

LÖSUNG SHEFT

zu den ergänzenden Aufgaben

für

Leistungsklassen 9/10

Werte Nutzer dieses Lösungsheftes!

Bei Aufgabensammlungen mit Aufgaben von überdurchschnittlichem Schwierigkeitsgrad ist der Lösungsteil im Umfang oft weit größer als der Aufgabenteil, vor allem, wenn die Lösungen für Lehrer und Schüler gleichermaßen lesbar sein sollen. Um den Umfang dieses Heftes erträglich zu halten, waren Kompromisse notwendig, für die ich Sie um Verständnis bitte. Sie bestehen unter u.a. darin, daß

- z.T. auf Schlußsätze verzichtet wird,
- dort, wo angepaßte Einheiten verwendet werden, mitunter nur mit den Zahlenwerten gerechnet wird,
- Zwischentexte so kurz, wie möglich gehalten sind,
- sehr aufwendige Herleitungen z.T. nur angedeutet werden können.

Eine wichtige Prämisse bei der Formulierung der Aufgaben bestand darin, möglichst allen Schülern einen Zugang zur Aufgabe zu ermöglichen. Das beabsichtigte hohe Anspruchsniveau wird durch verschiedenartige Teilaufgaben realisiert. Nun erfordert das selbständige Lösen schwieriger Aufgaben Zeit, vor allem Bedenkzeit. Diese ist jedoch individuell verschieden, was man beim Bearbeiten solcher Aufgaben unbedingt in Rechnung stellen muß.

Natürlich kann man mit einer solchen Aufgabensammlung keine Wunder vollbringen. Wer diese erwartet, wird enttäuscht werden. Aber sie soll Anregungen geben - für Lehrer wie für Schüler. Einige davon werden unmittelbar durch die Aufgabenstellungen deutlich:

- die Beschäftigung mit p -adischen Zahlen als eine Grundlage für die Informatik,
- die dringend notwendige Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens,
- eine "lebendige" Arbeit mit dem Funktionsbegriff,
- eine stärkere Einbeziehung der in letzter Zeit "etwas verdrängten", aber überaus wichtigen Funktionenklassen, vor allem der Exponential- und Logarithmusfunktion,
- das Aufgreifen ökonomischer Sujets, die größere Bedeutung gewinnen werden.

Andere Bezüge werden nicht explizit genannt, verstehen sich jedoch von selbst. Das betrifft insbesondere die Nutzung der Rechentechnik. Ein "computerbegeisterter" Schüler merkt beim Schreiben eines etwas komplizierteren Programmes recht schnell, daß vor dem Programmieren das mathematische Modellieren und das Algorithmaufbauen kommen.

Drucktechnisch bedingt, wurden Bruchstriche beim Schreiben der Lösungen nur wenig verwendet. Im allgemeinen wurde die Division durch das Symbol "/" gekennzeichnet. Als Operationszeichen für die Multiplikation fungiert das "*".

Mögen Aufgabensammlung und Lösungsheft brauchbare Arbeitsmittel sein. Für Hinweise zu Inhalt und Form bin ich stets dankbar.

Dr. Gert Thomas

Empfehlungen für den Einsatz der Aufgaben

(Die Numerierung der Stoffgebiete bezieht sich auf den Lehrplan in der Fassung von 1987, unabhängig davon, ob Stoffgebiete nunmehr entsprechend aktueller Empfehlungen zu anderen Zeitpunkten unterrichtet werden.)

Klasse \ Stoffgebiet	9				10		
	1	2	3	4	1	2	3
Aufgabenr.							
1	X						
2	X	d,e	f				
3	X		(X)				
4		X					
5		X					
6		X					
7		X					
8		X					
9			X				
10			X				
11			11.1.		11.3.		X
12				a-d			X
13				X			
14				a-c		d	
15				a		b	
16				X			
17			a			b-e	
18						X	
19		c*				X	
20							X
21			(X)				X
22							X
23							X

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß alle Aufgaben insbesondere zur anspruchsvollen Gestaltung des Stoffgebietes 4 der Klasse 10 geeignet sind, weshalb dieses Stoffgebiet nicht in die Übersicht aufgenommen wurde.

Lösungen

1. Zahlenrätsel

a) Die kleinste ist 0, die zweite ist 10101.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } ababab &= 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b \\
 &= (10a + b) \cdot (10000 + 100 + 1) \\
 &= 10101 \cdot (10a + b),
 \end{aligned}$$

woraus die Teilbarkeit durch 10101 folgt.

c) Die Aufgabe ist gleichwertig mit: Wie viele natürliche Zahlen mit voneinander verschiedenen Ziffern gibt es von 10 bis 98?
 $n = 98 - 9 - 8 = 81.$

d) Da 777 Zehner vollendet wurden, gab es in der Einerstelle 777 mal die 9. Analog folgt für die Gesamtzahl n der Ziffern 9
 $n = 777 + 77, + 7, = 861$.

e) $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b = 12$ mit $a = 3b \Rightarrow b=6, a=18$.
 ($b = 3a$ entfällt.)

f) $(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) \cdot (n - 1) = n^5 - 1 = 242 \Rightarrow n=3$.

g) $L = \{86; 68\}$.

h) $L = \{13; 17; 24; 26; 31; 39; 42; 48; 55; 62; 68; 71; 79; 84; 86; 93; 97\}$

2. Arithmetische Beziehungen - geometrisch veranschaulicht

a) Es gibt vielfältige Beweismöglichkeiten. Z.B. kann man die Figur L.1. mit $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|EF| = m$, $|EP| = u$ und $|AQ| = u$ verwenden. Über den Strahlensatz ergibt sich $u = v/2$ und somit
 $m = c + u = c + v/2 = c + (a - c)/2$
 $= (a + c)/2$.

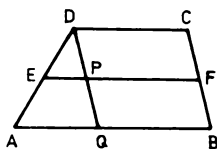


Abb. L.1.

b)

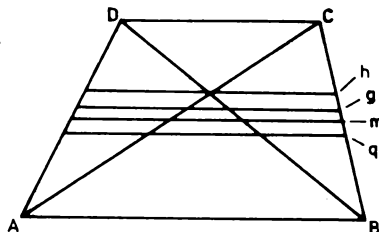


Abb. L.2. (zu b)

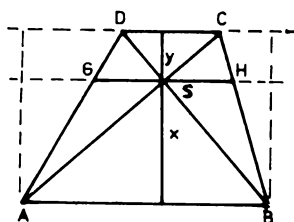


Abb. L.3.

c) Da man die Höhe $x + y$ in Abb. L.3. sowohl in A als auch in B antragen kann, ist $|BS| : |DC| = x : (x + y) = |SH| : |DC|$, woraus sofort die Behauptung folgt.

d1) Nach c) ist $x : (x + y) = h/2 : c$.
 Mit D als Ähnlichkeitszentrum ergibt sich $y : (x + y) = h/2 : a$,
 Addiert man beide Gleichungen, so erhält man
 $(x + y) : (x + y) = h(1/c + 1/a)/2$,
 woraus sofort
 $1/h = (1/c + 1/a)/2$ folgt.

d2) Die Beziehung für g erhält man aus
 $a : g = g : c$,
 $g = \sqrt{a \cdot c}$.

d3) Wegen der Flächengleichheit der beiden Teiltrapeze mit den Höhen h_1 bzw. h_2 folgt
 $(a + q)h_1 = (c + q)h_2 = (a + c)h/2$,
 woraus sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|l} 2(a+q)h_1 = (a+c)h & \text{(I)} \\ 2(c+q)h_2 = (a+c)h & \text{(II)} \\ h_1 + h_2 = h & \text{(III)} \end{array}$$

ergibt. Auflösen von (I) nach h_1 ,
von (II) nach h_2 und Einsetzen in (III) liefert

$$\frac{a+c}{2(a+q)} \cdot h + \frac{a+c}{2(c+q)} \cdot h = h$$

, woraus

$$(a+c)(a+c+2q) = 2(c+q)(a+c),$$

$$a^2 + c^2 = 2q^2,$$

und somit $q = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$ folgt.

