9}. \end{aligned}$$

Im Anschluß daran soll die Division eines mehrgliedrigen Ausdrucks durch einen anderen mehrgliedrigen Ausdruck behandelt werden. Dies erläutern wir an Hand eines Beispiels.

Beispiel: $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7).$

Wir gehen ähnlich wie bei der Division bestimmter Zahlen vor und dividieren zu diesem Zweck das 1. Glied des Dividenden durch das 1. Glied des Divisors. In unserem Fall ergibt sich $x^2 : x = x$. Dann multiplizieren wir den Divisor mit dem Quotienten x , schreiben das dabei entstehende Produkt $(x - 7) \cdot x = x^2 - 7x$ unter den Dividenden und subtrahieren es vom Dividenden:

$$\begin{array}{r} (x^2 - 8x + 7) : (x - 7) = x \\ - (x^2 - 7x) \\ \hline -x + 7 \end{array}$$

Jetzt wiederholen wir diesen Vorgang. Wir dividieren den Rest $-x + 7$ durch $x - 7$, d. h. wir dividieren zunächst das 1. Glied des Ausdrucks $-x + 7$ durch das 1. Glied von $x - 7$. Wir erhalten -1 . Wir multiplizieren dann -1 wieder mit dem Divisor $x - 7$, schreiben das Ergebnis dieser Multiplikation unter den Rest $-x + 7$ und subtrahieren:

$$\begin{array}{r} (x^2 - 8x + 7) : (x - 7) = x - 1 \\ - (x^2 - 7x) \\ \hline -x + 7 \\ - (-x + 7) \\ \hline 0 \end{array}$$

Es bleibt Null als Rest. Die Division $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7)$ geht somit auf. Ihr Ergebnis ist $x - 1$.

Die Probe zeigt die Richtigkeit der Lösung:

$$\begin{aligned} & (x - 1) \cdot (x - 7) \\ &= x^2 - 7x - x + 7 = x^2 - 8x + 7. \end{aligned}$$

Es sollen nun weitere derartige Aufgaben gerechnet werden.

1) $(x^2 + x - 20) : (x - 4) = x + 5$

$$\begin{array}{r} - (x^2 - 4x) \\ \hline 5x - 20 \\ - (5x - 20) \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $(a^2 - 25) : (a + 5) = a - 5$

$$\begin{array}{r} - (a^2 + 5a) \\ \hline -5a - 25 \\ - (-5a - 25) \\ \hline 0 \end{array}$$

3) $(ac - ad + bc - bd) : (c - d) = a + b$

$$\begin{array}{r} - (ac - ad) \\ \hline bc - bd \\ - (bc - bd) \\ \hline 0 \end{array}$$

4) $\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}b^2\right) : \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right) = 2a + 3b$

$$\begin{array}{r} - \left(\frac{2}{3}a^2 - ab\right) \\ \hline ab - \frac{3}{2}b^2 \\ - \left(ab - \frac{3}{2}b^2\right) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5) \quad (6x^3 + x^2 - 29x + 21) : (2x - 3) = 3x^2 + 5x - 7 \\
 \underline{-(6x^3 - 9x^2)} \\
 10x^2 - 29x + 21 \\
 \underline{-(10x^2 - 15x)} \\
 -14x + 21 \\
 \underline{-(-14x + 21)} \\
 0
 \end{array}$$

Solche Divisionsaufgaben kann man manchmal durch geschicktes Zerlegen des Dividenten in Faktoren und durch anschließendes Kürzen leicht lösen. Das zeigen wir an einigen Beispielen.

$$1) \quad (x^2 - y^2) : (x - y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y)}{(x - y)} = x + y$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (a^4 - b^4) : (a + b) &= \frac{a^4 - b^4}{a + b} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{(a + b)} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)}{(a + b)} = (a^2 + b^2)(a - b) = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3.
 \end{aligned}$$

Auch das vorn behandelte 2. Beispiel kann auf diese Weise gerechnet werden:

$$(a^2 - 25) : (a + 5) = \frac{a^2 - 25}{a + 5} = \frac{(a + 5)(a - 5)}{(a + 5)} = a - 5.$$

Ü 2 Übungsaufgaben zu den allgemeinen Zahlen

- 1) $a + 2b - (3c + 5a)$
- 2) $7m + 6n - \{3p - [3p - (7m + 5n) - (3p - 2n)]\}$
- 3) $(7a - 2b) - (3a - c) - (2b - 3c)$
- 4) $2x \cdot 0,5y \cdot 3$
- 5) $(-2m) \cdot (+6n)$
- 6) $(5a - b)(-2a - 3b)$
- 7) $(a + 2)(a - 1) - (a + 1)(a - 2)$
- 8) $(6a + 9b)^2$
- 9) $(2a - 4b)^2$
- 10) $\left(7c + \frac{2}{3}\right)\left(7c - \frac{2}{3}\right)$
- 11) $(x + y)^3$
- 12) $5a + 10ab$ (Ausklammern)
- 13) $3ax + 5bx - 3a - 5b$ (Ausklammern)
- 14)
$$\frac{5a^2b^2}{-10a^2b}$$
- 15)
$$\frac{a}{x} - \frac{a + b}{2x}$$
- 16)
$$\frac{7x}{10y} + \frac{8x}{15y}$$
- 17)
$$\frac{2ab}{7cd} \cdot \frac{5cx}{6by}$$
- 18)
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)^2$$
- 19)
$$\frac{14ax}{15p} : \frac{21am}{10by}$$
- 20) $(-x^2 + 20xy - 6x^2y) : (-4x)$
- 21) $(x^2 - 2x - 15) : (x - 5)$
- 22) $(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) : (a + b - c)$

L 2 Lösungen zu Ü 2

- 1) $-4a + 2b - 3c$
- 2) $3n - 3p$
- 3) $4a - 4b + 4c$
- 4) $3xy$
- 5) $-12mn$
- 6) $-10a^2 - 13ab + 3b^2$
- 7) $2a$
- 8) $36a^2 + 108ab + 81b^2$
- 9) $4a^2 - 16ab + 16b^2$
- 10) $49c^2 - \frac{4}{9}$
- 11) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- 12) $5a(1 + 2b)$
- 13) $(3a + 5b)(x - 1)$
- 14) $-\frac{b}{2}$
- 15) $\frac{a - b}{2x}$
- 16) $\frac{37x}{30y}$
- 17) $\frac{5ax}{21dy}$
- 18) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{c} + \frac{b^2}{c^2}$
- 19) $\frac{4bxy}{9mp}$
- 20) $\frac{x}{4} - 5y + \frac{3}{2}xy$
- 21) $x + 3$
- 22) $a - b + c$

3. Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

3.1 Der Begriff der Bestimmungsgleichung ersten Grades mit einer Unbekannten

In diesem Abschnitt wollen wir uns den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten zuwenden und mit einem Beispiel beginnen.

Beispiel: Es soll 5 zu einer Zahl addiert werden, damit sich 12 ergibt.
Wie heißt die Zahl?

Da wir die Zahl noch nicht kennen, bezeichnen wir sie mit x . Nach der Aufgabenstellung haben wir zu dieser Zahl die Größe 5 zu addieren. Das Ergebnis soll 12 sein. Diesen Sachverhalt stellen wir in folgender Form dar:

$$x + 5 = 12.$$

Es ist eine Bestimmungsgleichung ersten Grades zur Bestimmung der Unbekannten x entstanden. In einer Bestimmungsgleichung liegt die Größe x bereits fest, sie ist nur noch zahlenmäßig zu errechnen. Auf Bestimmungsgleichungen zweiten Grades, d. h. solche, in denen die Unbekannte in der zweiten Potenz vorkommt, wollen wir im 9. Kapitel eingehen. Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten werden wir im 8. Kapitel behandeln. Die Bestimmungsgleichungen ersten Grades, die wir auch lineare Bestimmungsgleichungen nennen, wollen wir in diesem Abschnitt einfach als Gleichungen bezeichnen. Sie enthalten die Unbekannte x höchstens in der 1. Potenz.

Kommen wir nun zu unserer Aufgabe zurück. Wir wollen aus der Gleichung $x + 5 = 12$ die Unbekannte x errechnen. Zu diesem Zweck subtrahieren wir auf *beiden Seiten* der Gleichung die Zahl 5. Dadurch ändert sich an der Richtigkeit der Gleichung nichts. Es ergibt sich:

$$x + 5 - 5 = 12 - 5.$$

Hieraus folgt sofort

$$x = 7.$$

Damit haben wir die Unbekannte bestimmt.

Man muß also zur Zahl 5 die Zahl 7 addieren, um 12 zu erhalten.

Bei derartigen Aufgaben empfiehlt es sich stets, durch eine *Probe* die Richtigkeit der Lösungen zu kontrollieren. Das geschieht in der Weise, daß man an Stelle der Unbekannten x den errechneten Wert in die Ausgangsgleichung einsetzt und dadurch zeigt, daß diese erfüllt ist.

In unserem Beispiel setzen wir für x den errechneten Wert 7 in die Gleichung $x + 5 = 12$ ein:

$$7 + 5 = 12.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist unmittelbar zu erkennen.

Erklärung:

Eine Zahl zu einer Gleichung zu addieren bzw. von einer Gleichung zu subtrahieren bedeutet, diese Zahl auf beiden Seiten der Gleichung zu addieren bzw. zu subtrahieren.

Bei der Multiplikation bzw. Division einer Gleichung mit einer Zahl wird diese Multiplikation bzw. Division ebenfalls beiderseitig ausgeführt.

Behandeln wir ein zweites Beispiel:

$$3x + 8 = 17.$$

Um x allein auf einer Seite zu erhalten, subtrahieren wir von dieser Gleichung die Zahl 8:

$$\begin{aligned} 3x + 8 - 8 &= 17 - 8 \\ 3x &= 9. \end{aligned}$$

Weiterhin dividieren wir durch 3:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Die Unbekannte hat also den Wert 3.

Die Richtigkeit der Lösung zeigt uns die Probe:

$$\begin{aligned} 3x + 8 &= 17 \\ 3 \cdot 3 + 8 &= 17 \\ 9 + 8 &= 17. \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß wir außer Bestimmungsgleichungen auch noch Funktionsgleichungen kennen. Die Funktionsgleichungen stehen in engem Zusammenhang mit den Bestimmungsgleichungen. Darauf werden wir in einem späteren Kapitel eingehen.

3.2 Aufgaben

Im folgenden Abschnitt sollen einige Aufgaben zur Vertiefung der Kenntnisse und zur Übung gerechnet werden. In einigen Fällen wird der Lösungsweg in etwas gekürzter Darstellung angegeben werden.

1. *Beispiel:*

$$7x - 13 = 22.$$

Zunächst addieren wir zu dieser Gleichung die Zahl 13:

$$\begin{aligned} 7x - 13 + 13 &= 22 + 13 \\ 7x &= 35. \end{aligned}$$

Weiterhin dividieren wir die Gleichung durch 7:

$$\begin{aligned} \frac{7x}{7} &= \frac{35}{7} \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Die Probe zeigt die Richtigkeit der Lösung:

$$\begin{aligned} 7x - 13 &= 22 \\ 7 \cdot 5 - 13 &= 22 \\ 35 - 13 &= 22. \end{aligned}$$

2. *Beispiel:*

$$\frac{7}{3}x - \frac{2}{3} = 5.$$

Wir addieren zu dieser Gleichung $\frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} &= 5 + \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3}x &= \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Dann dividieren wir die Gleichung durch $\frac{7}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{7}{3}x}{\frac{7}{3}} &= \frac{\frac{17}{3}}{\frac{7}{3}} \\ x &= \frac{17}{3} \cdot \frac{3}{7} \\ x &= \frac{17}{7}. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall zeigt uns die Probe die Richtigkeit der Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} &= 5 \\ \frac{7}{3} \cdot \frac{17}{7} - \frac{2}{3} &= 5 \\ \frac{17}{3} - \frac{2}{3} &= 5 \\ \frac{15}{3} &= 5. \end{aligned}$$

3. *Beispiel:*

$$4x + 10 = 2.$$

Wir subtrahieren von dieser Gleichung die Zahl 10:

$$\begin{aligned} 4x + 10 - 10 &= 2 - 10 \\ 4x &= -8. \end{aligned}$$

Weiterhin dividieren wir die Gleichung durch 4:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{4} &= \frac{-8}{4} \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 4x + 10 &= 2 \\ 4 \cdot (-2) + 10 &= 2 \\ -8 + 10 &= 2. \end{aligned}$$

4. *Beispiel:*

$$\frac{3x + 7}{2x + 3} = 2.$$

In diesem Fall ist der erste Schritt zur Lösung der Gleichung die Beseitigung der Unbekannten x aus dem Nenner. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Gleichung mit $(2x + 3)$:

$$\frac{(3x + 7)(2x + 3)}{(2x + 3)} = 2(2x + 3)$$

oder nach Kürzen auf der linken Seite und Multiplikation auf der rechten Seite:

$$3x + 7 = 4x + 6.$$

Jetzt subtrahieren wir von der letzten Gleichung die Zahl 7:

$$\begin{aligned} 3x + 7 - 7 &= 4x + 6 - 7 \\ 3x &= 4x - 1. \end{aligned}$$

Weiterhin subtrahieren wir $4x$ von der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x - 4x &= 4x - 1 - 4x \\ -x &= -1. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit (-1) erhalten wir:

$$x = 1.$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{3x + 7}{2x + 3} &= 2 \\ \frac{3 \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1 + 3} &= 2 \\ \frac{3 + 7}{2 + 3} &= 2 \\ \frac{10}{5} &= 2. \end{aligned}$$

5. *Beispiel:*

$$\frac{ax+b}{ax-b} = -1$$

Zunächst multiplizieren wir die Gleichung mit $(ax - b)$, um x aus dem Nenner entfernen zu können:

$$\frac{(ax+b)(ax-b)}{(ax-b)} = (-1) \cdot (ax-b)$$

oder

$$ax + b = -ax + b.$$

Daraus folgt:

$$ax + ax = b - b$$

$$2ax = 0$$

$$x = \frac{0}{2a} \quad (a \neq 0)$$

$$x = 0.$$

Probe:

$$\frac{ax+b}{ax-b} = -1$$

$$\frac{a \cdot 0 + b}{a \cdot 0 - b} = -1$$

$$\frac{+b}{-b} = -1.$$

6. *Beispiel:* Von welcher Zahl entsteht das 6fache, wenn man ihr 3faches um 39 vermehrt?

Dies ist eine sogenannte Textgleichung, aus der der Ansatz erst ermittelt werden muß.

Die Zahl, die gesucht werden soll, bezeichnen wir mit x . Somit ist das 3fache bzw. 6fache $3x$ bzw. $6x$. Zum 3fachen soll 39 addiert werden, damit das 6fache entsteht. Dies läßt sich wie folgt darstellen:

$$3x + 39 = 6x.$$

Die weitere Rechnung ergibt:

$$3x - 6x = -39$$

$$-3x = -39$$

$$x = 13.$$

Probe:

$$3x + 39 = 6x$$

$$3 \cdot 13 + 39 = 6 \cdot 13$$

$$39 + 39 = 78.$$

Ü 3 Übungsaufgaben zu den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

- 1) $x - 9 = 10$
- 2) $x + 5 = 8$
- 3) $a - x = b$
- 4) $11x - 76 = 95 - 27x$
- 5) $6x - (8x - 10) = 87 - (21 + 10x)$
- 6) $17x - 19 + 23x - 11x = 19x + 17 - 14$
- 7) $a(2x - c) - ab = c(2x - a) + ab$
- 8) $(x - 5)(x - 7) = (x + 4)(x - 9) - 13$
- 9) $a - \frac{c}{x} = b$
- 10) $\frac{18}{2x + 3} + 3 = 5$
- 11) $\frac{2x + 4}{3x - 5} = \frac{5}{2}$
- 12) $\frac{3x + 5}{12} - \frac{2x - 3}{6} = 1 + \frac{2x - 5}{18}$
- 13) $\frac{5}{x - 6} + \frac{6}{x - 5} = \frac{11}{x - 7}$
- 14) Welche Zahl muß man von $3\frac{1}{2}$ subtrahieren, um $2\frac{1}{3}$ zu erhalten?
- 15) Durch welche Zahl muß man $3\frac{1}{8}$ dividieren, um $2\frac{1}{2}$ zu erhalten?

L 3 Lösungen zu Ü 3

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1) $x = 19$ | 9) $x = \frac{c}{a - b}$ |
| 2) $x = 3$ | 10) $x = 3$ |
| 3) $x = a - b$ | 11) $x = 3$ |
| 4) $x = \frac{9}{2}$ | 12) $x = 1$ |
| 5) $x = 7$ | 13) $x = 5\frac{12}{17}$ |
| 6) $x = \frac{11}{5}$ | 14) $x = 1\frac{1}{6}$ |
| 7) $x = \frac{ab}{a - c}$ | 15) $x = 1\frac{1}{4}$ |
| 8) $x = 12$ | |

4. Zahlenverhältnisse und Verhältnisgleichungen

4.1 Zahlenverhältnisse

Wir wollen uns nun den Zahlenverhältnissen zuwenden und mit einer praktischen Fragestellung beginnen. Soll zum Beispiel bei einem Wettbewerb mit Punktwertung von 2 Abteilungen eines Betriebes festgestellt werden, welche von beiden die bessere Abteilung ist, so stellt man die erreichten Punkte einander gegenüber. Hat zum Beispiel die erste Abteilung 36 Punkte und die zweite Abteilung 30 Punkte erhalten, so würde sich folgende Gegenüberstellung ergeben:

$$36 \text{ zu } 30.$$

Mathematisch stellt man das in der Form

$$36 : 30$$

dar und sagt, das Zahlenverhältnis beträgt 36 zu 30. Rechnerisch sind solche Zahlenverhältnisse wie Brüche zu behandeln. Im Beispiel würde man feststellen, daß die erste Abteilung mit der Größe 1,2 zu bewerten ist, vorausgesetzt, daß man die zweite Abteilung mit der Größe 1 bewertet.

Zahlenverhältnisse der eben genannten Art bezeichnet man auch als *Quotientenverhältnisse* oder *geometrische Verhältnisse*. Der zahlenmäßige Wert eines geometrischen Verhältnisses heißt *geometrische Verhältniszahl*. In unserem Fall wäre 1,2 die geometrische Verhältniszahl.

Eine andere Art von Zahlenverhältnissen sind die *Differenzenverhältnisse* oder *arithmetischen Verhältnisse*. Um im obigen Beispiel das arithmetische Verhältnis zu erhalten, hat man die Differenz zwischen den Punktzahlen zu bilden:

$$36 - 30.$$

Das Ergebnis ist 6. Dieses Ergebnis bezeichnet man analog der geometrischen Verhältniszahl als *arithmetische Verhältniszahl*. Es sei erwähnt, daß die geometrische Verhältniszahl eine reine Zahlengröße ohne irgendwelche Benennung ist. Die Benennung läßt sich stets herauskürzen:

$$\frac{36 \text{ Punkte}}{30 \text{ Punkte}} =$$

Anders liegt der Sachverhalt bei den arithmetischen Verhältniszahlen. Bei ihnen hat das Ergebnis die gleiche Benennung wie Minuend und Subtrahend:

$$36 \text{ Punkte} - 30 \text{ Punkte} = 6 \text{ Punkte.}$$

Wenn man in der Mathematik kurz von Verhältnissen spricht, so meint man meist geometrische Verhältnisse. In den folgenden Betrachtungen wollen wir das ebenfalls unterstellen.

In der Literatur und besonders in der statistischen Literatur findet man manchmal keine klare Bezeichnungsweise. Was dort zum Teil unter Verhältnissen und Verhältniszahlen verstanden wird, sind im Sinne der Mathematik keine derartigen Größen. Es sind irgendwelche anderen Beziehungen bzw. Beziehungszahlen, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Kommen wir zu unserem Beispiel zurück. Man wäre in diesem Fall zur gleichen Verhältniszahl gekommen, wenn etwa der erste Betrieb 72 Punkte und der zweite 60 Punkte gehabt hätte:

$$\frac{72 \text{ Punkte}}{60 \text{ Punkte}} = 1,2.$$

Der Wert eines Verhältnisses ändert sich nicht, wenn man den Zähler und den Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert.

Diese Tatsache bezeichnet man als die *Wertbeständigkeit eines Verhältnisses*. Sie sagt lediglich aus, daß man Brüche beliebig erweitern oder kürzen kann, ohne daß sich ihr Wert dabei ändert.

Es sei noch erwähnt, daß wir Verhältnisse, deren Nenner Null ist, von unseren Betrachtungen ausschließen wollen.

4.2 Verhältnisleichungen

Im Beispiel des letzten Abschnittes haben wir gesehen, daß die Werte der beiden Verhältnisse $\frac{36}{30}$ und $\frac{72}{60}$ gleich sind. Wir wollen sie auch der äußeren Form nach als Gleichung schreiben und erhalten

$$\frac{36}{30} = \frac{72}{60}$$

oder in der Doppelpunktform

$$36 : 30 = 72 : 60.$$

Eine derartige Gleichung bezeichnet man als *Verhältnisleichung* oder *Proportion*. In Worten ausgedrückt lautet diese Proportion: 36 verhält sich zu 30 wie 72 zu 60 oder kürzer: 36 zu 30 wie 72 zu 60.

In der allgemeinen Form hat eine Proportion folgendes Aussehen:

$a : b = c : d$

 .

Ihrer Stellung nach sind für die einzelnen Glieder einer Verhältnisgleichung folgende Bezeichnungen üblich:

1. a und c sind die Vorderglieder der Proportion
 b und d sind die Hinterglieder der Proportion.
2. a und b sind die ersten Glieder der Proportion
 c und d sind die letzten Glieder der Proportion.
3. a und d sind die Außenglieder der Proportion
 b und c sind die Innenglieder der Proportion.

Es treten auch Proportionen auf, in denen die beiden Innenglieder gleich sind. Als Beispiel dafür sei $36 : 24 = 24 : 16$ angeführt. Allgemein haben derartige Proportionen folgende Darstellung:

$$a : b = b : d.$$

Man nennt sie auch *stetige Verhältnisgleichungen*. Das gemeinsame innere Glied bezeichnet man als die *mittlere Proportionale* der beiden anderen Glieder.

Wir multiplizieren nun die Verhältnisgleichung

$$a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

mit $b \cdot d$ und erhalten

$$\boxed{a \cdot d = b \cdot c}.$$

Den so entstandenen Ausdruck bezeichnen wir als *Produktengleichung der Proportion*. Diese Gleichung besagt:

In jeder Proportion ist das Produkt der beiden Innenglieder gleich dem Produkt der beiden Außenglieder.

Auch hierzu sei ein Beispiel angeführt:

$$\begin{aligned} 36 : 30 &= 72 : 60 \\ 36 \cdot 60 &= 30 \cdot 72. \end{aligned}$$

Aus der Produktengleichung $a \cdot d = b \cdot c$ kann man rückläufig wieder 8 Proportionen gewinnen, indem man der Reihe nach durch bd , cd , ab und ac dividiert und außerdem noch die Seiten der 4 entstehenden Gleichungen vertauscht.

Betrachten wir als Beispiel:

$$3 \cdot 4 = 2 \cdot 6.$$

Die einzelnen daraus zu gewinnenden Proportionen haben dann folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{ll} 3:2 = 6:4 & 6:4 = 3:2 \\ 4:6 = 2:3 & 2:3 = 4:6 \\ 3:6 = 2:4 & 2:4 = 3:6 \\ 4:2 = 6:3 & 6:3 = 4:2. \end{array}$$

Hieraus kann man folgern, daß man eine richtige Proportion erhält, wenn man in der gegebenen Proportion

1. die Innenglieder
2. die Außenglieder
3. die Innenglieder und die Außenglieder
4. jeweils die beiden Seiten

vertauscht. Die Rechnung kann natürlich auch mit allgemeinen Zahlen durchgeführt werden. Dies sei dem Leser selbst überlassen.

Wenn in einer Proportion 3 Glieder bekannt sind, so kann man das 4. Glied aus ihr errechnen. Man nennt dieses 4. Glied meist die 4. Proportionale, obwohl diese Größe nicht mit d zusammenfallen muß. Durch Vertauschen der Glieder in der Proportion kann diese Größe allerdings an Stelle des d zu stehen kommen. Allgemein wollen wir jetzt die Proportion $a:b = c:d$ nach den vier Größen a , b , c und d auflösen. Wir erhalten

$$a = \frac{bc}{d}, b = \frac{ad}{c}, c = \frac{ad}{b} \text{ und } d = \frac{bc}{a}.$$

Auch hierzu ein Beispiel:

$$2:5 = x:20.$$

Die fehlende 4. Proportionale bezeichnet man meist mit x , weil sie zunächst eine unbekannte Größe ist.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \cdot 20}{5} \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Die Proportion lautet somit

$$2:5 = 8:20.$$

Vergleicht man in der letzten Proportion die sich entsprechenden Glieder miteinander, also die 8 mit der 2 und die 20 mit der 5, so findet man, daß man in beiden Fällen die links stehenden Glieder mit 4 multiplizieren muß, um die rechts stehenden Glieder zu erhalten:

$$8 = 4 \cdot 2 \text{ und } 20 = 4 \cdot 5.$$

Die Zahl 4 bezeichnet man in diesem Falle als *Proportionalitätsfaktor*.

Allgemein gilt für die Proportion $a : b = c : d$ folgende Darstellung mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors k :

$$\boxed{c = k \cdot a \text{ und } d = k \cdot b}.$$

Der Proportionalitätsfaktor muß nicht eine ganze Zahl, sondern kann auch eine beliebige andere Zahl sein.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen zum Begriff der *fortlaufenden Proportion*. Eine Folge von Proportionen

$$a : b = \alpha : \beta, \quad b : c = \beta : \gamma, \quad c : d = \gamma : \delta, \dots$$

sei in der Form gegeben, daß die Vorderglieder der folgenden Proportionen immer mit den Hintergliedern der vorhergehenden Proportionen übereinstimmen. Man kann diese sämtlichen Proportionen in eine einzige zusammenfassen. Diese Proportion hat dann folgende Form:

$$a : b : c : \dots = \alpha : \beta : \gamma : \dots$$

Man nennt sie fortlaufende Proportion.

Auch hierzu noch ein Beispiel. Es sei die Folge der Proportionen gegeben:

$$10 : 15 = 30 : 45, \quad 15 : 20 = 45 : 60, \quad 20 : 25 = 60 : 75, \quad \dots$$

Hieraus ergibt sich die fortlaufende Proportion

$$10 : 15 : 20 : \dots = 30 : 45 : 60 : \dots$$

4.3 Weitere Aufgaben zu den Zahlenverhältnissen und Verhältnisgleichungen

Im folgenden Abschnitt sollen einige Aufgaben zur Vertiefung des Wissens und zur Übung gerechnet werden. In einigen Fällen werden wir den Lösungsweg in etwas gekürzter Form angeben.

1. Aufgabe: Es ist die Richtigkeit der Proportion $17 : 23 = 323 : 437$ zu prüfen.

Dazu bilden wir die Produktengleichung $17 \cdot 437 = 23 \cdot 323$. Die Proportion ist richtig, da beide Produkte gleich 7429 sind.

2. Aufgabe: Es sind aus der Produktengleichung $4 \cdot 12 = 8 \cdot 6$ sämtliche möglichen Proportionen zu bilden.

Es ergeben sich die folgenden Proportionen:

$$\begin{array}{ll} 4 : 8 = 6 : 12 & 6 : 12 = 4 : 8 \\ 4 : 6 = 8 : 12 & 8 : 12 = 4 : 6 \\ 12 : 8 = 6 : 4 & 6 : 4 = 12 : 8 \\ 12 : 6 = 8 : 4 & 8 : 4 = 12 : 6. \end{array}$$

3. Aufgabe: Es ist in der Proportion $20 : 95 = x : 57$ die 4. Proportionale zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\frac{20}{95} &= \frac{x}{57} \\ x &= \frac{20 \cdot 57}{95} \\ x &= 12.\end{aligned}$$

Die Proportion lautet demnach

$$20 : 95 = 12 : 57.$$

4. Aufgabe: Es ist in der Proportion $2 : 4\frac{1}{2} = 9\frac{1}{3} : x$ die 4. Proportionale zu bestimmen.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{2}{4\frac{1}{2}} &= \frac{9\frac{1}{3}}{x} \\ x &= \frac{28}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ x &= 21.\end{aligned}$$

Die 4. Proportionale hat den Wert 21. Damit hat die Proportion die Form

$$2 : 4\frac{1}{2} = 9\frac{1}{3} : 21.$$

5. Aufgabe: Es ist die mittlere Proportionale zu 4 und 25 zu bestimmen.

Die mittlere Proportionale bezeichnen wir mit x . Es ergibt sich der Ansatz:

$$4 : x = x : 25.$$

Hieraus folgt weiter:

$$x^2 = 100.$$

Es ist also eine Zahl zu suchen, die mit sich selbst multipliziert 100 ergibt. Dies ist die Zahl 10. Genauer gesagt sind die Zahlen $+10$ und -10 als mittlere Proportionale möglich, da ja sowohl $(+10) \cdot (+10)$ als auch $(-10) \cdot (-10)$ als Produkt $+100$ ergibt. Die beiden stetigen Proportionen lauten also

$$4 : 10 = 10 : 25$$

und

$$4 : (-10) = (-10) : 25.$$

6. Aufgabe: Unter zwei Personen sind 248 DM so zu verteilen, daß sich die Anteile wie 3:5 verhalten.

Beim Ansatz der Proportion zur Lösung dieser Aufgabe muß man beachten, daß 248 DM 8 Teile sein sollen. Man kann nun den Betrag x berechnen, der zu 3 bzw. 5 Anteilen gehört. Wir entscheiden uns für die 3 Anteile. Es ist also

$$\begin{aligned}\frac{x}{248} &= \frac{3}{8} \\ x &= \frac{248 \cdot 3}{8} \\ x &= 93.\end{aligned}$$

Die auf 3 Anteile entfallende Summe beträgt 93 DM. Somit erhält die zweite Person 248 DM — 93 DM = 155 DM.

7. Aufgabe: 3 m Stoff kosten 45,90 DM. Wieviel kosten 5 m?

Auch bei dieser Aufgabe kann man sofort mit dem Ansatz einer Proportion zum Ziel kommen. Es ist der zu 5 m gehörige Preis x zu ermitteln. Als Ansatz ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{x}{45,90} &= \frac{5}{3} \\ x &= \frac{45,90 \cdot 5}{3} \\ x &= 76,50.\end{aligned}$$

Der Preis für 5 m Stoff beträgt 76,50 DM.

8. Aufgabe: 5 Putzfrauen reinigen ein Haus in 3 Stunden. Wie lange brauchen 4 Putzfrauen dazu?

Ohne sich den Sachverhalt genauer zu überlegen, würde man vielleicht folgenden Weg einschlagen:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \frac{4}{5} \\ x &= 2\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Die 4 Putzfrauen sollten demnach das Haus in $2\frac{2}{5}$ Stunden reinigen.

Wie man bei logischer Überlegung sofort sieht, kann das nicht möglich sein. Der Ansatz der direkten Proportionalität ist in diesem Falle nicht richtig; man kommt vielmehr mit Hilfe der *indirekten Proportionalität* zum Ziele, da ja bei einer geringeren Anzahl von Putzfrauen die Arbeit länger dauert. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß die 4 Putzfrauen unter den gleichen Arbeitsbedingungen wie die 5 Putzfrauen arbeiten. Unter einer indirekten Proportionalität versteht man ein umgekehrtes oder reziprokes Verhältnis.

Wir machen daher den Ansatz:

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}.$$

Daraus folgt

$$x = 3\frac{3}{4}.$$

Die 4 Putzfrauen brauchen zur Reinigung des Hauses $3\frac{3}{4}$ Stunden.

Wie dieses Beispiel zeigt, muß man das Vorliegen einer direkten oder indirekten Proportionalität an der Aufgabe selbst erkennen.

9. Aufgabe: Eine Rohrleitung kann durch 30 Arbeiter in 8 Tagen gelegt werden. In wieviel Tagen könnte das Legen der Leitung erledigt werden, wenn man damit 45 Arbeiter beauftragen würde? Dabei sind die gleichen Arbeitsbedingungen vorausgesetzt.

In diesem Falle muß natürlich auch die indirekte Proportionalität angewendet werden:

$$\begin{aligned}\frac{x}{8} &= \frac{30}{45} \\ x &= 5\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

In $5\frac{1}{3}$ Tagen könnten die 45 Arbeiter die Rohrleitung legen.

Auf der Grundlage einer Proportion läßt sich auch die **Prozentrechnung** aufbauen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir den Grundwert oder Ausgangswert mit b sowie den Prozentsatz mit p . Dann versteht man unter dem Prozentwert a (d. h. p Prozent von b) den Wert, der der Verhältnissgleichung

$$(*) \quad a : b = p : 100$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100}$$

genügt.

Es sei darauf hingewiesen, daß a und b im allgemeinen Zahlen gleicher Benennung sind (z. B. DM, m, m³ o. ä.). p hingegen ist in jedem Falle eine reine, d. h. unbenannte Zahl. Die Schreibweise $p\%$, also mit der Bezeichnung %, ändert an dieser Tatsache nichts. Sie soll nur darauf hinweisen, daß die rechte Seite der Gleichung (*) $p : 100$ lautet und nicht etwa $p : 1000$. Der letzte Fall läge bei der *Promillerechnung* vor. Diese hat eine der Gleichung (*) entsprechende Gleichung als Grundlage:

$$a : b = p : 1000$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1000}.$$

In diesem Fall würde man den Promillesatz p mit der Kennzeichnung ‰ versehen.

Bereits aus der Gleichung (*) erkennt man die drei möglichen Grundaufgaben der Prozentrechnung, die den drei möglichen Auflösungen von (*) nach a , b oder p entsprechen. Sehen wir uns jeweils einen Vertreter dieser drei Aufgabentypen als Beispiel an:

10. Aufgabe: Wieviel DM sind 23 % von 245 DM?

Bei dieser Aufgabe ist die Gleichung (*) nach a aufzulösen:

$$a = \frac{b \cdot p}{100}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt sich:

$$a = \frac{245 \cdot 23}{100}$$

$$a = 56,35.$$

56,35 DM sind 23 % von 245,00 DM.

11. Aufgabe: Wieviel Prozent sind 3,45 m von 12,30 m?

In diesem Falle lösen wir (*) nach p auf:

$$p = \frac{a \cdot 100}{b}.$$

Nach Einsetzen ergibt sich:

$$p = \frac{3,45 \cdot 100}{12,30}$$

$$p = 28,05.$$

3,45 m sind 28,05 % von 12,30 m.

12. Aufgabe: 27 % eines Grundwertes sind 25,46 DM. Wie groß ist dieser Grundwert?

Die Auflösung der Verhältnisgleichung (*) ist hierbei nach b vorzunehmen:

$$b = \frac{a \cdot 100}{p}.$$

Wir setzen ein und erhalten:

$$b = \frac{25,46 \cdot 100}{27}$$

$$b = 94,30.$$

Der Grundwert beträgt 94,30 DM.

13. Aufgabe: 5 % eines Grundwertes sind 38,50 DM. Wieviel DM sind 17 % desselben Grundwertes?

Wie man erkennt, entspricht diese Aufgabenstellung einer Verknüpfung zweier der oben angeführten drei Grundtypen der Prozentrechnung. In diesem Falle muß vom ersten gegebenen Prozentwert auf den Grundwert und von diesem weiter auf den zweiten gesuchten Prozentwert geschlossen werden. Es ist:

$$\text{I) } b = \frac{38,50 \cdot 100}{5} = 770,00$$

$$\text{II) } a = \frac{770,00 \cdot 17}{100} = 130,90 .$$

17 % des Grundwertes 770,00 DM sind 130,90 DM.

Ü 4 Übungsaufgaben zu den Zahlenverhältnissen und Verhältnisgleichungen

- 1) Es ist aus der Proportion $25 : 29 = 150 : 174$ die zugehörige Produktengleichung zu ermitteln. Weiterhin ist die Richtigkeit der gegebenen Proportion nachzuprüfen.
- 2) Es ist in der Proportion $15 : 18 = 36 : x$ die 4. Proportionale zu bestimmen.
- 3) Es ist die mittlere Proportionale zu 4 und 9 zu bestimmen.
- 4) Unter drei Personen sind 219 DM so zu verteilen, daß sich die Anteile wie 1:2:3 verhalten.
- 5) 7 m Stoff kosten 99,40 DM. Wieviel kosten 2,5 m?
- 6) Wieviel Stoff von 1,20 m Breite braucht man zu einem Kleid, wenn man bei 80 cm Breite 5 m Länge braucht?
- 7) Wieviel m sind 76 % von 35,08 m?
- 8) Wieviel Prozent von 456,37 DM sind 38,00 DM?
- 9) 136 % eines Grundwertes sind 76 l. Wie groß ist der Grundwert?
- 10) 43 % eines Grundwertes sind 413,25 DM. Wieviel sind 23 % desselben Grundwertes?

L 4 Lösungen zu Ü 4

- 1) $25 \cdot 174 = 29 \cdot 150$
Die gegebene Proportion ist richtig, da das Produkt auf beiden Seiten der Produktengleichung den Wert 4350 hat.
- 2) $x = 43 \frac{1}{5}$.
- 3) Die mittlere Proportionale hat den Wert + 6 bzw. — 6.
- 4) Die erste Person bekommt 36,50 DM, die zweite Person 73,00 DM und die dritte Person 109,50 DM.
- 5) 2,5 m Stoff kosten 35,50 DM.
- 6) Der Stoff muß eine Länge von $3 \frac{1}{3}$ m haben.
- 7) 26,66 m sind 76 % von 35,08 m.
- 8) 38,00 DM sind 8,33 % von 456,37 DM.
- 9) Der Grundwert beträgt 55,88 l.
- 10) 221,04 DM.

5. Potenzrechnung

5.1 Die Potenz

5.11 Der Potenzbegriff

Im Abschnitt 2 lernten Sie den Begriff „Zehnerpotenz“ und die wichtigen Multiplikationsformeln $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ und $(a+b) \cdot (a-b)$ kennen. In diesen Fällen sollten Sie aber in der Potenzschreibweise nicht mehr sehen als nur eine Schreibweise, die in Kurzform mathematische Rechenanweisung gibt. So handelte es sich beim Ausdruck 10^3 um die Ausrechnung von $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Wir hatten also nur für 1000 kurz 10^3 geschrieben. Im folgenden Kapitel soll nun allgemein der Potenzbegriff behandelt werden.

Aus der Potenzschreibweise 10^3 für $10 \cdot 10 \cdot 10$ oder a^6 für $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ ist leicht der Begriff der Potenz herzuleiten.

Erklärung: Für das Produkt mehrerer gleicher Faktoren schreibt man zur Abkürzung eine Potenz.

$$a \cdot a \cdot a \dots (n\text{-mal}) = a^n .$$

Den Faktor a nennt man *Grundzahl* oder *Basis*¹, die Anzahl n der Faktoren *Hochzahl* oder *Exponent*². a^n bezeichnet man als die n -te Potenz³ von a .

Oft setzt man an Stelle von a^n den Buchstaben b .

$$a^n = b .$$

Das Ergebnis b des Potenzierens wird manchmal ebenfalls Potenz, zur besseren Unterscheidung aber oft auch *Potenzwert* genannt.

Die Zahl n muß der Definition nach zunächst stets eine positive ganze Zahl sein.

Zum besseren Verständnis wollen wir obigen Sachverhalt noch an einigen Beispielen klarmachen.

Beispiel: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$

In diesem Fall bezeichnet man die 3 gleichen Faktoren 4 als Basis. Sie sind also den Faktoren a in der allgemeinen Formel gleichzusetzen. Die

¹ Basis (gr.) = Grundlage, Grundzahl.

² exponere (lat.) = heraussetzen; Exponent ist die herausgesetzte Zahl.

³ potentia (lat.) = Macht, Fähigkeit.

Zahl 3 ist der Exponent, wofür in der allgemeinen Formel n gesetzt worden ist. Den Ausdruck 4^3 nennt man die 3. Potenz von 4. In der allgemeinen Formel wurde dafür a^n geschrieben. Rechnen wir diesen Wert aus, so erhalten wir 64. Dies ist der Wert der Potenz oder Potenzwert, der in der allgemeinen Formel die Bezeichnung b hat.

Allgemeine Formel	Zahlenbeispiel
$a \cdot a \cdot a \dots (n\text{-mal})$	$4 \cdot 4 \cdot 4$
a^n	4^3
b	64 .

Weitere Zahlenbeispiele:

$$\begin{array}{ll} 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 & 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\ 7^2 = 7 \cdot 7 = 49 & 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27. \end{array}$$

Die Multiplikation hatten wir als eine fortgesetzte Addition erkannt, denn das Multiplikationszeichen ersetzt das Aufschreiben einer Reihe gleicher Summanden, die addiert werden sollen. Die Potenzierung ist als eine fortgesetzte Multiplikation aufzufassen, denn der Exponent ersetzt das Aufschreiben einer Reihe gleicher Faktoren, die miteinander multipliziert werden sollen. Die Multiplikation steht eine Stufe über der Addition; entsprechend steht auch die Potenzierung eine Stufe über der Multiplikation. So können wir das Potenzieren als eine Rechenart dritter Stufe bezeichnen. In der Reihe der Grundrechenarten Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren folgt es an fünfter Stelle.

Bei der Addition und Multiplikation kann man die Summanden bzw. Faktoren beliebig vertauschen, ohne daß sich das Endergebnis ändert (Kommutatives Gesetz der Addition bzw. Multiplikation).

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} 3 + 5 = 8 & 3 \cdot 5 = 15 \\ 5 + 3 = 8 & 5 \cdot 3 = 15. \end{array}$$

Bei der Potenzierung sind Basis und Exponent im allgemeinen nicht vertauschbar. Eine Vertauschung dieser beiden Werte führt zu zwei verschiedenen Ergebnissen. Dies soll an einigen Beispielen gezeigt werden:

$$\begin{array}{ll} 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 & 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 & 3^2 = 3 \cdot 3 = 9. \end{array}$$

Abgesehen von der Trivalität, daß Basis und Exponent gleich sind, bildet der Fall

$$\begin{array}{ll} 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\ 4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \end{array}$$

eine Ausnahme.

5.12 Potenzen relativer Zahlen

Im vorhergehenden Abschnitt war die Basis stets als positiv angenommen worden. Jetzt wollen wir dazu übergehen, auch negative Zahlen als Basen zu betrachten.

Zunächst einige Beispiele:

$$\begin{aligned}(-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = + 16 \\(-4)^3 &= (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = - 64 \\(-5)^3 &= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = - 125 \\(-6)^2 &= (-6) \cdot (-6) = + 36.\end{aligned}$$

Beachten Sie, daß bei diesen Aufgaben die Basis in Klammern einzuschließen ist.

Wie Sie sehen, sind die Ergebnisse teils positiv, teils negativ. Woran liegt das? Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, wird bei negativer Basis der Potenzwert positiv, denn es tritt eine gerade Anzahl negativer Faktoren zusammen. Wenn aber der Exponent eine ungerade Zahl ist, wird bei negativer Basis der Potenzwert negativ, denn es tritt eine ungerade Anzahl negativer Faktoren zusammen.

Wir können also zusammenfassen:

- I) Eine Potenz mit positiver Basis ist immer positiv [$3^5 = 243$; $7^2 = 49$].
- II) Eine Potenz mit negativer Basis ist positiv, wenn ihr Exponent eine gerade Zahl ist [$(-5)^4 = + 625$]; eine Potenz mit negativer Basis ist negativ, wenn ihr Exponent eine ungerade Zahl ist [$(-6)^3 = - 216$].

Wir wollen nun noch einige Beispiele ausrechnen:

- 1) $7^2 + 2^3 = 7 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 49 + 8 = 57$
- 2) $6^3 - 5^2 = 216 - 25 = 191$
- 3) $(-2)^3 + 3^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 3 = - 8 + 27 = 19$
- 4) $(-2)^2 - 5^2 = (-2) \cdot (-2) - 5 \cdot 5 = + 4 - 25 = - 21$
- 5) $- 3^2 + 2^2 = - 9 + 4 = - 5$
- 6) $(-3)^3 + (-7)^2 = - 27 + 49 = 22$
- 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
- 8) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$
- 9) $(-0,2)^2 = (-0,2) \cdot (-0,2) = + 0,04$
- 10) $- 0,2^2 = - 0,04$
- 11) $(-0,6)^3 = (-0,6) \cdot (-0,6) \cdot (-0,6) = - 0,216$
- 12) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$.

5.2 Die Potenzgesetze

5.21 Addition und Subtraktion von Potenzen

Für die Addition und Subtraktion von Potenzen gilt der folgende Satz:

Potenzen lassen sich nur dann addieren bzw. subtrahieren, wenn sie gleiche Basen und gleiche Exponenten haben.

Dieses Gesetz wollen wir an einigen Beispielen verdeutlichen:

1) $3a^2 + 7a^2 = 10a^2$

2) $20c^3 - 17c^3 = 3c^3$

3) $7x^2 + 15y^6 + 5y^3 - 4x^2 + 6y^3 - 8y^6 + 3y^2$
 $= 3x^2 + 3y^2 + 11y^3 + 7y^6.$

Sie werden erkannt haben, daß Potenzen, die nur gleiche Exponenten oder nur gleiche Basen haben, nicht addiert bzw. subtrahiert werden können.

5.22 Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Im Abschnitt 5.1 haben wir ausführlich die bei der Potenzrechnung auftretenden Begriffe behandelt. Nunmehr wollen wir die Beziehungen der Potenzen untereinander kennenlernen und in Rechenregeln diejenigen Gesetze niederlegen, die man zur Berechnung von Potenzaufgaben braucht.

Behandeln wir die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis zuerst an einem Beispiel.

Es soll $2^3 \cdot 2^4$ ausgerechnet werden. Auf Grund der Definition der Potenz kann für 2^3 auch $2 \cdot 2 \cdot 2$ und für 2^4 auch $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ geschrieben werden.

Für $2^3 \cdot 2^4$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2^7. \end{aligned}$$

Man kann auch dafür

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

schreiben. Es ergibt sich also ein Produkt von $(3 + 4 =) 7$ Faktoren der Größe 2.

Allgemein gilt:

Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

(I)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis:} \quad a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a} \\
 a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} \\
 a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} \\
 &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n) \text{ Faktoren } a} \\
 a^m \cdot a^n &= a^{m+n}.
 \end{aligned}$$

Für ein Produkt mit beliebig vielen Faktoren gilt entsprechend:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot a^q \cdot \dots = a^{m+n+p+q+\dots}$$

Zur Vertiefung sollen nun noch einige Beispiele gerechnet werden:

- 1) $y^n \cdot y^2 = y^{n+2}$
- 2) $q^{m-n} \cdot q^n = q^{m-n+n} = q^m$
- 3) $b^7 \cdot b^{20-x} = b^{7+20-x} = b^{27-x}$
- 4) $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{9-2n} = x^{n+n-1+9-2n} = x^8$
- 5) $a^n b^m \cdot a^3 b = a^{n+3} b^{m+1}$ (Beachten Sie, daß man nach der Definition $b^1 = b$ setzt. Der Exponent 1 kann wegbleiben.)
- 6) $3a^4 \cdot 2b^3 \cdot 5a^2 = 3 \cdot 2 \cdot 5 a^{4+2} b^3 = 30a^6 b^3$
- 7) $\frac{3}{4} a^n b x^3 \cdot \frac{4}{5} a b^m x^4 \cdot \frac{5}{6} a^2 x^p = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} a^{n+1+2} b^{1+m} x^{3+4+p}$
 $= \frac{1}{2} a^{n+3} b^{m+1} x^{p+7}$
- 8) $(-a)^3 \cdot (-a)^4 = (-a)^{3+4} = (-a)^7 = -a^7$
- 9) $(-a)^{2n} \cdot (-a)^3 = (-a)^{2n+3} = -a^{2n+3}$ ($2n+3$ ist stets eine ungerade Zahl. Setzen Sie für n verschiedene ganze Zahlen ein.)
- 10) $(2a + 3b^2 + 4c^3) \cdot a^2 b^2 c^2 = 2a^3 b^2 c^2 + 3a^2 b^4 c^2 + 4a^2 b^2 c^5$
- 11) $(a^5 + a^2) \cdot (a^3 - a) = a^8 - a^6 + a^5 - a^3$
- 12) $(x^2 + a)^2 = x^4 + 2ax^2 + a^2$.

5.23 Division von Potenzen mit gleicher Basis

Kommen wir nun zur Division von Potenzen mit gleicher Basis. Hier sind zunächst drei Fälle zu unterscheiden. Wir wollen diese drei Möglichkeiten erst an Hand von Beispielen behandeln. Danach wollen wir zu allgemeinen Formulierungen übergehen.

1. *Beispiel:*
$$a^6 : a^3 = \frac{a^6}{a^3}.$$

Auf Grund der Definition der Potenz können wir für a^6 auch $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ bzw. für a^3 auch $a \cdot a \cdot a$ schreiben. Somit ergibt sich

$$\frac{a^6}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}.$$

Kürzen wir diesen Bruch, so erhalten wir

$$\frac{a^6}{a^3} = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Sie sehen, daß wir auch sofort zu diesem Resultat gekommen wären, wenn wir unter Beibehaltung der Basis den Exponenten des Nenners vom Exponenten des Zählers abgezogen hätten.

$$\frac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3.$$

2. *Beispiel:*
$$a^3 : a^6 = \frac{a^3}{a^6}.$$

Auf Grund der eben angegebenen Definitionen für a^6 und a^3 können wir für den Bruch auch

$$\frac{a^3}{a^6} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

schreiben.

Nach Kürzen des Bruches ergibt sich

$$\frac{a^3}{a^6} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}.$$

Um sofort zu diesem Resultat zu kommen, müssen wir unter Beibehaltung der Basis den Zählerexponenten vom Nennerexponenten abziehen und den Kehrwert des Ergebnisses nehmen.

3. *Beispiel:*
$$a^6 : a^6 = \frac{a^6}{a^6}.$$

Auch hier können wir sofort mit Hilfe obiger Definition für a^6

$$\frac{a^6}{a^6} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

schreiben.

Kürzen wir, so erhalten wir 1.

Hätten wir hier wieder unter Beibehaltung der Basis den Nennerexponenten vom Zählerexponenten abgezogen, so hätten wir a^0 erhalten. Unter a^0 können wir uns zunächst nichts vorstellen, denn der Exponent sollte ja stets eine ganze positive Zahl sein, die mindestens 1 ist. Wir werden hierauf später noch ausführlich eingehen.

Die beiden ersten Fälle können wir in folgendem Lehrsatz zusammenfassen:

Man dividiert Potenzen mit gleicher Basis — falls der Zählerexponent größer ist als der Nennerexponent —, indem man die Basis mit der positiven Differenz der Exponenten potenziert. Ist der Nennerexponent größer als der Zählerexponent, so führt man die gleiche Rechnung aus, muß aber vom Ergebnis den Kehrwert nehmen.

$$(II) \quad \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{wenn } m \text{ größer als } n \text{ ist } (m > n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{wenn } m \text{ kleiner als } n \text{ ist } (m < n) \end{cases}$$

Für den dritten Fall müssen wir uns zunächst merken, daß das Resultat 1 ist.

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ wenn } m \text{ gleich } n \text{ ist } (m = n) .$$

Die eben dargelegten Zusammenhänge wollen wir noch allgemein beweisen.

Beweis:

$$\begin{aligned} a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a} \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} \\ \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}} \end{aligned}$$

1. Fall:

Ist $m > n$, so lassen sich n Faktoren a im Zähler und Nenner kürzen. Es bleiben $(m - n)$ Faktoren a im Zähler stehen.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ für } m > n .$$

2. Fall:

Ist $m < n$, so lassen sich m Faktoren a im Zähler und Nenner kürzen. Es bleiben $(n - m)$ Faktoren a im Nenner stehen.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ für } m < n.$$

3. Fall:

Ist $m = n$, so lassen sich die m Faktoren a des Zählers gegen die n Faktoren a des Nenners kürzen. Das Ergebnis ist 1.

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ für } m = n.$$

Auch zu diesem Abschnitt wollen wir einige Aufgaben zur Vertiefung rechnen. Sie sollen gleichzeitig zur Wiederholung des bisher behandelten Stoffes dienen.

$$1) \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$$

$$2) \frac{4^5}{4^7} = \frac{1}{4^{7-5}} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$3) \frac{b^4}{b^3} = b^{4-3} = b^1 = b$$

$$4) \frac{15 x^3}{5 x^2} = 3 x^{3-2} = 3 x^1 = 3 x$$

$$5) \frac{(a-b)^3}{(a-b)^5} = \frac{1}{(a-b)^{5-3}} = \frac{1}{(a-b)^2}$$

$$6) \frac{c^{x-1}}{c^x} = \frac{1}{c^{x-(x-1)}} = \frac{1}{c^{x-x+1}} = \frac{1}{c^1} = \frac{1}{c}.$$

Bei den folgenden Aufgaben wird auf einige Zwischenrechnungen verzichtet.

$$7) \frac{9a^3b^2c}{35p^3q^2r^5} \cdot \frac{7p^4q^3r^2}{18a^5b^3c^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{p^2}{a^2c^2r^3}$$

$$8) \frac{2a^3b^2c^4}{3x^3y^4z^2} : \frac{4a^2b^3c^5}{5xy^5z^4} = \frac{5ayz}{6bcx^2}$$

$$9) (ax^7 + bx^3) : x^5 = ax^2 + \frac{b}{x^2}$$

$$10) (3a^2b^3 + 2a^3c + 4a^3c^4) : 6a^3b^3c^3 = \frac{1}{2ac^3} + \frac{1}{3b^3c^3} + \frac{2c}{3b^3}$$

$$11) (6a^3 + 5a^2b - 13ab^2 - 12b^3) : (3a + 4b) = 2a^2 - ab - 3b^2.$$

5.24 Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten

Im folgenden Abschnitt wollen wir Potenzen miteinander multiplizieren, deren Basen zwar verschieden sind, die aber im Exponenten übereinstimmen. Wir beginnen zweckmäßigerweise auch hier wieder mit einem Zahlenbeispiel.

Wir wollen $2^2 \cdot 3^2$ ausrechnen.

Auf Grund der Definition der Potenz kann für 2^2 auch $2 \cdot 2$ und für 3^2 auch $3 \cdot 3$ geschrieben werden. Für $2^2 \cdot 3^2$ ergibt sich somit

$$2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Wir verändern nun die Reihenfolge der Faktoren und fassen je einen Faktor 2 mit einem Faktor 3 zusammen

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3).$$

Wir erhalten 2 Faktoren $(2 \cdot 3)$.

Dafür können wir auch

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2$$

schreiben.

Schließlich können wir noch das in Klammern stehende Produkt ausrechnen und erhalten

$$2^2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36.$$

Allgemein gilt für die Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten folgende Regel:

Man multipliziert Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

(III)

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

 .

Kommen wir nun zum allgemeinen Beweis.

Beweis:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a}$$

$$b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ Faktoren } b}$$

$$\begin{aligned} a^m \cdot b^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ Faktoren } b} \\ &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ Faktoren } (a \cdot b)} \\ a^m \cdot b^m &= (a \cdot b)^m. \end{aligned}$$

Für beliebig viele Potenzen mit gleichen Exponenten gilt entsprechend:

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdot \dots = (a \cdot b \cdot c \cdot \dots)^m.$$

Im folgenden noch einige Aufgaben zur Vertiefung:

- 1) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$
- 2) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27\,000$
- 3) $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$
- 4) $6^2 \cdot (m + n)^2 = [6 \cdot (m + n)]^2 = [6m + 6n]^2$
- 5) $(-1)^m \cdot (-5b)^m = [(-1) \cdot (-5b)]^m = [5b]^m$
- 6) $p^x \cdot (p + q)^x = [p \cdot (p + q)]^x = [p^2 + pq]^x$
- 7) $(a + b)^m \cdot (a - b)^m = [(a + b) \cdot (a - b)]^m = [a^2 - b^2]^m.$

5.25 Division von Potenzen mit gleichen Exponenten

Die Aufgabe, eine Potenz durch eine andere zu dividieren, wobei der Exponent bei beiden Potenzen gleich sein soll, lösen wir in ähnlicher Weise wie die Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten.

Beginnen wir wieder mit einem Beispiel.

$$8^3 : 2^3 = \frac{8^3}{2^3}$$

Auf Grund der Definition der Potenz können wir für 8^3 auch $8 \cdot 8 \cdot 8$ und für 2^3 auch $2 \cdot 2 \cdot 2$ schreiben.

Wir erhalten dann

$$\frac{8^3}{2^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2}.$$

Fassen wir je einen Faktor 8 im Zähler mit einem Faktor 2 im Nenner zu dem Quotienten $\left(\frac{8}{2}\right)$ zusammen, so erhalten wir ein Produkt aus drei Quotienten $\left(\frac{8}{2}\right)$:

$$\frac{8^3}{2^3} = \left(\frac{8}{2}\right) \cdot \left(\frac{8}{2}\right) \cdot \left(\frac{8}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}\right)^3.$$

Schließlich können wir den in Klammern stehenden Quotienten ausrechnen und erhalten

$$\frac{8^3}{2^3} = 4^3 = 64.$$

Allgemein gilt für die Division von Potenzen mit gleichen Exponenten:

Man dividiert Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

(IV)

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}.$$

Auch diese Regel wollen wir allgemein beweisen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a} \\
 b^m &= \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ Faktoren } b} \\
 \frac{a^m}{b^m} &= \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ Faktoren } b}} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{m \text{ Faktoren } \left(\frac{a}{b}\right)} \\
 \frac{a^m}{b^m} &= \left(\frac{a}{b}\right)^m.
 \end{aligned}$$

Zur Vertiefung noch einige Aufgaben:

- 1) $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$
- 2) $\frac{14^2 \cdot 35^2}{49^2} = \left(\frac{14 \cdot 35}{49}\right)^2 = 10^2 = 100$
- 3) $\frac{0,14^3}{0,21^3} = \left(\frac{0,14}{0,21}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$
- 4) $\frac{(2p^3q)^5}{(3pq^3)^5} = \left(\frac{2p^3q}{3pq^3}\right)^5 = \left(\frac{2p}{3q}\right)^5$
- 5) $\frac{(x-2y)^3 \cdot (x+2y)^3}{(x^2-4y^2)^3} = \left[\frac{(x-2y)(x+2y)}{(x^2-4y^2)}\right]^3 = \left[\frac{(x^2-4y^2)}{(x^2-4y^2)}\right]^3 = 1^3 = 1.$

5.26 Potenzierung von Potenzen

Bisher haben wir die Potenzen den Rechnungsarten zweiter Stufe, also der Multiplikation und der Division, unterworfen. Nun wollen wir auf die Potenzen eine Rechnungsart dritter Stufe, das Potenzieren anwenden, d. h. es sollen Potenzen potenziert werden.

Zunächst machen wir uns den Sachverhalt wieder an einem Beispiel klar:

$$(3^2)^3$$

Die Aufgabe besagt, daß wir die Potenz 3^3 dreimal mit sich selbst multiplizieren sollen.

Wir können also schreiben

$$\begin{aligned}(3^2)^3 &= (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) \\ &= 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2.\end{aligned}$$

Nun werden aber, wie wir unter 5.22 feststellten, Potenzen mit gleicher Basis multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert. Wir wenden diese Regel auf unser Beispiel an und erhalten

$$(3^2)^3 = 3^{2+2+2}.$$

Da es sich um die Summation gleicher Exponenten handelt, können wir für $2 + 2 + 2$ auch $2 \cdot 3$ schreiben:

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6.$$

3^6 können wir noch ausrechnen und erhalten

$$(3^2)^3 = 729.$$

Behandeln wir noch ein weiteres Beispiel:

$$(a^2)^4.$$

In diesem Fall besagt die Aufgabenstellung, daß wir a^2 viermal mit sich selbst multiplizieren sollen:

$$\begin{aligned}(a^2)^4 &= (a^2) \cdot (a^2) \cdot (a^2) \cdot (a^2) \\ &= a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2.\end{aligned}$$

Da es sich wiederum um die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis handelt, können wir für $(a^2)^4$ weiterhin schreiben:

$$(a^2)^4 = a^{2+2+2+2} = a^{2 \cdot 4} = a^8.$$

Aus den beiden Beispielen werden Sie erkannt haben, daß für die Potenzierung von Potenzen folgende Regel gilt:

Man potenziert eine Potenz, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

(V)

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \dots \cdot (a^m)}_{n \text{ Faktoren } (a^m)} \\ &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} \\ &\quad n \text{ Summanden } m \\ &= \underbrace{a^m + m + \dots + m}_m \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n}\end{aligned}$$

Analog gilt für beliebig viele Potenzierungen:

$$[(a^m)^n]^p \dots = a^{m \cdot n \cdot p \dots}.$$

Zur Vertiefung sollen noch einige Beispiele gerechnet werden:

1) $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

2) $(a^2)^3 = a^6$

3) $(a^m)^8 = a^{8m}$

4) $(c^p-1)^5 = c^{(p-1) \cdot 5} = c^{5p-5}$

5) $(c^5)^{p-1} = c^{5(p-1)} = c^{5p-5}$

6) $(-b^3)^4 = (-b^3) \cdot (-b^3) \cdot (-b^3) \cdot (-b^3) = +b^{12}$

7) $(-c^4)^3 = (-c^4) \cdot (-c^4) \cdot (-c^4) = -c^{12}$

8) $(-v^{2\nu})^5 = (-v^{2\nu}) \cdot (-v^{2\nu}) \cdot (-v^{2\nu}) \cdot (-v^{2\nu}) \cdot (-v^{2\nu}) = -v^{10\nu}$

9) $(-v^{5\nu})^2 = (-v^{5\nu}) \cdot (-v^{5\nu}) = +v^{10\nu}$ (Beachten Sie bei den Aufgaben 6 bis 9 das Vorzeichen)

5.27 Umkehrung der Potenzgesetze

Oft sind bei der Durchführung von Rechnungen nicht die Potenzregeln I bis V von Vorteil, sondern ihre Umkehrungen.

Im folgenden sind die Umkehrungen für die fünf Regeln der Potenzrechnung zusammengestellt.

(I) Die Umkehrung zu $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Abschn. 5.22) lautet:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

Statt eine Zahl mit einer Summe zu potenzieren, kann man die Zahl mit jedem Summanden einzeln potenzieren und muß dann die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizieren.

(II) Die Umkehrung zu $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Abschn. 5.23) lautet:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Statt eine Zahl mit einer Differenz zu potenzieren, kann man die Zahl mit dem Minuenden und mit dem Subtrahenden einzeln potenzieren und muß dann den ersten Potenzwert durch den zweiten dividieren.

III) Die Umkehrung zu $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ (Abschn. 5.24) lautet:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

Statt ein Produkt mit einer Zahl zu potenzieren, kann man die Faktoren des Produkts einzeln mit der Zahl potenzieren und muß dann die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizieren.

(IV) Die Umkehrung zu $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (Abschn. 5.25) lautet:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Statt einen Quotienten mit einer Zahl zu potenzieren, kann man Dividend und Divisor einzeln mit der Zahl potenzieren und muß dann den ersten Potenzwert durch den zweiten dividieren.

(V) Die Umkehrung zu $(a^m)^n = a^m \cdot n$ (Abschn. 5.26) lautet:

$$a^m \cdot n = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Statt eine Zahl mit einem Produkt aus zwei Faktoren zu potenzieren, kann man sie mit dem einen Faktor des Produkts und den erhaltenen Potenzwert mit dem anderen Faktor potenzieren.

An den Regeln der Potenzrechnung ist bemerkenswert, daß

die Multiplikation von Potenzen gleicher Basis eine Addition,
die Division von Potenzen gleicher Basis eine Subtraktion,
die Potenzierung von Potenzen eine Multiplikation

der Exponenten erfordert. In diesen Fällen erniedrigt sich also die mit den Exponenten durchzuführende Rechnungsart um eine Stufe.

Rechnen wir noch einige Beispiele mit Hilfe der Umkehrungen der Potenzgesetze:

$$1) (2ab)^4 = 2^4 \cdot a^4 \cdot b^4 = 16a^4b^4$$

$$2) \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$$

$$3) \left(\frac{a}{2b}\right)^x \cdot \left(\frac{4b^3}{a^3}\right)^x = \left(\frac{a \cdot 4 \cdot b^3}{2 \cdot b \cdot a^3}\right)^x = \left(\frac{2b}{a^2}\right)^x = \frac{2^x b^x}{a^{2x}}.$$

5.3 Die Erweiterung des Potenzbegriffes

5.31 Potenzen mit negativen Exponenten

Bisher haben wir nur mit Potenzen gerechnet, deren Exponenten positive ganze Zahlen waren oder diese Bedeutung hatten, falls allgemeine Zahlen auftraten.

Aus diesem Grunde hatten wir bei der Division $\frac{a^m}{a^n}$ drei Fälle zu unterscheiden.

$$1. \text{ Fall} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{wenn } m > n)$$

$$2. \text{ Fall} \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (\text{wenn } m < n)$$

$$3. \text{ Fall} \quad \frac{a^m}{a^n} = 1 \quad (\text{wenn } m = n).$$

Man kann zur Vereinfachung der Divisionsregel die Vereinbarung treffen, daß man immer den Exponenten des Nenners von dem des Zählers abziehen will.

Es soll immer

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

sein.

Diese Vereinfachung zwingt uns zur Bildung von negativen Exponenten. Sehen wir uns im Hinblick auf diesen Sachverhalt das im Abschnitt 5.23 behandelte Beispiel an.

Das Beispiel lautete:

$$\frac{a^3}{a^6}.$$

Wenden wir hierauf die Vereinfachung der Divisionsregel an, so erhalten wir

$$\frac{a^3}{a^6} = a^{3-6} = a^{-3}.$$

Rechnet man nach der ursprünglichen Regel, so gilt

$$\frac{a^3}{a^6} = \frac{1}{a^3}.$$

Aus diesem Grunde definiert man:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Die Definition der Potenzen mit negativen Exponenten lautet allgemein:

Die Potenz jeder von Null verschiedenen Zahl mit einem negativen Exponenten soll den reziproken Wert der mit entsprechendem positiven Exponenten gebildeten Potenz haben.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (a \neq 0).$$

Wir müssen aber an dieser Stelle mit aller Deutlichkeit feststellen, daß der Ausdruck a^{-n} keine Potenz im eigentlichen Sinne ist. Nach der ursprünglichen Definition der Potenz muß der Exponent eine positive ganze Zahl sein, denn wir können uns unter einer $(-n)$ mal als Faktor zu setzenden Zahl nichts vorstellen. Es handelt sich eben nur um eine Definition, mit deren Hilfe allerdings die Rechengesetze vereinfacht werden.

Die Einführung von Potenzen mit negativen Exponenten durch die getroffene Definition ist erst dann voll gerechtfertigt, wenn sich diese Potenzen den Rechengesetzen einordnen, die für Potenzen mit positiven Exponenten gelten. Wir nennen diesen Sachverhalt das „Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze“¹.

Im folgenden wollen wir nun zeigen, daß tatsächlich für Potenzen mit negativen Exponenten dieselben Gesetze wie für Potenzen mit positiven Exponenten gelten.

Wir beweisen dies durch Zurückführung der Potenzen mit negativen Exponenten auf solche mit positiven Exponenten.

