

AUTORENKOLLEKTIV

ALLGEMEINE STATISTIK

**Aufgabensammlung
mit ausführlichen Lösungswegen**



Autorenkollektiv

Allgemeine Statistik

Aufgabensammlung
mit ausführlichen
Lösungswegen

dritte, erweiterte Auflage



Verlag Die Wirtschaft
Berlin 1970

Verfasser: Prof. Dr. habil. Richard Struck, Redaktion
Dr. habil. Heinrich Schwarz
Dr. habil. Hans Waschkau
Dipl. oec. Jürgen Carstens
Dr. Uwe Knabe
Dipl. oec. Ullrich Wilczek

Lektor: Dipl. Wirtschaftler Rolf Baumgart

Verlag Die Wirtschaft, 1055 Berlin, Am Friedrichshain 22

1970 veröffentlicht. Lizenz-Nr. 122

Druckgenehmigungs-Nr. 195/66/70

Alle Rechte vorbehalten.

Einbandentwurf: O. Kietzmann, Berlin

Satz und Druck: Vereinigter Betrieb VEB (B) Mühlhäuser Druckhaus, 57 Mühlhausen

ES 5 D 1

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	5
Ergänzendes Vorwort zur 3. Auflage	6
0. Verzeichnis der Aufgaben und ihrer Lösungen	7
1. Aufgabensammlung	13
1.1. Widerspiegelung des Niveaus der Erscheinungen	13
1.1.1. Verteilung und Struktur	13
1.1.2. Mittleres Niveau	15
1.1.3. Streuung	26
1.2. Widerspiegelung des Zusammenhangs der Erscheinungen . .	35
1.2.1. Einfache Verfahren zur Widerspiegelung des Zusammenhangs	35
1.2.2. Regression, Korrelation und Elastizität	37
1.3. Widerspiegelung der Entwicklung der Erscheinungen . . .	44
1.3.1. Mittleres Niveau	44
1.3.2. Entwicklung von Zeitabschnitt zu Zeitabschnitt — Indextheorie	45
1.3.3. Durchschnittliches Wachstumstempo	55
1.3.4. Grundrichtung oder Trend	58
1.3.5. Periodische Schwankungen	62
1.4. Grundlagen der Stichprobentheorie	63
1.5. Komplexaufgabe	81
2. Lösungen zu den Aufgaben	83
3. Verzeichnis der in der Aufgabensammlung verwendeten Symbole	189

VORWORT

Unntrennbarer Bestandteil eines Studiums ist das selbständige Lösen von Aufgaben des jeweiligen Fachgebietes. Erst die Bewältigung der theoretisch erfaßten Probleme innerhalb einer praktischen Aufgabenstellung bestätigt den Erfolg eines Studiums. Das gilt auch für alle Gebiete der Statistik.

Die vorliegende Aufgabensammlung zur allgemeinen Statistik umfaßt die wesentlichen Bestandteile der statistischen Analyse sowie die Grundaufgaben der Stichprobentheorie. Sie geht sowohl begrifflich als auch methodisch von den Darlegungen des Lehrbuches „Allgemeine Statistik“, Autorenkollektiv, Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1964, aus. Die Aufgabensammlung soll den Studenten der Universitäten, Hoch- und Fachschulen sowie allen in unserer sozialistischen Volkswirtschaft tätigen Ökonomen und anderen an der Statistik Interessierten als Studienmaterial dienen. Dem differenzierten Kreis der Leser entsprechend wurden mit den einzelnen Aufgaben unterschiedlich hohe Anforderungen gestellt. Besonderer Wert wurde auf das Lösen von Aufgaben mit mathematisch-statistischem Charakter gelegt.

Das Lösen und das Verständnis der mathematisch-statistischen Aufgaben ist für die Lösung einer Reihe praktischer Aufgaben der Statistik, beispielsweise bei der Untersuchung von Zusammenhängen oder bei der Anwendung der Stichprobentheorie, unerläßlich. Gleichzeitig soll das Lösen derartiger Aufgaben zum mathematischen Denken erziehen, um die Leser zu befähigen, die vielfältigen ökonomischen Erscheinungen gründlicher zu durchdringen. Die Aufgabensammlung befaßt sich ihrem Charakter entsprechend mit der zahlenmäßigen Ermittlung wichtiger allgemeiner statistischer Kennziffern. Dabei wurden, soweit das dem Charakter der Aufgabenstellung entsprechend möglich war, konkrete Erscheinungen der verschiedenen Gebiete zum Gegenstand der Aufgaben gemacht. Um dem Leser die Möglichkeit zu geben, seine Arbeit zu kontrollieren, wurden die Lösungen zu den Aufgaben angegeben und teilweise ausführlich dargelegt. Es hat jedoch nur derjenige Anspruch darauf, diese nachzuschlagen, der eine Lösung gefunden oder zumindest gewissenhaft und ausdauernd daran gearbeitet hat.

Die Beispiele sind zweckmäßigerweise im Zusammenhang mit den im Lehrbuch gegebenen Erläuterungen und Schlußfolgerungen zu studieren. Dabei sollten sich vor allem die bereits praktisch Tätigen bei der Lösung der Aufgaben immer wieder die Fragen stellen, welche Aussage die soeben ermittelten Kennziffern im eigenen Arbeitsbereich haben und welche Schlußfolgerungen unter Berücksichtigung der dort wirkenden Faktoren zu ziehen wären, wo die Mängel bzw. Vorzüge der betrachteten Erscheinungen und ihre Ursachen liegen, was zur Veränderung des gegenwärtigen Zustandes oder zur Verallgemeinerung positiver Ergebnisse getan werden müßte usw. Kurz, jeder sollte entsprechende Überlegungen anstellen, damit die hier vermittelten Kenntnisse

schnell praxiswirksam werden, denn keine Übung erfolgt ihrer selbst wegen. Wir wünschen allen Lesern ein erfolgreiches Studium der Aufgabensammlung und bitten zugleich, Bemerkungen, Kritiken und Vorschläge an die Hochschule für Ökonomie, Institut für Statistik, Berlin-Karlshorst, Hermann-Duncker-Str. 8, zu senden.

Berlin, im Mai 1964

HEINRICH SCHWARZ
RICHARD STRUCK
HANS WASCHKAU

Ergänzendes Vorwort zur 3. Auflage

Entsprechend der Veränderung des Lehrbuches Allgemeine Statistik in den letzten Jahren wurde die Aufgabensammlung inhaltlich etwas erweitert, einige Aufgaben gegen andere Aufgaben ausgetauscht. Um dem eifrigen Leser und Löser größere Übungsmöglichkeiten zu geben, wurde die Aufgabensammlung um 50 Aufgaben erweitert. Gleichzeitig wurde, um im Umfang den bisherigen Rahmen nicht zu weit zu überschreiten, eine ausführliche Lösung für etwa jede zweite Aufgabe angegeben. Zu den übrigen Aufgaben wurde dementsprechend nur die geforderte Antwort zur Fragestellung angegeben.

Die Autoren der 3. Auflage, nunmehr das gesamte Kollektiv der Lehrstuhls Allgemeine Statistik in der Hochschule für Ökonomie, hoffen auf eine gute Resonanz bei allen Lesern und verweisen auf den letzten Absatz des Vorwortes zur ersten Auflage.

Berlin, Mai 1969

DIE AUTOREN

0. Verzeichnis der Aufgaben und ihrer Lösungen

Aufgaben	Thema	Aufgabe Seite	Lösung Seite
1. Geborene nach dem Alter der Mutter	Verteilung	13	83
2. Betriebe nach der Zahl der Arbeiter und Angestellten im Betrieb	Verteilung	13	84
3. Arbeiter und Angestellte, industrielle Bruttoproduktion der Betriebe	Struktur	14	84
4. Produktion und Kosten je Arbeiter	Durchschnitt	15	86
5. Bevölkerungsdichte der DDR	Durchschnitt	15	87
6. Einzelhandelsumsatz pro Verkaufsraumfläche	Durchschnitt	16	87
7. Grundmittelbestand je Berufstätigen	Durchschnitt	17	88
8. Kosten je 100 M Warenumsatz	Durchschnitt	18	88
9. Arbeitsaufwand pro Warenproduktion	Durchschnitt	18	89
10. Arbeitsproduktivität und Normerfüllung in zwei Brigaden	Durchschnitt	19	89
11. Lohn, Arbeitsaufwand, Ausfallzeit und Normerfüllung	Durchschnitt	19	91
12. Verladeleistung je Stunde	Durchschnitt	20	92
13. Fangleistung je Einsatztag	Durchschnitt	20	92
14. Fahrzeit, Reiseweite und Personen pro Omnibus	Durchschnitt	21	92
15. Leserszahl, Buchbestand, Ausleihe je Bibliothek und Leser	Durchschnitt	21	93
16. Elektroenergieverbrauch pro Produktion und Produktionsarbeiter	Durchschnitt	22	93
17. Monatliche Arbeitszeit in der Bauindustrie	Durchschnitt	22	94
18. Schweinebesatz — Faktoranalyse —	Durchschnitt	23	94
19. Getreideertrag je ha — Faktoranalyse —	Durchschnitt	23	95
20. Zeitaufwand pro Stück	Durchschnitt	24	95
21. Produktionsleistung je Stunde	Durchschnitt	24	96
22. Personen je Haushalt	Durchschnitt	25	96
23. Preis für erfaßte neugebaute Wohnungen	Durchschnitt	25	96
24. Haushaltseinkommen	Häufigkeitswerte	26	96
25. Schweinebesatz pro 100 ha	einfache Streuung	26	99
26. Gasausbeute	einfache Streuung	27	100
27. Streuung zur Aufgabe 10	einfache Streuung	27	100
28. Streuung zur Aufgabe 8	einfache Streuung	28	102

Aufgabe	Thema	Aufgabe Seite	Lösung Seite
29. Materialverbrauch je Stück	einfache Streuung	28	102
30. Spezifischer Wärmeverbrauch	einfache Streuung	28	104
31. Hektarertrag bei Zuckerrüben	einfache Streuung	29	104
32. Förderleistung je Stunde	einfache Streuung	29	105
33. Milchleistung pro Kuh	einfache Streuung	30	105
34. Abweichungen von zwei Bezugsgrößen	einfache Streuung	30	105
35. Bauzeiten je Wohnung	einfache Streuung	31	106
36. Ausschuß je Kiste	Standardabweichung	31	107
37. Stückzahl pro Arbeiter	Standardabweichung	32	107
38. Personen je Haushalt	Standardabweichung	32	109
39. Einkommen je Haushalt	Standardabweichung	33	109
40. Geborene in der DDR	Standardabweichung	33	110
41. Wohnbevölkerung in der DDR	Standardabweichung	34	110
42. 2-Punkt-Verteilung und Gleichverteilung	Varianz	34	110
43. Preis je Eintrittskarte	Standardabweichung	34	112
44. Vereinfachte Berechnung der Varianz	Varianz	35	112
45. Binomialverteilung	Varianz	35	112
46. Poisson-Verteilung	Varianz	35	113
47. Haushaltseinkommen und Haushaltsgröße	einfacher Zusammenhang	35	113
48. Produktion und Materialverbrauch je Stück	einfacher Zusammenhang	36	115
49. Haushaltseinkommen und Ausgaben für Molkereierzeugnisse	einfacher Zusammenhang	36	116
50. Kosten und Produktion	Regression — Potenzfunktion	37	116
51. Produktion, Arbeitskräfte und Grundmittelbestand	Regression — Produktionsfunktion	37	116
52. Lineare Regressionsfunktion	Regression — Gerade	37	116
53. Anfangswert der Geraden	Regression — Gerade	37	118
54. Elektroenergieverbrauch und Grundmittelbestand	Regression — Gerade	38	118
55. Ausgaben und Einkommen je Haushalt	Regression — Gerade	38	118
56. Einkommen und Haushaltsgröße	Regression — Gerade	39	119
57. Regressionsfunktion zur Aufgabe 54	Regression — Gerade	39	119
58. Berechnung des Bestimmtheitsmaßes	Korrelation	39	120
59. Korrelation in den Aufgaben 47 und 55	Korrelation	39	120
60. Ausgaben für Eier und Kaffee in Haushalten	Regression — Potenzfunktion	39	120

Aufgabe	Thema	Aufgabe Seite	Lösung Seite
61. Materialverbrauch und Produktion	Regression — Hyperbel	40	122
62. Elastizität zur Aufgabe 61	Elastizität	41	124
63. Elastizitätsfunktionen	Elastizität	41	125
64. Kosten und Produktion	Elastizität	41	125
65. Elastizitäten zu den Aufgaben 55 und 60	Elastizität	42	126
66. Elektroenergieverbrauch und Produktion	multiple Regression	42	127
67. Materialverbrauch, Produktion und Grundmittelbestand	multiple Regression	42	129
68. Partielle Regressionskoeffizienten	multiple Regression	43	129
69. Einflußintensität	multiple Regression	43	130
70. Multiples Bestimmtheitsmaß	multiple Regression	43	130
71. Einfache und normierte Regressionskoeffizienten	multiple Regression	44	130
72. Korrelationsdeterminante	multiple Regression	44	130
73. Monatsbestand	Durchschnitts- bestand	44	131
74. Rinderbestand	Durchschnitts- bestand	45	132
75. Preisindex für sechs Waren	Indexform	45	132
76. Arbeitsproduktivität	Indexform	46	134
77. Preisindex für Kakaoerzeugnisse	Indexform	47	134
78. Gesamternteertrag	Indexanalyse	47	135
79. Kosten und Produktion	Indexanalyse	48	136
80. Arbeiter, Lohnsumme und Durchschnittslohn	Indexanalyse	49	137
81. Planerfüllung für Energieverbrauch und Arbeitskräfte	Indexanalyse	49	137
82. Großhandelsumsatz und Kosten	Indexanalyse	50	138
83. Entwicklung der Pro-Kopf-Leistung	Indexanalyse	50	139
84. Landwirtschaftliche Nutzfläche und Schweinebesatz	Indexanalyse	51	139
85. Durchschnittslohn und Arbeitskräfte	Indexanalyse	51	140
86. Produktion und Materialverbrauch	Indexanalyse	52	140
87. Produktion und Kosten	Indexanalyse	53	141
88. Produktion und Materialverbrauch	Indexanalyse	53	142
89. Produktion und Transportkosten	Indexanalyse	54	143
90. Anbaufläche und Arbeitskräfte	Indexanalyse	54	144
91. Pro-Kopf-Verbrauch an Mehl und Fleisch in der DDR	Wachstumstempo	55	144
92. Investitionen in der Volkswirtschaft der in DDR	Wachstumstempo	55	145
93. Industrielle Bruttoproduktion der Sowjetunion, der DDR, der USA und Westdeutschlands	Wachstumstempo	56	145

Aufgabe	Thema	Aufgabe Seite	Lösung Seite
94. Nationaleinkommen und Akkumulation der DDR	Wachstumstempo	56	145
95. Elektroenergieerzeugung der DDR	Wachstumstempo	56	145
96. Gütertransportleistung der DDR	Wachstumstempo	57	146
97. Industrielle Bruttoproduktion der DDR	Wachstumstempo	57	146
98. Investitionen in der DDR	Wachstumstempo	57	147
99. Pferdebestand der DDR	Trend — Gerade	58	147
100. Gütertransport in der DDR	Trend — Gerade	58	148
101. Beschäftigte im Bauhandwerk der DDR	Trend — Parabel	59	148
102. Fernsehrundfunkempfangs- genehmigungen in der DDR	Trend — Parabel	59	150
103. Spareinlagen in der DDR	Trend — Exponentialfunktion	60	150
104. Personenbeförderung der zivilen Luftfahrt der DDR	Trend — Exponentialfunktion	60	153
105. Säuglingssterblichkeit der DDR	Trend — einfache modifizierte Exponentialfunktion	61	153
106. Mechanisierungsgrad der Erdarbeiten in der volkseigenen Bauindustrie der DDR	Trend — einfache modifizierte Exponentialfunktion	61	155
107. Täglicher Stromverbrauch	Periodische Schwankung	62	155
108. Bauproduktion nach Quartalen	periodische Schwankung	62	156
109. Personenbeförderung im Kraftverkehr der DDR	periodische Schwankung	62	156
110. Eheschließungen nach Quartalen	Vorausberechnung	63	157
111. Ausschußstichprobe	Standardfehler	63	157
112. Zufallsauswahl von Straffälligen	Standardfehler — Umfang der Stichprobe	64	158
113. Aufgabe 111 mit endlichen Gesamtheiten	Standardfehler	64	158
114. Auswahl von Lesern einer Bibliothek	Schätzwerte — Standardfehler	64	159
115. Auftreten fehlerhafter Erzeugnisse in Aufgabe 111	Beurteilung der Stichprobe	65	160
116. Befragung von Studenten	Schätzwerte — Standardfehler	65	160
117. Formel für Standardabweichungen bei Anteilschätzungen	Standardfehler	65	160
118. Auswahl von Haushalten	Schätzwerte — Standardfehler — Umfang der Stichprobe	65	161

Aufgabe	Thema	Aufgabe Seite	Lösung Seite
119. Ausschuß bei Massenfertigung	Beurteilung der Stichprobe	66	161
120. Befragung der Bevölkerung	Schätzwerte — Standardfehler — Umfang der Stichprobe	66	162
121. Ausschuß innerhalb der Produktion	Beurteilung der Stichprobe	67	163
122. Ausschuß innerhalb der Produktion	Beurteilung der Stichprobe	67	163
123. Ermittlung des Umfangs einer Stichprobe	Umfang der Stichprobe	67	163
124. Modifizierung zur Aufgabe 123	Umfang der Stichprobe	68	164
125. Formeln für den Umfang der Stichprobe	Umfang der Stichprobe	68	164
126. Haushaltsgröße von Haushalten	Schätzwerte — Standardfehler	68	165
127. Zufallsauswahl mit Hochrechnung	Standardfehler — Hochrechnung	69	165
128. Modifizierung zur Aufgabe 127	Standardfehler — Hochrechnung	69	165
129. Gesundheitszustand bei Schulkindern	Standardfehler — Hochrechnung	69	166
130. Untersuchung der Freizeitgestaltung	Schätzwerte — Standardfehler	70	167
131. Standardfehler bei Durchschnitt und Gesamtbetrag	Standardfehler	71	167
132. Monatseinkommen von straffälligen Personen	Standardfehler — Umfang der Stichprobe	71	168
133. Einkommen der Bevölkerung	Umfang der Stichprobe	71	168
134. Modifizierung zur Aufgabe 133	Standardfehler	72	169
135. Formeln für den Umfang der Stichprobe	Umfang der Stichprobe	72	169
136. Zahl der Kinder in Ehen	Schätzwerte — Standardfehler — Umfang der Stichprobe	72	169
137. Haushaltsgröße je Haushalt	Schätzwerte — Standardfehler — Umfang der Stichprobe	73	169
138. Nettolohn von Personen	Schätzwerte — Standardfehler — Umfang der Stichprobe	73	170

Aufgabe	Thema	Aufgabe Seite	Lösung Seite
139. Umsätze von Verkaufsstellen	Schätzwerte — Standardfehler	73	170
140. Gewichtsgruppen von Schweinen	Hochrechnung	75	172
141. Zahl der Einwohner von Städten	Hochrechnung	76	173
142. Abhängigkeit des Fehlers von der Art der Zufallsauswahl	Standardfehler	77	174
143. Milchleistung pro Kuh	Schätzwerte — Standardfehler	78	175
144. Modifizierung zur Aufgabe 142	Umfang der Stichprobe	79	176
145. Prüfung des Anteils der Raucher an der Bevölkerung	Test	79	177
146. Prüfung des Anteils von Ausschuß	Test	80	178
147. Vergleich des Anteils von Haus- halten mit Fernsehgeräten	Test	80	178
148. Vergleich des Anteils von ver- urteilten Personen, die in geordneten Verhältnissen gelebt haben	Test	80	178
149. Vergleich des Einkommens von Haushalten	Test	80	178
150. Vergleich des Einkommens von Haushalten	Test	81	179
151. Komplexaufgabe	Durchschnitt — Streuung — Index — Wachstumstempo — Trend — periodische Schwankungen — Regression — Korrelation	81	179

1. Aufgabensammlung

1.1. Widerspiegelung des Niveaus der Erscheinungen

1.1.1. Verteilung und Struktur

Aufgabe 1

Es liegen folgende Angaben über die Zahl der Geborenen nach dem Alter der Mutter innerhalb eines Kreises für das Jahr 1960 vor:

Alter der Mutter am 1. Januar des Geburtsjahres des Kindes	Geborene
0	1
14 bis unter 16 Jahre	5
16 bis unter 18 Jahre	90
18 bis unter 20 Jahre	380
20 bis unter 22 Jahre	500
22 bis unter 24 Jahre	460
24 bis unter 26 Jahre	410
26 bis unter 28 Jahre	280
28 bis unter 30 Jahre	240
30 bis unter 32 Jahre	200
32 bis unter 34 Jahre	140
34 bis unter 36 Jahre	110
36 bis unter 38 Jahre	80
38 bis unter 40 Jahre	60
40 bis unter 42 Jahre	30
42 bis unter 44 Jahre	10
44 Jahre und darüber	5

Stellen Sie die Verteilung der Geborenen nach dem Alter der Mutter graphisch dar.

Aufgabe 2

Dem Statistischen Jahrbuch der DDR 1968, S. 144 wurden für die DDR für das Jahr 1966 (Stand 31.12.1966) folgende Angaben entnommen:

Zahl der Arbeiter und Angestellten im Betrieb	Betriebe insgesamt		
	Sozialistisch	Halbstaatlich	Privat
0	1	2	3
bis 25	214	1457	2853
26 bis 50	316	1806	899
51 bis 100	555	1374	284
101 bis 200	788	654	55
201 bis 500	913	202	4
501 bis 1000	479	19	1
1001 bis 2500	391	—	—
2501 bis 5000	134	—	—
über 5000	53	—	—

1. Ermitteln Sie für die drei Eigentumsformen insgesamt die relative Häufigkeitsverteilung der Betriebe auf die Betriebsgrößengruppen.

Aufgabe 3

Dem Statistischen Jahrbuch der DDR 1968, S. 138 wurden für die DDR für das Jahr 1966 folgende Angaben über Arbeiter und Angestellte, Betriebe und industrielle Bruttoproduktion, gruppiert nach der Zahl der Arbeiter und Angestellten im Betrieb, entnommen:

Zahl der Arbeiter und Angestellten im Betrieb	Betriebe	Arbeiter und Angestellte	industrielle Bruttoproduktion
		Prozent	
0	1	2	3
bis 25	33,6	2,5	1,9
26 bis 50	22,5	4,0	3,3
51 bis 100	16,5	5,8	5,3
101 bis 200	11,1	7,7	7,9
201 bis 500	8,3	12,7	13,8
501 bis 1000	3,7	12,7	12,4
1001 bis 2500	2,9	21,4	20,9
2501 bis 5000	1,0	16,7	16,5
über 5000	0,4	16,5	18,0

- Welchen prozentualen Anteil haben die Betriebe mit mehr als 2000 Arbeitskräften an der Gesamtzahl der Betriebe, der Arbeiter und Angestellten und an der industriellen Bruttoproduktion?
- Wieviel Prozent der Arbeiter und Angestellten sind in den die kleinsten Betriebe umfassenden 50 Prozent der Betriebe beschäftigt?

3. Wieviel Prozent der industriellen Bruttoproduktion wurden von den die kleinsten Betriebe umfassenden 50 Prozent der Betriebe geliefert?
4. Wieviel Prozent der Arbeiter und Angestellten sind in den die größten Betriebe umfassenden 5 Prozent der Betriebe beschäftigt?
5. Wieviel Prozent der industriellen Bruttoproduktion wurden von den die größten Betriebe umfassenden 5 Prozent der Betriebe geliefert?
6. In welchem Verhältnis steht die Konzentration der Arbeitskräfte gegenüber der Konzentration der Betriebe auf die einzelnen Größengruppen?
7. In welchem Verhältnis steht die Konzentration der industriellen Bruttoproduktion gegenüber der Konzentration der Betriebe auf die Größen-gruppen?

1.1.2. Mittleres Niveau

Aufgabe 4

Die Produktionsabrechnung einer Betriebsabteilung enthält für einen Abrechnungszeitraum folgende Angaben:

Erzeugnis	Mengeneinheit	Kosten je Mengen- einheit in M/ME	Gesamtkosten in Mark	Zahl der an der Fertigung beteilig- ten Arbeiter
0	1	2	3	4
A	m ²	100,0	45 000	5
B	Stück	25	20 000	4
C	kg	20	60 000	6
D	t	150	75 000	5

1. Wie hoch ist die durchschnittliche mengenmäßige Produktion je Arbeiter für jedes der vier Erzeugnisse?
2. Wie hoch sind die durchschnittlichen Kosten je Arbeiter für die vier Erzeugnisse insgesamt?
3. Geben Sie die Formel für die Ermittlung der durchschnittlichen Kosten je Arbeiter für die vier Erzeugnisse insgesamt an.

Aufgabe 5

Dem Statistischen Jahrbuch der DDR 1968, S. 3 wurden die nachstehenden Daten entnommen:

Bezirk	Wohnbevölkerung am 31.12.1967	
	Insgesamt	je km ²
0	1	2
Hauptstadt Berlin	1082019	2685
Rostock	849058	120
Schwerin	598670	69
Neubrandenburg	638265	59
Potsdam	1134388	90
Frankfurt	670293	93
Cottbus	847266	103
Magdeburg	1325927	115
Halle	1932938	220
Erfurt	1256034	171
Gera	735952	184
Suhl	552575	143
Dresden	1884626	280
Leipzig	1507873	304
Karl-Marx-Stadt	2074000	345

Berechnen Sie die durchschnittliche Bevölkerungsdichte für die DDR insgesamt (Bevölkerungsdichte: Wohnbevölkerung/km²).

Aufgabe 6

Über 6 ausgewählte Einzelhandelsverkaufsstellen eines HO-Kreisbetriebes sind folgende Unterlagen vorhanden:

Verkaufsstelle	Einzelhandelsumsatz in %	Einzelhandelsumsatz pro m ² Verkaufsraumfläche 1000 Mark/m ²
0	1	2
I	2,5	0,5
II	62,5	2,5
III	7,3	1,0
IV	18,0	1,5
V	9,3	1,0
VI	0,4	0,1

1. Berechnen Sie den durchschnittlichen Einzelhandelsumsatz pro Einheit der Verkaufsraumfläche.

2. Zeigen Sie formelmäßig, daß das bei dieser Berechnung erhaltene Ergebnis mit der Definition des Durchschnitts

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i}{\sum_{i=1}^r n_i}$$

übereinstimmt.

3. Welchen Einfluß übte die Struktur der Verkaufsraumfläche auf den ausgewiesenen Durchschnitt aus?

Aufgabe 7

Für das Jahr 1966 liegen für den materiellen Bereich der sozialistischen Wirtschaft der DDR folgende Angaben über den Grundmittelbestand und den Grundmittelbestand je Berufstätigen nach Wirtschaftsbereichen vor (Statistisches Jahrbuch der DDR 1968, S. 56 und 58):

Wirtschaftsbereich	Grundmittelbestand — Jahresdurchschnitt — in Millionen M	Grundmittelbestand je Berufstätigen in Mark/ Berufstätigen
0	1	2
Industrie	116592	50808
Bauindustrie	3689	13875
Land- und Forstwirtschaft	21667	28241
Wasserwirtschaft	10755	571406
Verkehr, Post,		
Fernmeldewesen	40872	79598
Handel	9372	13325

1. Berechnen Sie den durchschnittlichen Grundmittelbestand je Berufstätigen für den materiellen Bereich der sozialistischen Wirtschaft der DDR.

2. Geben Sie die Berechnungsformel an und zeigen Sie, daß die von Ihnen verwendete Formel mit der Grundformel des Durchschnitts

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i}{\sum_{i=1}^r n_i}$$

übereinstimmt.

Aufgabe 8

Einer Großhandelsgesellschaft liegen von den 5 Auslieferungslagern für einen bestimmten Zeitraum vor:

- a) der Warenumsatz in 1000 Mark
- b) die Kosten pro 100 Mark Umsatz, das heißt der Kostensatz.

Auslieferungslager	Kosten pro 100 Mark Umsatz	Warenumsatz in 1000 Mark
0	1	2
A	8,0	600
B	7,5	200
C	7,0	100
D	10,0	300
E	9,0	800

1. Wie hoch ist der durchschnittliche Kostensatz für diese 5 Auslieferungslager insgesamt?
2. Stellen Sie den Einfluß der Struktur des Warenumsatzes auf den durchschnittlichen Kostensatz zahlenmäßig dar.

Aufgabe 9

Einer VVB liegen von ihren Betrieben für einen Abrechnungszeitraum die nachstehenden Angaben vor:

Betrieb	Anteil des Betriebes an der Warenproduktion der VVB in %	Arbeitsaufwand je 1000 Mark Warenproduktion in Stunden/1000 M WP
0	1	2
A	25,0	25
B	20,0	20
C	6,0	40
D	5,0	50
E	5,0	35
F	6,5	33
G	25,0	24
H	7,5	37

Wie hoch ist der durchschnittliche Arbeitsaufwand je 1000 M Warenproduktion für die VVB insgesamt?

Aufgabe 10

Für die Arbeiter zweier Brigaden liegen folgende Angaben über die effektive Arbeitszeit in Stunden, die Produktion in Stück und die Normerfüllung vor:

Brigade I			Brigade II		
Arbeiter	Normerfüllung in %	Arbeitszeit in Stunden	Arbeiter	Normerfüllung in %	Produktion in Stück
0	1	2	0	1	2
A	100	25	V	160	1280
B	135	10	W	90	1800
C	130	15	X	120	720
D	140	20	Y	120	1200
E	80	5	Z	100	1600
Norm: 20 Stück/Stunde			Norm: 10 Stück/Stunde		

1. Wie hoch ist die durchschnittliche Arbeitsproduktivität und die durchschnittliche Normerfüllung in jeder Brigade?
2. Zeigen Sie für die beiden Durchschnittswerte der Brigade I, daß die Summe der Abweichungen vom Durchschnitt Null ist.
3. Wie groß wäre die durchschnittliche Normerfüllung für jede der beiden Brigaden, wenn die Arbeiter innerhalb der einzelnen Brigade jeweils die gleiche Arbeitszeit gehabt hätten?
4. Stellen Sie den Einfluß der ungleichen Arbeitszeit der Arbeiter in den Brigaden auf die durchschnittliche Stückzahl je Stunde und die durchschnittliche Normerfüllung zahlenmäßig dar.

Aufgabe 11

Über die vier Brigaden einer Produktionsabteilung eines volkseigenen Betriebes wurden innerhalb eines Monats folgende Angaben erfaßt:

Brigade	Arbeitskräfte anteil in %	Normerfüllung in %	Ausfallzeit je Arbeiter in Stunden	Produktion in Stück	Lohn je Arbeiter in Mark
0	1	2	3	4	5
A	30	110	10	550	400
B	10	90	20	900	500
C	35	120	15	336	600
D	25	130	12	130	450
Norm: 5 Stück je Stunde					

I. Ermitteln Sie folgende Kennziffern:

1. Durchschnittslohn der Abteilung
2. durchschnittlicher Arbeitsaufwand je 100 Stück der Produktion
3. durchschnittliche Ausfallzeit je Arbeiter in Stunden
4. durchschnittliche Normerfüllung

II. Stellen Sie für die Teile 1, 3 und 4 zahlenmäßig den Einfluß dar, den die Struktur der Bezugsgröße n_i auf den Durchschnitt ausübte.

Aufgabe 12

Auf zwei Verladestellen für Zuckerrüben der Deutschen Reichsbahn wurden folgende Angaben ermittelt:

Verladestelle	Kosten		
	Gesamt in M	Je Stunde in M/h	Je verladene Tonne in M/t
0	1	2	3
1	8000	40	1,00
2	15000	50	0,80

1. Berechnen Sie die durchschnittliche Verladeleistung je Stunde für die beiden Verladestellen insgesamt.

2. Wie hoch wäre die durchschnittliche Verladeleistung je Stunde für die beiden Verladestellen insgesamt gewesen, wenn jede Stelle gleich lange gearbeitet hätte?

Aufgabe 13

Über den Schiffsbestand, die durchschnittlichen Einsatztage je Schiffseinheit und Jahr und die durchschnittliche Fangleistung je Schiffseinheit und Jahr wissen wir von einem Fischkombinat der DDR folgendes (Leistungskennziffern: Statistisches Jahrbuch der DDR 1968, S. 199):

Schiffstyp	Einsatztage je Schiffseinheit und Jahr in Tage/Jahr	Fangleistung je Schiffseinheit und Jahr in t/Jahr	Zahl der Schiffe
0	1	2	3
Logger	252	421	13
Trawler Typ II	256	2279	20
Trawler Typ III	233	2571	25
Fang- und Verarbeitungsschiff	239	5806	2

Berechnen Sie die durchschnittliche Fangleistung je Einsatztag für die Schiffe des Kombinats insgesamt.

Aufgabe 14

Zu Vergleichszwecken wurde die Kapazitätsauslastung mehrerer kleiner Kraftverkehrsbetriebe eines kapitalistischen Landes untersucht, die zusammen 30 Reiseomnibusse mit insgesamt 990 Sitzplätzen besitzen. Es liegen jedoch folgende unterschiedliche Angaben vor:

5 ROB (= Reiseomnibus) beförderten je 30 Personen auf einer Tour von 250 km in 5 Stunden; 10 ROB beförderten insgesamt 250 Personen und fuhren jeweils 4 Stunden mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 80 km/h; 10 ROB durchfuhren eine 240 km lange Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h und beförderten je 38 Personen; 2 ROB, deren Platzangebot von je 30 Personen nur mit 90 Prozent bzw. 80 Prozent ausgenutzt war, fuhren 300 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 75 km/h, die restlichen 3 ROB beförderten insgesamt 105 Personen und benötigten für ihre 200 km lange Tour 4 Stunden.

1. Ermitteln Sie die durchschnittliche Fahrzeit, Reiseweite und Personen-zahl pro ROB und die durchschnittliche Geschwindigkeit für die eingesetzten Fahrzeuge insgesamt.

2. Mit wieviel Prozent war die Platzkapazität der Fahrzeuge insgesamt ausgenutzt?

Aufgabe 15

Über die Arbeit der allgemeinen öffentlichen Bibliotheken der Bezirke Dresden, Leipzig und der Hauptstadt der DDR Berlin sind im Statistischen Jahrbuch der DDR 1968, S. 480 u. a. folgende Angaben zu finden:

Die 146 Bibliotheken der Hauptstadt der DDR verfügten im Jahre 1967 über einen Bestand von 924556 Büchern. Sie wurden von 154046 Lesern benutzt. Je 100 Leser wurden 2329 Ausleihen verzeichnet.

Die 1084 Bibliotheken des Bezirkes Dresden verfügten über 1694802 Bücher. Je 100 Bücher des Bestandes wurden 294 und je 100 Leser wurden in dem genannten Jahr 1850 Ausleihen verzeichnet.

In den 788 Bibliotheken des Bezirkes Leipzig konnten 227938 Leser gezählt werden. In dem Beobachtungszeitraum wurden 4557468 Ausleihen registriert. Damit wurden je 100 Bücher des Bestandes 316 Ausleihen getätigt.

Berechnen Sie für die ausgewählten Bezirke insgesamt

1. die durchschnittliche Leserzahl je Bibliothek

2. den durchschnittlichen Buchbestand je Bibliothek

3. die durchschnittliche Zahl der Ausleihen je Bibliothek
4. die durchschnittliche Zahl der Ausleihen je 100 Bücher des Bestandes
5. die durchschnittliche Zahl der Ausleihen je 100 Leser und
6. den durchschnittlichen Buchbestand je 100 Leser.

Aufgabe 16

Über die Struktur des Elektroenergieverbrauchs der Industrie der DDR nach Industriebereichen für das Jahr 1967 und den Elektroenergieverbrauch je 1000 Mark industrielle Bruttonproduktion sowie den Elektroenergieverbrauch je Produktionsarbeiter ist folgendes bekannt (Statistisches Jahrbuch der DDR 1968, S. 208 und 209):

Industriebereich	Anteil des Bereichs am Elektroenergieverbrauch der Industrie in Prozent	Elektroenergieverbrauch je 1000 Mark d. Bruttonproduktion in kWh/1000 M	Elektroenergieverbrauch je Produktionsarbeiter in kWh/PA
0	1	2	3
Grundstoffindustrie	80,5	1151	66589
Metallverarbeitende Industrie	8,4	91	5215
Leichtindustrie	8,4	167	6755
Nahrungs- u. Genußmittelindustrie	2,8	88	7824

1. Berechnen Sie den durchschnittlichen Elektroenergieverbrauch je 1000 Mark industrielle Bruttonproduktion für die Industrie der DDR insgesamt.
2. Ermitteln Sie den durchschnittlichen Elektroenergieverbrauch je Produktionsarbeiter für die Industrie der DDR insgesamt.
3. Geben Sie die Berechnungsformel für den unter 1. ermittelten Durchschnitt an.

Aufgabe 17

Dem Statistischen Jahrbuch der DDR 1967, S. 222 und 225 wurden über die Höhe der Bauproduktion, der Bauproduktion je Produktionsarbeiter und der Bauproduktion je Produktionsarbeiterstunde im Jahre 1966 für die Bauindustrie der DDR folgende Angaben entnommen:

Bauproduktion					
Bauindustrie insgesamt	dar. volks- eigene Bau- betriebe	je Produktionsarbeiter		je Produktionsarbeiterstunde	
		Bauindustrie insgesamt	dar. volks- eigene Bau- betriebe	Bauindustrie insgesamt	dar. volks- eigene Bau- betriebe
Mio M		M / Produktionsarbeiter		M/Produktionsarbeiterstunde	
1	2	3	4	5	6
6959	5922	37802	40839	18,82	20,26

Berechnen Sie die durchschnittliche monatliche Arbeitszeit der in den übrigen Betrieben der Bauindustrie insgesamt beschäftigten Produktionsarbeiter für das genannte Jahr.

Aufgabe 18

Es liegen folgende Angaben für die VEG einschließlich sonstiger volkseigener Betriebe und LPG eines Bezirks und zwei seiner Kreise über die landwirtschaftliche Nutzfläche (LN) in ha und den Schweinebesatz je 100 ha LN zu einem bestimmten Zeitpunkt vor:

	Landwirtschaftliche Nutzfläche			Schweinebesatz je 100 ha		
	VEG	LPG	insgesamt	VEG	LPG	insgesamt
0	1	2	3	4	5	6
Bezirk	40000	360000	400000	200	130	137
darunter						
Kreis A	800	39200	40000	210	135	136,5
Kreis B	4000	16000	20000	190	125	138

Weisen Sie zahlenmäßig nach, welchen Einfluß die unterschiedlichen Anteile an der LN und die unterschiedlichen Größen des Schweinebesatzes in den beiden Eigentumsformen auf den durchschnittlichen Schweinebesatz der beiden Kreise ausübten.

Die Verhältnisse im Bezirk sollen als Maßstab verwendet werden.

Aufgabe 19

Den internationalen Übersichten des Statistischen Jahrbuches der DDR von 1967 wurden folgende Angaben über die Ernteerträge und die Hektarerträge verschiedener Getreidearten für die DDR und WD (einschließlich Saarland) für das Jahr 1965 entnommen.

(Statistisches Jahrbuch der DDR 1967, Internationale Übersichten, S. 57)

Getreideart	Ernteertrag 1965 in 1000 t		Hektarertrag 1965 in dt/ha	
	DDR	WD	DDR	WD
0	1	2	3	4
Weizen	1802	4347	36,7	30,8
Roggen	1910	2822	23,2	25,0
Gerste	1651	3364	33,2	28,2
Hafer	758	2052	29,2	28,2

1. Wie hoch war der durchschnittliche Ertrag je Hektar (in dt/ha)

a) in der DDR

b) in WD

für die vier Getreidearten insgesamt in dem genannten Jahr?

2. Welcher Gesamtertrag wäre in der DDR zu erwarten gewesen, wenn die Anbaustruktur der DDR mit der von WD übereingestimmt hätte?

3. Welchen Einfluß hatten die Unterschiede der einzelnen Hektarerträge der verschiedenen Getreidearten in der DDR und in WD auf den Unterschied der durchschnittlichen Hektarerträge der vier Getreidearten insgesamt! (Vergleichsbasis sei die Flächenstruktur der DDR)

a) absolut

b) relativ

Aufgabe 20

Über 2 Arbeiter einer Brigade wissen wir folgendes:

Arbeiter	Arbeitszeit in Stunden	Arbeitsleistung Stück/Stunde
0	1	2
1	30	9,0
2	20	8,0

Berechnen Sie den durchschnittlichen Zeitaufwand für die Fertigung von 100 Stück für die beiden Arbeiter insgesamt, für den Fall gleich langer Arbeitszeit beider Arbeiter.

Aufgabe 21

Dem Statistischen Jahrbuch der DDR 1968, S. 156 und S. 181 wurden folgende Angaben über die sozialistischen Industriebetriebe nach Industriebereichen für das Jahr 1966 entnommen:

Industriebereich	Industrielle Brutto- produktion in Mio M	Arbeitsaufwand je 1000 M industrielle Bruttoproduktion* in Stunden/1000 M
0	1	2
Grundstoffindustrie	27111,9	33
Metallverarbeitende Industrie	35614,9	35
Leichtindustrie	19471,2	47
Nahrungs- und Genuß- mittelindustrie	12365,9	20

* einschließlich Überstunden

Berechnen Sie die durchschnittliche Produktionsleistung je Arbeitsstunde für die sozialistische Industrie in der DDR insgesamt!

Aufgabe 22

Per 31.12.1964 wurde für den Kreis Fürstenwalde durch die Volks- und Berufszählung festgestellt, daß 70,75 Prozent der Haushalte Mehrpersonenhaushalte waren. 3,1 Personen lebten im Durchschnitt in einem Mehrpersonenhaushalt (Statistisches Jahrbuch der DDR 1967, S. 536).

Berechnen Sie die durchschnittliche Personenzahl je Haushalt für die Haushalte dieses Kreises insgesamt (Ergebnis mit einer Dezimale).

Aufgabe 23

Für das Jahr 1967 wurden für die DDR dem Statistischen Jahrbuch der DDR 1968 folgende Angaben entnommen (S. 238):

Erfasste neugebaute Wohnungen									
Insgesamt	NACH BAUPREISGRUPPEN (MARK)								
	bis	14001 bis 16000	16001 bis 18000	18001 bis 20000	20001 bis 22000	22001 bis 24000	24001 bis 26000	26001 bis 32000	32001 und darüber
	Prozent								
100,0	0,3	1,2	5,2	2,0	7,4	15,7	12,3	38,5	17,3

1. Berechnen Sie einen Schätzwert für den durchschnittlichen Preis je erfaßter neugebauter Wohnung in der DDR für das genannte Jahr.

2. Unter welcher Voraussetzung kann der von Ihnen berechnete Durchschnittswert als exakt angesehen werden?

Aufgabe 24

Bei einer Untersuchung von 1000 Vierpersonenhaushalten ergab sich folgende Verteilung der Haushaltseinkommen für die Jahre 1959 und 1962:

Jahr	Durchschnittliches monatliches Haushaltsnettoeinkommen (M)						
	unter 400	400 bis unter 600	600 bis unter 800	800 bis unter 1000	1000 bis unter 1200	1200 bis unter 1500	1500 und darüber
0	1	2	3	4	5	6	7
1959	35	215	320	250	120	50	10
1962	20	160	270	300	150	80	20

1. Ermitteln Sie die Häufigkeitswerte für die unteren 5 Prozent, 10 Prozent, 30 Prozent, 50 Prozent (Zentralwert), 90 Prozent und 95 Prozent der Haushalte für 1959 und 1962.

Anmerkung:

Als Häufigkeitswert wird die obere Grenze des Haushaltsnettoeinkommens der unteren 5 Prozent, bzw. 10 Prozent, usw. aller Haushalte bezeichnet.

2. Ermitteln Sie den häufigsten Wert (Dichtemittel) für 1959 und 1962.

3. Lösen Sie Teil 1 für 1959 graphisch.

1.1.3: Streuung

Aufgabe 25

Von 5 LPG liegt folgendes Zahlenmaterial vor:

LPG	Schweinebesatz pro 100 ha in Stück	Schweinebestand insgesamt in Stück
0	1	2
I	125	1250
II	150	1200
III	100	1000
IV	140	910
V	80	440

Im Rahmen einer Analyse sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie groß ist die relative Schwankungsbreite?

2. Wie groß ist die durchschnittliche absolute Abweichung der LPG, die jeweils unter oder jeweils über dem durchschnittlichen Schweinebesatz pro 100 ha liegen, und welche Aussagen gewinnt man daraus?
3. Um wieviel Prozent müssen die unter dem Durchschnitt liegenden LPG ihren Schweinebestand erhöhen, wenn sie den derzeitigen Durchschnitt aller LPG erreichen wollen?
4. Um wieviel Prozent liegen die betreffenden LPG unter beziehungsweise über dem Durchschnitt aller 5 LPG?
5. Wie groß ist die absolute und relative Streuung aller 5 LPG um den durchschnittlichen Schweinebesatz pro 100 ha?
6. Wirken sich die unterschiedlichen Flächen der einzelnen LPG ökonomisch günstig oder ungünstig auf die Größe der Streuung aus?

Aufgabe 26

Aus einer Kokerei der DDR liegen folgende Angaben über den Verbrauch an Steinkohle und über die Gasausbeute aus einem Abrechnungszeitraum vor.

Aggregat	Gasausbeute m ³ /t	Anteil am Verbrauch der eingesetzten Kohle in Prozent
I	530	22
II	500	20
III	490	16
IV	520	22
V	510	20
Norm = 510m ³ /t		

1. Um wieviel m³ Gas muß die Ausbeute bei den unter dem Durchschnitt der Kokerei liegenden Aggregaten durchschnittlich je eingesetzte Tonne Kohle erhöht werden, damit sie den derzeitigen Durchschnitt der Kokerei erreichen?
2. Um wieviel Prozent liegen die in ihrer Ausbeuteleistung über dem Durchschnitt liegenden Aggregate durchschnittlich über der Norm?

Aufgabe 27

Berechnen Sie für jede der beiden Brigaden der Aufgabe 10 einfache Kennziffern der Streuung, wobei als Bezugsbasis

1. die durchschnittliche Arbeitsproduktivität der Brigade,

2. die jeweilige Norm der Brigade

zu verwenden ist. Legen Sie die Aussage der einzelnen Kennziffern in Worten dar.

Aufgabe 28

Berechnen Sie unter Verwendung des Zahlenmaterials der Aufgabe 8 einfache Kennziffern der Streuung für die Großhandels-gesellschaft, wobei der durchschnittliche Kostensatz als Bezugsbasis zu verwenden ist. Interpretieren Sie die von Ihnen berechneten Kennziffern.

