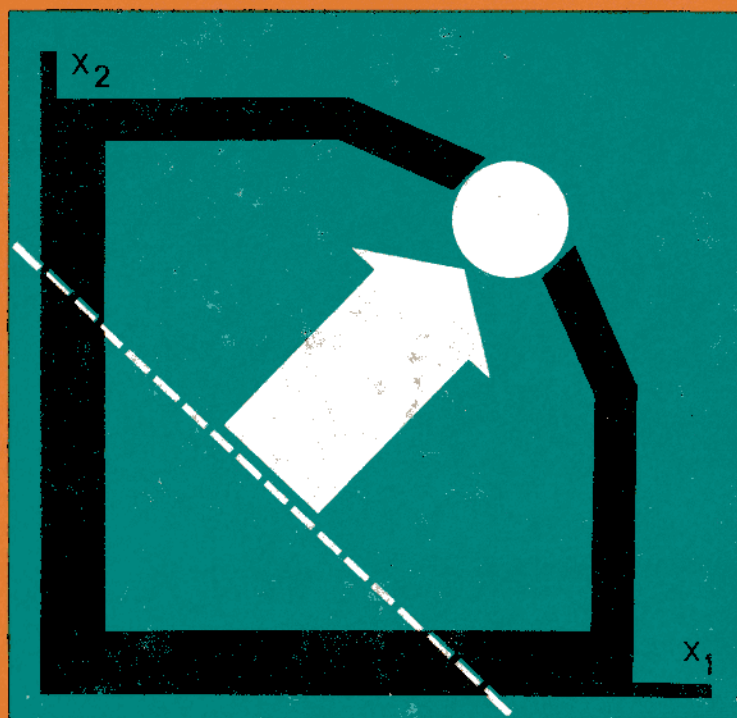


Mathematik für Wirtschafts- kaufleute



Mathematik für Wirtschafts Kaufleute

2., überarbeitete Auflage



VERLAG DIE WIRTSCHAFT BERLIN

Verfasser:

Prof. Dr. rer. oec. habil. Heinz Körth, Berlin (Kapitel 1 und 3 bis 7)

Prof. Dr. rer. oec. habil. Erhard Förster, Berlin (Kapitel 2)

Als berufsbildende Literatur für verbindlich erklärt.

Berlin, 1. 12 1971

Ministerium für Verkehrswesen

Redaktionsschluß: 30. 12. 1971

Verlag Die Wirtschaft, 1055 Berlin, Am Friedrichshain 22

1972 veröffentlicht · Lizenz-Nr. 122 · Druckgenehmigungs-Nr. 195/42/72

Alle Rechte vorbehalten · Einbandentwurf: U. Hilbert, Berlin

Druck: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden III/9/1

ES 5 B 5

10,25

Inhaltsverzeichnis

1.	<i>Summen- und Produktzeichen</i>	11
1.1.	Der Index	11
1.2.	Das Summenzeichen	14
1.3.	Rechenregeln für das Summenzeichen	20
1.4.	Das Produktzeichen	23
1.5.	Rechenregeln für das Produktzeichen	25
2.	<i>Statistische Methoden</i>	29
2.1.	Die tabellarische und graphische Darstellung	29
2.1.1.	Die tabellarische Darstellung	29
2.1.2.	Die graphische Darstellung	32
2.1.3.	Die Häufigkeitsverteilung	34
2.2.	Mittelwerte	36
2.2.1.	Das arithmetische Mittel	37
2.2.2.	Das harmonische Mittel	39
2.2.3.	Das chronologische Mittel	41
2.2.4.	Das geometrische Mittel	42
2.3.	Statistische Streuung	48
2.3.1.	Die Variationsbreite oder Spannweite	49
2.3.2.	Das lineare Streuungsmaß	49
2.3.3.	Das quadratische Streuungsmaß oder die Standardabweichung	52

2.4.	Statistische Verhältniszahlen	56
2.4.1.	Gliederungszahlen oder Anteilzahlen	56
2.4.2.	Beziehungszahlen	57
2.4.3.	Indexzzahlen	58
2.5.	Der Trend	75
3.	<i>Matrizenrechnung</i>	89
3.1.	Begriff und Definitionen	89
3.2.	Relationen	95
3.2.1.	Gleichheit von Matrizen	95
3.2.2.	Ungleichheit von Matrizen	97
3.3.	Matrizenoperationen	105
3.3.1.	Transponieren	105
3.3.2.	Matrizenaddition	109
3.3.3.	Subtraktion von Matrizen	115
3.3.4.	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	122
3.3.5.	Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor (Skalarprodukt)	129
3.3.6.	Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	133
3.3.7.	Multiplikation von Matrizen	141
3.3.8.	Zusammenfassung der Matrizenoperationen	149
3.4.	Matrizenmodelle (numerische Beispiele)	151
3.4.1.	Einfache Teileverflechtung	152
3.4.2.	Kompliziertere Teileverflechtung	154
3.4.3.	Betriebliche Verflechtung	155
3.4.4.	Volkswirtschaftliche Verflechtung	158
3.5.	Linearkombination von Vektoren	161
3.6.	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit ..	167
3.7.	Elementare Basistransformation	170
3.8.	Rang einer Matrix	186

4.	<i>Lineare Gleichungssysteme</i>	193
4.1.	Darstellung linearer Gleichungssysteme	193
4.2.	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	194
4.3.	Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung	196
4.4.	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	202
5.	<i>Matrizeninversion</i>	209
5.1.	Begriff der inversen Matrix	209
5.2.	Berechnung der inversen Matrix.....	210
5.3.	Anwendung der inversen Matrix.....	214
6.	<i>Lineare Ungleichungssysteme</i>	219
6.1.	Symbole für Ungleichheitsbeziehungen	219
6.2.	Eigenschaften der Ungleichheitsbeziehungen	220
6.3.	Begriff der Erfüllungsmenge von Ungleichungen ...	223
6.4.	Lineare Ungleichungssysteme mit einer Variablen ..	224
6.5.	Graphische Lösung linearer Ungleichungssysteme mit zwei Variablen	226
6.6.	Rechnerische Lösung linearer Ungleichungssysteme mit zwei oder mehr Variablen	236
7.	<i>Lineare Optimierung</i>	249
7.1.	Begriff der linearen Optimierung	249
7.2.	Graphische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben	252
7.3.	Rechnerische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben	260
7.4.	Lösung von Transportaufgaben	287
7.4.1.	Aufstellung des mathematischen Modells	287

7.4.2.	Näherungsverfahren zur Lösung von Transportaufgaben	289
7.4.3.	Verallgemeinerung.....	294
7.5.	Verschiedene lineare Optimierungsmodelle (numerische Beispiele)	308
7.5.1.	Optimierungsmodelle für die Produktionsplanung...	308
7.5.2.	Optimierungsmodell für ein Mischungsproblem	311
7.5.3.	Das geschlossene Transportmodell	312
7.5.4.	Das offene Transportmodell.....	313
7.5.5.	Das Transport-Produktions-Modell	314
7.5.6.	Das Optimierungsmodell für ein Transportproblem mit Beschränkungen	315
7.5.7.	Optimierungsmodell für das Zuordnungsproblem als spezielles Transportproblem	316
	Lösungen.....	319

Vorwort

Mit der weiteren Entwicklung unserer sozialistischen Gesellschaft wachsen die Anforderungen an das Wissen und Können der Werktätigen. Der sozialistische Kaufmann braucht außer einem höheren gesellschaftswissenschaftlichen, ökonomischen, technischen und technologischen Wissen in zunehmendem Maße mathematische Kenntnisse.

In unserer Wirtschaftspraxis werden immer häufiger mathematische und statistische Methoden sowie moderne Rechenanlagen angewandt, um die komplizierten ökonomischen Probleme zu lösen und die günstigsten Varianten zu finden. Der sozialistische Kaufmann hat dabei in hohem Maße mitzuwirken. Schon während der Berufsausbildung muß er Grundkenntnisse über mathematische und statistische Methoden und ihre Anwendung erwerben. Später sind diese Kenntnisse zu vertiefen, um sie mit Nutzen am Arbeitsplatz anwenden zu können.

Das vorliegende Lehrbuch vermittelt den Stoff für das Unterrichtsfach Wirtschaftsmathematik. Die 2., überarbeitete Auflage stimmt in der Systematik mit dem verbindlichen Lehrplan Wirtschaftsmathematik für den Grundberuf Wirtschaftskaufmann überein. Das Kapitel „Statistische Methoden“ wurde gegenüber der 1. Auflage entsprechend dem staatlichen Lehrplan ergänzt.

Bei der Behandlung der Themen wird folgerichtig an die Kenntnisse angeknüpft, die in den Lehrbüchern der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule vermittelt werden.

Jedes Kapitel enthält viele Beispiele (am Rande der Seite durch ein Quadrat mit Ziffer gekennzeichnet) sowie mehrere Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades, die der Übung und Vertiefung dienen sollen. Zu den Aufgaben, die mit (L) gekennzeichnet sind, befinden sich die Lösungen am Schluß des Buches.

Wir danken allen Wissenschaftlern und Lehrern, die uns bei der Herausgabe dieses Buches unterstützt haben. Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. habil. C. Otto, Berlin, für die fachliche Begutachtung und Frau Dipl.-Hdl. E. Glawe, Berlin, für die pädagogische Begutachtung. Zugleich bitten wir alle Benutzer, uns bei der weiteren Vervollkommnung des Buches zu helfen. Für kritische Hinweise, Anregungen und Vorschläge sind wir dankbar.

Verfasser und Verlag

1.

Summen- und Produktzeichen

1.1.

Der Index

Unter Index verstehen wir in diesem Kapitel ein Zeichen, das bestimmten Symbolen zur Unterscheidung angefügt wird, z. B. x_1, x_2 ; P_1, P_2, P_3 .

1

Wir betrachten die zehn Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. Wenn wir im weiteren von diesen zehn Zahlen sprechen oder diese Zahlen schreiben, ist es unvorteilhaft, sie alle einzeln aufzuführen. Wir wählen deshalb eine Kurzschreibweise. Wir benutzen einen variablen Index, den wir zum Beispiel mit i bezeichnen können (es ist aber auch möglich, einen beliebigen anderen Buchstaben dafür zu verwenden). Wir sprechen dann von den Zahlen x_i , müssen aber zum Ausdruck bringen, daß es sich um die Zahlen $x_1, \dots, x_{10}$ handelt. Das geschieht dadurch, daß wir hinzufügen, daß i die Zahlen von 1 bis 10 durchläuft. Wir schreiben x_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) und sprechen: x_i , i durchläuft alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10.

2

Wenn ein Betrieb zwölf Erzeugnisse herstellt und der Name der Erzeugnisse nicht interessiert, bezeichnen wir die Erzeugnisse kürzer mit $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}$. Es ist zweckmäßig, dafür P_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) zu schreiben und zu lesen: P_i , i durchläuft alle natürlichen Zahlen von 1 bis 12.

3

Die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, $\dots$, 100 schreiben wir kürzer n ($n = 1, 2, \dots, 100$).

4

Für die Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 200^2$ schreiben wir kürzer n^2 ($n = 1, 2, \dots, 200$).

Haben wir eine Menge von Objekten, zum Beispiel Zahlen oder Bezeichnungen, so führen wir für die Objekte ein allgemeines Symbol ein, versehen das Symbol mit einem variablen Index und schreiben in Klammern, welche Werte der variable Index annehmen soll.

5

Ein Betrieb beliefert sieben Lager mit einem einheitlichen Erzeugnis. Die Liefermengen in die einzelnen Lager sind unterschiedlich. Wir können die Lager mit L_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) und die Liefermengen mit y_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) bezeichnen.

Der Doppelindex

Oft ist es vorteilhaft, bei der allgemeinen Darstellung von Objekten Doppelindizes zu verwenden.

6

Von drei Betrieben werden an vier Verbraucher unterschiedliche Mengen eines einheitlichen Erzeugnisses geliefert. Wir bezeichnen die Betriebe mit B_1, B_2, B_3 , die Verbraucher mit V_1, V_2, V_3, V_4 , die gelieferten Mengen mit $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$ (zu lesen als x-eins-eins, x-eins-zwei usw.). Der erste Index in den Liefermengen gibt den Betrieb an, der zweite Index den Verbraucher.

Tabelle 1.1

Betriebe	Verbraucher			
	V_1	V_2	V_3	V_4
B_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
B_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
B_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Dafür können wir kürzer schreiben:

Betriebe B_i ($i = 1, \dots, 3$)

Verbraucher V_j ($j = 1, \dots, 4$)

Liefermengen x_{ij} ($i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 4$)

7

In einem Betrieb werden fünf Erzeugnisse hergestellt, die auf sechs Maschinen bearbeitet werden.

Die Maschinen bezeichnen wir mit $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$, die Erzeugnisse mit P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Die Bearbeitungszeit je Einheit des Erzeugnisses auf den verschiedenen Maschinen nennen wir $t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, \dots, t_{61}, t_{62}, t_{63}, t_{64}, t_{65}$.

Der erste Index gibt die Maschine an, der zweite Index das Produkt. Die produzierten Mengen der Erzeugnisse P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Tabelle 1.2

Maschine	Erzeugnis				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}
M_2	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}
M_3	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}	t_{35}
M_4	t_{41}	t_{42}	t_{43}	t_{44}	t_{45}
M_5	t_{51}	t_{52}	t_{53}	t_{54}	t_{55}
M_6	t_{61}	t_{62}	t_{63}	t_{64}	t_{65}

Menge des Erzeugnisses	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

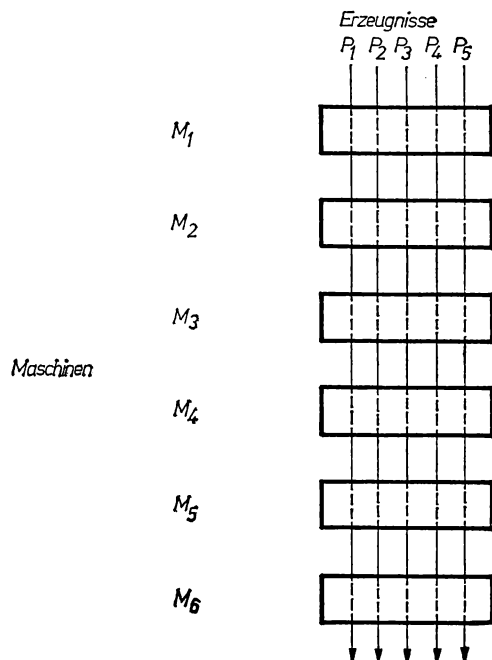


Abb. 1.1

Dafür sprechen wir kürzer von den Maschinen M_i ($i = 1, \dots, 6$), von den Erzeugnissen P_j ($j = 1, \dots, 5$), den Bearbeitungszeiten t_{ij} für eine Einheit der Erzeugnisse P_j ($j = 1, \dots, 5$) auf den Maschinen M_i ($i = 1, \dots, 6$), t_{ij} ($i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 5$) und den Mengen x_j ($j = 1, \dots, 5$);

1.2.

Das Summenzeichen

1

Uns ist die Aufgabe gestellt, die Zahlen x_i ($i = 1, \dots, 10$) des Beispiels 1 aus 1.1. zu addieren. Wir sollen also die Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

bilden. Diese Darstellung der Summe wird um so unvorteilhafter, je mehr Summanden auftreten. In der Mathematik führen wir für die Summe $x_1 + \dots + x_{10}$ das folgende Kurzzeichen ein:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i.$$

Für eine Menge von Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ schreiben wir nach unseren bisherigen Ausführungen x_i ($i = 1, \dots, n$).

Für die Summe $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ führen wir eine Kurzschreibweise ein.

Definition 1 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i.$

x_i heißt Summationsvariable, $i = 1$ und $i = n$ heißen Summationsgrenzen, 1 ist die untere und n die obere Summationsgrenze. Das Symbol Σ ist der große griechische Buchstabe Sigma, das S des griechischen Alphabets.

Unter das Symbol Σ schreiben wir die untere Summationsgrenze und über das Symbol Σ die obere Summationsgrenze. Hinter das Symbol Σ setzen wir die Summationsvariable.

Die Summationsgrenzen sind ganze Zahlen.

$$\sum_{i=1}^n x_i \text{ lesen wir als Summe } x_i \text{ für } i = 1 \text{ bis } n.$$

2

Wir wollen die natürlichen Zahlen 1, 2, $\dots$, 100 summieren, die wir nach Beispiel 3 aus 1.1. kürzer n ($n = 1, \dots, 100$) schreiben. Die Summe dieser natürlichen Zahlen wird durch

$$\sum_{n=1}^{100} n$$

dargestellt. n ist die Summationsvariable; 1 und 100 sind die Summationsgrenzen.

3

Wir wollen die Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 200^2$ summieren, die wir kürzer mit n^2 ($n = 1, \dots, 200$) bezeichnen. Für die Summe schreiben wir

$$\sum_{n=1}^{200} n^2.$$

Hier ist n^2 die Summationsvariable, 1 und 200 sind die Summationsgrenzen.

4

Wir betrachten die Liefermengen y_i ($i = 1, \dots, 7$) aus Beispiel 5 des Abschnittes 1.1., die ein Betrieb an sieben Lager verschickt. Die Gesamtliefermenge des Betriebes ergibt sich als Summe dieser Liefermengen y_i ($i = 1, \dots, 7$).

Diese Gesamtliefermenge stellen wir durch

$$\sum_{i=1}^7 y_i$$

dar. y_i ist die Summationsvariable, 1 und 7 sind die Summationsgrenzen.

5

Wir betrachten die Liefermengen x_{ij} ($i = 1, \dots, 3$; $j = 1, \dots, 4$) des Beispiels 6 aus 1.1.

Die Gesamtlieferung des ersten Betriebes ist

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = \sum_{j=1}^4 x_{1j}.$$

Wir müssen bei dieser Summe beachten, daß nur der zweite Index variabel ist, während der erste Index fest bleibt. Die Summationsvariable ist x_{1j} , die Summationsgrenzen sind 1 und 4.

Die Gesamtlieferung des zweiten Betriebes ist

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = \sum_{j=1}^4 x_{2j}.$$

die Gesamtlieferung des dritten Betriebes

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = \sum_{j=1}^4 x_{3j}.$$

Diese drei Summen können wir auch kürzer schreiben. Die Gesamtliefermenge des Betriebes B_i ($i = 1, \dots, 3$) ist

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = \sum_{j=1}^4 x_{ij} \quad (i = 1, \dots, 3);$$

Wir wollen nun darstellen, welche Mengen die einzelnen Verbraucher erhalten haben.

Die Gesamtmenge für den ersten Verbraucher ist

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = \sum_{i=1}^3 x_{i1}.$$

In diesem Falle ist der erste Index variabel, der zweite Index bleibt konstant. Die Summationsvariable ist x_{i1} , die Summationsgrenzen sind 1 und 3.

Die Gesamtmenge für den zweiten Verbraucher ist

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = \sum_{i=1}^3 x_{i2};$$

die Gesamtmenge für den dritten Verbraucher

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = \sum_{i=1}^3 x_{i3}$$

und die Gesamtmenge für den vierten Verbraucher

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = \sum_{i=1}^3 x_{i4};$$

Die Gesamtmengen der vier Verbraucher können wir auch kürzer schreiben. Die Gesamtmenge des Verbrauchers V_j ($j = 1, \dots, 4$) ist

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = \sum_{i=1}^3 x_{ij} \quad (j = 1, \dots, 4).$$

6

Im Beispiel 7 aus 1.1. werden fünf Erzeugnisse P_j ($j = 1, \dots, 5$) auf sechs Maschinen M_i ($i = 1, \dots, 6$) bearbeitet.

Zur Produktion der Mengen x_j ($j = 1, \dots, 5$) wird auf der ersten Maschine folgende Maschinenzeit benötigt:

$$t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + t_{13} x_3 + t_{14} x_4 + t_{15} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{1j} x_j;$$

In diesem Falle ist $t_{1j} x_j$ die Summationsvariable.

Auf den anderen Maschinen werden folgende Maschinenzeiten benötigt:

$$M_2 : t_{21} x_1 + t_{22} x_2 + t_{23} x_3 + t_{24} x_4 + t_{25} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{2j} x_j$$

$$M_3 : t_{31} x_1 + t_{32} x_2 + t_{33} x_3 + t_{34} x_4 + t_{35} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{3j} x_j$$

$$M_4 : t_{41} x_1 + t_{42} x_2 + t_{43} x_3 + t_{44} x_4 + t_{45} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{4j} x_j$$

$$M_5 : t_{51} x_1 + t_{52} x_2 + t_{53} x_3 + t_{54} x_4 + t_{55} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{5j} x_j$$

$$M_6 : t_{61} x_1 + t_{62} x_2 + t_{63} x_3 + t_{64} x_4 + t_{65} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{6j} x_j;$$

Für diese sechs Summen können wir auch schreiben:

Auf der Maschine M_i ($i = 1, \dots, 6$) wird die Maschinenzeit

$$t_{i1} x_1 + t_{i2} x_2 + t_{i3} x_3 + t_{i4} x_4 + t_{i5} x_5 = \sum_{j=1}^5 t_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, 6)$$

benötigt;

Im Beispiel 5 beträgt die Gesamtlieferung

des ersten Betriebes $\sum_{j=1}^4 x_{1j} = g_1$,

des zweiten Betriebes $\sum_{j=1}^4 x_{2j} = g_2$

und des dritten Betriebes $\sum_{j=1}^4 x_{3j} = g_3$.

Wir schreiben dafür kürzer, daß der Betrieb

B_i ($i = 1, \dots, 3$) die Gesamtlieferung $g_i = \sum_{j=1}^4 x_{ij}$ ($i = 1, \dots, 3$) tätigt.

Bisher haben wir als untere Summationsgrenze immer 1 gewählt. Das muß nicht immer so sein.

Definition 2 $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n = \sum_{i=m}^n x_i$

Bezeichnen wir mit x_i ($i = 1, \dots, n$) die Lieferung eines Betriebes im i -ten Monat eines Jahres, so ergibt sich die Lieferung des zweiten Halbjahres mit

$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = \sum_{i=7}^{12} x_i.$$

In der Mathematik ist es üblich, auch die Summe gleicher Summanden

$$c + c + \dots + c = nc \text{ (n Summanden)}$$

mit Hilfe des Summenzeichens zu schreiben.

Definition 3 $c + c + \dots + c = nc = \sum_{i=1}^n c$ (n Summanden)

$$24 \cdot 8 = \sum_{i=1}^8 24 = \sum_{i=1}^{24} 8$$

Die Doppelsumme

Wir wollen die Gesamtlieferungen aus Beispiel 7 addieren, um damit die Lieferungen aller Betriebe an alle Verbraucher zu erfassen.

$$g_1 + g_2 + g_3 = \sum_{j=1}^4 x_{1j} + \sum_{j=1}^4 x_{2j} + \sum_{j=1}^4 x_{3j}$$

Dafür schreiben wir kürzer $\sum_{i=1}^3 g_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^4 x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ij}$.

Im Beispiel 5 erhält der Verbraucher V_1

die Menge $\sum_{i=1}^3 x_{i1} = m_1$,

der Verbraucher V_2 die Menge $\sum_{i=1}^3 x_{i2} = m_2$,

der Verbraucher V_3 die Menge $\sum_{i=1}^3 x_{i3} = m_3$

und der Verbraucher V_4 die Menge $\sum_{i=1}^3 x_{i4} = m_4$.

Dafür sagen wir kürzer, daß der Verbraucher V_j ($j = 1, \dots, 4$) die

Menge $\sum_{i=1}^3 x_{ij} = m_j$ ($j = 1, \dots, 4$) erhält.

Diese Mengen wollen wir addieren, um die Gesamtmenge der vier Verbraucher zu erhalten:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = \sum_{i=1}^3 x_{i1} + \sum_{i=1}^3 x_{i2} + \sum_{i=1}^3 x_{i3} + \sum_{i=1}^3 x_{i4}.$$

Dafür schreiben wir kürzer

$$\sum_{j=1}^4 m_j = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^3 x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 x_{ij}.$$

Haben wir eine Menge von Zahlen, die durch Doppelindizes gekennzeichnet sind, also x_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), so lassen sich verschiedene Teilsummen bilden. Ist zum Beispiel i konstant, so läßt sich die Teilsumme

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}$$

bilden. Weil i die Werte $1, \dots, m$ annehmen kann, gibt es m solcher Teilsummen

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}, \sum_{j=1}^n x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n x_{mj},$$

allgemein

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ist j konstant, so läßt sich die Teilsumme

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}$$

bilden. Weil j die Werte $1, \dots, n$ annehmen kann, gibt es n solcher Teilsummen

$$\sum_{i=1}^m x_{i1}, \sum_{i=1}^m x_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m x_{in},$$

$$\text{allgemein } \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Sollen die m Teilsummen

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}, \sum_{j=1}^n x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n x_{mj},$$

$$\text{allgemein } \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (i = 1, \dots, m),$$

addiert werden, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} + \sum_{j=1}^n x_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^n x_{mj} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}.$$

Wir sprechen in diesem Falle von einer Doppelsumme.

Entsprechend können wir die n Teilsummen

$$\sum_{i=1}^m x_{i1}, \sum_{i=1}^m x_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m x_{in},$$

$$\text{allgemein } \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad (j = 1, \dots, n),$$

addieren und erhalten

$$\sum_{i=1}^m x_{i1} + \sum_{i=1}^m x_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^m x_{in} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}.$$

11

Wir wollen die im Beispiel 6 insgesamt benötigte Maschinenzeit auf allen Maschinen als Doppelsumme darstellen. Die Maschinenzeiten für die sechs Maschinen betragen im einzelnen:

$$\sum_{j=1}^5 t_{1j} x_j, \sum_{j=1}^5 t_{2j} x_j, \sum_{j=1}^5 t_{3j} x_j, \sum_{j=1}^5 t_{4j} x_j, \sum_{j=1}^5 t_{5j} x_j, \sum_{j=1}^5 t_{6j} x_j,$$

$$\text{allgemein } \sum_{j=1}^5 t_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Die insgesamt benötigte Maschinenzeit auf allen Maschinen ergibt sich dann als Summe dieser sechs Summen.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^5 t_{1j} x_j + \sum_{j=1}^5 t_{2j} x_j + \sum_{j=1}^5 t_{3j} x_j + \sum_{j=1}^5 t_{4j} x_j + \sum_{j=1}^5 t_{5j} x_j + \sum_{j=1}^5 t_{6j} x_j \\ &= \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^5 t_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 t_{ij} x_j \end{aligned}$$

Für die Doppelsumme gilt

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}.$$

Die Doppelsumme können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{\substack{j=n \\ i=m \\ i=1 \\ j=1}}^{j=1} x_{ij}.$$

1.3.

Rechenregeln für das Summenzeichen

Für das Rechnen mit dem Summenzeichen gelten folgende Sätze (a_i und b_i sind reelle Zahlen):

Satz 1
$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$$

1

Ein Betrieb liefert im ersten Halbjahr an vier Abnehmer die Mengen x_1, x_2, x_3, x_4 , allgemein x_i ($i = 1, \dots, 4$), im zweiten Halbjahr die Mengen y_1, y_2, y_3, y_4 , allgemein y_i ($i = 1, \dots, 4$).

Die Gesamtlieferung im ersten Halbjahr ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sum_{i=1}^4 x_i,$$

die Gesamtlieferung im zweiten Halbjahr

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \sum_{i=1}^4 y_i.$$

Die Gesamtlieferung des Jahres ist dann

$$\sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 y_i.$$

Die Jahreslieferungen an die einzelnen Abnehmer betragen

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4,$$

allgemein $x_i + y_i$ ($i = 1, \dots, 4$).

Die Summe dieser Lieferungen ist

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i).$$

Damit erhalten wir die Gesamtlieferungen des Jahres auf zweifache

Weise:
$$\sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 y_i = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i).$$

Satz 2
$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i.$$

Satz 3
$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (c \text{ ist eine Konstante}).$$

2 Aus den Angaben im Beispiel 7 (Abschnitt 1.1.) können wir die insgesamt benötigte Maschinenzeit auf allen sechs Maschinen für die Herstellung von x_1 Einheiten des ersten Erzeugnisses berechnen. Wir benötigen für die Herstellung von x_1 Einheiten auf den einzelnen Maschinen die Zeiten

$$t_{11} x_1, t_{21} x_1, t_{31} x_1, t_{41} x_1, t_{51} x_1, t_{61} x_1,$$

allgemein $t_{i1} x_1$ ($i = 1, \dots, 6$).

Die insgesamt benötigte Maschinenzeit für x_1 Einheiten ergibt sich als Summe der Zeiten

$$t_{11} x_1 + t_{21} x_1 + t_{31} x_1 + t_{41} x_1 + t_{51} x_1 + t_{61} x_1 = \sum_{i=1}^6 t_{i1} x_1.$$

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_1 benötigen wir insgesamt auf allen sechs Maschinen folgende Maschinenzeit:

$$t_{11} + t_{21} + t_{31} + t_{41} + t_{51} + t_{61} = \sum_{i=1}^6 t_{i1}.$$

Für die Herstellung von x_1 Einheiten brauchen wir die Maschinenzeit:

$$x_1 \sum_{i=1}^6 t_{i1}.$$

Für die Herstellung von x_1 Einheiten des ersten Erzeugnisses wird also auf allen Maschinen folgende Maschinenzeit benötigt:

$$\sum_{i=1}^6 t_{i1} x_1 = x_1 \sum_{i=1}^6 t_{i1}.$$

Satz 4
$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i.$$

3 Ein Betrieb produziert in den ersten sechs Monaten die Mengen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Insgesamt produziert er in diesem Zeitraum

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \sum_{i=1}^6 x_i.$$

In den folgenden sechs Monaten produziert der Betrieb die Mengen $x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. Insgesamt produziert er im zweiten Halbjahr

$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = \sum_{i=7}^{12} x_i.$$

Die Jahresproduktion ist $\sum_{i=1}^6 x_i + \sum_{i=7}^{12} x_i$ oder

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + x_7 + \cdots + x_{12} = \sum_{i=1}^{12} x_i.$$

Im allgemeinen gilt: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \neq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$.

4

$$\sum_{i=1}^2 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\sum_{i=1}^2 a_i \cdot \sum_{i=1}^2 b_i = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2.$$

Beide Summen sind nur dann gleich, wenn $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$ ist.

Aufgaben zu 1.3.

1

Stellen Sie die folgenden Summen ausführlich dar!

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 a_i \quad \text{b) } \sum_{j=4}^{10} b_j \quad \text{c) } \sum_{n=2}^{10} n^3 \quad \text{d) } \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^6 (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad (\text{L})$$

2

Stellen Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar!

$$\text{a) } z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6$$

$$\text{b) } k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3 + k_4 l_4 + k_5 l_5$$

$$\text{c) } \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} + \frac{c_4}{d_4} + \frac{c_5}{d_5} + \frac{c_6}{d_6} + \frac{c_7}{d_7}$$

$$\text{d) } (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 + (a_4 + b_4)^2 \quad (\text{L})$$

3

Berechnen Sie $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$

$$\text{a) } \text{für } a_i = 30; 35; 36; 37; 39;$$

$$\text{b) } \text{für } a_i = 3,0; 3,1; 3,3; 3,4; 3,5; 3,7! \quad (\text{L})$$

4
Berechnen Sie $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 h_i}{\sum_{i=1}^n h_i}}$

- a) für $a_i = 3; 4; 5; 8; 9; 10$
und $h_i = 1; 2; 3; 4; 6; 8$,
b) für $a_i = 12; 13; 15; 16; 20$
und $h_i = 2; 4; 5; 2; 1!$ (L)

5
Stellen Sie die folgenden Summen ausführlich dar!

- a) $\sum_{i=1}^{10} z_{ij}$ b) $\sum_{j=1}^9 z_{ij}$ c) $\sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij}$ d) $\sum_{j=1}^7 c_{ij} x_{ij}$ (L)

6
Stellen Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar!

- a) $b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15}$
b) $c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{34} + c_{35} + c_{36}$
c) $d_{12} + d_{22} + d_{32} + d_{42} + d_{52} + d_{62} + d_{72}$
d) $k_{11} y_{11} + k_{12} y_{12} + k_{13} y_{13} + k_{14} y_{14} + k_{15} y_{15}$ (L)

7
Stellen Sie die folgenden Summen ausführlich dar!

- a) $\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 z_{ij}$ b) $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 x_{ij}$ c) $\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij}$ (L)

8
Stellen Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar! (Doppelsumme)

- a) $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}$
 $+ x_{41} + x_{42} + x_{43}$
b) $c_{11} y_{11} + c_{12} y_{12} + c_{13} y_{13} + c_{14} y_{14} + c_{21} y_{21} + c_{22} y_{22}$
 $+ c_{23} y_{23} + c_{24} y_{24} + c_{31} y_{31} + c_{32} y_{32} + c_{33} y_{33} + c_{34} y_{34}$
 $+ c_{41} y_{41} + c_{42} y_{42} + c_{43} y_{43} + c_{44} y_{44} + c_{51} y_{51} + c_{52} y_{52}$
 $+ c_{53} y_{53} + c_{54} y_{54}$ (L)

1.4.

Das Produktzeichen

1

Uns ist die Aufgabe gestellt, die Zahlen x_i ($i = 1, \dots, 10$) des Beispiels 1 aus 1.1. miteinander zu multiplizieren. Wir sollen also das Produkt

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 \cdot x_9 \cdot x_{10}$$

bilden. Diese Darstellung des Produkts ist umständlich: Sie wird um so unvorteilhafter, je mehr Faktoren auftreten. In der Mathematik führen wir für das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10}$ das folgende Kurzzeichen ein:

$$\prod_{i=1}^{10} x_i.$$

Definition 1 Für das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ führen wir eine Kurzschreibweise ein

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n x_i.$$

$\prod_{i=1}^n x_i$ lesen wir als Produkt x_i für $i = 1$ bis n .

Das Symbol Π ist der große griechische Buchstabe Pi, das P des griechischen Alphabets.

x_i heißt Multiplikationsvariable, i heißt Multiplikationsindex. Der kleinste Wert des Multiplikationsindex heißt untere Multiplikationsgrenze, der größte Wert des Multiplikationsindex obere Multiplikationsgrenze. Wir haben als untere Multiplikationsgrenze 1 und als obere Multiplikationsgrenze n gewählt.

Unter das Symbol Π schreiben wir die untere Multiplikationsgrenze und über das Symbol Π die obere Multiplikationsgrenze. Hinter das Symbol Π setzen wir die Multiplikationsvariable.

Die Multiplikationsgrenzen sind ganze Zahlen.

2

Wir multiplizieren die natürlichen Zahlen 1, 2, $\dots$, 100 miteinander, die wir nach Beispiel 3 aus 2.1. kürzer n ($n = 1, \dots, 100$) schreiben. Das Produkt dieser Zahlen wird durch

$$\prod_{n=1}^{100} n$$

dargestellt. n ist die Multiplikationsvariable und zugleich Multiplikationsindex; 1 und 100 sind die Multiplikationsgrenzen.

3

Wir multiplizieren die natürlichen Zahlen 1, 2, $\dots$, n miteinander. Das Produkt schreiben wir

$$\prod_{i=1}^n i.$$

i ist die Multiplikationsvariable und zugleich Multiplikationsindex; 1 und n sind die Multiplikationsgrenzen.

Für dieses Produkt schreiben wir oft

$$\prod_{i=1}^n i = n! \quad (n \text{ Fakultät})$$

| 4 |

Für das Produkt der Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 schreiben wir

$$\prod_{i=1}^4 a_i;$$

a_i ist die Multiplikationsvariable; i ist der Multiplikationsindex; $i = 1$ und $i = 4$ sind die Multiplikationsgrenzen.

Bisher haben wir als untere Multiplikationsgrenze immer 1 gewählt. Das muß nicht immer so sein.

Definition 2 $x_m \cdot x_{m+1} \cdot x_{m+2} \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=m}^n x_i$

| 5 |

Für das Produkt der Zahlen $x_5, x_6, \dots, x_{20}$ schreiben wir

$$x_5 \cdot x_6 \cdot \dots \cdot x_{20} = \prod_{i=5}^{20} x_i.$$

Es ist üblich, auch das Produkt *gleicher* (oder gleichgroßer) Faktoren $c \cdot c \cdot \dots \cdot c = c^n$ (n Faktoren) mit Hilfe des Produktzeichens zu schreiben.

Definition 3 $c \cdot c \cdot \dots \cdot c = c^n = \prod_{i=1}^n c$ (n Faktoren)

| 6 |

$$4^5 = \prod_{i=1}^5 4$$

1.5.

Rechenregeln für das Produktzeichen

Für das Rechnen mit dem Produktzeichen gelten folgende Regeln (a_i und b_i sind reelle Zahlen):

Satz 1 $\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$

| 1 |

Die Zahlen $c_1 = a_1 b_1 = 2 \cdot 10^4$, $c_2 = a_2 \cdot b_2 = 4 \cdot 10^3$,
 $c_3 = a_3 \cdot b_3 = 5 \cdot 10^7$, $c_4 = a_4 \cdot b_4 = 3 \cdot 10^8$

sind miteinander zu multiplizieren. Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^4 c_i &= \prod_{i=1}^4 (a_i \cdot b_i) \Rightarrow \prod_{i=1}^4 a_i \cdot \prod_{i=1}^4 b_i \\ &= (2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3) \cdot (10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^7 \cdot 10^8) = 120 \cdot 10^{22}\end{aligned}$$

Satz 2

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i}$$

2

Die Zahlen $c_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{5}{2^4}$, $c_2 = \frac{a_2}{b_2} = \frac{4}{2^7}$, $c_3 = \frac{a_3}{b_3} = \frac{2}{2^5}$,

$$c_4 = \frac{a_4}{b_4} = \frac{3}{2^6}, \quad c_5 = \frac{a_5}{b_5} = \frac{1}{2^3}$$

sind miteinander zu multiplizieren. Es gilt

$$\prod_{i=1}^5 c_i = \prod_{i=1}^5 \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^5 a_i}{\prod_{i=1}^5 b_i} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{2^4 \cdot 2^7 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^3} = \frac{120}{2^{25}}$$

Satz 3

$$\prod_{i=1}^n c a_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i \quad (c \text{ ist eine Konstante})$$

3

Die Zahlen $b_1 = c \cdot a_1 = 10^3 \cdot 4$, $b_2 = c \cdot a_2 = 10^3 \cdot 6$, $b_3 = c \cdot a_3 = 10^3 \cdot 2$, $b_4 = c \cdot a_4 = 10^3 \cdot 5$ sind miteinander zu multiplizieren. Es gilt

$$\prod_{i=1}^4 b_i = \prod_{i=1}^4 c a_i = c^4 \prod_{i=1}^4 a_i = (10^3)^4 (4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5) = 10^{12} \cdot 240$$

Satz 4

$$\left(\prod_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^n a_i \right) = \prod_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{i=m+1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i$$

4

$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$ und $(x_5 \cdot x_6 \cdot x_7)$ sind zu multiplizieren. Es gilt

$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot (x_5 \cdot x_6 \cdot x_7) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$, also

$$\prod_{i=1}^4 x_i \cdot \prod_{i=5}^7 x_i = \prod_{i=1}^7 x_i.$$

Im allgemeinen gilt

$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \neq \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i$$

5

$$\prod_{i=1}^2 (a_i + b_i) = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2.$$

$$\prod_{i=1}^2 a_i + \prod_{i=1}^2 b_i = a_1 a_2 + b_1 b_2;$$

Beide Summen sind nur dann gleich, wenn $a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0$ ist:

Aufgaben zu 1.5.

1

Stellen Sie die folgenden Produkte ausführlich dar!

a) $\prod_{i=1}^6 a_i$

b) $\prod_{j=4}^{10} b_j$

c) $\prod_{n=2}^8 n^2$

d) $\prod_{n=1}^7 \frac{1}{n}$

e) $\prod_{i=1}^5 (-1)$

f) $\prod_{i=1}^6 (-1)$ (L)

2

Stellen Sie die folgenden Produkte mit Hilfe des Produktzeichens dar!

a) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 \cdot z_6$

b) $(k_1 \cdot l_1) \cdot (k_2 \cdot l_2) \cdot (k_3 \cdot l_3) \cdot (k_4 \cdot l_4) \cdot (k_5 \cdot l_5)$

c) $\frac{c_1}{d_1} \cdot \frac{c_2}{d_2} \cdot \frac{c_3}{d_3} \cdot \frac{c_4}{d_4} \cdot \frac{c_5}{d_5} \cdot \frac{c_6}{d_6} \cdot \frac{c_7}{d_7}$

d) $(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot (a_3 + b_3) \cdot (a_4 + b_4)$

e) $(a_1 + b_1)^5$ (L)

3

Berechnen Sie $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$

a) für $a_i = 4; 8; 16; 32; 64$

b) für $a_i = 1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0,015625$ (L)

4

Stellen Sie die folgenden Produkte ausführlich dar!

a) $\prod_{i=1}^8 z_{ij}$

b) $\prod_{j=1}^6 z_{ij}$

c) $\prod_{i=1}^4 (a_{ij} \cdot x_{ij})$

d) $\prod_{j=2}^6 (a_{ij} \cdot x_{ij})$

e) $\prod_{i=1}^5 (c_{ij} \cdot y_{i-1})$

(L)

5

Stellen Sie die folgenden Produkte mit Hilfe des Produktzeichens dar!

a) $b_{11} \cdot b_{12} \cdot b_{13} \cdot b_{14} \cdot b_{15}$

b) $c_{13} \cdot c_{23} \cdot c_{33} \cdot c_{43}$

c) $(k_{12} \cdot d_{12}) \cdot (k_{22} \cdot d_{22}) \cdot (k_{32} \cdot d_{32})$

d) $(k_2 \cdot y_1) \cdot (k_3 \cdot y_2) \cdot (k_4 \cdot y_3) \cdot (k_5 \cdot y_4)$ (L)

2.

Statistische Methoden

2.1.

Die tabellarische und graphische Darstellung

Von der Statistik werden viele Daten erfaßt. Die kleinste Einheit einer statistischen Erfassung heißt Erfassungseinheit. Sie wird oft kurz als *statistische Einheit* oder statistisches Element bezeichnet. Statistische Einheiten sind z. B.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| bei der Bevölkerungszählung | – die einzelne Person, |
| bei der Wohnungszählung | – die einzelne Wohnung, |
| bei der Arbeitskräftezählung | – die einzelne Arbeitskraft, |
| bei der Betriebszählung | – der einzelne Betrieb. |

Die statistischen Einheiten sind Träger statistischer Merkmale.

Ein *statistisches Merkmal* kennzeichnet eine Eigenschaft der statistischen Einheit. Eine Person hat z. B. die Merkmale Alter, Geschlecht, Beruf; ein Industriebetrieb die Merkmale Eigentumsform, Zugehörigkeit zu einem Wirtschaftszweig, Höhe der Jahresproduktion, Höhe des täglichen Arbeitskräftebestandes usw.

Statistische Einheiten werden zu Gesamtheiten zusammengefaßt. Die *statistische Gesamtheit* ist eine Zusammenfassung von statistischen Einheiten, die nach bestimmten Merkmalen gleichartig sind. Statistische Gesamtheiten sind z. B. die Bevölkerung eines Landes, die Industriebetriebe, die Handelsbetriebe, die Arbeitskräfte usw. Die Anzahl der zu einer statistischen Gesamtheit gehörenden statistischen Einheiten ist der *Umfang der Gesamtheit*.

Statistische Gesamtheiten werden durch statistische Kennziffern verallgemeinernd charakterisiert. Kennziffern spiegeln den Umfang, die Entwicklung und die Beziehungen statistischer Gesamtheiten wider.

2.1.1. Die tabellarische Darstellung

Oft sind die Gesamtheiten relativ umfangreich, so daß es zweckmäßig wird, die statistischen Einheiten vorher festzulegenden Gruppen zuzuordnen. Das ist notwendig, wenn die Statistik ihrer Aufgabe,

die gesellschaftlichen Erscheinungen und Prozesse zahlenmäßig darzustellen, möglichst voll gerecht werden soll. So lassen sich die statistischen Einheiten einer Gesamtheit, z. B. die Arbeitskräfte eines Betriebes, zwar unter einem Oberbegriff zusammenfassen, diese Zusammenfassung sagt aber noch nichts über typische Teilgesamtheiten, im Beispiel über das Alter, den Familienstand, die Lohnhöhe usw. aus. Aus diesem Grunde ist es notwendig, die statistischen Daten weiter zu untergliedern, zu gruppieren.

Unter statistischer Gruppenbildung verstehen wir die Untergliederung einer statistischen Gesamtheit in typische Teilgesamtheiten, die die Struktur und die Entwicklung von ökonomischen Prozessen und Erscheinungen charakterisieren.

1

Ein Land weist für ein Jahr folgende Zahlen über seine Beschäftigten aus:

Wirtschaftsbereich	Beschäftigte in 1 000 Personen		
	insgesamt	männlich	weiblich
Industrie	4 100	3 000	1 100
Bau	350	300	50
Produzierendes Handwerk	320	170	150
Land- und Forstwirtschaft	1 300	600	700
Verkehr	430	330	100
Post	140	50	90
Handel	800	200	600
Übrige Bereiche	1 600	700	900
Insgesamt	9 040	5 350	3 690

Im vorstehenden Beispiel haben wir die statistische Gesamtheit (Beschäftigte) in typische Teilgesamtheiten (Wirtschaftsbereich und Geschlecht) unterteilt.

Diese Zahlen lassen die Struktur der Beschäftigten übersichtlich erkennen. Man kann leicht feststellen, daß es sich hier um ein hoch-industrialisiertes Land handelt, denn fast die Hälfte aller Beschäftigten arbeitet in der Industrie. Weiterhin ist ersichtlich, daß der Anteil der Frauen an der Beschäftigtenanzahl ziemlich hoch ist — er beträgt über 40 % — und in den einzelnen Wirtschaftsbereichen unterschiedlich groß ist.

Diese Erkenntnisse wollen wir nun verallgemeinern. Die Gruppierung von Daten erfolgt in statistischen Tabellen. Statistische Tabellen sind Zahlenübersichten, die einen schnellen Überblick über das Niveau, die Struktur, die Entwicklung eines Prozesses gestatten und Zusammenhänge zwischen Erscheinungen erkennen lassen.

Unter dem *Niveau* verstehen wir die Größe, die Höhe einer Erscheinung, z. B. sprechen wir vom Niveau der Produktion und meinen die

Produktionshöhe oder vom Niveau der Löhne und meinen die Höhe der Löhne.

Unter der *Struktur* verstehen wir den Aufbau einer statistischen Gesamtheit. Im Beispiel 1 haben wir z. B. die Struktur der Beschäftigten nach Wirtschaftsbereichen und Geschlecht dargestellt.

Von der *Entwicklung* eines Prozesses sprechen wir, wenn wir den zeitlichen Ablauf des Prozesses beobachten wollen, z. B. die Entwicklung der Arbeitsproduktivität in den letzten fünf Jahren.

Auf die Bestandteile einer Tabelle wollen wir im folgenden kurz eingehen:

Eine Tabelle besteht aus Überschrift, Tabellenkopf, Vorspalte und Zahlenteil.

Die *Überschrift* soll möglichst präzise den sachlichen Inhalt der Tabelle sowie den Zeitraum und den Ort der Erfassung angeben. Der *Tabellenkopf* bezeichnet den Inhalt der Spalten. Die *Vorspalte* nimmt zweckmäßig das Merkmal auf, das am meisten variiert, weil die Tabelle in ihrer Länge besser überschaubar ist als in ihrer Breite. Der *Zahlenteil*, auch als Zahlenfeld bezeichnet, nimmt die statistischen Daten auf, die erfaßt worden sind. Wenn wir das Zahlenfeld durch waagerechte Linien in Zeilen und durch senkrechte Linien in Spalten unterteilen, so werden dabei Tabellenfächer gebildet.

Jedes Tabellenfach sollte ausgefüllt werden, damit Zweifel über fehlende Eintragungen ausgeschlossen sind. Das wird erreicht, wenn wir freibleibende Tabellenfächer durch Symbole ausfüllen. So wird der Strich (—) verwendet, wenn keine Einheiten für das jeweilige Tabellenfach beobachtet wurden. Einen Punkt(.) verwenden wir, wenn die Angaben unvollständig oder unbekannt sind, und eine Null (0) setzen wir ein, wenn für das Tabellenfach ein Wert erfaßt wurde, der kleiner ist als die Hälfte der Maßeinheit, die in der Tabelle verlangt wird.

Die Betriebe der Bauindustrie der DDR nach Eigentumsformen der Betriebe und nach Bezirken 19..

Bezirk	Betriebe				
	insgesamt	nach Eigentumsformen			
		volkseigen		staatliche Beteiligung	privat
		zentral geleitet	örtlich geleitet		
Berlin	100	3	16	65	16
Rostock	60	4	25	20	11
Schwerin	60	2	31	17	10
usw.					

Abb. 2.1

2.1.2. Die graphische Darstellung

Eine weitere Möglichkeit, ökonomische Sachverhalte übersichtlich und leicht verständlich zu veranschaulichen, ist die graphische Darstellung. Die in einer Tabelle enthaltenen Angaben werden oft anschaulicher, wenn man sie graphisch darstellt. Die graphische Darstellung ist ein wichtiges Instrument der Agitation und Propaganda.

Mit der graphischen Darstellung kann man sowohl das Niveau als auch Strukturen und die Entwicklung sichtbar machen. Das kann durch Säulen-, Quadrat-, Kreis- oder Würfeldarstellungen, die jeweils durch verschiedene Schraffuren ergänzt werden können, sowie durch Kurvendarstellung erfolgen. Dabei ist zu beachten, daß die für die graphische Darstellung angewendeten Symbole auch die Größenverhältnisse des abzubildenden Prozesses richtig widerspiegeln.

3

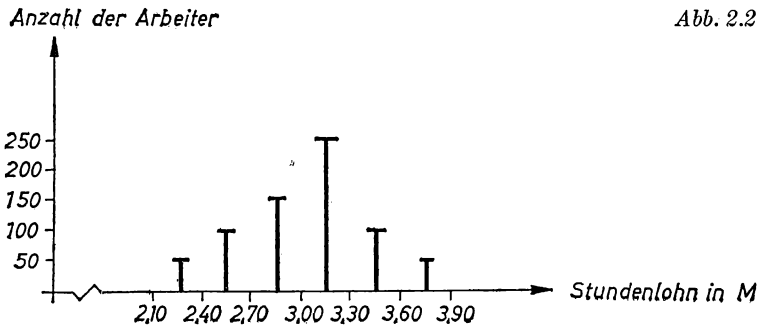
Ein volkseigener Betrieb weist für seine Arbeiter folgende Lohnstruktur aus:

Stundenlohn in M	Anzahl der Arbeiter
2,10—2,40	50
2,40—2,70	100
2,70—3,00	150
3,00—3,30	250
3,30—3,60	100
3,60—3,90	50
700	

Für die graphische Darstellung der Lohnstruktur eignen sich folgende Formen:

a) *Häufigkeitsstrecken*

Bei dieser Darstellung ist darauf zu achten, daß die Abstände auf der Abszissenachse von Gruppe zu Gruppe gleich sind, weil die Gruppen



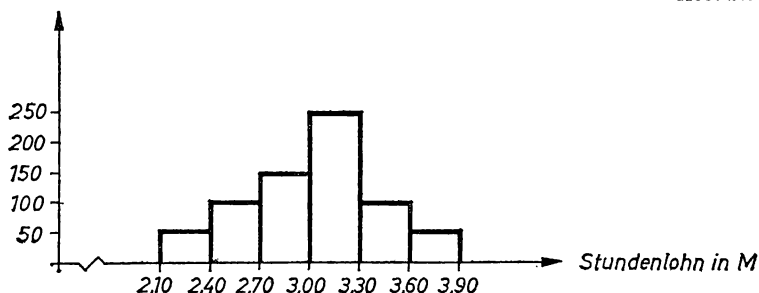
den gleichen Abstand zueinander aufweisen. Die Anzahl der Arbeiter wird jeweils als sogenannte Häufigkeitsstrecke in der Mitte jeder Gruppe aufgetragen.

b) Histogramme

Eine andere Möglichkeit, die Lohnstruktur graphisch darzustellen, ist das Histogramm. Ein Histogramm drückt die Größenverhältnisse durch nebeneinander stehende Säulen aus.

Anzahl der Arbeiter

Abb. 2.3



Bezüglich der Abstände zwischen den Gruppen gilt für Histogramme das gleiche wie für Häufigkeitsstrecken. Welcher der beiden graphischen Darstellungsformen der Vorzug zu geben ist, ist schwer zu sagen. Beide veranschaulichen die Struktur der Löhne gleichermaßen gut.

c) Kurven

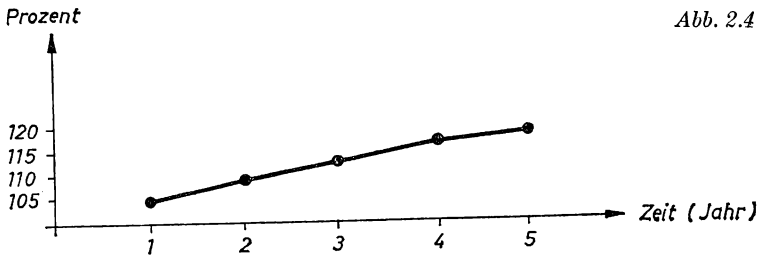
4.

Ein volkseigener Betrieb weist über die Entwicklung seiner Arbeitsproduktivität in den letzten 5 Jahren folgende Zahlen aus:

Jahr	Arbeitsproduktivität in Prozent
1	105
2	110
3	114
4	118
5	120

Zur graphischen Darstellung dieser Entwicklung eignen sich am besten Kurven.

Bei der Kurvendarstellung ist darauf zu achten, daß die Abstände auf der Abszissenachse genau den Abständen der Zeiträume entsprechen müssen. In unserem Beispiel ist dies nicht problematisch. Hätten wir dagegen Zahlen vorzuliegen, die zunächst die Entwicklung über Zeiträume von jeweils 5 Jahren und daran anschließend über die jährliche Entwicklung angeben, müßten die ersten Daten mit dem fünffachen Abstand im Vergleich zu den Jahresangaben dargestellt werden.



Aus den Beispielen wird ersichtlich, daß sich die graphische Darstellung auch als Ergänzung zur tabellarischen Darstellung eignet.

d) Bildstatistik

Bei der Bildstatistik wird durch die Art der Darstellung bereits eine Beziehung zum Inhalt hergestellt, indem z. B. stilisierte Menschenfiguren als Symbol für Bevölkerung, Bäume für Wald, Getreideähren für Getreideproduktion, Eisenbahnwaggons für Verkehr, Briketts für Braunkohle usw. verwendet werden. Diese figürlichen Darstellungen sind zwar leicht zu deuten, haben aber den Nachteil, daß Niveauunterschiede nur schwer feststellbar sind.

Die Bildstatistik wird im allgemeinen für die Agitation und für Ausbildungszwecke eingesetzt.