I. Potenzgesetz (Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis):

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n} = a^{-m+(-n)}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)}.$$

II. Potenzgesetz (Division von Potenzen mit gleicher Basis):

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{a^n}} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m-(-n)}.$$

¹ permanere (lat.) = verbleiben, erhalten bleiben

III. Potenzgesetz (Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten):

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{(a \cdot b)^m} = (a \cdot b)^{-m}$$

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = (a \cdot b)^{-m}.$$

IV. Potenzgesetz (Division von Potenzen mit gleichen Exponenten):

$$\frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$$

$$\frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}.$$

V. Potenzgesetz (Potenzierung von Potenzen):

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m \cdot n}}} = a^{m \cdot n}$$

$$(a^{-m})^{-n} = a^{m \cdot n}.$$

Wir haben also gesehen, daß für Potenzen mit negativen Exponenten die gleichen Potenzgesetze gültig sind wie für Potenzen mit positiven Exponenten. Entsprechend kann man zeigen, daß die Potenzgesetze erhalten bleiben, wenn teils positive und teils negative Exponenten auftreten. Wir empfehlen, dies selbst nachzuweisen.

5.32 Der Exponent Null

Wir dehnen die eben behandelte Verallgemeinerung der Divisionsregel auf gleiche Exponenten aus.

Gehen wir zunächst von einem Beispiel aus:

$$\frac{a^3}{a^3}.$$

Wir erhalten nach unseren Regeln sofort

$$\frac{a^3}{a^3} = a^3 \cdot a^{-3} = a^{3+(-3)} = a^{3-3} = a^0.$$

Kürzen wir andererseits den Bruch $\frac{a^3}{a^3}$, so erhalten wir 1:

$$\frac{a^3}{a^3} = 1.$$

Aus diesem Grunde definieren wir

$$a^0 = 1.$$

Allgemein gilt

$$\frac{a^n}{a^n} = a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0$$

und

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich wie oben die Definition

$$\boxed{a^0 = 1}.$$

Das gilt für alle Zahlen a , außer für $a = 0$.

Für $a = 0$ wäre $\frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$, das ist aber zunächst ein unbestimmter Ausdruck. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Auch die Definition $a^0 = 1$ erweist sich erst als voll gerechtfertigt, wenn die bisher behandelten Rechengesetze durch sie ihre volle Gültigkeit behalten.

Das soll im folgenden untersucht werden.

I. Potenzgesetz:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^0 &= a^{m+0} = a^m \\ a^m \cdot a^0 &= a^m \cdot 1 = a^m. \end{aligned}$$

II. Potenzgesetz:

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^0} &= a^{m-0} = a^m \\ \frac{a^m}{a^0} &= \frac{a^m}{1} = a^m. \end{aligned}$$

Ist im I. oder II. Potenzgesetz auch der Exponent $m = 0$, so sagen beide Gesetze nur aus, daß

$$1 \cdot 1 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{1} = 1 \text{ ist.}$$

Gleiche Formen nehmen das III. und IV. Potenzgesetz an, wenn der auftretende Exponent $m = 0$ wird:

III. Potenzgesetz:

$$a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1$$

$$(a \cdot b)^0 = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

IV. Potenzgesetz:

$$\frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$\frac{1}{1} = 1.$$

Beim V. Potenzgesetz erhält man den Wert 1, gleichgültig, ob m oder n oder m und n gleich Null werden.

Es ist

$$\begin{aligned}(a^0)^n &= 1^n = 1 \\ (a^m)^0 &= 1 \\ (a^0)^0 &= 1^0 = 1.\end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich nach Anwendung des Potenzgesetzes

$$\begin{aligned}(a^0)^n &= a^{0 \cdot n} = a^0 = 1 \\ (a^m)^0 &= a^{m \cdot 0} = a^0 = 1 \\ (a^0)^0 &= a^{0 \cdot 0} = a^0 = 1.\end{aligned}$$

Wir haben gesehen, daß für die Definition $a^0 = 1$ die Potenzgesetze ihre volle Gültigkeit behalten. Deshalb ist diese Definition zweckmäßig.

Die Erweiterung der Potenzgesetze für negative Exponenten und den Exponenten Null auf Grund der Definitionen

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{und} \quad a^0 = 1$$

hat zur Folge, daß sich die fünf Potenzgesetze auf 3 Gesetze reduzieren lassen:

$\begin{aligned}a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^m \cdot b^m &= (a \cdot b)^m \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n}\end{aligned}$
--

In diesen 3 wichtigen Regeln dürfen die Exponenten m bzw. n alle ganzen Zahlen und auch Null sein.

Zum Beispiel kann man hiernach die Division von Potenzen auf eine Multiplikation von Potenzen zurückführen:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

Zur Vertiefung des neuen Stoffes dieses Abschnitts sollen noch einige Beispiele gerechnet werden:

(Die Resultate sollen nur positive Exponenten haben.)

- 1) $2^{-5} \cdot 2^{-3} = 2^{-5+(-3)} = 2^{-5-3} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$
- 2) $10^4 \cdot 10^{-2} = 10^{4+(-2)} = 10^{4-2} = 10^2 = 100$
- 3) $\frac{2^{-5}}{2^{-8}} = 2^{-5} \cdot 2^8 = 2^{-5+3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$$4) \frac{a^5}{a^{-3}} = a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$$

$$5) 2^{-3} \cdot 3^{-3} = (2 \cdot 3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

$$6) 2^{-2} \cdot 10^{-2} = (2 \cdot 10)^{-2} = 20^{-2} = \frac{1}{20^2} = \frac{1}{400}$$

$$7) (a^3)^{-2} = a^{3 \cdot (-2)} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

$$8) (a^{-2})^3 = a^{(-2) \cdot 3} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

$$9) \frac{a^{-3} \cdot b^{-m}}{x^{-4} \cdot y^{-n}} = \frac{x^4 y^n}{a^3 b^m}$$

$$10) \frac{a^{-2} b^{-1} c^5}{x^3 y^{-5} z^{-2}} = \frac{c^5 y^5 z^2}{a^2 b x^3}$$

$$\begin{aligned} 11) \frac{21 x^{-1} y^5 z^{-3}}{35 x^{-2} y^6 z^{-4}} &= \frac{3}{5} x^{-1} y^5 z^{-3} \cdot x^2 y^{-6} z^4 \\ &= \frac{3}{5} x^{-1+2} y^5 y^{-6} z^{-3+4} \\ &= \frac{3}{5} x^{-1+2} y^{5+(-6)} z^{-3+4} \\ &= \frac{3}{5} x^1 y^{-1} z^1 \\ &= \frac{3}{5} \frac{xz}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \frac{a^{-2} x^4 y^{-6}}{b^3 c^{-4} z^{-5}} &: \frac{a^{-3} b^{-5} x^3}{c^{-5} y^6 z^{-7}} \\ &= \frac{a^{-2} x^4 y^{-6}}{b^3 c^{-4} z^{-5}} \cdot \frac{c^{-5} y^6 z^{-7}}{a^{-3} b^{-5} x^3} \\ &= a^{-2} x^4 y^{-6} \cdot b^{-3} c^4 z^5 \cdot c^{-5} y^6 z^{-7} \cdot a^3 b^5 x^{-3} \\ &= a^{-2} a^3 b^{-3} b^5 c^4 c^{-5} x^4 x^{-3} y^{-6} y^6 z^5 z^{-7} \\ &= a^{-2+3} b^{-3+5} c^{4+(-5)} x^{4+(-3)} y^{-6+6} z^{5+(-7)} \\ &= a^1 b^2 c^{-1} x^1 y^0 z^{-2} \\ &= \frac{ab^2x}{cz^2} \end{aligned}$$

5.4 Weitere Aufgaben zur Potenzrechnung

$$1) p^{2x-3y+5} \cdot p^{3x+2y-5} \cdot p^{x+6y} = p^{2x-3y+5+3x+2y-5+x+6y} = p^{6x+5y}$$

$$2) x^3 y^3 \cdot x^{n-2} y^{n-4} = x^{3+n-2} y^{3+n-4} = x^{n+1} y^{n-1}$$

$$3) (-a)^3 \cdot (-a)^4 = (-a)^{3+4} = (-a)^7 = -a^7$$

$$4) (-a)^{2n} \cdot (-a)^3 = (-a)^{2n+3} = -a^{2n+3}$$

($2n$ soll eine positive ganze Zahl sein)

$$5) (p^7 - p^4) \cdot (p^5 + p) = p^{12} - p^9 + p^8 - p^5$$

$$\begin{aligned} 6) (a-b)^3 \cdot (b-a)^4 &= (a-b)^3 \cdot [(-1) \cdot (a-b)]^4 \\ &= (a-b)^3 \cdot (-1)^4 \cdot (a-b)^4 = (a-b)^{3+4} (-1)^4 \\ &= (a-b)^7 \cdot (-1)^4 = (a-b)^7 \end{aligned}$$

$$7) (3a^3 - 2b^3) \cdot (3a^3 + 2b^3) = 9a^6 - 4b^6$$

$$8) \frac{4}{a^{12}} - \frac{12}{a^6 b^4} + \frac{9}{b^8} = \frac{4b^8 - 12a^6 b^4 + 9a^{12}}{a^{12} b^8} = \frac{(2b^4 - 3a^6)^2}{a^{12} b^8}$$

$$9) (ax^7 + bx^3) : x^6 = \frac{ax^7}{x^6} + \frac{bx^3}{x^6} = ax + \frac{b}{x^3}$$

$$\begin{aligned} 10) \frac{a^3 b^{-4}}{x^{-7} y^5} \cdot \frac{a^{-4} b^{-8}}{x^9 y^{-3}} &= a^3 b^{-4} \cdot x^7 y^{-5} \cdot a^{-4} b^{-5} \cdot x^{-9} y^3 \\ &= a^3 a^{-4} b^{-4} b^{-5} x^7 x^{-9} y^{-5} y^3 \\ &= a^{3-4} b^{-4-5} x^{7-9} y^{-5+3} \\ &= a^{-1} b^{-9} x^{-2} y^{-2} \\ &= \frac{1}{ab^9 x^2 y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) \frac{a^{-4} b^5 c^{-2}}{x^{-1} y^{-2} z^3} : \frac{x^2 y^3 z^4}{a^4 b^{-4} c^4} &= \frac{a^{-4} b^5 c^{-2}}{x^{-1} y^{-2} z^3} \cdot \frac{a^4 b^{-4} c^4}{x^2 y^3 z^4} \\ &= a^{-4} b^5 c^{-2} \cdot x^1 y^2 z^{-3} \cdot a^4 b^{-4} c^4 \cdot x^{-2} y^{-3} z^{-4} \\ &= a^{-4} a^4 b^5 b^{-4} c^{-2} c^4 x^1 x^{-2} y^2 y^{-3} z^{-3} z^{-4} \\ &= a^{-4+4} b^{5-4} c^{-2+4} x^{1-2} y^{2-3} z^{-3-4} \\ &= a^0 b^1 c^2 x^{-1} y^{-1} z^{-7} \\ &= \frac{bc^2}{xyz^7} \end{aligned}$$

$$12) \left(\frac{a^2 b^3}{x^3 y^4} \right)^5 = \frac{a^{10} b^{15}}{x^{15} y^{20}}$$

$$13) \frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^6} = \frac{a^6 b^6}{a^6 b^6} = ab$$

$$14) (-a^5)^{-2} = \frac{1}{(-a^5)^2} = \frac{1}{a^{10}}$$

$$15) \left(\frac{a^{-2} b^3}{x^{-1} y^{-4}} \right)^2 = \frac{a^{-4} b^6}{x^{-2} y^{-8}} = \frac{b^6 x^2 y^8}{a^4}$$

Ü 5 Übungsaufgaben zur Potenzrechnung

1) $x^3 \cdot x^7$

2) $(a + b)^2 \cdot (a + b)^5$

3) $(7c + 3d)^{2x} \cdot (7c + 3d)^y$

4) $\frac{5}{9} a^2 b x \cdot \frac{6}{7} a b^3 y^2 \cdot \frac{4}{5} a^n b x^n y$

5) $(a^7 - a^3)^2$

6) $(-a)^8 \cdot (+a)^5$

7) $(a^4 - a^2 b^2 + b^4) \cdot (a^2 + b^2)$

8) $(-3)^{-4}$

9) $x^{-6} \cdot x^5$

10) $(-a)^{-(2n+1)}$

11) $\frac{2a^3 b^7 c^4}{3x^3 y^4 z^3} : \frac{4a^2 b^8 c^5}{5xy^5 z^4}$

12) $(9a^4 - 58a^2 b^2 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$

13) $\frac{2a^4 b^{-3}}{3x^4 y^{-3}} \cdot \frac{6a^{-4} b^4}{5x^{-5} y^3}$

14) $\left(\frac{a^3 - b^3}{x^2 - y^2}\right)^n \cdot \left(\frac{x + y}{a - b}\right)^n$

15) $(a + b)^2 \cdot (a^2 + b^2)^2 \cdot (a - b)^2$

16) $\left(\frac{4a^4 b^n}{3x^2 y^{n-1}}\right)^3$

17) $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2$

18) $(-a^{2n-1})^2$

19) $\left(\frac{a^5 b^{-3}}{x^{-1} y^3}\right)^{-1}$

20) $\left(\frac{b^{-5} x^2}{a^{-6} y^{-4}}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^4 b^{-3}}{x^{-1} y^{-2}}\right)^{-6}$

L 5 Lösungen zu Ü 5

Es sind nur die Endresultate angegeben.

- 1) x^{10}
- 2) $(a + b)^7$
- 3) $(7c + 3d)^{2x+y}$
- 4) $\frac{8}{21} a^{n+3} b^5 x^{n+1} y^3$
- 5) $a^{14} - 2a^{10} + a^6$
- 6) a^{13}
- 7) $a^6 + b^6$
- 8) $\frac{1}{81}$
- 9) $\frac{1}{x}$
- 10) $\frac{1}{-a^{2n+1}}$
- 11) $\frac{5ayz}{6bcx^2}$
- 12) $3a^2 + 4ab - 7b^2$
- 13) $\frac{4}{5}bx$
- 14) $\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^n$
- 15) $(a^4 - b^4)^2$
- 16) $\frac{64a^{12}b^{3n}}{27x^6y^{3n-3}}$
- 17) $x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}$
- 18) a^{4n-2}
- 19) $\frac{b^3y^2}{a^5x}$
- 20) $\frac{x^2y^4}{b^2}.$

6. Wurzelrechnung

6.1 Die Wurzel

6.11 Der Begriff der Wurzel

Sie haben bisher gelernt, daß die Addition als Rechnungsart der ersten Stufe eine Umkehrung hat. Das ist die Subtraktion. Wenn zum Beispiel bei einer zweigliedrigen Summe

$$a + b = c$$

der Wert der Summe c und ein Summand a bzw. b bekannt sind, kann man den anderen Summanden b bzw. a durch Subtraktion finden:

$a + b = c$	a und c bekannt	$b = c - a$
$a + b = c$	b und c bekannt	$a = c - b$

Dabei ist es völlig gleichgültig, welcher der beiden Summanden bekannt ist, da diese vertauschbar sind. Weil man zur Berechnung des zweiten Summanden stets subtrahieren muß, hat die Addition nur eine Umkehrung.

Entsprechendes gilt auch von der Rechnungsart der zweiten Stufe, der Multiplikation. Auch in diesem Falle sind die Faktoren, die das Produkt bilden, vertauschbar. Wenn zum Beispiel der Wert c und einer der beiden Faktoren a bzw. b , aus denen das Produkt

$$a \cdot b = c$$

besteht, bekannt sind, findet man den anderen Faktor durch die umgekehrte Rechnungsart, durch die Division:

$a \cdot b = c$	a und c bekannt	$b = \frac{c}{a} \quad (a \neq 0)$
$a \cdot b = c$	b und c bekannt	$a = \frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$

Es ist dabei wieder völlig gleichgültig, welcher der beiden Faktoren unbekannt ist, stets muß man dividieren. Die Multiplikation hat also auch nur eine Umkehrung.

Bei der Rechnungsart dritter Stufe, dem Potenzieren, liegt der Fall etwas anders. Zwar treten in der bekannten Potenzformel

$$a^n = b$$

wieder 3 Größen auf (a , b und n). Diese sind aber nicht gleichberechtigt und dürfen im allgemeinen nicht vertauscht werden. Die Potenzrechnung hat aus diesem Grunde 2 Umkehrungen.

Bei der ersten Umkehrung wird die Basis a gesucht, wenn der Potenzwert b und der Exponent n bekannt sind. Wir wollen den Sachverhalt zunächst an einem Beispiel erklären.

Beispiel:

$$a^3 = 8.$$

Es soll die Basis a gesucht werden, wenn der Potenzwert 8 und der Exponent 3 bekannt sind. Mit anderen Worten heißt dies, daß eine Zahl gefunden werden soll, die dreimal mit sich selbst multipliziert 8 ergibt.

Es ist allgemein üblich, daß die gesuchte Größe allein auf einer Seite steht. Wir müssen in unserem Beispiel den Exponenten 3 „auf die andere Seite“ bringen. Zu diesem Zweck schreibt man den Ausdruck $a^3 = 8$ um:

$$a = \sqrt[3]{8}.$$

Man liest dies: a ist die 3. Wurzel aus 8.

Das Rechenzeichen $\sqrt{}$ soll ein lateinisches „r“ als Abkürzung für *radix* (lat.) = Wurzel sein. Diese Deutung ist allerdings umstritten.

Kehren wir nun zum allgemeinen Fall zurück.

Bei bekanntem Potenzwert b und bekanntem Exponenten n soll die Basis a gesucht werden. Wir müssen also den Ausdruck $a^n = b$ nach a auflösen. Wir führen dafür analog dem Zahlenbeispiel folgende Schreibweise ein:

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

Man liest dies: a ist die n -te Wurzel aus b .

Die Zahl b , die radiziert werden muß, heißt der *Radikand*; die Zahl n , mit der radiziert wird, heißt der *Wurzelexponent*. Der Ausdruck $\sqrt[n]{b}$ heißt die *Wurzel* und das Ergebnis a der *Wurzelwert*.

Im Zahlenbeispiel ist

8 der Radikand,
3 der Wurzelexponent und
 $\sqrt[3]{8}$ die Wurzel.

Man kann $\sqrt[3]{8}$ weiter ausrechnen. Wir haben also eine Zahl zu suchen, die dreimal mit sich selbst multipliziert 8 ergibt. Dies ist offenbar die Zahl 2. Die Zahl 2 ist dann der Wurzelwert.

Wir wollen nun noch kurz die eben angeführten neuen Bezeichnungen mit den Bezeichnungen der Potenzrechnung vergleichen:

Bezeichnung	Potenzaufgabe	Wurzelaufgabe
a	Basis	Wurzelwert
n	Exponent	Wurzelexponent
b	Potenzwert	Radikand

Wir haben gesehen, daß man die Wurzeln nach der Ordnungszahl des Exponenten benennt, also dritte Wurzel, fünfte Wurzel, n -te Wurzel liest. Am häufigsten treten in der Mathematik und ihren Anwendungsgebieten zweite Wurzeln auf. Man spricht wegen ihrer großen Verbreitung auch von Wurzeln schlechthin und läßt beim Schreiben den Wurzelexponenten 2 weg, z. B. $\sqrt{49} = 7$ statt $\sqrt[2]{49} = 7$, also „Wurzel aus 49 ist 7“ statt „zweite Wurzel aus 49 ist 7“. Ähnlich wie man in der Potenzrechnung nur die am meisten benutzten zweiten und dritten Potenzen einer Größe mit dem besonderen Namen Quadratzahl und Kubikzahl bezeichnet, kennt man in der Wurzelrechnung auch für die 2. und 3. Wurzeln die besonderen Bezeichnungen Quadratwurzel und Kubikwurzel. Für die Bezeichnung aller höheren Potenzen und Wurzeln aber werden ausschließlich die Ordnungszahlen verwendet.

Setzt man den Ausdruck $\sqrt[n]{b} = a$ in den Ausdruck $a^n = b$ ein, so erhält man

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Die n -te Wurzel aus b ist die Zahl, deren n -te Potenz b ergibt.

Hieraus ergibt sich sofort, daß sich Radizieren und Potenzieren mit dem gleichen Exponenten gegenseitig aufhebt. Radizieren und Potenzieren sind entgegengesetzte Rechenarten.

Beispiele: $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3 = 27$

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8$$

$$\left(\sqrt[5]{6}\right)^5 = 6$$

Aus der Erklärung für die Wurzel folgt auch

$$\sqrt[n]{b^n} = b.$$

Demnach ist

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \sqrt[n]{b^n} = b.$$

Zur Übung sollen noch einige Beispiele gerechnet werden:

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$$

Bei der zweiten Umkehrung der Potenzierung wird der Exponent n gesucht, wenn die Basis a und der Potenzwert b bekannt sind. Betrachten wir auch in diesem Fall wieder ein Beispiel.

$$2^n = 8$$

Wir haben eine Zahl n zu bestimmen, die angibt, wie oft 2 mit sich selbst zu multiplizieren ist, um die Zahl 8 zu erhalten. Es handelt sich also um die Bestimmung des Exponenten. Wir wollen aber an dieser Stelle nicht näher auf diese Dinge eingehen. Sie sollen den Gegenstand des 7. Kapitels bilden.

6.12 Gerade und ungerade Wurzelexponenten — Doppeldeutigkeit bei Wurzeln

In diesem Abschnitt wollen wir unsere Aufmerksamkeit darauf richten, daß die Radikanden von Wurzeln sowohl positive als auch negative Zahlen sein können. Weiterhin ist dabei von Bedeutung, ob es sich um gerade oder ungerade Wurzelexponenten handelt.

Die vier möglichen Fälle wollen wir zunächst an Beispielen erklären.

1. *Beispiel:* $\sqrt[2]{4} = (+2) \text{ oder } (-2)$, denn es ist
 $(+2)^2 = +4$ und auch
 $(-2)^2 = +4$.

2. *Beispiel:* $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$.

3. *Beispiel:* $\sqrt[3]{-8} = -2$, denn $(-2)^3 = -8$

4. *Beispiel:* $\sqrt[2]{-4}$

Dieser Ausdruck ist nach unseren bisherigen Erfahrungen sinnlos, denn es war ja sowohl $(+2)^2 = +4$ als auch $(-2)^2 = +4$. Auf diesen Fall werden wir im Abschnitt 9.22 näher eingehen.

Um leichter auf den allgemeinen Fall schließen zu können, betrachten wir noch weitere Beispiele:

1) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$, denn $(+3)^4 = 81$ und
 $(-3)^4 = 81$

2) $\sqrt[6]{64} = \pm 2$, denn $(+2)^6 = 64$ und
 $(-2)^6 = 64$

3) $\sqrt[5]{243} = +3$, denn $(+3)^5 = 243$. Dagegen ist aber
 $(-3)^5 = -243$.

$$4) \sqrt[7]{-128} = -2, \text{ denn es ist } (-2)^7 = -128. \text{ Im Gegensatz dazu} \\ \text{ist aber } (+2)^7 = +128.$$

$$5) \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}, \text{ denn } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Aus diesen Betrachtungen schließen wir jetzt auf den allgemeinen Fall:

I. Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten und positiven Radikanden sind doppeldeutig, d. h. sie haben stets 2 entgegengesetzt gleiche Werte. Der dabei auftretende positive Wurzelwert wird als Hauptwert der Wurzel bezeichnet.

Wenn nichts anderes angegeben wird, beschränken wir uns bei Rechnungen immer auf diesen Hauptwert.

II. Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten sind eindeutig. Ist der Radikand positiv, so ist auch der Wurzelwert positiv, ist der Radikand negativ, so ist auch der Wurzelwert negativ.

Da uns umfassendere Kenntnisse noch fehlen, müssen wir uns zunächst mit obigen Formulierungen begnügen. Sie bedürfen noch einer späteren Vervollständigung.

6.13 Rationale und irrationale Zahlen

In den bisher betrachteten Beispielen für Wurzeln ergaben sich als deren Werte stets ganze Zahlen oder Brüche. Das lag daran, daß als Radikand einer n -ten Wurzel stets die n -te Potenz einer ganzen Zahl oder eines Bruches auftrat. Wir erkannten z. B.

$$\sqrt{25} = 5, \quad \text{weil} \quad 25 = 5^2 \text{ ist}$$

$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \text{weil} \quad 27 = 3^3 \text{ ist}$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \quad \text{weil} \quad \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ ist.}$$

Jetzt wollen wir solche n -te Wurzeln behandeln, deren Radikanden keine n -ten Potenzen einer ganzen oder gebrochenen Zahl sind, sondern beliebige ganze Zahlen oder Brüche. Sehen wir uns z. B. den Ausdruck $\sqrt{2}$ an. Da $\sqrt{1} = 1$ und $\sqrt{4} = 2$ ist, muß der Wert $\sqrt{2}$ eine Zahl zwischen 1 und 2 sein. Der Wurzelwert von $\sqrt{2}$ ist also auf keinen Fall eine ganze Zahl. Wir wollen zeigen, daß $\sqrt{2}$ auch nicht durch einen Bruch dargestellt werden kann. Das beweisen wir indirekt, d. h. wir nehmen das Gegenteil unserer Behauptung als richtig an und weisen dann einen Widerspruch nach, der uns zeigt, daß das Gegenteil unserer Behauptung falsch und also unsere Behauptung selbst richtig war.

Es sei also

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

ein Bruch, der bereits so weit wie möglich gekürzt wurde. Die ganzen Zahlen p und q besitzen also keinen gemeinsamen Teiler mehr.

Wir quadrieren diese Gleichung und erhalten

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

oder

$$2q^2 = p^2.$$

Hieraus erkennt man, daß p^2 eine gerade Zahl sein muß. Daher ist auch p eine gerade Zahl, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist wieder eine ungerade Zahl, wie Sie aus folgendem sehen:

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$

Also gestattet p eine Darstellung

$$p = 2a.$$

Daraus folgt

$$p^2 = 4a^2.$$

Unsere Gleichung $2q^2 = p^2$ geht damit über in

$$2q^2 = 4a^2,$$

wenn wir für p^2 den Wert $4a^2$ einsetzen. Dividieren wir unsere letzte Gleichung durch 2, so ergibt sich

$$q^2 = 2a^2.$$

Daraus folgt, daß q^2 und also auch q eine gerade Zahl sein müßte. Dies hatten wir auch schon für p gezeigt. Aus diesem Grunde müßten p und q mindestens den gemeinsamen Teiler 2 besitzen. Dagegen hatten wir aber vorausgesetzt, daß p und q keinen gemeinsamen Teiler haben sollten.

Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt und schließen daraus, daß unsere ursprüngliche Annahme, nämlich die Darstellung

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

falsch ist.

Wir haben also bewiesen:

Der Wert von $\sqrt{2}$ ist weder eine ganze Zahl noch ein Bruch.

In analoger Weise wie oben läßt sich das z. B. auch für $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ und ähnliche Wurzeln zeigen. Um auch solchen Ausdrücken Zahlen zuzuordnen zu können, müssen wir neben den uns bisher bekannten ganzen

Zahlen und Brüchen neue Zahlen einführen. Es sind die sogenannten *Irrationalzahlen*. An dieser Stelle wollen wir uns daran erinnern, wie der ursprünglich gegebene Bereich der natürlichen Zahlen (1, 2, 3, . . .) schrittweise erweitert wurde. Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen ergaben stets wieder natürliche Zahlen. Dagegen führte die Subtraktion natürlicher Zahlen zur Einführung der Null und der negativen Zahlen und die Division natürlicher Zahlen zur Einführung von Brüchen. Die Division durch Null wird dabei ausgeschlossen. Die natürlichen und die negativen natürlichen Zahlen nebst der Null fassen wir unter dem Namen ganze Zahlen zusammen.

Die Menge der ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen heißt die Gesamtheit der rationalen Zahlen. In ihr sind die 4 Grundrechenarten sowie die 1. Rechenoperation der 3. Stufe, das Potenzieren, unbeschränkt ausführbar. Das heißt, daß die Zahlen, die aus rationalen Zahlen durch obige 5 Rechenoperationen entstehen, wieder stets rational sind. Wenden wir aber die 2. Rechenoperation der 3. Stufe, das Radizieren, auf rationale Zahlen an, so entstehen, wie schon gesagt, nur in den Spezialfällen wieder rationale Zahlen als Wurzelwerte. Im allgemeinen Falle ergeben sich beim Radizieren rationaler Zahlen Wurzelwerte, die wir als irrationale Zahlen im Gegensatz zu den rationalen bezeichnet hatten. Das Radizieren führt also zu einer Erweiterung des Zahlenbereichs. Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der *reellen Zahlen*. In dieser Menge sind die Rechenoperationen von der 1. bis zur 3. Stufe unbeschränkt ausführbar. Ausgenommen ist dabei das Radizieren mit negativen Radikanden und geraden Wurzelexponenten.

Nachdem wir uns diesen Überblick über die Zahlenbereiche, die wir jetzt kennen, verschafft haben, wollen wir versuchen, das Wesen einer irrationalen Zahl zu erfassen. Dazu betrachten wir wieder unser Beispiel $\sqrt{2}$. Wir hatten schon festgestellt, daß $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen muß. $\sqrt{2}$ liegt aber sogar zwischen 1,4 und 1,5, weil $1,4^2 = 1,96$ und $1,5^2 = 2,25$ ist. Probiert man weiter, so findet man, daß

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \quad \text{ist,}$$

$$\text{da } 1,41^2 = 1,9881 \text{ und } 1,42^2 = 2,0164.$$

Man kann sich so dem Wert von $\sqrt{2}$ schrittweise auf beliebig viele Dezimalstellen nähern, ohne jedoch den wahren Wert von $\sqrt{2}$ je zu erreichen. Denn wäre das der Fall, so wäre $\sqrt{2}$ als endlicher Dezimalbruch darstellbar. Diesen endlichen Dezimalbruch kann man sofort in einen gemeinen Bruch umschreiben. Es war aber schon gezeigt worden, daß $\sqrt{2}$ kein gewöhnlicher Bruch ist. Aus diesem Grunde kann auch

$\sqrt{2}$ kein unendlicher periodischer Dezimalbruch sein, da sich auch diese als gewöhnliche Brüche schreiben lassen. Dasselbe wie für $\sqrt{2}$ gilt auch für alle anderen irrationalen Zahlen.

Wir können also sagen:

Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche. Man kann ihren genauen Wert nicht erfassen, jedoch können sie mit beliebiger Genauigkeit zwischen zwei rationale Zahlen eingeschlossen werden.

6.14 Das Ziehen von Wurzeln

Man wird erwarten, daß in diesem Abschnitt Verfahren zur Berechnung von Wurzeln angegeben werden, bei denen der Radikand eine bestimmte Zahl ist. Oft wird ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln dargestellt. Wir wollen aber hier auf dieses in der Schule gebrachte Verfahren verzichten, da es in der Praxis fast keine Verwendung findet. Wir begnügen uns zunächst mit Tafeln, in denen die wichtigsten Wurzeln, nämlich die Quadrat- und Kubikwurzeln, für die ganzzahligen Radikanden 1 bis 50 angegeben sind. Später werden wir Wurzeln mit Hilfe von Logarithmen berechnen. Darauf soll aber jetzt nicht eingegangen werden.

Tafel 1: Quadratwurzeln

x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$
1	1,0000	26	5,0990
2	1,4142	27	5,1962
3	1,7321	28	5,2915
4	2,0000	29	5,3852
5	2,2361	30	5,4772
6	2,4495	31	5,5678
7	2,6458	32	5,6569
8	2,8284	33	5,7446
9	3,0000	34	5,8310
10	3,1623	35	5,9161
11	3,3166	36	6,0000
12	3,4641	37	6,0828
13	3,6056	38	6,1644
14	3,7417	39	6,2450
15	3,8730	40	6,3246
16	4,0000	41	6,4031
17	4,1231	42	6,4807
18	4,2426	43	6,5574
19	4,3589	44	6,6332
20	4,4721	45	6,7082
21	4,5826	46	6,7823
22	4,6904	47	6,8557
23	4,7958	48	6,9282
24	4,8990	49	7,0000
25	5,0000	50	7,0711

Tafel 2: Kubikwurzeln

x	$\sqrt[3]{x}$	x	$\sqrt[3]{x}$
1	1,0000	26	2,9625
2	1,2599	27	3,0000
3	1,4422	28	3,0366
4	1,5874	29	3,0723
5	1,7100	30	3,1072
6	1,8171	31	3,1414
7	1,9129	32	3,1748
8	2,0000	33	3,2075
9	2,0801	34	3,2396
10	2,1544	35	3,2711
11	2,2240	36	3,3019
12	2,2894	37	3,3322
13	2,3513	38	3,3620
14	2,4101	39	3,3912
15	2,4662	40	3,4200
16	2,5198	41	3,4482
17	2,5713	42	3,4760
18	2,6207	43	3,5034
19	2,6684	44	3,5303
20	2,7144	45	3,5569
21	2,7589	46	3,5830
22	2,8020	47	3,6088
23	2,8439	48	3,6342
24	2,8845	49	3,6593
25	2,9240	50	3,6840

6.2 Die Wurzelgesetze

Im Abschnitt 6.14 ist darauf hingewiesen worden, daß Wurzeln im allgemeinen mit Hilfe von Zahlentafeln oder Logarithmen berechnet werden. Hierbei handelt es sich aber stets um Wurzeln aus bestimmten Zahlen. Beim Ausrechnen von Wurzeln, unter denen auch allgemeine Zahlen vorkommen, müssen wir andere Lösungswege gehen. Häufig lassen sich die Radikanden umformen, vereinfachen oder auch mit anderen Gliedern zusammenfassen, so daß übersichtlichere Formen entstehen.

In den folgenden Abschnitten soll nun auf die einzelnen Wurzelgesetze eingegangen werden.

6.21 Addition und Subtraktion von Wurzeln

Für die Addition und Subtraktion von Wurzeln gilt der folgende Satz:

Wurzeln lassen sich nur dann addieren bzw. subtrahieren, wenn sie den gleichen Radikanden und den gleichen Wurzelexponenten haben.

Diese Regel wollen wir nun an einigen Beispielen verdeutlichen:

- 1) $8\sqrt{13} + 5\sqrt{13} = (8 + 5)\sqrt{13} = 13\sqrt{13}$
- 2) $8\sqrt{13} - 5\sqrt{13} = (8 - 5)\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$
- 3) $6\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = (6 + 5)\sqrt[3]{2} = 11\sqrt[3]{2}$
- 4) $a\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = (a + 1)\sqrt[3]{x}$
- 5) $2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} = (2 + 3 + 4)\sqrt[3]{a} = 9\sqrt[3]{a}$
- 6) $2\sqrt[3]{a} + 6\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a} - 2\sqrt[4]{a} = (2 + 6)\sqrt[3]{a} + (4 - 2)\sqrt[4]{a}$
 $= 8\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[4]{a}$
- 7) $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} + 5\sqrt{b} - 6\sqrt{b}$
 $= (1 - 3)\sqrt{a} + (2 + 5 - 6)\sqrt{b}$
 $= -2\sqrt{a} + 1\sqrt{b}$
 $= -2\sqrt{a} + \sqrt{b}.$

Sie werden an einigen der obigen Beispiele erkannt haben, daß Wurzeln, die nur den gleichen Wurzelexponenten oder nur den gleichen Radikanden haben, nicht addiert bzw. subtrahiert werden können.

6.22 Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

Die Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten wollen wir an folgendem Beispiel darstellen:

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}.$$

Nach unseren bisherigen Kenntnissen würden wir durch getrenntes Wurzelziehen das Produkt zweier irrationaler Wurzelwerte erhalten, weil die Radikanden 20 und 45 keine Quadratzahlen sind. Um das zu vermeiden, beweisen wir zunächst ein allgemeines Gesetz, das uns die Rechnung erleichtern wird. Wir wollen ganz allgemein

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

berechnen.

Dazu setzen wir

$$\sqrt[n]{a} = \alpha$$

$$\sqrt[n]{b} = \beta.$$

Wir potenzieren beide Gleichungen mit dem Wurzelexponenten n :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \alpha^n$$

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \beta^n.$$

Im Abschnitt 6.11 wurde bemerkt, daß sich Radizieren und anschließen des Potenzieren mit dem gleichen Exponenten aufhebt. Führen wir dies auf beiden Seiten obiger Gleichungen aus, so erhalten wir:

$$a = \alpha^n$$

$$b = \beta^n$$

bzw.

$$\alpha^n = a$$

$$\beta^n = b.$$

Wir multiplizieren nun beide Gleichungen miteinander, d. h. es werden die rechten bzw. linken Seiten beider Gleichungen miteinander multipliziert. Das ergibt

$$\alpha^n \cdot \beta^n = a \cdot b.$$

Wir wenden das III. Potenzgesetz (Abschnitt 5.24) auf der linken Seite dieser Gleichung an und erhalten

$$(\alpha \cdot \beta)^n = a \cdot b.$$

Danach radizieren wir beide Seiten mit dem Exponenten n :

$$\sqrt[n]{(\alpha \cdot \beta)^n} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Wie Sie wissen, sind Potenzieren und Radizieren mit gleichem Exponenten Rechenoperationen, die einander aufheben. Es ergibt sich also aus der letzten Gleichung:

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Beachten wir nun, daß

$$\alpha = \sqrt[n]{a}$$

und

$$\beta = \sqrt[n]{b}$$

war, so können wir weiterhin schreiben:

$$(I) \quad \boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}.$$

Diese Formel besagt in Worten:

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

Ein Produkt mit beliebig vielen Faktoren, die sämtlich Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten sind, läßt sich nach diesem Satz folgendermaßen darstellen:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot \dots \cdot w}.$$

Es wird empfohlen, den Beweis hierfür zur Übung selbst durchzuführen.

Kehren wir nun zu unserem Zahlenbeispiel zurück.

Es lautete

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}.$$

Nach unserem abgeleiteten Wurzelgesetz können wir dafür

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900}$$

schreiben.

Wie Sie erkennen werden, ist 900 das Quadrat von 30.

Es ergibt sich also

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = 30.$$

Oft ist aber für die Durchführung von Rechnungen nicht das Wurzelgesetz in der Form (I), sondern seine Umkehrung

$$(Ia) \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

von Vorteil.

In Worten heißt das:

Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden Faktor einzeln radiziert und die erhaltenen Wurzelwerte miteinander multipliziert.

Den Nutzen der Formel (Ia) erkennen Sie am besten an einem Beispiel:

$$\sqrt[3]{216}.$$

Da wir eine dritte Wurzel zu ziehen haben, versuchen wir die Zahl 216 in ein Produkt von uns bekannten, möglichst kleinen Kubikzahlen zu zerlegen.

Für unser Beispiel finden wir

$$216 = 8 \cdot 27.$$

Es ergibt sich also

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \cdot 27}.$$

Wir wenden jetzt die Umkehrung des Wurzelgesetzes, (Ia), an:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}.$$

Wir wissen, daß

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

und

$$\sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{ist.}$$

Mit Hilfe dieser Werte ergibt sich für unser Beispiel:

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3.$$

$$\sqrt[3]{216} = 6.$$

Eine weitere wichtige Anwendung der Formel (Ia) wollen wir an folgendem Beispiel erläutern:

$$\sqrt{12}.$$

Wir zerlegen den Radikanden 12 in Faktoren:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3}.$$

Nach Anwendung des Gesetzes (Ia) erhalten wir:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3}$$

und weiter

$$\sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Damit haben wir aus 12 die Wurzel wenigstens teilweise gezogen und dadurch ein Produkt bekommen, das aus einem rationalen und einem irrationalen Faktor besteht. Es ist nämlich nicht in jedem Fall möglich, den gegebenen Radikanden so in ein Produkt zu zerlegen, daß die Wurzeln aus den einzelnen Faktoren rationale Werte ergeben.

Das Verfahren der Produktzerlegung des Radikanden und des anschließenden teilweisen Wurzelziehens nennt man *partielles Radizieren*¹. Die besondere Bedeutung dieses Verfahrens besteht darin, daß sich unübersichtliche Ausdrücke dadurch wesentlich vereinfachen. Die nu-

¹ pars (lat.) = Teil

merische Berechnung von Wurzeln kann so erheblich abgekürzt werden. Wir wollen dies an einigen Beispielen zeigen:

$$\begin{aligned}
 1) \sqrt{24} &= \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{6} \\
 2) \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3} \\
 3) \sqrt[4]{5 \cdot a^4 b^5} &= \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{b} = a \cdot b \sqrt[4]{5b} \\
 4) \sqrt{28 a^3 b^7} &= \sqrt{2^2 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^6 \cdot b} \\
 &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^6} \cdot \sqrt{b} \\
 &= 2 a b^3 \sqrt{7} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\
 &= 2 a b^3 \sqrt{7 a b}.
 \end{aligned}$$

Wegen seiner häufigen Anwendung ist es zweckmäßig, sich das Wurzelgesetz (I) gut einzuprägen, obwohl wir später dieses und alle folgenden Wurzelgesetze auf die uns schon bekannten 3 Potenzgesetze zurückführen werden. Zunächst wollen wir auch die anderen Wurzelgesetze unabhängig von den Potenzgesetzen behandeln. Die Begründung dafür wird sich später zeigen.

Zur Vertiefung des in diesem Abschnitt dargelegten Stoffes rechnen wir noch einige Beispiele:

$$\begin{aligned}
 1) \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} &= \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9 \\
 2) \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} &= \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6 \\
 3) \sqrt{4 a^2 b^4} \cdot \sqrt{25 a^2 b^2} &= \sqrt{100 a^4 b^6} = 10 a^2 b^3 \\
 4) \sqrt{4a} &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} = 2 \cdot \sqrt{a} \\
 5) \sqrt[n]{x^{n+1}} &= \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{x} = x \cdot \sqrt[n]{x} \\
 6) \sqrt{9 x^3 y^8 z^{10}} &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^8} \cdot \sqrt{z^{10}} = 3 x y^4 z^5 \sqrt{x}.
 \end{aligned}$$

6.23 Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

Die Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten erläutern wir wieder an einem Zahlenbeispiel:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}.$$

Durch sofortiges Radizieren der Zahlen 20 und 45 würden sich irrationale Zahlen ergeben, mit denen dann die Division durchzuführen wäre. Wir wollen in diesem Abschnitt den gleichen Weg gehen wie bei der Multi-

plikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten. Es wird also zuerst eine allgemeine Formel für

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

abgeleitet.

Zu diesem Zweck setzen wir wieder

$$\sqrt[n]{a} = \alpha$$

und

$$\sqrt[n]{b} = \beta.$$

Wir potenzieren beide Gleichungen wie im vorigen Abschnitt mit dem Exponenten n und erhalten

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \alpha^n$$

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \beta^n.$$

Da sich Radizieren und Potenzieren mit dem gleichen Exponenten aufhebt, ergibt sich:

$$a = \alpha^n$$

$$b = \beta^n$$

bzw.

$$\alpha^n = a$$

$$\beta^n = b.$$

Wir dividieren die erste Gleichung nun durch die zweite und erhalten

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \frac{a}{b}.$$

Wir wenden auf der linken Seite der Gleichung das IV. Potenzgesetz (Abschnitt 5.25) an:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

Jetzt radizieren wir die Gleichung mit dem Exponenten n :

$$\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Erinnern wir uns, daß $\alpha = \sqrt[n]{a}$ und $\beta = \sqrt[n]{b}$ war, so können wir hierfür schreiben:

$$(II) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

In Worten läßt sich das folgendermaßen formulieren:

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

Wir wenden uns wieder unserem ursprünglichen Zahlenbeispiel zu:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}.$$

Nach dem II. Wurzelgesetz ergibt sich:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Ebenso wie für das I. Wurzelgesetz können wir auch für das II. Wurzelgesetz die entsprechende Umkehrung finden:

$$(IIa) \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

In Worten:

Ein Quotient wird radiziert, indem man Dividend und Divisor einzeln radiziert und den Wurzelwert des Dividenden durch den Wurzelwert des Divisors dividiert.

Auch hierzu wollen wir ein Beispiel rechnen:

$$\sqrt[3]{\frac{6}{125}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{6}.$$

Zur Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten betrachten wir als Übung noch einige Beispiele:

$$1) \quad \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{54}{3}} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

$$2) \quad \frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{6x}{2x}} = \sqrt{3}$$

$$3) \sqrt[n]{\frac{ab}{bx}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{x}}$$

$$4) \frac{\sqrt[n]{ab}}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n]{\frac{ab}{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n]{b^2} = b$$

$$5) \sqrt[n]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{3}} = \frac{2}{\sqrt[n]{3}}.$$

6.24 Rationalmachen des Nenners

Wie Sie beim letzten Beispiel sehen, entsteht im Nenner eine irrationale Zahl. Diese erschwert die zur Bestimmung des Bruchwertes nötige Division. Daher ist es zweckmäßig, den Bruch so zu erweitern, daß sein Nenner beim Radizieren zu einer rationalen Zahl wird. Man nennt dieses Verfahren das „Rationalmachen des Nenners“.

Betrachten wir nun das letzte Beispiel des vorigen Abschnitts weiter:

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Wir erweitern die rechte Seite dieser Gleichung mit $\sqrt{3}$ und erhalten

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}.$$

Im Anschluß daran wollen wir die eben dargelegte Methode allgemein behandeln. Es soll der Bruch

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}},$$

wobei b rational sein soll, so verändert werden, daß der Radikand des Nenners zu einer n -ten Potenz wird. Aus diesem Grunde erweitern wir den gegebenen Bruch mit $\sqrt[n]{b^q}$, wobei q so gewählt wird, daß $p + q = n$ ist:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^q}}{\sqrt[n]{b^p} \cdot \sqrt[n]{b^q}}.$$

Im Nenner wenden wir das I. Wurzelgesetz an:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^q}}{\sqrt[n]{b^p \cdot b^q}}.$$

Nach dem I. Potenzgesetz läßt sich dafür auch schreiben:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^q}}{\sqrt[n]{b^p + q}}.$$

Wegen unserer Bedingung $p + q = n$ erhalten wir hieraus:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^q}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^q}}{b} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{b^q}.$$

Wir wollen das Rationalmachen des Nenners noch an einigen Beispielen üben:

$$1) \quad \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10 \sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{10}{5} \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

$$2) \quad \sqrt[3]{\frac{7a}{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{7a}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{7a} \cdot \sqrt[3]{x^1}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^1}} = \frac{\sqrt[3]{7ax}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{7ax}}{x}.$$

Auch wenn der Nenner eines Bruches z. B. aus 2 Gliedern besteht, von denen eines oder auch beide eine Wurzel sind, rechnet man den Bruch so um, daß der Nenner rational wird. Wir wollen uns hier aber nur auf Quadratwurzeln beschränken, weil diese uns am häufigsten begegnen. Betrachten wir gleich den allgemeinen Fall:

$$\frac{c}{\sqrt{d} + \sqrt{e}} \quad (c \text{ beliebig, } d \text{ und } e \text{ rational}).$$

In diesem Fall erweitern wir den Bruch mit $(\sqrt{d} - \sqrt{e})$:

$$\frac{c(\sqrt{d} - \sqrt{e})}{(\sqrt{d} + \sqrt{e})(\sqrt{d} - \sqrt{e})}.$$

Sie sehen, daß es sich im Nenner um die Multiplikation zweier Binome von der Form $(a + b)(a - b)$ handelt. Wir haben also zu rechnen:

$$(\sqrt{d} + \sqrt{e})(\sqrt{d} - \sqrt{e}) = (\sqrt{d})^2 - (\sqrt{e})^2 = d - e.$$

Daher nimmt unser Bruch die Gestalt an:

$$\frac{c(\sqrt{d} - \sqrt{e})}{(\sqrt{d} + \sqrt{e})(\sqrt{d} - \sqrt{e})} = \frac{c(\sqrt{d} - \sqrt{e})}{d - e} = \frac{c}{d - e}(\sqrt{d} - \sqrt{e}).$$

Falls der gegebene Ausdruck die Form

$$\frac{c}{\sqrt{d} - \sqrt{e}}$$

hat, so erweitern wir ihn entsprechend mit $(\sqrt{d} + \sqrt{e})$. Als Ergebnis erhalten wir in diesem Falle:

$$\frac{c}{d-e}(\sqrt{d} + \sqrt{e}).$$

Zur Übung wird die Durchführung des letzten Rechenganges empfohlen. Es sollen nun noch einige Beispiele gerechnet werden:

$$1) \quad \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} \\ = 2 - \sqrt{3}$$

$$2) \quad \frac{3}{3 - \sqrt{6}} = \frac{3(3 + \sqrt{6})}{(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} = \frac{3(3 + \sqrt{6})}{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{3(3 + \sqrt{6})}{9 - 6} \\ = \frac{3(3 + \sqrt{6})}{3} = 3 + \sqrt{6}$$

$$3) \quad \frac{11}{7 - 3\sqrt{3}} = \frac{11(7 + 3\sqrt{3})}{(7 - 3\sqrt{3})(7 + 3\sqrt{3})} = \frac{11(7 + 3\sqrt{3})}{7^2 - (3\sqrt{3})^2} \\ = \frac{11(7 + 3\sqrt{3})}{49 - 9 \cdot 3} = \frac{11(7 + 3\sqrt{3})}{49 - 27} = \frac{11(7 + 3\sqrt{3})}{22} \\ = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{3})$$

$$4) \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ = \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{1} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

6.25 Potenzieren von Wurzeln

In den folgenden Abschnitten wollen wir diejenigen Gesetze der Wurzelrechnung untersuchen, die sich ergeben, wenn die Rechenarten der 3. Stufe auf Wurzeln angewendet werden. Wir wenden uns zuerst dem Potenzieren von Wurzeln zu. Zunächst beginnen wir wieder mit einem Beispiel.

Beispiel:

$$(\sqrt{2})^6.$$

Nach der Definition des Potenzbegriffes bedeutet das:

$$(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Wir multiplizieren diese Wurfelfaktoren nach dem I. Wurzelgesetz und erhalten:

$$(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8.$$

Für den allgemeinen Fall

$$(\sqrt[n]{a})^m$$

läßt sich folgende Formel ableiten:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^m &= \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ Faktoren } \sqrt[n]{a}} \\ &= \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ Faktoren } a}} = \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

$$(III) \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Wir sprechen dieses Gesetz in folgendem Satz aus:

Eine Wurzel wird potenziert, indem man ihren Radikanden potenziert und die entstandene Potenz mit dem Wurzelexponenten radiziert.

Dazu noch einige Beispiele:

$$1) (\sqrt[4]{7})^4 = \sqrt[4]{7^4} = 7^1 = 7$$

$$2) (\sqrt[3]{3})^9 = \sqrt[3]{3^9} = 3^3 = 27.$$

Auch für das III. Wurzelgesetz haben wir eine Umkehrung:

$$(IIIa) \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Das heißt in Worten:

Eine Potenz wird radiziert, indem man ihre Basis radiziert und die entstandene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziert.

Einige Beispiele sollen Ihnen das näher erläutern:

$$1) \sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{3^{4 \cdot 2}} = \sqrt[4]{(3^4)^2} = (\sqrt[4]{3^4})^2 = 3^2 = 9$$

$$2) \sqrt[3]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^{3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{(x^3)^4} = (\sqrt[3]{x^3})^4 = x^4$$

$$3) \sqrt[r]{a^{r \cdot s}} = \sqrt[r]{(a^r)^s} = (\sqrt[r]{a^r})^s = a^s.$$

6.26 Radizieren von Wurzeln

Als letztes Wurzelgesetz behandeln wir das Radizieren von Wurzeln. Es soll

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

berechnet werden.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = r.$$

Wir potenzieren die Gleichung mit dem Exponenten m und erhalten

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = r^m.$$

Da sich Potenzieren und Radizieren mit dem gleichen Exponenten aufhebt, ergibt sich:

$$\sqrt[n]{a} = r^m.$$

Jetzt potenzieren wir diese Gleichung mit dem Exponenten n :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (r^m)^n = r^{m \cdot n}$$

$$a = r^{m \cdot n}.$$

oder

Radizieren wir diese Gleichung noch mit dem Exponenten $m \cdot n$, so ergibt sich schließlich:

$$\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{r^{m \cdot n}} = r.$$

Da wir

$$r = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

gesetzt hatten, können wir weiterhin schreiben:

$$\sqrt[m \cdot n]{a} = r = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

oder auch

$$(IV) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Fassen wir dieses Ergebnis in Worte:

Eine Wurzel wird radiziert, indem man den Radikanden mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert.

Für mehrfaches Radizieren von Wurzeln gilt eine entsprechende Formel, die Sie sich selbst ableiten mögen. Sie lautet

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\dots \sqrt[w]{a}}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot p \cdot \dots \cdot w]{a}.$$

Es seien noch einige Beispiele dazu angeführt:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$2) \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{15}}} = \sqrt[5 \cdot 3]{x^{15}} = \sqrt[15]{x^{15}} = x.$$

Auch das IV. Wurzelgesetz besitzt eine Umkehrung:

$$(IV a) \quad \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Mit Hilfe des IV. Wurzelgesetzes läßt sich eine Formel für die Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Radikanden aufstellen. Es soll berechnet werden:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}.$$

Wie bekannt, kann man eine Größe mit dem gleichen Exponenten potenzieren und radizieren, ohne ihren Wert zu ändern. Die Wurzel $\sqrt[m]{a}$ wird mit n und die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ mit m potenziert und darauf radiziert. Es ergibt sich:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^n} \cdot \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

Nach dem III. Wurzelgesetz verändern wir die Radikanden der rechten Seite obiger Gleichung:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} \cdot \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Auf der rechten Seite wenden wir das IV. Wurzelgesetz an und erhalten:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n} \cdot \sqrt[m \cdot n]{a^m}.$$

Da es sich rechts um Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten handelt, formen wir obigen Ausdruck nach dem I. Wurzelgesetz um:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot a^m}$$

oder

$$(V) \quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n+m}}.$$

Das bedeutet:

Wurzeln mit gleichen Radikanden werden multipliziert, indem man den gemeinsamen Radikanden mit der Summe der Wurzelexponenten potenziert und mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert.

Für die Division von Wurzeln mit gleichen Radikanden gilt entsprechend

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^n}}{\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}} = \frac{m \cdot n \sqrt[n]{a^n}}{m \cdot n \sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{n-m}}.$$

$$(VI) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{n-m}}$$

In Worten heißt das:

Man dividiert Wurzeln mit gleichen Radikanden, indem man den gemeinsamen Radikanden mit der Differenz der Wurzelexponenten potenziert und mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert.

Auch zum V. und VI. Wurzelgesetz rechnen wir einige Beispiele:

$$1) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[3 \cdot 5]{a^{5+3}} = \sqrt[15]{a^8}$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[6]{m}} = \sqrt[18]{m^3} = \sqrt[6]{m}$$

$$3) \frac{\sqrt[9]{d}}{\sqrt[12]{d}} = \sqrt[108]{d^8} = \sqrt[36]{d}.$$

6.27 Zusammenfassung

In den letzten Abschnitten sind die Wurzelgesetze ausführlich dargestellt worden. Wir fassen sie nochmals zusammen:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \\ (II) \quad & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\ (III) \quad & \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \\ (IV) \quad & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \\ (V) \quad & \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}} \\ (VI) \quad & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}. \end{aligned}$$

Wie wir schon sagten, ist es nicht unbedingt notwendig, sich die Wurzelgesetze in obiger Form zu merken. Diese Wurzelgesetze können nämlich auf die Potenzgesetze zurückgeführt werden. Allerdings ist es empfehlenswert, sich das I. Wurzelgesetz genau einzuprägen, da es für das oft notwendige partielle Radizieren gebraucht wird.

6.3 Zurückführung der Wurzeln auf Potenzen

6.31 Die Definition der Bruchpotenzen

Der Begriff der Potenz war bisher nur für positive und negative ganze Exponenten erklärt. Wir erklären ihn jetzt auch für gebrochene Exponenten.

Wir definieren:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

und nennen $a^{\frac{m}{n}}$ eine Bruchpotenz.

Der Gedanke dieser Schreibweise entsteht dadurch, daß man einerseits weiß, daß

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a^m})^n &= \sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = (\sqrt[n]{a^n})^m \\ &= a^m \end{aligned}$$

ist, und andererseits nach der Potenzrechnung

$$(\sqrt[n]{a^m})^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$$

gilt, da auch die neu definierten Potenzen mit gebrochenen Exponenten den 3 Potenzgesetzen gehorchen, was wir jedoch jetzt erst noch zu beweisen haben.

Nach unserer Definition können wir also für

- 1) $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$
- 2) $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$
- 3) $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$
- 4) $\sqrt[3]{x-y} = (x-y)^{\frac{1}{3}}$

schreiben.

Umgekehrt kann man selbstverständlich auch Bruchpotenzen in Wurzeln umschreiben:

- 1) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
- 2) $c^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{c^2}$
- 3) $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- 4) $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

6.32 Berechnung von Wurzelaufgaben mit Hilfe des I. Potenzgesetzes

Im folgenden Abschnitt wollen wir Wurzelaufgaben mit Hilfe des I. Potenzgesetzes lösen. Wir wissen bereits aus Abschnitt 6.31, daß wir Wurzeln in Form von Bruchpotenzen schreiben können:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Auf die so entstandenen Bruchpotenzen wenden wir dann das I. Potenzgesetz an, da es auch für gebrochene Exponenten gültig ist:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

Dies wollen wir im folgenden beweisen.

Wir schreiben die Bruchpotenzen in Wurzeln um und erhalten

$$\begin{aligned} a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} \\ &= \sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^s} \cdot \sqrt[q]{(\sqrt[s]{a^r})^s} \\ &= \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{ps}}} \cdot \sqrt[q]{\sqrt[s]{a^{rq}}} \\ &= \sqrt[sq]{a^{ps}} \cdot \sqrt[sq]{a^{rq}} \\ &= \sqrt[sq]{a^{ps} \cdot a^{rq}} \\ &= \sqrt[sq]{a^{ps + rq}}. \end{aligned}$$

(p, q, r und s sind ganzzahlig.)

Schreiben wir die zuletzt erhaltene Wurzel wieder als Bruchpotenz, so ergibt sich

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps + rq}{qs}}$$

und

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}}.$$

Damit ist gezeigt, daß auch Bruchpotenzen mit gleicher Basis multipliziert werden, indem man ihre gemeinsame Basis mit der Summe der (diesmal) gebrochenen Exponenten potenziert.

Es sei noch bemerkt, daß wir die Ergebnisse unserer Rechnungen stets wieder aus der Potenzform in die Wurzelform umschreiben.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a \\
 2) \quad & \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = b^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{b^5} \\
 3) \quad & \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[12]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{12}}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x} \\
 4) \quad & \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^7} = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{7}{5}} = a^{\frac{43}{20}} = a^{\frac{40}{20} + \frac{3}{20}} \\
 & = a^{\frac{40}{20}} \cdot a^{\frac{3}{20}} \\
 & = a^2 \cdot \sqrt[20]{a^3}.
 \end{aligned}$$

Wir hätten diese Aufgaben auch unter Benutzung der Wurzelgesetze rechnen können. Daß die Ergebnisse dieselben sind, wollen wir noch zeigen.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a \\
 2) \quad & \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3 \cdot 2]{b^{3+2}} = \sqrt[6]{b^5} \\
 3) \quad & \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[12]{x}} = \frac{3 \cdot 12}{12} \sqrt[12]{x^{12-3}} = \sqrt[36]{x^9} \\
 & = \sqrt[4 \cdot 9]{x^9} = \sqrt[4]{\sqrt[9]{x^9}} = \sqrt[4]{x} . \\
 4) \quad & \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^7} = \sqrt[5]{(\sqrt[4]{a^3})^5} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt[5]{a^7})^4} \\
 & = \sqrt[20]{a^{15}} \cdot \sqrt[20]{a^{28}} = \sqrt[20]{a^{28+15}} \\
 & = \sqrt[20]{a^{43}} = \sqrt[20]{a^{40} \cdot a^3} \\
 & = \sqrt[20]{a^{40}} \cdot \sqrt[20]{a^3} \\
 & = a^2 \cdot \sqrt[20]{a^3}
 \end{aligned}$$

Es sind die Zwischenrechnungen weggelassen worden.

Sie haben gesehen, daß der Rechenweg durch Anwendung der Bruchpotenzen in den meisten Fällen vereinfacht und verkürzt wird. Daher wird man in Zukunft meist diesen Weg gehen.

6.33 Berechnung von Wurzelangaben mit Hilfe des III. Potenzgesetzes

Ebenso wie das I. gilt auch das III. Potenzgesetz für gebrochene Exponenten, d. h. es ist:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} .$$

Auch dies wollen wir wieder beweisen.

Zunächst schreiben wir die Bruchpotenzen gemäß der Definition als Wurzeln:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p}.$$

Bei Anwendung des I. Wurzelgesetzes auf der rechten Seite erhalten wir:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p}.$$

Wir können auf den Radikanden das III. Potenzgesetz anwenden, da ja p und q ganze Zahlen sind:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p}.$$

Weiterhin ergibt sich hieraus bei Beachtung der Definition der Bruchpotenzen:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß man auch Potenzen, die einen gleichen gebrochenen Exponenten haben, multipliziert, indem man das Produkt ihrer Basen mit dem gemeinsamen gebrochenen Exponenten potenziert. Daher können wir es ebenfalls zur Berechnung von Wurzelaufgaben verwenden.

Beispiele:

- 1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a \cdot b}$
- 2) $\sqrt[7]{x^2} \cdot \sqrt[7]{y^2} = x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{2}{7}} = (x \cdot y)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(x \cdot y)^2}$
- 3) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{\frac{2}{5}}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot y^{-\frac{2}{5}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot (y^{-1})^{\frac{2}{5}}$
 $= (x \cdot y^{-1})^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(x \cdot y^{-1})^2} = \sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$
- 4) $\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt{n} = m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{2}{6}} \cdot n^{\frac{3}{6}} = (m^2)^{\frac{1}{6}} \cdot (n^3)^{\frac{1}{6}}$
 $= (m^2 n^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{m^2 n^3}$
- 5) $\frac{\sqrt[5]{q}}{\sqrt[10]{p}} = \frac{q^{\frac{1}{5}}}{p^{\frac{1}{10}}} = \frac{q^{\frac{2}{10}}}{p^{\frac{1}{10}}} = q^{\frac{2}{10}} \cdot p^{-\frac{1}{10}}$
 $= (q^2)^{\frac{1}{10}} \cdot (p^{-1})^{\frac{1}{10}} = (q^2 \cdot p^{-1})^{\frac{1}{10}}$
 $= \sqrt[10]{q^2 p^{-1}} = \sqrt[10]{\frac{q^2}{p}}.$

Wir erhalten diese Ergebnisse auch unter Anwendung der Wurzelgesetze. Das wollen wir im folgenden zeigen:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \\
 2) \quad & \sqrt[7]{x^2} \cdot \sqrt[7]{y^2} = \sqrt[7]{x^2 y^2} = \sqrt[7]{(x \cdot y)^2} \\
 3) \quad & \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \sqrt[5]{\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\
 4) \quad & \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{\sqrt[3]{m}^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{n}^3} \\
 & = \sqrt{\sqrt[3]{m^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{n^3}} \\
 & = \sqrt[6]{m^2} \cdot \sqrt[6]{n^3} = \sqrt[6]{m^2 n^3} \\
 5) \quad & \frac{\sqrt[5]{q}}{\sqrt[10]{p}} = \frac{\sqrt[2]{\sqrt[5]{q}^2}}{\sqrt[10]{p}} = \frac{\sqrt[2]{\sqrt[5]{q^2}}}{\sqrt[10]{p}} \\
 & = \frac{\sqrt[10]{q^2}}{\sqrt[10]{p}} = \sqrt[10]{\frac{q^2}{p}}.
 \end{aligned}$$

6.34 Berechnung von Wurzelaufgaben mit Hilfe des V. Potenzgesetzes

Auch das V. Potenzgesetz ist für gebrochene Exponenten gültig:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}$$

Um das zu beweisen, wenden wir die Definition der Bruchpotenz zweimal an und erhalten

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$$

Für den Radikanden der s -ten Wurzel können wir nach dem III. Wurzelgesetz auch $\sqrt[q]{a^{pr}}$ schreiben. Es gilt also:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}}.$$

Nach dem IV. Wurzelgesetz gilt weiter:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{pr}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung schreiben wir als Bruchpotenz um und erhalten:

$$\left(a^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}$$

Sie sehen also, daß Potenzen mit gebrochenen Exponenten ebenso potenziert werden wie solche mit ganzzahligen Exponenten, nämlich durch Potenzierung der Basis mit dem Produkt der Exponenten.

Wir können somit auch das V. Potenzgesetz zur Berechnung von Wurzel-aufgaben verwenden.

Beispiele: 1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^{12}}} = \sqrt[3]{b^{\frac{12}{4}}} = \left(b^{\frac{12}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{12}{12}} = b$

2) $\sqrt[4]{\sqrt[7]{x^2}} = \sqrt[4]{x^{\frac{2}{7}}} = \left(x^{\frac{2}{7}} \right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{2}{28}} = x^{\frac{1}{14}}$
 $= \sqrt[14]{x}$

3) $\sqrt[m]{a \sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{a \cdot b^{\frac{1}{n}}} = \left(a \cdot b^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}}$
 $= \left(a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}} = \left((a^n b)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}}$
 $= (a^n b)^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^n b}.$

Die gleichen Ergebnisse erhalten wir natürlich, wenn nur die Wurzel-gesetze benutzt werden:

1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^{12}}} = \sqrt[3 \cdot 4]{b^{12}} = \sqrt[12]{b^{12}} = b$

2) $\sqrt[4]{\sqrt[7]{x^2}} = \sqrt[4 \cdot 7]{x^2} = \sqrt[28]{x^2} = \sqrt[14 \cdot 2]{x^2}$
 $= \sqrt[14]{\sqrt[2]{x^2}} = \sqrt[14]{x}$

3) $\sqrt[m]{a \sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}} = \sqrt[m \cdot n]{a^n b}.$

6.35 Zusammenfassung

In den vorangegangenen 3 Abschnitten haben wir die 3 uns bekannten Potenzgesetze weiter verallgemeinert, indem wir ihre Gültigkeit auch für gebrochene Exponenten feststellten. Wir können daher unsere bisherigen Kenntnisse folgendermaßen zusammenfassen:

Die Gesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

gelten für positive und negative, ganze und gebrochene, d. h. für rationale Exponenten m und n .

An den gerechneten Beispielen war zu erkennen, daß obige Potenzgesetze auch zur Behandlung von Wurzelaufgaben ausreichen, so daß eine Kenntnis der weiter vorn abgeleiteten Wurzelgesetze dazu nicht unbedingt erforderlich ist. Das bedeutet aber eine Vereinfachung der Rechentechnik, da Potenz- und Wurzelprobleme mit Hilfe der gleichen Formeln gelöst werden können.

Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, daß das I. Wurzelgesetz

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

in manchen Fällen noch schneller zur Lösung einer Aufgabe führt als die Anwendung von Potenzgesetzen.

6.4 Weitere Aufgaben zur Wurzelrechnung

Bei der Berechnung dieser Aufgaben ist in den meisten Fällen von der Bruchpotenzschreibweise Gebrauch gemacht worden. Nur in den Fällen, wo das I. Wurzelgesetz in der ursprünglichen Form eine Abkürzung und Vereinfachung der Rechnung bietet, ist von der Bruchpotenzschreibweise abgewichen worden.