Aufgabe 29

Bei Abrechnung der 5 Produktionsabteilungen eines VEB ergaben sich folgende Kennziffern für die Produktion eines Erzeugnisses innerhalb eines Monats:

Abteilung	Erfüllung des Produktionsplans in Prozent	Effektiver Materialverbrauch in kg	Materialverbrauch je Stück in kg
0	1	2	3
A	250	20800	8,32
B	200	20400	10,20
C	33	12000	12,00
D	50	13500	9,00
E	150	33300	11,10

Die Materialverbrauchs-norm beträgt 10 kg je Stück.

Für den Materialverbrauch je Stück sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie groß ist die absolute und relative Schwankungsbreite?
2. Welche einfachen Kennziffern der Streuung ergeben sich sowohl für die unter als auch für die über der Norm liegenden Abteilungen (Bezugsbasis = Norm)?
3. Welchen Einfluß hat die Abweichung der tatsächlichen Verteilung der Produktion in den Abteilungen von der geplanten Verteilung bezüglich der Größe der Streuung?

Aufgabe 30

Über ausgewählte Kraftwerke der DDR liegen aus einem Abrechnungs-zeitraum folgende Angaben vor:

Kraftwerk	Anteil an der Produktion der ausgewählten Kraftwerke in Prozent	Spezifischer Wärmeverbrauch in kcal/kWh
0	2	3
A	50	2800
B	30	3000
C	15	3100
D	5	3300

Berechnen Sie

1. die durchschnittliche absolute Abweichung
2. die durchschnittliche relative Abweichung
3. den Schwankungsbereich

des spezifischen Wärmeverbrauchs für die ausgewählten Kraftwerke insgesamt.

Aufgabe 31

Von den 15 Bezirken der DDR liegen 5 Bezirke mit einem durchschnittlichen Hektarertrag von 270 dt bei Zuckerrüben um 10 Prozent unter dem Republikdurchschnitt.

1. Um wieviel Prozent müssen die 5 Bezirke durchschnittlich ihren Erntertrag erhöhen, wenn sie den Republikdurchschnitt erreichen wollen?
2. Wie groß ist die durchschnittliche absolute Abweichung dieser 5 Bezirke vom Republikdurchschnitt?
3. Bestätigen Sie die Richtigkeit der in Teil 1 und 2 dieser Aufgabe erhaltenen Ergebnisse durch einen allgemeinen Beweis.

Aufgabe 32

Über die Förderleistung der Hauer einer Brigade und ihre Arbeitszeiten liegen für einen Monat folgende Angaben vor:

Hauer	Förderleistung in kg/Stunde	Arbeitszeit in Stunden
0	1	2
1	1100	180
2	1200	190
3	1150	200
4	1000	195
5	1250	180
Norm 1000 kg/Stunde		

1. Geben Sie die Schwankungsbreite der Förderleistung an.
2. Um wieviel kg/Stunde liegt die Leistung der Brigade im Durchschnitt über der Norm?
3. Um wieviel Prozent liegt die durchschnittliche Leistung der Hauer, die den Brigadedurchschnitt nicht erreichten, unter dem allgemeinen Niveau der Brigade?
4. Um wieviel Prozent müssen die unter dem Brigadedurchschnitt liegenden Hauer ihre Leistung durchschnittlich steigern, um den derzeitigen Durchschnitt der Brigade zu erreichen?
5. Wieviel Tonnen können mehr gefördert werden, wenn die unter dem Durchschnitt liegenden Hauer den derzeitigen Durchschnitt erreichen und sich ansonsten bei den übrigen Hauern keine Veränderungen ihrer Leistungen und Arbeitszeiten einstellen?

Aufgabe 33

Für das Jahr 1968 liegen aus ausgewählten Kreisen eines Bezirkes der DDR folgende Daten vor:

Kreis	Gesamterzeugung Kuhmilch in kt	Milchleistung kg/Kuh
0	1	2
A	36,0	4000
B	39,6	3600
C	38,0	3800
D	70,0	3500
E	36,0	3600

Die durchschnittliche Milchleistung je Kuh liegt im Bezirk bei 3700 kg.

1. Um wieviel Prozent müssen die unter dem Durchschnitt des Bezirkes liegenden Kreise ihre Milchleistung je Kuh durchschnittlich steigern, wenn sie den derzeitigen Bezirksdurchschnitt erreichen wollen?
2. Wieviel kg Milch je Kuh werden von den leistungsstärksten Kreisen im Mittel mehr als im Durchschnitt des Bezirkes erzeugt?
3. Wieviel Prozent liegen die leistungsstarken Kreise mit ihrer durchschnittlichen Milchleistung je Kuh über dem allgemeinen Niveau des Bezirkes?

Aufgabe 34

Es seien die Streuungskennziffern, berechnet auf der Grundlage einer Bezugsbasis F_1 und einer Bezugsbasis F_2 , für die unter der jeweiligen Bezugsbasis liegenden Einheiten gegeben. Dabei wird vorausgesetzt, daß

die unter F_1 liegenden Einheiten die gleichen sind, die auch unter F_2 liegen. Es befinden sich also keine Einheiten im Bereich $F_1 < x \leq F_2$.



Dann ergeben sich zwei Systeme von einfachen Streuungskennziffern.

1. Welche allgemeinen mathematischen Beziehungen bestehen hinsichtlich der Differenz zwischen gleichartigen Kennziffern beider Systeme?
2. Überprüfen Sie diese Beziehungen an Hand der Aufgabe 29, Teil 2, indem $F_1 = 10$ und $F_2 = 10,1$ gesetzt wird.

Aufgabe 35

Aus dem Bereich eines Bau- und Montagekombinats liegen folgende Angaben über die Bauzeiten der im Jahre 1967 fertiggestellten Wohnungen nach Bauzeitgruppen vor:

Bauzeitgruppe	Neugebaute Wohnungen in Prozent	Durchschnittliche Bauzeit je Wohnung in Monaten
0	1	2
bis 8 Monate	12	6,0
über 8 bis 12 Monate	30	9,5
über 12 bis 16 Monate	40	12,5
über 16 bis 20 Monate	10	17,5
über 20 Monate	8	21,0

Berechnen Sie die durchschnittliche relative Abweichung der Bauzeiten je Wohnung.

Aufgabe 36

Bei einer Kontrolle von 100 Kisten mit jeweils 5000 Stück eines Erzeugnisses erhielt man folgende Angaben über die Zahl der fehlerhaften Erzeugnisse je Kiste:

Anzahl der Kisten	Fehlerhafte Erzeugnisse je Kiste
1	2
4	57
9	93
14	129
19	165
24	201
20	237
10	273

Ermitteln Sie die durchschnittliche Zahl der fehlerhaften Erzeugnisse je Kiste, die Varianz und die Standardabweichung. Wenden Sie bei der Berechnung vereinfachende Verfahren an.

Aufgabe 37

Es liegen folgende Angaben über die Zahl der Arbeiter und die Stückzahl pro Arbeiter in zwei Abteilungen vor:

Abteilung A		Abteilung B	
Zahl der Arbeiter	Stück/Arbeiter	Zahl der Arbeiter	Stück/Arbeiter
1	2	3	4
1	3	1	2
15	4	2	3
10	5	2	4
15	6	32	5
1	7	2	6
		2	7
		1	8

Ermitteln Sie:

1. die durchschnittliche absolute Abweichung,
2. die durchschnittliche relative Abweichung,
3. die Standardabweichung,
4. den Variationskoeffizient

der Stückzahl pro Arbeiter vom Durchschnitt in jeder der beiden Abteilungen und stellen Sie diese Größen einander gegenüber.

Aufgabe 38

Es liegen folgende Angaben über die Anzahl der Haushalte, der Personen und die Standardabweichung der Zahl von Personen je Haushalt in fünf Wohngebieten einer Stadt vor:

Wohngebiet	Haushalte	Personen	Standardabweichung
0	1	2	3
A	4000	11200	1,6
B	2500	8000	1,5
C	4500	11700	1,4
D	5000	15500	1,7
E	4000	13600	1,6

Ermitteln Sie die Varianz und die Standardabweichung der Personen je Haushalt der Stadt.

Aufgabe 39

Bei der Untersuchung von 1000 Vierpersonenhaushalten im Jahre 1962 wurden folgende Durchschnitte und Standardabweichungen der Haushaltsnettoeinkommen in den einzelnen Gruppen ermittelt:

Einkommen	Haushalte	Durchschnittliches Einkommen M	Standardabweichung M
0	1	2	3
unter 400	20	380	30
400 bis unter 600	160	500	60
600 bis unter 800	270	720	50
800 bis unter 1000	300	880	50
1000 bis unter 1200	150	1100	40
1200 bis unter 1500	80	1300	60
1500 und darüber	20	1750	150

Ermitteln Sie die Varianz und die Standardabweichung aller 1000 Haushalte.

Aufgabe 40

Im Statistischen Jahrbuch der DDR 1962, S. 58, liegen folgende Angaben über die Geborenen nach Legitimität sowie Reif- und Frühgeborenen in der DDR für 1953 und 1960¹ vor:

Jahr	Ehelich		Nichtehelich	
	Reifgeborene	Frühgeborene	Reifgeborene	Frühgeborene
0	1	2	3	4
1953	251863	12952	36534	3510
1960	249295	13792	31616	3047

Ermitteln Sie für 1953 und 1960 folgende Standardabweichungen:

1. ehelich und nichtehelich Geborene,
2. Reifgeborene und Frühgeborene,
3. eheliche Reifgeborene und Frühgeborene,
4. nichteheliche Reifgeborene und Frühgeborene.

Aufgabe 41

Dem endgültigen Ergebnis der Volks- und Berufszählung vom 31.12.1964 in der DDR ist zu entnehmen, daß die Wohnbevölkerung zu diesem Zeitpunkt 17003646 Personen betrug. Von der Wohnbevölkerung waren 8345089 Personen wirtschaftlich tätig, darunter 3688173 weibliche Personen. Von der männlichen Wohnbevölkerung waren 3091242 Personen nicht wirtschaftlich tätig. (Statistisches Jahrbuch der DDR 1967, S. 527 ff.).

Ermitteln Sie für das genannte Jahr folgende Standardabweichungen:

1. männliche und weibliche Wohnbevölkerung,
2. wirtschaftlich tätige und wirtschaftlich nicht tätige Wohnbevölkerung,
3. wirtschaftlich tätige und wirtschaftlich nicht tätige weibliche Wohnbevölkerung,
4. wirtschaftlich tätige und wirtschaftlich nicht tätige männliche Wohnbevölkerung.

Aufgabe 42

1. Eine bestimmte Erscheinung nehme nur die beiden Werte a und b an. — Man bezeichnet eine derartige Verteilung als 2-Punkte-Verteilung. — Die relative Häufigkeit des Wertes a betrage h_a und die des Wertes b sei h_b .

Ermitteln Sie die Varianz dieser Verteilung und stellen Sie die Varianz in Abhängigkeit von den Größen a , b und dem Durchschnitt $\bar{x}$ dar.

2. Die Erscheinung sei zwischen den Punkten a und $\bar{x}$, sowie $\bar{x}$ und b jeweils gleichverteilt mit den Häufigkeitsdichten

$$f_1(x) = \frac{b - \bar{x}}{(b - a)(\bar{x} - a)} \text{ für } a < x \leq \bar{x}$$

und

$$f_2(x) = \frac{\bar{x} - a}{(b - a)(b - \bar{x})} \text{ für } \bar{x} < x \leq b.$$

Ermitteln Sie die Varianz der Erscheinung.

Aufgabe 43

Für eine Kulturveranstaltung wurden Eintrittskarten für zwei Platzgruppen verkauft. In der ersten Gruppe wurde je Karte ein Betrag von 2,05 M und in der zweiten Gruppe je Karte ein Betrag von 1,55 M erhoben. 60 Prozent der Karten wurden für die erste Platzgruppe verkauft.

Berechnen Sie die Standardabweichung des Preises je Eintrittskarte.

Aufgabe 44

Zeigen Sie, daß

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i} - \bar{x}^2$$

Aufgabe 45

Ermitteln Sie die Varianz der Binomialverteilung mit den Häufigkeiten

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

$k = 0, 1, \dots, n$.

Anmerkung:

Zerlegen Sie bei der Summenbildung die Größe k in $1 + (k - 1)$. Weiterhin ist für die Binomialverteilung $\bar{x} = np$.

Aufgabe 46

Ermitteln Sie die Varianz der Poisson-Verteilung mit den Häufigkeiten

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Anmerkung:

Zerlegen Sie bei der Summenbildung die Größe k in $1 + (k - 1)$. Weiterhin ist für die Poisson-Verteilung $\bar{x} = \lambda$.

1.2. Widerspiegelung des Zusammenhangs der Erscheinungen

1.2.1. Einfache Verfahren der Widerspiegelung des Zusammenhangs

Aufgabe 47

Für die Haushaltseinkommensstatistik sind von 33 Haushalten das jeweilige Haushaltsnettoeinkommen in M und die Größe des Haushalts in Personen gegeben. Die erste Zahl bezeichnet das Haushaltsnettoeinkommen in M, die in Klammern gesetzte Zahl die Haushaltsgröße in Personen.

800(4), 800(5), 330(1), 620(1), 630(2), 600(2), 1200(4), 1200(5), 900(2), 480(2), 900(3), 1000(3), 1100(4), 800(2), 350(1), 800(2), 1030(3), 820(3), 900(5), 500(2), 980(4), 1100(5), 760(3), 750(2), 840(4), 850(3), 270(1), 760(2), 650(3), 780(4), 780(2), 580(1), 870(3).

1. Berechnen Sie das durchschnittliche Haushaltsnettoeinkommen je Haushalt und die durchschnittliche Haushaltsgröße für diese 33 Haushalte.

2. Gruppieren Sie das Material nach einem Merkmal, um zu zeigen, daß zwischen der Haushaltsgröße und dem Haushaltsnettoeinkommen pro Person ein Zusammenhang besteht.

3. Zeichnen Sie das Streudiagramm.

4. Welche Form hat der in Teil 2 der Aufgabe nachzuweisende Zusammenhang?

Aufgabe 48

Von 20 Betrieben, die ein bestimmtes Erzeugnis herstellen, sind der Produktionsumfang in Stück und der Materialverbrauch je Stück in kg gegeben. Die erste Zahl bezeichnet den Produktionsumfang in Stück, die in Klammern gesetzte Zahl den Materialverbrauch je Stück in kg:

1000(1,7), 90(7,9), 380(2,8), 370(5,7), 370(2,3), 520(1,0), 250(7,0),
225(4,7), 270(6,8), 70(8,6), 170(5,4), 280(5,1), 260(4,4), 435(1,6),
190(8,1), 340(2,1), 130(6,0), 80(7,4), 220(3,8), 580(1,3).

1. Stellen Sie eine statistische Kombinationstabelle auf, um zu prüfen, ob zwischen dem Produktionsumfang und dem Materialverbrauch pro Stück ein Zusammenhang besteht.

2. Zeichnen Sie, ausgehend von der Kombinationstabelle, ein Streudiagramm.

Aufgabe 49

In der Statistik der Wirtschaftsrechnungen liegen von 50 Dreipersonenhaushalten jeweils das Haushaltsnettoeinkommen und die Ausgaben in M für Molkereierzeugnisse vor. Die erste Zahl kennzeichnet das Haushaltsnettoeinkommen, die in Klammern gesetzte Zahl die Ausgaben:

180(8), 280(22), 620(24), 870(26), 790(30), 1150(38), 770(25), 440(18),
570(24), 680(23), 890(30), 1150(32), 190(20), 590(27), 1190(35), 1100(31),
480(24), 680(21), 480(22), 190(11), 500(24), 780(30), 600(20), 680(26),
1180(36), 580(26), 530(25), 195(12), 750(29), 470(23), 780(24), 380(21),
770(27), 820(30), 780(22), 600(24), 850(31), 700(26), 360(17), 370(20),

420(23), 970(31), 700(22), 680(25), 790(25), 1100(35), 350(22), 720(24), 790(25), 730(24).

1. Weisen Sie mit einer statistischen Kombinationstabelle (7 Gruppen) nach, daß zwischen dem Haushaltsnettoeinkommen und den monatlichen Ausgaben für Molkereierzeugnisse ein Zusammenhang besteht.

2. Verwenden Sie das Streudiagramm und die empirische Beziehungslinie, um den Zusammenhang graphisch darzustellen.

1.2.2. Regression, Korrelation und Elastizität

Aufgabe 50

Es hat sich ergeben, daß sich die degressiv wachsenden Gesamtkosten K in Abhängigkeit vom Produktionsvolumen P gemäß folgender Funktion verhalten:

$$K = a P^\alpha \quad 0 < \alpha < 1$$

Entsprechend welcher Funktion verhalten sich dann die Kosten pro Einheit des Produktionsvolumens k ?

Aufgabe 51

Das Produktionsvolumen P ist abhängig von der Zahl der Arbeitskräfte A und dem Grundmittelbestand G . Die Abhängigkeit wird durch folgende Funktion ausgedrückt ($K = \text{Konstante}$)

$$P = K \cdot A^\alpha \cdot G^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

Wie muß dann die Arbeitsproduktivität (definiert als P/A) in Abhängigkeit von der Grundmittelausstattung pro Arbeitskraft (definiert als G/A) dargestellt werden?

Aufgabe 52

Die lineare Regressionsfunktion lautet in ihrer allgemeinen Form

$$y^* = a_{yx} + b_{yx} \cdot x.$$

Es ist zu beweisen, daß, wenn $a < 0$, die Abhängige y^* sich schneller ändert als die Unabhängige x .

Aufgabe 53

Eine lineare Regressionsfunktion lautet $y^* = 0.75 + 1.7x$. Welche Information gewinnt man aus dem Parameter 0.75?

Aufgabe 54

Von 10 Abteilungen eines Betriebes sind der Elektroenergieverbrauch (y) in 1000 kWh und der Grundmittelbestand (x) in TM bekannt:

Abt.	Elektroenergieverbrauch — 1000 kWh —	Grundmittelbestand — TM —
0	1	2
A	12	100
B	13	120
C	18	110
D	19	115
E	20	125
F	20	130
G	25	125
H	30	140
I	31	140
J	35	150

Die Abhängigkeit des Elektroenergieverbrauchs vom Grundmittelbestand soll durch eine lineare Regressionsfunktion dargestellt werden.

Aufgabe 55

Von 10 privaten Haushalten sind die monatlichen Ausgaben in M für eine Ware A und die monatlichen Haushaltseinkommen gegeben.

Haushalt	Ausgaben — M —	Einkommen — M —
0	1	2
1	10	300
2	12	400
3	11	500
4	8	600
5	15	700
6	13	800
7	18	900
8	20	1000
9	17	1100
10	25	1200

1. Die Abhängigkeit der Ausgaben von den Einkommen ist durch eine lineare Regressionsfunktion darzustellen.
2. Wie ist der Regressionskoeffizient zu interpretieren?

Aufgabe 56

Berechnen Sie für das Zahlenmaterial der Aufgabe 47 die lineare Regressionsfunktion, wobei die Haushaltsgröße als unabhängige Variable angesehen werden soll.

Die Regressionsfunktion ist in das Streudiagramm einzuzichnen.

Aufgabe 57

Die 10 Abteilungen aus der Aufgabe 54 stellen ein Erzeugnis her, dessen nachfolgende Produktionswerte in 1000 m² ausgedrückt sind. Gemäß der Reihenfolge A, B, ..., J aus der Aufgabe 54 ergeben sich folgende Produktionswerte: 3, 7, 10, 8, 10, 12, 11, 15, 16 und 20.

1. Es ist die lineare Regressionsfunktion für den Elektroenergieverbrauch in Abhängigkeit von den Produktionswerten zu bestimmen.
2. Welche ökonomischen Voraussetzungen sind zu machen, damit der lineare Ansatz gerechtfertigt ist?
3. Es sind die Korrelationskoeffizienten und Bestimmtheitsmaße für die Aufgabe 54 und für die unter 1. berechnete Funktion zu berechnen.
4. Welche Information erhält man aus dem Vergleich der beiden unter 3. berechneten Bestimmtheitsmaße?

Aufgabe 58

Gegeben sind die beiden linearen Regressionskoeffizienten $b_{yx} = 0,7$ und $b_{xy} = 1,3$. Zu berechnen ist das entsprechende Bestimmtheitsmaß.

Aufgabe 59

Auf der Grundlage des Zahlenmaterials der Aufgaben 47 und 55 sind die jeweiligen Korrelationskoeffizienten und Bestimmtheitsmaße zu berechnen.

Aufgabe 60

Von 13 privaten Haushalten liegen folgende Angaben vor:

Haushalt Nr.	Haushaltseinkommen pro Monat — M —	Monatliche Ausgaben (M) für	
		Eier	Bohnenkaffee
0	1	2	3
1	330	9,9	13,0
2	400	10,8	15,2
3	480	11,5	17,1
4	550	12,0	18,6
5	600	12,4	19,9
6	700	12,9	21,7
7	750	13,1	22,6
8	850	13,5	24,5
9	870	13,6	24,5
10	940	13,8	25,5
11	1020	14,0	26,5
12	1030	14,1	26,7
13	1200	14,2	28,6

1. Es ist eine Regressionsfunktion für die Beziehung zwischen den Ausgaben für Eier und dem Haushaltseinkommen zu bestimmen, wobei eine Potenzfunktion angesetzt werden soll.
2. Hinsichtlich der Ausgaben für Kaffee ist wie unter 1. zu verfahren.
3. Welche prinzipiellen Unterschiede zeigen die beiden in 1. und 2. berechneten Funktionen?

Aufgabe 61

Über den Materialverbrauch in kg pro Stück (y_i) und den Produktionsumfang (x_i) in Stück liegen von 10 vergleichbaren Betrieben folgende Angaben vor:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	1000	1,7	6	340	2,1
2	520	1,0	7	130	6,0
3	70	8,6	8	80	7,4
4	280	5,1	9	220	3,8
5	260	4,4	10	580	1,3

1. Welcher Funktionstyp ist geeignet für die Untersuchung des spezifischen Materialverbrauchs (= Materialverbrauch pro Stück) in Abhängigkeit vom Produktionsvolumen?

(Voraussetzung: der Materialverbrauch insgesamt setzt sich aus einem konstanten und einem leistungsproportionalen Teil zusammen.)

2. Zu bestimmen ist ausgehend von den unter 1. erhaltenen Ergebnissen die Regressionsfunktion zwischen dem spezifischen Materialverbrauch und dem Produktionsvolumen.
3. Die Kurve der Regressionsfunktion ist in das Streuungsdiagramm einzuzeichnen.
4. Wie muß das zur Funktion gehörende Bestimmtheitsmaß interpretiert werden?

Aufgabe 62

Ausgehend von der Aufgabe 61 sind zu bestimmen:

1. Die absolute und relative Elastizitätsfunktion für den in Aufgabe 61 angesetzten Funktionstyp.
2. Wie lauten die absolute und relative Elastizitätsfunktion für die in Aufgabe 61 numerisch bestimmte Regressionsfunktion?
3. Wie sind ausgehend vom Teil 2 die absoluten und relativen Elastizitätskoeffizienten für einen Produktionswert von $x = 600$ Stück zu interpretieren?

Aufgabe 63

Zu bestimmen sind die relativen Elastizitätsfunktionen für folgende Funktionen:

1. $y^* = a + bx$
2. $y^* = a + b \ln x$
3. $y^* = ax^b$
4. $y^* = \frac{a}{1 + ae^{x-x}}$ (logistische Funktion)

Aufgabe 64

In einem Betrieb wurden für 3 unterschiedliche Kostenarten A, B und C bezüglich eines Erzeugnisses 3 Kostenfunktionen (= Regressionsfunktionen) berechnet:

$$\begin{aligned} K_A^* &= f(P) = 500 \\ K_B^* &= f(P) = 100 + 0,7 \cdot P \\ K_C^* &= f(P) = 50 \cdot P^{0,5} \end{aligned}$$

(K = Gesamtkosten, P = Produktion)

Wie ist die Rangordnung der Kostenarten hinsichtlich ihrer Reaktionsempfindlichkeit auf Änderungen des Produktionsvolumens?

Aufgabe 65

Auf der Basis der Aufgaben 55 und 60 ist eine Reihenfolge der Waren A, Eier und Kaffee hinsichtlich der Ausgabenelastizität aufzustellen.

Aufgabe 66

Von 6 Abteilungen eines Betriebes liegen folgende Angaben vor:

Abt.	Elektroenergieverbrauch — kWh —	Produktion des Erzeugnisses	
		A — Stck —	B — m ³ —
A	12	2	3
B	14	4	2
C	11	3	1
D	15	5	3
E	14	2	2
F	6	2	1

1. Die gleichzeitige Abhängigkeit des Elektroenergieverbrauchs von der Produktionsmenge des Erzeugnisses A und B ist durch eine multiple lineare Regressionsfunktion darzustellen.
2. Es ist die Einflußintensität der Produktion von A und B auf den Verbrauch einzuschätzen.
3. Wie muß
 - a) der Unterschied zwischen den einfachen und den partiellen Korrelationskoeffizienten und
 - b) das multiple Bestimmtheitsmaßan Hand dieser Aufgabe interpretiert werden?

Aufgabe 67

Gegeben sind von 10 vergleichbaren Betrieben der Materialverbrauch ($= x_1$) in 1000 kg, der Grundmittelbestand ($= x_2$) in 1000 M und die Produktion ($= x_3$) in 1000 m².

Betrieb	Materialverbrauch 1000 kg	Grundmittelbestand TM	Produktion 1000 m ²
0	1	2	3
I	12	100	3
II	13	120	7
III	18	110	10
IV	19	115	8
V	20	125	10

Betrieb	Materialverbrauch 1000 kg	Grundmittelbestand TM	Produktion 1000 m ²
0	1	2	3
VI	20	130	12
VII	25	125	11
VIII	30	140	15
IX	31	140	16
X	35	150	20

1. Es ist die multiple lineare Regressionsfunktion

$$x_1^* = a + b_{12.3} x_2 + b_{13.2} x_3$$

zu berechnen.

2. Welcher der beiden Einflußfaktoren hat auf den Materialverbrauch den größten Einfluß?

3. Welche Werte haben die partiellen Korrelationskoeffizienten und das multiple Bestimmtheitsmaß?

Aufgabe 68

Bei einer multiplen Regressionsanalyse ergaben sich folgende normierte partielle Regressionskoeffizienten

$$\beta_{12.34} = -0,75$$

$$\beta_{13.24} = 0,17$$

$$\beta_{14.23} = -0,86$$

Es ist die Reihenfolge der Ursachen bezüglich ihrer Einflußintensität anzugeben.

Aufgabe 69

Gegeben sind die einfachen linearen Korrelationskoeffizienten

$$r_{12} = 0,6; r_{13} = 0,7; r_{14} = 0,5; r_{23} = 0,4; r_{24} = 0,3; r_{34} = 0,1$$

$$\text{und } \bar{x}_1 = 100; \bar{x}_2 = 0,3; \bar{x}_3 = 10; \bar{x}_4 = 1; s_1 = 13; s_2 = 5; s_3 = 2,5$$

$$\text{und } s_4 = 13.$$

1. Wie lautet die Reihenfolge der Ursachen bezüglich ihrer Einflußintensität.

2. Für die Wirkung x_1 ist ein Schätzwert zu ermitteln, wenn $x_2 = 50$; $x_3 = 10$ und $x_4 = \text{konstant}$.

Aufgabe 70

Gegeben sind: $r_{12} = 0,5$; $r_{13} = 0,8$ und $r_{23} = 0,3$. Es ist das multiple Bestimmtheitsmaß zu berechnen.

Aufgabe 71

Aus der 2-reihigen Korrelationsdeterminante sind Formeln für die einfachen und normierten Regressionskoeffizienten abzuleiten.

Aufgabe 72

Gegeben ist die Produktsummendeterminante Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 241 & 12150 & 30 \\ 12150 & 825000 & 2800 \\ 30 & 2800 & 14 \end{vmatrix}$$

Wie lautet die entsprechende Korrelationsdeterminante D?

1.3. Widerspiegelung der Entwicklung der Erscheinungen

1.3.1. Mittleres Niveau

Aufgabe 73

In einem Materiallager wurde der Bestand an Schrauben einer bestimmten Art für jeden Monat eines Jahres an verschiedenen Stichtagen erfaßt:

Stichtag	Bestand in kg	Stichtag	Bestand in kg	Stichtag	Bestand in kg
1.1.	100	6.1.	100	15.1.	108
1.2.	120	6.2.	118	15.2.	112
1.3.	115	6.3.	125	15.3.	120
1.4.	118	6.4.	110	15.4.	120
1.5.	100	6.5.	106	15.5.	110
1.6.	112	6.6.	105	15.6.	100
1.7.	125	6.7.	120	15.7.	125
1.8.	110	6.8.	118	15.8.	118
1.9.	112	6.9.	112	15.9.	115
1.10.	130	6.10.	115	15.10.	100
1.11.	100	6.11.	115	15.11.	120
1.12.	115	6.12.	120	15.12.	115
31.12.	120	6.1.	100	15.1.	120

Ermitteln Sie den durchschnittlichen Monatsbestand für jeden der drei Stichtage getrennt.

Aufgabe 74

Eine LPG hat am 31. 7. einen Rinderbestand von 800 Stück. Über die Bestandsbewegung im Monat August ist folgende Liste angefertigt worden:

Zeitpunkt	Zugänge		Abgänge	
	Ankauf	Kalbungen	Verkauf	Schlachtung
0	1	2	3	4
1.8.	5	3	—	1
2.8. bis 15.8.	—	—	—	—
16.8.	1	2	3	—
17.8.	—	—	5	—
18.8.	—	5	—	—
19.8.	—	1	—	—
20.8.	—	—	—	1
21.8. bis 25.8.	—	—	—	—
26.8.	—	2	1	—
27.8.	1	1	3	—
28.8.	—	1	—	—
29.8.	—	—	2	—
30.8. bis 31.8.	—	1	—	—

Wie hoch ist der durchschnittliche tägliche Rinderbestand der LPG im Monat August?

1.3.2. Entwicklung von Zeitabschnitt zu Zeitabschnitt

Aufgabe 75

Es liegen folgende Angaben zur Ermittlung von Preisindizes vor:

Ware	Mengeneinheit	Basiszeitraum		Berichtszeitraum	
		Preis pro Mengeneinheit in M	Verbrauch in Mengeneinheiten	Preis pro Mengeneinheit in M	Verbrauch in Mengeneinheiten
0	1	2	3	4	5
A	kg	1,50	1000	1,50	1000
B	Stück	0,12	20000	0,14	20500
C	Liter	0,70	2000	0,68	2500
D	m ²	28,00	500	25,50	2000
E	Stück	35,00	3000	33,00	5000
F	kg	2,10	1000	2,12	200

1. Wie hoch ist der individuelle Preisindex für jede einzelne Ware?
2. Wie hoch ist der Preisindex für die 6 Waren insgesamt auf der Basis
 - a) des mengenmäßigen Verbrauchs im Basiszeitraum,
 - b) des mengenmäßigen Verbrauchs im Berichtszeitraum?
3. Wie ist die jeweilige Differenz zwischen Zähler und Nenner der in Teil 2 der Aufgabe ermittelten Preisindizes ökonomisch zu interpretieren?
4. Unter welchen Bedingungen sind die beiden in Teil 2 der Aufgabe berechneten Preisindizes gleich? Bringen Sie den allgemeinen Beweis.
5. Welche Schlußfolgerungen können aus dem numerischen Unterschied der beiden in Teil 2 der Aufgabe berechneten Preisindizes gezogen werden?

Aufgabe 76

Um die Entwicklung der Arbeitsproduktivität einer Fertigungsabteilung vom II. zum III. Quartal des Jahres 1969 darzustellen, wurden nach der Zeitsummenformel folgende Angaben erfaßt.

$$\text{Index} = \frac{\sum q_1 \cdot t_0}{\sum q_1 \cdot t_1}$$

q_1 = produzierte Menge,

t_0 bzw. t_1 = Arbeitsaufwand pro Stück im Basis- bzw. Berichtszeitraum.

Erzeugnis	Gesamtarbeitsaufwand im III. Quartal in Stunden	Veränderung des Arbeitsaufwands pro Stück vom II. zum III. Quartal in Prozent
0	1	2
A	294,0	98
B	100,0	100
C	142,5	95
D	261,9	97
E	96,0	100
F	105,6	96

1. Wie hat sich die Arbeitsproduktivität der Fertigungsabteilung insgesamt vom II. zum III. Quartal 1969 prozentual verändert?
2. Wie muß man die Differenz zwischen Zähler und Nenner des im Teil 1 der Aufgabe berechneten Indexes ökonomisch deuten?
3. Geben Sie für den in Teil 1 der Aufgabe ermittelten Index eine Formel an.

Aufgabe 77

Über den Umsatz von Kakaoerzeugnissen liegen folgenden Angaben vor:

Artikelgruppe, Warengruppe	Prozentualer Anteil am Umsatz der Position „Kakaoerzeugnisse“ 1969	Individueller Preisindex Preisindex 1969/1968
0	1	2
Tafelschokolade	26	0,90
Hohlkörper	9	1,00
Massive Schokoladenartikel	16	1,00
Pralinen	26	0,92
Kremschokolade	19	0,97
sonst. Schokoladenerzeugnisse	4	1,00
Kakaoerzeugnisse	100	

1. Ermitteln Sie die durchschnittliche Preisveränderung von 1968 zu 1969 in Prozent für die Position Kakaoerzeugnisse insgesamt.
2. Geben Sie für die Rechnung eine Formel an und weisen Sie nach, daß diese mit der Preisindexformel

$$\frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1}$$

identisch ist.

Aufgabe 78

Für die 6 Kreise eines Bezirkes der DDR sind für 1969 der Gesamternteertrag an Zuckerrüben und der Prozentsatz, um den sich der Hektarertrag von 1968 zu 1969 verändert hat, gegeben.

Kreis	Gesamternteertrag 1969 in Tonnen	Veränderung des Hektarertrages von 1968 zu 1969 in Prozent
0	1	2
A	71 267	0
B	69 750	+ 12,5
C	55 461	– 2,7
D	64 980	+ 8,3
E	69 102	+ 4,7
F	69 440	– 0,8

Um wieviel Prozent und um wieviel Tonnen hat sich der Gesamternteertrag des Bezirkes durch die Entwicklung des Hektarertrages verändert?

Aufgabe 79

Drei Betriebe einer VVB meldeten für 1968 und 1969 folgende Angaben über die mengenmäßige Produktion und die Gesamtkosten eines Erzeugnisses in M:

Betrieb	Produktion in Mengeneinheiten		Gesamtkosten in 1000 M	
	1968	1969	1968	1969
0	1	2	3	4
A	400	200	36	11
B	200	700	30	70
C	200	300	14	15

Beantworten Sie die folgenden Fragen für die 3 Betriebe insgesamt:

1. Wie hat sich die mengenmäßige Produktion von 1968 zu 1969 entwickelt?
2. Wie haben sich die Gesamtkosten von 1968 zu 1969 entwickelt?
3. Wie haben sich die durchschnittlichen Kosten je produzierte Mengeneinheit von 1968 zu 1969 entwickelt?
4. Wie hat sich die Produktionsveränderung von 1968 zu 1969 insgesamt auf die Entwicklung der Gesamtkosten ausgewirkt?
5. Wie hat sich die Veränderung der mengenmäßigen Produktion insgesamt auf die Entwicklung der Gesamtkosten ausgewirkt?
6. Wie hat sich die Veränderung der Produktionsstruktur auf die Entwicklung der Gesamtkosten ausgewirkt?
7. Wie hat sich die Veränderung der durchschnittlichen Kosten je Mengeneinheit auf die Entwicklung der Gesamtkosten ausgewirkt?
8. Welchen Einfluß hatte die Veränderung des Niveaus der durchschnittlichen Kosten je Mengeneinheit auf die Veränderung der Gesamtkosten?
9. Welchen Einfluß hatte die Strukturverschiebung innerhalb der durchschnittlichen Kosten je Mengeneinheit auf die Entwicklung der Gesamtkosten?
10. Welche mathematischen Beziehungen bestehen zwischen den einzelnen Indizes? Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Beziehungen durch eine formelmäßige Betrachtung.
11. Wie sind die in den Teilen 1 bis 9 der Aufgabe ermittelten Kennziffern zu interpretieren, wenn die Werte von 1968 als Planwerte und die Werte von 1969 als effektive Werte aufzufassen sind?

Aufgabe 80

In der Lohnbuchhaltung eines VEB liegen von 4 Abteilungen folgende Unterlagen vor:

Abteilung	Monatslohn je Arbeiter		Lohnsumme in 1000 M	Zahl der Arbeiter
	Mai	Juni	Mai	Juni
0	1	2	3	4
I	750	825	150	200
II	600	750	300	400
III	750	750	225	400
IV	900	915	450	600

1. Wie hat sich die Zahl der Arbeiter, die Lohnsumme und der Durchschnittslohn der 4 Abteilungen insgesamt von Mai zu Juni entwickelt?
2. Welchen Einfluß hatte die Veränderung der Zahl der Arbeitskräfte insgesamt, die Strukturverschiebung der Arbeitskräfte und die Veränderung des Niveaus und der Struktur der Monatslöhne je Arbeiter in den 4 Abteilungen auf die Entwicklung der Lohnsumme und auf die Entwicklung des Durchschnittslohnes der Abteilungen insgesamt von Mai zu Juni?

Aufgabe 81

Es liegen die Plan- und Ist-Werte für die Zahl der Arbeitskräfte, den Energieverbrauch in kWh und den Energieverbrauch pro Arbeitskraft in zwei Abteilungen eines Betriebes vor:

Abteilung	Arbeitskräfte		Energieverbrauch in kWh insgesamt pro Kopf	
	Plan	Ist	Plan	Ist
0	1	2	3	4
A	200	200	7 000	30
B	200	300	10 000	40

1. Ermitteln Sie die Planerfüllung für die Zahl der Arbeitskräfte, den gesamten Energieverbrauch und den durchschnittlichen Energieverbrauch pro Arbeitskraft des Betriebes.
2. Weisen Sie nach, welchen Einfluß die Veränderung der Anzahl und welchen Einfluß die Strukturverschiebung der Arbeitskräfte auf die Entwicklung des gesamten Energieverbrauchs und des durchschnittlichen Energieverbrauchs pro Arbeitskraft des Betriebes ausübten.

3. Zeigen Sie, inwieweit die Abweichung des tatsächlichen Energieverbrauchs insgesamt und des durchschnittlichen Energieverbrauchs pro Arbeitskraft des Betriebes von den geplanten Werten auf das Niveau und die Struktur des Energieverbrauchs pro Arbeitskraft zurückzuführen ist.

Aufgabe 82

Um eine Analyse über die Entwicklung der Kosten vom I. zum II. und vom II. zum III. Quartal durchzuführen, wurde in einer Großhandels-gesellschaft (GHG), die 4 Auslieferungslager unterhält, die folgende Auf-stellung angefertigt:

Aus- lieferungs- lager	Prozentualer Anteil am Gesamtumsatz der GHG		Kostensatz pro 100 M Umsatz		Gesamtkosten in 1000 M	
	II. Quartal	III. Quartal	I. Quartal	III. Quartal	I. Quartal	II. Quartal
0	1	2	3	4	5	6
A	20,0	20,0	18,5	19,0	74	76
B	32,5	24,0	12,0	11,0	72	78
C	20,0	16,0	15,0	14,0	45	56
D	27,5	40,0	17,0	16,0	119	88

Der Gesamtumsatz der GHG, der im I. und II. Quartal jeweils 2000000 M betrug, hat sich demgegenüber im III. Quartal um 25 Prozent erhöht.

1. Wie haben sich jeweils vom I. zum II. und vom II. zum III. Quartal der Großhandelsumsatz, die Gesamtkosten und der durchschnittliche Kostensatz pro 100 M Umsatz entwickelt?

2. Stellen Sie durch Berechnung geeigneter Indexkennziffern zahlenmäßig dar, wie sich von Quartal zu Quartal die Veränderung des Gesamtumsatzes und die Strukturverschiebung des Umsatzes auf die Entwicklung

- a) der Gesamtkosten und
 - b) des durchschnittlichen Kostensatzes
- auswirkte.

3. Welchen Einfluß hatte die Veränderung des durchschnittlichen Niveaus und die Veränderung der Struktur der Kostensätze auf die Entwicklung

- a) der Gesamtkosten und
 - b) des durchschnittlichen Kostensatzes
- von Quartal zu Quartal?

Aufgabe 83

Für zwei Produktionsabteilungen sind folgende Angaben gegeben:

Abteilung	Produktion in 1000 M		Pro-Kopf-Leistung		
			in M		in %
	April	Mai	April	Mai	Index
0	1	2	3	4	5
A	162	145,44	600	606	101
B	12	24,72	400	412	103
Insgesamt	174	170,16	580	567,2	98

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß jede Abteilung ihre Pro-Kopf-Leistung erhöht hat, während sich in dem Betrieb, der nur aus diesen beiden Abteilungen besteht, die Pro-Kopf-Leistung um 2 Prozent verringerte. Erklären Sie diesen Widerspruch und weisen Sie den Einfluß des ursächlichen Faktors zahlenmäßig nach.

Aufgabe 84

Aus den beiden landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften einer Gemeinde liegt folgendes Zahlenmaterial vor:

	Landwirtschaftliche Nutzfläche in ha		Schweinbestand in Stück	
	1968	1969	1968	1969
0	1	2	3	4
A	1000	1000	1200	1100
B	1000	2000	1300	2600

1. Wie hat sich die landwirtschaftliche Nutzfläche, der Schweinebestand und der durchschnittliche Schweinebesatz pro 100 ha von 1968 zu 1969 entwickelt?
2. Welchen Einfluß hatte die Veränderung und die Strukturverschiebung der landwirtschaftlichen Nutzfläche sowie die Veränderung und Strukturverschiebung des Schweinebesatzes pro 100 ha zwischen den beiden LPG auf die Entwicklung des Schweinebestandes insgesamt und die Entwicklung des durchschnittlichen Schweinebesatzes?

Aufgabe 85

In einem VEB wurde festgestellt, daß die Lohnsumme um 2,5 Prozent gegenüber dem Vorjahr gestiegen ist. Durch die Veränderung des Lohnes stieg die Lohnsumme um 4 Prozent, während der Durchschnittslohn durch die Strukturverschiebung der Arbeitskräfte gegenüber dem Vorjahr um 3 Prozent gesunken ist.

Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Wie hat sich der Durchschnittslohn entwickelt?
2. Welchen Einfluß übte die Veränderung der Arbeitskräftesituation auf die Entwicklung der Lohnsumme aus?
3. Welche weiteren Indizes lassen sich aus den gegebenen Angaben berechnen?

Aufgabe 86

4 Betriebe einer VVB fertigen unter anderem das Erzeugnis Y, wobei sie zum Teil unterschiedliches Material verwenden, was unterschiedliche Materialverbrauchscoeffizienten zur Folge hat. Folgende Unterlagen wurden in der VVB erfaßt:

Betrieb	Produktion in Stück		Materialverbrauch in Tonnen		wertmäßiger Materialverbrauch in M	
	1968	1969	1968	1969	1968	1969
0	1	2	3	4	5	6
A	800	1000	1440	2000	12960	20000
B	800	800	800	800	12000	12000
C	2000	2000	2000	1000	12000	8000
D	800	1000	640	1000	11520	20000

1. Wie hat sich für die 4 Betriebe insgesamt die Produktion, der mengenmäßige und der wertmäßige Materialverbrauch sowie der durchschnittliche mengenmäßige und wertmäßige Materialverbrauch je Stück von 1968 zu 1969 entwickelt?
2. Welchen Einfluß hatte die Erhöhung der Produktion, die Strukturverschiebung der Produktion, die Veränderung des Niveaus und der Struktur des mengenmäßigen Materialverbrauchs pro Stück auf die Entwicklung des mengenmäßigen Materialverbrauchs insgesamt und des durchschnittlichen Materialverbrauchs pro Stück?
3. Welchen Einfluß hatten die Veränderung der Produktion insgesamt, die Veränderung des wertmäßigen Materialverbrauchs pro Stück und des Materialpreises pro Tonne auf die Entwicklung des wertmäßigen Materialverbrauchs insgesamt und des durchschnittlichen wertmäßigen Materialverbrauchs pro Stück?
4. Geben Sie die allgemeine Gleichung für das in Teil 3 der Aufgabe zu berechnende Indexsystem an.
5. a) Wieviel mögliche Varianten des in Teil 3 der Aufgabe zu berechnenden Indexsystems gibt es?

b) Wieviel solcher Varianten gibt es, wenn sich eine Gesamtgröße m multiplikativ in k Faktoren ($m = a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_k$) zerlegen läßt?

Aufgabe 87

Es liegen folgende Angaben über die Entwicklung der Produktion und der Kosten für die fünf Sorten eines Erzeugnisses vor:

Sorte	Stückzahl		Kosten insgesamt in M	
	1968	1969	1968	1969
0	1	2	3	4
A	100	270	3000	7560
B	150	260	3750	6240
C	200	250	4000	5000
D	250	240	3750	3840
E	300	230	3000	2760

Welchen Einfluß übte die Veränderung

- der Produktionshöhe
- der Produktionsstruktur
- des Niveaus der spezifischen Kostensätze und
- der Struktur der spezifischen Kostensätze

auf die Entwicklung der Gesamtkosten von 1968 zu 1969 aus?

Weisen Sie dabei den Einfluß des Zusammenhanges zwischen der Produktions- und Kostenentwicklung nach.

Aufgabe 88

Innerhalb einer VVB wird ein Erzeugnis in 5 verschiedenen Betrieben produziert. Über die Entwicklung der Produktionshöhe und des spezifischen Materialverbrauchs pro Stück von 1968 zu 1969 liegen folgende Angaben vor:

Betrieb	Produktion in Stück		Materialverbrauch pro Stück in 1000 M	
	1968	1969	1968	1969
0	1	2	3	4
A	440	1200	60	50
B	600	1000	63	50
C	200	1000	67	55
D	960	400	45	40
E	400	400	50	45

1. Analysieren Sie die Entwicklung des Gesamtmaterialverbrauchs für alle 5 Betriebe insgesamt.
2. Welchen Einfluß übte der Zusammenhang zwischen der Höhe der Produktion und des spezifischen Materialverbrauchs pro Stück auf die Entwicklung des Gesamtverbrauchs aus?

Aufgabe 89

Über die Entwicklung der Produktion zweier Erzeugnisse und die mit der Produktion verbundenen Transportkosten ist folgendes bekannt:

Erzeugnis	Produktion in 1000 Stück		Transportkosten in 1000 M
	1968	1969	1969
0	1	2	3
A	10	30	360
B	40	20	440

1. Analysieren Sie den Einfluß der Veränderung der Produktionsstruktur auf die Entwicklung der Transportkosten je Stück von 1968 zu 1969!
2. Welche konkrete Form nimmt die Indexformel an, wenn zur Berechnung auf die gewonnenen Zerlegungen der Summe der Merkmalsgröße zurückgegriffen wird?