- e) Es gilt $h < g < m < q$ (für $a \neq c$).

(Man kann sich eine Vermutung leicht am Beispiel zweier natürlicher Zahlen, z.B. 2 und 8, erarbeiten.)

Am Beispiel $h < g$ sei die "Beweisstrategie" demonstriert:

Die Behauptung lautet

$$h = 2ac/(a+c) < \sqrt{a \cdot c} = g.$$

Durch Quadrieren und einige Umformungen folgt hieraus (Beweis-analyse): $0 < (a-c)^2$.

Nunmehr wird der Beweis formuliert (Beweissynthese):

$$\begin{array}{ll} 0 < (a-c)^2 & \\ \Rightarrow 0 < a^2 - 2ac + c^2 & | + 4ac \\ \Rightarrow 4ac < a^2 + 2ac + c^2 & | * ac > 0 \\ \Rightarrow 4a^2c^2 < ac(a+c)^2 & | : (a+c)^2 > 0 \\ \Rightarrow 4a^2c^2/(a+c)^2 < ac. & \end{array}$$

Da auf beiden Seiten der Ungleichung positive Terme stehen, kann (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) die Wurzel gezogen werden, woraus die Behauptung folgt.

Auf die übrigen Beweise sei hier verzichtet.

f) $m = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$

$g = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n}$

$q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$

$\frac{1}{h} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$

3. Zahlssysteme

a)

p=8	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20.
1	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
2	2	4	6	10	12	14	16	20	22	24	26	30	32	34	36	40
3	3	6	11	14	17	22	25	30	33	36	41	44	47	52	55	60
4	4	10	14	20	24	30	34	40	44	50	54	60	64	70	74	100
5	5	12	17	24	31	36	43	50	55	62	67	74	101	106	113	120
6	6	14	22	30	36	44	52	60	66	74	102	110	116	124	132	140
7	7	16	25	34	43	52	61	70	77	106	115	124	133	142	151	160
10	10	20	30	40	50	60	70	100	110	120	130	140	150	160	170	200
11	11	22	33	44	55	66	77	110	121	132	143	154	165	176	207	220
12	12	24	36	50	62	74	106	120	132	144	156	170	202	214	226	240
13	13	26	41	54	67	106	115	130	143	156	171	204	217	232	245	260
14	14	30	44	60	74	110	124	140	154	170	204	220	234	250	264	300
15	15	32	47	64	101	116	133	150	165	202	217	234	251	266	303	320
16	16	34	52	70	106	124	142	160	176	214	232	250	266	304	322	340
17	17	36	55	74	113	132	151	170	207	226	245	264	303	322	341	360
20	20	40	60	100	120	140	160	200	220	240	260	300	320	340	360	400

b*) p=16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	20
3	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D	30
4	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C	40
5	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B	50
6	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A	60
7	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69	70
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	80
9	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87	90
A	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96	AO
B	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5	BO
C	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4	CO
D	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3	DO
E	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2	EO
F	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1	FO
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	AO	BO	CO	DO	EO	FO	100

Bemerkung: Als interessante Erweiterung der Aufgabenstellung bietet sich das Programmieren und Ausdrucken dieser Tabellen an.

c) dekadisches System (1. Aufgabe vgl. Aufgabensammlung)

$$16 + 5 \cdot 13 = 16 + 65 = 81$$

$$8 \cdot 6 - 15 = 48 - 15 = 33$$

$$39 + 19 \cdot 23 = 39 + 437 = 476$$

c1) $L0000 + L0L*LL0L = L0000 + L00000L = L0L000L$
 $L000*LL0 - LLLL = L00000 - LLLL = L0000L$
 $L00LLL + L00LL*L0LLL = L00LLL + LL0LL0L0L = LLL0LLLL0$

c2) $100 + 11 \cdot 31 = 100 + 1001 = 1101$
 $20 \cdot 12 - 33 = 300 - 33 = 201$
 $213 + 103 \cdot 113 = 213 + 12311 = 13130$

c3*) $20 + 5 \cdot 15 = 20 + 101 = 121$
 $10 \cdot 6 - 17 = 60 - 17 = 41$
 $47 + 23 \cdot 27 = 47 + 665 = 734$

c4*) $10 + 5 \cdot D = 10 + 401 = 411$
 $8 \cdot 6 - F = 30 - F = 21$
 $27 + 13 \cdot 17 = 27 + 185 = 1DC$

4. Koordinatenmethode

a) $y < -2/3 x + 11/3$ b) $y > -1/2 x - 1$ und $y < x + 2$

c) $1 < x < 5$ und $-1 < y < 3$

d) $-x + 2 < y < -x + 5$ Das lässt sich in die "schönere" Form
 $2 < x + y < 5$ umwandeln. Analog die nächsten Ergebnisse.

e) 1. PQ ist Diagonale: $-1 < 1/2 x + y < 7/2$ und $-4 < y - x < 2$
2. PS ist Diagonale: $-4 < y - x < 2$ und $-10 < 5x + y < 8$
3. QS ist Diagonale: $-1 < 1/2 x + y < 7/2$ und $-10 < 5x + y < 8$.

g) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 < 9$ h) $4 < (x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 25$

5. Berechnungen am Dreieck

a) $g_1 = g_{AB} : y = x - 2$
 $g_2 = g_{AC} : y = -3x - 10$
 $g_3 = g_{BC} : y = 0,2x + 2,8$

b) Mit M_1 wird der Mittelpunkt der Strecke AB bezeichnet usw.
 $\Rightarrow M_1(2;0); M_2(-3;-1); M_3(1;3)$.

c*) Wenn man die Anstiegsdreiecke zweier Geraden g und $\bar{g}$ betrachtet, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit dieser beiden Dreiecke für die Anstiege m und $\bar{m}$ der Geraden: $|\bar{m}| = 1/|m|$. Da genau eine von beiden Geraden monoton fallend ist, gilt schließlich: $\bar{m} = -1/m$. Aus dem Ergebnis von a) folgt somit

$$\bar{m}_1 = -1 \Rightarrow y = -x + 2$$

$$\bar{m}_2 = 1/3 \Rightarrow y = 1/3 x$$

$$\bar{m}_3 = -5 \Rightarrow y = -5x + 8,$$

wobei die Absolutglieder in den Geradengleichungen durch Einsetzen der Mittelpunktswerte aus b) folgen.

d) Die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U findet man als Schnittpunkt zweier Geraden aus c). Es ist $U(1,5;0,5)$.

e*) Der Radius des Umkreises ergibt sich aus den Koordinatendifferenzen von U zu einem der Eckpunkte. Sie betragen z.B. zu B
 $\Delta x = 4,5$ und $\Delta y = 3,5$.

$$\text{Hieraus folgt } r^2 = 4,5^2 + 3,5^2 = 130/4.$$

$$\text{Die gesuchte Bedingung lautet } (x - 1,5)^2 + (y - 0,5)^2 < 130/4$$

6. Wanderungen

a) Seien v_R bzw. v_P die Geschwindigkeiten von Ramona bzw. Philipp und Δt die Zeitdifferenz, so gilt bei Wanderung