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[3]{216 u^3 v^2} &= (216 u^3 v^2)^{\frac{1}{3}} = (6^3 u^3 v^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= 6^{\frac{3}{3}} u^{\frac{3}{3}} v^{\frac{2}{3}} = 6^1 u^1 v^{\frac{2}{3}} = 6 u \sqrt[3]{v^2} \end{aligned}$$

$$2) \sqrt{p^{4x-2y}} = (p^{4x-2y})^{\frac{1}{2}} = p^{(4x-2y) \cdot \frac{1}{2}} = p^{2x-y}$$

$$\begin{aligned} 3) 3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 4\sqrt{a} - 5\sqrt{b} + 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \\ = (3 - 4 + 2)\sqrt{a} + (2 - 5 + 3)\sqrt{b} \\ = \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$4) \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{225} = 15$$

$$5) \frac{\sqrt{a^3 x} \cdot \sqrt{a^2 x^3}}{\sqrt{a x} \cdot \sqrt{a^4 x^3}} = \sqrt{\frac{a^3 \cdot x \cdot a^2 \cdot x^3}{a \cdot x \cdot a^4 \cdot x^3}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{aligned} 6) \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2} &= a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{15+8}{20}} = a^{\frac{23}{20}} = a^{\frac{20}{20}} \cdot a^{\frac{3}{20}} \\ &= a^{\frac{20}{20}} \cdot a^{\frac{3}{20}} = a \sqrt[20]{a^3} \end{aligned}$$

$$7) \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{81^{\frac{1}{2}}} = \left(81^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$$

$$\begin{aligned} 8) \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^{\frac{4}{3}}}} \\ &= \sqrt[3]{3 \cdot (3^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{13}{9}}} = (3^{\frac{13}{9}})^{\frac{1}{3}} \\ &= 3^{\frac{13}{27}} = \sqrt[27]{3^{13}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[6]{m}} &= \frac{m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{6}}} = m^{\frac{1}{3}} \cdot m^{-\frac{1}{6}} = m^{\frac{2}{6}} \cdot m^{-\frac{1}{6}} \\ &= m^{\frac{2}{6} + (-\frac{1}{6})} = m^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{15}} &= \frac{3\sqrt{3}\sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{3 \cdot 15}}{\sqrt{15 \cdot 15}} = \frac{3 \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{15^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{45}}{15} = \frac{3\sqrt{5 \cdot 9}}{15} = \frac{3\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}}{15} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}}{15} = \frac{3}{5} \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) \frac{1}{1 + \sqrt{2}} &= \frac{1 \cdot (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = -(1 - \sqrt{2}) \\ &= -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b} . \end{aligned}$$

Ü 6 Übungsaufgaben zur Wurzelrechnung

- 1) $\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$
- 2) $\sqrt[12]{a^4 b^8}$
- 3) $(a \sqrt{b})^2$
- 4) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$
- 5) $3\sqrt{p} + 5\sqrt{q} + 6\sqrt{4q} - 7\sqrt{p} - 3\sqrt{q} + 8\sqrt{9p}$
- 6) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
- 7) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$
- 8) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{x}$
- 9) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}$
- 10) $\sqrt[4]{\frac{a}{a}}$
- 11) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$
- 12) $\frac{6}{2 + \sqrt{2}}$
- 13) $\frac{1}{2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}}$
- 14) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

L 6 Lösungen zu Ü 6

- | | |
|------------------------------|--|
| 1) $-\frac{5}{2}$ | 9) $a \sqrt[12]{a^5}$ |
| 2) $\sqrt[3]{ab^2}$ | 10) $\sqrt[4]{a^3}$ |
| 3) $a^2 b$ | 11) $\sqrt[8]{2^7}$ |
| 4) $x - 2$ | 12) $3(2 - \sqrt{2})$ |
| 5) $20\sqrt{p} + 14\sqrt{q}$ | 13) $\frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{17}$ |
| 6) 6 | 14) $2 - \sqrt{3}$ |
| 7) $2\sqrt{6}$ | |
| 8) $a \sqrt[3]{x}$ | |

7. Logarithmenrechnung

7.1 Der Logarithmus

Im Kapitel über Wurzeln war schon gesagt worden, daß die Potenzrechnung eine 2. Umkehrung hat. Kehren wir zunächst zum Ausdruck $a^n = b$ zurück. Wenn darin a und n bekannte Zahlen sind und b gesucht wird, handelt es sich um die Aufgabe der Potenzrechnung:

$$b = a^n.$$

Sind dagegen b und n bekannt und wird a gesucht, so liegt die Aufgabe der Wurzelrechnung vor:

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

Diese beiden Fälle haben wir bereits behandelt.

Kommen wir nun zu dem im Abschnitt 6.11 angedeuteten Fall. Dabei sollten a und b bekannt sein und n gesucht werden.

Wir hatten uns das am Beispiel $2^n = 8$ klargemacht. Die Bestimmung des Exponenten n und die Behandlung des damit in Verbindung stehenden Sachverhalts wird jetzt unsere Aufgabe sein.

Im allgemeinen Fall haben wir jetzt den Ausdruck $a^n = b$ nach n aufzulösen. Wir schreiben dafür:

$$n = {}^a\log b.$$

Man liest dies: n ist der *Logarithmus*¹ von b zur Basis a .

Wir haben also unter n eine Zahl zu verstehen, die angibt, wie oft man a mit sich selbst multiplizieren muß, um b zu erhalten. b nennt man *Logarithmandus* (die zu logarithmierende Zahl) oder *Numerus*; a ist die *Basis* des Logarithmus n . Diese Basis a soll stets eine reelle Zahl sein, die größer als Null und nicht gleich 1 ist.

Betrachten wir wieder unser Beispiel $2^n = 8$.

Dafür können wir auch schreiben:

$$n = {}^2\log 8.$$

Man sieht sofort, daß $n = 3$ sein muß, weil $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist. Zur Vertiefung obigen Sachverhalts rechnen wir noch einige Beispiele:

$$\begin{array}{ll} 3^n = 27 & n = {}^3\log 27 = 3 \\ 8^n = 512 & n = {}^8\log 512 = 3 \\ 2^n = 32 & n = {}^2\log 32 = 5. \end{array}$$

¹ Logarithmus (griech.) = der Exponent, die Hochzahl.

Betrachten wir außerdem einige Spezialfälle:

- 1) ${}^a\log 1 = 0$, denn $a^0 = 1$.

Der Logarithmus von 1 ist bei jeder Basis gleich 0.

- 2) ${}^a\log a = 1$, denn $a^1 = a$.

Der Logarithmus der Basis ist stets gleich 1.

- 3) ${}^a\log 0 = ?$

Dieser Logarithmus ist nicht erklärt, denn keine Potenz von a liefert den Wert 0.

Es sei noch festgestellt, daß Logarithmen negativer Zahlen im reellen Zahlenbereich nicht existieren. Darauf kommen wir aber später zurück.

7.2 Die Logarithmengesetze

Im folgenden Abschnitt wollen wir die Gesetze ableiten, die wir zur Ausführung von logarithmischen Rechnungen brauchen werden. Diese Gesetze, denen die Logarithmen gehorchen, verhelfen uns dazu, schneller und müheloser zu rechnen, und ermöglichen manche Rechnungen überhaupt erst (wie z. B. das Wurzelziehen mit hohem Wurzelexponenten), die ohne Logarithmen nahezu unlösbar wären.

7.21 Der Logarithmus eines Produktes

Wir wollen zunächst das Produkt der beiden Zahlen u und v betrachten. Zu diesem Zweck setzen wir

$$u = a^p$$

und

$$v = a^q,$$

wobei a die Basis ist, die wir für unsere logarithmischen Rechnungen verwenden wollen.

Wie Sie schon an obigen Darstellungen für u und v sehen, fassen wir jede Zahl als eine gewisse Potenz unserer Basis auf.

Wir schreiben die Ausdrücke $u = a^p$ und $v = a^q$ in die logarithmische Form um:

$$\begin{aligned} p &= {}^a\log u \\ q &= {}^a\log v. \end{aligned}$$

Nun bilden wir das Produkt

$$u \cdot v = a^p \cdot a^q.$$

Nach dem I. Potenzgesetz können wir hierfür schreiben¹:

$$u \cdot v = a^{p+q}.$$

Auch diese Gleichung wandeln wir in die logarithmische Form um:

$${}^a\log(u \cdot v) = p + q.$$

Setzen wir für p und q wieder die Werte

$$p = {}^a\log u$$

und

$$q = {}^a\log v$$

ein, so ergibt sich das I. Logarithmengesetz:

$$(I) \quad \boxed{{}^a\log(u \cdot v) = {}^a\log u + {}^a\log v}.$$

In Worten drücken wir dies folgendermaßen aus:

Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

Für das Produkt von mehr als zwei Faktoren gilt analog:

$${}^a\log(u \cdot v \cdot \dots \cdot z) = {}^a\log u + {}^a\log v + \dots + {}^a\log z.$$

An diesem Gesetz erkennen Sie bereits die Vorteile, die das Rechnen mit Logarithmen bietet. Wenn nämlich 2 Zahlen zu multiplizieren sind, so braucht man nicht die Zahlen selbst zu multiplizieren, sondern man addiert nur ihre Logarithmen. Dadurch vereinfacht sich natürlich der Rechengang, weil durch logarithmische Rechnung die Multiplikation auf eine Addition zurückgeführt wird.

Voraussetzung dafür ist aber, daß die Logarithmen in Tafeln vorhanden sind. Hierauf werden wir später eingehen.

7.22 Der Logarithmus eines Quotienten

In diesem Abschnitt betrachten wir die Berechnung des Quotienten aus den Zahlen u und v . Wir setzen wieder

$$u = a^p$$

und

$$v = a^q.$$

Natürlich ist dann wieder wie im vorigen Abschnitt

$$p = {}^a\log u$$

¹ Es sei schon an dieser Stelle bemerkt, daß die Logarithmen zum größten Teil irrationale Zahlen sind. Für irrationale Zahlen sind die Potenzgesetze auch gültig. Dies können wir aber hier nicht zeigen, da Ihnen dazu die mathematischen Voraussetzungen noch fehlen.

und

$$q = {}^a\log v.$$

Wir bilden jetzt den Quotienten $\frac{u}{v}$ und erhalten:

$$\frac{u}{v} = \frac{a^p}{a^q}$$

oder

$$\frac{u}{v} = a^{p-q}.$$

Auch diesen Ausdruck logarithmieren wir und erhalten:

$${}^a\log\left(\frac{u}{v}\right) = p - q.$$

Wir setzen wieder für p und q die Werte

$$p = {}^a\log u$$

und

$$q = {}^a\log v$$

ein und erhalten das II. Logarithmengesetz

$$(II) \quad \boxed{{}^a\log\left(\frac{u}{v}\right) = {}^a\log u - {}^a\log v}.$$

In Worten bedeutet das:

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor.

Das II. Logarithmengesetz vereinfacht Rechnungen dadurch, daß es eine Divisionsaufgabe auf eine Subtraktionsaufgabe zurückführt. Es sind also nicht unmittelbar die Zahlen zu dividieren, sondern ihre Logarithmen zu subtrahieren.

7.23 Der Logarithmus einer Potenz

In diesem Abschnitt wollen wir ein Gesetz ableiten, das uns gestattet, Potenzierungen logarithmisch auszuführen. Es soll die Potenz u^n berechnet werden.

Wir setzen wieder $u = a^p$ und erhalten:

$$u^n = (a^p)^n.$$

Nach dem III. Potenzgesetz ergibt sich dafür:

$$u^n = a^{p \cdot n}.$$

Logarithmieren wir das, so erhalten wir:

$${}^a\log(u^n) = {}^a\log(a^{p \cdot n}).$$

Nach der Definition des Logarithmus ist

$${}^a\log(a^{p \cdot n}) = p \cdot n$$

und deshalb

$${}^a\log(u^n) = p \cdot n = n \cdot p.$$

Für p setzen wir wieder ${}^a\log u$ ein und erhalten das III. Logarithmengesetz:

$$(III) \quad \boxed{{}^a\log(u^n) = n \cdot {}^a\log u}.$$

In Worten:

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.

Auch hier sehen Sie, daß sich das Potenzieren auf die nächstniedrigere Rechenart, auf das Multiplizieren zurückführen läßt.

7.24 Der Logarithmus einer Wurzel

In diesem Abschnitt soll das Gesetz abgeleitet werden, welches uns gestatten wird, Wurzeln logarithmisch zu berechnen. Wir wollen $\sqrt[n]{u}$ berechnen. Dazu setzen wir wieder $u = a^p$ bzw. $p = {}^a\log u$.

Aus $\sqrt[n]{u}$ ergibt sich nach Einsetzen von $u = a^p$:

$$\sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{a^p}.$$

Wir wenden die Potenzschreibweise einer Wurzel an und erhalten

$$\sqrt[n]{u} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Wir logarithmieren diese Gleichung:

$${}^a\log\left(\sqrt[n]{u}\right) = {}^a\log\left(a^{\frac{p}{n}}\right).$$

Auf Grund der Definition des Logarithmus erhalten wir:

$${}^a\log\left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{p}{n} = \frac{1}{n} \cdot p.$$

Wir setzen $p = {}^a\log u$ wieder ein und erhalten das IV. Logarithmengesetz:

$$(IV) \quad \boxed{{}^a\log\left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{1}{n} \cdot {}^a\log u}.$$

Man spricht das in Worten wie folgt aus:

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Sie sehen also, daß sich das Radizieren mit Hilfe der Logarithmen auf eine Division zurückführen läßt.

Allgemein werden Sie erkannt haben, daß man die auszuführende Rechenoperation mit Hilfe der Logarithmen auf die Rechenoperation der vorhergehenden Stufe zurückführen kann. Durch Logarithmieren verwandelt sich demnach die Multiplikation in Addition, die Division in Subtraktion, das Potenzieren in Multiplizieren und das Radizieren in Dividieren.

Für die Addition und Subtraktion ist die logarithmische Rechnung nicht anwendbar. Das wollen wir kurz zeigen. Wir wollen die Zahlen u und v addieren. Erinnern wir uns, daß wir $u = a^p$ und $v = a^q$ gesetzt hatten, so können wir weiter schreiben:

$$u + v = a^p + a^q .$$

Wie in den vorigen Abschnitten gehen wir wieder zur logarithmischen Schreibweise über:

$${}^a\log (u + v) = {}^a\log (a^p + a^q) .$$

Im allgemeinen läßt sich die rechte Seite dieses Ausdrucks nicht weiter vereinfachen, da wir im 1. Kapitel festgestellt hatten, daß sich Potenzen nur dann addieren bzw. subtrahieren lassen, wenn sie gleiche Basen und gleiche Exponenten haben. Überlegen Sie sich selbst, was sich in dem Fall $p = q$ ergibt!

7.3 Die Zehnerlogarithmen

7.31 Logarithmensysteme

Zunächst wollen wir erklären, was wir unter einem Logarithmensystem verstehen. Wenn man alle positiven reellen Zahlen als Potenzen ein- und derselben Basis ausdrückt, so bilden die sich dabei ergebenden Exponenten ein Logarithmensystem. Wir haben bisher unsere logarithmischen Rechnungen auf ein Logarithmensystem mit der Basis a bezogen, wobei a eine positive reelle Zahl verschieden von 1 sein mußte. Je nach der Wahl von a ergeben sich verschiedene Logarithmensysteme. In der Praxis sind 2 Logarithmensysteme üblich:

1. Briggsches¹, Dekadisches oder Zehnersystem mit der Basis 10;
2. Napiersches² oder natürliches System mit der Irrationalzahl $e = 2,71828182846 \dots$ ³ als Basis.

¹ Briggs (1556—1630).

² Napier (1550—1617).

³ $e = 2,71828182846 \dots$ Eulersche Zahl; Euler (1707—1783).

Es sei noch bemerkt, daß man für ${}^{10}\log u$ kurz $\lg u$ und für ${}^e\log u$ kurz $\ln u$ (Abkürzung für logarithmus naturalis) schreibt.

Für numerische Rechnungen eignet sich besonders das Zehnersystem gut. Wir wollen es in diesem Abschnitt ausführlich behandeln.

Das natürliche System spielt in der höheren Mathematik und deren Anwendungsgebieten, in Naturwissenschaft und Wirtschaftswissenschaft, eine wichtige Rolle. An dieser Stelle kann aber nicht näher auf das natürliche System eingegangen werden, da wir dazu umfangreichere mathematische Kenntnisse brauchen.

7.32 Die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10

Wie schon angekündigt wurde, werden wir uns jetzt der ausführlichen Betrachtung des Dekadischen Logarithmensystems zuwenden.

Zunächst wollen wir die Zahlen 1 bis 10 als Potenzen der Basis 10 darstellen. Wie wir wissen, ist

$$10^0 = 1$$

oder in logarithmischer Schreibweise:

$$\lg 1 = 0.$$

Außerdem wissen wir, daß

$$10^1 = 10$$

oder

$$\lg 10 = 1$$

ist.

Sie sehen also, daß $\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1$ ist. Auch ohne umfangreiche Beweisführung werden Sie einsehen, daß die Logarithmen der Zahlen 2 bis 9 zwischen den Werten 0 und 1 liegen, da die Zahlen 2 bis 9 zwischen den Zahlen 1 und 10 liegen. Im folgenden geben wir Ihnen eine Tabelle der Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 auf 4 Dezimalstellen an. Die Berechnung dieser Logarithmen können wir hier allerdings nicht durchführen, da Ihnen dazu die nötigen Kenntnisse der höheren Mathematik noch fehlen.

$\lg 1 = 0,0000$	$\lg 6 = 0,7782$
$\lg 2 = 0,3010$	$\lg 7 = 0,8451$
$\lg 3 = 0,4771$	$\lg 8 = 0,9031$
$\lg 4 = 0,6021$	$\lg 9 = 0,9542$
$\lg 5 = 0,6990$	$\lg 10 = 1,0000$

Es gibt noch genauere Tabellen der Briggs'schen Logarithmen, z. B. solche, deren Werte bis auf 5 oder auch 7 Dezimalstellen berechnet sind. Wir wollen uns aber bei unseren Rechnungen mit 4stelligen Tafeln begnügen. An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß die Logarithmen der

meisten Zahlen irrationale Zahlen sind. Das wollen wir für $\lg 2$ als Beispiel zeigen. Der Wert von $\lg 2$ liegt zwischen den Zahlen 0 und 1, d. h.

$$0 < \lg 2 < 1.$$

Daher kann $\lg 2$ keine ganze Zahl sein. Daß $\lg 2$ auch keine rationale Zahl ist, zeigen wir durch indirekte Beweisführung. Wir nehmen zunächst an, daß $\lg 2$ rational sei. Da jede rationale Zahl durch einen gewöhnlichen Bruch darstellbar ist, gilt folgende Beziehung:

$$\lg 2 = \frac{p}{q},$$

wobei p und q ganze, zueinander teilerfremde Zahlen sind. Daraus ergibt sich weiter

$$10^{\frac{p}{q}} = 2,$$

oder, mit q potenziert:

$$10^p = 2^q.$$

Ein Ausdruck dieser Art kann jedoch nicht bestehen, denn 2^q (q ist eine ganze Zahl) ergibt stets Zahlen mit der letzten Ziffer 2, 4, 6 oder 8; dagegen ergibt 10^p (p ist eine ganze Zahl) stets Zahlen mit der letzten Ziffer 0. Die Darstellung $\lg 2 = \frac{p}{q}$ ist also unmöglich; d. h. $\lg 2$ ist keine rationale, sondern eine irrationale Zahl. Dies wollten wir zeigen. Wie Sie wissen, werden bei praktischen Rechnungen Irrationalzahlen durch rationale Näherungswerte ersetzt. Das machen wir natürlich auch bei unseren Logarithmen. Aus diesem Grunde unterscheiden wir auch 4-, 5- bzw. höherstellige Logarithmen.

7.33 Die Logarithmen aller Zahlen, die größer sind als 10

Im folgenden Abschnitt behandeln wir die Logarithmen der Zahlen, die größer als 10 sind. Zunächst betrachten wir die Zahlen, die sich als Zehnerpotenzen mit positiven ganzen Exponenten darstellen lassen:

$$\begin{aligned} 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \\ 10^4 &= 10000 \\ 10^5 &= 100000 \\ 10^6 &= 1000000, \end{aligned}$$

oder in logarithmischer Schreibweise:

$$\begin{aligned}\lg 10 &= 1 \\ \lg 100 &= 2 \\ \lg 1000 &= 3 \\ \lg 10000 &= 4 \\ \lg 100000 &= 5 \\ \lg 1000000 &= 6.\end{aligned}$$

Die Logarithmen der zwischen den einzelnen Zehnerpotenzen liegenden Zahlen können wir mit Hilfe des I. Logarithmengesetzes darstellen. Dies wollen wir an Beispielen zeigen:

$$\begin{aligned}1) \lg 20 &= \lg (2 \cdot 10) = \lg 2 + \lg 10 \\ &= 0,3010 + 1 \\ &= 1,3010 \\ \lg 20 &= 1,3010 \\ \lg 200 &= \lg (2 \cdot 100) = \lg 2 + \lg 100 \\ &= 0,3010 + 2 \\ &= 2,3010 \\ \lg 200 &= 2,3010 \\ \lg 2000 &= \lg (2 \cdot 1000) = \lg 2 + \lg 1000 \\ &= 0,3010 + 3 \\ &= 3,3010 \\ \lg 2000 &= 3,3010 \\ 2) \lg 50 &= \lg (5 \cdot 10) = \lg 5 + \lg 10 \\ &= 0,6990 + 1 \\ &= 1,6990 \\ \lg 50 &= 1,6990 \\ \lg 500 &= \lg (5 \cdot 100) = \lg 5 + \lg 100 \\ &= 0,6990 + 2 \\ &= 2,6990 \\ \lg 500 &= 2,6990 \\ \lg 5000 &= \lg (5 \cdot 1000) = \lg 5 + \lg 1000 \\ &= 0,6990 + 3 \\ &= 3,6990 \\ \lg 5000 &= 3,6990.\end{aligned}$$

Wie Sie an den beiden Beispielgruppen ersehen, unterscheiden sich die auftretenden Logarithmen nur in der Zahl vor dem Komma, während die Ziffernfolge nach dem Komma in jeder der beiden Gruppen dieselbe ist. An den Beispielen sehen Sie, daß für Zahlen, die zwischen 10 und 100 liegen, die vor dem Komma stehende Zahl des Logarithmus den Wert 1, für zwischen 100 und 1000 liegende Zahlen den Wert 2, für zwischen 1000 und 10000 liegende Zahlen den Wert 3, . . . hat. Aus der Tabelle des vorigen Abschnittes erkennen Sie, daß für Zahlen, die

zwischen 1 und 10 liegen, die vor dem Komma stehende Zahl den Wert 0 hat. Wir bezeichnen den vor dem Komma stehenden Teil eines Logarithmus als seine *Kennziffer*, weil sie sich allein aus der Größenordnung der Zahl ergibt. Eigentlich dürfte man nicht von einer Kennziffer, sondern müßte von einer Kennzahl sprechen, weil für Zahlen, die größer sind als 10 Milliarden, die Kennziffer mindestens zweistellig ist. Der Teil des Logarithmus nach dem Komma wird *Mantisse*¹ genannt. Sie hängt nur von der Ziffernfolge einer Zahl ab. Dies schauen wir uns noch an einigen Beispielen an, wobei wir den $\lg 2,017 = 0,3047$ zunächst als gegeben ansehen.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\lg 2,017 &= 0,3047 \\ \lg 20,17 &= \lg (2,017 \cdot 10) \\ &= \lg 2,017 + \lg 10 \\ &= 0,3047 + 1 \\ &= 1,3047 \\ \lg 201,7 &= \lg (2,017 \cdot 100) \\ &= \lg 2,017 + \lg 100 \\ &= 0,3047 + 2 \\ &= 2,3047 \\ \lg 2017 &= \lg (2,017 \cdot 1000) \\ &= \lg 2,017 + \lg 1000 \\ &= 0,3047 + 3 \\ &= 3,3047.\end{aligned}$$

Sie werden auch hier erkannt haben, daß das über Kennziffer und Mantisse Gesagte im vollen Umfang gültig bleibt. Wenn wir also den Logarithmus einer Zahl bestimmen wollen, so müssen wir zuerst aus der Größenordnung der Zahl die Kennziffer ihres Logarithmus finden. Und zwar läßt sich das formal so ausführen, daß man die Anzahl der Stellen vor dem Komma der betrachteten Zahl um 1 vermindert. Die so erhaltene Zahl ist die Kennziffer. Die Mantissen der jeweiligen Zahlen können wir nicht durch Überlegung finden, sondern müssen sie aus einer Tafel, die als Logarithmentafel bezeichnet wird, entnehmen. Der Ausdruck Logarithmentafel ist eigentlich nicht zutreffend, da in diesen Tafeln meist nur die Mantissen, nicht aber die vollständigen Logarithmen enthalten sind.

Zur Vertiefung unserer Kenntnisse rechnen wir ein weiteres Beispiel. Wir bestimmen $\lg 35,26$. Wie aus dem eben Gesagten hervorgeht, legen wir zuerst die Kennziffer des $\lg 35,26$ fest. Zu diesem Zweck zählen wir die Anzahl der Ziffern vor dem Komma und erhalten 2. Zur Bestimmung der Kennziffer müssen wir, wie schon dargelegt, diesen Wert um 1 vermindern. Damit erhalten wir 1 als Kennziffer von $\lg 35,26$. Die Mantisse der Ziffernfolge entnehmen wir einer Logarithmentafel.

¹ Mantisse (lat.) = Zugabe, Anhängsel

Wir finden:

$$5473.$$

Also lautet der gesuchte Logarithmus insgesamt:

$$\lg 35,26 = 1,5473.$$

7.34 Die Logarithmen aller Zahlen, die kleiner sind als 1

In diesem Abschnitt betrachten wir die Logarithmen der Zahlen, die kleiner als 1 sind. Zunächst wollen wir nur die Zahlen behandeln, die sich als Zehnerpotenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten darstellen lassen:

$$\begin{array}{llll} 0,1 & = & \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1} & 0,1 & = 10^{-1} \\ 0,01 & = & \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} & 0,01 & = 10^{-2} \\ 0,001 & = & \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} & 0,001 & = 10^{-3} \\ 0,0001 & = & \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} & 0,0001 & = 10^{-4} \end{array}$$

oder in logarithmischer Schreibweise:

$$\begin{array}{ll} \lg 0,1 & = -1 \\ \lg 0,01 & = -2 \\ \lg 0,001 & = -3 \\ \lg 0,0001 & = -4. \end{array}$$

Auch in diesem Fall können wir wieder mit Hilfe des I. Logarithmengesetzes die Logarithmen aller Zahlen bestimmen, die kleiner als 1 sind.

Als Beispiele wählen wir:

$$\begin{array}{l} 1) \lg 0,2 = \lg (2 \cdot 0,1) = \lg 2 + \lg 0,1 = 0,3010 - 1 \\ \quad \lg 0,02 = \lg (2 \cdot 0,01) = \lg 2 + \lg 0,01 = 0,3010 - 2 \\ \quad \lg 0,002 = \lg (2 \cdot 0,001) = \lg 2 + \lg 0,001 = 0,3010 - 3 \\ 2) \lg 0,5 = \lg (5 \cdot 0,1) = \lg 5 + \lg 0,1 = 0,6990 - 1 \\ \quad \lg 0,05 = \lg (5 \cdot 0,01) = \lg 5 + \lg 0,01 = 0,6990 - 2 \\ \quad \lg 0,005 = \lg (5 \cdot 0,001) = \lg 5 + \lg 0,001 = 0,6990 - 3. \end{array}$$

Sie sehen an diesen Beispielen, daß sich die Logarithmen von Zahlen, die kleiner als 1 sind, auch aus 2 Teilen zusammensetzen, und zwar aus einer negativen Kennziffer und einem positiven echten Dezimalbruch, dessen Ziffern nach dem Komma wieder als Mantisse bezeichnet werden. An den Beispielen sehen Sie weiterhin, daß für Zahlen zwischen 0,1 und 1 die Kennziffer -1 , für Zahlen zwischen 0,01 und 0,1 die Kennziffer -2 , für Zahlen zwischen 0,001 und 0,01 die Kennziffer -3 , . . .

ist. Formal kann man diese Kennziffer so finden, daß man die Anzahl der Nullen hinter dem Komma um 1 vermehrt und diese Anzahl negativ nimmt. Dabei sind natürlich nur die Nullen zu berücksichtigen, die nacheinander bis zur ersten von 0 verschiedenen Ziffer folgen. Die Werte der Logarithmen von Zahlen, die kleiner als 1 sind, könnte man auch als negative Zahlen darstellen. Man könnte zum Beispiel bei $\lg 0,2$ statt $0,3010 - 1$ auch $-0,6990$ oder bei $\lg 0,05$ statt $0,6990 - 2$ auch $-1,3010$ schreiben. Es ist aber üblich, bei Logarithmen, deren Numeri zwischen 0 und 1 liegen, eine Differenz in Form eines positiven echten Dezimalbruches und einer negativen ganzen Zahl stehen zu lassen. Sie werden bald erkennen, daß man mit Werten dieser Form bequem logarithmische Rechnungen ausführen kann.

7.35 Das Aufschlagen der Logarithmen

Jetzt wollen wir noch einige Beispiele zur Bestimmung von Logarithmen behandeln.

- 1) $\lg 471,1 = 2,6731$
- 2) $\lg 36,50 = 1,5623$
- 3) $\lg 0,00172 = 0,2355 - 3$
- 4) $\lg 0,02617 = 0,4178 - 2$
- 5) $\lg 2034,2 = 3,3084$ (Diese Zahl finden wir zunächst nicht in der 4-stelligen Tafel. Daher runden wir ab und suchen 2034!)
- 6) $\lg 78365 = 4,8941$ (aufrunden auf 78370)
- 7) $\lg 0,358627 = 0,5546 - 1$ (abrunden auf 0,3586)
- 8) $\lg 0,000013499 = 0,1303 - 5$ (aufrunden auf 0,0000135).

7.36 Das Aufschlagen der Numeri

In diesem Abschnitt sollen Aufgaben behandelt werden, bei denen wir zu gegebenen Logarithmen die zugehörigen Numeri zu suchen haben. Diese Aufgabenstellung sei zunächst an einem Beispiel klargelegt.

$$\lg x = 2,6021$$

Wir haben den Wert von x zu bestimmen. Der in den Abschnitten 7.31 bis 7.33 gegangene Weg muß jetzt in umgekehrter Reihenfolge beschritten werden, da es sich um die umgekehrte Aufgabenstellung wie dort handelt. Das bedeutet, daß wir zuerst die zur Mantisse 6021 gehörige Ziffernfolge aus der Logarithmentafel bestimmen müssen. Wir finden dafür

$$4000.$$

Die gegebene Kennziffer weist darauf hin, daß es sich bei x um eine 3-stellige Zahl handelt. Daher ist

$$x = 400,0 .$$

Wir wollen noch ein 2. Beispiel erläutern:

$$\lg x = 1,0850 .$$

Auch hier müssen wir zunächst die Mantisse 0850 in der Tafel suchen. Wir finden aber nur die Mantissen 0849 und 0853. Da die Mantisse 0850 näher an 0849 liegt als an 0853, so begnügen wir uns zunächst damit, die zu 0849 gehörige Ziffernfolge zu bestimmen. Wir finden:

$$1216 .$$

Nach Berücksichtigung der gegebenen Kennziffer 1 ergibt sich

$$x = 12,16 .$$

Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das eben angewandte Verfahren zur Bestimmung von Numeri, deren Mantissen nicht unmittelbar in der Tafel enthalten sind, nur ein sehr rohes Näherungsverfahren ist. Im nächsten Abschnitt werden wir ein genaueres Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben behandeln.

Zunächst noch weitere Beispiele für das Aufschlagen der Numeri:

1) $\lg x = 0,2017 - 3$

Wir bestimmen zunächst wieder die zur Mantisse 2017 gehörige Ziffernfolge und finden:

$$1591 .$$

Die Kennziffer — 3 besagt, daß x eine Zahl ist, bei der nach dem Komma noch 2 Nullen folgen. Es ergibt sich also:

$$x = 0,001591 .$$

2) $\lg x = 0,1944 - 2$

Wir suchen die Mantisse 1944 in der Tafel und sehen, daß diese nicht vorhanden ist. Dafür finden wir aber die Mantissen 1942 und 1945. Da 1944 näher an 1945 liegt als an 1942, so begnügen wir uns mit der zur Mantisse 1945 gehörigen Ziffernfolge

$$1565 .$$

Unter Beachtung der Kennziffer — 2 finden wir

$$x = 0,01565 .$$

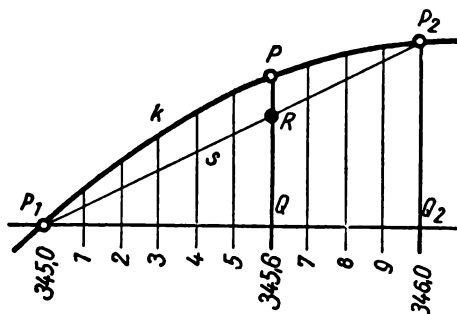
7.37 Das Interpolieren

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns mit der Interpolation beschäftigen. Sie ist bei der gegenwärtig im Handel befindlichen Logarithmentafel von Schülke besonders notwendig, obwohl vom Verfahren der Interpolation auch bei anderen Tafeln Gebrauch gemacht wird.

Wir verwenden für unsere Rechnungen in diesem Abschnitt die Logarithmentafel von Schülke und beginnen sofort mit einem Beispiel.

Beispiel: Wie groß ist $\lg 345,6$?

Von der dreiziffrigen Zahl 345 können Sie den Logarithmus leicht aufschlagen. Er ist 2,5378. Von der nächsten dreiziffrigen Zahl, nämlich 346, entnehmen Sie den Logarithmus 2,5391 aus der Tafel. 345,6 liegt zwischen 345 und 346. Es muß also auch der zu 345,6 gehörende Logarithmus zwischen 2,5378 und 2,5391 liegen. Das Ausrechnen dieses



Interpolation des Wertes $\lg 345,6$

Zwischenwertes nennen wir *interpolieren*¹. P_1 und P_2 in der Abbildung sollen Punkte auf der Kurve k sein, die den wirklichen Werten entspricht. Diese Kurve wird als die logarithmische Kurve bezeichnet. Die geradlinige Verbindung $P_1 P_2$, die Sekante s , weicht um ein Geringes von k ab. Den Abstand der zu P_1 und P_2 gehörenden Ordinaten teilt man nun in 10 gleiche Teile und liest den zu 345,6 gehörenden Wert

auf der Sekante s statt auf der Kurve k ab. Es soll also nur bis zum Punkt R gemessen werden. Der Fehler, den man hierbei begeht, ist sehr klein und kann mit Rücksicht darauf, daß die Logarithmen von 345 und 346 selbst nur Näherungswerte (auf 4 Stellen genau!) sind, ohne weiteres in Kauf genommen werden. Die Tafeldifferenz der Logarithmen zu den Zahlen 345 und 346 beträgt $2,5391 - 2,5378$. Das sind 13 Einheiten der 4. Stelle der Mantisse. Für 345,6 kommen $\frac{6}{10}$ dieser Differenz in Frage, diese machen 7,8, oder abgerundet 8, Einheiten der 4. Mantissenstelle aus. Der $\lg 345,6$ ist also $2,5378 + 0,0008 = 2,5386$.

¹ interpolare (lat.) = einschieben, einschalten.

Weitere Beispiele:

1) Schlagen Sie $\lg 81,38$ auf!

$$\lg 81,3 = 1,9101; \lg 81,4 = 1,9106.$$

Die Tafeldifferenz zwischen diesen beiden Werten ist $0,0005$; $\frac{8}{10}$ dieser Differenz betragen $0,0004$, die zum $\lg 81,3$ zu addieren sind. Also wird $\lg 81,38 = 1,9105$.

2) Welchen Wert hat $\lg 0,5497$?

$$\lg 0,549 = 0,7396 - 1; \lg 0,550 = 0,7404 - 1.$$

Es sind $\frac{7}{10}$ der Tafeldifferenz $0,0008$ zu berechnen; dies sind $0,00056$, abgerundet $0,0006$. Also ist $\lg 0,5497 = 0,7402 - 1$.

Wenn Sie genügend Beispiele dieser Art gerechnet haben, können Sie sich die schriftliche Ausrechnung sparen. Die Interpolationsrechnung wird im Kopf ausgeführt und nur noch das Schlußergebnis aufgeschrieben, z. B. $\lg 1234 = 3,0913$.

Auch das Aufschlagen der Numeri wollen wir mit Hilfe der Interpolation zeigen.

Bei der Aufgabe $\lg x = 1,1833$ ist die Mantisse 1833 nicht in der Tafel vorhanden. In diesem Falle müssen wir die nächstniedrigere in der Tafel verzeichnete Mantisse aufsuchen. Das ist der Wert 1818, zu dem der Numerus mit der Ziffernfolge 152 gehört. Die gesuchte Größe x liegt, weil die Kennziffer 1 ist, zwischen 15,2 und 15,3. Die vierte Ziffer des Numerus wird durch Interpolieren festgestellt. Die Tafeldifferenz zu den Numeri 15,2 und 15,3 beträgt $1847 - 1818 = 29$. Auf 1 Einheit der vierten Stelle des Numerus entfallen also $\frac{29}{10} = 2,9$ Mantisseneinheiten der vierten Stelle. Nach einer einfachen Dreisatzrechnung ermitteln wir nun diejenige Ziffer an der vierten Stelle des Numerus, die zur Mantissendifferenz von $(1833 - 1818 =)$ 15 Einheiten gehört; $15 : 2,9 \approx 5,2$ (abgerundeter Wert ist 5). Die vierte Ziffer lautet also 5, und x hat den Wert 15,25.

Noch ein Beispiel: $\lg x = 0,0500 - 2$; wie groß ist x ?

Die Kennziffer ist -2 ; der Numerus hat also die Form $0,0 \dots$, wenn jede aufzuschreibende Ziffer durch einen Punkt bezeichnet wird. Die Mantisse 0500 liegt zwischen den Mantissen 0492 und 0531, deren Differenz 39 beträgt und die zu Numeruswerten mit den Ziffernfolgen 112 und 113 gehören. Die Differenz zwischen 0500 und 0492 ist 8 Einheiten der vierten Dezimale. Die gesuchte Numerusziffer ergibt sich demnach aus $\frac{8}{3,9}$ als 2. Die Zahl x lautet 0,01122.

Allen Logarithmentafeln sind sogenannte Proportionaltafeln (partes proportionales; abgekürzt P.P.) beigegeben, die entweder auf die ein-

zelen Seiten verteilt oder auf einem besonderen Blatte gesammelt abgedruckt sind. In Schülkes Tafeln finden Sie diese auf dem ausklappbaren Blatt an der vorderen Einbandpappe. Die Tafeln dort enthalten die auf ganze Einer abgerundeten Zehntelteile der Mantissendifferenzen 1, 2, . . . , 99.

Diese Werte sollen Ihnen das Interpolieren der Mantissen und — auch umgekehrt — beim Aufsuchen der Numeri die Feststellung der vierten Ziffer erleichtern.

7.38 Übungsaufgaben

Bei den folgenden Übungsaufgaben wird vom Interpolieren Gebrauch gemacht, soweit es nötig ist.

- | | | |
|-----------------------|------------|---------------------|
| 1) $\lg 3,7445$ | $= 0,5734$ | |
| 2) $\lg 590,2$ | $= 2,7710$ | |
| 3) $\lg 36378$ | $= 4,5609$ | |
| 4) $\lg 0,7138$ | $= 0,8536$ | $- 1$ |
| 5) $\lg 0,0000019487$ | $= 0,2897$ | $- 6$ |
| 6) $\lg 136,35$ | $= 2,1347$ | |
| 7) $\lg 0,02127$ | $= 0,3278$ | $- 2$ |
| 8) $\lg 99,894$ | $= 1,9995$ | |
| 9) $\lg 7,1367$ | $= 0,8535$ | |
| 10) $\lg 216$ | $= 2,3345$ | |
| 11) $\lg x = 0,2950$ | $- 1$ | $x = 0,19725$ |
| 12) $\lg x = 2,8316$ | | $x = 678,6$ |
| 13) $\lg x = 1,9780$ | | $x = 95,06$ |
| 14) $\lg x = 0,3254$ | $- 7$ | $x = 0,00000021155$ |
| 15) $\lg x = 4,8300$ | | $x = 67610$ |
| 16) $\lg x = 3,6021$ | | $x = 4000$ |
| 17) $\lg x = 0,0478$ | $- 1$ | $x = 0,11163$ |
| 18) $\lg x = 2,3618$ | | $x = 230,05$ |
| 19) $\lg x = 0,0602$ | | $x = 1,1488$ |
| 20) $\lg x = 1,7346$ | | $x = 54,28$ |

7.4 Das Rechnen mit Zehnerlogarithmen

7.41 Berechnung von Produkten

Wir wollen in diesem und den folgenden Abschnitten praktische Anwendungsmöglichkeiten der von uns abgeleiteten 4 Logarithmengesetze zeigen.

Zunächst sollen Produkte logarithmisch berechnet werden. Wir verwenden dazu das I. Logarithmengesetz:

$$\lg(u \cdot v) = \lg u + \lg v,$$

bzw. wenn mehr als 2 Faktoren vorhanden sind in der Form:

$$\lg(u \cdot v \cdot \dots \cdot z) = \lg u + \lg v + \dots + \lg z.$$

1. Beispiel:

Das Produkt $6,729 \cdot 36,75 = x$ ist zu berechnen.

Wie wir wissen, sind die Logarithmen der beiden Zahlen zu addieren, um den Logarithmus ihres Produktes zu erhalten.

Das heißt:

$$\lg x = \lg(6,729 \cdot 36,75) = \lg 6,729 + \lg 36,75.$$

Wir entwerfen hierfür ein Rechenschema:

$\lg 6,729$	$0, \dots$	$+$
$\lg 36,75$	$1, \dots$	$+$
$\lg x$		
$x = \dots$		

Hierbei ist zu beachten, daß in das Schema noch vor dem Aufschlagen der Mantissen die zugehörigen Kennziffern eingetragen werden. Hinter dem senkrechten Strich wird vermerkt, welche Rechenoperationen auszuführen sind. Nachdem die Mantissen der Tafel entnommen und in das Rechenschema eingetragen worden sind, ergibt sich folgendes Bild:

$\lg 6,729$	$0,8280$	$+$
$\lg 36,75$	$1,5653$	$+$
$\lg x$	$2,3933$	
$x = 247,35.$		

Das Produkt der beiden Zahlen 6,729 und 36,75 ist also 247,35.

2. Beispiel:

Jetzt wollen wir ein Produkt von 3 Faktoren ausrechnen, bei dem auch Logarithmen mit negativen Kennziffern auftreten; nämlich

$$x = 6,325 \cdot 0,01263 \cdot 66,18.$$

Wir haben also die Logarithmen dieser 3 Zahlen zu addieren:

$$\lg x = \lg 6,325 + \lg 0,01263 + \lg 66,18.$$

Wir benutzen folgendes Rechenschema:

lg 6,325	0,8011	+
lg 0,01263	0,1014 — 2	+
lg 66,18	1,8207	+
lg x	2,7232 — 2	
lg x	0,7232	
$x = 5,287.$		

Das Produkt der drei Zahlen hat also den Wert 5,287.

Wie Sie an dieser Aufgabe sehen, ist der positive und der negative Teil der Logarithmen getrennt zu addieren. Dann ziehen wir beide Teile so zusammen, daß nur noch eine Kennziffer übrigbleibt, die entweder eine positive Zahl, eine negative Zahl oder die Null ist. Beachten Sie dabei das im Abschnitt 7.33 Gesagte!

3. Beispiel:

$$x = 0,9135 \cdot 0,0217 \cdot 0,1368$$

Rechenschema:

lg 0,9135	0,9607 — 1	+
lg 0,0217	0,3365 — 2	+
lg 0,1368	0,1361 — 1	+
lg x	1,4333 — 4	
lg x	0,4333 — 3	
$x = 0,002712.$		

7.42 Berechnung von Quotienten

Jetzt wollen wir uns der logarithmischen Berechnung von Quotienten zuwenden. Wir benutzen das III. Logarithmengesetz:

$$\lg\left(\frac{u}{v}\right) = \lg u - \lg v.$$

1. Beispiel:

Es ist der Quotient $\frac{325}{17}$ zu berechnen.

Nach unserem Gesetz ergibt sich:

$$\lg x = \lg\left(\frac{325}{17}\right) = \lg 325 - \lg 17.$$

Wir entwerfen dafür folgendes Rechenschema:

lg 325	2,5119	+
lg 17	1,2304	—
lg x	1,2815	
$x = 19,12.$		

Der Wert des Quotienten $\frac{325}{17}$ beträgt somit 19,12.

2. Beispiel:

$$x = \frac{6,471}{0,005103}$$

Rechenschema :

lg 6,471	0,8110	+
lg 0,005103	0,7078 — 3	—
lg x	0,1032 + 3	
lg x	3,1032	

$x = 1268,3$.

Dabei ist zu beachten, daß sich die Kennziffer beim Subtrahieren in eine positive Zahl verwandelt. Sie rechnen nämlich :

$$\begin{aligned} & 0,8110 - (0,7078 - 3) \\ &= 0,8110 - 0,7078 + 3 \\ &= 3,1032 \end{aligned}$$

3. Beispiel:

$$x = \frac{0,6865}{0,1297}$$

Rechenschema :

lg 0,6865	0,8366 — 1	+
lg 0,1297	0,1129 — 1	—
lg x	0,7237	

$x = 5,293$.

4. Beispiel:

$$x = \frac{336}{5817}$$

Rechenschema :

lg 336	2 — 2	+
lg 5817	2,5263	—
lg x	3,7647	
	0,7616 — 2	

$x = 0,05776$.

Bei dieser Rechnung müssen wir im Minuenden die Zahl + 2 hinzufügen und nachträglich wieder abziehen, damit die Mantissendifferenz als positiver Wert entsteht.

7.43 Berechnung von Potenzen

Auch Potenzen lassen sich mit Hilfe der Logarithmen sehr leicht berechnen. Dazu benutzen wir das III. Logarithmengesetz:

$$\lg(u^n) = n \cdot \lg u.$$

1. Beispiel:

$$x = 3,756^3$$

Wir wenden unser obiges Gesetz an und erhalten:

$$\lg x = \lg(3,756^3) = 3 \cdot \lg 3,756.$$

Rechenschema:

$\lg 3,756$		$0,5747$		$\cdot 3$
$\lg x$		$1,7241$		
$x = 52,98.$				

Der Potenzwert von $3,756^3$ beträgt 52,98.

2. Beispiel:

$$x = 0,28^4$$

Rechenschema:

$\lg 0,28$		$0,4472 - 1$		$\cdot 4$
$\lg x$		$1,7888 - 4$		
$\lg x$		$0,7888 - 3$		
$x = 0,006149.$				

Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, daß die Multiplikation der negativen Kennziffer (-1) mit dem Exponenten 4 nicht vergessen werden darf. Sie rechnen nämlich so:

$$\begin{aligned} & (0,4472 - 1) \cdot 4 \\ &= 0,4472 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \\ &= 1,7888 - 4 \\ &= 0,7888 - 3. \end{aligned}$$

7.44 Berechnung von Wurzeln

In diesem Abschnitt wenden wir uns der logarithmischen Berechnung von Wurzeln zu. Dabei benutzen wir das IV. Logarithmengesetz:

$$\lg(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot \lg u.$$

1. Beispiel:

$$x = \sqrt[2]{65}$$

Nach dem IV. Logarithmengesetz erhalten wir:

$$\lg x = \lg \left(\sqrt[2]{65} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lg 65.$$

Rechenschema:

$\lg 65$	1,8129	: 2
$\lg x$	0,9065	

$$x = 8,063.$$

Der Wurzelwert von $\sqrt[2]{65}$ beträgt somit 8,063.

2. Beispiel: $x = \sqrt[3]{0,004045}$

Rechenschema:

$\lg 0,004045$	0,6069 — 3	: 3
$\lg x$	0,2023 — 1	

$$x = 0,15933.$$

3. Beispiel: $x = \sqrt[4]{0,1265}$

Es muß also der $\lg 0,1265 = 0,1021 - 1$ durch 4 dividiert werden. Nach unseren bisherigen Erfahrungen würde jetzt eine gebrochene Kennziffer entstehen. Dies widerspricht jedoch unseren Erklärungen, wonach eine Kennziffer ihrem Wesen nach nur eine ganze Zahl sein kann. Wir umgehen diese Schwierigkeit dadurch, daß wir zu der nicht durch 4 ganzzahlig teilbaren Kennziffer -1 die Zahl -3 hinzufügen. Zum Ausgleich dafür müssen wir aber zu 0,1021 die Zahl $+3$ hinzufügen. Es wird dann $-1-3 = -4$; die Zahl 4 ist aber durch 4 ganzzahlig teilbar.

Rechenschema:

$\lg 0,1265$	0,1021 — 1 = 3,1021 — 4	: 4
$\lg x$	0,7755 — 1	

$$x = 0,5964.$$

7.5 Weitere Aufgaben zur Logarithmenrechnung

Im folgenden Abschnitt wollen wir einige schwierigere logarithmische Aufgaben vollständig rechnen und dabei den entsprechenden Lösungsweg erklären.

1)
$$x = \frac{19,38 \cdot 0,7625 \cdot 101,5}{16,38 \cdot 0,007635 \cdot 389,1}$$

Bei dieser Aufgabe führt eine Berechnung der Produkte im Zähler und Nenner und eine anschließende Division dieser Produkte am schnellsten

zur Lösung. Zu diesem Zwecke addieren wir zunächst die Logarithmen der Zähler- und der Nennerfaktoren für sich. Dann subtrahieren wir den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers. Das ergibt folgendes Rechenschema:

lg 19,38	1,2874	+
lg 0,7625	0,8822 —1	+
lg 101,5	2,0065	+
lg Zähler	3,1761	
lg 16,38	1,2143	+
lg 0,007635	0,8828 —3	+
lg 389,1	2,5901	+
lg Nenner	1,6872	
lg Zähler	3,1761	+
lg Nenner	1,6872	—
lg x	1,4889	

$$x = 30,825.$$

Der Wert des Bruches beträgt also 30,825.

$$2) \quad x = \frac{7,34 \cdot \sqrt{43,24}}{9,6 \cdot \sqrt[3]{18,2}}$$

Wir berechnen zunächst wieder den Zähler und den Nenner für sich und dividieren anschließend. Das Logarithmenschema hat dann folgende Form:

lg 43,34	1,6369	: 2
lg $\sqrt{43,34}$	0,8185	+
lg 7,34	0,8657	+
lg Zähler	1,6842	
lg 18,2	1,2601	: 3
lg $\sqrt[3]{18,2}$	0,4200	+
lg 9,6	0,9823	+
lg Nenner	1,4023	
lg Zähler	1,6842	+
lg Nenner	1,4023	—
lg x	0,2819	

$$x = 1,914.$$

Das Ergebnis hat also den Wert 1,914.

3)

$$x = \sqrt{\sqrt{54,2} + \sqrt{16,39}}$$

Zunächst berechnen wir die Werte der Wurzeln logarithmisch. Dann addieren wir diese Wurzelwerte. Es ist dabei zu beachten, daß wir dies nicht, ebenso wie alle Additionen, logarithmisch ausführen können. Aus der Summe der Wurzelwerte haben wir dann noch die Wurzel zu ziehen. Das führen wir selbstverständlich wieder mit Hilfe der Logarithmen durch. Wir benutzen folgendes Rechenschema:

lg 54,2	1,7340	: 2	
lg $\sqrt{54,2}$	0,8670		$\sqrt{54,2} = 7,362$
lg 16,39	1,2146	: 2	
lg $\sqrt{16,39}$	0,6073		$\sqrt{16,39} = 4,049$
lg ($\sqrt{54,2} + \sqrt{16,39}$)	1,0573	: 2	$\sqrt{\sqrt{54,2} + \sqrt{16,39}} = 11,411$
lg x	0,5287		
$x = 3,378.$			

Als Ergebnis für unseren Wurzelausdruck erhalten wir also 3,378.

Ü 7 Übungsaufgaben zur Logarithmenrechnung

1) $948,8 \cdot 0,04388$

2) $\frac{2,377}{0,8753}$

3) $\frac{5,476 \cdot 19,85}{23,61}$

4) $\frac{576 \cdot 0,3895 \cdot 37,81}{983 \cdot 0,07749 \cdot 56,75}$

5) $\left(\frac{7638}{4075}\right)^2$

6) $\sqrt[3]{0,876}$

7) $\sqrt{\frac{73}{41}}$

8) $\sqrt[4]{\frac{197 \cdot 0,84}{873}}$

9) $73,84 \cdot \sqrt{0,09701}$

10) $\frac{\sqrt[3]{7,682}}{0,6576}$

11) $\frac{9807}{2908} \cdot \left(\frac{0,7873}{0,9175}\right)^3$

12) $\frac{3,849 \cdot \sqrt[3]{100}}{0,7308}$

L 7 Lösungen zu Ü 7

1) 41,64

2) 2,715

3) 4,605

4) 1,962

5) 3,514

6) 0,9568

7) 1,334

8) 0,66

9) 23

10) 3,001

11) 2,13

12) 24,45

A 7 Anhang: Umrechnung von Logarithmensystemen

Im Anhang wollen wir noch eine Formel ableiten, die es gestattet, die auf ein bestimmtes System bezogenen Logarithmen umzurechnen in solche, die auf ein zweites System bezogen sind. Zu diesem Zweck setzen wir

$$u = a^p \text{ in dem 1. System}$$

und

$$u = b^q \text{ in dem 2. System.}$$

Andererseits besagen diese beiden Ausdrücke in der logarithmischen Schreibweise folgendes:

$${}^a\log u = p$$

$${}^b\log u = q.$$

Da $a^p = u$ und $b^q = u$ ist, ist auch

$$a^p = b^q.$$

Den letzten Ausdruck logarithmieren wir nach der Basis a :

$${}^a\log (a^p) = {}^a\log (b^q).$$

Nach Anwendung der Definition des Logarithmus auf die linke Seite und des III. Logarithmengesetzes auf die rechte Seite obigen Ausdrucks ergibt sich:

$$p = q \cdot {}^a\log b$$

Setzen wir in diesem Ausdruck wieder

$$p = {}^a\log u$$

bzw.

$$q = {}^b\log u$$

ein, so ergibt sich weiterhin

$${}^a\log u = {}^b\log u \cdot {}^a\log b$$

oder

$$\boxed{{}^a\log u = {}^a\log b \cdot {}^b\log u}.$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch eine Formel zur Umrechnung natürlicher in Zehnerlogarithmen und umgekehrt angeben.

Zu diesem Zweck setzen wir in unserer allgemeinen Formel

$${}^a\log u = {}^a\log b \cdot {}^b\log u$$

für $a = 10$ und für $b = e$. Dann ergibt sich:

$${}^{10}\log u = {}^{10}\log e \cdot {}^e\log u$$

oder nach unseren Abkürzungen auch

$$\lg u = \lg e \cdot \ln u.$$

Wir setzen

$$\lg e = M$$

und nennen M den Modul des Briggsschen Systems, bezogen auf das natürliche System. Wie wir durch Aufschlagen in der Logarithmentafel sofort finden können, hat M den Wert

$$M = 0,4342945 \dots$$

und ist eine irrationale Zahl.

Setzen wir für $\lg e = M$ ein, so lautet unsere Umrechnungsformel

$$\lg u = M \cdot \ln u$$

bzw.

$$\ln u = \frac{1}{M} \cdot \lg u.$$

wobei $\frac{1}{M} = 2,3025851 \dots$ zu setzen ist.

8. Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten

8.1 Der Begriff der Bestimmungsgleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten

Wie bereits im Abschnitt 3.1 erwähnt worden ist, wollen wir uns jetzt mit Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit 2 Unbekannten beschäftigen. An Stelle von Bestimmungsgleichungen werden wir wieder kurz von Gleichungen sprechen.

Wir beginnen am besten wieder mit einem Beispiel.

Beispiel: Es sollen zwei Zahlen gesucht werden, deren Summe 100 und deren Differenz 50 sein soll.

Für die eine Zahl, die zu bestimmen ist, setzen wir x . Für die andere Zahl setzen wir y . Aus unserer obigen Fragestellung ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$(\S) \quad \left| \begin{array}{l} x + y = 100 \\ x - y = 50 \end{array} \right|.$$

Um bei Bestimmungsgleichungen mit mehreren Unbekannten zu zeigen, daß die Gleichungen zusammengehören, stellt man sie zwischen zwei senkrechte Striche.

Kommen wir nun zur Bestimmung der Unbekannten x und y . Zu diesem Zweck lösen wir die beiden Gleichungen nach x auf. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x &= 100 - y \\ x &= 50 + y. \end{aligned}$$

Wir wenden jetzt den folgenden Satz an: *Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.* In unserem Falle sind die Größen $100 - y$ und $50 + y$ der dritten Größe x gleich. Folglich gilt nach dem angeführten Satz:

$$50 + y = 100 - y.$$

Wir haben auf diese Weise eine lineare Bestimmungsgleichung mit einer Unbekannten erhalten. Diese Art von Gleichungen können wir aber bereits lösen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2y &= 50 \\ y &= 25. \end{aligned}$$

Für die Unbekannte y haben wir also den Wert 25 erhalten. Um den Wert der anderen Unbekannten x zu berechnen, setzen wir $y = 25$ in eine der beiden Ausgangsgleichungen (§) ein:

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ x + 25 &= 100 \\ x &= 75. \end{aligned}$$

Die beiden gesuchten Zahlen sind also 25 und 75.

8.2 Lösungsmethoden zur Auflösung von zwei Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Im vorigen Abschnitt haben wir gezeigt, wie man auf lineare Bestimmungsgleichungen mit 2 Unbekannten kommen kann. Auch hatten wir für das Beispiel die Lösung angegeben. Im allgemeinen kennt man 3 einfache Lösungsmethoden:

- 1) Gleichsetzungsmethode
- 2) Einsetzungsmethode
- 3) Additionsmethode.

Auf diese drei angegebenen Lösungsmethoden wollen wir zunächst näher eingehen.

Wir wollen ganz allgemein das folgende lineare inhomogene Gleichungssystem behandeln:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}.$$

Im Gegensatz dazu wäre das Gleichungssystem homogen, wenn c_1 und c_2 Null wären. Hiervon wollen wir aber absehen.

Es kommt nun bei der Anwendung dieser 3 Methoden sehr darauf an, in welcher Form das Gleichungssystem und die Zahlenwerte der Größen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 und c_2 gegeben sind. Grundsätzlich sind alle drei Methoden gleichberechtigt und führen stets zum gleichen Ziel. Allerdings kann der Zeitaufwand für jede Methode verschieden sein. Dies wird sich noch zeigen.

Wir wollen zuerst die *Gleichsetzungsmethode* behandeln. Die Gleichsetzungsmethode war im Prinzip schon bei dem Beispiel des Abschnitts 8.1 gezeigt worden. Sie eignet sich besonders für solche Gleichungssysteme gut, bei denen die beiden Gleichungen bereits nach einer Unbekannten aufgelöst sind oder sich nach ihr gut auflösen lassen. Mit Hilfe der Gleichsetzungsmethode wollen wir noch einige Beispiele rechnen.

1. Beispiel:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 5x - 11 \end{cases}.$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} 5x - 11 &= 2x - 2 \\ 5x - 2x &= -2 + 11 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die erste Gleichung des Gleichungssystems ergibt sich:

$$\begin{aligned}y &= 2x - 2 \\y &= 2 \cdot 3 - 2 \\y &= 6 - 2 \\y &= 4.\end{aligned}$$

Die Richtigkeit der Lösungen prüft man mit Hilfe der Probe nach. Man setzt zu diesem Zweck die errechneten Werte für die Unbekannten, die wir beide zusammen als Lösung des Gleichungssystems bezeichnen wollen, in die Ausgangsgleichungen ein und findet deren Richtigkeit.

1. Gleichung:

$$\begin{aligned}y &= 2x - 2 \\4 &= 2 \cdot 3 - 2 \\4 &= 6 - 2.\end{aligned}$$

2. Gleichung:

$$\begin{aligned}y &= 5x - 11 \\4 &= 5 \cdot 3 - 11 \\4 &= 15 - 11.\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} y = -x + 1 \\ y = -2x - 1 \end{array} \right|$$

Hieraus ergibt sich sofort für x :

$$\begin{aligned}-2x - 1 &= -x + 1 \\-2x + x &= 1 + 1 \\-x &= 2 \\x &= -2.\end{aligned}$$

y ergibt sich aus der 1. Gleichung wie folgt:

$$\begin{aligned}y &= -x + 1 \\y &= -(-2) + 1 \\y &= 2 + 1 \\y &= 3.\end{aligned}$$

Durch die Probe läßt sich die Richtigkeit der Lösung zeigen.

3. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} y = -2x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{array} \right|$$

Analog dem 1. und 2. Beispiel werden x und y berechnet:

$$\begin{aligned}
 -2x - 2 &= -\frac{1}{2}x + 1 \\
 -2x + \frac{1}{2}x &= 1 + 2 \\
 -\frac{3}{2}x &= 3 \\
 x &= -\frac{3 \cdot 2}{3} \\
 x &= -2 \\
 y &= -2x - 2 \\
 y &= -2 \cdot (-2) - 2 \\
 y &= 4 - 2 \\
 y &= 2.
 \end{aligned}$$

Durch die Probe läßt sich auch in diesem Fall die Richtigkeit der Lösung zeigen.

Kommen wir nun zur *Einsetzungsmethode*. Bei dieser Methode löst man eine Gleichung nach einer Unbekannten auf. Dann setzt man den für die eine Unbekannte erhaltenen Wert in die andere Gleichung ein. Man bekommt so wieder eine Gleichung mit einer Unbekannten. Diese Methode wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

1. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} 6x - 5y - 9 = 0 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{array} \right|$$

In diesem Fall ist es zweckmäßig, die 2. Gleichung nach x aufzulösen. Es ergibt sich

$$x = \frac{4}{3}y.$$

Jetzt setzen wir in der 1. Gleichung für x den Wert $\frac{4}{3}y$ ein:

$$6 \cdot \frac{4}{3}y - 5y - 9 = 0.$$

Es ergibt sich, wie bereits gesagt, eine Gleichung mit einer Unbekannten. In unserem Fall ist die Unbekannte y . Diese Gleichung rechnen wir nun nach y aus:

$$\begin{aligned}
 8y - 5y - 9 &= 0 \\
 3y - 9 &= 0 \\
 3y &= 9 \\
 y &= 3.
 \end{aligned}$$

Den Wert $y = 3$ setzen wir in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein.

In unserem Fall ist es zweckmäßig, in die 2. Gleichung einzusetzen:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{4 \cdot 3}{3} \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Die Probe zeigt uns die Richtigkeit der Lösung.

2. *Beispiel:*
$$\left| \begin{array}{l} 4x + y = 40 \\ x - y = 5 \end{array} \right|.$$

Dieses Beispiel soll nach dem Einsetzungsverfahren berechnet werden. Man kann natürlich auch nach dem bereits dargelegten Gleichsetzungsverfahren arbeiten.

Bei Benutzung der Einsetzungsmethode löst man zweckmäßigerweise die 2. Gleichung nach x auf:

$$x = 5 + y.$$

Diesen Wert $5 + y$ setzen wir an Stelle von x in die 1. Gleichung ein und lösen diese nach y auf:

$$\begin{aligned}4x + y &= 40 \\ 4 \cdot (5 + y) + y &= 40 \\ 20 + 4y + y &= 40 \\ 20 + 5y &= 40 \\ 5y &= 40 - 20 \\ 5y &= 20 \\ y &= 4.\end{aligned}$$

Um die zweite Unbekannte zu berechnen, setzen wir $y = 4$ in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein. In unserem Fall ist offenbar die 2. Gleichung dafür am günstigsten:

$$\begin{aligned}x - y &= 5 \\ x - 4 &= 5 \\ x &= 5 + 4 \\ x &= 9.\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall zeigt die Probe die Richtigkeit der Lösung.

3. *Beispiel:*
$$\left| \begin{array}{l} 4x - 9y + 47 = 0 \\ 4x = -3y + 85 \end{array} \right|$$

Bei diesem Gleichungssystem ist es günstig, die 2. Gleichung einfach in

die 1. Gleichung einzusetzen und nach y auszurechnen:

$$\begin{aligned}
 4x - 9y + 47 &= 0 \\
 -3y + 85 - 9y + 47 &= 0 \\
 -12y + 132 &= 0 \\
 -12y &= -132 \\
 y &= \frac{-132}{-12} \\
 y &= 11.
 \end{aligned}$$

Die Unbekannte x rechnen wir aus der 2. Ausgangsgleichung aus, indem wir für y den Wert 11 einsetzen:

$$\begin{aligned}
 4x &= -3y + 85 \\
 4x &= -3 \cdot 11 + 85 \\
 4x &= -33 + 85 \\
 4x &= 52 \\
 x &= 13.
 \end{aligned}$$

Die Probe zeigt wieder die Richtigkeit der Lösung.

Als letzte dieser 3 Methoden wollen wir die *Additionsmethode* behandeln. Diese Methode basiert darauf, daß man zu der einen Gleichung des Systems die andere Gleichung oder das Vielfache der anderen Gleichung des Systems addieren kann, ohne daß dabei die erste Gleichung ihre Richtigkeit verliert. Dabei kann aber eine der Unbekannten herausfallen. Man hätte damit eine Gleichung mit nur einer Unbekannten gewonnen. Diese Gleichung ist dann mit den bekannten Methoden zu lösen. Machen wir uns den Sachverhalt an einem Beispiel klar.

1. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y = 95 \\ 3x - 5y = 25 \end{array} \right|$$

Nach den eben gemachten Ausführungen kann man die 1. Gleichung zur 2. Gleichung addieren, d. h. wir addieren die linke Seite der 2. Gleichung zu der linken Seite der 1. Gleichung und die rechte Seite der 2. Gleichung zur rechten Seite der 1. Gleichung:

$$\begin{aligned}
 3x + 5y + (3x - 5y) &= 95 + 25 \\
 3x + 5y + 3x - 5y &= 120 \\
 6x &= 120.
 \end{aligned}$$

Damit ist, wie bereits erwähnt, eine Gleichung mit einer Unbekannten entstanden. Diese Gleichung kann sehr einfach gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 6x &= 120 \\
 x &= \frac{120}{6} \\
 x &= 20.
 \end{aligned}$$

Um die andere Unbekannte zu berechnen, setzen wir den Wert $x = 20$

wieder in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein und berechnen daraus y :

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 95 \\ 3 \cdot 20 + 5y &= 95 \\ 60 + 5y &= 95 \\ 5y &= 95 - 60 \\ 5y &= 35 \\ y &= 7. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit der Lösung kann wieder durch die Probe nachgewiesen werden. Wir haben die beiden Werte $x = 20$ und $y = 7$ in die beiden Ausgangsgleichungen einzusetzen und die Richtigkeit dieser Gleichungen zu zeigen:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } \quad & 3x + 5y = 95 \\ & 3 \cdot 20 + 5 \cdot 7 = 95 \\ & 60 + 35 = 95 \\ 2. \text{ Gleichung: } \quad & 3x - 5y = 25 \\ & 3 \cdot 20 - 5 \cdot 7 = 25 \\ & 60 - 35 = 25. \end{aligned}$$

Betrachten wir weitere Beispiele!

$$2. \text{ Beispiel: } \quad \left| \begin{array}{l} 5x + 7y = 176 \\ 5x - 3y = 46 \end{array} \right|$$

Würde man einfach die 2. Gleichung zur 1. Gleichung addieren, so würde man die folgende Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned} 5x + 7y + (5x - 3y) &= 176 + 46 \\ 5x + 7y + 5x - 3y &= 176 + 46 \\ 10x + 4y &= 222. \end{aligned}$$

Wie man erkennt, ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten entstanden. Wir wollten aber eine Gleichung mit nur einer Unbekannten haben.

Wir werden zunächst unser Gleichungssystem so verändern, daß durch Addition eine Gleichung mit nur einer Unbekannten entsteht.