Aufgabe 90

Über den Arbeitskräftebesatz pro 100 ha landwirtschaftliche Nutzfläche und über die Entwicklung der Anbauflächen bei vier verschiedenen Anbausorten liegen folgende Angaben vor:

Anbausorte	Anbaufläche in 100 ha		Arbeitskräfte pro 100 ha
	1968	1969	1968
0	1	2	3
A	25	20	12
B	20	20	6
C	20	30	9
D	35	42	8

Wie haben sich die Veränderungen in den Anbauflächen bei den einzelnen Anbausorten auf die Entwicklung des durchschnittlichen Arbeitskräftebesatzes pro 100 ha landwirtschaftliche Nutzfläche ausgewirkt?

1.3.3. Durchschnittliches Wachstumstempo

Aufgabe 91

Es liegen folgende Angaben über den Pro-Kopf-Verbrauch an Fleisch und Fleischerzeugnissen und Rauchtabak für die DDR von 1960 bis 1967 vor (vgl. Statistisches Jahrbuch der DDR 1968, S. 438):

Jahr	Fleisch und Fleischerzeugnisse kg	Rauchtabak g
0	1	2
1960	55,0	130
1961	56,3	123
1962	53,5	135
1963	56,0	125
1964	58,0	106
1965	58,7	100
1966	60,1	101
1967	61,5	88

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo des Pro-Kopf-Verbrauchs von 1960 bis 1967

1. bei Fleisch und Fleischerzeugnissen,
2. bei Rauchtabak.

Aufgabe 92

Es liegen folgende Angaben über die Entwicklung der Investitionen in der Volkswirtschaft und im Wirtschaftsbereich Industrie der DDR vor (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 25):

Jahr	Investitionen in Mio Mark Volkswirtschaft	Industrie
1960	13817	6508
1963	14671	.
1965	17631	8946
1967	23900	12020

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo der Investitionen von 1960 bis 1967

1. in der Volkswirtschaft der DDR
2. in der Industrie der DDR.

Aufgabe 93

Die industrielle Bruttoproduktion stieg in den USA von 1950 bis 1960 auf 144 Prozent, während sie sich in der Sowjetunion im gleichen Zeitraum verdreifachte.

In der Deutschen Demokratischen Republik stieg die industrielle Bruttoproduktion von 1950 bis 1960 auf 292 Prozent, in Westdeutschland auf 249 Prozent (Statistisches Jahrbuch der DDR 1962, S. 17).

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo der industriellen Bruttoproduktion von 1950 bis 1960 für folgende Länder:

1. Sowjetunion
2. USA
3. DDR
4. Westdeutschland

Aufgabe 94

Das verwendete Nationaleinkommen stieg in der DDR von 1950 (1950 = 100%) bis 1967 auf 341 Prozent, die Akkumulation in der DDR von 1950 bis 1967 auf 863 Prozent (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 24).

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo von 1950 bis 1967

1. des Nationaleinkommens der DDR
2. der Akkumulation der DDR.

Aufgabe 95

Die Elektroenergieerzeugung der DDR stieg in den Jahren 1958 bis 1962 mit folgendem jährlichen Wachstumstempo (vgl. Statistisches Jahrbuch der DDR 1962, S. 298/299):

Jahr	Wachstumstempo gegenüber dem Vorjahr in Prozent
1959	106,8
1960	108,2
1961	105,5
1962	106,3

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo der Elektroenergieerzeugung in der DDR von 1958 bis 1962.

Aufgabe 96

Die Gütertransportleistung der DDR stieg in den Jahren 1961 bis 1967 mit folgendem jährlichen Wachstumstempo (errechnet nach Statistischem Taschenbuch der DDR 1968, S. 101):

Jahr	Wachstumstempo gegenüber dem Vorjahr in Prozent
1962	111,2
1963	111,3
1964	113,1
1965	104,8
1966	105,4
1967	112,4

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo der Gütertransportleistung in der DDR von 1961 bis 1967.

Aufgabe 97

Über die industrielle Bruttoproduktion der Industriebereiche in der DDR liegen folgende Angaben für den Zeitraum von 1955 bis 1961 vor (vgl. Statistisches Jahrbuch der DDR 1962, S. 282):

Industriebereich	Industrielle Brutto- produktion 1955 Md.M	Durchschnittliches jähr- liches Wachstumstempo der Produktion von 1955 bis 1961 in %
Grundstoffindustrie	13,6	107,9
Metallverarbeitende		
Industrie	13,1	111,5
Leichtindustrie	10,8	107,1
Nahrungs- und Genuß- mittelindustrie	7,3	106,3

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo für die gesamte Industrie der DDR von 1955 bis 1961.

Aufgabe 98

Es liegen folgende Angaben über die Entwicklung der Investitionen nach Wirtschaftsbereichen in der DDR von 1960, 1965 und 1967 vor (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 25):

Wirtschaftsbereich	Investitionen — Mio Mark —		
	1960	1965	1967
Industrie	6508	8946	12020
Bauwirtschaft	371	362	600
Land- und Forstwirtschaft	1632	2451	3440
Verkehr, Post- und Fernmeldewesen	1333	1588	1960
Handel	386	679	1050
Kultur, Gesundheits- und Sozialwesen	569	481	450
Übrige Bereiche	3018	3124	4380

Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo der Investitionen in der gesamten Volkswirtschaft der DDR von 1965 bis 1967.

1.3.4. Grundrichtung oder Trend

Aufgabe 99

Der Bestand an Pferden veränderte sich in der DDR in den Jahren 1952 bis 1958 wie folgt (vgl. Statistisches Jahrbuch der DDR 1957, S. 421 und 1962, S. 456):

Jahr	Bestand in 1000
1952	749,2
1953	726,8
1954	694,7
1955	669,1
1956	641,4
1957	623,8
1958*	606,8

* Der Trend wurde hier und an anderen Stellen dort abgebrochen, wo eine neue Qualität der Aussage eintritt.

Ermitteln Sie den Trend nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei eine Gerade als Trendkurve anzunehmen ist.

Stellen Sie die Wertetabelle des Trend auf.

Zeichnen Sie die Trendkurve.

Aufgabe 100

Es liegen folgende Angaben über die Gütertransportmenge in der DDR für die Jahre 1955 bis 1962 vor (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 100):

Jahr	Gütertransportmenge — Mio Tonnen —
1955	389,7
1956	411,2
1957	443,7
1958	469,2
1959	501,4
1960	522,1
1961	548,9
1962	580,3

Ermitteln Sie den Trend der Gütertransportmenge nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei eine Gerade als Trend anzunehmen ist.

Aufgabe 101

Die Zahl der Beschäftigten in den Produktionsgenossenschaften des Bauhandwerks entwickelte sich von 1957 bis 1961 in der DDR wie folgt (vgl. Statistisches Jahrbuch der DDR 1962, S. 353):

Jahr	Beschäftigte in 1000
1957	3,3
1958	30,9
1959	51,7
1960	66,2
1961	71,3

Ermitteln Sie den Trend nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei eine Parabel als Trend anzunehmen ist.

Stellen Sie die Wertetabelle des Trends auf.

Zeichnen Sie die Trendkurve.

Aufgabe 102

Es liegen folgende Angaben über die Fernseh- und Funkempfangsgenehmigungen in der DDR für die Jahre 1963 bis 1967 vor (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 149):

Jahr	Anzahl in 1000
1963	2378,9
1964	2800,8
1965	3216,4
1966	3600,4
1967	3932,9

Ermitteln Sie den Trend nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei eine Parabel als Trend anzunehmen ist.

Aufgabe 103

Es liegen folgende Angaben über die Entwicklung der Spareinlagen in der DDR vor (Stand vom 31.12. des jeweiligen Jahres — vgl. Statistisches Jahrbuch der DDR 1962, S. 572):

Jahr	Spareinlagen in Mio. Mark	Jahr	Spareinlagen in Mio. Mark
1950	1270	1956	6062
1951	1446	1957	8970
1952	2024	1958	11244
1953	2536	1959	14010
1954	3701	1960	17053
1955	4927	1961	19655

1. Weisen Sie für die Zeit von 1950 bis 1960 die jährliche Entwicklung der Spareinlagen durch Kennziffern über die absolute Zunahme und des Wachstumstempus nach.
2. Ermitteln Sie das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo für die Zeit von 1950 bis 1960 und berechnen Sie mit Hilfe dieser Größe die Trendwerte.
3. Ermitteln Sie den Trend nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei als Funktion eine Exponentialfunktion anzunehmen ist.
4. Zeichnen Sie die Trendkurve.

Aufgabe 104

Es liegen folgende Angaben über die beförderten Personen durch die zivile Luftfahrt der DDR in den Jahren 1963 bis 1967 vor (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 107):

Jahr	Beförderte Personen — 1000 —
1963	328,5
1964	357,3
1965	418,8
1966	518,9
1967	649,3

Ermitteln Sie den Trend der beförderten Personen, wobei als Trend eine Exponentialfunktion anzunehmen ist:

1. aus dem durchschnittlichen jährlichen Wachstumstempo unter Beachtung der Summengleichheit von Trendwerten und tatsächlichen Werten
2. nach der Methode der kleinsten Quadratsumme.

Aufgabe 105

Die Säuglingssterblichkeit verringerte sich in der DDR in den Jahren von 1950 bis 1966 folgendermaßen (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 164):

Jahr	Gestorbene Säuglinge je 1000 Lebendgeborene
1950	72,2
1952	59,1
1954	50,3
1956	46,5
1958	44,2
1960	38,8
1962	31,6
1964	28,6
1966	22,9

Ermitteln Sie den Trend nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei eine einfache modifizierte Exponentialfunktion mit einem angenommenen Sättigungswert von 10,0 als Trend anzunehmen ist. Stellen Sie die Wertetabelle des Trends auf. Zeichnen Sie die Trendkurve.

Aufgabe 106

Es liegen folgende Angaben über den Mechanisierungsgrad der Erdarbeiten in der volkseigenen Bauindustrie der DDR für die Jahre 1964 bis 1967 vor (vgl. Statistisches Taschenbuch der DDR 1968, S. 69):

Jahr	Mechanisierungsgrad in Prozent
1964	87,5
1965	88,5
1966	89,8
1967	91,0

Ermitteln Sie den Trend nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, wobei eine einfache modifizierte Exponentialfunktion mit einem Sättigungsgrad von 100,0 Prozent als Trend anzunehmen ist.

1.3.5. Periodische Schwankungen

Aufgabe 107

In einem Betrieb liegen folgende Angaben über den täglichen Stromverbrauch (in 1000 kWh) für sechs Monate vor:

Zeitraum	April	Mai	Juni	Juli	August	September
0	1	2	3	4	5	6
6 — 14 Uhr	110	156	200	230	300	360
14 — 22 Uhr	112	150	210	230	270	300
22 — 6 Uhr	60	100	130	180	200	250

Ermitteln Sie die durchschnittliche Tagesschwankung in den sechs Monaten in Prozent.

Berechnen Sie die trendbereinigten Schwankungen, wobei als Trend eine Exponentialfunktion angenommen wird (Stromverbrauch für den Monat März — 250000 kWh).

Aufgabe 108

Es liegen folgende Angaben über die Bauproduktion nach Quartalen für 1964 bis 1967 vor:

Quartal	1964	1965	1966	1967
	— Milliarden Mark —			
I	1,8	2,0	2,3	2,6
II	2,3	2,7	3,1	3,7
III	2,7	3,2	3,8	4,5
IV	2,4	2,6	3,0	3,5

Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil der Bauproduktion in den einzelnen Quartalen an der Gesamtproduktion. Berechnen Sie die trendbereinigten Schwankungen, wobei als Trend eine Exponentialfunktion anzunehmen ist. (1963 = 8,0 Milliarden Mark insgesamt)

Aufgabe 109

Es sind folgende Angaben über die Personenbeförderung im Kraftverkehr der DDR gegeben

Quartal	Mill. Personen			
	1957	1958	1959	1960
0	1	2	3	4
I		126,9	145,9	168,8
II		119,0	140,0	158,4
III		122,3	144,8	162,4
IV		137,0	158,9	178,9
Insgesamt	431,5	505,2	589,6	668,5

Ermitteln Sie den allgemeinen Verlauf der Personenbeförderung (Wirkung von Trend und periodischer Schwankung ohne besondere Faktoren innerhalb der einzelnen Quartale), und vergleichen Sie den allgemeinen Verlauf mit der tatsächlichen Entwicklung der Personenbeförderung in den Quartalen der Jahre 1958 bis 1960 (Trend: Exponentialfunktion).

Aufgabe 110

Es liegen folgende Angaben über die Eheschließungen innerhalb eines Bezirkes nach Quartalen für die Jahre 1965 bis 1967 vor:

Quartal	1965	1966	1967
		— 1000 —	
I	1,5	2,2	2,0
II	4,2	3,8	3,5
III	4,6	4,0	3,7
IV	3,5	3,0	2,7

Ermitteln Sie die voraussichtliche Anzahl der Eheschließungen in den Jahren 1968 und 1969 nach Quartalen, wobei als Trend eine Exponentialfunktion anzunehmen ist und die periodischen Schwankungen in den einzelnen Quartalen zu berücksichtigen sind.

1.4. Grundlagen zur Stichprobentheorie

Aufgabe 111

Bei der Untersuchung von $n = 100$ willkürlich einer sehr großen Gesamtmenge entnommenen Erzeugnissen wurden $n_1 = 10$ fehlerhafte Erzeugnisse festgestellt.

1. Mit welchem Standardfehler ist der in der Stichprobe ermittelte Anteil behaftet?
2. In welchen Grenzen kann mit einer Sicherheit von 0,955 der Anteil in der Gesamtheit erwartet werden?
3. Wie groß ist der relative Standardfehler des ermittelten Ausschußanteils und des ermittelten Anteils fehlerfreier Erzeugnisse?

Aufgabe 112

Bei der Befragung von 400 zufällig ausgewählten Straffälligen aus der Gesamtzahl von 10 000 Straffälligen eines Jahres wurden 120 Personen festgestellt, die in ungeordneten familiären Verhältnissen aufgewachsen waren.

- a) In welchen Grenzen kann mit einer Sicherheit von 95,5 Prozent der Anteil der Straffälligen, die in ungeordneten Verhältnissen aufgewachsen sind, in der Gesamtheit liegen?
- b) Welchen Umfang der Stichprobe hätte man wählen müssen, damit die Standardabweichung des Schätzwertes nur 0,01 beträgt?
- c) Wenden Sie die Fragestellung a) und b) für den Fall an, daß der Umfang der Gesamtheit nur 1000 beträgt.

Aufgabe 113

Wenden Sie die drei Fragestellungen der Aufgabe 111 unter der Voraussetzung an, daß unter sonst gleichen Annahmen eine endliche Gesamtheit vom Umfang $N = 500$ bzw. $N = 2000$ vorliegt.

Berechnen Sie zusätzlich, in welchen Grenzen mit einer Sicherheit von 0,955 die Anzahl der fehlerhaften Erzeugnisse in den Gesamtheiten zu erwarten ist.

Aufgabe 114

Der Leserkartei einer Bibliothek wurden zufällig 2500 Karten entnommen. Die Gesamtzahl der Karten betrug 60000. Bei den ausgewählten Nutzern wurde das Geschlecht und das Alter festgestellt. Das Ergebnis ist in folgender Tabelle festgehalten:

Altersgruppe	männlich		weiblich		insgesamt	
	Anzahl	%	Anzahl	%	Anzahl	%
bis 30	400	16	200	8	600	24
30 bis 50	600	24	450	18	1050	42
über 50	500	20	350	14	850	34
insgesamt	1500	60	1000	40	2500	100

Anmerkung: Alle Prozentsätze sind auf den Gesamtumfang der Auswahl bezogen.

Ermitteln Sie die Schätzwerte, die Standardabweichungen der Schätzwerte und die 95,5 Prozent-Konfidenzintervalle der Anteile und der Anzahl

- a) der Frauen unter den Lesern der Bibliothek
- b) der Männer in der Altersgruppe über 50 Jahre
- c) der Nutzer der Bibliothek unter 30 Jahre.

Aufgabe 115

Wenden Sie die Fragestellung aus Teil 2 der Aufgabe 111 unter der Voraussetzung an, daß bei der Untersuchung der $n = 100$ Stück gar kein fehlerhaftes Exemplar gefunden wurde, mit dem Auftreten fehlerhafter Erzeugnisse aber gerechnet werden muß ($n_1 = 0$).

Aufgabe 116

Um die Meinung von Studenten zu dem Plan der Durchführung bestimmter Maßnahmen zu erforschen, wurden aus einer Gesamtheit von 2000 Studenten durch eine uneingeschränkte Zufallsauswahl 200 Studenten ausgewählt und befragt. 120 der befragten Studenten befürworteten den Plan, 57 waren dagegen und 23 verhielten sich indifferent.

a) Schätzen Sie den Anteil und die Anzahl der Studenten, die den Entwurf unterstützen. Ermitteln Sie die Standardabweichungen der Schätzwerte und die 95,5 Prozent — Konfidenzintervalle.

b) Wenden Sie die Fragestellungen a) auf den Anteil und die Anzahl der Studenten an, die gegen das Projekt sind und die sich indifferent verhalten.

Aufgabe 117

Es ist die Formel für die Standardabweichung des Anteils eines bestimmten Merkmals in einer Stichprobe aus einer praktisch unendlich umfangreichen Gesamtheit

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}}$$

abzuleiten als Sonderfall der allgemeinen Formel

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

für endliche Gesamtheiten, wenn $N \rightarrow \infty$.

Aufgabe 118

Auf der Grundlage der Ergebnisse einer Volkszählung wurden in einer Stadt von 100000 Haushalten 900 Haushalte zufällig ausgewählt. Die diesen Familien zugesandten Fragebögen enthielten unter anderem die Frage, ob die Familie vor 10 Jahren bereits in der jetzigen Wohnung gewohnt hat. 320 Befragte bejahten diese Frage. (Wir vernachlässigen, daß Haushalte, die zum Zeitpunkt der Volkszählung existierten, nicht mehr

bestehen und andererseits neue Haushalte gegründet wurden, sowie die Möglichkeit, daß Haushalte die Fragebögen nicht ausfüllen.)

- a) Schätzen Sie den Anteil der Haushalte, die bereits mehr als 10 Jahre in derselben Wohnung wohnen und den Anteil der Haushalte, die weniger als 10 Jahre die derzeitige Wohnung bewohnen. Ermitteln Sie die Standardabweichungen der Schätzwerte und die 95,5 Prozent — Konfidenzintervalle.
- b) Schätzen Sie die absolute Anzahl der jeweiligen Haushalte und die 95,5 Prozent — Konfidenzintervalle der Gesamtzahlen der Haushalte.
- c) Wieviel Haushalte müßte man befragen, damit gewährleistet wäre, daß der Anteil der Haushalte der Stichprobe, die länger als 10 Jahre in der derzeitigen Wohnung wohnen, mit einer Sicherheit von 95,5 Prozent um höchstens 0,04 vom tatsächlichen Wert abweichen und angenommen werden kann, daß der tatsächliche Anteil nicht größer ist als 0,4.

Aufgabe 119

Erzeugnisse einer Massenfertigung sollen in Verpackungseinheiten von jeweils 400 Stück verpackt werden. Die Gesamtmenge enthalte 10 Prozent fehlerhafte Erzeugnisse.

1. Welche fehlerhaften Stückzahlen können symmetrisch um den Erwartungswert in den Verpackungseinheiten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,955 auftreten?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Schachtel mehr als 48 Ausschußexemplare vorzufinden?

Aufgabe 120

Durch ein Forschungsinstitut sollte die Meinung der Bevölkerung zu bestimmten Maßnahmen untersucht werden. Zu diesem Zwecke wurden durch eine uneingeschränkte Zufallsauswahl 400 Personen ausgewählt und befragt. 240 Personen bejahten die Maßnahmen, während 160 Personen diese ablehnten.

- a) Schätzen Sie den Anteil der Personen in der Bevölkerung, die die Maßnahmen befürworten.
- b) Ermitteln Sie die Standardabweichung der Schätzwerte der Anteile der bejahenden und der nicht bejahenden Personen.
- c) Ermitteln Sie die Konfidenzintervalle der Anteile der bejahenden und der nicht bejahenden Personen.
- d) Wie groß hätte der Umfang der Stichprobe gewählt werden müssen, damit mit einer Sicherheit von 95,5 Prozent gewährleistet ist, daß der Schätzwert des Anteils der bejahenden Personen um nicht mehr als 0,02 vom tatsächlichen Anteil abweicht.

Aufgabe 121

Eine Fertigung laufe mit 10 Prozent Ausschuß. Die Erzeugnisse werden willkürlich in Schachteln zu je 200 Stück verpackt.

1. Bei der Kontrolle einer Schachtel werden 9 Ausschußexemplare gefunden. Kann dieses Ergebnis als Beweis einer Verbesserung in der Fertigung angesehen werden, wenn eine Sicherheit von 0,955 als ausreichend angesehen wird?
2. Welche Grenze müßte der Ausschußanteil in einer Schachtel überschreiten, um berechtigt auf eine Verschlechterung des Fertigungsprozesses schließen zu können?

Aufgabe 122

Bei der Untersuchung von 80 zufällig ausgewählten Erzeugnissen aus einer sehr umfangreichen Gesamtheit wurden 20 Erzeugnisse mangelhafter Qualität festgestellt.

- a) Es ist der Anteil der mangelhaften und der Anteil der qualitätsgerechten Erzeugnisse zu schätzen.
- b) Es sind die Standardabweichung der Schätzungen sowie die relativen Standardabweichungen zu ermitteln.
- c) Es sind die Konfidenzintervalle der Anteile nach zwei Verfahren zu bestimmen.
- d) Wie groß hätte der Umfang der Stichprobe gewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5 Prozent der Anteil der mangelhaften Erzeugnisse in der Stichprobe nicht mehr als 0,03 vom tatsächlichen Anteil abweicht.

Aufgabe 123

1. Bestimmen Sie den Umfang einer Zufallsstichprobe, für die mit einer Sicherheit von 0,955 angenommen werden kann, daß der Anteil in der Probe nur um höchstens $e_p = 0,02$ vom Anteil in der Gesamtheit abweicht. Der Umfang der Gesamtheit betrage:

$$N = 1000, \quad N = 5000, \quad N = 50000, \quad N = \infty.$$

Über den Anteil in der Gesamtheit sei bekannt, daß er nicht über 0,30 liegt.

2. Ermitteln Sie den jeweils erforderlichen Auswahlssatz $\left(\frac{n}{N} \cdot 100 \right)$ und stellen Sie die Ergebnisse übersichtlich dar.

Aufgabe 124

Wenden Sie die Fragestellungen aus Teil 1 und 2 der Aufgabe 123 an, wenn die Genauigkeitsforderung durch die Festlegung des relativen Stichprobenfehlers von 10 Prozent ($e_{Pr} = 0,1$) gegeben ist:

1. für den Anteil der mit dem Merkmal behafteten Exemplare (zum Beispiel Ausschuß),
2. für den Anteil der nicht mit dem Merkmal behafteten Exemplare (das heißt fehlerfreie Exemplare).

Aufgabe 125

Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel

$$n = \frac{\lambda^2 PQ}{e_p^2}$$

als Sonderfall der allgemeinen Formel zur Berechnung des notwendigen Stichprobenumfanges

$$n = \frac{\lambda^2 P \cdot Q \cdot N}{e_p^2 (N - 1) + \lambda^2 P \cdot Q}$$

für große Werte von N.

Aufgabe 126

Aus einer großen Gesamtheit von Haushalten (dargestellt zum Beispiel durch die Zähllisten einer Volkszählung) wurden 1000 Haushalte zufällig ausgewählt und deren Haushaltgröße (Personen) festgestellt.

(Zur Vereinfachung wird angenommen, daß höchstens 5 Personen je Haushalt vorkommen.)

Haushaltsgröße	Anzahl der Haushalte
1	200
2	250
3	280
4	160
5	110
1000	

- a) Schätzen Sie den Anteil der Haushalte mit 4 und 5 Personen, ermitteln Sie die Standardabweichung des Schätzwertes und das 95,5 Prozent Konfidenzintervall.
- b) Schätzen Sie die durchschnittliche Haushaltgröße, ermitteln Sie die Standardabweichung, den Variationskoeffizienten und das 95,5 Prozent Konfidenzintervall des Schätzwertes.

Aufgabe 127

Als Ergebnis der Untersuchung einer Stichprobe vom Umfang $n = 80$ ergab sich bei uneingeschränkter Zufallsauswahl aus einer Gesamtheit vom Umfang $N = 500$ ein Durchschnitt $\bar{x} = 1,5$ und eine Standardabweichung $s = 0,2$.

1. Wie groß ist der Standardfehler des Durchschnitts der Stichprobe?
2. Wie groß ist der Standardfehler des geschätzten Gesamtbetrages bei freier Hochrechnung?
3. Wie groß ist der relative Standardfehler des Durchschnitts und des Gesamtbetrages? (Das Stichprobenergebnis wird als Schätzwert des Wertes in der Gesamtheit angesehen.)
4. In welchen Grenzen kann mit einer Sicherheit von 0,955 der Durchschnitt der Gesamtheit und der Gesamtbetrag liegen?

(Die Schlußfolgerung vom Stichprobenergebnis auf den Betrag der Elemente der Gesamtheit wird als Hochrechnung bezeichnet. Im einfachsten Falle (freie Hochrechnung) erhält man den Gesamtwert durch Multiplikation der Summe der Stichprobenwerte mit $\frac{N}{n}$. Ist x' der Schätzwert des Gesamtbetrages,

$$X = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right), \text{ so wird } x' = \frac{N}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = N \cdot \bar{x}.)$$

Aufgabe 128

Wenden Sie die Fragestellungen 1. und 3. der Aufgabe 127 unter der Voraussetzung an, daß unter sonst gleichen Annahmen der Umfang der Gesamtheit

1. $N = 1000$,
2. $N = 2000$,
3. $N = 5000$

betrage.

Stellen Sie die Ergebnisse des Teils 3 der Aufgabe 127 für die 4 vorgegebenen Umfänge N in einer Tabelle dar, wobei der Einfluß des Umfanges der Gesamtheit erkennbar sein soll.

Aufgabe 129

Zwei Zahnärzte A und B haben die Aufgabe übernommen, den Gesundheitszustand der Zähne bei 2000 Schulkindern einer Schule festzustellen.

Der Arzt A wählt zufällig 200 Schulkinder aus und stellt bei ihnen die Anzahl der kranken Zähne fest. Das Ergebnis der Untersuchung ist in folgender Tabelle angegeben:

Anzahl der kranken Zähne	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Kinder	80	50	20	30	10	10	0

Der Arzt B untersuchte alle Kinder, ermittelte dabei aber nur, wieviele Kinder vollkommen gesunde Zähne hatten (und damit auch, wieviele Kinder wenigstens einen kranken Zahn hatten). Er stellte fest, daß 750 Kinder keine kranken Zähne hatten.

- a) Schätzen Sie die Gesamtzahl der kranken Zähne der 2000 Schüler der Schule und die Gesamtkosten der Behandlung der Kinder, wenn die Behandlung eines Zahnes 10,— M kostet. Ermitteln Sie Standardabweichung und 95 Prozent - Konfidenzintervall der Schätzwerte.
 - aa) an Hand der Ergebnisse des Arztes A,
 - ab) mit Hilfe der Angaben beider Ärzte.
- b) Wie groß hätte die Anzahl der untersuchten Kinder des Arztes A sein müssen, um die gleiche Genauigkeit zu erreichen, die sich unter Hinzunahme des Ergebnisses des Arztes B ergibt?

Aufgabe 130

Innerhalb einer Untersuchung über die Freizeitgestaltung einer bestimmten Personengruppe wurde die Höhe der Jahresausgaben für Eintrittskarten für Kulturveranstaltungen von 400 zufällig ausgewählten Personen erfragt. Es ergab sich folgendes Ergebnis:

Jahresausgaben für Eintrittskarten in Kes)	Anzahl der Personen
0 — 20	5
20 — 40	20
40 — 60	40
60 — 80	65
80 — 100	90
100 — 120	55
120 — 140	30
140 — 160	25
160 — 180	20
180 — 200	15
200 — 220	10
220 — 240	10
240 — 260	5
260 — 280	5
280 — 300	5

- a) Schätzen Sie die durchschnittliche Höhe der Ausgaben pro Person und ermitteln Sie die Standardabweichung und das 95 Prozent-Konfidenzintervall.
- b) Wie würde sich das Ergebnis der Schätzung ändern, wenn sich der Durchschnitt und die Standardabweichung der Einzelwerte, die sich aus der Tabelle ergeben haben, in einer Stichprobe vom Umfang 150 ergeben hätte?

Aufgabe 131

Es ist zu beweisen, daß der relative Standardfehler des Durchschnitts einer Stichprobe und des geschätzten Gesamtbetrages bei freier Hochrechnung gleich sind.

Aufgabe 132

Das durchschnittliche Monatseinkommen von straffälligen Personen, die vor ihrer Straffälligkeit einer geregelten Arbeit nachgingen und wegen Diebstahls verurteilt wurden, sollte ermittelt werden. Wegen der Aufwendigkeit der Feststellung des Betrages und des großen Umfanges des Personenkreises ($N = 8000$) sollte eine Stichprobenuntersuchung durchgeführt werden, wobei die Aussagen der Befragten in den Betrieben überprüft werden sollten.

- a) Wie groß muß der Umfang der Stichprobe gewählt werden, damit die Standardabweichung des Schätzwertes nicht mehr als 5,— M betragen soll? Aus vorangegangenen Untersuchungen sei bekannt, daß die Standardabweichung der Einzelwerte etwa 65,— M beträgt.
- b) Die Untersuchung wurde auf 150 Personen beschränkt. Es ergab sich ein durchschnittliches Monatseinkommen von 520,— M und eine Standardabweichung der Einzelwerte von 65,— M. Ermitteln Sie die Standardabweichung des Schätzwertes und das 95,5 Prozent-Konfidenzintervall.
- c) Um wieviel Prozent müßte der Stichprobenumfang 150 erhöht werden, damit die Standardabweichung des Schätzwertes um 25 Prozent sinkt?

Aufgabe 133

Das durchschnittliche Einkommen einer Bevölkerungsschicht vom Umfang $N = 100000$ soll durch eine Stichprobenuntersuchung mit einer Sicherheit von 0,955 und einem maximalen Fehler von 15,— M ermittelt werden. Wie groß muß der Umfang der Probe gewählt werden,

1. wenn angenommen werden kann, daß alle Einkommen praktisch zwischen 400 und 1200 M liegen;
2. wenn zusätzlich zu 1. aus vorangegangenen Untersuchungen geschlossen werden kann, daß der Durchschnitt 650 M nicht überschreitet;
3. wenn eine Voruntersuchung für die Standardabweichung den Wert $s = 180$ M ergab?

Aufgabe 134

Eine Stichprobenuntersuchung wurde entsprechend dem berechneten Umfang des Teils 2 der Aufgabe 133 durchgeführt. Die Auswertung des Stichprobenergebnisses ergab jedoch für die Standardabweichung einen Wert $s = 180$ M.

1. Wie groß ist der tatsächliche Stichprobenfehler? (Vergleiche mit dem geforderten Wert von 15,— M.)
2. Wie groß ist der relative Stichprobenfehler, wenn die Stichprobenuntersuchung einen Durchschnitt von $\bar{x} = 640$ M ergab?

Aufgabe 135

Beweisen Sie, daß $n_2 < n_1$ ist, wenn n_2 den berechneten Wert für den notwendigen Umfang der Stichprobe unter Berücksichtigung des Umfangs der Gesamtheit darstellt, n_1 dagegen den berechneten Wert ohne Berücksichtigung des Umfanges der Gesamtheit.

Aufgabe 136

In einem Bezirk A leben 2800 Ehepaare, die die Ehe vor mehr als 30 Jahren geschlossen haben. Durch eine Zufallsauswahl (ohne Zurücklegen) wurden davon 50 Familien nach der Anzahl der Kinder befragt. Es ergab sich folgendes Ergebnis:

Anzahl der Kinder	Anzahl der Ehepaare
0	10
1	21
2	12
3	4
4	2
5	1
6	0

- a) Schätzen Sie die durchschnittliche Anzahl der Kinder in einer Familie und die Gesamtzahl der Kinder in allen 2800 Familien.
- b) Ermitteln Sie die Standardabweichungen der Schätzungen, die Variationskoeffizienten und die 95,5 Prozent-Konfidenzintervalle.

- c) Wieviel Familien hätten befragt werden müssen, damit das Konfidenzintervall der Gesamtzahl der Kinder eine Gesamtbreite von 200 aufweist?

Aufgabe 137

Von 15 000 Haushalten eines Stadtbezirks wurden 30 Haushalte zufällig ausgewählt. In den ausgewählten Haushalten wurde die Anzahl der Personen je Haushalt festgestellt. Es ergab sich folgendes Ergebnis:

5, 6, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 7, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 3,
4, 3, 3, 1, 2, 4, 3, 4, 2, 4.

- a) Schätzen Sie die Gesamtzahl der Einwohner des Stadtbezirks. Ermitteln Sie die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten des Schätzwertes, sowie das 95,5 Prozent-Konfidenzintervall für die Gesamtzahl der Einwohner.
- b) Wieviel Haushalte hätten befragt werden müssen, damit mit einer Sicherheit von 95,5 Prozent der Schätzwert nicht mehr als 3 Prozent vom tatsächlichen Wert abweicht?

Aufgabe 138

Aus einer Gesamtheit von 5 000 Personen des gleichen Industriezweiges wurden mit Hilfe einer Zufallsauswahl 225 ausgewählt und bei ihnen ein durchschnittlicher Nettolohn von 550,— M und durchschnittliche Steuern in Höhe von 65,— M festgestellt.

- a) Ermitteln Sie den absoluten und relativen Standardfehler und das 95,5 Prozent-Konfidenzintervall des durchschnittlichen Nettolohnes der 5 000 Personen, wenn die Standardabweichung der Einzelwerte $s = 70$,— betrug.
- b) Schätzen Sie die gesamte monatliche Steuersumme der 5 000 Personen. Ermitteln Sie den absoluten und den relativen Standardfehler des Schätzwertes, wenn die Standardabweichung der Einzelwerte der Steuern 20,— M betrug.
- c) Wieviele Personen hätten befragt werden müssen, damit die relative Standardabweichung
- ca) des durchschnittlichen Nettolohnes
- cb) des gesamten Steueraufkommens
- 2 Prozent beträgt (unter Verwendung der Angaben für die Durchschnitte und Standardabweichungen aus der obigen Aufgabenstellung)?

Aufgabe 139

Von 400 Verkaufsstellen eines Einzelhandelsbetriebes wurden durch eine einfache Zufallsauswahl (ohne Zurücklegen) 20 Verkaufsstellen ausgewählt

und die Umsätze in 1000,— M für eine bestimmte Warenart im Jahre 1967 festgestellt (siehe Tabelle, Spalte 2).

- a) Schätzen Sie den durchschnittlichen Umsatz pro Verkaufsstelle und den Gesamtumsatz aller Verkaufsstellen 1967. Berechnen Sie gleichzeitig die absoluten und relativen Standardabweichungen beider Schätzwerte.
- b) Für das Jahr 1966 sind folgende Umsätze (in 1000,— M) für die ausgewählten Verkaufsstellen bekannt (siehe Tabelle, Spalte 3). Der Gesamtumsatz (in 1000,— M) aller Verkaufsstellen betrug 1966 49500,— TM.
 - ba) Schätzen Sie den durchschnittlichen Umsatz und den Gesamtumsatz 1967 aller Verkaufsstellen mit Hilfe der Verhältnisschätzung.
 - bb) Untersuchen Sie, ob die Verhältnisschätzung eine effektivere Schätzung als die freie Hochrechnung liefert.
 - bc) Berechnen Sie die absoluten und relativen Standardabweichungen der Schätzwerte.
- c) Schätzen Sie, ausgehend von dem vorliegenden Zahlenmaterial — den durchschnittlichen Umsatz und den Gesamtumsatz 1967 aller Verkaufsstellen mit Hilfe der linearen Regressionsschätzung und berechnen Sie die absoluten und die relativen Standardabweichungen der Schätzwerte.
- d) Stellen Sie die Ergebnisse der 3 Schätzverfahren übersichtlich dar. Welches Verfahren liefert die effektivsten Schätzwerte?

Verkaufsstelle Nr.	Umsatz 1967 x_i	Umsatz 1966 y_i
1	135	105
2	60	45
3	270	220
4	30	20
5	225	190
6	240	205
7	230	185
8	50	30
9	55	35
10	310	250
11	40	40
12	145	110
13	55	35
14	280	245
15	220	175
16	215	160
17	245	185
18	45	40
19	65	45
20	305	250

Aufgabe 140

Bei einer Viehzählung wurden in den 617 Gemeinden eines Bezirks insgesamt 116 230 Schweine über 4 Monate gezählt. In 22 zufällig ausgewählten Gemeinden dieses Bezirks wurden zum gleichen Zeitpunkt zusätzlich die Anzahl der Schweine über 4 Monate in der Gewichtsgruppe von 50 bis 80 kg ermittelt. Es ergab sich folgende Ergebnis:

Gemeinde i	Anzahl der Schweine über 4 Monate y_i	Anzahl der Schweine in der Gewichtsgruppe von 50–80 kg x_i
1	178	42
2	124	23
3	67	11
4	160	53
5	119	38
6	95	28
7	335	121
8	316	102
9	103	41
10	205	59
11	92	8
12	94	20
13	256	71
14	65	23
15	272	101
16	209	44
17	83	17
18	121	22
19	316	128
20	186	62
21	99	44
22	185	75

1. Stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar (als Punktmenge im Koordinatensystem).
2. Legen Sie eine vernünftige Arbeitstabelle der Einzelwerte an und berechnen Sie den linearen Regressionskoeffizienten und den linearen Korrelationskoeffizienten. Ermitteln Sie die lineare Regressionsfunktion. Zeichnen Sie die Regressionsfunktion in die graphische Darstellung ein. Interpretieren Sie den ermittelten Wert des linearen Regressionskoeffizienten.

3. Es ist die Gesamtzahl der Schweine (in allen Gemeinden) in der Gewichtsgruppe 50 bis 80 kg zu schätzen

- a) mit Hilfe der freien Hochrechnung
- b) mit Hilfe der Verhältnisschätzung
- c) mit Hilfe der Differenzschätzung
- d) mit Hilfe der linearen Regressionsschätzung

4. Als Maß der Genauigkeit der einzelnen Schätzungen sind die Standardabweichungen (absolut und relativ) für die 4 Hochrechnungsarten zu ermitteln. Stellen Sie die Ergebnisse von 3. und 4. übersichtlich dar.

Welches Verfahren liefert die effektivsten Ergebnisse?

Aufgabe 141

Die Spalte 3 der angegebenen Tabelle enthält die Einwohnerzahlen (in 1 000) von 49 Städten der USA im Jahre 1930, die durch einfache Zufallsauswahl aus der Gesamtheit von 196 Städten über 50 000 Einwohner ausgewählt wurden. (Die 4 größten Städte der USA sind in der Gesamtheit nicht enthalten).

Es soll die Gesamtzahl der Einwohner aller 196 Städte im Jahre 1930 geschätzt werden.

Zusätzlich zu den Ergebnissen der 49 Städte für das Jahr 1930 sind aus einer Volkszählung die Einwohnerzahlen dieser Städte im Jahre 1920 (Spalte 2 der Tabelle) und die Gesamtzahl der Einwohner der 196 Städte 1920 bekannt. Sie betrug 22,919 Millionen.

1. Schätzen Sie die Gesamtzahl der Einwohner 1930 mit Hilfe der Verhältnisschätzung.

2. Schätzen Sie die Gesamtzahl der Einwohner 1930 mit Hilfe der freien Hochrechnung.

3. Ermitteln Sie die absoluten und die relativen Standardabweichungen der Schätzwerte sowie die 95,5 Prozent-Konfidenzintervalle für die freie Hochrechnung und die Verhältnisschätzung. Vergleichen Sie die Effektivität der beiden Schätzverfahren.

4. Es wurde nachträglich festgestellt, daß die tatsächliche Gesamtzahl der Einwohner 1930 29,351 Millionen betrug. Überprüfen Sie, ob der tatsächliche Wert innerhalb der ermittelten Konfidenzintervalle liegt.

i	Einwohner 1920 y_i	(in 1000) 1930 x_i	i	Einwohner 1920 y_i	(in 1000) 1930 x_i
1	2	3	1	2	3
1	76	80	26	56	142
2	138	143	27	40	60
3	67	67	28	40	64
4	29	50	29	38	52
5	381	464	30	136	139
6	23	52	31	116	130
7	37	63	32	46	53
8	120	115	33	243	291
9	61	69	34	87	105
10	387	459	35	30	111
11	93	104	36	71	79
12	172	183	37	256	288
13	78	106	38	43	61
14	66	86	39	25	57
15	60	57	40	94	85
16	46	65	41	43	50
17	2	50	42	298	317
18	507	634	43	36	50
19	179	260	44	161	232
20	121	113	45	74	93
21	50	64	46	45	53
22	44	58	47	36	54
23	77	89	48	50	58
24	64	63	49	48	75
25	64	77			

Aufgabe 142

Eine Gesamtheit vom Umfang $N = 10000$ sei in 3 Schichten aufgeteilt, wie Spalte 2 der Tabelle zeigt. Die Standardabweichungen innerhalb der einzelnen Schichten sind in Spalte 3 angegeben. Die Standardabweichung innerhalb der ungeschichteten Gesamtheit betrage $s = 10$.

Berechnen Sie den Standardstichprobenfehler des Durchschnitts, wenn eine Stichprobe vom Umfang $n = 600$ entnommen werden soll,

1. aus der ungeschichteten Gesamtheit,
2. wenn die Aufteilung auf die Schichten gleichmäßig erfolgt

$$(n_1 = n_2 = n_3 = 200),$$
3. bei proportionaler Aufteilung,
4. wenn eine optimale Aufteilung vorliegt.

Schicht	N_h	s_h
1	2	3
1	1000	6
2	3000	5
3	6000	4
	10000	

Aufgabe 143

In einem Bezirk beträgt der Bestand an Milchkühen 150 000. Der Bezirk setzt sich aus 3 landwirtschaftlich unterschiedlichen Gebieten zusammen. Das Gebiet A besitzt 80 000, das Gebiet B 40 000 und das Gebiet C 30 000 Milchkühe. Die drei Gebiete werden als Schichten angesehen.

Zur Ermittlung der Milchleistung der Kühe soll eine 1 Prozent-Stichprobenuntersuchung durchgeführt werden. Die Auswahl der Kühe soll als geschichtete Auswahl vorgenommen werden. Die Stichprobeneinheiten wurden zunächst proportional zum Umfang auf die einzelnen Schichten aufgeteilt. Innerhalb der Schichten wurden die Kühe nach der einfachen Zufallsauswahl ausgewählt.

Als Ergebnis der Stichprobenuntersuchung wurde die durchschnittliche Milchleistung je Kuh und die Standardabweichung der Einzelwerte der Milchleistung in den Schichten ermittelt.

Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

Gebiet	Umfang der Grundgesamtheit (Kühe) N_h	Umfang der Stichprobe (Kühe) n_h	durchschn. Milchleistg. je Kuh in Liter $\bar{x}_h$	Standardabweichung der Milchleistung (l) s_h
1	2	3	4	5
A	80 000		3 300	500
B	40 000		3 000	400
C	30 000		2 600	250
	150 000			

- Ermitteln Sie den Gesamtumfang der Stichprobe und teilen Sie die Stichprobeneinheiten proportional auf die Schichten auf.
- Ermitteln Sie die Schätzwerte der durchschnittlichen Milchleistung je Kuh und des gesamten Milchaufkommens
 - für jedes der drei Gebiete
 - für den gesamten Bezirk
- Ermitteln Sie die Standardabweichung, den Variationskoeffizienten und das 95,5 Prozent-Konfidenzintervall der durchschnittlichen Milchleistung und des gesamten Milchaufkommens
 - für jedes der drei Gebiete
 - für den gesamten Bezirk.

Achten Sie auf den Unterschied der Werte der Variationskoeffizienten der Schätzwerte der einzelnen Gebiete und des gesamten Bezirks.

- d) Wie groß müßte bei einer optimalen Aufteilung der Stichprobeneinheiten der Umfang der Stichproben aus den einzelnen Schichten (Gebieten) sein, wenn die Werte der Spalte 5 der Tabelle als gegeben angesehen werden?
- e) Wenden Sie die Fragestellung bb) und cb) bei optimaler Aufteilung der Stichprobeneinheiten an.
- f) Wenden Sie die Fragestellung bb) und cb) auf eine uneingeschränkte einfache Stichprobe vom Umfang 1500 an, wenn die Standardabweichung der Einzelwerte in der ungeschichteten Gesamtheit 512 Liter je Kuh beträgt.
- g) Stellen Sie die Variationskoeffizienten der Schätzwerte des Gesamtaufkommens des Bezirks für die drei Auswahlverfahren: uneingeschränkte Zufallsauswahl, geschichtete proportionale Auswahl, geschichtete optimale Auswahl übersichtlich in einer Tabelle dar.

Aufgabe 144

Wie groß müßte der Umfang der Stichprobe in Aufgabe 142 gewählt werden, wenn der maximal zulässige Stichprobenfehler $e_{\bar{x}} = 0,4$ betragen soll und die Auswahlverfahren der Aufgabe 142, Teil 1, 142, Teil 3 und 4 angewandt werden (Sicherheit: 0,955)?

Anmerkung:

Die Anregung zu den Aufgaben Nr. 114, 116, 118, 120, 122, 126, 129, 130, 136, 137, 138, 139, 143 wurden mit freundlicher Genehmigung des Verfassers der Aufgabensammlung von Vaclav Čermák: „Sbirka resenych prikladu z teorie vyberovych zjisrovani“, Prag 1966, entnommen.

Aufgabe 145

Nehmen wir an, daß der Anteil der starken Raucher unter den Beschäftigten der Reichsbahn an einem bestimmten Zeitpunkt $P = 0,40$ betrug. Nach einer Kampagne gegen übermäßigen Nikotinverbrauch wurden $n = 1000$ zufällig ausgewählte Beschäftigte befragt. Es befanden sich darunter $K = 320$ starke Raucher.

- a) Kann das Ergebnis als Beweis eines Erfolges der Kampagne angesehen werden oder kann diese Abweichung als Zufallsabweichung gedeutet werden?
- b) Wie lautet die Nullhypothese zur Fragestellung a)?

Aufgabe 146

Die Annahme, daß eine Fertigung von Massenerzeugnissen mit einem Ausschußanteil von acht Prozent läuft, soll durch eine Stichprobenuntersuchung geprüft werden.

Unter $n = 200$ geprüften Exemplaren wurden bei der Untersuchung $n_1 = 22$ Ausschußexemplare festgestellt, $p = 0,11$ oder 11 Prozent. Ist die Abweichung des Untersuchungsergebnisses von der Annahme statistisch gesichert? (Ist das Ergebnis mit der Richtigkeit der Annahme vereinbar?)