1. in gleicher Richtung

$$s = v_R \cdot t$$

$$s = v_P \cdot (t - \Delta t) \quad , \text{ woraus nacheinander } v_R \cdot t = v_P \cdot (t - \Delta t),$$

$$t = v_P \Delta t / (v_P - v_R) = 4 \text{ h}, \quad s = 18 \text{ km folgt.}$$

4 Stunden nach Ramonas Start und 18 km vom Start entfernt treffen beide einander.

2. in entgegengesetzter Richtung

$$s = v_R \cdot t$$

$$(30 \text{ km} - s) = v_P \cdot (t - \Delta t)$$

Einsetzen und Auflösen nach t :

$$v_R t = 30 \text{ km} - v_P (t - \Delta t) \Rightarrow t = (30 \text{ km} + v_P \Delta t) / (v_R + v_P)$$

$$\Rightarrow t = 3,43 \text{ h}, \quad s = 15,43 \text{ km.}$$

3,43 Stunden nach Ramonas Start und nachdem Ramona 15,43 km zurückgelegt hat, werden beide einander treffen.

b) Für die restlichen 12 km werden 2 h benötigt, falls nunmehr mit Philipps Geschwindigkeit fortgesetzt wird, mit Ramonas Geschwindigkeit 2:40 h. (Man beachte, daß für beide im Text mittlere Geschwindigkeiten gegeben sind.) Die beiden werden zwischen 14.00 Uhr und 14.40 Uhr am Ziel eintreffen.

c) Philipp benötigt 5 h, Ramona 6:40 h. Auf Grund der Zeitdifferenz beim Start muß Philipp 40 min warten.

$$\begin{array}{ll}
 d*) & s = v_R * t \quad (I) \\
 & s = v_P * (t - \Delta t) \quad (II) \\
 & 30 \text{ km} - s = v_H * (t - 2\Delta t) \quad (III)
 \end{array}$$

Einsetzen von (I)
in (II) und (III) liefert

$$\begin{array}{ll}
 & v_R * t = v_P * (t - \Delta t) \quad (II') \\
 & 30 \text{ km} - v_R * t = v_H * (t - 2\Delta t) \quad (III')
 \end{array}$$

Hieraus folgt

$$t = \frac{v_P \Delta t}{v_P - v_R}, \quad t = \frac{30 \text{ km} + 2v_H \Delta t}{v_R + v_H}$$

Gleichsetzen und Umformen.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & v_P \Delta t (v_R + v_H) = (30 \text{ km} + 2v_H \Delta t) (v_P - v_R), \\
 \Rightarrow & [v_P (v_R + v_H) - 2v_H (v_P - v_R)] \Delta t = 30 \text{ km} (v_P - v_R) \\
 \Rightarrow & \Delta t = \frac{30 \text{ km} (v_P - v_R)}{v_P (v_R + v_H) - 2v_H (v_P - v_R)} \quad (*). \\
 \Rightarrow & \Delta t = 0,91 \text{ h}, \quad t = 3,64 \text{ h}, \quad s = 16,36 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

Sie treffen einander um 11.38 Uhr, ihr Startabstand ist 55 min.

e*) 1. Genau zwei in gleicher Richtung: Von den beiden, die in gleicher Richtung gehen, muß der langsamere zuerst starten. Der Start des dritten ist an keine Bedingung gebunden. Dies folgt bei genauer Betrachtung der Beziehung (*). Der Alleinstarter kann somit als 1., 2. oder 3. starten. Folglich gibt es insgesamt 9 Fälle. Für jeden ist nach (*) - bei entsprechender Belegung der Variablen - eine Zeitdifferenz Δt berechenbar.

2. Alle drei in gleicher Richtung: Wie man sich am besten graphisch verdeutlicht, ist wegen der gleichen Geschwindigkeitsdifferenz ein Treff nicht möglich. Der analytische Weg führt auf einen Widerspruch im Gleichungssystem, ist aber recht anspruchsvoll.

Bemerkung: Für Aufgabenteil a) bietet sich die graphische Lösung an. Bei den anderen Aufgaben sollte man zumindest auch die rechnerisch erhaltenen Lösungen graphisch interpretieren.

7. Produktions- und Transportkosten

$$a) 200 + 1 * 1,1 < 230 + (85 - 1) * 1,1 \quad \Rightarrow \quad 1 < 56,1$$

$$b) 200 + 1 * 1,1 < 230 + (85 - 1) * 0,8 \quad \Rightarrow \quad 1 < 51,6$$

Die Intervallgrenze verschiebt sich um 4,5 km in Richtung A.

$$c) 200 + 42,5 * 1,1 = 230 + 42,5 * k \quad \Rightarrow \quad k \approx 0,40.$$

Hinweis: Die Aufgaben a, b, c lassen sich durch ein einfaches Nomogramm graphisch lösen. Schülervortrag?

$$d) p + 1 * k < p(1 + q/100) + (s - 1) * k$$

$$\Rightarrow \quad 1 < (pq/100 + sk)/2k$$

$$e) p + 1 * k < p(1 + q/100) + (s - 1) * k * a/100$$

$$\Rightarrow \quad 1 < (pq + ska) / k(100 + a)$$

8. Vom Würfelspiel zur linearen Optimierung

a1) Da die Würfel verschiedenfarbig sind, beträgt die Anzahl möglicher Kombinationen $6 * 6 = 36$.

a2) Siehe Abb. L.4.

a3) Siehe Abb. L.4.

$$a4) z = w - s$$

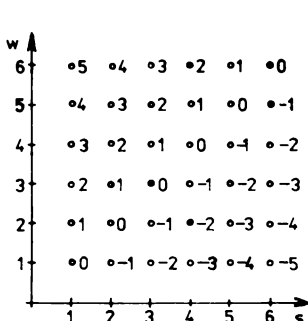


Abb. L.4.

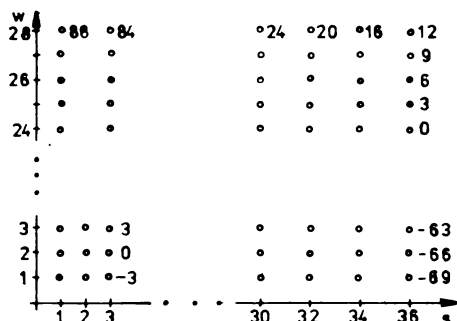


Abb. L.5.

a5) $z_{\max} = 5$, $z_{\min} = -5$.

Die zugehörigen Punkte befinden sich in den gegenüberliegenden Ecken des Bereiches. Man erreicht sie durch Verschiebung der Geraden mit der Gleichung $0 = w - s$ mit maximaler Weite.

b1) $z = w - s - 1$

b2) $z_{\max} = 4$, $z_{\min} = -6$.

b3) Die Frage dürfte bejaht werden. Begründungen sind erst mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich.

c1) Siehe Abb. L.5.

c2) $(s; w) \in \{(3; 2), (6; 4), \dots, (36; 24)\}$

c3) $z_{\max} = 88$ für $(1; 30)$,
 $z_{\min} = -69$ für $(36; 1)$.

c4) Nein!

c5) Lösungen analog oben!

d) Bedingungen (1) bis (5) ergeben den Bereich B (vgl. Abb. L.6.).

d1) $0 = -2x + y$ liefert die Spur I_0 , das Maximum der Zielfunktion folgt aus I mit $z = 5$.

d2) $0 = 2x + 3y$ liefert die Spur II_0 , das Maximum der Zielfunktion folgt aus II mit $z = 6$.

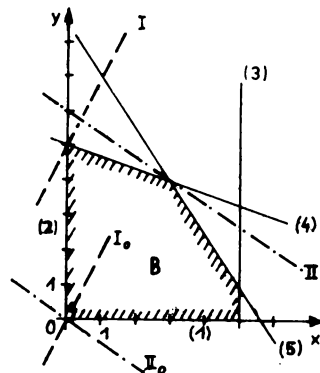


Abb. L.6.