2.1.3. Die Häufigkeitsverteilung

Wie wir bereits bei der graphischen Darstellung beschrieben haben, treten die statistischen Einzelwerte im allgemeinen gehäuft auf oder sie werden in Gruppen zusammengefaßt.

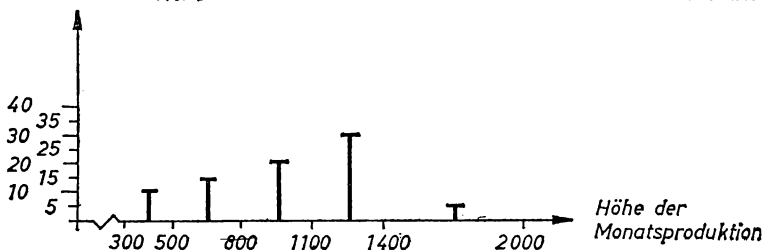
Dadurch entsteht eine Übersicht, die man als Häufigkeitsverteilung bezeichnet. Die Häufigkeitsverteilung stellt konzentriert dar, wie sich die statistischen Einheiten einer Gesamtheit verteilen. Eine Häufigkeitsverteilung wird besonders deutlich in der graphischen Darstellung.

5

Über die Höhe der Monatsproduktion der Produktionsbetriebe eines Kreises liegen folgende Zahlen vor:

Höhe der Monatsproduktion pro Betrieb in 1000 M	Anzahl der Betriebe
300— 500	10
500— 800	15
800—1 100	20
1 100—1 400	30
1 400—2 000	5

80



Diese Häufigkeitsverteilung ist rechtsasymmetrisch, weil der Gipfelpunkt der Verteilung nach rechts verschoben wird. Bei anderen Verteilungen sprechen wir dementsprechend von linksasymmetrischen Verteilungen, wenn der Gipfelpunkt nach links verschoben ist, von symmetrischen Verteilungen, wenn er in der Mitte liegt.

Die Verteilungen spielen in der Ökonomie bei der Planung und Abrechnung eine große Rolle. So ist es z. B. wesentlich, zu wissen, wie sich die Löhne eines Betriebes auf die Lohngruppen oder wie sich die Arbeitskräfte auf die Altersgruppen verteilen. Schließlich kann es für eine Reihe spezieller Untersuchungen wichtig sein, festzustellen, inwieweit sich eine gegebene Häufigkeitsverteilung einer theoretischen Verteilung anpaßt. Das ist vor allem für die Stichprobenerfassung wesentlich.

Aufgaben zu 2.1.

1

Entwickeln Sie eine Tabelle, in der die Beschäftigten eines Betriebes nach dem Alter, dem Familienstand und dem Geschlecht ausgewiesen werden!

2

Entwickeln Sie eine Tabelle, in der die Jahresproduktion der Betriebe eines Wirtschaftszweiges — unterteilt in die Gruppen 1—5, 5—10, 10—20, 20—50 und 50—100 Millionen Mark — und die Kosten in Millionen Mark nach den Eigentumsformen volkseigen, staatliche Beteiligung, genossenschaftlich und privat ausgewiesen werden!

3

Ein Kreis der DDR weist folgende Zahlen über die Investitionstätigkeit aus:

Eigentumsform der Betriebe	Investitionen in 1 000 M
volkseigen	112 000
staatliche Beteiligung	10 000
genossenschaftlich	8 000
privat	5 000

Stellen Sie die Höhe der Investitionen graphisch dar!

4

Über die Teilnehmer am innerbetrieblichen sozialistischen Wettbewerb eines Betriebes liegen u. a. folgende Daten vor:

Stichtag	Teilnehmer am innerbetrieblichen Wettbewerb			
	Arbeiter und Angestellte		darunter: Produktionsarbeiter	
	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 1	Jahr 2
15. Februar	2 745	2 850	2 400	2 450
15. Mai	2 890	2 950	2 500	2 600
15. August	2 900	3 010	2 600	2 690
15. November	3 000	3 100	2 650	2 780

Stellen Sie die Entwicklung der Teilnehmer am Wettbewerb graphisch dar!

5

Ein Kreis in der DDR weist folgende Zahlen über den Bestand an Traktoren, Lastkraftwagen und Anhängern in der Landwirtschaft aus:

Jahr	Bestand		
	Traktoren	LKW	Anhänger
1	750	93	820
2	890	105	900
3	970	112	1 050
4	1 030	120	1 170
5	1 180	132	1 320

Stellen Sie die Entwicklung des Bestandes an Traktoren, LKW und Anhängern graphisch dar!

2.2.

Mittelwerte

Von der Statistik werden viele Kennziffern erfaßt und berechnet. Eine Gruppe dieser Kennziffern sind die Mittelwerte.

Bei der Errechnung des Mittelwertes werden viele statistische Einzeldaten zu einem Zahlenwert verdichtet. Ein Mittelwert soll das mittlere Niveau einer statistischen Gesamtheit repräsentieren. So soll z. B. der mittlere Butterverbrauch je Kopf einer Bevölkerungsgruppe die mittleren Verbrauchsverhältnisse bei Butter aller zu dieser Bevölkerungsgruppe gehörenden Personen widerspiegeln. Der Mittelwert soll für eine statistische Gesamtheit typisch sein.

Das mittlere Niveau einer Gesamtheit kann je nach der Aufgabenstellung oder je nach dem Charakter des gegebenen statistischen Zahlenmaterials durch verschiedene Mittelwerte ausgedrückt werden, z. B. durch das arithmetische Mittel, das harmonische Mittel, das chronologische Mittel und das geometrische Mittel.

2.2.1. Das arithmetische Mittel

Das arithmetische Mittel ist der Mittelwert, der in der Praxis am häufigsten angewandt wird. Als arithmetisches Mittel berechnen wir den Durchschnittslohn, den Durchschnittsumsatz, die durchschnittliche Produktion je Tag oder die durchschnittlichen Selbstkosten. Oft wird das arithmetische Mittel als Durchschnitt bezeichnet, weil aus mehreren, meist aus vielen statistischen Einzelwerten das durchschnittliche Niveau einer statistischen Gesamtheit dergestalt ermittelt wird, daß das Produkt aus Anzahl der Einzelwerte und Durchschnitt wieder die Summe der Einzelwerte ergibt. Diese Beziehung gilt nur für den Durchschnitt. Neben dem Durchschnitt existieren jedoch für bestimmte ökonomische Fragestellungen andere Mittelwerte.

Definition 1 *Das arithmetische Mittel drückt das durchschnittliche Niveau der statistischen Einheiten einer statistischen Gesamtheit aus. Daher wird das arithmetische Mittel auch als Durchschnitt bezeichnet.*

Wir unterscheiden das einfache und das gewogene arithmetische Mittel.

Das einfache arithmetische Mittel

Besteht eine statistische Gesamtheit aus n statistischen Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$, so ist das einfache arithmetische Mittel m_A folgendermaßen zu berechnen:

$$m_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

1

5 Arbeiter erhalten einen Monatslohn von 470 M, 490 M, 570 M, 510 M und 630 M. In diesem Falle ist

$$m_A = \frac{470 + 490 + 570 + 510 + 630}{5} = 534$$

Der durchschnittliche Monatslohn eines Arbeiters beträgt 534 M.

Das gewogene arithmetische Mittel

Vielfach treten die gleichen Einzelwerte mehrmals in einer statistischen Gesamtheit auf. So können mehrere Arbeiter den gleichen Monatslohn erhalten oder mehrere Verkaufsstellen den gleichen Monatsumsatz erzielen.

Natürlich können wir auch in diesen Fällen den Durchschnitt ermitteln, indem wir das einfache arithmetische Mittel berechnen. Unsere Rechnung wird jedoch einfacher, wenn wir das *gewogene arithmetische Mittel* anwenden.

2

15 Verkaufsstellen des staatlichen Handels erzielten folgenden Umsatz (in 1 000 M): 1 Verkaufsstelle 86, 2 Verkaufsstellen je 92, 7 Verkaufsstellen je 102, 4 Verkaufsstellen je 118 und 1 Verkaufsstelle 140. Der durchschnittliche Umsatz der 15 Verkaufsstellen ergibt sich wie folgt:

$$m_A = \frac{86 \cdot 1 + 92 \cdot 2 + 102 \cdot 7 + 118 \cdot 4 + 140 \cdot 1}{1 + 2 + 7 + 4 + 1} \cdot 10^3$$

$$= 106,4 \cdot 10^3$$

Eine Verkaufsstelle erzielte folglich im Durchschnitt einen Umsatz in Höhe von 106 400 M.

Die Anzahl gleichgroßer Einzelwerte heißt *Häufigkeitszahl*, *Gewichtszahl* oder kurz *Häufigkeit* bzw. *Gewicht*. Der Name des gewogenen arithmetischen Mittels wird hierdurch verständlich, da bei ihm die Einzelwerte mit den entsprechenden Häufigkeitszahlen (Gewichten) gewogen werden.

Das gewogene arithmetische Mittel der Einzelwerte $a_1, a_2, \dots, a_n$, die mit den Häufigkeiten $h_1, h_2, \dots, h_n$ auftreten, ist folglich:

$$m_A = \frac{a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i h_i}{\sum_{i=1}^n h_i}$$

Das einfache arithmetische Mittel ist ein Spezialfall des gewogenen arithmetischen Mittels, wenn $h_i = 1$ ist, für $i = 1, 2, \dots, n$.

Verhältnismäßig oft liegen Daten folgender Art vor:

Umsatz und Arbeitszeit — gefragt ist nach dem durchschnittlichen Umsatz je Stunde;

Kostensumme und Zahl der Erzeugnisse — gefragt ist nach den durchschnittlichen Kosten je Erzeugnis.

In diesen Fällen ergibt sich der Durchschnitt als Beziehung zwischen den beiden Erscheinungen, von denen wir die Zählererscheinung als Merkmalserscheinung M_i und die Nennererscheinung als Bezugserscheinung N_i bezeichnen.

Als Durchschnitt ergibt sich:

$$m_A = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n N_i}$$

Ein VEB weist über Produktion und Arbeitszeit folgende Zahlen aus:

Abteilung	Arbeitszeit in Std.	Produktion in M
I	1 000	55 000
II	3 000	25 000
III	1 000	30 000
IV	2 000	45 000
V	500	20 000

Die Arbeitsproduktivität ist

$$m_A = \frac{55\,000 + 25\,000 + 30\,000 + 45\,000 + 20\,000}{1\,000 + 3\,000 + 1\,000 + 2\,000 + 500} = 23,33 \text{ M/Std.}$$

Es ist zu erkennen, daß wir wieder das gewogene arithmetische Mittel berechnet haben, denn es ist

$$\begin{aligned} M_i &= a_i h_i, \text{ für } i = 1, 2, \dots, n, \text{ also} & M_1 &= 55\,000 = a_1 h_1 \\ & & M_2 &= 25\,000 = a_2 h_2 \\ & & \vdots & \\ & & M_5 &= 20\,000 = a_5 h_5. \end{aligned}$$

2.2.2. Das harmonische Mittel

Verschiedentlich ist als Mittelwert in der Ökonomie günstig das harmonische Mittel zu errechnen. Das ist vor allem der Fall, wenn Verhältniszahlen gegeben sind und die Häufigkeitszahlen die Maßeinheit des Zählers dieser Verhältniszahlen tragen.

Das einfache harmonische Mittel

4

Die Arbeiter A und B eines Betriebes stellen gleiche Erzeugnisse her. Arbeiter A benötigt 2 min/St. und Arbeiter B benötigt 3 min/St. Jeder Arbeiter ist bei der Herstellung dieser Erzeugnisse insgesamt 60 min beschäftigt.

Für die Arbeitsnormung, die Arbeitszeitplanung usw. muß man die durchschnittliche Bearbeitungszeit in min/St. für beide Arbeiter zusammen kennen.

Die durchschnittliche Bearbeitungszeit ergibt sich aus der Beziehung $\frac{\text{Gesamtarbeitszeit}}{\text{Gesamtstückzahl}}$ mit

$$\frac{60 + 60}{\frac{1}{2} 60 + \frac{1}{3} 60} = \frac{60 + 60}{30 + 20} = \frac{120}{50} = 2,4.$$

In 60 Minuten stellt Arbeiter A also insgesamt 30 St. und Arbeiter B 20 St. her, so daß die durchschnittliche Bearbeitungszeit beider Arbeiter 2,4 min/St. beträgt.

Diese durchschnittliche Bearbeitungszeit ergibt sich auch unmittelbar aus den Angaben im Beispiel, wenn wir den Bruch durch 60 kürzen. Wir erhalten:

$$\frac{60 + 60}{\frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{3} \cdot 60} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{6}} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Der Ausdruck $\frac{1 + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2,4$

wird als einfaches harmonisches Mittel bezeichnet.

Definition 2 *Das einfache harmonische Mittel m_H einer Gesamtheit von n statistischen Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist*

$$m_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

Wir kehren zum Beispiel 4 zurück: Wäre in diesem Beispiel an Stelle der geleisteten Arbeitszeiten von je 60 Minuten die Zahl der Stücke gegeben, die von den Arbeitern hergestellt wurden (für Arbeiter A 30 St. und für Arbeiter B 20 St.), so könnte die durchschnittliche Bearbeitungszeit als gewogenes arithmetisches Mittel wie folgt berechnet werden:

$$\frac{2 \cdot 30 + 3 \cdot 20}{30 + 20} = 2,4.$$

Im Beispiel 4 haben die gegebenen Einzelwerte den Charakter von Verhältniszahlen (min/St.), aus denen ein Mittelwert zu berechnen ist. Je nachdem, in welcher Art in einem solchen Falle die Gewichtszahlen (Häufigkeiten) gegeben sind, kann entweder das harmonische Mittel oder das arithmetische Mittel berechnet werden.

Regel für die Anwendung des harmonischen Mittels:

Ist ein Mittelwert aus Einzelwerten, die Verhältniszahlen sind, zu bilden und sind die Gewichtszahlen (Häufigkeiten) in der Maßeinheit des Zählers dieser Verhältniszahlen gegeben, so kann das harmonische Mittel angewandt werden.

Regel für die Anwendung des arithmetischen Mittels:

Ist ein Mittelwert aus Einzelwerten, die Verhältniszahlen sind, zu bilden und sind die Gewichtszahlen (Häufigkeiten) in der Maßeinheit des Nenners dieser Verhältniszahlen gegeben, so kann das arithmetische Mittel angewandt werden.

Definition 3 Das gewogene harmonische Mittel der Einzelwerte $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit den Häufigkeiten $z_1, z_2, \dots, z_n$ ist

$$m_H = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{\frac{1}{a_1} z_1 + \frac{1}{a_2} z_2 + \dots + \frac{1}{a_n} z_n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} z_i};$$

5

Zwei Arbeiter eines Betriebes stellen die gleichen Erzeugnisse her. Arbeiter A benötigt 1,5 Std./St. und arbeitet insgesamt 12 Stunden; Arbeiter B benötigt 2 Std./St. und arbeitet 9 Stunden.

Gegeben sind Verhältniszahlen, hier Std./St. Die Gewichtungszahlen sind in der Maßeinheit des Zählers dieser Verhältniszahlen ausgedrückt, nämlich in Stunden. Zur Ermittlung kann folglich das harmonische Mittel angewandt werden. Es ist

$$m_H = \frac{12 + 9}{\frac{1}{1,5} 12 + \frac{1}{2} 9} = \frac{21}{12,5} = 1,68.$$

Beide Arbeiter benötigen durchschnittlich 1,68 Std./St.

2.2.3. Das chronologische Mittel

Statistische Stichtagserfassungen liefern Daten, aus denen im allgemeinen mit Hilfe des chronologischen Mittels der Mittelwert errechnet wird. So erhalten wir z. B. bei einer Arbeitskräfteerfassung Angaben darüber, wie sich der Arbeitskräftebestand in dem ersten Halbjahr veränderte, indem wir den Arbeitskräftebestand am 1. 1., 1. 2., 1. 3., 1. 4., 1. 5., 1. 6. und 1. 7. auswerten. Wollen wir den Arbeitskräftebestand für das erste Halbjahr insgesamt ermitteln, d. h. die einzelnen Stichtagsangaben zu einem Mittelwert für den ganzen Zeitraum verdichten, so wird im allgemeinen das chronologische Mittel angewandt.

Definition 4 Das chronologische Mittel einer statistischen Gesamtheit von n Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist:

$$m_C = \frac{\frac{a_1}{2} + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}}{n - 1} = \frac{\frac{a_1 + a_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i}{n - 1}.$$

6

Ein VEB weist über seinen Arbeitskräftebestand folgende Zahlen aus:

Stichtag	Anzahl der Arbeitskräfte	Stichtag	Anzahl der Arbeitskräfte
1. 1.	112	1. 5.	115
1. 2.	105	1. 6.	110
1. 3.	108	1. 7.	120
1. 4.	112		

In diesem Falle ist

$$m_C = \frac{\frac{112 + 120}{2} + 105 + 108 + 112 + 115 + 110}{6} = 111$$

Der durchschnittliche Arbeitskräftebestand im ersten Halbjahr beträgt 111 Arbeitskräfte.

2.2.4. Das geometrische Mittel

Vielfach ist das mittlere Wachstumstempo ökonomischer Erscheinungen (Produktion, Umsatz) für einen gegebenen Zeitraum zu berechnen. Dabei ist der mittlere Prozentsatz der Entwicklung einer wirtschaftlichen Erscheinung für einen bestimmten Zeitraum zu ermitteln. Diese Aufgabe kann nicht mit dem arithmetischen Mittel gelöst werden, weil das arithmetische Mittel von linearen Vorstellungen ausgeht. Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir das geometrische Mittel an.

Definition 5 *Das einfache geometrische Mittel einer statistischen Gesamtheit von n Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist*

$$m_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Die Berechnung des geometrischen Mittels geschieht vorteilhaft logarithmisch. Daher wird es mitunter auch als logarithmisches Mittel bezeichnet. Es gilt dann:

$$\lg m_G = \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \dots + \lg a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \lg a_i}{n}.$$

7

In den letzten 5 Jahren stieg die Eigenleistung eines VEB jeweils gegenüber dem Vorjahr:

Jahr	1	2	3	4	5
Steigerung auf (%)	103	104	103	107	105

Das mittlere jährliche Wachstumstempo der Eigenleistung beträgt in den letzten 5 Jahren

$$\begin{aligned}
 m_G &= \sqrt[5]{103 \cdot 104 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 105} \\
 \lg m_G &= \frac{\lg 103 + \lg 104 + \lg 103 + \lg 107 + \lg 105}{5} \\
 &= \frac{2,0128 + 2,0170 + 2,0128 + 2,0294 + 2,0212}{5} \\
 &= 2,01865 \\
 m_G &= 104,4
 \end{aligned}$$

Die Eigenleistung ist in jedem Jahr des Zeitraumes im Mittel auf 104,4% oder um 4,4% gegenüber dem Vorjahr gestiegen.

Entsprechend dem rechnerischen Zustandekommen der jährlichen Steigerungszahlen läßt sich das mittlere Wachstumstempo auch vereinfacht darstellen.

Haben den Steigerungszahlen die Werte $b_0, b_1, \dots, b_n$ zugrunde gelegen, dann gilt

$$a_1 = \frac{b_1}{b_0}, a_2 = \frac{b_2}{b_1}, \dots, a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel m_G ein, ergibt sich

$$m_G = \sqrt[n]{\frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}}.$$

Nach Kürzung erhalten wir

$$m_G = \sqrt[n]{\frac{b_n}{b_0}}.$$

Demnach ergibt sich das mittlere Wachstumstempo auch, indem man den Wert des Endzeitraums durch den Wert des Anfangszeitraums dividiert und daraus die n-te Wurzel zieht.

8

Die industrielle Bruttoproduktion eines Bezirks in der DDR stieg in der Zeit von 1969 bis 1970 von 3 500 Mill. M auf 6 000 Mill. M. Das mittlere Wachstumstempo beträgt

$$m_G = \sqrt[10]{\frac{6\,000 \cdot 10^6}{3\,500 \cdot 10^6}} = 1,055 \text{ oder } 105,5\%.$$

Die industrielle Bruttoproduktion ist von 1960 bis 1970 im Mittel jährlich auf 105,5% oder um 5,5% gestiegen.

Aufgaben zu 2.2.

Arithmetisches Mittel

1

Ein Industriebetrieb erzielte in den Monaten eines Jahres folgende Produktionswerte (ausgedrückt in 1 000 M):

Januar 1 739, April 1 825, Juli 1 892, Oktober 2 186,
Februar 2 018, Mai 1 936, August 1 827, November 2 237,
März 2 164, Juni 2 042, September 2 360, Dezember 2 513.

Berechnen Sie den durchschnittlichen Produktionswert je Monat!
(L)

2

Der tägliche Arbeitskräftebestand in einem HO-Warenhaus in einer Woche betrug: Montag 128 Personen, Dienstag 132 Personen, Mittwoch 130 Personen, Donnerstag 130 Personen, Freitag 133 Personen, Sonnabend 132 Personen.

Berechnen Sie den durchschnittlichen Arbeitskräftebestand je Tag!
(L)

3

In einem Industriebetrieb leisteten die Produktionsarbeiter in den einzelnen Lohngruppen folgende Arbeitsstunden:

Lohngruppe	2	3	4	5	6	7
Arbeitsstunden	1 978	2 564	5 730	5 628	4 153	3 012

Berechnen Sie die durchschnittliche Lohngruppe für diesen Betrieb!
(L)

4

In den volkseigenen Gütern der DDR waren in einem Jahr 75 000 Arbeitskräfte mit einem durchschnittlichen Monatslohn von 575 M beschäftigt, in den Kreisbetrieben für Landtechnik 34 000 Arbeitskräfte mit einem durchschnittlichen Monatslohn von 623 M und in den staatlichen Forstwirtschaftsbetrieben 42 000 Arbeitskräfte mit einem durchschnittlichen Monatslohn von 572 M (als Arbeitskräfte sind in diesem Beispiel Vollbeschäftigteneinheiten zu verstehen).

Berechnen Sie den durchschnittlichen Monatslohn einer Arbeitskraft in diesen volkseigenen Betrieben der Land- und Forstwirtschaft insgesamt!
(L)

5

Ein VEB weist folgende Daten aus:

Abteilung	Produktion in 1 000 M	Kosten in 1 000 M	Arbeitsstunden
I	4 000	3 000	1 000
II	6 000	5 000	2 000
III	2 500	2 000	1 700
IV	3 000	2 300	2 000

- a) Berechnen Sie den Kostensatz jeder Abteilung!
 - b) Berechnen Sie den durchschnittlichen Kostensatz des ganzen Betriebes!
 - c) Berechnen Sie die Arbeitsproduktivität jeder Abteilung!
 - d) Berechnen Sie die Arbeitsproduktivität des ganzen Betriebes!
- (L b, d)

Harmonisches Mittel

6

Der Elektroenergieverbrauch verschiedener Industriebetriebe beträgt:

Industriebereich	Elektroenergieverbrauch je 1 000 M Produktion in kWh/1 000 M	Elektroenergieverbrauch insgesamt in Md. Wh
Chemische Industrie	1 200	30 000
Metallurgie	90	3 000
Leichtindustrie	180	3 200

Berechnen Sie den durchschnittlichen Elektroenergieverbrauch je 1 000 M Produktion!

(L)

7

Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft erzielte in den letzten 5 Jahren folgende Hektar- und Gesamterträge bei Kartoffeln:

Jahr	Hektarertrag in dt	Gesamtertrag in 1 000 t
1	160	10
2	180	12
3	175	12
4	170	10
5	185	13

Berechnen Sie den durchschnittlichen Hektarertrag für Kartoffeln, der in den letzten 5 Jahren erzielt wurde!

(L)

8

Drei sozialistische Industriebetriebe stellen das gleiche Erzeugnis her. Die Selbstkosten je Stück sowie die Gesamtselbstkosten betragen:

Betrieb	Selbstkosten je Stück in M/St.	Gesamtselbstkosten in M
1	3,—	9 000
2	3,80	7 600
3	4,—	4 800

- a) Berechnen Sie die durchschnittlichen Selbstkosten je Stück!
 - b) Wieviel Stück stellen die drei Betriebe insgesamt her?
- (L)

Chronologisches Mittel

9

Der Warenbestand eines volkseigenen Betriebes betrug:

Stichtag	M
1. 7.	500 000
1. 8.	460 000
1. 9.	430 000
30. 9.	540 000

Berechnen Sie den mittleren Warenbestand des III. Quartals! (L)

10

In einem VEB ergaben sich folgende Arbeitskräftebestände:

Stichtag	Anzahl der Arbeitskräfte	Stichtag	Anzahl der Arbeitskräfte
1. 1.	80	1. 7.	85
1. 2.	82	1. 8.	85
1. 3.	85	1. 9.	86
1. 4.	84	1. 10.	88
1. 5.	85	1. 11.	86
1. 6.	87	1. 12.	89
		31. 12.	90

Berechnen Sie den mittleren Arbeitskräftebestand für das ganze Jahr! (L)

Geometrisches Mittel

11

Ein VEB weist über das von ihm produzierte Nationaleinkommen folgende Zahlen aus:

Jahr	Steigerung gegenüber dem Vorjahr auf	Jahr	Steigerung gegenüber dem Vorjahr auf
1	105,4%	6	103,8%
2	106,6%	7	101,5%
3	109,5%	8	103,2%
4	110,0%	9	104,5%
5	105,6%	10	104,6%

- Berechnen Sie das mittlere jährliche Wachstumstempo des Nationaleinkommens für den Zeitraum von 10 Jahren!
- Berechnen Sie das mittlere jährliche Wachstumstempo des Nationaleinkommens für die letzten 5 Jahre! (L)

12

In einem volkseigenen Handelsbetrieb wurde in den letzten Jahren folgende Entwicklung des durchschnittlichen monatlichen Arbeitseinkommens festgestellt:

Jahr	0	...	16	17	18	19	20
Monatliches Arbeitseinkommen je Beschäftigten in M	360	...	500	515	540	550	570

- Berechnen Sie das mittlere Wachstumstempo des monatlichen Arbeitseinkommens der letzten 4 Jahre!
- Berechnen Sie das mittlere Wachstumstempo des monatlichen Arbeitseinkommens vom Zeitraum 0 bis zum Zeitraum 20! (L)

13

Das Kreditvolumen eines VEB hat sich von 1960 bis 1970 auf 600% erhöht.

Berechnen Sie das mittlere Wachstumstempo! (L)

14

In einem volkseigenen Betrieb stieg die Arbeitsproduktivität in den letzten 8 Jahren auf 140%.

Berechnen Sie für diesen Zeitraum das mittlere Wachstumstempo! (L)

Vermischte Aufgaben

15

Der Warenumsatz (in Mill. Valutamark) eines staatlichen Außenhandelsbetriebes entwickelte sich folgendermaßen:

Jahr	0	1	2	3	4	5	6	7
	150	173	183	188	199	210	232	243

- Berechnen Sie für jedes Jahr die Entwicklung gegenüber dem Vorjahr in Prozent!
- Berechnen Sie das mittlere jährliche Wachstumstempo des Warenumsatzes vom Zeitraum 0 bis zum Zeitraum 7!
- Berechnen Sie die durchschnittliche absolute jährliche Zunahme des Warenumsatzes für den Zeitraum 0 bis 7! (L b, c)

16

Verwenden Sie die Zahlen aus Aufgabe 7!

- Berechnen Sie den durchschnittlichen Gesamtertrag pro Jahr!
- Berechnen Sie die Größe der Ernteflächen für Kartoffeln in den einzelnen Jahren! (L a)

2.3.

Statistische Streuung

Im allgemeinen genügen die Mittelwerte nicht, eine statistische Gesamtheit von Einzelwerten allein zu repräsentieren. Aus dem Mittelwert ist nicht zu erkennen, ob die Einzelwerte einer statistischen Gesamtheit in der Nähe des Mittelwertes liegen oder ob sie vom Mittelwert sehr stark nach oben und unten abweichen.

1

Zwei HO-Verkaufsstellen haben in fünf aufeinanderfolgenden Tagen folgende Umsätze erzielt:

Verkaufsstelle A: 10 000, 40 000, 50 000, 60 000, 90 000 M.

Verkaufsstelle B: 42 000, 48 000, 50 000, 52 000, 58 000 M.

Der durchschnittliche Umsatz je Tag (arithmetisches Mittel) beträgt in beiden Verkaufsstellen 50 000 M. Der Mittelwert ist also in diesem Falle für beide Gesamtheiten gleich groß, obwohl beide Gesamtheiten bezüglich der Tagesumsätze wesentliche Unterschiede aufweisen. Beide Gesamtheiten unterscheiden sich in ihrem zahlenmäßigen Aufbau, in ihrer Struktur, was in der Lage der Einzelwerte um den Mittelwert, in ihrer Streuung, zum Ausdruck kommt.

Definition 1 *Die statistische Streuung ist die Lage der Einzelwerte um den Mittelwert.*

Sie ergänzt die Aussage des Mittelwertes; denn je dichter die Einzelwerte sich um den Mittelwert lagern, desto besser repräsentiert der Mittelwert eine statistische Gesamtheit. Mit Hilfe der Streuung können wir die Struktur, den zahlenmäßigen Aufbau einer statistischen Gesamtheit, beurteilen und damit den Aussagewert des Mittelwertes besser einschätzen.

So kann sich bei einem Vergleich herausstellen, daß zwei Brigaden die gleiche Durchschnittsleistung aufweisen, obwohl die Mitglieder des einen Kollektivs annähernd gleiche Leistungen aufweisen, während die Einzelleistungen im anderen Kollektiv teils erheblich unter, teils wesentlich über dem Durchschnitt liegen. Man benötigt also noch Angaben darüber, wie weit die Besten über und die Schlechtesten unter dem Mittelwert liegen.

Wenn die Abweichungen bekannt sind, ist es besser möglich, fundierte Entscheidungen zu treffen, wirksame Maßnahmen einzuleiten und die Reserven auszunutzen. Das gilt gleichfalls für die Analyse der Planerfüllung, des Materialverbrauchs, der Kosten usw.

Zur Ermittlung der statistischen Streuung gibt es verschiedene Maße, z. B.

die Variationsbreite oder Spannweite,
das lineare Streuungsmaß,
das quadratische Streuungsmaß (auch Standardabweichung genannt).

2.3.1. Die Variationsbreite oder Spannweite

Definition 2 Die Variationsbreite oder Spannweite R einer Gesamtheit von n statistischen Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist

$$R = a_{\max} - a_{\min}.$$

Aus Beispiel 1 erhalten wir:

für Verkaufsstelle A: $R = (90\,000 - 10\,000) \text{ M} = 80\,000 \text{ M}$,

für Verkaufsstelle B: $R = (58\,000 - 42\,000) \text{ M} = 16\,000 \text{ M}$.

Ein Vergleich der Variationsbreite für beide Verkaufsstellen zeigt, daß die Umsatzwerte der Verkaufsstelle A stärker variieren, stärker streuen als die Umsatzwerte in der Verkaufsstelle B. Der Mittelwert (durchschnittlicher Umsatz) der Verkaufsstelle B stammt folglich aus einer homogenen Gesamtheit als der Mittelwert der Verkaufsstelle A. Die Variationsbreite ist einfach zu berechnen, gibt aber nur ein grobes Bild der Streuung an, da nur der größte und kleinste Einzelwert berücksichtigt werden. Die Größe der zwischen diesen beiden Werten liegenden Einzelwerte bleibt bei der Variationsbreite unberücksichtigt.

Ein Vergleich der Variationsbreite mehrerer statistischer Gesamtheiten ist auch nur sinnvoll, wenn ihr Mittelwert gleich groß ist. Um einen genaueren Überblick zu gewinnen, sind Streuungsmaße entwickelt worden, die alle Einzelwerte einer statistischen Gesamtheit einbeziehen.

2.3.2. Das lineare Streuungsmaß

Das absolute lineare Streuungsmaß

Definition 3 Das lineare Streuungsmaß d einer statistischen Gesamtheit von n Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist das arithmetische Mittel aus den absoluten Beträgen der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert m .

$$d = \frac{|a_1 - m| + |a_2 - m| + \dots + |a_n - m|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i - m|}{n}.$$

Je nach Aufgabenstellung kann hierbei m das arithmetische, harmonische, chronologische oder geometrische Mittel sein.

Die absoluten Beträge sind einzusetzen, weil die Summe der Abstände aller Einzelwerte vom Mittelwert Null ergibt und damit keine Aussage über die Streuung zustande käme. Das wird an Hand des folgenden Beispiels deutlich.

2

Wir berechnen das lineare Streuungsmaß für die Monatsproduktion eines Betriebes.

Monat	Produktion t	Abweichungen der Einzelwerte vom Durchschnitt $a_i - m_A$	Absolute Beträge der Abweichungen $ a_i - m_A $
1	300	— 22,5	22,5
2	325	+ 2,5	2,5
3	310	— 12,5	12,5
4	330	+ 7,5	7,5
5	320	— 2,5	2,5
6	350	+ 27,5	27,5
$m_A = 322,5 \text{ t}$		0	75,0
			$= \sum_{i=1}^6 a_i - m_A $

$$d = \frac{75,0}{6} = 12,5$$

Ein Einzelwert weicht in unserem Beispiel durchschnittlich um 12,5 t von der durchschnittlichen Monatsproduktion ab. Haben wir Vergleichswerte für andere Zeiträume oder für andere Betriebe, so können wir feststellen, ob sich die Streuung in normalen Grenzen bewegt. Werden sie überschritten, so müssen wir Maßnahmen festlegen, die übermäßigen Produktionsschwankungen entgegenwirken. Hieraus wird ersichtlich, daß das lineare Streuungsmaß Informationen für Leitungsentscheidungen liefert.

Das lineare Streuungsmaß läßt sich im allgemeinen auch dazu verwenden, die Stärke der Schwankung ökonomischer Kennziffern sichtbar zu machen.

Treten die Einzelwerte $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit den Häufigkeiten $h_1, h_2, \dots, h_n$ auf, so ergibt sich die gewogene Form des linearen Streuungsmaßes wie folgt:

$$d = \frac{|a_1 - m| h_1 + |a_2 - m| h_2 + \dots + |a_n - m| h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n |a_i - m| h_i}{\sum_{i=1}^n h_i};$$

3

Die Maschinen einer Abteilung weisen folgendes Alter aus:

Alter der Maschinen in Jahren a_i	Anzahl der Maschinen (Häufigkeiten) h_i	Abweichungen vom Durchschnitts- alter $a_i - m_A$	$ a_i - m_A h_i$
2	6	— 3	18
4	8	— 1	8
5	3	0	0

Alter der Maschinen in Jahren a_i	Anzahl der Maschinen (Häufigkeiten) h_i	Abweichungen vom Durchschnitts- alter $a_i - m_A$	$ a_i - m_A h_i$
7	3	+ 2	6
12	1	+ 7	7
18	1	+ 13	13
$m_A = 5 \text{ Jahre}$		22	52
$= \sum_{i=1}^6 h_i$			$= \sum_{i=1}^6 a_i - m_A h_i$

$$d = \frac{52}{22} = 2,4 \text{ Jahre.}$$

Im Durchschnitt weicht das Alter der einzelnen Maschinen um 2,4 Jahre vom Durchschnittsalter von 5 Jahren ab.

Mit diesem linearen Streuungsmaß kann eingeschätzt werden, ob die Maschinen einer Abteilung oder eines anderen Betriebes annähernd das gleiche Alter aufweisen oder ob Maschinen mit stark unterschiedlichem Alter zu einer Maschinengesamtheit gehören.

Das relative lineare Streuungsmaß

Häufig muß die lineare Streuung verschiedener Gesamtheiten miteinander verglichen werden. Das ist mit dem absoluten linearen Streuungsmaß oft nicht möglich, weil die statistischen Gesamtheiten unterschiedliche Maßeinheiten tragen. So ist das absolute lineare Streuungsmaß für die monatliche Produktion von Personenkraftwagen (ausgedrückt in Stück) und das absolute lineare Streuungsmaß für die monatliche Produktion an Zucker (ausgedrückt in Tonnen) nicht vergleichbar.

Außerdem hängt die absolute lineare Streuung von der Größe der Einzelwerte ab. Sie ist stets auf den Mittelwert bezogen. Will man wissen, welche von mehreren Gesamtheiten die größte Streuung aufweist, muß man die absolute Streuung ins Verhältnis zum Mittelwert setzen.

Das relative lineare Streuungsmaß wird mitunter auch als *Streuungskoeffizient* bezeichnet.

Definition 4 *Das relative lineare Streuungsmaß ist das Verhältnis des linearen Streuungsmaßes d zum Mittelwert m , also*

$$d' = \frac{d}{m}.$$

Mitunter wird das relative lineare Streuungsmaß als Prozentzahl angegeben. Dann gilt

$$d' \% = \frac{d}{m} 100.$$

4

Wir berechnen das relative lineare Streuungsmaß für die Angaben im Beispiel 3.

$$d' = \frac{2,4}{5,0} = 0,48 \quad \text{oder} \quad d'_\% = \frac{2,4}{5,0} 100 = 48\%.$$

5

Wir wollen feststellen, in welchem volkseigenen Betrieb die Erlöse am meisten um den Durchschnitt schwanken. Zu diesem Zweck ermitteln wir das relative lineare Streuungsmaß.

Monat	VEB A		VEB B		VEB C	
	Erlöse in 1 000 M	$ a_i - m_A $	Erlöse in 1 000 M	$ a_i - m_A $	Erlöse in 1 000 M	$ a_i - m_A $
Januar	200	— 175	120	— 130	460	— 140
Februar	275	— 100	180	— 70	450	— 150
März	350	— 25	350	+ 100	550	— 50
April	450	+ 75	240	— 10	750	+ 150
Mai	600	+ 225	360	+ 110	790	+ 190
Σ Erlöse	1 875		1 250		3 000	
$\Sigma a_i - m_A $		600		420		680
m_A	375		250		600	
d	120		84		136	
d'	0,32		0,336		0,227	

Aus diesem Vergleich erkennen wir, daß die monatlichen Erlöse im VEB B am stärksten und im VEB C am geringsten schwanken.

2.3.3. Das quadratische Streuungsmaß oder die Standardabweichung

Das quadratische Streuungsmaß (Standardabweichung) verwenden wir vor allem für wissenschaftliche Zwecke und innerhalb anderer statistischer Methoden, besonders bei Stichprobenverfahren zur Charakterisierung der statistischen Streuung.

Definition 5 *Das quadratische Streuungsmaß s einer Gesamtheit von n statistischen Einheiten mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_n$ ermittelt man, indem man die Abweichungen der Einzelwerte vom arithmetischen Mittel dieser Einzelwerte quadriert und die Produkte summiert. Die Summe dividiert man durch die Anzahl der Elemente und zieht aus dem Quotienten die Wurzel.*

$$s = \sqrt{\frac{(a_1 - m_A)^2 + (a_2 - m_A)^2 + \dots + (a_n - m_A)^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - m_A)^2}{n}}$$

Treten die Einzelwerte $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit den Häufigkeiten $h_1, h_2, \dots, h_n$ auf, so erhalten wir als gewogene Form des quadratischen Streuungsmaßes folgenden Ausdruck:

$$s = \sqrt{\frac{(a_1 - m_A)^2 h_1 + (a_2 - m_A)^2 h_2 + \dots + (a_n - m_A)^2 h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - m_A)^2 h_i}{\sum_{i=1}^n h_i}}$$

Beim quadratischen Streuungsmaß treten beim Vergleich verschiedener Streuungsergebnisse die gleichen Schwierigkeiten auf wie beim linearen Streuungsmaß. Erstens trägt das quadratische Streuungsmaß die gleichen Maßeinheiten wie die Ausgangsdaten (z. B. M, kg, t, m²), und zweitens ist es von der Größe der Einzelwerte abhängig. Aus diesem Grunde sind die quadratischen Streuungsmaße im allgemeinen nicht unmittelbar miteinander vergleichbar. Es ist z. B. das quadratische Streuungsmaß für die Löhne (ausgedrückt in M/Std.) nicht unmittelbar vergleichbar mit dem quadratischen Streuungsmaß für den Verbrauch von Butter pro Familie (ausgedrückt in kg/Person). Auch beim quadratischen Streuungsmaß können wir zum Zwecke des Vergleichs ein relatives quadratisches Streuungsmaß berechnen. Es wird meist als Variationskoeffizient V bezeichnet.

Definition 6 *Der Variationskoeffizient ist das Verhältnis des quadratischen Streuungsmaßes s zum arithmetischen Mittel m_A , also*

$$V = \frac{s}{m_A}.$$

6

Wir berechnen das quadratische Streuungsmaß für die Angaben im Beispiel 2.

Produktion t	Abweichungen ($a_i - m_A$)	Quadrate der Abweichungen ($a_i - m_A$) ²
300	— 22,5	506,25
325	+ 2,5	6,25
310	— 12,5	156,25
330	+ 7,5	56,25
320	— 2,5	6,25
350	+ 27,5	756,25

$m_A = 322,5$ t

0

1 487,50

$$= \sum_{i=1}^6 (a_i - m_A)^2$$

7

$$s = \sqrt{\frac{1487,50}{6}} = 15,74 \text{ t}$$

$$V = \frac{15,74}{322,5} = 0,049 \text{ oder } 4,9\%$$

Wir berechnen das quadratische Streuungsmaß für die Angaben im Beispiel 3.

Alter der Maschinen a_i	Zahl der Maschinen h_i	Abweichungen $a_i - m_A$	Quadrate der Abweichungen $(a_i - m_A)^2$	$(a_i - m_A)^2 h_i$
2	6	— 3	9	54
4	8	— 1	1	8
5	3	0	0	0
7	3	+ 2	4	12
12	1	+ 7	49	49
18	1	+ 13	169	169
$m_A = 5 \text{ Jahre}$				292
$= \sum_{i=1}^6 h_i$				$= \sum_{i=1}^6 (a_i - m_A)^2 h_i$

$$s = \sqrt{\frac{292}{22}} \text{ Jahre} = 3,64 \text{ Jahre}$$

$$V = \frac{3,64}{5} = 0,728 \text{ oder } 72,8\%$$

Die Ergebnisse der Beispiele 6 und 7 lassen erkennen, daß folgende Beziehung gilt:

$$s \geq d.$$

Diese Beziehung ist allgemeingültig. Auf einen Beweis dieser Beziehung wird verzichtet.

Aufgaben zu 2.3.

1
Die Betriebe einer VVB haben den Produktionsplan wie folgt erfüllt:

Betrieb	Planerfüllung %	Betrieb	Planerfüllung %
1	103,7	6	98,4
2	97,3	7	108,1
3	101,6	8	102,2
4	99,7	9	103,4
5	109,5	10	100,8

Berechnen Sie die Variationsbreite für die Planerfüllung der VVB!
(L)

2

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 1 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß!
- b) Berechnen Sie den Streuungskoeffizienten! (L)

3

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 2 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß!
- b) Berechnen Sie den Streuungskoeffizienten! (L)

4

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 7 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß!
- b) Beurteilen Sie die Aussage des linearen Streuungsmaßes besonders für dieses Beispiel! (L)

5

Wir verwenden die Angaben aus Aufgabe 1 von Abschnitt 2.2.

- Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß! (L)

6

Wir verwenden die Angaben aus Aufgabe 3 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß!
- b) Berechnen Sie den Streuungskoeffizienten! (L)

7

Wir verwenden die Angaben aus Aufgabe 4 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das quadratische Streuungsmaß!
- b) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten! (L)

8

Wir verwenden die Angaben aus Aufgabe 7 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das quadratische Streuungsmaß!
- b) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten! (L)

9

Wir verwenden die Angaben aus Aufgabe 11 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß!
- b) Berechnen Sie den Streuungskoeffizienten! (L)

10

Wir verwenden die Angaben aus Aufgabe 15 von Abschnitt 2.2.

- a) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß für die jährlichen Entwicklungssätze des Warenumsatzes!
- b) Berechnen Sie das lineare Streuungsmaß für die absoluten jährlichen Zunahmen des Warenumsatzes! Beurteilen Sie die Aussage dieses Ergebnisses! (L)

2.4.

Statistische Verhältniszahlen

Die Aussagekraft statistischer Zahlen läßt sich oft wesentlich erhöhen, wenn diese Zahlen zum zahlenmäßigen Ausdruck einer anderen Erscheinung in Beziehung gesetzt werden. Dadurch entstehen Zahlen, die als statistische Verhältniszahlen oder statistische Relativzahlen bezeichnet werden.

Definition 1 *Eine statistische Verhältniszahl ist der Quotient zweier statistischer Zahlen. Diese Zahlen können gleiche oder ungleiche Benennung tragen, sie müssen aber in einem sinnvollen Zusammenhang stehen.*

Bei den statistischen Verhältniszahlen lassen sich Gliederungszahlen, Beziehungszahlen und Indexzahlen unterscheiden.

Gliederungszahlen oder Anteilzahlen entstehen, wenn wir die Arbeitskräftestruktur, die Kostenanteile, die Struktur des Materialverbrauchs usw. berechnen.

Beziehungszahlen entstehen, wenn wir den Hektarertrag als Quotient aus Gesamtertrag und Erntefläche bestimmen oder wenn wir die Arbeitsproduktivität als Quotient aus der hergestellten Stückzahl und der Gesamtstundenzahl berechnen.

Indexzahlen entstehen, wenn wir die Arbeitskräftezahl, den Umsatz, den Gewinn usw. in zeitlicher Entwicklung relativ darstellen, wenn wir die Planerfüllung prozentual nachweisen, wenn wir die Unterschiede in den Löhnen zwischen dem Bezirk A und dem Bezirk B bzw. zwischen zwei Fachbereichen relativ aufzeigen wollen.

In der Mathematik versteht man unter einem Zahlenverhältnis den Quotienten zweier Größen gleicher Benennung. Das mathematische Zahlenverhältnis hat keine Benennung.

Bei statistischen Verhältniszahlen werden auch Größen ungleicher Benennung ins Verhältnis gesetzt. Die statistische Verhältniszahl ist nur dann ein Zahlenverhältnis im mathematischen Sinne, wenn die Größen, aus denen der Quotient gebildet wird, gleiche Benennung tragen.

2.4.1. Gliederungszahlen oder Anteilzahlen

Statistische Gesamtheiten mit einem Umfang von n Einheiten lassen sich oft in Teilgesamtheiten mit den Umfängen $t_1, t_2, \dots, t_k$ unterteilen, daher gilt:

$$n = \sum_{i=1}^k t_i$$

Definition 2 *Gliederungszahlen sind statistische Verhältniszahlen, bei denen der Quotient aus dem Umfang t_i einer solchen Teilgesamtheit zum Umfang n der Gesamtheit gebildet wird, also*

$$t'_i = \frac{t_i}{n}, \text{ für } i = 1, 2, \dots, k.$$

Gliederungszahlen können auch als Prozentzahlen dargestellt werden. Sie geben den Anteil einer Teilgesamtheit t_i an der Gesamtheit n an und werden deshalb auch als *Anteilzahlen* oder *Quoten* bezeichnet. Gliederungszahlen dienen zur Darstellung der Struktur einer Gesamtheit.

1 Von 1 450 000 berufstätigen Personen arbeiten in sozialistischen Betrieben 1 180 000 Personen, in Betrieben mit staatlicher Beteiligung 104 000 Personen und in privaten Betrieben 166 000 Personen. Das ergibt folgende Gliederungszahlen:

Anteil der in sozialistischen Betrieben
beschäftigten Personen: $t'_1 = \frac{t_1}{n} = \frac{1\,180\,000}{1\,450\,000} = 0,814 \text{ oder } 81,4\%$

Anteil der in Betrieben mit staatlicher Beteiligung beschäftigten Personen: $t'_2 = \frac{t_2}{n} = \frac{104\,000}{1\,450\,000} = 0,072 \text{ oder } 7,2\%$

Anteil der in privaten Betrieben beschäftigten Personen: $t'_3 = \frac{t_3}{n} = \frac{166\,000}{1\,450\,000} = 0,114 \text{ oder } 11,4\%$

1,00 oder 100,0%

2.4.2. Beziehungszahlen

Definition 3 *Beziehungszahlen sind statistische Verhältniszahlen, bei denen der Quotient aus den Umfängen zweier sinnvoll in Beziehung stehender ungleichartiger statistischer Gesamtheiten gebildet wird.*

Sind zwei statistische Gesamtheiten mit den Umfängen n_1 und n_2 gegeben, so gilt:

$$b_{1,2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Beziehungszahlen haben eine Benennung.

2 In einem Industriebetrieb stellen 2 000 Arbeiter insgesamt 30 000 t eines Erzeugnisses her. Aus diesen Zahlen läßt sich die Pro-Kopf-Leistung als Beziehungszahl folgendermaßen ermitteln:

$$b_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{30\,000}{2\,000} = 15.$$

Die Pro-Kopf-Leistung betrug demnach 15 t/Arbeiter.

Am 31.12.1969 hatte die DDR eine Wohnbevölkerung von 17 074 504. Die Fläche der DDR betrug 108 173 km².¹ Demnach ergibt sich die Bevölkerungsdichte der DDR als folgende Beziehungszahl:

$$b_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{17\,074\,504}{108\,173} \approx 158.$$

In der DDR lebten folglich im Jahre 1969 durchschnittlich rund 158 Personen auf 1 km².

2.4.3. Indexzahlen

Definition 4 *Indexzahlen sind statistische Verhältniszahlen, bei denen der Quotient aus zwei gleichartigen statistischen Zahlen gebildet wird.*

Dabei darf, wenn diese beiden Zahlen den Umfang statistischer Gesamtheiten vertreten, die eine Gesamtheit nicht Teil der anderen Gesamtheit sein. Indexzahlen dienen demnach dem statistischen Vergleich. Sie machen in relativer Form entweder Niveauunterschiede oder die zeitliche Entwicklung von statistischen Zahlen sichtbar. Indexzahlen lassen sich auch als Prozentzahlen ausdrücken. Die Prozentzahlen der Planerfüllung sind z. B. ausnahmslos Indexzahlen. Zur Bildung von Indexzahlen benötigen wir einen *Basiswert* a_0 (auch Basisgröße oder Bezugsgröße genannt); das ist der Wert, der im Nenner des zu bildenden Quotienten steht; einen *Berichtswert* a_1 (auch Berichtsgröße genannt); das ist der Wert, der im Zähler des zu bildenden Quotienten steht.

Der *Basiszeitraum* 0 ist der Zeitraum, für den die Basisgrößen (Nenner der Indexzahlen) ermittelt wurden. Der Hinweis 0 kann auch zur Kennzeichnung von Plangrößen verwendet werden.

Der *Berichtszeitraum* 1 ist der Zeitraum, für den die Berichtsgrößen (Zähler der Indexzahlen) ermittelt wurden. Der Hinweis 1 kann auch zur Kennzeichnung von Ist-Größen verwendet werden.

Eine Indexzahl I ist dann

$$I_{0,1} = \frac{a_1}{a_0}.$$

Die Selbstkosten des Erzeugnisses A sanken von 12 M im Vorjahr auf 10 M in diesem Jahr. Der Index der Selbstkosten dieses Erzeugnisses ergibt sich wie folgt:

$$I_{0,1} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{10}{12} = 0,833 \text{ oder } 83,3\%.$$

Die Selbstkosten des Erzeugnisses A sanken im Vergleich zum Vorjahr auf 83,3 % oder um 16,7 %.

¹ Statistisches Jahrbuch der DDR 1970, S. 3.

Bei den Indexpzahlen lassen sich einfache Indexpzahlen und zusammengesetzte Indexpzahlen unterscheiden.

Einfache Indexpzahlen

Definition 5 *Einfache Indexpzahlen – auch individuelle Indexpzahlen genannt – geben den Niveauunterschied oder die zeitliche Veränderung einer Einzelercheinung oder eines Merkmals dieser Erscheinung relativ an.*

So kann z. B. die zeitliche Entwicklung des Preises einer Ware, der Selbstkosten eines Produkts, des Arbeitskräftebestandes eines Betriebes usw. mit Hilfe einfacher Indexpzahlen sichtbar gemacht werden.

5

Der Jahresproduktionsplan eines Betriebes sieht bei Erzeugnis A eine Menge von 3 000 t vor, tatsächlich wurde eine Produktion von 3 210 t erreicht. Die Indexpzahl der Produktionsplanerfüllung bei Erzeugnis A ist dann

$$I_{0,1} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{3\,210}{3\,000} = 1,07 \text{ oder } 107\%.$$

Der Produktionsplan wurde demnach bei Erzeugnis A mit 107 % erfüllt oder mit 7 % übererfüllt.

Mit Hilfe von Indexpzahlen lassen sich auch Niveauunterschiede oder die zeitliche Entwicklung ganzer statistischer Reihen ausdrücken. Eine statistische Reihe ist eine Aufeinanderfolge statistischer Zahlen.

Eine statistische Reihe entsteht beispielsweise, wenn wir die Roh-eisenproduktion eines Landes für verschiedene Jahre erfassen, wenn wir die erzeugte Elektroenergie eines Jahres für verschiedene Länder zusammenstellen usw.

Ermitteln wir für derartige statistische Reihen Indexpzahlen, so entstehen Indexreihen. Dabei unterscheiden wir Indexreihen mit fester Basis und Indexreihen mit veränderlicher Basis.

Indexreihe mit fester Basis

Definition 6 *Eine Indexreihe mit fester Basis entsteht, wenn alle Werte einer statistischen Reihe auf ein und denselben Wert (Basiswert) bezogen werden.*

Ist eine statistische Reihe mit den Werten $a_0, a_1, \dots, a_n$ gegeben und verwenden wir den Wert a_0 als festen Basiswert, so erhalten wir folgende Indexreihe mit fester Basis:

$$I_{0,1} = \frac{a_1}{a_0},$$

$$I_{0,2} = \frac{a_2}{a_0},$$

$$I_{0,3} = \frac{a_3}{a_0},$$

.

.

.

$$I_{0,n} = \frac{a_n}{a_0}.$$

6

Die Braunkohlenförderung erreichte folgenden Stand (in Mill. t):

Jahr	0	1	2	3	4	5
	225	237	247	254	257	251

Für dieses Beispiel ist: $a_0 = 225$; $a_1 = 237$; $a_2 = 247$; $a_3 = 254$; $a_4 = 257$; $a_5 = 251$.

Nehmen wir $a_0 = 225$ als Basiswert, so erhalten wir folgende Indexreihe mit fester Basis:

$$I_{0,1} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{237}{225} = 1,053 \text{ oder } 105,3\%,$$

$$I_{0,2} = \frac{a_2}{a_0} = \frac{247}{225} = 1,098 \text{ oder } 109,8\%,$$

$$I_{0,3} = \frac{a_3}{a_0} = \frac{254}{225} = 1,129 \text{ oder } 112,9\%,$$

$$I_{0,4} = \frac{a_4}{a_0} = \frac{257}{225} = 1,142 \text{ oder } 114,2\%,$$

$$I_{0,5} = \frac{a_5}{a_0} = \frac{251}{225} = 1,116 \text{ oder } 111,6\%.$$

Diese Indexzahlen zeigen die prozentuale Steigerung der Braunkohlenförderung im Vergleich zum Jahre 0. Die Braunkohlenförderung stieg vom Jahr 0 bis zum Jahr 3 auf 112,9% oder um 12,9%; vom Jahr 0 bis zum Jahr 5 auf 111,6% oder um 11,6%.