Aufgabe 147

Von $n_1 = 200$ befragten Haushalten des Kreises A besaßen $k_1 = 114$ einen Fernsehapparat, das heißt 57 Prozent. Bei der Befragung von $n_2 = 300$ Haushalten des Kreises B wurden $k_2 = 186$ Haushalte mit einem Fernsehapparat festgestellt, das heißt 62 Prozent. Ist auf Grund dieser Differenz eine statistisch gesicherte Aussage über einen unterschiedlichen Besatz mit Fernsehgeräten in den beiden Kreisen möglich? (Statistische Sicherheit 0,95).

Aufgabe 148

Unter $n_1 = 500$ zufällig ausgewählten Personen, die im Jahre 1963 wegen Diebstahl verurteilt wurden, lebten $k_1 = 150$ in geordneten familiären Verhältnissen. Unter $n_2 = 400$ wegen der gleichen Straftat verurteilten Personen dagegen nur $k_2 = 100$. Ist dieser Unterschied statistisch gesichert?

Aufgabe 149

Bei der Untersuchung von $n_1 = 100$ zufällig ausgewählten Beschäftigten mit Fachschulausbildung im Industriezweig A ergab sich als durchschnittliches Monatseinkommen $\bar{x}_1 = 650,-$ M mit einer Standardabweichung der Einzelwerte $s_1 = 70,-$ M. Die Befragung von $n_2 = 120$ Beschäftigten mit Fachschulausbildung im Industriezweig B ergab ein durchschnittliches Monatseinkommen der ausgewählten Personen von $\bar{x}_2 = 680,-$ M mit einer Standardabweichung von $s_2 = 75,-$ M.

Läßt die beobachtete Differenz des durchschnittlichen Monatseinkommens den Schluß zu, daß das durchschnittliche Monatseinkommen der Beschäftigten mit Fachschulabschluß im Industriezweig B signifikant höher ist als im Industriezweig A? (Statistische Sicherheit 0,95).

Aufgabe 150

Es soll geprüft werden, ob ein statistisch gesicherter Unterschied des durchschnittlichen monatlichen Einkommens von Personen, die wegen Diebstahl verurteilt wurden, in den Nordbezirken und in den Südbezirken der DDR vorhanden ist. Wegen der Schwierigkeit der Ermittlung dieses Merkmals wurden aus den Bezirken 100 und 150 Personen zufällig ausgewählt. Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

Nordbezirke: Befragte Personen $n_1 = 100$, Durchschnitt $\bar{x}_1 = 520$.
Standardabweichung $s_1 = 65,-$ M.

Südbezirke: Befragte Personen $n_2 = 150$, Durchschnittseinkommen $\bar{x}_2 = 550,-$, Standardabweichung der Einzelwerte $s_2 = 50,-$ M.

Wie ist diese Differenz zu bewerten, ist der Unterschied signifikant (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05)?

1.5. Komplexaufgabe

Aufgabe 151

Es liegen folgende Angaben über die Stückzahl und den Zeitaufwand für die Produktion eines bestimmten Erzeugnisses in den drei Betrieben einer VVB von 1961 bis 1963 vor:

Betrieb	Zeitaufwand in Stunden			Produzierte Stückzahl		
	1961	1962	1963	1961	1962	1963
0	1	2	3	4	5	6
A	500	800	1600	800	1440	6400
B	400	800	500	800	1840	1800
C	100	400	400	400	1720	1800

Für die VVB ist die Stückzahl und der dazugehörige Verbrauch eines bestimmten Materials in t nach Quartalen gegeben:

Quartal	Produzierte Stückzahl			Materialverbrauch in t		
	1961	1962	1963	1961	1962	1963
0	1	2	3	4	5	6
I	320	740	1490	7	15	32
II	800	2100	3900	17	40	65
III	610	1520	2970	12	30	42
IV	270	640	1640	8	18	30

Zeitaufwand 1960: 625 Stunden
Produktion 1960: 1000 Stück
Materialverbrauch 1960: 24 t

Führen Sie eine Analyse des Niveaus und der Entwicklung der Produktion, des Zeitaufwandes, der Produktion pro Stunde und des Materialverbrauchs für die Jahre 1961, 1962 und 1963 durch.

2. Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1

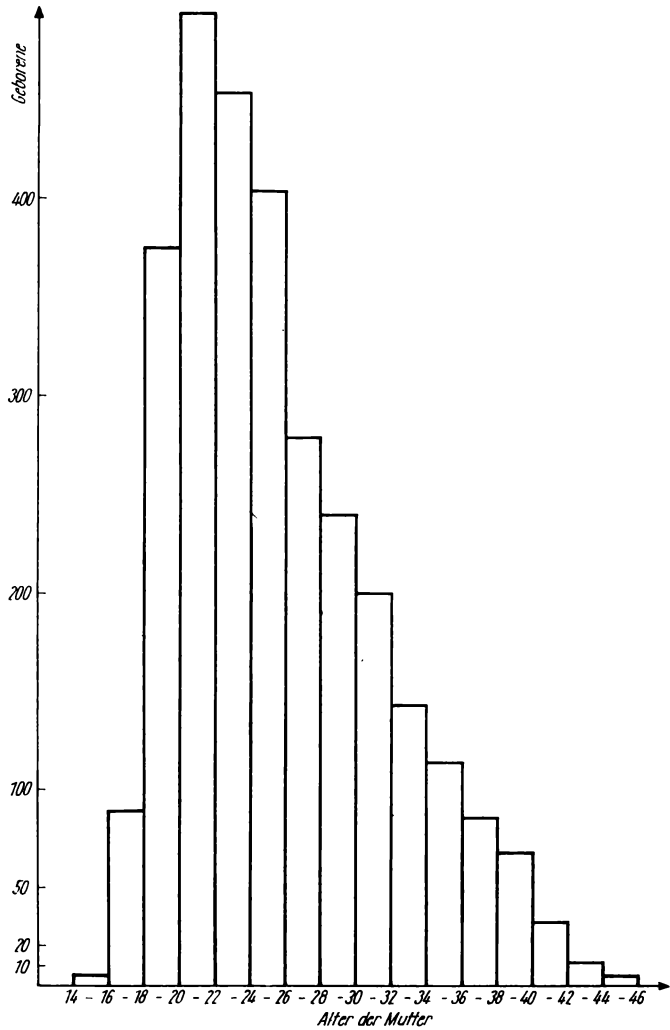


Abb. 1 Verteilung der Geborenen nach dem Alter der Mutter

Aufgabe 2

Entsprechend der Aufgabenstellung ermitteln wir zunächst die Gesamtzahlen der Betriebe für die einzelnen Größengruppen. Aus diesen Angaben berechnen wir die Gesamtzahl der Betriebe in der DDR. Danach bestimmen wir die Anteile der einzelnen Größengruppen an der Gesamtzahl der Betriebe der DDR. Mit der kleinsten Betriebsgrößengruppe beginnend lautet das Ergebnis:

Betriebsgrößengruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anteil der Gruppe in %	33,6	22,5	16,5	11,1	8,3	3,7	2,9	1,0	0,4

Aufgabe 3

1.

- a) Zuerst muß festgestellt werden, wie hoch in der 7. Gruppe der Anteil von Betrieben mit mehr als 2000 Beschäftigten ist. Dabei wird angenommen, daß sich die Betriebe der Größengruppe 1001—2500 Beschäftigte gleichmäßig auf die gesamte Gruppenbreite verteilen, weil nähere Angaben über die Verteilung nicht vorliegen. Das Ergebnis stellt demnach eine Schätzung dar, die um so genauer ist, je besser die Annahme in der Wirklichkeit zutrifft.
- b) Ein Drittel der Gruppe 1001—2500 Beschäftigte gehört zu Betrieben mit 2001—2500 Beschäftigten, da der Anteil der Untergruppe 2001 — 2500 Arbeiter und Angestellte an der Gesamtbreite gleich ist:

$$\frac{2500 - 2000}{2500 - 1000} = 1/3.$$

In der Untergruppe 2001 — 2500 Arbeiter und Angestellte liegen demnach

$$\frac{2,9}{3} \approx 1 \% \text{ der Betriebe}$$

$$\frac{21,4}{3} \approx 7,1 \% \text{ der Arbeiter und Angestellten}$$

$$\frac{20,9}{3} \approx 7,0 \% \text{ der industriellen Bruttonproduktion}$$

- c) Für Betriebe mit mehr als 2000 Arbeitern und Angestellten ergeben sich:

$$0,4 \% + 1,0 \% + 1,0 \% = 2,4 \% \text{ der Betriebe}$$

$$16,5 \% + 16,7 \% + 7,1 \% = 40,3 \% \text{ der Arbeiter und Angestellten}$$

$$18,0 \% + 16,5 \% + 7,0 \% = 41,5 \% \text{ der industriellen Bruttoproduktion}$$

2. In der untersten Gruppe liegen 33,6 Prozent der Betriebe. Da die Angaben für die, die kleinsten Betriebe umfassenden, 50 Prozent der Betriebe gesucht werden, müssen aus der nächsthöheren Gruppe wiederum die, die kleinsten Betriebe umfassenden, 16,4 Prozent der Betriebe herausgegriffen werden.

Die Berechnung des Anteils an der Zahl der Arbeiter und Angestellten wird nach dem Dreisatz vorgenommen.

22,5 Prozent der Betriebe haben 4,0 Prozent der Arbeiter und Angestellten

16,4 Prozent der Betriebe haben x Prozent der Arbeiter und Angestellten.

$$x : 16,4 = 4,0 : 22,5$$

$$x = \frac{4,0 \cdot 16,4}{22,5}$$

$$x = 2,92$$

Der prozentuale Anteil der Arbeiter und Angestellten in den, die kleinsten Betriebe umfassenden, 50 Prozent der Betriebe beträgt demnach höchstens $2,5 + 2,92 = 5,42\%$.

In analoger Weise lassen sich die Antworten auf die Fragen 3—5 finden. Die Ergebnisse lauten zu diesen Fragen:

$$\begin{aligned} 3. \quad x : 16,4 &= 3,3 : 22,5 \\ x &= 2,41 \end{aligned}$$

Der prozentuale Anteil der industriellen Bruttoproduktion beträgt in den, die kleinsten Betriebe umfassenden 50 Prozent der Betriebe höchstens $1,9 + 2,41 = 4,31\%$.

$$\begin{aligned} 4. \quad x : 0,7 &= 12,7 : 3,7 \\ x &= 2,40 \end{aligned}$$

Der prozentuale Anteil der Arbeiter und Angestellten beträgt in den, die größten Betriebe umfassenden 5 Prozent der Betriebe mindestens $16,5 + 16,7 + 21,4 + 2,40 = 57,0\%$.

$$\begin{aligned} 6. \quad x : 0,7 &= 12,4 : 3,7 \\ x &= 2,35 \end{aligned}$$

Der prozentuale Anteil der industriellen Bruttoproduktion beträgt in den die größten Betriebe umfassenden 5 Prozent der Betriebe mindestens $18,0 + 16,5 + 20,9 + 2,35 = 57,75\%$.

6./7. Zur Ermittlung des Konzentrationsgrades wird folgende Arbeitstabelle benötigt:

Größengruppe	Be- triebe %	Arbeiter und Ange- stellte				industrielle Bruttoproduktion				
		%	$2\sum m_k$	insge- samt		%	$2\sum m_k$	insge- samt		
0	1	2	3	4=2+3	5=1·4	6	7	8=6+7	9=1·8	
bis 25	33,6	2,5	—	2,5	84,00	1,9		1,9	63,84	
26 bis 50	22,5	4,0	5,0	9,0	202,50	3,3	3,8	7,1	159,75	
51 bis 100	16,5	5,8	13,0	18,8	310,20	5,3	10,4	15,7	259,05	
101 bis 200	11,1	7,7	24,6	32,3	358,53	7,9	21,0	28,9	320,79	
201 bis 500	8,3	12,7	40,0	52,7	437,41	13,8	36,8	50,6	419,98	
501 bis 1000	3,7	12,7	65,4	78,1	288,97	12,4	64,4	76,8	284,16	
1001 bis 2500	2,9	21,4	90,8	112,2	325,38	20,9	89,2	110,1	319,29	
2501 bis 5000	1,0	16,7	133,6	150,3	150,30	16,5	131,0	147,5	147,50	
über 5000	0,4	16,5	167,0	183,5	73,40	18,0	164,0	182,0	72,80	
					2230,69	2047,16				

Die Formel für den Koeffizienten der Konzentration K lautet:

$$K = \frac{10000 - 2F}{10000},$$

wobei

$$2F = \sum n_i \left(m_i + 2 \sum_1^{i-1} m_k \right)$$

und i = Angabe der Größengruppe,

n_i = Größe der Bezugserscheinung (Zahl der Betriebe)

m_i = Größe der Merkmalserscheinung

(Zahl der Arbeiter und Angestellten bzw. industrielle Brutto-
produktion).

Dann ist der Koeffizient der Konzentration der Arbeiter und Angestellten:

$$K = \frac{10000 - 2230,69}{10000} = 77,69 \%$$

und der Koeffizient der Konzentration der industriellen Brutto-
produktion:

$$K = \frac{10000 - 2047,16}{10000} = 79,53 \%$$

Die Konzentration der Produktion ist demnach höher als die der Arbeits-
kräfte, wie es in der Regel zu erwarten ist.

Aufgabe 4

1. Merkmalserscheinung = Produktion, Bezugserscheinung = Zahl der
Arbeiter.

Erzeugnis A:

$$45\,000 \text{ M} : 100 \text{ M/m}^2 = 450 \text{ m}^2$$

Der gesuchte Durchschnitt für das erste Erzeugnis berechnet sich in folgender Weise:

$$450 \text{ m}^2 : 5 \text{ Arbeiter} = 90 \text{ m}^2/\text{Arbeiter}$$

In analoger Weise erhalten Sie die folgenden Durchschnitte für die übrigen Erzeugnisse.

Erzeugnis	B	C	D
$\bar{x}$	200 Stück/Arbeiter	500 kg/Arbeiter	100 t/Arbeiter

2. Merkmalserscheinung = Kosten, Bezugserscheinung = Zahl der Arbeiter.

3.
$$\bar{x} = 200\,000 \text{ M} : 20 \text{ Arbeiter} = 10\,000 \text{ M/Arbeiter}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i}{\sum n_i}$$

Aufgabe 5

Die Bevölkerungsdichte betrug 158 Personen/km².

Aufgabe 6

1. Merkmalserscheinung = Einzelhandelsumsatz, Bezugserscheinung = Verkaufsraumfläche.

Die Bezugserscheinung ist nicht gegeben. Die Merkmalserscheinung liegt nur in prozentualen Anteilen vor.

Zur Lösung wird angenommen, daß die 6 Verkaufsstellen nur einen Umsatz von insgesamt 100 Mark haben. Dann können die Prozentzahlen als absolute Zahlen aufgefaßt werden.

Die Gesamtgröße der Merkmalserscheinung ist demnach 100. Die Verkaufsraumfläche erhält man durch Division des Umsatzes durch den Umsatz/m² innerhalb jeder Verkaufsstelle.

Unter Beachtung des Umsatzes je m² Verkaufsraumfläche erhält man:

$$\bar{x} = \frac{100}{62,6} = 1597 \text{ Mark/m}^2$$

2. m = Einzelhandelsumsatz, x = Einzelhandelsumsatz pro m² der Verkaufsraumfläche.

Der prozentuale Anteil wird dargestellt durch:

$$\frac{m_i}{\sum m_i} \cdot 100$$

Demnach ist der Durchschnitt:

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{m_i}{\sum m_i} \cdot 100}{\sum \frac{m_i}{\sum m_i} \cdot \frac{100}{x_i}} = \frac{\frac{100}{\sum m_i} \sum m_i}{\frac{100}{\sum m_i} \sum \frac{m_i}{x_i}} = \frac{\sum m_i}{\sum \frac{m_i}{x_i}}$$

Wird schließlich noch $x_i = m_i : n_i$ gesetzt, so ist die Identität mit der Definition des Durchschnitts nachgewiesen.

3. Der Einfluß der Struktur wird ausgeschaltet, wenn alle Einheiten eine gleichgroße Bezugsgröße aufweisen. Der Einfachheit halber wird 1 als feste Bezugsgröße angenommen. Der so berechnete Durchschnitt unterscheidet sich vom tatsächlichen Durchschnitt nur durch die für alle gleiche Struktur der Bezugsgröße. Man erhält folgendes Ergebnis:

$$\frac{6600 \text{ Mark Umsatz/m}^2}{6} = 1100 \text{ M Umsatz/m}^2$$

Struktureinfluß: $1597 - 1100 = + 497 \text{ M}$

Aufgabe 7

1. $\bar{x} = 44472 \text{ Mark/Beschäftigter}$

$$2. \bar{x} = \frac{\sum m_i}{\sum \frac{m_i}{x_i}} = \frac{\sum m_i}{\sum n_i} \quad \text{da } n_i = \frac{m_i}{x_i}$$

Aufgabe 8

1. Merkmalserscheinung = Kosten, Bezugserscheinung = Warenumsatz. Die Merkmalserscheinung ist nicht gegeben. Sie errechnet sich, indem der Kostensatz mit dem Warenumsatz multipliziert wird. Zum Beispiel für das Auslieferungslager A:

$$10 \cdot 8,0 \cdot 600 = 48000 \text{ Mark.}$$

Der Kostensatz muß deshalb mit 10 multipliziert werden, weil er sich auf 100 Mark Warenumsatz bezieht.

$$\bar{x} = \frac{172000}{2000000} \cdot 100 = 8,6 \text{ Mark Kosten pro 100 Mark Warenumsatz}$$

2. Der Einfluß der Struktur wird ausgeschaltet, wenn alle Einheiten eine gleichgroße Bezugsgröße aufweisen. Der Einfachheit halber wird 1 als feste Bezugsgröße angenommen. Der so berechnete Durchschnitt unter-

scheidet sich vom tatsächlichen Durchschnitt nur durch die für alle gleiche Struktur der Bezugsgröße. Man erhält:

$$\frac{41,5 \text{ M Kosten}/100 \text{ M Umsatz}}{5 \text{ Auslieferungslager}} = 8,30 \text{ M Kosten}/100 \text{ M Umsatz}$$

$$\text{Struktureinfluß: } 8,60 - 8,30 = + 0,30 \text{ M}$$

Aufgabe 9

Der durchschnittliche Arbeitsaufwand je 1000 Mark Warenproduktion beträgt 27,82 Stunden.

Aufgabe 10

Arbeitstabelle

Brigade I				Brigade II			
	Stück/ Stunde	Stunden	Stück		Stück/ Stunde	Stück	Stunden
1	2	3	4 = 2 × 3	5	6	7	8 = 7 : 6
A	20	25	500	V	16	1280	80
B	27	10	270	W	9	1800	200
C	26	15	390	X	12	720	60
D	28	20	560	Y	12	1200	100
E	16	5	80	Z	10	1600	160
Insgesamt		75	1800			6600	600

1. Durchschnittliche Arbeitsproduktivität:

Merkmalerscheinung = Produktion in Stück,
Bezugserscheinung = Arbeitsaufwand in Stunden.

Brigade I:

Die Merkmalserscheinung ist nicht gegeben. Man erhält sie aus der jeweiligen Norm, der Normerfüllung und der Zahl der Stunden des einzelnen Arbeiters:

$$\text{Stück} = \text{Norm} \times \text{Normerfüllung} \times \text{Stunden},$$

zum Beispiel Arbeiter B: $20 \times 1,35 \times 10 = 270$ Stück.

Insgesamt ergibt sich:

$$\bar{x} = \frac{1800}{75} = 24 \text{ Stück/Stunde.}$$

Durchschnittliche Normerfüllung:

$$\bar{x} = \frac{24}{20} 100 = 120\%.$$

Brigade II:

Die Bezugserscheinung ist nicht gegeben. Man erhält sie aus der jeweiligen Norm, der Normerfüllung und der Stückzahl der einzelnen Arbeiter:

$$\text{Stunden} = \frac{\text{Norm} \times \text{Normerfüllung}}{\text{Stückzahl}}$$

zum Beispiel für Arbeiter V:

$$\frac{1280}{10 \times 1,60} = 80 \text{ Stunden.}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\bar{x} = \frac{6600}{600} = 11 \text{ Stück/Stunde.}$$

Durchschnittliche Normerfüllung:

$$\bar{x} = \frac{11}{10} = 110\%$$

Die Berechnungsformen waren für
Brigade I = arithmetisches Mittel.
Brigade II = harmonisches Mittel.

2.

d = Abweichung der Arbeitsproduktivität eines Arbeiters vom Durchschnitt.

d' = Abweichung der Normerfüllung eines Arbeiters vom Durchschnitt.

n = Arbeitszeit in Stunden.

Arbeiter	d	d · n		d'	d' · n	
		+	-		+	-
0	1	2	3	4	5	6
A	- 4		100	- 20		500
B	+ 3	30		+ 15	150	
C	+ 2	30		+ 10	150	
D	+ 4	80		+ 20	400	
E	- 8		40	- 40		200
insgesamt		140	140		700	700

In beiden Fällen ist die Summe der negativen Abweichungen gleich der der positiven Abweichungen, das heißt, die Summe der Abweichungen vom Durchschnitt ist gleich Null.

3. Für jeden Arbeiter wird 1 Stunde als Arbeitszeit angenommen. Bei einer anderen festen Stundenzahl ergeben sich die gleichen Durchschnitte. Dabei ist die durchschnittliche Stückzahl je Stunde in

$$\text{Brigade I: } 117 : 5 = 23,4,$$

$$\text{Brigade II: } 59 : 5 = 11,8$$

und die durchschnittliche Normerfüllung in

$$\text{Brigade I: } 23,4 : 20 \text{ oder } 117 : 100 \text{ oder } 585\% : 5 = 117\%$$

$$\text{Brigade II: } 11,8 : 10 \text{ oder } 59 : 50 \text{ oder } 590\% : 5 = 118\%$$

4. Die Differenz zwischen der tatsächlichen Stückzahl je Stunde und der Stückzahl je Stunde bei gleicher Arbeitszeit ist auf die Wirkung der unterschiedlich großen Arbeitszeit der einzelnen Arbeiter zurückzuführen. Es ergeben sich folgende Ergebnisse:

	Norm	Leistungsniveau	Struktureffekt	Normerfüllung
Brigade I	20	23,4	+ 0,6	= 24,0
Brigade II	10	11,8	- 0,8	= 11,0
<i>Prozentual</i>				
Brigade I	100%	117%	× 102,6% (24 : 23,4)	= 120,0%
Brigade II	100%	118%	× 93,2% (11,0 : 11,8)	= 110,0%

Im Beispiel liegt die Brigade II in ihrem Leistungsniveau höher als Brigade I. Der Struktureffekt ist jedoch bei Brigade I positiv und bei Brigade II negativ. In Brigade I haben demnach die besseren Arbeiter einen größeren und in Brigade II einen kleineren Anteil an der Arbeitszeit. Deshalb erreicht Brigade I eine höhere durchschnittliche Normerfüllung.

Aufgabe 11

I. 1. $49250 : 100 = 492,50$ M pro Arbeiter,

2. $376 : 1916 = 0,196$ bzw. 19,6 Stunden pro 100 Stück,

3. $1325 : 100 = 13,25$ Stunden pro Arbeiter,

4. $\frac{100}{5 \cdot 19,6} = 102,04\%$ (oder 1916 effektive Stunden dividiert durch 1880 Normstunden = 101,9%)

$$\text{II. 1. } \frac{1950}{4} = 487,5 \text{ M Lohn/Arbeiter}$$

$$\text{Struktureinfluß: } 492,50 - 487,50 = + 5,00 \text{ M}$$

$$\text{3. } \frac{57}{4} = 14,25 \text{ Stunden pro Arbeiter}$$

$$\text{Struktureinfluß: } 13,25 - 14,25 = - 1,00 \text{ Stunden}$$

$$\text{4. } \frac{450}{4} = 112,5\% \text{ Normerfüllung pro Arbeiter}$$

$$\text{Struktureinfluß: } 102,04 - 112,5 = - 10,46\%$$

Aufgabe 12

1. Merkmalserscheinung = Verlademenge, Bezugserscheinung = Stunden. Beide Erscheinungen liegen nicht in der gewünschten Form vor. Die Ermittlung der fehlenden Größen ist in der Arbeitstabelle vorgenommen worden.

Verladestelle	Verladezeit in Stunden	Verlademenge in t	Verladeleistung in t/Stunde
0	$4 = 1 : 2$	$5 = 1 : 3$	$6 = 5 : 4$
1	200	8000	40,0
2	300	18750	62,5
	500	26750	102,5

$$\bar{x} = 26750 \text{ t} : 500 \text{ Stunden} = 53,5 \text{ t/Stunde}$$

2. Für jede Verladestelle wird 1 Stunde als Arbeitszeit angenommen. Bei einer anderen festen Stundenzahl ergeben sich die gleichen Durchschnitte.

$$\bar{x} = 102,5 \text{ t/Stunde} : 2 \text{ Verladestellen} = 51,25 \text{ t/Stunde je Verladestelle}$$

Aufgabe 13

Die durchschnittliche Fangleistung beträgt je Einsatztag 8,636 t.

Aufgabe 14

Aus dem Text läßt sich die folgende Arbeitstabelle zusammenstellen:

Unternehmen	Zahl der Busse	Gesamtfahrzeit in Std.	Gesamtstrecke in km	Beförderte Personen
0	1	2	3	4
1	5	25	1 250	150
2	10	40	3 200	250
3	10	40	2 400	380
4	2	8	600	51
5	3	12	600	105
Σ	30	125	8 050	936

Die Lösungen:

1. Durchschnittliche Fahrzeit:

$$\bar{x} = 125 \text{ Std.} : 30 \text{ ROB} = 4 \text{ Std. } 10 \text{ Min./ROB,}$$

durchschnittliche Reiseweite:

$$\bar{x} = 8050 \text{ km} : 30 \text{ ROB} = 268,3 \text{ km/ROB,}$$

durchschnittliche Personenzahl:

$$\bar{x} = 936 \text{ Pers.} : 30 \text{ ROB} = 31,2 \text{ Pers./ROB,}$$

durchschnittliche Geschwindigkeit:

$$\bar{x} = 8050 \text{ km} : 125 \text{ Std.} = 64,4 \text{ km/h}$$

2. Ausnutzung der Platzkapazität:

$$\frac{936}{990} \cdot 100 = 94,5\%$$

Aufgabe 15

Die gesuchten Durchschnittswerte für die ausgewählten Bezirke insgesamt lauten gerundet:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. 323 Leser/Bibliothek | 4. 323 Ausleihen/100 Bücher |
| 2. 2013 Bücher/Bibliothek | 5. 2016 Ausleihen/100 Leser |
| 3. 6505 Ausleihen/Bibliothek | 6. 624 Bücher/100 Leser |

Aufgabe 16

1. Merkmalserscheinung = Elektroenergieverbrauch

Bezugserscheinung = industrielle Bruttoproduktion

Die Merkmalserscheinung liegt nur in prozentualen Anteilen vor. Wir nehmen an, daß die Industriebetriebe insgesamt nur einen Verbrauch von 100,0 kWh haben. (Durch Rundung lautet der gegebene Wert 100,1) Dann können die Prozentzahlen als absolute Werte aufgefaßt werden. Die industrielle Bruttoproduktion erhält man durch Division des Energie-

verbrauchs durch den Energieverbrauch/1000 M industrielle Bruttoproduktion innerhalb der Industriebereiche.

$$\bar{x} = \frac{100}{0,2443} = 409 \text{ kWh/1000 M industrielle Bruttoproduktion}$$

2. In analoger Weise erhalten Sie den durchschnittlichen Elektroenergieverbrauch mit

$$22821 \text{ kWh/Produktionsarbeiter}$$

3. Siehe Lösung Aufgabe 6

Aufgabe 17

$$\bar{x} = 165,2 \text{ Stunden je Monat}$$

Aufgabe 18

Durchschnittlicher Schweinebesatz im Bezirk: 137 Schweine/100 ha LN; Anbauflächenstruktur im Bezirk: VEG 10%, LPG 90%.

Ein Vergleich der Leistungen in beiden Kreisen muß zunächst von einer gleichen Anbauflächenstruktur ausgehen, wobei als Maßstab die Bezirksstruktur verwendet werden soll.

Man erhält folgende Durchschnitte:

$$\text{Kreis A: } 0,10 \cdot 210 + 0,9 \cdot 135 = 142,5 \text{ Schweine/100 ha LN}$$

$$\text{Kreis B: } 0,10 \cdot 190 + 0,9 \cdot 125 = 131,5 \text{ Schweine/100 ha LN,}$$

das heißt, die Leistungen im Kreis A liegen um durchschnittlich 5,5 Schweine je 100 ha über dem Bezirksdurchschnitt, im Kreis B dagegen um durchschnittlich 5,5 Schweine je 100 ha darunter.

Die Differenz zwischen 142,5 und dem tatsächlichen Durchschnitt von 136,5 im Kreis A ist nur durch die Abweichung der Anbauflächenstruktur des Kreises gegenüber der Bezirksstruktur hervorgerufen worden. Das gleiche gilt analog für Kreis B. Drückt man den Einfluß der beiden Faktoren zahlenmäßig aus, so erhält man:

	Bezirk	Leistungsfaktor bei gleicher Anbaustruktur		Struktur-faktor	tatsächlich
	0	1	2	3	4
Kreis A					
absolut	137,0	+ 5,5	142,5	− 6,0	136,5
relativ	100%	+ 4,0%	104,0%	− 4,2%	99,6%
Kreis B					
absolut	137,0	− 5,5	131,5	+ 6,5	138,0
relativ	100%	− 4,0%	96,0%	+ 4,9%	100,7%

Beide Faktoren zusammengefaßt:

$$\text{Kreis A: } 1,040 \cdot 0,958 = 0,996$$

$$\text{Kreis B: } 0,960 \cdot 1,049 = 1,007$$

In Worten ausgedrückt:

1. Kreis A liegt bei gleicher Anbaustruktur um 4,0 Prozent über dem Bezirksdurchschnitt. Durch die Anbaustruktur des Kreises liegt der tatsächliche Durchschnitt jedoch 4,2 Prozent darunter und damit insgesamt 0,4 Prozent niedriger als der Bezirksdurchschnitt.

(Anbauverhältnis: 2 Prozent VEG, 98 Prozent LPG)

2. Kreis B liegt bei gleicher Anbaustruktur 4,0 Prozent unter dem Bezirksdurchschnitt. Durch die Anbaustruktur des Kreises liegt der tatsächliche Durchschnitt jedoch 4,9 Prozent darüber und damit insgesamt 0,7 Prozent höher als der Bezirksdurchschnitt. (Anbauverhältnis: 20 Prozent VEG, 80 Prozent LPG).

Aufgabe 19

1. a) 29,55 dt/ha

b) 28,21 dt/ha

2. 6446000 t

3. a) — 2,01 dt/ha

b) 93,2 % des DDR-Niveaus oder
6,8 % unter dem Niveau der DDR

Aufgabe 20

Merkmalserscheinung = Arbeitszeit

Bezugerscheinung = Stück

Zunächst wird die gesamte Arbeitszeit gleichmäßig auf die Arbeiter verteilt. Die weitere Lösung ist aus der Tabelle und der Rechnung zu ersehen.

Arbeiter	Arbeitszeit in Stunden	Arbeitsleistung in Stück/Stunde	Produktion in Stück
0	1	2	3
1	25	9,0	225
2	25	8,0	200
Σ	50	$\times$	425

$$\bar{x} = \frac{50 \text{ Stunden}}{425 \text{ Stück}} = \frac{50 \text{ Stunden}}{4,25 \cdot 100 \text{ Stück}} = 11,76 \text{ Std./100 Stück}$$

Aufgabe 21

$$\bar{x} = 28,62 \text{ M/Stunde}$$

Aufgabe 22

Aus den vorliegenden Angaben stellen wir uns folgende Tabelle zusammen (Sp. 1 und 2)

Haushaltstyp	Anteil des Typs der Gesamtzahl der Haushalte in %	Durchschnittliche Personenzahl je Haushalt	Personenzahl
0	1	2	3
Mehrpersonen-haushalte	70,75	3,1	219,325
Einpersonen-haushalte	29,25	1,0	29,250
Insgesamt	100,00	$\bar{x}$	248,575

Da die absolute Zahl der Haushalte nicht vorliegt, nehmen wir die prozentualen Angaben über die Haushalte als Grundlage zur Berechnung der Personenzahl in den beiden Gruppen. Die in der Spalte 3 ausgewiesene Personenzahl trägt demnach fiktiven Charakter.

Der gesuchte Durchschnitt ist

$$\bar{x} = 2,5 \text{ Personen/Haushalt}$$

$$(248,575 : 100 = 2,48575)$$

Aufgabe 23

1. $\bar{x} \approx 26943 \text{ Mark/Wohnung}$
2. Falls in der Wirklichkeit der durchschnittliche Baupreis in den einzelnen geschlossenen Gruppen mit der Gruppenmitte übereinstimmt und auch der für die offenen Flügelgruppen angenommene Durchschnitt tatsächlich für diese Gruppen vorliegt.

Aufgabe 24

$$1. \text{ Es ist } H_a = x_u + (x_o - x_u) \frac{S_a - \sum_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k}.$$

H_n = Häufigkeitswert der unteren a% aller Haushalte,
 x_u = untere Gruppengrenze der Gruppe, in der H_a liegt,
 x_0 = obere Gruppengrenze der Gruppe, in der H_a liegt,
 n_k = Zahl der Einheiten der Gruppe, in der H_a liegt,

$$S_a = \frac{a}{100} \cdot \text{Gesamtzahl aller Einheiten.}$$

Man benötigt zunächst die Größen S_a und $\sum_1^{k-1} n_i$

$$\text{Es ist } S_5 = \frac{5}{100} \cdot 1000 = 50,$$

$$S_{10} = 100,$$

$$S_{30} = 300,$$

$$S_{50} = 500,$$

$$S_{90} = 900,$$

$$S_{95} = 950.$$

Die kumulierten Werte $\sum_1^{k-1} n_i$ betragen:

Einkommen M	1959		1962	
	n_i	$\sum_1^{k-1} n_i$	n_i	$\sum_1^{k-1} n_i$
0	1	2	3	4
unter 400	35	—	20	—
400 bis unter 600	215	35	160	20
600 bis unter 800	320	250	270	180
800 bis unter 1000	250	570	300	450
1000 bis unter 1200	120	820	150	750
1200 bis unter 1500	50	940	80	900
1500 und darüber	10	990	20	980

Die Häufigkeitswerte sind dann:

1959	analog dazu 1962
$H_5 = 400 + 200 \frac{50 - 35}{215} = 414 \text{ M}$	438 M
$H_{10} = 400 + 200 \frac{100 - 35}{215} = 460 \text{ M}$	500 M
$H_{30} = 600 + 200 \frac{300 - 250}{320} = 631 \text{ M}$	689 M
$H_{50} = 600 + 200 \frac{500 - 250}{320} = 756 \text{ M}$	833 M

1959	analog dazu 1962
$H_{90} = 1000 + 200 \frac{900 - 820}{120} = 1133 \text{ M}$	1200 M
$H_{95} = 1200 + 300 \frac{950 - 940}{50} = 1260 \text{ M}$	1388 M

Die Aussage kann wie folgt am Beispiel von H_{50} , Zentralwert, formuliert werden.

Während 1959 50% aller Haushalte ein Haushaltsnettoeinkommen von höchstens 756 M besaßen, war dieses 1962 bereits auf 833 M gestiegen.

2. Der häufigste Wert liegt 1959 zwischen 600,— und 800,— M und 1962 zwischen 800,— und 1000,— M.

Bei Beachtung der Häufigkeit in den angrenzenden Gruppen erhält man eine Verbesserung des Resultats durch die Beziehung

$$d = (x_o - x_u) \cdot \frac{n_k - n_{k-1}}{(n_k - n_{k-1}) + (n_k - n_{k+1})}$$

d = Abstand des häufigsten Wertes gegenüber x_u .

Dann ist

$$1959 \quad d = 200 \cdot \frac{320 - 215}{(320 - 215) + (320 - 250)} = 120,$$

$$1962 \quad d = 200 \cdot \frac{300 - 270}{(300 - 270) + (300 - 150)} = 33,$$

und der häufigste Wert beträgt im Jahre 1959 720 M,

und im Jahre 1962 833 M.

Die häufigsten Werte liegen also in der Nähe bzw. genau beim jeweiligen Zentralwert.

3.

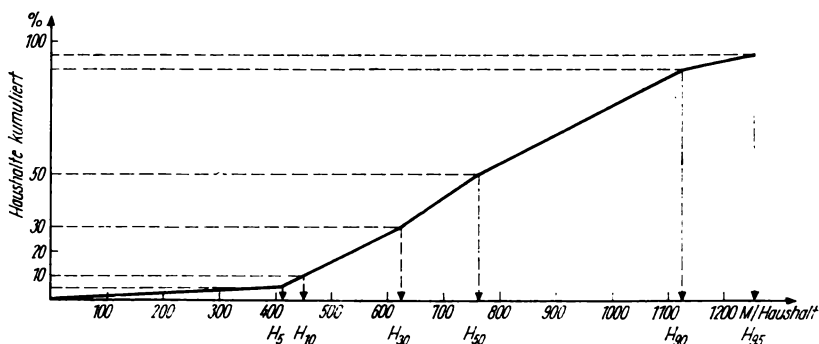


Abb. 2 Summenkurve der Haushalte nach Haushaltseinkommen

Aufgabe 25

$$1. \quad S' = 70 : \frac{150 + 80}{2} = 61\%.$$

Für die Lösung der Fragen 2. bis 6. wird die folgende Arbeitstabelle aufgestellt:

LPG	n	m	x	a · n	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{a \cdot n}$	$\frac{\Delta}{m}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8
I	1000	1250	125					
II	800	1200	150					
III	1000	1000	100					
IV	650	910	140					
V	550	440	80					
insg.	4000	4800		4800	840	21,0	17,5%	—
negativ	1550	1440		1860	— 420	27,1	22,6%	29,2%
positiv	2450	3360		2940	+ 420	17,1	14,3	—
$\frac{4800}{4000} \cdot 100 = 120 \text{ Schweine/ha} = \text{durchschnittlicher Schweinebesatz}$								
Bezugsgröße a, also $a = \bar{x}$								

2. Negative absolute Abweichung: 27,1 Stück/100 ha.

positive absolute Abweichung: 17,1 Stück/100 ha.

Während die unter dem Gesamtdurchschnitt liegenden Genossenschaften ihren Schweinebesatz durchschnittlich um 27,1 Stück/ha erhöhen müßten, um den Gesamtdurchschnitt zu erreichen, liegen die „positiven“ Genossenschaften mit 17,1 Stück/ha über dem Gesamtdurchschnitt.

3. Die „negativen“ Genossenschaften müssen ihren Schweinebestand um 29,2 Prozent erhöhen, wenn sie den Gesamtdurchschnitt erreichen wollen.

4. Während die „negativen“ Genossenschaften mit 22,6 Prozent unter dem Gesamtdurchschnitt liegen, haben die „positiven“ Genossenschaften diesen Gesamtdurchschnitt mit 14,3 Prozent überschritten.

5. Die 5 Genossenschaften insgesamt weichen vom Gesamtdurchschnitt nach oben oder nach unten um 21,0 Stück/100 ha oder um 17,5 Prozent ab.

6. Zur Beantwortung dieser Frage wird die unterschiedlich große Anbaufläche der LPG ausgeschaltet, das heißt, es werden die Streuungsmaßnahmen unter Annahme gleichgroßer Flächen (Fläche jeweils gleich 100 ha)

berechnet. Es ergibt sich folgende Arbeitstabelle, in der nur die Summen angegeben sind:

Gruppe	Zahl der LPG	Schweine- bestand	durch- schnitt- licher Besatz	$a \cdot n$	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{a \cdot n}$
0	1	2	3	4	5	6	7
Insges..	5	595	119	595	116	23,2	19,5‰
negativ	2	180		238	58		

Bei beiden durchschnittlichen Streuungsgrößen der Gesamtheit ergeben sich größere Streuungsmaße, statt 21,0 erhält man 23,2 Stück je 100 ha und statt 17,5 Prozent nun 19,5 Prozent relative Streuung. Offensichtlich haben daher die näher am Durchschnitt 120 liegenden LPG ein größeres Gewicht hinsichtlich der Anbaufläche als die weiter entfernt vom Durchschnitt liegenden LPG.

Aufgabe 26

1. 10,7 m³/t

2. 2,9%

Aufgabe 27

1.

Arbeitstabelle Brigade I

Arbeiter	n	m	x	$a \cdot n$	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{a \cdot n}$	$\frac{\Delta}{m}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	25	500	20					
B	10	270	27					
C	15	390	26					
D	20	560	28					
E	5	80	16					
insges.	75	1800	$\bar{x} = 24$	1800	280	3,73	15,6‰	×
negativ	30	580		720	140	4,67	19,4‰	24,1‰
positiv	45	1220		1080	140	3,11	13,0‰	×

Der Durchschnitt von 24 Stück/Stunde ist die Bezugsgröße,

Arbeitstabelle Brigade II

Arbeiter	n	x	a · n	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{a \cdot n}$	$\frac{\Delta}{m}$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	80	1280	16					
W	200	1800	9					
X	60	720	12					
Y	100	1200	12					
Z	160	1600	10					
insges.	600	6600		6600	1120	1,87	17,0%	×
negativ	360	3400		3960	560	1,56	14,1%	16,5%
positiv	240	3200		2640	560	2,33	21,2%	×

Der Durchschnitt von 11 Stück/Stunde ist die Bezugsgröße. Die nachfolgend angegebenen Streuungskennziffern beziehen sich auf die Brigade I, die in Klammern gesetzten Zahlen auf die Brigade II.

- Die 5 Arbeiter der Brigade I weichen hinsichtlich ihrer Arbeitsproduktivität nach oben oder nach unten um 3,73 Stück/Std. (1,87) oder 15,6 Prozent (17 Prozent) vom Durchschnitt ab.
- Die unter dem Durchschnitt liegenden Arbeiter müssen ihre Produktivität durchschnittlich um 4,67 Stück/Std. (1,56) erhöhen, wenn sie den Durchschnitt der Brigade erreichen wollen. Sie müßten ihr Produktionsvolumen um 24,1 Prozent (16,5 Prozent) erhöhen, um den Brigadedurchschnitt zu erreichen. Diese Arbeiter liegen durchschnittlich um 19,4 Prozent (14,1 Prozent) unter dem Brigadedurchschnitt.
- Die über dem Durchschnitt liegenden Arbeiter sind durchschnittlich um 3,11 Stück/Std. (2,33) über dem Brigadedurchschnitt oder um 13 Prozent (21,2 Prozent).

2.

	Arbeiter	n	m	a · n	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{a \cdot n}$	$\frac{\Delta}{m}$
	0	1	2	3	4	5	6	7
Brig. I	negativ	5	80	100	20	4,0	20,0%	25,0%
	positiv	45	1220	900	320	7,1	35,6%	×
Brig II	negativ	200	1800	2000	200	1,0	10,0%	11,1%
	positiv	240	3200	2400	800	3,3	33,3%	×

Das Besondere bei dieser Aufgabe ist, daß die Werte $a \cdot n$ Planwerte darstellen, da a eine Norm ist.

- a) Der „negative“ Arbeiter liegt mit 4 Stück/Std. (1,0) oder um 20 Prozent (10 Prozent) unter der Norm von 20 Stück/Std. (10). Er muß die Zahl seiner gefertigten Stücke um 25 Prozent (11,1 Prozent) erhöhen, wenn er die Norm wenigstens mit 100 Prozent erfüllen will.
- b) Die „positiven“ Arbeiter haben durchschnittlich ihre Norm mit 7,1 Stück/Std. (3,3) oder um 35,6 Prozent (33,3 Prozent) übererfüllt.

Diese Aufgabe zeigt, daß Streuungskennziffern unter der Bedingung, daß die Bezugsgröße ein Planwert ist, den Charakter von Planerfüllungszahlen haben.

Aufgabe 28

Kennziffer	Insgesamt	Negativ	Positiv
durchschnittliche absolute Abweichung	0,74 M/100 M	0,67 M/100 M	0,82 M/100 M
durchschnittliche relative Abweichung ($\sum \Delta : \sum \bar{x}_n$)	8,6 ‰	7,8 ‰	9,5 ‰
durchschnittliche relative Abweichung ($\sum \Delta : \sum n$)	×	7,2 ‰	×

Schwankungsbreite: 3,0 M/100 M

Aufgabe 29

1. Absolute Schwankungsbreite:

$$S = 12,00 - 8,32 = 3,68.$$

Relative Schwankungsbreite:

$$S' = \frac{3,68}{0,5 \cdot (12,00 + 8,32)} \cdot 100 = 36,2\%$$

2. Lösungstabelle

Abweichung	n	m	a · n	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{a \cdot n}$	$\frac{\Delta}{m}$
	1	2	3	4	5	6	7
negativ	6000	65700	60000	5700	0,95	9,5 ‰	8,7 ‰
positiv	4000	34300	40000	5700	1,43	14,3 ‰	×

Zufällig stimmt hier die Materialverbrauchsnorm mit dem durchschnittlichen Materialverbrauch pro Stück überein. In den Spalten 5 bis 7 stehen die Streuungskennziffern. Hinsichtlich ihrer Aussagen vergleiche man die Lösungen mit der Aufgabe 28, Teil 2.

3. Es werden die gleichen Streuungskennziffern wie im 2. Teil der Aufgabe berechnet, nur unter Beachtung der geplanten Stückzahlen. Diese Planzahlen erhält man, wenn die effektiven Stückzahlen durch die Prozentsätze der Produktionsplanerfüllung dividiert werden, zum Beispiel für die Abteilung A

$$\frac{2500}{0,01 \cdot 250} = 1000 \text{ Stück (Plan)}$$

Lösungstabelle

Abteilungen	Stückzahl (Plan) n	m	x	a · n	$\bar{A}$	$\frac{A}{n}$	$\frac{A}{a \cdot n}$	$\frac{A}{m}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1000	8320	8,32					
B	1000	10200	10,20					
C	3000	36000	12,00					
D	3000	27000	9,00					
E	2000	22200	11,10					
Insges.	10000	103720						
negativ	6000	68400		40000	8400	1,40	14,0%	12,3%
positiv	4000	35320		60000	4680	1,17	11,7%	

Die Streuungskennziffern auf der Basis der geplanten Stückzahlen weichen von den auf der Basis der effektiven Stückzahlen berechneten ab. Die Unterschiede sind ausschließlich auf die verschiedene Verteilung der Produktion auf die Abteilungen zurückzuführen.