9. Funktionen

a1) $u = f(x) = 2x + 6$ mit $3 < x < 8$.

a2) Auf die Bilder wird hier verzichtet.

b1) $s = g(x) = 2x - 2$, $A = h(x) = x(x - 2)/2$.

b2) $2 < x < 8$, $2 < s < 14$.

b3) $P(3 + \sqrt{5}; 4 + 2\sqrt{5})$. Hat die längere Kathete die (irrationale) Länge $3 + \sqrt{5}$, so stimmen die Zahlenwerte von Kathetensumme und Fläche überein.

c*) $V = k(x) = (x^3 - 4x)/6$ mit $0 < V < 80$.

Die Schnittstelle liegt bei $x_s = 3,553$.

Bemerkung: Läßt man auch entartete Figuren zu, so müssen die Relationszeichen "<" in den obigen Lösungen durch "≤" ersetzt werden.

10. Varianten zur Schwimmeraufgabe

a) Sei v_s die Geschwindigkeit des Schwimmers im ruhenden Wasser, v_f die Strömungsgeschwindigkeit, b die Breite des Flusses, e die Abdrift und t_E die zur Überquerung benötigte Zeit, so gilt wegen der Unabhängigkeit der beiden Bewegungen

$$t_E = b/v_s = 150 \text{ s} \\ e = v_f \cdot t_E = 3 \text{ ms}^{-1} \cdot 150 \text{ s} = 450 \text{ m}.$$

b) t_E bleibt gleich. Ist s die zurückgelegte Wegkomponente senkrecht zur Strömung, so folgt wegen der Proportionalität von v_f und s bzw. s und t auch die Proportionalität von v_f und t . Somit ist die Bewegung gleichmäßig beschleunigt. Für die Beschleunigung a gilt

$$a = \Delta v / \Delta t = 4 \text{ ms}^{-1} / 150 \text{ s} = 4/150 \text{ ms}^{-2}.$$

Die Abdrift beträgt

$$e = 0,5 a \cdot t_E^2 = 4/300 \text{ ms}^{-2} \cdot (150 \text{ s})^2 = 300 \text{ m}.$$

c) Die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt bzw. verzögert mit "symmetrischer Charakteristik". Für die Beschleunigung folgt

$$a = 4 \text{ ms}^{-1} / 75 \text{ s} = 4/75 \text{ ms}^{-2} \text{ und somit}$$

$$e = 2 \cdot (a/2) \cdot (t_E/2)^2 = 300 \text{ m}.$$

d*) Zunächst ist die Funktionsgleichung $v = f(t)$ zu ermitteln.

Da die beiden Nullstellen $t_{01} = 0 \text{ s}$ und $t_{02} = 150 \text{ s}$ bekannt sind, wählen wir die Form

$$v = f(t) = k \cdot t(t - 150 \text{ s})$$

und ermitteln aus $v(75 \text{ s}) = 4 \text{ ms}^{-1}$ den Parameter k zu

$$k = 4 \text{ ms}^{-1} / [(75 \text{ s}) \cdot (-75 \text{ s})] = -4/75^2 \text{ ms}^{-3},$$

woraus

$$v = f(t) = -4/75^2 \text{ ms}^{-3} \cdot t(t - 150 \text{ s})$$

folgt.

Um die Abdrift näherungsweise ermitteln zu können, wird die zur Überquerung benötigte Zeit von 150 s in geeignete Teilintervalle eingeteilt. Für jedes dieser Intervalle wird eine Geschwindigkeit ermittelt. Diese wird im Intervall als konstant betrachtet und der zugehörige Weg berechnet. Wählt man z.B. Teilintervalle von 5 s Länge und berechnet die Geschwindigkeit jeweils für den Intervallanfang, so erhält man folgende, hier auszugsweise wiedergegebene Tabelle:

t/s	0	5	10	15	20	...	70	75	80	...	145
v/ms ⁻¹	0	0,52	1,00	1,44	1,85	...	3,98	4	3,98	...	0,52
s/m	0	2,58	4,98	7,2	9,24	...	19,9	20	19,9	...	2,58

Addition der Teilstrecken ergibt die Abdrift von etwa 400 m.

Schüler, die sich bereits mit dem Summenzeichen vertraut gemacht haben, können den Weg über Zerlegungssummen gehen:

$$s = \sum_{k=0}^{29} v_k \cdot \Delta t_k \quad \text{und wegen } \Delta t_k = \text{const}$$

$$= \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{29} \left[-4/75^2 \text{ ms}^{-3} \cdot k \cdot 5 \text{ s} \cdot (k \cdot 5 \text{ s} - 150 \text{ s}) \right]$$

$$= -5 \text{ s} \cdot (4/75^2) \text{ ms}^{-3} \cdot 25 \text{ s}^2 \cdot \sum_{k=0}^{29} (k^2 - 30k)$$

$$= -4/45 \text{ m} \cdot (29 \cdot 30 \cdot 59/6 - 30 \cdot 29 \cdot 30/2) \\ \approx 400 \text{ m.}$$

Den "exakten Wert" erhält man aus dem Integral

$$s = \int_0^{150 \text{ s}} \left[-4/75^2 \text{ ms}^{-3} (t^2 - 150 \text{ s} \cdot t) \right] dt.$$

Er beträgt 400 m.

11. Parameter in Funktionsgleichungen

a) Wegen $f(0) = g(0) = h(0) = c$ und der Koordinaten des Punktes $A(0|1)$ folgt $c = 1$. Somit hat Horst recht.

b) Setzt man $c = 1$ und die Koordinaten der Punkte B und C in die Funktionsgleichungen ein, so erhält man jeweils ein Gleichungssystem:

11.1.	11.2.	11.3.
$1 = a + b$	$1 = a \cdot \ln(b + 1)$	$1 = a \cdot \sin b$
$2 = 9a + 3b$	$2 = a \cdot \ln(3b + 1)$	$2 = a \cdot \sin 3b$

Hieraus folgt im einzelnen

$$1. \quad a = -1/6, \quad b = 7/6 \implies y = f(x) = -1/6 x^2 + 7/6 x + 1$$

$$2. \quad 2 \cdot \ln(b + 1) = \ln(3b + 1) \implies (b + 1)^2 = 3b + 1$$

$$b_1 = 0 \text{ entfällt.}$$

$$b_2 = 1 \implies a_2 = 1/\ln 2 \implies y = g(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln(x + 1) + 1$$

$$3. \quad \text{Aus } 2 \cdot \sin b = \sin 3b \text{ folgt mit } \sin 3b = 3 \cdot \sin b - 4 \cdot \sin^3 b \\ \sin b \cdot (4 \cdot \sin^2 b - 1) = 0.$$

Die erste Lösung $\sin b = 0$ entfällt. Mit $\sin b = 1/4$ ist $|\sin b| = 1/2$.

Die "einfachste Lösung" ist $b = \pi/6$, $a = 2$ und somit $y = h(x) = 2 \cdot \sin(\pi/6)x + 1$.

Weitere Lösungen folgen aus $b = \pm \pi/6 + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c*) Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{array}{l|l} 1 = a + c & \\ 2 = a \cdot e^b + c & \\ 3 = a \cdot e^{3b} + c & \end{array} \quad ,$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $c = 1 - a$. Setzt man dies in die beiden anderen Gleichungen ein und subtrahiert sie von-

einander, so folgt $e^{3b} - 2e^b + 1 = 0$. Wir substituieren $z = e^b \Rightarrow z^3 - 2z + 1 = 0$.
 Offensichtlich ist die erste Lösung $z_1 = 1$. (Ist die Summe der Koeffizienten in einem Polynom n-ten Grades gleich Null, so ist 1 eine Lösung der zugehörigen Gleichung.)