Zur Bildung von Indexzahlen mit fester Basis können auch andere Werte als die Größe a_0 als Basiswert verwendet werden. Im allgemeinen ist es jedoch üblich, den Anfangswert einer statistischen Reihe, also den Wert a_0 , als Basiswert anzusetzen.

Indexreihe mit veränderlicher Basis

Definition 7 *Eine Indexreihe mit veränderlicher Basis entsteht, wenn die Werte einer statistischen Reihe jeweils auf den vorangehenden Wert der statistischen Reihe bezogen werden, wenn sich also bei den zu bildenden Indexzahlen der Basiswert von Indexzahl zu Indexzahl verändert.*

Ist eine statistische Reihe mit den Werten $a_0, a_1, \dots, a_n$ gegeben, so erhalten wir folgende Indexreihe mit veränderlicher Basis:

$$\begin{aligned} I_{0,1} &= \frac{a_1}{a_0}, \\ I_{1,2} &= \frac{a_2}{a_1}, \\ I_{2,3} &= \frac{a_3}{a_2}, \\ &\vdots \\ I_{(n-1),n} &= \frac{a_n}{a_{n-1}}. \end{aligned}$$

7

Wir betrachten wieder die Entwicklung der Braunkohlenförderung (siehe Beispiel 6). Als Indexreihe mit veränderlicher Basis erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_{0,1} &= \frac{a_1}{a_0} = \frac{237}{225} = 1,053 \text{ oder } 105,3\%, \\ I_{1,2} &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{247}{237} = 1,042 \text{ oder } 104,2\%, \\ I_{2,3} &= \frac{a_3}{a_2} = \frac{254}{247} = 1,028 \text{ oder } 102,8\%, \\ I_{3,4} &= \frac{a_4}{a_3} = \frac{257}{254} = 1,012 \text{ oder } 101,2\%, \\ I_{4,5} &= \frac{a_5}{a_4} = \frac{251}{257} = 0,977 \text{ oder } 97,7\%. \end{aligned}$$

Die Indexreihe mit veränderlicher Basis zeigt die Entwicklung einer Erscheinung von Zeitraum zu Zeitraum.

Für Beispiel 7 gibt die Indexreihe mit veränderlicher Basis die Entwicklung der Braunkohlenförderung von Jahr zu Jahr an. Die Förderung stieg vom Zeitraum 2 zum Zeitraum 3 auf 102,8% oder

um 2,8%, vom Zeitraum 3 zum Zeitraum 4 auf 101,2% oder um 1,2%. Vom Zeitraum 4 zum Zeitraum 5 ging sie auf 97,7% oder um 2,3% zurück.

Verkettung von einfachen Indexzahlen

Zwischen der Indexreihe mit fester Basis und der Indexreihe mit veränderlicher Basis besteht ein zahlenmäßiger Zusammenhang, der vor allem dann von Bedeutung ist, wenn die statistischen Ausgangsdaten einer statistischen Reihe nicht mehr bekannt sind.

Angenommen, die Werte $a_0, a_1, \dots, a_n$ liegen nicht vor, sondern nur die Indexzahlen. In diesem Falle ist es möglich, aus einer Indexreihe mit fester Basis die Indexreihe mit veränderlicher Basis oder – umgekehrt – aus einer Indexreihe mit veränderlicher Basis die Indexreihe mit fester Basis zu berechnen. Dieser Vorgang wird als *Verkettung von Indexzahlen* oder kurz als *Indexverkettung* bezeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Indexreihe mit veränderlicher Basis $I_{0,1}, I_{1,2}, \dots, I_{(n-1),n}$ gegeben ist und die zugehörige Indexreihe mit fester Basis gesucht wird.

Die Indexreihe mit fester Basis $I_{0,1}, I_{0,2}, \dots, I_{0,n}$ erhalten wir wie folgt:

$I_{0,1}$ gegeben;

$$I_{0,2} = I_{0,1} \cdot I_{1,2} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_0},$$

$$I_{0,3} = I_{0,1} \cdot I_{1,2} \cdot I_{2,3} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_3}{a_0}$$

oder

$$= I_{0,2} \cdot I_{2,3} = \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_3}{a_0}$$

·
·
·

$$\begin{aligned} I_{0,n} &= I_{0,1} \cdot I_{1,2} \cdot I_{2,3} \cdot \dots \cdot I_{(n-1),n} \\ &= \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

oder

$$I_{0,n} = I_{0,(n-1)} \cdot I_{(n-1),n} = \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0}.$$

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 7 und nehmen an, die Indexzahlen mit fester Basis für die Braunkohlenförderung seien uns noch nicht bekannt. Wir können sie folgendermaßen berechnen:

$$I_{0,1} = 1,053 \text{ oder } 105,3\%,$$

$$I_{0,2} = I_{0,1} \cdot I_{1,2} = 1,053 \cdot 1,042 = 1,097 \text{ oder } 109,7\%,$$

$$I_{0,3} = I_{0,1} \cdot I_{1,2} \cdot I_{2,3} = 1,053 \cdot 1,042 \cdot 1,028 = 1,128$$

oder

$$= I_{0,2} \cdot I_{2,3} = 1,097 \cdot 1,042 = 1,128,$$

$$I_{0,4} = I_{0,1} \cdot I_{1,2} \cdot I_{2,3} \cdot I_{3,4}$$

$$= 1,053 \cdot 1,042 \cdot 1,028 \cdot 1,012 = 1,142$$

oder

$$= I_{0,3} \cdot I_{3,4} = 1,128 \cdot 1,012 = 1,142,$$

$$I_{0,5} = I_{0,1} \cdot I_{1,2} \cdot I_{2,3} \cdot I_{3,4} \cdot I_{4,5}$$

$$= 1,053 \cdot 1,042 \cdot 1,028 \cdot 1,012 \cdot 0,977 = 1,116$$

oder

$$= I_{0,4} \cdot I_{4,5} = 1,142 \cdot 0,977 = 1,116.$$

Damit haben wir, ohne auf die Ausgangswerte zurückgreifen zu müssen, die Indexreihe mit fester Basis erhalten. Die Aussage dieser Indexzahlen haben wir bereits bei Beispiel 6 beschrieben. Die hier auftretenden Differenzen sind auf Rundungsungenauigkeiten zurückzuführen.

Wir betrachten nun den Fall, daß die Indexreihe mit fester Basis $I_{0,1}, I_{0,2}, \dots, I_{0,n}$ gegeben ist und die Indexreihe mit veränderlicher Basis $I_{0,1}, I_{1,2}, \dots, I_{(n-1),n}$ gesucht wird.

Die Indexreihe mit veränderlicher Basis ergibt sich auf folgende Weise:

$I_{0,1}$ gegeben,

$$I_{1,2} = \frac{I_{0,2}}{I_{0,1}} = \frac{\frac{a_2}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0}} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$I_{2,3} = \frac{I_{0,3}}{I_{0,2}} = \frac{\frac{a_3}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_3}{a_2},$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$I_{(n-1),n} = \frac{I_{0,n}}{I_{0,(n-1)}} = \frac{\frac{a_n}{a_0}}{\frac{a_{n-1}}{a_0}} = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 6 und unterstellen, daß die Indexzahlen mit veränderlicher Basis nicht vorliegen und die Ausgangsdaten nicht mehr bekannt sind.

Die Indexreihe mit veränderlicher Basis ergibt sich folgendermaßen:

$$I_{0,1} = 1,053 \text{ oder } 105,3\%,$$

$$I_{1,2} = \frac{I_{0,2}}{I_{0,1}} = \frac{1,098}{1,053} = 1,042 \text{ oder } 104,2\%,$$

$$I_{2,3} = \frac{I_{0,3}}{I_{0,2}} = \frac{1,129}{1,098} = 1,028 \text{ oder } 102,8\%,$$

$$I_{3,4} = \frac{I_{0,4}}{I_{0,3}} = \frac{1,142}{1,129} = 1,012 \text{ oder } 101,2\%,$$

$$I_{4,5} = \frac{I_{0,5}}{I_{0,4}} = \frac{1,116}{1,142} = 0,977 \text{ oder } 97,7\%.$$

Die Aussage dieser Indexzahlen haben wir bereits bei Beispiel 7 beschrieben.

Zusammengesetzte Indexzahlen

Definition 8 *Zusammengesetzte Indexzahlen geben den Niveauunterschied oder die zeitliche Veränderung einer Menge von Einzelercheinungen unter Verwendung von Gewichtszahlen in zusammenfassender relativer Form an.*

Bei den einfachen Indexzahlen ging es darum, Niveauunterschiede oder die zeitliche Veränderung von Einzelercheinungen in relativer Form aufzuzeigen, z. B. von einzelnen Preisen, von hergestellten oder umgesetzten Mengen einzelner Produkte usw.

Die zusammengesetzten Indexzahlen sollen z. B. die Entwicklung der Einzelhandelspreise aller Erzeugnisse, der Selbstkosten je Erzeugniseinheit für alle Erzeugnisse, der produzierten oder umgesetzten Mengen aller Erzeugnisse, des Nationaleinkommens aller Produktionsbetriebe usw. in zusammenfassender Form relativ ausdrücken. Das geschieht unter Verwendung von Gewichtszahlen.

Wir stellen einige wesentliche Arten der zusammengesetzten Indexzahlen an Hand von Einzelhandelspreisen und umgesetzten Mengen dar. Die nachstehenden Indexformeln lassen sich jedoch auch verallgemeinert für andere Zwecke verwenden, wie den Nachweis der Entwicklung der Betriebspreise, der Industrieabgabepreise, der Selbstkosten je Erzeugniseinheit usw.

Der Umsatzindex

Es ist

- $p_{0,i}$ der Preis im Zeitraum 0 (Basiszeitraum) für eine Ware i ,
 $i = 1, 2, \dots, n$;
- $p_{1,i}$ der Preis im Zeitraum 1 (Berichtszeitraum) für eine Ware i ,
 $i = 1, 2, \dots, n$;
- $Q_{0,i}$ die Menge einer Ware i im Basiszeitraum,
 $i = 1, 2, \dots, n$;
- $Q_{1,i}$ die Menge einer Ware i im Berichtszeitraum,
 $i = 1, 2, \dots, n$.

Der Umsatzindex I hat folgende Form:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i}}$$

10

Für drei Waren wurden folgende Einzelhandelspreise und umgesetzte Mengen ermittelt:

Ware	Mengen- einheit	Basiszeitraum		Berichtszeitraum		Ein- facher Preis- index	Ein- facher Mengen- index
		Preis M $p_{0,i}$	Menge $Q_{0,i}$	Preis M $p_{1,i}$	Menge $Q_{1,i}$		
1	Stück	10	20	5	30	0,50	1,50
2	kg	8	30	6	50	0,75	1,67
3	Stück	15	50	12	70	0,80	1,40

Als Umsatzindex erhalten wir:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{1,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^3 p_{0,i} Q_{0,i}} = \frac{5 \cdot 30 + 6 \cdot 50 + 12 \cdot 70}{10 \cdot 20 + 8 \cdot 30 + 15 \cdot 50} = \frac{1\,290}{1\,190} = 1,08 \text{ oder } 108\%$$

Der Umsatzindex spiegelt die Entwicklung des Gesamtumsatzes vom Basis- zum Berichtszeitraum wider, die durch Veränderungen der Preise und der umgesetzten Mengen entstanden ist. Für unser Beispiel beträgt der Gesamtumsatz im Basiszeitraum 1 190 M und im Berichtszeitraum 1 290 M, d. h., der Umsatz stieg in diesem Zeitabschnitt auf 108% oder um 8%.

Im Umsatzindex werden mithin alle Veränderungen der Preise und der Mengen sichtbar, die vom Basiszeitraum zum Berichtszeitraum eingetreten sind. Wollen wir wissen, wie stark der Umsatz durch die Mengenentwicklung beeinflusst wurde, müssen wir Indexpunkte für die durchschnittliche Preisentwicklung und für die durchschnittliche Mengenentwicklung berechnen.

Die Indexzahl für die durchschnittliche Preisentwicklung (Preisindex)

Der Preisindex soll die durchschnittliche Entwicklung der Preise unbeeinflusst durch Veränderungen in den Mengen angeben. Um dies zu erreichen, halten wir die Mengen zeitlich konstant und setzen diese zeitlich konstanten Mengen im Preisindex an.

Der Preisindex I_p hat folgende Form:

$$I_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{1,i}}.$$

11

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 10. Als Preisindex ergibt sich:

$$I_p = \frac{5 \cdot 30 + 6 \cdot 50 + 12 \cdot 70}{10 \cdot 30 + 8 \cdot 50 + 15 \cdot 70} = \frac{1\,290}{1\,750} = 0,737 \text{ oder } 73,7\%.$$

d. h., die Preise sind vom Basis- zum Berichtszeitraum unter Berücksichtigung zeitlich konstanter Umsatzmengen des Berichtszeitraums durchschnittlich um 26,3 % auf 73,7 % gesunken.

In gleicher Weise können wir auch den Selbstkostenindex, den Materialpreisindex usw. berechnen.

Die Indexzahl für die durchschnittliche Mengenentwicklung (Mengenindex)

Der Mengenindex soll die durchschnittliche Mengenentwicklung unbeeinflusst durch die Veränderungen in den Preisen angeben. Um dies zu erreichen, halten wir die Preise zeitlich konstant und setzen zeitlich konstante Preise im Mengenindex an.

Der Mengenindex I_Q hat folgende Form:

$$I_Q = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i}}.$$

12

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 10. Als Mengenindex ergibt sich:

$$I_Q = \frac{10 \cdot 30 + 8 \cdot 50 + 15 \cdot 70}{10 \cdot 20 + 8 \cdot 30 + 15 \cdot 50} = \frac{1750}{1190} = 1,47 \text{ oder } 147\%,$$

d. h., die durchschnittliche Veränderung der Umsatzmengen vom Basis- zum Berichtszeitraum zu konstanten Preisen des Basiszeitraums beträgt 147%. Mit anderen Worten: Der Warenumsatz erhöhte sich mengenmäßig durchschnittlich um 47%.

Der Zusammenhang zwischen Umsatzindex, Preisindex und Mengenindex

Bei den zusammengesetzten Indexzahlen bestehen Beziehungen, die man günstig für die weitere Analyse der Entwicklung ökonomischer Erscheinungen und für Leitungsentscheidungen ausnutzen kann. Mit Hilfe dieser Analyse, die man auch als Faktorenanalyse bezeichnet, können wir aufzeigen, wie sich Veränderungen in den Preisen und Mengen auf die Umsatzentwicklung positiv oder negativ ausgewirkt haben.

Zwischen dem Umsatzindex, dem Preisindex und dem Mengenindex besteht folgender Zusammenhang:

$$I = I_p \cdot I_Q$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{1,i}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i}}$$

Der Umsatzindex ist das Produkt aus dem Preisindex und dem Mengenindex. Damit wird es möglich, den Einfluß der Preisentwicklung und der Mengenentwicklung auf die Umsatzentwicklung auszuweisen. Diese Beziehung läßt sich außerdem vorteilhaft ausnutzen, wenn wir eine dieser Indexzahlen aus den anderen Indexzahlen berechnen wollen. So ist z. B. der Mengenindex als Quotient aus Umsatzindex und Preisindex berechenbar.

13

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 10. Für dieses Beispiel gilt:

$$I = I_p \cdot I_Q$$

$$1,08 = 0,737 \cdot 1,47$$

d. h., die Umsatzentwicklung von 108% wurde durch eine Preisentwicklung von 73,7% (Preissenkung) und durch eine Mengenentwicklung von 147% (mengenmäßige Erhöhung des Umsatzes) beeinflusst.

Angenommen, der Mengenindex wäre uns noch nicht bekannt und wir hätten nur den Umsatzindex und den Preisindex zur Verfügung, dann könnten wir den Mengenindex folgendermaßen ermitteln:

$$\frac{I}{I_p} = I_Q$$

$$\frac{1,08}{0,737} = 1,47$$

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Differenzen zwischen Zähler und Nenner der Indexzahlen. So gilt z. B. für den Umsatzindex, den Preis- und Mengenindex folgende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i} - \sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i} = \left(\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i} - \sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{1,i} \right) +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{1,i} - \sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i} \right).$$

Die Zunahme des Umsatzes kann folglich als Summe der Differenzen aus der Preisveränderung und der Mengenentwicklung ermittelt werden.

14

Wir verwenden die Angaben aus Beispiel 10. Für dieses Beispiel gilt:

$$1\,290 - 1\,190 = (1\,290 - 1\,750) + (1\,750 - 1\,190)$$

$$100 \quad = \quad -460 \quad + \quad 560$$

d. h., die Umsatzentwicklung U kann errechnet werden

$$U = 1\,290 - 1\,190 \quad \text{oder}$$

$$U = -460 + 560.$$

Im Beispiel wurde eine Umsatzerhöhung von 100 M durch eine Preissenkung von 460 M und eine Mengenerhöhung von 560 M erzielt.

*Die Indexzahl für die Veränderung von Durchschnitten
(Durchschnittsindex)*

Der Durchschnittsindex soll die Entwicklung von Durchschnittsgrößen ausdrücken, z. B. die Veränderung von Durchschnittslöhnen, von Durchschnittspreisen, von Durchschnittselbstkosten je Erzeugniseinheit, von durchschnittlichen Hektarerträgen, von Durchschnittsstundenleistungen usw.

Der Durchschnittsindex hat folgende Form:

$$I_D = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n p_{1,i} Q_{1,i}}{\sum_{i=1}^n Q_{1,i}}}{\frac{\sum_{i=1}^n p_{0,i} Q_{0,i}}{\sum_{i=1}^n Q_{0,i}}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}.$$

15

Drei Industriebetriebe stellen das gleiche Erzeugnis A zu unterschiedlichen Preisen her. Folgende Preise und die produzierten Mengen für Erzeugnis A liegen vor:

Betrieb i	Betriebspreis in M		Produktionsmenge in Stück	
	Basisjahr p _{0, i}	Berichtsjahr p _{1, i}	Basisjahr Q _{0, i}	Berichtsjahr Q _{1, i}
1	105	100	300	300
2	100	102	500	400
3	110	98	200	800
			1 000	1 500
			$= \sum_{i=1}^3 Q_{0,i}$	$= \sum_{i=1}^3 Q_{1,i}$

Für den Index des Durchschnittspreises erhalten wir:

$$I_D = \frac{\frac{100 \cdot 300 + 102 \cdot 400 + 98 \cdot 800}{300 + 400 + 800}}{\frac{105 \cdot 300 + 100 \cdot 500 + 110 \cdot 200}{300 + 500 + 200}} = \frac{99,47}{103,50} = 0,961 \text{ oder } 96,1\%$$

Die Berechnung zeigt, daß der Durchschnittspreis des Erzeugnisses A nicht mehr 103,50 M, sondern nur noch 99,47 M beträgt. Der Durchschnittspreis sank somit auf 96,1 % oder um 3,9 %.

**Aufgaben
zu 2.4.**

Gliederungszahlen

1

Ein volkseigener Betrieb hat folgende Kostenstruktur:

Kostenart	Kosten in 1 000 M
Abschreibungen	1 000
Materialkosten	13 000
Energiekosten	2 000
Lohnkosten	8 000
Sonstige Kosten	3 000

Berechnen Sie die Anteile der einzelnen Kostenarten an den Gesamtkosten!

2

Zu einer Handelsorganisation gehören nachstehende Lebensmittel-Verkaufsstellen:

Branche	Anzahl der Verkaufsstellen
Obst und Gemüse	8
Back- und Konditorwaren	11
Fleisch und Fleischwaren	15
Fisch und Fischwaren	6
Milch und Molkereiprodukte	9
Tabakwaren und Getränke	10
Nahrungs- und Genußmittel	51

Berechnen Sie die Anteile der einzelnen Branchen an der Gesamtverkaufsstellenzahl!

3

Das Bruttoproduct teilt sich nach den Eigentumsformen folgendermaßen auf:

Eigentumsform	Bruttoproduct in Md. M
Sozialistische Betriebe	180
Davon: volkseigene Betriebe	150
genossenschaftliche Betriebe	30
Betriebe mit staatlicher Beteiligung	20
Private Betriebe	15

- Berechnen Sie die Anteile der Eigentumsformen am Bruttoproduct!
- Berechnen Sie die Anteile der volkseigenen und der genossenschaftlichen Betriebe am Bruttoproduct!
- Berechnen Sie die Anteile der volkseigenen und genossenschaftlichen Betriebe am Bruttoproduct der sozialistischen Betriebe!

Beziehungszahlen

4

Eine HO-Verkaufsstelle ermittelt für 3 Abteilungen folgende Daten:

Abteilung	Umsatz in 1 000 M	Arbeitsstunden
Meterware	200	3 000
Konfektion	350	3 400
Trikotagen	100	2 500

- a) Berechnen Sie die Stundenleistung einer Verkaufskraft in jeder Abteilung!
- b) Berechnen Sie die durchschnittliche Stundenleistung einer Verkaufskraft! (L)

5

In einer Maschinenfabrik liegen folgende Angaben vor:

Erzeugnis	Produktionsmenge St.	Materialverbrauch insgesamt t
Fräsmaschine	800	368,0
Bohrmaschine	850	688,5
Drehmaschine	600	282,0

Berechnen Sie für jedes Erzeugnis den spezifischen Materialverbrauch in t/St!

6

Für die Bereiche der Industrie werden folgende Daten ausgewiesen:

Industriebereich	Industrielle Bruttoproduktion in Mill. M	Arbeitsstunden je 1000 M industrieller Bruttoproduktion
Chemische Industrie	2 500	35
Maschinen- und Fahrzeugbau	3 000	38
Leichtindustrie	1 500	50
Lebensmittelindustrie	1 000	20

Berechnen Sie, wieviel Arbeitsstunden in jedem Industriebereich geleistet wurden!

Indexzahlen

7

In den Baubetrieben eines Kreises liegen folgende Daten vor:

Jahr	Freifallmischer St.	Krane St.	Kipper St.
0	80	15	30
1	85	15	32
2	85	17	32
3	89	18	35
4	94	20	40

- a) Berechnen Sie, wie sich die Anzahl der Freifallmischer, der Krane und der Kipper – auf den Zeitraum 0 bezogen – entwickelt hat (Indexzahl mit fester Basis)!
- b) Berechnen Sie, wie sich die Anzahl der Freifallmischer, der Krane und der Kipper von Jahr zu Jahr entwickelt hat (Indexzahl mit veränderlicher Basis)!

8

Ein Warenhaus hatte folgende Arbeitskräfte:

Jahr	0	1	2	3	4	5	6
	120	125	145	145	150	160	160

- a) Berechnen Sie die relative Veränderung der Arbeitskräftezahl vom Zeitraum 0 zum Zeitraum 6!
- b) Berechnen Sie die relative Veränderung der Arbeitskräftezahl mit dem Zeitraum 2 als Basisjahr!
- c) Berechnen Sie, welche rechnerischen Beziehungen zwischen den unter a) und b) ermittelten Indexreihen bestehen! (L c)

9

Ein Betrieb weist folgende Plan- und Ist-Mengen aus:

Erzeugnis	Menge		Mengeneinheit
	Plan	Ist	
1	2 500	2 580	St.
2	420	510	t
3	800	760	St.
4	1 300	1 300	St.

- a) Berechnen Sie die Indexzahl der Planerfüllung für jedes Erzeugnis!
- b) Beurteilen Sie die Aussage der berechneten Indexzahlen!

10

Ein volkseigener Betrieb ermittelte für die Arbeitsproduktivität seiner Produktionsarbeiter die nachstehenden Indexzahlen:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Indexzahl (%)	144	150	160	175	190	205

Bei den Indexzahlen wurde ein Basisjahr zugrunde gelegt, das vor dem Zeitraum 0 liegt.

- a) Deuten Sie die angegebene Indexreihe!
- b) Berechnen Sie, wie sich die Produktivität vom Zeitraum 0 zum Zeitraum 5 entwickelt hat (Zeitraum 0 als Basiszeitraum verwenden)!
- c) Berechnen Sie die relative Entwicklung der Produktivität von Jahr zu Jahr!

11

Eine HO-Verkaufsstelle weist ihre Umsatzentwicklung in Prozent aus. Die Zahlen sind jeweils auf das Vorjahr bezogen.

Jahr	1	2	3	4	5
Index des Einzelhandelsumsatzes (%)	105	99	100	103	104

- Berechnen Sie, wie sich der Einzelhandelsumsatz vom Zeitraum 0 zum Zeitraum 5 insgesamt entwickelte!
- Berechnen Sie die Umsatzwerte für die Jahre 0 bis 5, wenn bekannt ist, daß der Umsatz für das Jahr 3 insgesamt 55 Mill. M beträgt! (L)

12

Ein Industriebetrieb hat folgende Selbstkosten:

Erzeugnis	Selbstkosten je Erzeugniseinheit in M		Produzierte Mengen	
	Basiszeitraum	Berichtszeitraum	Basiszeitraum	Berichtszeitraum
1	30	28	3 000	3 200
2	120	115	300	250
3	220	220	400	460

- Berechnen Sie die relative Veränderung der Gesamtselbstkosten (Umsatzindex)!
- Berechnen Sie für jedes Erzeugnis die Entwicklung der Selbstkosten je Erzeugniseinheit!
- Berechnen Sie für jedes Erzeugnis die Veränderung der produzierten Mengen!
- Berechnen Sie die durchschnittliche Entwicklung der Selbstkosten je Erzeugniseinheit für alle Erzeugnisse zusammen! (L)

13

Ein Handelsbetrieb ermittelt folgende Zahlen:

Ware	Einzelhandelspreise in M		Umgesetzte Mengen	
	Jahr 0 $P_{0,i}$	Jahr 5 $P_{1,i}$	Jahr 0 $Q_{0,i}$	Jahr 5 $Q_{1,i}$
1	4,50	3,90	800	900
2	15,00	17,50	400	300
3	102,00	95,00	150	170
4	56,30	57,00	210	200

- Berechnen Sie die Preisentwicklung für jede Ware!
- Berechnen Sie die Entwicklung der umgesetzten Mengen für jede Ware!

- c) Berechnen Sie die Entwicklung des Gesamtumsatzes!
- d) Berechnen Sie die durchschnittliche Preisentwicklung für alle vier Waren zusammen!
- e) Berechnen Sie die durchschnittliche Mengenentwicklung für alle vier Waren zusammen!
- f) Berechnen Sie, wie sich die Preis- und die Mengenentwicklung auf die absolute Umsatzentwicklung auswirkte! (L)

14

Für einen Industriebetrieb liegen folgende Angaben vor:

Erzeugnis	Ist-Selbstkosten je Erzeugniseinheit in M für das Vorjahr	Plan-Selbstkosten je Erzeugniseinheit in M für das Planjahr	Geplante Menge für das Planjahr
1	320	310	400 t
2	180	170	250 t
3	240	235	600 t
4	80	78	1 200 St.

- a) Berechnen Sie den Index der geplanten Selbstkostensenkung!
- b) Nach Abschluß des Planjahres wurden folgende Ist-Selbstkosten je Erzeugniseinheit und folgende tatsächlichen Produktionsmengen erreicht:

Erzeugnis	Ist-Selbstkosten je Erzeugniseinheit in M für das Planjahr	Ist-Menge
1	312	410
2	167	312
3	234	650
4	70	2 000

Berechnen Sie die tatsächliche Selbstkostensenkung in Prozent!

- c) Berechnen Sie die Indexzahl der Selbstkostensenkung! (L)

15

Ein Betrieb weist für ein gegebenes Planjahr folgende Zahlen aus:

Erzeugnis i	Mengeneinheit	Produktionsmenge		Betriebspreis in M Pi
		geplant Q _{0,i}	erreicht Q _{1,i}	
1	t	3 000	3 200	120
2	t	700	670	235
3	St.	70	80	720
4	St.	100	98	240

- a) Berechnen Sie die Indexzahl der Erfüllung des Produktionsplans für jedes Erzeugnis!
- b) Berechnen Sie die Indexzahl der Produktionsplanerfüllung für alle vier Erzeugnisse insgesamt!

- c) Berechnen Sie, um wieviel Mark der Produktionsplan übererfüllt wurde! (L)

16

In einem Betrieb wurden folgende Monatslöhne gezahlt:

Monatslöhne je Arbeiter in M		Anzahl der Arbeiter	
Basiszeitraum	Berichtszeitraum	Basiszeitraum	Berichtszeitraum
300	340	20	10
340	350	30	40
370	400	110	150
420	450	230	230
500	500	80	100
700	720	5	5

- a) Berechnen Sie die prozentuale Veränderung der Gesamtzahl der Arbeiter!
b) Berechnen Sie, um wieviel Prozent sich der Durchschnittslohn eines Arbeiters in diesem Betrieb veränderte! (L)

17

Über die Dauer der Betriebszugehörigkeit der Produktionsarbeiter liegen folgende Zahlen vor:

Dauer der Betriebszugehörigkeit in Jahren	Anzahl der Produktionsarbeiter	
	Basis- zeitraum	Berichts- zeitraum
0— 1	80	120
1— 2	120	70
2— 3	150	150
3— 5	610	620
5—10	750	740
10—20	90	75

- a) Berechnen Sie die durchschnittliche Betriebszugehörigkeitsdauer eines Produktionsarbeiters im Basis- und im Berichtszeitraum! (Hinweis: Beim Errechnen des Durchschnitts der Betriebszugehörigkeit wird die Gruppenmitte zugrunde gelegt.)
b) Berechnen Sie den Index der durchschnittlichen Betriebszugehörigkeitsdauer eines Produktionsarbeiters! (L a, b)

2.5.

Der Trend

Im Abschnitt 2.4. haben wir an vielen Stellen statistische Reihen betrachtet. Im folgenden werden wir uns mit statistischen Zeitreihen – oder dynamischen Reihen – befassen. Statistische Zeitreihen zeigen, wie sich eine Erscheinung im Laufe der Zeit entwickelt.

Definition 1 Eine statistische Zeitreihe ist eine Aufeinanderfolge statistischer Zahlen, die an bestimmte aufeinanderfolgende Zeiträume oder Zeitpunkte gebunden sind.

1

Die folgende Zeitreihe zeigt, wie sich die jährliche Transportmenge (in 1 000 t) in einem volkseigenen Speditionsbetrieb entwickelte:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7
	501	522	549	580	597	621	625

Die Transportmenge stellen wir graphisch dar. Auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems tragen wir die Zeit ab, auf der Ordinatenachse die Transportmengen.

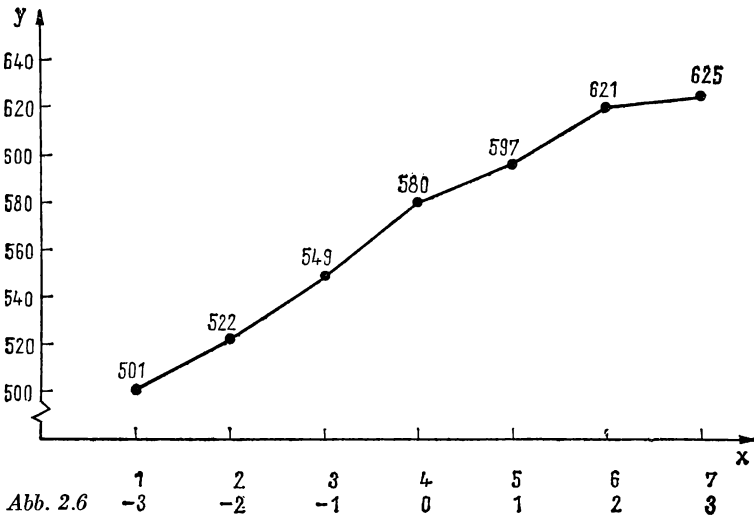


Abb. 2.6

Selten entwickelt sich eine ökonomische Erscheinung im Laufe der Zeit ohne Schwankungen. Die Schwankungen in einer Zeitreihe können verschiedene Ursachen haben. So werden z. B. die landwirtschaftliche Produktion, die Produktion der Bauindustrie, der Einzelhandelsumsatz durch die Jahreszeit beeinflusst, d. h., es können jahreszeitlich bedingte Schwankungen auftreten. Trotz mehr oder weniger starker Schwankungen ist aber in den Zeitreihen oft eine Grundtendenz, eine Grundrichtung in der Entwicklung erkennbar. So sind z. B. in den jährlichen Transportmengen gewisse Schwankungen feststellbar. Dennoch läßt die Abbildung erkennen, daß sich die Transportmenge ständig erhöht hat, daß also eine Grundtendenz des Steigens vorliegt.

Definition 2 *Die in einer statistischen Reihe enthaltene Grundtendenz, Grundrichtung der Entwicklung, wird als Trend² bezeichnet.*

So kann der Trend ermittelt werden für das gesellschaftliche Gesamtprodukt, das Nationaleinkommen, das Investitionsvolumen, die Arbeitsproduktivität, den Durchschnittslohn, die Spareinlagen je Kopf der Bevölkerung, die Selbstkosten, das Umsatzvolumen usw. Unsere Aufgabe besteht nun darin, den Trend statistisch zu bestimmen. Hierzu sind mehrere statistische Methoden entwickelt worden, von denen wir im folgenden nur die Bestimmung von Trendfunktionen beschreiben.

Eine *Trendfunktion* ist eine Funktion, die den Trend einer statistischen Zeitreihe richtig widerspiegelt. Das wird meist dann erreicht, wenn sich die Trendfunktion den gegebenen empirischen Daten möglichst gut anpaßt. Die Gleichung der Trendfunktion ist der analytische Ausdruck für den Trend.

Festlegung des Typs der Trendfunktion

Soll die Trendfunktion den in einer statistischen Reihe enthaltenen Trend richtig widerspiegeln, so ist zunächst zu klären, welcher Funktionstyp für die Trendfunktion zu verwenden ist.

In Abbildung 2.6 liegen die empirischen Werte der Transportmenge annähernd auf einer Geraden. Daher wählen wir zur Darstellung des Trends für die Transportmenge eine lineare Funktion.

Lineare Funktionen haben Funktionsgleichungen der Form $y = b_0 + b_1x$. In einer Trendfunktion ist die abhängige Veränderliche y die jeweilige betrachtete Erscheinung, in unserem Falle die Transportmenge; die unabhängige Veränderliche x ist die Zeit. Bei Trendfunktionen ist folglich y stets eine Funktion der Zeit.

Nicht immer läßt sich der Trend in einer statistischen Zeitreihe durch eine lineare Funktion ausdrücken. In manchen Fällen muß auf ganze rationale Funktionen höheren Grades, auf gebrochene rationale Funktionen, auf Exponentialfunktionen und andere Funktionstypen zurückgegriffen werden. Man sollte aber bemüht sein, möglichst einfache Funktionen zur Trendbestimmung zu verwenden, damit sie sich leicht bestimmen und handhaben lassen.

Die lineare Trendfunktion

Bei der Bestimmung der Trendfunktion geht es darum, deren Parameter numerisch zu bestimmen. Die lineare Trendfunktion $y = b_0 + b_1x$ hat die Parameter b_0 und b_1 , die so zu bestimmen sind, daß sich die Trendfunktion möglichst gut den gegebenen empirischen Daten anpaßt.

² Trend stammt aus dem Englischen und bedeutet Richtung, Verlauf.

Das wird zum Beispiel durch die *Methode der Summenpostulierung* erreicht, die wir hier behandeln.

Gegeben ist eine statistische Zeitreihe mit den Werten $s_1, s_2, \dots, s_n$, die für die Zeiträume oder Zeitpunkte $x_1, x_2, \dots, x_n$ ermittelt worden sind.

Verwenden wir als Trendfunktion die lineare Funktion $y = b_0 + b_1 x$, so sind die entsprechenden Werte der Trendfunktion (kurz als Trendwerte bezeichnet) folgendermaßen darstellbar:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_0 + b_1 x_1 \\ y_2 &= b_0 + b_1 x_2 \\ &\vdots \\ y_n &= b_0 + b_1 x_n \end{aligned}$$

Diese Trendwerte lassen sich den empirisch ermittelten Werten der Zeitreihe gegenüberstellen. Wir erhalten folgende Werte:

Empirische Werte	Trendwerte
s_1	$y_1 = b_0 + b_1 x_1$
s_2	$y_2 = b_0 + b_1 x_2$
$\vdots$	$\vdots$
s_n	$y_n = b_0 + b_1 x_n$

Um eine möglichst gute Anpassung der Trendfunktion an die empirischen Werte zu erreichen, fordern (postulieren) wir, daß die Summe der empirischen Werte gleich der Summe der Trendwerte ist. Da wir die Gleichheit der Summen fordern, wird diese Methode als *Methode der Summenpostulierung* bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i &= \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{oder} \\ \sum_{i=1}^n s_i &= nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned} \quad (I)$$

In Gleichung (I) sind die Parameter b_0 und b_1 unbekannt. Um die Parameter b_0 und b_1 eindeutig bestimmen zu können, benötigen wir eine zweite Gleichung. Wir erhalten sie, indem wir sämtliche Zeilen der ersten Gegenüberstellung mit x_i multiplizieren. Dadurch erhalten wir

$s_i x_i$	$y_i x_i$
$s_1 x_1$	$y_1 x_1 = b_0 x_1 + b_1 x_1^2$
$s_2 x_2$	$y_2 x_2 = b_0 x_2 + b_1 x_2^2$
$\vdots$	$\vdots$
$s_n x_n$	$y_n x_n = b_0 x_n + b_1 x_n^2$

Auch hierfür fordern wir wieder die Gleichheit folgender Summen:

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i \quad \text{oder}$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i = b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\text{II})$$

Damit haben wir eine zweite Gleichung erhalten, in der ebenfalls die Parameter b_0 und b_1 unbekannt sind.

Mit den beiden Gleichungen (I) und (II) liegt ein lineares Gleichungssystem vor, durch das die beiden Parameter b_0 und b_1 der Trendfunktion eindeutig bestimmt werden können. Die Auflösung des Gleichungssystems nach b_0 und b_1 ergibt:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n s_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n s_i x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (\text{III})$$

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n s_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n s_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (\text{IV})$$

Vereinfachte Berechnung der linearen Trendfunktion

1. Vereinfachungsmöglichkeit

Zur Berechnung der Trendfunktion und ihrer Parameter verwenden wir für die Zeitwerte x_i nicht die Jahreszahlen (allgemein die Zeitangaben selbst), sondern führen einfache Zahlen ein wie 1, 2, 3, Sie sind in der graphischen Darstellung bereits mit eingezeichnet. Diese Zahlen erleichtern die Bestimmung der Parameter b_0 und b_1 in den vorstehend entwickelten Formeln (III) und (IV).

2. Vereinfachungsmöglichkeit

Die Berechnung der Trendfunktion und ihrer Parameter läßt sich weiter vereinfachen, wenn wir die Zeitwerte x_i so wählen, daß die Summe der Zeitwerte Null ergibt, also

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Das wird folgendermaßen erreicht:

- a) Die Zeitreihe besteht aus einer ungeraden Zahl von Einzelwerten. In diesem Falle ist die Zahl der Einzelwerte n eine ungerade Zahl. Als Zeitwerte x_i setzen wir folgende Werte an:

$$-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2} + 1, -\frac{n-1}{2} + 2, \dots, -3, -2, -1, 0, \\ 1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$$

Das bedeutet: Dem an zentraler Stelle der statistischen Reihe stehenden Einzelwert ordnen wir als Zeitwert die Zahl Null zu und schreiten dann nach der einen Seite mit $-1, -2, -3, \dots$ und nach der anderen Seite der Zeitreihe mit $+1, +2, +3, \dots$ fort. Die Summe dieser Werte ist Null.

- b) Die Zeitreihe besteht aus einer geraden Zahl von Einzelwerten. In diesem Falle ist die Zahl der Einzelwerte n eine gerade Zahl. Als Zeitwert x_i setzen wir folgende Werte an:

$$-(n-1), -(n-3), -(n-5), \dots, -5, -3, -1, +1, +3, \dots, (n-5), (n-3), (n-1).$$

Das bedeutet: Von den beiden an zentraler Stelle der statistischen Zeitreihe stehenden Einzelwerten, die als Zeitwert x_i die Zahlen -1 und $+1$ zugeordnet erhalten, zählen wir nach der einen Seite mit $-3, -5, \dots$ und nach der anderen Seite mit $3, 5, \dots$ fort. Die Summe dieser Werte ist ebenfalls – wie beabsichtigt – Null.

Wenn erreicht werden kann, daß $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ ist, dann lassen sich die Formeln (III) und (IV) wesentlich vereinfachen. Setzen wir $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ in die Formeln (III) und (IV) ein, so erhalten wir:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n} \quad (V)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n s_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (VI)$$

Damit sind die Parameter b_0 und b_1 der Trendfunktion und folglich auch die Trendfunktion selbst bestimmt.

Jahr	Zeitwert x_i	Transportmenge in Mill. t s_i	$s_i x_i$	x_i^2
1	1	501	501	1
2	2	522	1 044	4
3	3	549	1 647	9
4	4	580	2 320	16
5	5	597	2 985	25
6	6	621	3 726	36
7	7	625	4 375	49
$n = 7$	28	3 995	16 598	140
	$= \sum_{i=1}^7 x_i$	$= \sum_{i=1}^7 s_i$	$= \sum_{i=1}^7 s_i x_i$	$= \sum_{i=1}^7 x_i^2$

Auf Grund der Formeln (III) bzw. (IV) erhalten wir:

$$b_0 = \frac{3\,995 \cdot 140 - 28 \cdot 16\,598}{7 \cdot 140 - 28^2} = \frac{94\,556}{196} = 482,4$$

$$b_1 = \frac{7 \cdot 16\,598 - 28 \cdot 3\,995}{7 \cdot 140 - 28^2} = \frac{4\,326}{196} = 22,1;$$

Als Trendfunktion erhalten wir folglich: $y = 482,4 + 22,1 x$:

Mit Hilfe dieser Trendfunktion sind durch Einsetzen der Zeitwerte die Trendwerte berechenbar. Wir erhalten zum Beispiel:

Trendwert für das Jahr 1

$$y_1 = 482,4 + 22,1x_1 = 482,4 + 22,1 \cdot 1 = 504,5;$$

Trendwert für das Jahr 2

$$y_2 = 482,4 + 22,1x_2 = 482,4 + 22,1 \cdot 2 = 526,6;$$

Trendwert für das Jahr 7

$$y_7 = 482,4 + 22,1x_7 = 482,4 + 22,1 \cdot 7 = 637,1;$$

Diese Trendwerte liegen auf einer Geraden, die sich gut den empirischen Angaben über die Transportmengen anpaßt.

Wir zeigen nun die Berechnung der Trendfunktion für die gleichen Angaben über die Transportmengen aus Beispiel 1 mit Hilfe der zweiten Vereinfachungsmöglichkeit.

Jahr	Zeitwert	Transportmenge in Mill. t	$s_i x_i$	x_i^2
	x_i	s_i		
1	— 3	501	— 1 503	9
2	— 2	522	— 1 044	4
3	— 1	549	— 549	1
4	0	580	0	0
5	+ 1	597	+ 597	1
6	+ 2	621	+ 1 242	4
7	+ 3	625	+ 1 875	9
$n = 7$	0	3 995	618	28
	$= \sum_{i=1}^7 x_i$	$= \sum_{i=1}^7 s_i$	$= \sum_{i=1}^7 s_i x_i$	$= \sum_{i=1}^7 x_i^2$

Auf Grund der Formeln (V) bzw. (VI) erhalten wir

$$b_0 = \frac{3\,995}{7} = 570,7$$

$$b_1 = \frac{618}{28} = 22,1.$$

Als Trendfunktion erhalten wir jetzt $y = 570,7 + 22,1x$.

Mit Hilfe dieser Funktion erhalten wir durch Einsetzen der Zeitwerte folgende Werte:

Trendwert für das Jahr 1

$$y_1 = 570,7 + 22,1x_1 = 570,7 + 22,1 \cdot (-3) = 504,4$$

Trendwert für das Jahr 2

$$y_2 = 570,7 + 22,1x_2 = 570,7 + 22,1 \cdot (-2) = 526,5.$$

Trendwert für das Jahr 7

$$y_7 = 570,1 + 22,1x_7 = 570,7 + 22,1 \cdot 3 = 637,0.$$

Es ergeben sich also die gleichen Trendwerte wie bei der ersten Vereinfachungsmöglichkeit. Die Differenzen sind auf Rundungen zurückzuführen.

Zur Kontrolle können wir überprüfen, ob die anfangs geforderte Summengleichheit

$$\sum_i s_i = \sum_i y_i$$

erreicht worden ist:

$$\sum_i s_i = 3\,995 \quad \text{und} \quad \sum_i y_i = 3\,994,9$$

Die Differenz zwischen den Summen ist durch Rundungen bedingt.

Die ermittelte Trendfunktion drückt die Grundrichtung, die Grundtendenz in der Entwicklung der Transportmenge ohne jede Schwankung aus. Die Trendfunktionswerte geben demnach jene Entwicklung an, die aufgetreten wäre, wenn keinerlei Schwankungen vorhanden gewesen wären. Daher gestatten die Trendwerte, die theoretische Werte sind, auch die Schwankungen und das Ausmaß der Schwankungen in statistischen Zeitreihen zu untersuchen. Führen wir die Zeitreihe über den letzten vorhandenen Zeitraum hinaus (in unserem Beispiel über das Jahr 7), so können wir durch Einsetzen der diesen Zeiträumen entsprechenden Zeitwerte in die Trendfunktion auch Trendwerte für die folgenden Zeiträume ermitteln. Diese Trendwerte der Folgezeiträume lassen sich auch für die Wirtschaftsplanung verwenden.

Die quadratische Trendfunktion

Die graphische Darstellung einer ökonomischen Erscheinung läßt im allgemeinen erkennen, ob sie sich linear oder nichtlinear entwickelt. Bei nichtlinearer Entwicklung kann das Wachstum bestimmter ökonomischer Erscheinungen durch eine quadratische Trendfunktion zum Ausdruck gebracht werden. So kann z. B. die Entwicklung der Industrieproduktion der DDR oder der Arbeitsproduktivität verschiedener Industriebetriebe oder die Entwicklung des Geld- und Kreditvolumens mit Hilfe einer quadratischen Funktion als Funktion der Zeit nachgebildet werden.

Die quadratische Trendfunktion hat folgendes Aussehen:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (\text{VII})$$

Für diese Funktion sind nun, analog wie beim linearen Trend, die unbekannten Parameter a_0 , a_1 und a_2 so zu bestimmen, daß sich die quadratische Funktion möglichst gut den empirischen Daten anpaßt. Das wird wieder mit der Methode der Summenpostulierung erreicht, indem wir zunächst die empirischen Werte s_i den theoretischen Trendwerten y_i gegenüberstellen und für die Summe der empirischen Werte und der Trendwerte die Gleichheit fordern.

Dadurch erhalten wir das nachstehende Gleichungssystem:

$$\sum_{i=1}^n s_i = na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\text{VIII})$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 \quad (\text{IX})$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i^2 = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 \quad (\text{X})$$

Da alle Summen für $i = 1, 2, \dots, n$ gebildet werden, vernachlässigen wir aus Vereinfachungsgründen im folgenden die Angabe der Summationsgrenzen.

Im Gleichungssystem (VIII bis X) sind nur die Parameter a_0 , a_1 und a_2 unbekannt.

Als Lösung erhalten wir für a_0 :

$$a_0 = \frac{\sum s_i \sum x_i^2 \sum x_i^4 + \sum s_i x_i \sum x_i^3 \sum x_i^2 + \sum x_i \sum x_i^3 \sum s_i x_i^2 - \sum s_i x_i^2 \sum x_i^2 \sum x_i^2 - \sum s_i x_i \sum x_i \sum x_i^4 - \sum x_i^3 \sum x_i^3 \sum s_i}{n \sum x_i^2 \sum x_i^4 + \sum x_i \sum x_i^3 \sum x_i^2 + \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i^2 \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i \sum x_i^4 - n \sum x_i^3 \sum x_i^3} \quad (XI)$$

Für a_1 ergibt sich:

$$a_1 = \frac{n \sum s_i x_i \sum x_i^4 + \sum s_i \sum x_i^3 \sum x_i^2 + \sum x_i \sum s_i x_i^2 \sum x_i^2 - \sum x_i^2 \sum s_i x_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum s_i \sum x_i^4 - n \sum s_i x_i^2 \sum x_i^3}{n \sum x_i^2 \sum x_i^4 + \sum x_i \sum x_i^3 \sum x_i^2 + \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i^2 \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i \sum x_i^4 - n \sum x_i^3 \sum x_i^3} \quad (XII)$$

Für a_2 ergibt sich:

$$a_2 = \frac{n \sum x_i^2 \sum s_i x_i^2 + \sum x_i \sum s_i x_i \sum x_i^2 + \sum x_i \sum x_i^3 \sum s_i - \sum x_i^2 \sum x_i^2 \sum s_i - \sum x_i \sum x_i \sum s_i x_i^2 - \sum x_i^3 \sum s_i x_i \cdot n}{n \sum x_i^2 \sum x_i^4 + \sum x_i \sum x_i^3 \sum x_i^2 + \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i^2 \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i \sum x_i^4 - n \sum x_i^3 \sum x_i^3} \quad (XIII)$$

Beachten wir nun die 2. Vereinfachungsmöglichkeit, nach der wir die Zeitwerte so transformieren, daß die Summe der Zeitwerte Null ergibt, also $\sum x_i = \sum x_i^3 = 0$, dann erhalten wir für a_0 , a_1 und a_2 nach entsprechender Kürzung folgende Formel:

$$a_0 = \frac{\sum s_i \sum x_i^4 - \sum s_i x_i^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^4 - \sum x_i^2 \sum x_i^2} \quad (XIV)$$

$$a_1 = \frac{\sum s_i x_i}{\sum x_i^2} \quad (XV)$$

$$a_2 = \frac{n \sum s_i x_i^2 - \sum x_i^2 \sum s_i}{n \sum x_i^4 - \sum x_i^2 \sum x_i^2} \quad (XVI)$$

Mit a_0 , a_1 und a_2 ist die quadratische Trendfunktion eindeutig bestimmt, und wir können diese Funktion nun, ähnlich wie die lineare Trendfunktion, zur Darstellung des quadratischen Trends, zur Untersuchung von Schwankungen der Zeitreihe sowie für die Wirtschaftplanung verwenden.

Jahr	Zeitwert	Produktion in Mill. M				
	x_i	s_i	x_i^2	$s_i x_i^2$	x_i^4	$s_i x_i$
1	— 2	15	4	60	16	— 30
2	— 1	20	1	20	1	— 20
3	0	21	0	0	0	0
4	1	30	1	30	1	30
5	2	40	4	160	16	80
	0	126	10	270	34	60

Für die Parameter a_0 , a_1 und a_2 erhalten wir auf Grund der Formeln (XIV) bis (XVI) folgende Ergebnisse:

$$a_0 = \frac{126 \cdot 34 - 270 \cdot 10}{5 \cdot 34 - 10^2} = 22,63$$

$$a_1 = \frac{60}{10} = 6$$

$$a_2 = \frac{5 \cdot 270 - 126 \cdot 10}{5 \cdot 34 - 10^2} = 1,285$$

Damit hat die Trendfunktion folgendes Aussehen:

$$y = 22,63 + 6x + 1,285x^2$$

Mittels dieser Trendfunktion können wir die Trendwerte bestimmen. Sie sind (Ergebnis in Mill. M):

$$y_{-2} = 22,63 + 6(-2) + 1,285(-2)^2 = 15,77$$

$$y_{-1} = 22,63 + 6(-1) + 1,285(-1)^2 = 17,92$$

$$y_0 = 22,63 + 6 \cdot 0 + 1,285 \cdot 0 = 22,63$$

$$y_1 = 22,63 + 6 \cdot 1 + 1,285 \cdot 1 = 29,92$$

$$y_2 = 22,63 + 6 \cdot 2 + 1,285 \cdot 2^2 = 39,77$$

Wir überprüfen, ob wir die Trendwerte richtig berechnet haben und ob die anfangs geforderte Summengleichheit erreicht worden ist:

$$\Sigma s_i = 126; \quad \Sigma y_i = 126,01 \quad (0,01 \text{ Rundungsdifferenz})$$

Diese Werte können zur Untersuchung von Schwankungen in der Zeitreihe verwendet werden. Wird unterstellt, daß sich die Entwicklungsbedingungen der Warenproduktion in den nächsten Jahren nicht verändern, so läßt sich z. B. ein Wert für das Jahr 7 wie folgt berechnen (Ergebnis in Mill. M):

$$y_4 = 22,63 + 6 \cdot 4 + 1,285 \cdot 4^2 = 67,2.$$

Dieser Wert kann für die Entscheidungsfindung über die Entwicklung der Warenproduktion mit verwendet werden.

Aufgaben zu 2.5.

1

Das Nationaleinkommen hat sich in den letzten 11 Jahren folgendermaßen entwickelt (in Md. M):

Jahr		Jahr		Jahr	
1	50,0	5	67,5	9	76,7
2	52,3	6	70,5	10	80,4
3	56,0	7	72,9	11	83,1
4	62,0	8	74,4		

- Stellen Sie die statistische Zeitreihe graphisch dar!
- Berechnen Sie die lineare Trendfunktion entsprechend der ersten Vereinfachungsmöglichkeit!
- Berechnen Sie die Trendwerte nach der ersten Vereinfachungsmöglichkeit!
- Berechnen Sie die lineare Trendfunktion und die Trendwerte nach der zweiten Vereinfachungsmöglichkeit!
- Tragen Sie die Trendwerte in die graphische Darstellung ein!
(L b, c)

2

Das durchschnittliche monatliche Arbeitseinkommen der Arbeiter und Angestellten betrug (in M):

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8
	494	531	555	578	583	593	610	633

- Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar!
- Berechnen Sie die lineare Trendfunktion mit Hilfe der zweiten Vereinfachungsmöglichkeit!
- Berechnen Sie die Trendwerte!
- Stellen Sie die Trendwerte graphisch dar!
(L b, c)

3

Die Spareinlagen je Kopf der Bevölkerung betrugen (in M):

Jahr	1	2	3	4	5	6
	992	1 151	1 226	1 342	1 563	1 776

- Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar!
- Berechnen Sie die lineare Trendfunktion!
- Berechnen Sie die Trendwerte, und tragen Sie diese Werte in die graphische Darstellung der Zeitreihe ein!
(L b, c)

4

Der Bestand an Kühen (in 1 000 St.) betrug:

Jahr		Jahr		Jahr	
0	1 616,4	6	2 115,0	11	2 170,2
1	1 806,3	7	2 112,8	12	2 092,3
2	1 993,3	8	2 133,7	13	2 102,2
3	2 018,7	9	2 157,5	14	2 132,0
4	2 055,9	10	2 175,1	15	2 168,6
5	2 100,1				

- a) Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar!
- b) Berechnen Sie die lineare Trendfunktion!
- c) Berechnen Sie die Trendwerte, und tragen Sie diese Werte in die graphische Darstellung ein! (L b, c)

5

Für die industrielle Bruttonproduktion ergibt sich folgender Produktionsindex:

Jahr	0	1	2	3	4	5
%	100,0	106,5	113,0	117,8	125,7	133,6

- a) Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar!
- b) Berechnen Sie die lineare Trendfunktion!
- c) Berechnen Sie die Trendwerte, und tragen Sie diese Werte in die graphische Darstellung ein! (L b, c)

6

Ein volkseigener Betrieb weist über seine Arbeitsproduktivität folgende Zahlen aus:

Jahr	Arbeitsproduktivität in St./Std.	Jahr	Arbeitsproduktivität in St./Std.
1	50	5	72
2	52	6	82
3	58	7	95
4	65		

- a) Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar!
- b) Berechnen Sie die quadratische Trendfunktion!
- c) Berechnen Sie die Trendwerte, und tragen Sie die Trendwerte in die graphische Darstellung ein! (L b, c)

7

Ein Verkehrsbetrieb hat folgende Daten über seine Verkehrsleistungen erfaßt:

Jahr	Verkehrsleistungen in Mill. M	Jahr	Verkehrsleistungen in Mill. M
1	10	5	28
2	12	6	38
3	15	7	50
4	20	8	70

- a) Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar!
- b) Berechnen Sie den quadratischen Trend!
- c) Berechnen Sie die Trendwerte, und tragen Sie die Trendwerte in die graphische Darstellung ein!
- d) Berechnen Sie den Trendwert für die Jahre 9 und 10, und schätzen Sie die Ergebnisse ein! (L b, c, d)

3.