Folgende Analyse ist anzufertigen (vgl. auch Washkau, Gewogene und ungewogene Streuungskennziffern, in: Stat. Praxis 1963, Heft 3.):

- a) Für die über der Materialverbrauchsnorm liegenden Abteilungen ergibt sich folgendes:

Hätten die Abteilungen B, C und E (das sind die Abteilungen, die ihre Norm überschritten haben) die geplanten Stückzahlen genau eingehalten, so lägen sie durchschnittlich um 1,4 kg/Stück über der Materialverbrauchsnorm von 10 kg/Stück. Tatsächlich liegen sie aber durchschnittlich nur um 0,95 kg/Stück über der Norm, so daß sich die Abweichung von der geplanten Verteilung der Produktion auf die Abteilungen ökonomisch günstig ausgewirkt hat. Diese Abweichung bewirkte eine Verringerung der Normüberschreitung von 1,40 – 0,95 = 0,45 kg/Stück. An dieser günstigen Auswirkung sind in erster Linie

die Abteilungen B und E beteiligt, die bei hohen Produktionsplanerfüllungen die geringsten Überschreitungen der Materialverbrauchsnorm aufzuweisen haben.

Analog sind die Aussagen für die beiden anderen Streuungskennziffern. Durch den günstigen Einfluß, den die Abweichung der effektiven von der geplanten Verteilung der Produktion ausübte, liegen die Abteilungen durchschnittlich nicht 14 Prozent, sondern nur 9,5 Prozent über der Norm. Das hat gleichzeitig zur Folge, daß sie, um die Norm insgesamt zu 100 Prozent zu erfüllen, ihren Materialverbrauch nicht um 12,3 Prozent, sondern nur um 8,7 Prozent verringern müssen.

- b) Für die unter der Materialverbrauchsnorm liegenden Abteilungen ergibt sich folgendes:

Hätten die Abteilungen A und D ihren Produktionsplan jeweils mit genau 100 Prozent erfüllt, so lägen sie durchschnittlich um 1,17 kg/Stück oder um 11,7 Prozent unter der Norm. Da sie aber eine unterschiedliche Planerfüllung aufweisen und damit die geplante Produktionsverteilung auf die Abteilungen nicht eingehalten wurde, liegen sie um 1,43 kg/Stück oder 14,3 Prozent unter der Norm. Auch hier wirkte sich die genannte Abweichung ökonomisch günstig aus. Das ist ausschließlich der Abteilung A zu danken, die bei einer sehr großen Produktionsplanübererfüllung die größte Normunterschreitung aufweist. Die Abweichung der effektiven von den geplanten Stückzahlen hat demnach die Normunterschreitung um $1,43 - 1,17 = 0,26$ kg/Stück oder $14,3 - 11,7 = 2,6$ Prozent vergrößert.

Aufgabe 30

1. 130 kcal/kWh
2. 4,4%
3. 500 kcal/kWh

Aufgabe 31

1. Gefragt wird nach der relativen Abweichung, bezogen auf den tatsächlichen Ertrag. Der tatsächliche Ertrag liegt 10 Prozent unter dem zu erreichenden Ertrag, das heißt, er beträgt 90 Prozent des zu erreichenden Ertrages. Um von 90 Prozent auf 100 Prozent zu steigern, muß um 11,1 Prozent erhöht werden.
2. Der Republikdurchschnitt beträgt $270 : 0,90 = 300$ dt/ha. Die absolute Abweichung ist $270 - 300 = -30$ dt/ha.
3. Gegeben war die relative Abweichung, bezogen auf die Bezugsbasis a bzw. auf den Durchschnitt. Gesucht wurde die relative Abweichung,

bezogen auf die tatsächliche Bezugsgröße x . (Im Beispiel war x der Durchschnitt der negativen Einheiten.)

Es ist

$$d' = \frac{d}{a}, d^* = \frac{d}{x} \text{ und } d = x - a.$$

Dann ist

$$d^* = \frac{d' a}{x} = \frac{d' a}{a + d} = \frac{d'}{1 + d'}.$$

Analog dazu ergibt sich:

$$d' = \frac{d^*}{1 - d^*}$$

Aufgabe 32

- | | |
|-------------|---------------|
| 1. 250 kg/h | 2. 138,6 kg/h |
| 3. 7,96% | 4. 8,65% |
| 5. 33,975 t | |

Aufgabe 33

- 4,2%
- 195 kg/Kuh
- 5,3%

Aufgabe 34

- δ_1 bzw. δ_2 sei die absolute Abweichung von F_1 bzw. F_2 .

$$\begin{aligned} \delta_2 - \delta_1 &= \frac{\sum (x_i - F_2)n_i}{\sum n_i} - \frac{\sum (x_i - F_1)n_i}{\sum n_i} \\ &= \frac{\sum x_i n_i - F_2 \sum n_i - \sum x_i n_i + F_1 \sum n_i}{\sum n_i} \\ &= F_1 - F_2 \\ \delta_2 &= \delta_1 + (F_1 - F_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnet man den Durchschnitt aller unter F_1 liegenden Einheiten mit D^- und die durchschnittliche relative Abweichung, bezogen auf F mit δ^* , so ergibt sich unter Beachtung von (1):

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{\delta_1 + F_1 - F_2}{F_2} - \frac{\delta_1}{F_1}$$

$$= \frac{\delta_1(F_1 - F_2) + F_1(F_1 - F_2)}{F_2 \cdot F_1}.$$

Da $\delta_1 + F_1 = D^-$ ist, ergibt sich

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{D^-(F_1 - F_2)}{F_2 F_1}$$

und

$$\delta_2 = \delta_1 + D^- \left(\frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_1} \right). \quad (2)$$

Bezeichnet man die durchschnittliche relative Abweichung, bezogen auf die tatsächliche Bezugserscheinung D^- mit δ^* , so ist

$$\delta_2^* - \delta_1^* = \frac{\delta_1 + F_1 - F_2}{D^-} - \frac{\delta_1}{D^-}$$

$$\delta_2^* = \delta_1^* + \frac{F_1 - F_2}{D^-}. \quad (3)$$

Die Beziehungen (1) bis (3) gelten analog für die oberhalb von F_1 und F liegenden Einheiten.

2. Zur Berechnung für F_2 ist angegeben:

Abweichungen	n	m	D	F · n	Δ	$\frac{\Delta}{n}$	$\frac{\Delta}{F \cdot n}$	$\frac{\Delta}{D \cdot n}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8
negative	6000	65700	10,95	60600	5100	0,85	8,42%	7,8%
positive	4000	34300	8,575	40400	6100	1,525	15,1%	×

Die Streuungskennziffern sind bereits für $F_1 = 10$ in Aufgabe 29, Teil 2 berechnet worden. Die analogen Kennziffern für $F_2 = 10,1$ dann:

$$(1) \quad \delta_2 = 0,95 + 10,0 - 10,1 = 0,85,$$

$$(2) \quad \delta_2 = 0,095 + 10,95 \left(\frac{1}{10,1} - \frac{1}{10} \right) = 0,0842 \text{ bzw. } 8,42\%,$$

$$(3) \quad \delta_2^* = 0,087 + \frac{10 - 10,1}{10,95} = 0,078 \text{ bzw. } 7,8\%,$$

für die ökonomisch positiven Abteilungen erhält man analog die Größen

$$\delta_2 = 1,525 \quad \delta_2^* = 15,1\%.$$

Aufgabe 35

$$\delta' = 2,94 : 12,0 = 24,5\%$$

Aufgabe 36

Die Differenz zwischen den x -Werten beträgt jeweils 36.

Der mittlere Wert ist 165. Es wird daher mit der Transformation $x_a = 165$ und $c = 36$ gerechnet:

$$x_i = 165 + 36 \cdot x_i' \text{ bzw. } x_i' = \frac{x_i - 165}{36}$$

Arbeitstabelle:

n_i	x_i	$x_i - 165$	$\frac{x_i - 165}{36}$	$x_i' n_i$	$x_i'^2$	$x_i'^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7
4	57	- 108	- 3	- 12	9	36
9	93	- 72	- 2	- 18	4	36
14	129	- 36	- 1	- 14	1	14
19	165	0	0	0	0	0
24	201	36	1	24	1	24
20	237	72	2	40	4	80
10	273	108	3	30	9	90
100				+ 50		280

$$\bar{x}' = \frac{50}{100} = 0,5.$$

$$\bar{x} = 165 + 0,5 \cdot 36 = 183.$$

Es ist

$$s_{\bar{x}}^2 = s_{x_a}^2 - (x_a - \bar{x})^2 \text{ und } s_{x_a}^2 = c^2 \cdot x^2,$$

Demnach ist

$$s_{\bar{x}}^2 = 36^2 \cdot \frac{280}{100} - (183 - 165)^2$$

$$s_{\bar{x}}^2 = 36^2 \cdot 2,8 - 18^2 = 18^2(4 \cdot 2,8 - 1)$$

$$s_{\bar{x}}^2 = 3304,8 \text{ und } s_{\bar{x}} = 57,5$$

Aufgabe 37

Für die Berechnung benötigt man folgende *Arbeitstabelle*:

Zahl der Arbeiter		Stückzahl		Stück/Arbeiter		$\bar{n}_i x$		A	
n_i		m_i		x_2					
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	3	2	3	2				
15	2	60	6	4	3				

Zahl der Arbeiter n_i	Stückzahl m_i		Stück/Arbeiter x_i		$n_i \bar{x}$	Δ			
10	2	50	8	5	4				
15	32	90	160	6	5				
1	2	7	12	7	6				
	2		14		7				
	1		8		8				
Insgesamt:									
42	42	210	210	(5)	(5)	210	210	34	18
Negativ:									
16	5	63	16			80	25	17	9

$\frac{A}{n}$	$\frac{A}{nx}$		$x_i - \bar{x}$		$(x_i - \bar{x})^2$		$(x_i - \bar{x})^2 n_i$		
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
				- 2	- 3	4	9	4	9
				- 1	- 2	1	4	15	8
				0	- 1	0	1	0	2
				1	0	1	0	15	0
				2	1	4	1	4	2
					2		4		8
					3		9		9
Insgesamt:									
0,81	0,43	0,162	0,08					38	38

Die Ergebnisse lauten:	Abteilung	
	A	B
1. durchschnittliche absolute Abweichung δ	0,81	0,43
2. durchschnittliche relative Abweichung δ' in %	16,2	8,6
3. Standardabweichung $s(\sqrt{38 : 42})$	0,95	0,95
4. Variationskoeffizient $V = \frac{s}{\bar{x}}$ in %	19,0	19,0

Beide Abteilungen haben zwar eine gleichgroße Standardabweichung bzw. einen gleichgroßen Variationskoeffizienten, weisen jedoch erhebliche Unterschiede hinsichtlich der einfachen Streuungsmaße auf. Die ökonomische Situation ist daher in beiden Brigaden offensichtlich unterschiedlich.

Aufgabe 38

Die Formel der Varianz bei gruppiertem Material lautet:

$$s^2 = \frac{\sum N_i s_i^2}{\sum N_i} + \frac{\sum N_i (\bar{x} - \bar{x}_i)^2}{\sum N_i}$$

$\bar{x}_i$ = Durchschnitt der i-ten Gruppe,

N_i = Zahl der Einheiten der i-ten Gruppe,

s_i^2 = Varianz der i-ten Gruppe.

Arbeitstabelle

Wohngebiet	Haushalte N_i	Personen	Personen je Haushalt $\bar{x}_i$	$\bar{x} - \bar{x}_i$	$(\bar{x} - \bar{x}_i)^2$
0	1	2	3	4	5
A	4000	11200	2,8	− 0,2	0,04
B	2500	8000	3,2	0,2	0,04
C	4500	11700	2,6	− 0,4	0,16
D	5000	15500	3,1	0,1	0,01
E	4000	13600	3,4	0,4	0,16
Insgesamt	20000	60000	(3,0)	×	×

	$(\bar{x} - \bar{x}_i)^2 N_i$	S_i	S_i^2	$s_i^2 N_i$
	6	7	8	9
A	160	1,6	2,56	10240
B	100	1,5	2,25	5625
C	720	1,4	1,96	8820
D	50	1,7	2,89	14450
E	640	1,6	2,56	10240
Insgesamt	1670	×	×	49375

Also ist

$$s^2 = \frac{49375}{20000} + \frac{1670}{20000}$$

$$s^2 = 2,55$$

$$s = 1,60 \text{ Pers./Haushalt}$$

Aufgabe 39

Analog zur Aufgabe 38 erhält man:

$$\bar{x} = 850 \text{ M,}$$

$$s^2 = 73623,$$

$$s = 271 \text{ M.}$$

Aufgabe 40

Die Varianz bei alternativen Merkmalen ist $p(1 - p)$, wobei p der Anteil eines der beiden Merkmale innerhalb der Gesamtheit ist. Für die Berechnung wird jeweils der Anteil der größeren Gruppe ermittelt. Man erhält dann für das Jahr 1953:

Frage	insgesamt	in der Gruppe	p	$p(1 - p)$	$\sqrt{p(1 - p)}$
0	1	2	3	4	5
1	304859	264815	0,869	0,114	0,338
2	304859	288397	0,946	0,051	0,226
3	264815	251863	0,951	0,047	0,216
4	40044	36534	0,912	0,080	0,283

Analog ergeben sich die entsprechenden Größen für 1960.
Die Ergebnisse sind dann:

Frage	1953	1960
0	1	2
1	0,338	0,320
2	0,226	0,231
3	0,216	0,222
4	0,283	0,283

Aufgabe 41

1. $s = 0,498$
2. $s = 0,499$
3. $s = 0,489$
4. $s = 0,489$

Aufgabe 42

1. Es ist

$$\bar{x} = h_a a + h_b b.$$

Da die Summe der relativen Häufigkeiten gleich 100 Prozent oder 1 ist, ist

$$1 = h_a + h_b.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Größen h_a und h_b ermitteln:

$$h_a = \frac{b - \bar{x}}{b - a} \text{ und } h_b = \frac{\bar{x} - a}{b - a}.$$

Die Varianz σ^2 ist dann:

$$\sigma^2 = h_a(\bar{x} - a)^2 + h_b(b - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \left\{ (b - \bar{x})(\bar{x} - a)^2 + (\bar{x} - a)(b - \bar{x})^2 \right\}$$

$$\sigma^2 = (\bar{x} - a)(b - \bar{x}).$$

2. Da es sich bei der Gleichverteilung um eine stetige Funktion handelt, treten an Stelle der Summengrößen notwendigerweise Integrale.

Dann ist

$$\sigma^2 = \frac{\int_a^b (x - \bar{x})^2 f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x^2 f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} - \bar{x}^2.$$

Zur Vereinfachung der Berechnung wurden die konstanten Häufigkeiten $f_1(x)$ und $f_2(x)$ so gewählt, daß das

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{x}} f_1(x) dx + \int_{\bar{x}}^b f_2(x) dx = 1$$

ist.

Es ist daher

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \bar{x}^2$$

zu berechnen.

$$\sigma^2 = \int_a^{\bar{x}} x^2 f_1(x) dx + \int_{\bar{x}}^b x^2 f_2(x) dx - \bar{x}^2$$

oder

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{b - \bar{x}}{(b - a)(\bar{x} - a)} \cdot \frac{1}{3} (\bar{x}^3 - a^3) + \\ &+ \frac{\bar{x} - a}{(b - a)(b - \bar{x})} \cdot \frac{1}{3} (b^3 - \bar{x}^3) - \bar{x}^2 \\ \sigma^2 &= \frac{1}{3(b - a)} \left\{ (b - \bar{x})(\bar{x}^2 + a\bar{x} + a^2) + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{x} - a)(\bar{x}^2 + b\bar{x} + b^2) - 3(b - a)\bar{x}^2 \right\} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{3} \left\{ b\bar{x} + a\bar{x} - \bar{x}^2 - ab \right\} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{x} - a)(b - \bar{x})}{3}.$$

Das heißt, die Varianz der Gleichverteilung ist dreimal so klein wie die entsprechende Varianz der 2-Punkte-Verteilung bei gegebenen a , b und $\bar{x}$.

Diese Tatsache ist für die Abschätzung des Fehlerbereiches und die Festlegung des Umfanges von Stichprobenuntersuchungen von Bedeutung.

Aufgabe 43

$$s = 0,245 \text{ M/Karte}$$

Aufgabe 44

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} &= \frac{\sum x_i^2 n_i - 2\bar{x} \sum x_i n_i + \bar{x}^2 \sum n_i}{\sum n_i} \\ &= \frac{\sum x_i^2 n_i}{\sum n_i} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{\sum x_i^2 n_i}{\sum n_i} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 45

Die Berechnung wird nach der Formel:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{\sum n_i} - \bar{x}^2$$

durchgeführt.

An Stelle von x_i sind die natürlichen Zahlen k und von n_i die Größen $P(k)$ einzusetzen.

Es ist $\sum P(k) = 1$ und $\bar{x}$ gleich $n \cdot p$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_0^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} - n^2 p^2 \\ \sigma^2 &= np \cdot \sum_1^n k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 \\ \sigma^2 &= np \left\{ \sum_1^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + \sum_1^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} \right. \\ &\quad \left. p^{k-1} (1-p)^{n-k} \right\} - n^2 p^2 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = np \{1 + (n-1)p\} - n^2 p^2.$$

Die erste Summe in der Klammer ist gleich $(p + 1 - p)^{n-1}$ oder 1, und die zweite Summe gleich dem Mittelwert der Binomialreihe bis $n - 1$.

Also ist

$$\sigma^2 = np(1 + np - p - np)$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p).$$

Setzt man $1 - p = q$, so ist $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$.

Aufgabe 46

Die Berechnung wird analog zur Aufgabe 45 durchgeführt.

Es ist

$$\sum_0^{\infty} P(k) = 1 \text{ und } \bar{x} = \lambda.$$

Dann ist

$$\sigma^2 = \sum_0^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2$$

$$\sigma^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_1^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2$$

$$\sigma^2 = \lambda e^{-\lambda} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda \sum_2^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \right\} - \lambda^2$$

$$\sigma^2 = \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda} + \lambda \cdot e^{\lambda}) - \lambda^2$$

$$\sigma^2 = \lambda.$$

Die Varianz der Poisson-Verteilung ist also gleich dem Durchschnitt der Verteilung.

Aufgabe 47

1. Durchschnittliches Haushaltsnettoeinkommen:

779,7 M /Haushalt.

Durchschnittliche Haushaltsgröße:

2,82 Personen/Haushalt.

2. Als Gruppierungsmerkmal wird die Haushaltsgröße verwendet. Es gibt 5 Gruppen: 1-, 2-, 3-, 4- und 5-Personenhaushalte. Man berechnet für jede Haushaltsgrößengruppe das durchschnittliche Haushaltsnettoeinkommen je Kopf und vergleicht die beiden Reihen. Folgende Tabelle wird aufgestellt:

Haushaltsgrößen- gruppe in Personen	Zahl der Haushalte	Haushaltsnettoeinkommen in M	
		je Haushalt	pro Person
1	2	3	4
1	5	430	430
2	10	700	350
3	8	860	287
4	6	950	238
5	4	1000	200

Vergleicht man Spalte 1 mit Spalte 4, so zeigt sich, daß mit wachsender Haushaltsgröße das Haushaltsnettoeinkommen pro Kopf sinkt. Es handelt sich demnach um einen gegenläufigen Zusammenhang. In dieser Tabelle wurde zusätzlich noch das Haushaltsnettoeinkommen je Haushalt berechnet, das mit steigender Haushaltsgröße wächst, wo also ein gleichläufiger Zusammenhang besteht.

3.

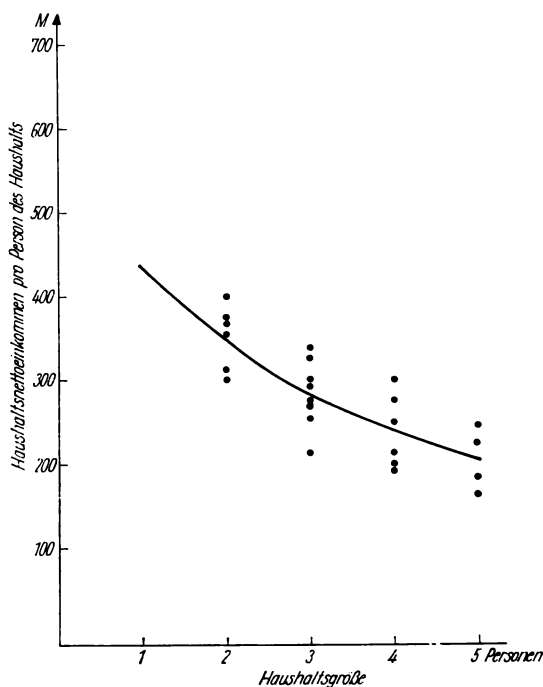


Abb. 3 Streuungs-
diagramm und empirische
Beziehungslinie des
Zusammenhangs
zwischen Haushaltsnetto-
einkommen pro Person
und Haushaltsgröße

4. Man betrachtet die empirische Beziehungslinie (Abbildung 3) und erkennt durch den fallenden, nach unten gewölbten Streckenzug, daß hier ein verzögerter gegenläufiger Zusammenhang vorliegt. Berechnet man außerdem die Differenz des Haushaltsnettoeinkommens einer Gruppe mit dem der nächst niederen, so erhält man folgende Werte:

— , —80, —63, —49, —38,

das heißt, die Abnahme wird kleiner; das weist auf den verzögerten gegenläufigen Zusammenhang hin.

Auf die gleiche Art läßt sich feststellen, daß zwischen der Haushaltsgröße und dem Haushaltsnettoeinkommen ein verzögerter gleichläufiger Zusammenhang existiert.

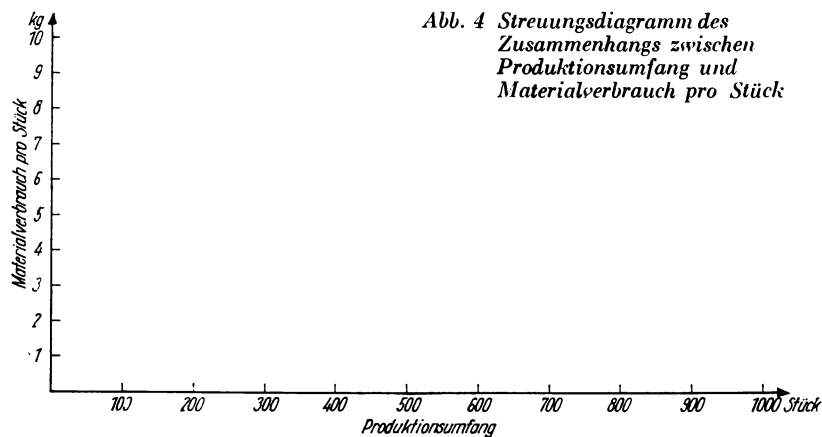
Aufgabe 48

1. Die 20 Betriebe werden nach dem Produktionsumfang und dem Materialverbrauch pro Stück gruppiert. Für das Merkmal Produktionsumfang werden 7 Gruppen mit einer konstanten Gruppenbreite von 100 gebildet. Für das Merkmal Materialverbrauch pro Stück werden 5 Gruppen mit einer Breite von 2 gebildet.

Produktionsumfang	Materialverbrauch pro Stück					Summe
	bis unter 2 kg	2 bis unter 4 kg	4 bis unter 6 kg	6 bis unter 8 kg	8 kg und mehr	
0	1	2	3	4	5	6
600 und mehr	1					1
500 bis unter 600	2					2
400 bis unter 500	1					1
300 bis unter 400		3	1			4
200 bis unter 300		1	3	2		6
100 bis unter 200			1	1	1	3
bis unter 100				2	1	3
Summe	4	4	5	5	2	20

Die Besetzungszahlen laufen von links oben nach rechts unten, das heißt mit wachsendem Produktionsumfang sinkt der Materialverbrauch pro Stück, oder, was dasselbe ist, mit sinkendem Produktionsumfang steigt der Materialverbrauch pro Stück.

2.



Aufgabe 49

Haushaltseinkommen in M	Verbrauch je Haushalt in M								
	bis unter 20	20 bis unter 23	23 bis unter 26	26 bis unter 29	29 bis unter 32	32 bis unter 35	35 bis unter 38	38 und mehr	Summe
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
bis unter 200	3	1							4
200 bis unter 400	1	4							5
400 bis unter 600	1	1	6	2					10
600 bis unter 800		4	10	3	3				20
800 bis unter 1000				1	4				5
1000 bis unter 1200					1	1	2	1	5
1200 und mehr							1		1
Summe	5	10	16	6	8	1	3	1	50

2. (Abb. 5)

Aufgabe 50

Es ist

$$k = \frac{K}{P} = \frac{a P^\alpha}{P} = P^{\alpha-1}$$

Da $0 < \alpha < 1$, folgt

$$k = \frac{a}{P^{1-\alpha}}$$

Aufgabe 51

$$\frac{P}{A} = k \left(\frac{G}{A} \right)^{1-\alpha}$$

Aufgabe 52

Es muß folgende Ungleichheit zwischen den relativen Änderungen (als Differentiale angesetzt) bestehen

$$\frac{dy^*}{y^*} > \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy^*}{dx} > \frac{y^*}{x}$$

$$bx > a + bx$$

$$0 > a$$

Analog lassen sich die Fälle $a \geq 0$ deuten.

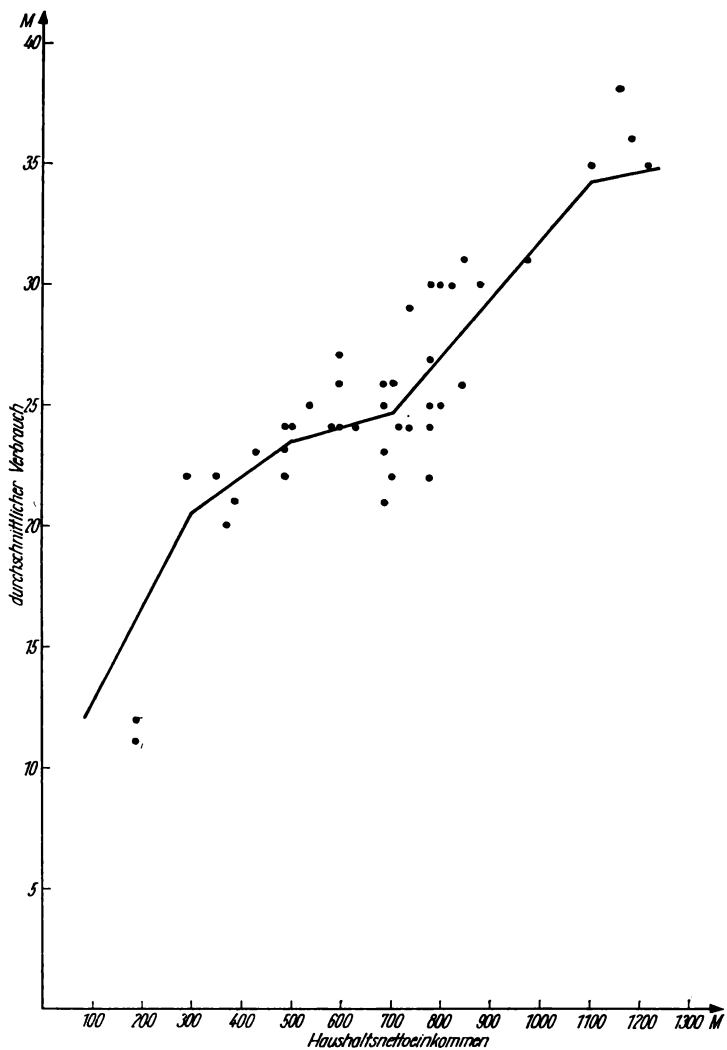


Abb. 5 Streuungsdiagramm und empirische Beziehungslinie des Zusammenhangs zwischen Haushaltsnettoeinkommen und Verbrauch

Aufgabe 53

y^* wächst langsamer als x .

Aufgabe 54

Folgende *Arbeitstabelle* wird aufgestellt:

Abt.	y	x	y · x	x ²	y ²
0	1	2	3	4	5
A	12	100	1200	10000	144
B	13	120	1560	14400	169
C	18	110	1980	12100	324
D	19	115	2185	13225	361
E	20	125	2500	15625	400
F	20	130	2600	16900	400
G	25	125	3125	15625	625
H	30	140	4200	19600	900
I	31	140	4340	19600	961
J	35	150	5250	22500	1225
Σ	223	1255	28940	159575	5509
$\bar{}$	22,3	125,5	2894	15957,5	550,9

Die Funktion lautet $y^* = a_{yx} + b_{yx} \cdot x$

$$b_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad a_{yx} = \bar{y} - b_{yx} \cdot \bar{x}$$

Nach diesen beiden Formeln lassen sich die Parameter und damit die Funktion bestimmen. Die entsprechenden Werte werden der Tabelle entnommen.

$$b_{yx} = \frac{2894 - 22,3 \cdot 125,5}{15957,5 - 125,5^2} = \frac{95,35}{207,25} = 0,46 \quad \frac{1000 \text{ kWh}}{\text{TM}}$$

$$a_{yx} = 22,3 - 0,46 \cdot 125,5 = 22,3 - 57,73 = -35,43$$

$$y^* = -35,43 + 0,46 x$$

Aufgabe 55

$$1. \quad y^* = 3,65 + 0,015 x$$

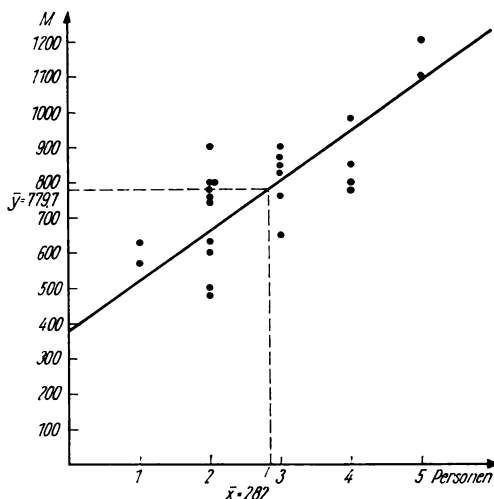
2. Steigt das Einkommen um eine Mark, so wachsen die Ausgaben etwa um 0,015 M.

Aufgabe 56

1. $y^* = 387,92 + 139,02 \cdot x$

2.

Abb. 6 Zusammenhang zwischen Haushaltsnettoeinkommen und Personenzahl im Haushalt



Aufgabe 57

1. $y^* = 5,44 + 1,506 \cdot x$

2. Der Elektroenergieverbrauch setzt sich aus einem produktionsunabhängigen und einem produktionsproportionalen Bestandteil zusammen.

3.

Beziehung	Korrelationskoeffizient	Bestimmtheitsmaß
Verbr.-Grundmittel	0,799	0,638
Verbr.-Produktion	0,953	0,908

Zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten benutzt man die Formel

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$$

Die Werte für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten zwischen dem Elektroenergieverbrauch und dem Grundmittelbestand entnimmt man der Arbeitstabelle aus Aufgabe 54.

$$r_{yx} = \frac{2894 - 125,5 \cdot 22,3}{\sqrt{15957,5 - 125,5^2} \cdot \sqrt{550,9 - 22,3^2}} = 0,799$$

$$r^2_{yx} = B_{yx} = 0,799^2 = 0,638$$

4. Das Bestimmtheitsmaß von 0,638 besagt, daß die Varianz des Elektroenergieverbrauchs zu 63,8 Prozent aus der korrelativen Beziehung zwischen dem Elektroenergieverbrauch und Grundmittelbestand erklärt werden kann. Vergleich der beiden unter 3. angegebenen Bestimmtheitsmaße: Die Varianz des Elektroenergieverbrauchs wird durch seine Abhängigkeit von der Produktion besser erklärt (90,8 Prozent) als durch seine Abhängigkeit vom Grundmittelbestand (63,8 Prozent). Für prognostische Einschätzungen des Elektroenergieverbrauchs eignet sich die Beziehung zwischen Elektroenergieverbrauch und Produktion besser als seine Beziehung zum Grundmittelbestand.

Aufgabe 58

$$r_{yx} = \sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}}$$

$$r^2_{yx} = b_{yx} \cdot b_{xy}$$

$$r^2_{yx} = 0,7 \cdot 1,3 = 0,91 \text{ oder } 91\%$$

Aufgabe 59

Aufgabe	Korrelationskoeffizient	Bestimmtheitsmaß
47	0,75	0,56
55	0,878	0,771

Aufgabe 60

1. Die Potenzfunktion lautet

$$y^* = ax^b \quad a > 0; b > 0; b \neq 1$$

Zur numerischen Bestimmung wird sie logarithmiert

$$\lg y^* = \lg a + b \lg x,$$

so daß $\lg y^*$ linear von $\lg x$ abhängt. Zur Berechnung benutzt man die Formeln

$$b = \frac{\overline{\lg x \cdot \lg y} - \overline{\lg x} \cdot \overline{\lg y}}{[\overline{\lg x}]^2 - \overline{\lg x}^2}$$

$$\lg a = \overline{\lg y} - b \cdot \overline{\lg x}$$

Einkommen = x ; Ausgaben für Eier = y_1 und für Kaffee = y_2 . Dann muß folgende Arbeitstabelle aufgestellt werden:

Haushalt	Einkommen x	Ausgaben für		$\lg x$	$\lg y_1$
		Eier y_1	Kaffee y_2		
0	1	2	3	4	5
1	330	9,9	13,0	2,5185	0,9956
2	400	10,8	15,2	2,6021	1,0334
3	480	11,5	17,1	2,6812	1,0607
4	550	12,0	18,6	2,7404	1,0792
5	600	12,4	19,9	2,7782	1,0934
6	700	12,9	21,7	2,8451	1,1106
7	750	13,1	22,6	2,8751	1,1173
8	850	13,5	24,5	2,9294	1,1303
9	870	13,6	24,5	2,9395	1,1335
10	940	13,8	25,5	2,9731	1,1399
11	1020	14,0	26,5	3,0086	1,1461
12	1030	14,1	26,7	3,0128	1,1492
13	1200	14,2	28,6	3,0792	1,1523
Σ	$\times$	$\times$	$\times$	36,9832	14,3415
$\emptyset$	$\times$	$\times$	$\times$	2,8449	1,1032

$\lg y_2$	$\lg y_1 \cdot \lg x$	$\lg y_2 \cdot \lg x$	$[\lg x]^2$
6	7	8	9
1,1139	2,5074	2,8054	6,3428
1,1818	2,6890	3,0751	6,7709
1,2330	2,8439	3,3059	7,1888
1,2695	2,9574	3,4789	7,5098
1,2989	3,0377	3,6086	7,7184
1,3365	3,1598	3,8025	8,0946
1,3541	3,2123	3,8932	8,2662
1,3892	3,3111	4,0695	8,5814
1,3892	3,3319	4,0836	8,6407
1,4065	3,3890	4,1817	8,8393
1,4232	3,4482	4,2818	9,0517
1,4265	3,4623	4,2978	9,0770
1,4564	3,5482	4,4845	9,4815
17,2787	40,8982	49,3685	105,5631
1,3291	3,1460	3,7976	8,1202

Eier:

$$b = \frac{3,1460 - 1,1032 \cdot 2,8449}{8,1202 - 2,8449^2} = \frac{3,1460 - 3,1385}{8,1201 - 8,0935} = \\ = \frac{0,0075}{0,0267} = 0,2819$$

$$\lg a = 1,1032 - 0,2819 \cdot 2,8449 = 0,3012 =$$

$$a = 2,0008$$

$$y^*_1 = 2,0008 x^{0,2819}$$

2. Kaffee: $y^*_2 = 0,3818 x^{0,6142}$

(Die erforderlichen Ausgangszahlen stehen in der Tabelle auf Seite 121)

3. Der Exponent b der Potenzfunktion drückt das degressive oder progressive Anwachsen aus, je nachdem ob $b < 1$ oder $b > 1$. Demnach verhalten sich die Ausgaben für Eier und die für Kaffee degressiv jeweils zum Einkommen.

Aufgabe 61

1. Gemäß den Voraussetzungen läßt sich der Gesamtverbrauch Y durch eine lineare Funktion darstellen

$$Y = a + bx$$

Dann ist der spezifische Verbrauch

$$\frac{Y}{x} = y$$

und

$$y^* = \frac{a}{x} + b$$

Diese hyperbolische Funktion wird angesetzt.

2. Zur numerischen Bestimmung setzen wir $1/x = z$, so daß

$$y^* = b + az$$

eine lineare Funktion ist. Es muß beachtet werden, daß jetzt mit a der Regressionskoeffizient und mit b das absolute Glied bezeichnet werden. Folgende Formeln kommen zur Anwendung

$$a_{yz} = \frac{\overline{zy} - \bar{z} \cdot \bar{y}}{\bar{z}^2 - \bar{z}^2}$$

$$b_{yz} = \bar{y} - a_{yx} \cdot \bar{z}$$

(z sind die reziproken x -Werte)

Man stellt zweckmäßigerweise folgende *Arbeitstabelle* auf:

Betrieb	x	y	$\frac{1}{x} \cdot 10^3$	y^2	$\frac{10^3}{x} \cdot y$
0	1	2	3	4	5
1	1000	1,7	1,00	2,89	1,70
2	520	1,0	1,92	1,00	1,92
3	70	8,6	14,29	73,96	122,89
4	280	5,1	3,57	26,01	18,21
5	260	4,4	3,85	19,36	16,94
6	340	2,1	2,94	4,41	6,17
7	130	6,0	7,69	36,00	46,14
8	80	7,4	12,50	54,76	92,50
9	220	3,8	4,55	14,44	17,29
10	580	1,3	1,72	1,69	2,24
Σ	$\times$	41,4	54,03	234,52	326,00
$\emptyset$	$\times$	4,14	5,403	23,452	32,6

$\left[\frac{10^3}{x}\right]^2$	$f(x)$	$ y - f(x) $	$[y - f(x)]^2$
6	7	8	9
1,00	1,80	0,10	0,0100
3,69	2,29	1,29	1,6641
204,20	8,86	0,26	0,0676
12,74	3,17	1,93	3,7249
14,82	3,32	1,08	1,1664
8,64	2,83	0,73	0,5329
59,14	5,36	0,64	0,4096
156,25	7,91	0,51	0,2601
20,70	3,69	0,11	0,0121
2,96	2,18	0,88	0,7744
484,14	$\times$	$\times$	8,6221
48,414	$\times$	$\times$	0,8622

In der Tabelle entspricht $\frac{1}{x} \cdot 10^3 = z \cdot 10^3$. Da alle z -Werte mit dem Faktor 10^3 multipliziert sind, bleibt im Nenner der Formel für a_{yx} einmal der Faktor 10^3 erhalten, was später berücksichtigt werden muß.

$$a_{yz} = \frac{32,6 - 4,14 \cdot 5,403}{48,414 - 5,403^2} = \frac{32,6 - 22,4}{48,414 - 29,192} = \frac{10,2}{19,2}$$

Wie eben erwähnt, muß dieser Bruch mit 10^3 multipliziert werden, so daß

$$a_{yz} = \frac{10,2 \cdot 10^3}{19,2} = 531,3$$

Bei der Berechnung von b_{yx} muß darauf geachtet werden, daß aus $\bar{z}$ der Faktor 10^3 eliminiert wird.

$$b_{yz} = 4,14 - 531,3 \cdot 5,403 \cdot 10^{-3} = 1,27$$

$$y^* = 1,27 + \frac{531,3}{x}$$

3.

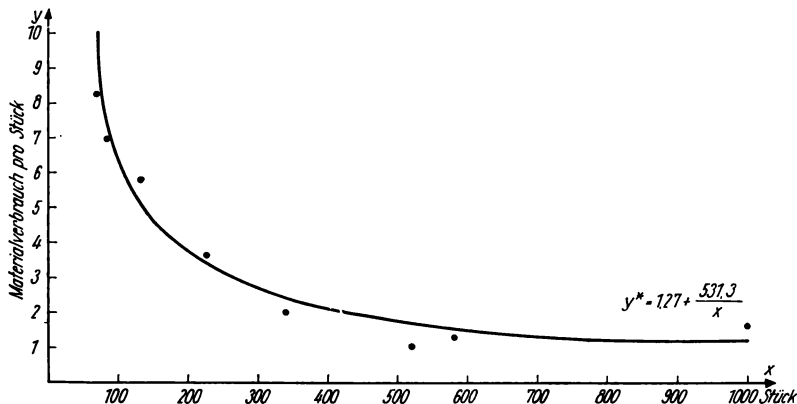


Abb. 7 Abhängigkeit des Materialverbrauchs pro Stück vom Produktionsumfang

4. Bei nichtlinearen Regressionsfunktionen muß das Bestimmtheitsmaß nach der Formel

$$B_{yx} = 1 - \frac{\sum (y_i - y_i^*)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

berechnet werden. Der Zähler des Bruches wird aus Spalte 9 der Tabelle entnommen. Für den Nenner gilt allgemein

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = n(\bar{y}^2 - \bar{y}^2)$$

und für das Beispiel ist der Nenner

$$10(23,452 - 4,14^2) = 63,12$$

$$B_{yx} = 1 - \frac{8,6221}{63,12} = 1 - 0,137 = 0,863 \text{ oder } 86,3 \%$$

Die Varianz des spezifischen Materialverbrauchs wird zu 86,3 Prozent aus seiner korrelativen Abhängigkeit vom Produktionsvolumen erklärt.

Aufgabe 62

$$1. \varphi(x) = \frac{dy^*}{dx} \quad \varepsilon(x) = \varphi(x) \cdot \frac{x}{y^*}$$

$$y^* = b + \frac{a}{x}$$

$$\varphi(x) = -\frac{a}{x^2}$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{a}{x^2} \cdot \frac{x}{b + \frac{a}{x}} = -\frac{a}{x^2} \cdot \frac{x^2}{a + bx} = -\frac{a}{a + bx}$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{a}{a + bx}$$

$$2. \varphi(x) = -\frac{531,3}{x^2} \quad \varepsilon(x) = -\frac{531,3}{531,3 + 1,27x}$$

$$3. \varphi(x = 600) = -\frac{531,3}{600^2} = -\frac{531,3}{360000} = -0,0015$$

Wird die Produktion von $x = 600$ Stück um 1 Stück erhöht, so sinkt der spezifische Materialverbrauch um etwa 0,0015 kg oder um 1,5 gr.

$$\varepsilon(x = 600) = -\frac{531,3}{531,3 + 1,27 \cdot 600} = -0,41\%$$

Wird die Produktion von $x = 600$ um 1% erhöht, so sinkt der spezifische Materialverbrauch etwa um 0,41%.

Aufgabe 63

$$1. \varepsilon(x) = \frac{bx}{a + bx} \quad 2. \varepsilon(x) = \frac{b}{y^*} (y^* \neq 0)$$

$$3. \varepsilon(x) = b \quad 4. \varepsilon(x) = by \cdot \frac{a - y}{a}$$

Aufgabe 64

K_A sind fixe Kosten, so daß sie unelastisch sind, da $\varphi_A(P) = 0$. K_C hat für alle Produktionswerte die gleiche relative Elastizität von 0,5. Man braucht nur K_C und K_B zu vergleichen.

$$\varepsilon_B(P) = \frac{0,7 \cdot P}{100 + 0,7P}; \text{ für } P = 1000$$

$$\varepsilon_B(P = 1000) = \frac{700}{800} = 0,875 \%$$

Für $P = 1000$ gilt $\epsilon_B(P) > \epsilon_C(P)$. Wenn die Kurven der relativen Elastizitätsfunktionen von B und C einen Schnittpunkt haben, kehrt sich die Relation um. Schnittpunktberechnung:

$$\begin{aligned}\epsilon_B(P) &= \epsilon_C(P) \\ \frac{0,7 \cdot P}{100 + 0,7P} &= 0,5\end{aligned}$$

$P_s = 143$ (= Schnittpunktsabzisse)

Bereich	Größenrelation
$0 \leq P < 143$	$\epsilon_C(P) > \epsilon_B(P)$
$143 < P \leq +\infty$	$\epsilon_C(P) < \epsilon_B(P)$

Die Rangordnung lautet, wenn

$$\begin{array}{c|c} 0 \leq P < 143 & 143 < P \leq +\infty \\ K_A; K_B K_C & K_A; K_C K_B \end{array}$$

Aufgabe 65

Ware	relative Elastizitätsfunktionen
A	$\frac{0,015x}{3,65 + 0,015x}$
Eier	0,2819
Kaffee	0,6142

Die Ausgaben für Kaffee sind für alle x -Werte im Bereich $0 < x < +\infty$ elastischer als die für Eier, da die Kurven der beiden entsprechenden relativen Elastizitätsfunktionen sich nicht schneiden (verlaufen parallel zur Abzissenachse).

Durch entsprechende Schnittpunktberechnungen kommt man zu folgenden Ergebnissen.

Intervall	Reihenfolge der Ausgabenelastizität
$0 < x < 95,52$	A; Eier; Kaffee
$95,52 < x < 387,39$	Eier; A; Kaffee
$387,39 < x < +\infty$	Eier; Kaffee; A

Für ein Einkommen von $x = 95,52$ M gilt: Ausgaben für Ware A und Eier sind in gleichem Maße elastisch, die für Kaffee sind elastischer als die anderen.

Für ein Einkommen von $x = 387,39$ M gilt: Ausgaben für Ware A und Kaffee sind gleichermaßen elastisch, während die für Eier weniger elastisch sind als die anderen.

Aufgabe 66

1. x_1 = Elektroenergieverbrauch; x_2 = Produktion von A und x_3 = Produktion von B. Folgende Arbeitstabelle wird aufgestellt.