Polynomdivision: $(z^3 - 2z + 1) : (z - 1) = z^2 + z - 1$.

$$\begin{array}{r} (z^3 - 2z + 1) : (z - 1) = z^2 + z - 1 \\ \underline{-(z^3 - z^2)} \\ z^2 - 2z \\ \underline{-(z^2 - z)} \\ -z + 1 \\ \underline{-(-z + 1)} \\ 0 \end{array}$$

Aus der quadratischen Gleichung $z^2 + z - 1 = 0$ folgen $z_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ und $z_3 = (-\sqrt{5} - 1)/2$.
 z_1 führt auf einen Widerspruch, $z_3 < 0$ entfällt. Aus z_2 erhält man durch Rücksubstitution $b = \ln(\sqrt{5} - 1)/2$, $a = (-3 - \sqrt{5})/2$, $c = (5 + \sqrt{5})/2$.
 Einsetzen der Parameter führt auf die Funktionsgleichung.

- d) Man überprüft die Funktionswerte von f , g , h und k an Stellen, die ungleich 0, 1 oder 3 sind (denn das sind die x-Koordinaten der vorgegebenen gemeinsamen Punkte).
 Wegen $f(2) = 8/3$, $g(2) = 2,585$, $h(2) = 2,732$, $k(2) = 2,618$ gilt $g(2) < k(2) < f(2) < h(2)$.
 Wegen $f(4) = 3$, $g(4) = 3,322$, $h(4) = 2,732$, $k(4) = 3,236$ gilt $h(4) < f(4) < k(4) < g(4)$, womit die Frage beantwortet ist.

12. Forstwirtschaftliches

- a) Förster: Zylindermodell $V_Z = 3,2 \text{ fm}$
 Horst: Kegelstumpf $V_K = 3,7 \text{ fm}$.
- b) Relativer Fehler: $q = (3,7 - 3,2) : 3,7 = 13 \%$.
 Es werden noch Verluste (Rinde, Beschädigungen durch Transport u.a.) auftreten, so daß es wirtschaftlich richtig ist, den Ertrag niedriger anzusetzen. (Vgl. auch Teil d.)
- c) Ansatz als Kreiskegel. Für den Durchmesser d am Fuße des Stammes erhält man aus dem Strahlensatz:
 $d : 7,5 \text{ cm} = 6,5 \text{ m} : 5,2 \text{ m} \Rightarrow d = 9,4 \text{ cm}$.
 Somit gilt für den Bestand B innerhalb des Kreises $B = 112 \cdot (\pi/12) \cdot (0,094 \text{ m})^2 \cdot 6,5 \text{ m} = 1,68 \text{ fm}$.
- d) Auf einem Hektar befinden sich demnach $B_H = 30 \cdot 1,68 \text{ fm} \approx 50 \text{ fm}$.
 Die Kreisfläche beträgt ca. 314 m^2 , das 30-fache sind 9420 m^2 .
 Es ist eine Abweichung von 5,8 % vorhanden.

- e*) Bezeichnet man mit B_n den Bestand im Alter von n Jahren und setzt der Einfachheit halber $B_{22} = 1$, so ist

$$B_{100} = 1 \cdot 1,13^8 \cdot 1,075^{10} \cdot 1,045^{10} \cdot 1,033^{10} \cdot 1,02^{40} = 26$$

- f*) Als Grundlage könnte folgende Wertetabelle dienen:

t/a	22	25	30	35	40	40	45	50	55	60	60	70	80	90	100
B/fm	50	72	133	191	274	209	260	325	382	449	299	364	444	542	660

Durch *) sind die Zeiten gekennzeichnet, an denen Holzeinschlag erfolgt. Graphische Darstellung in Abb. L.7.

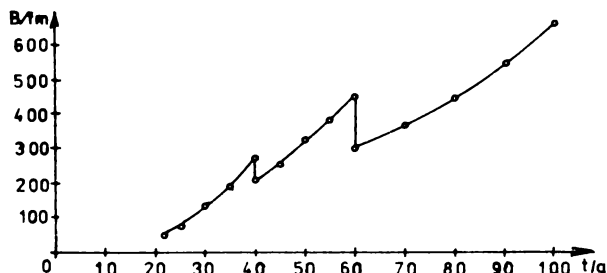


Abb. L.7.

13. Berechnungen an einer Schraubenfeder

- a) Nach Entfernen der Walze bildet die Achse des gewickelten Federstahldrahtes eine Schraubenlinie. Man stelle sich den Zylinder vor, auf dem sich diese Schraubenlinie scheinbar befindet. Sein Durchmesser ergibt sich aus dem Durchmesser der Walze, dem Spiel und dem Radius des Drahtes zu

$$d = (98 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6) \text{ mm} = 114 \text{ mm}.$$

Wickelt man diesen Zylindermantel ab und betrachtet eine Wicklung der Schraubenfeder, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete u beträgt. Die andere ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit aus der lichten Weite

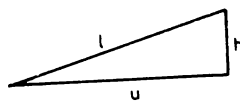


Abb. L.8.

zwischen zwei Wicklungen und dem Radius des Drahtes zu $h = (53 + 2 \cdot 6) \text{ mm} = 65 \text{ mm}$. (Vgl. Abb. L.8.)

Für die Länge l einer Wicklung folgt

$$l^2 = (\pi d)^2 + h^2 \implies l = 364 \text{ mm}.$$

Die Anzahl n der Wicklungen beträgt somit $n = 4000 \text{ mm} / l \approx 11$.

- b*) Die Länge L des Rohres beträgt $L = (11 \cdot 65 + 2 \cdot 6) \text{ mm} = 727 \text{ mm}$. Um den inneren Rohrdurchmesser d_i zu ermitteln, betrachten wir erneut Abb. L.8. Die Kathete h hat nunmehr die Länge 12 mm, so daß mit $l = 364 \text{ mm}$ folgt $u = 364,2 \text{ mm}$. Der zugehörige Durchmesser beträgt 115,8 mm. Der gesuchte Durchmesser ist $d_i = (2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 115,8) \text{ mm} = 131,8 \text{ mm}$. Wir runden auf 132 mm, somit ist $d_a = 140 \text{ mm}$.
 $\implies V = \pi (d_a^2 - d_i^2) \cdot L = 4970 \text{ cm}^3$
 $\implies m = 38,8 \text{ kg}$.

14. Körperberechnung - Rotationskörper

- c) Das Trapez ist gleichschenkelig. Wegen $|AB| - |CD| = |CD| = a$ folgt $\angle ABC = 60^\circ$ und $h = \sqrt{3} \cdot a/2$.
 c1) Es entsteht ein Zylinder mit zwei aufgesetzten Kegeln. Der Radius von Zylinder und Kegel ist h , die Zylinderhöhe beträgt a , die Kegelhöhe $a/2$. Es sei M_Z bzw. M_K die Mantelfläche von Zylinder bzw. Kegel.

$$\Rightarrow V_1 = V_Z + 2 \cdot V_K = \pi a^3, \quad A_{01} = M_Z + 2 \cdot M_K = 2\pi\sqrt{3} a^2.$$

c2) Es entsteht ein Zylinder mit zwei "eingelassenen" Kegeln, wobei die Zylinderhöhe nunmehr $2a$ beträgt.

$$\Rightarrow V_2 = V_Z - 2 \cdot V_K = \frac{5\pi}{4} a^3,$$

$$A_{02} = M_Z + 2 \cdot M_K = 3\pi\sqrt{3} a^2.$$

$$\Rightarrow V_1:V_2 = 4:5, \quad A_{01}:A_{02} = 2:3.$$

c3*) Wie die Abb. L.9. zeigt, kann der Rotationskörper als "Differenzkörper" zweier einander ähnlicher Doppelkegel mit Mantellinien der Längen $2a$ bzw. a aufgefaßt werden. Der kleine Doppelkegel entsteht durch Rotation des Dreiecks ECD, sein Radius beträgt $h = 3/2 a$. Die Höhe eines Teilkegels ist $a/2$.

$$\Rightarrow V_{\text{klein}} = \pi/4 a^3.$$

$$\Rightarrow V_{\text{groß}} = 8 \cdot V_{\text{klein}} = 2\pi a^3.$$

$$\Rightarrow V_{\text{rot}} = 7\pi/4 a^3.$$

Da man den "nicht benötigten Mantelteil" des großen Doppelkegels als Mantel des kleinen Kegels "verwenden" kann, folgt $A_0 = 2\pi\sqrt{3} a \cdot 2a = 4\pi\sqrt{3} a^2$.