Zu diesem Zweck multiplizieren wir die 1. Gleichung mit 3 und die 2. Gleichung mit 7:

$$\left| \begin{array}{l} 5x + 7y = 176 \\ 5x - 3y = 46 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 7 \end{array}$$

$$\text{So ergibt sich: } \left| \begin{array}{l} 15x + 21y = 528 \\ 35x - 21y = 322 \end{array} \right|$$

Addieren wir in dem so veränderten Gleichungssystem die 2. Gleichung zur 1. Gleichung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 15x + 21y + (35x - 21y) &= 528 + 322 \\ 15x + 21y + 35x - 21y &= 850 \\ 50x &= 850. \end{aligned}$$

Auch im 2. Beispiel ist nun eine Gleichung mit einer Unbekannten entstanden. Die Unbekannte x kann daraus leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} 50x &= 850 \\ x &= 17. \end{aligned}$$

Die andere Unbekannte y berechnet man wieder, indem man den Wert 17 für x in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzt. Wir setzen in die 1. Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 5x + 7y &= 176 \\ 5 \cdot 17 + 7y &= 176 \\ 85 + 7y &= 176 \\ 7y &= 176 - 85 \\ 7y &= 91 \\ y &= 13. \end{aligned}$$

Durch die Probe weisen wir wieder die Richtigkeit der Lösung nach:

$$\begin{aligned} \text{1. Gleichung:} \quad 5x + 7y &= 176 \\ 5 \cdot 17 + 7 \cdot 13 &= 176 \\ 85 + 91 &= 176 \\ \text{2. Gleichung:} \quad 5x - 3y &= 46 \\ 5 \cdot 17 - 3 \cdot 13 &= 46 \\ 85 - 39 &= 46. \end{aligned}$$

Man hätte zur Lösung des 2. Beispiels natürlich auch eine andere Methode verwenden können. Überlegen Sie sich diese selbst!

$$\text{3. Beispiel:} \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 22 \\ 2x + 5y = 33 \end{array} \right|$$

Mit einer sofortigen Addition kommt man in diesem Fall nicht zum Ziel. Daher multiplizieren wir zunächst die 1. Gleichung mit 5 und die 2. Gleichung mit (-2) :

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 22 \\ 2x + 5y = 33 \end{array} \right| \cdot \begin{array}{l} 5 \\ (-2) \end{array}.$$

Wir erhalten somit das folgende abgeänderte Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} 15x + 10y = 110 \\ -4x - 10y = -66 \end{array} \right|.$$

Jetzt können wir die 2. Gleichung zur 1. Gleichung addieren und erhalten:

$$\begin{aligned} 15x + 10y + (-4x - 10y) &= 110 + (-66) \\ 15x + 10y - 4x - 10y &= 110 - 66 \\ 11x &= 44 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Die Unbekannte y berechnen wir aus einer der beiden Ausgangs-

gleichungen. Wir nehmen die 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 22 \\ 3 \cdot 4 + 2y &= 22 \\ 12 + 2y &= 22 \\ 2y &= 22 - 12 \\ 2y &= 10 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Auch hier kann man wieder durch die Probe die Richtigkeit der Lösung nachweisen.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten die Unbekannten nicht immer eindeutig bestimmt werden können.

Wir wollen diesen Sachverhalt an Beispielen schildern.

Es sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

gegeben. Aus diesem System lassen sich die beiden Unbekannten x und y nicht bestimmen, da sich die beiden Gleichungen *widersprechen*. In dem einen Fall soll $2x - y = 1$ und in dem anderen Fall -1 sein. Dies ist nicht möglich.

Kommen wir zu einem zweiten Beispiel:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}.$$

Aus diesem Gleichungssystem können die beiden Unbekannten x und y auch nicht berechnet werden. Multipliziert man nämlich die erste der beiden Gleichungen mit 2, so erhält man die zweite Gleichung. Damit reduziert sich dieses Gleichungssystem auf eine Gleichung. In diesem Fall sagt man, die Gleichungen sind voneinander *abhängig*. Die Unbekannten können daraus nicht eindeutig berechnet werden. Überlegen Sie sich den Grund! Die eben angeführten Betrachtungen sollen zunächst genügen.

8.3 Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten

Im folgenden Abschnitt kommen wir zur Auflösung von 3 linearen Bestimmungsgleichungen mit 3 Unbekannten. Dabei setzen wir voraus, daß Widerspruchslosigkeit und Unabhängigkeit vorhanden ist. Diese Begriffe sind im vorigen Abschnitt bei 2 Unbekannten bereits erwähnt worden.

Wir verwenden die drei für 2 Unbekannte bereits behandelten Methoden in analoger Weise. Dabei geht man folgenden Weg. Zuerst verändert man jeweils 2 Gleichungen der ursprünglichen 3 Gleichungen so, daß jeweils nur noch eine Gleichung mit 2 Unbekannten übrigbleibt. Dies machen

wir zweimal. Damit haben wir dann 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten erhalten, die wir nach den Methoden des Abschnitts 8.2 auflösen können. Um dann noch die 3. Unbekannte zu erhalten, setzt man die beiden aus den 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten erhaltenen Werte in eine der 3 Gleichungen des Ausgangssystems ein. Man erhält so den Wert für die 3. Unbekannte. Manchmal kürzt sich dieser Weg auch etwas ab.

Den eben geschilderten Lösungsweg wollen wir an einigen Zahlbeispielen zeigen.

1. *Beispiel:*

$$(I) \quad \left| \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ 3x - 2y & = & 0 \\ 6x - 3z & = & 0 \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem ist etwas vereinfacht, da in zwei Gleichungen nur 2 Unbekannte vorkommen.

In unserem Fall ist es zweckmäßig, die 1. und 2. Gleichung so zu vereinfachen, daß die Unbekannte y herausfällt. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die 1. Gleichung mit 2. Wir erhalten sie dann in der veränderten Form:

$$2x + 2y - 2z = 4.$$

Jetzt addieren wir die 2. Gleichung zur veränderten 1. Gleichung und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y - 2z + (3x - 2y) & = & 4 \\ 2x + 2y - 2z + 3x - 2y & = & 4 \\ 5x - 2z & = & 4. \end{array}$$

Es ist eine Gleichung mit 2 Unbekannten entstanden. Nehmen wir dazu noch die 3. Gleichung des Ausgangssystems (I), so haben wir damit ein System mit den beiden Unbekannten x und z erhalten:

$$(II) \quad \left| \begin{array}{rcl} 5x - 2z & = & 4 \\ 6x - 3z & = & 0 \end{array} \right|.$$

Dieses System können wir nach den bekannten Methoden auflösen. In diesem Fall dürfte die Additionsmethode am einfachsten zum Ziele führen. Wir multiplizieren die 1. Gleichung des Systems (II) mit (-3) und die 2. Gleichung mit 2:

$$\left| \begin{array}{rcl} 5x - 2z & = & 4 \\ 6x - 3z & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 2. \end{array}$$

Es ergibt sich

$$\left| \begin{array}{rcl} -15x + 6z & = & -12 \\ 12x - 6z & = & 0 \end{array} \right|$$

Jetzt addieren wir die 2. Gleichung zur 1. Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} -15x + 6z + (12x - 6z) & = & -12 \\ -15x + 6z + 12x - 6z & = & -12 \\ -3x & = & -12. \end{array}$$

Es ist eine Gleichung mit einer Unbekannten entstanden:

$$-3x = -12.$$

Wir lösen diese nach x auf und erhalten:

$$x = \frac{-12}{-3}$$

$$x = 4.$$

Den Wert 4 setzen wir für x in die eine der beiden Gleichungen des Systems (II) ein und erhalten daraus z . Wir setzen in die 1. Gleichung ein:

$$5x - 2z = 4$$

$$5 \cdot 4 - 2z = 4$$

$$20 - 2z = 4$$

$$-2z = 4 - 20$$

$$-2z = -16$$

$$z = \frac{-16}{-2}$$

$$z = 8.$$

Um nun weiterhin y zu erhalten, setzen wir die Werte $x = 4$ und $z = 8$ in eine der beiden ersten Gleichungen des Systems (I) ein. Wir nehmen die 1. Gleichung:

$$x + y - z = 2$$

$$4 + y - 8 = 2$$

$$y - 4 = 2$$

$$y = 2 + 4$$

$$y = 6.$$

Um nun noch die Richtigkeit der Lösung

$$x = 4, y = 6 \text{ und } z = 8$$

zu zeigen, setzen wir diese Werte in die Gleichungen des ursprünglichen Systems (I) ein.

1. Gleichung:

$$x + y - z = 2$$

$$4 + 6 - 8 = 2$$

2. Gleichung:

$$3x - 2y = 0$$

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$$

$$12 - 12 = 0$$

3. Gleichung:

$$6x - 3z = 0$$

$$6 \cdot 4 - 3 \cdot 8 = 0$$

$$24 - 24 = 0.$$

2. Beispiel:

$$(I) \quad \left| \begin{array}{l} 6x + 8y - 5z = 40. \\ 9x + 12y + 11z = 60 \\ 14x - 18y + 19z = 20 \end{array} \right|.$$

Bei dieser Aufgabe versuchen wir zunächst, ein System von 2 Gleichungen mit den Unbekannten x und z herzustellen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die 1. Gleichung mit 3 und die 2. Gleichung mit (-2) . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 18x + 24y - 15z &= 120 \\ -18x - 24y - 22z &= -120. \end{aligned}$$

Weiterhin addieren wir nun die 2. Gleichung zur 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} 18x + 24y - 15z + (-18x - 24y - 22z) &= 120 + (-120) \\ 18x + 24y - 15z - 18x - 24y - 22z &= 120 - 120 \\ -37z &= 0. \end{aligned}$$

In unserem Fall ist nicht nur ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten entstanden, sondern bereits eine Gleichung mit einer Unbekannten. Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort z :

$$\begin{aligned} -37z &= 0 \\ z &= \frac{0}{-37} \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Um nun die Unbekannten x und y zu erhalten, setzen wir zunächst den Wert $z = 0$ in die 2. und 3. Gleichung ein:

$$\left| \begin{array}{l} 9x + 12y + 11 \cdot 0 = 60 \\ 14x - 18y + 19 \cdot 0 = 20 \end{array} \right|$$

oder

$$(II) \quad \left| \begin{array}{l} 9x + 12y = 60 \\ 14x - 18y = 20 \end{array} \right|.$$

Wie man erkennt, ist aus der 2. und 3. Gleichung unseres ursprünglichen Systems ein System von 2 Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y geworden.

Dieses System lösen wir wieder nach den bekannten Methoden auf. Die 1. Gleichung des Systems (II) multiplizieren wir mit 3 und die 2. Gleichung mit 2:

$$\left| \begin{array}{l} 9x + 12y = 60 \\ 14x - 18y = 20 \end{array} \right| \cdot \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}.$$

Wir erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} 27x + 36y = 180 \\ 28x - 36y = 40 \end{array} \right|.$$

Nach Addition der beiden Gleichungen ergibt sich eine Gleichung mit der Unbekannten x :

$$\begin{aligned} 27x + 36y + (28x - 36y) &= 180 + 40 \\ 27x + 36y + 28x - 36y &= 220 \\ 55x &= 220. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung lösen wir nach x auf und erhalten:

$$x = \frac{220}{55}$$

$$x = 4.$$

Um nun noch den Wert der Unbekannten y zu bekommen, setzen wir den Wert 4 für x in eine der beiden Gleichungen des Systems (II) ein. Wir setzen in die 1. Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 9x + 12y &= 60 \\ 9 \cdot 4 + 12y &= 60 \\ 36 + 12y &= 60 \\ 12y &= 60 - 36 \\ 12y &= 24 \\ x &= \frac{24}{12} \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit der Lösung zeigen wir wiederum durch die Probe. Wir setzen

$$x = 4, y = 2 \text{ und } z = 0$$

in die drei Gleichungen des Systems (I) ein:

1. Gleichung:

$$\begin{aligned} 6x + 8y - 5z &= 40 \\ 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 5 \cdot 0 &= 40 \\ 24 + 16 - 0 &= 40 \end{aligned}$$

2. Gleichung:

$$\begin{aligned} 9x + 12y + 11z &= 60 \\ 9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 11 \cdot 0 &= 60 \\ 36 + 24 + 0 &= 60 \end{aligned}$$

3. Gleichung:

$$\begin{aligned} 14x - 18y + 19z &= 20 \\ 14 \cdot 4 - 18 \cdot 2 + 19 \cdot 0 &= 20 \\ 56 - 36 + 0 &= 20. \end{aligned}$$

3. Beispiel:

$$(I) \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 4y - 2z = 7 \\ 4x - 6y + 2z = 10 \\ 6x - 2y - z = 9 \end{array} \right|$$

Zunächst stellen wir daraus ein Gleichungssystem her, in welchem nur noch x und y als Unbekannte enthalten sind. Zu diesem Zweck addieren wir die 2. Gleichung zur 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z + (4x - 6y + 2z) &= 7 + 10 \\ 3x + 4y - 2z + 4x - 6y + 2z &= 17 \\ 7x - 2y &= 17. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Gleichung mit den beiden Unbekannten x und y erhalten. Um noch eine 2. Gleichung, die x und y enthält, herzustellen, multiplizieren wir die 3. Gleichung mit 2:

$$12x - 4y - 2z = 18.$$

Diese Gleichung addieren wir zur 2. Gleichung des Systems (I):

$$\begin{array}{rcl} 4x - 6y + 2z + (12x - 4y - 2z) & = & 10 + 18 \\ 4x - 6y + 2z + 12x - 4y - 2z & = & 28 \\ 16x - 10y & = & 28. \end{array}$$

Damit haben wir das gewünschte System von 2 Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y erhalten:

$$(II) \quad \left| \begin{array}{l} 7x - 2y = 17 \\ 16x - 10y = 28 \end{array} \right|.$$

Dieses System lösen wir zweckmäßig mit der Additionsmethode auf. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die 1. Gleichung des Systems (II) mit (-5) :

$$-35x + 10y = -85.$$

Zu dieser Gleichung addieren wir die 2. Gleichung des Systems (II):

$$\begin{array}{rcl} -35x + 10y + (16x - 10y) & = & -85 + 28 \\ -35x + 10y + 16x - 10y & = & -57 \\ -19x & = & -57. \end{array}$$

Daraus ist eine Gleichung mit einer Unbekannten entstanden. Diese Gleichung lösen wir nach x auf und erhalten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-57}{-19} \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Die Unbekannte y berechnen wir aus einer der beiden Gleichungen des Systems (II). Wir verwenden die 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} 7x - 2y &= 17 \\ 7 \cdot 3 - 2y &= 17 \\ 21 - 2y &= 17 \\ -2y &= 17 - 21 \\ -2y &= -4 \\ y &= \frac{-4}{-2} \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Um die dritte Unbekannte z zu berechnen, setzen wir $x=3$ und $y=2$

in die 1. Gleichung des Systems (I) ein und erhalten daraus:

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 4y & - & 2z = 7 \\
 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & - & 2z = 7 \\
 9 + 8 & - & 2z = 7 \\
 17 & - & 2z = 7 \\
 & - & 2z = 7 - 17 \\
 & - & 2z = -10 \\
 & & z = \frac{-10}{-2} \\
 & & z = 5.
 \end{array}$$

Durch die Probe kann wieder die Richtigkeit der Lösung nachgewiesen werden.

Wie man an den Beispielen gesehen haben wird, erfordert die Lösung eines Systems von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten schon etwas Übung. Weiterhin können Schwierigkeiten und umfangreiche Rechnungen auftreten, wenn es sich etwa sogar um Gleichungssysteme mit mehr als 3 Unbekannten handelt.

8.4 Weitere Aufgaben zu den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten

Im folgenden Abschnitt sollen einige Aufgaben zur Übung und Vertiefung der Kenntnisse gerechnet werden. Der Lösungsweg wird im allgemeinen in etwas gekürzter Darstellung angegeben. Das Ausführen der Probe bleibt dem Leser selbst überlassen.

1. Aufgabe:

$$\left| \begin{array}{l} 4x + y = 40 \\ x - y = 5 \end{array} \right|$$

Anwendung der Additionsmethode:

$$\begin{array}{rcl}
 4x + y + (x - y) & \hat{=} & 40 + 5 \\
 4x + y + x - y & = & 45 \\
 5x & = & 45 \\
 x & = & 9.
 \end{array}$$

Einsetzen des Wertes $x=9$ in die 1. Gleichung:

$$\begin{array}{rcl}
 4x + y & = & 40 \\
 4 \cdot 9 + y & = & 40 \\
 36 + y & = & 40 \\
 y & = & 40 - 36 \\
 y & = & 4.
 \end{array}$$

2. Aufgabe:

$$\left| \begin{array}{l} 4x + 3y = 26 \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{8} \end{array} \right|$$

Anwendung der Einsetzungsmethode:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{7}{8} y \\
 4x + 3y &= 26 \\
 4 \cdot \frac{7}{8} y + 3y &= 26 \\
 \frac{7}{2} y + 3y &= 26 \\
 \frac{13}{2} y &= 26 \\
 y &= \frac{26 \cdot 2}{13} \\
 y &= 4.
 \end{aligned}$$

Einsetzen des Wertes $y = 4$ in die 2. Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{4} &= \frac{7}{8} \\
 x &= \frac{7 \cdot 4}{8} \\
 x &= \frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

3. Aufgabe:

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 7y = 41 \\ 5x + 3y = 63 \end{array} \right|$$

Anwendung der Additionsmethode:

$$\begin{aligned}
 &\left| \begin{array}{l} 4x - 7y = 41 \\ 5x + 3y = 63 \end{array} \right| \cdot 3 \\
 &\left| \begin{array}{l} 12x - 21y = 123 \\ 35x + 21y = 441 \end{array} \right| \\
 12x - 21y + (35x + 21y) &= 123 + 441 \\
 12x - 21y + 35x + 21y &= 564 \\
 47x &= 564 \\
 x &= 12.
 \end{aligned}$$

Einsetzen des Wertes $x = 12$ in die 2. Gleichung des ursprünglichen Systems:

$$\begin{aligned}
 5x + 3y &= 63 \\
 5 \cdot 12 + 3y &= 63 \\
 60 + 3y &= 63 \\
 3y &= 63 - 60 \\
 3y &= 3 \\
 y &= 1.
 \end{aligned}$$

4. Aufgabe:

$$(I) \quad \left| \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 5z & = & 16 \\ 3x - 2y + 4z & = & 36 \\ 5x + 7y - 11z & = & 44 \end{array} \right|$$

Zunächst wird die Unbekannte z beseitigt. Dies geschieht, indem die 1. Gleichung mit 4 und die 2. Gleichung mit 5 multipliziert werden.

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 5z & = & 16 \\ 3x - 2y + 4z & = & 36 \end{array} \right| \cdot \begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{rcl} 8x + 12y - 20z & = & 64 \\ 15x - 10y + 20z & = & 180 \end{array} \right|.$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt:

$$23x + 2y = 244.$$

Weiterhin Multiplikation der 2. Gleichung des Systems I mit 11 und der 3. Gleichung mit 4:

$$\left| \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 4z & = & 36 \\ 5x + 7y - 11z & = & 44 \end{array} \right| \cdot \begin{array}{l} 11 \\ 4 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{rcl} 33x - 22y + 44z & = & 396 \\ 20x + 28y - 44z & = & 176 \end{array} \right|.$$

Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt:

$$53x + 6y = 572.$$

Es sind also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten entstanden:

$$(II) \quad \left| \begin{array}{rcl} 23x + 2y & = & 244 \\ 53x + 6y & = & 572 \end{array} \right|.$$

Um nun noch y zu beseitigen, multiplizieren wir die 1. Gleichung des Systems II (mit (-3)):

$$\left| \begin{array}{rcl} 23x + 2y & = & 244 \\ 53x + 6y & = & 572 \end{array} \right| \cdot (-3)$$

$$\left| \begin{array}{rcl} -69x - 6y & = & -732 \\ 53x + 6y & = & 572 \end{array} \right|.$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt:

$$-16x = -160.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = \frac{-160}{-16}$$

$$x = 10.$$

Um y zu bekommen, setzen wir in die 1. Gleichung des Systems II für

x den Wert 10 ein:

$$\begin{aligned}23x + 2y &= 244 \\23 \cdot 10 + 2y &= 244 \\230 + 2y &= 244 \\2y &= 244 - 230 \\2y &= 14 \\y &= 7.\end{aligned}$$

Um zum Schluß noch z zu erhalten, setzen wir $x=10$ und $y=7$ in eine der drei Gleichungen des Systems I ein. Wir setzen zum Beispiel in die 2. Gleichung ein:

$$\begin{aligned}3x - 2y + 4z &= 36 \\3 \cdot 10 - 2 \cdot 7 + 4z &= 36 \\30 - 14 + 4z &= 36 \\4z &= 36 + 14 - 30 \\4z &= 20 \\z &= 5.\end{aligned}$$

Ü 8 Übungsaufgaben zu den Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten

$$1) \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 7y = 17 \\ 17x - 6y = 5 \end{array} \right|$$

$$2) \quad \left| \begin{array}{l} 69x - 51y = 0 \\ 115x + 34y = 7 \end{array} \right|$$

$$3) \quad \left| \begin{array}{l} 3x - 4y = 10 \\ x - 7y = -8 \end{array} \right|$$

$$4) \quad \left| \begin{array}{l} 3x - 9y - z = 5 \\ 4x + 10y - 9z = 43 \\ 5x - y - 2z = 36 \end{array} \right|$$

L 8 Lösungen zu Ü 8

$$1) \quad x = 1, \quad y = 2$$

$$2) \quad x = \frac{1}{23}, \quad y = \frac{1}{17}$$

$$3) \quad x = 6, \quad y = 2$$

$$4) \quad x = 8, \quad y = 2, \quad z = 1.$$

9. Bestimmungsgleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten

9.1 Der Begriff der Bestimmungsgleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten

Wie bereits im Abschnitt 3.1 erwähnt worden ist, wollen wir uns in diesem Kapitel mit den Bestimmungsgleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten beschäftigen. An Stelle von Bestimmungsgleichungen zweiten Grades spricht man auch von *quadratischen Bestimmungsgleichungen* oder kurz von quadratischen Gleichungen.

Unter einer quadratischen Gleichung versteht man eine Bestimmungsgleichung folgender Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Das ist die *allgemeine Form* der quadratischen Gleichung. Um eine solche quadratische Gleichung nach der Unbekannten x auflösen zu können, ist es zunächst erforderlich, sie in die sogenannte *Normalform* zu überführen. Zu diesem Zweck dividieren wir die letzte Gleichung durch a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so können wir weiterhin schreiben:

$$x^2 + px + q = 0$$

.

Dabei sind p und q reelle Zahlen.

Diese Form der quadratischen Gleichung bezeichnet man als die *Normalform* einer quadratischen Gleichung.

Sehen wir uns dazu ein Beispiel an:

Das Doppelte des Quadrats einer Zahl und das Vierfache dieser Zahl ergeben zusammen 16. Wie heißt die Zahl?

Die gesuchte Zahl bezeichnen wir mit x . Folglich ist das Quadrat dieser Zahl x^2 . Für unsere Aufgabenstellung ergibt sich dann der folgende Ansatz:

$$2x^2 + 4x = 16.$$

Es ist eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten x entstanden. In unserem Fall haben wir es mit der allgemeinen Form zu tun. Um für dieses Beispiel die Normalform zu bekommen, haben wir durch den Koeffizienten des quadratischen Gliedes, also durch 2 zu dividieren:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{2} + \frac{4x}{2} &= \frac{16}{2} \\ x^2 + 2x &= 8 \end{aligned}$$

oder

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

In diesem Fall ist:

$$p = 2 \quad q = -8.$$

9.2 Die Auflösung der quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten

Wir wollen in diesem Abschnitt aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

den Wert der Unbekannten x bestimmen.

Ehe wir zur Bestimmung der Unbekannten x aus dieser *gemischt-quadratischen Gleichung* kommen, wollen wir erst einige Spezialfälle behandeln. Es sei noch erwähnt, daß der Name „Gemischt-quadratische Gleichung“ daher stammt, daß neben dem quadratischen Glied noch ein Glied auftritt, in dem x linear vorkommt (lineares Glied).

9.21 Spezialfälle

Zuerst wollen wir den Fall behandeln, in dem $p=0$ ist. Es soll also kein lineares Glied auftreten. In diesem Fall sprechen wir von einer „*Rein-quadratischen Gleichung*“.

Behandeln wir ein Beispiel. Aus der rein-quadratischen Gleichung

$$x^2 - 25 = 0$$

soll die Unbekannte x berechnet werden. Zu diesem Zweck addieren wir auf beiden Seiten der Gleichung 25 und erhalten:

$$\begin{aligned} x^2 - 25 + 25 &= 25 \\ x^2 &= 25. \end{aligned}$$

Jetzt ziehen wir die Wurzel und erhalten

$$x = \pm 5.$$

Es ergeben sich 2 Lösungen, die wir mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} x_1 &= +5 \\ x_2 &= -5. \end{aligned}$$

Durch die Probe erkennen wir sofort die Richtigkeit der beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} \text{1. Lösung:} \quad & x^2 - 25 = 0 \\ & 5^2 - 25 = 0 \\ & 25 - 25 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Lösung:} \quad & x^2 - 25 = 0 \\ & (-5)^2 - 25 = 0 \\ & 25 - 25 = 0. \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß quadratische Gleichungen stets 2 Lösungen haben, die allerdings nicht voneinander verschieden zu sein brauchen. Darauf kommen wir später zurück.

Kommen wir nun zum 2. Spezialfall. In diesem Fall soll das Absolutglied $q = 0$ sein.

Wir behandeln wieder ein Beispiel:

$$x^2 - 8x = 0.$$

Um aus dieser Gleichung x zu berechnen, klammern wir x auf der linken Seite aus:

$$x(x - 8) = 0.$$

Nun besagt ein Lehrsatz, daß ein Produkt nur dann Null ist, wenn ein Faktor Null ist. In unserem Fall muß also entweder x oder $x - 8$ gleich Null sein:

$$x = 0$$

oder

$$x - 8 = 0.$$

Hieraus erhält man sofort die 1. Lösung x_1 :

$$x_1 = 0$$

und die 2. Lösung x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 - 8 &= 0 \\ x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Die Probe zeigt uns die Richtigkeit beider Lösungen.

9.22 Allgemeiner Fall

Kommen wir nun zur gemischt-quadratischen Gleichung. Wir beginnen zunächst wieder mit einem Beispiel. Es soll aus der Gleichung

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

die Unbekannte x berechnet werden. Da wir bereits lineare Bestimmungsgleichungen auflösen können, werden wir versuchen, diese quadratische Gleichung auf lineare Gleichungen zurückzuführen.

Zunächst formen wir die Gleichung so um, daß auf der linken Seite nur Glieder stehen, die x enthalten. Zu diesem Zweck subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung 15 und erhalten:

$$x^2 - 8x = -15.$$

Jetzt addieren wir auf beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Koeffizienten des Lineargliedes:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 &= -15 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \\ x^2 - 8x + 4^2 &= -15 + 16 \\ x^2 - 8x + 4^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir zunächst die linke Seite der Gleichung weiter. Wir können für sie unter Verwendung der Formel $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ auch schreiben:

$$(x - 4)^2,$$

denn rechnen wir dies aus, so erhalten wir gerade

$$x^2 - 8x + 4^2.$$

Für unsere Gleichung ergibt sich somit

$$(x - 4)^2 = 1.$$

Wir haben also auf beiden Seiten das Quadrat des halben Koeffizienten des Lineargliedes hinzufügen müssen, damit die linke Seite als derartiger quadratischer Ausdruck geschrieben werden kann. Aus diesem Grunde bezeichnen wir das zugefügte Quadrat des halben Koeffizienten des Lineargliedes als *quadratische Ergänzung*.

Wir ziehen jetzt die Quadratwurzel und erhalten:

$$x - 4 = \pm 1.$$

Dabei müssen wir beachten, daß auf der rechten Seite als Wurzelwert sowohl $+1$ als auch -1 möglich ist, da $(+1)^2 = 1$ und $(-1)^2 = 1$ ist.

Es sind somit eigentlich zwei lineare Gleichungen mit jeweils einer Unbekannten entstanden:

1. Gleichung: $x - 4 = +1$

2. Gleichung: $x - 4 = -1.$

Aus diesen 2 Gleichungen ergeben sich die beiden Werte der Unbekannten x der ursprünglichen quadratischen Gleichung. Zur besseren Unterscheidung für die Unbekannten wollen wir wieder die Bezeichnungen x_1 und x_2 einführen.

Damit lautet die 1. Gleichung:

$$x_1 - 4 = +1$$

und die 2. Gleichung:

$$x_2 - 4 = -1.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 - 4 &= +1 \\ x_1 &= 1 + 4 \\ x_1 &= 5 \end{aligned}$$

und x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 - 4 &= -1 \\ x_2 &= -1 + 4 \\ x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Durch die Probe können wir die Richtigkeit der beiden Lösungen nachweisen.

1. Lösung:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 15 &= 0 \\x_1^2 - 8x_1 + 15 &= 0 \\5^2 - 8 \cdot 5 + 15 &= 0 \\25 - 40 + 15 &= 0\end{aligned}$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 15 &= 0 \\x_2^2 - 8x_2 + 15 &= 0 \\3^2 - 8 \cdot 3 + 15 &= 0 \\9 - 24 + 15 &= 0.\end{aligned}$$

Im folgenden soll nun die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung angegeben werden. Zu diesem Zweck gehen wir von der Normalform der quadratischen Gleichung

$$\boxed{x^2 + px + q = 0} \quad (p \text{ und } q \text{ reell})$$

aus.

Zunächst subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung q und erhalten:

$$x^2 + px = -q.$$

Nun addieren wir wieder auf beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Koeffizienten des Lineargliedes, also $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$:

$$\begin{aligned}x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\&= -q + \frac{p^2}{4} \\&= \frac{-4q + p^2}{4} \\&= \frac{p^2 - 4q}{4}.\end{aligned}$$

Durch diese Umformung läßt sich die linke Seite als quadratischer Ausdruck schreiben. Wir erhalten:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Jetzt ziehen wir die Quadratwurzel und erhalten:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Es sind also wieder 2 lineare Bestimmungsgleichungen für x entstanden. Dabei muß man beachten, daß sowohl

$$\left(+ \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}\right)^2$$

als auch

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}\right)^2$$

den Wert

$$\frac{p^2-4q}{4}$$

ergibt. Beachten wir weiter, daß wir die Unbekannte in der ersten der beiden Gleichungen mit x_1 und in der zweiten der beiden Gleichungen mit x_2 bezeichnen wollen, so ergibt sich für die 1. Gleichung:

$$x_1 + \frac{p}{2} = +\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

und für die 2. Gleichung:

$$x_2 + \frac{p}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man sofort x_1 und x_2 ausrechnen. Es ergibt sich

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}.$$

Die beiden Ergebnisse faßt man meist in einem Ausdruck wie folgt zusammen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}.$$

In diesem Ausdruck gilt für den Index 1 das Pluszeichen vor dem Wurzel-
ausdruck und für den Index 2 das Minuszeichen vor dem Wurzel-
ausdruck. Die auftretende Differenz p^2-4q bezeichnet man als *Diskriminante*¹.
Darauf wollen wir im folgenden Abschnitt näher eingehen.
Zunächst seien noch einige Beispiele gerechnet.

1. *Beispiel:* $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Wir addieren zunächst auf beiden Seiten der Gleichung 10:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 3x - 10 + 10 & = & 0 \\ x^2 + 3x & = & 10. \end{array}$$

¹ discriminare (lat.) = entscheiden, unterscheiden

Jetzt nehmen wir die quadratische Ergänzung vor. Wir haben auf beiden Seiten der Gleichung $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ zu addieren:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}.$$

Dann ergibt sich

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}.$$

Wir ziehen die Wurzel und erhalten

$$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}.$$

Damit haben wir zwei lineare Gleichungen erhalten. Die Unbekannten bezeichnen wir wieder mit x_1 und x_2 .

1. Gleichung:

$$x_1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2$$

2. Gleichung:

$$x_2 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -5.$$

Die Probe zeigt die Richtigkeit der Lösungen.

2. Beispiel:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir zunächst den gleichen Weg wie beim 1. Beispiel.

Wir subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung 9:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 = -9$$

$$x^2 - 6x = -9.$$

Jetzt nehmen wir wieder die quadratische Ergänzung vor und addieren auf beiden Seiten der Gleichung $3^2 = 9$:

$$x^2 - 6x + 3^2 = -9 + 9.$$

Weiterhin können wir dafür schreiben:

$$(x - 3)^2 = 0$$

Wir ziehen auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel und erhalten:

$$x - 3 = \pm 0.$$

Es sind also für die Lösungen x_1 und x_2 formal wieder zwei Gleichungen entstanden:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung:} \quad & x_1 - 3 = +0 \\ & x_1 - 3 = 0 \\ & x_1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Gleichung:} \quad & x_2 - 3 = -0 \\ & x_2 - 3 = 0 \\ & x_2 = 3. \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen fallen zu einer Doppellösung zusammen und haben den Wert 3. Die Richtigkeit können wir wieder durch die Probe zeigen. Kommen wir noch einmal zur quadratischen Ergänzung dieses Beispiels zurück. Man hätte den Weg über die quadratische Ergänzung nicht zu gehen brauchen. Die linke Seite der Ausgangsgleichung $x^2 - 6x + 9 = 0$ läßt sich bereits sofort in binomischer Form

$$(x - 3)^2$$

schreiben. Damit hätten wir sofort

$$(x - 3)^2 = 0$$

erhalten. In unserem Fall sollte aber die Aufgabe aus methodischen Gründen in gleicher Weise wie beim 1. Beispiel gelöst werden.

$$3. \text{ Beispiel:} \quad x^2 - 4x + 5 = 0$$

Zunächst subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung 5 und erhalten:

$$x^2 - 4x = -5.$$

Jetzt nehmen wir wieder die quadratische Ergänzung vor und addieren auf beiden Seiten der Gleichung $2^2 = 4$:

$$x^2 - 4x + 2^2 = -5 + 4.$$

Daraus ergibt sich:

$$(x - 2)^2 = -1.$$

Jetzt ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel und erhalten:

$$x - 2 = \pm \sqrt{-1}.$$

Unter $\sqrt{-1}$ können wir uns zunächst nichts vorstellen. Aus diesem Grunde wollen wir uns jetzt näher mit diesen Dingen beschäftigen. Im Abschnitt 6.12 wurde gezeigt, daß Wurzeln mit ungeradem Wurzelexponenten stets eindeutige Werte ergeben, und zwar positive bei positivem Radikanden und negative bei negativem Radikanden. Für gerade Wurzelexponenten betrachteten wir bis jetzt nur Wurzeln mit positivem

Radikanden, für die sich zeigt, daß sie doppeldeutig sind. Es bleibt jetzt nur noch der Fall von geraden Wurzelexponenten und negativen Radikanden zu behandeln. Dieser Fall war uns bereits im Abschnitt 6.12 begegnet. Dort wurde er aber nicht gelöst.

Was haben wir nun zum Beispiel unter $\sqrt[2]{-4}$ zu verstehen? Der Wurzelwert kann weder $+2$ noch -2 sein, denn es ist

$$\begin{aligned} (+2)^2 &= +4 \\ (-2)^2 &= +4. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß der Ausdruck $\sqrt{-4}$ im Bereich der uns bis jetzt bekannten reellen Zahlen keinen Sinn hat. Um ihm und allen anderen gleich gebauten Ausdrücken von der Form

$$\sqrt{-c} \quad (c \text{ reell})$$

einen Sinn zu geben, erweitert man den Zahlenbereich, indem man zu den reellen die *imaginären Zahlen* hinzufügt. Diese imaginären Zahlen gehen alle aus der „imaginären Einheit“ hervor, ähnlich wie die reellen Zahlen aus der Einheit 1 durch die vier Grundrechenarten und das Radizieren entstehen.

Die „imaginäre Einheit“ wird mit i bezeichnet und ist definiert als

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}.$$

Mit Hilfe dieser Festsetzung kann man jetzt die obige Aufgabe lösen.

Zur Berechnung von $\sqrt{-4}$ geht man folgenden Weg:

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} &= \sqrt{4 \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\ &= \pm 2 \cdot i. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\sqrt{-4} = \pm 2i.$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} \sqrt{-25} &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = \pm 5i \\ \sqrt{-36} &= \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = \pm 6i. \end{aligned}$$

Man erkennt hieraus, daß man Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zieht, indem man erst den Wert der Wurzel mit dem entsprechenden positiven Radikanden berechnet, den erhaltenen Wurzelwert jedoch nicht in der reellen, sondern in der imaginären Einheit i zählt.

Kommen wir nun noch zu den *komplexen Zahlen*.

Eine Zahl von der Gestalt

$$\boxed{a + bi},$$

wobei a und b reelle Zahlen sind, heißt komplexe Zahl.

Man nennt a den Realteil und b den Imaginärteil der komplexen Zahl $a + bi$. Diese komplexen Zahlen stellen den Zahlenbereich dar, der aus dem reellen Zahlenbereich entsteht, wenn man zu ihm die imaginären Zahlen hinzufügt. Die reellen Zahlen und die imaginären Zahlen sind die zwei Teilmengen des komplexen Zahlenbereichs. Die reellen Zahlen ergeben sich aus den allgemeineren komplexen Zahlen $a + bi$, wenn $b = 0$ gesetzt wird. Die imaginären Zahlen hingegen ergeben sich, wenn $a = 0$ gesetzt wird.

Man rechnet mit komplexen Zahlen wie mit allgemeinen Zahlen und beachtet außerdem die Gleichung $i^2 = -1$, die möglicherweise Vereinfachungen des Ergebnisses gestattet.

Zum Schluß sei noch ein Spezialfall von komplexen Zahlen, die sogenannten *konjugiert komplexen Zahlen*, erwähnt.

Unter zwei konjugiert komplexen Zahlen verstehen wir die Ausdrücke folgender Form:

$$a + bi$$

und

$$a - bi.$$

Zum Beispiel sind $3 + 2i$ und $3 - 2i$ zwei derartige konjugiert komplexe Zahlen.

Kommen wir nun zu unserer quadratischen Gleichung zurück. Beachten wir, daß $\sqrt{-1} = i$ ist, so ergeben sich als Lösungen:

$$\begin{aligned}x_1 - 2 &= +i \\x_1 &= 2 + i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x_2 - 2 &= -i \\x_2 &= 2 - i.\end{aligned}$$

Wir haben die konjugiert komplexen Zahlen $2 + i$ und $2 - i$ als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ erhalten.

Die Richtigkeit der Lösungen zeigen wir durch die Probe:

1. Lösung:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 5 &= 0 \\(2 + i)^2 - 4(2 + i) + 5 &= 0 \\4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 &= 0 \\4 + 4i - 1 - 8 - 4i + 5 &= 0.\end{aligned}$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 5 &= 0 \\(2 - i)^2 - 4(2 - i) + 5 &= 0 \\4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 &= 0 \\4 - 4i - 1 - 8 + 4i + 5 &= 0\end{aligned}$$

An diesen drei Beispielen sollten die drei vorhandenen Möglichkeiten für die Lösung einer quadratischen Gleichung gezeigt werden. Im ersten Beispiel sind die beiden Lösungen zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen. Im 2. Beispiel haben sich als Lösungen zwei Zahlen ergeben, die reell und einander gleich sind. Als Lösungen des 3. Beispiels haben wir, wie bereits erwähnt, zwei konjugiert komplexe Zahlen erhalten.

Wir hätten natürlich die gleichen Lösungen erhalten, wenn wir die numerischen Werte für die Größen p und q in die allgemeine Lösungsformel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$$

eingesetzt hätten. Dies wollen wir für die drei Beispiele noch zeigen. Dabei ist besonders auf die Vorzeichen von p und q zu achten.

1. Beispiel:

$$p = 3 \quad q = -10$$

$$\begin{aligned}x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-10)} \\&= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 + 40} \\&= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{49} \\&= -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -5$$

2. Beispiel:

$$p = -6 \quad q = 9$$

$$\begin{aligned}x_{1/2} &= -\frac{(-6)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9} \\x_{1/2} &= 3 \pm \frac{1}{2} \sqrt{36 - 36} \\x_{1/2} &= 3 \pm \frac{1}{2} \sqrt{0}\end{aligned}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 3$$

3. Beispiel:

$$p = -4 \quad q = 5$$

$$x_{1/2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{16 - 20}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4}$$

$$x_1 = 2 + i \quad x_2 = 2 - i.$$

9.23 Die Diskriminante

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, wollen wir jetzt den Ausdruck $p^2 - 4q$, der als Diskriminante bezeichnet worden war, in Verbindung mit den Lösungsmöglichkeiten näher betrachten. Die Diskriminante gestattet uns nämlich, sofort eine Aussage darüber zu treffen, welche von den drei Lösungsmöglichkeiten für eine quadratische Gleichung zutreffend ist.

Hat die Diskriminante $p^2 - 4q$ einen positiven Wert, so ergeben sich in den Lösungen

$$(\S) \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$$

der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ reelle Wurzelwerte. Die Lösungen x_1 und x_2 sind damit zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen.

Hat die Diskriminante $p^2 - 4q$ den Wert Null, so fällt der zweite Teil des Ausdrucks (§) weg und wir erhalten

$$x_1 = -\frac{p}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2}.$$

In diesem Fall entstehen also als Lösungen zwei reelle Zahlen, die einander gleich sind.

Hat die Diskriminante $p^2 - 4q$ einen negativen Wert, so wird der zweite Teil des Ausdrucks (§) imaginär, da die Wurzel aus einer negativen Zahl eine imaginäre Zahl ergibt. Es ergeben sich somit als Lösungen zwei komplexe Zahlen, die zueinander konjugiert sind.

$p^2 - 4q > 0$ Zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen als Lösungen

$p^2 - 4q = 0$ Zwei gleiche reelle Zahlen als Lösungen

$p^2 - 4q < 0$ Zwei konjugiert komplexe Zahlen als Lösungen

Der eben geschilderte Sachverhalt soll an unseren Beispielen verdeutlicht werden.

1. Beispiel

$$\begin{aligned}x^2 + 3x - 10 &= 0 \\p &= 3 \quad q = -10 \\p^2 - 4q &= 3^2 - 4 \cdot (-10) \\&= 9 + 40 \\&= 49 > 0\end{aligned}$$

Die Diskriminante hat einen positiven Wert.

Die Gleichung $x^2 + 3x - 10 = 0$ hat deshalb zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen. Dies haben wir bereits durch Ausrechnen gefunden.

2. Beispiel:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 9 &= 0 \\p &= -6 \quad q = 9 \\p^2 - 4q &= (-6)^2 - 4 \cdot 9 \\&= 36 - 36 \\&= 0\end{aligned}$$

Die Diskriminante hat den Wert Null. Die Gleichung $x^2 - 6x + 9 = 0$ hat zwei reelle Lösungen, die einander gleich sind. Auch dies haben wir bereits durch Ausrechnen gezeigt.

3. Beispiel:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 5 &= 0 \\p &= -4 \quad q = 5 \\p^2 - 4q &= (-4)^2 - 4 \cdot 5 \\&= 16 - 20 \\&= -4 < 0\end{aligned}$$

Die Diskriminante hat einen negativen Wert. Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ sind somit zwei konjugiert komplexe Zahlen. Auch dies haben wir bereits durch Ausrechnen gezeigt.

9.24 Der Vietasche Wurzelsatz

Bisher haben wir aus einer quadratischen Gleichung stets die Lösungen ausgerechnet. Man kann aber auch umgekehrt die quadratische Gleichung angeben, wenn ihre Lösungen bekannt sind. Dies wollen wir zunächst allgemein zeigen.

Es muß also im Grunde genommen nur gezeigt werden, daß sich die Koeffizienten p und q der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ aus den Lösungen x_1 und x_2 berechnen lassen.

Im Abschnitt 9.22 haben wir die allgemeine Lösung der Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ angegeben:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \\x_2 &= -\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}.\end{aligned}$$

Um den Zusammenhang zwischen x_1 und x_2 einerseits und p und q andererseits zu erkennen, addieren wir zunächst die beiden Lösungen x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} + \left(-\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \right) \\&= -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} - \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \\&= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\end{aligned}$$

oder $x_1 + x_2 = -p$.

Um eine weitere Formel zu entwickeln, multiplizieren wir die beiden Lösungen x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \right) \\&= \left(-\frac{p}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \right)^2 \\&= \frac{p^2}{4} - \frac{1}{4} (p^2 - 4q) \\&= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q\end{aligned}$$

oder $x_1 \cdot x_2 = q$.

Die beiden entwickelten Formeln

$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -p \\x_1 \cdot x_2 &= q\end{aligned}$
--

bezeichnet man als den *Vietaschen Wurzelsatz*.

Wir wollen dazu einige Beispiele rechnen.

1. Beispiel:

Es seien die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$ einer quadratischen Gleichung bekannt. Wie lautet die quadratische Gleichung selbst?

Wir berechnen unter Verwendung des Vietaschen Wurzelsatzes p und q :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -p \\2 - 5 &= -p \\-3 &= -p \\p &= 3 \\x_1 \cdot x_2 &= q \\2 \cdot (-5) &= q \\-10 &= q \\q &= -10.\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung hat also die Form

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (\text{Vgl. 1. Beispiel im Abschnitt 9.22}).$$

2. Beispiel:

Es seien $x_1 = 3$ und $x_2 = 3$ gegeben.

Unter Verwendung des Vietaschen Wurzelsatzes ergeben sich p und q :

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$3 + 3 = -p$$

$$6 = -p$$

$$p = -6$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$3 \cdot 3 = q$$

$$9 = q$$

$$q = 9.$$

Als quadratische Gleichung erhalten wir:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (\text{Vgl. 2. Beispiel im Abschnitt 9.22}).$$

3. Beispiel:

Es seien $x_1 = 2 + i$ und $x_2 = 2 - i$ gegeben.

Es ergibt sich für p und q :

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$(2 + i) + (2 - i) = -p$$

$$2 + i + 2 - i = -p$$

$$4 = -p$$

$$p = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$(2 + i) \cdot (2 - i) = q$$

$$4 - i^2 = q$$

$$4 - (-1) = q$$

$$4 + 1 = q$$

$$5 = q$$

$$q = 5.$$

Die quadratische Gleichung hat somit die Form

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (\text{Vgl. 3. Beispiel im Abschnitt 9.22}).$$

9.3 Weitere Aufgaben zu den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten

Im folgenden Abschnitt sollen einige Aufgaben zur Übung und Vertiefung der Kenntnisse gerechnet werden. Der Lösungsweg wird im allgemeinen in etwas gekürzter Darstellung angegeben. Das Ausführen der Proben bleibt dem Leser selbst überlassen.

1)

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 x^2 - x &= 6 \\
 x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 6 + \frac{1}{4} \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\
 x - \frac{1}{2} &= \pm \frac{5}{2} \\
 x_1 - \frac{1}{2} &= \frac{5}{2} & x_2 - \frac{1}{2} &= -\frac{5}{2} \\
 x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} & x_2 &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\
 x_1 &= 3 & x_2 &= -2
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} &= 0 \\
 x^2 - \frac{3}{4}x &= -\frac{1}{8} \\
 x^2 - \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 &= -\frac{1}{8} + \frac{9}{64} \\
 \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 &= \frac{1}{64} \\
 x - \frac{3}{8} &= \pm \frac{1}{8} \\
 x_1 - \frac{3}{8} &= \frac{1}{8} & x_2 - \frac{3}{8} &= -\frac{1}{8} \\
 x_1 &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} & x_2 &= -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\
 x_1 &= \frac{1}{2} & x_2 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 x^2 - 10x + 25 &= 0 \\
 (x - 5)^2 &= 0 \\
 x - 5 &= \pm 0 \\
 x_1 - 5 &= +0 & x_2 - 5 &= -0 \\
 x_1 - 5 &= 0 & x_2 - 5 &= 0 \\
 x_1 &= 5 & x_2 &= 5
 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 5 &= 0 \\
 x^2 - 2x &= -5 \\
 x^2 - 2x + 1 &= -5 + 1 \\
 (x - 1)^2 &= -4 \\
 x - 1 &= \pm \sqrt{-4} = \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm 2\sqrt{-1} \\
 x - 1 &= \pm 2i \\
 x_1 - 1 &= +2i & x_2 - 1 &= -2i \\
 x_1 &= 1 + 2i & x_2 &= 1 - 2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & (x-2)(x-4) + (x-3)(x-1) = 11 \\
 & x^2 - 2x - 4x + 8 + x^2 - 3x - x + 3 = 11 \\
 & \quad 2x^2 - 10x + 11 = 11 \\
 & \quad 2x^2 - 10x = 0 \\
 & \quad x^2 - 5x = 0 \\
 & \quad x \cdot (x-5) = 0 \\
 & x_1 = 0 \qquad x_2 - 5 = 0 \\
 & \qquad \qquad x_2 = 5.
 \end{aligned}$$

- 6) Das Produkt aus einer Zahl und der um 17 kleineren Zahl beträgt 60. Wie heißen die beiden Zahlen?

$$\begin{aligned}
 & x \cdot (x-17) = 60 \\
 & x^2 - 17x = 60 \\
 & x^2 - 17x + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 60 + \frac{289}{4} \\
 & \left(x - \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{529}{4} \\
 & x - \frac{17}{2} = \pm \frac{23}{2} \\
 & x_1 - \frac{17}{2} = \frac{23}{2} \qquad x_2 - \frac{17}{2} = -\frac{23}{2} \\
 & x_1 = 20 \qquad x_2 = -3.
 \end{aligned}$$

Es gibt, wie man sofort sieht, zwei Möglichkeiten:

1. Fall: Die beiden Zahlen sind 20 und 3.
 2. Fall: Die beiden Zahlen sind -3 und -20 .
- 7) Es ist die Art der Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
 p &= -2 & q &= -3 \\
 p^2 - 4q &= (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \\
 &= 4 + 12 \\
 &= 16 > 0
 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat also zwei reelle, voneinander verschiedene Lösungen.

- 8) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$. Wie heißt die Gleichung?

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= -p & x_1 \cdot x_2 &= q \\
 -3 + 4 &= -p & (-3) \cdot 4 &= q \\
 1 &= -p & -12 &= q \\
 p &= -1 & q &= -12
 \end{aligned}$$

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

- 9) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1=2$ und $x_2=2$.
Wie heißt die Gleichung?

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$2 + 2 = -p$$

$$p = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$2 \cdot 2 = q$$

$$4 = q$$

$$q = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

- 10) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 3 + 2i$ und $x_2 = 3 - 2i$. Wie heißt die Gleichung?

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$3 + 2i + 3 - 2i = -p$$

$$p = -6$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$(3 + 2i)(3 - 2i) = q$$

$$9 - 4i^2 = q$$

$$9 - 4 \cdot (-1) = q$$

$$9 + 4 = q$$

$$q = 13$$

$$x^2 - 6x + 13 = 0.$$

Ü 9 Übungsaufgaben zu den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten

- 1) $x^2 + 12x + 27 = 0$
- 2) $x^2 - 6x + 5 = 0$
- 3) $x^2 - 2x - 15 = 0$
- 4) $x^2 - 2x + 2 = 0$
- 5) $3x^2 - 24x + 44 = 0$
- 6) $\frac{x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{5x^2 - 8}{x^2 - 1}$
- 7) Es ist die Art der Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 13x + 22 = 0$ zu ermitteln.
- 8) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$. Wie lautet die Gleichung?
- 9) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -19 + 3\sqrt{7}$ und $x_2 = -19 - 3\sqrt{7}$. Wie lautet die Gleichung?
- 10) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -2 + 6i$ und $x_2 = -2 - 6i$. Wie lautet die Gleichung?

L 9 Lösungen zu Ü 9

- 1) $x_1 = -9$ $x_2 = -3$
- 2) $x_1 = 1$ $x_2 = 5$
- 3) $x_1 = -3$ $x_2 = 5$
- 4) $x_1 = 1 + i$ $x_2 = 1 - i$
- 5) $x_1 = \frac{2}{3} \left(6 + \sqrt{3} \right)$ $x_2 = \frac{2}{3} \left(6 - \sqrt{3} \right)$
- 6) $x_1 = 4$ $x_2 = -2$
- 7) $p^2 - 4q = 81 > 0$ Die Gleichung hat zwei reelle, voneinander verschiedene Lösungen.
- 8) $x^2 + 3x + 2 = 0$
- 9) $x^2 + 38x + 298 = 0$
- 10) $x^2 + 4x + 40 = 0$

10. Ganze rationale Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

10.1 Der Funktionsbegriff

In der Naturwissenschaft und in der Wirtschaftswissenschaft treten oft Abhängigkeitsverhältnisse auf. Zum Beispiel ist beim Thermometer die Länge des Quecksilberfadens von der jeweiligen Temperatur abhängig. In der Wirtschaft kann ein Teil der Kosten von der produzierten Menge einer Ware abhängig sein.

Wenn wir die produzierte Menge mit x und die Kosten mit y bezeichnen, so ist y von x abhängig. Anstelle des Ausdrucks „ y ist von x abhängig“ sagt man auch, y ist eine Funktion von x . In der Symbolik der Mathematik schreibt man für die obige Aussage dieser Abhängigkeit

$$\boxed{y = f(x)} .$$

In Worten:

y ist eine Funktion von x .

Dabei bezeichnet man x als die unabhängige Veränderliche oder Variable und y als die abhängige Veränderliche oder Variable.

Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Ausdruck $y = f(x)$ nur besagt, daß y in irgendeiner Weise von x abhängt. In welcher Weise dies konkret der Fall ist, wird damit allerdings noch nicht gesagt.

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns einer genaueren Untersuchung derartiger Abhängigkeitsverhältnisse zuwenden und beginnen mit der Betrachtung der einfachsten Fälle der ganzen rationalen Funktionen. Es sind dies die linearen und die quadratischen Funktionen.

10.2 Lineare Funktionen

Es tritt oft der Fall auf, daß die Abhängigkeit zwischen x und y durch eine genaue mathematische Abhängigkeitsvorschrift angegeben werden kann. Diese Vorschrift wird die analytische Darstellung einer Funktion oder auch Funktionsgleichung genannt.

Wir wollen nun zwei Beispiele von derartigen mathematischen Abhängigkeitsvorschriften angeben.

1. $y = x + 2$

2. $y = -2x + 3$.

Setzt man in diese Ausdrücke für x einen beliebigen Wert ein, so bekommt man in Abhängigkeit davon für y den zugehörigen Wert. Zum Beispiel erhält man im ersten Fall für $x = 3$ den Wert

$$y = 3 + 2 = 5.$$

Hätte man $x = 5$ gesetzt, so hätte man den Wert

$$y = 5 + 2 = 7$$

bekommen. Man sieht also, daß sich zu jedem Wert von x ein davon abhängiger Wert y berechnen läßt.

Es tritt jetzt die Frage auf, ob man derartige Funktionen nicht in einem gewissen Bereich der unabhängigen Variablen x geometrisch darstellen kann. Zu diesem Zwecke werden wir eine Wertetafel der Funktion, auch Funktionstafel genannt, aufstellen. Als Beispiel wollen wir eine Wertetafel der Funktion $y = x + 2$ im ganzzahligen Bereich von $x = -3$ bis $x = +3$ aufstellen. Das heißt, wir müssen die Werte $-3, -2, -1, 0, +1, +2$ und $+3$ der Reihe nach für x in den Ausdruck $y = x + 2$ einsetzen und die entsprechenden y -Werte ausrechnen. Danach werden diese Wertepaare der Übersichtlichkeit halber noch in einer Tafel, der sogenannten Wertetafel, zusammengestellt. Wir setzen also für x die entsprechenden Werte ein und erhalten

$$x = -3 \quad y = -3 + 2 = -1$$

$$x = -2 \quad y = -2 + 2 = 0$$

$$x = -1 \quad y = -1 + 2 = +1$$

$$x = 0 \quad y = 0 + 2 = +2$$

$$x = +1 \quad y = +1 + 2 = +3$$

$$x = +2 \quad y = +2 + 2 = +4$$

$$x = +3 \quad y = +3 + 2 = +5.$$

Danach tragen wir diese Werte in die Wertetafel wie folgt ein :

x	y
-3	-1
-2	0
-1	+1
0	+2
+1	+3
+2	+4
+3	+5

Um die geometrische Darstellung der Funktion $y = x + 2$ in dem genannten Bereich zu erhalten, tragen wir die ausgerechneten Wertepaare als Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und verbinden sie so miteinander, daß auch die $x; y$ -Wertepaare, die zu den x -Werten gehören, die zwischen den von uns betrachteten ($x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$) liegen (also z. B. $x = -0,9$), Punkte der entstehenden Kurve sind. Diese Verbindungskurve aller auf Grund der betrachteten Funktionsgleichung möglichen Wertepaare $x; y$ für $-3 \leq x \leq +3$ heißt die graphische Darstellung dieser Funktionsgleichung im genannten Bereich.

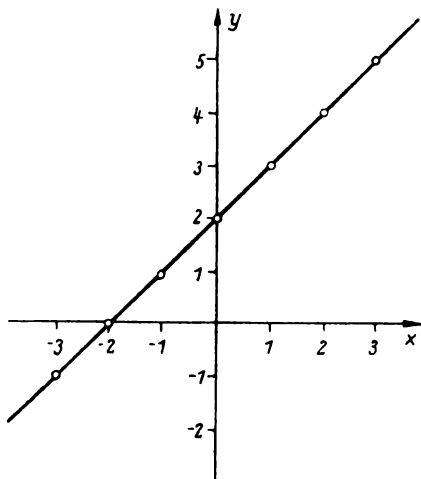


Bild 2

Wie man sieht, ist das Bild obiger Funktion eine Gerade.

Als weiteres Beispiel wollen wir die bereits erwähnte Funktion $y = -2x + 3$ im Bereich $x = -2$ bis $x = +3$ graphisch darstellen. Zu diesem Zweck stellen wir folgende Wertetafel auf:

x	y
-2	+7
-1	+5
0	+3
+1	+1
+2	-1
+3	-3

Danach tragen wir diese Wertepaare wieder in ein Koordinatensystem ein:

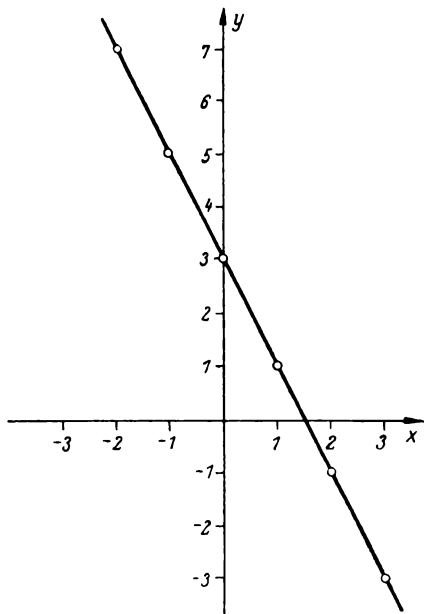


Bild 3

Wie man auch in diesem Fall sieht, ist das geometrische Bild der Funktion $y = -2x + 3$ eine Gerade.

Allgemein ergeben sich als graphische Darstellungen von Funktionen der Form $y = a_1 x + a_0$ Geraden. Funktionen der Form

$$y = a_1 x + a_0$$

werden als lineare Funktionen oder Funktionen 1. Grades bezeichnet, weil die höchste Potenz, in der x in der Funktionsgleichung vorkommt, die 1. Potenz ($x = x^1$) ist. a_1 und a_0 bedeuten dabei beliebige reelle (oder auch komplexe), aber konstante Zahlen.

Im folgenden sollen noch einige Funktionen graphisch dargestellt werden :

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. a) $y = 2x + 3$ | 2. a) $y = -2x + 3$ |
| b) $y = 2x$ | b) $y = -2x$ |
| c) $y = 2x - 3$ | c) $y = -2x - 3$. |

Nach Aufstellung einer Wertetafel oder, wie man sicher schon erkannt haben wird, nach Festlegung von nur 2 Wertepaaren der Wertetafel lassen sich diese Funktionen graphisch darstellen. 2 Wertepaare sind ausreichend, weil eine Gerade bereits durch 2 ihrer Punkte eindeutig festgelegt ist.

Für obige Funktionen erhalten wir folgende Darstellungen :

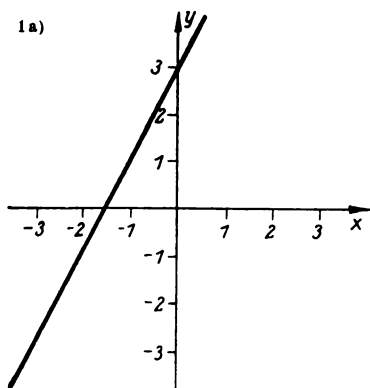


Bild 4

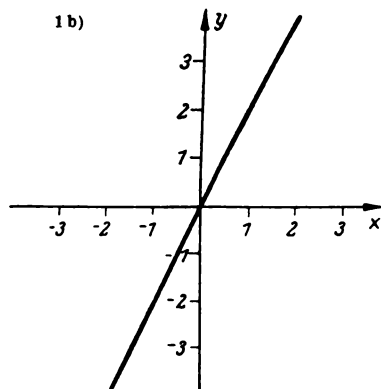


Bild 5

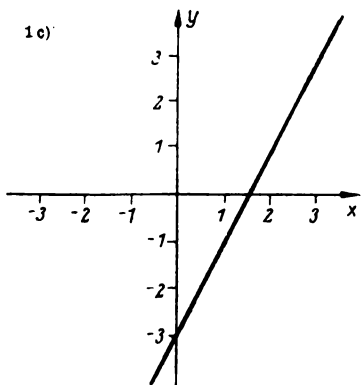


Bild 6

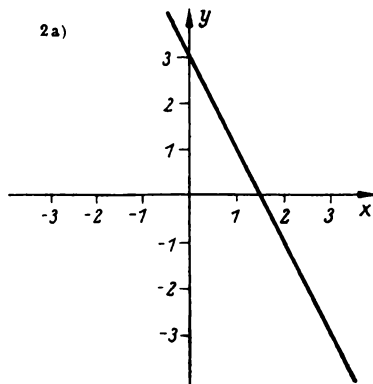


Bild 7

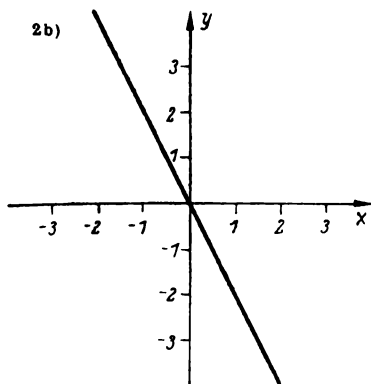


Bild 8

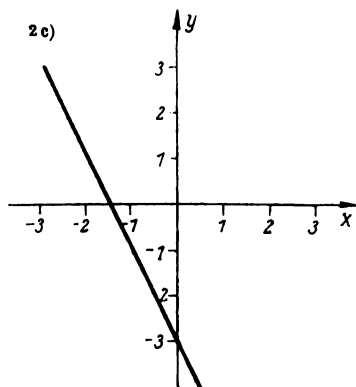


Bild 9

Wie man sieht, haben die einzelnen Geraden in den Koordinatensystemen eine verschiedene Lage. In den Zeichnungen 4 bis 6 verlaufen die Geraden von links unten nach rechts oben. In den Zeichnungen 7 bis 9 aber gehen die Geraden von links oben nach rechts unten. Betrachtet man die zugehörige Funktionsgleichung und speziell den Faktor bei x , so sieht man, daß er in den Fällen 4 bis 6 stets 2, also eine positive Zahl ist. In den Fällen 7 bis 9 ist er immer -2 , also eine negative Zahl. Allgemein kann man feststellen, daß der Faktor von x (also a_1 in der

linearen Funktionsgleichung $y = a_1x + a_0$) die Richtung der Geraden bestimmt. Aus diesem Grunde nennt man a_1 den Richtungsfaktor. Ist a_1 eine positive Zahl ($a_1 > 0$), so verläuft die Gerade im Koordinatensystem von links unten nach rechts oben. Ist a_1 eine negative Zahl ($a_1 < 0$), so verläuft die Gerade von links oben nach rechts unten.

Jetzt soll noch das Absolutglied a_0 der linearen Funktion im Zusammenhang mit der Lage der zugehörigen Geraden näher betrachtet werden. In den graphischen Darstellungen 4 und 7 hat das Absolutglied den Wert $+3$. Die Geraden schneiden die y -Achse im Abstand $+3$ vom Nullpunkt. In den Fällen 5 und 8 ist das Absolutglied Null. Die Geraden schneiden die y -Achse im Nullpunkt. In den Fällen 6 und 9 hat a_0 den Wert -3 . Die Geraden schneiden die y -Achse im Abstand -3 vom Nullpunkt. Allgemein gibt a_0 an, in welchem Abstand vom Nullpunkt die Gerade die y -Achse schneidet. Ist a_0 positiv, so schneidet die Gerade die y -Achse oberhalb des Koordinatenursprungs; ist a_0 negativ, so schneidet die Gerade die y -Achse unterhalb des Koordinatenursprungs. Ist dagegen $a_0 = 0$, so geht die Gerade durch den Koordinatenursprung. Aus diesem Grunde nennt man a_0 den Abschnitt auf der y -Achse.

Wir wollen noch die Funktionsgleichungen für die Geraden angeben, die den Koordinatenachsen parallel laufen bzw. die Achsen selbst sind. Wir werden sie zunächst ohne nähere Beweisführung angeben. Darauf wird im 12. Kapitel eingegangen werden.

1. Gerade parallel zur x -Achse im Abstand $+c$ ($c > 0$):
2. Gerade parallel zur x -Achse im Abstand $-c$ ($c > 0$):

$$y = +c$$

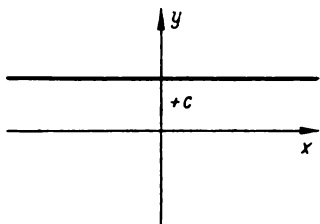


Bild 10

$$y = -c$$

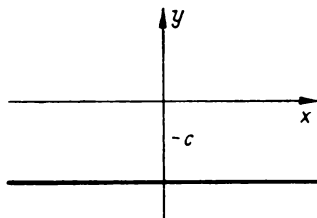


Bild 11

3. Gerade parallel zur y -Achse im Abstand $+c$ ($c > 0$):

$$x = +c$$

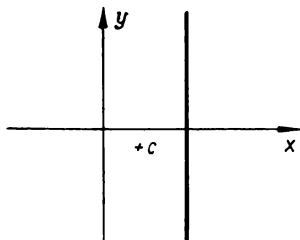


Bild 12

4. Gerade parallel zur y -Achse im Abstand $-c$ ($c > 0$):

$$x = -c$$

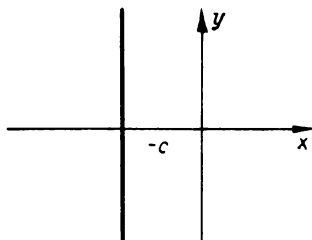


Bild 18

5. Die x -Achse hat die Gleichung $y = 0$.

6. Die y -Achse hat die Gleichung $x = 0$.

Zur Vertiefung und zur Übung sollen nun noch einige Geraden gezeichnet werden. Zu diesem Zwecke stellen wir uns erst jeweils eine Wertetafel auf. Wir brauchen aber nur 2 Punkte zu bestimmen, da eine Gerade ja durch 2 Punkte bereits eindeutig festgelegt ist.