Matrizenrechnung

In der Planung treten häufig lineare Beziehungen zwischen abhängigen Größen auf. Ein gutes Hilfsmittel für die Darstellung solcher Beziehungen ist die Matrizenrechnung. Sie erlaubt Vereinfachungen und Schematisierungen im Rechenablauf, so daß für die Berechnung vorteilhaft Rechenautomaten eingesetzt werden können. Dadurch kann die Planungsarbeit rationalisiert werden. Außerdem ermöglicht die Matrizenrechnung, komplizierte Zusammenhänge übersichtlich darzustellen.

Den Vektor führen wir als eine spezielle Matrix ein, so daß in diesem Abschnitt die Vektorrechnung als Spezialfall der Matrizenrechnung behandelt wird.

Im Physikunterricht haben Sie bereits den Vektor als eine gerichtete Größe kennengelernt (z. B. Kraft, Geschwindigkeit usw.), die durch einen Pfeil dargestellt wird. Statt durch einen Pfeil kann ein Vektor aber auch durch eine Menge von Zahlen dargestellt werden. Für die Anwendung der Vektoren in der Ökonomie ist die Pfeildarstellung nicht ausreichend. Deshalb verwenden wir an dieser Stelle nur die Darstellung durch eine Menge von Zahlen.

3.1.

Begriff und Definitionen

1

Für die Fertigung von drei Erzeugnissen benötigen wir vier Maschinen. Die Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit und die Maschinenzeitfonds sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Tabelle 3.1

Maschine	Maschinenzeit (in Zeiteinheiten) je Einheit des Erzeugnisses			Maschinenzeitfonds in Zeiteinheiten
	1	2	3	
1	2	4	3	500
2	3	6	9	600
3	5	2	4	1 000
4	7	1	7	750

Die Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit können wir im rechteckigen Zahlenschema

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

erfassen. Ein solches rechteckiges Zahlenschema nennen wir eine Matrix.

Definition 1 Wir bezeichnen das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

als eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder als eine $m \cdot n$ -Matrix. Die reellen Zahlen dieses Schemas nennen wir die Elemente der Matrix.

Jedem Element sind zwei Indizes zugeordnet. Der erste Index nennt die Zeile, der zweite Index die Spalte, in der das Element steht. Das allgemeine Element a_{ij} steht in der Zeile i und in der Spalte j .

2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

ist eine $4 \cdot 3$ -Matrix, denn sie besitzt 4 Zeilen und 3 Spalten. Das Element a_{23} ist 9, das Element a_{41} ist 7.

Matrizen werden in der Literatur zum Teil mit großen Frakturbuchstaben bezeichnet. In diesem Lehrbuch werden sie durch große fette lateinische Buchstaben dargestellt, zum Beispiel **A**, **B**. Wollen wir zum Ausdruck bringen, daß die Matrix **A** m Zeilen und n Spalten besitzt, so schreiben wir

$$\begin{matrix} \mathbf{A} : \\ (m, n) \end{matrix}$$

Oft verwenden wir auch die Bezeichnung

$$[a_{ij}]$$

In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß die a_{ij} die Elemente der Matrix sind.

Spezielle Matrizen

Wir lernen jetzt einige spezielle Matrizen kennen.

Definition 2 Eine Matrix, die nur eine Spalte besitzt, d. h. eine $m \cdot 1$ -Matrix, bezeichnen wir als Spaltenvektor.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ist ein Spaltenvektor mit m Komponenten:

Vektoren werden mitunter mit kleinen Frakturbuchstaben bezeichnet. In diesem Lehrbuch verwenden wir für den Spaltenvektor einen fetten kleinen lateinischen Buchstaben. Oft verwenden wir für den Spaltenvektor auch die Bezeichnung $[b_i]$. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß die b_i die Komponenten des Vektors sind.

3

Im Beispiel 1 können wir die Maschinenzeitfonds als Spaltenvektor

$$\begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 1\,000 \\ 750 \end{bmatrix}$$

darstellen:

Definition 3 Eine Matrix, die nur eine Zeile besitzt, d. h. eine $1 \cdot n$ -Matrix, bezeichnen wir als Zeilenvektor.

$$\mathbf{k}^T = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n] \quad (\text{sprich: } \mathbf{k} \text{ transponiert})$$

ist ein Zeilenvektor mit n Komponenten.

Als Kurzzeichen für einen Zeilenvektor verwenden wir in diesem Lehrbuch einen fetten kleinen lateinischen Buchstaben mit hochgestelltem T. Oft verwenden wir für den Zeilenvektor auch die Bezeichnung $[k_j]^T$. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß die k_j die Komponenten des Vektors sind:

Das hochgestellte T ist eine Abkürzung für die Matrizenoperation Transponieren, auf die wir im Abschnitt 3.3. eingehen:

4

Im Beispiel 1 können wir die auf der Maschine 1 benötigte Maschinenzeit je Erzeugniseinheit als Zeilenvektor $[2 \ 4 \ 3]$ darstellen:

Definition 4 Eine $1 \cdot 1$ -Matrix bezeichnen wir als Skalar.

Der Skalar kann auch als Vektor mit einer Komponente aufgefaßt werden.

Der Skalar ist eine reelle Zahl, die wir durch einen kleinen griechischen oder lateinischen Buchstaben darstellen.

5

$$a = [3] = 3; \quad b = [-1,5] = -1,5.$$

Definition 5 Eine Nullmatrix hat als Elemente nur Nullen.

Wir bezeichnen die Nullmatrix mit $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Definition 6 Eine Matrix, in der die Zeilenzahl mit der Spaltenzahl übereinstimmt, heißt quadratische Matrix.

Eine quadratische Matrix kann durch $\mathbf{A}$ oder $\mathbf{A}$ mit $m = n$ dargestellt werden.

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt Matrix n -ter Ordnung;

$$\mathbf{A}_{(n, n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Die Elemente einer quadratischen Matrix, bei denen jeweils der Zeilenindex mit dem Spaltenindex übereinstimmt, heißen Diagonalelemente der quadratischen Matrix. Das sind die Elemente a_{ii} oder a_{ij} mit $i = j$, also $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.

6

Die Matrix

$$\mathbf{A}_{(3, 3)} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ist eine quadratische Matrix dritter Ordnung. Ihre Diagonalelemente sind

$$a_{11} = 3; \quad a_{22} = -1; \quad a_{33} = -2.$$

Definition 7 Eine quadratische Matrix, deren Nicht-Diagonalelemente alle Null sind, heißt Diagonalmatrix.

Eine Diagonalmatrix kennzeichnen wir durch einen großen Buchstaben mit dem Index d .

$\mathbf{A}_d$ sagt also aus, daß die Matrix $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A_d = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Für eine Diagonalmatrix A_d gilt also

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

7

Die Matrix $A_d = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

Definition 8 Eine quadratische Matrix, deren Diagonalelemente alle 1 sind, während alle anderen Elemente 0 sind, heißt Einheitsmatrix.

Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit E .

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Einheitsmatrix ist also eine spezielle Diagonalmatrix mit $a_{ii} = 1$ ($i = 1, \dots, n$).

8

Die Einheitsmatrix dritter Ordnung hat folgende Gestalt:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition 9 Der Nullvektor ist ein Vektor, dessen Komponenten alle Null sind.

Wir schreiben dafür

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{o}^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0];$$

Definition 10 Der summierende Vektor ist ein Vektor, dessen Komponenten alle Eins sind.

Wir schreiben dafür

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{s}^T = [1 \ 1 \ \cdots \ 1];$$

Definition 11 Ein Einheitsvektor ist ein Vektor, dessen eine Komponente Eins ist, während alle anderen Komponenten Null sind.

Ist nur eine Komponente vorhanden, so muß sie Eins sein:

Wir stellen Einheitsvektoren durch ein e mit einem Index i dar, also e_i . Der Index i gibt an, an welcher Stelle die Eins steht.

9

So schreiben wir die Einheitsvektoren mit drei Komponenten

$$\text{als } e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{bzw. } e_1^T = [1 \ 0 \ 0]; \quad e_2^T = [0 \ 1 \ 0]; \quad e_3^T = [0 \ 0 \ 1].$$

Darstellung von Matrizen mit Hilfe von Vektoren

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, wie man Matrizen mit Hilfe von Vektoren darstellen kann. Dazu betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Jede Zeile dieser Matrix können wir als Zeilenvektor schreiben; die erste Zeile als a_1^T , die zweite Zeile als a_2^T usw.

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } a_1^T = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]; \ a_2^T = [a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{2n}]; \ \cdots;$$

$$a_m^T = [a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}].$$

Jede Spalte der Matrix A können wir als Spaltenvektor schreiben; die erste Spalte als c_1 , die zweite Spalte als c_2 usw.

$$A = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$$

$$\text{mit } c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad \cdots; \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Die Nullmatrix läßt sich mit Hilfe von Nullvektoren darstellen;

$$\mathbf{0} = [\mathbf{o} \ \mathbf{o} \ \cdots \ \mathbf{o}] = \begin{bmatrix} \mathbf{o}^T \\ \vdots \\ \mathbf{o}^T \end{bmatrix}$$

Die Einheitsmatrix läßt sich mit Hilfe der Einheitsvektoren darstellen,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n]$$

3.2. Relationen

3.2.1. Gleichheit von Matrizen

Definition 1 *Zwei Matrizen A und B heißen genau dann gleich, wenn beide Matrizen die gleiche Zeilen- und Spaltenzahl besitzen und wenn außerdem sämtliche einander entsprechenden Elemente gleich sind. (Einander entsprechende Elemente stimmen in ihren Zeilenindizes und in ihren Spaltenindizes überein.)*

Wir schreiben dann $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ mit $\mathbf{A}_{(m_1, n_1)}$ und $\mathbf{B}_{(m_2, n_2)}$ ist gleichbedeutend mit

a) $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$
(Wir schreiben $m_1 = m_2 = m$ und $n_1 = n_2 = n$)

und

b) $a_{11} = b_{11}; \ a_{12} = b_{12}; \ \cdots; \ a_{1n} = b_{1n}$
 $a_{21} = b_{21}; \ a_{22} = b_{22}; \ \cdots; \ a_{2n} = b_{2n}$
 $\vdots$
 $a_{m1} = b_{m1}; \ a_{m2} = b_{m2}; \ \cdots; \ a_{mn} = b_{mn};$

allgemein $a_{ij} = b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$,
wenn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

und

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

1

Gegeben sind die Matrizen

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{3} & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Aus $X = A$ folgt

$$x_{11} = 3; \quad x_{12} = 4; \quad x_{13} = -1; \quad x_{14} = 2$$

$$x_{21} = 6; \quad x_{22} = 1; \quad x_{23} = -\frac{1}{2}; \quad x_{24} = 5$$

$$x_{31} = \frac{1}{3}; \quad x_{32} = 0; \quad x_{33} = 10; \quad x_{34} = 3;$$

Die angegebene Definition der Gleichheit von Matrizen gilt auch für Vektoren, die ja spezielle Matrizen sind. Zwei Vektoren können nur dann gleich sein, wenn sie beide Zeilen- oder beide Spaltenvektoren sind.

Ist $a = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ und $b = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T$, so bedeutet $a = b$, daß $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ ist.

2

Die Vektoren $a_1^T = [2 \ -3 \ 4]$ und $a_2^T = [-3 \ 2 \ 4]$ haben die gleichen Komponenten 2; -3; 4, aber die entsprechenden Komponenten sind nicht alle gleich:

$$\begin{array}{rcl} 2 & \neq & -3 \\ -3 & \neq & 2 \\ 4 & = & 4 \end{array}$$

Also sind die beiden Vektoren nicht gleich;

3

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$

$$\text{und } \mathbf{a}^T = \left[2 \ -1 \ \frac{1}{2} \ 50 \right].$$

Aus $\mathbf{x}^T = \mathbf{a}^T$ folgt, daß $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 50$ ist:

4

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ und der Nullvektor $\mathbf{o}$.
 $\mathbf{x}^T = \mathbf{o}^T$ ist gleichbedeutend mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

5

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$

$$\text{und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -17 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ist gleichbedeutend mit

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 5 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = & -17 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 & = & 9. \end{array}$$

Die Vektorgleichung

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -17 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ist eine andere Darstellung des Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen.

Satz 1

Eigenschaften der Matrizengleichheit

Die Matrizengleichheit ist reflexiv, d. h. $\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Die Matrizengleichheit ist symmetrisch, d. h., aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Die Matrizengleichheit ist transitiv, d. h., aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ folgt $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.

3.2.2. Ungleichheit von Matrizen

In der Praxis unseres wirtschaftlichen Lebens treten neben Gleichheitsbeziehungen sehr häufig Ungleichheitsbeziehungen zwischen ökonomischen Größen auf. Deshalb kommt der Lehre von den Ungleichheitsbeziehungen bei der Anwendung der Mathematik in der Wirtschaft mindestens ebenso große Bedeutung zu wie der Lehre von den Gleichheitsbeziehungen.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nur mit den Ungleichheitsbeziehungen und mit den dafür verwendeten Symbolen. In einem später folgenden Abschnitt behandeln wir das Rechnen mit Ungleichheitsbeziehungen und das Lösen von Ungleichungssystemen.

Bevor wir jetzt die Ungleichheit von Matrizen betrachten; werden wir die Ungleichheit von reellen Zahlen behandeln, um dann die Ungleichheit von Matrizen auf die Ungleichheit der reellen Zahlen zurückführen zu können.

Ungleichheit von reellen Zahlen

Für die Behandlung von Ungleichungen benötigen wir die folgenden Beziehungen:

- $a \neq b$ bedeutet, daß a verschieden von b ist;
- $a < b$ bedeutet, daß a kleiner ist als b bzw. b größer ist als a ;
- $a > b$ bedeutet, daß a größer ist als b bzw. b kleiner ist als a ;
- $a \leq b$ bedeutet, daß a entweder kleiner ist als b oder gleich b ist:
Wir sagen auch, daß a höchstens gleich b ist oder daß a nicht größer als b ist.
- $a \geq b$ bedeutet, daß a entweder größer ist als b oder gleich b ist:
Wir sagen auch, daß a mindestens gleich b ist oder daß a nicht kleiner als b ist.

6

Wir betrachten in einem Industriebetrieb die Normerfüllung zweier Brigaden. Die Norm sieht je Brigade und Tag die Produktion von 100 Einheiten eines Erzeugnisses vor. Die tatsächlichen Produktionsstückzahlen zeigen folgenden Stand:

Tabelle 3.3

Brigade	Produktion am	
	1. Tag	2. Tag
A	100	110
B	90	100

Wir bezeichnen die Tagesproduktion der Brigade A mit a , die der Brigade B mit b und die laut Norm vorgesehenen Produktionsstückzahlen mit n .

Dann gilt am ersten Tag $a = n$,

am zweiten Tag $a \neq n$, genauer $a > n$:

Wollen wir ein Urteil über die tägliche Normerfüllung der Brigade A für den gesamten betrachteten Zeitraum abgeben, so können wir feststellen, daß $a \geq n$ gilt.

Die Brigade B hat am ersten Tag weniger hergestellt, als die Norm vorsah, es gilt $b < n$.

Für den zweiten Tag gilt $b = n$.

Das Gesamturteil über die tägliche Normerfüllung der Brigade B lautet $b \leq n$.

Ungleichheit von Matrizen

Definition 2 Eine Matrix A heißt genau dann kleiner als eine Matrix B, wenn beide Matrizen die gleiche Zeilen- und Spaltenzahl besitzen und wenn die Elemente von A jeweils kleiner sind als die entsprechenden Elemente von B. Wir schreiben dann $A < B$:

$A < B$ mit A und B ist gleichbedeutend mit

$$\begin{matrix} (m_1, n_1) & (m_2, n_2) \end{matrix}$$

a) $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$
(Wir schreiben $m_1 = m_2 = m$ und $n_1 = n_2 = n$) und

b) $a_{11} < b_{11}; a_{12} < b_{12}; \dots; a_{1n} < b_{1n}$
 $a_{21} < b_{21}; a_{22} < b_{22}; \dots; a_{2n} < b_{2n}$
 $\dots \dots \dots$
 $a_{m1} < b_{m1}; a_{m2} < b_{m2}; \dots; a_{mn} < b_{mn}$

allgemein $a_{ij} < b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1; \dots, n$, wenn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ist $A < B$, so sagt man auch, B sei größer als A und schreibt dafür $B > A$.

7

Gegeben sind $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 2,9 & -10 \\ 0 & -2 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$.

Es gilt nicht $A < B$, aber $B < A$ oder $A > B$, denn es ist

$$1 < 2; \quad 2,9 < 3; \quad -10 < -4$$

$$0 < 1; \quad -2 < 0; \quad \frac{1}{10} < \frac{1}{2};$$

Die angegebene Kleiner-Beziehung von Matrizen gilt auch für Vektoren.

Ist $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ und $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T$, so ist $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ gleichbedeutend mit $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$.

8

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = [2 \ -1 \ 3,49]^T$; $\mathbf{b} = \left[3 - \frac{1}{2} \ 3,5\right]^T$.

Es gilt $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, denn $2 < 3$; $-1 < -\frac{1}{2}$; $3,49 < 3,5$.

9

$\mathbf{a} = [2 \ -1 \ 3,5]^T$; $\mathbf{b} = \left[3 - \frac{1}{2} \ 3,5\right]^T$

Es gilt nicht, daß $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ ist, denn es ist zwar $2 < 3$; $-1 < -\frac{1}{2}$; aber es gilt $3,5 = 3,5$.

10

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$

$\mathbf{x} > \mathbf{o}$ bringt zum Ausdruck, daß $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $x_3 > 0$; $x_4 > 0$, das heißt, daß alle Komponenten von $\mathbf{x}$ positiv sind.

Definition 3 Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt genau dann kleiner oder gleich Matrix $\mathbf{B}$, wenn beide Matrizen die gleiche Zeilen- und Spaltenzahl besitzen und wenn die Elemente von $\mathbf{A}$ kleiner oder gleich den entsprechenden Elementen von $\mathbf{B}$ sind. Wir schreiben dann $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$.

$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ mit $\mathbf{A} \underset{(m_1, n_1)}{\text{und}} \mathbf{B} \underset{(m_2, n_2)}{\text{ist gleichbedeutend mit}}$

a) $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$

(Wir schreiben $m_1 = m_2 = m$ und $n_1 = n_2 = n$)

und

b) $a_{11} \leq b_{11}$; $a_{12} \leq b_{12}$; $\dots$; $a_{1n} \leq b_{1n}$

$a_{21} \leq b_{21}$; $a_{22} \leq b_{22}$; $\dots$; $a_{2n} \leq b_{2n}$

$\dots \dots \dots$

$a_{m1} \leq b_{m1}$; $a_{m2} \leq b_{m2}$; $\dots$; $a_{mn} \leq b_{mn}$;

allgemein

$a_{ij} \leq b_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, wenn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ist $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, so sagt man auch, $\mathbf{B}$ sei größer oder gleich $\mathbf{A}$ und schreibt dafür $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$.

11

Gegeben sind $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.

Es gilt nicht $A < B$, denn es ist zwar $0 < 1$; $4 < 5$; $2 < 4$; $3 < 7$; $-4 < -3$, aber es ist $6 = 6$; folglich gilt $A \leq B$.

Die angegebene Kleiner-oder-gleich-Beziehung von Matrizen gilt auch für Vektoren.

Ist $a^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ und $b^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$, so ist $a \leq b$ gleichbedeutend mit $a_1 \leq b_1$; $a_2 \leq b_2$; $\dots$; $a_n \leq b_n$.

12

Für die Vektoren des Beispiels 9 gilt zwar nicht $a < b$, aber es gilt $a \leq b$.

13

$$x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$$

$x \geq 0$ bringt zum Ausdruck, daß $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$; das heißt, daß alle Komponenten von x nicht negativ sind.

14

$$a = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 55 \end{bmatrix}$$

$$a \geq b \text{ ist gleichbedeutend mit } \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &\geq 30 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &\geq 40 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 55. \end{aligned}$$

Gilt für beliebige Matrizen $A < B$, so gilt auch $A \leq B$. Wenn $A = B$ ist, so ist auch $A \leq B$.

Mit den aufgeführten Ungleichheitsbeziehungen sind noch nicht alle Möglichkeiten der Ungleichheit von Matrizen erfaßt.

Zwischen zwei reellen Zahlen (Skalaren) a und b gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$, das heißt, die reellen Zahlen sind geordnet. Für zwei beliebige Matrizen A und B gilt diese Aussage nicht;

Eigenschaften der Ungleichheitsbeziehungen

Satz 1

Die Kleiner-Beziehung zwischen Matrizen ist nicht symmetrisch, es gilt weder $A < A$ noch $A > A$.

Die Kleiner-Beziehung zwischen Matrizen ist nicht reflexiv, aus $A < B$ folgt nicht $B < A$.

Die Kleiner-Beziehung zwischen Matrizen ist transitiv, d. h., aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$.

Satz 2

Die Kleiner-oder-gleich-Beziehung zwischen Matrizen ist reflexiv, d. h.
 $A \leq A$.

Die Kleiner-oder-gleich-Beziehung zwischen Matrizen ist nicht symmetrisch,
 aus $A \leq B$ folgt nicht $B \leq A$.

Die Kleiner-oder-gleich-Beziehung zwischen Matrizen ist transitiv, d. h.;
 aus $A \leq B$ und $B \leq C$ folgt $A \leq C$.

Es gelten also nicht alle Eigenschaften der Gleichheitsbeziehungen für Ungleichheitsbeziehungen. Das müssen wir später bei der Behandlung von Ungleichungen und Ungleichungssystemen berücksichtigen.

Aufgaben zu 3.2.**1**

Welche Beziehungen bestehen zwischen a) $+2$ und $+4$; b) -2 und -4 ; c) $+3$ und -4 ; d) -3 und $+4$? (L)

2

Veranschaulichen Sie diese Beziehungen an der Zahlengeraden!

3

Stellen Sie unter Verwendung der eingeführten Symbole dar, welche Beziehungen zwischen den Produktionsstückzahlen der beiden im Beispiel 6 erwähnten Brigaden am ersten und zweiten Tag bestehen! (L)

4

a) Schreiben Sie die Vektorgleichung $a = b$ mit

$$a = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} -14 \\ 13 \end{bmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen!

b) Stellen Sie die Variablen dieses Gleichungssystems als Vektor dar! (L)

5

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -\frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= -\frac{9}{2} \end{aligned} \right\}$$

als Vektorgleichung!

b) Stellen Sie die Variablen dieses Gleichungssystems als Vektor dar! (L)

6

Bringen Sie mit Hilfe von Vektoren zum Ausdruck, daß die Zahlen $x_1 > 5$; $x_2 > 3$; $x_3 > 1$ sein sollen! (L)

7

Bringen Sie mit Hilfe von Vektoren zum Ausdruck; daß x_1 kleiner als 2, x_2 kleiner als -3 und x_3 kleiner als 0 sein sollen! (L)

8

Bringen Sie mit Hilfe von Vektoren zum Ausdruck, daß y_1 nicht kleiner als 7, y_2 nicht kleiner als 3 und y_3 nicht kleiner als 10 sein sollen! (L)

9

Bringen Sie mit Hilfe von Vektoren zum Ausdruck, daß x_1 , x_2 , x_3 , x_4

- a) positive Zahlen,
- b) nichtnegative Zahlen;
- c) negative Zahlen,
- d) nichtpositive Zahlen sein sollen! (L)

10

Bringen Sie mit Hilfe von Vektoren zum Ausdruck, daß z_1 größer als -5 und nicht größer als 12, z_2 größer als 8 und nicht größer als 100, z_3 größer als 0 und nicht größer als 15, z_4 größer als $-\frac{1}{2}$ und nicht größer als 2 sein sollen! (L)

11

Bei der Planung der Maschinenbelastung für fünf Maschinen kann die benötigte Maschinenzeit durch einen Vektor t mit fünf Komponenten dargestellt werden, die zur Verfügung stehende Maschinenzeit ebenfalls durch einen Vektor f mit fünf Komponenten. Welche Beziehung muß zwischen t und f bestehen? (L)

12

Bei der Produktionsplanung kann die Produktionshöhe durch einen Vektor x , die Mindestmenge, die zu fertigen ist, durch einen Vektor m und die Höchstmenge, die abgesetzt werden kann, durch einen Vektor h dargestellt werden. Bei 150 Erzeugnissen haben alle drei Vektoren 150 Komponenten. Welche Beziehungen müssen zwischen den genannten Vektoren bestehen? (L)

13

Für die Fertigung von drei Erzeugnissen benötigen wir vier Maschinen. Die Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit und die Maschinenzeitfonds sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Maschine	Maschinenzeit (in Zeiteinheiten) je Einheit des Erzeugnisses			Maschinenzeitfonds in Zeiteinheiten
	1	2	3	
1	2	4	3	500
2	3	6	9	600
3	5	2	4	1 000
4	7	1	7	750

Bezeichnen wir die Produktionszahlen für die einzelnen Erzeugnisse mit x_1, x_2, x_3, x_4 , so muß ein zulässiger Produktionsplan folgende Bedingungen erfüllen:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 500$$

$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 600$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1\,000$$

$$7x_1 + 1x_2 + 7x_3 \leq 750$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Wir führen die folgenden Vektoren ein:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 7x_1 + 1x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 1\,000 \\ 750 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Wie kann man die obigen Bedingungen für den Produktionsplan mit Hilfe der genannten Vektoren darstellen? (L)

14

Bringen Sie mit Hilfe von Matrizen zum Ausdruck, daß die Elemente der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

folgende Bedingungen erfüllen sollen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & a_{11} < 7; \quad a_{12} < 3; \quad a_{13} < -2; \quad a_{14} < 0 \\ & a_{21} < 6; \quad a_{22} < -7; \quad a_{23} < 3; \quad a_{24} < 0,5 \\ & a_{31} < 2; \quad a_{32} < -10; \quad a_{33} < 1; \quad a_{34} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & a_{11} \geq -2; \quad a_{12} \geq 6; \quad a_{13} \geq 3; \quad a_{14} \geq 0 \\ & a_{21} \geq 10; \quad a_{22} \geq 3; \quad a_{23} \geq 17; \quad a_{24} \geq 12 \\ & a_{31} \geq 5; \quad a_{32} \geq \pi; \quad a_{33} \geq 0,7; \quad a_{34} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & a_{11} = 4; \quad a_{12} = 6; \quad a_{13} = -5; \quad a_{14} = -3 \\ & a_{21} = -5; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = -10; \quad a_{24} = 0 \\ & a_{31} = 15; \quad a_{32} = -15; \quad a_{33} = 25; \quad a_{34} = -11 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

Bringen Sie mit Hilfe von Matrizen zum Ausdruck, daß die Elemente der Matrix A aus Aufgabe 14

- a) positive Zahlen,
- b) nichtnegative Zahlen,
- c) negative Zahlen,
- d) nichtpositive Zahlen sein sollen! (L)

3.3.

Matrizenoperationen

Bisher haben wir den Begriff der Matrix (einschließlich Vektor) und Relationen zwischen Matrizen kennengelernt. Damit sind wir in der Lage, in vielen Fällen umfangreiche Zahlenmengen geordnet darzustellen und Beziehungen zwischen den so geordneten Zahlenmengen kurz zu formulieren. Das ist ein großer Vorteil der Matrizen. Hinzu kommt, daß wir mit Hilfe von Matrizen Verknüpfungen dieser Zahlenmengen ebenfalls übersichtlich darstellen können. In diesem Abschnitt werden wir uns mit solchen Verknüpfungen, die wir Operationen nennen, beschäftigen. Wir werden das Transponieren, die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen einführen.

3.3.1. Transponieren

1

Im Beispiel 1 des Abschnittes 3.1. können wir die Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit, die wir bereits in Tabelle 3.1 dargestellt haben, auch wie in Tabelle 3.2 schreiben.

Tabelle 3.2

		Maschine			
		1	2	3	4
Bearbeitungszeit (in	1	2	3	5	7
Maschinenzeiteinheiten)	2	4	6	2	1
je Einheit des Erzeug-	3	3	9	4	7
nisses					

Demnach lassen sich die Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit auch in Form der folgenden Matrix darstellen.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Vergleichen wir diese Matrix mit der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

die zur Tabelle 3.1 gehört, so stellen wir fest, daß beide Matrizen die gleichen Elemente besitzen, aber in anderer Anordnung. Die Zeilen (Spalten) der einen Matrix sind die Spalten (Zeilen) der anderen Matrix. Wir sagen, daß die Matrix A die transponierte Matrix zu B ist oder umgekehrt.

Definition 1 *Unter der transponierten Matrix A^T einer gegebenen Matrix A verstehen wir die Matrix, die entsteht, wenn wir die Zeilen (Spalten) von A als Spalten (Zeilen) schreiben. (sprich: A transponiert)*
(Das hochgestellte T deutet das Transponieren an.)

$$\text{Ist } A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

so ist die transponierte Matrix

$$A^T = (a_{ji}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

Die transponierte Matrix von A^T ist wieder A .

$$(A^T)^T = A$$

Ist A eine $m \cdot n$ -Matrix, so ist A^T eine $n \cdot m$ -Matrix.

Unter dem Transponieren von Vektoren verstehen wir die Umformung eines Spaltenvektors in einen Zeilenvektor bzw. die Umformung eines Zeilenvektors in einen Spaltenvektor.

Der transponierte Vektor zu

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ist } a^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n];$$

der transponierte Vektor zu a^T ist $(a^T)^T = a$.

Damit können wir den Spaltenvektor a auch in der Form

$a = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ darstellen, denn $[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ ist ja aus dem Zeilenvektor $[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ durch Transponieren hervorgegangen, ist also der Spaltenvektor

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix};$$

Die Darstellung eines Spaltenvektors $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ fügt sich besonders günstig in unser Schriftbild ein.

Jetzt wird auch verständlich, warum wir bei der Darstellung des Zeilenvektors in der Definition 3 des Abschnittes 3.1. ein hochgestelltes T benutzt haben. Es soll damit zum Ausdruck gebracht werden, daß ein transponierter Spaltenvektor, also ein Zeilenvektor, vorliegt.

Definition 2 Gilt für eine Matrix $\mathbf{A}$, daß sie der transponierten Matrix $\mathbf{A}^T$ gleich ist, also $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, so heißt die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch.

Wegen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$; $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ muß bei einer symmetrischen Matrix $a_{ij} = a_{ji}$ gelten.

Nur eine quadratische Matrix kann symmetrisch sein.

2

Die Matrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 9 & -5 \\ 6 & 9 & -2 & 11 \\ 4 & -5 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

ist symmetrisch;

Es gilt

$$a_{11} = a_{11} = 3; a_{12} = a_{21} = 2; a_{13} = a_{31} = 6; a_{14} = a_{41} = 4$$

$$a_{22} = a_{22} = 7; a_{23} = a_{32} = 9; a_{24} = a_{42} = -5$$

$$a_{33} = a_{33} = -2; a_{34} = a_{43} = 11$$

$$a_{44} = a_{44} = 13.$$

Aufgaben zu 3.3.1.

1

Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen vier Erzeugnisse her. Der Verbrauch an Rohstoff je Erzeugniseinheit ist der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Rohstoff	Rohstoffverbrauch (in Mengeneinheiten) je Einheit des Erzeugnisses			
	1	2	3	4
1	6	2	3	7
2	1	15	2	3
3	4	6	9	12

- Schreiben Sie die Verbrauchsnormen als Matrix $\mathbf{A}$, in der das Element a_{ij} angibt, wie hoch der Verbrauch vom Rohstoff i für die Produktion einer Einheit des Erzeugnisses j ist!
- Schreiben Sie die Verbrauchsnormen als Matrix $\mathbf{B}$, in der das Element b_{ij} angibt, wie hoch der Verbrauch vom Rohstoff j für die Produktion einer Einheit des Erzeugnisses i ist!

- c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Matrizen aus a) und b)? (L)

2

Transponieren Sie die folgende Matrix!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 10 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (L)$$

3

Wie lautet die transponierte Matrix zur Nullmatrix $\mathbf{0}_{(m, n)}$? (L)

4

Wie lautet die transponierte Matrix der Einheitsmatrix? (L)

5

Wie lautet die transponierte Matrix der folgenden Matrix?

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (L)$$

6

Transponieren Sie die folgende Matrix!

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 9 & -5 \\ 6 & 9 & -2 & 11 \\ 4 & -5 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad (L)$$

7

Transponieren Sie die folgende Matrix!

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^T \end{bmatrix} \quad (L)$$

8

Transponieren Sie die folgende Matrix!

$$S = (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n) \quad (L)$$

3.3.2. Matrizenaddition

3

Drei Betriebe, die ein einheitliches Erzeugnis herstellen, beliefern vier Abnehmer. Die Lieferungen im ersten Halbjahr sind in Tabelle 3.4 angegeben, die Lieferungen im zweiten Halbjahr in Tabelle 3.5.

Lieferungen im ersten Halbjahr

Tabelle 3.4

Betrieb	Abnehmer			
	1	2	3	4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Lieferungen im zweiten Halbjahr

Tabelle 3.5

Betrieb	Abnehmer			
	1	2	3	4
1	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
2	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}
3	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}

Die Lieferungen des ersten Halbjahres erfassen wir in der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix};$$

die Lieferungen des zweiten Halbjahres in der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}.$$

Die Gesamtlieferungen im 1. und 2. Halbjahr ergeben die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & a_{34} + b_{34} \end{bmatrix}$$

Die Elemente dieser Matrix C ergeben sich durch Addition der entsprechenden Elemente von A und B. Wir sagen, daß C die Summe der Matrizen A und B ist.

Definition 3 Sind A und B Matrizen mit der gleichen Zeilen- und Spaltenzahl, so verstehen wir unter der Summe der beiden Matrizen die Matrix, deren Elemente sich als Summe der entsprechenden Elemente von A und B ergeben. Diese Summe bezeichnen wir mit $A + B$.

$$\text{Ist } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{und } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

so ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kürzer können wir sagen:

Ist $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ und $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, so ist
 $(m, n) \qquad (m, n)$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}].$$

4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 0,7 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 13 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 19 \\ -2 & 3,7 & 1 \end{bmatrix}$$

5

$$\text{Die Matrizen } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

lassen sich nicht addieren, weil sie ungleiche Spaltenzahlen haben.

Die angegebene Addition von Matrizen gilt auch für Vektoren. Die Summe zweier Zeilenvektoren (Spaltenvektoren), ist wieder ein Zeilenvektor (Spaltenvektor).

Ein Zeilen- und ein Spaltenvektor lassen sich nicht addieren;

$$\text{Ist } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix};$$

so ist

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Entsprechend gilt $\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = [a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad \cdots \quad a_n + b_n]$.

6

In Aufgabe 13 des Abschnittes 3.2. ergeben sich die benötigten Maschinenzeiten für die einzelnen Erzeugnisse folgendermaßen:

Tabelle 3.6

Maschine	benötigte Maschinenzeit (in Zeiteinheiten) für die Menge		
	x_1	x_2	x_3
1	$2x_1$	$4x_2$	$3x_3$
2	$3x_1$	$6x_2$	$9x_3$
3	$5x_1$	$2x_2$	$4x_3$
4	$7x_1$	x_2	$7x_3$

Die benötigten Maschinenzeiten für die verschiedenen Produkte lassen sich als Vektoren darstellen:

$$t_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 \\ 5x_1 \\ 7x_1 \end{bmatrix}; \quad t_2 = \begin{bmatrix} 4x_2 \\ 6x_2 \\ 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad t_3 = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 9x_3 \\ 4x_3 \\ 7x_3 \end{bmatrix}$$

Die insgesamt benötigte Maschinenzeit für alle Produkte haben wir bereits in Aufgabe 13 des Abschnittes 3.2. durch folgenden Vektor dargestellt:

$$t = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 7x_1 + x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

Der Vektor t geht aus den Vektoren t_1, t_2, t_3 durch Addition hervor.

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

7

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1,5 \end{bmatrix}; \quad a + b = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 7,5 \end{bmatrix}$$

8

$$c^T = [-5 \ 3 \ 0 \ -2,7]; \quad d^T = [-12 \ -4 \ 18 \ 3,5]$$

$$c^T + d^T = [-17 \ -1 \ 18 \ 0,8]$$

Wir schreiben die Matrizen A und B mit Hilfe von Zeilenvektoren

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T + \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T + \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T + \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix}$$

Schreiben wir die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit Hilfe von Spaltenvektoren, dann gilt mit $\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n]$ und $\mathbf{B} = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \cdots \ \mathbf{d}_n]$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_1 \ \mathbf{c}_2 + \mathbf{d}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n + \mathbf{d}_n].$$

Satz 1

Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A}$ und die Nullmatrix gilt immer

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}.$$

Entsprechend gilt für Vektoren

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}.$$

Die Nullmatrix hat also bei der Matrizenaddition die gleiche Bedeutung wie der Nullvektor in der Vektoraddition und wie die Null in der Zahlenaddition.

Satz 2

Für die Matrizenaddition gelten das Kommutationsgesetz und das Assoziationsgesetz, das heißt, es gelten:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C});$$

Satz 3

Für die Matrizenaddition gelten folgende Monotoniegesetze:

$$\text{Aus } \mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ folgt } \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

$$\text{aus } \mathbf{A} < \mathbf{B} \text{ folgt } \mathbf{A} + \mathbf{C} < \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

$$\text{aus } \mathbf{A} \leq \mathbf{B} \text{ folgt } \mathbf{A} + \mathbf{C} \leq \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

das heißt, die Matrizenrelationen bleiben erhalten, wenn wir auf beiden Seiten der Relationen die gleiche Matrix addieren.

Aufgaben zu 3.3.2.

1

Bilden Sie die Summe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$!

$$\text{a) } \mathbf{a}^T = [2 \ 5 \ -6]; \ \mathbf{b}^T = [-6 \ 3 \ 1,5]$$

$$\text{b) } \mathbf{a}^T = [0,2 \ -4,7 \ 5,2]; \ \mathbf{b}^T = [4,3 \ -0,5 \ 4,8]$$

$$\text{c) } \mathbf{a}^T = \left[\frac{13}{3} \ 0 \ -\frac{15}{4}; \frac{6}{5} \right]; \ \mathbf{b}^T = \left[-\frac{7}{3} \ 0 \ \frac{3}{2} \ 2 \right] \quad (\text{L})$$

2

Warum lassen sich $\mathbf{a}^T = [6 \ -0,5]$ und $\mathbf{b}^T = [4,3 \ -2 \ 0,6]$ nicht addieren? (L)

3

Schreiben Sie die Vektorgleichung

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{d}$$

$$\text{mit } \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ 5x_1 \end{bmatrix}; \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \\ 4x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -5x_3 \\ 6x_3 \\ -x_3 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen! (L)

4

Schreiben Sie das folgende Gleichungssystem als Vektorgleichung mit Hilfe von fünf Vektoren:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 70 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 = 90 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 60 \end{array} \right\} \quad (\text{L})$$

5

Schreiben Sie folgende Vektorungleichung als lineares Ungleichungssystem:

$$\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \leq \mathbf{c}$$

$$\text{mit } \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ 5x_1 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 7x_2 \\ 4x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 600 \end{bmatrix} \quad (\text{L})$$

6

Schreiben Sie das Ungleichungssystem aus Aufgabe 13 des Abschnittes 3.2. mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 \\ 5x_1 \\ 7x_1 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 4x_2 \\ 6x_2 \\ 2x_2 \\ 1x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 9x_3 \\ 4x_3 \\ 7x_3 \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 1\,000 \\ 750 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]; \quad (\text{L})$$

7

Bilden Sie die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$!

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -3 \\ 8 & 4 & 0 & -4 \\ 32 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 19 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{L})$$

8

Warum lassen sich folgende Matrizen nicht addieren?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -7 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{L})$$

9

Ein Betrieb liefert drei verschiedene Erzeugnisse an fünf Abnehmer. Die folgenden Tabellen geben die Lieferungen in den Monaten eines Quartals an.

Lieferungen im ersten Monat

Erzeugnis	Abnehmer				
	1	2	3	4	5
1	300	200	150	0	0
2	270	0	300	50	1 000
3	0	300	200	400	10

Lieferungen im zweiten Monat

Erzeugnis	Abnehmer				
	1	2	3	4	5
1	0	200	0	200	200
2	500	300	200	500	100
3	250	250	200	0	300

Lieferungen im dritten Monat

Erzeugnis	Abnehmer				
	1	2	3	4	5
1	100	50	200	100	100
2	0	400	200	500	400
3	300	300	350	100	0

Die Lieferungen des ersten Monats werden in einer Matrix $\mathbf{A}_1$ erfaßt; die Lieferungen des zweiten Monats in einer Matrix $\mathbf{A}_2$, die Lieferungen des dritten Monats in einer Matrix $\mathbf{A}_3$.

- Wie ergibt sich die Matrix $\mathbf{A}$ der Gesamtlieferungen der drei Monate aus den Matrizen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{A}_3$?
- Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}$! (L)

3.3.3. Subtraktion von Matrizen

9

Vier Betriebe beliefern drei Abnehmer mit einem einheitlichen Erzeugnis. Die Jahreslieferungen sind in der Tabelle 3.7 dargestellt,

Tabelle 3.7 Jahreslieferungen

Betrieb	Abnehmer		
	1	2	3
1	450	230	1 050
2	0	300	700
3	750	800	400
4	500	0	600

Die Lieferungen des letzten Quartals dieses Lieferjahres zeigt Tabelle 3.8.

Tabelle 3.8 Lieferungen im letzten Quartal

Betrieb	Abnehmer		
	1	2	3
1	200	200	100
2	0	100	150
3	300	200	0
4	100	0	200

Die Jahreslieferungen erfassen wir in der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 450 & 230 & 1\,050 \\ 0 & 300 & 700 \\ 750 & 800 & 400 \\ 500 & 0 & 600 \end{bmatrix},$$

die Lieferungen des letzten Quartals in der Matrix

$$A_2 = \begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 \\ 0 & 100 & 150 \\ 300 & 200 & 0 \\ 100 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

und die Lieferungen der ersten drei Quartale in der Matrix

$$A_1 = \begin{bmatrix} 250 & 30 & 950 \\ 0 & 200 & 550 \\ 450 & 600 & 400 \\ 400 & 0 & 400 \end{bmatrix}.$$

Die Elemente der Matrix A_1 ergeben sich aus den Matrizen A und A_2 dadurch, daß die Elemente der Matrix A_2 von den entsprechenden Elementen der Matrix A subtrahiert werden. Wir sprechen von der Subtraktion der Matrix A_2 von der Matrix A ;

Definition 4 Sind A und B Matrizen mit der gleichen Zeilen- und Spaltenzahl, so verstehen wir unter der Differenz der Matrizen A und B die Matrix, deren Elemente sich als Differenz der entsprechenden Elemente von A und B ergeben. Diese Differenz bezeichnen wir mit $A - B$.

$$\text{Ist } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{und } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

so ist

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}.$$

In Kurzschreibweise können wir die Differenz $A - B$ folgendermaßen darstellen:

$$\text{Ist } A = [a_{ij}] \text{ und } B = [b_{ij}], \text{ so ist } A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

$(m, n) \qquad \qquad \qquad (m, n)$

10

$$\text{Von den Matrizen } A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -6 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

können wir keine Differenz berechnen, weil die beiden Matrizen ungleiche Spaltenzahlen besitzen.

Die angegebene Subtraktion von Matrizen gilt auch für Vektoren. Die Differenz zweier Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) ist wieder ein Zeilenvektor (Spaltenvektor). Zwischen einem Zeilen- und einem Spaltenvektor läßt sich keine Differenz bilden.

$$\text{Mit } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{und } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ist } a - b = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

$$a^T - b^T = [a_1 - b_1 \quad a_2 - b_2 \quad \cdots \quad a_n - b_n].$$

11

Die benötigte Maschinenzeit auf vier Maschinen wird durch den Vektor

$$t = \begin{bmatrix} 450 \\ 500 \\ 1\,000 \\ 740 \end{bmatrix},$$

die zur Verfügung stehende Maschinenzeit durch den Vektor

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 1\,000 \\ 750 \end{bmatrix}$$

dargestellt, die verbleibende Maschinenzeit durch den Vektor

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Vektors $\mathbf{r} = [50\ 100\ 0\ 10]^T$ ergeben sich dadurch, daß von den Komponenten des Vektors $\mathbf{f}$ die entsprechenden Komponenten des Vektors $\mathbf{t}$ subtrahiert werden,

Es ist $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{t}$.

Schreiben wir die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit Hilfe von Zeilenvektoren,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix},$$

so ist

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T - \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T - \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T - \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix}.$$

Stellen wir die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit Hilfe von Spaltenvektoren dar,

$\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \cdots\ \mathbf{c}_n]$; $\mathbf{B} = [\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2\ \cdots\ \mathbf{d}_n]$, so ist

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = [\mathbf{c}_1 - \mathbf{d}_1\ \mathbf{c}_2 - \mathbf{d}_2\ \cdots\ \mathbf{c}_n - \mathbf{d}_n]$.

Für die Subtraktion gilt nicht das Kommutationsgesetz, das heißt

$\mathbf{A} - \mathbf{B} \neq \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

Satz 4

Bei der Matrizen­subtraktion gilt:

Aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A} - \mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$,

aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A} - \mathbf{C} < \mathbf{B} - \mathbf{C}$,

aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A} - \mathbf{C} \leq \mathbf{B} - \mathbf{C}$,

d. h., Matrizen­relationen bleiben erhalten, wenn wir auf beiden Seiten der Relationen die gleiche Matrix subtrahieren.

**Aufgaben
zu 3.3.3.**

1

Berechnen Sie $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ und $\mathbf{b} - \mathbf{a}$!

a) $\mathbf{a}^T = [3 \ 4 \ 6]$; $\mathbf{b}^T = [8 \ 2 \ 3]$

b) $\mathbf{a}^T = \left[-\frac{1}{3} \ \frac{2}{5} \ \frac{13}{4} \ 3 \right]$; $\mathbf{b}^T = \left[\frac{4}{3} \ -\frac{1}{5} \ \frac{7}{4} \ 4 \right]$

c) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; $\mathbf{b}$ beliebig

d) $\mathbf{a}$ beliebig; $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

(L)

2

Bilden Sie die Differenzen $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} - \mathbf{A}$!

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -13 & 0 & -14 & 50 \\ 17 & 6 & 100 & 16,6 \\ 0,5 & 7,5 & 3,8 & -1,7 \end{bmatrix}$;
 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6,4 & -15 & 13 & -14,5 \\ -14 & 3,8 & 230 & 14,2 \\ 16,6 & 0 & 14 & -3,2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6,3 & 11,9 & -1,3 \\ 2,6 & -0,1 & 14 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 2,3 & 0 \\ -4,1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A}$ beliebig, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

e) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$; $\mathbf{B}$ beliebig

f) $\mathbf{A} = \mathbf{E}$;
 $(3, 3)$

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$; $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

h) $\mathbf{A} = \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mathbf{E}$

i) $\mathbf{A}$ beliebig; $\mathbf{B} = \mathbf{A}$

(L)

3

Warum lässt sich die Differenz $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ nicht berechnen?

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0,7 \\ 2 & 4,7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0,5 & 0 \\ -4 & -1,7 \end{bmatrix}$

(L)

In fünf Lagern werden vier verschiedene Materialien gelagert. Der Lagerbestand zu Beginn des Jahres sowie die Abgänge und die Zugänge in den einzelnen Halbjahren sind folgenden Tabellen zu entnehmen:

Lagerbestand zu Beginn des Jahres

Lager	Material			
	1	2	3	4
1	400	200	300	0
2	600	300	200	100
3	40	1 000	40	2 000
4	100	400	200	0
5	300	100	200	500

Zugang im ersten Halbjahr

Lager	Material			
	1	2	3	4
1	300	200	30	600
2	400	500	360	250
3	100	270	400	300
4	300	400	750	600
5	200	100	200	800

Abgang im ersten Halbjahr

Lager	Material			
	1	2	3	4
1	500	300	0	600
2	800	800	260	150
3	100	180	0	2 100
4	400	700	300	400
5	200	200	300	1 300

Zugang im zweiten Halbjahr

Lager	Material			
	1	2	3	4
1	300	550	730	840
2	600	550	270	900
3	300	0	600	300
4	0	400	0	800
5	400	200	300	750

Abgang im zweiten Halbjahr

Lager	Material			
	1	2	3	4
1	500	450	900	750
2	800	300	230	1 000
3	250	810	950	500
4	0	250	300	950
5	320	150	400	740

Erfassen Sie den Lagerbestand zu Beginn des Jahres in einer Matrix L_0 , den Zugang im ersten Halbjahr durch eine Matrix Z_1 , den Abgang im ersten Halbjahr durch eine Matrix A_1 , den Zugang im zweiten Halbjahr durch eine Matrix Z_2 , den Abgang im zweiten Halbjahr durch eine Matrix A_2 !

Den Lagerbestand zum Ende des ersten Halbjahres erfassen wir in einer Matrix L_1 , den Lagerbestand zum Ende des zweiten Halbjahres in einer Matrix L_2 .

- Wie läßt sich L_1 mit Hilfe der gegebenen Matrizen darstellen?
- Wie läßt sich L_2 mit Hilfe der gegebenen Matrizen darstellen?
- Berechnen Sie L_1 !
- Berechnen Sie L_2 ! (L)

5

In fünf Lagern werden vier verschiedene Materialien gelagert; Der Lagerbestand zu Beginn des Jahres ist durch die Matrix

$$L_0 = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 0 & 200 \\ 600 & 0 & 350 & 50 \\ 200 & 150 & 80 & 0 \\ 300 & 120 & 1\,000 & 600 \\ 40 & 300 & 550 & 150 \end{bmatrix}$$

gegeben. Die Elemente l_{ij} der Matrix $L_0 = [l_{ij}]$ geben an, wieviel Einheiten des Materials j im Lager i liegen. Der geplante Lagerbestand zum Ende des Jahres ist durch die folgende Matrix gegeben:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 800 & 400 & 300 & 600 \\ 1\,050 & 0 & 800 & 800 \\ 300 & 600 & 200 & 0 \\ 400 & 800 & 1\,000 & 750 \\ 1\,000 & 750 & 1\,100 & 300 \end{bmatrix}$$

Im Laufe des Planjahres sind die Lager auf den geplanten Lagerbestand zu bringen. Die Lieferungen der verschiedenen Materialien an die einzelnen Lager sind in der Matrix $Z = [z_{ij}]$ erfaßt, wobei z_{ij} angibt, wieviel Einheiten des Materials j ins Lager i zu bringen sind.

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen L_0 , L_1 und Z ?
- Berechnen Sie Z ! (L)

6

Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{x}$, indem Sie auf beiden Seiten der Gleichung $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{o}$ den Vektor $\mathbf{a}$ addieren! (L)

7

Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{Y}$, indem Sie auf beiden Seiten der Gleichung $\mathbf{Y} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ die Matrix $\mathbf{B}$ addieren! (L)

8

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach $\mathbf{x}$ auf!

a) $\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$

b) $\mathbf{x} - \mathbf{m} = \mathbf{n}$ (L)

9

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach $\mathbf{X}$ auf!

a) $\mathbf{X} - \mathbf{N} = \mathbf{0}$

b) $\mathbf{X} - \mathbf{K} = \mathbf{M}$ (L)

10

Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{x}$, indem Sie auf beiden Seiten der Ungleichung $\mathbf{x} - \mathbf{c} \leq \mathbf{o}$ den Vektor $\mathbf{c}$ addieren! (L)

11

Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{X}$, indem Sie auf beiden Seiten der Ungleichung $\mathbf{X} - \mathbf{D} \leq \mathbf{0}$ die Matrix $\mathbf{D}$ addieren! (L)

12

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach $\mathbf{x}$ auf!

a) $\mathbf{x} - \mathbf{c} = \mathbf{o}$

c) $\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$

b) $\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$

d) $\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$

(L)

13

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach $\mathbf{X}$ auf!

a) $\mathbf{X} - \mathbf{M} = \mathbf{0}$

c) $\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{B}$

b) $\mathbf{X} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$

d) $\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$

(L)

14

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen nach $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{X}$ auf!

a) $\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{o}$

e) $\mathbf{X} - \mathbf{B} \leq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{o}$

f) $\mathbf{X} + \mathbf{D} \leq \mathbf{0}$

c) $\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{d}$

g) $\mathbf{X} - \mathbf{B} \leq \mathbf{F}$

d) $\mathbf{x} + \mathbf{b} \leq \mathbf{d}$

h) $\mathbf{X} + \mathbf{B} \leq \mathbf{F}$

(L)

3.3.4. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

12

Drei Betriebe beliefern vier Abnehmer mit einem einheitlichen Erzeugnis. Die konstanten Lieferungen je Monat sind in Tabelle 3.9 dargestellt.

Tabelle 3.9

Betrieb	Abnehmer			
	1	2	3	4
1	300	200	0	200
2	100	50	200	300
3	400	100	300	0

Die Liefermengen lassen sich in folgender Matrix darstellen:

$$A = \begin{bmatrix} 300 & 200 & 0 & 200 \\ 100 & 50 & 200 & 300 \\ 400 & 100 & 300 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Gesamtlieferungen des Jahres zeigt die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 12 \cdot 300 & 12 \cdot 200 & 12 \cdot 0 & 12 \cdot 200 \\ 12 \cdot 100 & 12 \cdot 50 & 12 \cdot 200 & 12 \cdot 300 \\ 12 \cdot 400 & 12 \cdot 100 & 12 \cdot 300 & 12 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\,600 & 2\,400 & 0 & 2\,400 \\ 1\,200 & 600 & 2\,400 & 3\,600 \\ 4\,800 & 1\,200 & 3\,600 & 0 \end{bmatrix};$$

Die Elemente der Matrix **B** ergeben sich aus denen der Matrix **A** durch Multiplikation mit 12. Wir sagen, daß sich die Matrix **B** ergibt, wenn wir die Matrix **A** mit dem Skalar 12 multiplizieren.