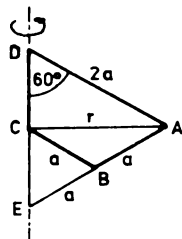


Abb. L.9.

d*) Den Rotationskörper kann man sich wie folgt vorstellen: Durch Rotation eines Rechtecks der Seitenlängen $|AB|$ und h um AB entsteht ein Zylinder. Ist nun z.B. $\alpha < 90^\circ$, so muß auf einer Länge von $h \cdot \cot \alpha$ der Zylinder zu einem Kegel "abgedreht" werden. Ist dagegen $\alpha > 90^\circ$, so muß ein Zylinder mit eingelassenem Kegel der Länge $h \cdot \cot(90^\circ - \alpha) = -h \cdot \cot \alpha$ angefügt werden. Analoges gilt für β . Somit folgt

$$V = \pi h^2 a - 2\pi/3 h^2 h \cdot \cot \alpha - 2\pi/3 h^2 h \cdot \cot \beta \\ = \pi h^2 [a - 2/3 h (\cot \alpha + \cot \beta)].$$

Entsprechende Überlegungen führen zu

$$A_0 = 2\pi h [a - h (\cot \alpha + \cot \beta) + \pi h^2 (1/\sin \alpha + 1/\sin \beta)].$$

Für das aufgeführte Trapez ist $V = 1636 \text{ cm}^3$, $A_0 = 831 \text{ cm}^2$.

15. Dachausmittlung

a) Durch Einzeichnen der Höhenlinien für die Höhe "2 m über Trauf" ergibt sich der in Abb. L.10. dargestellte Grundriß.

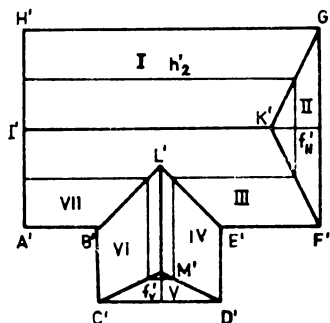


Abb. L.10.
Grundriß mit
Höhenlinien-
polygon

- b) Die Dachflächen sind mit I bis VI durchnummeriert. Für die Flächen I und III ergeben sich die Längen der Falllinien zu $f_I = f_{III} = 4 \text{ m} / \cos 40^\circ = 5,222 \text{ m}$. Analog $f_{VI} = f_{IV} = 3,264 \text{ m}$. Für die zugehörigen Höhen folgt $h_I = h_{III} = h_{II} = 4 \text{ m} / \cot 40^\circ = 3,356 \text{ m}$. Analog $h_{VI} = h_{IV} = h_V = 2,098 \text{ m}$. Somit sind die Höhen der Punkte M und K bekannt. Dadurch können die Längen der restlichen Falllinien ermittelt werden. $f_{II} = h_{II} / \sin 60^\circ = 3,875 \text{ m}$. Analog $f_V = 2,423 \text{ m}$. Um die Längen der Firstlinien IK bzw. ML zu berechnen, werden die Längen von f_{II}' und f_V' benötigt. Es ist $f_{II}' = h_{II} * \cot 60^\circ = 1,936 \text{ m}$, analog $f_V' = 1,211 \text{ m}$. $\Rightarrow |IK| = 10,064 \text{ m}$, $|ML| = (3,000 + 2,500 - 1,211) \text{ m} = 2,289 \text{ m}$. Schließlich müssen noch die Längen der Grat- und Kehllinien bestimmt werden. Aus f_V und $|CD|/2$ folgt $|CM|$, analog $|KB|$. $|CM| = 3,481 \text{ m}$, $|KB| = 5,569 \text{ m}$. Die Höhe des "Differenzdreiecks" $\triangle BLE$ ist wegen der gleichen Neigung der Flächen III und IV gleich f_{IV} . Somit folgt aus f_{III} und $|CD|/2$ die Länge der Kehllinie $|LE| = 4,111 \text{ m}$. Für die Flächen ergeben sich folgende Werte (in m^2):
- | I | II | III | IV | V | VI |
|--------|--------|--------|--------|-------|---------|
| 57,609 | 15,500 | 49,743 | 11,589 | 5,244 | 11,589. |
- Die Anzahl n der Biberschwänze beträgt $n = 1,05 * (44 * 130,530 + 48 * 20,744) = 7076$. Demnach sind 7100 Stück zu kalkulieren. Die Anzahl benötigter Gratsteine erfasst man in der Übersicht
- | IK | LM | CM (*2) | KB (*2) | gesamt |
|----|----|---------|---------|--------|
| 32 | 7 | 11 | 18 | 97 |
- Somit wird man 100 Stück bestellen. Darüber hinaus benötigt man 10 Kehlenbleche.

Aufgabe 16 siehe nächste Seite!

17. Seeräbergeschichten

- a) Da 1 sm, 1kn und 1h angepasste Einheiten sind, rechnen wir mit Zahlenwerten. Mit den Bezeichnungen nach Abb. L.11. gilt $d^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow d = 5$. Somit benötigt der Kauffahrer für diese Strecke eine Zeit $\Delta t = 5/6$. Ist nun t die Zeit, welche Kapitän Flint zur Verfügung hat, so gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck $\triangle FTI$, $12^2 + [(t - 5/6) * 6]^2 = (7t)^2$. $\Rightarrow 13t^2 + 60t - 169 = 0$ $\Rightarrow t_1 = 1,973$, $t_2 < 0$ entfällt. Nach etwa 2 h ist der Kauffahrer eingeholt. Er hat dabei eine Strecke von 11,8 sm zurückgelegt.

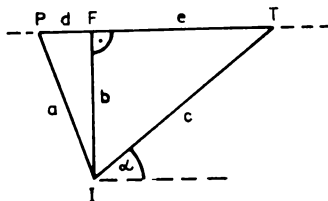


Abb. L.11.

b) $\tan \alpha = b/e = 12/6,8 \implies \alpha \approx 60,5^\circ$.

- c) Auf der südlichen Halbkugel und südlich des Wendekreises scheint die Sonne am Nachmittag aus nordwestlicher Richtung (Vgl. Abb. L.12.). Der Schatz muß deshalb in südöstlicher Richtung vom mittleren Baum liegen. Sind A und B die beiden noch stehenden Bäume, so ist durch M_1 , M_2 bzw. M_3 je eine mögliche Lage des mittleren Baumes gekennzeichnet. Demnach muß Jonas drei Trupps bilden.

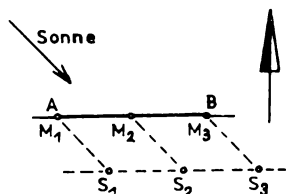


Abb. L. 12.