- a) $y = 2x + 1$

x	y
0	+1
2	+5

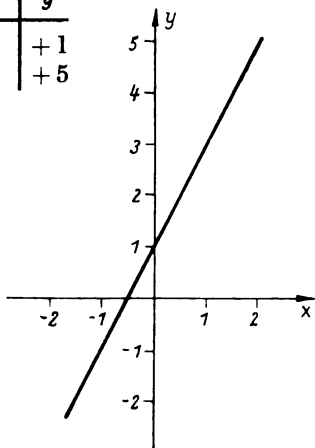


Bild 14

- b) $y = -x - 1$

x	y
0	-1
2	-3

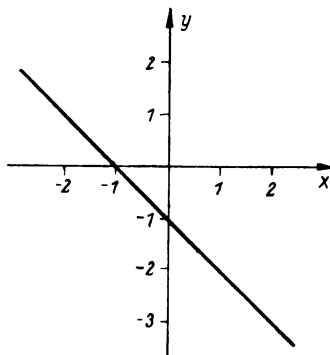


Bild 15

c) $y = \frac{1}{2}x$

x	y
0	0
2	1

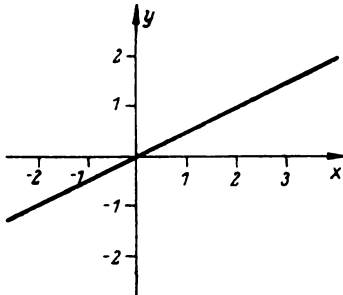


Bild 16

d) $y = x$

x	y
0	0
2	2

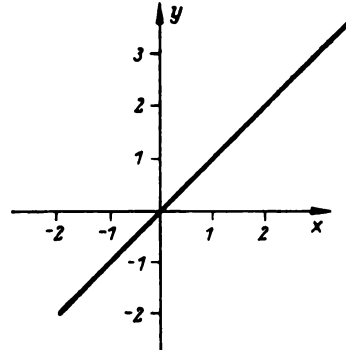


Bild 17

e) $y = 3$

Im Falle dieser Funktion brauchen wir keine Wertetafel aufzustellen, denn die zugehörige Gerade läuft im Abstand $+3$ parallel zur x -Achse.

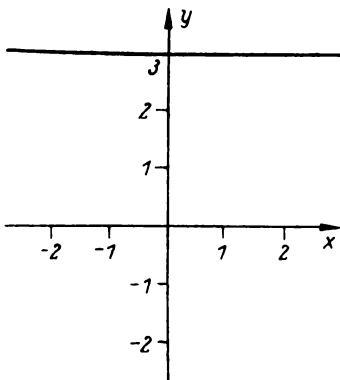


Bild 18

f) $x = -2$

Im Falle dieser Funktion brauchen wir auch keine Wertetafel aufzustellen, denn die zugehörige Gerade verläuft im Abstand -2 parallel zur y -Achse.

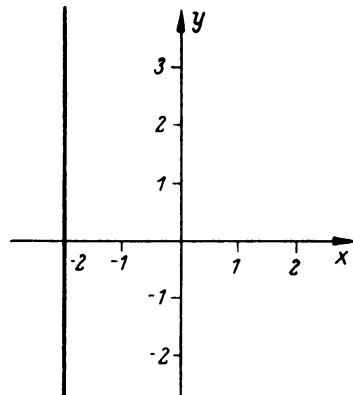


Bild 19

Im folgenden wollen wir auf den Zusammenhang zwischen linearen Funktionsgleichungen und linearen Bestimmungsgleichungen eingehen. Wir beginnen zunächst mit der Darstellung des Zusammenhangs von linearen Funktionsgleichungen und linearen Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten.

Es sei die Funktion

$$y = 2x - 1$$

gegeben.

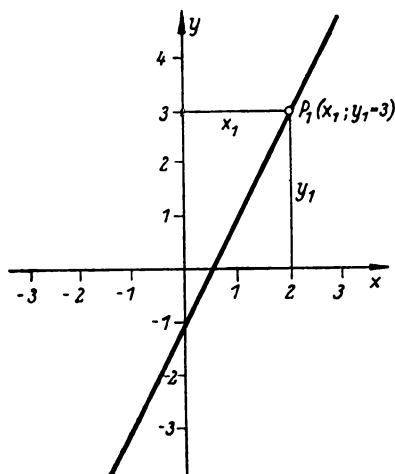


Bild 20

Unsere Aufgabe soll jetzt darin bestehen, die Abszisse x_1 eines auf der Geraden liegenden Punktes P_1 zu bestimmen, von dem wir aber bereits wissen, daß seine Ordinate den Wert 3 hat:

$$y_1 = 3.$$

Da der Punkt P_1 auf der Geraden liegen soll, müssen seine Koordinaten x_1 und y_1 die Funktionsgleichung der Geraden erfüllen. Es muß

$$y_1 = 2x_1 - 1$$

gelten.

Da der Wert y_1 numerisch gegeben ist, können wir ihn einsetzen und erhalten weiter

$$3 = 2x_1 - 1.$$

Aus dieser Gleichung müssen wir nun x_1 bestimmen. Da es sich um eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten x_1 handelt, sprechen wir auch von einer Bestimmungsgleichung. Der Wert x_1 ist durch die Gleichung bereits festgelegt. Wir müssen ihn nur noch ausrechnen. Man kann ihn also nicht mehr, wie im Falle der Funktionsgleichung das x , frei wählen.

Wir sprechen weiterhin von einer Bestimmungsgleichung 1. Grades, weil die höchste Potenz, in der x_1 vorkommt, die 1. Potenz ($x_1 = x_1^1$) ist. Anstelle von Bestimmungsgleichung 1. Grades sagt man auch lineare Bestimmungsgleichung.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich betont, daß zwischen Funktionsgleichungen und Bestimmungsgleichungen ein grundsätzlicher Unterschied besteht. Funktionsgleichungen haben variable Größen, Bestimmungsgleichungen aber unbekannte Größen, die durch die Aufgabenstellung schon festgelegt sind, jedoch noch ausgerechnet werden müssen. Allerdings bekommt im Falle der Funktionsgleichung die Variable y den Charakter einer Unbekannten, wenn x festgelegt worden ist. y muß dann mit Hilfe der Funktionsgleichung ausgerechnet werden.

Nach diesen Betrachtungen wollen wir uns der Bestimmung der Unbekannten x_1 aus der Gleichung

$$3 = 2x_1 - 1$$

oder

$$2x_1 - 1 = 3$$

zuwenden.

Nach der bekannten Methode¹ ergibt sich hieraus

$$x_1 = 2.$$

Damit haben wir die Abszisse des Punktes P_1 festgestellt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß aus einer Funktionsgleichung bei Festlegung einer Variablen (x oder y) eine Bestimmungsgleichung wird. Die andere Variable nimmt dann den Charakter einer Unbekannten an.

Jetzt wollen wir noch den Zusammenhang zwischen linearen Funktionsgleichungen und linearen Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten betrachten. Es handelt sich, wie wir noch sehen werden, in diesem

¹ Vgl. 3. Kapitel, Seite 42 ff.

Fälle um die Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden. Es sei dabei vorausgesetzt, daß sie in der gleichen Ebene liegen und nicht parallel verlaufen.

Wir legen dies wieder an einem Beispiel dar. Es soll der Schnittpunkt der Geraden

$$y = x - 3$$

und

$$y = 3x + 1$$

bestimmt werden. Zu diesem Zweck zeichnen wir uns zunächst diese beiden Geraden in ein Koordinatensystem ein:

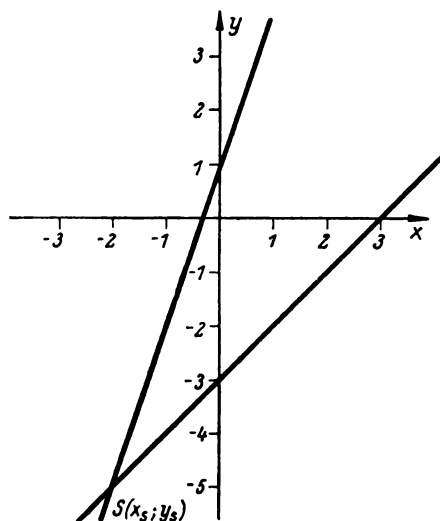


Bild 21

Wie man aus der Zeichnung erkennen kann, hat der Schnittpunkt, den wir mit S bezeichnen wollen, die Koordinaten $x_s = -2$ und $y_s = -5$. Der Index s an den Koordinaten soll daran erinnern, daß diese Größen zum Schnittpunkt gehören. Die Werte x_s und y_s sind für unsere kommenden Betrachtungen feste Größen, die zu bestimmen sind. Es sind also zunächst Unbekannte. Dagegen ist im Falle der Funktion die Größe x (ohne Index) eine Variable, die man beliebig wählen kann. Es erhebt

sich die Frage nach der rechnerischen Bestimmung der Größen x_S und y_S . Da der Punkt $S(x_S; y_S)$ auf beiden Geraden liegt, müssen natürlich seine Koordinaten die Gleichungen der beiden Geraden erfüllen. Es muß daher gelten:

$$\begin{aligned}y_S &= x_S - 3 \\y_S &= 3x_S + 1.\end{aligned}$$

Es ist also aus den beiden Funktionsgleichungen mit den Variablen x und y ein System von 2 Bestimmungsgleichungen mit den Unbekannten x_S und y_S entstanden.

Hieraus bestimmen sich leicht die beiden Größen x_S und y_S ¹. Es ergibt sich

$$x_S = -2 \quad \text{und} \quad y_S = -5.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind somit bestimmt.

10.3 Quadratische Funktionen

Im Abschnitt 10.1 haben wir gesagt, was wir allgemein unter einer Funktion zu verstehen haben. Speziell sind wir im Abschnitt 10.2 auf lineare Funktionen näher eingegangen. Wir verstanden darunter eine Abhängigkeitsvorschrift der Gestalt $y = a_1x + a_0$, wobei a_1 der Richtungsfaktor und a_0 das Absolutglied waren.

In diesem Abschnitt wenden wir uns den quadratischen Funktionen zu. Unter einer quadratischen Funktion versteht man die Abhängigkeitsvorschrift

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Quadratisch nennt man diese Abhängigkeitsvorschrift deshalb, weil die höchste Potenz, in der die unabhängige Veränderliche x vorkommt, vom 2. Grade ist. Dabei sind a_2 , a_1 und a_0 beliebige reelle (oder auch komplexe) Konstante mit $a_2 \neq 0$.

In speziellen Fällen sind die Koeffizienten a_2 , a_1 und a_0 numerisch bestimmt. Zum Beispiel könnte $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 2$ und $a_0 = -1$ sein. Die Funktionsgleichung lautet somit $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$. Diese quadratische Funktion wollen wir nun graphisch darstellen. Die quadratischen Funk-

¹ Vgl. Abschnitt 8.2, Seite 140 ff.

tionen können in analoger Weise wie die linearen Funktionen mit Hilfe einer Wertetafel gezeichnet werden.

Als Beispiel stellen wir die Wertetafel der quadratischen Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ im ganzzahligen Bereich von $x = -6$ bis $x = +2$ auf. Wir müssen die Werte $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1$ und $+2$ der Reihe nach für x in den Ausdruck $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ einsetzen und die entsprechenden y -Werte ausrechnen. Danach stellen wir die entsprechenden Wertepaare zur Wertetafel zusammen:

x	y	x	y
-6	$+5$	-1	$-2,5$
-5	$+1,5$	0	-1
-4	-1	$+1$	$+1,5$
-3	$-2,5$	$+2$	$+5$
-2	-3		

Eventuell sind weitere Zwischenwerte einzuführen.

Um die geometrische Darstellung der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ zu erhalten, tragen wir die einzelnen Wertepaare als Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und verbinden sie möglichst glatt.

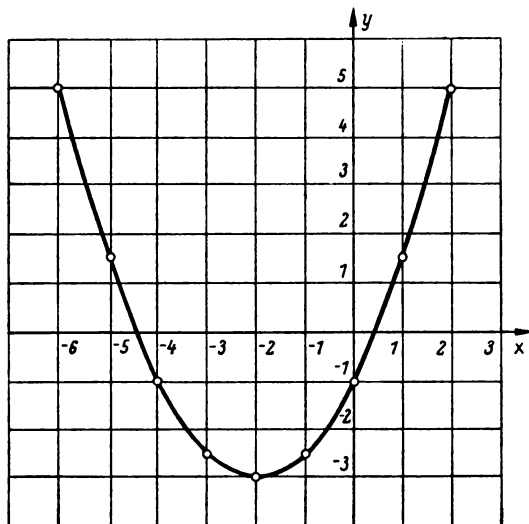


Bild 22

Das geometrische Bild einer quadratischen Funktion bezeichnet man als Parabel 2. Grades oder auch als quadratische Parabel.

Im folgenden wollen wir noch weitere quadratische Funktionen graphisch darstellen.

1. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = x^2 + 3x - 10$
im Bereich von $x = -6$ bis $x = +3$

Wertetafel:

x	y
-6	+ 8
-5	0
-4	- 6
-3	-10
-2	-12
-1	-12
0	-10
+1	- 6
+2	0
+3	+ 8

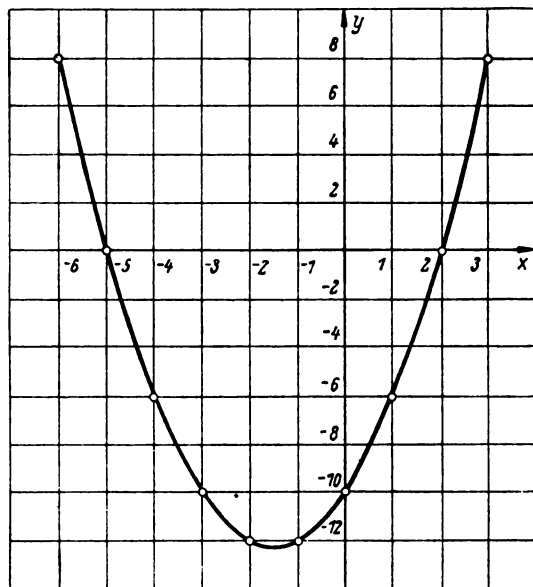


Bild 23

Wertetafel:

x	y
+1	+4
+2	+1
+3	0
+4	+1
+5	+4

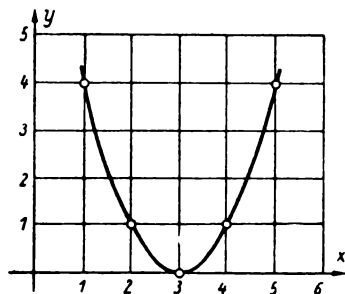


Bild 24

2. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = x^2 - 6x + 9$
im Bereich von $x = +1$
bis $x = +5$

3. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = x^2 - 4x + 5$
im Bereich von $x = 0$ bis $x = +4$

Wertetafel:

x	y
0	+5
+1	+2
+2	+1
+3	+2
+4	+5

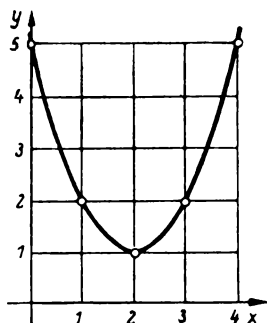


Bild 25

4. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = x^2$
im Bereich von $x = -3$ bis $x = +3$

Wertetafel:

x	y
-3	+9
-2	+4
-1	+1
0	0
+1	+1
+2	+4
+3	+9

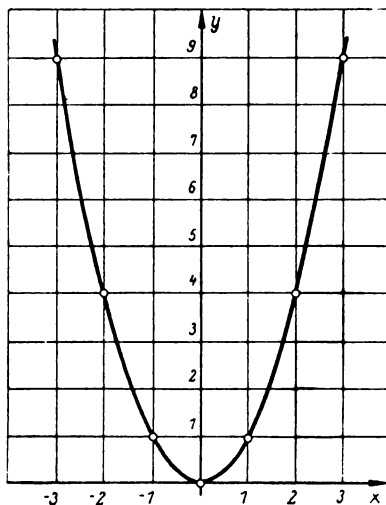


Bild 26

Die graphische Darstellung der Funktion $y = x^2$ bezeichnet man meist als quadratische Einheitsparabel.

5. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = -x^2$
im Bereich von $x = -3$ bis $x = +3$

Wertetafel:

x	y
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
+1	-1
+2	-4
+3	-9

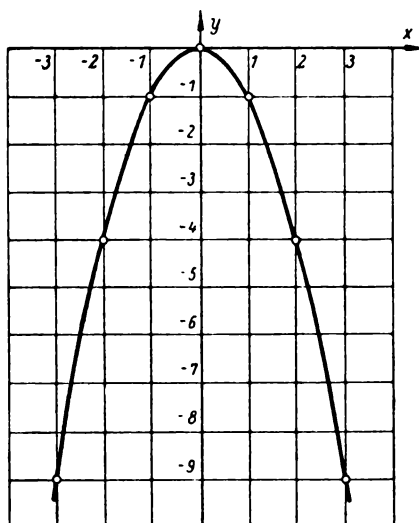


Bild 27

In ähnlicher Weise, wie wir im Abschnitt 10.2 den Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und linearen Bestimmungsgleichungen gezeigt haben, wollen wir jetzt den Zusammenhang zwischen quadratischen Funktionen und quadratischen Bestimmungsgleichungen darstellen.

Wir fragen zu diesem Zweck nach der Abszisse x_0 eines Punktes P_0 , der auf einer quadratischen Parabel liegt und von dem wir den Wert der Ordinate y_0 kennen. Diesen Sachverhalt machen wir uns an einem Beispiel klar. Wir wollen den Wert der Abszisse x_0 des Punktes P_0 bestimmen, der auf der quadratischen Parabel

$$y = x^2 - 8x + 15$$

liegt und dessen Ordinate y_0 den Wert Null hat ($y_0 = 0$). Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der quadratischen Parabel mit der x -Achse; er heißt die Nullstelle obiger Parabel.

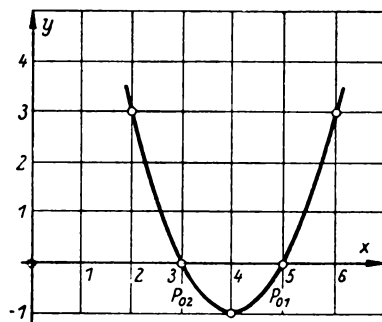


Bild 28

In der Zeichnung soll der Doppelindex bei P_{01} und P_{02} darauf hinweisen, daß es zwei Nullstellen gibt.

Da der Punkt P_0 auf der quadratischen Parabel liegt, erfüllen seine Koordinaten die obige Funktionsgleichung. Es muß also die Gleichung

$$y_0 = x_0^2 - 8x_0 + 15$$

gelten. Da wir den Wert $y_0 = 0$ numerisch kennen, ergibt sich weiterhin

$$0 = x_0^2 - 8x_0 + 15$$

oder

$$x_0^2 - 8x_0 + 15 = 0.$$

Damit ist aus der quadratischen Funktionsgleichung eine quadratische Bestimmungsgleichung für die Unbekannte x_0 geworden. Nach bekannten Methoden¹ ergibt sich

$$x_{01} = 5 \quad \text{und} \quad x_{02} = 3.$$

10.4 Ganze rationale Funktionen höheren Grades

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns den ganzen rationalen Funktionen höheren Grades zuwenden. Unter einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades verstehen wir folgende Abhängigkeitsvorschrift:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

In diesem Ausdruck sind $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ und a_0 konstante Koeffizienten. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß $a_n \neq 0$ ist. Dann ist x^n die höchste wirklich vorhandene Potenz von x in der Funktionsgleichung, weswegen sie vom n -ten Grade heißt.

Diese Funktion heißt deshalb rational, weil sie sich aus ihren Bestandteilen, d. h. den Koeffizienten $a_n, \dots, a_0$ und der unabhängigen Variablen x allein durch die vier Grundrechenarten herstellen läßt (vgl.: Rationale Zahlen heißen die Zahlen, die sich aus der Zahl 1 durch die vier Grundrechenarten gewinnen lassen). Unsere obige Funktion heißt weiter ganz rational, weil zu ihrer Bildung von den vier Grundrechenarten lediglich die drei ersten gebraucht werden, die Division jedoch nicht.

Wir stellen jetzt zwei ganze rationale Funktionen 3. Grades graphisch dar.

¹ Vgl. Abschnitt 9. 22, Seite 160 ff.

1. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = x^3 - 6x^2 - x + 30$
im Bereich von $x = -3$ bis $x = +6$

Wertetafel:

x	y
-3	-48
-2	0
-1	+24
0	+30
+1	+24
+2	+12
+3	0
+4	-6
+5	0
+6	+24

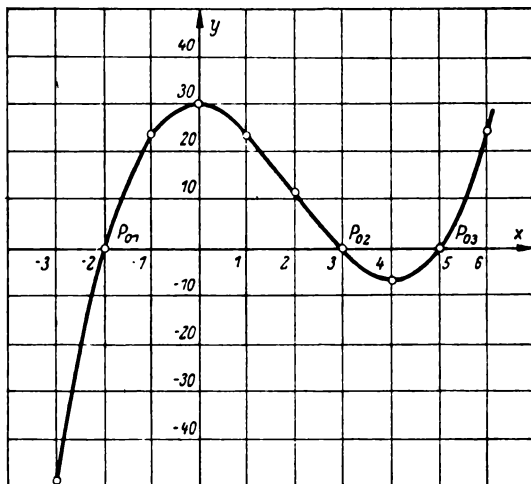


Bild 29

Die graphische Darstellung einer kubischen Funktion bezeichnet man allgemein als kubische Parabel.

2. Beispiel:

Darstellung der Funktion $y = x^3$
im Bereich von $x = -2$ bis $x = +2$
(vgl. Bild 30)

Wertetafel:

x	y
-2	-8
-1	-1
0	0
+1	+1
+2	+8

Die graphische Darstellung der Funktion $y = x^3$ bezeichnet man oft als kubische Einheitsparabel.

Auch im Falle der graphischen Darstellung von ganzen rationalen Funktionen höheren Grades kann man nach ihrem Schnittpunkt mit der x -Achse fragen.

Es soll z. B. der Schnittpunkt der kubischen Parabel

$$y = x^3 - 6x^2 - x + 30$$

mit der x -Achse bestimmt werden. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir wieder mit P_0 . Seine Koordinaten seien x_0 und y_0 . Der Wert y_0 ist durch die Aufgabenstellung bekannt; und zwar ist $y_0 = 0$.

Da der Punkt P_0 auf der kubischen Parabel liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung der kubischen Parabel:

$$y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 - x_0 + 30$$

$$0 = x_0^3 - 6x_0^2 - x_0 + 30$$

oder

$$x_0^3 - 6x_0^2 - x_0 + 30 = 0.$$

Es ist eine Bestimmungsgleichung 3. Grades entstanden, aus der die Unbekannte x_0 errechnet werden soll. Es ergeben sich bei einer kubischen Bestimmungsgleichung stets drei Lösungen, von denen allerdings zwei oder auch alle drei zusammenfallen können. Diese drei Lösungen sind nicht immer alle reelle Zahlen, ähnlich wie auch eine quadratische Bestimmungsgleichung komplexe Zahlen als Lösungen haben kann.¹

Für unser Beispiel würden wir folgende Lösungen erhalten:

$$x_{01} = -2 \quad x_{02} = +3 \quad x_{03} = +5$$

(vgl. Bild 29).

In diesem Falle sind die Lösungen der kubischen Bestimmungsgleichung sämtlich reelle Zahlen.

Wir wollen aber auf die Darlegung der Lösungsmethoden von Bestimmungsgleichungen 3. und höheren Grades verzichten. Es sei an dieser Stelle auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

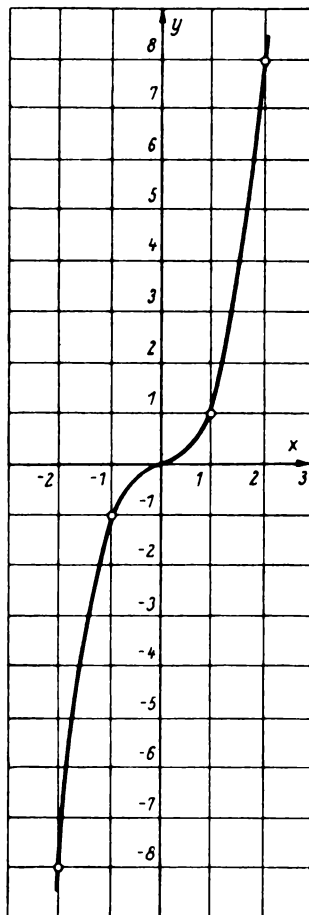


Bild 30

¹ Vgl. Abschnitt 9. 22, Seite 165 ff.

11. Ebene Trigonometrie

Im folgenden Kapitel wollen wir die Grundlagen der ebenen Trigonometrie behandeln.

11.1 Die trigonometrischen Funktionen für Winkel unter 90°

11.11 Der Begriff der Winkelfunktionen

Zunächst wollen wir uns mit Dreiecksmessungen in der Ebene beschäftigen. Ehe wir aber zu den Dreiecksmessungen selbst kommen, wollen wir einige Bezeichnungen, die als bekannt betrachtet werden, wiederholen.

Es sei das Dreieck ABC (Bild 31) gegeben.

Die Punkte A , B und C sind die Ecken des Dreiecks. Die Seiten bezeichnet man mit a , b und c . Für die Winkel eines Dreiecks hat man die kleinen griechischen Buchstaben α , β , γ eingeführt. Gemessen werden diese Winkel bei unseren weiteren Betrachtungen im Gradmaß. Der rechte Winkel zum Beispiel beträgt darin 90° (Bild 32).

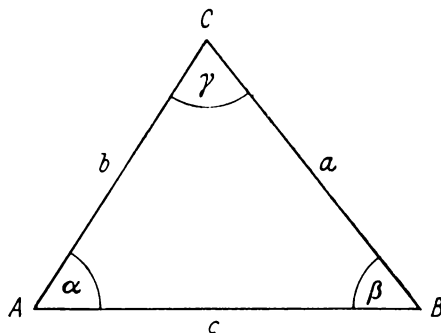


Bild 31

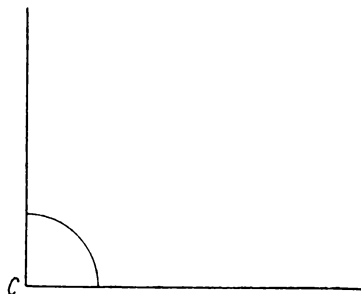


Bild 32

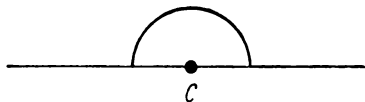


Bild 33

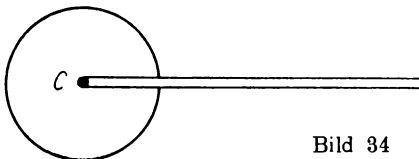


Bild 34

Der gestreckte Winkel beträgt 180° (Bild 33), und der Vollwinkel beträgt 360° (Bild 34).

Die kleinere Einheit eines Winkels ist die Minute (1 Grad = 60 Minuten oder $1^\circ = 60'$)¹.

Es gibt auch noch eine andere Art der Winkelmessung (Bogenmaß), auf die wir allerdings im Rahmen des Vorkurses nicht eingehen wollen.

Dreiecke, die einen rechten Winkel haben, bezeichnet man als rechtwinklige Dreiecke. Zwei rechte Winkel kann ein Dreieck nicht haben, denn die Winkelsumme beträgt im Dreieck bekanntlich 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Ist zum Beispiel $\gamma = 90^\circ$, so gilt

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Wäre zum Beispiel noch $\beta = 90^\circ$, so müßte, um die letzte Gleichung zu erfüllen, der Winkel $\alpha = 0^\circ$ sein. Dies ist nicht möglich, da es sich ja um ein Dreieck handeln soll. Die drei Winkel eines Dreiecks sind aber alle größer als null Grad.

Im folgenden wollen wir uns zunächst mit rechtwinkligen Dreiecken beschäftigen. Zu diesem Zwecke setzen wir $\gamma = 90^\circ$ (Bild 35).

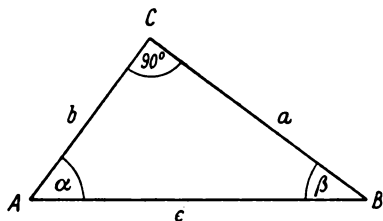


Bild 35

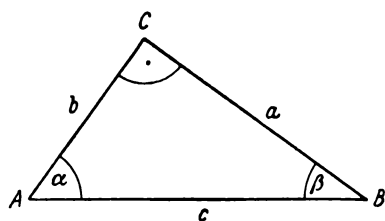


Bild 36

Statt 90° in den Winkel zu schreiben, setzt man auch oft einen Punkt hinein (Bild 36).

Im rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse. Die beiden anderen Seiten heißen Katheten. Wir zeichnen uns jetzt einige rechtwinklige Dreiecke, die die gleichen Winkel ($\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$) haben (Bild 37 bis 39).

Solche Dreiecke, bei denen die entsprechenden Winkel gleich sind, bezeichnet man als ähnliche Dreiecke.

Stellen wir in ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken gewisse Seitenverhältnisse auf, so werden wir finden, daß sie gleich sind. Wir stellen zum

¹ Die Winkelminute darf nicht mit der Zeitminute verwechselt werden.

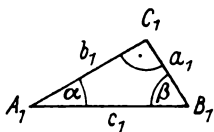


Bild 37

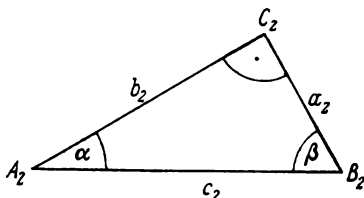


Bild 38

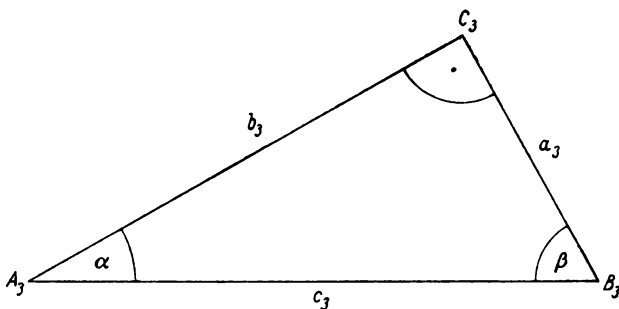


Bild 39

Beispiel in diesen drei Dreiecken das Verhältnis der zum Winkel $\alpha = 30^\circ$ gehörigen Gegenkathete zur Hypotenuse auf.

1. Dreieck: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{1}{2} = 0,5$

2. Dreieck: $\frac{a_2}{c_2} = \frac{2}{4} = 0,5$

3. Dreieck: $\frac{a_3}{c_3} = \frac{4}{8} = 0,5$.

Man sieht also, daß der Wert des Verhältnisses von Gegenkathete zur Hypotenuse für den Winkel 30° stets 0,5 ist.

Das Verhältnis Gegenkathete zu Hypotenuse nennt man allgemein den Sinus des betreffenden Winkels, in abgekürzter Form dargestellt:

$$\sin \sphericalangle = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck hat man weitere Seitenverhältnisse eingeführt. Das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse nennt man den Cosinus des betreffenden Winkels:

$$\cos \sphericalangle = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} .$$

Das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete bezeichnet man als den Tangens des betreffenden Winkels:

$$\text{tg } \sphericalangle = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} .$$

Weiterhin nennt man das Verhältnis von Ankathete zu Gegenkathete den Cotangens:

$$\text{ctg } \sphericalangle = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} .$$

Es sei an dieser Stelle betont, daß der Sinus eines bestimmten Winkels stets den gleichen Wert hat, gleichgültig, in welchem Dreieck er berechnet wird. Entsprechendes gilt auch für den Cosinus, Tangens und Cotangens. Als Beispiel wollen wir im rechtwinkligen Dreieck ABC für den Winkel α die oben angeführten Verhältnisse aufstellen (Bild 40):

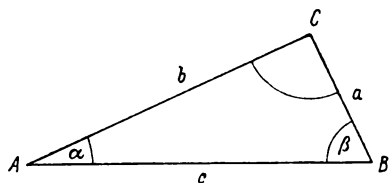


Bild 40

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a} .$$

Für den Winkel β würde sich aber ergeben :

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} .$$

11.12 Die Winkelfunktionen im Einheitskreis

Im folgenden wollen wir uns der zahlenmäßigen Festlegung der einzelnen Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, die man auch als Winkelfunktionen bezeichnet, für verschiedene Winkel im Bereich von 0° bis 90°

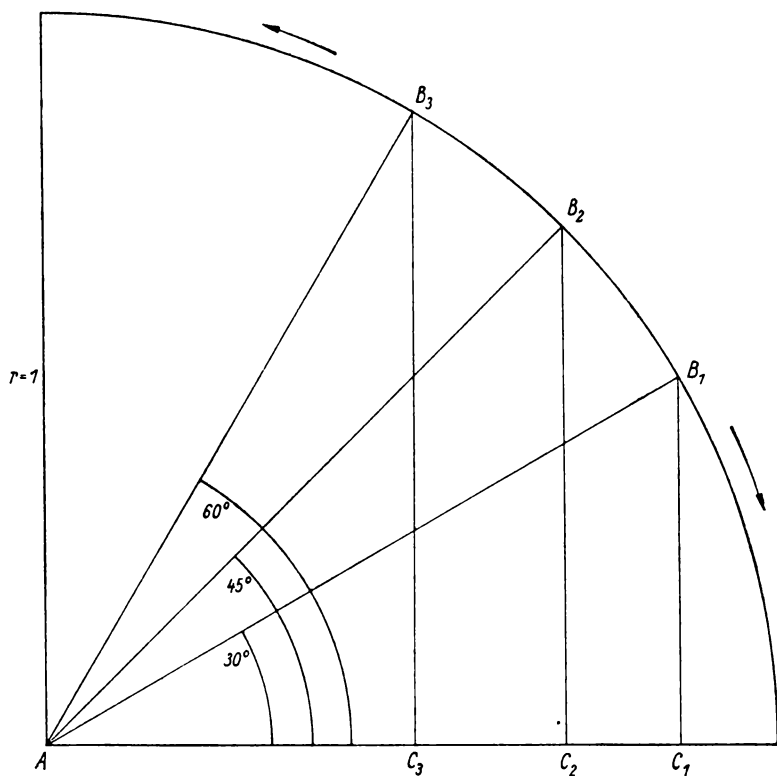


Bild 41

zuwenden. Zunächst bestimmen wir die Verhältnisse Sinus und Cosinus. Dazu verwenden wir den sogenannten Einheitskreis. Dies ist ein Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius 1. Als Radius kann man eine beliebige Strecke (1 cm, 1 dm usw.) verwenden, die man aber dann weiterhin als Maßeinheit benutzen muß. In unserem Falle verwenden wir den Radius $r = 1$ dm (Bild 41). In diesem Einheitskreis wird der $\sin 30^\circ$ durch das Verhältnis $\frac{B_1 C_1}{AB_1}$ dargestellt:

$$\sin 30^\circ = \frac{B_1 C_1}{AB_1}.$$

Da aber $AB_1 = 1$ ist, ergibt sich für $\sin 30^\circ$ die Beziehung

$$\sin 30^\circ = B_1 C_1.$$

Die Strecke $B_1 C_1$ kann man unmittelbar mit dem Lineal messen und erhält für

$$\sin 30^\circ = 0,50.$$

Für $\sin 45^\circ$ ergibt sich

$$\sin 45^\circ = \frac{B_2 C_2}{AB_2}.$$

Da $AB_2 = 1$ ist, erhält man weiter

$$\sin 45^\circ = B_2 C_2.$$

Nach Messung der Strecke $B_2 C_2$ ergibt sich

$$\sin 45^\circ = 0,71.$$

Für $\sin 60^\circ$ ergibt sich in gleicher Weise

$$\sin 60^\circ = 0,87.$$

Den Wert für $\sin 0^\circ$ kann man durch folgende Überlegungen leicht finden. Läßt man den Punkt B_1 auf dem Umfang des Kreises in Richtung des Pfeiles wandern, so wird die zugehörige Strecke BC immer kleiner. Hat der Winkel den Wert 0° erreicht, so hat die Länge der Strecke BC

(also die zugehörige Gegenkathete) den Wert Null. Der Radius als Hypotenuse behält natürlich den Wert 1.

Somit ergibt sich für

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin 0^\circ = 0.$$

Den Wert für $\sin 90^\circ$ kann man durch entsprechende Überlegungen finden. Läßt man den Punkt B_3 in Richtung des Pfeiles auf dem Umfang wandern, so wird die Strecke BC größer. Hat der Winkel den Wert 90° erreicht, so hat die Strecke BC die Länge 1. Der Radius als Hypotenuse behält auch hier wieder den Wert 1.

Somit ergibt sich

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sin 90^\circ = 1.$$

An dieser zeichnerischen Darstellung erkennt man, daß für Winkel zwischen 0° und 90° der Sinus zwischen 0 und 1 liegt. Die exakte Bestimmung der Sinus der einzelnen Winkel erfolgt im allgemeinen mit Hilfe von Reihenentwicklungen der höheren Mathematik, worauf wir an dieser Stelle nicht näher eingehen können.

Die Ergebnisse seien aber für einige Winkel in folgender Tabelle dargestellt:

Grad	sin	Grad	sin
0°	0,0000	50°	0,7660
10°	0,1736	60°	0,8660
20°	0,3420	70°	0,9397
30°	0,5000	80°	0,9848
40°	0,6428	90°	1,0000
45°	0,7071		

Derartige Tafeln mit geringeren Abständen zwischen den einzelnen Winkeln sind in den meisten Logarithmentafeln zu finden.

Mit Hilfe der gleichen Zeichnung kann die Bestimmung der cos-Werte erfolgen.

Für $\cos 30^\circ$ ergibt sich

$$\cos 30^\circ = \frac{AC_1}{AB_1}.$$

Da AB_1 als Radius gleich 1 ist, ergibt sich weiterhin

$$\cos 30^\circ = \frac{AC_1}{1} = AC_1.$$

Da $AC_1 = 0,87$ ist, erhält man

$$\cos 30^\circ = 0,87.$$

In gleicher Weise wie im Falle der sin-Werte kann man die cos-Werte für die entsprechenden anderen Winkel bestimmen. Man erhält

$$\cos 0^\circ = 1,00$$

$$\cos 45^\circ = 0,71$$

$$\cos 60^\circ = 0,50$$

$$\cos 90^\circ = 0,00.$$

Zur Darstellung der exakten Werte benötigt man wie im Falle der sin-Werte im allgemeinen die Reihenentwicklungen der höheren Mathematik, worauf wir an dieser Stelle wieder verzichten müssen. Die cos-Werte seien aber für einige Winkel in folgender Tabelle zusammengestellt:

Grad	cos	Grad	cos
0°	1,0000	50°	0,6428
10°	0,9848	60°	0,5000
20°	0,9397	70°	0,3420
30°	0,8660	80°	0,1736
40°	0,7660	90°	0,0000
45°	0,7071		

Zur zeichnerischen Darstellung der Tangens-Werte gehen wir wieder vom Einheitskreis aus (Bild 42).

In diesem Einheitskreis läßt sich der $\text{tg } 30^\circ$ durch das Verhältnis $\frac{B_1C}{AC}$ darstellen:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{B_1C}{AC}.$$

Da aber AC als Radius den Wert 1 hat, ergibt sich weiterhin

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{B_1C}{1}$$

oder

$$\text{tg } 30^\circ = B_1C.$$

Die Strecke B_1C kann man mit dem Lineal messen und erhält 0,58.

Es ist somit

$$\text{tg } 30^\circ = 0,58.$$

Der $\text{tg } 45^\circ$ ergibt sich wie folgt:

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{B_2C}{AC}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{B_2C}{1}$$

$$\text{tg } 45^\circ = B_2C$$

$$\text{tg } 45^\circ = 1,00.$$

In analoger Weise erhalten wir für

$$\text{tg } 60^\circ = 1,73.$$

Kommen wir nun zur Bestimmung der Werte $\text{tg } 0^\circ$ und $\text{tg } 90^\circ$. Den Wert $\text{tg } 0^\circ$ können wir durch folgende Überlegung finden. Läßt man den Punkt B_1 in Richtung des Punktes C auf dem Tangensträger wandern, so verkleinert sich der Winkel. Hat der Punkt B_1 den Punkt C erreicht, so ist der zugehörige Winkel 0° . Die Gegenkathete des Winkels 0° hat dann die Länge Null. Die Ankathete behält natürlich die Länge 1. Der Tangens des Winkels 0° als Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete läßt sich dann wie folgt angeben:

$$\text{tg } 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{tg } 0^\circ = 0.$$

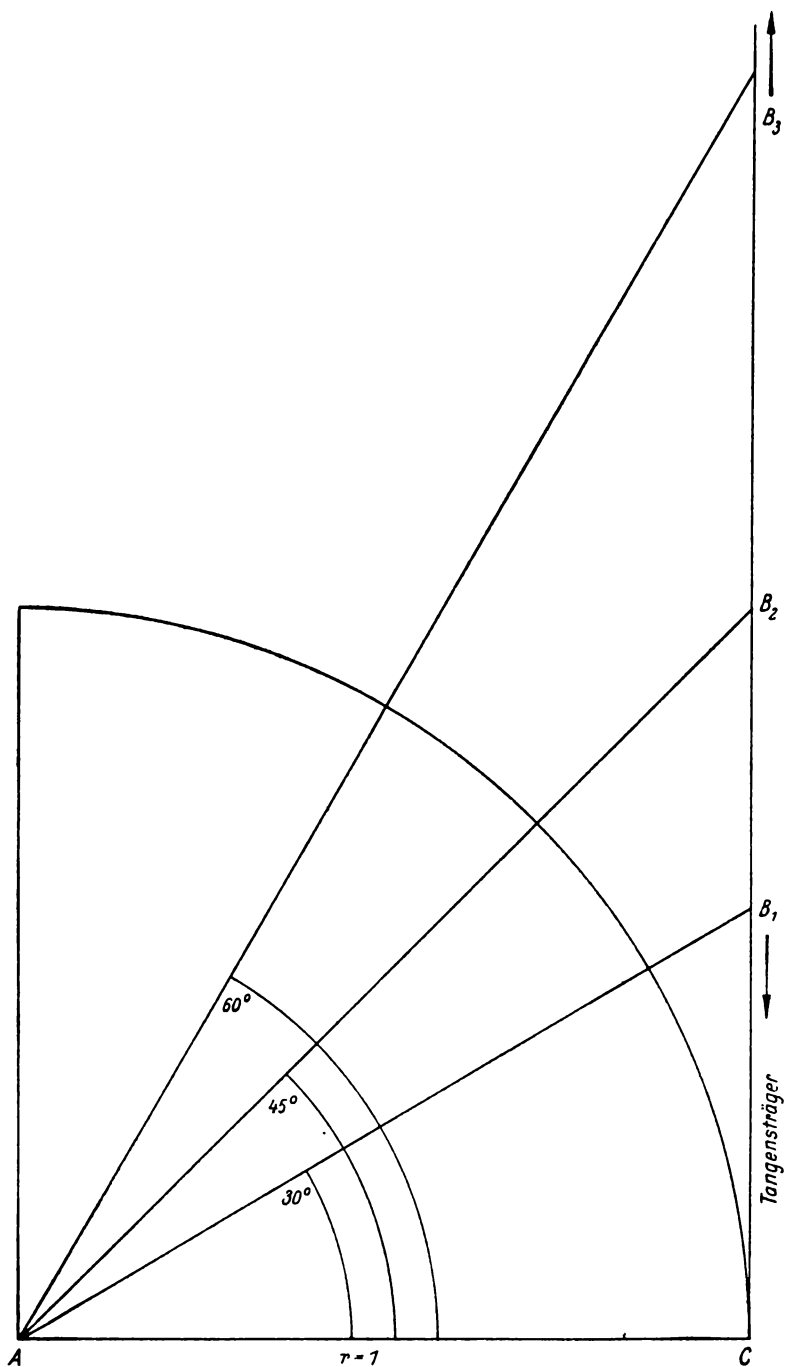


Bild 42

Den Wert $\operatorname{tg} 90^\circ$ kann man durch analoge Überlegungen finden. Läßt man den Punkt B_3 auf dem Tangensträger in Richtung des Pfeiles wandern, so wird die Gegenkathete immer größer. Damit vergrößert sich auch der zugehörige Winkel. Bei dem Winkel 90° ist die Gegenkathete über alle Grenzen gewachsen. Man sagt, daß sie unendlich groß geworden ist. Symbolisch stellt man dies durch das folgende Zeichen dar:

$$\infty.$$

Die Ankathete behält natürlich die Länge 1.

Somit ergibt sich

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty.$$

Die weiteren Werte des Tangens für verschiedene Winkel stellen wir in folgender Tabelle dar:

Grad	tg	Grad	tg
0°	0,0000	50°	1,1918
10°	0,1763	60°	1,7321
20°	0,3640	70°	2,7475
30°	0,5774	80°	5,6713
40°	0,8391	90°	∞
45°	1,0000		

Auf eine zeichnerische Bestimmung der ctg -Werte soll verzichtet werden. In der folgenden Tabelle seien einige ctg -Werte angegeben:

Grad	ctg	Grad	ctg
0°	∞	50°	0,8391
10°	5,6713	60°	0,5774
20°	2,7475	70°	0,3640
30°	1,7321	80°	0,1763
40°	1,1918	90°	0,0000
45°	1,0000		

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch die $\sin$ -, $\cos$ -, tg - und ctg -Werte im Bereich von 0° bis 90° graphisch darstellen. Wir haben

jeweils die einzelnen Wertepaare obiger Wertetafeln in ein Koordinatensystem einzutragen und die einzelnen Punkte durch einen Linienzug möglichst glatt zu verbinden. Die Maßstäbe auf den Koordinatenachsen wollen wir im Rahmen unserer Darstellung beliebig wählen.

Wir bezeichnen den im Gradmaß gemessenen Winkel mit x und die zugehörigen Werte der Winkelfunktionen mit y .

Es ergeben sich folgende Funktionsbilder (Bild 43 und 44):

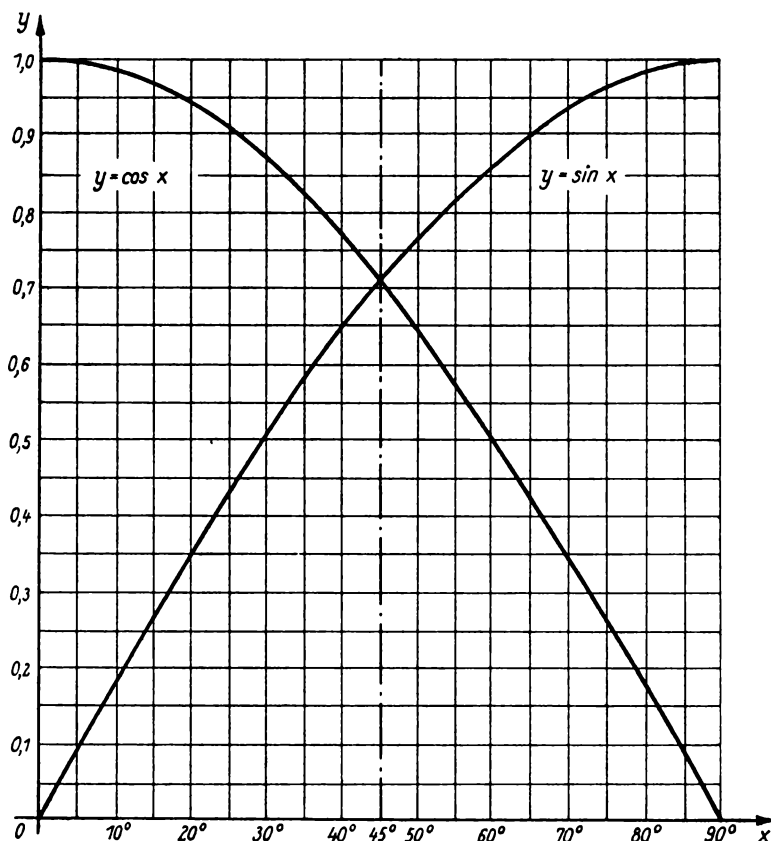


Bild 43

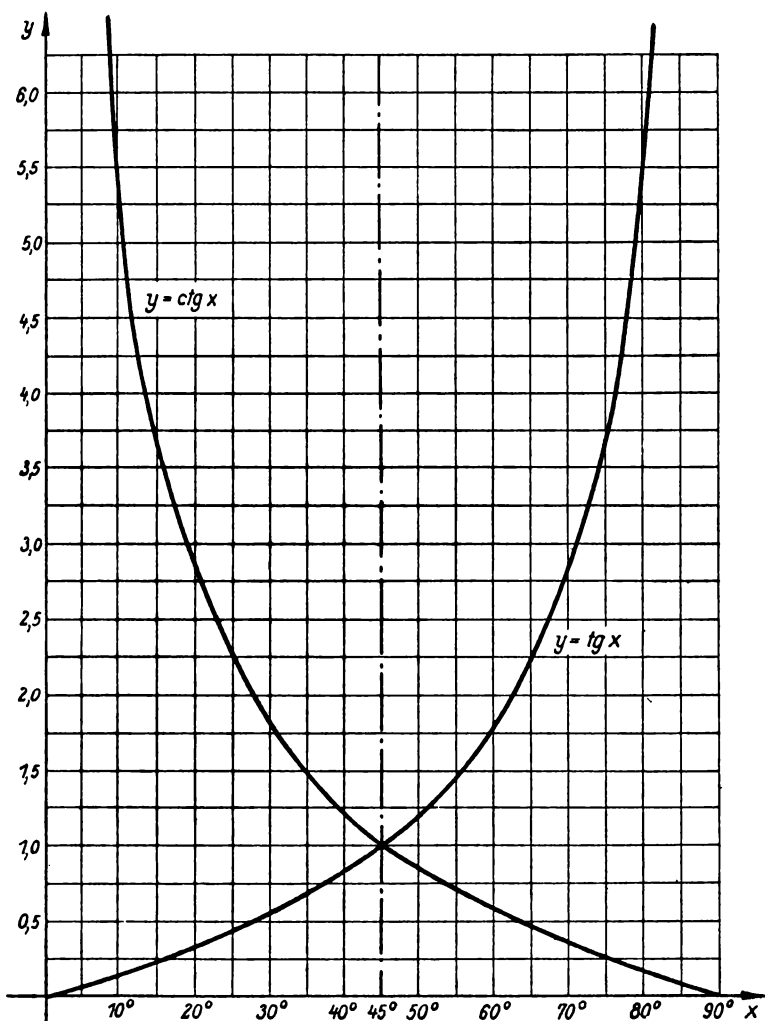


Bild 44

Die sin-, cos-, tg- und ctg-Werte werden für einige Winkel oft in Form von Wurzelausdrücken angegeben. In der folgenden Tabelle sind diese Werte ohne Beweisführung zusammengestellt.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$
cos	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$

11.13 Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen

Im folgenden Abschnitt sollen einige Zusammenhänge zwischen den einzelnen Winkelfunktionen gezeigt werden. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge wird uns dazu verhelfen, spätere trigonometrische Rechnungen zu vereinfachen. Diese Beziehungen sind zunächst nur für Winkel gültig, die höchstens 90° betragen.

Aus den bisherigen Darlegungen wird man erkannt haben, daß folgende Beziehungen bestehen:

$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$
--

Der allgemeine Beweis hierfür kann von den Lesern selbst leicht als Übungsaufgabe ausgeführt werden.

Diese Beziehungen besagen, daß die Funktion eines Winkels gleich der Cofunktion des Komplementwinkels ist. Sinus und Cosinus auf der einen Seite und Tangens und Cotangens andererseits sind zueinandergehörige Funktionen und Cofunktionen. Der Cosinus ist die Cofunktion des Sinus und der Sinus ist die Cofunktion des Cosinus. Entsprechendes gilt für Tangens und Cotangens. Unter dem Komplementwinkel eines Winkels α versteht man den Winkel β , der ihn zu 90° ergänzt; d. h. es ist $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Obige Beziehungen wollen wir uns an einigen Beispielen klarmachen. Wir hatten festgestellt, daß $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ist. Nach unserer Formel müßte dann der $\cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$ auch gleich $\frac{1}{2}$ sein. Dies hatten wir

tatsächlich festgestellt. Auch haben wir zum Beispiel gesehen, daß $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$ ist. Auch das stimmt mit obigen Formeln überein. Wir wollen jetzt weitere Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen ableiten. Dazu verwenden wir das rechtwinklige Dreieck ABC :

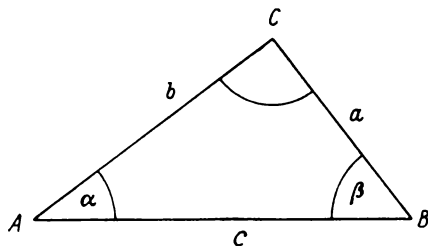


Bild 45

In diesem Dreieck gilt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Wir quadrieren diese beiden Ausdrücke und erhalten¹:

$$\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{und} \quad \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$$

oder

$$c^2 \cdot \sin^2 \alpha = a^2 \quad \text{und} \quad c^2 \cdot \cos^2 \alpha = b^2.$$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dieser Satz besagt, daß im rechtwinkligen Dreieck die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat ist.

Setzen wir in diesen Ausdruck für $a^2 = c^2 \cdot \sin^2 \alpha$ und für $b^2 = c^2 \cdot \cos^2 \alpha$ ein, so ergibt sich

$$c^2 \cdot \sin^2 \alpha + c^2 \cdot \cos^2 \alpha = c^2.$$

Wir dividieren diese Gleichung durch c^2 und erhalten

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}.$$

Diese Beziehung bezeichnet man als den Winkelpythagoras.

¹ Es ist allgemein üblich, für $\sin \alpha \cdot \sin \alpha = (\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$ zu schreiben, ebenso bei den übrigen Winkelfunktionen. Damit darf nicht verwechselt werden: $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha^2)$.

Kennt man den Sinuswert eines Winkels, so läßt sich mit Hilfe obiger Beziehung der zugehörige Cosinuswert berechnen. Es ist nicht notwendig, den Winkel selbst zu kennen. Dabei ist zunächst zu beachten, daß wir unsere Betrachtungen auf Winkel zwischen 0° und 90° beschränkt haben. Die Allgemeingültigkeit müßte noch gezeigt werden.

Beispiele :

1. Es ist der Sinus eines Winkels bekannt. Er ist $\frac{1}{2}$.

Der Cosinus ist zu berechnen.

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

2. Es ist der Cosinus eines Winkels bekannt. Er ist $\frac{1}{3}$.

Der Sinus ist zu berechnen.

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \sqrt{2}.$$

Weiterhin wollen wir nun die Richtigkeit folgender Formel zeigen :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Im obigen rechtwinkligen Dreieck gilt, wie wir bereits gesehen haben :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Außerdem gilt :

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}.$$

Setzt man für $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ und $\frac{a}{b}$ entsprechend ihrer Definition $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ ein, so folgt sofort die Richtigkeit unserer Behauptung:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Zuletzt wollen wir noch zeigen, daß die Beziehung besteht:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1}.$$

An Hand unseres rechtwinkligen Dreiecks ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Man sieht weiter, daß

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

ist. Setzen wir für $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ wieder ihre Definitionen $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{ctg} \alpha$ ein, so ergibt sich obige Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer Beziehungen zwischen Winkelfunktionen, auf deren Darstellung wir aber verzichten wollen.

11.2 Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

Im folgenden Abschnitt wollen wir die im vorigen Abschnitt genannten Grundbegriffe der ebenen Trigonometrie zu Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck verwenden. Die Lösung derartiger Aufgaben führen wir stets in zwei Schritten aus. Im 1. Schritt stellen wir die allgemeinen Formeln für die Lösungen auf. Im 2. Schritt setzen wir die gegebenen bzw. die jeweils schon berechneten Werte in diese allgemeinen Lösungsformeln ein und finden die numerischen Lösungen.

1. Beispiel: In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:

$$b = 0,152 \text{ m und } a = 0,345 \text{ m.}$$

Gesucht sind: c , α und β .

Bei der Lösung derartiger Aufgaben ist es notwendig, daß zwei Dreiecksstücke gegeben sind. Ein drittes Stück ist dadurch festgelegt, daß man ein rechtwinkliges Dreieck berechnen will. Dieses dritte Stück ist der rechte Winkel. Zur Berechnung von Dreiecken braucht man stets drei Stücke. Darauf werden wir später näher eingehen.

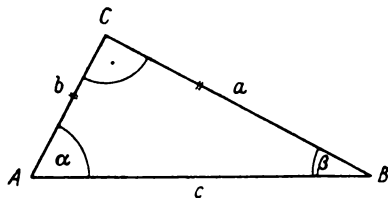


Bild 46

Kommen wir nun zur Lösung des 1. Beispiels.

Im 1. Schritt legen wir die allgemeine Lösung fest. Zunächst müssen wir die noch nicht bekannten Winkel α und β bestimmen.

Der Winkel α ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

da die Seiten a und b bekannte Größen sind. Die Seite c findet man aus der folgenden Beziehung:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

da die Seite a und der nunmehr berechnete Winkel α als gegeben vorausgesetzt werden können. Aus der letzten Formel ergibt sich c als

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Den Winkel β findet man dann aus der Winkelsumme im Dreieck, wobei $\gamma = 90^\circ$ ist:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ \\ \beta &= 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Man wird aus obigen Betrachtungen erkannt haben, daß der 1. Schritt drei nacheinander auszuführende Teilschritte umfaßt:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
- 2) $c = \frac{a}{\sin \alpha}$
- 3) $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Im 2. Schritt setzen wir in diese Formeln die numerischen Werte ein und rechnen aus.

Um α zu bestimmen, haben wir für $a = 0,345$ und für $b = 0,152$ in die Formel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ einzusetzen und daraus $\operatorname{tg} \alpha$ bzw. α zu bestimmen. Diese Rechnungen werden mit Hilfe von Logarithmen ausgeführt.

$\lg a$	0,5378 — 1	+
$\lg b$	0,1818 — 1	—
$\lg \operatorname{tg} \alpha$	0,3560	

Wir erhalten als Resultat unserer logarithmischen Rechnung

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0,3560.$$

Hieraus berechnet man jedoch nicht zunächst $\operatorname{tg} \alpha$ und anschließend α ; sondern α läßt sich direkt aus $\lg \operatorname{tg} \alpha$ berechnen. In unseren Logarithmentafeln sind nämlich Tafeln vorhanden, die unmittelbar die Logarithmen der einzelnen Winkelfunktionen enthalten. Diese Tafeln sind meist so eingerichtet, daß der Winkel von Minute zu Minute fortschreitet. Für unser Beispiel würden wir auf diese Weise

$$\alpha = 66^\circ 13'$$

erhalten.

Bei der Benutzung dieser Tafeln muß noch auf folgendes hingewiesen werden. Wollen wir zum Beispiel den Logarithmus von $\operatorname{tg} 23^\circ$ aufschlagen, so finden wir

$$\lg \operatorname{tg} 23^\circ = 9,6279.$$

Der Logarithmus 9,6279 deutet darauf hin, daß der zugehörige Numerus eine zehnstellige Zahl sein müßte.

Weiterhin findet man zum Beispiel für

$$\lg \operatorname{tg} 5^\circ = 8,9420.$$

In diesem Falle würde sich als Numerus eine neunstellige Zahl ergeben. Andererseits haben wir aber festgestellt, daß der Tangens im Bereich von 0 bis 45° zwischen 0,0000 und 1,0000 liegt. Die Logarithmen dieser

Werte sind daher negative Zahlen. In den Tafeln, die die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen enthalten, ist in den angegebenen Fällen die Zahl 10 abzuziehen. Diese 10 ist aber nicht geschrieben worden. Der Grund für diese Schreibweise ist in der drucktechnischen Seite der Tafeln zu suchen.

Für unsere beiden Beispiele können wir somit schreiben:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 23^\circ &= 9,6279 - 10 \\ &= 0,6279 - 1 \\ \text{und} \quad \lg \operatorname{tg} 5^\circ &= 8,9420 - 10 \\ &= 0,9420 - 2 . \end{aligned}$$

In den Fällen, in denen der Logarithmus der Winkelfunktion bereits eine positive Zahl ist, ist eine derartige Schreibweise nicht vorhanden. Kommen wir nun wieder zurück zu unserem Beispiel.

Wir berechnen jetzt c nach der Formel $c = \frac{a}{\sin \alpha}$

$\lg a$	1 - 1	
$\lg \sin \alpha$	0,5378 - 1	+
$\lg c$	0,9615 - 1	-
	0,5763 - 1	=

$c = 0,377 \text{ m.}$

Der Winkel β ergibt sich sofort wie folgt:

$$\begin{aligned} \beta &= 90^\circ - \alpha \\ \beta &= 90^\circ - 66^\circ 13' \\ \beta &= 23^\circ 47'. \end{aligned}$$

Selbstverständlich hätte man die Seite c nach dem Lehrsatz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ bestimmen können. Diesen Weg schlägt man meist jedoch nicht ein, weil die in der Formel auftretende Addition das Anwenden logarithmischer Rechnungen erschwert.

2. Beispiel: In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:

$c = 74,25 \text{ cm}$ und $\beta = 88^\circ 14'$. Gesucht sind: a , b und α .

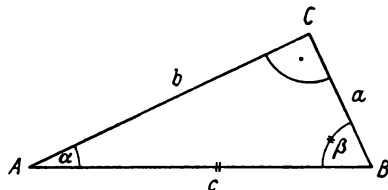


Bild 47

Im 1. Schritt bestimmen wir die allgemeine Lösung:

$$1) \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{oder} \quad a = c \cdot \cos \beta$$

$$2) \sin \beta = \frac{b}{c} \quad \text{oder} \quad b = c \cdot \sin \beta$$

$$3) \quad \alpha = 90^\circ - \beta.$$

Im 2. Schritt setzen wir die numerischen Werte ein. Zunächst berechnen wir die Seite a mit Hilfe der Formel $a = c \cdot \cos \beta$:

$\lg c$	1,8707	+	$a = 2,29 \text{ cm.}$
$\lg \cos \beta$	0,4890 — 2	+	
$\lg a$	0,3597		

Die Seite b berechnen wir nach der Formel $b = c \cdot \sin \beta$:

$\lg c$	1,8707	+	$b = 74,21 \text{ cm.}$
$\lg \sin \beta$	0,9998 — 1	+	
$\lg b$	1,8705		

Der Winkel α ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \alpha &= 90^\circ - \beta \\ \alpha &= 90^\circ - 88^\circ 14' \\ \alpha &= 1^\circ 46'. \end{aligned}$$

3. Beispiel: Um die Höhe einer Hauswand zu messen, wird in 18 m Abstand von der Hauswand der Dachrand anvisiert. Man findet 39° . Wie hoch ist die Hauswand? (Es ist zu berücksichtigen, daß die Augenhöhe bei der Beobachtung 1,50 m ist [Bild 48].)

Wir bezeichnen den Abstand Beobachter-Hauswand mit d ($d = 18 \text{ m}$), den Erhebungswinkel mit α ($\alpha = 39^\circ$) und die Höhe der Hauswand mit h . Zunächst bestimmen wir h^* aus den gegebenen Stücken allgemein:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h^*}{d} \quad \text{oder} \quad h^* = d \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Im 2. Schritt setzen wir die numerischen Werte ein und führen die Rechnung durch:

$\lg d$	1,2553	+	$h^* = 14,58 \text{ m.}$
$\lg \operatorname{tg} \alpha$	0,9084 — 1	+	
$\lg h^*$	1,1637		

Um die Höhe der Hauswand h zu erhalten, müssen wir zu h^* noch 1,50 m addieren und erhalten:

$$\begin{aligned} h &= h^* + 1,50 \\ h &= 14,58 + 1,50 \\ h &= 16,08. \end{aligned}$$

Das Haus hat also eine Höhe von 16,08 m.

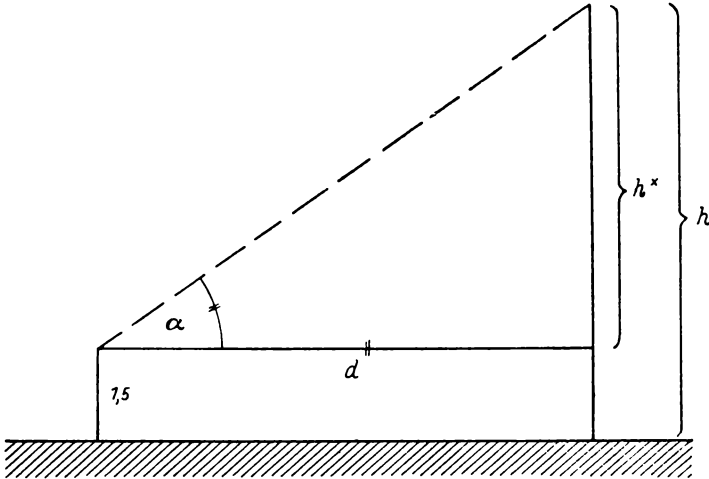


Bild 48

11.3 Die trigonometrischen Funktionen von Winkeln, die zwischen 90° und 180° liegen

11.31 Die Sinuswerte und Cosinuswerte für Winkel zwischen 90° und 180°

Bei Berechnungen kann der Fall auftreten, daß Winkel zwischen 90° und 180° liegen. In diesem Abschnitt soll es nun unsere Aufgabe sein, die Winkelfunktionen derartiger Winkel zu bestimmen.

Wir wenden uns zunächst den Sinus- und Cosinuswerten zu und verwenden wieder den Einheitskreis. Wir zeichnen diesmal den I. und II. Quadranten (Bild 49).

Wie wir bereits im Abschnitt 11.1 erklärt haben, ist im Einheitskreis der Sinus eines Winkels durch den senkrechten Abstand zwischen dem Schnittpunkt des freien Schenkels des betreffenden Winkels mit dem Umfang und dem Durchmesser gegeben. In unserer Zeichnung wird

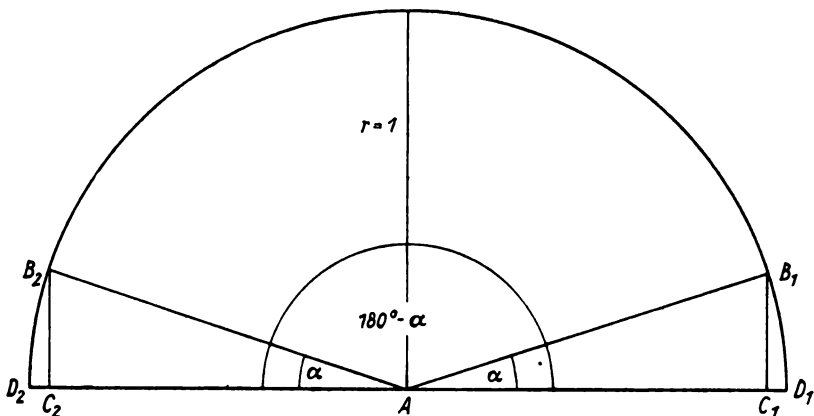


Bild 49

zum Beispiel der Sinus des Winkels α durch die Länge der Strecke B_1C_1 dargestellt. Für unsere Rechnungen wollen wir annehmen, daß der Winkel α spitz ist ($\alpha < 90^\circ$). Dann ist der Winkel $(180^\circ - \alpha)$ ein stumpfer. Den Sinus dieses Winkels wollen wir jetzt festlegen. Nach der obigen Erklärung des Sinus entspricht dem $\sin(180^\circ - \alpha)$ der senkrechte Abstand B_2C_2 :

$$\sin(180^\circ - \alpha) = B_2C_2.$$

Da nun $B_2C_2 = B_1C_1$ ist, ergibt sich weiterhin:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = B_1C_1.$$

Wie wir bereits wissen, ist im I. Quadranten $B_1C_1 = \sin \alpha$.

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha}.$$

Damit haben wir die Sinus von Winkeln, die im II. Quadranten liegen, auf die Sinus von Winkeln zurückgeführt, die im I. Quadranten liegen. Diese Sinuswerte und deren Logarithmen sind in Tafeln vorhanden. Kommen wir nun zur Bestimmung der Cosinuswerte. Wie bekannt, läßt sich im I. Quadranten der Cosinus des Winkels α durch die Länge der Strecke AC_1 darstellen ($\cos \alpha = AC_1$). Er wird also auf dem Durchmesser des Einheitskreises gemessen.