Definition 5 Die Multiplikation einer Matrix **A** mit einem Skalar α ergibt eine Matrix, deren Elemente das α -fache der entsprechenden Elemente von **A** sind. Für die Multiplikation einer Matrix **A** mit dem Skalar α schreiben wir αA .

Mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gilt

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kürzer können wir dafür auch schreiben, mit $A = [a_{ij}]$ ist $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$. Die angegebene Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar gilt auch für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

$$\text{Mit } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{gilt } \alpha a = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Entsprechend ist } \alpha a^T = [\alpha a_1 \ \alpha a_2 \ \cdots \ \alpha a_n]$$

$$\text{bzw. } a^T \alpha = [a_1 \alpha \ a_2 \alpha \ \cdots \ a_n \alpha]$$

$$\text{oder } a \alpha = \begin{bmatrix} a_1 \alpha \\ a_2 \alpha \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \alpha \end{bmatrix}$$

13

In der Aufgabe 13 des Abschnittes 3.2. können wir die Maschinenzeiten je Einheit des ersten Erzeugnisses als Vektor

$$z_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

darstellen; die Maschinenzeiten für x_1 Einheiten des ersten Erzeugnisses haben wir in folgendem Vektor erfaßt:

$$t_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 \\ 5x_1 \\ 7x_1 \end{bmatrix}$$

Der Vektor t_1 geht aus dem Vektor z_1 dadurch hervor, daß jede Komponente des Vektors z_1 mit dem Skalar x_1 multipliziert wird.

$$t_1 = z_1 x_1$$

14

Die Multiplikation des Vektors $a = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit dem Skalar $\alpha = \frac{1}{2}$

ergibt

$$\alpha a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Satz 5

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar gelten das Kommutationsgesetz

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \alpha,$$

das Assoziationsgesetz

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{A})$$

und die Distributionsgesetze

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}.$$

Satz 6

Bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar gilt:

Aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ folgt $\alpha \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{B}$ mit beliebigem α ;

aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\alpha \cdot \mathbf{A} < \alpha \cdot \mathbf{B}$ für $\alpha > 0$,

aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\alpha \cdot \mathbf{A} > \alpha \cdot \mathbf{B}$ für $\alpha < 0$,

aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\alpha \cdot \mathbf{A} \leq \alpha \cdot \mathbf{B}$ für $\alpha > 0$,

aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\alpha \cdot \mathbf{A} \geq \alpha \cdot \mathbf{B}$ für $\alpha < 0$.

Das bedeutet, daß die Gleichheit zweier Matrizen erhalten bleibt, wenn wir beide Matrizen mit einem beliebigen Skalar multiplizieren, daß die Matrizenungleichheiten $<$ und $\leq$ dann erhalten bleiben, wenn wir beide Matrizen mit einem positiven Skalar multiplizieren. Bei Multiplikation mit einem negativen Skalar wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt.

Schreiben wir die Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe von Zeilenvektoren;

also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix},$$

so ist

$$\alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{a}_1^T \\ \alpha \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \alpha \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}.$$

Schreiben wir die Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe von Spaltenvektoren, also

$$\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n], \text{ so ist } \alpha \mathbf{A} = [\alpha \mathbf{c}_1 \ \alpha \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \alpha \mathbf{c}_n].$$

Durch diese Schreibweise führen wir die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar auf die Multiplikation von Vektoren mit einem Skalar zurück.

15

Die Multiplikation einer beliebigen Matrix A mit dem Skalar 1 läßt die Matrix unverändert: $1 \cdot A = A$

16

Die Multiplikation einer Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mit dem Skalar -1 ergibt die Matrix

$$-1A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix},$$

die wir auch mit $-A$ bezeichnen.

Aufgaben zu 3.3.4.

1

Multiplizieren Sie den Vektor a mit dem Skalar α !

a) $a^T = [3 \ -1 \ 10]; \alpha = 4$

b) $a^T = \left[-2 \ 0 \ -\frac{1}{4} \ 6 \right]; \alpha = \frac{1}{3}$

c) $a = o; \alpha$ beliebig

d) a beliebig; $\alpha = 0$

(L)

2

Schreiben Sie $xa \leq b$ mit $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 24 \end{bmatrix}$

als Ungleichungssystem mit der Variablen x !

(L)

3

Schreiben Sie $x_1 a_1 + x_2 a_2 = d$

mit $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}; a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}; d = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$

als lineares Gleichungssystem mit den Variablen x_1 und x_2 !

(L)

4

Schreiben Sie

$$\left. \begin{array}{l} 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 35 \end{array} \right\}$$

mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \\ 35 \end{bmatrix}$$

und der Skalare x_1, x_2, x_3 als Vektorgleichung! (L)

5

Schreiben Sie

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 6 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \geq 30 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 10x_4 \geq 35 \end{array} \right\}$$

mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 35 \end{bmatrix}$$

und der Skalare x_1, x_2, x_3, x_4 als Vektorgleichung! (L)

6

Schreiben Sie die Bedingungen für den Produktionsplan aus Aufgabe 13 des Abschnittes 3.2. mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 1\,000 \\ 750 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

und der Skalare x_1, x_2, x_3 ! (L)

7

Schreiben Sie die verbleibende Maschinenzeit $\mathbf{a}$ aus Aufgabe 13 des Abschnittes 3.2. mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \\ 1\,000 \\ 750 \end{bmatrix}$$

und der Skalare x_1, x_2, x_3 ! (L)

8

Multiplizieren Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Skalar α !

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha = 3$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 100 & 20 & 30 & -10 & 40 \\ 3 & -2 & 4 & 8 & 6 \\ 1\,400 & 2 & -50 & 6 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha = 0,5$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{9}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{11} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \alpha = -\frac{1}{6}$$

d) $A = 0$; α beliebig

e) A beliebig; $\alpha = 0$

f) $A = E$; α beliebig (L)

(3, 3)

9

Machen Sie die Elemente der Matrix A ganzzahlig, indem Sie einen geeigneten Skalar vor die Matrix ziehen!

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{13}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ -\frac{3}{8} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,24 & 13,6 \\ -0,21 & 14,7 & 0,1 \\ 0 & -0,01 & 0,6 \end{bmatrix} \quad (L)$$

10

Ein Betrieb besteht aus mehreren Abteilungen. Es werden mehrere Rohstoffe verarbeitet. Der konstante Verbrauch an Rohstoffen je Schicht kann der folgenden Tabelle entnommen werden.

Rohstoff	Rohstoffverbrauch je Schicht (in Mengeneinheiten) in den Abteilungen			
	1	2	3	4
1	3	6	8	2
2	5	1	6	9
3	3	4	10	2
4	9	11	20	5
5	0	3	6	2

Der Rohstoffverbrauch je Schicht lässt sich durch eine Matrix A darstellen.

- a) Der Rohstoffverbrauch je Woche (6 Arbeitstage zu je 3 Schichten) kann durch die Matrix **B** dargestellt werden. Welche Beziehung besteht zwischen **B** und **A**?
- b) Berechnen Sie die Matrix **B** des Rohstoffverbrauchs in den einzelnen Abteilungen je Woche! (L)

11

In drei Lagern werden vier unterschiedliche Erzeugnisse gelagert: Der Lagerbestand zu Beginn des Jahres ist durch die Matrix

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 400 & 600 & 700 \\ 300 & 200 & 1\,000 \\ 400 & 300 & 750 \\ 600 & 200 & 800 \end{bmatrix}$$

gegeben. Die Elemente l_{ij} der Matrix $\mathbf{L}_0 = [l_{ij}]$ geben an, wieviel Einheiten des Erzeugnisses i im Lager j liegen.

Es ist geplant, im Laufe des Jahres den Lagern fünfmal die Mengen a_{ij} (a_{ij} ist Element der Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$) und dreimal die Mengen b_{ij} (b_{ij} ist Element der Matrix $\mathbf{B} = [b_{ij}]$) zu entnehmen.

- a) Welche Beziehung muß zwischen $\mathbf{L}_0$, **A** und **B** bestehen?
- b) Überprüfen Sie, ob diese Bedingung verletzt wird, wenn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 40 & 80 & 100 \\ 20 & 24 & 80 \\ 60 & 50 & 30 \\ 60 & 40 & 40 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 60 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 200 \\ 30 & 15 & 200 \\ 100 & 0 & 150 \end{bmatrix} ! \quad (\text{L})$$

12

Bestimmen Sie $\mathbf{x}$, indem Sie auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{1}{\beta} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit β multiplizieren ($\beta \neq 0$)! (L)

13

Bestimmen Sie $\mathbf{X}$, indem Sie auf beiden Seiten der Gleichung $\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}$ mit $\frac{1}{\alpha}$ multiplizieren ($\alpha \neq 0$)! (L)

14

Lösen Sie die Gleichungen nach $\mathbf{x}$ auf!

- a) $\mathbf{x} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c} = \mathbf{0}$
- b) $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (L)

15

Lösen Sie die Ungleichung nach $\mathbf{x}$ auf!

$$\mathbf{x} - 3\mathbf{b} \leq \mathbf{0} \quad (\text{L})$$

16

Lösen Sie die Ungleichungen nach x auf!

a) $3x + 4a \leq b$

b) $-0,25x - 1,5a \geq 0$ (L)

17

Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

a) $\gamma X = L$ ($\gamma \neq 0$)

b) $\gamma X = 0$ ($\gamma \neq 0$)

c) $\frac{1}{2}X + \frac{3}{4}A = \frac{5}{8}B$

d) $3X - 4B = 4X + \frac{1}{2}B$

e) $0,5X + 3,7B = 4,3A + 4,5X$ (L)

18

Bestimmen Sie X , indem Sie auf beiden Seiten der Ungleichung $\alpha X \geq B$ mit dem Skalar $\frac{1}{\alpha}$ multiplizieren! ($\alpha \neq 0$)

Unterscheiden Sie die beiden Fälle, daß α positiv oder negativ sein kann! (L)

19

Lösen Sie die folgenden Matrizenungleichungen nach X auf!

a) $\gamma X < L$ ($\gamma \neq 0$)

b) $\gamma X \geq 0$ ($\gamma \neq 0$)

c) $\frac{3}{4}X - \frac{1}{2}A \leq \frac{5}{8}B$

d) $2X - 4B \geq 4X - \frac{3}{4}B$

e) $0,3X - 2,1B < 6,4A - 2,5X$ (L)

3.3.5. Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor (Skalarprodukt)

17

Ein Betrieb stellt vier Erzeugnisse in der Menge x_1, x_2, x_3, x_4 zu den Einzelpreisen 20; 15; 32; 50 her:

Benutzen wir den Produktionsvektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ und den

Preisvektor $p^T = [20 \ 15 \ 32 \ 50]$, so läßt sich die Preissumme $20x_1 + 15x_2 + 32x_3 + 50x_4$ mit Hilfe der Komponenten der Vektoren p^T und x beschreiben.

Den Ausdruck $20x_1 + 15x_2 + 32x_3 + 50x_4$ bezeichnet man als Skalarprodukt der beiden Vektoren p^T und x .

Definition 6 *Das Skalarprodukt zweier Vektoren mit n Komponenten ist ein Skalar, der dadurch entsteht, daß die entsprechenden Komponenten der beiden Vektoren miteinander multipliziert und die auf diese Weise gewonnenen n Produkte addiert werden.*

Ist $\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ und $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T$, so ist das Skalarprodukt von $\mathbf{a}^T$ und $\mathbf{b}$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Wir schreiben für dieses Skalarprodukt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

das heißt, der erste Vektor wird immer als Zeilenvektor, der zweite Vektor als Spaltenvektor geschrieben.

18

$$[3 \ -1 \ 4 \ 2] \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 + (-1) \cdot 5 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{2}$$

Satz 7

Das Skalarprodukt ist kommutativ

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}.$$

Außerdem gilt das Distributionsgesetz

$$[\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T] \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c}.$$

Satz 8

Aus $\mathbf{a}^T = \mathbf{b}^T$ folgt $\mathbf{a}^T \mathbf{c} = \mathbf{b}^T \mathbf{c}$, ($\mathbf{c}$ beliebig)

aus $\mathbf{a}^T < \mathbf{b}^T$ folgt $\mathbf{a}^T \mathbf{c} < \mathbf{b}^T \mathbf{c}$, für $\mathbf{c} > \mathbf{o}$, aber $\mathbf{a}^T \mathbf{c} > \mathbf{b}^T \mathbf{c}$ für $\mathbf{c} < \mathbf{o}$;

aus $\mathbf{a}^T \leq \mathbf{b}^T$ folgt $\mathbf{a}^T \mathbf{c} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{c}$ für $\mathbf{c} \geq \mathbf{o}$, aber $\mathbf{a}^T \mathbf{c} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{c}$ für $\mathbf{c} \leq \mathbf{o}$.

19

Mit $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ gilt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{s} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i;$$

$\mathbf{s}$ ist der summierende Vektor,

Die Gleichung $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 20$

läßt sich mit Hilfe der Vektoren $\mathbf{a} = [2 \ 3 \ 5]^T$ und $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ wie folgt als Skalarprodukt schreiben:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 20$$

Aufgaben zu 3.3.5.

1

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$!

a) $\mathbf{a}^T = [2 \ 4 \ 6 \ 1]; \quad \mathbf{b} = [4 \ 7 \ 6 \ 2]^T$

b) $\mathbf{a}^T = \left[\frac{1}{2} \ -4 \ 3 \right]; \quad \mathbf{b} = \left[5 \ -2 \ -\frac{2}{3} \right]^T$

c) $\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]; \quad \mathbf{b} = \mathbf{s}$

d) $\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]; \quad \mathbf{b} = \mathbf{o} \quad (\text{L})$

2

Schreiben Sie $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 5$ mit $\mathbf{a}^T = [5 \ 3 \ -2]; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ als lineare Gleichung mit drei Variablen!

(L)

3

Schreiben Sie $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq 100$ mit $\mathbf{a}^T = [2 \ 5 \ 3 \ 4]; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ als lineare Ungleichung mit vier Variablen!

(L)

4

Schreiben Sie

$$\mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = 10$$

$$\mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = 20$$

mit $\mathbf{a}_1^T = [3 \ -1 \ 2]; \quad \mathbf{a}_2^T = [-2 \ 3 \ 1]; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$

als lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen!

(L)

5

Schreiben Sie

$$\mathbf{a}_1^T \mathbf{x} > 10$$

$$\mathbf{a}_2^T \mathbf{x} > 5$$

$$\mathbf{a}_3^T \mathbf{x} > 40$$

mit $\mathbf{a}_1^T = [2 \ 3 \ -5 \ 6]; \quad \mathbf{a}_2^T = [4 \ 5 \ 2 \ -1]$

$$\mathbf{a}_3^T = [3 \ 1 \ -1 \ 5]; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

als lineares Ungleichungssystem!

(L)

6

Schreiben Sie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_3^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 3 \end{bmatrix}$$

mit $\mathbf{a}_1^T = [6 \ -2 \ 3 \ 4]$; $\mathbf{a}_2^T = [15 \ -1,5 \ 6 \ 10]$

$$\mathbf{a}_3^T = \left[1 \ 0 \ -2 \ \frac{1}{2} \right]; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

als lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Variablen! (L)

7

Schreiben Sie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_3^T \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_4^T \mathbf{x} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 180 \\ 240 \\ 300 \\ 150 \end{bmatrix}$$

mit $\mathbf{a}_1^T = [3 \ 4 \ -2]$; $\mathbf{a}_2^T = [2 \ 1 \ 4]$

$\mathbf{a}_3^T = [5 \ 1 \ 6]$; $\mathbf{a}_4^T = [3 \ -1 \ 1]$

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$

als lineares Ungleichungssystem! (L)

8

Für die Fertigung von vier Erzeugnissen werden drei verschiedene Materialien benötigt. Der Materialverbrauch je Erzeugniseinheit, die Materialfonds, die Produktionshöhe und die Einzelpreise sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Material	Anzahl der Materialeinheiten, die je Erzeugniseinheit benötigt werden				Materialfonds in Mengeneinheiten
	Erzeugnis 1	2	3	4	
1	2	8	5	0	1 000
2	3	1	3	4	800
3	6	4	1	6	400

Preise je Einheit des Erzeugnisses in Geldeinheiten	10	15	30	40
--	----	----	----	----

Produktionshöhe	x_1	x_2	x_3	x_4
-----------------	-------	-------	-------	-------

Stellen Sie die Bedingungen, denen ein zulässiger Produktionsplan genügen muß, und die erzielte Preissumme s mit Hilfe folgender Vektoren dar:

$\mathbf{t}_1^T = [2 \ 8 \ 5 \ 0]$; $\mathbf{t}_2^T = [3 \ 1 \ 3 \ 4]$

$\mathbf{t}_3^T = [6 \ 4 \ 1 \ 6]$; $\mathbf{p}^T = [10 \ 15 \ 30 \ 40]$

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$; $\mathbf{f} = [1\,000 \ 800 \ 400]^T$ (L)

Ein Betrieb kann ein einheitliches Erzeugnis nach vier verschiedenen Technologien herstellen. Wir bezeichnen die Mengen, die nach den verschiedenen Technologien hergestellt werden, mit x_1, x_2, x_3, x_4 . Stellen Sie mit Hilfe eines Skalarprodukts dar, daß die hergestellte Gesamtmenge mindestens 400 beträgt! (L)

3.3.6. Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor

21

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 18 \end{array} \right\}.$$

Die Koeffizienten der Variablen x_1, x_2, x_3 erfassen wir in der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

die Variablen im Vektor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

und die Absolutglieder im Vektor

$$d = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Die linke Seite der ersten Gleichung ergibt sich, wenn wir den ersten Zeilenvektor der Matrix A mit dem Vektor x multiplizieren.

$$[2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Die linke Seite der zweiten Gleichung ergibt sich, wenn wir den zweiten Zeilenvektor der Matrix A mit dem Vektor x multiplizieren.

$$[1 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + 3x_3$$

Schließlich ergibt sich die linke Seite der dritten Gleichung, wenn wir den dritten Zeilenvektor von A mit dem Vektor x multiplizieren.

$$[4 \ 5 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

Wir können die linke Seite des Gleichungssystems auch als Vektor

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

darstellen, wie wir es bereits zeigten:

Dieser Vektor ergibt sich also aus der Matrix A und dem Vektor x dadurch, daß jeder Zeilenvektor von A mit dem Spaltenvektor x multipliziert wird. Wir sagen, daß wir die Matrix A mit dem Spaltenvektor x multipliziert haben.

Definition 7 Ist A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, x ein Spaltenvektor mit n Komponenten, so verstehen wir unter dem Produkt der Matrix A mit dem Vektor x einen Spaltenvektor, dessen m Komponenten sich dadurch ergeben, daß wir jeden Zeilenvektor der Matrix A mit dem Vektor x multiplizieren. Für dieses Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor schreiben wir Ax .

Mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ist

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

22

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + (-1) \cdot 100 \\ 4 \cdot 20 + (-2) \cdot 30 + 3 \cdot 100 \\ 1 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 10 \cdot 100 \\ 0 \cdot 20 + (-4) \cdot 30 + 5 \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 320 \\ 1050 \\ 380 \end{bmatrix}$$

Schreiben wir die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mit Hilfe von Spaltenvektoren; also $\mathbf{A} = [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \cdots \mathbf{d}_n]$, so läßt sich das Produkt $\mathbf{A}\mathbf{x}$ auch in der folgenden Form schreiben.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}_1 x_1 + \mathbf{d}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{d}_n x_n = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix

23

Wir betrachten die Vektoren

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2 \ y_3]$$

$\mathbf{c}^T = [2y_1 + 3y_2 + 4y_3; \ y_1 + y_2 + 3y_3; \ 4y_1 + 5y_2 + y_3]$ und die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die erste Komponente von $\mathbf{c}^T$ ergibt sich dadurch, daß wir den Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ mit dem ersten Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{B}$ multiplizieren.

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = y_1 \cdot 2 + y_2 \cdot 3 + y_3 \cdot 4 = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

Die zweite Komponente von $\mathbf{c}^T$ ergibt sich dadurch, daß wir den Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ mit dem zweiten Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{B}$ multiplizieren.

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 1 + y_3 \cdot 3 = y_1 + y_2 + 3y_3$$

Schließlich ergibt sich die dritte Komponente von $\mathbf{c}^T$ dadurch, daß wir den Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ mit dem dritten Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{B}$ multiplizieren.

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 \cdot 4 + y_2 \cdot 5 + y_3 \cdot 1 = 4y_1 + 5y_2 + y_3$$

Der Zeilenvektor $\mathbf{c}^T$ ergibt sich also aus dem Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ und der Matrix $\mathbf{B}$ dadurch, daß der Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ mit jedem Spaltenvektor von $\mathbf{B}$ multipliziert wird. Wir sagen, daß wir den Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ mit der Matrix $\mathbf{B}$ multipliziert haben.

Definition 8 Ist $\mathbf{y}^T$ ein Zeilenvektor mit m Komponenten und $\mathbf{B}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, so verstehen wir unter dem Produkt des Zeilenvektors $\mathbf{y}^T$ mit der Matrix $\mathbf{B}$ einen Zeilenvektor, dessen n Komponenten sich dadurch ergeben, daß wir den Zeilenvektor $\mathbf{y}^T$ mit jedem Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{B}$ multiplizieren. Für dieses Produkt eines Zeilenvektors mit einer Matrix schreiben wir $\mathbf{y}^T \mathbf{B}$.

Mit $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]$

und

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]$$

$$\begin{aligned} \text{ist } \mathbf{y}^T \mathbf{B} &= [\mathbf{y}^T b_1 \ \mathbf{y}^T b_2 \ \cdots \ \mathbf{y}^T b_n] \\ &= [y_1 b_{11} + y_2 b_{21} + \cdots + y_m b_{m1} \quad y_1 b_{12} + y_2 b_{22} + \cdots \\ &\quad + y_m b_{m2} \quad \cdots \quad y_1 b_{1n} + y_2 b_{2n} + \cdots + y_m b_{mn}]. \end{aligned}$$

24

$$\mathbf{y}^T = [30 \ 40 \ -20]; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T \mathbf{B} &= [30 \cdot 6 + 40 \cdot 2 & + (-20) \cdot 3; \\ & 30 \cdot 4 + 40 \cdot (-2) + (-20) \cdot 1; \\ & 30 \cdot 0 + 40 \cdot 1 & + (-20) \cdot (-3); \\ & 30 \cdot 6 + 40 \cdot 1 & + (-20) \cdot 0; \\ & 30 \cdot 1 + 40 \cdot 1 & + (-20) \cdot 1] \\ &= [200 \ 20 \ 100 \ 220 \ 50] \end{aligned}$$

Schreiben wir die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{mit Hilfe von Zeilenvektoren, also}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix},$$

so läßt sich das Produkt $\mathbf{y}^T \mathbf{B}$ auch folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{B} = y_1 \mathbf{b}_1^T + y_2 \mathbf{b}_2^T + \cdots + y_m \mathbf{b}_m^T$$

Es ist stets zu beachten, daß bei der Berechnung von $\mathbf{A}\mathbf{x}$ die Spaltenzahl von $\mathbf{A}$ mit der Komponentenzahl von $\mathbf{x}$ und daß bei der Berechnung von $\mathbf{y}^T \mathbf{B}$ die Komponentenzahl von $\mathbf{y}^T$ mit der Zeilenzahl von $\mathbf{B}$ übereinstimmen muß. Ist $\mathbf{A}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, so muß $\mathbf{x}$ die Komponentenzahl n haben. Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor mit m Komponenten.

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ (m, n) & (n, 1) & & (m, 1) \end{matrix}$$

Ist $\mathbf{B}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, so muß $\mathbf{y}^T$ die Komponentenzahl m haben. Das Ergebnis ist ein Zeilenvektor mit n Komponenten.

$$\begin{matrix} \mathbf{y}^T & \mathbf{B} & = & \mathbf{c}^T \\ (1, m) & (m, n) & & (1, n) \end{matrix}$$

25

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{x} & = & \mathbf{b} &; & \mathbf{A} & \mathbf{x} & \text{ist nicht möglich.} \\ (5; 6) & (6; 1) & & (5; 1) & & (5; 6) & (5; 1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{y}^T & \mathbf{B} & = & \mathbf{c}^T &; & \mathbf{y}^T & \mathbf{B} & \text{ist nicht möglich;} \\ (1; 8) & (8; 10) & & (1; 10) & & (1; 4) & (8; 10) \end{matrix}$$

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor gilt nicht das Kommutationsgesetz.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{x}\mathbf{A}, \text{ aber } (\mathbf{A}\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \neq \mathbf{A}\mathbf{y}^T, \text{ aber } (\mathbf{y}^T \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

Satz 9

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor gelten die Distributionsgesetze:

- a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}; \quad \mathbf{y}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{y}^T \mathbf{A} + \mathbf{y}^T \mathbf{B}$
 b) $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2; \quad (\mathbf{y}_1^T + \mathbf{y}_2^T) \mathbf{A} = \mathbf{y}_1^T \mathbf{A} + \mathbf{y}_2^T \mathbf{A}$

Satz 10

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor gilt:

- Aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{c}$ mit beliebigem $\mathbf{c}$,
 aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{d}^T \mathbf{A} = \mathbf{d}^T \mathbf{B}$ mit beliebigem $\mathbf{d}$,
 aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A}\mathbf{c} < \mathbf{B}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} > \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{d}^T \mathbf{A} < \mathbf{d}^T \mathbf{B}$ mit $\mathbf{d} > \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A}\mathbf{c} > \mathbf{B}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} < \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{d}^T \mathbf{A} > \mathbf{d}^T \mathbf{B}$ mit $\mathbf{d} < \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A}\mathbf{c} \leq \mathbf{B}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \geq \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{d}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{d}^T \mathbf{B}$ mit $\mathbf{d} \geq \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{A}\mathbf{c} \geq \mathbf{B}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \leq \mathbf{o}$,
 aus $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ folgt $\mathbf{d}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{d}^T \mathbf{B}$ mit $\mathbf{d} \leq \mathbf{o}$.

(In den letzten Beziehungen wird vorausgesetzt, daß die Komponenten-
zahl von $\mathbf{c}$ mit der Spaltenzahl von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ übereinstimmt und daß die
Komponentenzahl von $\mathbf{d}^T$ mit der Zeilenzahl von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ überein-
stimmt.)

Matrizengleichheit bleibt also bei einer Multiplikation mit einem Vektor
erhalten.

Matrizenungleichheit bleibt erhalten, wenn wir mit einem Vektor multi-
plizieren, der nur positive Komponenten besitzt. Bei einer Multipli-
kation mit einem Vektor, der nur negative Komponenten besitzt, ändert
sich die Richtung des Ungleichheitszeichens.

Aufgaben zu 3.3.6.

1

Multiplizieren Sie die Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Spaltenvektor $\mathbf{x}$!

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 40 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = [14 \ 20 \ 25 \ 100]^T$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \mathbf{E}_{(3;3)}; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

$$\text{e) } \mathbf{A} = \mathbf{0}_{(3;5)}; \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$$

$$\text{f) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}_{(3;1)}$$

$$\text{g) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T = \mathbf{s} \quad (\text{L})$$

2

Schreiben Sie

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 60 \end{bmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Varia-
blen! (L)

3

Schreiben Sie

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{d} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 200 \\ 500 \end{bmatrix}$$

als lineares Ungleichungssystem mit vier Ungleichungen und drei Variablen! (L)

4

Schreiben Sie

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 15 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

mit Hilfe von zwei Spaltenvektoren und einer Matrix! (L)

5

Schreiben Sie

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &> 70 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 &> 80 \\ 10x_1 + x_2 - x_3 &> 100 \\ -x_1 - x_2 + 15x_3 &> 10 \end{aligned} \right\}$$

mit Hilfe von zwei Spaltenvektoren und einer Matrix! (L)

6

Ein Betrieb stellt drei Erzeugnisse her, die auf vier Maschinen bearbeitet werden. Die Maschinenzeit je Erzeugniseinheit, die Maschinenzeitfonds und die Produktionsmenge sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Maschine	Maschinenzeit (in Zeiteinheiten) je Einheit des Erzeugnisses			Maschinenzeitfonds in Zeiteinheiten
	1	2	3	
1	3	7	2	1 000
2	1	4	3	1 200
3	2	3	5	1 500
4	6	1	4	1 900

Produktions- menge in Mengeinheiten	x_1	x_2	x_3
---	-------	-------	-------

- Führen Sie eine Matrix $\mathbf{A}$ für die benötigte Maschinenzeit je Erzeugniseinheit, einen Spaltenvektor $\mathbf{f}$ für die Maschinenzeitfonds und einen Spaltenvektor $\mathbf{x}$ für die Produktionsmenge ein! (Das Element a_{ij} der Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ gibt an, wieviel Maschinenzeit auf der Maschine i benötigt wird, um eine Einheit des Erzeugnisses j herzustellen.)
- Welche Bedingungen muß der Vektor $\mathbf{x}$ erfüllen? (L)

7

Multiplizieren Sie den Zeilenvektor y^T mit der Matrix B !

a) $y^T = [4 \ 3 \ 2]$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 13 \\ -2 & 6 & -1 & 20 \\ 3 & 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

b) $y^T = \left[\frac{2}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{4}{3} \right]$;

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & 2 \\ 6 & 3 & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

c) $y^T = [30 \ 40]$; $B^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]$; $B = E_{(4 \ 4)}$

e) $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3]$; $B = 0_{(3 \ 8)}$

f) $y^T = 0_{(1 \ 4)}$; B beliebig $_{(4 \ 3)}$

g) $y^T = s^T = [1 \ 1 \ 1]$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ (L)

8

Schreiben Sie $y^T B \leq d^T$ mit $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3]$;

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d^T = [400 \ 600 \ 200 \ 500]$$

als lineares Ungleichungssystem mit drei Variablen und vier Ungleichungen! (L)

9

Schreiben Sie $y^T B = d^T$ mit $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3]$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$d^T = [40 \ 20 \ 60]$$

als lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen! (L)

10

Schreiben Sie

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 15 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

mit Hilfe von zwei Zeilenvektoren und einer Matrix! (L)

11

Schreiben Sie

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & > & 70 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 & > & 80 \\ 10x_1 + x_2 - x_3 & > & 100 \\ -x_1 - x_2 + 15x_3 & > & 10 \end{array} \right\}$$

mit Hilfe von zwei Zeilenvektoren und einer Matrix!

(L)

12

Benutzen Sie die Ausgangsdaten der Aufgabe 6!

- Führen Sie eine Matrix B für die benötigte Maschinenzeit je Erzeugniseinheit, einen Zeilenvektor f^T für die Maschinenzeitfonds und einen Zeilenvektor x^T für die Produktionsmenge ein! (Das Element b_{ji} der Matrix $B = [b_{ji}]$ gibt an, welche Maschinenzeit für die Produktion einer Einheit des Erzeugnisses j auf der Maschine i benötigt wird.)
- Welche Bedingungen muß der Vektor x^T erfüllen?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Matrix B und der Matrix A aus Aufgabe 6?
- Die je Erzeugniseinheit benötigte Gesamtmaschinenzeit ergibt sich, wenn man den summierenden Vektor $s^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ mit der Matrix A aus Aufgabe 6 multipliziert. Berechnen Sie $s^T A$!

(L)

3.3.7. Multiplikation von Matrizen

26

Wir betrachten einen Betrieb, der aus Einzelteilen Baugruppen montiert und aus diesen Baugruppen Enderzeugnisse fertigt (vgl. Abb. 3.1).

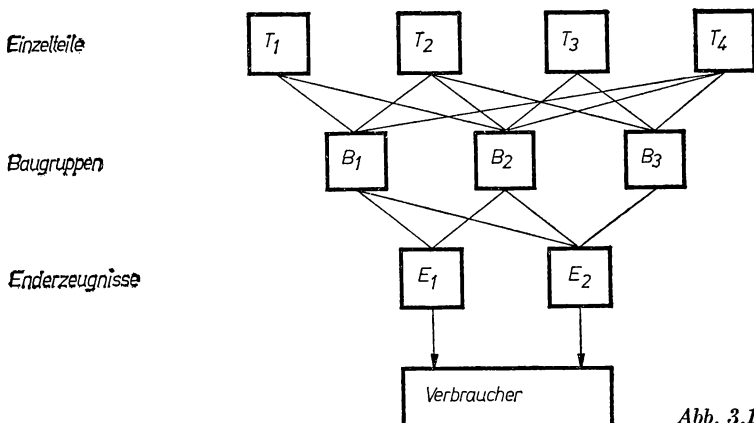


Abb. 3.1

Der Tabelle 3.10 ist zu entnehmen, wieviel Einzelteile jeweils in eine Baugruppe eingehen.

Tabelle 3.10

Einzelteile	Erforderliche Anzahl von Einzelteilen je Einheit der Baugruppen		
	1	2	3
1	3	2	0
2	1	5	2
3	0	4	1
4	3	2	4

Tabelle 3.11 zeigt, wieviel Baugruppen jeweils in ein Enderzeugnis eingehen.

Tabelle 3.11

Baugruppen	Erforderliche Anzahl von Baugruppen je Einheit des Enderzeugnisses	
	1	2
1	4	5
2	3	1
3	0	2

Aus diesen beiden Tabellen kann man errechnen, wieviel Einzelteile über die Baugruppen jeweils in ein Enderzeugnis eingehen. Das Ergebnis dieser Rechnung zeigt Tabelle 3.12.

Tabelle 3.12

Einzelteile	Erforderliche Anzahl von Einzelteilen je Einheit des Enderzeugnisses	
	1	2
1	18	17
2	19	14
3	12	6
4	18	25

Die Daten der Tabelle 3.10 erfassen wir in einer Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, deren Elemente a_{ij} angeben, wieviel Einzelteile der Art i in eine Einheit der Baugruppe j eingehen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Daten der Tabelle 3.11 erfassen wir in einer Matrix $B = [b_{jk}]$, deren Elemente b_{jk} angeben, wieviel Baugruppen der Art j in eine Einheit des Enderzeugnisses k eingehen.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Schließlich erfassen wir die Daten der Tabelle 3.12 in einer Matrix $C = [c_{ik}]$, deren Elemente c_{ik} angeben, wieviel Einzelteile der Art i über die Baugruppen in das Enderzeugnis k eingehen:

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 19 & 14 \\ 12 & 6 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}$$

Wir wollen nun zeigen, wie man die Matrix C aus den Matrizen A und B berechnen kann.

Wir erhalten die erste Zeile der Matrix C , indem wir den ersten Zeilenvektor der Matrix A mit der Matrix B multiplizieren,

$$[3 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [18 \ 17]$$

Die zweite Zeile der Matrix C erhalten wir durch Multiplikation des zweiten Zeilenvektors von A mit der Matrix B ,

$$[1 \ 5 \ 2] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [19 \ 14]$$

Die dritte Zeile der Matrix C ergibt sich durch Multiplikation des dritten Zeilenvektors von A mit der Matrix B ,

$$[0 \ 4 \ 1] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [12 \ 6]$$

Schließlich erhalten wir die vierte Zeile von C , indem wir den vierten Zeilenvektor von A mit der Matrix B multiplizieren:

$$[3 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [18 \ 25]$$

Wir sagen, daß die Matrix C das Produkt der Matrizen A und B ist.

Definition 9 *Ist A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, B eine Matrix mit n Zeilen und p Spalten, so verstehen wir unter dem Produkt der beiden Matrizen A und B eine Matrix, deren m Zeilen sich dadurch ergeben, daß die Zeilenvektoren von A mit der Matrix B multipliziert werden. Für dieses Produkt der beiden Matrizen A und B schreiben wir AB .*

$$\begin{aligned}
\text{Mit } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \\
\text{und } \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_p] \\
\text{ist } \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{B} \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{B} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

27

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} [3 \ 1 \ 4] \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [4 \ 1 \ 6] \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [5 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 11 & 12 \\ 27 & 33 \\ 31 & 35 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Das Produkt $\mathbf{AB}$ läßt sich auch folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{Ab}_1 \mathbf{Ab}_2 \cdots \mathbf{Ab}_p];$$

das heißt, die Spalten von $\mathbf{AB}$ ergeben sich dadurch, daß wir die Matrix $\mathbf{A}$ mit den Spaltenvektoren von $\mathbf{B}$ multiplizieren,

28

Mit den Matrizen **A** und **B** aus Beispiel 27 ergibt sich

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 11 & 12 \\ 27 & 33 \\ 31 & 35 \end{bmatrix}$$

Aus den beiden genannten Darstellungen für das Matrizenprodukt **AB** können wir die folgende Darstellung herleiten:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_p \end{bmatrix},$$

das heißt, die Elemente von **AB** ergeben sich dadurch, daß wir die Zeilenvektoren von **A** mit den Spaltenvektoren von **B** multiplizieren. Das Produkt des *i*-ten Zeilenvektors von **A** mit dem *k*-ten Spaltenvektor von **B** ergibt das Element c_{ik} der Matrix $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ik}]$.

29

Mit den Matrizen **A** und **B** aus Beispiel 27 ergibt sich

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 11 & 12 \\ 27 & 33 \\ 31 & 35 \end{bmatrix}$$

Aus der Definition des Matrizenprodukts folgt, daß die Produktbildung nur möglich ist, wenn die Matrix **A** soviel Spalten wie **B** Zeilen hat. **AB** hat dann soviel Zeilen wie **A** und soviel Spalten wie **B**. Es gilt

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ (m, n) & (n, p) & & (m, p) \end{matrix}$$

Für das Matrizenprodukt gilt nicht das Kommutationsgesetz, das heißt, im allgemeinen ist $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, aber es gilt $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Wenn das Produkt AB existiert, muß das Produkt BA nicht unbedingt existieren. Mit dem Produkt AB existiert aber auch BA , wenn A und B quadratisch sind. Aber auch in diesem Falle ist AB im allgemeinen von BA verschieden.

Es gilt aber $AE = EA = A$.

Ist A quadratisch, so ist auch $A0 = 0A = 0$.

Die Einheitsmatrix hat also in der Matrizenrechnung die gleiche Bedeutung wie die Eins in der Zahlenrechnung. Die Nullmatrix hat in der Matrizenrechnung die gleiche Bedeutung wie die Null in der Zahlenrechnung.

30

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Produkt AB existiert, das Produkt BA nicht.

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es existiert sowohl das Produkt AB als auch das Produkt BA , aber $AB \neq BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 25 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}; \quad BA = \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Satz 11

Für die Matrizenmultiplikation gelten das Assoziationsgesetz

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

und die Distributionsgesetze

$$A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

$$(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Satz 12

Für die Multiplikation von Matrizen gilt:

- Aus $A = B$ folgt $A \cdot C = B \cdot C$ mit beliebigem C ,*
- aus $A = B$ folgt $D \cdot A = D \cdot B$ mit beliebigem D ,*
- aus $A < B$ folgt $A \cdot C < B \cdot C$ mit $C > 0$,*
- aus $A < B$ folgt $D \cdot A < D \cdot B$ mit $D > 0$,*
- aus $A < B$ folgt $A \cdot C > B \cdot C$ mit $C < 0$,*
- aus $A < B$ folgt $D \cdot A > D \cdot B$ mit $D < 0$,*
- aus $A \leq B$ folgt $A \cdot C \leq B \cdot C$ mit $C \geq 0$,*
- aus $A \leq B$ folgt $D \cdot A \leq D \cdot B$ mit $D \geq 0$,*
- aus $A \leq B$ folgt $A \cdot C \geq B \cdot C$ mit $C \leq 0$,*
- aus $A \leq B$ folgt $D \cdot A \geq D \cdot B$ mit $D \leq 0$.*

(In den letzten Beziehungen wird vorausgesetzt, daß die Zeilenzahl von C mit der Spaltenzahl von A und B übereinstimmt und daß die Spaltenzahl von D mit der Zeilenzahl von A und B übereinstimmt.)

Matrizengleichheit bleibt also bei einer Multiplikation mit einer Matrix erhalten.

Matrizenungleichheit bleibt erhalten, wenn wir mit einer Matrix multiplizieren, die nur positive Elemente besitzt. Bei einer Multiplikation mit einer Matrix, die nur negative Elemente besitzt, wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt.

Aufgaben zu 3.3.7.

1

Bilden Sie das Produkt AB!

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \\ 6 & -13 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3;3)}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1,5 \\ -2 & -2,3 \\ 3 & -6,7 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } A = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}; \quad B = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2;2)}$$

$$\text{f) } A = \mathbf{0}_{(3;4)}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 8,1 \\ 0,5 & -9,2 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3,6 & 2,8 \\ -11 & 8 & -2 & 3 \\ 6 & -1,3 & 0 & 7,4 \end{bmatrix}; \quad B = \mathbf{0}_{(4;5)} \quad (\text{L})$$

2

Bilden Sie das Produkt $A^T B^T$!

$$\text{a) } A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0,5 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} -1 & 0,4 & 0,1 \\ 1,6 & -3,7 & 4 \\ 0 & 10,1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

c) Lassen sich in a) und b) auch $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ berechnen? (L)

3

Ein Betrieb montiert aus Einzelteilen Baugruppen und fertigt aus den Baugruppen Enderzeugnisse.

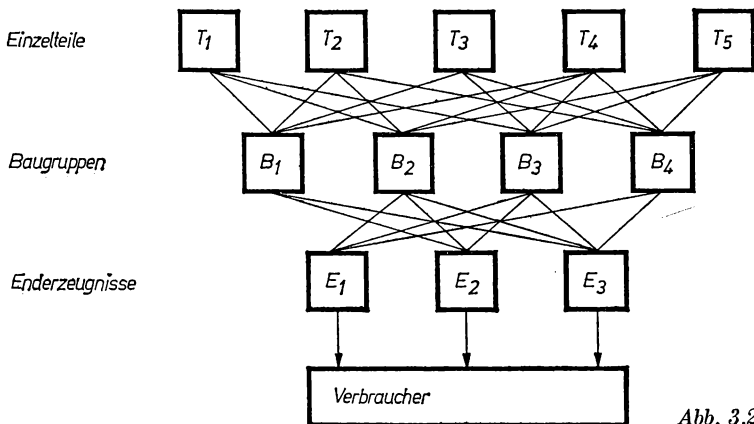


Abb. 3.2

Die beiden folgenden Tabellen zeigen, wieviel Einzelteile für die Montage einer Baugruppe bzw. wieviel Baugruppen für die Fertigung eines Enderzeugnisses gebraucht werden.

Einzelteile	Erforderliche Anzahl von Einzelteilen je Einheit der Baugruppen			
	1	2	3	4
1	2	1	3	0
2	4	2	0	3
3	1	0	2	7
4	4	1	3	2
5	0	5	4	1

Baugruppen	Erforderliche Anzahl von Baugruppen je Einheit des Enderzeugnisses		
	1	2	3
1	0	1	4
2	3	2	1
3	4	1	6
4	3	0	2

- a) Schreiben Sie die Matrix $A = [a_{ij}]$, deren Elemente a_{ij} angeben, wieviel Einzelteile der Art i für die Montage der Baugruppe j benötigt werden! Schreiben Sie die Matrix $B = [b_{jk}]$, deren Elemente b_{jk} angeben, wieviel Baugruppen der Art j für die Fertigung des Enderzeugnisses k gebraucht werden!
- b) Der Betrieb soll vom ersten Enderzeugnis 300, vom zweiten Enderzeugnis 400 und vom dritten Enderzeugnis 500 Stück liefern. Fassen Sie diese Mengen in einem Vektor z zusammen!
- c) Schreiben Sie für den Bedarf an Baugruppen den Vektor $y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$! Wie läßt sich y aus B und z bestimmen?
- d) Berechnen Sie y !
- e) Schreiben Sie für den Bedarf an Einzelteilen den Vektor $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$! Wie läßt sich x aus A und y berechnen?
- f) Berechnen Sie x !
- g) Durch die Matrix $C = [c_{ik}]$ wird erfaßt, wie die Einzelteile über die Baugruppen in die Enderzeugnisse eingehen. Das Element c_{ik} gibt an, wieviel Einzelteile der Art i in das Enderzeugnis k eingehen. Wie läßt sich C aus A und B bestimmen?
- h) Berechnen Sie C !
- i) Wie läßt sich x aus C und z bestimmen?
- j) Berechnen Sie x mit Hilfe der Beziehung aus i)! (L)

3.3.8. Zusammenfassung der Matrizenoperationen

Matrizenaddition

$$\text{Mit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{und } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{ist } A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizensubtraktion

$$\text{Mit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{und } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{ist } A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

$$\text{Mit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{ist } \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor (Skalarprodukt)

$$\text{Mit } a^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \quad \text{und } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{ist } a^T b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

$$\text{Mit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

$$\text{und } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{ist } Ax = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Mit } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$$

$$\text{und } \mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$$

$$\text{ist } \mathbf{y}^T \mathbf{B} = [\mathbf{y}^T \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b}_n]$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 b_{11} + y_2 b_{21} + \cdots + y_m b_{m1} \\ y_1 b_{12} + y_2 b_{22} + \cdots + y_m b_{m2} \\ \vdots \\ y_1 b_{1n} + y_2 b_{2n} + \cdots + y_m b_{mn} \end{bmatrix}^T$$

Multiplikation von Matrizen

$$\text{Mit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p]$$

$$\text{ist } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{B} \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{B} \end{bmatrix} = [\mathbf{A} \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A} \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A} \mathbf{b}_p]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_p \end{bmatrix},$$

3.4.

Matrizenmodelle (numerische Beispiele)

Wir wollen nun zeigen, wie sich die Matrizenrechnung zur Darstellung verschiedener ökonomischer Erscheinungen und Zusammenhänge verwenden läßt. Diese Darstellungen nennen wir Matrizenmodelle.

3.4.1. Einfache Teilverflechtung

Ein Beispiel für die Teilverflechtung haben wir in Aufgabe 3 des Abschnitts 3.3.7. kennengelernt (vgl. Abb. 3.2). Die Elemente der Matrix

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

geben an, wieviel Einzelteile der Art i für die Montage der Baugruppen j erforderlich sind. Die Elemente der Matrix

$$B = [b_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

geben an, wieviel Baugruppen der Art j für die Fertigung des Enderzeugnisses k erforderlich sind.

Ist die Produktionshöhe der Enderzeugnisse im Vektor

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$$

erfaßt, so läßt sich der Bedarf an Baugruppen durch den Vektor

$$y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$$

darstellen, wobei $y = Bz$ gilt.

Der Bedarf an Einzelteilen läßt sich im Vektor

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$$

erfassen, wobei $x = Ay$ gilt.

Aus $x = Ay$ und $y = Bz$ folgt durch Einsetzen

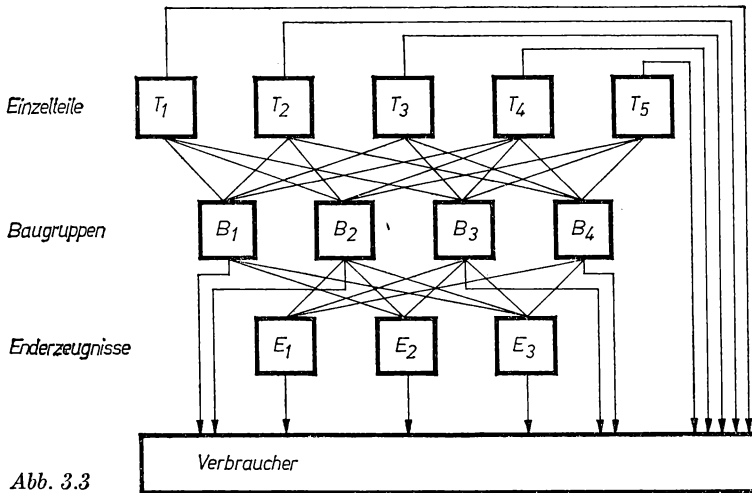
$$x = A(Bz) = Cz.$$

Hierbei geben die Elemente c_{ik} der Matrix $C = [c_{ik}]$ an, wieviel Einzelteile i über die Bauelemente in das Enderzeugnis k eingehen.

Bisher nahmen wir an, daß nur Enderzeugnisse ausgeliefert werden sollen, wie es auch Abb. 3.2 zeigt. Jetzt wollen wir zusätzlich beachten, daß neben den Enderzeugnissen auch Baugruppen und Einzelteile als Ersatzteile zu liefern sind, wie es Abb. 3.3 zeigt.

Die Lieferung an Enderzeugnissen ist durch den Vektor

$$z_0 = [z_1^{(0)} \ z_2^{(0)} \ z_3^{(0)}]^T$$



gegeben, die Lieferung an Baugruppen als Ersatzteile durch den Vektor

$$\mathbf{y}_0 = [y_1^{(0)} \ y_2^{(0)} \ y_3^{(0)} \ y_4^{(0)}]^T$$

und die Lieferung an Einzelteilen als Ersatzteile durch den Vektor

$$\mathbf{x}_0 = [x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ x_3^{(0)} \ x_4^{(0)} \ x_5^{(0)}]^T.$$

Die für diese Lieferungen notwendige Produktion an Enderzeugnissen, Baugruppen und Einzelteilen erfassen wir wie bisher in den Vektoren $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$. Dann gilt $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$, das heißt, es sind soviel Enderzeugnisse zu produzieren, wie die Lieferung vorsieht.

Dann ergibt sich die Produktion an Baugruppen aus

$$\mathbf{y} = \mathbf{Bz} + \mathbf{y}_0 \text{ und } \mathbf{z} = \mathbf{z}_0$$

$$\text{mit } \mathbf{y} = \mathbf{Bz}_0 + \mathbf{y}_0.$$

Die Produktionshöhe an Baugruppen ergibt sich aus dem Anteil für die Fertigung der Enderzeugnisse $\mathbf{Bz}_0$ und der Ersatzteillieferung $\mathbf{y}_0$.

Die Produktion an Einzelteilen ist gegeben durch:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ay} + \mathbf{x}_0$$

Die Produktionshöhe an Einzelteilen ergibt sich aus dem Anteil für die Fertigung aller zu produzierenden Baugruppen $\mathbf{Ay}$ und der Ersatzteillieferung an Einzelteilen $\mathbf{x}_0$.

Setzen wir in $\mathbf{x} = \mathbf{Ay} + \mathbf{x}_0$ für $\mathbf{y} = \mathbf{Bz}_0 + \mathbf{y}_0$ ein,

$$\text{so gilt } \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bz}_0 + \mathbf{y}_0) + \mathbf{x}_0$$

$$\text{oder } \mathbf{x} = (\mathbf{AB})\mathbf{z}_0 + \mathbf{Ay}_0 + \mathbf{x}_0.$$

Damit ergibt sich die Produktionshöhe an Einzelteilen aus dem Anteil für die Fertigung der zu liefernden Erzeugnisse $(AB)z_0$, dem Anteil für die Fertigung der zu liefernden Baugruppen Ay_0 und der Ersatzteillieferung an Einzelteilen x_0 .

Es soll die Lieferung an Enderzeugnissen wie in Aufgabe 3 aus Abschnitt 3.3.7. $z_0 = [300 \ 400 \ 500]^T$ betragen, und außerdem werden die Ersatzteillieferungen an Baugruppen $y_0 = [250 \ 200 \ 900 \ 150]^T$ und Einzelteilen $x_0 = [1200 \ 1000 \ 1500 \ 1600 \ 1700]^T$ gefordert. Dann müssen folgende Mengen produziert werden:

Enderzeugnisse $z = z_0 = [300 \ 400 \ 500]^T$

Baugruppen $y = [2 \ 650 \ 2 \ 400 \ 5 \ 500 \ 2 \ 050]^T$

Einzelteile $x = [25 \ 400 \ 22 \ 550 \ 29 \ 500 \ 35 \ 200 \ 37 \ 750]^T$

3.4.2. Kompliziertere Teileverflechtung

In Abb. 3.3 des Abschnittes 3.4.1. gingen die Einzelteile nicht direkt in die Enderzeugnisse ein, sondern nur über die Baugruppen, wie es Abb. 3.1 und 3.2 zeigen. Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß die Einzelteile auch direkt in die Enderzeugnisse eingehen. Das ist in Abb. 3.4 dargestellt.

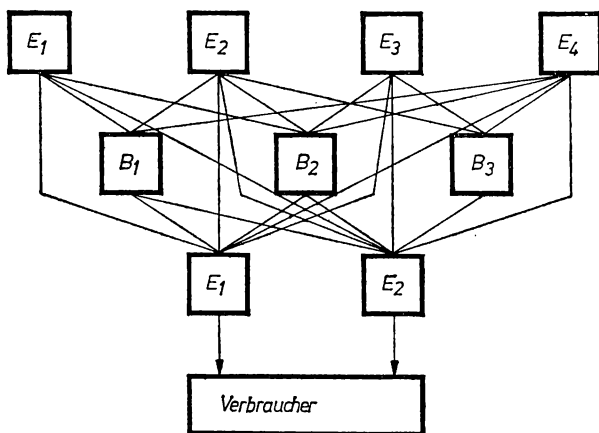


Abb. 3.4

Die Elemente der Matrix $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

geben an, wieviel Einzelteile der Art i für die Montage der Baugruppe j erforderlich sind.

Die Elemente der Matrix $B = [b_{jk}] = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

geben an, wieviel Baugruppen der Art j für die Fertigung des Enderzeugnisses k erforderlich sind.

Die Elemente der Matrix $\mathbf{D} = [d_{ik}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

geben an, wieviel Einzelteile der Art i in das Enderzeugnis k direkt eingehen.

Die Produktionshöhe der Enderzeugnisse erfassen wir im Vektor

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T,$$

den Bedarf an Baugruppen im Vektor

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$$

und den Bedarf an Einzelteilen im Vektor

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T.$$

Der Bedarf an Baugruppen ergibt sich aus

$$\mathbf{y} = \mathbf{Bz},$$

der Bedarf an Einzelteilen, die direkt in die Enderzeugnisse eingehen, aus

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Dz},$$

der Bedarf an Einzelteilen, die über die Baugruppen in die Enderzeugnisse eingehen, aus

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{AB}) \mathbf{z}$$

und der Gesamtbedarf an Einzelteilen aus

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{Dz} + (\mathbf{AB}) \mathbf{z} = (\mathbf{D} + (\mathbf{AB})) \mathbf{z}$$

3.4.3. Betriebliche Verflechtung

Wir betrachten einen Betrieb, der aus drei Teilbetrieben besteht, die durch Kooperationsbeziehungen miteinander verbunden sind.

Die Produktionshöhe der einzelnen Teilbetriebe beträgt x_1 , x_2 , x_3 . Die Kooperationslieferungen des ersten Teilbetriebes sind x_{12} und x_{13} , die Kooperationslieferungen des zweiten Teilbetriebes x_{21} und x_{23} , die Kooperationslieferungen des dritten Teilbetriebes x_{31} und x_{32} . Der Teil der Produktion, der für den Endverbrauch verbleibt, wird mit y_1 , y_2 , y_3 bezeichnet.