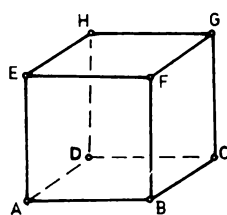
- d) Maßstäbliche Konstruktion aus $|AB| = 45$ ft, der "südlichen" Parallelen zu g_{AB} in der Entfernung 55 ft und den Kreisbögen um jeden der "Mittelpunkte" mit dem Radius 70 ft. Der "südöstliche Schnittpunkt" ergibt jeweils einen der gesuchten Punkte.
- e) Während der Fahrt hat sich Kapitän Flints Schiff auf einem Kreisbogen bewegt, dessen zugehöriger Zentriwinkel nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz $360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$ beträgt. $\implies 2\pi r : 360^\circ = 20 : 280^\circ \implies r = 4,09$. Für die Entfernung e der beiden Inseln folgt $\sin 40^\circ = e/2r \implies e = 5,26$. Die Entfernung zwischen den beiden Inseln beträgt demnach 5,26 sm.

16. Körperberechnung – Körperdarstellung

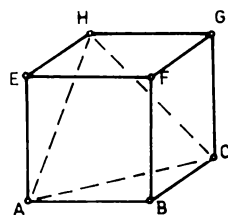
- a) Vgl. Abb. L.11.
- b) Auf eine ausführliche Lösung wird hier verzichtet. Die Beschreibung sollte i.allg. als "Differenzkörper" vorgenommen werden. Besonders instruktiv ist die Herstellung von Modellen mittels Knetmasse o.ä.
- c) Die Zahlen der folgenden Tabelle bedeuten Teile von a^3 bzw. Vielfache von a^2 .

	V	A_0
1	5/6	$4,5 + \sqrt{3}/2$
2	2/3	$4 + \sqrt{2}$
3	5/6	$5 + \sqrt{2}$
4	2/3	$3 + \sqrt{3}$
5	7/12	$4 + \sqrt{6}/4$
6	5/6	$4,5 + \sqrt{3}/2$
7	1/3	$1,5 + \sqrt{6}/2$
8	1/3	$1,5 + \sqrt{3}/2 + \sqrt{2}$
9.1.	11/12	$5 + \sqrt{6}/4$
9.2.	3/4	$4,5 + \sqrt{2}/2 + \sqrt{6}/4$

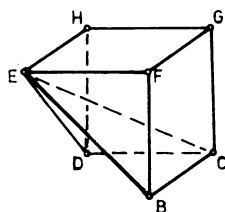
- d*) Auf die Lösung dieser Aufgabe wird hier aus Platzgründen verzichtet.



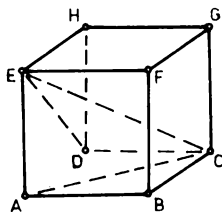
Ausgangswürfel



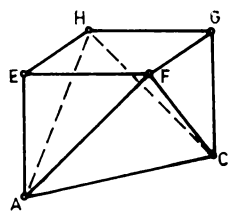
1



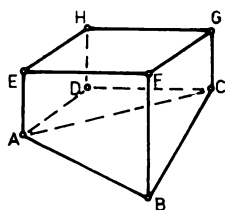
2



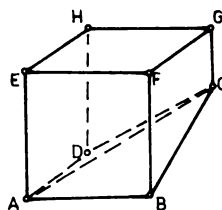
3



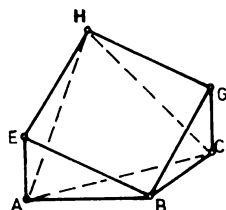
4



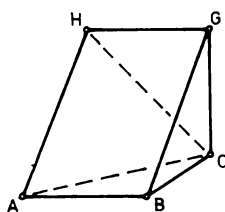
5



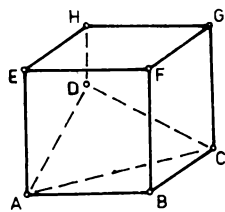
6



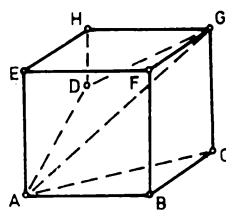
7



8



9.1.



9.2.

Abb. L. 13.

18. Straßenbau

a) $\tan \alpha = h/b = 8/100\% = 0,08 \Rightarrow \alpha = 4,574^\circ$.

b) $b = (h/8) \cdot 100\% = 705,0 \text{ m}$, $l = h/\sin \alpha = 707,3 \text{ m}$.

c1) Wegen der paarweise aufeinander senkrecht stehenden Schenkel ist $\alpha = \beta$. Zeichnet man das Lot von B auf g_{AM} ein (Vgl. Abb. 4 der Aufgabensammlung) und bezeichnen seine Länge mit e, so folgt

$$e = R_A \cdot \sin \beta,$$

$$\Delta h = R_A - R_A \cdot \cos \beta = R_A(1 - \cos \beta).$$

c2) Weiterhin gelten die Beziehungen $\widehat{AB} = \beta \cdot R_A \cdot \pi / 180^\circ$, $|BC| = (h - 2\Delta h) / \sin \alpha$, $b = 2e + |BC| \cdot \cos \alpha$, $l = 2\widehat{AB} + |BC|$. Für die vorgegebenen Werte erhält man (alle Angaben in m, Endergebnisse gerundet).

	e	Δh	$\widehat{AB}$	BC	l	b
R_{A1}	31,899	1,274	31,933	675,289	739,2	736,9
R_{A2}	99,683	3,981	99,789	607,399	807,0	804,8

Bemerkung: Noch einfacher ist die Berechnung, wenn man die Winkelhalbierende des Winkels β einzeichnet.

19. Kurbelgetriebe

a) Zunächst fällt man das Lot von P auf die x - Achse. Sein Fußpunkt sei P'.

$$\Rightarrow x = |P'K| \pm |OP'|.$$

Dabei gilt das Zeichen "+", falls $\gamma < 90^\circ$, ansonsten "-". Da andererseits $|OP'| = r \cdot \cos \gamma$ und das Vorzeichen von $\cos \gamma$ bei 90° in gleicher Weise wechselt, folgt mit $|P'K|^2 = |PK|^2 - |PP'|^2 = l^2 - (r \cdot \sin \gamma)^2$ schließlich $x = \sqrt{l^2 - (r \cdot \sin \gamma)^2} \pm r \cdot \cos \gamma$.

b) $x = |P'K|/2 \pm |OP'| = r \cdot \cos \gamma + \sqrt{l^2 - (r \cdot \sin \gamma)^2} / 2$,
 $y = (r \cdot \sin \gamma) / 2$.

c*) Das Getriebe ist nur funktionsfähig, falls

$$b + c > a + r, \quad r + c < a + b$$

$$\Rightarrow a + r - b < c < a + b - r.$$

Für die vorgegebenen Werte folgt speziell für d) bis h):

$$2190 \text{ mm} < c < 4310 \text{ mm}.$$

d) Es sind viele Wege möglich, z.B. erhält man durch das Einzeichnen des Lotes von D auf g_{BC} mit dem Fußpunkt D ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta DD'C$ mit den Katheten

$$|DD'| = a - r \cdot \cos 60^\circ = 2775 \text{ mm}, \quad |D'C| = b - r \cdot \sin 60^\circ = 1187 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow c = 3018 \text{ mm}.$$

e) $|DB| = 2894 \text{ mm}.$

f*) $\angle ABC$ wird maximal bzw. minimal für $|AC| = c \pm r$. Nunmehr folgt mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\cos \angle ABC = (a^2 + b^2 - |AC|^2) / 2ab$$

$$\Rightarrow \angle ABC_{\max} = 95,02^\circ, \quad \angle ABC_{\min} = 37,78^\circ.$$

$$g) c^2 + r^2 = a^2 + b^2 \implies c = 3701 \text{ mm.}$$

- h*) Zur vollständigen Lösung gehört die Fallunterscheidung, daß g_{BC} äußere oder innere Tangente an die Kreise um A bzw. B ist.
 $\implies c^2 = a^2 - (b \pm r)^2 \implies c_1 = 3072 \text{ mm (äußere Tangente)}$
 $c_2 = 1342 \text{ mm (innere Tangente)}$
 c_2 entfällt. (Widerspricht der unter c) ermittelten Bedingung)

- i*) Die Abb. L.14. zeigt das geometrische Modell der beiden Totlagen. Es gilt $|AC_1| = c - r$, $|AC_2| = c + r$. Im Dreieck BC_1C_2 wird die von B ausgehende Höhe eingezeichnet. Wendet man nunmehr den Satz des Pythagoras zweimal an und formt um, so folgt $c^2 = a^2 - b^2 + r^2$.