In analoger Weise bestimmen wir nun $\cos(180^\circ - \alpha)$:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = AC_2.$$

Weiterhin hat die Strecke AC_2 die gleiche Größe wie die Strecke AC_1 . Wir müssen aber beachten, daß die Strecke AC_2 der Strecke AC_1 entgegengesetzt vom Ursprung aus verläuft. Dies drückt die Mathematik durch das negative Vorzeichen aus. Unter der Beachtung obigen Sachverhalts ergibt sich damit für die Beziehung zwischen AC_2 und AC_1 :

$$AC_1 = -AC_2$$

oder

$$AC_2 = -AC_1.$$

Setzen wir nun für AC_2 den Wert $-AC_1$ in die Beziehung

$$\cos(180^\circ - \alpha) = AC_2$$

ein, so erhalten wir

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -AC_1.$$

Wie wir festgestellt haben, ist $AC_1 = \cos \alpha$. Daher erhalten wir schließlich

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

Auch im Falle der Cosinusfunktion hat man somit erreicht, daß sich die Funktionswerte von Winkeln des II. Quadranten durch Funktionswerte von Winkeln des I. Quadranten darstellen lassen.

Wir wollen jetzt dazu einige Beispiele rechnen.

- 1) Es ist der Sinus von 120° zu bestimmen. Wir setzen $180^\circ - \alpha = 120^\circ$. Daraus erhalten wir für $\alpha = 60^\circ$. Es ist also

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\sin 120^\circ = 0,8660.$$

- 2) Wie groß ist $\sin 180^\circ$? Wir setzen wieder $180^\circ - \alpha = 180^\circ$. Daraus ergibt sich für $\alpha = 0^\circ$. Somit erhalten wir

$$\sin 180^\circ = \sin 0^\circ$$

$$\sin 180^\circ = 0.$$

- 3) Es ist der Cosinus von 120° zu bestimmen. Wir setzen $180^\circ - \alpha = 120^\circ$. Der Winkel α beträgt somit 60° . Es gilt dann

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -0,5000.$$

- 4) Wie groß ist $\cos 180^\circ$? Für α ergibt sich in diesem Fall wieder 0° ($\alpha = 0^\circ$). Somit erhalten wir

$$\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ$$

$$\cos 180^\circ = -1.$$

An diesen Beispielen kann man bereits sehen, daß die Sinuswerte im Bereich von 90° bis 180° von 1 auf 0 fallen. Weiterhin sieht man, daß die Cosinuswerte im Bereich von 90° bis 180° von 0 auf -1 fallen. Wir wollen jetzt die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion im gesamten Bereich von 0° bis 180° graphisch darstellen:

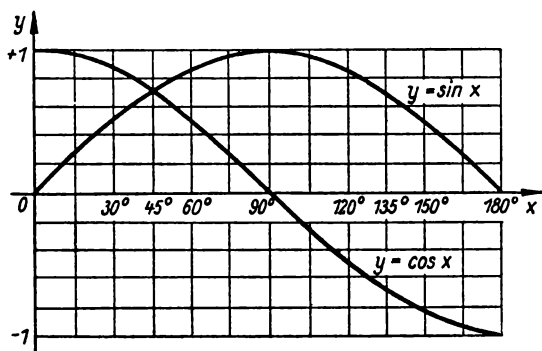


Bild 50

Umgekehrt kann man auch zu jedem Funktionswert den bzw. die zugehörigen Winkel bestimmen. Bei den praktischen Rechnungen sind meist die Logarithmen der Funktionswerte gegeben. Hierauf gehen wir bei speziellen Aufgaben ein.

11.32 Die Tangenswerte und Cotangenswerte für Winkel zwischen 90° und 180°

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns der Bestimmung der Tangens- und Cotangenswerte für Winkel zwischen 90° und 180° zuwenden. Dazu verwenden wir wieder den Einheitskreis (siehe Bild 51).

Wir haben im Abschnitt 11.1 gesehen, daß der Tangens eines Winkels als Länge einer Strecke auf dem Tangensträger dargestellt werden kann. In unserer Zeichnung wird zum Beispiel der Tangens des Winkels α durch die Länge der Strecke B_1C dargestellt.

Für unsere Rechnungen wollen wir wieder annehmen, daß der Winkel α spitz ist ($\alpha < 90^\circ$). Dann ist der Winkel $(180^\circ - \alpha)$ stumpf. Für diesen Winkel wollen wir den Tangens bestimmen. Der freie Schenkel des Winkels $(180^\circ - \alpha)$ schneidet jedoch den Tangensträger nicht unmittel-

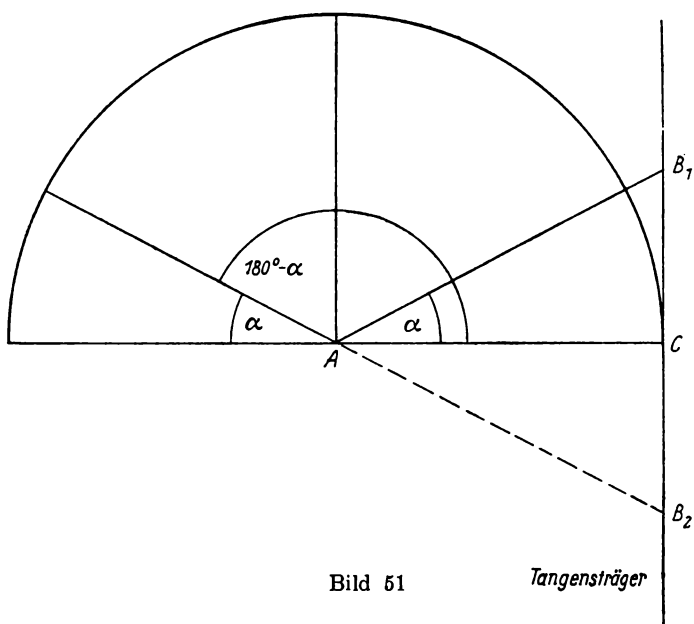


Bild 51

Tangensträger

bar. Dafür schneidet aber die rückwärtige Verlängerung des freien Schenkels den Tangensträger in B_2 . Wir verstehen daher unter $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ die Länge der Strecke B_2C :

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = B_2C.$$

Da nun aber B_2C die gleiche Länge wie B_1C hat, können wir B_2C durch B_1C ersetzen. Dabei müssen wir jedoch beachten, daß B_2C die entgegengesetzte Richtung wie B_1C hat. Es gilt also:

$$B_1C = -B_2C$$

oder

$$B_2C = -B_1C.$$

Ersetzen wir nun in dem Ausdruck

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = B_2C$$

die Strecke B_2C durch die Strecke $-B_1C$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -B_1C.$$

Da $B_1C = \operatorname{tg} \alpha$ ist, können wir weiterhin schreiben:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

In entsprechender Weise findet man, daß für den Cotangens des Winkels $(180^\circ - \alpha)$ gilt:

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Wie man sieht, kann man mit Hilfe dieser Formeln die Tangenswerte und Cotangenswerte für Winkel, die zwischen 90° und 180° liegen, durch die Tangenswerte und Cotangenswerte der Winkel ausdrücken, die im I. Quadranten, also zwischen 0° und 90° liegen.

Auch hierzu wollen wir einige Beispiele rechnen.

1. Es ist der Tangens von 120° zu bestimmen. Wir setzen $180^\circ - \alpha = 120^\circ$. Dann ergibt sich $\alpha = 60^\circ$. Es ist also

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -1,7321.$$

2. Es ist der Tangens von 180° zu bestimmen. Wir setzen wieder $180^\circ - \alpha = 180^\circ$. Es ergibt sich für $\alpha = 0^\circ$. Somit erhalten wir

$$\operatorname{tg} 180^\circ = -\operatorname{tg} 0^\circ$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0.$$

3. Wie groß ist $\operatorname{ctg} 120^\circ$? In diesem Fall ist wieder $\alpha = 60^\circ$. Es ist

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = -\operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = -0,5774.$$

4. Weiterhin ist $\operatorname{ctg} 180^\circ$ zu ermitteln. Der Winkel α beträgt 0° .

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = -\operatorname{ctg} 0^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = -\infty.$$

An diesen Beispielen sieht man bereits, daß die Cotangenswerte im Bereich von 90° bis 180° von 0 auf $-\infty$ fallen.

Die Tangenswerte steigen in diesem Bereich von $-\infty$ auf 0 an. Wir hatten aber bereits festgestellt, daß bei 90° der Tangens den Wert ∞ annimmt. Man sagt, die Tangensfunktion hat bei 90° eine sogenannte Sprungstelle. Der Funktionswert springt an dieser Stelle von $+\infty$ auf $-\infty$ bzw. umgekehrt.

Wir stellen jetzt die Tangenswerte und die Cotangenswerte im gesamten Bereich von 0° bis 180° graphisch dar.

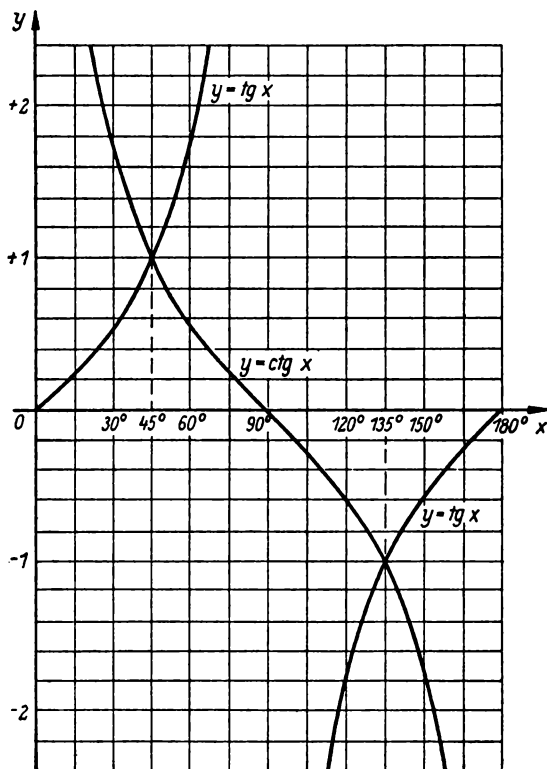


Bild 52

Umgekehrt kann man zu jedem Funktionswert natürlich den bzw. die zugehörigen Winkel bestimmen. Darauf werden wir bei praktischen Anwendungen eingehen.

11.4 Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck

Im folgenden Abschnitt wollen wir Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck ausführen. Wir wollen uns dabei auf die beiden wichtigsten Sätze, den Sinussatz und den Cosinussatz, beschränken.

11.41 Der Sinussatz

Beginnen wir mit der Herleitung des Sinussatzes und verwenden dazu ein Dreieck, in dem kein Winkel größer als 90° ist. Es soll sich um ein sogenanntes spitzwinkliges Dreieck handeln (Bild 53).

In dieses Dreieck zeichnen wir die Höhe $h_c = CD$ ein, die auf der Seite $AB = c$ senkrecht steht (Bild 54).

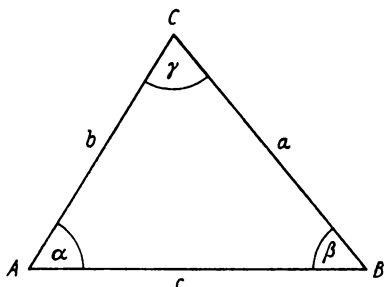


Bild 53

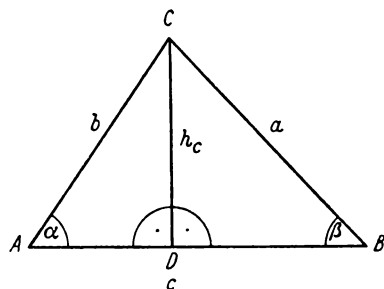


Bild 54

Die bei D entstehenden Winkel sind rechte Winkel (90°). Somit sind zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und BDC entstanden. Auf diese Dreiecke können wir sämtliche für rechtwinklige Dreiecke gültigen Sätze anwenden.

Im Dreieck ADC gilt zum Beispiel

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \quad \text{oder} \quad h_c = b \cdot \sin \alpha.$$

Im Dreieck BDC gilt zum Beispiel

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a} \quad \text{oder} \quad h_c = a \cdot \sin \beta.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} a \cdot \sin \beta &= h_c = b \cdot \sin \alpha \\ a \cdot \sin \beta &= b \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

oder in Form einer Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als einen Teil des Sinussatzes. Es können natürlich auch Dreiecke auftreten, in denen ein Winkel größer als 90° ist. Derartige Dreiecke bezeichnet man als stumpfwinklige Dreiecke. Auch für diesen Fall werden wir die Richtigkeit obiger Proportion zeigen.

Es sei ein Dreieck folgender Gestalt gegeben :

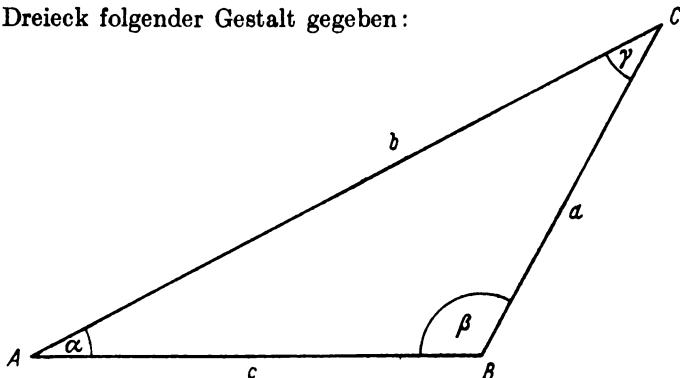


Bild 55

In unserem Fall ist der Winkel β größer als 90° . In analoger Weise wie im Falle des spitzwinkligen Dreiecks zeichnen wir jetzt die Höhe h_c ein. Es ist also die Strecke einzuzichnen, die auf der dem Punkt C gegenüberliegenden Seite senkrecht steht und durch C geht. Wir erhalten das Bild 56.

In unserem Falle steht also die Höhe h_c außerhalb des Dreiecks ABC auf der Verlängerung von $AB = c$ senkrecht. Auch in diesem Falle haben wir zwei rechtwinklige Dreiecke erhalten :

Dreieck ADC und Dreieck BDC .

Auf diese Dreiecke können wir wieder die für rechtwinklige Dreiecke bekannten Sätze anwenden.

Im Dreieck ADC gilt zum Beispiel

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \quad \text{oder} \quad h_c = b \cdot \sin \alpha.$$

Im Dreieck BDC gilt zum Beispiel

$$\sin(180^\circ - \beta) = \frac{h_c}{a}.$$

Da nun

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

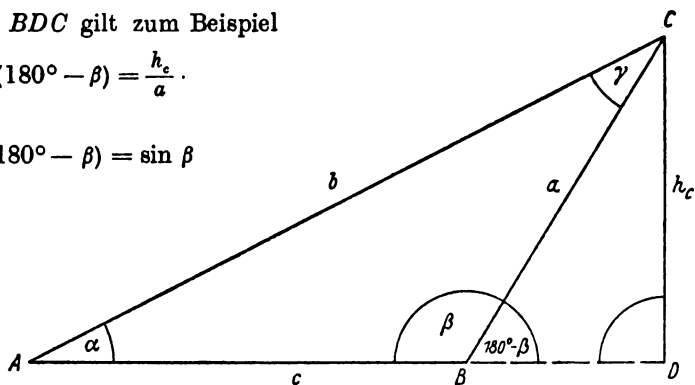


Bild 56.

ist, ergibt sich weiterhin

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a} \quad \text{oder} \quad h_c = a \cdot \sin \beta.$$

Aus den beiden Ausdrücken für h_c ergibt sich weiter

$$a \cdot \sin \beta = h_c = b \cdot \sin \alpha$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$$

oder in Form einer Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Der Sinussatz behält also für das stumpfwinklige Dreieck seine volle Richtigkeit.

Anstelle von h_c hätte man in das Dreieck auch die Höhen h_a oder h_b einzeichnen können (Bild 57):

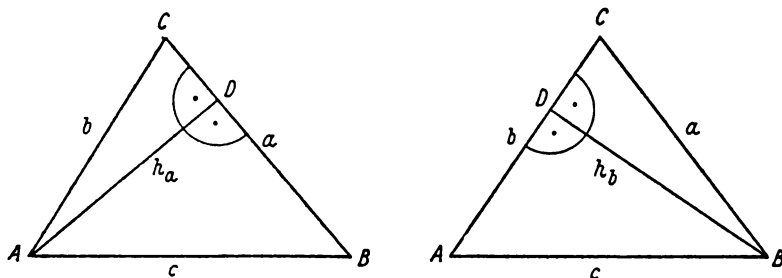


Bild 57

Wendet man den gleichen Berechnungsweg wie bei h_c für die Höhen h_a und h_b an, so erhält man im Falle h_a die Proportion

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

und im Falle h_b die Proportion

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

Selbstverständlich sind diese Beziehungen auch für die entsprechenden stumpfwinkligen Dreiecke gültig. Es sei den Lesern empfohlen, die zugehörigen Beweise selbst durchzuführen.

Wir haben also für jedes beliebige Dreieck ABC drei allgemeingültige Beziehungen gefunden:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \\ \frac{a}{c} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden oft auch in Form einer fortlaufenden Proportion (vgl. 4. Kapitel) geschrieben:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c.$$

In Worten kann man diesen Sinussatz wie folgt ausdrücken:

Die Sinus der Winkel eines Dreiecks verhalten sich zueinander wie die gegenüberliegenden Seiten.

Es sollen nun einige Beispiele mit Hilfe des Sinussatzes gerechnet werden.

1. Beispiel: Es sind folgende Stücke eines Dreiecks gegeben: $a = 20$ cm, $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 70^\circ$.

Gesucht sind: b , c und γ .

Die Lösung einer derartigen Aufgabe geht wieder wie beim rechtwinkligen Dreieck in zwei Schritten vor sich. Der 1. Schritt führt zur Auf-

stellung der allgemeinen Lösungsformel. Im 2. Schritt werden dann in diese allgemeinen Lösungsformeln die numerischen Werte eingesetzt und ausgerechnet.

Diese beiden Schritte wollen wir nun zeigen. Es sei an dieser Stelle gleich erwähnt, daß wir unsere Rechnungen so durchführen, daß möglichst alle Rechnungen auf die gegebenen Ausgangswerte zurückgeführt werden. Dadurch soll vermieden werden, daß sich Fehler, die sich am Anfang der Rechnung eingeschlichen haben könnten, durch sämtliche Rechnungen hindurchziehen.

1. Schritt:

Aus den drei gegebenen Stücken können wir mit Hilfe des Sinussatzes

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ die Größe b berechnen. Es ergibt sich

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Weiterhin werden nun c und γ gesucht. Die Strecke c findet man leicht nach dem Sinussatz $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$:

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

In diesem Ausdruck für c kommt der Winkel γ vor. Dieser Winkel ist uns aber noch nicht bekannt. Er läßt sich leicht berechnen, wenn man beachtet, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Wie man aus den Ausführungen erkannt haben wird, umfaßt der 1. Schritt drei nacheinander auszuführende Teilschritte, die in allgemeiner Darstellung wie folgt auszuführen sind:

$$1) \ b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$2) \ \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$3) \ c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

2. Schritt:

Im 2. Schritt sind diese Ausdrücke numerisch zu berechnen. Dies geschieht, wo es möglich ist, mit Hilfe der Logarithmenrechnung.

Zunächst berechnen wir $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$:

lg a	1,3010	+
lg sin β	0,9730 — 1	+
lg (a · sin β)	1,2740	+
lg sin α	0,6990 — 1	—
lg b	1,5750	

$b = 37,58 \text{ cm.}$

Der Winkel $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ ergibt sich sofort :

$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ$$

$$\gamma = 80^\circ.$$

Mit Hilfe dieses Winkels kann $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$ berechnet werden :

lg a	1,3010	+
lg sin γ	0,9934 — 1	+
lg (a · sin γ)	1,2944	+
lg sin α	0,6990 — 1	—
lg c	1,5954	

$c = 39,39 \text{ cm.}$

Die gesuchten Stücke sind somit :

$$b = 37,58 \text{ cm}$$

$$c = 39,39 \text{ cm}$$

$$\gamma = 80^\circ.$$

2. Beispiel: Es sind folgende Stücke eines Dreiecks gegeben: $a = 7 \text{ cm}$,
 $b = 5 \text{ cm}$ und $\alpha = 40^\circ$.

Gesucht sind: c , β und γ .

Auch im Falle dieses Beispiels führen wir die beiden erwähnten Schritte nacheinander aus. Im ersten Schritt sind wieder die Lösungen allgemein anzugeben.

Aus den bekannten Stücken a , b und α können wir zunächst nur β berechnen. Es ergibt sich mit Hilfe des Sinussatzes

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

oder

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}.$$

Danach berechnen wir den Winkel γ . Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergibt sich für γ

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Mit Hilfe des Winkels γ kann jetzt c berechnet werden. Es gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$$

oder

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Wie man gesehen haben wird, umfaßt der 1. Schritt die drei nacheinander auszuführenden Teilschritte:

$$1) \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$2) \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$3) \quad c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Im 2. Schritt sind diese Ausdrücke numerisch zu berechnen. Dies geschieht wieder mit Hilfe der Logarithmen. Zunächst berechnen wir $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$:

$\lg b$	0,6990	+
$\lg \sin \alpha$	0,8081 — 1	+
	1 — 1	
$\lg (b \cdot \sin \alpha)$	0,5071	+
$\lg a$	0,8451	—
$\lg \sin \beta$	0,6620 — 1	

Hieraus ergibt sich $\beta = 27^\circ 20'$. Wir müssen aber hierbei beachten, daß ja $\sin \beta = \sin (180^\circ - \beta)$ ist. Folglich ist auch $\lg \sin (180^\circ - \beta)$ gleich 0,6620 — 1. Somit könnte der Winkel auch $152^\circ 40'$ sein. Es ergeben sich also für β zwei Möglichkeiten. Die beiden möglichen Winkel wollen wir mit β_1 und β_2 bezeichnen:

$$\beta_1 = 27^\circ 20' \quad \text{und} \quad \beta_2 = 152^\circ 40'.$$

Vom Standpunkt der Rechnung aus wäre der Winkel β_2 ohne weiteres möglich. Vom Standpunkt der praktischen Durchführung allerdings ist β_2 nicht möglich, weil in diesem Falle $\alpha + \beta_2 > 180^\circ$ wäre. Es würde für den dritten Winkel nichts übrigbleiben, denn die Winkelsumme im Drei-

eck ist ja nur 180° . Unsere weiteren Rechnungen führen wir also mit dem Winkel $\beta = 27^\circ 20'$ aus, weil nur er in Frage kommt.

Wir berechnen den Winkel γ und erhalten

$$\gamma = 180^\circ - 40^\circ - 27^\circ 20'$$

$$\gamma = 112^\circ 40'.$$

Kommen wir nun zur numerischen Berechnung von $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$:

$\lg a$	0,8451	+
$\lg \sin \gamma$	0,9651 — 1	+
$\lg (a \cdot \sin \gamma)$	0,8102	+
$\lg \sin \alpha$	0,8081 — 1	—
$\lg c$	1,0021	

Somit ergibt sich für $c = 10,05$ cm. Bei der Durchführung dieser Rechnung ist zu beachten, daß $\lg \sin 112^\circ 40' = \lg \sin 67^\circ 20'$ ist.

3. Beispiel: Es sind folgende Stücke eines Dreiecks gegeben:

$$a = 30 \text{ cm}, c = 50 \text{ cm} \text{ und } \alpha = 20^\circ.$$

Gesucht sind: b , β und γ .

Zunächst geben wir wieder die allgemeine Lösung dieser Aufgabe an. Dies geschieht jetzt in verkürzter Form:

$$1) \sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$2) \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$3) \quad b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Führen wir nun die Aufgabe numerisch durch. Zunächst berechnen wir nach obiger Formel den Winkel γ :

$\lg c$	1,6990	+
$\lg \sin \alpha$	0,5341 — 1	+
	1 — 1	
$\lg (c \cdot \sin \alpha)$	1,2331	+
$\lg a$	1,4771	—
$\lg \sin \gamma$	0,7560 — 1	

Hieraus ergibt sich $\gamma = 34^\circ 46'$. Wir müssen aber beachten, daß $\sin \gamma = \sin (180^\circ - \gamma)$ ist. Damit ergibt sich ein zweiter möglicher Winkel von $145^\circ 14'$.

Wir haben also auch wie im Falle des 2. Beispiels zwei Winkel erhalten, die wir mit γ_1 und γ_2 bezeichnen wollen:

$$\gamma_1 = 34^\circ 46' \quad \text{und} \quad \gamma_2 = 145^\circ 14'.$$

In diesem Beispiel sind beide Winkel vom Standpunkt der praktischen Durchführung möglich, denn es ist sowohl

$$\alpha + \gamma_1 = 54^\circ 46' < 180^\circ$$

als auch

$$\alpha + \gamma_2 = 165^\circ 14' < 180^\circ.$$

Für β erhalten wir dann natürlich auch zwei mögliche Winkel:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 180^\circ - \alpha - \gamma_1 \\ \beta_1 &= 180^\circ - 20^\circ - 34^\circ 46' \\ \beta_1 &= 125^\circ 14' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 180^\circ - \alpha - \gamma_2 \\ \beta_2 &= 180^\circ - 20^\circ - 145^\circ 14' \\ \beta_2 &= 14^\circ 46'. \end{aligned}$$

Selbstverständlich ergeben sich aus dem Vorhandensein von zwei verschiedenen β auch zwei verschiedene b , die wir jetzt durch Einsetzen der entsprechenden numerischen Werte in den Ausdruck $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$ berechnen wollen.

$\lg a$	1,4771	+	
$\lg \sin \beta_1$	0,9121 —1	+	
$\lg (a \cdot \sin \beta_1)$	1,3892	+	
$\lg \sin \alpha$	0,5341 —1	—	
$\lg b_1$	1,8551		$b_1 = 71,63 \text{ cm}$
$\lg a$	1,4771	+	
$\lg \sin \beta_2$	0,4063 —1	+	
$\lg (a \cdot \sin \beta_2)$	0,8834	+	
$\lg \sin \alpha$	0,5341 —1	—	
$\lg b_2$	1,3493		$b_2 = 22,35 \text{ cm.}$

Die bekannte Tatsache, daß der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber liegen muß, ist in beiden Fällen erfüllt.

Wie man am dritten Beispiel erkannt haben wird, braucht die Lösung einer Dreiecksberechnung durchaus nicht eindeutig zu sein, sondern es

können zwei verschiedene Dreiecke existieren, die beide den gestellten Anforderungen genügen. Es wäre eigentlich noch zu zeigen, daß höchstens zwei Dreiecke existieren, die den gestellten Anforderungen genügen. Darauf wollen wir verzichten.

Es sei den Lesern empfohlen, sich selbst eine Zeichnung zu diesem Beispiel anzufertigen.

11.42 Der Cosinussatz

Wir beginnen wieder mit der Herleitung des Satzes. Wir verwenden dazu zunächst ein Dreieck, in dem kein Winkel größer als 90° ist (Bild 58). Wir zeichnen die Höhe h_a ein (Bild 59).

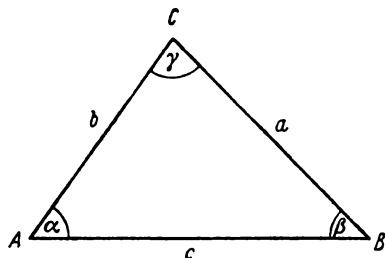


Bild 58

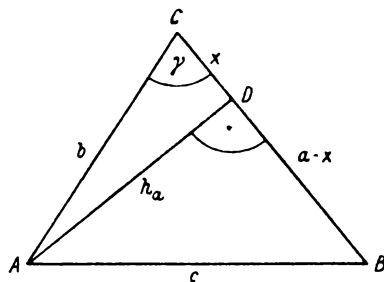


Bild 59

Die Strecke CD bezeichnen wir mit x ($CD = x$). Die Strecke BD hat dann die Länge $a-x$. Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt der Lehrsatz des Pythagoras:

$$h_a^2 + x^2 = b^2 \quad \text{oder} \quad h_a^2 = b^2 - x^2.$$

Entsprechend gilt auch im rechtwinkligen Dreieck ADB der Lehrsatz des Pythagoras:

$$h_a^2 + (a-x)^2 = c^2$$

oder

$$h_a^2 = c^2 - (a-x)^2$$

$$h_a^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2.$$

Unter Verwendung dieser beiden Ausdrücke für h_a^2 ergibt sich:

$$c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = h_a^2 = b^2 - x^2$$

$$c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax.$$

Um x aus diesem Ausdruck zu beseitigen, beachten wir, daß im Dreieck ADC folgende Beziehung gilt:

$$\frac{x}{b} = \cos \gamma \quad \text{oder} \quad x = b \cdot \cos \gamma.$$

Setzen wir im Ausdruck $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$ für $x = b \cdot \cos \gamma$ ein, so ergibt sich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob die gleiche Beziehung auch für stumpfwinklige Dreiecke gültig ist. Dazu verwenden wir ein Dreieck folgender Gestalt (Bild 60):

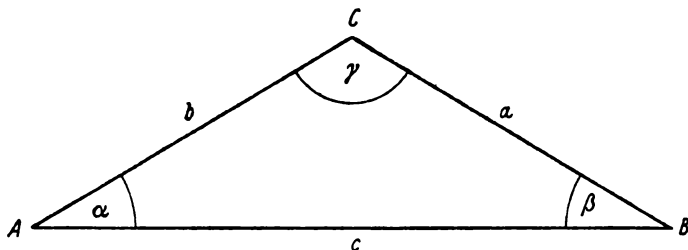


Bild 60

In diesem Falle ist der Winkel γ größer als 90° .

In analoger Weise wie beim spitzwinkligen Dreieck zeichnen wir die Höhe h_a ein. Diese steht jetzt außerhalb des Dreiecks auf der Verlängerung von BC senkrecht (Bild 61):

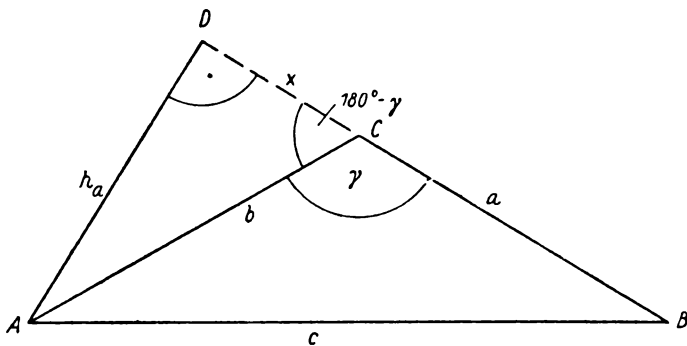


Bild 61

Die Strecke CD bezeichnen wir mit x ($CD = x$).

Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt wieder der Lehrsatz des Pythagoras:

$$h_a^2 + x^2 = b^2 \quad \text{oder} \quad h_a^2 = b^2 - x^2.$$

Entsprechend gilt im rechtwinkligen Dreieck ADB der Lehrsatz des Pythagoras:

$$h_a^2 + (a + x)^2 = c^2$$

oder

$$\begin{aligned} h_a^2 &= c^2 - (a + x)^2 \\ h_a^2 &= c^2 - a^2 - 2ax - x^2. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der beiden Ausdrücke für h_a^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 - 2ax - x^2 &= h_a^2 = b^2 - x^2 \\ c^2 - a^2 - 2ax - x^2 &= b^2 - x^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 + 2ax. \end{aligned}$$

Um aus diesem Ausdruck x zu beseitigen, beachten wir, daß im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt:

$$\frac{x}{b} = \cos(180^\circ - \gamma)$$

oder

$$x = b \cdot \cos(180^\circ - \gamma).$$

Da $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$ ist, gilt weiter:

$$x = -b \cdot \cos \gamma.$$

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$ ein, so ergibt sich wieder

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

Man sieht, daß der Cosinussatz in dieser Form sowohl für spitzwinklige als auch für stumpfwinklige Dreiecke gültig ist.

Hätte man anstelle von h_a die Höhe h_b bzw. h_c eingezeichnet und eine analoge Rechnung durchgeführt, so wäre man zu folgenden Formen des Cosinussatzes gekommen:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$$

bzw.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

Der Cosinussatz läßt sich also durch folgende drei Formeln ausdrücken, die für ein beliebiges Dreieck gültig sind:

$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{array} .$$

In Worten:

Das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus den beiden anderen Seiten und dem Cosinus des Zwischenwinkels.

Wir wollen einige Beispiele für die Anwendung des Cosinussatzes rechnen.

1. Beispiel: Es sind folgende Stücke eines Dreiecks gegeben: $b = 36,5 \text{ cm}$,

$$c = 24,5 \text{ cm} \text{ und } \alpha = 58^\circ 20'.$$

Gesucht sind: a , β und γ .

Auch bei Aufgaben, bei denen der Cosinussatz zu verwenden ist, geht man in zwei Schritten vorwärts. Im 1. Schritt wird die allgemeine Lösung aufgestellt. Im 2. Schritt findet dann die numerische Berechnung statt.

1. Schritt:

Aus den drei gegebenen Stücken können wir mit Hilfe des Cosinussatzes die Größe a bestimmen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Weiterhin werden die Winkel β und γ gesucht. Zunächst berechnen wir den Winkel γ . Dies geschieht mit Hilfe des Sinussatzes $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$:

$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}.$$

Den Winkel β können wir aus der Beziehung über die Winkelsumme im Dreieck finden:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

Man hätte auch zuerst β berechnen können und daraufhin γ . Die Wahl der Reihenfolge ist in diesem Beispiel völlig gleichgültig.

Man wird aus vorstehenden Ausführungen erkannt haben, daß der 1. Schritt drei nacheinander auszuführende Teilschritte umfaßt:

$$1) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2) \quad \sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$3) \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

2. Schritt:

Im 2. Schritt sind diese Ausdrücke numerisch zu berechnen. Dies geschieht mit Hilfe der Logarithmen. Dabei ist aber zu beachten, daß eine Addition bzw. Subtraktion nicht mit Hilfe der Logarithmen ausgeführt werden kann. Das ist besonders bei der Addition der einzelnen Summanden des Cosinussatzes wichtig.

Zunächst berechnen wir $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$:

$\lg b$	1,5623	· 2	
$\lg b^2$	3,1246		$b^2 = 1332,3$
$\lg c$	1,3892	· 2	
$\lg c^2$	2,7784		$c^2 = 600,4$
$\lg 2$	0,3010	+	
$\lg b$	1,5623	+	
$\lg c$	1,3892	+	
$\lg \cos \alpha$	0,7201 - 1	+	
$\lg (2bc \cos \alpha)$	2,9726		$2bc \cos \alpha = 938,9$
$\lg a^2$	2,9973	: 2	$a^2 = 993,8$
$\lg a$	1,4987		$a = 31,5 \text{ cm.}$

Danach folgt die Berechnung von γ nach $\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$:

$\lg c$	1,3892	+	
$\lg \sin \alpha$	0,9300 - 1	+	
	1 - 1		
$\lg (c \cdot \sin \alpha)$	1,3192	+	
$\lg a$	1,4987	-	
$\lg \sin \gamma$	0,8205 - 1		$\gamma = 41^\circ 25'$

Eine zweite Lösung von γ ist nicht möglich. Fertigen Sie sich dazu eine Zeichnung an.

Der Winkel $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - 58^\circ 20' - 41^\circ 25' \\ \beta &= 80^\circ 15'.\end{aligned}$$

2. Beispiel: Es sind folgende Stücke eines Dreiecks gegeben:

$$a = 16,4 \text{ cm}, b = 13,2 \text{ cm und } c = 14,5 \text{ cm.}$$

Gesucht sind: α , β und γ .

1. Schritt:

Aus den drei gegebenen Stücken a , b und c können wir mit Hilfe des Cosinussatzes den Winkel α , β oder γ berechnen. Wir wollen zunächst den Winkel α bestimmen. Es gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

oder

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Weiterhin müssen β und γ bestimmt werden. Man könnte diese Winkel auch wieder mit Hilfe des Cosinussatzes finden. Für Winkel β wäre zu rechnen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

oder

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Zur Bestimmung des Winkels γ hätte man folgende Rechnung durchzuführen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

oder

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Diese Ausdrücke eignen sich aber für die numerischen Rechnungen nicht besonders gut, weil sie Additionen und Subtraktionen enthalten, die man nicht mit Hilfe der Logarithmenrechnung ausführen kann. Man geht deshalb einen anderen Weg, der die Anwendung der Logarithmen bei numerischen Berechnungen besser gestattet.

Wir verwenden zur Berechnung des Winkels β den Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

oder

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}.$$

Der Winkel γ ergibt sich aus der Beziehung über die Winkelsumme im Dreieck:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Man sieht, daß der 1. Schritt die drei nacheinander auszuführenden Teilschritte umfaßt:

$$1) \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2) \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$3) \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

2. Schritt:

Kommen wir nun zur numerischen Berechnung. Zunächst ergibt sich der Winkel α aus der Formel

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} :$$

$\lg b$	1,1206	$\cdot 2$	
$\lg b^2$	2,2412		$b^2 = 174,3$
$\lg c$	1,1614	$\cdot 2$	
$\lg c^2$	2,3228		$c^2 = 210,3$
$\lg a$	1,2148	$\cdot 2$	
$\lg a^2$	2,4296		$a^2 = 268,9$
$\lg 2$	0,3010	+	$b^2 + c^2 - a^2 = 115,7$
$\lg b$	1,1206	+	
$\lg c$	1,1614	+	
$\lg 2bc$	2,5830		
	1 — 1		
$\lg (b^2 + c^2 - a^2)$	2,0633	+	
$\lg 2bc$	2,5830	—	
$\lg \cos \alpha$	0,4803 — 1		$\alpha = 72^\circ 25'.$

Danach folgt die Berechnung von β nach der Formel $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$:

$\lg b$	1,1206	+
$\lg \sin \alpha$	0,9792 — 1	+
$\lg (b \cdot \sin \alpha)$	1 — 1	
$\lg a$	1,0998	+
	1,2148	—
$\lg \sin \beta$	0,8850 — 1	

$\beta = 50^\circ 7'.$

Der Winkel β ist in diesem Fall eindeutig festgelegt. Der Leser überlege sich den Grund selbst.

Jetzt berechnen wir $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$:

$$\gamma = 180^\circ - 72^\circ 25' - 50^\circ 7'$$

$$\gamma = 57^\circ 28'.$$

Zum Schluß wollen wir noch eine Übersicht zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks mit dem Sinussatz und dem Cosinussatz angeben. Mit Hilfe des Sinussatzes und des Cosinussatzes lassen sich alle Stücke eines Dreiecks berechnen, wenn drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind. Die folgende Übersicht soll die Verwendung der beiden Sätze zeigen:

Gegebene Stücke	Lösung mit
1) 1 Seite und 2 Winkel	Sinussatz
2) 2 Seiten und 1 Winkel	
a) eingeschlossener Winkel	Cosinussatz und Sinussatz
b) gegenüberliegender Winkel	Sinussatz
3) 3 Seiten	Cosinussatz und Sinussatz

Im Falle 2b) muß stets untersucht werden, ob und wieviel Lösungen vorhanden sind (Determination). Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang eine Zeichnung anfertigt.

Im Falle 3) kann es vorkommen, daß keine Lösung vorhanden ist. Zum Beispiel existiert keine Lösung, wenn $a + b < c$ ist.

11.5 Additionstheoreme

Im folgenden Abschnitt sollen einige Formeln hergeleitet werden, die man allgemein als trigonometrische Additionstheoreme bezeichnet. Die Beweise werden nur für die folgenden gezeichneten speziellen Fälle durchgeführt. Die Additionstheoreme selbst sind allgemeingültig. Dies sei ohne Beweis gesagt. Anwendung finden sie im Rahmen unserer Darstellung im Abschnitt 12.42.

1. Winkelfunktionen von Summen:

$$DE = AD \cdot \sin \alpha_2$$

$$CF = CD \cdot \cos \alpha_2$$

$$AE = AD \cdot \cos \alpha_2$$

$$DF = CD \cdot \sin \alpha_2$$

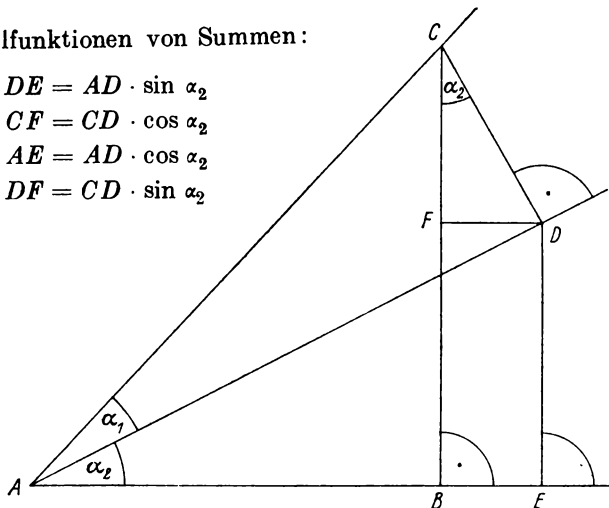


Bild 62

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_2 + \alpha_1) &= \frac{BC}{AC} = \frac{BF + CF}{AC} = \frac{BF}{AC} + \frac{CF}{AC} = \frac{DE}{AC} + \frac{CF}{AC} \\ &= \sin \alpha_2 \cdot \frac{AD}{AC} + \cos \alpha_2 \cdot \frac{CD}{AC} = \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha_2 + \alpha_1) = \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}.$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_2 + \alpha_1) &= \frac{AB}{AC} = \frac{AE - BE}{AC} = \frac{AE}{AC} - \frac{BE}{AC} = \frac{AE}{AC} - \frac{DF}{AC} \\ &= \cos \alpha_2 \cdot \frac{AD}{AC} - \sin \alpha_2 \cdot \frac{CD}{AC} = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_2 + \alpha_1) = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}.$$

$\operatorname{tg}(\alpha_2 + \alpha_1)$ kann mit Hilfe der beiden obigen Ausdrücke abgeleitet werden:

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 + \alpha_1) = \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 + \alpha_1)} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1} : \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1} + \frac{\cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}}{\frac{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1} - \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}}$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}}{1 - \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha_2 + \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}}.$$

2. Winkelfunktionen von Differenzen:

$$BC = AC \cdot \sin \alpha_2$$

$$CF = CD \cdot \cos \alpha_2$$

$$AB = AC \cdot \cos \alpha_2$$

$$DF = CD \cdot \sin \alpha_2$$

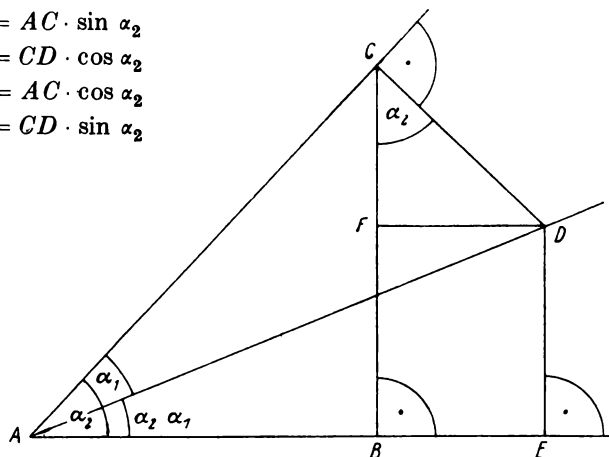


Bild 68

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{DE}{AD} = \frac{BF}{AD} = \frac{BC - CF}{AD} = \frac{BC}{AD} - \frac{CF}{AD} \\ &= \sin \alpha_2 \cdot \frac{AC}{AD} - \cos \alpha_2 \cdot \frac{CD}{AD} = \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}.$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{AE}{AD} = \frac{AB + BE}{AD} = \frac{AB + DF}{AD} = \frac{AB}{AD} + \frac{DF}{AD} \\ &= \cos \alpha_2 \cdot \frac{AC}{AD} + \sin \alpha_2 \cdot \frac{CD}{AD} = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}.$$

Zur Berechnung von $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$ benutzen wir die beiden letzten Formeln:

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1} \Big| : \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1} - \frac{\cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}}{\frac{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} - \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}}{1 + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}}$$

11.6 Weitere Aufgaben zur ebenen Trigonometrie

Im folgenden Abschnitt sollen zur Übung und Vertiefung der Kenntnisse einige Aufgaben gerechnet werden.

Der Lösungsweg wird in etwas gekürzter Darstellung gegeben.

- 1) In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben: $\alpha = 64^\circ 18'$
und $c = 20$ m.

Gesucht sind: a , b und β .

1. Schritt:

$$1) a = c \cdot \sin \alpha$$

$$2) b = c \cdot \cos \alpha$$

$$3) \beta = 90^\circ - \alpha.$$

2. Schritt:

$\lg c$	1,3010	+	
$\lg \sin \alpha$	0,9548 - 1	+	
$\lg a$	1,2558		$a = 18,02$ m
$\lg c$	1,3010	+	
$\lg \cos \alpha$	0,6371 - 1	+	
$\lg b$	0,9381		$b = 8,67$ m

$$\beta = 90^\circ - 64^\circ 18'$$

$$\beta = 25^\circ 42'.$$

- 2) In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben: $\alpha = 20^\circ$
und $h = 5$ cm.

Gesucht sind: a , b , c und β .

1. Schritt:

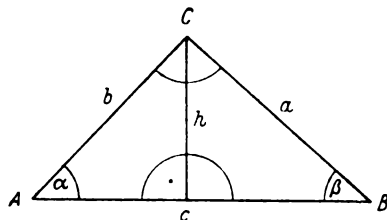
$$1) b = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$2) c = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$3) a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$4) \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Bild 64



2. Schritt:

$\lg h$	0,6990	+	
$\lg \sin \alpha$	0,5341 — 1	—	
$\lg b$	1,1649		$b = 14,62 \text{ cm}$
$\lg b$	1,1649	+	
$\lg \cos \alpha$	0,9730 — 1	—	
$\lg c$	1,1919		$c = 15,56 \text{ cm}$
$\lg b$	1,1649	+	
$\lg \tan \alpha$	0,5611 — 1	+	
$\lg a$	0,7260		$a = 5,32 \text{ cm}$

$\beta = 90^\circ - 20^\circ$
 $\beta = 70^\circ$.

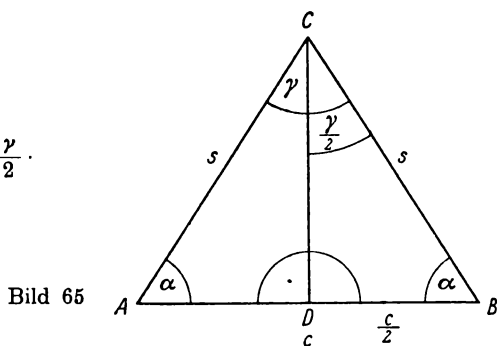
3) In einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben: $c = 48,31 \text{ m}$ und $\gamma = 168^\circ 24'$.

Gesucht sind die Länge der Schenkel s und die Größe der Basiswinkel α .

1. Schritt:

$$1) s = \frac{\frac{c}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$2) \alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$



2. Schritt:

$\lg \frac{c}{2}$	1,3831	+	
$\lg \sin \frac{\gamma}{2}$	0,9978 — 1	—	
$\lg s$	1,3853		$s = 24,28 \text{ m}$

$\alpha = 90^\circ - 84^\circ 12'$
 $\alpha = 5^\circ 48'$.

4) In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben :

$$b = 1,456 \text{ km}, \alpha = 74^\circ 17' \text{ und } \gamma = 20^\circ 12'.$$

Es ist a , c und β zu bestimmen.

1. Schritt:

$$1) \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$2) a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$3) c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

2. Schritt:

$$\beta = 180^\circ - 74^\circ 17' - 20^\circ 12'$$

$$\beta = 85^\circ 31'.$$

$\lg b$	0,1632	+
$\lg \sin \alpha$	0,9835 — 1	+
	1 — 1	
$\lg (b \cdot \sin \alpha)$	0,1467	+
$\lg \sin \beta$	0,9987 — 1	—
$\lg a$	0,1480	
$\lg b$	0,1632	+
$\lg \sin \gamma$	0,5382 — 1	+
	1 — 1	
$\lg (b \cdot \sin \gamma)$	0,7014 — 1	+
$\lg \sin \beta$	0,9987 — 1	—
$\lg c$	0,7027 — 1	

$$a = 1,406 \text{ km}$$

$$c = 0,504 \text{ km.}$$

5) Es ist ein schiefwinkliges Dreieck aus folgenden Stücken zu berechnen :

$$a = 15,1 \text{ cm}, c = 13,4 \text{ cm und } \alpha = 58^\circ 24'.$$

Folgende Stücke sind zu bestimmen: b , β und γ .

1. Schritt:

$$1) \sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$2) \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$3) b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

2. Schritt:	$\lg c$	1,1271	+
	$\lg \sin \alpha$	0,9303 — 1	+
		1 — 1	
	$\lg (c \cdot \sin \alpha)$	1,0574	+
	$\lg a$	1,1790	—
	$\lg \sin \gamma$	0,8784 — 1	

Es ergeben sich somit zwei Winkel γ : $49^\circ 6'$ und $130^\circ 54'$, da $\sin 49^\circ 6' = \sin 130^\circ 54'$ ist. Der Winkel $130^\circ 54'$ ist aber nicht brauchbar, da der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegen muß. Es müßte also

sein, weil $\gamma < \alpha$
ist. $c < a$

Diese Beziehung ist aber für den Winkel $130^\circ 54'$ nicht erfüllt. Es ist also nur der Winkel

$$\gamma = 49^\circ 6'$$

für weitere Rechnungen zu verwenden.

Es ist

$$\beta = 180^\circ - 58^\circ 24' - 49^\circ 6'$$

$$\beta = 72^\circ 30'$$

$\lg a$	1,1790	+
$\lg \sin \beta$	0,9794 — 1	+
$\lg (a \cdot \sin \beta)$	1,1584	+
$\lg \sin \alpha$	0,9303 — 1	—
$\lg b$	1,2281	

$$b = 16,9 \text{ cm.}$$

6) In einem schiefwinkligen Dreieck sind folgende Stücke gegeben:

$$a = 38,2 \text{ m, } b = 13,9 \text{ m und } c = 24,5 \text{ m.}$$

Gesucht sind die Winkel α , β und γ .

1. Schritt:
- 1) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 - 2) $\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$
 - 3) $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$

2. Schritt :

$\lg b$	1,1430	$\cdot 2$	
$\lg b^2$	2,2860		$b^2 = 193,2$
$\lg c$	1,3892	$\cdot 2$	
$\lg c^2$	2,7784		$c^2 = 600,3$
$\lg a$	1,5821	$\cdot 2$	
$\lg a^2$	3,1642		$a^2 = 1459,3$
$\lg 2$	0,3010	+	$b^2 + c^2 - a^2 = -665,8$
$\lg b$	1,1430	+	
$\lg c$	1,3892	+	
$\lg 2bc$	2,8332		$2bc = 681,1$

Für $\cos \alpha$ ergibt sich somit : $\cos \alpha = -\frac{665,8}{681,1}$.

Das negative Vorzeichen zeigt, daß der Winkel α im II. Quadranten liegt. Um nun diesen Winkel zu bestimmen, berechnen wir zunächst den Wert $+\frac{665,8}{681,1}$. Dies ist der Cosinus des Ergänzungswinkels zu 180° , den wir mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen wollen. Mit Hilfe dieses Winkels $\bar{\alpha}$ ergibt sich dann

$$\alpha = 180^\circ - \bar{\alpha}$$

$\lg 665,8$	1 - 1 2,8233	+	$\bar{\alpha} = 12^\circ 10'$
$\lg 681,1$	2,8332	-	$\alpha = 180^\circ - 12^\circ 10'$
$\lg \cos \bar{\alpha}$	0,9901 - 1		$\alpha = 167^\circ 50'$
$\lg c$	1,3892	+	
$\lg \sin \alpha$	0,3238 - 1	+	
$\lg (c \cdot \sin \alpha)$	1 - 1 0,7130	+	
$\lg a$	1,5821	-	
$\lg \sin \gamma$	0,1309 - 1		$\gamma = 7^\circ 46'$

$$\beta = 180^\circ - 167^\circ 50' - 7^\circ 46'$$

$$\beta = 4^\circ 24'.$$

7) In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben :

$$a = 6,3 \text{ cm}, b = 8,2 \text{ cm} \text{ und } \gamma = 30^\circ.$$

Gesucht sind : c , α und β .

1. Schritt :

$$1) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$2) \quad \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c}$$

$$3) \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

2. Schritt :

$\lg a$	0,7993	$\cdot 2$	
$\lg a^2$	1,5986		$a^2 = 39,68$
$\lg b$	0,9138	$\cdot 2$	
$\lg b^2$	1,8276		$b^2 = 67,24$
$\lg 2$	0,3010	+	
$\lg a$	0,7993	+	
$\lg b$	0,9138	+	
$\lg \cos \gamma$	0,9375 — 1	+	
$\lg 2ab \cos \gamma$	1,9516		$2ab \cos \gamma = 89,45$
$\lg c^2$	1,2423	$: 2$	$c^2 = 17,47$
$\lg c$	0,6212		$c = 4,2 \text{ cm}$
$\lg a$	0,7993	+	
$\lg \sin \gamma$	0,6990 — 1	+	
	1 — 1		
$\lg (a \cdot \sin \gamma)$	0,4983	+	
$\lg c$	0,6212	—	
$\lg \sin \alpha$	0,8771 — 1		$\alpha = 48^\circ 54'$

$$\beta = 180^\circ - 48^\circ 54' - 30^\circ$$

$$\beta = 101^\circ 6'.$$

Ü 11 Übungsaufgaben zur ebenen Trigonometrie

- 1) In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben: $a = 12,75 \text{ m}$ und $\alpha = 57^\circ 14'$.
Gesucht wird c .
- 2) In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben: $c = 5 \text{ cm}$ und $\alpha = 40^\circ$.
Es sind a und b zu berechnen.
- 3) Ein auf waagerechtem Boden stehender Pfahl von $1,80 \text{ m}$ Höhe wirft einen Schatten von $4,50 \text{ m}$ Länge. Wie hoch steht die Sonne?
- 4) In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben:
 $c = 48,53 \text{ m}$, $\alpha = 53^\circ 7'$ und $\beta = 42^\circ 18'$.
Gesucht werden a , b und γ .
- 5) In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben:
 $a = 15,45 \text{ m}$, $c = 18 \text{ m}$ und $\alpha = 21^\circ 14'$.
Gesucht werden b , β und γ .
- 6) In einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben:
 $a = 235,0 \text{ cm}$, $c = 229,4 \text{ cm}$ und $\beta = 26^\circ$.
Gesucht werden b , α und γ .

L 11 Lösungen zu Ü 11

- 1) $c = 15.16 \text{ m}$,
- 2) $a = 3,2 \text{ cm}$, $b = 3,8 \text{ cm}$.
- 3) Die Sonne hat eine Höhe von $21^\circ 48'$.
- 4) $a = 38,98 \text{ m}$ $b = 32,80 \text{ m}$ $\gamma = 84^\circ 35'$.
- 5) $b_1 = 30,79 \text{ m}$ $\beta_1 = 133^\circ 48'$ $\gamma_1 = 24^\circ 58'$
 $b_2 = 2,78 \text{ m}$ $\beta_2 = 3^\circ 44'$ $\gamma_2 = 155^\circ 2'$.
- 6) $b = 104,6 \text{ cm}$ $\alpha = 79^\circ 57'$ $\gamma = 74^\circ$.

12. Analytische Geometrie der Geraden

12.1 Strecke und Gerade

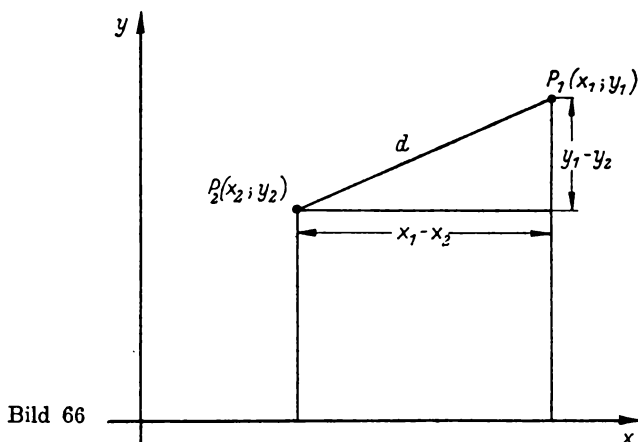
Wir betrachten zunächst die geometrischen Grundgebilde Strecke und Dreieck und berechnen deren Länge bzw. Flächeninhalt.

12.11 Länge einer Strecke

Die Länge der Strecke P_1P_2 bezeichnen wir mit d :

$$d = \overline{P_1P_2}.$$

Aus der Zeichnung



ergibt sich mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

oder

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

da d als Länge einer Strecke stets eine positive reelle Zahl sein muß. Hierzu sollen zwei Beispiele gerechnet werden.

1. Beispiel: Es ist die Länge der Strecke zwischen $P_1(5;5)$ und $P_2(1;2)$ zu berechnen.

Wir setzen in

ein und erhalten

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \\ d &= 5. \end{aligned}$$

Die Längeneinheit, in der d anzugeben ist, ist diejenige, die dem für P_1 und P_2 gewählten Koordinatensystem zugrunde liegt. Wären das beispielsweise 2 cm, so bedeutet das Ergebnis $d = 5$, daß P_1 und P_2 einen Abstand von 10 cm voneinander haben.

2. Beispiel: Das gleiche ist für die Punkte $P_1 (6; 8)$ und $P_2 (-3; -5)$ zu machen.

$$\begin{aligned} \text{Es ergibt sich} \quad d &= \sqrt{(6 - (-3))^2 + (8 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{9^2 + 13^2} = \sqrt{81 + 169} \\ &= \sqrt{250} \\ d &= 15,81. \end{aligned}$$

12.12 Halbierung einer Strecke

Die Koordinaten des Halbierungspunktes $H (x_H; y_H)$ der Strecke $P_1 P_2$ ergeben sich zu

$$x_H = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{und} \quad y_H = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

wie aus
Zeichnung 67
zu erkennen ist.

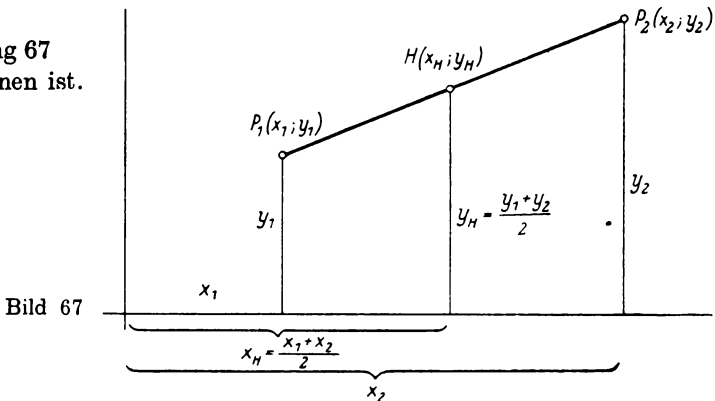


Bild 67

Auch hierzu sei ein Beispiel angegeben.

- 1) Es soll der Mittelpunkt der Strecke zwischen $P_1(2;5)$ und $P_2(4;3)$ angegeben werden.

Nach Einsetzen in die Formel ergibt sich

$$x_H = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{und} \quad y_H = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Der Mittelpunkt der angegebenen Strecke P_1P_2 ist also $H(3;4)$.

12.13 Flächeninhalt eines Dreiecks

Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks benutzen wir das Bild 68.

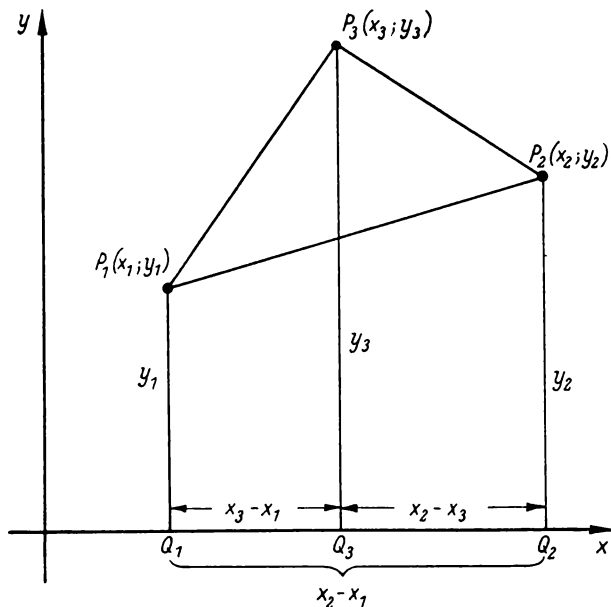


Bild 68

Es gilt für den Flächeninhalt F des Dreiecks $P_1P_2P_3$:

$$\begin{aligned} \text{Dreieck } P_1P_2P_3 = & \text{Trapez } P_1Q_1Q_3P_3 + \text{Trapez } P_3Q_3Q_2P_2 \\ & - \text{Trapez } P_1Q_1Q_2P_2 \end{aligned}$$

$$F = \frac{y_3 + y_1}{2} (x_3 - x_1) + \frac{y_2 + y_1}{2} (x_2 - x_3) - \frac{y_3 + y_1}{2} (x_2 - x_1) \\ = \frac{1}{2} [(y_3 + y_1) (x_3 - x_1) + (y_2 + y_3) (x_2 - x_3) - (y_2 + y_1) (x_2 - x_1)]$$

oder

$$F = \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] .$$

Im folgenden rechnen wir einige Beispiele.

- 1) Es soll der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ bestimmt werden, wenn $P_1 (1;2)$, $P_2 (5;3)$ und $P_3 (4;7)$ ist.

Wir setzen ein und erhalten

$$F = \frac{1}{2} [1 \cdot (3 - 7) + 5 \cdot (7 - 2) + 4 \cdot (2 - 3)] \\ = \frac{1}{2} [1 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 + 4 \cdot (-1)] \\ F = 8,5 .$$

- 2) In diesem Falle sei $P_1 (2;1)$, $P_2 (3;4)$ und $P_3 (5;2)$.

Dafür findet man $F = -4$

bzw. unter Weglassung des Vorzeichens

$$F = 4 .$$

Zu einer negativen Fläche eines Dreiecks sei noch folgende Bemerkung gemacht.

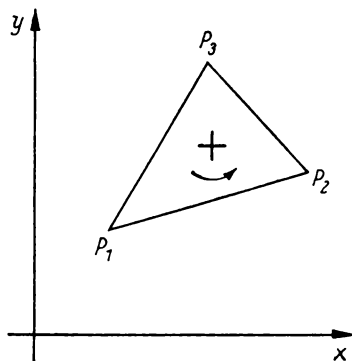


Bild 69

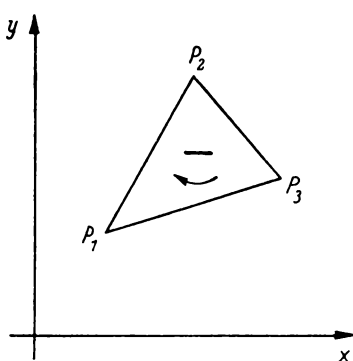


Bild 70

Die Fläche eines Dreiecks wird positiv gerechnet, wenn das Dreieck beim Umlauf von P_1 über P_2 und P_3 nach P_1 zurück stets zur Linken der Umlaufkurve liegt (Umlauf im Gegenuhrzeigersinn). Sie wird negativ gezählt, wenn im umgekehrten Sinn (Uhrzeigersinn) umlaufen wird. Das berücksichtigt die entwickelte Flächenformel bereits, was wir allerdings nicht gezeigt haben.

12.2 Geradengleichungen

12.21 Normalform

Im Abschnitt 10.2 war gesagt worden, daß wir unter der Gleichung

$$y = a_1 x + a_0$$

die Funktionsgleichung der sogenannten linearen Funktion verstehen. Geometrisch läßt sich diese lineare Funktion, wie wir bereits wissen, als Gerade darstellen.

Die lineare Funktionsgleichung $y = a_1 x + a_0$ bezeichnet man als Normalform einer Geraden. Darin bedeutet a_0 den Abschnitt auf der y -Achse, wie vom 10. Kapitel her bekannt ist. Wenn $a_0 > 0$ ist, so schneidet die Gerade die y -Achse oberhalb des Nullpunktes. Ist $a_0 < 0$, so schneidet die Gerade die y -Achse unterhalb des Nullpunktes. Ist $a_0 = 0$, so geht die Gerade durch den Nullpunkt hindurch. Die Größe a_1 war als Richtungsfaktor bezeichnet worden. Ist $a_1 > 0$, so verläuft die Gerade im Koordinatensystem von links unten nach rechts oben. Ist dagegen $a_1 < 0$, so verläuft sie dort von links oben nach rechts unten.

Nähere Angaben über a_1 waren im 10. Kapitel nicht gemacht worden. Diesen Betrachtungen wollen wir uns jetzt unter Verwendung des Richtungswinkels α der Geraden zuwenden. Unter dem Richtungswinkel einer Geraden versteht man den Winkel, den die positiv gerichtete x -Achse mit der positiv gerichteten Geraden bildet; dabei ist dieser Winkel im mathematisch positiven Drehsinn, d. h. im Gegenuhrzeigersinn zu messen. Wir unterscheiden grundsätzlich unorientierte und orientierte Geraden, wobei sich unsere bisherigen Betrachtungen über Gerade auf unorientierte Gerade beschränkten. Eine unorientierte Gerade wird zu einer orientierten Geraden, indem man eine der beiden zunächst möglichen Richtungen willkürlich auszeichnet und diese ausgezeichnete Richtung die positive Richtung der orientierten Geraden nennt. Man kennzeichnet die positive Richtung einer orientierten Geraden durch einen Pfeil. Die

der ausgezeichneten Richtung entgegengesetzte Richtung bezeichnet man auch als negative Richtung der wie oben orientierten Geraden. Der Richtungswinkel einer Geraden kann alle Werte im Bereich von 0° bis 360° annehmen. Wir jedoch wollen nur Geraden mit Richtungswinkeln zwischen 0° und 180° betrachten. Wir sehen uns zunächst die folgende Zeichnung an:

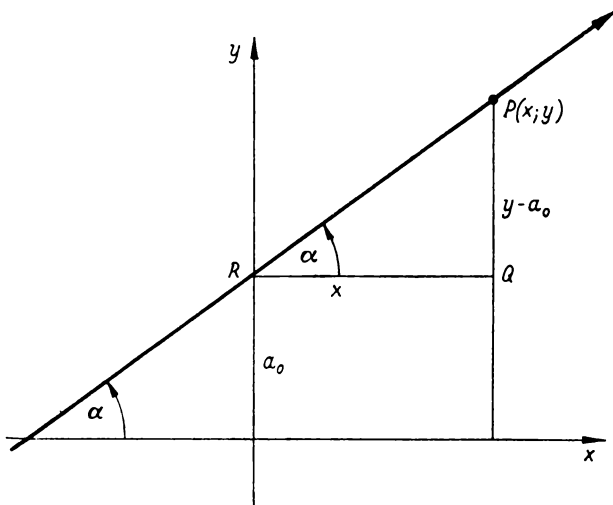


Bild 71

Für einen beliebigen Punkt $P(x; y)$ der Geraden gilt (Dreieck PQR):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - a_0}{x}.$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} x \cdot \operatorname{tg} \alpha &= y - a_0 \\ y &= \operatorname{tg} \alpha \cdot x + a_0. \end{aligned}$$

Vergleicht man den letzten Ausdruck mit der ursprünglichen Darstellung $y = a_1 x + a_0$ der betrachteten Geraden, so findet man, daß

$a_1 = \operatorname{tg} \alpha$

sein muß. Der Tangens des Richtungswinkels der Geraden ist also gleich dem Richtungsfaktor a_1 in der linearen Funktionsgleichung $y = a_1 x + a_0$, durch die jene Gerade gegeben ist.