Abt.	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	12	2	3	24	36	6	4	9	144
B	14	4	2	56	28	8	16	4	196
C	11	3	1	33	11	3	9	1	121
D	15	5	3	75	45	15	25	9	225
E	14	2	2	28	28	4	4	4	196
F	6	2	1	12	6	2	4	1	36
Summe	72	18	12	228	154	38	62	28	918
$\bar{0}$	12	3	2	38	25,67	6,33	10,33	4,67	153

Allgemein lautet die Funktion

$$x_1^* = a + b_{12.3} x_2 + b_{13.2} x_3$$

Zur Berechnung der partiellen Regressionskoeffizienten benutzt man die Formel

$$b_{ij} = (-1)^j \frac{D_{1j}}{D_{11}} \cdot \frac{s_1}{s_j},$$

wobei die D_{1j} und D_{11} Unterdeterminanten der Korrelationsdeterminante D sind. Man berechnet deshalb zuerst die Korrelationsdeterminante D

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$

Die r_{ij} werden berechnet nach

$$r_{ij} = \frac{\overline{x_i x_j} - \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j}{s_i \cdot s_j}$$

und die s_i nach

$$s_i = \sqrt{\overline{x_i^2} - \bar{x}_i^2}$$

$$r_{12} = \frac{38 - 12 \cdot 3}{\sqrt{153 - 12^2} \cdot \sqrt{10,33 - 3^2}} = \frac{38 - 36}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{4,33}}$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 1,15} = 0,58$$

Analog werden berechnet

$$r_{13} = 0,68 \quad r_{23} = 0,35$$

Dann ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0,58 & 0,68 \\ 0,58 & 1 & 0,35 \\ 0,68 & 0,35 & 1 \end{vmatrix}$$

Aus D werden die Unterdeterminanten D_{11} , D_{12} und D_{13} berechnet

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0,35 \\ 0,35 & 1 \end{vmatrix} = 0,88 \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 0,58 & 0,35 \\ 0,68 & 1 \end{vmatrix} = 0,34$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 0,58 & 1 \\ 0,68 & 0,35 \end{vmatrix} = -0,48$$

Die einzelnen Standardabweichungen sind

$$s_1 = 3; \quad s_2 = 1,15; \quad s_3 = 0,82$$

$$b_{12.3} = (-1)^2 \frac{0,34}{0,88} \cdot \frac{3}{1,15} = 0,39 \cdot \frac{3}{1,15} = 1,02$$

$$b_{13.2} = (-1)^3 \frac{-0,48}{0,88} \cdot \frac{3}{0,82} = 0,55 \cdot \frac{3}{0,82} = 2,01$$

Der Parameter a wird berechnet nach

$$a = \bar{x}_1 - b_{12.3}\bar{x}_2 - b_{13.2}\bar{x}_3$$

$$a = 12 - 1,02 \cdot 3 - 2,01 \cdot 2 = 4,92$$

$$x_1^* = 4,92 + 1,02x_2 + 2,01x_3$$

2. Die Einflußintensität wird mit Hilfe der normierten partiellen Regressionskoeffizienten $\beta_{12.3}$ und $\beta_{13.2}$ eingeschätzt.

$$\beta_{1j} = (-1)^j \frac{D_{1j}}{D_{11}}$$

$$\beta_{12.3} = (-1)^2 \frac{0,34}{0,88} = 0,39$$

$$\beta_{13.2} = (-1)^3 \frac{-0,48}{0,88} = 0,55$$

Es ist also

$$\beta_{13.2} > \beta_{12.3},$$

woraus geschlossen wird, daß die Produktion von B (x_3) auf den Verbrauch einen größeren Einfluß hat als die von A (x_2).

3. Die partiellen Korrelationskoeffizienten werden wie folgt berechnet

$$r_{1.23} = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11} \cdot D_{22}}} = \frac{0,34}{\sqrt{0,88 \cdot 0,54}} = \frac{0,34}{0,69} = 0,49$$

$$r_{1.32} = \frac{D_{13}}{\sqrt{D_{11} \cdot D_{33}}} = \frac{-0,48}{\sqrt{0,88 \cdot 0,66}} = \frac{-0,48}{0,69} = -0,62$$

Die Determinanten D_{22} und D_{33} sind

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0,68 \\ 0,68 & 1 \end{vmatrix} = 0,54$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0,58 \\ 0,58 & 1 \end{vmatrix} = 0,66$$

Da dem partiellen Korrelationskoeffizienten das Vorzeichen seines entsprechenden partiellen Regressionskoeffizienten zugeordnet wird, sind die Ergebnisse

$$r_{12.3} = 0,49 \quad \text{und} \quad r_{13.2} = 0,62$$

zum Vergleich

$$r_{12} = 0,58 \quad \text{und} \quad r_{13} = 0,68$$

Die einfachen Korrelationskoeffizienten sind jeweils größer als die partiellen, weil bei den ersteren noch Einflüsse anderer Ursachen zum Ausdruck kommen, bei $r_{12} = 0,58$ u. a. der Einfluß von x_3 bzw. bei $r_{13} = 0,68$ u. a. der von x_2 . Bei $r_{12.3} = 0,49$ ist der Einfluß von x_3 dann eliminiert und analog bei $r_{13.2} = 0,62$ der von x_2 .

Das multiple Bestimmtheitsmaß errechnet sich nach

$$B_{1.23} = \beta_{12.3} r_{12} + \beta_{13.2} r_{13}$$

also

$$B_{1.23} = 0,39 \cdot 0,58 + 0,55 \cdot 0,68 = 0,60 \text{ oder } 60\%$$

Demnach wird die Varianz des Elektroenergieverbrauchs zu 60% aus seiner korrelativen Abhängigkeit von der Produktion der Erzeugnisse A und B erklärt.

Aufgabe 67

$$1. \quad x_1^* = 3,15 + 0,026x_2 + 1,42x_3$$

$$2. \quad \beta_{12.3} = 0,065 \quad \beta_{13.2} = 0,899$$

$$\beta_{12.3} < \beta_{13.2}$$

Die Produktion hat einen größeren Einfluß als der Grundmittelbestand auf den Materialverbrauch.

$$3. \quad r_{12.3} = 0,125 \quad r_{13.2} = 0,865$$

$$B_{1.23} = 0,91$$

Aufgabe 68

Das Vorzeichen der Koeffizienten ist hierbei ohne Bedeutung

$$x_4; \quad x_2 \text{ und } x_3$$

Aufgabe 69

1. Die Reihenfolge ist x_3 ; x_4 und x_2
2. $x_1^* = 70,526 + 0,7 x_2 + 2,89x_3 + 0,364x_4$
 $x_1^*(x_2 = 50; x_3 = 10; x_4 = \text{konstant} = \bar{x}_4) = 134,79$

Aufgabe 70

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 0,3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Nach } \beta_{1j} = (-1)^j \frac{D_{1j}}{D_{11}}$$

ist

$$\begin{aligned} \beta_{12,3} &= 0,286 \text{ und } \beta_{13,2} = 0,714 \\ B_{1,23} &= \beta_{12,3} \cdot r_{12} + \beta_{13,2} \cdot r_{13} \\ &= 0,286 \cdot 0,5 + 0,714 \cdot 0,8 = 0,714 \end{aligned}$$

Aufgabe 71

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}$$

$$b_{12} = (-1)^2 \frac{D_{12}}{D_{11}} \cdot \frac{s_1}{s_2} = \frac{r_{21}}{r_{22}} \cdot \frac{s_1}{s_2} = r_{12} \frac{s_1}{s_2}$$

denn $r_{ij} = r_{ji}$ und $r_{ii} = 1$

$$\beta_{12} = (-1)^2 \frac{D_{12}}{D_{11}} = \frac{r_{21}}{r_{22}} = r_{12},$$

das heißt, im Fall der einfachen linearen Regressionsfunktion ist der normierte Regressionskoeffizient gleich dem einfachen linearen Korrelationskoeffizienten.

Aufgabe 72

Δ ist allgemein

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$$

mit

$$S_{ij} = \sum (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \text{ für } i \neq j$$

und

$$S_{ii} = \sum (x_i - \bar{x}_i)^2 \text{ für } i = j$$

Dann sind

$$r_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii} \cdot S_{jj}}} \text{ für alle } i \text{ und } j$$

die Elemente der Korrelationsdeterminante.

1. Schritt: Man bildet die Werte $-S_{ii}$ für alle i , d.h.

$$\sqrt{S_{11}} = \sqrt{241} = 15,5$$

$$\sqrt{S_{22}} = \sqrt{825000} = 908$$

$$\sqrt{S_{33}} = \sqrt{14} = 3,75$$

2. Schritt: Man multipliziert Δ mit $\frac{1}{\sqrt{S_{ii}}}$, indem die i -te Zeile mit diesem

Faktor multipliziert wird. Dabei ist $i = 1, 2, 3$. Anschließend verfährt man auf die gleiche Art mit den Spalten von Δ .

$$= \begin{vmatrix} 241 & 12150 & 30 \\ 15,5 & 15,5 & 15,5 \\ 12150 & 825000 & 2800 \\ 908 & 908 & 908 \\ 30 & 2800 & 14 \\ 3,75 & 3,75 & 3,75 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 241 & 12150 & 30 \\ 15,5 \cdot 15,5 & 15,5 \cdot 908 & 15,5 \cdot 3,75 \\ 12150 & 825000 & 2800 \\ 15,5 \cdot 908 & 908 \cdot 908 & 908 \cdot 3,75 \\ 30 & 2800 & 14 \\ 15,5 \cdot 3,75 & 3,75 \cdot 908 & 3,75 \cdot 3,75 \end{vmatrix}$$

$$, D = \begin{vmatrix} 1 & 0,86 & 0,52 \\ 0,86 & 1 & 0,82 \\ 0,52 & 0,82 & 1 \end{vmatrix}$$

Dies ist die Korrelationsdeterminante. Die Elemente in der Hauptdiagonale müssen 1 sein.

Aufgabe 73

Bei der Lösung wird davon ausgegangen, daß jeder Stichtagsbestand insgesamt 30 Tage (= 1 Monat) repräsentiert, und zwar vom Stichtag gesehen 15 Tage davor und danach. Demzufolge sind die Anfangs- und Endwerte gegebenenfalls nur zum Teil für den Beobachtungszeitraum repräsentativ (so ist der Wert vom 1.1. nur zu 50 Prozent repräsentativ für den Beobachtungszeitraum, die 15 Tage davor liegen im vergangenen Jahr).

Die zwischen den beiden zeitlichen Extremwerten erhobenen Daten müssen voll in die Berechnung eingehen, da auch die durch sie vertretenen Zeiträume voll im Beobachtungszeitraum liegen. Die Anfangs- und Endwerte müssen entsprechend ihrer Repräsentation anteilmäßig einbezogen werden.

Werden die Stichtagsbestände allgemein mit $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$ angegeben, wobei n die Zahl der Zeitperioden (hier die Zahl der Monate), m die Zahl der Zeitabschnitte einer Zeitperiode (hier Zahl der Tage im Monat) und b die Differenz zwischen dem 1. des Monats und dem Stichtag bezeichnet, dann erhält man den durchschnittlichen Monatsbestand D :

$$D = \frac{(1/2 + b/m)y_1 + y_2 + \dots + y_n + (1/2 - b/m)y_{n+1}}{n}$$

Es ist demnach

$$D_1 = \frac{1/2 \cdot 100 + 120 + \dots + 115 + 1/2 \cdot 120}{12} = 113,9$$

$$D_2 = \frac{(1/2 + 6/30) 100 + 118 + \dots + 120 + (1/2 - 6/30) 100}{12} = 113,7$$

$$D_3 = \frac{(1/2 + 15/30) 108 + 112 + \dots + 120 + (1/2 - 15/30) 115}{12} = 113,6$$

Aufgabe 74

$$D = \frac{24207}{30} = 806,9 \text{ Rinder}$$

Aufgabe 75

1. Für die einzelnen Waren erhält man nach der Formel $i = \frac{y_1}{y_0}$ folgenden

Index:

A	B	C	D	E	F
1,000	1,167	0,971	0,911	0,943	1,0095

Die entsprechenden Prozentzahlen erhält man durch Multiplikation mit 100.

$$2.a) \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{119530}{126400} = 0,9456 \text{ oder } 94,56 \%$$

$$b) \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{222494}{237130} = 0,9383 \text{ oder } 93,83\%$$

3. Die Differenz zwischen Zähler und Nenner des jeweiligen Preisindex stellt die absolute Einsparung, hervorgerufen durch die Preissenkung, dar. Bei der Differenz bei 2a) = - 6870 M handelt es sich um eine mögliche Einsparung, da die Veränderung der Verbrauchsstruktur noch nicht berücksichtigt wurde. Die Differenz 2b) = - 14636 M hingegen weist die Einsparung unter Zugrundelegung der im Berichtszeitraum geltenden Verbrauchsstruktur aus.

4. Die beiden in Teil 2 der Aufgabe berechneten Preisindizes sind gleich,

- a) wenn der Preis jeder Ware sich vom Basis- zum Berichtszeitraum um den gleichen Prozentsatz verändert. Dann ist p_1 dem Wert von p_0 direkt proportional und

$$p_1 = c_1 \cdot p_0$$

wobei c_1 ein Proportionalitätsfaktor ist. $c_1 = 1$ bedeutet, daß keine Preisveränderung eingetreten ist.

Man setzt den obigen Ausdruck für p_1 in die beiden Indexformeln ein. Dann ist

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum c_1 p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = c_1$$

und

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum c_1 p_0 q_1}{\sum p_0 q_1} = c_1.$$

- b) wenn der mengenmäßige Verbrauch jeder Ware sich vom Basis- zum Berichtszeitraum um den gleichen Prozentsatz verändert. Dann ist q_1 dem Wert von q_0 direkt proportional und

$$q_1 = c_0 \cdot q_0$$

wobei c_0 ein Proportionalitätsfaktor ist. $c_0 = 1$ bedeutet, daß keine Verbrauchsänderung eingetreten ist.

Zum Beweis setzt man den Ausdruck für q_1 in die Indexformel ein und erhält

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 c_0 q_0}{\sum p_0 c_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}.$$

- c) Mathematisch besteht folgende Beziehung zwischen den beiden Indizes:

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} : \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = 1 + r \cdot V_P \cdot V_Q,$$

wobei

r = Korrelationskoeffizient zwischen den Größen $p_1 : p_0$ und $q_1 : q_0$,

V_P = Variationskoeffizient der Größen $p_1 : p_0$,

V_Q = Variationskoeffizient der Größen $q_1 : q_0$.

Betrachtet man die unter a) und b) angegebenen Bedingungen, so erkennt man, daß in beiden Fällen der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung gleich Null ist:

Bedingung 1: Es ist $p_1 : p_0 = c_1$, das heißt, alle Abweichungen vom Mittelwert P sind gleich Null und V_P ebenfalls gleich Null.

Bedingung 2: Es ist $q_1 : q_0 = c_0$ und damit auch V_Q gleich Null.

In beiden Fällen ist der zweite Summand gleich Null.

5. Der auf der Basis von q_1 berechnete Preisindex weist eine größere durchschnittliche prozentuale Preisveränderung (6,17%) aus als der auf der Basis von q_0 berechnete (5,44%). Demnach müssen prozentual stark im Preis gesenkte Waren bei der Berechnung des Index auf der Basis von q_1 mit einem größeren Gewicht in die Rechnung eingegangen sein als es bei der Berechnung des Index auf der Basis von q_0 der Fall war. Somit hat sich der mengenmäßige Verbrauch hauptsächlich bei im Preis sehr stark gesenkten Waren erhöht, oder, was dasselbe ist, Waren, deren mengenmäßiger Verbrauch sich erhöht hat, waren im Preis besonders stark gesenkt. Es handelt sich vor allem um die Waren D und E, die eine Preissenkung von 8,9% bzw. 5,7% aufzuweisen haben und deren mengenmäßiger Verbrauch um 300% bzw. um 66,7% gestiegen ist.

Die Ausnutzung der Bortkiewicz'schen Beziehung liefert folgende Erkenntnisse:

Es ist

$$V_P = 0,035, V_Q = 0,416, r = -0,562.$$

Die Ursachen der geringen Abweichung liegen also vor allem in der Größe des Korrelationskoeffizienten und der Streuung der Mengenentwicklung. Die negative Größe des Korrelationskoeffizienten zeigt, daß die Mengen sich im Durchschnitt umgekehrt zu den Preisen entwickelt haben. (Siehe auch Erklärung oben.)

Aufgabe 76

1. Die Arbeitsproduktivität stieg auf 102,6% bzw. um 2,6%.
2. Der Aufwand an lebendiger Arbeit für die Produktion der Erzeugnisse insgesamt konnte um 26 Stunden verringert werden.
3. Bei $i = t_1 : t_0$ gilt

$$\frac{\sum q_1 t_1 : i}{\sum q_1 t_1} = \frac{\sum q_1 t_1 : \frac{t_1}{t_0}}{\sum q_1 t_1} = \frac{\sum q_1 t_0}{\sum q_1 t_1}$$

Aufgabe 77

1. Da hinsichtlich der Mengenstruktur nur Angaben für das Berichtsjahr vorliegen (1969), kommt ausschließlich der Index

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

für die Berechnung in Frage. Daß der Umsatz der einzelnen Positionen lediglich in Prozent gegeben ist, ist ohne Belang; er ist in der Summe gleich 100. Den Nenner erhält man, indem für jede Position der Umsatz durch den Preisindex ($p_1 : p_0$) dividiert wird. Allgemein gilt

$$p_1 q_1 : \frac{p_1}{p_0} = p_0 q_1$$

Für die Artikelgruppe „Tafelschokolade“ ergibt sich zum Beispiel:

$$\frac{26}{0,9} = 28,9.$$

Für alle Erzeugnisse, das heißt als Summe des Nenners, zeigt die Berechnung 105,8 also

$$I = \frac{100}{105,8} = 0,945 \text{ oder } 94,5\%.$$

Da die einzelnen Preisindizes nahe bei 1 liegen, weicht der berechnete Wert nicht wesentlich von dem Ergebnis ab, das sich ergibt, wenn der Umsatz mit den Preisindizes multipliziert wird. *Diese Berechnung ist aber methodisch falsch.*

2. Der prozentuale Umsatzanteil sei a und der einfache Preisindex

$$i = p_1 : p_0.$$

Dann ist

$$I = \frac{\sum a_i}{\sum a_i : i}.$$

Der prozentuale Umsatzanteil ist

$$a = \frac{p_1 q_1}{\sum p_1 q_1}$$

Dann ist

$$I = \frac{\sum \frac{p_1 q_1}{\sum p_1 q_1}}{\sum \frac{p_1 q_1}{\sum p_1 q_1} : i} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_1 : i} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Berechnungsform: harmonischer Index.

Aufgabe 78

Infolge der Veränderung des Hektarertrages in den einzelnen Kreisen stieg der Gesamternteertrag um 13733 Tonnen oder um 3,6 Prozent auf 103,6 Prozent.

Aufgabe 79

Es wird folgende *Arbeitstabelle* aufgestellt:

Betrieb	n_0	n_1	y_0	y_1	$n_0 y_0$	$n_1 y_0$	$n_1 y_1$
0	1	2	3	4	5	6	7
A	400	200	90	55	36 000	18 000	11 000
B	200	700	150	100	30 000	105 000	70 000
C	200	300	70	50	14 000	21 000	15 000
Σ	800	1200	310	205	80 000	144 000	96 000
$\emptyset$	—	—	103,3	68,3	—	—	—

1. $I_n = N_1 : N_0 = 1200 : 800 = 1,5$ bzw. 150% , absolut: + 400 Stück

2. $I_m = M_1 : M_0 = 96000 : 80000 = 1,2$ bzw. 120% , absolut: + 16000 M

3. $I_y = (M_1 : N_1) : (M_0 : N_0) = 80 : 100 = 0,8$ bzw. 80% , absolut: — 20 M

4. $I_m^n = \frac{\sum n_1 y_0}{\sum n_0 y_0} = \frac{144 000}{80 000} = 1,8$ bzw. 180% , absolut: 64 000 M

5. $I_m^N = \frac{\frac{N_1}{N_0} \sum n_0 y_0}{\sum n_0 y_0} = \frac{1,5 \cdot 80 000}{80 000} = 1,5$ bzw. 150% , absolut: + 40 000 M

6. $I_m^{Vn} = \frac{\sum n_1 y_0}{\frac{N_1}{N_0} \sum n_0 y_0} = \frac{144 000}{1,5 \cdot 80 000} = 1,2$ bzw. 120% absolut: + 24 000 M

7. $I_m^y = \frac{\sum n_1 y_1}{\sum n_1 y_0} = \frac{96 000}{144 000} = 0,667$ bzw. $66,7\%$, absolut: — 48 000 M

8. $I_m^{\bar{y}} = \frac{\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_0} \sum n_1 y_0}{\sum n_1 y_0} = \frac{\frac{68,3}{103,3} 144 000}{144 000} = 0,662$ bzw. $66,2\%$, absolut: — 48 800 M

9. $I_m^{V_y} = \frac{\sum n_1 y_1}{\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_0} \sum n_1 y_0} = \frac{96 000}{\frac{68,3}{103,3} 144 000} = 1,008$ bzw. $100,8\%$, absolut + 800 M.

10. a) $I_m = I_n \cdot I_y$ $1,2 = 1,5 \cdot 0,8$

b) $I_m = I_m^n \cdot I_m^y$ $1,2 = 1,8 \cdot 0,667$

c) $I_m^n = I_m^N \cdot I_m^{Vn}$ $1,8 = 1,5 \cdot 1,2$

d) $I_m^y = I_m^{\bar{y}} \cdot I_m^{V_y}$ $0,667 = 0,662 \cdot 1,008$

e) $I_m = I_m^N \cdot I_m^{Vn} \cdot I_m^{\bar{y}} \cdot I_m^{V_y}$ $1,2 = 1,5 \cdot 1,2 \cdot 0,662 \cdot 1,008$

11. Die in den Teilen 1 bis 9 angegebenen Formeln bleiben die gleichen.

- a) Der Plan der mengenmäßigen Produktion wurde mit 50 Prozent bzw. um 400 Stück übererfüllt.
- b) Die geplanten Gesamtkosten wurden um 16000 M oder um 20 Prozent überschritten.
- c) Die geplanten durchschnittlichen Kosten je Stück wurden um 20 M/Stück oder um 20 Prozent unterschritten.
- d) Durch die Übererfüllung des Produktionsplanes um 50 Prozent und durch die Strukturverschiebung der Produktion hatte man die geplanten Gesamtkosten um 64000 M oder um 80 Prozent überschritten.
- e) Allein durch die Übererfüllung des Produktionsplanes um 50 Prozent wurden 40000 M oder 50 Prozent mehr Kosten in Anspruch genommen. Demnach sind die Plankosten der Ist-Produktion 120000 M.
- f) Durch die unterschiedliche Erfüllung des Produktionsplanes in den 3 Betrieben (A : 50%, B : 350% und C: 150%) wurden die Gesamtkosten um 24000 M oder um 20 Prozent überzogen.
- g) Durch die Unterbietung der jeweilig geplanten Kosten pro Stück in den einzelnen Betrieben konnten die Gesamtplankosten um 33 Prozent oder um 48000 M unterschritten werden.
- h) Infolge der Senkung des Kostenniveaus in den einzelnen Betrieben konnten die Gesamtkosten um 33,8 Prozent bzw. 48800 M unterschritten werden.
- i) Durch die ungünstige Entwicklung der Kostenstruktur (unterschiedliche Entwicklung der Kostensätze) in den einzelnen Betrieben stiegen die Gesamtkosten um 800 M bzw. 0,8 Prozent.

Aufgabe 80

1. $I_n = 1,067$; + 100 Arbeiter
 $I_m = 1,168$; + 189000 M
 $I_y = 1,095$; + 71,25 M/Arbeiter
2. $I_m^N = 1,067$; + 75000 M $I_y^{V_n} = 1,025$; + 18,75 M/Arbeiter
 $I_m^{V_n} = 1,025$; + 30000 M $I_y^{\bar{y}} = 1,080$; + 60 M/Arbeiter
 $I_m^{\bar{y}} = 1,080$; + 98400 M $I_y^{V_y} = 0,989$; - 7,5 M/Arbeiter
 $I_m^{V_y} = 0,989$; - 14400 M

Aufgabe 81

Es wird folgende *Arbeitstabelle* angefertigt:

	n_0	n_1	y_0	y_1	$n_0 y_0$	$n_1 y_0$	$n_1 y_1$
0	1	2	3	4	5	6	7
A	200	200	35	30	7 000	7 000	6 000
B	200	300	50	40	10 000	15 000	12 000
Σ	400	500	85	70	17 000	22 000	18 000
$\emptyset$			42,5	35,0	42,5	44,0	36,0

1. Die geplante Zahl der Arbeitskräfte wurde um 100 Arbeiter, das heißt um 25 Prozent überschritten. Der tatsächliche Energieverbrauch ist um 1000 kWh größer als der geplante. Die Planerfüllung beträgt 105,9 Prozent. Gegenüber dem Plan wurde der durchschnittliche Energieverbrauch pro Arbeiter um 6,5 kWh/Arbeiter oder auf 84,7 Prozent gesenkt.

2. Durch die gegenüber dem Plan höhere Gesamtzahl der Arbeitskräfte und die Strukturverschiebung der Arbeitskräfte wurde der geplante Energieverbrauch um 5000 kWh, das heißt um 29,4 Prozent überschritten.

Von diesen 5000 kWh entfallen 4250 kWh auf die gegenüber dem Plan größere Gesamtzahl der Arbeitskräfte. Durch die größere Gesamtzahl der Arbeitskräfte wurde demnach der Energieverbrauch um 25 Prozent überzogen. Durch die Strukturverschiebung der Arbeitskräfte wurde der geplante Energieverbrauch um 750 kWh oder um 3,5 Prozent überschritten.

Die Strukturverschiebung der Arbeitskräfte hatte zur Folge, daß der geplante durchschnittliche Energieverbrauch je Arbeiter um 1,5 kWh stieg, der Plan also um 3,5 Prozent überzogen wurde.

3. Durch die Verringerung des Energieverbrauchs pro Arbeiter in den Abteilungen wurde der geplante Energieverbrauch um 4000 kWh vermindert; die geplante Energiemenge ist nur zu 81,8 Prozent beansprucht.

Von den 4000 kWh entfallen 3900 kWh auf die Verringerung des Niveaus des Energieverbrauchs pro Arbeitskraft; der geplante Energieverbrauch konnte dadurch um 12,6 Prozent gesenkt werden. 100 kWh entfallen auf die Abweichung der tatsächlichen von der geplanten Struktur des Energieverbrauchs pro Arbeitskraft zwischen den beiden Abteilungen.

Durch die Veränderung des Energieverbrauchs je Arbeiter in den einzelnen Abteilungen sank der durchschnittliche Energieverbrauch je Arbeiter um 8 kWh, das heißt auf 81,8 Prozent.

Davon entfallen 7,8 kWh (= Senkung auf 82,4 Prozent) auf das gegenüber den Planwerten geringere Niveau des Energieverbrauchs pro Arbeitskraft in den einzelnen Abteilungen und 0,2 kWh (= Senkung auf 99,4 Prozent) auf die geänderte Struktur des spezifischen Energieverbrauchs pro Arbeitskraft.

Aufgabe 82

	II./I. Quartal	III./II. Quartal
1. I_n	1,0 ; —	1,25 ; + 500000 M
I_m	0,961 ; — 12000 M	1,265 ; + 79000 M
I_y	0,961 ; — 0,6 M/100 M	1,012 ; + 0,18 M/100 M

2. I_m^N 1,0 ; — 1,25 ; + 74500 M
 $I_m^{V_n}$ 0,985 ; — 4500 M 1,028 ; + 10500 M
 $I_y^{V_n}$ 0,985 ; — 0,225 M/100 M 1,028 ; + 0,420 M/100 M
3. $I_m^{\bar{y}}$ 0,977 ; — 7000 M 0,984 ; — 6000 M
 $I_m^{V_y}$ 0,997 ; — 500 M 1,00 ; —
 $I_y^{\bar{y}}$ 0,977 ; — 0,35 M/100 M 0,984 ; — 0,24 M/100 M
 $I_y^{V_y}$ 0,997 ; — 0,025 M/100 M 1,00 ; —

Aufgabe 83

Die Ursache liegt in der Veränderung der Arbeitskräftestruktur. Dividiert man die jeweilige Produktion durch die Pro-Kopf-Leistung, so erhält man folgende Angaben:

Abteilung	Arbeitskräfte				Produktion in 1000 M (Zwischensumme) $n_1 y_0$
	April		Mai		
	absolut	relativ	absolut	relativ	
0	1	2	3	4	5
A	270	90%	240	80%	144,0
B	30	10%	60	20%	24,0
Insgesamt	300	100%	300	100%	168,0
Durchschnitt					560 M/ Arbeiter

Die durchschnittliche Pro-Kopf-Leistung des Betriebes verringerte sich infolge der Veränderung der Arbeitskräftestruktur von 580 auf 560 M je Arbeiter bzw. auf 96,6 Prozent. Infolge der spezifischen Erhöhung der Pro-Kopf-Leistungen stieg die durchschnittliche Pro-Kopf-Leistung um 7,20 M je Arbeiter bzw. auf 101,3 Prozent. Dadurch konnte die starke Senkung auf Grund der Entwicklung der Arbeitskräftestruktur nicht ausgeglichen werden.

Aufgabe 84

1. $I_n = 1,500$; + 1000 ha
 $I_m = 1,480$; + 1200 Stück
 $I_y = 0,986$; — 1,7 Stück/100 ha
2. $I_m^N = 1,500$; + 1250 Stück $I_y^{V_y} = 1,013$; + 1,7 Stück/100 ha
 $I_m^{V_n} = 1,013$; + 50 Stück $I_y^{\bar{y}} = 0,960$; — 5,07 Stück/100 ha
 $I_m^{\bar{y}} = 0,960$; — 152 Stück $I_y^{V_y} = 1,014$; + 1,67 Stück/100 ha
 $I_m^{V_y} = 1,014$; + 52 Stück

Aufgabe 85

Es sind folgende Indizes gegeben:

$$\begin{aligned} I_m &= 1,025 & I_y^{V_n} &= 0,970 \\ I_m^y &= 1,040 \end{aligned}$$

1. Gesucht wird der Index I_y . Es ist $I_m^y = I_y^y$ und es gilt $I_y = I_y^{V_n} \cdot I_y^y$. Demnach ergibt sich folgende Rechnung:

$$I_y = 0,970 \cdot 1,040 = 1,0088$$

Demzufolge stieg der Durchschnittslohn um 0,88 Prozent auf 100,88 Prozent

2. Es gilt $I_m = I_m^N \cdot I_m^{V_n} \cdot I_m^y$. Der gesuchte Index I_m^N lässt sich durch Umstellung der Gleichung errechnen, da durch die Identität der Indizes $I_y^{V_n}$ und $I_m^{V_n}$ alle fehlenden Größen berechnet werden können.

$$I_m^N = I_m^N \cdot I_m^{V_n} = I_m : I_m^y = 1,025 : 1,040 = 0,986$$

Infolge der Veränderung der Arbeitskräftezahlen sank die Lohnsumme auf 98,6 Prozent.

$$I_m^N = I_m^N : I_m^{V_n} = 0,986 : 0,970 = 1,016$$

Durch die Veränderung der Gesamtsumme der Arbeitskräfte stieg die Lohnsumme auf 101,6% und durch die Veränderung der Arbeitskräftestruktur sank sie auf 97%.

3. Die Zahl der Arbeitskräfte stieg um 1,6% ($I_n = I_m^N$)

Aufgabe 86

1. $I_n = 1,091$; + 400 Stück
mengenmäßig:

$$I_m = 0,984 \quad ; - 80 \text{ Tonnen} \qquad I_y = 0,901 \quad ; - 0,11 \text{ t/Stück}$$

wertmäßig:

$$I_m = 123,8 \quad ; + 11520 \text{ M} \qquad I_y = 1,134 \quad ; + 1,48 \text{ M/Stück}$$

2. $I_m^N = 1,091$; + 444 Tonnen $I_y^{V_n} = 1,014$; + 0,015 t/Stück
 $I_m^{V_n} = 1,014$; + 76 Tonnen $I_{y\bar{y}} = 0,978$; - 0,023 t/Stück
 $I_m^{\bar{y}} = 0,978$; - 100 Tonnen $I_y^{V_y} = 0,908$; - 0,102 t/Stück
 $I_m^{V_y} = 0,908$; - 500 Tonnen

3. q = Menge, t = Materialverbrauch pro Stück in Tonnen

p = Preis für eine Tonne Material

$$I_m^q = 1,126 \quad ; + 6120 \text{ M} \qquad I_y^q = 1,032 \quad ; + 0,356 \text{ M/Stück}$$

$$I_m^t = 0,989 \quad ; - 600 \text{ M} \qquad I_y^t = 0,989 \quad ; + 0,125 \text{ M/Stück}$$

$$I_m^p = 1,111 \quad ; + 6000 \text{ M} \qquad I_y^p = 1,111 \quad ; + 1,250 \text{ M/Stück}$$

4. $\frac{\sum q_1 t_1 p_1}{\sum q_0 t_0 p_0} = \frac{\sum q_1 t_1 p_0}{\sum q_0 t_0 p_0} \cdot \frac{\sum q_1 t_1 p_0}{\sum q_1 t_1 p_0} \cdot \frac{\sum q_1 t_1 q_1}{\sum q_1 t_1 p_0}$

und

$$\frac{\frac{\sum q_1 t_1 p_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum q_0 t_0 p_0}{\sum q_0}} = \frac{\frac{\sum q_1 t_0 p_0}{\sum q_1}}{\frac{\sum q_0 t_0 p_0}{\sum q_0}} \cdot \frac{\frac{\sum q_1 t_1 p_0}{\sum q_1}}{\frac{\sum q_1 t_1 p_0}{\sum q_1}} \cdot \frac{\frac{\sum q_1 t_1 p_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum q_1 t_1 p_0}{\sum q_1}}$$

5. a) 6
b) k!

Aufgabe 87

Um den zweiten Teil der Aufgabe lösen zu können muß die vollständige Indexzerlegung benutzt werden, d. h. die Zerlegung $\sum n \cdot y = N\bar{y} (1 + V_n V_y r_{n,y})$

Es wird folgende Arbeitstabelle angefertigt:

Sorte	n_0	n_1	$n_0 y_0$	$n_1 y_0$	$n_1 y_1$	y_0	y_1	n_0^2	n_1^2	y_0^2	y_1^2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	100	270	3000	8100	7560	30	28	10000	72900	900	784
B	150	260	3750	6500	6240	25	24	22500	67600	625	576
C	200	250	4000	5000	5000	20	20	40000	62500	400	400
D	250	240	3750	3600	3840	15	16	62500	57600	225	256
E	300	230	3000	2300	2760	10	12	90000	52900	100	144
Σ	1000	1250	17500	25500	25400	100	100	225000	313500	2250	2160
$\emptyset$	200	250	3500	5100	5080	20	20	45000	62700	450	432

Die Varianzen werden zweckmäßigerweise nach der Formel

$$S_n^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2$$

Es ergibt sich:

$$S_{n_0}^2 = 45000 - 200^2 = 5000 \quad ; S_{n_0} = 70,7 \quad ; V_{n_0} = 0,3535$$

$$S_{n_1}^2 = 62700 - 250^2 = 200 \quad ; S_{n_1} = 14,14 \quad ; V_{n_1} = 0,05656$$

$$S_{y_0}^2 = 450 - 20^2 = 50 \quad ; S_{y_0} = 7,07 \quad ; V_{y_0} = 0,3535$$

$$S_{y_1}^2 = 432 - 20^2 = 32 \quad ; S_{y_1} = 5,656 \quad ; V_{y_1} = 0,2828$$

Für die Korrelationskoeffizienten ergibt sich:

$$r_{n_0 y_0} = \frac{3500 - 200 \cdot 20}{70,7 \cdot 7,07} = -1$$

$$r_{n_1 y_0} = \frac{5100 - 250 \cdot 20}{14,14 \cdot 7,07} = 1$$

$$r_{n1y1} = \frac{5080 - 250 \cdot 20}{14,14 \cdot 5,656} = 1$$

Für die Indexberechnung erhält man folgende Zwischengrößen:

$$K_{00} = (1 + V_n V_{y0} r_{n0y0}) = (1 + 0,3535 \cdot 0,3535 \cdot (-1)) = 1 - 0,125 = 0,875$$

$$K_{10} = (1 + V_{n1} V_{y0} r_{n1y0}) = (1 + 0,05656 \cdot 0,3535 \cdot 1) = 1 + 0,020 = 1,020$$

$$K_{11} = (1 + V_{n1} V_{y1} r_{n1y1}) = (1 + 0,05656 \cdot 0,2828 \cdot 1) = 1 + 0,016 = 1,016$$

$$a) I_m^N = \frac{1250 \cdot 20 \cdot 0,875}{1000 \cdot 20 \cdot 0,875} = 1,25$$

Die Gesamtkosten stiegen infolge der Produktionserhöhung um 25 Prozent.

$$b) I_m^{V_n} = \frac{1250 \cdot 20 \cdot 1,020}{1250 \cdot 20 \cdot 0,875} = 1,167$$

Die Gesamtkosten stiegen infolge der Änderung der Produktionsstruktur um 16,7 Prozent.

$$c) I_m^{\bar{y}} = \frac{1250 \cdot 20 \cdot 0,875}{1250 \cdot 20 \cdot 0,875} = 1,00$$

Es lag keine Veränderung des durchschnittlichen Niveaus der Kostensätze vor. Demzufolge ist auch keine Wirkung auf die Entwicklung der Gesamtkosten nachzuweisen.

$$d) I_m^{V_y} = \frac{1250 \cdot 20 \cdot 1,016}{1250 \cdot 20 \cdot 1,020} = 0,996$$

Die Veränderung der Struktur der spezifischen Kostensätze führte zu einer Senkung der Gesamtkosten um 0,5 Prozent.

e) Durch den ausgeprägten Zusammenhang zwischen der Produktionshöhe und den spezifischen Kostensätzen kamen die Strukturveränderungen in ihrer Wirkung voll zum Tragen.

Aufgabe 88

$$1.a) I_m^N = \frac{800 \cdot 57 (1 + 0,388 \cdot 0,144 \cdot (-0,916))}{520 \cdot 57 (1 + 0,388 \cdot 0,144 \cdot (-0,916))} = 1,538 \text{ bzw. } 153,8\%$$

$$b) I_m^{V_n} = \frac{800 \cdot 57 (1 + 0,418 \cdot 0,144 \cdot 0,778)}{800 \cdot 57 (1 + 0,388 \cdot 0,144 \cdot (0,916))} = 1,114 \text{ bzw. } 111,4\%$$

$$c) I_{m\bar{y}} = \frac{800 \cdot 48 (1 + 0,418 \cdot 0,144 \cdot 0,778)}{800 \cdot 57 (1 + 0,418 \cdot 0,144 \cdot 0,778)} = 0,842 \text{ bzw. } 84,2\%$$

$$d) I_M^V y = \frac{800 \cdot 48 (1 + 0,418 \cdot 0,106 \cdot 0,820)}{800 \cdot 48 (1 + 0,418 \cdot 0,144 \cdot 0,778)} = 0,984 \text{ bzw. } 98,4\%$$

2. Der relativ starke Zusammenhang zwischen der Produktionshöhe und dem spezifischen Materialverbrauch pro Stück bewirkte, daß die Strukturverschiebungen in starkem Maße auf die Entwicklung der Gesamtheit einwirken konnten. Der Richtungswechsel des Zusammenhangs verstärkte die Wirkung der Strukturverschiebung.

Aufgabe 89

1. Es wird folgende *Arbeitstabelle* angefertigt:

Erzeug. n_0	n_1	$n_1 y_1$	$\frac{n_1}{n_0}$	$\frac{n_1^2}{n_0}$	N_1	$y_1 n_0$	$y_1^2 n_0$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	10	30	360	3	90	12	120	1440
B	40	20	440	0,5	10	22	880	19360
	50	50	800		100		1000	20800

$$S_{\frac{n_1}{n_0}} = \frac{\sum \frac{n_1^2}{n_0}}{\sum n_0} - \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 = \frac{100}{50} - 1^2 = 1; \quad V_{\frac{n_1}{n_0}} = 1$$

$$S y_1^2 = \frac{\sum y_1^2 n_0}{\sum n_0} - \left(\frac{\sum y_1 n_0}{\sum n_0} \right)^2 = \frac{20800}{50} - \left(\frac{1000}{50} \right)^2 = 16;$$

$$V_{y_1} = 0,2$$

$$I_y^n = \frac{\frac{\sum n_1 y_1}{\sum n_0 y_1}}{\frac{\sum n_1}{\sum n_0}} = \frac{800}{1000} = 0,8 = 1 + 1 \cdot 0,2 \cdot r$$

Daraus folgt, daß $r = -1$

Die Transportkosten je Stück konnten infolge der Veränderung der Produktionsstruktur um 20 Prozent gesenkt werden, da einerseits eine starke Streuung der Kennziffern der Veränderung der Produktion bei den einzelnen Erzeugnissen vorliegt und da andererseits ein starker gegenläufiger Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Produktionshöhe und der Kostenhöhe des Jahres 1969 zu verzeichnen ist.

$$2. a = \frac{n_1}{n_0} \quad b = y_1 \quad f = n_0$$

$$\frac{\sum n_1 y_1}{\sum n_1} : \frac{\sum n_0 y_1}{\sum n_0} = 1 + V_{\frac{n_1}{n_0}} \cdot V_{y_1} \cdot r_{\frac{n_1}{n_0}; y_1}$$

Da die Werte von y_0 nicht gegeben waren, mußte bei dem Index von einer Gewichtung mit y_1 ausgegangen werden.

Aufgabe 90

$$I_y^n = 1 + V_{\frac{n_1}{n_0}} V_{y_0} r_{\frac{n_1}{n_0}}, y_0 = 1 + 0,513 \cdot 0,235 \cdot 0,804 = 1,098$$

Die Steigerung des durchschnittlichen Arbeitskräftebesatzes pro 100 ha landwirtschaftliche Nutzfläche um 9,8 Prozent infolge der Veränderung der Anbauflächen von 1968 zu 1969 ist zurückzuführen auf eine mittelmäßige Streuung der Entwicklungskennziffern der Anbauflächen bei den einzelnen Sorten (Variationskoeffizient = 51,3 Prozent, eine relativ schwächere Streuung der Kennziffern des Arbeitskräftebesatzes für das Jahr 1968 (Variationskoeffizient = 23,5 Prozent) und eine starke Korrelation zwischen den beiden genannten Kennziffern.

Aufgabe 91

Die Formel für das durchschnittliche Wachstumstempo p lautet:

$$p = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}},$$

wobei n die Anzahl der Zeiträume und y_0, y_n die Größen der Erscheinung im Zeitraum 0 bzw. n sind. Es ist n gleich 7.

	Fleisch und Fleischerz.	Rauchtabak
y_n	61,5	88
y_0	55,0	130
$\lg y_n$	1,7889	1,9445
$\lg y_0$	1,7404	2,1139
$\lg \frac{y_n}{y_0}$	0,0485	0,8306 — 1
$\lg p = \frac{1}{n} \lg \frac{y_n}{y_0}$	0,0069	0,9758 — 1

Demnach ist

1. $p = 1,016$ bzw. $101,6\%$
2. $p = 0,946$ bzw. $94,6\%$

Der Pro-Kopf-Verbrauch an Fleisch und Fleischerzeugnissen stieg in der DDR von 1960 bis 1967 um 1,6 Prozent, während der Pro-Kopf-Verbrauch bei Rauchtobak gleichzeitig um jährlich 5,4 Prozent sank.

Aufgabe 92

1. $108,1\%$
2. $109,2\%$

Aufgabe 93

n ist hier gleich 10.

Für alle Staaten liegt das Gesamtwachstum, das heißt der Quotient $y_n : y_0$, bereits vor:

Land	$\frac{1960}{1950}$	$\frac{y_n}{y_0}$	$\log \frac{y_n}{y_0}$	$\frac{1}{n} \log \frac{y_n}{y_0}$
0	1	2	3	4
Sowjetunion	300	3,00	0,4771	0,0477
USA	144	1,44	0,1584	0,0158
DDR	292	2,92	0,4654	0,0465
Westdeutschland	249	2,49	0,3962	0,0396

Das durchschnittliche Wachstumstempo beträgt:

1. Sowjetunion $1,116$ bzw. $111,6\%$
2. USA $1,037$ bzw. $103,7\%$
3. DDR $1,113$ bzw. $111,3\%$
4. Westdeutschland $1,095$ bzw. $109,5\%$

Aufgabe 94

1. $107,5\%$
2. $113,5\%$

Aufgabe 95

Da nur die jährlichen Wachstumstempi vorliegen, muß p nach der Formel des geometrischen Mittels berechnet werden:

$$p = \sqrt[n]{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}$$

wobei $p_1, p_2, \dots, p_n$ die jeweiligen jährlichen Wachstumstempi sind. Demnach ist

$$p = \sqrt[4]{1,068 \cdot 1,082 \cdot 1,055 \cdot 1,063}$$

Man erhält daraus den Wert p gleich 1,067 bzw. 106,7 Prozent oder 6,7 Prozent jährliche Zunahme der Elektroenergieerzeugung.

Aufgabe 96

109,6%

Aufgabe 97

Da nur die Größen für die einzelnen Bereiche vorliegen, muß p nach der Formel

$$p = \left(\frac{\sum p_{n,k} \cdot y_{0,k}}{\sum y_{0,k}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

berechnet werden, wobei p_k das durchschnittliche Wachstumstempo und $y_{0,k}$ die Größe der Erscheinung im Zeitraum 0 für den jeweiligen Industriebereich ist. Es ist n gleich 6.

Die Berechnung kann wie folgt durchgeführt werden:

Arbeitstabelle

Bereich	$y_{0,k}$	$\lg y_{0,k}$	$\lg p_{k,k}$	$n \lg p_{k,k}$	$\lg p_{n,k}^n y_{0,k}$	$p_{n,k}^n y_{0,k}$
0	1	2	3	4	5 = 2 + 4	6
Grundstoffindustrie	13,6	1,1335	0,0330	0,1980	1,3315	21,5
Metallverarbeitende Industrie	13,1	1,1173	0,0473	0,2838	1,4011	25,2
Leichtindustrie	10,8	1,0334	0,0298	0,1788	1,2122	16,3
Nahrungs- und Genußmittelindustrie	7,3	0,8633	0,0265	0,1590	1,0223	10,5

Man erhält:

$$\begin{aligned} y_n &= 73,5 \\ y_0 &= 44,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg y_n &= 1,8663 \\ \lg y_0 &= 1,6513 \end{aligned}$$

$$\lg \frac{y_n}{y_0} = 0,2150$$

$$\lg p = \frac{0,2150}{6} = 0,0358$$

Demnach ist p gleich 1,086, das heißt 108,6% beträgt das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo der Industrieproduktion in der DDR von 1955 bis 1961.

Aufgabe 98

116,4%

Aufgabe 99

Die Koeffizienten a_0 und a_1 ergeben sich analog zur Aufgabe 54. Die Berechnung kann jedoch gegenüber Aufgabe 54 wesentlich vereinfacht werden, da der Abstand der Zeiträume zwischen den gegebenen Werten jeweils gleich lang ist. Die Größen t können jetzt durch solche abgeleiteten Größen t' ersetzt werden, bei denen die $\sum t' = 0$ ist (statt x ist hier t zu setzen.)

Da $n = 7$, das heißt ungerade, ist, setzt man für 1955 zweckmäßigerweise $t' = 0$. Dann ist $\sum t' = 0$ (siehe Arbeitstabelle).

Unter dieser Voraussetzung ist

$$a_0 = \frac{\sum y_{t'}}{n} \text{ und } a_1 = \frac{\sum t' y_{t'}}{\sum t'^2},$$

da in den Formeln für a_0 und a_1 alle Produkte mit $\sum t'$ wegfallen. Die $\sum t'^2$ erhält man nach der Formel

$$\sum t'^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{12} \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

Die *Arbeitstabelle* ist demnach:

Jahr	t'	$y_{t'}$	$t' y_{t'}$	$f(t')$
0	1	2	3	4
1952	— 3	749,2	— 2247,6	746,6
1953	— 2	726,8	— 1453,6	722,1
1954	— 1	694,7	— 694,7	697,6
1955	0	669,1	0	673,1
1956	1	641,4	641,4	648,6
1957	2	623,8	1247,6	624,1
1958	3	606,8	1820,4	599,6
Insgesamt	0	4711,8	— 686,5	

und

$$a_0 = \frac{4711,8}{7} = 673,1,$$

$$a_1 = \frac{-686,5}{28} = -24,5$$

$$\underline{f(t') = 673,1 - 24,5 \cdot t'}$$

Die Trendwerte sind der letzten Spalte der Arbeitstabelle zu entnehmen.