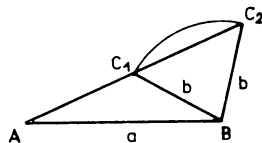


Abb. L.14.

20. Wassergehalt von Pflanzen

- a) Die Masse m der Substanz A hat die Massenanteile m_w des Wassers und m_T der Trockensubstanz, so daß $m_w + m_T = m$ bzw.
 $p_w \cdot m + p_T \cdot m = 100 \text{ m}$ mit
 $p_w + p_T = 100$ gelten.

Nach einem Durchlauf der Trockenkammer ist $m_{w1} = 0,7 m_w$, nach zwei Durchläufen $m_{w2} = 0,7 m_{w1} = 0,7^2 m_w$ usw. Für die notwendige Anzahl n von Durchläufen folgt
 $0,065 m > 0,7^n \cdot 0,923 m \implies 0,7^n < 0,065/0,923$.
 Wegen der Monotonie der Funktion $f(x) = \lg x$ ist
 $n \cdot \lg 0,7 < \lg 0,065 - \lg 0,923 \quad | : \lg 0,7 < 0$
 $\implies n > 7,44 \implies n_{\min} = 8$.

Analog folgt für die Substanz B $n > 8,88 \implies n_{\min} = 9$.

- b) Substanz A: $m_{w8} = 0,7^8 \cdot 0,923 = 0,053 \implies p_T = 94,7 \text{ bzw.}$
 Substanz B: $m_{w9} = 0,7^{18} \cdot 0,855 = 0,043 \implies p_T = 95,7$.

- c) $m = m_A + m_B + m_C = 255 \text{ kg}$
 $100 m_T = p_{TA} m_A + p_{TB} m_B + p_{TC} m_C \implies m_T = 240 \text{ kg}$
 $p_T : 100 = m_T : m \implies p_T = 93,9$.

21. "Ornamente"

- a) Vgl. Aufgabensammlung

- b*) Die Strecke hat die Länge $p = 4$.
 $y = g_1(x) = \begin{cases} (x - k \cdot 4)^2 & \text{für } x \in [k \cdot 4 - 1; k \cdot 4 + 1] \\ -(x - k \cdot 4 - 2)^2 + 2 & \text{für } x \in [k \cdot 4 + 1; k \cdot 4 + 3] \end{cases}$
 Hier und im weiteren gilt $k \in \mathbb{Z}$.

- c) $y = e_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0; 1] \\ -(x - 2)^2 + 2 & \text{für } x \in [1; 3] \\ (x - 4)^2 & \text{für } x \in [3; 4] \\ -(x - 4)^2 & \text{für } x \in [4; 5] \\ (x - 6)^2 - 2 & \text{für } x \in [5; 7] \\ -(x - 8)^2 & \text{für } x \in [7; 8] \end{cases}$

$$d*) \quad p = 8$$

$$y = g_2(x) = \begin{cases} (x - k*8)^2 & \text{für } x \in [k*8-1; k*8+1) \\ -(x - k*8 - 2)^2 + 2 & \text{für } x \in [k*8+1; k*8+3) \\ \vdots & \vdots \\ (x - k*8 - 6)^2 - 2 & \text{für } x \in [k*8+5; k*8+7) \end{cases}$$

$$e1) \quad p > 2$$

$$e2*) \quad p > 3$$

$$y = g_3(x) = \begin{cases} (x - k*p)^2 & \text{für } x \in [k*p; k*p+1) \\ -(x - k*p - 2)^2 + 2 & \text{für } x \in [k*p+1; k*p+3) \end{cases}$$

mit $D = \bigcup_k [k*p; k*p+3]$

f*) Das Ergebnis von a) geht über in

$$y = e_4(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0; a) \\ -(x - 2a)^2 + 2a^2 & \text{für } x \in [a; 3a) \\ (x - 4a)^2 & \text{für } x \in [3a; 4a) \end{cases}$$

Die anderen Ergebnisse analog.

22. Eine Aufgabe zur Zinsrechnung

- a) Er überzieht mit 11000 DM - 2500 DM = 8500 DM. Davon werden 4800 DM mit 8% belegt.
 $\Rightarrow Z_{30} = 4800 \text{ DM} * 0,08 * 30 / 360 + 3700 \text{ DM} * 0,12 * 30 / 360 = 69 \text{ DM}.$
- b) Er begleicht 4250 DM nach 15 Tagen.
 $\Rightarrow Z = 69 \text{ DM} / 2 + 4250 \text{ DM} * 0,08 * 15 / 360 = 48,67 \text{ DM}.$
- c) Er läßt die Schulden m Tage bestehen. Es gilt folgende Bilanz:
 $4800 * 0,08 * m / 360 + 3700 * 0,12 * m / 360 = 2500 * 0,0125 * (360 - m) / 360$
 $\Rightarrow m = 13,1$
 Er hätte bereits nach 13 Tagen alles begleichen müssen.

23. Eine Aufgabe zur Zinsseszinsrechnung

a)	3%	4,5%	5,25%
a1)	6000 DM	9000 DM	10500 DM
a2)	6878 DM	11059 DM	13362 DM

$$b1) \quad 26272 \text{ DM}$$

$$b2*) \quad 0,095 * 20000 \text{ DM} = 1900 \text{ DM} \text{ muß er sich leihen.}$$

Die jährlichen Zinsen der Anleihen betragen 1750 DM. Die erste Rate benutzt er zur teilweisen Tilgung der Schulden. Diese betragen somit $S_1 = 1,06 * 1900 \text{ DM} - 1750 \text{ DM} = 264 \text{ DM}$. Am Ende des zweiten Jahres zahlt er noch $S_2 = 1,06 * 264 \text{ DM} = 279,84 \text{ DM}$ zurück und ist schuldenfrei. Mit den restlichen 1470,16 DM beginnt er zu sparen. Sein Gewinn am Ende der zehn Jahre beträgt

$$K_{8,1750} = 1470,16 \text{ DM} * 1,03^8 + 1750 \text{ DM} * (1,03^8 - 1) / 0,03 = 17424 \text{ DM}.$$

$$c1*) \quad K_{45} = 420049 \text{ DM} \quad c1) \quad Z = 12601 \text{ DM} > 10000 \text{ DM} \Rightarrow \text{nie.}$$

$$c2*) \quad 0 = 420049 \text{ DM} * 1,03^n - 20000 \text{ DM} * (1,03^n - 1) / 0,03 \Rightarrow n = 33,6$$

33 Jahre werden 20000 DM ausgezahlt, dann noch ein Rest.

$$d*) \quad 0 = 420049 \text{ DM} * 1,03^{25} - R * (1,03^{25} - 1) / 0,03 \Rightarrow R = 24122,52 \text{ DM}.$$