Sehen wir uns einige Beispiele an, in denen aus gegebenem Richtungswinkel einer Geraden deren Normalform aufgestellt werden soll. Die Größe a_0 kann in allen Fällen dabei noch beliebig gewählt werden.

- | | | | |
|----|---------------------|---|----------------------|
| 1) | $\alpha = 0^\circ$ | $a_1 = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$ | $y = a_0$ |
| 2) | $\alpha = 30^\circ$ | $a_1 = \operatorname{tg} 30^\circ = 0,5774$ | $y = 0,5774 x + a_0$ |
| 3) | $\alpha = 45^\circ$ | $a_1 = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ | $y = x + a_0$ |
| 4) | $\alpha = 90^\circ$ | $a_1 = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$ | |

Für den letzten Fall ist keine Gleichung in der Normalform angebbbar. Darauf war auch schon im 10. Kapitel andeutungsweise hingewiesen worden. Im Abschnitt 12.34 werden wir darauf näher eingehen.

- | | | | |
|----|----------------------|---|-----------------------|
| 5) | $\alpha = 120^\circ$ | $a_1 = \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ)$
$= -\operatorname{tg} 60^\circ = -1,7321$ | $y = -1,7321 x + a_0$ |
| 6) | $\alpha = 180^\circ$ | $a_1 = \operatorname{tg} 180^\circ = 0$ | $y = a_0$ |

12.22 Allgemeine Form

Oft wird eine Gerade in der allgemeinen Form

$$Ax + By + C = 0$$

angegeben.

Der Zusammenhang zwischen dieser allgemeinen Form und der Normalform läßt sich sofort zeigen:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ By &= -Ax - C \\ y &= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (B \neq 0) \end{aligned}$$

Den Fall $B = 0$ schließen wir zunächst bei unseren Betrachtungen aus. Es handelt sich in diesem Fall um Gerade, die parallel zur y -Achse verlaufen. Diese Geraden lassen sich nicht in der Normalform angeben.

Setzt man nun noch für $-\frac{A}{B} = a_1$ und für $-\frac{C}{B} = a_0$, so ergibt sich sofort die gewünschte Normalform

$$y = a_1 x + a_0.$$

Einige Beispiele sollen die Umwandlung der allgemeinen Form einer Geradengleichung in die Normalform verdeutlichen.

- 1) $12x + 3y - 6 = 0$
 $3y = -12x + 6$
 $y = -4x + 2$
- 2) $-2x + y - 5 = 0$
 $y = 2x + 5$
- 3) $7x - 3y + 21 = 0$
 $-3y = -7x - 21$
 $y = \frac{7}{3}x + 7.$

Andererseits kann man natürlich jede Normalform in eine allgemeine Form umschreiben.

Zum Beispiel:

- 4) $y = -3x + 5$
 $3x + y - 5 = 0$
- 5) $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{7}$
 $-\frac{2}{3}x + y - \frac{3}{7} = 0$
 oder $-14x + 21y - 9 = 0.$

12.3 Aufstellung von Geradengleichungen aus gegebenen Stücken

Im folgenden Abschnitt sollen einige Geradenformen behandelt werden, die dazu dienen, die eben genannten Geradengleichungen aus gegebenen Stücken aufzustellen. Sie beruhen darauf, daß eine Gerade bereits eindeutig bestimmt ist entweder durch ihre Richtung und einen ihrer Punkte oder durch Angabe von zwei auf ihr liegenden Punkten.

12.31 Punktrichtungsform

Die Punktrichtungsform dient dazu, aus einem auf einer Geraden liegenden Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und deren gegebenem Richtungsfaktor a_1 die Gleichung der Geraden aufzustellen.

Allgemein gilt für eine Gerade die Gleichung

$$(1) \quad y = a_1 x + a_0.$$

Da der Punkt $P_1(x_1; y_1)$ auf der Geraden liegen soll, erfüllt er deren Gleichung:

$$(2) \quad y_1 = a_1 x_1 + a_0.$$

Nach Subtraktion (1) – (2) ergibt sich

$$y - y_1 = a_1 x + a_0 - (a_1 x_1 + a_0)$$

$$y - y_1 = a_1 x + a_0 - a_1 x_1 - a_0$$

$$y - y_1 = a_1 \cdot (x - x_1)$$

oder

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = a_1}.$$

Diese Form bezeichnet man als Punktrichtungsform für die Gerade.

Hierzu einige Beispiele.

1. Beispiel: Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Punkt $P_1(3;7)$ geht und den Richtungskfaktor $\frac{1}{2}$ hat.

Die gegebenen numerischen Werte haben wir in die Punktrichtungsform

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a_1$$

einzusetzen:

$$\frac{y - 7}{x - 3} = \frac{1}{2}.$$

Bei derartigen Aufgaben gibt man meist die Normalform der gesuchten Geraden an:

$$y - 7 = \frac{1}{2} (x - 3)$$

$$y - 7 = \frac{1}{2} x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{11}{2}.$$

2. Beispiel: Eine Gerade geht durch den Punkt $P_1(2;5)$ und bildet mit der positiv gerichteten x -Achse einen Winkel von 45° . Diese Gerade ist durch die Normalform anzugeben.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\
 \frac{y-5}{x-2} &= 1 \\
 y-5 &= x-2 \\
 y &= x+3.
 \end{aligned}$$

12.32 Zweipunkteform

Anstelle eines Geradenpunktes und des Richtungsfaktors kann man auch zwei Geradenpunkte zur Aufstellung einer Geradengleichung benutzen. Dazu betrachten wir folgende Zeichnung:

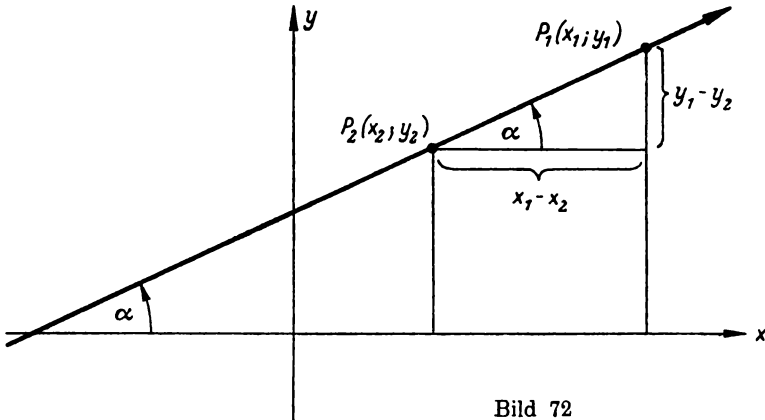


Bild 72

Aus ihr lesen wir ab:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Wegen $\operatorname{tg} \alpha = a_1$ folgt hieraus

$$a_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

In der Punktrichtungsform setzen wir für a_1 den obigen Ausdruck ein und erhalten die sogenannte Zweipunkteform für eine Gerade:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}.$$

x_1 und x_2 sind dabei die Abszissen der beiden gegebenen Punkte und y_1 und y_2 deren Ordinaten.

Hierzu einige Beispiele.

1. Beispiel: Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch die Punkte $P_1(5;2)$ und $P_2(3;-4)$ geht.

Die numerischen Werte werden in die Zweipunkteform eingesetzt:

$$\frac{y-2}{x-5} = \frac{2-(-4)}{5-3}$$

$$\frac{y-2}{x-5} = 3$$

$$y-2 = 3 \cdot (x-5)$$

$$y-2 = 3x-15$$

$$y = 3x-13.$$

2. Beispiel. Ein Betrieb hat am Ende des 1. Halbjahres 60 % seines Jahressolls produziert. Er will am Ende des Jahres eine Produktionshöhe von 110 % haben. Es ist die Gleichung des Produktionsverlaufes des 2. Halbjahres unter Voraussetzung einer linearen Entwicklung aufzustellen.

Der Zusammenhang sei zunächst durch folgende Zeichnung dargestellt:

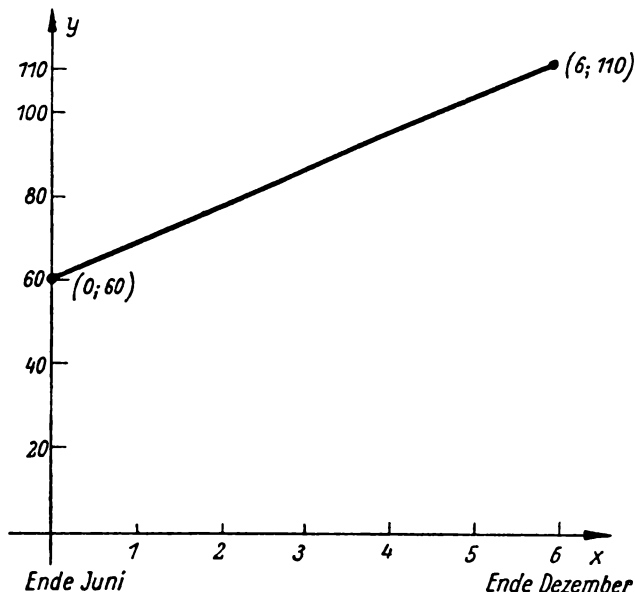


Bild 73

Es ist

$$x_1 = 6 \quad \text{und} \quad y_1 = 110$$

und weiter

$$x_2 = 0 \quad \text{und} \quad y_2 = 60.$$

Die gegebenen Werte werden in die Zweipunkteform eingesetzt:

$$\frac{y - 110}{x - 6} = \frac{110 - 60}{6 - 0}$$

$$\frac{y - 110}{x - 6} = \frac{50}{6}$$

$$y - 110 = \frac{50}{6}(x - 6)$$

$$y - 110 = \frac{50}{6}x - 50.$$

Als Gleichung des Produktionsverlaufes ergibt sich also

$$y = \frac{50}{6}x + 60.$$

12.33 Achsenabschnittsform

Gelegentlich verwendet man zur Aufstellung einer Geradengleichung auch die beiden Achsenabschnitte m und n , deren Bedeutung die folgende Zeichnung angibt.

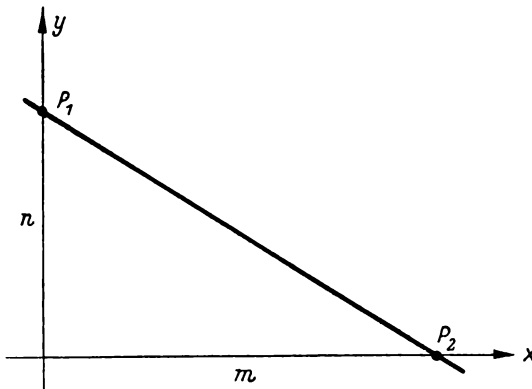


Bild 74

Die Gleichungsform, die uns dies gestattet, ist die Achsenabschnittsform. Wir können sie aus der Zweipunkteform gewinnen. Mit m und n sind nämlich die beiden Punkte P_1 und P_2 gegeben:

$$P_1(0; n) \quad P_2(m; 0).$$

P_1 ist dabei der Schnittpunkt zwischen Gerade und y -Achse und P_2 der zwischen Gerade und x -Achse.

Wir setzen die Koordinaten von P_1 und P_2 in die Zweipunkteform ein:

$$\frac{y - n}{x - 0} = \frac{n - 0}{0 - m}$$

$$\frac{y - n}{x} = -\frac{n}{m}.$$

Hieraus ergibt sich durch leichte Umrechnungen:

$$\begin{aligned} (y - n) \cdot m &= -nx \\ my - mn &= -nx \\ nx + my &= mn \quad | : mn \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1}.$$

Den letzten Ausdruck bezeichnet man als Achsenabschnittsform einer Geraden.

12.34 Hessesche Normalform

Die bisher behandelten Geradenformen außer der allgemeinen Form versagen, wenn man die Gerade parallel zur y -Achse verlaufen läßt. Außerdem kann man bei allen bisherigen Geradenformen nicht auf die Orientierung der Geraden schließen. Im folgenden soll nun eine Geradenform aufgestellt werden, die auch diese Fälle beinhaltet. Es ist dies die nach O. Hesse¹ benannte Hessesche Normalform.

Zur Festlegung der Geraden dienen dabei das vom Koordinatenursprung auf die Gerade gefällte Lot, das die Länge p haben soll, und der Winkel φ , den die positiv gerichtete x -Achse mit dem positiv gerichteten Lot bildet.

¹ Otto Hesse (1811 — 1874).

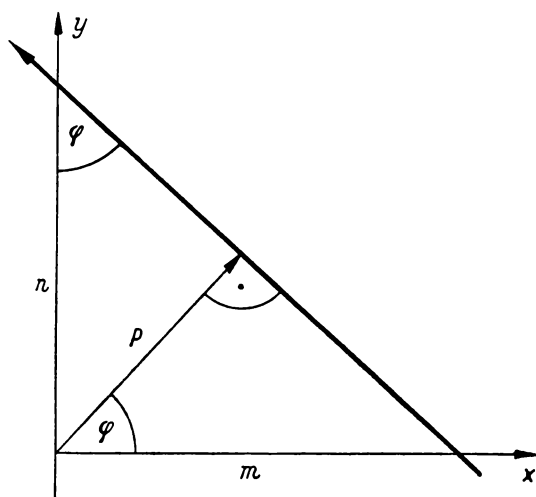


Bild 75

Hierbei ist zu beachten, daß p nur dem Betrag nach zu nehmen ist, da es sich in diesem Fall um eine Länge handelt. Der Winkel φ kann alle Werte von 0° bis 360° annehmen.

Zur Herleitung der Hesseschen Normalform drücken wir die Achsenabschnitte m und n durch p und φ aus. Es ist

$$\cos \varphi = \frac{p}{m} \quad \text{oder} \quad m = \frac{p}{\cos \varphi}$$

$$\sin \varphi = \frac{p}{n} \quad \text{oder} \quad n = \frac{p}{\sin \varphi}.$$

Diese Werte für m und n setzen wir in die Achsenabschnittsform der Geraden ein und erhalten:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

$$\frac{\frac{x}{p}}{\cos \varphi} + \frac{\frac{y}{p}}{\sin \varphi} = 1$$

$$\frac{x \cdot \cos \varphi}{p} + \frac{y \cdot \sin \varphi}{p} = 1$$

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p$$

$$\boxed{x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - p = 0}.$$

Den letzten Ausdruck bezeichnet man als Hessesche Normalform einer Geraden.

Die Anwendung der Hesseschen Normalform soll im folgenden für einige Spezialfälle gezeigt werden. Zu diesem Zwecke lassen wir den Winkel φ die Werte 0° , 90° , 180° und 270° annehmen.

$$1) \quad x \cdot \cos 0^\circ + y \cdot \sin 0^\circ - p = 0.$$

Wegen $\sin 0^\circ = 0$ und $\cos 0^\circ = 1$ gilt weiter:

$$x - p = 0$$

$$x = p.$$

Es handelt sich um eine Parallele zur y -Achse im Abstand p rechts vom Nullpunkt.

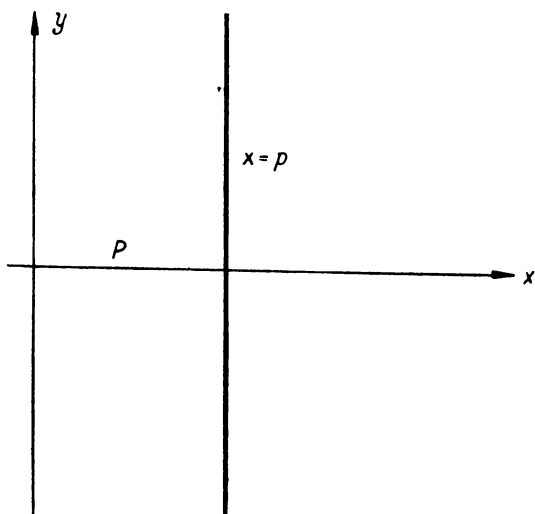


Bild 76

$$2) \quad x \cdot \cos 90^\circ + y \cdot \sin 90^\circ - p = 0.$$

Wegen $\cos 90^\circ = 0$ und $\sin 90^\circ = 1$ gilt weiter:

$$y - p = 0$$

$$y = p.$$

Es handelt sich um eine Parallele zur x -Achse im Abstand p oberhalb des Nullpunktes.

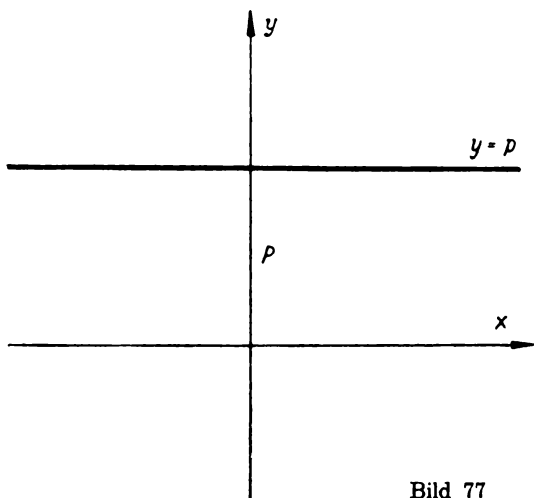


Bild 77

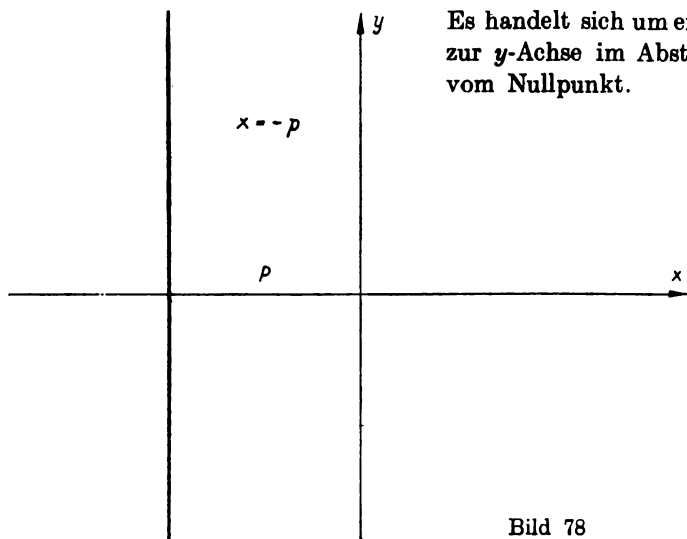
3) $x \cdot \cos 180^\circ + y \cdot \sin 180^\circ - p = 0.$

Wegen $\cos 180^\circ = -1$ und $\sin 180^\circ = 0$ gilt weiter:

$$x \cdot (-1) - p = 0$$

$$-x - p = 0$$

$$x = -p.$$



Es handelt sich um eine Parallele zur y -Achse im Abstand p links vom Nullpunkt.

Bild 78

$$4) \quad x \cdot \cos 270^\circ + y \cdot \sin 270^\circ - p = 0.$$

Wegen $\cos 270^\circ = 0$ und $\sin 270^\circ = -1$ gilt weiter:

$$y \cdot (-1) - p = 0$$

$$-y - p = 0$$

$$y = -p.$$

Es handelt sich um eine Parallele zur x -Achse im Abstand p unterhalb des Nullpunktes.

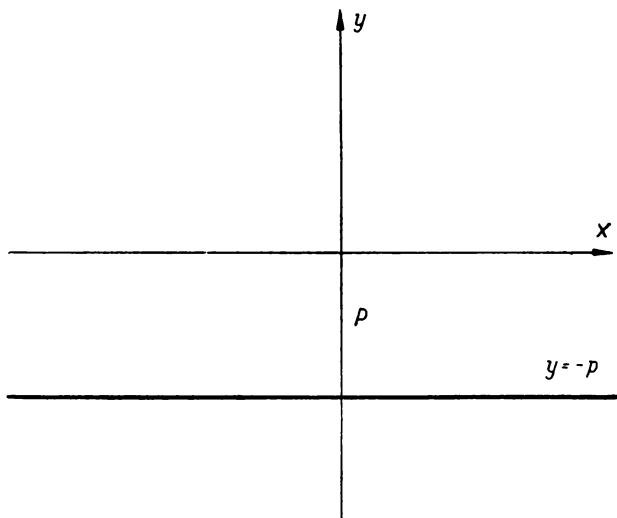


Bild 79

Diese 4 möglichen Gleichungen für achsenparallele Geraden waren ohne Beweis bereits im 10. Kapitel angegeben worden.

Setzt man im Fall 1) und 4) noch $p = 0$, so ergibt sich die Gleichung der y -Achse bzw. x -Achse.

$$y\text{-Achse: } x = 0$$

$$x\text{-Achse: } y = 0.$$

Aus Fall 3) und 2) erhält man durch Nullsetzen von p die Gleichung der negativ orientierten y -Achse bzw. x -Achse.

Auf die Umwandlung der allgemeinen Form einer Geraden in die Hessesche Normalform und auf die Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden mit Hilfe der Hesseschen Normalform soll in diesem Buch nicht eingegangen werden.

12.4 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

12.41 Schnittpunkt zweier Geraden

Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden war anhand von Beispielen bereits im 10. Kapitel gezeigt worden. In diesem Abschnitt wollen wir nun noch die allgemeine Formulierung dieser Aufgabe und deren Lösung bringen. Es soll etwa der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$y = a_{11}x + a_{01} \quad \text{und} \quad y = a_{12}x + a_{02}$$

bestimmt werden. Der erste Index an den Koeffizienten soll die gleiche Bedeutung wie bisher haben. Der zweite Index möge andeuten, daß es sich um den Richtungsfaktor bzw. das Absolutglied der ersten bzw. zweiten Geraden handelt.

Den Schnittpunkt bezeichnen wir wie im 10. Kapitel mit $S(x_S; y_S)$. Er ist dann vorhanden, wenn die beiden betrachteten Geraden nicht parallel sind. Um das zu gewährleisten, müssen wir voraussetzen, daß $a_{11} \neq a_{12}$ ist. Da S auf beiden Geraden liegt, müssen seine Koordinaten beide Geradengleichungen erfüllen. Es gilt also:

$$y_S = a_{11}x_S + a_{01}$$

$$y_S = a_{12}x_S + a_{02}.$$

Damit ist ein System von zwei Bestimmungsgleichungen mit den Unbekannten x_S und y_S entstanden. Hieraus ergeben sich x_S und y_S :

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{a_{02} - a_{01}}{a_{11} - a_{12}} \\ y_S &= \frac{a_{11}a_{02} - a_{12}a_{01}}{a_{11} - a_{12}} \end{aligned} \quad a_{11} \neq a_{12}.$$

Auch hierzu ein einfaches Beispiel.

Beispiel: Es soll der Schnittpunkt der beiden Geraden $y = 6x + 5$ und $y = -2x - 3$ bestimmt werden.

$$y_S = 6x_S + 5$$

$$y_S = -2x_S - 3.$$

Hieraus folgt:

$$x_S = -1 \quad \text{und} \quad y_S = -1.$$

Der Schnittpunkt hat also die Koordinaten $x_S = -1$ und $y_S = -1$:

$$S(-1; -1).$$

12.42 Schnittwinkel zweier Geraden

Im folgenden Abschnitt soll der Schnittwinkel σ der beiden Geraden

$$y = a_{11}x + a_{01} \quad \text{und} \quad y = a_{12}x + a_{02}$$

bestimmt werden.

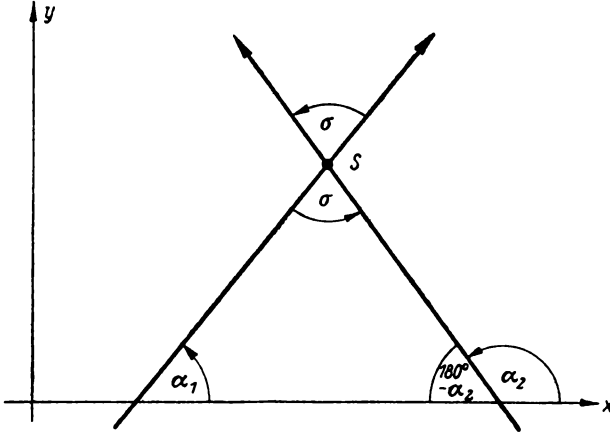


Bild 80

Bei unseren Betrachtungen wollen wir stets erreichen, daß der Schnittwinkel σ im Bereich $0^\circ \leq \sigma \leq 180^\circ$ liegt. Dazu müssen wir die beiden Geraden so mit 1 und 2 bezeichnen, daß für ihre Richtungswinkel die Beziehung $\alpha_2 > \alpha_1$ gilt.

Nach der Zeichnung ist (Winkelsumme im Dreieck)

$$\sigma + \alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2) = 180^\circ$$

oder

$$\sigma + \alpha_1 = \alpha_2$$

$$\sigma = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Wir gehen zum Tangens über:

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Für den Tangens einer Winkeldifferenz gilt folgende Formel:

$$\operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Die Herleitung dieser Formel findet sich in 11.5. Unter Verwendung der letzten Formel gilt

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Da nun

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = a_{11} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = a_{12}$$

ist, ergibt sich für den Tangens des Schnittwinkels σ

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{a_{12} - a_{11}}{1 + a_{12} \cdot a_{11}}$$

Diese Formel gestattet also, unmittelbar aus den Richtungsfaktoren der beiden Geraden den Tangens des Schnittwinkels zu bestimmen. Aus ihm folgt der Schnittwinkel selbst eindeutig auf Grund unserer Festsetzung $0^\circ \leq \sigma \leq 180^\circ$.

Beispiel: Es soll der Schnittwinkel der beiden Geraden $y = 2x + 1$ und $y = -3x + 7$ bestimmt werden.

Aus der Aufgabenstellung kann man unmittelbar entnehmen:

$$a_{11} = 2 \quad \text{und} \quad a_{12} = -3.$$

Verdeutlichen Sie sich dies am Bild 52.

Diese Werte setzen wir in die oben entwickelte Formel für $\operatorname{tg} \sigma$ ein:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{-3 - 2}{1 + (-3) \cdot 2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$\operatorname{tg} \sigma = 1.$$

Der Schnittwinkel beträgt somit 45° .

Mit Hilfe der Formel für $\operatorname{tg} \sigma$ kann man noch die Bedingungen für zwei Spezialfälle herleiten.

1) Unter welchen Bedingungen ist der Schnittwinkel gleich 0° ?

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{a_{12} - a_{11}}{1 + a_{12} \cdot a_{11}}.$$

Da $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ ist, ergibt sich weiter

$$\frac{a_{12} - a_{11}}{1 + a_{12} \cdot a_{11}} = 0$$

$$a_{12} - a_{11} = 0$$

oder

$$a_{11} = a_{12}.$$

Der Schnittwinkel 0° bedeutet Paralleelsein oder Zusammenfallen der beiden Geraden. Die Bedingung dafür ist also

$$\boxed{a_{11} = a_{12}}.$$

2) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn beide Geraden aufeinander senkrecht stehen sollen (Schnittwinkel 90°)?

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{a_{12} - a_{11}}{1 + a_{12} \cdot a_{11}} = \infty$$

oder

$$1 + a_{12} \cdot a_{11} = 0$$

$$\boxed{a_{12} = -\frac{1}{a_{11}}}$$

Der letzte Ausdruck ist die Bedingung dafür, daß die beiden Geraden mit den Richtungsfaktoren a_{11} und a_{12} aufeinander senkrecht stehen. Auch hierzu soll eine abschließende Aufgabe gerechnet werden.

Beispiel: Es soll die Gleichung der Geraden aufgestellt werden, die auf der Geraden $y = 0,5x + 5$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_1(2;6)$ geht.

Zunächst bestimmen wir den Richtungsfaktor der gesuchten Geraden, den wir mit a_{12} bezeichnen:

$$a_{12} = -\frac{1}{a_{11}}$$

$$a_{12} = -\frac{1}{0,5} = -2$$

$$a_{12} = -2.$$

Da nun ein Punkt (P_1) und der Richtungsfaktor (a_{12}) bekannt sind, können wir die Punktrichtungsform zur Aufstellung der Geradengleichung verwenden:

$$\frac{y - 6}{x - 2} = -2$$

oder

$$y = -2x + 10.$$

Die Gleichung der gesuchten Geraden ist also $y = -2x + 10$.

12.5 Weitere Aufgaben zur analytischen Geometrie der Geraden

Im folgenden Abschnitt sollen einige Aufgaben zur Übung und Vertiefung der Kenntnisse gerechnet werden. Der Lösungsweg wird im allgemeinen in etwas gekürzter Darstellung angegeben werden.

- 1) Es ist die Länge und der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 zu berechnen, wenn $P_1(3;4)$ und $P_2(5;6)$ gegeben sind.

Es ist

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\&= \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 - 6)^2} \\&= \sqrt{8} \\&= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

und

$$x_H = \frac{3 + 5}{2} = 4 \qquad y_H = \frac{4 + 6}{2} = 5.$$

- 2) Es ist die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ zu berechnen, wenn $P_1(3;6)$, $P_2(6;7)$ und $P_3(4;8)$ sind.

Wir setzen in

$$F = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} [3(7 - 8) + 6(8 - 6) + 4(6 - 7)] \\F &= 2,5.\end{aligned}$$

- 3) Unter welchem Winkel schneidet die Gerade $y = 3x + 5$ die positiv gerichtete x -Achse?

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= a_1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= 3 \\ \alpha &= 71^\circ 34' .\end{aligned}$$

- 4) Unter welchem Winkel schneidet die Gerade $y = -2x - 7$ die positiv gerichtete x -Achse?

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= a_1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= -2 \\ \alpha &= 116^\circ 34' .\end{aligned}$$

5) Welchen Richtungsfaktor hat die Gerade $3x + 5y - 6 = 0$?

$$3x + 5y - 6 = 0$$

$$5y = -3x + 6$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5}$$

$$a_1 = -\frac{3}{5}.$$

6) Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch die Punkte $P_1(3; -5)$ und $P_2(-2; -3)$ geht.

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - (-5)}{x - 3} &= \frac{-3 - (-5)}{-2 - 3} \\ \frac{y + 5}{x - 3} &= \frac{-2}{-5} \\ y &= -\frac{2}{5}x - \frac{19}{5}.\end{aligned}$$

7) Es ist der Schnittwinkel und der Schnittpunkt der beiden Geraden $3x - 4y + 12 = 0$ und $5x - 2y - 17 = 0$ zu bestimmen.

1. Schnittwinkel:

$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{2}$$

$$a_{11} = \frac{3}{4} \quad a_{12} = \frac{5}{2}$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{a_{12} - a_{11}}{1 + a_{12} \cdot a_{11}}$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{14}{23}$$

$$\sigma = 31^\circ 20'.$$

2. Schnittpunkt:

$$\begin{cases} y_s = \frac{3}{4}x_s + 3 \\ y_s = \frac{5}{2}x_s - \frac{17}{2} \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich $x_s = \frac{46}{7}$ und $y_s = \frac{111}{14}$.

- 8) Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die auf der Geraden $y = 2x + 1$ senkrecht steht und durch deren Punkt P_1 geht, dessen Abszisse $x_1 = -1$ ist.

$$y_1 = 2x_1 + 1$$

$$y_1 = 2 \cdot (-1) + 1$$

$$y_1 = -1$$

$$P_1(-1; -1)$$

$$a_{11} = 2$$

$$a_{12} = -\frac{1}{a_{11}}$$

$$a_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a_{12}$$

$$\frac{y + 1}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$$

- 9) Im Dreieck $P_1P_2P_3$ ist der Schnittpunkt der Höhen zu bestimmen, wenn $P_1(5;4)$, $P_2(-2;1)$ und $P_3(3;-3)$ gegeben sind.

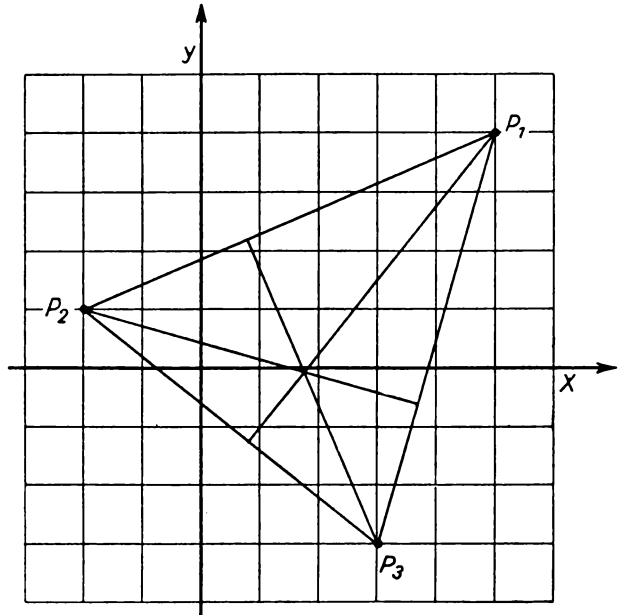


Bild 81

Die Höhen sind die Lote von den Eckpunkten des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten. Sie schneiden sich alle drei in einem Punkte, der laut Aufgabenstellung zu bestimmen ist. Es genügt dazu natürlich, zwei Höhen zum Schnitt zu bringen.

Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Höhe durch P_1 . Mit Hilfe der Punktrichtungsform ergibt sich

$$\frac{y-4}{x-5} = \frac{5}{4} \quad \text{oder} \quad y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4},$$

da diese Höhe auf der Geraden senkrecht steht, die durch P_2 und P_3 geht und deren Richtungsfaktor $-\frac{4}{5}$ ist, was mit Hilfe der Zweipunkteform folgt.

Entsprechend ergibt sich für die Gleichung der Höhe durch P_3 :

$$\frac{y+3}{x-3} = -\frac{7}{3} \quad \text{oder} \quad y = -\frac{7}{3}x + 4,$$

da diese Höhe auf der Geraden senkrecht steht, die durch P_1 und P_2 geht und deren Richtungsfaktor $\frac{3}{7}$ ist.

Da der Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ auf beiden Höhen liegt, erfüllen seine Koordinaten beide Höhengleichungen:

$$y_s = \frac{5}{4}x_s - \frac{9}{4}$$

$$y_s = -\frac{7}{3}x_s + 4.$$

Hieraus ergibt sich

$$x_s = \frac{75}{43} = 1,74$$

$$y_s = -\frac{12}{172} = -0,07.$$

Die Höhen schneiden sich also im Punkte

$$S(1,74; -0,07).$$

In ähnlicher Weise findet man den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks. Diese sind die Verbindungslinien der Eckpunkte des Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich ebenfalls in einem Punkte, dem Schwerpunkt des Dreiecks.

Ü 12 Übungsaufgaben zur analytischen Geometrie der Geraden

- 1) Es ist die Länge der Strecke $P_1(7;6)$ $P_2(-3;5)$ zu bestimmen.
- 2) Es ist die Fläche des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ zu bestimmen, wenn $P_1(3;4)$, $P_2(8;5)$ und $P_3(4;6)$ sind.
- 3) Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, für die $a_1 = 0,5$ und $a_0 = 3$ gegeben sind.
- 4) Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Punkt $P_1(-6;-6)$ geht und den Richtungswinkel 60° hat.
- 5) Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch die Punkte $P_1(3;3)$ und $P_2(-3;-3)$ geht.
- 6) Wo schneidet die Gerade $17x + 10y - 34 = 0$ die Koordinatenachsen?
- 7) Es ist die Gleichung der Parallelen zur Geraden $2x - 3y - 12 = 0$ aufzustellen, die durch den Punkt $P_1(5;3)$ geht.
- 8) Es ist der Schnittwinkel der beiden Geraden $y = -2x + 16$ und $y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$ zu bestimmen.
- 9) Ein Betrieb A hat am Ende des 1. Halbjahres 50% seines Jahressolls produziert. Ein anderer Betrieb B hat zur gleichen Zeit 60% des Jahressolls produziert. Der Betrieb A produziert nun im 2. Halbjahr pro Monat 10% seines Jahressolls und der Betrieb B 8% seines Jahressolls. Wann haben beide Betriebe die gleiche Erfüllung (in %)? Welche Erfüllung hat jeder Betrieb am Jahresende?

L 12 Lösungen zu Ü 12

- 1) $d = 10,05$
- 2) $F = \frac{9}{2}$
- 3) $y = 0,5x + 3$
- 4) $y = \sqrt{3} \cdot x + 6(\sqrt{3} - 1)$
- 5) $y = x$
- 6) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3,4} = 1$. Die Gerade schneidet die x -Achse im Abstand 2 und die y -Achse im Abstand 3,4 vom Nullpunkt.
- 7) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

8) Der Schnittwinkel beträgt $32^{\circ} 28'$.

9) Betrieb A: $y = 10x + 50$

Betrieb B: $y = 8x + 60$

x bedeutet die Monatszahl und y die Erfüllung in %.

Beide Betriebe haben Ende November die gleiche Erfüllung ($x = 5$).
Der Betrieb A hat am Jahresende mit 110% und der Betrieb B mit 108% erfüllt.

13. Koordinatentransformationen

Im folgenden Kapitel wollen wir einige wesentliche Arten von Koordinatentransformationen in der Ebene behandeln.

Eine ebene Koordinatentransformation überführt die Koordinaten etwa eines x, y -Systems in die eines anderen, z. B. eines ξ, η -Systems. Sie läßt sich ganz allgemein durch zwei eindeutige Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen darstellen:

$$\begin{cases} \xi = f(x, y) \\ \eta = g(x, y) \end{cases}.$$

Durch spezielle Wahl der Funktionen f und g gelangen wir zu den anschließend aufgeführten Haupttypen ebener Koordinatentransformationen. Die Formeln dafür gewinnen wir anhand von Zeichnungen für Speziallagen der betrachteten Punkte; für alle anderen Fälle führt eine analoge Zeichnung und Rechnung zum gleichen Ergebnis. Das führen wir nicht aus.

13.1 Bewegungstransformation

13.11 Translation

Eine Translation liegt dann vor, wenn die Achsen des ξ, η -Systems aus den entsprechenden Achsen des x, y -Systems durch Parallelverschiebung hervorgehen.

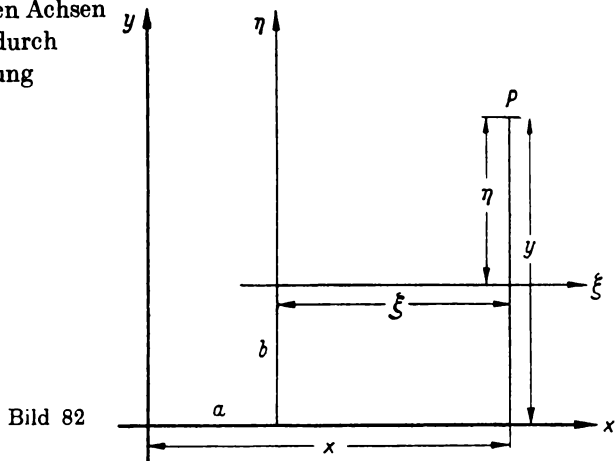


Bild 82

Der Ursprung des ξ, η -Systems habe im x, y -System die Koordinaten $(a; b)$. Dann kann man aus der Zeichnung ablesen, daß zwischen den Koordinaten des ξ, η -Systems und denen des x, y -Systems folgende einfache Beziehungen bestehen:

$$x = \xi + a$$

$$y = \eta + b$$

oder

$$\begin{cases} \xi = x - a \\ \eta = y - b \end{cases}.$$

Das heißt, der Punkt $P(x; y)$ hat im ξ, η -System die Abszisse $x - a$ und die Ordinate $y - b$.

Hierzu seien einige Beispiele gerechnet.

1. Beispiel: Welche Koordinaten hat der Punkt $P(5; 8)$ im ξ, η -System, wenn der Ursprung des ξ, η -Systems im x, y -System die Koordinaten $(2; 3)$ hat?

Zunächst ergeben sich als Translationsformeln für obigen Fall

$$\xi = x - 2$$

$$\eta = y - 3.$$

Setzen wir für x und y speziell die Koordinaten des Punktes P ein, so ergeben sich

$$\xi = 5 - 2 = 3$$

und

$$\eta = 8 - 3 = 5.$$

Der Punkt hat im ξ, η -System also die Koordinaten $(3; 5)$.

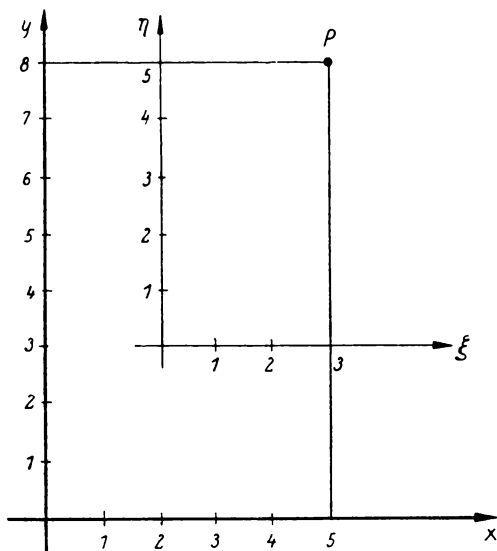


Bild 83

2. Beispiel: Die Gleichung einer Geraden lautet im x, y -System $y = 5x + 3$. Wie lautet die Gleichung dieser Geraden im ξ, η -System, wenn $a = 3$ und $b = 2$ betragen?

Die Geradengleichung ist mit

$$\xi = x - 3 \quad \text{bzw.} \quad x = \xi + 3$$

$$\eta = y - 2 \quad \quad \quad y = \eta + 2$$

zu transformieren.

Wir setzen das in $y = 5x + 3$ ein und erhalten:

$$y = 5x + 3$$

$$\eta + 2 = 5(\xi + 3) + 3$$

$$\eta + 2 = 5\xi + 15 + 3$$

$$\eta = 5\xi + 16.$$

Die Gerade hat also im ξ, η -System die Normalform

$$\eta = 5\xi + 16.$$

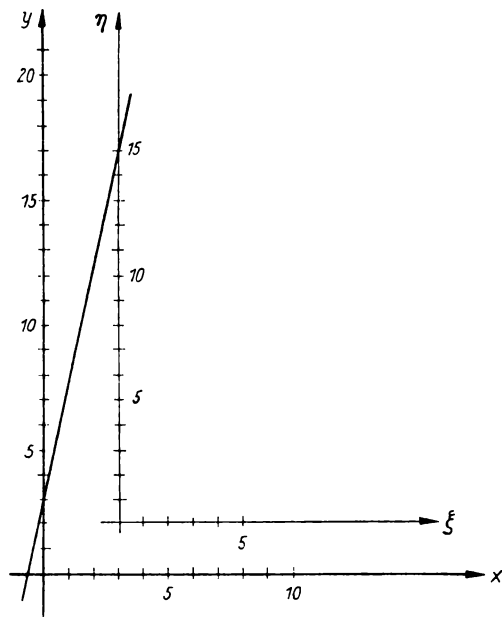


Bild 84

Wie man sieht, hat sich ihr Richtungsfaktor durch die Transformation nicht geändert. Es ist eine allgemeine Tatsache, daß sich die Richtungsfaktoren von Geraden bei Translation nicht ändern, wie sich leicht zeigen läßt.

3. Beispiel: Es ist die Länge der Strecke P_1P_2 im x, y -System zu ermitteln, wobei $P_1(5;5)$ und $P_2(1;2)$ ist. Weiterhin ist die Länge dieser Strecke im ξ, η -System mit $a = 1$ und $b = 2$ zu berechnen.

Zunächst gilt für das x, y -System nach 12.11

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ d &= \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2} \\ d &= 5. \end{aligned}$$

Entsprechend findet man die Länge derselben Strecke im ξ, η -System aus

$$\delta = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}.$$

Die Koordinaten ξ und η sind durch die Translation

$$\begin{aligned} \xi &= x - 1 \\ \eta &= y - 2 \end{aligned}$$

gegeben.

Daraus ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 & y_1 &= 5 \\ x_2 &= 1 & y_2 &= 2 \\ \xi_1 &= 4 & \eta_1 &= 3 \\ \xi_2 &= 0 & \eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{25} \\ \delta &= 5 \end{aligned}$$

und also

$$\delta = d.$$

Wie man sieht, hat die Strecke P_1P_2 im x, y -System die gleiche Länge wie im ξ, η -System. Dies gilt überdies für alle Strecken, wie man allgemein zeigen kann.

Es sei noch bemerkt, daß auch ein Dreieck nach einer Translation den gleichen Flächeninhalt hat wie im ursprünglichen System.

13.12 Rotation

Eine Rotation bedeutet eine Drehung beider Achsen des x, y -Systems um einen Winkel φ um den Ursprung, deren Ergebnis wir wieder als ξ, η -System bezeichnen. Der neue Ursprung stimmt mit dem alten nach Voraussetzung überein.

Betrachten wir zunächst folgende Zeichnung, in der das ξ, η -System aus dem x, y -System durch eine Drehung um den Ursprung und um den Winkel φ im mathematisch positiven Drehsinn hervorgeht:

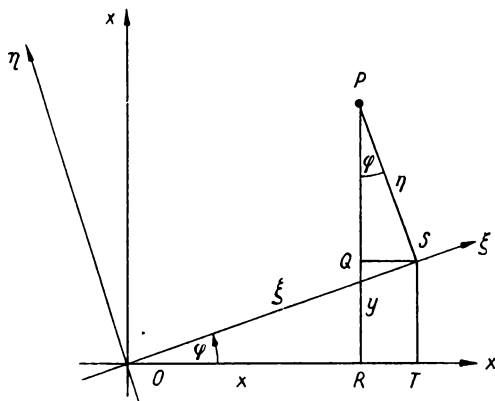


Bild 85

Die Koordinaten des Punktes $P(x; y)$ gestatten folgende Zerlegung:

$$x = OR = OT - RT = OT - QS$$

$$y = PR = RQ + QP = ST + QP.$$

Da nun

$$\frac{OT}{OS} = \cos \varphi$$

$$OT = OS \cos \varphi$$

$$\frac{QS}{PS} = \sin \varphi$$

$$QS = PS \sin \varphi$$

$$\frac{ST}{OS} = \sin \varphi$$

$$ST = OS \sin \varphi$$

und

$$\frac{QP}{PS} = \cos \varphi$$

$$QP = PS \cos \varphi$$

ist, gilt weiter

$$x = OT - QS = OS \cos \varphi - PS \sin \varphi$$

$$y = ST + QP = OS \sin \varphi + PS \cos \varphi.$$

Wegen

$$OS = \xi \quad \text{und} \quad PS = \eta$$

ergibt sich schließlich

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$$

$$y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.$$

Diese Ausdrücke rechnen wir noch nach ξ und η aus. Zu diesem Zweck rechnen wir die 2. Gleichung nach η aus:

$$\eta = \frac{y - \xi \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

und setzen diesen Ausdruck für η in die nach ξ ausgerechnete 1. Gleichung ein:

$$\xi = \frac{x + \eta \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\xi = \frac{x + \sin \varphi \left(\frac{y - \xi \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)}{\cos \varphi}$$

$$\xi = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi - \xi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$\xi \cos^2 \varphi + \xi \sin^2 \varphi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$\xi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Entsprechend läßt sich auch η berechnen. Danach ergibt sich:

$$\boxed{\begin{array}{l} \xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{array}}.$$

Auch hierzu wird ein Beispiel gerechnet:

Es soll die Gleichung der Geraden $y = 3x + 6$ im ξ, η -System angegeben werden, welches um den Winkel $\varphi = 90^\circ$ gegenüber dem x, y -System gedreht ist.

Für eine Drehung um $\varphi = 90^\circ$ im positiven Sinne sind folgende Transformationsgleichungen gültig:

$$x = \xi \cos 90^\circ - \eta \sin 90^\circ$$

$$y = \xi \sin 90^\circ + \eta \cos 90^\circ$$

bzw.

$$x = -\eta$$

$$y = \xi.$$

Die Geradengleichung $y = 3x + 6$ geht daher über in

$$y = 3x + 6$$

$$\xi = 3(-\eta) + 6$$

$$\xi = -3\eta + 6$$

$$3\eta = -\xi + 6$$

$$\eta = -\frac{1}{3}\xi + 2.$$

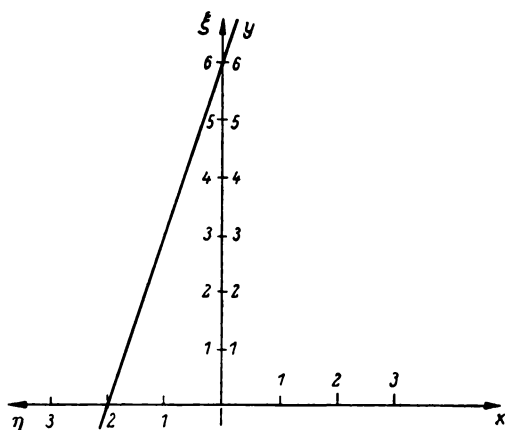


Bild 86

Ähnlich kann man auch die Invarianz des Flächeninhalts eines Dreiecks und die Länge einer Strecke gegenüber einer Rotation zeigen. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beide bisher betrachteten Transformationen, die Translation und die Rotation, verändern also die Länge einer Strecke (und auch allgemein beliebiger Kurven) und den Flächeninhalt eines Dreiecks (und auch allgemein beliebiger Flächen) nicht. Man nennt aus diesem Grunde die von der Translation und Rotation erzeugte Transformationsgruppe die Kongruenz- oder Bewegungsgruppe.

13.2 Ähnlichkeitstransformation

Außer den Bewegungstransformationen spielt noch die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen

$$\xi = \varrho \cdot x$$

$$\eta = \varrho \cdot y$$

eine Rolle, wobei $\varrho > 0$ vorausgesetzt ist.

Bei einer Ähnlichkeitstransformation werden also die Koordinaten des ξ, η -Systems gegenüber denen des x, y -Systems gestreckt oder gestaucht, je nachdem

$$\varrho > 1 \quad (\text{Streckung})$$

$$\varrho < 1 \quad (\text{Stauchung})$$

ist.

Auch hierzu einige Beispiele.

1. Beispiel: Wie lautet die Gleichung der Geraden $y = 3x + 2$ nach einer Ähnlichkeitstransformation mit $\varrho = 3$?

Zunächst gilt in diesem Fall

$$\xi = 3x \quad x = \frac{1}{3} \xi$$

$$\eta = 3y \quad y = \frac{1}{3} \eta.$$

Diese Transformationsgleichungen setzen wir in

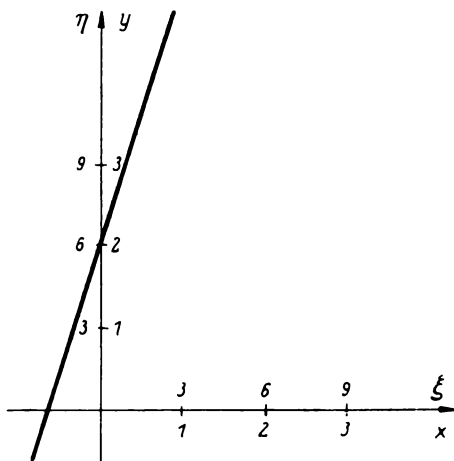
$$y = 3x + 2$$

ein und erhalten

$$\frac{1}{3} \eta = 3 \cdot \frac{1}{3} \xi + 2$$

$$\eta = 3\xi + 6.$$

Bild 87



Wie wir schon an diesem Beispiel erkennen und leicht verallgemeinern können, bleibt der Richtungsfaktor einer Geraden bei Ähnlichkeitstransformation derselbe.

2. Beispiel: Wie ändert sich die Länge einer Strecke bei einer Ähnlichkeitstransformation?

Es gilt im x, y -System

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Analog gilt für das ξ, η -System

$$\delta = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}.$$

Setzen wir $\xi_i = \varrho x_i$ und $\eta_i = \varrho y_i$ mit $i = 1, 2$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(\varrho x_1 - \varrho x_2)^2 + (\varrho y_1 - \varrho y_2)^2} \\ &= \sqrt{\varrho^2 (x_1 - x_2)^2 + \varrho^2 (y_1 - y_2)^2} \\ &= \varrho \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \delta &= \varrho \cdot d. \end{aligned}$$

Das heißt, die Länge einer Strecke, die im x, y -System d beträgt, ist im ξ, η -System das ϱ -fache davon.

3. Beispiel: Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Dreiecks bei einer Ähnlichkeitstransformation?

Es gilt für das x, y -System

$$F = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

und im ξ, η -System

$$\varphi = \frac{1}{2} [\xi_1(\eta_2 - \eta_3) + \xi_2(\eta_3 - \eta_1) + \xi_3(\eta_1 - \eta_2)].$$

Wir setzen $\xi_i = \varrho x_i$ und $\eta_i = \varrho y_i$ mit $i = 1, 2, 3$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} [\varrho x_1(\varrho y_2 - \varrho y_3) + \varrho x_2(\varrho y_3 - \varrho y_1) + \varrho x_3(\varrho y_1 - \varrho y_2)] \\ &= \frac{1}{2} \varrho^2 [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \varrho^2 F \\ \Phi &= \varrho^2 \cdot F. \end{aligned}$$

Flächeninhalte multiplizieren sich also bei einer Ähnlichkeitstransformation mit ϱ^2 .

Es kann auch gezeigt werden, daß bei einer Ähnlichkeitstransformation Winkel unverändert bleiben.

Der Vollständigkeit halber und im Hinblick auf die Anwendungen¹ sei gesagt, daß die Bewegungsgruppe zusammen mit der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen die sogenannte Hauptgruppe erzeugt, die ihrerseits wieder eine Untergruppe der Gruppe der Affinität

$$\begin{aligned}\xi &= a_0 + a_1 x + a_2 y \\ \eta &= b_0 + b_1 x + b_2 y\end{aligned}$$

ist.

Die Gruppe der Affinität ist ihrerseits wieder eine Untergruppe der Gruppe der Projektivität

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y}{c_0 + c_1 x + c_2 y} \\ \eta &= \frac{b_0 + b_1 x + b_2 y}{c_0 + c_1 x + c_2 y}\end{aligned}$$

¹ Vgl. zum Beispiel

Meyer zur Capellen; Leitfaden der Nomographie, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953, Seite 79 ff.
oder

Pentkowski; Nomographie, Berlin 1953, Seite 146 ff.

Ü 13 Übungsaufgaben zu den Koordinatentransformationen

- 1) Welche Koordinaten hat der Punkt $P(2; -3)$ des x, y -Systems im ξ, η -System, wenn der Ursprung des ξ, η -Systems im x, y -System die Koordinaten $(6; 2)$ hat?
- 2) Wie lautet die Gleichung der Geraden $y = -3x + 5$ im ξ, η -System, wenn $a = -3$ und $b = -5$ sind?
- 3) Wie lauten die Koordinaten des Punktes $P(5; 6)$ nach einer Rotation des Koordinatensystems um 30° im positiven Sinne?
- 4) Wie heißt die Gleichung der Geraden $y = -6x + 8$ nach einer Ähnlichkeitstransformation mit $\varrho = 0,5$?
- 5) Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ mit $P_1(3; 6)$, $P_2(8; 2)$ und $P_3(4; 10)$ zu bestimmen, wenn dieses noch einer Ähnlichkeitstransformation mit $\varrho = 2$ unterworfen wird.

L 13 Lösungen zu Ü 13

- 1) $\xi = -4 \quad \eta = -5$
- 2) $\eta = -3\xi + 19$
- 3) $\xi = \frac{5}{2}\sqrt{3} + 3$
 $\eta = -\frac{5}{2} + 3\sqrt{3}$
- 4) $\eta = -6\xi + 4$
- 5) $\Phi = 48$.

14. Analytische Geometrie der Kurven 2. Ordnung

Im folgenden Kapitel wollen wir uns mit den Kurven 2. Ordnung beschäftigen. Wir führen sie mit Hilfe ihrer geometrischen Ortseigenschaften ein.

14.1 Der Kreis

Man definiert:

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt, dem Mittelpunkt, gleichweit entfernt sind.

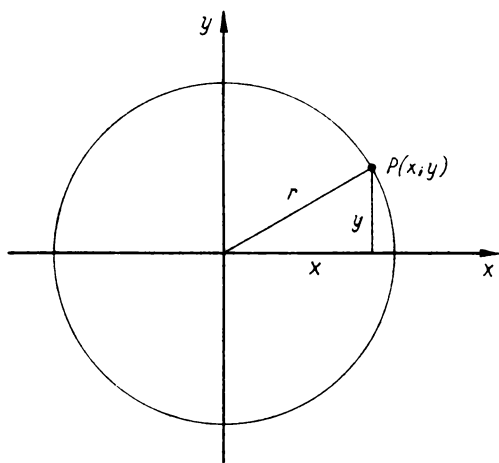


Bild 88

Diese Entfernung heißt der Radius r des Kreises. Wählen wir den Mittelpunkt als Ursprung eines x , y -Koordinatensystems, so ergibt sich anhand der Zeichnung folgende Funktionsgleichung für den Kreis:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2},$$

die als Mittelpunktsgleichung bezeichnet wird.

Zum Beispiel hat ein Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius $r = 5$ die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$.

Oft tritt die Frage nach der Gleichung einer Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ auf. Unter der Tangente im Punkte $P_1(x_1; y_1)$ an den betrachteten Kreis versteht man die Grenzlage der Sekante, die mit dem Kreis zunächst die beiden Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ (P_2 ist ein beliebiger zweiter Kreispunkt) gemeinsam hat, für den Fall, daß P_2 nach P_1 rückt.

Es gilt zunächst nach 12.32 für den Richtungsfaktor der Sekante

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\ &= \frac{y_1^2 - y_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)}. \end{aligned}$$

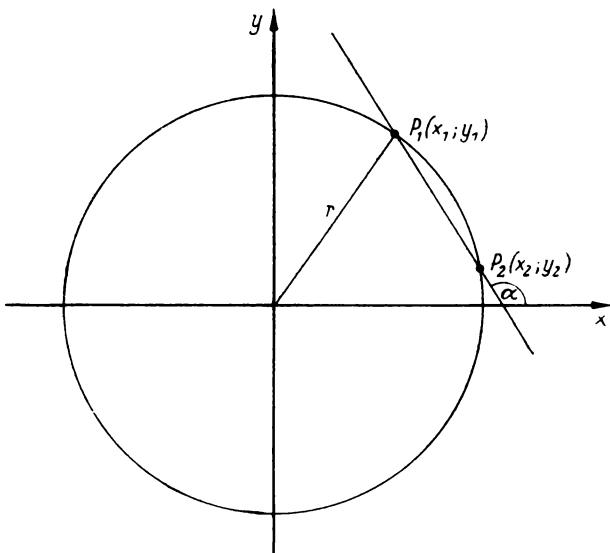


Bild 89

Da P_1 und P_2 Kreispunkte sind, erfüllen ihre Koordinaten die Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} y_1^2 &= r^2 - x_1^2 \\ y_2^2 &= r^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

Wir setzen diese Werte für y_1^2 und y_2^2 in die Gleichung für $\operatorname{tg} \alpha$ ein:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{r^2 - x_1^2 - r^2 + x_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\ &= -\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\ &= -\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\ &= -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.\end{aligned}$$

Lassen wir nun den Punkt P_2 in den Punkt P_1 hineinfallen, so ergibt sich für den Richtungsfaktor der Kreistangente im Punkte P_1 , den wir mit $\operatorname{tg} \tau$ bezeichnen wollen:

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{2x_1}{2y_1} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

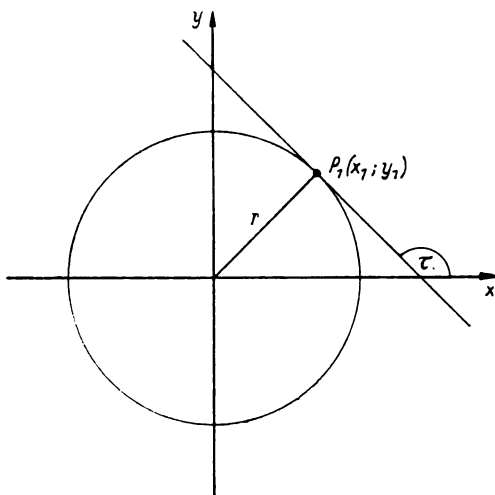


Bild 90

Da wir jetzt den Richtungsfaktor und einen Punkt, nämlich $P_1(x_1; y_1)$, der Kreistangente in P_1 kennen, können wir ihre Gleichung nach der Punktrichtungsform (12.31) aufstellen:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(y - y_1) y_1 &= -x_1 (x - x_1) \\ y y_1 - y_1^2 &= -x x_1 + x_1^2 \\ x x_1 + y y_1 &= x_1^2 + y_1^2.\end{aligned}$$

Da $P_1(x_1; y_1)$ auf dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ liegt, gilt

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Somit lautet die Gleichung der Kreistangente im Punkte $P_1(x_1; y_1)$:

$$\boxed{x x_1 + y y_1 = r^2}.$$

In dem von uns bisher betrachteten Fall fiel der Kreismittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen. Wir wollen im folgenden diese Voraussetzung fallen lassen.

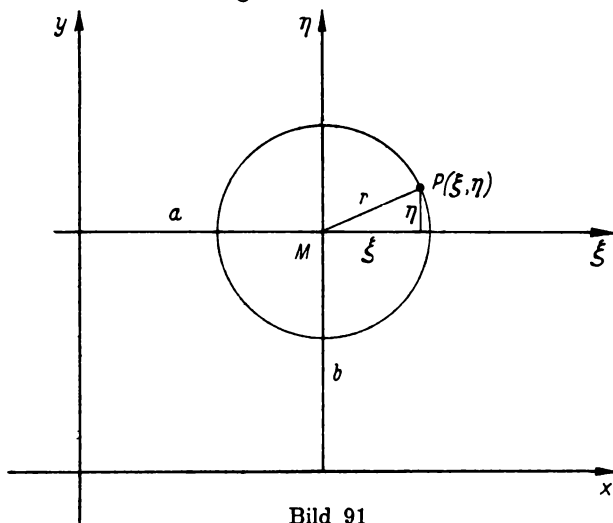


Bild 91

Der Kreismittelpunkt habe jetzt die Koordinaten a und b :

$$M(a; b).$$

Um den allgemeinen Fall auf den bereits betrachteten speziellen Fall zurückführen zu können, legen wir durch den Mittelpunkt des Kreises ein neues Koordinatensystem ξ, η , dessen Achsen zu den entsprechenden des x, y -Systems parallel sein sollen.

Im ξ, η -System hat dann der Kreis die uns schon bekannte Gleichung, die für den Zusammenfall von Mittelpunkt und Koordinatenursprung gilt:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Durch die Translation

$$\xi = x - a$$

$$\eta = y - b$$

geht das ξ, η -System in das x, y -System über (vgl. 13.11). Also hat der Kreis im allgemeinen Fall die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Für die Kreistangente gilt dann entsprechend

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Rechnet man die eben angegebene Kreisgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

um, so kann sie, wenn noch

$$D = -2a$$

$$E = -2b$$

$$F = a^2 + b^2 - r^2$$

gesetzt wird, in die Form

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gebracht werden. Sie wird als allgemeine Form der Kreisgleichung bezeichnet.

Wir betrachten einige Aufgaben zur Übung.

- 1) Es ist die Gleichung des Kreises mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt $M(1; 3)$ aufzustellen.

Sie heißt, da $r = 2$, $a = 1$ und $b = 3$ ist,

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

- 2) Es ist der Radius und der Mittelpunkt des Kreises anzugeben, der die folgende allgemeine Gleichung $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ hat.

Wir können die gesuchten Größen sofort ablesen, wenn wir die Kreisgleichung in die Form $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ bringen. Dazu formen wir um:

$$x^2 + 4x + y^2 + 6y = 3.$$

Um die beiden x enthaltenden Glieder in die Gestalt eines quadratischen Ausdrucks bringen zu können, ist die Addition von 4 notwendig und weiterhin eine Addition von 9, um für die beiden y -Glieder dasselbe tun zu können. Natürlich hat man die Addition von $4 + 9 = 13$ auf beiden Seiten der Gleichung auszuführen. Man erhält also

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= 3 + 4 + 9 \\ (x + 2)^2 + (y + 3)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Der Kreis hat also einen Radius von $r = 4$ und den Mittelpunkt $M(-2; -3)$.

- 3) Es soll die Gleichung des Kreises bestimmt werden, der durch die Punkte $P_1(7; 1)$, $P_2(5; 5)$ und $P_3(-2; 4)$ geht.

Da die angegebenen Punkte auf dem Kreis liegen sollen, erfüllen ihre Koordinaten die Kreisgleichung, die wir in der allgemeinen Form ansetzen:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Es ist daher

$$49 + 1 + 7D + E + F = 0$$

$$25 + 25 + 5D + 5E + F = 0$$

$$4 + 16 - 2D + 4E + F = 0$$

oder

$$7D + E + F = -50$$

$$5D + 5E + F = -50$$

$$-2D + 4E + F = -20.$$

Nach bekannten Methoden¹ ergibt sich hieraus

$$D = -4$$

$$E = -2$$

$$F = -20.$$

Vgl. Abschnitt 8.3, Seite 141 ff.

Somit hat die Kreisgleichung zunächst die allgemeine Form

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$$

Hieraus lassen sich in analoger Weise wie im 2. Beispiel r und M bestimmen. Wegen

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &= 20 + 4 + 1 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 &= 25 \end{aligned}$$

folgt $r = 5$ und $M(2;1)$.

4) Es ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x - 7$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 25$ zu bestimmen.

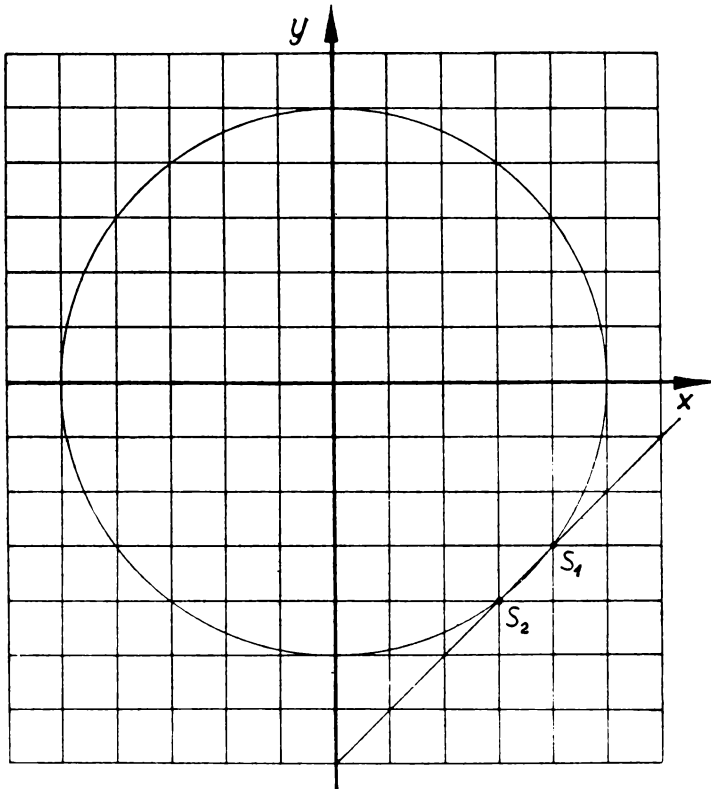


Bild 92

Wir bezeichnen den Schnittpunkt wie üblich mit $S(x_s; y_s)$. Da der Schnittpunkt auf der Geraden und auf dem Kreis liegt, erfüllen seine Koordinaten die entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_s &= x_s - 7 \\ x_s^2 + y_s^2 &= 25. \end{aligned}$$

Man löst diese beiden Gleichungen für die Unbekannten x_s und y_s zweckmäßig, indem man y_s aus der ersten in die zweite Gleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} x_s^2 + (x_s - 7)^2 &= 25 \\ x_s^2 - 7x_s &= -12. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$x_{s_1} = 4 \quad \text{und} \quad x_{s_2} = 3.$$

Es sind zwei Schnittpunkte vorhanden (siehe Bild 92). Die Gerade ist also in bezug auf den Kreis eine Sekante. Die zugehörigen y -Werte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} y_{s_1} &= x_{s_1} - 7 \\ y_{s_1} &= -3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_{s_2} &= x_{s_2} - 7 \\ y_{s_2} &= -4. \end{aligned}$$

$$S_1(4; -3) \quad S_2(3; -4).$$

- 5) Wie lautet die Gleichung der im Punkt $P_1(4; 3)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ gelegten Tangente?