Zwischen den genannten Größen bestehen folgende Beziehungen:

$$y_1 = x_1 \quad \quad \quad - x_{12} - x_{13}$$

$$y_2 = x_2 - x_{21} \quad \quad \quad - x_{23}$$

$$y_3 = x_3 - x_{31} - x_{32}$$

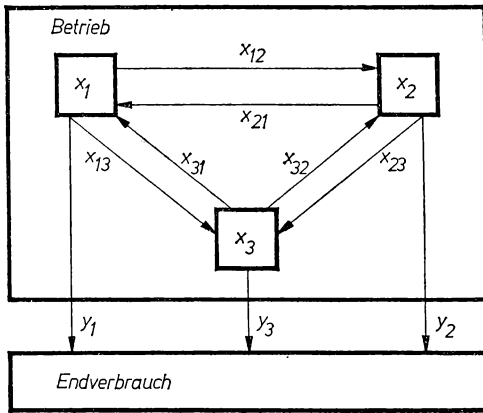


Abb. 3.5

Wir erfassen die Produktionshöhe im Vektor $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, den Endverbrauch im Vektor $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$

und die Kooperationslieferungen in der Matrix $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{bmatrix}$.

Dann können wir die genannten Beziehungen folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{X}\mathbf{s} \quad (\mathbf{s} \text{ ist der summierende Vektor}).$$

Sind die Kooperationslieferungen x_{ij} an einen bestimmten Teilbetrieb j dessen Produktionshöhe x_j proportional, so lassen sich direkte Verbrauchsnormen $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ verwenden. Die a_{ij} geben an, welche Menge der Teilbetrieb i dem Teilbetrieb j liefern muß, damit der Teilbetrieb j eine Mengeneinheit produzieren kann. Die direkten Verbrauchsnormen a_{ij} erfassen wir in einer Matrix der direkten Verbrauchsnormen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & 0 & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Matrix $\mathbf{A}$ läßt sich die Beziehung

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{X}\mathbf{s}$$

auch durch

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

darstellen. Wegen $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (E ist die Einheitsmatrix)
gilt

$$\mathbf{y} = E\mathbf{x} - A\mathbf{x}$$

oder

$$\boxed{\mathbf{y} = (E - A)\mathbf{x}}.$$

Wir bringen zu unseren bisherigen Darlegungen ein Zahlenbeispiel.
Für ein Berichtsjahr ergeben sich folgende Daten:

Tabelle 3.13

Teil- betrieb	Produktions- menge in Mengen- einheiten	Kooperationslieferungen in Mengeneinheiten an Teilbetrieb			Endverbrauch in Mengen- einheiten
		1	2	3	
1	10	0	2	4	4
2	20	5	0	10	5
3	40	5	15	0	20

Aus den Daten des Berichtsjahres läßt sich die Matrix der direkten
Verbrauchscoeffizienten gewinnen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{20} & \frac{4}{40} \\ \frac{5}{10} & 0 & \frac{10}{40} \\ \frac{5}{10} & \frac{15}{20} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $E - A$ und die Beziehung

$$\mathbf{y} = (E - A)\mathbf{x}$$

lassen sich für die Planung in einem Planjahr verwenden, wenn die
direkten Verbrauchsnormen über einen gewissen Zeitraum konstant
bleiben. Bezeichnen wir die Produktionshöhe im Planjahr mit $\mathbf{x}_p$
und den Endverbrauch des Planjahres mit $\mathbf{y}_p$, so gilt

$$\mathbf{y}_p = (E - A)\mathbf{x}_p.$$

Ist für das Planjahr die Produktionshöhe

$$\mathbf{x}_p = [20 \ 40 \ 60]^T$$

geplant, so ergibt sich der geplante Endverbrauch aus

$$\mathbf{y}_p = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Die Kooperationslieferungen im Planjahr zeigt die Matrix

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \cdot 40 & \frac{1}{10} \cdot 60 \\ \frac{1}{2} \cdot 20 & 0 & \frac{1}{4} \cdot 60 \\ \frac{1}{2} \cdot 20 & \frac{3}{4} \cdot 40 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 15 \\ 10 & 30 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4.4. Volkswirtschaftliche Verflechtung

Wir vereinfachen die Beziehungen in der Volkswirtschaft sehr stark, indem wir annehmen, daß die Volkswirtschaft aus drei Zweigen besteht. Diese Zweige verbrauchen ihre Produktion zum Teil selbst, zum Teil liefern sie an die anderen Zweige und stellen einen Teil ihrer Produktion für den Endverbrauch zur Verfügung.

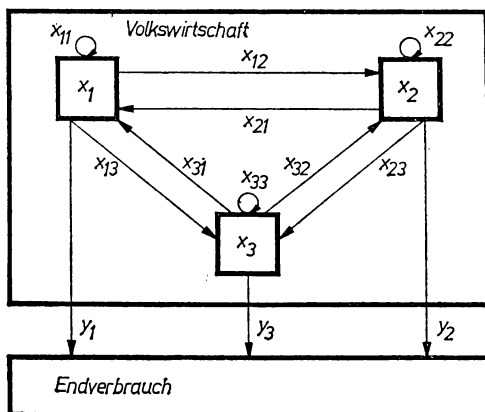


Abb. 3.6

Die Produktionshöhe der Zweige ist x_1, x_2, x_3 . Der Eigenverbrauch der Zweige ist x_{11}, x_{22}, x_{33} .

Die Lieferungen des ersten Zweiges an die beiden anderen Zweige sind x_{12}, x_{13} , die Lieferungen des zweiten Zweiges x_{21}, x_{23} und die Lieferungen des dritten Zweiges x_{31}, x_{32} . Die für den Endverbrauch verbleibende Produktion ist y_1, y_2, y_3 .

Zwischen den genannten Größen bestehen folgende Beziehungen:

$$y_1 = x_1 - x_{11} - x_{12} - x_{13}$$

$$y_2 = x_2 - x_{21} - x_{22} - x_{23}$$

$$y_3 = x_3 - x_{31} - x_{32} - x_{33}$$

Wir erfassen die Produktionshöhe im Vektor $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, den Endverbrauch im Vektor $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$, den Eigenverbrauch der Zweige und die Lieferungen zwischen den Zweigen in der Matrix

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Die oben erfaßten Beziehungen können wir dann wie im Abschnitt 3.4.3. durch

$$y = x - Xx$$

darstellen. Genau wie im Abschnitt 3.4.3. können wir unter den dort genannten Bedingungen eine Matrix der direkten Verbrauchsnormen einführen:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{bmatrix}$$

Dann gilt wieder

$$y = (E - A)x.$$

Auch die volkswirtschaftliche Verflechtung wollen wir an einem Zahlenbeispiel verdeutlichen (Tabelle 3.14).

Tabelle 3.14 Daten für das Berichtsjahr

Zweig	Produktions- menge in Mengen- einheiten	Lieferungen (in Mengeneinheiten) an den Zweig			Endverbrauch in Mengen- einheiten
		1	2	3	
1	10	1	2	6	1
2	20	3	4	3	10
3	30	4	2	9	15

Die Matrix der direkten Verbrauchsnormen ist

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{20} & \frac{6}{30} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{20} & \frac{3}{30} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{20} & \frac{9}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$E - A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}.$$

Bleiben die direkten Verbrauchsnormen konstant, so können wir sie für die Planung im Planjahr benutzen. Bezeichnen wir wieder die Produktion im Planjahr mit x_p und den geplanten Endverbrauch mit y_p , so gilt

$$y_p = (E - A) x_p.$$

Ist für das Planjahr die Produktion $x_p = [10 \ 30 \ 20]^T$ geplant, so ist der geplante Endverbrauch

$$y_p = (E - A) \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Den Eigenverbrauch der Zweige und die Lieferungen der Zweige untereinander zeigt die Matrix

$$X_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \cdot 10 & \frac{1}{10} \cdot 30 & \frac{1}{5} \cdot 20 \\ \frac{3}{10} \cdot 10 & \frac{1}{5} \cdot 30 & \frac{1}{10} \cdot 20 \\ \frac{2}{5} \cdot 10 & \frac{1}{10} \cdot 30 & \frac{3}{10} \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.5.

Linearkombination von Vektoren

Für unsere weiteren Darlegungen benötigen wir den Begriff der Linearkombination, der u. a. bei der Behandlung der Gleichungssysteme, Ungleichungssysteme und der linearen Optimierung eine Rolle spielt.

1

Wir multiplizieren den Vektor $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

mit dem Skalar $\alpha_1 = 2$, den Vektor $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ mit

dem Skalar $\alpha_2 = -1$ und addieren die Ergebnisse.

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Den Ausdruck $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$ nennen wir eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$.

Definition 1 $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$ heißt *Linearkombination der Vektoren* $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, n$).
(Die α_i ($i = 1, \dots, n$) sind Skalare)

Die Linearkombination liefert einen Vektor $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$. Wir sagen auch, daß der Vektor $\mathbf{a}$ eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, n$) ist.

2

Im Beispiel 1 ergibt die Linearkombination den Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 &= 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -4 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 & = & 19 \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 & = & 15 \end{array}$$

läßt sich mit Hilfe einer Linearkombination darstellen.

$$\text{Mit } \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 15 \end{bmatrix}$$

können wir das Gleichungssystem umformen in

 $\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 = \mathbf{a}$. Hier sind x_1, x_2, x_3 die Skalare.

Von allen Linearkombinationen sind für uns besonders jene interessant, in denen die *Skalare* keine negativen Zahlen sind, in denen also $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) gilt.

Definition 2 $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbf{a}_i$ mit $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) heißt *nicht-negative Linearkombination*.

4

Beispiel 1 ist keine nichtnegative Linearkombination, denn

$$\alpha_2 = -1 < 0.$$

5

$3\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3$ ist eine nichtnegative Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

6

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 13 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 15, \end{array}$$

in dem die Variablen x_1, x_2, x_3 keine negativen Werte annehmen sollen, können wir mit Hilfe einer nichtnegativen Linearkombination schreiben.

$$\text{Mit } \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

gilt $\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 = \mathbf{a}$ mit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Unter allen nichtnegativen Linearkombinationen interessieren uns besonders jene, in denen die Summe der Skalare eins ist;

$$\text{also } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1;$$

Definition 3 $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$ mit $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$)

und $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ heißt *konvexe Linearkombination*.

7

In den Beispielen 1 und 5 liegen keine konvexen Linearkombinationen vor.

8

$\frac{1}{4} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{a}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{a}_3$ ist eine konvexe Linearkombination:

9

Wir betrachten die konvexe Linearkombination der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ also } \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Wir ordnen den beiden Vektoren Punkte in einem Koordinatensystem zu. Dem Vektor $\mathbf{a}_1$ ordnen wir den Punkt mit den Koordinaten $(1; 4)$ und dem Vektor $\mathbf{a}_2$ den Punkt mit den Koordinaten $(5; 2)$ zu.

Jede konvexe Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ liefert einen Punkt auf der Verbindungsstrecke der Punkte (Vektoren)

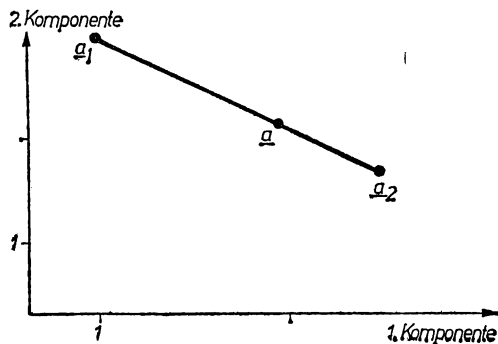


Abb. 3.7

$\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$;

$$\frac{1}{3} \mathbf{a}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \mathbf{a} \text{ (siehe Abb. 3.7)}$$

10

Wir betrachten die konvexe Linearkombination der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ also } \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3$$

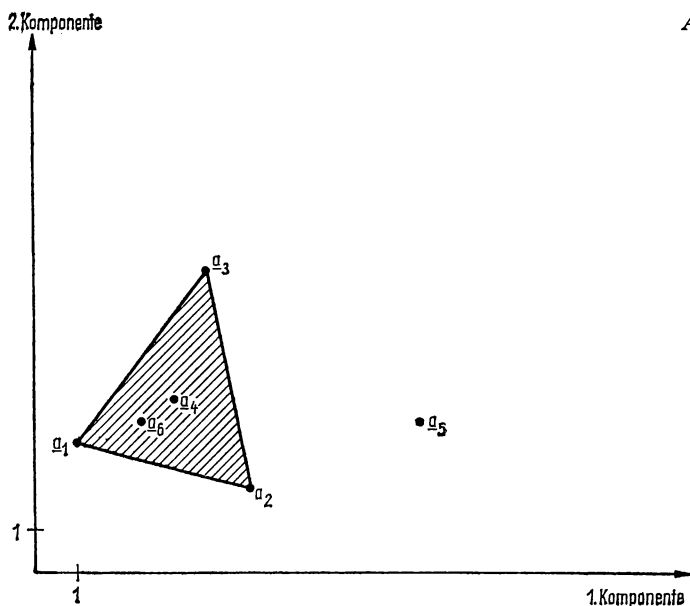
$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \text{ und } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Wie im Beispiel 9 ordnen wir den Vektoren Punkte im Koordinatensystem zu.

Jede konvexe Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ liefert einen Punkt im Dreieck oder auf dem Rande des Dreiecks.

$$\frac{1}{3} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{a}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_4 \text{ liegt innerhalb des Dreiecks.}$$

$$1\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_5 \text{ liegt außerhalb des Dreiecks.}$$



$$2\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_6 \text{ liegt innerhalb des Dreiecks,}$$

obwohl keine konvexe Linearkombination vorliegt. Das hängt damit zusammen, daß sich der Vektor $\mathbf{a}_6$ auch als konvexe Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ darstellen läßt;

$$\mathbf{a}_6 = \frac{11}{19}\mathbf{a}_1 + \frac{9}{38}\mathbf{a}_2 + \frac{7}{38}\mathbf{a}_3.$$

(Im Abschnitt 4.4. werden wir zeigen, wie wir diese Skalare $\frac{11}{19}, \frac{9}{38}$ und $\frac{7}{38}$ auf einfachere Art und Weise finden können.)

11

Ein Betrieb kann zwei Produkte herstellen, die über zwei Maschinen laufen müssen. Die Maschinenzeitnormen und die Maschinenzeitfonds sind der Tabelle 3.15 zu entnehmen.

Tabelle 3.15

Maschine	Produkt		Maschinenzeitfonds
	1	2	
1	2	4	200
2	3	1	240

Ein zulässiger Produktionsplan liegt vor, wenn die Fonds nicht überschritten werden. Die Produktionspläne erfassen wir in Vektoren mit zwei Komponenten, die erste Komponente gibt die Produktionshöhe für das erste Produkt und die zweite Komponente die Produktionshöhe für das zweite Produkt an.

Zulässige Produktionspläne sind z. B.:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Jede konvexe Linearkombination zulässiger Produktionspläne ist wieder ein zulässiger Produktionsplan, z. B.:

$$\frac{1}{8}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{8}\mathbf{x}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{x}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 40 \\ 115 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_5.$$

**Aufgaben
zu 3.5.**

1

Bilden Sie Linearkombinationen der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mit folgenden Skalaren:

	α_1	α_2	α_3	α_4
a)	4	2	1	-2
b)	1	3	4	5
c)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
d)	1	0	0	0
e)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(L)

2

Welche der Linearkombinationen in Aufgabe 1 ist

- a) eine nichtnegative Linearkombination,
- b) eine konvexe Linearkombination?

(L)

3

Stellen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_1 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

mit Hilfe einer Linearkombination dar!

(L)

4

Stellen Sie das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 500 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 600 \end{aligned}$$

mit Hilfe einer Linearkombination dar!

(L)

5

Stellen Sie die Vektoren $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ in einem Koordinatensystem dar!

Bilden Sie eine konvexe Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, und stellen Sie die konvexe Linearkombination im gleichen Koordinatensystem dar!

(L)

6

Stellen Sie die Vektoren $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ in einem Koordinatensystem dar!

Bilden Sie eine konvexe Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, und stellen Sie die konvexe Linearkombination im gleichen Koordinatensystem dar!

(L)

Ein Betrieb kann drei Produkte herstellen, die über drei Maschinen laufen müssen. Die Maschinenzeitnormen und die Maschinenzeitfonds sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Maschine	Produkt			Maschinenzeit-fonds
	1	2	3	
1	1	2	1	100
2	3	4	1	150
3	1	5	2	300

Suchen Sie durch Probieren drei Produktionspläne, und erfassen Sie diese in drei Vektoren!

Bilden Sie vier konvexe Linearkombinationen der drei Vektoren, und überprüfen Sie, ob diese konvexen Linearkombinationen zulässige Produktionspläne liefern! (L)

3.6.

Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit

Im zurückliegenden Abschnitt haben wir Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ betrachtet,

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n:$$

Diese Linearkombinationen liefern wieder einen Vektor $\mathbf{a}$,

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{a}.$$

Wir sagten auch, daß wir den Vektor $\mathbf{a}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ dargestellt haben.

Wir fragen zunächst, ob wir den Nullvektor $\mathbf{o}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ darstellen können,

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{o}.$$

Die Antwort darauf lautet „ja“, denn wir können alle α_i ($i = 1, \dots, n$) gleich Null setzen und erhalten den Nullvektor,

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{o}.$$

Das ist trivial und gilt immer. Wir sagen, wir haben den Nullvektor auf triviale Weise als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ dargestellt (trivial, weil alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$ sind).

Nun taucht die Frage auf, ob wir auch auf nichttriviale Weise den Nullvektor als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ darstellen können. Diese Frage ist schwieriger zu beantworten. Das hängt nämlich von den Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ ab. Manchmal läßt sich aus den Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ der Nullvektor auf nichttriviale Weise bilden (nicht alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind null). Wählen wir andere Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, so läßt sich eventuell der Nullvektor nicht auf nichttriviale Weise (das heißt nur auf triviale Weise) als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ darstellen.

1

Aus den Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ läßt sich der Nullvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ nur auf triviale Weise als Linearkombination von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ darstellen, also

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen das zeigen und setzen deshalb

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{o}, \text{ also}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Als Gleichungssystem ergibt sich

$$1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 = 0$$

$$0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 = 0,$$

d. h., es gibt nur die eine Lösung $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0$.

2

Aus den Vektoren $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ läßt sich der Nullvektor auch auf triviale Weise bilden;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir können den Nullvektor aber außerdem auf nichttriviale Weise darstellen,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Im Abschnitt 4.4. werden wir zeigen, wie wir auf einfachere Art und Weise die Skalare finden können.)

Definition 1 Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ heißen linear unabhängig, wenn der Nullvektor $\mathbf{o}$ nur auf triviale Weise als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ dargestellt werden kann, das heißt, wenn die Gleichung

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{o}$$

nur die Lösung $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ hat.

Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

3

Die Vektoren des Beispiels 1 sind linear unabhängig, die Vektoren des Beispiels 2 sind linear abhängig.

4

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind ebenfalls linear unabhängig. Auch das wollen wir jetzt zeigen.

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

schreiben wir als Gleichungssystem:

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$$

$$0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$$

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$$

d. h., es gibt nur die eine Lösung $\alpha_1 = 0$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = 0.$$

5

Die Vektoren $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig, denn aus

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$$

folgt, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ist. Das wollen wir jetzt zeigen.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

schreiben wir als Gleichungssystem

$$\text{I } 1 \cdot \alpha_1 + 2 \alpha_2 + 1 \alpha_3 = 0$$

$$\text{II } 0 \cdot \alpha_1 + (-1) \alpha_2 + 1 \alpha_3 = 0$$

$$\text{III } 1 \cdot \alpha_1 + 0 \alpha_2 + (-1) \alpha_3 = 0.$$

Addieren wir die Gleichungen II und III, so erhalten wir

$$\text{Ia } 1 \cdot \alpha_1 + (-1) \alpha_2 + 0 \alpha_3 = 0.$$

Addieren wir die Gleichungen I und III, so erhalten wir

$$\text{Ib } 2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + 0 \alpha_3 = 0.$$

Multiplizieren wir Ia mit 2 und addieren dann zu Ib, so erhalten wir

$$4 \alpha_1 = 0$$

$$\text{oder } \alpha_1 = 0.$$

Setzen wir $\alpha_1 = 0$ in Ib ein, so erhalten wir

$$2 \alpha_2 = 0$$

$$\text{oder } \alpha_2 = 0.$$

Setzen wir $\alpha_1 = 0$ in III ein; erhalten wir

$$-\alpha_3 = 0$$

oder $\alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$$

wird *nur* erfüllt für $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Danach sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig.

Im Abschnitt 3.8. werden wir lernen, wie wir auf einfache Weise überprüfen können, ob gegebene Vektoren $a_1, \dots, a_n$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

3.7.

Elementare Basistransformation

Zum Schluß des letzten Abschnitts haben wir angekündigt, daß wir lernen werden, wie wir die lineare Unabhängigkeit oder lineare Abhängigkeit gegebener Vektoren $a_1, \dots, a_n$ überprüfen können.

Diese Überprüfung ist leicht möglich mit Hilfe der elementaren Basistransformation, mit der wir uns jetzt beschäftigen.

Wenn die folgenden Darlegungen manchmal sehr theoretisch erscheinen, so möchten wir darauf aufmerksam machen, daß wir dann mit ihrer Hilfe praktische Aufgaben lösen können.

Die elementare Basistransformation ist ein zentraler Begriff, mit dem wir anschließend

- die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit gegebener Vektoren überprüfen,
- einen festen Vektor als Linearkombination gegebener Vektoren darstellen (Aufgabenstellung aus 3.5.),
- die Lösbarkeit eines Gleichungssystems überprüfen,
- Gleichungssysteme lösen,
- Ungleichungssysteme lösen,
- lineare Optimierungsaufgaben lösen:

Bevor wir den Begriff der elementaren Basistransformation kennenlernen, wollen wir den Begriff der Basis klären.

1

Im Beispiel 1 aus 3.6. haben wir *zwei linear unabhängige* Vektoren mit *zwei* Komponenten kennengelernt, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Im Beispiel 2 aus 3.6. stellten wir *zwei linear abhängige* Vektoren mit *zwei* Komponenten vor, $a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren e_1 und e_2 bilden eine Basis der Vektoren mit zwei Komponenten. a_1 und a_2 bilden keine Basis.

Definition 1 n linear unabhängige Vektoren mit n Komponenten heißen Basis der Vektoren mit n Komponenten.

Wir nennen die Vektoren einer Basis Basisvektoren.

2

Die Vektoren $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ des Beispiels 4 aus

3.6. bilden eine Basis der Vektoren mit drei Komponenten, denn es sind *drei* linear unabhängige Vektoren mit *drei* Komponenten.

Im Beispiel 1 haben wir eine Basis für die Vektoren mit zwei Komponenten kennengelernt, im Beispiel 2 eine Basis für die Vektoren mit drei Komponenten. In beiden Beispielen handelt es sich um die Einheitsvektoren. Es läßt sich zeigen, daß der folgende Satz gilt:

Satz 1 Die n Einheitsvektoren mit n Komponenten bilden eine Basis für die Vektoren mit n Komponenten.

Nun dürfen wir nicht annehmen, daß nur Einheitsvektoren eine Basis bilden.

3

Im Beispiel 5 aus 3.6. haben wir festgestellt, daß die Vektoren

$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind. Sie

bilden also eine Basis für die Vektoren mit drei Komponenten.

Die Basis spielt eine bedeutende Rolle bei der Darstellung von Vektoren. Es gilt:

Satz 2 Jeder Vektor c mit n Komponenten läßt sich eindeutig als Linearkombination einer Basis $b_1, \dots, b_n$ für die Vektoren mit n Komponenten darstellen.

$$c = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$$

4

Die Vektoren e_1 und e_2 aus Beispiel 1 bilden eine Basis für die Vektoren mit zwei Komponenten.

Der Vektor $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ist eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren e_1 und e_2 darzustellen. Es gilt

$$c = 4e_1 + 3e_2.$$

Die Skalare 4 und 3 ergeben sich aus der Gleichung

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2$$

$$\text{bzw. } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir das Gleichungssystem

$$4 = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2$$

$$3 = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2$$

mit der eindeutigen Lösung $c_1 = 4$; $c_2 = 3$.

5

Die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ aus Beispiel 2 bilden eine Basis für die Vektoren mit drei Komponenten.

Der Vektor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ darzustellen:

$$\text{Es gilt } \mathbf{c} = (-1)\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3.$$

Die Skalare -1 ; 4 ; 1 ergeben sich aus der Gleichung

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$$

$$\text{bzw. } \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir das Gleichungssystem

$$-1 = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$

$$4 = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$

$$1 = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3$$

mit der eindeutigen Lösung $c_1 = -1$; $c_2 = 4$; $c_3 = 1$.

6

Die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ aus Beispiel 3 bilden eine Basis für die Vektoren mit drei Komponenten. Der Vektor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ darstellbar. Es gilt

$$\mathbf{c} = \frac{5}{2} \mathbf{b}_1 + \left(-\frac{5}{2}\right) \mathbf{b}_2 + \frac{3}{2} \mathbf{b}_3.$$

Die Skalare $\frac{5}{2}$; $-\frac{5}{2}$; $\frac{3}{2}$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + c_3 \mathbf{b}_3$$

$$\text{bzw. } \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & -1 & = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \\ \text{II} & 4 & = 0 \cdot c_1 + (-1) \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \\ \text{III} & 1 & = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + (-1) \cdot c_3 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $c_1 = \frac{5}{2}$, $c_2 = -\frac{5}{2}$, $c_3 = \frac{3}{2}$.

Wir wollen die Berechnung vorführen.

Wir subtrahieren die Gleichung III von der Gleichung I und erhalten

$$\text{Ia} \quad -2 = 2 \cdot c_2 + 2c_3$$

Wir multiplizieren die Gleichung II mit 2 und addieren diese Gleichung zu Ia. Wir erhalten

$$6 = 4c_3$$

$$\text{bzw. } c_3 = \frac{3}{2}.$$

Setzen wir $c_3 = \frac{3}{2}$ in Ia ein, so erhalten wir $c_2 = -\frac{5}{2}$.

Setzen wir $c_3 = \frac{3}{2}$ in III ein, so erhalten wir $c_1 = \frac{5}{2}$.

Wie die Skalare mit Hilfe der elementaren Basistransformation berechnet werden, wird im Abschnitt 4. bei der Lösung von Gleichungssystemen gezeigt.

Definition 2 Die eindeutig bestimmten Skalare $c_1, \dots, c_n$ aus Satz 2 heißen Koordinaten des Vektors c bezüglich der Basis $b_1, \dots, b_n$.

7

Im Beispiel 4 besitzt der Vektor $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis e_1, e_2 die Koordinaten 4; 3.

Im Beispiel 5 besitzt der Vektor $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 die Koordinaten $-1; 4; 1$.

Im Beispiel 6 besitzt der Vektor $c = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 die Koordinaten $\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}$.

Beispiel 4 und 5 zeigen, daß die Koordinaten des Vektors c bezüglich einer Basis, die nur aus Einheitsvektoren besteht, mit den Komponenten des Vektors c übereinstimmen.

Satz 3

Wählen wir die Einheitsvektoren als Basis, so stimmen die Koordinaten eines Vektors bezüglich dieser Basis mit den Komponenten des Vektors überein.

Für unsere weiteren Darlegungen wollen wir die Darstellung eines Vektors c bezüglich der Basis $b_1, \dots, b_n$

$$c = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$$

vereinfachen. Dazu benutzen wir zwei Spalten. In die linke Spalte setzen wir die Basisvektoren, in die rechte Spalte die zugehörigen Koordinaten.

Tabelle 3.16

Basisvektoren	Koordinaten des Vektors c
b_1	c_1
b_2	c_2
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
b_n	c_n

Wir wollen aber immer beachten, daß die Tabelle folgendermaßen zu lesen ist:

$$c = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n.$$

8

Für die Beispiele 4, 5 und 6 ergeben sich folgende Darstellungen:

Tabelle 3.17

Beispiel 4:

	c
e_1	4
e_2	3

Tabelle 3.18

Beispiel 5:

	c
e_1	-1
e_2	4
e_3	1

Tabelle 3.19

Beispiel 6:

	c
b₁	$\frac{5}{2}$
b₂	$-\frac{5}{2}$
b₃	$\frac{3}{2}$

Die Darstellung der Koordinaten gemäß Tabelle 3.16 ist besonders vorteilhaft; wenn wir bezüglich der gleichen Basis verschiedene Vektoren darstellen wollen.

9

Tabelle 3.20

	c₁	c₂	c₃
b₁	3	1	0
b₂	2	0	— 5
b₃	— 4	— 4	— 1
b₄	5	2	1

Diese Tabelle ist folgendermaßen zu lesen:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= 3 \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 + (-4) \cdot \mathbf{b}_3 + 5 \cdot \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{c}_2 &= 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + (-4) \cdot \mathbf{b}_3 + 2 \cdot \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{c}_3 &= 0 \cdot \mathbf{b}_1 + (-5) \cdot \mathbf{b}_2 + (-1) \cdot \mathbf{b}_3 + 1 \cdot \mathbf{b}_4. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, wie wir die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis umrechnen können in die Koordinaten bezüglich einer anderen Basis.

Wir führen an einem Beispiel die Umrechnung der Koordinaten vor.

10

Der Vektor **c** hat bezüglich der Basis **b₁, b₂** die Koordinaten 4 und 5, es gilt also $\mathbf{c} = 4\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2$.

Der Vektor **x** hat bezüglich der Basis **b₁, b₂** die Koordinaten 8 und 1, es gilt also $\mathbf{x} = 8\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2$.

Tabelle 3.21

	c	x
b₁	4	8
b₂	5	1

Wir wählen jetzt die Vektoren c und b_2 als Basis und wollen die Koordinaten von b_1 und x bezüglich dieser neuen Basis c, b_2 bestimmen.

$$c = 4b_1 + 5b_2$$

$$x = 8b_1 + 1b_2$$

Aus $c = 4b_1 + 5b_2$

$$\text{folgt } b_1 = \frac{1}{4}c - \frac{5}{4}b_2.$$

Setzen wir $b_1 = \frac{1}{4}c - \frac{5}{4}b_2$ in $x = 8b_1 + 1b_2$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= 8\left(\frac{1}{4}c - \frac{5}{4}b_2\right) + 1b_2 \\ &= 2c - 10b_2 + 1b_2 \\ &= 2c - 9b_2 \end{aligned}$$

Also erhalten wir bezüglich der neuen Basis c, b_2 folgende Darstellungen für b_1 und x :

$$b_1 = \frac{1}{4}c - \frac{5}{4}b_2$$

$$x = 2c - 9b_2.$$

b_1 hat bezüglich der neuen Basis c, b_2 die Koordinaten $\frac{1}{4}$ und $-\frac{5}{4}$.

x hat bezüglich der neuen Basis c, b_2 die Koordinaten 2 und -9 .

Tabelle 3.22

	b_1	x
c	$\frac{1}{4}$	2
b_2	$-\frac{5}{4}$	-9

Es taucht nun die Frage auf, ob wir die Koordinaten der Tabelle 3.21 nicht einfacher in die Koordinaten der Tabelle 3.22 umrechnen können. Im Beispiel 12 dieses Abschnittes werden wir zeigen, wie wir diese Umrechnung einfacher vornehmen können. Wir wollen festhalten, daß wir aus der alten Basis b_1, b_2 den Basisvektor b_1 herausgenommen haben und dafür den Vektor c in die Basis hineingenommen haben.

Definition 3 *Der Übergang von einer gegebenen Basis zu einer neuen Basis, die sich von der alten in einem Vektor unterscheidet, heißt elementare Basistransformation.*

11

Im Beispiel 10 haben wir eine elementare Basistransformation durchgeführt.

Wir wollen nun zeigen, wie sich bei einer elementaren Basistransformation die Koordinaten verändern.

Satz 4

Bilden die Vektoren $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n$ eine Basis und gilt

$$x = x_1 b_1 + \dots + x_{i-1} b_{i-1} + x_i b_i + x_{i+1} b_{i+1} + \dots + x_n b_n$$

$$c = c_1 b_1 + \dots + c_{i-1} b_{i-1} + c_i b_i + c_{i+1} b_{i+1} + \dots + c_n b_n$$

mit $c_i \neq 0$, so bilden auch die Vektoren

$b_1, \dots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \dots, b_n$ eine Basis, und es gilt

$$b_i = -\frac{c_1}{c_i} b_1 - \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i} b_{i-1} + \frac{1}{c_i} c - \frac{c_{i+1}}{c_i} b_{i+1} - \dots - \frac{c_n}{c_i} b_n$$

$$x = (x_1 - \delta c_1) b_1 + \dots + (x_{i-1} - \delta c_{i-1}) b_{i-1} + \delta c$$

$$+ (x_{i+1} - \delta c_{i+1}) b_{i+1} + \dots + (x_n - \delta c_n) b_n \text{ mit } \delta = \frac{x_i}{c_i};$$

Dieser Satz gestattet die Umrechnung der Koordinaten bei einer elementaren Basistransformation.

Tabelle 3.23

alte Basis	↓	
	c	x
b_1	c_1	x_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_{i-1}	c_{i-1}	x_{i-1}
$\leftarrow b_i$	c_i	x_i
b_{i+1}	c_{i+1}	x_{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	x_n

Tabelle 3.24

neue Basis	b_i	x
b_1	$-\frac{c_1}{c_i}$	$x_1 - \delta c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_{i-1}	$-\frac{c_{i-1}}{c_i}$	$x_{i-1} - \delta c_{i-1}$
c	$\frac{1}{c_i}$	$\delta = \frac{x_i}{c_i}$
b_{i+1}	$-\frac{c_{i+1}}{c_i}$	$x_{i+1} - \delta c_{i+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	$-\frac{c_n}{c_i}$	$x_n - \delta c_n$

Durch die Pfeile deuten wir an, daß Vektor b_i aus der Basis entfernt und c in die Basis hineingenommen wird. Das Element c_i im Schnittpunkt der verlängerten Pfeile heißt *Hauptelement der Basistransformation*, es darf niemals Null sein.

Wir führen jetzt den Beweis des Satzes:

Wir lösen $c = c_1 b_1 + \cdots + c_{i-1} b_{i-1} + c_i b_i + c_{i+1} b_{i+1} + \cdots + c_n b_n$ nach b_i auf und erhalten damit die Koordinaten von b_i bezüglich der neuen Basis

$$b_i = -\frac{c_1}{c_i} b_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i} b_{i-1} + \frac{1}{c_i} c - \frac{c_{i+1}}{c_i} b_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i} b_n.$$

Wir setzen b_i in $x = x_1 b_1 + \cdots + x_{i-1} b_{i-1} + x_i b_i + x_{i+1} b_{i+1} + \cdots + x_n b_n$ ein und erhalten damit die Koordinaten von x bezüglich der neuen Basis.

$$x = x_1 b_1 + \cdots + x_{i-1} b_{i-1} + x_i \left(-\frac{c_1}{c_i} b_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i} b_{i-1} + \frac{1}{c_i} c - \frac{c_{i+1}}{c_i} b_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i} b_n \right) + x_{i+1} b_{i+1} + \cdots + x_n b_n$$

Nach Auflösung der Klammer und Zusammenfassung entsprechen der Größen erhalten wir

$$x = \left(x_1 - c_1 \frac{x_i}{c_i} \right) b_1 + \cdots + \left(x_{i-1} - c_{i-1} \frac{x_i}{c_i} \right) b_{i-1} + \frac{x_i}{c_i} c + \left(x_{i+1} - c_{i+1} \frac{x_i}{c_i} \right) b_{i+1} + \cdots + \left(x_n - c_n \frac{x_i}{c_i} \right) b_n.$$

Setzen wir $\frac{x_i}{c_i} = \delta$, so erreichen wir

$$x = (x_1 - \delta c_1) b_1 + \cdots + (x_{i-1} - \delta c_{i-1}) b_{i-1} + \delta c + (x_{i+1} - \delta c_{i+1}) b_{i+1} + \cdots + (x_n - \delta c_n) b_n.$$

Damit liegen die Koordinaten von x bezüglich der neuen Basis in der Form vor, die wir im Satz genannt haben. Sie erkennen gewisse Regelmäßigkeiten bei der Umrechnung der Koordinaten bei der elementaren Basistransformation. Wir wollen diese Regelmäßigkeiten in vier Umrechnungsregeln formulieren, die uns angeben, wie wir die Koordinaten der Tabelle 3.24 aus denen der Tabelle 3.23 gewinnen.

- Das Hauptelement c_i wird durch den Kehrwert $\frac{1}{c_i}$ ersetzt.
- Mit dem Kehrwert $\frac{1}{c_i}$ des Hauptelementes multiplizieren wir die übrigen Elemente der Zeile, in der das Hauptelement steht,
$$\frac{1}{c_i} \cdot x_i = \frac{x_i}{c_i} = \delta$$
- Mit dem negativen Kehrwert $-\frac{1}{c_i}$ des Hauptelementes multiplizieren wir die übrigen Elemente der Spalte, in der das Hauptelement steht,

$$-\frac{1}{c_i} \cdot c_1, \cdots, -\frac{1}{c_i} \cdot c_{i-1}, -\frac{1}{c_i} \cdot c_{i+1}, \cdots, -\frac{1}{c_i} \cdot c_n$$

- d) Alle übrigen Koordinaten $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ der Tabelle 3.23 rechnen wir auf folgende Weise um:
 Vom alten Wert $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ wird das δ -fache des benachbarten Elementes $(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)$ der Spalte c , d. h. der Spalte mit dem Hauptelement, subtrahiert, also $x_1 - \delta c_1, \dots, x_{i-1} - \delta c_{i-1}, x_{i+1} - \delta c_{i+1}, \dots, x_n - \delta c_n$.

12

Im Beispiel 10 erfaßten wir die alten Koordinaten in der Tabelle 3.21.

	$\downarrow$ c	x
$\leftarrow b_1$	4	8
b_2	5	1

Wir wollten den Vektor b_1 aus der Basis entfernen und dafür den Vektor c in die Basis hineinnehmen. Wir versehen die beiden Vektoren mit einem Pfeil. Hauptelement der Basistransformation ist 4 (liegt im Schnittpunkt der verlängerten Pfeile). Wir rahmen das Hauptelement ein.

Die Tabelle 3.22 mit den neuen Koordinaten hat den gleichen Aufbau wie Tabelle 3.21, nur die Plätze von b_1 und c sind vertauscht.

	b_1	x
c	$\frac{1}{4}$	2
b_2	$-\frac{5}{4}$	-9

Wir berechnen jetzt die neuen Koordinaten nach den vier angegebenen Regeln.

- An die Stelle der 4 tritt der Kehrwert $\frac{1}{4}$.
- Mit $\frac{1}{4}$ multiplizieren wir die benachbarte 8,

$$\frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{8}{4} = 2 = \delta.$$
- Mit $-\frac{1}{4}$ multiplizieren wir 5, also

$$-\frac{1}{4} \cdot 5 = -\frac{5}{4}.$$
- Als einziges Element haben wir noch die 1 umzurechnen,

$$1 - \delta \cdot 5 = 1 - 2 \cdot 5 = -9.$$

Wir kennen die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{c}$ und $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$:

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3 + 1\mathbf{b}_4$$

$$\mathbf{x} = 10\mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4$$

Tabelle 3.25

		↓		
alte Basis			$\mathbf{c}$	$\mathbf{x}$
	$\mathbf{b}_1$		2	10
←	$\mathbf{b}_2$		3	9
	$\mathbf{b}_3$		5	4
	$\mathbf{b}_4$		1	2

Wir wollen die Koordinaten bezüglich der neuen Basis $\mathbf{b}_1, \mathbf{c}, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ bestimmen. Wir nehmen also $\mathbf{b}_2$ aus der Basis heraus und dafür $\mathbf{c}$ in die Basis hinein. Hauptelement der Basistransformation ist 3.

Tabelle 3.26

neue Basis	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{b}_1$	$-\frac{2}{3}$	4
$\mathbf{c}$	$\frac{1}{3}$	3
$\mathbf{b}_3$	$-\frac{5}{3}$	-11
$\mathbf{b}_4$	$-\frac{1}{3}$	-1

In der Tabelle 3.26 sind gegenüber Tabelle 3.25 die Plätze von $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{c}$ vertauscht.

a) Der Kehrwert des Hauptelementes 3 ist $\frac{1}{3}$.

b) Mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren wir die benachbarte 9,

$$\text{also } \frac{1}{3} \cdot 9 = 3 = \delta:$$

c) Mit $-\frac{1}{3}$ multiplizieren wir 2; 5 und 1,

$$\text{also } -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}; \quad -\frac{1}{3} \cdot 5 = -\frac{5}{3}; \quad -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$$

d) Wir haben die 10; 4 und 2 der Spalte $\mathbf{x}$ umzurechnen.

$$10 - \delta \cdot 2 = 10 - 3 \cdot 2 = 4; \quad 4 - 3 \cdot 5 = -11; \quad 2 - 3 \cdot 1 = -1.$$

Selbstverständlich können wir mit Hilfe unserer Umrechnungsregeln auch die Koordinaten von mehreren Vektoren umrechnen.

14

b_1, b_2, b_3, b_4 stellen eine Basis dar. Gegeben sind die Koordinaten der Vektoren c, x_1, x_2, x_3 .

$$c = 1b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4$$

$$x_1 = 11b_1 + 8b_2 + 6b_3 + 5b_4$$

$$x_2 = 10b_1 + 15b_2 + 9b_3 + 7b_4$$

$$x_3 = 20b_1 + 13b_2 + 3b_3 + 12b_4$$

Tabelle 3.27

	c	x_1	x_2	x_3
b_1	1	11	10	20
b_2	2	8	15	13
$\leftarrow b_3$	3	6	9	3
b_4	4	5	7	12

Wir wollen b_3 aus der Basis herausnehmen und c hineinbringen. Die Koordinate 3 des Vektors c wird Hauptelement.

Tabelle 3.28

	b_3	x_1	x_2	x_3
b_1	$-\frac{1}{3}$	9	7	19
b_2	$-\frac{2}{3}$	4	9	11
c	$\frac{1}{3}$	2	3	1
b_4	$-\frac{4}{3}$	-3	-5	8

- Der Kehrwert des Hauptelementes ist $\frac{1}{3}$.
- Mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren wir die übrigen Elemente in der Zeile des Hauptelementes,
 $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2 = \delta_1$; $\frac{1}{3} \cdot 9 = 3 = \delta_2$; $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1 = \delta_3$;
 Wir erhalten also für jeden der Vektoren x_1, x_2, x_3 ein spezielles δ .
- Mit $-\frac{1}{3}$ multiplizieren wir die übrigen Elemente in der Spalte des Hauptelementes,
 $-\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3} \cdot 4 = -\frac{4}{3}$.

- d) Zuerst rechnen wir die Koordinaten des Vektors x_1 um und beachten, daß $\delta_1 = 2$ ist; dann rechnen wir die Koordinaten von x_2 unter Beachtung von $\delta_2 = 3$ um und schließen dann die Koordinatenumrechnung für Vektor x_3 an, wobei wir $\delta_3 = 1$ berücksichtigen.

x_1	x_2	x_3
$\delta_1 = 2$	$\delta_2 = 3$	$\delta_3 = 1$
$11 - 2 \cdot 1 = 9$	$10 - 3 \cdot 1 = 7$	$20 - 1 \cdot 1 = 19$
$8 - 2 \cdot 2 = 4$	$15 - 3 \cdot 2 = 9$	$13 - 1 \cdot 2 = 11$
$5 - 2 \cdot 4 = -3$	$7 - 3 \cdot 4 = -5$	$12 - 1 \cdot 4 = 8$

Bisher haben wir immer *einen* Vektor aus der Basis herausgenommen und gegen *einen* anderen Vektor ausgetauscht. Wir wollen jetzt *mehrere* Vektoren aus der Basis herausnehmen und gegen die gleiche Anzahl anderer Vektoren austauschen. Wir führen das so durch, daß wir erst *einen* Vektor austauschen und die neuen Koordinaten berechnen; dann führen wir im zweiten Schritt den Austausch *eines* weiteren Vektors durch usw.

15

b_1, b_2, b_3, b_4 stellen eine Basis dar. Gegeben sind die Koordinaten der Vektoren c_1, c_2, c_3, x :

$$c_1 = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 - 1 \cdot b_4$$

$$c_2 = 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 4 \cdot b_4$$

$$c_3 = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4$$

$$x = 0 \cdot b_1 - 4 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 - 1 \cdot b_4$$

Tabelle 3.29

	↓			
	c_1	c_2	c_3	x
$\leftarrow b_1$	1	1	1	0
b_2	2	1	3	-4
b_3	1	0	0	2
b_4	-1	4	1	-1

Wir wollen b_1 gegen c_1 und b_2 gegen c_2 und b_3 gegen c_3 austauschen, um die neue Basis c_1, c_2, c_3, b_4 zu erhalten.

Schritt 1:

Im ersten Schritt tauschen wir b_1 gegen c_1 aus. Die erste Koordinate des Vektors c_1 , also 1, wird Hauptelement.

Tabelle 3.30

		↓		
	b_1	c_2	c_3	x
c_1	1	1	1	0
$\leftarrow b_2$	-2	-1	1	-4
b_3	-1	-1	-1	2
b_4	1	5	2	-1

- a) Der Kehrwert des Hauptelementes ist 1.
- b) Mit 1 multiplizieren wir die übrigen Elemente der Zeile des Hauptelementes,
 $1 \cdot 1 = 1 = \delta_1$; $1 \cdot 1 = 1 = \delta_2$; $1 \cdot 0 = 0 = \delta_3$.
- c) Mit -1 multiplizieren wir die übrigen Elemente der Spalte des Hauptelementes,
 $-1 \cdot 2 = -2$; $-1 \cdot 1 = -1$; $-1 \cdot (-1) = 1$
- d) Wir berechnen nacheinander die neuen Koordinaten der Vektoren c_2, c_3, x .

c_2 $\delta_1 = 1$ $1 - 1 \cdot 2 = -1$ $0 - 1 \cdot 1 = -1$ $4 - 1 \cdot (-1) = 5$	c_3 $\delta_2 = 1$ $3 - 1 \cdot 2 = 1$ $0 - 1 \cdot 1 = -1$ $1 - 1 \cdot (-1) = 2$
---	--

$$\begin{aligned}
 &x \\
 &\delta_3 = 0 \\
 &-4 - 0 \cdot 2 = -4 \\
 &2 - 0 \cdot 1 = 2 \\
 &-1 - 0 \cdot (-1) = -1
 \end{aligned}$$

Schritt 2:

Im zweiten Schritt tauschen wir Vektor b_2 gegen c_2 , müssen jetzt aber von Tabelle 3.30 ausgehen, weil ja auch der Vektor c_1 in der Basis bleiben soll. Die zweite Koordinate des Vektors c_2 (in Tabelle 3.30), also -1, wird Hauptelement.

- a) Der Kehrwert des Hauptelementes ist -1.
- b) Mit -1 multiplizieren wir die übrigen Elemente in der Zeile des Hauptelementes;
 $-1 \cdot (-2) = 2 = \delta_1$; $-1 \cdot 1 = -1 = \delta_2$; $-1 \cdot (-4) = 4 = \delta_3$.
- c) Mit dem negativen Kehrwert des Hauptelementes, also mit $-(-1) = 1$, multiplizieren wir die übrigen Elemente in der Spalte des Hauptelementes,
 $1 \cdot 1 = 1$; $1 \cdot (-1) = -1$; $1 \cdot 5 = 5$

- d) Wir berechnen nacheinander die neuen Koordinaten von b_1 , c_3 , x .

$$\begin{array}{rcl}
 b_1 & & c_3 \\
 \delta_1 = 2 & & \delta_2 = -1 \\
 \begin{array}{rcl}
 1 - 2 \cdot 1 & = & -1 \\
 -1 - 2 \cdot (-1) & = & 1 \\
 1 - 2 \cdot 5 & = & -9
 \end{array} & & \begin{array}{rcl}
 1 - (-1) \cdot 1 & = & 2 \\
 -1 - (-1) \cdot (-1) & = & -2 \\
 2 - (-1) \cdot 5 & = & 7
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x \\
 \delta_3 = 4 \\
 \begin{array}{rcl}
 0 - 4 \cdot 1 & = & -4 \\
 2 - 4 \cdot (-1) & = & 6 \\
 -1 - 4 \cdot 5 & = & -21
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabelle 3.31

			↓	
	b_1	b_2	c_3	x
c_1	-1	1	2	-4
c_2	2	-1	-1	4
$\leftarrow b_3$	1	-1	-2	6
b_4	-9	5	7	-21

Schritt 3:

Im dritten Schritt tauschen wir c_3 gegen b_3 ; gehen aber von Tabelle 3.31 aus. Die dritte Komponente des Vektors c_3 (in Tabelle 3.31), also -2, wird Hauptelement.

- a) Der Kehrwert des Hauptelementes ist $-\frac{1}{2}$;
- b) Mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren wir die übrigen Elemente in der Zeile des Hauptelementes,

$$-\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} = \delta_1; \quad -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} = \delta_2; \quad -\frac{1}{2} \cdot 6 = -3 = \delta_3.$$

- c) Mit dem negativen Kehrwert des Hauptelementes, also mit $-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, multiplizieren wir die übrigen Elemente in der Spalte des Hauptelementes,

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1; \quad \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}.$$

- d) Wir berechnen nacheinander die neuen Koordinaten von b_1 , b_2 , x .

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l}
 b_1 \\
 \delta_1 = -\frac{1}{2} \\
 -1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 0 \\
 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{3}{2} \\
 -9 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 7 = -\frac{11}{2}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 b_2 \\
 \delta_2 = \frac{1}{2} \\
 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0 \\
 -1 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
 5 - \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{3}{2}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x \\
 \delta_3 = -3 \\
 -4 - (-3) \cdot 2 = 2 \\
 4 - (-3) \cdot (-1) = 1 \\
 -21 - (-3) \cdot 7 = 0
 \end{array}$$

Tabelle 3.32

	b_1	b_2	b_3	x
c_1	0	0	1	2
c_2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
c_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-3
b_4	$-\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	0

Damit haben wir b_1 , b_2 , b_3 aus der Basis entfernt und dafür c_1 , c_2 , c_3 in die Basis gebracht.

Aufgaben zu 3.7.

1

Es gilt

$$c = 5b_1 + 4b_2 + 2b_3$$

$$x = 10b_1 + 2b_2 + \frac{1}{2}b_3$$

- Berechnen Sie die Koordinaten von b_1 und x bezüglich der Basis c , b_2 , b_3 !
- Berechnen Sie die Koordinaten von b_2 und x bezüglich der Basis b_1 , c , b_3 !
- Berechnen Sie die Koordinaten von b_3 und x bezüglich der Basis b_1 , b_2 , c !

(L)

2

Es gilt

$$c = 2b_1 + b_2 + \frac{1}{2}b_3$$

$$x_1 = 4b_1 + 5b_2 + 3b_3$$

$$x_2 = b_1 + 8b_2 + \frac{1}{4}b_3$$

$$x_3 = 5b_1 + b_2 - b_3$$

- Berechnen Sie die Koordinaten von b_1, x_1, x_2, x_3 bezüglich der Basis c, b_2, b_3 !
- Berechnen Sie die Koordinaten von b_2, x_1, x_2, x_3 bezüglich der Basis b_1, c, b_3 !
- Berechnen Sie die Koordinaten von b_3, x_1, x_2, x_3 bezüglich der Basis b_1, b_2, c ! (L)

3

Es gilt

$$c_1 = 2b_1 - b_2 + 3b_3$$

$$c_2 = -b_1 + 2b_2 - b_3$$

$$c_3 = b_1 + 4b_2 + 2b_3$$

$$x = 7b_1 + 13b_2 + 12b_3$$

Wir bringen nacheinander die Vektoren c_1, c_2, c_3 in die Basis.

- Berechnen Sie die Koordinaten von c_1, c_2, b_1, x bezüglich der Basis c_3, b_2, b_3 !
- Gehen Sie von a) aus und berechnen Sie die Koordinaten von c_1, b_3, b_1, x bezüglich der Basis c_3, b_2, c_2 !
- Gehen Sie von b) aus und berechnen Sie die Koordinaten von b_2, b_3, b_1, x bezüglich der Basis c_3, c_1, c_2 ! (L)

3.8.

Rang einer Matrix

Die Rangbestimmung hat Bedeutung für die Überprüfung der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren und für die Überprüfung der Lösbarkeit von Gleichungssystemen.

Jede Matrix A besteht aus n Spaltenvektoren mit m Komponenten.

Wir können jeden dieser Spaltenvektoren als Linearkombination einer Basis für die Vektoren mit m Komponenten darstellen.

Wir bringen dann die einzelnen Spaltenvektoren der Matrix A nacheinander in die Basis. Die maximale Anzahl von Spaltenvektoren, die wir auf diese Weise in der Basis unterbringen, nennen wir den Rang der Matrix A .

Definition 1 Die maximale Anzahl von Spaltenvektoren der Matrix A , die wir in eine Basis für Vektoren mit m Komponenten bringen können, heißt *Rang* der Matrix A . (m, n)

Für die Rangüberprüfung ist es günstig, von einer Basis auszugehen, die nur aus Einheitsvektoren besteht.

1

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Die erste Spalte der Matrix A ist der Vektor $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

die zweite Spalte der Vektor $a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Benutzen wir die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Basis, so erhalten wir

$$a_1 = 1e_1 + 2e_2$$

$$a_2 = 4e_1 + 1e_2.$$

Tabelle 3.33

	↓	
	a_1	a_2
$\leftarrow e_1$	1	4
e_2	2	1

Wir bringen a_1 in die Basis, indem wir gegen e_1 austauschen.

Tabelle 3.34

	↓	
	e_1	a_2
a_1	1	4
$\leftarrow e_2$	− 2	− 7

Wir bringen jetzt a_2 in die Basis, indem wir gegen e_2 austauschen.

Tabelle 3.35

	e_1	e_2
a_1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
a_2	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$

Da wir zwei Spaltenvektoren der Matrix A in eine Basis für Vektoren mit zwei Komponenten bringen konnten, hat die Matrix A den Rang 2. (2, 2)

2

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Der erste Spaltenvektor ist $a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, der zweite Spaltenvektor $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Benutzen wir die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Basis, so erhalten wir

$$a_1 = 4e_1 + 2e_2$$

$$a_2 = 2e_1 + 1e_2$$

Tabelle 3.36

	a_1	a_2
$\leftarrow e_1$	4	2
e_2	2	1

Wir tauschen a_1 gegen e_1 aus,

Tabelle 3.37

	e_1	a_2
a_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
e_2	$-\frac{1}{2}$	0

Wir können a_2 nicht gegen e_2 austauschen, denn null ist als Hauptelement nicht zugelassen. Würden wir a_2 gegen a_1 austauschen, dann hätten wir auch nur einen der Spaltenvektoren von A in der Basis. Mehr als einen Spaltenvektor der Matrix A bekommen wir nicht in die Basis. Die Matrix A hat den Rang 1.