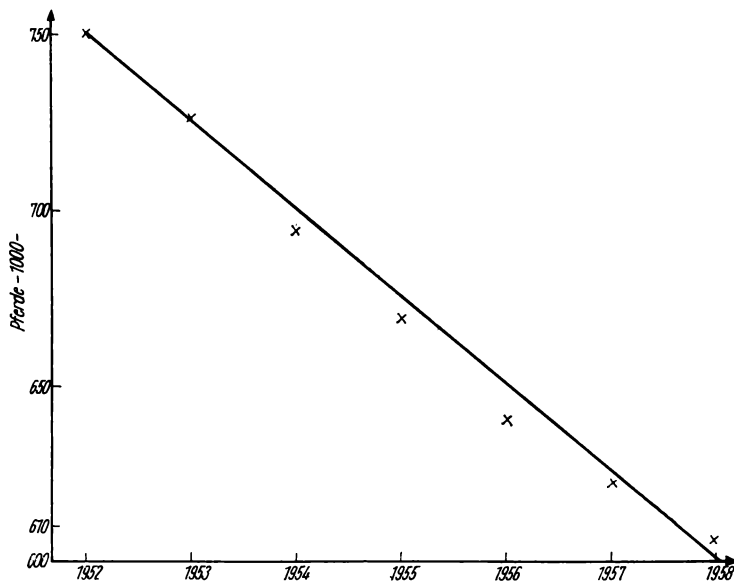


Abb. 8 Pferdebestand der DDR

Aufgabe 100

$$f(t) = 388 + 27,2 t \quad (t = 0 \text{ für } 1955)$$

Aufgabe 101

Der Trend hat die Form

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

Die Normalgleichungen zur Bestimmung von a_0 , a_1 und a_2 lauten:

$$\text{I. } a_0 \cdot n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y_t$$

$$\text{II. } a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum t y_t$$

$$\text{III. } a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum t^2 y_t$$

Da die Zeitabstände alle gleich lang sind, wird für 1959 $t' = 0$ eingesetzt. Dann fallen alle Glieder mit $\sum t$ und $\sum t^3$ weg. Die Berechnung führt man wie folgt durch:

$$a_1 = \frac{\sum t' y_{t'}}{\sum t'^2}$$

$$a_2 = \frac{n \sum t'^2 y_{t'} - \sum t'^2 \cdot \sum y_{t'}}{n \sum t'^4 - (\sum t'^2)^2} = \frac{\sum t'^2 y_{t'} - \bar{y} \sum t'^2}{N}$$

$$a_0 = \frac{\sum y_{t'}}{n} - a_2 \cdot \frac{\sum t'^2}{n}$$

Für die Größen $\sum t'^2$ und N gibt es folgende Formeln bei n ungerade:

$$\sum t'^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{12} = 10 \text{ für } n = 5$$

$$N = \frac{(n-1)n(n+1) \cdot (n-2)(n+2)}{12 \cdot 15} = 14 \text{ für } n = 5.$$

Die *Arbeitstabelle* ist demnach:

Jahr	t'	y_t	$t' y_{t'}$	$t'^2 y_t$	$f(t')$
0	1	2	3	4	5
1957	-2	3,3	- 6,6	13,2	3,1
1958	-1	30,9	- 30,9	30,9	31,3
1959	0	51,7	0	0	52,1
1960	1	66,2	66,2	66,2	65,5
1961	2	71,3	142,6	285,2	71,2
Insgesamt	0	223,4	171,3	395,5	

Demnach ist

$$a_1 = \frac{171,3}{10} = 17,1$$

$$a_2 = \frac{395,5 - 2 \cdot 223,4}{14} = - 3,7$$

$$a_0 = \frac{223,4}{5} - (- 3,7) \cdot 2 = 52,1$$

$$f(t') = 52,1 + 17,1 t' - 3,7 t'^2$$

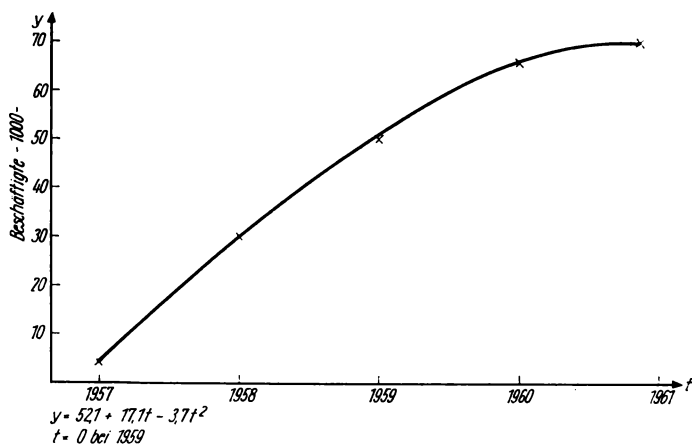


Abb. 9 Beschäftigte der Produktionsgenossenschaften des Bauhandwerks in der DDR

Aufgabe 102

$$f(t) = 2375 + 450t - 15t^2$$

($t = 0$ für 1963)

Aufgabe 103

1.

Jahr	Mill. M	absolute Zunahme		relative Zunahme %	
		zum Vorjahr	zu 1950	Vorjahr = 100	1950 = 100
0	1	2	3	4	5
1950	1270	—	—		100
1951	1446	176	176	114	114
1952	2024	578	754	140	160
1953	2536	512	1266	125	200
1954	3701	1165	2431	146	291
1955	4927	1226	3657	133	388
1956	6062	1135	4792	123	477
1957	8970	2908	7700	148	706
1958	11244	2274	9974	125	885
1959	14010	2766	12740	125	1103
1960	17053	3043	15783	122	1343
1961	19655	2602	18385	115	1547

Folgende Erkenntnisse gewinnt man aus diesen Angaben:

- a) Die Spareinlagen stiegen ständig an (Spalte 1).
- b) Da sich die jährliche Zunahme (Spalte 2) in der Tendenz vergrößert, liegt eine progressive Entwicklung vor. Man erkennt das deutlich, wenn die Entwicklung der Spareinlagen graphisch dargestellt wird. Der Streckenzug ist ansteigend und nach unten gewölbt.
- c) Die relative Zunahme ist etwa konstant; zumindest läßt sie keine Tendenz erkennen (Spalte 4).
- d) Aus a) bis c) ist die Schlußfolgerung zu ziehen, daß dieser Entwicklung ein Exponentialtrend zugrunde liegt.

$$2. \text{ Es ist } p = \sqrt[10]{\frac{17053}{1270}} = 1,297$$

Zur besseren Anpassung der Trendkurve an die tatsächlichen Werte fordert man gleichzeitig, daß die Summe der Trendwerte gleich der Summe der tatsächlichen Werte sein soll, d. h. die Summe der Abweichungen der Trendwerte von den tatsächlichen Werten gleich Null ist.

Demzufolge muß gelten:

$$\sum a p^t = \sum y_t$$

und

$$a = \sum y_t : \sum p^t$$

$$\text{Es ist } \sum_0^{n-1} p^t = \frac{p^n - 1}{p - 1} = 72,63$$

und

$$a = 92898 : 72,63 = 1279$$

Die Trendfunktion lautet demnach:

$$f(t) = 1279 \cdot 1,297^t \quad (t = 0 \text{ für } 1950)$$

Die Trendwerte sind in der Tabelle am Schluß des 3. Teils der Aufgabe enthalten.

3. Wählt man t' derart, daß $\sum t' = 0$ ist, so ergeben sich die Koeffizienten des Exponentialtrends aus den nachstehenden Gleichungen:

$$\lg a = \frac{\sum \lg y}{n}$$

$$\lg p = \frac{\sum t' \lg y}{\sum t'^2}$$

Es ist $n = 12$, das heißt gerade. Für die Transformation der Jahreszahlen wird daher die fiktive Mitte zwischen 1955 und 1956 als Punkt für $t' = 0$ ausgewählt.

Die *Arbeitstabelle* hat folgendes Aussehen:

Jahr	t'	lg y	t' lg y
0	1	2	3
1950	— 11	3,1038	— 34,1418
1951	— 9	3,1602	— 28,4418
1952	— 7	3,3062	— 23,1434
1953	— 5	3,4041	— 17,0205
1954	— 3	3,5683	— 10,7049
1955	— 1	3,6926	— 3,6926
1956	1	3,7826	3,7826
1957	3	3,9528	11,8584
1958	5	4,0510	20,2550
1959	7	4,1464	29,0248
1960	9	4,2318	38,0862
1961	11	4,2935	47,2285
Insgesamt	0	44,6933	33,0905

Es ist

$$\lg a = \frac{44,6933}{12} = 3,7244.$$

Bei gerader Anzahl von Jahren ist

$$\sum t'^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

und demnach

$$\sum t'^2 = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{3} = 572,$$

$$\lg p = \frac{33,0905}{572} = 0,0578.$$

Die Trendgleichung lautet:

$$f(t') = 5301 \cdot 1,142^{t'}$$

Hierbei ist zu beachten, daß der Abstand zwischen zwei Jahren nicht einmal, sondern zweimal t' ist, das heißt t' jeweils halbe Jahresanstiege widerspiegelt. Zweckmäßigerweise formt man daher die Gleichung um, wobei statt der Größen t' nun die Werte $t = 1$ für 1950, $t = 2$ für 1951 usw. verwendet werden. Der Anstieg eines Jahres ist dann $1,142^2 = 1,305$.

Für $t = 0$, das heißt für 1949, muß in der Gleichung für $f(t')t'$ gleich — 13 eingesetzt werden:

$$f(-13) = 5301 \cdot 1,142^{-13} = 940$$

und

$$f(t) = 940 \cdot 1,305^t.$$

Setzt man die Werte von t ein, so erhält man die Trendwerte. Abschließend ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

Jahr	Effektive Werte	Trendwerte nach der Kennziffer des durchschnittlichen Wachstumstempos 1950 bis 1961	Trendwerte nach der Methode der kleinsten Quadratsumme 1950 bis 1961
0	1	2	3
1950	1270	1279	1226
1951	1446	1658	1600
1952	2024	2150	2089
1953	2536	2788	2725
1954	3701	3615	3556
1955	4927	4687	4641
1956	6062	6077	6056
1957	8970	7888	7904
1958	11244	10220	10313
1959	14010	13250	13460
1960	17053	17175	17563
1961	19655	22270	22920

Aufgabe 104

1. $f(t) = 314,8 \cdot 1,186^t$ ($t = 0$ für 1963)
2. $f(t) = 311,2 \cdot 1,190^t$

Aufgabe 105

Die Formel für die einfache modifizierte Exponentialfunktion lautet:

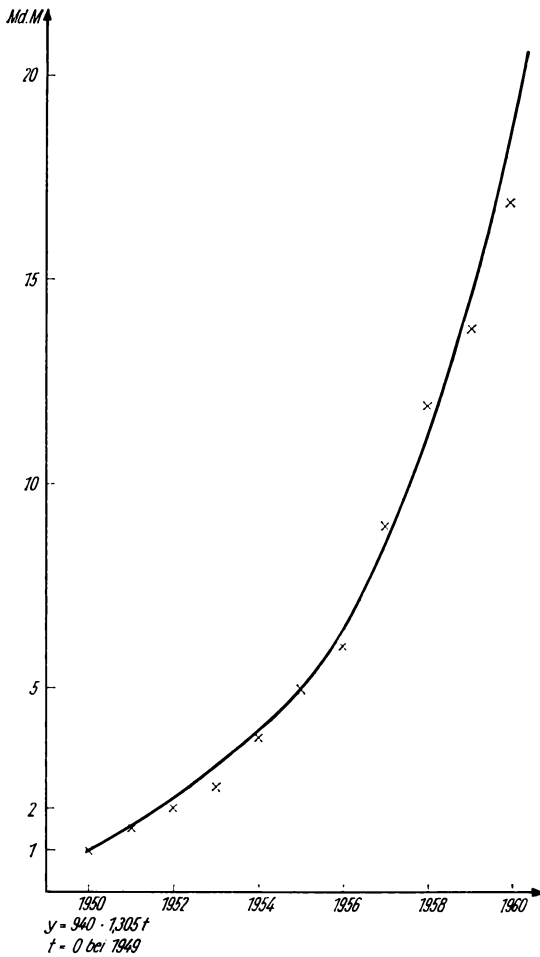
$$f(t) = a + br^t$$

Ist a bekannt bzw. als Näherungsgröße abzuschätzen, so gilt als Näherung: $y = a + br^t$ und demnach $y - a = br^t$

Da y und a vorliegen, kann aus der letzten Gleichung für die einzelnen Werte eine Exponentialfunktion nach der bereits in Aufgabe 103 dargelegten Methodik ermittelt werden. Die Arbeitstabelle ist daher

t	$y - a$	$\lg(y - a)$	$t \lg(y - a)$	$f(t)$
- 4	62,2	1,7938	- 7,1752	72,2
- 3	49,1	1,6911	- 5,0733	62,1
- 2	40,3	1,6053	- 3,2106	53,6
- 1	36,5	1,5623	- 1,5623	46,5

Abb. 10 Spareinlagen
in der DDR



t	y - a	lg (y - a)	t lg (y - a)	f(t)
0	34,2	1,5340	0	40,5
1	28,8	1,4594	1,4594	35,5
2	21,6	1,3345	2,6690	31,4
3	18,6	1,2695	3,8085	27,9
4	12,9	1,1106	4,4424	25,0
Insgesamt		13,3605	0,3579 - 5	

Es ist $\lg b = \frac{13,3605}{9} = 1,4845$; $b = 30,5$

$$\lg r = \frac{55,3579 - 60}{60} = 0,9226 - 1; r = 0,837$$

Da der Abstand zwischen den Werten jeweils zwei Jahre beträgt, ist zur Ermittlung des jährlichen Wachstumstempos aus 0,837 die Wurzel zu ziehen: $r' = 0,915$

Die Funktion lautet demnach:

$$f(t) = 10 + 30,5 \cdot 0,915^t$$

($t = 0$ für 1958)

Aufgabe 106

Da der Sättigungswert größer als die y-Werte ist, lautet der Funktionsansatz: $f(t) = a - br^t$

Es ist $f(t) = 100,0 - 12,7 \cdot 0,895^t$ ($t = 0$ für 1964)

Aufgabe 107

Die durchschnittliche Schwankung je Zeitraum ist

$$Q_k' = T_k : \sum T_k \text{ und } Q_k = T_k : \frac{\sum T_k}{m};$$

wobei

T_k = Summe des Stromverbrauchs eines Zeitraumes für alle Monate und

m = Zahl der Zeiträume eines Tages, $m = 3$, ist.

Für die Berechnung ergibt sich folgende *Arbeitstabelle*:

Zeitraum	T_k	$Q_k\%$	$Q_k\%$
0	1	2	3
6 — 14	1356	38,2	114,6
14 — 22	1272	35,9	107,6
22 — 6	920	25,9	77,8
Insgesamt	3548	100,0	300,0
Durchschnitt	1183		100,0

Es ist

$$Q_k' = T_k : 3548,$$

$$Q_k = T_k : 1183$$

In Abweichung zum Lehrbuch „Allgemeine Statistik“, 3. Auflage, wird P_k analog zur Ermittlung von a (siehe dazu Aufgabe 103) aus der Forderung

$$\sum_t y_{t,k} = \sum_t f(t, k) = \sum_t a q^{k+m(t-1)} P_k$$

ermittelt, um eine gute Anpassung zu erhalten. Daraus ergibt sich für P_k :

$$P_k = \sum_t y_{t,k} : a q^k S_p = T_k : a q^k S_p$$

mit

$$S_p = 1 : p + p^2 + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

Das Ergebnis entspricht etwa dem Ergebnis im Lehrbuch, der Arbeitsaufwand ist gleich.

Es ist

$$a = \sum_t y_{t,k} : \sum_t f(t, k) = \sum_t y_{t,k} : S_p S_q$$

mit

$$S_q = q + q^2 + \dots + q^m$$

In der Aufgabe ist

$$p = \sqrt[6]{\frac{910}{250}} = 1,24 \quad S_p = 11,0$$

$$q = \sqrt[3]{p} = 1,075, \quad S_q = 3,47$$

$$a = 3548 : 11,0 \cdot 3,47 = 93,0$$

Die Arbeitstabelle hat demnach folgendes Aussehen:

Zeitraum	T_k	$a q^k S_p$	P_k
0	1	2	3
6 — 14	1356	1099	1,234
14 — 22	1272	1181	1,078
22 — 6	920	1269	0,725
	3548		

Aufgabe 108

Es ist

$Q_1' = 18,8\%$	und	$P_1 = 0,796$
$Q_2' = 25,5\%$		$P_2 = 1,041$
$Q_3' = 30,8\%$		$P_3 = 1,208$
$Q_4' = 24,9\%$		$P_4 = 0,944$

Aufgabe 109

Die Berechnung des allgemeinen Verlaufs wird gegenüber der Behandlung im Lehrbuch „Allgemeine Statistik“ weiter vereinfacht durchgeführt:

Es ist

$$y_{1,k}^+ = a q^k P_k = T_k : S_p$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich, wenn man für die Größen a und P_k die Formeln entsprechend der Aufgabe 107 einsetzt. Weiterhin ist

$$y_{t,k}^+ = p y_{t-1,k}^+$$

Die theoretischen Werte y^+ des allgemeinen Verlaufs ergeben sich daher aus den Anfangswerten $y_{1,k}^+$ durch Multiplikation mit einer festen Größe.

In der Aufgabe ist $p = \sqrt[3]{\frac{668,5}{431,5}} = 1,157; \quad S_p = 3,496$

Die *Arbeitstabelle* hat demnach folgendes Aussehen:

Quartal	T_k	$T_k : S_p = y_{1,k}^+$	$y_{2,k}^+$	$y_{3,k}^+$
I	441,6	126,3	146,1	169,1
II	417,4	119,4	138,2	159,9
III	429,5	122,9	142,2	164,5
IV	474,8	135,8	157,1	181,8

Aufgabe 110

Quartal	1968	1969
I	1,6	1,5
II	3,3	3,1
III	3,5	3,3
IV	2,6	2,5

Aufgabe 111

1.
$$s_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}} = 0,03,$$

wenn keine anderen Angaben über den Anteil in der Gesamtmenge vorhanden sind.

2. Unter Anwendung der einfachen Näherungsformel erhält man

$$P_o = p + 2 \cdot s_p \text{ oder } P_o = 0,16$$

$$P_u = p - 2 \cdot s_p \text{ oder } P_u = 0,04$$

Unter Verwendung der theoretisch besseren Näherungsformel

$$P_o, P_u = \frac{1}{n + \lambda^2} \left\{ n_1 + \frac{\lambda^2}{2} \pm \lambda \sqrt{\frac{n_1(n - n_1)}{n} + \frac{\lambda^2}{4}} \right\}$$

erhält man

$$P_o, P_u = \frac{1}{100 + 4} \left\{ 10 + 2 \pm 2 \sqrt{\frac{10 \cdot 90}{100} + 1^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad P_o &= 0,176 \text{ oder } 17,6\% \\ P_u &= 0,055 \text{ oder } 5,5\%. \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann so interpretiert werden: Mit einer Sicherheit von 0,955 ist damit zu rechnen, daß der Ausschußanteil in der Gesamtheit mindestens 5,5 Prozent, höchstens jedoch 17,6 Prozent beträgt. Es ist zu beachten, daß das Vertrauensintervall nicht symmetrisch ist um den Wert 0,1.

3. Der relative Standardfehler beträgt:

$$s_{p, \text{rel}} = \frac{s_p}{p},$$

und man erhält

$$s_{p, \text{rel}} = \frac{0,03}{0,1} = 0,3 \text{ oder } 30 \text{ Prozent für den Ausschußanteil}$$

$$s_{q, \text{rel}} = \frac{0,03}{0,9} = 0,033 \text{ oder } 3,3 \text{ Prozent für den Anteil fehler-}$$

freier Exemplare.

Der Unterschied folgt aus der Gleichheit von s_p und s_q , aber der ungleichen Bezugsbasis p bzw. q .

Aufgabe 112

- a) $(0,255 < P < 0,345)$
- b) $n = 1740$
- c) $(0,2644 < P < 0,3356)$.
 $n = 680$

Aufgabe 113

1. $N = 500$

$$s_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \quad \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

$$s_p = 0,0268.$$

$$N = 2000$$

$$s_p = 0,0292.$$

2. $N = 500$

$$P_o = 0,10 + 0,0537 = 0,1537.$$

$$P_u = 0,10 - 0,0536 = 0,0464.$$

$$N = 2000$$

$$P_o = 0,10 + 0,0585 = 0,1585$$

$$P_u = 0,10 - 0,0585 = 0,0415.$$

3. $N = 500$

$$\hat{s}_{p, \text{rel}} = \frac{0,0268}{0,10} = 0,268 \text{ oder } 26,8\%$$

$$s_{q, \text{rel}} = \frac{0,0268}{0,90} = 0,0298 \text{ oder } 2,98\%$$

$$N = 2000$$

$$s_{p, \text{rel}} = \frac{0,0292}{0,1} = 0,292 \text{ oder } 29,2\%.$$

$$s_{q, \text{rel}} = \frac{0,0292}{0,9} = 0,0325 \text{ oder } 3,25\%.$$

Bei $N = 500$ wird die Anzahl der fehlerhaften Stücke mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,955

zwischen 77 und 23

Bei $N = 2000$ zwischen 317 und 83
liegen.

Aufgabe 114

Anteile

	Schätzwert	Standardabweichung	Konfidenzintervall
Frauen	0,4 od. 40%	0,0096 od. 0,96%	0,381 ... 0,419
Männer ü. 50	0,2 od. 20%	0,0078 od. 0,78%	0,1844 ... 0,2157
Nutzer			
unter 30	0,24 od. 24%	0,0084 od. 0,84%	0,2232 ... 0,2567

Anzahl

	Schätzwert	Standardabweichung	Konfidenzintervall
Frauen	24 000	576	22 848 ... 25 152
Männer ü. 50	12 000	468	11 064 ... 12 936
Nutzer			
unter 30	14 400	504	13 392 ... 15 408

Aufgabe 115

Es ist hier $n_1 = 0$. Die Formel für die theoretisch günstigere Näherungslösung des Rückschlußproblems (Aufgabe 1, Teil 2) ergibt für $n_1 = 0$ den Sonderfall:

$$P_o = \frac{\lambda^2}{n + \lambda^2}$$

und man erhält:

$$P_o = \frac{4}{104} = 0,0385 \text{ oder } 3,85\%.$$

Die einfachere Formel zur Ermittlung des Konfidenzintervalls liefert für $n_1 = 0$ kein Ergebnis (da $p = 0$). Der Anteil der fehlerhaften Exemplare kann höchstens 3,85 Prozent betragen (bei einer Sicherheit von 0,955).

Aufgabe 116

a)

	Schätzwert	Standardabweichung	95,50%-Konfidenzintervall
Anteil	0,6	0,033	0,534 ... 0,666
Anzahl	1200	66	1068 ... 1332

b)

	Schätzwert	Standardabweichung	95,50%-Konfidenzintervall
Stud. gegen das Projekt			
Anteil	0,285	0,0303	0,224 ... 0,346
Anzahl	570	60,6	448 ... 692
Indifferent			
Anteil	0,115	0,0214	0,072 ... 0,158
Anzahl	230	42,8	144 ... 316

Aufgabe 117

Dividiert man in der allgemeinen Formel Zähler und Nenner der rechten Seite durch N so erhält man

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P \cdot Q \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{n \left(1 - \frac{1}{N}\right)}}$$

und da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_p = \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}}$$

was zu beweisen war.

Die Standardabweichung des Anteils hängt ab vom Umfang der Gesamtheit und nimmt bei größerem Umfang N zu, strebt jedoch einem Grenzwert zu.

Aufgabe 118

a)

	Schätzwert	Standardabweichung	95,5 %-Konfidenzintervall
über 10 Jahre	0,355	0,016	0,323 ... 0,387
weniger als 10 Jahre	0,645	0,016	0,613 ... 0,677

b) Absolute Anzahl der Haushalte:

über 10 Jahre: Schätzwert 35 500
Standardabweichung 1 600
95 %-Konfidenzintervall 32 300 ... 38 700

weniger als

10 Jahre: Schätzwert 64 500
Standardabweichung 1 600
95 %-Konfidenzintervall 61 300 ... 67 700

c) $n = 596$

Aufgabe 119

1. Gegeben ist $P = 0,1$, sowie $n = 400$. Um das Zufallsintervall der möglichen Ausschußzahlen in den Verpackungseinheiten zu ermitteln, wird die Standardabweichung der Anzahl benötigt.

Es ist

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{400}} = 0,015 \text{ und}$$

$$\sigma_{n_1} = n \cdot \sigma_p = \sqrt{nP \cdot Q} = 6.$$

Die Zahl der Ausschußexemplare liegt mit einer Sicherheit von 0,955 im Bereich

$$n \cdot P \pm 2 \cdot \sigma_{n_1} \text{ oder } n \cdot P \pm 2 \cdot \sqrt{n \cdot P \cdot Q},$$

das heißt

$$40 \pm 2 \cdot 6 \text{ oder}$$

$(28 \leq n_1 \leq 52)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,955.

2. Die Wahrscheinlichkeit $(n_1 > 48)$ ist exakt:

$$\sum_{n_1=49}^{400} \binom{400}{n_1} 0,1^{n_1} \cdot 0,9^{400-n_1}$$

In guter Näherung erhält man den Wert der Summe durch das Integral der Normalverteilung vom Wert $n_1 = 48,5$ bis ∞ . Dem Wert $n_1 = 48,5$ entspricht der normierte Wert:

$$\lambda = \frac{48,5 - n \cdot P}{\sigma_{n_1}} = \frac{48,5 - 40}{\sigma_{n_1}}$$
$$\lambda = 1,42,$$

und die Wahrscheinlichkeit beträgt

$P(n_1 > 48) = 0,5 - \Phi(\lambda)$ wenn $\Phi(\lambda)$ das Integral der Normalverteilung von 0 bis λ bedeutet.

$$P(n_1 > 48) = 0,5 - 0,4222$$

$$P(n_1 > 48) = 0,0778.$$

Das Ergebnis besagt, daß unter 100 Verpackungseinheiten im Mittel 8 zu erwarten sind, die mehr als 48 Ausschußexemplare enthalten.

Aufgabe 120

a) $p = 0,6$

b) $s_p = s_q = 0,0245$

c) Bejahung: $(0,551 < P < 0,649)$
Ablehnung: $(0,351 < Q < 0,449)$

d) $n = 2400$

Aufgabe 121

1. Man prüft, ob $n_1 = 9$ noch als zufällige Abweichung vom Erwartungswert $n \cdot P = 20$ angesehen werden kann und berechnet den dem Wert $n_1 = 9$ entsprechenden normierten Wert λ .

Es ist $\sigma_{n_1} = \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 4,24$

und damit

$$\lambda = \frac{|9 - 20|}{4,24} = 2,60.$$

Dieser Wert ist größer, als der einer Sicherheit von 0,955 ($\lambda=2$) zugeordnete Wert. Man kann $n_1 = 9$ nicht mehr als zufällige Abweichung vom Erwartungswert ansehen.

2. Es ist $\sigma_p = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{200}} = 0,0212$.

Damit erhält man als obere Grenze des Zufallsbereiches

$$P + 2 \cdot \sigma_p = 0,1 + 0,0424 = 0,1424.$$

Erst ein Ausschußanteil von mehr als 14,2 Prozent kann als Beweis einer Verschlechterung angesehen werden.

Aufgabe 122

- a) $p = 0,25$; $q = 0,75$
 b) $s_p = s_q = 0,0484$; $v_p = s_{p,rel} = 0,194$ oder $19,4\%$
 $v_q = s_{q,rel} = 0,0645$ oder $6,45\%$
 c) Unter Anwendung des 1. in der Lösung der Aufgabe 111 angegebenen Verfahrens: $(0,153 < P < 0,347)$; $(0,653 < Q < 0,847)$
 Unter Anwendung des zweiten in der Lösung der Aufgabe 111 angegebenen Verfahrens: $(0,167 < P < 0,357)$; $(0,643 < Q < 0,833)$
 d) $n = 833$

Aufgabe 123

$$1. \quad n = \frac{\lambda^2 \cdot P \cdot Q}{e_p^2 + \frac{\lambda^2 \cdot P \cdot Q}{N}}$$

$$N = 1000$$

$$n = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7}{0,0004 + \frac{0,84}{1000}} \quad \underline{\underline{n = 678 \text{ oder } 67,8\%}}$$

$$N = 5000$$

$$n = \frac{0,84}{0,0004 + \frac{0,84}{5000}}$$

$$\underline{\underline{n = 1479 \text{ oder } 29,6\%}}$$

$$N = 50000$$

$$n = \frac{0,84}{0,0004 + \frac{0,84}{50000}}$$

$$\underline{\underline{n = 2012 \text{ oder } 4,03\%}}$$

$$N = \infty$$

$$n = \frac{0,84}{0,0004} = 2100.$$

	$\left(\frac{n}{N}\right) \cdot 100\%$
2. 1000	67,8
5000	29,6
50000	4,03

Bei gleicher Genauigkeitsforderung e_p nimmt der notwendige Stichprobenumfang nicht proportional zur Erhöhung des Umfanges der Gesamtheit zu. Hieraus resultiert die wichtige Forderung, in der Praxis die Grundgesamtheiten möglichst groß zu wählen, da dann der Auswahlatz $\left(\frac{n}{N}\right)$ geringer wird.

Aufgabe 124

- $N = 1000$: $n = 782$ oder $78,2\%$,
 $N = 5000$: $n = 2092$ oder $41,8\%$
 $N = 50000$: $n = 3357$ oder $6,71\%$.
 $N = \infty$; $n = 3600$.

N	$\left(\frac{n}{N}\right) \cdot 100$
1000	78,2
5000	41,8
50000	6,7

- $N = 1000$: $n = 43$ oder $4,3\%$,
 $N = 5000$: $n = 44$ oder $0,88\%$,
 $N = 50000$: $n = 44$ oder $0,09\%$.

Aufgabe 125

Division des Zählers und des Nenners der allgemeinen Formel durch N ergibt:

$$n = \frac{\lambda^2 \cdot P \cdot Q}{e_p^2 - \frac{e_p^2}{N} + \frac{\lambda^2 \cdot P \cdot Q}{N}}$$

und für $N \rightarrow \infty$ erhält man unmittelbar:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} n = \frac{\lambda^2 \cdot P \cdot Q}{e^2 p},$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 126

- a) Schätzwert: $p = 0,27$
 Standardabweichung: $s_p = 0,014$
 Konfidenzintervall: $(0,242 < P < 0,298)$
- b) $\bar{x} = 2,73$ Personen je Haushalt
 $s_{\bar{x}} = 0,04$ Personen je Haushalt
 $v_{\bar{x}} = 0,0147$ oder $1,47\%$
 $95,5\%$ – Konfidenzintervall: $(2,65 < \bar{X} < 2,81)$

Aufgabe 127

$$1. s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{0,2}{\sqrt{80}} \sqrt{\frac{500-80}{499}}$$

$$s_{\bar{x}} = 0,0205.$$

$$2. s_x = N \cdot s_{\bar{x}}$$

$$s_x = 10,25.$$

$$3. s_{\bar{x} \text{ rel.}} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}$$

$$s_{\bar{x} \text{ rel.}} = 0,0137 \text{ oder } 1,37\%$$

$$s_{x \text{ rel.}} = s_{\bar{x} \text{ rel.}}$$

4. Konfidenzintervalle für eine Sicherheit von 0,955

Durchschnitt: $1,5 \pm 2 \cdot 0,0205$ oder $(1,459 \leq \bar{X} \leq 1,541)$.

Gesamtbetrag: $500 \cdot 1,5 \pm 2 \cdot 10,25 = 750 \pm 20,5$

oder $(729,5 \leq \bar{X} \cdot N \leq 770,5)$.

Das Konfidenzintervall gibt an, in welchen Grenzen der tatsächliche Wert (mit vorgegebener Sicherheit) zu erwarten ist.

Aufgabe 128

$$1. N = 1000$$

$$s_{\bar{x}} = 0,0214$$

$$s_x = 21,4$$

$$s_{\bar{x}\text{rel.}} = 0,0143 \text{ oder } 1,43\%$$

2. $N = 2000$

$$s_{\bar{x}} = 0,0219$$

$$s_x = 43,8$$

$$s_{\bar{x}\text{rel.}} = 0,0146 \text{ oder } 1,46\%$$

3. $N = 5000$

$$s_{\bar{x}} = 0,0222$$

$$s_x = 111$$

$$s_{\bar{x}\text{rel.}} = 0,0149 \text{ oder } 1,49\%$$

N	relativer Standardfehler (%) bei n = 80
500	1,37
1000	1,43
2000	1,46
5000	1,48

Aufgabe 129

a) Gegeben $N = 2000$, Kosten pro Zahn M 10,—

aa) Arzt A untersucht $n = 200$ Kinder. Es soll die Gesamtzahl der kranken Zähne geschätzt werden.

$$x' = x \cdot \frac{N}{n} = 270 \cdot \frac{2000}{200} = 2700 \text{ Schätzwert der Gesamtzahl der kranken Zähne.}$$

Die Gesamtkosten betragen dann (Schätzwert) 27000,— M. Die Standardabweichung wird aus der Tabelle der empirischen Verteilung der Anzahl der kranken Zähne berechnet.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} [\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2]$$

$$s^2 = \frac{1}{199} (810 - \frac{1}{200} \cdot 270^2) = 2,239 \quad s = 1,496 \text{ (Zähne)}$$

Die Standardabweichung des Schätzwertes des Gesamtwertes beträgt

$$s_{x'} = s \cdot \sqrt{\varphi \cdot N} \text{ d. h. } s_{x'} = 1,50 \cdot \sqrt{9 \cdot 2000} = 201,3 \text{ (Zähne)}$$

Das Konfidenzintervall beträgt demnach 2700 ± 402 .

ab) Die Untersuchung des Arztes B ergab, daß 1250 Kinder wenigstens einen kranken Zahn hatten (750 hatten keinen kranken Zahn). Es gilt jetzt, die Gesamtzahl der kranken Zähne der 1250 Kinder mit kranken Zähnen zu schätzen.

$N = 1250$, $n = 120$ (120 Kinder der Stichprobe hatten mindestens einen kranken Zahn).

$$x' = x \cdot \frac{N}{n} \qquad x' = 270 \cdot \frac{1250}{120} = 2812 \text{ (Zähne)}$$

Schätzwert der Gesamtkosten 28 120,— M.

Standardabweichung des Schätzwertes:

$s_x = s \cdot \sqrt{\varphi \cdot N}$, wobei jetzt die Standardabweichung s nur auf die Gesamtheit der 1250 Kinder bezogen werden kann, die überhaupt kranke Zähne hatten.

Es ist

$$s^2 = \frac{1}{119} (810 - \frac{1}{120} \cdot 270^2) = 1,7017 \text{ und } s = 1,305 \text{ (Zähne).}$$

Damit wird

$$s_x = 1,113 \cdot \sqrt{9,42 \cdot 1250} = 142 \text{ (Zähne)}$$

Das Konfidenzintervall für die Gesamtzahl der kranken Zähne beträgt jetzt ($2416 < X < 2984$).

- b) Um den gewünschten Umfang ermitteln zu können, wird $s_x = 142$ gesetzt. Löst man die Gleichung für die Standardabweichung des Schätzwertes des Gesamtwertes nach n auf, so ergibt sich:

$$n = \frac{s^2 \cdot N^2}{s_x^2 + s^2 \cdot N} \text{ das heißt } n = \frac{1,496^2 \cdot 2000^2}{142^2 + 1,496^2 \cdot 2000} = 364 \text{ (Kinder)}$$

Aufgabe 130

- a) $\bar{x} = 109,25 \text{ Kcs} \qquad s = 57,36 \text{ Kcs} \qquad s_{\bar{x}} = 2,87 \text{ Kcs}$
 $(103,51 \bar{X} 114,99) \text{ Kcs}$
 b) $s_{\bar{x}} = 4,68 \text{ Kcs}$ und $(99,89 < \bar{X} < 118,61) \text{ Kcs}$

Aufgabe 131

Es ist $s_{\bar{x},rel} = v_{\bar{x}} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} =$

Die relative Standardabweichung des Schätzwertes des Gesamtwertes lautet:

$$s_{x',rel} = v_{x'} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \text{ und mit } s_{x'} = N \cdot s_{\bar{x}} \text{ und } x' = N \cdot \bar{x}$$

ist

$$s_{x',rel} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} = s_{\bar{x},rel}, \text{ was zu beweisen war.}$$

Aufgabe 132

- a) $n = 165$
b) $\bar{x} = 520 \text{ M}$, $s_{\bar{x}} = 5,26 \text{ M}$ ($509,48 < \bar{X} < 530,52$)
c) Es soll $s_{\bar{x}} = 0,75 \cdot 5,25 = 3,94 \text{ M}$ betragen.
 $n = 262$. Erhöhung des Umfanges um 75 Prozent.

Aufgabe 133

1. Es muß zunächst die Standardabweichung abgeschätzt werden. Da

$$x_{\min} = 400$$

$$x_{\max} = 1200$$

angenommen wird und die Gleichverteilung zwischen diesen beiden Werten als Schätzung von s „nach oben“ angesehen werden kann, setzt man für s den Wert der Standardabweichung der Gleichverteilung zwischen 400 und 1200 ein:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1200 - 400}{2} \right)$$

$$s = 231 \text{ M.}$$

Mit dieser (groben) Schätzung der Standardabweichung erhält man für den notwendigen Stichprobenumfang:

$$n = \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{e_{\bar{x}}^2 + \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{N}}$$

$$n = \frac{4 \cdot 231^2}{15^2 + \frac{4 \cdot 231^2}{10^5}}$$

$$n = 940$$

2. Wenn zusätzlich die Lage des Mittelwertes abgeschätzt werden kann, ist eine bessere Abschätzung der Standardabweichung möglich:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(1200 - 650)(650 - 400)}$$

$$s = 214, \text{ und damit erhält man}$$

$$n = 808.$$

3. Wird $s = 180 \text{ M}$ benutzt, so erhält man:

$$n = \frac{4 \cdot 180^2}{225 + \frac{4 \cdot 180^2}{100000}}$$

$$n = 573.$$

Aufgabe 134

1. $e_{\bar{x}} = 12,61 \text{ M}$
2. $e_{\bar{x},\text{rel}} = 0,0197$ oder $1,97\%$

Aufgabe 135

Es ist:

$$n_1 = \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{e_{\bar{x}}^2}$$
$$n_2 = \frac{\lambda^2 \cdot s}{e_{\bar{x}}^2 + \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{N}}$$

Bildet man

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{e_{\bar{x}}^2} : \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{e_{\bar{x}}^2 + \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{N}}$$

so erhält man:

$$\frac{n_1}{n_2} = 1 + \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{e_{\bar{x}}^2 \cdot N}, \text{ das heißt, } \frac{n_1}{n_2} > 1 \text{ oder } n_1 > n_2,$$

was zu beweisen war.

Man sieht natürlich auch unmittelbar, daß der Nenner der Formel für n_2 größer ist, als der Nenner des Ausdrucks für n_1 ., daraus folgt direkt $n_2 < n_1$.

Aufgabe 136

- a) $\bar{x} = 1,4$ (Kinder je Familie) $x' = 3920$ (Kinder) -
- b) $s_{\bar{x}} = 0,160$ Kinder je Familie $v_{\bar{x}} = 0,1143$ oder $11,43\%$
 $s_x = 448$ Kinder $v_x = 0,1134$ oder $11,43\%$
($1,08 < \bar{X} < 1,72$); ($3024 < X < 4816$)
- c) $n = 1664$

Aufgabe 137

Gegeben ist $N = 15000$ Haushalte. Gefragt ist nach der Gesamtzahl der Einwohner dieser N Haushalte. Der Umfang der Stichprobe beträgt $n = 30$.

- a) Es ist $\bar{x} = 104 : 30 = 3,467$ Einwohner pro Haushalt. Der Schätzwert der Einwohnerzahl beträgt

$$x' = \bar{x} \cdot N = 3,467 \cdot 15\,000 = 52\,005.$$

$$s_x = s \cdot \sqrt{\varphi N} = 3352, \text{ wobei } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot (\sum x_i)^2 \right]}$$

= 1,225 Personen.

$$\text{und } \sum x_i = 104, \sum x_i^2 = 404$$

$$v_{x'} = \frac{s_{x'}}{x'} = \frac{3352}{52\,005} = 0,0645 \text{ oder } 6,45\%$$

95,5% -Konfidenzintervall: $(45\,301 < X < 58\,709)$

$$4 \cdot \left(\frac{1,225}{3,467} \right)^2$$

$$b) n = \frac{\lambda^2 \cdot v^2}{e_{\bar{x}', \text{rel}}^2 + \frac{\lambda^2 \cdot v^2}{N}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{1,225}{3,467} \right)^2}{0,0009 + \frac{4 \cdot 0,353^2}{15\,000}} =$$

$$n = 535$$

Aufgabe 138

a) $s_{\bar{x}} = 4,56 \text{ M}$

$$v_{\bar{x}} = 0,0083 \text{ oder } 0,83\%$$

$$(540,86 < \bar{X} < 559,14) \text{ (Nettolohn)}$$

b) $x' = 325\,000 \text{ M}$ $s_{x'} = 6513 \text{ M}$

$$s_{\bar{x}} = 1,30 \text{ M}$$

$$v_{\bar{x}} = 0,02 \text{ oder } 2\%$$

ca) $n = 40$

cb) $n = 226$

Aufgabe 139

$$a) \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x}{n} = \frac{3220}{20} = 161 (10^3 \text{ M})$$

$x' = N \cdot \bar{x} = 400 \cdot 161 = 64\,400 (10^3 \text{ M})$ Schätzwert des Gesamtumsatzes.

Zur Ermittlung der Standardabweichung der Schätzwerte ist die Standardabweichung der Einzelwerte erforderlich.

Es ist $\sum x_i = 3220$, $\sum x_i^2 = 716320$ und man erhält

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} \sum x_i \cdot \sum x_i \right] = 10400 \text{ und } s_x = 102 \text{ (10}^3 \text{ M)}$$

Die Standardabweichung des Schätzwertes des Gesamtwertes beträgt dann

$$s_{\bar{x}}' = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N}} \cdot N = 8900 \text{ (10}^3 \text{ M)} \text{ und } s_{\bar{x}} = \frac{s_{\bar{x}}'}{N} = 22,2 \text{ (10}^3 \text{ M)}$$

$$v_{\bar{x}} = v_{\bar{x}}' = \frac{8900}{64400} = 0,138 \text{ oder } 13,8 \%$$

b) Gegeben ist nun zusätzlich der Gesamtwert (Summe) der Umsätze aller Verkaufsstellen des Jahres 1966 $Y = 49500$. Diese Angaben liegen demnach auch für die Verkaufsstellen der Stichprobe vor (siehe Spalte 3 der Tabelle)

$$\text{ba) } x'_Q = \frac{\sum x_i}{\sum y_i} \cdot Y = \frac{3220}{2570} \cdot 49500 = 62019 \text{ (10}^3 \text{ M)}$$

$$\bar{x}_Q = \frac{x'_Q}{N} = \frac{62019}{400} = 155,0 \text{ (10}^3 \text{ M)}$$

bb) Die Verhältnisschätzung ist effektiver als die freie Hochrechnung, wenn

$$r > \frac{1}{2} \cdot \frac{s_y}{s_x} \cdot t \text{ ist}$$

Durch Anfügen entsprechender Spalten erhalten wir aus der Arbeitstabelle der Einzelwerte:

$$\sum y_i = 2570, \sum y_i^2 = 470345, \sum x_i y_i = 579575$$

Damit erhält man

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum y_i^2 - \frac{1}{n} \sum y_i \cdot \sum y_i \right]} = \sqrt{\frac{1}{19} \cdot 140320} = 86,0 \text{ (10}^3 \text{ M)}$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \cdot \sum y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2}} = 0,991$$

$$\text{Nun ist in der Tat } 0,991 > \frac{1}{2} \cdot \frac{86,0}{102,1} \cdot 1,25 = 0,526$$

bc) Die Standardabweichung des Schätzwertes beträgt bei Verhältnisschätzung

$$s_{\bar{x},Q} = \sqrt{\varphi \cdot N \cdot \sqrt{s_x^2 + t^2 s_y^2 - 2 \text{tr}_{s_x s_y}}} = 1232 \text{ (10}^3 \text{ M)}$$

$$\text{und damit } v_{\bar{x},Q} = \frac{s_{\bar{x},Q}}{s_{\bar{x}}'} = 1232 : 62019 = 0,02 \text{ oder } 2\%$$

c) Die Formel der Regressionsschätzung lautet:

$$x'_R = x \cdot \frac{N}{n} + b \left(Y - \frac{N}{n} y \right)$$

Der Regressionskoeffizient beträgt: $b = r \cdot \frac{s_x}{s_y} = 1,182$

Damit ergibt sich

$$x'_R = 64400 + 1,18 (49500 - 20 \cdot 2570) = \underline{62160 \text{ (} 10^3 \text{ M)}}$$

Die Standardabweichung des Schätzwertes der Regressionsschätzung wird berechnet nach der Formel

$$\begin{aligned} s_{x', \text{ Regr.}} &= s_x \cdot \sqrt{\varphi N} \cdot \sqrt{1 - r^2} \\ &= 8900 \cdot \sqrt{1 - 0,9915^2} = 8900 \cdot \sqrt{0,017} \\ &= \underline{1160 \text{ (} 10^3 \text{ M)}} \end{aligned}$$

$$V_{x', \text{ Regr.}} = \frac{s_{x', R}}{x'_R} = \frac{1160}{62160} = 0,0181 \text{ oder } 1,87\%$$

Schätzung des Durchschnitts:

$$\bar{x}_R = \frac{x'_R}{N} = \frac{62160}{400} = \underline{155,4 \text{ (} 10^3 \text{ M)}}$$

$$s_{\bar{x}R} = \frac{s_{x'R}}{N} = \frac{1160}{400} = \underline{2,90}$$

$$V_{\bar{x}R} = V_{x'R} = \underline{0,0187 \text{ oder } 1,87\%}$$

Hochrechnungsverf.	Schätzwert des Gesamtwertes (in 10^3 M)	Standardabweichung des Schätzwertes	
		absolut (in 10^3 M)	relativ (%)
Freie Hochrechnung	64 400	8 880	13,8
Verhältnis-schätzung	62 019	1 232	2,0
Regressions-schätzung	62 160	1 160	1,87

Die Regressionsschätzung liefert die genauesten Schätzwerte.