Die Gleichung dieser speziellen Kreistangente ergibt sich nach Einsetzen der Koordinaten von P_1 und unter Beachtung von $r = 5$ in

$$\begin{aligned} x x_1 + y y_1 &= r^2 \\ 4x + 3y &= 25 \\ y &= -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}. \end{aligned}$$

- 6) Vom Punkt $P_2(10; 0)$ aus sind an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ die Tangenten gezogen. Es sind die Berührungspunkte $P_1(x_1; y_1)$ der beiden Tangenten mit dem Kreis zu bestimmen. Weiterhin sind die Gleichungen der Tangenten anzugeben.

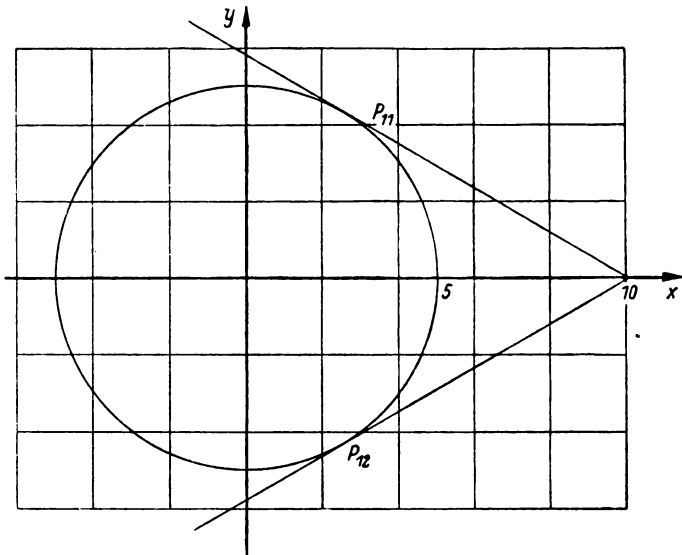


Bild 93

Die Tangenten können zunächst für unseren Fall durch

$$x x_1 + y y_1 = 25$$

angegeben werden. Da der Punkt P_2 ein Punkt jeder der beiden Tangenten ist, erfüllen seine Koordinaten die angegebene Tangentengleichung

$$10 x_1 + 0 y_1 = 25.$$

Als Berührungspunkt zwischen Tangente und Kreis liegt $P_1 (x_1; y_1)$ auf dem Kreis. Daher erfüllen seine Koordinaten die Kreisgleichung

$$x_1^2 + y_1^2 = 25.$$

Aus diesen beiden Bestimmungsgleichungen

$$10 x_1 = 25$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 25$$

ergeben sich x_1 und y_1 wie folgt:

$$x_1 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 2,5$$

und

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + y_1^2 = 25$$

$$y_1^2 = \frac{75}{4}$$

$$y_1 = \pm \frac{5}{2} \sqrt{3} = \pm 4,33.$$

Es sind also zwei Berührungspunkte P_{11} und P_{12} vorhanden:

$$P_{11}(2,5; 4,33) \quad \text{und} \quad P_{12}(2,5; -4,33).$$

Die Gleichungen der beiden Tangenten findet man jetzt leicht durch Einsetzen der Koordinaten von P_{11} und P_{12} in die Tangentengleichung

$$x x_1 + y y_1 = 25.$$

Man erhält

$$\frac{5}{2} x + \frac{5}{2} \sqrt{3} y = 25$$

$$y = -0,58 x + 5,77$$

bzw.

$$\frac{5}{2} x - \frac{5}{2} \sqrt{3} y = 25$$

$$y = 0,58 x - 5,77.$$

7) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = 4$, die zu der Geraden $y = 2x + 3$ parallel ist?

Die Gleichung der Tangente hat für den Kreis $x^2 + y^2 = 4$ die allgemeine Darstellung

$$x x_1 + y y_1 = 4.$$

Wir müssen zur Aufstellung der Gleichung noch den Berührungspunkt $P_1(x_1; y_1)$ kennen und verwenden zu dessen Bestimmung die Tatsache, daß parallele Geraden gleiche Richtungsfaktoren haben (vgl. 12.42). Der Richtungsfaktor der Kreistangente hat den Wert

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Es muß also

$$-\frac{x_1}{y_1} = 2$$

oder

$$x_1 = -2 y_1$$

sein.

Da $P_1(x_1; y_1)$ auch auf dem Kreis liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung des Kreises

$$x_1^2 + y_1^2 = 4.$$

Aus

$$x_1 = -2y_1 \quad \text{und} \quad x_1^2 + y_1^2 = 4$$

ergibt sich

$$x_{11} = -\frac{4\sqrt{5}}{5} = -1,79 \qquad x_{12} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = 1,79$$

$$y_{11} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,89 \qquad y_{12} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} = -0,89.$$

Es sind also zwei Berührungspunkte vorhanden (siehe Bild 94):

$$P_{11}(-1,79; 0,89) \quad P_{12}(1,79; -0,89).$$

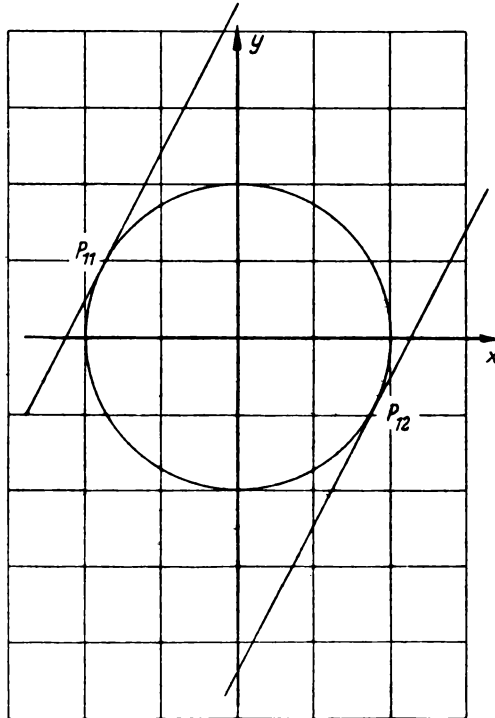


Bild 94

Die Gleichungen der beiden zugehörigen Tangenten findet man jetzt leicht durch Einsetzen der Koordinaten von P_{11} und P_{12} in

$$x x_1 + y y_1 = 4.$$

Man erhält

$$-\frac{4\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4$$

$$y = 2x + 4,47$$

bzw.

$$\frac{4\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4$$

$$y = 2x - 4,47.$$

8) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Kreise

$$x^2 + y^2 - 6x - 18y + 80 = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + 10x - 2y - 144 = 0?$$

Da der Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ auf beiden Kreisen liegt, erfüllen seine Koordinaten die Kreisgleichungen

$$x_s^2 + y_s^2 - 6x_s - 18y_s + 80 = 0$$

$$x_s^2 + y_s^2 + 10x_s - 2y_s - 144 = 0.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion der 2. Gleichung von der 1. Gleichung

$$y_s = 14 - x_s.$$

Diese Beziehung setzen wir in die 1. Gleichung ein, die dann nur noch die Unbekannte x_s enthält:

$$x_s^2 + (14 - x_s)^2 - 6x_s - 18(14 - x_s) + 80 = 0$$

$$2x_s^2 - 16x_s = -24$$

$$x_s^2 - 8x_s = -12.$$

Ihre Lösungen lauten

$$x_{s_1} = 6 \quad \text{und} \quad x_{s_2} = 2.$$

Die Werte y_s ergeben sich durch Einsetzen der Werte x_s in

zu

$$y_s = 14 - x_s$$

$$y_{s_1} = 8 \quad \text{und} \quad y_{s_2} = 12.$$

Es sind also zwei Schnittpunkte zwischen den Kreisen vorhanden:

$$S_1(6; 8) \quad S_2(2; 12).$$

Wir berechnen nun den Schnittwinkel der beiden Kreise. Man versteht darunter den Winkel σ , den die Tangenten an beide Kreise in deren Schnittpunkt miteinander bilden. Aus Symmetriegründen können wir uns auf einen Schnittwinkel beschränken (siehe Bild 95), etwa auf den von den beiden Tangenten in S_1 gebildeten.

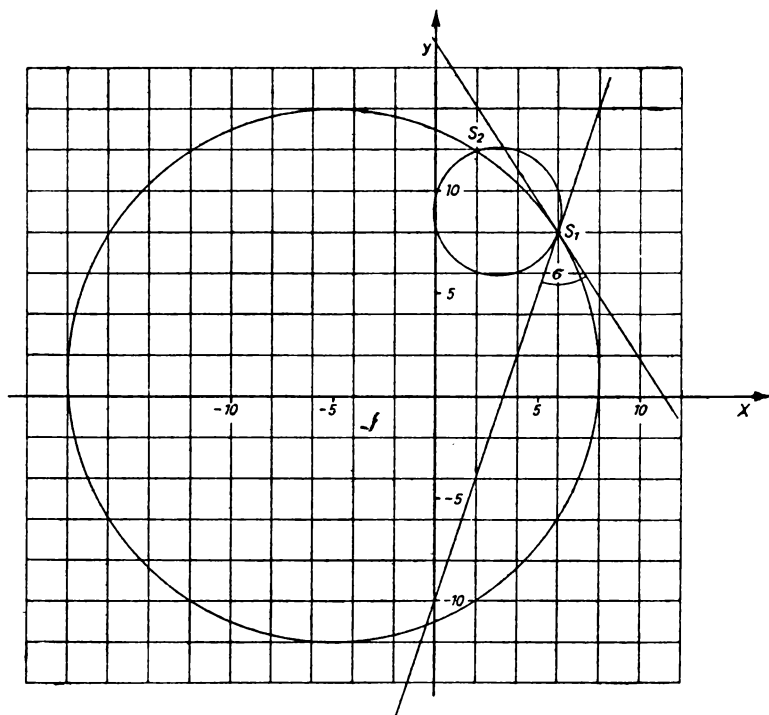


Bild 95

Um die Gleichungen der Tangenten aufzustellen, bringen wir die Kreise aus der allgemeinen Form in die Gestalt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Für die gegebenen Kreise sind das die Gleichungen

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 9)^2 &= 10 \\ (x + 5)^2 + (y - 1)^2 &= 170.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichung der Tangente im Schnittpunkt $S_1(6;8)$ an den ersten Kreis als

$$(x-3)(x_{S_1}-3) + (y-9)(y_{S_1}-9) = 10$$

oder

$$y = 3x - 10$$

und die der Tangente in $S_1(6;8)$ an den zweiten Kreis als

$$(x+5)(x_{S_1}+5) + (y-1)(y_{S_1}-1) = 170$$

oder

$$y = -\frac{11}{7}x + \frac{122}{7}.$$

Die erste Tangentengleichung hat also den Richtungsfaktor $a_{11} = 3$ und die zweite $a_{12} = -\frac{11}{7}$.

Den Schnittwinkel σ erhält man durch Einsetzen von a_{11} und a_{12} in

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma &= \frac{a_{12} - a_{11}}{1 + a_{12} \cdot a_{11}} \\ &= \frac{-\frac{11}{7} - 3}{1 + \left(-\frac{11}{7}\right) \cdot 3} = \frac{16}{13} \end{aligned}$$

zu

$$\sigma = 50,9^\circ.$$

Die Kreise schneiden sich also unter einem Winkel von $50,9^\circ$.

14.2 Die Parabel

Man definiert:

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt F , dem Brennpunkt, und einer festen Geraden L , der Leitlinie, gleichen Abstand haben.

Es ist also $\overline{FP_i} = \overline{P_i R_i}$ für alle $i = 1, 2$. Der Punkt P_i , für den FP_i und $P_i R_i$ eine Gerade bilden, heißt der Parabelscheitel:

$$P_i = S.$$

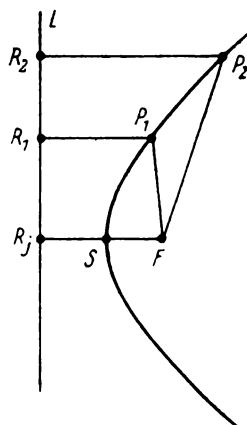


Bild 96

Um die so definierte Kurve — die Parabel — analytisch beschreiben zu können, benutzen wir ein zweckmäßiges Koordinatensystem. x -Achse sei die Gerade, die durch F und S geht. Als y -Achse wählen wir die Gerade, die im Scheitel der Parabel auf der x -Achse senkrecht steht. Der Koordinatenursprung fällt also mit dem Parabelscheitel zusammen.

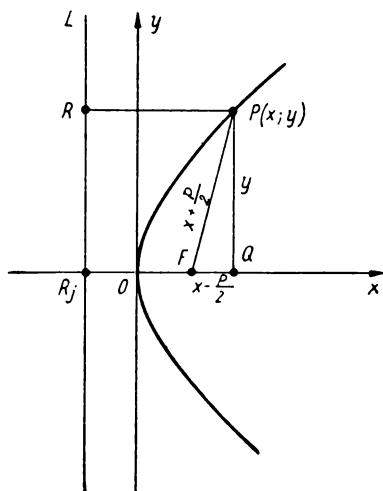


Bild 97

Den Abstand $R_j F$ bezeichnen wir mit p :

$$\overline{R_j F} = p.$$

p wird in diesem Zusammenhang Halbparameter¹ genannt. Dann ist wegen $\overline{R_j O} = \overline{OF}$

$$\overline{R_j O} + \overline{OF} = \overline{R_j F}$$

$$\overline{OF} + \overline{OF} = \overline{R_j F}$$

$$2 \overline{OF} = \overline{R_j F}$$

$$\overline{OF} = \frac{\overline{R_j F}}{2}$$

$$\overline{OF} = \frac{p}{2}.$$

¹ Gelegentlich wird p auch als Parameter bezeichnet.

Weiterhin ist nach der Definition der Parabel

$$\overline{RP} = \overline{FP}.$$

RP setzt sich, wie man aus der Zeichnung entnehmen kann, aus zwei Teilbeträgen zusammen:

$$\overline{RP} = \overline{RO} + \overline{OQ}$$

$$\overline{RP} = \overline{OF} + \overline{OQ}$$

$$\overline{RP} = \frac{p}{2} + x.$$

Wegen $\overline{RP} = \overline{FP}$ gilt auch

$$\overline{FP} = \frac{p}{2} + x.$$

Wir wenden im rechtwinkligen Dreieck FQP den Satz des Pythagoras an:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

oder

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$\boxed{y^2 = 2px}.$$

Damit haben wir die Parabelgleichung für das wie oben speziell gewählte x, y -Koordinatensystem gefunden. Man nennt sie die Scheitelgleichung der Parabel.

Im folgenden wollen wir noch die Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2 = 2px$ im Punkte $P_1(x_1; y_1)$ angeben. Unter der Parabeltangente in P_1 verstehen wir analog zum Kreis die Grenzlage einer Sekante, die mit der Parabel zunächst die beiden Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ (P_2 ist ein beliebiger Parabelpunkt) gemeinsam hat, für den Fall, daß P_2 nach P_1 hin rückt.

Es gilt für den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \alpha$ der Parabelsekante nach 12.32:

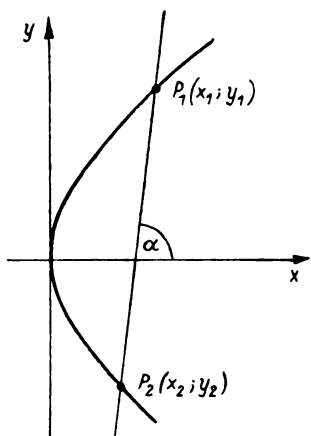
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

oder nach Ersetzen von x_1 und x_2 durch

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$$

$$x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$$

— da $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ als Parabelpunkte die Parabelgleichung erfüllen —



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}} \\ &= \frac{2p(y_1 - y_2)}{y_1^2 - y_2^2} \\ &= \frac{2p(y_1 - y_2)}{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)} \\ &= \frac{2p}{y_1 + y_2}. \end{aligned}$$

Bild 98

Lassen wir nun P_2 mit P_1 zusammenfallen, so ergibt sich für den Richtungsfaktor der Tangente, den wir mit $\operatorname{tg} \tau$ bezeichnen wollen,

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Von der Parabeltangente sind nun der Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und der Richtungsfaktor $\frac{p}{y_1}$ bekannt. Wir können daher die Punkttrichtungsform ansetzen:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{p}{y_1} \\ (y - y_1)y_1 &= p(x - x_1) \\ yy_1 - y_1^2 &= px - px_1. \end{aligned}$$

Setzt man noch $y_1^2 = 2px_1$ ein, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} yy_1 - 2px_1 &= px - px_1 \\ yy_1 &= px + px_1 \end{aligned}$$

$yy_1 = p(x + x_1)$

als Gleichung der Parabeltangente im Punkte $P_1(x_1; y_1)$.

Falls der Parabelsattel nicht im Koordinatenursprung liegt, sondern die Koordinaten $S(a; b)$ hat, lautet die Parabelgleichung

$$(y - b)^2 = 2p(x - a),$$

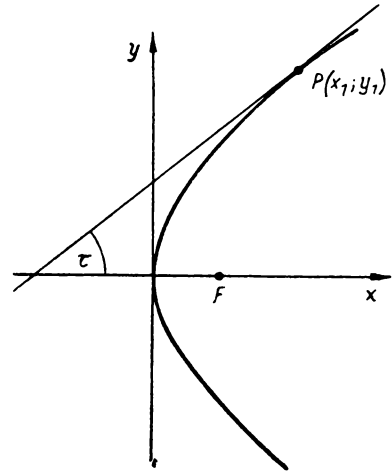


Bild 99

was man ähnlich wie beim Kreis über ein ξ, η -Hilfskoordinatensystem und anschließende Translation findet.

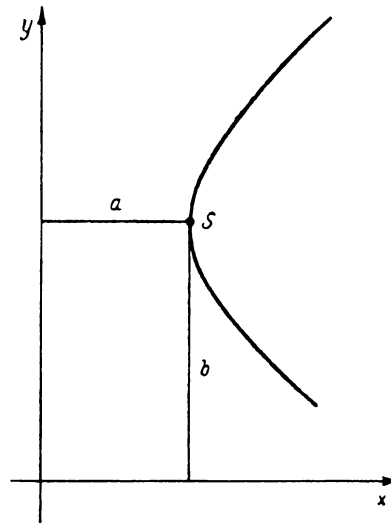


Bild 100

Dazu gehört die Tangentengleichung

$$(y - b)(y_1 - b) = p(x + x_1 - 2a) \quad .$$

Formt man die Parabelgleichung

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

in

$$\begin{aligned} y^2 - 2by + b^2 &= 2px - 2ap \\ y^2 - 2px - 2by + b^2 + 2ap &= 0 \end{aligned}$$

um und setzt

$$\begin{aligned} D &= -2p \\ E &= -2b \\ F &= b^2 + 2ap, \end{aligned}$$

so folgt die Parabelgleichung in der sogenannten allgemeinen Form

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad .$$

Auf eine noch allgemeinere Form einer Parabelgleichung wollen wir im Rahmen der Aufgaben eingehen.

Wir betrachten einige Aufgaben zur Übung.

- 1) Es ist der Halbparameter einer Parabel zu bestimmen, deren Scheitel mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und von der der Parabelpunkt $P_1(12;6)$ bekannt ist.

Da P_1 auf der Parabel liegt, erfüllen seine Koordinaten die Parabelgleichung

$$\begin{aligned} y_1^2 &= 2px_1 \\ 36 &= 2p \cdot 12 \\ p &= \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

Die Länge des Halbparameters beträgt $\frac{3}{2}$. Die Parabel hat somit die Scheitelgleichung $y^2 = 3x$.

- 2) Die gleiche Aufgabe wie unter 1) ist für die Parabel zu lösen, auf der der Punkt $P_1(-25;10)$ liegt.

Es gilt in gleicher Weise

$$\begin{aligned}y_1^2 &= 2px_1 \\ 100 &= 2p \cdot (-25) \\ p &= -2.\end{aligned}$$

Die Scheitelgleichung hat also die Form

$$y^2 = -4x.$$

Das ist eine nach links offene Parabel, deren Brennpunkt die Koordinaten
hat. $F(-1;0)$

3) Von einer Parabel, deren Achse¹ parallel zur x -Achse verläuft, sind die Punkte $P_1(1;2)$, $P_2(3;4)$ und $P_3(9;6)$ bekannt. Es ist der Halbp parameter p und der Scheitel $S(a;b)$ zu bestimmen.

Da P_1 , P_2 und P_3 auf der Parabel liegen, erfüllen ihre Koordinaten die Parabelgleichung, die wir in der Form

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ansetzen können.

Es gilt

$$y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

$$y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0$$

$$y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0,$$

$$4 + D + 2E + F = 0$$

$$16 + 3D + 4E + F = 0$$

$$36 + 9D + 6E + F = 0$$

oder

$$D + 2E + F = -4$$

$$3D + 4E + F = -16$$

$$9D + 6E + F = -36.$$

Hieraus ergibt sich

$$D = -2$$

$$E = -4$$

$$F = 6.$$

Die Parabelgleichung hat also zunächst die Gestalt

$$y^2 - 2x - 4y + 6 = 0.$$

¹ Achse der Parabel heißt ihre durch den Scheitel gehende Symmetrieachse, die in unserem Fall parallel zur x -Achse verläuft.

Wir wollen sie anschließend in die Form

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

bringen.

Es ist zunächst

$$y^2 - 4y = 2x - 6.$$

Wir ergänzen, um die linke Seite der letzten Gleichung zu einem quadratischen Ausdruck zu machen, auf beiden Seiten 2^2 . Es ist dann

$$y^2 - 4y + 2^2 = 2x - 6 + 4$$

und weiter

$$(y - 2)^2 = 2x - 2$$

$$(y - 2)^2 = 2(x - 1).$$

Daraus liest man $p = 1$ und $S(1; 2)$ ab.

- 4) In einem Punkte $P_1(x_1; y_1)$ der Parabel $y^2 = 2px$ ist auf der zugehörigen Tangente die Normale errichtet. Wie lautet die Gleichung der Normalen? Welche Längen haben Subtangente und Subnormale?

Unter der Normalen einer Kurve in einem gewissen Kurvenpunkt versteht man allgemein die Gerade, die in diesem Kurvenpunkt auf der Tangente des gleichen Kurvenpunktes senkrecht steht.

Da der Richtungsfaktor der Parabeltangente im Punkte $P_1(x_1; y_1)$ als $\frac{p}{y_1}$ bekannt ist, hat der Richtungsfaktor der Normalen im Punkte P_1 nach 12.42 den Wert $-\frac{y_1}{p}$. Man kennt also den Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und den Richtungsfaktor $-\frac{y_1}{p}$ der Normalen.

Die Gleichung der Normalen folgt nun aus der Punktrichtungsform:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{y_1}{p}$$

$$(y - y_1)p = -y_1(x - x_1)$$

$$yp - y_1p = -y_1x + x_1y_1$$

$$y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{p}(x_1 + p).$$

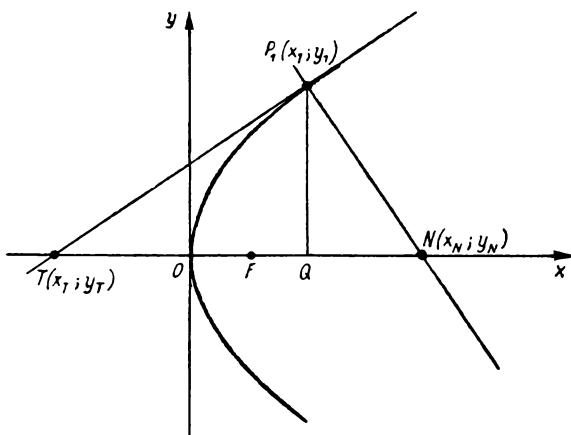


Bild 101

Unter der Subtangente in P_1 versteht man die Projektion des Teilstückes P_1T der Tangente auf die x -Achse.

Die Subtangente ist in unserem Falle also die Strecke QT . Zur Bestimmung der Subtangentenlänge st müssen wir daher erst die Koordinaten des Punktes $T(x_T, y_T)$ ermitteln. Da T auf der x -Achse liegt, ist $y_T = 0$. Da T außerdem der Parabeltangente in P_1 angehört, gilt weiter

$$\begin{aligned} y y_1 &= p(x + x_1) \\ y_T y_1 &= p(x_T + x_1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$x_T = -x_1.$$

Die Subtangente setzt sich aus zwei Teilstücken zusammen:

$$\begin{aligned} \overline{TO} + \overline{OQ} &= \overline{QT} = st \\ |x_1| + |x_1| &= st \\ st &= 2|x_1|. \end{aligned}$$

Die Länge der Subtangente ist also gleich der doppelten Länge der Abszisse des Berührungspunktes P_1 zwischen Tangente und Parabel.

Unter der Subnormalen in P_1 versteht man entsprechend die Projektion des Teilstückes P_1N der Normalen auf die x -Achse. Die Subnormale ist in unserem Falle die Strecke QN . Für unsere Zwecke ist der

Punkt $N(x_N; y_N)$ zu bestimmen. Da N auf der x -Achse liegt, gilt $y_N = 0$ und weiter, da N Punkt der Normalen in P_1 ist

$$y_N = -\frac{y_1}{p} x_N + \frac{y_1}{p} (x_1 + p)$$

oder

$$x_N = x_1 + p.$$

Die Länge sn der Subnormalen beträgt demnach

$$\begin{aligned} sn &= \overline{QN} = \overline{ON} - \overline{OQ} \\ &= |x_1| + |p| - |x_1| \\ sn &= |p|. \end{aligned}$$

Die Subnormalenlänge stimmt überein mit dem absolut genommenen Halbparameter. Diese Eigenschaft kann zur Konstruktion der Parabeltangente herangezogen werden.

5) Die Parabel $y^2 = x$ ist in einem Koordinatensystem zu betrachten, das mit dem vorliegenden x, y -System den Winkel $\varphi = -90^\circ$ bildet.

Das neue ξ, η -System ist aus dem x, y -System durch Drehung um 90° im Uhrzeigersinn entstanden. Der Zusammenhang zwischen dem x, y -System und dem ξ, η -System wird nach 13.12 durch

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{aligned}$$

und speziell für $\varphi = -90^\circ$ durch

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos(-90^\circ) - \eta \sin(-90^\circ) \\ y &= \xi \sin(-90^\circ) + \eta \cos(-90^\circ) \end{aligned}$$

gegeben.

Es sind also zunächst die Werte $\sin(-90^\circ)$ und $\cos(-90^\circ)$ zu ermitteln. Dazu benutzen wir die trigonometrischen Additionstheoreme, die für alle Winkel gültig sind, wie wir in 11.5 erwähnt haben. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0^\circ \\ \alpha_1 &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) &= \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ \sin(0^\circ - 90^\circ) &= \sin 0^\circ \cos 90^\circ - \cos 0^\circ \sin 90^\circ \\ \sin(-90^\circ) &= -\sin 90^\circ \\ \sin(-90^\circ) &= -1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ \cos(0^\circ - 90^\circ) &= \cos 0^\circ \cos 90^\circ + \sin 0^\circ \sin 90^\circ \\ \cos(-90^\circ) &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgen die Koordinatenbeziehungen

$$\begin{aligned}x &= \eta \\ y &= -\xi.\end{aligned}$$

Setzt man in

$$y^2 = x$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned}(-\xi)^2 &= \eta \\ \xi^2 &= \eta \\ \eta &= \xi^2.\end{aligned}$$

Das heißt, es handelt sich um die quadratische Einheitsparabel (vgl. 10.3) im ξ, η -System.

- 6) Die Parabel $y^2 = 2(x - 1)$ ist in einem ξ, η -Koordinatensystem zu betrachten, das mit dem vorliegenden x, y -System den Winkel $\varphi = 30^\circ$ bildet.

Zwischen den beiden Koordinatensystemen besteht analog zur Aufgabe 5) der Zusammenhang

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos 30^\circ - \eta \sin 30^\circ \\ y &= \xi \sin 30^\circ + \eta \cos 30^\circ\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \xi - \frac{1}{2} \eta \\ y &= \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \sqrt{3} \eta.\end{aligned}$$

Diese Beziehungen setzen wir in

$$y^2 = 2(x - 1) = 2x - 2$$

ein und erhalten weiter

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \sqrt{3} \eta\right)^2 &= 2\left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \xi - \frac{1}{2} \eta\right) - 2 \\ \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \xi \eta - \sqrt{3} \xi + \eta + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Man sieht, daß im allgemeinsten Fall, in dem Parabelachse und ξ -Achse nicht mehr parallel sind, die Parabelgleichung im ξ, η -System auch Glieder mit ξ^2 und $\xi\eta$ enthalten kann. Weiter wollen wir hierauf nicht eingehen.¹

14.3 Die Ellipse

Man definiert :

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei festen Punkten F_1 und F_2 , den Brennpunkten, konstant ist.

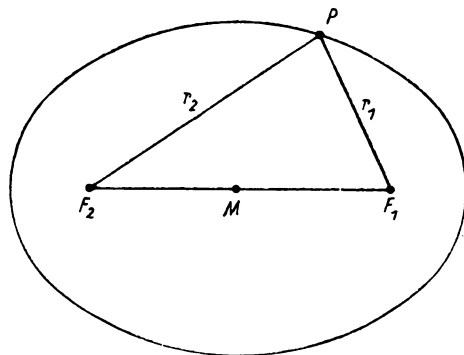


Bild 102

Wir bezeichnen:

$$\begin{aligned}\overline{F_1P} &= r_1 \\ \overline{F_2P} &= r_2\end{aligned}$$

Es soll also

$$r_1 + r_2 = \text{const.}$$

sein.

Um eine analytische Beschreibung der Ellipse geben zu können, benutzen wir folgendes rechtwinklige Koordinatensystem: Die x -Achse ist die Verbindungsgerade der Punkte F_1 und F_2 . Im Mittelpunkt M von F_1F_2 wird auf der x -Achse die Senkrechte als y -Achse errichtet.

¹ Besonders interessierte Leser seien auf Kommerell, Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene, Leipzig 1953, Seite 244 ff. verwiesen.

Wir wollen im folgenden

$$\overline{F_1 O} = \overline{O F_2} = e$$

und

$$\overline{M_1 O} = \overline{O M_2} = m$$

setzen.

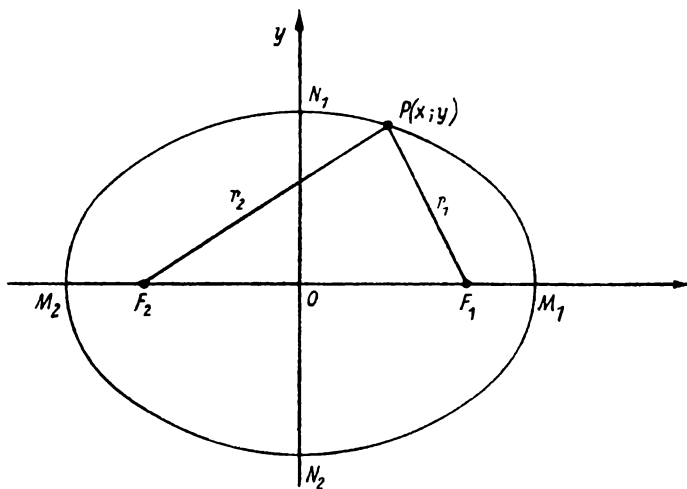


Bild 108

$\overline{M_1 M_2} = 2m$ ist die Länge der sogenannten großen Achse $M_1 M_2$ der Ellipse.

Mit Hilfe von m werden wir zunächst die Konstante $r_1 + r_2$ angeben. Der Ellipsenpunkt P kann natürlich mit M_1 zusammenfallen.

In diesem Falle ist

$$r_1 = \overline{F_1 M_1}$$

und

$$r_2 = \overline{F_2 M_1}.$$

Weiter ist

$$\overline{F_1 M_1} = \overline{M_1 O} - \overline{F_1 O} = m - e$$

$$\overline{F_2 M_1} = \overline{M_1 O} + \overline{F_2 O} = m + e.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \overline{F_1 M_1} + \overline{F_2 M_1} \\ &= m - e + m + e \end{aligned}$$

$$\boxed{r_1 + r_2 = 2m}.$$

Für die Ellipse ist also die konstante Summe der Abstände r_1 und r_2 gleich der Länge der großen Achse $2m$.

Kommen wir nun zur Aufstellung der Ellipsengleichung.

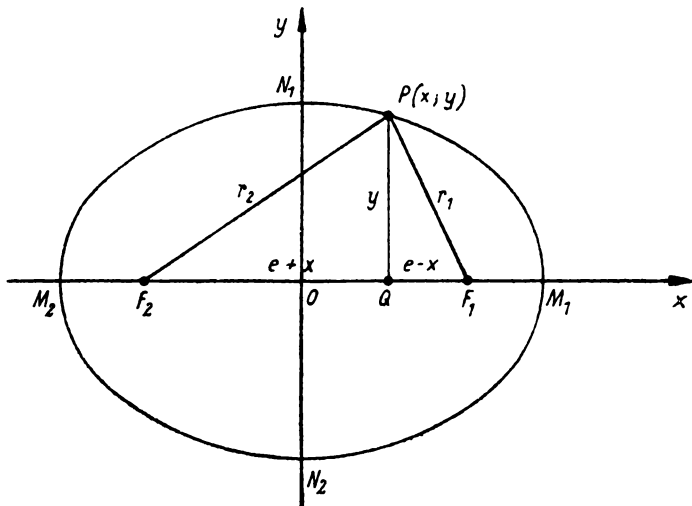


Bild 104

Aus der Zeichnung nimmt man

$$r_1^2 = (e - x)^2 + y^2$$

und

$$r_1 = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

$$r_2^2 = (x + e)^2 + y^2$$

$$r_2 = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke für r_1 und r_2 kann die Definitionsgleichung der Ellipse

$$r_1 + r_2 = 2m$$

in

$$\sqrt{(e - x)^2 + y^2} + \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2m$$

$$\sqrt{(e - x)^2 + y^2} = 2m - \sqrt{(x + e)^2 + y^2}$$

umgeformt werden.

Durch Quadrieren und Umrechnen geht diese Gleichung in die folgende über:

$$\begin{aligned}(\sqrt{(e-x)^2+y^2})^2 &= (2m - \sqrt{(x+e)^2+y^2})^2 \\(e-x)^2+y^2 &= 4m^2 - 4m\sqrt{(x+e)^2+y^2} + (x+e)^2+y^2 \\4m\sqrt{(x+e)^2+y^2} &= 4m^2+4ex \\m\sqrt{(x+e)^2+y^2} &= m^2+ex.\end{aligned}$$

Ein zweites Quadrieren führt zu

$$\begin{aligned}m^2(x+e)^2+m^2y^2 &= (m^2+ex)^2 \\(m^2-e^2)x^2+m^2y^2 &= m^2(m^2-e^2).\end{aligned}$$

Kürzt man

$$n^2 = m^2 - e^2$$

ab, so gilt weiter

$$n^2 x^2 + m^2 y^2 = m^2 n^2.$$

Division durch $m^2 n^2$ ergibt schließlich

$$\boxed{\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1}.$$

Dies ist die sogenannte Mittelpunktsleichung der Ellipse. Der Name Mittelpunktsleichung bezieht sich auf das speziell gewählte x, y -System, dessen Ursprung im Ellipsenmittelpunkt liegt.

Nun noch einige Worte zur Rechtfertigung von $m^2 - e^2 = n^2$. Da

$$\begin{aligned}\overline{F_1P} + \overline{F_2P} &> \overline{F_1F_2} \\2m &> 2e \\m &> e\end{aligned}$$

ist, kann $m^2 - e^2$ niemals negativ werden und läßt sich also als Quadrat — etwa n^2 — ansetzen. Die Bedeutung von n kann man sich wie folgt erklären. Läßt man den Punkt P (vgl. Bild 104) mit N_1 zusammenfallen, so gilt im rechtwinkligen Dreieck F_1ON_1 nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}(\overline{F_1O})^2 + (\overline{ON_1})^2 &= (\overline{F_1N_1})^2 \\e^2 + (\overline{ON_1})^2 &= m^2 \\\overline{ON_1} &= \sqrt{m^2 - e^2} = n.\end{aligned}$$

$2n$ ist also wegen der Symmetrie der Figur ($\overline{ON_1} = \overline{ON_2}$) gleich $\overline{N_1N_2}$ und wird als kleine Achse der Ellipse bezeichnet.

Wir untersuchen in analoger Weise wie bei Kreis und Parabel die Ellipsentangente im Punkte $P_1(x_1; y_1)$. Wir bilden auch hier wieder zunächst den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \alpha$ der Ellipsensekante unter Zuhilfenahme eines beliebigen zweiten Ellipsenpunktes $P_2(x_2; y_2)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\ &= \frac{y_1^2 - y_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)}. \end{aligned}$$

Da die Punkte P_1 und P_2 Punkte der Ellipse sind, erfüllen sie deren Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_2^2}{m^2} + \frac{y_2^2}{n^2} = 1$$

bzw.

$$y_1^2 = -\frac{n^2}{m^2} x_1^2 + n^2 \quad \text{und} \quad y_2^2 = -\frac{n^2}{m^2} x_2^2 + n^2.$$

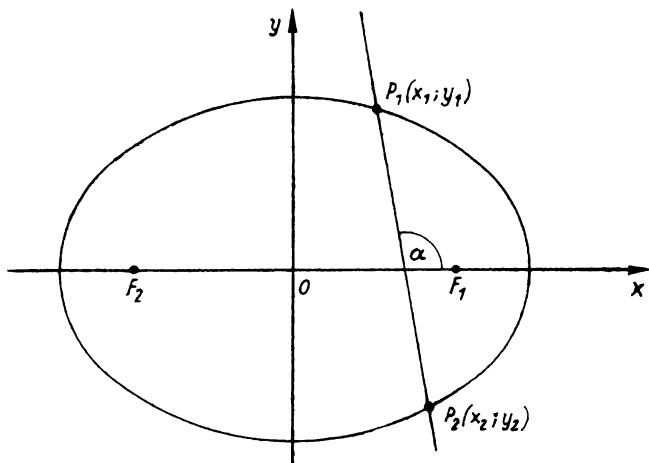


Bild 105

Verwendet man diese Beziehungen in der Formel für den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \alpha$ der Ellipsensekante, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1^2 - y_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\
 &= \frac{-\frac{n^2}{m^2} x_1^2 + n^2 + \frac{n^2}{m^2} x_2^2 - n^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\
 &= \frac{-\frac{n^2}{m^2} x_1^2 + \frac{n^2}{m^2} x_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\
 &= -\frac{n^2}{m^2} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\
 &= -\frac{n^2}{m^2} \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)} \\
 &= -\frac{n^2}{m^2} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.
 \end{aligned}$$

Um den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \tau$ der Ellipsentangente zu erhalten, muß man P_2 mit P_1 zusammenfallen lassen. Dann gilt

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{n^2}{m^2} \frac{2x_1}{2y_1} = -\frac{n^2 x_1}{m^2 y_1}.$$

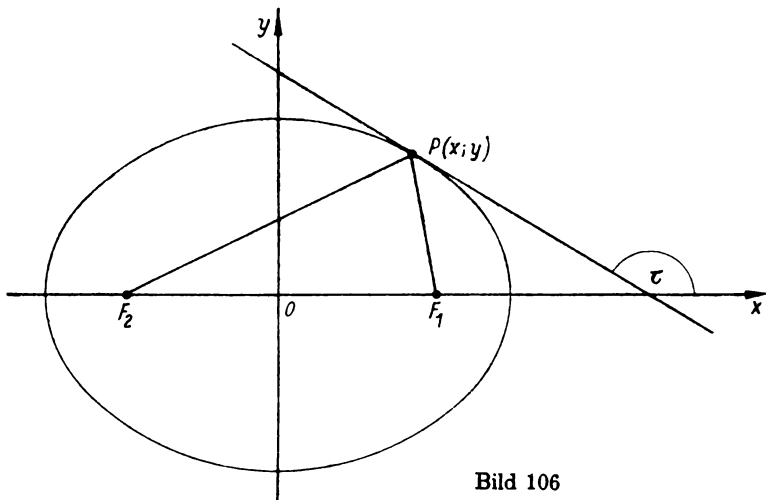


Bild 106

Jetzt folgt die Gleichung der Ellipsentangente leicht nach der Punkt-
richtungsform:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= -\frac{n^2 x_1}{m^2 y_1} \\ (y - y_1) m^2 y_1 &= -n^2 x_1 (x - x_1) \\ m^2 y y_1 - m^2 y_1^2 &= -n^2 x x_1 + n^2 x_1^2 \\ (*) \quad n^2 x x_1 + m^2 y y_1 &= n^2 x_1^2 + m^2 y_1^2. \end{aligned}$$

Es war

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1$$

oder

$$n^2 x_1^2 + m^2 y_1^2 = m^2 n^2.$$

Damit geht (*) über in

$$n^2 x x_1 + m^2 y y_1 = m^2 n^2$$

oder nach Division durch $m^2 n^2$

$$\boxed{\frac{x x_1}{m^2} + \frac{y y_1}{n^2} = 1}.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ im
Punkt $P_1(x_1; y_1)$.

Fällt der Schnittpunkt der großen und der kleinen Achse, der Ellipsen-
mittelpunkt, nicht mit dem Ursprung des x, y -Koordinatensystems zu-
sammen, sondern hat er im x, y -System die Koordinaten $M(a; b)$, wäh-
rend die große Ellipsenachse parallel zur x -Achse und die kleine Ellipsen-
achse parallel zur y -Achse verläuft, so lautet die Gleichung der Ellipse

$$\boxed{\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{n^2} = 1}$$

und entsprechend die Gleichung der Ellipsentangente in $P_1(x_1; y_1)$

$$\boxed{\frac{(x-a)(x_1-a)}{m^2} + \frac{(y-b)(y_1-b)}{n^2} = 1}.$$

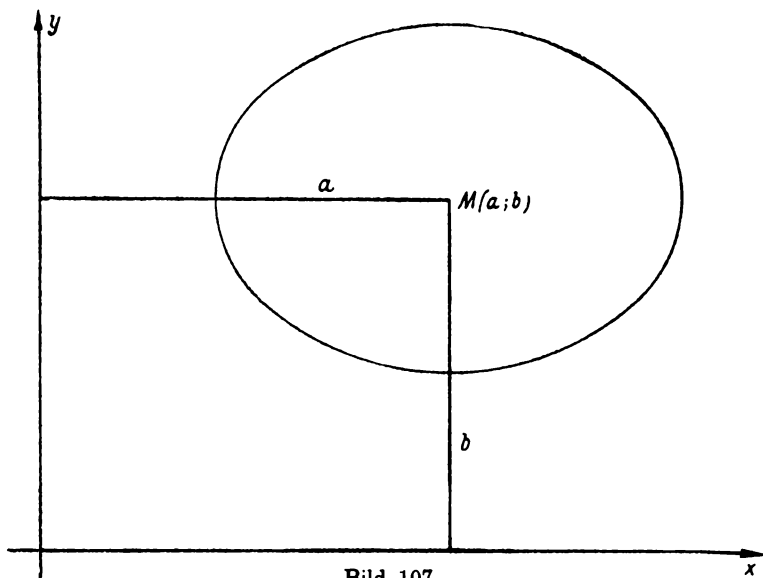


Bild 107

Formt man die Ellipsengleichung

$$\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{n^2} = 1$$

in

$$n^2(x-a)^2 + m^2(y-b)^2 = m^2 n^2$$

$$n^2 x^2 + m^2 y^2 - 2a n^2 x - 2b m^2 y + a^2 n^2 + b^2 m^2 - m^2 n^2 = 0$$

um und setzt

$$A = n^2$$

$$B = m^2$$

$$D = -2a n^2$$

$$E = -2b m^2$$

$$F = a^2 n^2 + b^2 m^2 - m^2 n^2,$$

so folgt sie in der allgemeinen Form

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Es gibt auch hierzu analog wie bei der Parabel eine noch allgemeinere Form, auf die wir nicht näher eingehen wollen.

- 1) Es ist die Mittelpunktsleichung der Ellipse zu bestimmen, wenn die Halbachsen $m = 5$ und $n = 3$ gegeben sind.

Durch Einsetzen der Werte in

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

ergibt sich sofort

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- 2) Es sind die beiden Halbachsen der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 64$ zu bestimmen.

Es ist

$$x^2 + 4y^2 = 64$$

oder

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Hieraus erkennt man, daß $m = 8$ und $n = 4$ ist.

- 3) Es sind die beiden Halbachsen und der Mittelpunkt der Ellipse $4x^2 + 25y^2 - 40x - 200y + 400 = 0$ zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke formen wir die Ellipsengleichung wie folgt um:

$$4x^2 - 40x + 25y^2 - 200y = -400$$

$$4(x^2 - 10x) + 25(y^2 - 8y) = -400$$

$$4(x^2 - 10x + 25) + 25(y^2 - 8y + 16) = -400 + 100 + 400$$

$$4(x - 5)^2 + 25(y - 4)^2 = 100$$

$$\frac{4(x - 5)^2}{100} + \frac{25(y - 4)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x - 5)^2}{25} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1.$$

Hieraus folgt, daß $m = 5$, $n = 2$ und $M(5; 4)$ ist.

- 4) Es ist zu zeigen, daß der Schnittpunkt der Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ im Punkte $P_1(x_1; y_1)$ mit der x -Achse und der Schnittpunkt der Tangente an den Hauptscheitelkreis im Punkte $P_1^*(x_1; y_1^*)$ mit der x -Achse zusammenfallen.

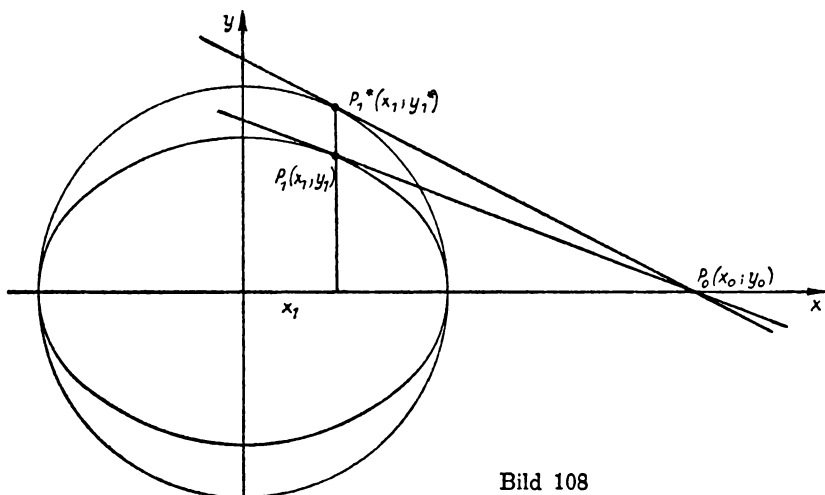


Bild 108

Den Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der x -Achse bezeichnen wir mit $P_0(x_0; y_0 = 0)$.

Da der Schnittpunkt ein Punkt der Ellipsentangente ist, erfüllen seine Koordinaten deren Gleichung:

$$\frac{xx_1}{m^2} + \frac{yy_1}{n^2} = 1$$

$$\frac{x_0 x_1}{m^2} + \frac{y_0 y_1}{n^2} = 1$$

Wegen $y_0 = 0$ gilt weiter

$$\frac{x_0 x_1}{m^2} = 1$$

oder

$$x_0 = \frac{m^2}{x_1}$$

Unter dem Hauptscheitelkreis der Ellipse versteht man den Kreis mit dem Radius m um den Ellipsenmittelpunkt. Seine Gleichung heißt in unserem Fall

$$x^2 + y^2 = m^2.$$

Seine Tangente im Punkte $P_1^*(x_1; y_1^*)$ hat die Gleichung

$$xx_1 + yy_1^* = m^2.$$

Da der gesuchte Schnittpunkt mit der x -Achse, den wir zunächst mit $P_0^* (x_0^*; y_0^* = 0)$ bezeichnen wollen, auf der Tangente des Kreises liegt, erfüllen seine Koordinaten die Tangentengleichung:

$$x_0^* x_1 + y_0^* y_1^* = m^2.$$

Da $y_0^* = 0$ ist, hat man

$$x_0^* x_1 = m^2$$

oder

$$x_0^* = \frac{m^2}{x_1}.$$

Wie man sieht, ist

$$x_0 = x_0^* = \frac{m^2}{x_1}.$$

Das heißt, die Ellipsen- und die Kreistangente schneiden die x -Achse im gleichen Punkt. Diese Tatsache kann zur Konstruktion der Ellipsentangente verwendet werden.

5) Es ist zu zeigen, daß der Kreis ein Spezialfall der Ellipse ist.

Läßt man nämlich F_1 und F_2 in M zusammenfallen, so folgt

$$e^2 = m^2 - n^2$$

$$0 = m^2 - n^2$$

$$m = n$$

und weiter unter der speziellen Annahme $a = b = 0$

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = m^2.$$

Setzt man noch $m = r$, so folgt, daß

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ist. Das ist aber die Gleichung eines Kreises um den Koordinatenursprung. Der Kreis ist tatsächlich ein Spezialfall der Ellipse.

14.4 Die Hyperbel

Man definiert:

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandsdifferenz von zwei festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 , konstant ist.

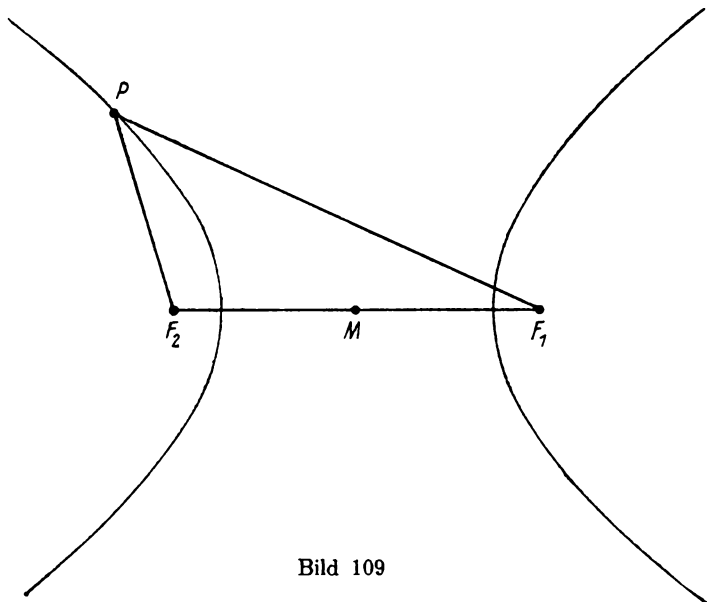


Bild 109

Wir bezeichnen in Analogie zur Ellipse

$$\overline{F_1 P} = r_1$$
$$\overline{F_2 P} = r_2.$$

Es soll also

$$r_1 - r_2 = \text{const.}$$

sein.

Um auch hier eine analytische Beschreibung des Sachverhalts geben zu können, benutzen wir folgendes Koordinatensystem: x -Achse ist die

Verbindungsgerade der Punkte F_1 und F_2 . Auf F_1F_2 wird im Mittelpunkt M die y -Achse als Senkrechte errichtet.

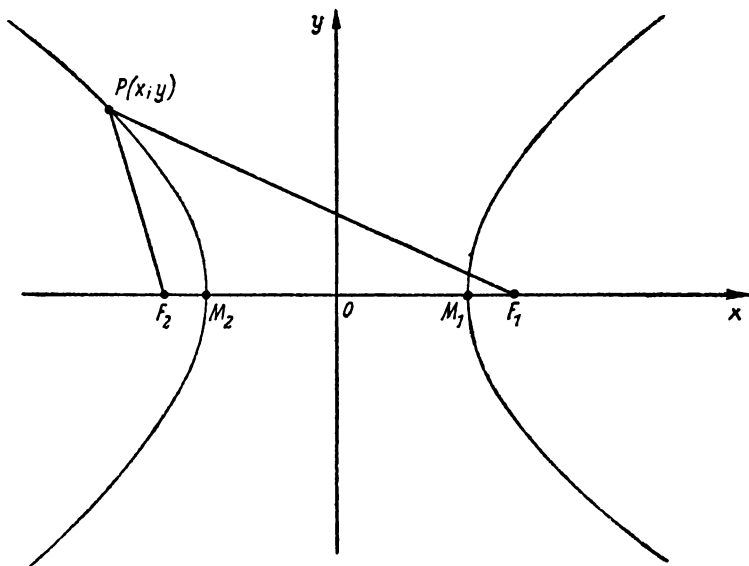


Bild 110

Wir bezeichnen im folgenden

$$\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = e$$

und

$$\overline{M_1O} = \overline{OM_2} = m .$$

Mit Hilfe von m werden wir wieder die Konstante $r_1 - r_2$ bestimmen. Falls nämlich der Hyperbelpunkt $P(x; y)$ mit M_2 zusammenfällt, ist

$$r_1 = \overline{F_1M_2}$$

und

$$r_2 = \overline{F_2M_2} .$$

Weiter ist

$$\overline{F_1M_2} = \overline{F_1O} + \overline{OM_2} = e + m$$

$$\overline{F_2M_2} = \overline{F_2O} - \overline{OM_2} = e - m .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= \overline{F_1 M_2} - \overline{F_2 M_2} \\ &= e + m - (e - m) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_1 - r_2 = 2m}.$$

Für die Hyperbel ist also die konstante Differenz der Abstände r_1 und r_2 gleich $2m$.

Kommen wir nun zur Aufstellung der Hyperbelgleichung.

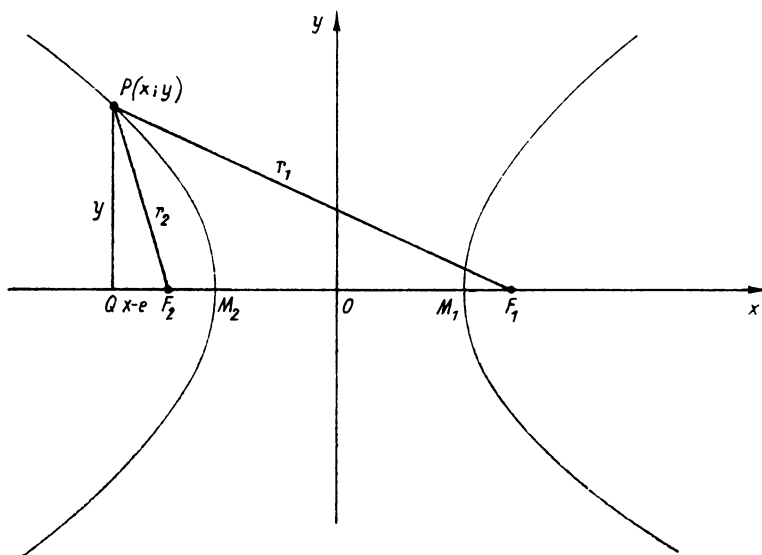


Bild 111

Aus der Zeichnung entnimmt man

$$r_1^2 = (x + e)^2 + y^2$$

$$r_1 = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}$$

und

$$r_2^2 = (x - e)^2 + y^2$$

$$r_2 = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke für r_1 und r_2 kann die Definitionsgleichung der Hyperbel

$$r_1 - r_2 = 2m$$

in

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2m$$

umgeformt werden.

Diese Gleichung rechnen wir analog zur Herleitung der Ellipsengleichung weiter um:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2m + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\ m\sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= ex - m^2 \\ (e^2 - m^2)x^2 - m^2y^2 &= m^2(e^2 - m^2).\end{aligned}$$

Kürzt man

$$n^2 = e^2 - m^2$$

ab, so folgt

$$n^2 x^2 - m^2 y^2 = m^2 n^2.$$

Division durch $m^2 n^2$ führt schließlich zu

$$\boxed{\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1}.$$

Diese Form wird als Mittelpunktsleichung der Hyperbel bezeichnet.

Eine ähnliche Rechnung läßt sich ausführen, wenn P auf dem anderen Ast der Hyperbel als dem gezeichneten liegt. Sie führt zum gleichen Ergebnis.

Wir untersuchen im folgenden die Hyperbeltangente im Punkte $P_1(x_1; y_1)$. Wir bilden zunächst den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \alpha$ der Hyperbelsekante unter Zuhilfenahme eines zweiten Hyperbelpunktes $P_2(x_2; y_2)$, der auf dem gleichen Ast der Hyperbel wie $P_1(x_1; y_1)$ liegen soll:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{y_1^2 - y_2^2}{(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)}.\end{aligned}$$

Da die Punkte P_1 und P_2 Punkte der Hyperbel sind, erfüllen sie deren Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{m^2} - \frac{y_1^2}{n^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_2^2}{m^2} - \frac{y_2^2}{n^2} = 1$$

bzw.

$$y_1^2 = \frac{n^2}{m^2} x_1^2 - n^2 \quad \text{und} \quad y_2^2 = \frac{n^2}{m^2} x_2^2 - n^2.$$

Setzt man diese Beziehungen in die Formel für den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \alpha$ ein, so ergibt sich nach entsprechenden Rechnungen ähnlich wie bei der Ellipse

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n^2 x_1 + x_2}{m^2 y_1 + y_2}.$$

Um den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \tau$ der Hyperbeltangente in $P_1(x_1; y_1)$ zu erhalten, muß man P_2 mit P_1 zusammenfallen lassen. Dann gilt

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{n^2 x_1}{m^2 y_1}.$$

Für die Gleichung der Hyperbeltangente ergibt sich daraus mit Hilfe der Punkttrichtungsform wie bei der Ellipsentangente

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{n^2 x_1}{m^2 y_1}$$

und weiter

$$\boxed{\frac{x x_1}{m^2} - \frac{y y_1}{n^2} = 1}.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente an die Hyperbel $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ im Punkte $P_1(x_1; y_1)$.

Für eine Hyperbel, die durch eine Translation aus der bisher betrachteten hervorgeht, gilt analog zur Ellipse die Gleichung

$$\boxed{\frac{(x - a)^2}{m^2} - \frac{(y - b)^2}{n^2} = 1}$$

und für die zugehörige Tangente in $P_1(x_1; y_1)$

$$\boxed{\frac{(x - a)(x_1 - a)}{m^2} - \frac{(y - b)(y_1 - b)}{n^2} = 1}.$$

Dabei ist der Punkt $M(a; b)$ der Ursprung des neuen Koordinatensystems nach Translation, bezogen auf das alte Koordinatensystem.

Formt man die Hyperbelgleichung

$$\frac{(x - a)^2}{m^2} - \frac{(y - b)^2}{n^2} = 1$$

in

$$\begin{aligned} n^2(x - a)^2 - m^2(y - b)^2 &= m^2 n^2 \\ n^2 x^2 - m^2 y^2 - 2a n^2 x + 2b m^2 y + a^2 n^2 - b^2 m^2 - m^2 n^2 &= 0 \end{aligned}$$

um und setzt

$$A = n^2$$

$$B = m^2$$

$$D = -2an^2$$

$$E = 2bm^2$$

$$F = a^2 n^2 - b^2 m^2 - m^2 n^2,$$

so folgt sie in der allgemeinen Form

$$\boxed{Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0}.$$

Auch hierzu gibt es eine noch allgemeinere Form, auf die wir allerdings nicht eingehen wollen.

Im folgenden sollen einige Beispiele behandelt werden.

- 1) Es sind die Halbachsen und die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ zu ermitteln.

Aus der Gleichung $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ ergeben sich sofort die beiden Halbachsen

$$m = 5 \quad \text{und} \quad n = 12.$$

Für e gilt nach $e^2 = m^2 + n^2$

$$e^2 = 144 + 25$$

$$e^2 = 169$$

$$e = \pm 13.$$

Die Brennpunkte sind somit

$$F_1(13;0) \quad \text{und} \quad F_2(-13;0).$$

- 2) Es sind die Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ zu bestimmen.

Um die vorliegende Aufgabe lösen zu können, bringen wir zunächst die Gerade $y = a_1 x$ mit der Hyperbel

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad n^2 x^2 - m^2 y^2 = m^2 n^2$$

zum Schnitt. Da der Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ auf beiden Kurven liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_s &= a_1 x_s \\ n^2 x_s^2 - m^2 y_s^2 &= m^2 n^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$n^2 x_g^2 - m^2 a_1^2 x_g^2 = m^2 n^2$$

$$x_g = \pm \frac{m n}{\sqrt{n^2 - m^2 a_1^2}}$$

Aus dieser Formel erkennt man:

Es liegen zwei reelle Schnittpunkte vor, wenn $n^2 - m^2 a_1^2 > 0$ ist. Kein reeller Schnittpunkt liegt vor, wenn $n^2 - m^2 a_1^2 < 0$ ist. Falls jedoch $n^2 - m^2 a_1^2 = 0$ ist, liegen die Schnittpunkte zwischen Hyperbel und Gerader im Unendlichen ($x_g = \pm \infty$).

Aus $n^2 - m^2 a_1^2 = 0$ folgt der Richtungsfaktor der Geraden durch den Ursprung für diesen Fall als $a_1 = \pm \frac{n}{m}$. Setzt man $a_1 = \pm \frac{n}{m}$ in $y = a_1 x$ ein, so ist

$$y = \pm \frac{n}{m} x$$

Diese beiden Geraden durch den Koordinatenursprung, die die Hyperbel im Unendlichen schneiden, nennt man Asymptoten der Hyperbel. Mit ihrer Hilfe kann n geometrisch interpretiert werden.

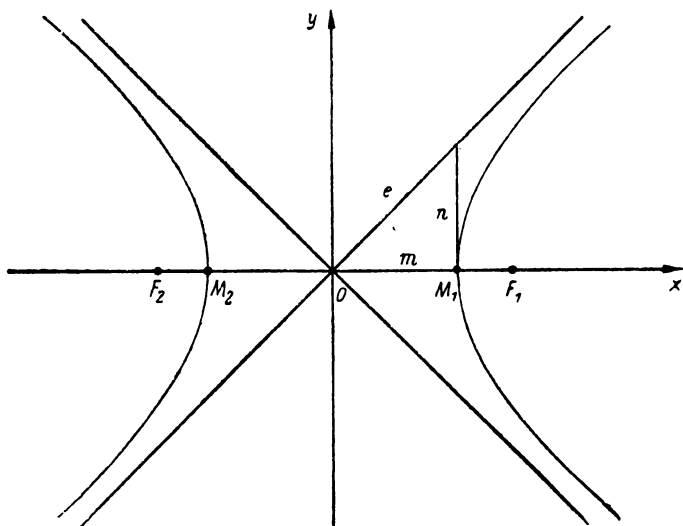


Bild 112

Ü 14 Übungsaufgaben zur analytischen Geometrie der Kurven 2. Ordnung

- 1) Es sind Mittelpunkt und Radius des Kreises $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$ zu bestimmen.
- 2) Vom Punkt $P_2(7;3)$ aus sind an den Kreis $x^2 + y^2 = 29$ die Tangenten zu legen. Wie lauten deren Gleichungen?
- 3) Der Schnittwinkel der beiden Kreise $x^2 + y^2 = 16$ und $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ ist zu bestimmen.
- 4) Es ist die Gleichung der Parabel aufzustellen, deren Achse parallel zur x -Achse verläuft und die durch die Punkte $P_1(-3;1)$, $P_2(2;4)$ und $P_3(-6;-2)$ geht.
- 5) Es ist die Lage der Parabel $y^2 = 14x$ zur Geraden $x - y + 8 = 0$ zu untersuchen.
- 6) Die Gleichung der im Punkte $P_1(2,5;-5)$ an die Parabel $y^2 = 10x$ gelegten Tangente ist zu bestimmen.
- 7) Es sind die Längen der Halbachsen der Ellipse $9x^2 + 25y^2 + 27x - 50y - 56 = 0$ zu berechnen.
- 8) Es ist die Gleichung der Hyperbel zu ermitteln, für die $M(5;4)$, $m = 5$ und $n = 8$ gegeben sind.
- 9) Die Asymptotengleichungen zur Hyperbel $36x^2 - 4y^2 = 144$ sind aufzustellen.
- 10) Es ist die Länge der Subnormalen der Hyperbel $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ für den Punkt $P_1(x_1; y_1)$ zu bestimmen.

L 14 Lösungen zu Ü 14

- 1) $M(5;2) \quad r = 5$
- 2) $y = \frac{5}{2}x - \frac{29}{2} \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{5}$
- 3) $\sigma = 90^\circ$
- 4) $(y + 5)^2 = 9(x + 7)$
- 5) Es ist kein gemeinsamer Punkt vorhanden.
- 6) $y = -x - \frac{5}{2}$
- 7) $m = \frac{3}{2}\sqrt{5} \quad n = \frac{9}{10}\sqrt{5}$
- 8) $\frac{(x-5)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{64} = 1$
- 9) $y = \pm 3x$
- 10) $sn = \frac{n^2}{m^2}|x_1|$

Griechisches Alphabet

Zeichen	Name	Aussprache
<i>A α</i>	Alpha	a
<i>B β</i>	Beta	b
<i>Γ γ</i>	Gamma	g
<i>Δ δ</i>	Delta	d
<i>E ε</i>	Epsilon	e (kurz)
<i>Z ζ</i>	Zeta	ds (= z)
<i>H η</i>	Eta	e (lang)
<i>Θ θ</i>	Theta	th
<i>I ι</i>	Jota	i
<i>K κ</i>	Kappa	k
<i>Λ λ</i>	Lambda	l
<i>M μ</i>	My	m
<i>N ν</i>	Ny	n
<i>Ξ ξ</i>	Xi	ks (= x)
<i>O ο</i>	Omikron	o (kurz)
<i>Π π</i>	Pi	p
<i>P ρ</i>	Rho	r
<i>Σ σ</i>	Sigma	s
<i>T τ</i>	Tau	t
<i>Υ υ</i>	Ypsilon	ü
<i>Φ φ</i>	Phi	f (= ph)
<i>Χ χ</i>	Chi	ch, kh
<i>Ψ ψ</i>	Psi	ps
<i>Ω ω</i>	Omega	o (lang)

L I T E R A T U R

- Keller; Analytische Geometrie und lineare Algebra, Berlin 1957.
- Kommerell; Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene, Leipzig 1953.
- Meyer zur Capellen; Leitfaden der Nomographie, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
- Pentkowski; Nomographie, Berlin 1953.
- Schrutka; Elemente der höheren Mathematik, Wien 1948.
- Willers; Elementarmathematik, Dresden und Leipzig 1953.
- Fröhlich; Mathematik für das wirtschaftswissenschaftliche Hochschulfernstudium, 1. bis 3. Lehrheft, Berlin 1957.
- Lehrbuch der Mathematik für die Oberschule, 9. Schuljahr, Berlin/Leipzig 1951.
- Lehrbuch der Mathematik für die Oberschule, 10. Schuljahr, Berlin 1952.
- Lehrbuch der Mathematik für die Oberschule, 11. Schuljahr, Teil II und III, Berlin 1954.
- Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis, Berlin/Leipzig 1946.
- Aufgabensammlung und Leitfaden für Geometrie, Berlin/Leipzig 1945.