3

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Der erste Spaltenvektor ist $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, der zweite Spaltenvektor

$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und der dritte Spaltenvektor $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Mit der Basis $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ erhalten wir folgende

Darstellung:

$$\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a}_3 = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_3.$$

Tabelle 3.38

	↓		
	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{e}_1$	1	2	1
$\mathbf{e}_2$	0	-1	1
← $\mathbf{e}_3$	1	0	-1

Wir tauschen $\mathbf{e}_3$ gegen $\mathbf{a}_1$ aus.

Tabelle 3.39

	↓		
	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
← $\mathbf{e}_1$	-1	2	2
$\mathbf{e}_2$	0	-1	1
$\mathbf{a}_1$	1	0	-1

Wir tauschen $\mathbf{a}_2$ gegen $\mathbf{e}_1$ aus.

Tabelle 3.40

	↓		
	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
← $\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$\mathbf{a}_1$	1	0	-1

Wir tauschen schließlich $\mathbf{e}_2$ gegen $\mathbf{a}_3$ aus.

Tabelle 3.41

	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{a}_2$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_3$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_1$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Da wir alle drei Spaltenvektoren in die Basis gebracht haben, hat die Matrix A den Rang 3.

Sie werden bemerkt haben, daß wir den Austausch der Vektoren willkürlich vorgenommen haben. Bei der Rangbestimmung ist es ohne Bedeutung, welche Vektoren gegeneinander ausgetauscht werden. Wir müssen aber darauf achten, daß die Spaltenvektoren von A , die wir bereits in die Basis gebracht haben, nicht wieder aus der Basis entfernt werden.

Die Rangbestimmung versetzt uns in die Lage, die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren $a_1, \dots, a_n$ zu überprüfen. Dazu fassen wir die Vektoren $a_1, \dots, a_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix A auf und bestimmen den Rang der Matrix A . Ist der Rang der Matrix gleich der Spaltenzahl von A , so sind die Vektoren $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig, andernfalls sind sie linear abhängig.

Weiterhin können Sie feststellen, daß die Koordinaten der Einheitsvektoren e_1, e_2 usw. für die Feststellung des Ranges nicht benötigt werden. Deshalb können wir bei der Rangbestimmung die Einheitsvektoren e_1, e_2 usw., die wir aus der Basis entfernt haben, weglassen.

Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen.

4

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

die wir bereits im Beispiel 3 untersucht haben.

Tabelle 3.42

	a_1	a_2	a_3
e_1	1	2	1
e_2	0	-1	1
e_3	<u>1</u>	0	-1

Tabelle 3.43

	a_2	a_3
e_1	<u>2</u>	2
e_2	-1	1
a_1	0	-1

Tabelle 3.44

	a_3
a_2	1
e_2	<u>2</u>
a_1	-1

Tabelle 3.45

a_2	
a_3	
a_1	

5

Im Beispiel 2 aus 3.6. betrachteten wir die Vektoren $a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Erfassen wir diese beiden Vektoren in einer Matrix, so erhalten wir $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Im Beispiel 2 dieses Abschnittes haben wir für A den Rang 1 ermittelt. Dieser Rang 1 ist kleiner als die Spaltenzahl von A , also sind die Vektoren a_1 und a_2 linear abhängig.

6

Wir betrachteten die Vektoren $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Erfassen wir diese Vektoren in einer Matrix, so erhalten wir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Im Beispiel 3 dieses Abschnittes haben wir für A den Rang 3 ermittelt. Der Rang 3 stimmt mit der Spaltenzahl überein, also sind die Vektoren a_1 , a_2 , a_3 linear unabhängig.

Aufgaben zu 3.8.

1

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A !

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

g) $A = 0$

(L)

2

Überprüfen Sie, ob die vorliegenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; & \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \text{b)} & \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; & \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \text{c)} & \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{d)} & \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}; & \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; & \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} & \quad (\text{L}) \end{array}$$

1

$$\begin{aligned} \text{Das Gleichungssystem } -2x_1 + 3x_2 &= -8 \\ 10x_1 - 10x_2 &= 30 \end{aligned}$$

$$\text{l\"a\ss t sich durch } \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder } \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 30 \end{bmatrix}$$

darstellen.

4.2.

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme können genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung besitzen. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie wir durch zwei Rangbestimmungen feststellen können, ob unser lineares Gleichungssystem gar keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

und untersuchen den Rang der Matrizen A und $B = [A \ b]$.

(Die Matrix B geht aus der Matrix A dadurch hervor, daß wir die Matrix A um die Spalte b erweitern.)

Satz 1

Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar (hat also eine oder unendlich viele Lösungen), wenn der Rang der Matrix A mit dem Rang der Matrix $B = [A \ b]$ übereinstimmt.

1

$$\text{Im Beispiel aus 4.1. haben die Matrizen } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -8 \\ 10 & -10 & 30 \end{bmatrix} \text{ den Rang 2.}$$

Das Gleichungssystem des Beispiels aus 4.1. ist also lösbar.

2

Das lineare Gleichungssystem

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20$$

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10$$

$$-3x_1 + x_2 - 6x_3 = 50$$

ist nicht lösbar, denn die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

hat den Rang 2, während die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 20 \\ 1 & -5 & 2 & 10 \\ -3 & 1 & -6 & 50 \end{bmatrix}$$

den Rang 3 hat.

Für die Rangbestimmung der Matrizen A und $[A \ b]$ brauchen wir nicht zwei getrennte Rechnungen durchzuführen. Wir schreiben die Matrix A und den Vektor b in eine Rechentabelle, bringen soviel Spalten von A wie möglich in die Basis und lesen den Rang von A ab. Läßt sich jetzt *zusätzlich* der Vektor b in die Basis bringen, so ist der Rang der Matrix $[A \ b]$ um eins größer als der Rang der Matrix A . Läßt sich b nicht *zusätzlich* in die Basis bringen, so hat A den gleichen Rang wie $[A \ b]$.

3

Wir benutzen das Beispiel 2.

	$\downarrow$ a_1	a_2	a_3	b		$\downarrow$ a_2	a_3	b		a_3	$\downarrow$ b
e_1	2	3	4	20							
$\leftarrow e_2$	1	-5	2	10	$\leftarrow e_1$	13	0	0	a_2	0	0
e_3	-3	1	-6	50	a_1	-5	2	10	a_1	2	10
					e_3	-14	0	80	$\leftarrow e_3$	0	80

Aus der letzten Tabelle ist ersichtlich, daß die Matrix A den Rang 2 besitzt. Den Vektor b können wir noch zusätzlich in die Basis bringen; also hat die Matrix $[A \ b]$ den Rang 3.

	a_3
a_2	0
a_1	2
b	0

Wir wollen jetzt zeigen, wie wir mit Hilfe der Rangbestimmung feststellen, ob ein lösbares Gleichungssystem genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Satz 2

Das lösbare Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung, wenn der gemeinsame Rang von A und $[A \ b]$ mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, wenn der gemeinsame Rang von A und $[A \ b]$ nicht mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt.

4

Im Beispiel aus 4.1. ist der gemeinsame Rang von A und $[A \ b]$ zwei. Die Anzahl der Variablen ist ebenfalls zwei. Also hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Im Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$$

haben die Matrizen A und $[A \ b]$ den Rang drei. Die Anzahl der Variablen ist vier. Also hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Aufgaben zu 4.2.

1

Überprüfen Sie die Lösbarkeit der folgenden linearen Gleichungssysteme!

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 10 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{L})$$

2

Stellen Sie fest, ob die lösbaren Gleichungssysteme in 1. genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzen! (L)

3

Stellen Sie fest, ob das folgende Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt!

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (\text{L})$$

4.3.

Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Wir wollen jetzt zeigen, wie wir mit Hilfe der elementaren Basistransformation die Lösung eines Gleichungssystems finden, das genau eine Lösung besitzt.

Betrachten wir das Gleichungssystem in der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

so erkennen wir, daß es bei der Lösung des Gleichungssystems nur darauf ankommt, den Vektor $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ darzustellen. Die eindeutig bestimmten Skalare $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind die Lösung unseres Gleichungssystems.

Diese Überlegung führt auf folgenden Lösungsweg:

Wir stellen die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ und $\mathbf{b}$ als Linearkombinationen der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ dar (in diesem Falle sind die Koordinaten gerade die Komponenten von $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$) und bringen nacheinander die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ in die Basis. Damit erhalten wir nach n Basistransformationen den Vektor $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ und können somit die gesuchte Lösung ablesen:

Tabelle 4.1 Ausgangstabelle

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\dots$	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$					
$\mathbf{e}_2$					
$\cdot$					
$\cdot$					
$\cdot$					
$\mathbf{e}_n$					

Tabelle 4.2 Endtabelle

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\dots$	$\mathbf{e}_n$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$					x_1
$\mathbf{a}_2$					x_2
$\cdot$					$\cdot$
$\cdot$					$\cdot$
$\cdot$					$\cdot$
$\mathbf{a}_n$					x_n

1

Wir suchen die Lösung des Beispiels aus 4.1.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Im Beispiel 4 aus 4.2. haben wir nachgewiesen, daß dieses Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{b}$			$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	$\boxed{-2}$	3	-8	$\mathbf{a}_1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4	x_1	$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{3}{10}$	1
$\mathbf{e}_2$	10	-10	30	$\mathbf{e}_2$	5	$\boxed{5}$	-10	x_2	$\mathbf{a}_2$	1	$\frac{1}{5}$	-2

Es gilt $\mathbf{b} = 1\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$. Also lautet die Lösung

$$x_1 = 1; x_2 = -2 \text{ oder } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist drei, der Rang der Matrix $[\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$ ebenfalls, also ist das Gleichungssystem lösbar.

Weil der gemeinsame Rang der Matrizen A und $[A \ b]$ mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt, hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	2	-1	1	7
e_2	-1	2	4	13
e_3	3	-1	2	12

	a_1	e_3	e_1	b
a_3	1	1	-1	5
e_2	-3	-6	8	-3
a_2	-1	1	-2	-2

	a_1	a_2	e_1	b
a_3	2	-1	1	7
e_2	-9	6	-4	-15
e_3	-1	1	-2	-2

		e_2	e_3	e_1	b
x_3	a_3	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	4
x_1	a_1	$-\frac{1}{3}$	2	$-\frac{8}{3}$	1
x_2	a_2	$-\frac{1}{3}$	3	$-\frac{14}{3}$	-1

Es gilt $b = 1a_1 - 1a_2 + 4a_3$. Also lautet die Lösung

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 4 \text{ oder } x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Sie werden bemerkt haben, daß wir für das Ablesen der Lösungen nur die letzte Spalte der letzten Tabelle benötigen. Die Spalten e_1 , e_2 im Beispiel 1 bzw. die Spalten e_1 , e_2 , e_3 im Beispiel 2 benötigen wir für das Ablesen der Lösung nicht.

Bei der Lösung des Gleichungssystems $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ sparen wir Rechenarbeit ein, wenn wir nur die *Spalten* $a_1, a_2, \dots, a_n$ und b umrechnen, während wir die *Spalten* $e_1, e_2, \dots, e_n$ weglassen.

3

Das Beispiel 1 können wir verkürzt folgendermaßen lösen:

	a_1	a_2	b
e_1	-2	3	-8
e_2	10	-10	30

	a_2	b
a_1	$-\frac{3}{2}$	4
e_2	5	-10

		b
a_1		1
a_2		-2

4

Das Beispiel 2 können wir verkürzt folgendermaßen lösen:

	a_1	a_2	a_3	b
e_1	2	-1	1	7
e_2	-1	2	4	13
e_3	3	-1	2	12

	a_1	a_2	b
a_3	2	-1	7
e_2	-9	6	-15
e_3	-1	1	-2

	a_1	b
a_3	1	5
e_2	$\boxed{-3}$	— 3
a_2	— 1	— 2

	b
a_3	4
a_1	1
a_2	— 1

Wenn wir ein lineares Gleichungssystem lösen wollen, so benötigen wir den Rang der Matrix A , den Rang der Matrix $[A \ b]$, die Lösung des Gleichungssystems (wenn eine vorhanden ist). Im Beispiel 3 aus 4.2. haben wir gezeigt, wie wir die Rangbestimmung für die Matrizen A und $[A \ b]$ in einem Rechengang erledigen können. Da wir für die Lösung des Gleichungssystems nur die Koordinaten des Vektors b bezüglich der Basis $a_1, \dots, a_n$ benötigen, die bei der Rangbestimmung schon anfallen, brauchen wir für die Lösung des Gleichungssystems keine zusätzliche Rechnung.

Der Rang von A , der Rang von $[A \ b]$ und die Lösung des Gleichungssystems lassen sich also in einem Rechengang erledigen. Das wollen wir an einem Beispiel zeigen.

5

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

	a_1	a_2	b
e_1	2	3	16
e_2	5	$\boxed{1}$	14

	a_1	b
e_1	$\boxed{-13}$	— 26
a_2	5	14

		b
x_1	a_1	2
x_2	a_2	4

Aus der letzten Tabelle kann abgelesen werden, daß A den Rang 2 und $[A \ b]$ den Rang 2 haben. Außerdem ist ablesbar $x_1 = 2$; $x_2 = 4$, die Lösung unseres Gleichungssystems.

Aufgaben zu 4.3.

1 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme!

- a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 20 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 \\ 35 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (L)$

2

Addiert man zur Summe zweier Zahlen 23, so erhält man 78.

Subtrahiert man von der Differenz der beiden Zahlen 15, so erhält man 6. Wie lauten die beiden Zahlen? (L)

3

a) Addiert man zu einer dreistelligen ganzen Zahl, die in allen Stellen die gleiche Grundziffer trägt, eine zweistellige ganze Zahl, deren Einerstelle die gleiche Grundziffer trägt, so erhält man 294.

b) Subtrahiert man von einer dreistelligen ganzen Zahl, die in allen Stellen die gleiche Ziffer trägt wie die Zehnerstelle der zweistelligen Zahl aus a), eine zweistellige Zahl, die aus der zweistelligen Zahl von a) durch Grundziffernvertauschung hervorgeht, so erhält man 750.

Wie lauten die beiden Ziffern, aus denen die unbekannten Zahlen aufgebaut sind? Wie lauten die unbekannten Zahlen? (L)

4

Ein Rechteck hat einen Umfang von 100 cm. Verlängert man die eine Seite auf das Doppelte und verkürzt die andere Seite auf ein Drittel, so hat das neue Rechteck einen Umfang von 150 cm.

Wie groß sind die Seiten des Ausgangsrechtecks? (L)

5

Für die Herstellung von zwei Erzeugnissen werden zwei Materialien benötigt. Je Einheit des ersten Erzeugnisses brauchen wir 20 Einheiten (E) vom ersten und 55 E vom zweiten Material, je Einheit des zweiten Erzeugnisses 40 E des ersten und 10 E des zweiten Materials. Von jedem Material stehen 2 000 E zur Verfügung. Wieviel Einheiten sind von jedem Erzeugnis herzustellen, wenn das Material vollständig verbraucht werden soll? (L)

6

Zwei Brigaden arbeiten mit verschiedenen Arbeitskräften und Normerfüllungen. Die durchschnittliche Normerfüllung in einer bestimmten Schicht beträgt 96 % bzw. 104 % bei voller Besetzung der Brigaden. In dieser Schicht werden von beiden Brigaden zusammen 1 408 Stück eines bestimmten Erzeugnisses hergestellt.

In einer anderen Schicht fehlen in der ersten Brigade 2 Arbeitskräfte, in der anderen Brigade 3 Arbeitskräfte. Die durchschnittliche Normerfüllung sinkt auf 90 % bzw. 95%. In der Schicht werden von beiden Brigaden zusammen nur 1 114 Stück produziert. Die Norm je Arbeitskraft beträgt 40 Stück je Schicht.

Wie stark sind die beiden Brigaden besetzt? (L)

7

Für die Herstellung eines Erzeugnisses nach zwei Technologien stehen zwei Materialien zur Verfügung. Bei der ersten Technologie werden 40 Einheiten (E) des ersten und 50 E des zweiten Materials

benötigt, bei der zweiten Technologie 65 E des ersten und 30 E des zweiten Materials. Der Betrieb hat einen Materialvorrat von 3 600 E beim ersten und 2 450 E beim zweiten Material. Wieviel Einheiten sind nach den verschiedenen Technologien herzustellen, wenn das Material vollständig verbraucht werden soll? (L)

8

Die Summe aus Selbstkosten und Gewinn beträgt für ein bestimmtes Erzeugnis 450 M. Durch Senkung der Selbstkosten um 7% kann der Gewinn um 56% erhöht werden, wenn die Summe aus Selbstkosten und Gewinn weiterhin 450 M beträgt.

Wie groß sind Selbstkosten und Gewinn in beiden Fällen? (L)

9

Ein Gas G_1 hat einen Schwefelgehalt von 6 gm^{-3} , ein Gas G_2 von 2 gm^{-3} . Wieviel Kubikmeter der Gase G_1 und G_2 muß man mischen, um 500 m^3 mit einem Schwefelgehalt von $3,2 \text{ gm}^{-3}$ zu erhalten? (L)

10

Ein Erzeugnis P_1 enthält 4 kg Kupfer und 6 kg Aluminium; ein Erzeugnis P_2 3 kg Kupfer und 8 kg Aluminium.

Es stehen 2 150 kg Kupfer und 4 100 kg Aluminium zur Verfügung. Wieviel Einheiten muß man von jedem Erzeugnis herstellen, um den gesamten Materialvorrat zu verbrauchen? (L)

11

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme!

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 10 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 \\ 22,5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -18 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{L})$$

12

Die Summe dreier Zahlen beträgt 70. Subtrahiert man von dem Vierfachen der einen Zahl das Fünffache der zweiten und die Hälfte der dritten Zahl, so erhält man $-57,5$. Die Summe der beiden ersten Zahlen ist gleich der dritten Zahl.

Wie lauten die drei Zahlen? (L)

13

Die Summe der Kantenlängen eines Quaders beträgt 320 cm. Verkürzt man eine Kante auf die Hälfte, die zweite auf ein Drittel und ver-

längert die dritte Kante auf das Doppelte, so beträgt die Summe der Kantenlängen 380 cm.

Verlängert man die erste Kante auf das Doppelte, verkürzt die zweite Kante auf ein Drittel und die dritte Kante auf ein Viertel, so ist die Summe der Kantenlängen nur noch halb so groß wie beim Ausgangsquader.

Wie lang sind die Kanten im Ausgangsquader? (L)

14

Für die Herstellung von drei Erzeugnissen werden zwei verschiedene Materialien benötigt. Der Materialverbrauch je Erzeugniseinheit, die zur Verfügung stehende Materialmenge und die Preise je Erzeugniseinheit sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Material	Materialverbrauch je Einheit des Erzeugnisses			zur Verfügung stehende Materialmenge
	P_1	P_2	P_3	
M_1	5	3	6	269
M_2	7	8	2	336
Preis je Erzeugniseinheit	30	20	45	

Wieviel Einheiten sind von jedem Erzeugnis herzustellen, wenn die zur Verfügung stehende Materialmenge restlos verbraucht und eine Preissumme von 1 840 M erreicht werden soll?

15

Ein Gas G_1 hat den Heizwert $1\,000\text{ kcal m}^{-3}$ und den Schwefelgehalt 6 gm^{-3} , ein zweites Gas G_2 den Heizwert $2\,000\text{ kcal m}^{-3}$ und den Schwefelgehalt 2 gm^{-3} und ein drittes Gas G_3 den Heizwert $1\,500\text{ kcal m}^{-3}$ und den Schwefelgehalt 3 gm^{-3} .

Wie muß man die Gase mischen, um ein Gas mit dem Heizwert $1\,475\text{ kcal m}^{-3}$ und dem Schwefelgehalt $3,55\text{ gm}^{-3}$ zu erhalten? (L)

4.4.

Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

Wir zeigen jetzt, wie wir mit Hilfe der elementaren Basistransformation die Lösungen eines Gleichungssystems finden, das unendlich viele Lösungen besitzt.

Bei einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit unendlich vielen Lösungen ist der gemeinsame Rang von A und $[A\ b]$ kleiner als die Anzahl der Variablen. Bezeichnen wir den gemeinsamen Rang mit r , die Anzahl der Variablen mit n , so gilt also $r < n$.

Wenn wir jetzt so vorgehen wie bei einem linearen Gleichungssystem mit genau einer Lösung, so lassen sich von den n Spaltenvektoren $a_1, a_2, \dots, a_n$ der Matrix A nur r Spaltenvektoren in die Basis bringen:

Wenn wir r Spaltenvektoren der Matrix A in die Basis gebracht haben, können wir aus der Endtabelle die Lösungen des Gleichungssystems ablesen.

1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Der Rang von A und $[A \ b]$ ist $r = 2$, die Anzahl der Variablen ist $n = 3$.

Wir gehen den gleichen Weg wie im Abschnitt 4.3. bei der Lösung eines Gleichungssystems mit genau einer Lösung.

	a_1	a_2	a_3	b		a_2	a_3	b		x_3	a_3	b
e_1	1	1	4	$\frac{5}{2}$	a_1	1	4	$\frac{5}{2}$	x_1	a_1	-1	$-\frac{3}{2}$
e_2	3	2	7	$\frac{7}{2}$	e_2	-1	-5	-4	x_2	a_2	5	4

Aus der Endtabelle lesen wir die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} x_3; \quad x_3 \text{ beliebig ab.}$$

Vom Vektor $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$, der die Koordinaten von b enthält, subtra-

hieren wir den mit dem Skalar x_3 multiplizierten Vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, der die Koordinaten von a_3 enthält.

Setzen wir in die allgemeine Lösung für x_3 spezielle Werte ein, so erhalten wir spezielle Lösungen.

$$\text{Z. B. } x_3 = 0; \quad x_1 = -\frac{3}{2}; \quad x_2 = 4$$

$$x_3 = 1; \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = -1$$

$$x_3 = -1; \quad x_1 = -\frac{5}{2}; \quad x_2 = 9 \quad \text{usw.}$$

Haben wir das Gleichungssystem $Ax = b$ mit n Variablen und m Gleichungen und ist der gemeinsame Rang von A und $[A \ b]$ $r < n$, so erhalten wir die Lösung auf folgende Weise:

Wir bringen r Spaltenvektoren von A in die Basis. Dazu beginnen wir mit der Rechentabelle 4.3.

Tabelle 4.3

	$x_1 \cdots x_r \quad x_{r+1} \cdots x_n$ $a_1 \cdots a_r \quad a_{r+1} \cdots a_n$	b
e_1 . . . e_r e_{r+1} . . . e_m	A	b

und erhalten nach r Basistransformationen die Rechentabelle 4.4;

Tabelle 4.4

		$x_{r+1} \cdots x_n$ $a_{r+1} \cdots a_n$	b
x_1 . . . x_r	a_1 . . . a_r	D	d
	e_{r+1} . . . e_m	O	o

(Durch entsprechende Wahl des Hauptelementes für die Basistransformation oder durch Umordnung und entsprechende Numerierung können wir immer diese Form erreichen.)

Aus dieser Tabelle 4.4 lesen wir die allgemeine Lösung ab:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_r \end{bmatrix} = d - D \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ beliebig.}$$

Jeder beliebig gewählte Spaltenvektor

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

liefert eine spezielle Lösung.

2

Wir lösen jetzt die Aufgabe 1 a) aus 4.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der gemeinsame Rang von A und [A b] ist $r = 2$, die Anzahl der Variablen ist $n = 4$.

		a_1	a_2	a_3	a_4	b			a_2	a_3	a_4	b			x_3 a_3	x_4 a_4	b
e_1	1	0	3	−2	5	a_1	0	3	−2	5	x_1	a_1	3	−2	5		
e_2	3	1	4	1	5	e_2	1	−5	7	−10	x_2	a_2	−5	7	−10		
e_3	4	1	7	−1	10	e_3	1	−5	7	−10		e_3	0	0	0		
e_4	2	1	1	3	0	e_4	1	−5	7	−10		e_4	0	0	0		

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ beliebig.}$$

3

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Der gemeinsame Rang von A und [A b] ist $r = 2$, die Anzahl der Variablen ist $n = 4$.

		a_1	a_2	a_3	a_4	b			a_2	a_3	a_4	b			x_1	x_2	x_3	b
		a_1	a_2	a_3	a_4	b			a_2	a_3	a_4	b			x_1	x_2	x_3	b
e_1	$\boxed{1}$	-1	-1	2	1	a_1	-1	-1	2	1	x_1	a_1	-11	3	-7			
e_2	2	3	-4	5	6	e_2	5	-2	1	4		e_2	0	0	0			
e_3	3	2	-5	7	7	e_3	5	-2	$\boxed{1}$	4	x_4	a_4	5	-2	4			
e_4	1	4	-3	3	5	e_4	5	-2	1	4		e_4	0	0	0			

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ beliebig,}$$

die wir leichter ablesen können, wenn wir in der letzten Rechen-tabelle die Zeilen vertauschen,

		x_2 a_2	x_3 a_3	b
x_1	a_1	-11	3	-7
x_4	a_4	5	-2	4
	e_2	0	0	0
	e_4	0	0	0

Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems kommt es nicht darauf an, welche Vektoren aus der Basis herausgenommen und welche dafür hineingenommen werden. Wichtig ist nur, daß r Spaltenvektoren der Matrix A in die Basis kommen.

Allerdings ist die *Form* der allgemeinen Lösung davon abhängig, welche Vektoren gegeneinander ausgetauscht werden.

4

Wir lösen das Beispiel 3 mit verändertem Vektoraustausch.

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	1	-1	-1	2	1
e_2	2	3	-4	5	6
e_3	3	2	-5	7	7
e_4	1	4	-3	3	5

	a_2	a_3	a_4	b
e_1	-5	2	-1	-4
e_2	-5	2	-1	-4
e_3	-10	4	-2	-8
a_1	4	-3	3	5

		x_2 a_2	x_4 a_4	b
	e_1	0	0	0
	e_2	0	0	0
x_3	a_3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
x_1	a_1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1

Die allgemeine Lösung erhalten wir in der Form

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ beliebig.}$$

Diese Form unterscheidet sich von der Form im Beispiel 3, liefert aber die gleichen Lösungen,

$$\begin{aligned} \text{z. B. } x_2 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_3 = -2; \quad x_1 = -1 \\ x_2 = 1; \quad x_4 = 1; \quad x_3 = 1; \quad x_1 = 1. \end{aligned}$$

Aufgaben zu 4.4.

1

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 4,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -13,5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -6 & 3 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } [2 \ -5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -8 \qquad \text{f) } [-2 \ 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 10$$

$$\text{g) } [2 \ -1 \ 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 20 \qquad \text{h) } [3 \ 4 \ -5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 100$$

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 26 & 3 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 10 \\ 1\ 010 \end{bmatrix}$$

$$\text{j) } \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -6 & -21 & 12 \\ -14 & -49 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ 51 \\ 119 \end{bmatrix} \qquad (\text{L})$$

2

Ein Betrieb kann drei Erzeugnisse herstellen. Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_1 werden 7 Einheiten eines bestimmten Materials, für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_2 8 Einheiten und für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_3 3 Einheiten des gleichen Materials benötigt. Von dem Material stehen 1 260 Einheiten zur Verfügung.

Wieviel Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit das gesamte Material verbraucht wird?

- Stellen Sie die Gleichung auf!
- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung!
- Bestimmen Sie fünf spezielle Lösungen, indem Sie für die beliebig wählbaren Variablen bestimmte Werte einsetzen! (Beachten Sie dabei, daß es sich um Produktionszahlen handelt, die nicht negativ sein dürfen! Die Lösungen müssen nicht ganzzahlig sein.)
- Welche dieser fünf Lösungen bringt den höchsten Gewinn, wenn die Gewinne je Einheit für die verschiedenen Produkte 10, 8 bzw. 7 M betragen?

(L)

3

Für die Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Betrieb zwei verschiedene Materialarten. Um eine Einheit des ersten Erzeugnisses herzustellen, braucht man 3 Einheiten des Materials M_1 und 7 Einheiten des Materials M_2 , um eine Einheit des zweiten Erzeugnisses herzustellen 6 Einheiten des Materials M_1 und 5 Einheiten des Materials M_2 , um eine Einheit des dritten Erzeugnisses herzustellen 8 Einheiten des Materials M_1 und 4 Einheiten des Materials M_2 .

Material	Erzeugnis			Materialfonds
	1	2	3	
1	3	6	8	640
2	7	5	4	490
Preis	25	30	60	

Vom Material M_1 stehen 640 Einheiten und vom Material M_2 490 Einheiten zur Verfügung.

Wieviel Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit das gesamte Material verbraucht wird?

- Stellen Sie das Gleichungssystem auf!
- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung!
- Bestimmen Sie fünf spezielle Lösungen, indem Sie für die beliebig wählbare Variable bestimmte Werte einsetzen! (Beachten Sie dabei, daß es sich um Produktionszahlen handelt, die nicht negativ sein dürfen! Eine Lösung soll ganzzahlig sein, die anderen brauchen es nicht zu sein.)
- Welche dieser fünf Lösungen bringt die höchste Preissumme, wenn die Preise je Einheit für die verschiedenen Erzeugnisse 25, 30 bzw. 60 M betragen? (L)

4

Ein Gas G_1 hat einen Schwefelgehalt von 6 gm^{-3} , ein Gas G_2 von 2 gm^{-3} und ein Gas G_3 von 3 gm^{-3} .

Wie muß man die Gase mischen, um ein Gas zu erhalten, das einen Schwefelgehalt von 4 gm^{-3} besitzt?

- Stellen Sie das Gleichungssystem für 1 m^3 Mischgas auf!
- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung!
- Bestimmen Sie drei spezielle Lösungen, indem Sie für die beliebig wählbare Variable bestimmte Werte einsetzen! (Es dürfen keine negativen Werte auftreten.)
- Welche dieser drei Lösungen bringt das billigste Mischgas, wenn die Preise je Kubikmeter für die drei Gase 10, 25 bzw. 20 M betragen? (L)

5.

Matrizeninversion

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Matrizeninversion oder Matrizenumkehr, das heißt mit der Berechnung der inversen Matrix oder Umkehrmatrix. Die inverse Matrix existiert nur für spezielle Matrizen.

Die Inversion einer Matrix hat praktische Bedeutung für die Lösung bestimmter Gleichungssysteme und bei der Lösung ökonomischer Probleme. Wir werden als ökonomische Anwendung die Verflechtungsbilanz betrachten, die wir schon in den Abschnitten 3.4.3. und 3.4.4. eingeführt haben.

5.1.

Begriff der inversen Matrix

Wir betrachten nur quadratische Matrizen, das heißt Matrizen, in denen die Zahl der Spalten gleich der Zahl der Zeilen ist. Außerdem soll der Rang der von uns betrachteten Matrizen gleich der Zeilen- bzw. Spaltenzahl sein. Solche Matrizen bezeichnen wir als regulär.

Wir betrachten also eine Matrix A mit dem Rang $r = n$.

(n, n)

Zur Matrix A suchen wir eine Matrix X mit der Eigenschaft $A \cdot X = E$. Diese Matrix X nennen wir die inverse Matrix zu A und bezeichnen sie mit $X = A^{-1}$.

Definition 1 Die Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = E$ (A hat den Rang $r = n$) heißt inverse Matrix von A .

Während bei der Multiplikation zweier Matrizen im allgemeinen die Reihenfolge der Matrizen nicht vertauscht werden darf, $A \cdot B \neq B \cdot A$, spielt die Reihenfolge bei der Multiplikation der Matrix A mit der inversen Matrix A^{-1} keine Rolle. Es gilt:

Satz 1 $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$

Zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ existiert eine reziproke (inverse) Zahl $a^{-1} = \frac{1}{a}$, und es gilt $a \cdot a^{-1} = 1$.

Für die Inverse X der regulären Matrix A gilt $AX = E$. In Analogie zu den reellen Zahlen wird die Inverse mit $X = A^{-1}$ bezeichnet.

$$A \cdot A^{-1} = E;$$

5.2.

Berechnung der inversen Matrix

Wir berechnen die inverse Matrix mit Hilfe der elementaren Basis-
transformation. Wir suchen die Matrix X mit der Eigenschaft
 $AX = E$. Schreiben wir die Matrizen X und E mit Hilfe von Spalten-
vektoren, also $X = [x_1 \cdots x_n]$, $E = [e_1 \cdots e_n]$, so folgt aus

$$AX = E$$

$$A [x_1 \cdots x_n] = [e_1 \cdots e_n].$$

Diese letzte Beziehung ist gleichbedeutend mit den n Gleichungs-
systemen

$$A x_1 = e_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A x_n = e_n$$

Die Lösungen $x_1, \cdots, x_n$ der n Gleichungssysteme liefern die Spalten
der inversen Matrix.

1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Aus } AX = E$$

$$\text{folgt } A [x_1 \ x_2] = [e_1 \ e_2],$$

$$\text{also } Ax_1 = e_1 \text{ und } Ax_2 = e_2 \text{ mit } x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}; \ x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}.$$

$$Ax_1 = e_1$$

	a_1	a_2	e_1
e_1	1	4	1
e_2	2	1	0

	a_2	e_1
a_1	4	1
e_2	-7	-2

		e_1
x_{11}	a_1	$-\frac{1}{7}$
x_{21}	a_2	$\frac{2}{7}$

$$Ax_2 = e_2$$

	a_1	a_2	e_2
e_1	1	4	0
e_2	2	1	1

	a_2	e_2
a_1	4	0
e_2	-7	1

		e_2
x_{12}	a_1	$\frac{4}{7}$
x_{22}	a_2	$-\frac{1}{7}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Da die n Gleichungssysteme die gleiche Matrix A aufweisen, können wir die Lösung der n Gleichungssysteme abkürzen.

Tabelle 5.1

	$a_1 \cdots a_n$	$e_1 \cdots e_n$
e_1 . . e_n	A	E

Wir beginnen mit der Tabelle 5.1, bringen nacheinander die Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ der Matrix A in die Basis und erhalten dann die Tabelle 5.2.

Tabelle 5.2

	$e_1 \cdots e_n$	$e_1 \cdots e_n$
a_1 . . . a_n		A^{-1}

Im zweiten Teil der Tabelle 5.2 steht dann bereits die inverse Matrix A^{-1} .

2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

	a_1	a_2	e_1	e_2
e_1	1	4	1	0
e_2	2	1	0	1

	a_2	e_1	e_2
a_1	4	1	0
e_2	-7	-2	1

	e_1	e_2
a_1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
a_2	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Wir können die Berechnung der inversen Matrix noch mehr vereinfachen, wenn wir in Tabelle 5.2 beachten, daß im ersten Teil der Tabelle 5.2 auch die Koordinaten von $e_1, \dots, e_n$ stehen, genau wie im zweiten Teil der Tabelle 5.2.

Wir können deshalb von Anfang an den zweiten Teil der Tabelle 5.1 weglassen.

Tabelle 5.3

	$a_1 \cdots a_n$
e_1	A
$\vdots$	
$\vdots$	
e_n	

Tabelle 5.4

	$e_1 \cdots e_n$
a_1	A^{-1}
$\vdots$	
$\vdots$	
a_n	

Wir beginnen mit Tabelle 5.3, bringen nacheinander die Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ der Matrix A in die Basis und erhalten dann die Tabelle 5.4. In Tabelle 5.4 steht dann die inverse Matrix A^{-1} .

3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

	a_1	a_2		e_1	a_2		e_1	e_2
e_1	1	4	a_1	1	4	a_1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
e_2	2	1	e_2	-2	-7	a_2	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Bei unserem bisherigen Vorgehen haben wir die Vektoren e_1 und a_1 , e_2 und $a_2, \dots, e_n$ und a_n gegeneinander ausgetauscht. Dadurch konnten wir in der letzten Tabelle die inverse Matrix direkt ablesen.

Wenn wir den Austausch der Vektoren in anderer Weise durchführen, müssen in der letzten Tabelle die Spalten bzw. Zeilen in die Reihenfolge $e_1, \dots, e_n$ bzw. $a_1, \dots, a_n$ gebracht werden, damit wir die inverse Matrix A^{-1} einfach ablesen können.

4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3
e_1	1	2	1
e_2	3	2	1
e_3	1	2	2

	e_3	a_2	a_3
e_1	-1	0	-1
e_2	-3	-4	-5
a_1	1	2	2

	e_3	a_2	e_2
e_1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
a_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
a_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

	e_3	e_1	e_2
a_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$
a_3	1	-1	0
a_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Nach Umordnung der Zeilen und Spalten erhalten wir

	e_1	e_2	e_3
a_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
a_2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
a_3	-1	0	1

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgaben zu 5.2.

1

Hat die Matrix A eine inverse Matrix? (Begründung)

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$

(L)

2

Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} !

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (L)

3

Berechnen Sie die inverse Matrix zu $E - A$!

$$\text{a) } E - A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } E - A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

(L)

5.3.

Anwendung der inversen Matrix

Wir zeigen zuerst die Anwendung der Matrizeninversion bei der Lösung von Gleichungssystemen und gehen dann zur Verflechtungsbilanz über.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

und nehmen an; daß die Matrix A n Zeilen und n Spalten besitzt und daß der Rang $r = n$ ist.

Dann besitzt die Matrix A eine inverse Matrix A^{-1} ;

Multiplizieren wir die Gleichung

$$Ax = b$$

von links mit A^{-1} , so erhalten wir

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\text{oder} \quad Ex = A^{-1}b$$

$$\text{und damit} \quad x = A^{-1}b.$$

Wenn wir also zur Matrix A die inverse Matrix A^{-1} kennen, erhalten wir die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, indem wir die inverse Matrix A^{-1} mit dem Vektor b multiplizieren,

$$x = A^{-1}b.$$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ besitzt die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ die wir im Beispiel 4 aus 5.2. berechnet haben;}$$

$$\text{Also gilt } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe der inversen Matrix bringt erst dann einen Vorteil gegenüber unserem bisherigen Vorgehen, wenn mehrere Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit konstanter Matrix A und veränderlichem Vektor $\mathbf{b}$ zu lösen sind, also

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$$

$$\dots$$

$$A\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n$$

oder wenn die inverse Matrix A^{-1} bereits bekannt ist.

2

Es sind die Gleichungssysteme zu lösen

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i \quad (i = 1, \dots, 5) \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 21 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} 42 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Die Matrix } A \text{ besitzt die inverse Matrix } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix},$$

die wir bereits im Beispiel 1 aus 5.2. berechnet haben.

$$\begin{aligned}\text{Es gilt } \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; & \mathbf{x}_4 &= \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 21 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{x}_5 &= \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 42 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Betriebliche Verflechtung

Studieren Sie nochmals den Abschnitt 3.4.3., in dem wir in die betriebliche Verflechtung eingeführt haben! Wir haben dort die Beziehung $\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x}$

abgeleitet. In dem Vektor $\mathbf{x}$ ist die Produktionshöhe der Teilbetriebe erfaßt, im Vektor $\mathbf{y}$ die Produktion, die für den Endverbrauch verbleibt, nachdem von der Produktion der Teilbetriebe die Kooperationslieferungen zwischen den Teilbetrieben subtrahiert wurden. Die Matrix $\mathbf{A}$ enthält die direkten Verbrauchsnormen.

Mit Hilfe der Beziehung $\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x}$ können wir bei bekannter Produktionshöhe $\mathbf{x}$ sehr einfach die Produktion für den Endverbrauch bestimmen.

Für die Praxis ist es aber wichtig, bei bekanntem Endverbrauch $\mathbf{y}$ die Produktion $\mathbf{x}$ zu berechnen. Dazu formen wir die Beziehung $\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x}$ um, indem wir von links mit der inversen Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ multiplizieren. Wir erhalten

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x}.$$

Daraus folgt

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{E} \mathbf{x}$$

$$\text{oder } (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

bzw.

$$\boxed{\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{y}}.$$

Die Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ heißt Matrix der vollen Verbrauchskoeffizienten.

3

Wir benutzen das Zahlenbeispiel aus 3.4.3. Dort haben wir

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

bestimmt. Die inverse Matrix zu $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ ist

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{65}{53} & \frac{14}{53} & \frac{10}{53} \\ \frac{50}{53} & \frac{76}{53} & \frac{24}{53} \\ \frac{70}{53} & \frac{64}{53} & \frac{76}{53} \end{bmatrix}$$

(Die Berechnung erfolgte bereits in Aufgabe 3 a des Abschnittes 5.2.)

Auch die Beziehung

$$x = (E - A)^{-1} y$$

läßt sich für die Planung in einem Planjahr verwenden, wenn die direkten Verbrauchskoeffizienten (d. h. die Elemente der Matrix A) über einen gewissen Zeitraum konstant bleiben. Bezeichnen wir wie in 3.4.3. den Endverbrauch im Planjahr mit y_p und die Produktionshöhe des Planjahres mit x_p , so gilt

$$x_p = (E - A)^{-1} y_p.$$

Ist für das Planjahr der Endverbrauch

$$y_p = [8 \ 2 \ 30]^T$$

geplant, so ergibt sich die geplante Produktionshöhe

$$x_p = (E - A)^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{65}{53} & \frac{14}{53} & \frac{10}{53} \\ \frac{50}{53} & \frac{76}{53} & \frac{24}{53} \\ \frac{70}{53} & \frac{64}{53} & \frac{76}{53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \\ 56 \end{bmatrix}$$

Volkswirtschaftliche Verflechtung

Studieren Sie nochmals den Abschnitt 3.4.4., in dem wir die volkswirtschaftliche Verflechtung eingeführt haben! Auch für die volkswirtschaftliche Verflechtung haben wir die Beziehung

$$y = (E - A) x$$

hergeleitet.

Wie bei der betrieblichen Verflechtung, können wir daraus die Beziehung

$$x = (E - A)^{-1} y$$

gewinnen.

Wir benutzen das Zahlenbeispiel aus 3.4.4. Dort hatten wir

$$E - A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

bestimmt. Die inverse Matrix zu $E - A$ ist

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & \frac{9}{40} & \frac{17}{40} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{13}{40} & \frac{69}{40} \end{bmatrix}$$

(Die Berechnung erfolgte bereits in Aufgabe 3 b des Abschnittes 5.2.)

Bleiben die direkten Verbrauchskoeffizienten (d. h. die Elemente der Matrix A) konstant, so können wir die Beziehung

$$\mathbf{x} = (E - A)^{-1} \mathbf{y}$$

für die Planung im Planjahr verwenden. Bezeichnen wir wieder die Produktion im Planjahr mit $\mathbf{x}_p$, den Endverbrauch mit $\mathbf{y}_p$, so gilt

$$\mathbf{x}_p = (E - A)^{-1} \mathbf{y}_p;$$

Ist für das Planjahr der Endverbrauch

$$\mathbf{y}_p = [4 \ 12 \ 16]^T$$

geplant, so ist die geplante Produktion

$$\mathbf{y}_p = (E - A)^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & \frac{9}{40} & \frac{17}{40} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{13}{40} & \frac{69}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

6.

Lineare Ungleichungssysteme

Bereits im Abschnitt 3.2.2. haben wir festgestellt, daß in der Praxis unseres wirtschaftlichen Lebens neben Gleichheitsbeziehungen sehr häufig Ungleichheitsbeziehungen zwischen ökonomischen Größen auftreten und daß deshalb der Lehre von den Ungleichungen bei der Anwendung der Mathematik in der Wirtschaft zumindest ebenso große Bedeutung zukommt wie der Gleichungslehre. Wir werden uns deshalb in diesem Abschnitt mit linearen Ungleichungssystemen beschäftigen.

Die Symbole für Ungleichheitsbeziehungen haben wir bereits im Abschnitt 3.2.2. eingeführt. Die Eigenschaften der Ungleichheitsbeziehungen und die Gesetze für das Rechnen mit Ungleichungen sind für Matrizen in den Abschnitten 3.2.2. und 3.3. behandelt worden. Da Skalare spezielle Matrizen sind, gelten die Ausführungen in den Abschnitten 3.2.2. und 3.3. auch für Skalare. Trotzdem wollen wir die Symbole für Ungleichheitsbeziehungen, die Eigenschaften der Ungleichheitsbeziehungen und die Gesetze für das Rechnen mit Ungleichungen nochmals kurz formulieren, bevor wir lineare Ungleichungssysteme behandeln.

6.1.

Symbole für Ungleichheitsbeziehungen

- $a \neq b$ bedeutet, daß a verschieden von b ist;
- $a < b$ bedeutet, daß a kleiner ist als b bzw. b größer ist als a ;
- $a > b$ bedeutet, daß a größer ist als b bzw. b kleiner ist als a ;
- $a \leq b$ bedeutet, daß a entweder kleiner ist als b oder gleich b ist:
Wir sagen auch, daß a höchstens gleich b ist oder daß a nicht größer als b ist.
- $a \geq b$ bedeutet, daß a entweder größer ist als b oder gleich b ist:
Wir sagen auch, daß a mindestens gleich b ist oder daß a nicht kleiner als b ist.

6.2.

Eigenschaften der Ungleichheitsbeziehungen

Satz 1

Transitivität

Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$,
aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$,
aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$,
aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$.

1

Die Produktionsergebnisse dreier Brigaden A, B und C an einem Arbeitstag seien $a = 100$ Einheiten, $b = 120$ Einheiten und $c = 130$ Einheiten.

Es gilt $a < b$ und $b < c$. Aus der Transitivität folgt $a < c$, was auch der direkte Vergleich von a und c zeigt.

Satz 2

Monotoniegesetz der Addition

Eine Ungleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Größe addiert, d. h.,

aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$,
aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$,
aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$,
aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$.

2

Ein Betrieb stellt Einzelteile her, die sowohl zu Fertigerzeugnissen komplettiert werden können als auch als Ersatzteile unmittelbar absatzfähig sind. Es besteht die Aufgabe, mindestens 50 000 Einzelteile (das heißt 50 000 oder mehr) sofort abzusetzen und 200 000 Einzelteile der Montageabteilung für die Herstellung von Fertigerzeugnissen zur Verfügung zu stellen. Die Produktionsplanung muß entscheiden, wieviel Einzelteile mindestens zu produzieren sind, damit sowohl der Bedarf an Ersatzteilen als auch der Bedarf der Montage an Einzelteilen gedeckt werden kann. Bezeichnen wir die herzustellende Menge mit x , so kann diese Aufgabe mathematisch wie folgt formuliert werden:

$$x - 200\,000 \geq 50\,000.$$

Da sowohl der Teilbedarf der Montage als auch der Ersatzteilbedarf befriedigt werden muß, müssen insgesamt mindestens 250 000 Teile hergestellt werden. Es gilt also auch

$$x \geq 250\,000.$$

Wir können die zweite Ungleichung gewinnen, indem wir zu beiden Seiten der ersten Ungleichung 200 000 addieren.

Nehmen wir an, der Handel benötige c Ersatzteile und die Montageabteilung a Einzelteile, so würde die allgemeine Form des speziellen Beispiels lauten:

$$x - a \geq c$$

$$x - a + a \geq c + a$$

$$x \geq c + a.$$

Satz 3

Eine Ungleichung bleibt richtig, wenn ihre beiden Seiten mit der gleichen positiven Größe multipliziert werden, das heißt,

$$\text{aus } a < b \text{ und } c > 0 \text{ folgt } ac < bc,$$

$$\text{aus } a > b \text{ und } c > 0 \text{ folgt } ac > bc,$$

$$\text{aus } a \leq b \text{ und } c > 0 \text{ folgt } ac \leq bc,$$

$$\text{aus } a \geq b \text{ und } c > 0 \text{ folgt } ac \geq bc.$$

3

Auf einer Maschine stehen 210 Arbeitsstunden zur Verfügung. Die Zeit für die Herstellung einer Einheit eines Erzeugnisses auf der Maschine beträgt 2 Stunden. Bei der Planung ist zu bestimmen, wieviel Einheiten des Erzeugnisses höchstens hergestellt werden dürfen, damit die verfügbare Maschinenzeit nicht überschritten wird. Die Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse sei x .

Die mathematische Formulierung dieser Aufgabe lautet:

$$2x \leq 210.$$

Die Anzahl der höchstens herstellbaren Erzeugnisse ist dann 105, also $x \leq 105$.

Die zweite Ungleichung entsteht aus der ersten, indem man beide Seiten der Ungleichung mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.

Graphische Deutung des Gesetzes:

Wenn für beliebige Zahlen a und b gilt: $a < b$, so liegt der Punkt, der der Zahl a auf der Zahlengeraden zugeordnet ist, links von dem Punkt, der der Zahl b zugeordnet ist. Bei Multiplikation mit einer positiven Zahl c bleibt ac links von bc , also gilt

$$ac < bc.$$

Satz 4

Wird eine Ungleichung mit einem negativen Faktor multipliziert, so wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt, das heißt,

$$\text{aus } a < b \text{ und } c < 0 \text{ folgt } ac > bc,$$

$$\text{aus } a > b \text{ und } c < 0 \text{ folgt } ac < bc,$$

$$\text{aus } a \leq b \text{ und } c < 0 \text{ folgt } ac \geq bc,$$

$$\text{aus } a \geq b \text{ und } c < 0 \text{ folgt } ac \leq bc.$$

Die beiden Seiten der Ungleichung $+2 < +5$ werden mit -1 multipliziert.

Dann wird die linke Seite größer als die rechte, und es gilt

$$-2 > -5.$$

Ebenso folgt aus der Ungleichung

$$+8 > +4$$

durch Multiplikation mit $-\frac{1}{4}$ die Ungleichung

$$-2 < -1.$$

Graphische Deutung des Gesetzes:

Gilt für a und b wiederum $a < b$, liegt a also auf der Zahlengeraden links von b , so liegt nach der Multiplikation mit einer negativen Zahl c das Produkt ac rechts von bc . Es gilt also: $ac > bc$.

Aufgaben zu 6.2.

1

Lösen Sie folgende Ungleichungen auf!

- a) $a + b + c < d$ (nach a)
- b) $a - b < c + d$ (nach b)
- c) $\frac{a}{b} \leq c$ (nach a ; nach b)
- d) $a + \frac{c}{d} \leq e$ (nach a ; nach c ; nach d)
- e) $7x + 3 > 2x - 4$ (nach x)
- f) $x - 4 \geq 0$ (nach x)
- g) $-x + 5 \geq 0$ (nach x)
- h) $x + 3 \geq 0$ (nach x)
- i) $-x - 2 \geq 0$ (nach x)
- j) $-15x + 7 - 5x \leq 5x + 27$ (nach x)
- k) $\frac{5}{x} + 3 \leq 7$ (nach x) (beachten Sie die beiden Möglichkeiten $x > 0$ oder $x < 0$)
- l) $\frac{6}{x} + 20 > 12$ (nach x) (siehe Bemerkung zu Aufgabe 1 k!) (L)

2

Überlegen Sie, ob für folgende Ungleichung eine Lösung existiert!

$$2x + 3 > 2x + 4$$

Begründen Sie die Überlegung! (L)

3

Welche Werte darf x in der nachstehenden Ungleichung annehmen; wenn sie erfüllt werden soll?

$$x + 4 < x + 7 \quad (L)$$

6.3.

Begriff der Erfüllungsmenge von Ungleichungen

Die Gesamtheit der x -Werte, die eine gegebene Gleichung mit der Variablen x erfüllen, nennen wir die Erfüllungsmenge der gegebenen Gleichung.

Entsprechend nennen wir die Gesamtheit der Wertepaare $(x_1; x_2)$, die ein gegebenes Gleichungssystem mit den Variablen x_1 und x_2 erfüllen, die Erfüllungsmenge des gegebenen Gleichungssystems.

1

Die Erfüllungsmenge der Gleichung $2x = 4$ besteht aus einem Element, nämlich 2.

2

Die Gleichung $x^2 = 9$ hat eine Erfüllungsmenge mit den Elementen -3 und 3 .

3

Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7 = 0 \\ 3x_1 + 7,5x_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

hat eine Erfüllungsmenge, die leer ist; also kein Element besitzt:

4

Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 8 = 0 \\ 10x_1 - 10x_2 - 30 = 0 \end{cases}$$

hat eine Erfüllungsmenge, die ein einziges Element enthält; nämlich das Wertepaar $(1; -2)$.

5

Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 18 = 0 \\ -3x_1 + 4,5x_2 - 13,5 = 0 \end{cases}$$

hat eine Erfüllungsmenge mit unendlich vielen Elementen.

Definition 1 Die Gesamtheit der Werte, die eine gegebene Ungleichung erfüllen, wird als Erfüllungsmenge der Ungleichung bezeichnet.

6

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung $x - 2 > 0$ besteht aus allen Zahlen, die größer als 2 sind. Die Erfüllungsmenge der Ungleichung $x - 2 > 0$ ist also durch die Ungleichung $x > 2$ gegeben.

7

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung $4 + x < 7 + x$ besteht aus allen Zahlen; sie hat unendlich viele Elemente.

8

Die Ungleichung $2x + 3 \geq 2x + 4$ wird für keinen Wert von x erfüllt. Ihre Erfüllungsmenge ist leer.

Wendet man die im Abschnitt 6.2. angegebenen Sätze auf eine Ungleichung an, so erhält man Ungleichungen, die die gleiche Erfüllungsmenge besitzen wie die Ausgangsungleichung.

Aufgaben zu 6.3.

1

Prüfen Sie nach, ob die Werte $x = \frac{26}{9}$; $x = 2,5$; $x = \frac{13}{3}$ zur Erfüllungsmenge der Ungleichung $3x < 9$ gehören! (L)

2

Prüfen Sie, ob $x = 3$; $x = \frac{1}{4}$; $x = -2$ zur Erfüllungsmenge folgender Ungleichungen gehören!

a) $3x + 5 + 7x < 9 + 7x + 5$

b) $10 + \frac{1}{x} \geq 6 + \frac{2}{x}$

c) $4(4x + 1) \leq 4(5x + 3)$

d) $\frac{5}{2}x + 2(5 + 3x) \leq -\frac{15}{2} + 6x + 10$

e) $3x + 7 - 12x \geq 12 + 7x + 5 - 19x + 2$ (L)

3

Stellen Sie die Erfüllungsmengen der Ungleichungen von Aufgabe 2 auf einer Zahlengeraden graphisch dar!

6.4.

Lineare Ungleichungssysteme mit einer Variablen

Betrachten wir zwei Ungleichungen mit einer Variablen, so hat jede Ungleichung für sich eine bestimmte Erfüllungsmenge. Die Erfüllungsmenge M_1 enthält alle Zahlen, die die erste Ungleichung erfüllen, und die Erfüllungsmenge M_2 alle Zahlen, die die zweite Ungleichung erfüllen. Als Lösung für unser Ungleichungssystem kommen nur Zahlen in Betracht, die sowohl die erste als auch die zweite Ungleichung erfüllen. Das sind Zahlen, die sowohl der Erfüllungsmenge M_1 als auch der Erfüllungsmenge M_2 angehören. Wir bezeichnen die Menge der Elemente, die sowohl der Menge M_1 als auch der Menge M_2 angehören, als den Durchschnitt der Mengen M_1 und

M₂. Demnach ist die Erfüllungsmenge unseres Ungleichungssystems der Durchschnitt der Erfüllungsmengen jeder Ungleichung für sich.