Aufgabe 140

$$\begin{aligned} 2. \quad r &= 0,947; \quad b = 0,388 \\ x^* &= -13,4 + 0,388 y^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x' &= 31800 \\ x'_{\text{Q}} &= 35800 \\ x'_{\text{D}} &= 44830 \\ x'_{\text{R}} &= 36930 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad s_{x'} &= 4520 & v_{x'} &= 0,142 \text{ oder } 14,2\% \\ s_{x', \text{Q}} &= 1920 & v_{x', \text{Q}} &= 0,054 \text{ oder } 5,4\% \\ s_{x', \text{D}} &= 6900 & v_{x', \text{D}} &= 0,154 \text{ oder } 15,4\% \\ s_{x', \text{R}} &= 1460 & v_{x', \text{R}} &= 0,0396 \text{ oder } 3,96\% \end{aligned}$$

Die Regressionsschätzung liefert (wie erwartet) die besten Ergebnisse.

Aufgabe 141

1. Es ist $\sum x_i = 6270$, $\sum y_i = 5054$. Damit wird

$$x'_{\text{Q}} = \frac{6270}{5054} \cdot 22\,919 = 1,241 \cdot 22\,919 = \underline{28,433 \text{ Millionen}}$$

2. Freie Hochrechnung: $x' = \frac{N}{n} \cdot x = 6\,270 \cdot \frac{196}{49} = \underline{25,080 \text{ Millionen.}}$

3. Zur Ermittlung der Standardabweichung der Schätzwerte sind die Standardabweichungen s_x und s_y der Einzelwerte notwendig, die aus den angegebenen Zahlen ermittelt werden müssen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_x &= 122,94 \text{ (} 10^3 \text{ Einwohner)} \\ s_y &= 104,4 \text{ (} 10^3 \text{ Einwohner)} \end{aligned}$$

Freie Hochrechnung:

$$\begin{aligned} s_{x'} &= s_x \sqrt{\varphi N} = 122,94 \sqrt{\frac{196 - 49}{49} \cdot 196} \\ &= 2981, \text{ das heißt } 2,981 \text{ Millionen Einwohner} \\ v_{x'} &= \frac{2,981}{25,08} = 0,119 \text{ oder } 11,9\% \end{aligned}$$

Verhältnisschätzung:

$$\begin{aligned} s_{x', \text{Q}} &= \sqrt{\varphi \cdot N \cdot \sqrt{s_x^2 + t^2 \cdot s_y^2 - 2 \text{tr} s_x s_y}} \\ &= \sqrt{3 \cdot 196 \cdot \sqrt{15177 + 1,553 \cdot 10900 - 2 \cdot 1,246 \cdot 0,981 \cdot 122,94 \cdot 104,4}} \\ \underline{s_{x', \text{Q}}} &= 625 \text{ und } v_{x', \text{Q}} = \frac{625}{28\,433} = 0,022 \text{ oder } 2,2\% \end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient $r = 0,981$ muß aus den Einzelwerten der Tabelle berechnet werden.

Die Konfidenzintervalle lauten: $\bar{x}' \pm 2 \cdot s_{\bar{x}'}$,

Freie Hochrechnung: $X = 25,080 \pm 5,961$ Mio.

Verhältnisschätzung: $X = 28,433 \pm 1,25$ Mio.

Die Verhältnisschätzung ist wesentlich günstiger als die freie Hochrechnung.

4. Der tatsächliche Wert 29,351 Mio liegt sowohl innerhalb des Konfidenzintervalls der freien Hochrechnung als auch im 95,5%-Konfidenzintervall der Verhältnisschätzung.

Aufgabe 142

1. Der Standardstichprobenfehler bei ungeschichteter Auswahl (uneingeschränkte Zufallsauswahl) beträgt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{10}{\sqrt{600}} \cdot \sqrt{0,94}$$

$$s_{\bar{x}} = 0,395.$$

2. Der Standardfehler bei beliebiger Aufteilung beträgt

$$s_{\bar{x}g} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum N_h^2 \cdot \frac{s_h^2}{n_h} \cdot \frac{N_h - n_h}{N_h - 1}}$$

oder

$$s_{\bar{x}g} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum N_h \cdot s_h^2 \left(\frac{N_h}{n_h} - 1 \right)}$$

für $N_h \gg 1$

Die *Arbeitstabelle* hat folgendes Aussehen:

Schicht h	N_h	s_h	s_h^2	$N_h \cdot s_h$	$N_h \cdot s_h^2$	$\frac{N_h}{n_h} - 1$	$N_h s_h^2$ $\left(\frac{N_h}{n_h} - 1 \right)$	$n_h =$ $n \cdot \frac{N_h}{N}$	$n_h =$ $n \cdot \frac{N_h s_h}{\sum N_h \cdot s_h}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1000	6	36	6000	36000	4	144000	60	80
2	3000	5	25	15000	75000	14	1050000	180	200
3	6000	4	16	24000	96000	29	2784000	360	320
	10000			45000	207000		3978000	600	600

Man erhält also:

$$s_{\bar{x}g} = \frac{1}{10000} \cdot \sqrt{3,978 \cdot 10^6} = \frac{1990}{10000} = 0,199.$$

3. Bei proportionaler Aufteilung ist $n_h = n \cdot \frac{N_h}{N}$ (siehe Spalte 9). Als

Sonderfall der allgemeinen Formel für den Stichprobenfehler bei geschichteter Auswahl (siehe Teil 2 dieser Aufgabe) erhält man für die proportionale

Auswahl wegen $\frac{N_h}{n_h} = \frac{N}{n}$:

$$s_{\bar{x} \text{ prop.}} = \sqrt{\frac{N-n}{n \cdot N^2} \cdot \sum N_h s_h^2}$$

und damit

$$s_{\text{prop.}} = \sqrt{\frac{9400}{600 \cdot 10^8} \cdot 207 \cdot 10^3}$$

$$s_{\bar{x} \text{ prop.}} = 0,18.$$

4. Die Formel für die Berechnung der n_h bei optimaler Aufteilung lautet :

$n_h = n \cdot \frac{N_h s_h}{\sum N_h \cdot s_h}$ (Ergebnisse siehe Spalte 10 der Arbeitstabelle). Die all-

gemeine Formel geht über in:

$$s_{\bar{x} \text{ opt.}} = \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\frac{(\sum N_h s_h)^2}{n} - \sum N_h s_h^2}$$

und es wird:

$$s_{\bar{x} \text{ opt.}} = \frac{1}{10^4} \cdot \sqrt{\frac{45^2 \cdot 10^6}{600} - 2,07 \cdot 10^5}$$

$$s_{\bar{x} \text{ opt.}} = 0,178.$$

Auswahl	Standardfehler des Durchschnitts
1	2
Uneingeschränkte Auswahl	0,396
Geschichtete Auswahl $n_h = 200$	0,199
Geschichtete Auswahl proportional	0,18
Geschichtete Auswahl optimal	0,178

Die Tabelle gibt an, wie bei gleichem Umfang der Gesamtprobe durch unterschiedliche Aufteilung auf die einzelnen Schichten der Stichprobenfehler vermindert werden kann. Die optimale Aufteilung ist demnach anzustreben. Nicht immer sind die erforderlichen Angaben s_h zur Ermittlung der optimalen Aufteilung bekannt.

Aufgabe 143

a) $= 1500$, $n_1 = 800$, $n_2 = 400$, $n_3 = 300$.

b) Die Werte der Spalte 4 der Tabelle sind die Schätzwerte der Durchschnitts.

- ba) $x_A = 264 \cdot 10^6$ Liter $x_B = 120 \cdot 10^6$ Liter
 $x_C = 78 \cdot 10^6$ Liter
bb) $x' = 462 \cdot 10^6$ Liter $\bar{x} = 3080$ Liter
ca), cb) Durchschnittliche Milchleistung:

	Standardabweichung (l)	Variationskoeffizient (%)	95,5%-Konfidenzintervall (l)
A	17,575	0,53	3264,85 3335,15
B	19,90	0,66	2960,2 3039,8
C	14,359	0,55	2571,3 2628,7
Bezirk	11,1	0,36	3058 3102

Gesamtaufkommen

	Standardabweichung (10 ⁶ Liter)	Variationskoeffizient (%)	95,5%-Konfidenzintervall (10 ⁶ Liter)
A	1,406	0,53	261,2 266,8
B	0,796	0,66	118,41 121,16
C	0,431	0,55	77,14 78,86
Bezirk	1,665	0,36	458,7 465,3

- d) $n_A = 945$, $n_B = 378$, $n_C = 177$
e) $\bar{x} = 3080$ l/Kuh, $x' = 462 \cdot 10^6$ Liter, $s_{x'} = 1,63 \cdot 10^6$ Liter,
 $v_{x'} = 0,35\%$
f) $s_{x'} = 1,97 \cdot 10^6$ Liter, $v_{x'} = 0,43\%$, $458,0 < X < 465,9$

g) Schätzung des Gesamtaufkommens des Bezirks.

Auswahlverfahren	Variationskoeffizient
uneingeschränkte Zufallsauswahl	0,43%
Geschichtete proportionale Auswahl	0,36%
Geschichtete optimale Auswahl	0,35%

Aufgabe 144

Für $e_{\bar{x}} = 0,4$ wird der notwendige Stichprobenumfang bei uneingeschränkter Zufallsauswahl:

$$n = \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{e_{\bar{x}}^2 + \frac{\lambda^2 \cdot s^2}{N}}$$

oder:

$$n = 2000.$$

Proportionale Auswahl:

$$n = \frac{\lambda^2 \sum N_h s_h}{Ne_{\bar{x}}^2 + \frac{\lambda^2 \sum N_h s_h^2}{N}} \quad n = 492$$

Optimale Auswahl:

$$n = \frac{\lambda^2 (\sum N_h s_h)^2}{e_{\bar{x}}^2 \cdot N^2 + \lambda^2 \cdot \sum N_h s_h^2}, \quad n = 482$$

Zusammenstellung des notwendigen Stichprobenumfangs für einen maximalen Zufallsfehler des Durchschnitts von $e_{\bar{x}} = 0,4$ für verschiedene Auswahlverfahren:

Auswahl	n
uneingeschränkt	2000
proportionalgeschichtete Auswahl	492
optimale geschichtete Auswahl	482

Aufgabe 145

a) Wir wählen als Irrtumswahrscheinlichkeit den Wert 0,05.

Es ist $p = \frac{k}{n} = 0,32$, das heißt 32 Prozent

Die Standardabweichung des Anteils beträgt $\sigma_p = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{1000}} = 0,0155.$$

Als Testgröße wird der Wert der normierten Abweichung des Stichprobenergebnisses vom Wert der Annahme berechnet.

Es ist

$$\lambda = \frac{P - p}{\sigma_p} = \frac{0,4 - 0,32}{0,0155} = \frac{0,08}{0,0155}$$

$$\lambda = 5,16$$

Der zur Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 gehörige Tabellenwert der Normalverteilung beträgt $\lambda_{0,05} = 1,96$.

Es ist $\lambda > \lambda_{0,05}$. Der Unterschied ist demnach statistisch gesichert. Die Testgröße übersteigt sogar beträchtlich den Zufallshöchstwert für eine Irrtumswahrscheinlichkeit 0,001. ($\lambda_{0,001} = 3,3$).

b) Die Nullhypothese lautet $H_0(P = 0,4)$

Aufgabe 146

$$\lambda = 1,56; \quad \lambda_{0,05} = 1,96$$

Die Abweichung ist statistisch nicht gesichert. Das Stichprobenergebnis steht nicht im Widerspruch zu der Annahme.

Aufgabe 147

Wir wählen als Irrtumswahrscheinlichkeit den Wert 0,05.

Es ist

$$p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = 0,6$$

Die Standardabweichung der Differenz beträgt

$$\sigma_D = \sqrt{p(1-p) \left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2} \right]} = 0,04472$$

Als Testgröße erhalten wir

$$\lambda = \frac{|p_1 - p_2|}{\sigma_D} = \frac{0,05}{0,04472} = 1,12$$

Der zur Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 gehörige Tabellenwert der Normalverteilung beträgt $\lambda_{0,05} = 1,96$

Es ist $\lambda < \lambda_{0,05}$. Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden. Eine statistisch gesicherte Aussage über einen unterschiedlichen Besitz mit Fernsehgeräten in den beiden Kreisen ist nicht möglich.

Aufgabe 148

$$\lambda = 1,67; \quad \lambda_{0,05} = 1,96$$

Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden. Der Unterschied ist statistisch nicht gesichert.

Aufgabe 149

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist 0,05. Die Standardabweichung der Differenz beträgt

$$s_D = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 9,79 \text{ M.}$$

Die Testgröße ist

$$\lambda = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_D} = \frac{|650 - 680|}{9,79} = 3,06$$

Der zur Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 gehörige Tabellenwert der Normalverteilung beträgt $\lambda_{0,05} = 1,96$.

Es ist $\lambda > \lambda_{0,05}$. Die Differenz ist statistisch gesichert. Das durchschnittliche Monatseinkommen der Beschäftigten mit Fachschulabschluß im Industriezweig B ist signifikant höher als im Industriezweig A.

Aufgabe 150

$$\lambda = 3,92; \quad \lambda_{0,05} = 1,96$$

Es ist $\lambda > \lambda_{0,05}$, das heißt der Unterschied ist statistisch hoch gesichert. Der Durchschnitt des Merkmals ist in den Südbezirken statistisch gesichert höher.

Aufgabe 151

Die Analyse beschränkt sich auf die Ermittlung von Kennziffern der allgemeinen Statistik.

Um eine vollständige Analyse der tatsächlichen Situation geben zu können, müßte eine Reihe zusätzlicher Angaben aus den drei Betrieben und der VVB vorhanden sein, ebenso dürften spezifische Gesichtspunkte der Fachstatistik, zum Beispiel der Industriestatistik, nicht unbeachtet bleiben. Die hier zu gewinnenden Aussagen sind daher nur als Gerüst einer vollständigen und tiefgehenden Analyse zu werten.

In der angegebenen Lösung wurden nur die wesentlichsten Kennziffern zur Beurteilung des Niveaus und der Entwicklung angeführt. Die Ermittlung der Kennziffern wird am Schluß der Lösung dargelegt.

Textanalyse

1. Entwicklung der Produktion, des Materialverbrauchs und des Zeitaufwandes der VVB von 1960 bis 1963.

Während sich die Produktion von 1960 bis 1963 verzehnfacht hat und durchschnittlich jährlich um 115,5% gestiegen ist, ist der Materialverbrauch nur auf 704% oder durchschnittlich jährlich um 91,7% und der Zeitaufwand nur auf 400% oder durchschnittlich jährlich um 58,7% gestiegen.

Diese Entwicklung spiegelt sich auch in der Entwicklung des Materialverbrauchs pro Stück und der Stückzahl pro Stunde wider. So sank der Materialverbrauch pro Stück von 1960 bis 1963 um 29,6% oder durch-

schnittlich jährlich um 11,0%, während die Stückzahl pro Stunde um 150% oder durchschnittlich jährlich um 35,7% gestiegen ist.

(Für die einzelnen Betriebe wird die Entwicklung in gleicher Weise dargestellt.)

2. Einfluß der Betriebe auf die Entwicklung der Produktion und der Produktion pro Zeitaufwand der VVB in den einzelnen Jahren

- a) Die Veränderung des Zeitaufwandes in den einzelnen Betrieben bewirkte eine Entwicklung der Produktion der VVB 1962/61 auf 224% oder um 2480 Stück, während es 1963/62 nur 115% oder 750 Stück waren.

Die Ursachen dafür liegen darin, daß einmal der gesamte Zeitaufwand 1962/61 auf 200% und 1963/62 nur auf 125% gestiegen ist, zum zweiten 1962/61 eine positive Änderung des Anteils der Betriebe am Zeitaufwand der VVB erfolgte, die eine zusätzliche Steigerung der Produktion auf 112% bewirkte, während 1963/62 eine zunächst negative Änderung des Anteils der Betriebe erfolgte, die eine Senkung der Produktion auf 92% zur Folge gehabt hätte. Die Steigerung der Produktion durch Veränderung des Zeitaufwandes in den Betrieben setzt sich demnach wie folgt zusammen:

	Erhöhung insgesamt		Strukturänderung
<i>Relativ</i>			
1962/61	200%		112% = 224%
1963/62	125%		92% = 115%
<i>Absolut</i>			
1962/61	2000	+	480 = 2480
1963/62	1250	—	500 = 750

- b) Die Veränderung der Stückzahl pro Stunde in den einzelnen Betrieben bewirkte 1962/61 eine Steigerung der Produktion auf 111,6% oder um 520 Stück und 1963/62 sogar auf 174% oder um 4250 Stück.

- c) Die Änderung des Anteils der einzelnen Betriebe am Zeitaufwand bewirkte 1962/61 eine Steigerung der Stückzahl pro Stunde der VVB auf 112% oder um 0,24 Stück/Std., 1963/62 dagegen eine Senkung auf 92% oder um 0,20 Stück/Std.

Diese zunächst negativ aussehende Wirkung der Strukturänderung liegt darin begründet, daß Betrieb A mit seiner 1962 niedrigsten Stückzahl pro Stunde seinen Zeitaufwand verdoppelt hat. Diese Verdopplung war jedoch gleichzeitig mit einer wesentlichen Steigerung seiner Stückzahl je Stunde verbunden, so daß die Strukturänderung im Endeffekt durchaus nicht negativ einzuschätzen ist.

- d) Die Steigerung der Stückzahl pro Stunde in allen Betrieben bewirkte 1962/61 eine Steigerung des Durchschnitts der VVB auf 111,6% oder um 0,26 Stück/Std. und 1963/62 sogar auf 174% oder um 1,7 Stück/Std.

Die Veränderung des Durchschnitts der VVB setzt sich demnach wie folgt zusammen:

	Strukturänderung des Zeitaufwandes		Steigerung der Stück/Std.
<i>relativ</i>			
1962/61	112%		111,6% = 125%
1963/62	92%		174 % = 160%
<i>absolut</i>			
1962/61	0,24	+	0,26 = 0,50
1963/62	— 0,20	+	1,70 = 1,50

3. Widerspiegelung der Streuung der Stückzahl pro Stunde in den einzelnen Betrieben um den Durchschnitt der VVB

Während die durchschnittliche relative Streuung 1962 gegenüber 1961 von 20,0% auf 28,8% gestiegen ist, ist sie 1963 auf 4% herabgesunken. Die Betriebe weisen 1963 nur noch geringe Leistungsunterschiede auf. Betrachtet man nur die durchschnittliche Abweichung der unter dem jeweiligen Durchschnitt des Jahres liegenden Betriebe, so ist festzustellen, daß die Abweichung zum Durchschnitt relativ immer geringer geworden ist, nämlich von 20% 1961 auf 18% 1962 und schließlich auf 10% 1963 gesunken ist.

4. Widerspiegelung der periodischen Schwankungen und des allgemeinen Verlaufs der Produktion in den Quartalen der einzelnen Jahre

Die Bewegung der Produktion ist der Abbildung zu entnehmen:

Man erkennt, daß die Produktion einen typischen periodischen Verlauf aufweist. Ebenso ist der Abbildung zu entnehmen, daß als Trend eine Exponentialfunktion anzunehmen ist. (Auf die fachökonomische Begründung der Wahl des Funktionstyps muß hier verzichtet werden.)

Die Produktion verteilt sich durchschnittlich auf die einzelnen Quartale mit folgenden Anteilen:

	I.	II.	III.	IV.
Anteil	15%	40%	30%	15%

Die Planung der Produktion müßte demnach entsprechend diesen Anteilen für die einzelnen Quartale vorgenommen werden, wenn die Produktion weiterhin mit dem gleichen Prozentsatz steigt. Die Schwankung der Produktion um den Quartalsdurchschnitt beträgt:

	I.	II.	III.	IV.
	60%	160%	120%	60%

Schaltet man den Trend aus, so erhält man folgende Schwankungen P_K um den Durchschnitt:

	I.	II.	III.	IV.
	78,0%	171,8%	106,3%	43,9%

Mit diesen Prozentsätzen ist der Vergleich der eigentlichen periodischen Schwankungen mit den Schwankungsgrößen anderer Erscheinungen durchzuführen. Bei Verwendung der trendbereinigten Schwankungen erhält man den in der Abbildung eingezeichneten allgemeinen Verlauf der Entwicklung der Produktion. Die mathematische Funktion $y^*(t)$ des allgemeinen Verlaufs setzt sich aus folgenden Komponenten zusammen:

$$y^*(t) = a \cdot P_K \cdot q^t,$$

wobei

$$a = 346,0 \text{ und } q = 1,212 \text{ ist.}$$

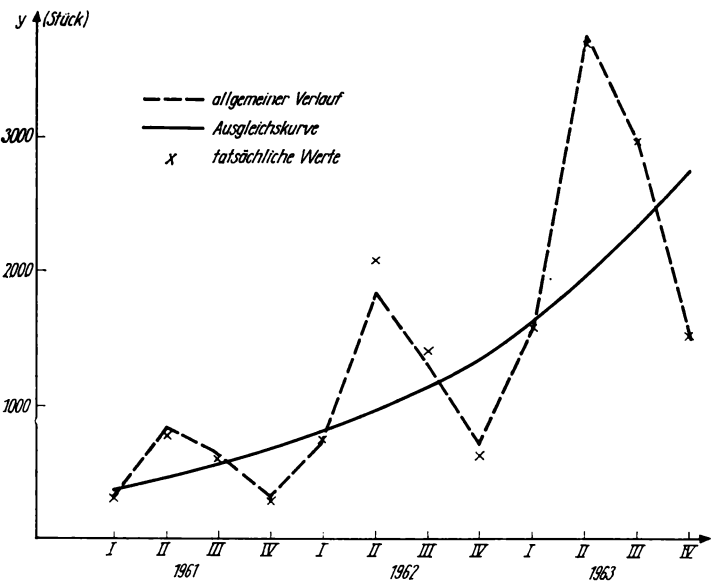


Abb. 11: Entwicklung der Stückzahl

Zur Darstellung der Grundrichtung der Entwicklung wurde eine Ausgleichskurve nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt und ebenfalls in der Abbildung 11 eingetragen.

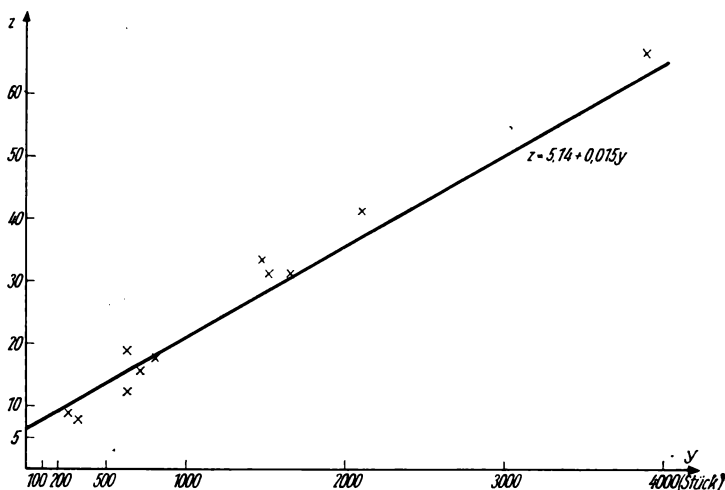


Abb. 12: Abhängigkeit des Materialverbrauchs von der Stückzahl

Die Funktion der Ausgleichskurve weicht geringfügig von dem vorhandenen durchschnittlichen Wachstumstempo von 1,212 ab. Die Ursache der Abweichung liegt darin, daß das durchschnittliche Wachstumstempo von dem Gesamtwachstum der Produktion während der Zeit von 1960 bis 1963 ausgeht, während der Anstieg der Ausgleichskurve von der in den Jahren 1961 bis 1963 insgesamt vorhandenen Produktion ausgeht.

5. Abhängigkeit des Materialverbrauchs von der Höhe der Produktion
Die Abbildung zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Höhe der Produktion und der Höhe des Materialverbrauchs:

Als Regressionsfunktion wird eine Gerade angenommen, da sich der Materialverbrauch proportional zur Produktionshöhe bewegen wird. Die Abbildung 12 bestätigt die Richtigkeit der Auswahl einer Geraden.

Die Regressionsfunktion lautet:

$$z(y) = a + by,$$

$$z(y) = 5,14 + 0,015y.$$

Der Korrelationskoeffizient r beträgt 0,98. Die Anpassung der Funktion an die tatsächlichen Größen ist also außerordentlich hoch. Das bedeutet, daß der Materialverbrauch mit sehr guter Näherung nach der Regressionsfunktion geplant werden kann. Ist z. B. für 1964 eine Produktionshöhe von 12000 Stück geplant, so müßte als Näherungswert für den Materialverbrauch $5,14 + 0,015 \cdot 12000$ oder etwa 185 t angesetzt werden.

Tabellenteil und Rechenweg

1. Ermittlung des Wachstumstempos:

Produktion 1960 = y_0 = 1000.

Produktion 1963 = y_3 = 10000 = 1000% von 1960.

Durchschnittliches Wachstumstempo

$$p = \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} = \sqrt[3]{\frac{10000}{1000}} = 2,155.$$

Die Produktion stieg demnach jährlich durchschnittlich auf 215,5% oder um 115,5%.

Materialverbrauch 1960 = 24 t.

Materialverbrauch 1963 = 169 t = 704% von 1960.

$$\text{Durchschnittliches Wachstumstempo} = \sqrt[3]{\frac{169}{24}} = 1,917.$$

Der Materialverbrauch stieg jährlich durchschnittlich auf 191,7% oder um 91,7%.

$$\text{Materialverbrauch pro Stück 1960} = \frac{24}{1000} = 0,024 \text{ t.}$$

$$\text{Materialverbrauch pro Stück 1963} = \frac{169}{10000} = 0,0169 \text{ t} = 70,4\% \text{ von 1960.}$$

$$\text{Durchschnittliches Wachstumstempo} = \sqrt[3]{\frac{0,0169}{0,024}} = 0,890.$$

Der Materialverbrauch pro Stück sank jährlich durchschnittlich auf 89,0% oder um 11,0%.

Zeitaufwand 1960 = 625 Std.

Zeitaufwand 1963 = 2500 Std. = 400% von 1960.

$$\text{Durchschnittliches Wachstumstempo} = \sqrt[3]{\frac{2500}{625}} = 1,587.$$

Der Zeitaufwand stieg jährlich durchschnittlich auf 158,7% oder um 58,7%.

Produktion pro Zeitaufwand 1960 = 1,6 Stück/Std.

Produktion pro Zeitaufwand 1963 = 4,0 Stück/Std. = 250% von 1960.

$$\text{Durchschnittliches Wachstumstempo} = \sqrt[3]{\frac{4,0}{1,6}} = 1,357.$$

Die Produktion pro Zeitaufwand stieg jährlich durchschnittlich auf 135,7% oder um 35,7%.

2. Indexanalyse

Betrieb	Zeitaufwand in Stunden			Produktion pro Stunde			Produktion in Stück				
	n_1	n_2	n_3	y_1	y_2	y_3	n_1y_1	n_2y_1	n_2y_2	n_3y_2	n_3y_3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	500	800	1600	1,6	1,8	4,0	800	1280	1440	2880	6400
B	400	800	500	2,0	2,3	3,6	800	1600	1840	1150	1800
C	100	400	400	4,0	4,3	4,5	400	1600	1720	1720	1800
Insgesamt	1000	2000	2500	—	—	—	2000	4480	5000	5750	10000
Durchschnitt	—	—	—	2,0	2,5	4,0	2,00	2,24	2,50	2,30	4,00

1962/61:

1963/62

$I_n = 200\%$	+ 1000 Std.	$I_n = 125\%$	+ 500 Std.
$I_m = 250\%$	+ 3000 Stück	$I_m = 200\%$	+ 5000 Stück
$I_y = 125\%$	+ 0,5 Stück/Std.	$I_y = 160\%$	+ 1,5 Stück/Std.
$I_m^n = 224\%$	+ 2480 Stück	$I_m^n = 115\%$	+ 750 Stück
$I_m^y = 111,6\%$	+ 520 Stück	$I_m^y = 174\%$	+ 4250 Stück
$I_y^n = 112\%$	+ 0,24 Stück/Std.	$I_y^n = 92\%$	— 0,20 Stück/Std.
$I_y^y = 111,6\%$	+ 0,26 Stück/Std.	$I_y^y = 174\%$	+ 1,70 Stück/Std.

3. Streuungstabelle

	n	m	y	an	Δ	δ	δ'
	1	2	3	4	5	6	7
1961: Σ	1000	2000	2,0	—	400	0,4	20%
negativ	500	800	1,6	1000	200	0,4	20%
1962: Σ	2000	5000	2,5	—	1440	0,72	28,8%
negativ	1600	3280	2,05	4000	720	0,45	18,0%
1963: Σ	2500	10000	4,0	—	400	0,16	4%
negativ	500	1800	3,6	2000	200	0,40	10%

4. Periodische Schwankungen

Quartal	T_k	$Q'_k\%$	$Q''_k\%$	$\lg T_k$	$\lg q^k$	$\lg T_k : q^k$	$T_k : q^k$	$\lg P_k$	$P_k\%$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	2550	15,0	60,0	3,4065	0,0833	3,3232	2105	0,8922—1	78,0
II	6800	40,0	160,0	3,8325	0,1667	3,6658	4633	0,2349	171,8
III	5100	30,0	120,0	3,7076	0,2500	3,4576	2868	0,0266	106,3
IV	2550	15,0	60,0	3,4065	0,3333	3,0732	1184	0,6422—1	43,9
Insges.	17000	100,0	400,0	4,2304	—	—	10790	—	400,0
Durchschnitt	4250	25,0	100,0	3,6284	—	3,4310	2698	—	100,0

Es ist

$$q = \sqrt[4]{p} = \sqrt[12]{\frac{10000}{1000}} = 1,212 \text{ und } \lg q = 0,0833; \lg p = 0,3333,$$

$$a = \sum \frac{T_k}{q^k} : m : \sum_0^{n-1} p^t$$

$$a = 2698 : (1 + 2,155 + 4,642); \lg a = 2,5391,$$

$$a = 346,0.$$

5. Ermittlung des allgemeinen Verlaufs

Quartal Jahr	$\lg a$	$\lg P_k$	$\lg q^k$	$\lg p^t$	$\lg a P_k q^t$	$a P_k q^t y$
0	1	2	3	4	$\overset{5}{=} 1+2+3+4$	6 7
I/61	2,5391	0,8922—1	0,0833	0	2,5146	327 320
II/61	2,5391	0,2349	0,1667	0	2,9407	872 800
III/61		0,0266	0,2500	0	2,8157	654 610
IV/61		0,6422—1	0,3333	0	2,5146	327 270
I/62		0,8922—1	0,0833	0,3333	2,8479	705 740
II/62		0,2349	0,1667	0,3333	3,2740	1879 2100
III/62		0,0266	0,2500	0,3333	3,1490	1409 1520
IV/62		0,6422—1	0,3333	0,3333	2,8480	705 640
I/63		0,8922—1	0,0833	0,6667	3,1813	1518 1490
II/63		0,2349	0,1667	0,6667	3,6074	4050 3900
III/63	2,5391	0,0266	0,2500	0,6667	3,4824	3037 2970
IV/63	2,5391	0,6422—1	0,3333	0,6667	3,1813	1518 1640

Die Berechnung der Ausgleichskurve wurde in der Arbeitstabelle zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen der Höhe der Produktion und des Materialverbrauchs durchgeführt.

Es ist $f(t) = a \cdot q^t$ und $\lg f(t) = \lg a + t \lg q$.

Nach der Methode der kleinsten Summe der Quadrate ergibt sich:

$$\lg a = \frac{\sum \lg y}{n} \text{ und } \lg q = \frac{\sum t \cdot \lg y}{\sum t^2}$$

$$\sum t^2 = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = 572.$$

Demnach ist

$$\lg a = 3,0213 \text{ (Spalte 5 der Tabelle auf Seite 188),}$$

$$\lg q = 0,0384 \text{ (Spalte 9 der Tabelle auf Seite 188)}$$

Da sich als Ausgangswert wegen n gerade ein Wert zwischen II/62 und III/62 ergibt, wird eine Transformation vorgenommen, indem als Ausgangswert IV/60 gewählt wird und gleichzeitig als Anstieg ein Quartalsanstieg angegeben wird. Es ist

$$f(\text{IV}/60) = a \cdot q^{-13} = 333$$

und

$$q^2 = 1,194.$$

Demnach lautet die Funktion der Ausgleichskurve: $f(t) = 333 \cdot 1,194.^t$

6. Die Ermittlung des Zusammenhangs zwischen Produktion und Materialverbrauch.

Es sei

$$\text{Produktion} = y,$$

$$\text{Materialverbrauch} = z.$$

Es ist

$$b = \frac{\sum yz - n\bar{y}\bar{z}}{\sum y^2 - n\bar{y}^2},$$

$$a = \bar{z} - b\bar{y}.$$

Demnach ist

$$b = \frac{652660 - 447715}{37805600 - 24094668} = 0,015.$$

$$a = 26,33 - 0,015 \cdot 1417 = 5,14.$$

Als Korrelationskoeffizient ergibt sich:

$$r = \frac{\sum yz - n\bar{y}\bar{z}}{\sqrt{(\sum z^2 - n\bar{z}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)}}$$

$$r = \frac{204945}{\sqrt{(11508 - 8320) \cdot (37805600 - 24094668)}}$$

$$r = 0,98.$$

Quartal/ Jahr	z	z ²	lg z	lg z + lg y	yz	lg y	y	y ² 10 ⁻³	t lg y	t	lg f (t)	f (t)
0	1	3	2	6	7	5	4	10	9	8	11	12
I/61	7	49	0,8451	3,3502	2,240	2,5051	320	102,4	-27,5561	-11	2,5989	397
II/61	17	289	1,2304	4,1335	13600	2,9031	800	640,0	-26,1279	-9	2,6757	474
III/61	12	144	1,0792	3,8645	7320	2,7853	610	372,1	-19,4971	-7	2,7525	566
IV/61	8	64	0,9031	3,3345	2160	2,4314	270	72,9	-12,1570	-5	2,8293	675
I/62	15	225	1,1761	4,0453	11100	2,8692	740	547,6	8,6076	-3	2,9061	806
II/62	40	1600	1,6021	4,9243	84000	3,3222	2100	4410,0	-3,3222	-1	2,9829	961
III/62	30	900	1,4771	4,6589	45600	3,1818	1520	2310,4	3,1818	1	3,0597	1147
IV/62	18	324	1,2553	4,0615	11520	2,8062	640	409,6	8,4186	3	3,1365	1369
I/63	32	1024	1,5051	4,6783	47680	3,1732	1490	2220,1	15,8660	5	3,2133	1634
II/63	65	4225	1,8129	5,4040	253500	3,5911	3900	15210,0	25,1377	7	3,2901	1950
III/63	42	1764	1,6232	5,0960	124740	3,4728	2970	8820,9	31,2552	9	3,3669	2327
IV/63	30	900	1,4771	4,6919	49200	3,2148	1640	2689,6	35,3628	11	3,4437	2778
Insges.	316	11508	×	×	652660	36,2562	17000	37805,6	21,9542	-	-	-
Durchschnitt	26,33	-	-	-	-	3,0213	1417	-	(0,0384)	-	-	-

$$\bar{z}^2 = 693,35$$

$$n\bar{z}^2 = 8320,175$$

$$\bar{y}^2 = 20007889$$

$$n\bar{y}^2 = 24094668$$

$$\bar{zy} = 37309,61$$

$$n\bar{zy} = 447715,32$$

Die Spalten der Tabelle wurden entsprechend der Reihenfolge der Berechnungen numeriert.

3. Verzeichnis der in der Aufgabensammlung verwendeten Symbole

Es wurden nur die wesentlichen Symbole angeführt, die in der Regel auch der Ausgangspunkt für die übrigen Symbole der allgemeinen Statistik sind. Für die fachökonomischen Begriffe wurden besondere variable Symbole verwendet, die hier nicht angeführt werden.

1. Symbole zur Widerspiegelung des Niveaus der Erscheinungen

i, k = natürliche Zahlen zur Angabe der jeweiligen Einheit

$P(k)$ = Häufigkeit der Größe k

n, N = Bezugserscheinung bzw. Anzahl der Einheiten

$h = \frac{n}{\sum n}$ = relative Häufigkeit

m = Merkmalserscheinung

$x = \frac{m}{n}$ = Größe einer Erscheinung

$z = \frac{1}{x}$ = reziproke Größe von x

$\bar{x} = \frac{\sum m}{\sum n}$ = Durchschnitt der Erscheinung x

$K = \frac{10000 - \sum n_i \left(m_i + 2 \sum_1^{i-1} m_k \right)}{10000}$ = Maß der Konzentration

H = Häufigkeitswert (z. B. H_{10} = Größe von x , unter der 10% aller Einheiten liegen)

a = Bezugsbasis für die Berechnung der Abweichungen

Δ = $m - an$ = Gesamtabweichung für die Größe x

d = absolute Abweichung der Größe $x = x - \bar{x}$ bzw.
 $x - a$

$\delta = \sum |d| : \sum m$ = durchschnittliche absolute Abweichung vom Durchschnitt

$\delta' = \sum |d| : \sum m$ = durchschnittliche relative Abweichung vom Durchschnitt

$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 n}{\sum n}$ = Varianz der Größe x

$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 n}{\sum n}}$ = Standardabweichung der Größe x

$V = \frac{s}{\bar{x}}$ = Variationskoeffizient

$s_{x_a}^2 = \frac{\sum (x - x_a)^2 n}{\sum n} = s^2 + (x_a - \bar{x})^2$
= durchschnittliche quadratische Abweichung aller Einheiten von der Größe x_a

p = Anteil der mit einem bestimmten Merkmal behafteten Einheiten

q = 1 - p = Anteil der nicht mit diesem Merkmal behafteten Einheiten.

2. Symbole zur Widerspiegelung des Zusammenhangs der Erscheinungen

b = linearer Regressionskoeffizient zwischen x und y

$r = b \frac{s_x}{s_y} = \frac{\sum xy - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2 - n \bar{x}^2)(\sum y^2 - n \bar{y}^2)}}$ = linearer Korrelationskoeffizient

r_{1k} = linearer Korrelationskoeffizient zwischen x_1 und x_k

D = Determinante der Größen r_{1k}

D_{1k} = Unter- oder Minordeterminante von D für das Element r_{1k}

$r_{1k;2\dots n} = \frac{D_{1k}}{\sqrt{D_{11} D_{kk}}} =$ partieller Korrelationskoeffizient zwischen x_1 und x_k

$\varphi(x) = \frac{d y^+}{d x} =$ absolute Elastizitätsfunktion

$\varepsilon(x) = \frac{d y^+}{y^+} : \frac{dx}{x} =$ relative Elastizitätsfunktion

$$B_{yx} = 1 - \frac{\sum [y_i - f(x_i)]^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \text{Bestimmtheitsmaß}$$

3. Symbole zur Widerspiegelung der Entwicklung der Erscheinungen

t	= Angabe des Zeitraums bzw. des Zeitpunktes
y_t	= Größe einer Erscheinung zur Zeit t
I_n, I_m, I_y	= Indizes der Größen n, m, y
I_m^y, I_y^y	= Einfluß der Veränderung der einzelnen Größen y auf die Veränderung der Größe m bzw. y
I_m^n	= Einfluß der Veränderung (Erhöhung und Strukturänderung) der Größen n auf die Veränderung der Größe m
I_y^n	= Einfluß der Strukturänderung der Größe n auf die Veränderung der Größe y
p_t	= Wachstumstempo der Erscheinung y von Zeitabschnitt $t - 1$ zu t
$p = \sqrt[n]{\frac{y_0}{y_n}}$	= durchschnittliches Wachstumstempo von Zeitabschnitt 0 zu n
$f(t)$	= Trendfunktion
k	= Teilabschnitt einer Periode ($k = 1, \dots, m$)
t	= Angabe der Periode ($t = 1, \dots, n$)
$q = \sqrt[m]{p} = \sqrt[mn]{\frac{y_n}{y_0}}$	= durchschnittliches Wachstumstempo innerhalb eines Teilabschnitts
$T_k = \sum_t y_{t,k}$	= Summe der Größe y eines Teilabschnitts k aller Perioden
$Q_k = \frac{T_k}{\bar{T}_k}$	= durchschnittliche relative Schwankung zum Periodendurchschnitt
P_k	= trendbereinigte Schwankung im Teilabschnitt k
$y_t^{+,k}$	= theoretische Größe von y im Teilabschnitt k der Periode t

4. Symbole zur Stichprobentheorie

α	Irrtumswahrscheinlichkeit
λ_α	Sicherheitskoeffizient zur Irrtumswahrscheinlichkeit α , Tabellenwert, Zufallshöchstwert der Zufallsvariablen λ .
σ	Standardabweichung einer theoretischen Verteilung
σ_p	Standardabweichung des Anteils in der Stichprobe
$\varphi = \frac{N - n}{n}$	Auswahlfaktor
b	Regressionskoeffizient
e	Maximal zufällige Abweichung einer Stichprobenfunktion von dem entsprechenden Parameter der Gesamtheit
e_p	Maximale zufällige Abweichung eines Stichprobenanteils vom Anteil der Gesamtheit
$e_{p,rel}$	Relative maximale Abweichung des Stichprobenanteils vom Anteil in der Gesamtheit (Variationskoeffizient)
$e_{\bar{x}}, e_{\bar{x},rel} = v_{\bar{x}}$	Maximale zufällige (absolute und relative) Abweichung des Durchschnitts der Stichprobe vom Durchschnitt in der Gesamtheit
$f = \frac{n}{N}$	Auswahlsatz
$f_h = \frac{n_h}{N_h}$	Auswahlsatz in der h-ten Schicht
N	Umfang der Gesamtheit
N_h	Umfang der h-ten Schicht der Gesamtheit
n	Umfang der Stichprobe
n_h	Umfang der Stichprobe aus der h-ten Schicht
N_1	Umfang einer Teilmenge der Gesamtheit mit einem bestimmten Merkmal
n_1	Anzahl der Einheiten aus der Teilmenge N_1 in der Stichprobe
$P = \frac{N_1}{N}$	Anteil der Einheiten der Teilmenge N_1 in der Gesamtheit

P_o	Obere Grenze des Konfidenzintervalls des Anteils P in der Gesamtheit
P_u	untere Grenze des Konfidenzintervalls des Anteils P in der Gesamtheit
p	Anteil der Einheiten mit einem bestimmten Merkmal in der Stichprobe
$Q = 1 - P$	Siehe P
$q = 1 - p$	Siehe p
r	Korrelationskoeffizient
s	Standardabweichung
s_h	Standardabweichung des Merkmals der n_h Einzelwerte aus der h-ten Schicht
$s_{n'}'$	Standardabweichung des Schätzwertes der N_l Einheiten einer Teilmenge der Gesamtheit
s_p	Standardabweichung des Stichprobenanteils p
$s_{p,rel} = v_p$	Relative Standardabweichung (Variationskoeffizient) des Anteils in der Stichprobe
s_q	Standardabweichung des Stichprobenanteils q
$s_{q,rel} = v_q$	Relative Standardabweichung (Variationskoeffizient) des Stichprobenanteils q
s_x	Standardabweichung der Einzelwerte x_i der Stichprobe, Schätzwert der Standardabweichung σ in der Gesamtheit
$s_{x,rel} = v_x$	Variationskoeffizient der Einzelwerte x_i
$s_{x'}$	Standardabweichung des Schätzwertes des Gesamtwertes X
$s_{x',rel} = v_{x'}$	Relative Standardabweichung (Variationskoeffizient) des Schätzwertes des Gesamtwertes X
$s_{x',Q}; s_{x',R}$	= Standardabweichung des Schätzwertes des Gesamtwertes X bei Verhältnisschätzung und bei Regressions-schätzung
$s_{\bar{x}}$	Standardabweichung des Durchschnitts der Stichprobe
$s_{\bar{x},rel} = v_{\bar{x}}$	Relative Standardabweichung des Durchschnitts der Stichprobe
$s_{\bar{x},Q}; s_{\bar{x},R}$	Standardabweichung des Durchschnitts der Stichprobe bei Verhältnisschätzung und bei Regressionsschätzung

s_y	Standardabweichung der Einzelwerte y_i der Stichprobeneinheiten
$T = \frac{X}{Y} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$	Verhältnis der Gesamtwerte des Untersuchungsmerkmals und des Basismerkmals
$t = \frac{x}{y}$	Verhältnis der Summen (Durchschnitte) des Untersuchungsmerkmals und des Basismerkmals der n Einheiten der Stichprobe
v	Variationskoeffizient, relative Standardabweichung
v_p, v_q	Variationskoeffizienten des Anteils p (des Anteils q) in der Stichprobe
$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}, v_y$	Variationskoeffizient der Einzelwerte x_i des Untersuchungsmerkmals (y_i des Basismerkmals) in der Stichprobe
$v_{\bar{x}} = s_{\bar{x}rel}$	Variationskoeffizient des Stichprobendurchschnitts
$v_{x'}, v_{x',D}, v_{x',Q}, v_{x',R}$	Variationskoeffizient des Schätzwertes des Gesamtwertes X bei freier Hochrechnung, Differenzschätzung, Verhältnisschätzung und linearer Regressionsschätzung
X_i	Merkmalswert des Untersuchungsmerkmals der i -ten Einheit der Gesamtheit, $i = 1, 2 \dots N$
x_i	Merkmalswert des Untersuchungsmerkmals der i -ten Einheit der Stichprobe ($i = 1, 2 \dots, n$)
$X = \sum_{i=1}^N X_i$	Gesamtwert des Untersuchungsmerkmals
$x = \sum_{i=1}^{n'} x_i$	Summe der Werte des Untersuchungsmerkmals der Einheiten der Stichprobe
X_h, x_h	Summe der Merkmalswerte der Einheiten der h -ten Schicht der Gesamtheit (der Stichprobe)
$\bar{X}, \bar{x}$	Durchschnitt des Untersuchungsmerkmals in der Gesamtheit (in der Stichprobe)
$\bar{X}_h, \bar{x}_h$	Durchschnitt des Untersuchungsmerkmals aller Einheiten der h -ten Schicht (der Stichprobeneinheiten der h -ten Schicht)
x'	Schätzwert des Gesamtwertes X bei freier Hochrechnung des Stichprobenergebnisses

$x'_{\text{Quot}}; x'_{\text{Regr}}$	Schätzwerte des Gesamtwertes X bei Verhältnisschätzung bzw. bei linearer Regressionsschätzung
$Y_i, i = 1, 2, \dots, N$	Merkmalswert des Basismerkmals der i -ten Einheit der Gesamtheit
$y_i, i = 1, 2, \dots, n$	Merkmalswert des Basismerkmals der i -ten Einheit der Stichprobe
$Y = \sum_{i=1}^N Y_i$	Gesamtwert des Basismerkmals, Summe der Merkmalswerte des Basismerkmals aller Einheiten der Gesamtheit
$y = \sum_{i=1}^n y_i$	Summe der Merkmalswerte des Basismerkmals der Einheiten der Stichprobe
$\bar{Y}, \bar{y}$	Durchschnitt des Basismerkmals in der Gesamtheit (in der Stichprobe)