1

Zur Herstellung eines Erzeugnisses ist die Bearbeitung des Ausgangsrohstoffes auf zwei Maschinen erforderlich. Die Bearbeitungszeit einer Einheit des Erzeugnisses auf der ersten Maschine sei 2 Stunden und auf der zweiten Maschine 4 Stunden. Die verfügbare Maschinenzeit der ersten Maschine sei 180 Stunden und die der zweiten Maschine 200 Stunden. Die mögliche Anzahl herstellbarer Erzeugnisse sei x . Die mathematische Formulierung dieser Aufgabe lautet:

$$\begin{cases} (1) & 2x \leq 180 \\ (2) & 4x \leq 200 \end{cases}$$

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung (1) enthält alle x , für die $x \leq 90$ gilt.

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung (2) enthält alle diejenigen x , für die $x \leq 50$ gilt.

Wir erkennen, daß sich die Erfüllungsmengen für die Ungleichung (1) und (2) voneinander unterscheiden.

Die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems insgesamt ergibt sich aus der Menge der Werte für x , die sowohl die Ungleichung (1) als auch die Ungleichung (2) erfüllen, das heißt sowohl der ersten als auch der zweiten Erfüllungsmenge angehören. Auf das erwähnte Beispiel angewandt, ergibt sich, daß die Erfüllungsmenge dieses Ungleichungssystems aus allen x besteht, für die $x \leq 50$ gilt.

Die graphischen Darstellungen dieses Sachverhalts auf der Zahlengeraden zeigt Abb. 6.1.

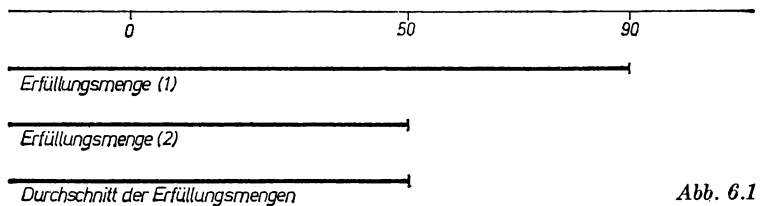


Abb. 6.1

2

Wir untersuchen die Erfüllungsmenge des folgenden Ungleichungssystems:

$$\begin{cases} 2x \geq 4 \\ 3x < 12 \end{cases}$$

Die untere und obere Beschränkung der Erfüllungsmenge des Systems der beiden Ungleichungen ergibt sich, wenn wir die Ungleichungen umformen in

$$\begin{aligned} x &\geq 2 \text{ und} \\ x &< 4. \end{aligned}$$

Die Erfüllungsmenge dieses Systems umfaßt alle Zahlen; für die sowohl $x \geq 2$ als auch $x < 4$ gilt.

Wir schreiben dafür auch $2 \leq x < 4$.

Aufgaben zu 6.4.

1

Bestimmen Sie die Erfüllungsmengen der folgenden Ungleichungssysteme!

a) $\begin{cases} x \geq 6 \\ x \geq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 7 > 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 9 > x - 2 \\ -2x + 10 \geq 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 8 \geq 4x - 7 \\ 4x + 7 \geq 30 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4 \leq 3x - 5 \\ 2 - 5x \geq -13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \\ -x + 3 \leq 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x - 5 \geq 2x + 6 \\ \frac{1}{2}x - 2 \geq \frac{3}{2}x - 8 \\ \frac{1}{4}x + 3 < \frac{1}{8}x + \frac{15}{16} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 0,5x + 3 = -4,5x - 7 \\ -5,3x + 7,8 > -1,2x + 11,9 \\ 3,2x - 5,6 \geq 1,6x - 0,8 \end{cases}$

(L)

2

Ein Erzeugnis ist auf drei Maschinen zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit einer Einheit des Erzeugnisses erfordert 4 Stunden auf der ersten Maschine, 2 Stunden auf der zweiten und 2,5 Stunden auf der dritten Maschine. Die verfügbare Maschinenzzeit beträgt 380 Stunden auf der ersten Maschine, 210 Stunden auf der zweiten und 235 Stunden auf der dritten Maschine. Wieviel Einheiten des Erzeugnisses lassen sich herstellen?

(L)

6.5.

Graphische Lösung linearer Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

- a) Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß das System nur aus einer Gleichung mit zwei Variablen besteht, zum Beispiel

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Die graphische Darstellung dieser Gleichung im kartesischen Koordinatensystem ist eine Gerade, die in Abb. 6.2 dargestellt ist.

Die Erfüllungsmenge dieses Systems umfaßt alle Wertepaare

$(x_1; x_2)$, die zu den Punkten auf der Geraden $x_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$ gehören.

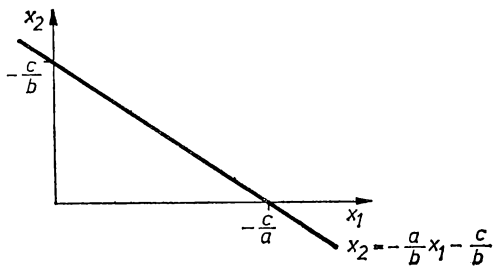


Abb. 6.2

- b) Wir betrachten jetzt eine lineare Ungleichung mit zwei Variablen, zum Beispiel

$$ax_1 + bx_2 + c \leq 0; \quad a \neq 0, b \neq 0.$$

Zunächst untersuchen wir den Fall $b > 0$.

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung

$$ax_1 + bx_2 + c \leq 0, \quad a \neq 0, b > 0,$$

wird durch alle Punkte dargestellt, die auf der Geraden

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

und unterhalb dieser Geraden liegen, denn für

$$ax_1 + bx_2 + c \leq 0, \quad a \neq 0, b > 0,$$

läßt sich auch

$$x_2 \leq -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

schreiben.

Die Erfüllungsmenge ist graphisch in Abb. 6.3 veranschaulicht:

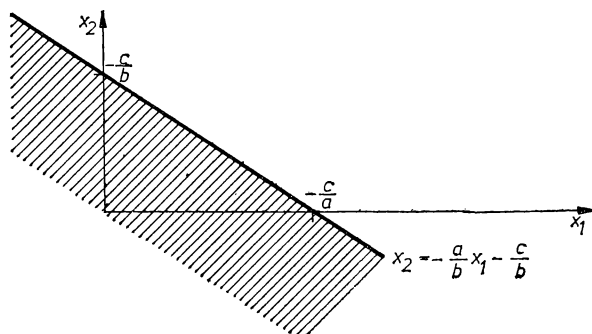


Abb. 6.3

Als nächstes untersuchen wir den Fall $b < 0$.

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung

$$ax_1 + bx_2 + c \leq 0, \quad a \neq 0, b < 0,$$

wird durch alle Punkte dargestellt, die auf der Geraden

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

und oberhalb dieser Geraden liegen, denn für

$$ax_1 + bx_2 + c \leq 0, \quad a \neq 0, \quad b < 0,$$

läßt sich auch

$$x_2 \geq -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

schreiben. Die Erfüllungsmenge ist graphisch in Abb. 6.4 veranschaulicht.

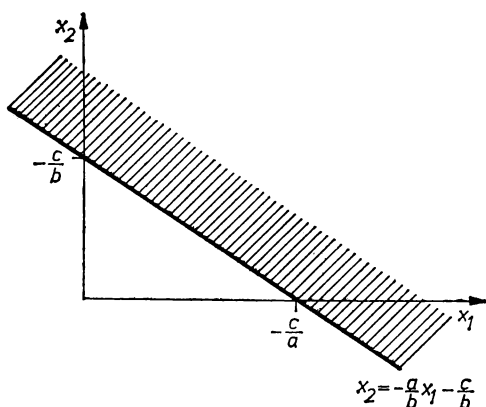


Abb. 6.4

- c) Die Erfüllungsmenge der linearen Ungleichung

$$ax_1 + bx_2 + c < 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0,$$

wird durch alle Punkte unterhalb der Geraden

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

dargestellt, wenn $b > 0$ ist,

bzw. durch alle Punkte oberhalb der Geraden

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b},$$

wenn $b < 0$ ist.

- d) Nun wollen wir ein lineares Ungleichungssystem mit zwei Ungleichungen betrachten, zum Beispiel

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 &\leq 0, & (a_1 \neq 0; \quad b_1 \neq 0) \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 &\leq 0, & (a_2 \neq 0; \quad b_2 \neq 0) \end{aligned} \right\}.$$

Die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems umfaßt alle Wertepaare $(x_1; x_2)$, die sowohl in der Erfüllungsmenge der ersten

als auch in der Erfüllungsmenge der zweiten Ungleichung enthalten sind.

Die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems ist also der Durchschnitt der Erfüllungsmengen der einzelnen Ungleichungen.

Die Erfüllungsmenge eines Ungleichungssystems mit zwei Ungleichungen und zwei Variablen kann unendlich viele Elemente enthalten, wie es Abb. 6.5 zeigt.

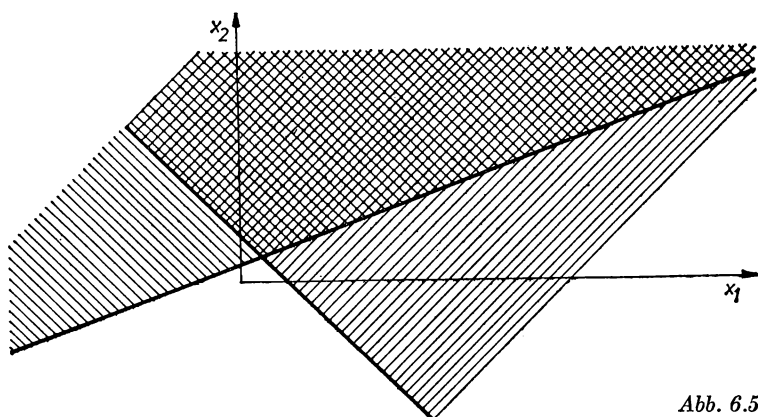


Abb. 6.5

Die Erfüllungsmengen der einzelnen Ungleichungen sind einfach schraffiert, während die Erfüllungsmenge des Systems eine doppelte Schraffur zeigt.

Die Erfüllungsmenge eines Ungleichungssystems mit zwei Ungleichungen und zwei Variablen kann aber auch leer sein, wie es Abb. 6.6 zeigt.

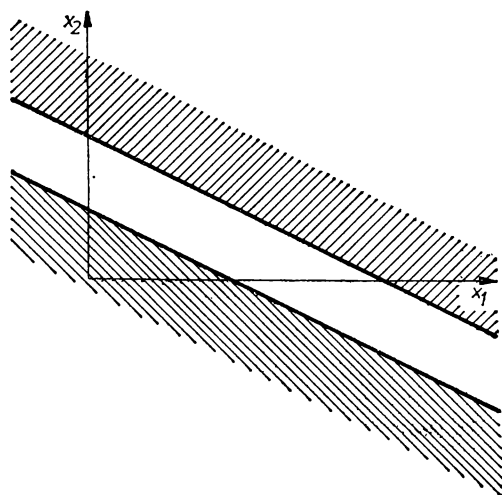


Abb. 6.6

Beispiele für Ungleichungssysteme mit ein, zwei und mehr Ungleichungen

1

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

wird durch alle Punkte dargestellt, die auf der Geraden

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2$$

und oberhalb dieser Geraden liegen, denn für

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6 \text{ lässt sich auch}$$

$$x_2 \geq -\frac{2}{3}x_1 + 2$$

schreiben. Die graphische Veranschaulichung dieser Erfüllungsmenge zeigt Abb. 6.7.

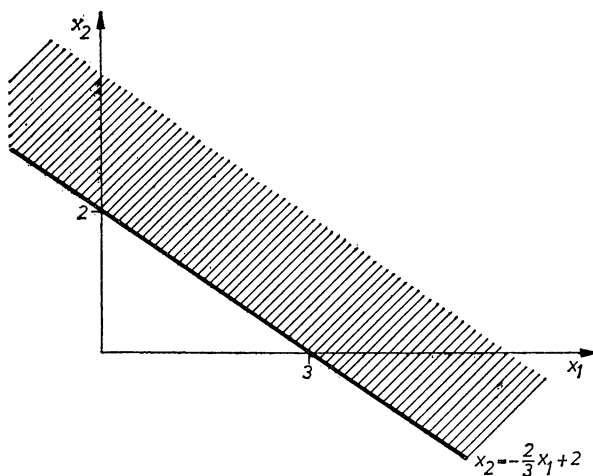


Abb. 6.7

2

Die Erfüllungsmenge der Ungleichung

$$2x_1 + 3x_2 < 6$$

ist durch alle Wertepaare $(x_1; x_2)$ bestimmt, die zu den Punkten unterhalb der Geraden

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2$$

gehören (Abb. 6.8);

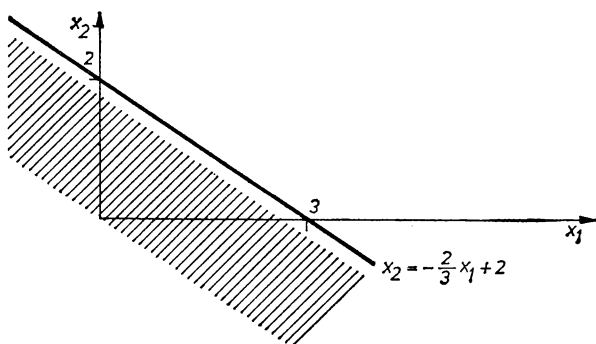


Abb. 6.8

(Durch den Abstand der Schraffur von der Geraden $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2$ wollen wir andeuten, daß die Punkte der Geraden $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2$ nicht zur Erfüllungsmenge gehören.)

3

Die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

wird durch alle Punkte dargestellt, die entweder auf dem nicht-negativen Teil der x_1 -Achse bzw. der x_2 -Achse oder im ersten Quadranten liegen (Abb. 6.9).

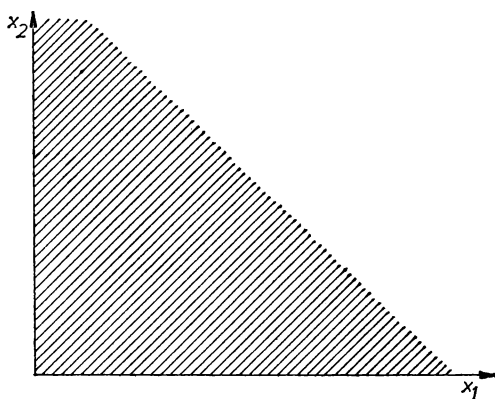


Abb. 6.9

4

Die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

wird durch die Punkte dargestellt, die in Abb. 6.10 im schraffierten Gebiet liegen.

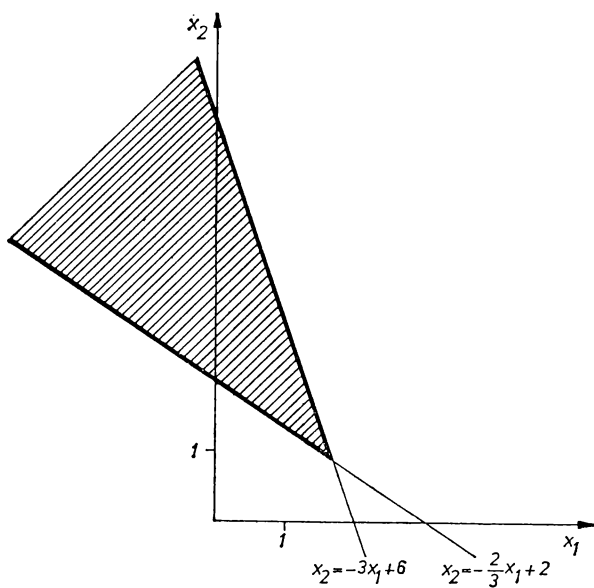


Abb. 6.10

5

Die Erfüllungsmenge des linearen Ungleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

wird durch die Punkte des Dreiecks 0AB dargestellt. Dabei ist zu beachten, daß die Punkte auf den Dreieckseiten mit zur Erfüllungsmenge gehören (Abb. 6.11).

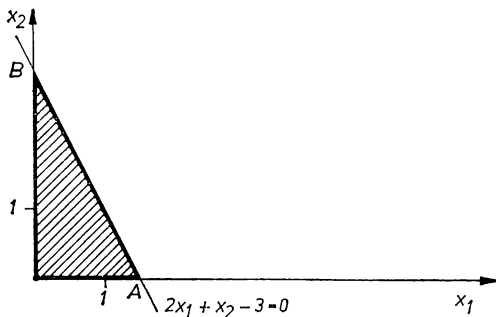


Abb. 6.11

6

Die Erfüllungsmenge des linearen Ungleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 > 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

ist in Abb. 6.12 dargestellt. Dabei gehören die Punkte auf der Geraden $x_2 = -2x_1 + 3$ nicht zur Erfüllungsmenge.

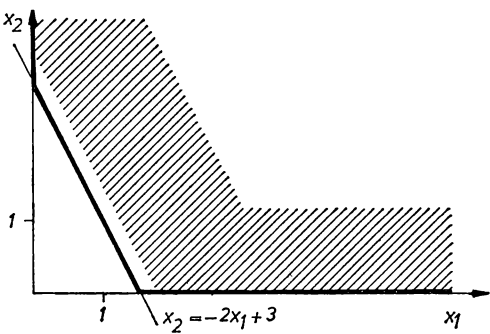


Abb. 6.12

7

Für drei Maschinen und zwei Erzeugnisse soll ein Maschinenbelastungsplan ausgearbeitet werden. Folgende Angaben liegen vor:

Tabelle 6.1

Maschine Nr.	Notwendige Maschinenzeit je Einheit des Erzeugnisses		Verfügbare Maschinenzeit
	1	2	
1	2	4	180
2	3	3	180
3	5	—	200
Anzahl der hergestellten Erzeugnisse			
	x_1	x_2	

Die mathematische Formulierung dieser Aufgabe lautet:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 5x_1 \leq 200. \end{array}$$

Da eine negative Anzahl von Erzeugnissen nicht hergestellt werden kann, gelten zusätzlich die Ungleichungen

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

In Abb. 6.13 stellen wir das Ungleichungssystem graphisch dar.

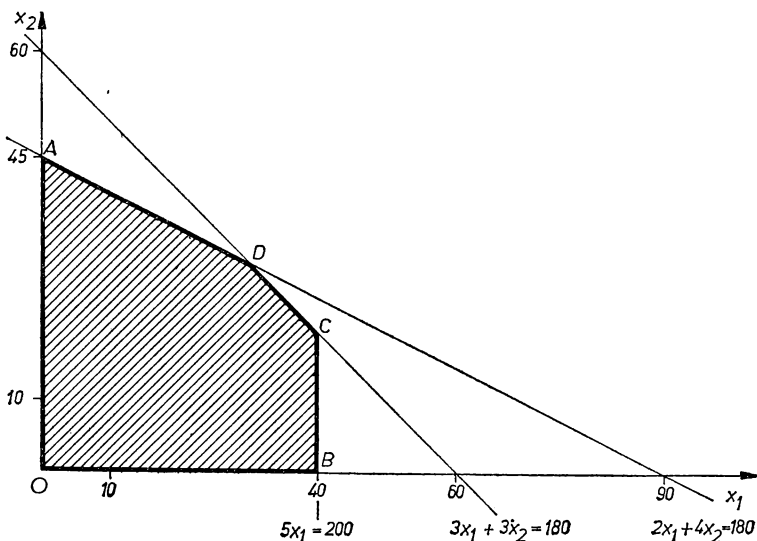


Abb. 6.13

Wir erkennen, daß die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems alle Wertepaare $(x_1; x_2)$ der Punkte umfaßt, die in dem schraffierten Fünfeck AOB CD bzw. auf seinen Begrenzungen liegen.

Die Erfüllungsmengen von Ungleichungssystemen mit drei und mehr Variablen lassen sich in der beschriebenen Weise nicht graphisch darstellen. Hier muß man gegebenenfalls rechnerische Verfahren anwenden.

Aufgaben zu 6.5.

1

Wie müssen die drei Ungleichungssysteme lauten; deren Erfüllungsmengen durch die Punkte innerhalb

- a) des II. Quadranten, b) des III. Quadranten; c) des IV. Quadranten dargestellt werden? (L)

2

Stellen Sie im Koordinatensystem die Erfüllungsmengen folgender Ungleichungssysteme dar:

- a) $x \leq 5; y > 4$,
b) $0 \leq x \leq 6; 1 \leq y \leq 4$:

Beachten Sie, ob die Begrenzung zur Erfüllungsmenge gehört!

3

Welche Erfüllungsmenge hat das Ungleichungssystem

$$x_1 \leq 0; \quad x_2 \leq 0; \quad 2x_1 + 3x_2 \geq 6?$$

4

- Bestimmen Sie die Produktionsstückzahlen x_1 , x_2 , die sich im Maschinenbelastungsproblem des Beispiels 7 in den Punkten A, O, B, C, D ergeben!
- Wählen Sie unter den Lösungen von a) diejenige aus, die die größte Gesamtstückzahl ergibt!
- Wählen Sie unter den Lösungen von a) diejenige aus, die den größten Gewinn bringt, wenn der konstante Gewinn je Einheit für das erste Produkt 20 M und für das zweite Produkt 30 M beträgt!
- Alle Punkte mit dem Gewinn $z = 800$ liegen auf der Geraden $800 = 20x_1 + 30x_2$. Tragen Sie diese Gerade in Abb. 6.13 ein, und lesen Sie fünf Lösungen ab, die den Gewinn $z = 800$ bringen! (L a, b, c)

5

Zur Herstellung von zwei unterschiedlichen Erzeugnissen werden drei verschiedene Materialien benötigt. Der Materialbedarf je Einheit, die Materialfonds und der Gewinn je Einheit sind der Tabelle 6.2 zu entnehmen. Die Materialfonds können vollständig ausgeschöpft werden, sie müssen es aber nicht.

Tabelle 6.2

Material	Material je Einheit des Erzeugnisses		Materialfonds
	1	2	
1	3	6	240
2	6	4	360
3	0	5	150
Gewinn	40	30	

- Stellen Sie das Ungleichungssystem für die Produktionshöhe der beiden Erzeugnisse auf (berücksichtigen Sie dabei die Materialfonds)!
- Stellen Sie das Ungleichungssystem graphisch dar!
- Stellen Sie den Gewinn z in Abhängigkeit von der Produktionshöhe der beiden Produkte durch eine Gleichung dar!
- Setzen Sie für z die Werte 400; 800; 1 200 und 2 400 ein, und stellen Sie die entsprechenden Gleichungen im gleichen Koordinatensystem dar, in dem das Ungleichungssystem dargestellt wurde!
- Lesen Sie aus der graphischen Darstellung Produktionszahlen ab, die einen Gewinn von 400; 800; 1 200 und 2 400 bringen! (L a, c, d)

6.6.

Rechnerische Lösung linearer Ungleichungssysteme mit zwei oder mehr Variablen

Bisher haben wir die linearen Ungleichungssysteme mit zwei Variablen nur graphisch gelöst. Jetzt wollen wir zeigen, wie wir mit Hilfe der Basistransformation lineare Ungleichungssysteme mit zwei und mehr Variablen lösen können. Dabei betrachten wir nur solche lineare Ungleichungssysteme, die ein beschränktes Lösungsgebiet haben. Lineare Ungleichungssysteme aus der ökonomischen Praxis haben immer beschränkte Lösungsgebiete.

Lineare Ungleichungssysteme mit beschränktem Lösungsgebiet liefern die Beispiele 5 und 7 aus 6.5., während in den Beispielen 3, 4 und 6 aus 6.5. unbeschränkte Lösungsgebiete auftreten.

1

Wir betrachten die Aufgabe

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ (1) \quad 3x_1 + 3x_2 &\leq 180 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Wir formen das Ungleichungssystem in ein Gleichungssystem um, indem wir in jede Ungleichung eine Variable einführen, die die Differenz zwischen der rechten und linken Seite der Ungleichung erfaßt.

$$\begin{aligned} v_1 &= 180 - (2x_1 + 4x_2) \\ v_2 &= 180 - (3x_1 + 3x_2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + v_1 &= 180 \\ 3x_1 + 3x_2 + v_2 &= 180 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung muß außerdem $v_1, v_2 \geq 0$ gelten, damit jede Lösung des Gleichungssystems zugleich eine Lösung des Ungleichungssystems (1) ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + v_1 &= 180 \\ (2) \quad 3x_1 + 3x_2 + v_2 &= 180 \\ x_1, x_2, v_1, v_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(2) ist ein lineares Gleichungssystem mit 4 Variablen. Dabei tritt außerdem die Forderung auf, daß keine Variable einen negativen Wert annehmen darf.

(2) formen wir um in

$$\begin{aligned} (3) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + e_1v_1 + e_2v_2 &= b \\ x_1, x_2, v_1, v_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 180 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir ähnlich vor wie bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit unendlich vielen Lösungen. Für die Lösung der Aufgabe (3) benutzen wir die Tabelle 6.3.

Tabelle 6.3

		x_1 a_1	x_2 a_2	b
v_1	e_1	2	4	180
v_2	e_2	3	3	180

Aus dieser Tabelle gewinnen wir eine spezielle Lösung unserer Gleichungssysteme (2) und (3), indem wir die Variablen, die in der linken Randspalte stehen, die Werte annehmen lassen, die in der rechten Randspalte vermerkt sind, also

$$v_1 = 180; \quad v_2 = 180.$$

Die Variablen in der Kopfzeile nehmen den Wert null an, also

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0.$$

$x_1 = 0; x_2 = 0$ ist auch eine Lösung des Ungleichungssystems (1) (Punkt P_1 in Abb. 6.14).

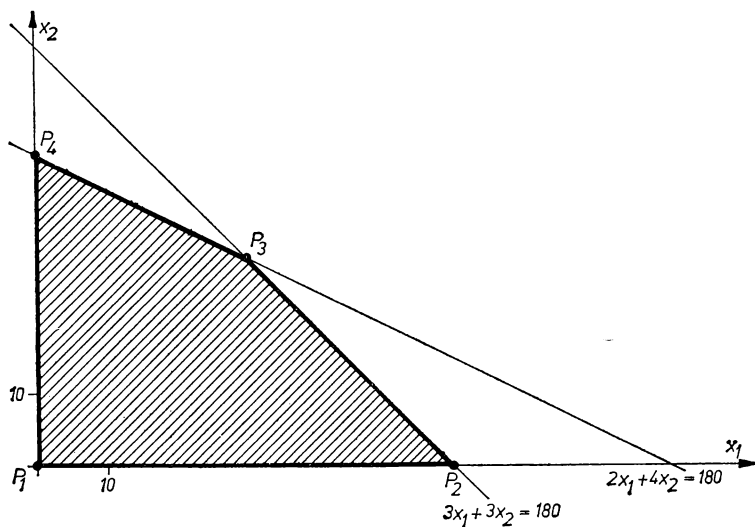


Abb. 6.14

Führen wir jetzt eine Basistransformation durch, indem wir a_1 gegen e_2 austauschen, so erhalten wir Tabelle 6.4.

Tabelle 6.4

		v_2 e_2	x_2 a_2	b
v_1	e_1	$-\frac{2}{3}$	$\boxed{2}$	60
x_1	a_1	$\frac{1}{3}$	1	60

Aus der Tabelle 6.4 gewinnen wir eine weitere spezielle Lösung unserer Gleichungssysteme (2) und (3), indem wir wieder die Variablen in der linken Randspalte die Werte der rechten Randspalte annehmen lassen, also

$$v_1 = 60; \quad x_1 = 60,$$

und die Variablen in der Kopfzeile gleich null setzen; also

$$v_2 = 0; \quad x_2 = 0.$$

$x_1 = 60; x_2 = 0$ ist auch eine Lösung des Ungleichungssystems (1) (Punkt P_2 in Abb. 6.14).

Führen wir jetzt eine Basistransformation durch; indem wir a_2 gegen e_1 austauschen, so erhalten wir Tabelle 6.5.

Tabelle 6.5

		v_2 e_2	v_1 e_1	b
x_2	a_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	30
x_1	a_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{2}$	30

Aus der Tabelle 6.5 gewinnen wir eine weitere spezielle Lösung unserer Gleichungssysteme (2) und (3), indem wir wieder die Variablen der linken Randspalte die Werte in der rechten Randspalte annehmen lassen, also

$$x_1 = 30; \quad x_2 = 30,$$

und die Variablen in der Kopfzeile gleich null setzen, also

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 0.$$

$x_1 = 30; x_2 = 30$ ist auch eine Lösung des Ungleichungssystems (1) (Punkt P_3 in Abb. 6.14).

Führen wir jetzt eine Basistransformation durch, indem wir e_2 gegen a_1 austauschen, so erhalten wir Tabelle 6.6.

Mit Hilfe von Vektoren erhalten wir folgende Darstellung:

$$(2) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b; \quad x \geq 0$$

$$\text{mit } a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad \cdots; \quad a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von Matrizen erhalten wir folgende Darstellung:

$$(3) \quad Ax \leq b; \quad x \geq 0$$

$$\text{mit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Das lineare Ungleichungssystem formen wir in ein Gleichungssystem um, indem für jede Ungleichung eine Variable eingeführt wird, die den Ausgleich zwischen der rechten und linken Seite der Ungleichung herbeiführt. Diese zusätzliche Variable nennen wir *Schlupfvariable*. Die Schlupfvariable darf nicht negativ sein, denn die linke Seite der Ungleichung darf ja nicht größer sein als die rechte Seite.

Mit Hilfe der Schlupfvariablen $v_1, v_2, \dots, v_m$ erhalten wir aus (1)

$$\begin{aligned} (1') \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + v_1 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + v_2 = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + v_m = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n; \quad v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0. \end{aligned}$$

Aus (2) wird

$$(2') \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + e_1v_1 + e_2v_2 + \cdots + e_mv_m = b$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \quad v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0.$$

Schließlich wird aus (3)

$$(3') \quad Ax + Ev = b; \quad x \geq 0; \quad v \geq 0$$

$$\text{mit } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Die Gleichungssysteme (1'), (2'), (3') haben gegenüber unseren bisherigen Gleichungssystemen eine Besonderheit: Die Lösungen dürfen keine negativen Werte enthalten. Trotzdem können wir bei der Lösung dieser Gleichungssysteme ähnlich verfahren wie bei der Lösung unserer bisherigen Gleichungssysteme ohne die Nichtnegativ-

tätsbedingung. Jede Lösung unseres Gleichungssystems hat einen primalen Lösungsteil, den wir im Vektor x erfassen, und einen dualen Lösungsteil, den wir im Vektor v erfassen.

Der primale Lösungsteil x unseres Gleichungssystems liefert eine Lösung für unser Ungleichungssystem. Deshalb brauchen wir nur das Gleichungssystem zu lösen und erhalten mit dem primalen Lösungsteil x sofort eine Lösung für unser Ungleichungssystem.

Bei der Lösung des Gleichungssystems mit Nichtnegativitätsbedingung (1'), (2'), (3') können wir ähnlich vorgehen wie bei der Lösung unserer bisherigen Gleichungssysteme ohne Nichtnegativitätsbedingung. Damit aber die Nichtnegativitätsbedingung eingehalten wird, müssen wir bei der Wahl des Hauptelementes für die Basis-Transformation zusätzliche Regeln beachten.

Außerdem interessieren uns nur ganz bestimmte Lösungen des Gleichungssystems.

Wir zeigen zuerst, wie wir die uns interessierenden Lösungen des Gleichungssystems (1'), (2'), (3') finden. Danach erläutern wir das Auffinden aller Lösungen des Ungleichungssystems (1) bzw. (2) bzw. (3). Wir betrachten bei unserem weiteren Vorgehen nur lineare Ungleichungssysteme

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

in denen der Vektor b keine negativen Komponenten enthält, also $b \geq 0$. Ein solches Ungleichungssystem nennen wir ein normales Ungleichungssystem.

Definition 1 $Ax \leq b, x \geq 0$ mit $b \geq 0$ heißt normales Ungleichungssystem.

2

$$\begin{aligned} \text{Das Ungleichungssystem } 2x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 180 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

aus Beispiel 1 ist ein normales Ungleichungssystem.

3

$$\begin{aligned} \text{Das Ungleichungssystem } 2x_1 + x_2 &\leq -5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ist kein normales Ungleichungssystem, denn der Vektor $b = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

hat eine negative Komponente.

Wir können zwar die erste Ungleichung mit -1 multiplizieren und erhalten dann $-2x_1 - x_2 \geq 5$, aber jetzt tritt das Zeichen $\geq$ auf, das nach Definition in einem normalen Ungleichungssystem nicht auftreten darf.

Wir können in einem normalen Ungleichungssystem *eine* Lösung erhalten, indem wir alle Variablen gleich null setzen. Diese Lösung nennen wir die triviale Lösung.

Satz 1

Das normale Ungleichungssystem hat die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Die triviale Lösung können wir der folgenden Rechentabelle 6.7 entnehmen. In der Kopfzeile stehen die primalen Variablen, die wir im Vektor $\mathbf{x}^T$ erfassen. In der linken Randspalte stehen die dualen Variablen, die wir im Vektor $\mathbf{v}$ erfassen.

Tabelle 6.7

	$\mathbf{x}^T$	
$\mathbf{v}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$

Die Variablen in der Kopfzeile werden gleich null gesetzt, also $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Die Variablen der linken Randspalte nehmen die Werte an, die in der rechten Randspalte vermerkt sind, also $\mathbf{v} = \mathbf{b}$.

Die Tabelle 6.7 entspricht der Tabelle 6.3 im Beispiel 1. In unserem Beispiel 1 haben wir nur spezielle Lösungen betrachtet, die wir als Basislösungen bezeichneten.

Definition 2

Die triviale Lösung und jede weitere zulässige Lösung des normalen Ungleichungssystems, die wir durch Basistransformation aus der trivialen Lösung gewinnen, bezeichnen wir als Basislösung.

Die Basistransformation haben wir bereits bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen benutzt. Wir wollen jetzt zeigen, wie das Hauptelement der Basistransformation bei der Lösung des linearen Ungleichungssystems festzulegen ist, damit wir alle Basislösungen des Ungleichungssystems erhalten und damit in den Lösungen keine negativen Komponenten auftreten.

Wahl des Hauptelementes bei linearen Ungleichungssystemen:

- a) Festlegung der Spalte
Die Spalte ist beliebig zu wählen, aber die gleiche Spalte darf bei aufeinanderfolgenden Basistransformationen nicht zweimal gewählt werden (weil wir sonst wieder die vorangehende Lösung erhalten).
- b) Festlegung der Zeile
In der ausgewählten Spalte werden für alle positiven Werte die Quotienten aus den zugehörigen Werten der rechten Randspalte und den positiven Elementen der ausgewählten Spalte gebildet. Der kleinste Quotient legt die Zeile des Hauptelementes fest.

Wir wollen die Wahl des Hauptelementes an der Rechentabelle 6.8 demonstrieren. Die Rechentabelle ist aus der Rechentabelle 6.7

durch Basistransformationen hervorgegangen. ($\cdots, y_j \cdots, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_i, \cdots, \tilde{y}_m$ sind irgendwelche der Variablen $x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_m$.)

Tabelle 6.8

	$\cdots \quad y_j \quad \cdots$	
$\tilde{y}_1$	$\cdots \quad a'_{1j} \quad \cdots$	b'_1
$\cdot$		$\cdot$
$\cdot$	$\cdots \cdots \cdots$	$\cdot$
$\tilde{y}_i$	$\cdots \quad a'_{ij} \quad \cdots$	b'_i
$\cdot$		$\cdot$
$\cdot$	$\cdots \cdots \cdots$	$\cdot$
$\tilde{y}_m$	$\cdots \quad a'_{mj} \quad \cdots$	b'_m

Aus dieser Tabelle lesen wir folgende Lösung ab:

Alle Variablen der Kopfzeile werden null, also

$\cdots; y_j = 0; \cdots$.

Alle Variablen der linken Randspalte nehmen die Werte der rechten Randspalte an, also

$\tilde{y}_1 = b'_1, \cdots, \tilde{y}_i = b'_i, \cdots, \tilde{y}_m = b'_m$.

Wir zeigen jetzt die Wahl des Hauptelementes für die nächste Basistransformation.

Spaltenwahl:

Wenn in der vorangehenden Basistransformation das Hauptelement nicht in der Spalte j lag, können wir jetzt das Hauptelement in der Spalte j wählen.

Zeilenwahl:

Für alle *positiven* $a'_{1j}, \cdots, a'_{ij}, \cdots, a'_{mj}$, das heißt für alle *positiven* Werte in der Spalte j , bilden wir die Quotienten

$$\frac{b'_1}{a'_{1j}}, \cdots, \frac{b'_i}{a'_{ij}}, \cdots, \frac{b'_m}{a'_{mj}}.$$

Von diesen Quotienten wird der kleinste gesucht.

Es sei dies $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$, der Quotient, der zur Zeile i gehört.

Das Hauptelement der Basistransformation ist a'_{ij} , denn es liegt in der Spalte j und der Zeile i .

4

Wir betrachten die Wahl des Hauptelementes im Beispiel 1.

a) In der Tabelle 6.3 wählen wir die Spalte 1 (wir könnten auch die Spalte 2 wählen). In der Spalte 1 stehen die positiven Werte $\frac{2}{3}$.

Wir bilden die Quotienten $\frac{180}{2}$ und $\frac{180}{3}$.

Der kleinste Quotient ist $\frac{180}{3}$ in der Zeile 2. Deshalb ist das Hauptelement in der Spalte 1 und der Zeile 2 zu wählen, es ist die eingerahmte 3.

- b) In der Tabelle 6.4 wählen wir die Spalte 2 (Spalte 1 kann jetzt nicht genommen werden, weil in der vorangehenden Basistransformation das Hauptelement in der Spalte 1 gewählt wurde). In der Spalte 2 stehen die positiven Werte $\frac{2}{1}$. Wir bilden die Quotienten $\frac{60}{2}$ und $\frac{60}{1}$.

Der kleinste Quotient ist $\frac{60}{2}$ in der Zeile 1. Deshalb ist das Hauptelement in der Spalte 2 und der Zeile 1 zu wählen, es ist die eingerahmte 2.

- c) In der Tabelle 6.5 wählen wir die Spalte 1 (Spalte 2 kommt nicht in Frage). In der Spalte 1 haben wir nur ein positives Element $\frac{2}{3}$. Dieses eingerahmte Element $\frac{2}{3}$ wird Hauptelement.

- d) In der Tabelle 6.6 wählen wir die Spalte 2. In der Spalte 2 haben wir nur ein positives Element $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ käme als Hauptelement in Frage, aber die Basistransformation würde zur Tabelle 6.3 zurückführen. Die Rechnung ist beendet.

Wir haben jetzt gezeigt, wie das Hauptelement gewählt werden muß, damit wir aus der trivialen Lösung weitere Basislösungen gewinnen. Die Basistransformationen werden so lange fortgesetzt, bis wir mit der nächsten Basistransformation nur noch eine bereits bekannte Basislösung erhalten. Damit haben wir alle Basislösungen unseres normalen Ungleichungssystems bestimmt. Es gibt nur endlich viele Basislösungen (in unserem Beispiel 1 gibt es 4 Basislösungen). Neben den Basislösungen gibt es noch unendlich viele Nicht-Basislösungen, wenn mehr als eine Basislösung existiert. Alle Lösungen des normalen Ungleichungssystems können wir als konvexe Linearkombinationen der Basislösungen darstellen.

Satz 2

Hat das normale Ungleichungssystem mit beschränktem Lösungsgebiet die Basislösungen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \quad \text{mit} \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= 1 \quad \text{und} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n &\geq 0 \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung des normalen Ungleichungssystems.

5

In einem normalen Ungleichungssystem mit 2 Variablen, das ein beschränktes Lösungsgebiet besitzt, ist das Lösungsgebiet ein konvexes Vieleck.

Die Basislösungen entsprechen den Eckpunkten des Vielecks.

Wir lösen das Ungleichungssystem aus Beispiel 7 des Abschnittes 6.5. rechnerisch.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 180$$

$$5x_1 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Wir beginnen mit der Tabelle 6.9.

Tabelle 6.9

	x_1	x_2	
v_1	2	4	180
v_2	3	3	180
v_3	5	0	200

Aus ihr lesen wir die triviale Lösung

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0$$

$v_1 = 180; v_2 = 180; v_3 = 200$ ab. Sie entspricht dem Punkt 0 in Abb. 6.13.

Wir wählen das Hauptelement in der Spalte 1 (Spalte 2 wäre auch

möglich). Spalte 1 enthält die positiven Elemente $\frac{180}{2}$ 3. Wir bilden

$$\begin{array}{r} \frac{180}{2} \\ 180 \\ \hline 3 \\ \frac{200}{5} \end{array}$$

Der kleinste Quotient ist $\frac{200}{5}$. Also wird die eingerahmte 5 Hauptelement.

Nach der Basistransformation erhalten wir die Tabelle 6.10.

Tabelle 6.10

	v_3	x_2	
v_1	$-\frac{2}{5}$	4	100
v_2	$-\frac{3}{5}$	3	60
x_1	$\frac{1}{5}$	0	40

Tabelle 6.10 liefert die Basislösung

$$x_1 = 40; x_2 = 0$$

$$v_1 = 100; v_2 = 60; v_3 = 0.$$

Sie entspricht dem Punkt B in Abb. 6.13.

Wir wählen das Hauptelement in der Spalte 2 (Spalte 1 kommt nicht in Frage). Spalte 2 enthält die positiven Elemente $\frac{4}{3}$. Wir

bilden die Quotienten $\frac{100}{\frac{4}{3}}$. Der kleinste Quotient ist $\frac{60}{\frac{4}{3}}$. Also wird

die eingerahmte 3 Hauptelement.

Nach der Basistransformation erhalten wir die Tabelle 6.11.

Tabelle 6.11

	v_3	v_2	
v_1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{3}$	20
x_2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	20
x_1	$\frac{1}{5}$	0	40

Tabelle 6.11 liefert die Basislösung

$$x_1 = 40; x_2 = 20$$

$$v_1 = 20; v_2 = 0; v_3 = 0.$$

Sie entspricht dem Punkt C in Abb. 6.13.

Wir wählen das Hauptelement in der Spalte 1. Spalte 1 enthält die positiven Elemente $\frac{2}{5}$. Wir bilden die Quotienten $\frac{20}{\frac{2}{5}}$:

$$\frac{1}{\frac{2}{5}} \quad \frac{40}{\frac{1}{5}}$$

Der kleinste Quotient ist $\frac{20}{\frac{2}{5}}$. Also werden die eingerahmten $\frac{2}{5}$

Hauptelement.

Nach der Basistransformation erhalten wir Tabelle 6.12.

Tabelle 6.12

	v_1	v_2	
v_3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{10}{3}$	50
x_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	30
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	30

Tabelle 6.12 liefert die Basislösung

$$x_1 = 30; \quad x_2 = 30;$$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0; \quad v_3 = 50.$$

Sie entspricht dem Punkt D in Abb. 6.13.

Wir wählen das Hauptelement in der Spalte 2.

Spalte 2 enthält nur ein positives Element. Die eingerahmten $\frac{2}{3}$ werden Hauptelement.

Nach der Basistransformation erhalten wir Tabelle 6.13.

Tabelle 6.13

	v_1	x_1	
v_3	0	5	200
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	45
v_2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	45

Tabelle 6.13 liefert die Basislösung

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 45;$$

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 45; \quad v_3 = 200.$$

Sie entspricht dem Punkt A in Abb. 6.13.

Würden wir jetzt das Hauptelement in der Spalte 1 wählen, so müßte das eingerahmte $\frac{1}{4}$ Hauptelement werden. Nach der Basistransformation würden wir wieder die triviale Lösung erhalten.

Unsere Rechnung hat 5 Basislösungen ergeben

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix};$$

$$x_4 = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad x_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1$

und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \geq 0$.

Aufgaben zu 6.6.

Bestimmen Sie für die folgenden Ungleichungssysteme die Basislösungen und die allgemeine Lösung!

(Liegen die Ungleichungssysteme nicht in der Form normaler Ungleichungssysteme vor, so sind sie erst auf diese Form zu bringen.)

1

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

2

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 180 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leq 240 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 360 \\ 5x_2 &\leq 150 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

5

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq -8 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

6

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 500 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 600 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{L})$$

7.

Lineare Optimierung

Im 4. bzw. 6. Kapitel finden wir mehrere Beispiele linearer Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme, die mehrere Lösungen, zum Teil beliebig viele Lösungen, besitzen. In der sozialistischen Wirtschaft kommt es darauf an, diejenige Lösung zu bestimmen, die unter gegebenen Umständen die günstigste Lösung ist. So sind in der Planung unter vielen möglichen Varianten diejenigen auszuwählen, die für die Volkswirtschaft den größten Nutzen bringen. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Bestimmung dieser günstigen Varianten ist die lineare Optimierung.

Die lineare Optimierung wurde im Jahre 1939 von dem sowjetischen Mathematiker L. W. Kantorowitsch begründet. Eine allgemeine Lösungsmethode, die Simplexmethode, entwickelte der Amerikaner G. B. Dantzig im Jahre 1947. Die Simplexmethode werden wir im Abschnitt 7.3. beschreiben.

7.1.

Begriff der linearen Optimierung

1

Ein Betrieb benötigt für die Herstellung von zwei verschiedenen Erzeugnissen drei Materialarten. Die Materialfonds, die erforderliche Materialmenge je Längeneinheit (LE) der Erzeugnisse und der Gewinn je Längeneinheit sind der Tabelle 7.1 zu entnehmen.

Tabelle 7.1

Material	Benötigte Materialmenge (E) je LE		Materialfonds (E)
	Erzeugnis 1	Erzeugnis 2	
1	2	4	180
2	3	3	180
3	5	1	200
Gewinn (GE)	10	15	

Wieviel Längeneinheiten sind von jedem Erzeugnis herzustellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

Um den günstigsten Produktionsplan zu finden, stellen wir unsere

Aufgabe mit mathematischen Mitteln dar. Wir sagen auch, wir bauen das mathematische Modell auf.

- a) Wollen wir vom ersten Erzeugnis 60 LE und vom zweiten Erzeugnis 0 LE herstellen, so reicht zwar der Vorrat des ersten und zweiten Materials, aber vom dritten Material ist zu wenig vorhanden. Der vorgeschlagene Plan ist unzulässig.
- b) Wollen wir vom ersten Erzeugnis 36 LE und vom zweiten Erzeugnis 20 LE herstellen, so brauchen wir dafür
- vom ersten Material $(2 \cdot 36 + 4 \cdot 20) \text{ E} = 152 \text{ E}$,
- vom zweiten Material $(3 \cdot 36 + 3 \cdot 20) \text{ E} = 168 \text{ E}$,
- vom dritten Material $(5 \cdot 36 + 1 \cdot 20) \text{ E} = 200 \text{ E}$.
- Für dieses Produktionsprogramm reicht das Material also aus: Der Gewinn beträgt $(10 \cdot 36 + 15 \cdot 20) \text{ GE} = 660 \text{ GE}$.
- c) Wir nehmen an, daß wir vom ersten Erzeugnis x_1 LE und vom zweiten Erzeugnis x_2 LE herstellen. Dann benötigen wir dafür
- vom ersten Material $(2x_1 + 4x_2) \text{ E}$,
- vom zweiten Material $(3x_1 + 3x_2) \text{ E}$,
- vom dritten Material $(5x_1 + x_2) \text{ E}$.

Diese Materialmengen dürfen unseren Vorrat nicht überschreiten. Daher gilt

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 5x_1 + x_2 \leq 200 \end{array} \right\} :$$

Außerdem gilt

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} ,$$

weil wir keine negativen Längen herstellen können.

Der Gewinn beträgt

$$(1) \quad z = 10x_1 + 15x_2 :$$

Demnach lautet unser mathematisches Modell

$$\begin{array}{ll} (1) & z = 10x_1 + 15x_2 \text{ maximal} \quad \boxed{\text{Zielfunktion}} \\ (2) & \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 5x_1 + x_2 \leq 200 \end{array} \right\} \quad \boxed{\text{Nebenbedingungen}} \\ (3) & \left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

In der Gleichung $z = 10x_1 + 15x_2$ maximal kommt unsere *Zielsetzung* zum Ausdruck, nämlich die Erreichung eines maximalen Gewinns. Deshalb nennen wir $z = 10x_1 + 15x_2$ die *Zielfunktion*.

Für x_1 und x_2 dürfen wir aber nicht beliebige Werte einsetzen, son-

Mit Hilfe von Matrizen erhalten wir folgende Darstellung:

- (1) $c^T x$ maximal
 C) (2) $Ax \leq b$
 (3) $x \geq 0$

mit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Im folgenden Abschnitt behandeln wir die graphische Lösung der linearen Optimierungsaufgabe.

7.2.

Graphische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben

Die graphische Lösung für lineare Optimierungsaufgaben ist anwendbar, wenn sich die Aufgabe mit Hilfe von höchstens zwei Variablen formulieren läßt. Bei der graphischen Lösung müssen wir zeichnerische Ungenauigkeiten in Kauf nehmen. Allerdings können wir bei Kenntnis des Lösungspunktes die Lösung auch rechnerisch ermitteln. Bei linearen Optimierungsaufgaben liegen die optimalen Lösungen immer auf dem Rande des Lösungsgebietes (wenn nicht ausnahmsweise jede zulässige Lösung optimale Lösung ist). Ist nur eine optimale Lösung vorhanden, so liegt sie in einem Eckpunkt des Lösungsgebietes. Sind mehrere optimale Lösungen vorhanden, so liegt mindestens eine von ihnen in einem Eckpunkt. Haben wir nun durch das graphische Lösungsverfahren einen Eckpunkt gefunden, zu dem eine optimale Lösung gehört, so können wir die Koordinaten dieses Eckpunktes leicht als Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden mit beliebiger Genauigkeit errechnen. Durch Einsetzen dieser Koordinaten in die Zielfunktion ermitteln wir den Wert der Zielfunktion.

In der Praxis werden zur Formulierung der Probleme meist mehr als zwei Variable benötigt. Im Abschnitt 7.3. zeigen wir, wie lineare Optimierungsprobleme mit einer beliebigen Anzahl von Variablen gelöst werden können.

1

Wir bringen die graphische Lösung des Beispiels 1 aus Abschnitt 7.1. dieses Lehrbuches.

Graphische Darstellung der Nebenbedingungen

Wir benutzen für die graphische Darstellung ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Als horizontale Achse nehmen wir die x_1 -Achse, als senkrechte Achse die x_2 -Achse (Abb. 7.1).

Die Erfüllungsmenge der ersten Nebenbedingung $2x_1 + 4x_2 \leq 180$ wird durch alle Punkte dargestellt, die auf oder unterhalb der Ge-

raden $2x_1 + 4x_2 = 180$ bzw. $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 45$ liegen.

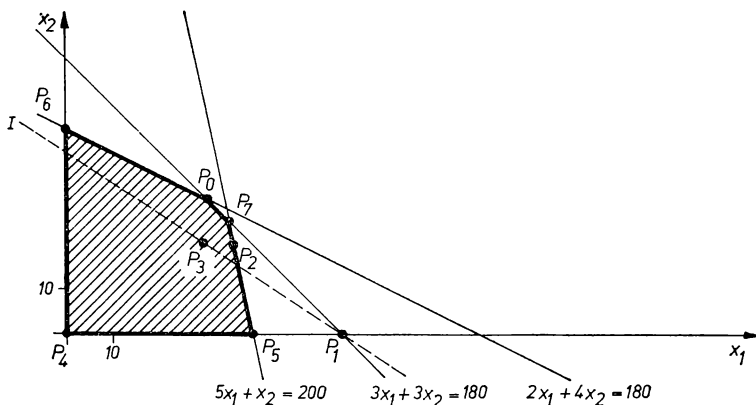


Abb. 7.1

Die Erfüllungsmenge der zweiten Nebenbedingung $3x_1 + 3x_2 \leq 180$ ist durch alle Punkte auf oder unterhalb der Geraden $3x_1 + 3x_2 = 180$ bzw. $x_2 = -x_1 + 60$ dargestellt.

Die Erfüllungsmenge der dritten Nebenbedingung $5x_1 + x_2 \leq 200$ wird durch die Punkte auf oder unterhalb der Geraden $x_2 = -5x_1 + 200$ erfaßt.

Die Erfüllungsmenge der vierten Nebenbedingung $x_1 \geq 0$ wird durch die Punkte des I. und IV. Quadranten einschließlich der x_2 -Achse dargestellt, die Erfüllungsmenge der fünften Nebenbedingung $x_2 \geq 0$ durch die Punkte des I. und II. Quadranten einschließlich der x_1 -Achse.

Die Erfüllungsmenge des Systems der Nebenbedingungen von (2) und (3), die die Menge der zulässigen Lösungen unseres Problems bildet, ist durch das schraffierte Gebiet einschließlich der Begrenzung dargestellt. Diese Erfüllungsmenge ist durch die Punkte bestimmt, die alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen. Der Punkt P_1 (60; 0) liegt nicht im schraffierten Gebiet, liefert also keine zulässige Lösung unseres Problems, was wir bereits unter a) im Abschnitt 7.1. feststellten. Dagegen liegt der Punkt P_2 (36; 20) im schraffierten Gebiet, die Koordinaten $x_1 = 36$; $x_2 = 20$ bilden eine zulässige Lösung unseres Problems. Wir haben diese Lösung bereits in b) im Abschnitt 7.1. untersucht.

Graphische Darstellung der Gewinnfunktion

Unter den zulässigen Lösungen wollen wir jetzt die optimalen Lösungen bestimmen. Dazu ist es nötig, daß wir aus der graphischen Darstellung auch den Gewinn ablesen können. Zu diesem Zweck betrachten wir Produktionspläne (x_1, x_2) , die den gleichen Gewinn bringen, zum Beispiel 600 GE. Für diese Pläne gilt $600 = 10x_1 + 15x_2$.

Die graphische Darstellung dieser Gleichung liefert eine Gerade I. Alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, liefern einen Gewinn von 600 GE. Wir dürfen allerdings nur zulässige Lösungen betrachten, das heißt, die Punkte der Geraden $600 = 10x_1 + 15x_2$, die im schraffierten Gebiet liegen. Der Punkt $P_3 (30; 20)$ erfüllt diese Bedingung; $x_1 = 30$; $x_2 = 20$ liefert eine zulässige Lösung mit dem Gewinn 600 GE.

Setzen wir für den Gewinn einen konstanten Wert z_0 , so ergibt sich eine Gerade $z_0 = 10x_1 + 15x_2$ bzw. $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z_0}{15}$. Diese Gerade schneidet die x_2 -Achse bei $\frac{z_0}{15}$. Lassen wir z_0 wachsen, so entfernt sich der Schnittpunkt mit der x_2 -Achse immer mehr vom Koordinatenanfangspunkt. Unsere Lösungen werden also um so günstiger, je weiter der Schnittpunkt der Geraden $z_0 = 10x_1 + 15x_2$ mit der x_2 -Achse vom Koordinatenanfangspunkt entfernt ist. Die Geraden $z_0 = 10x_1 + 15x_2$ bzw. $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z_0}{15}$ haben für alle z_0 den gleichen Anstieg $-\frac{2}{3}$, sie sind also parallel. Sie bilden eine Parallelschar mit dem Anstieg $-\frac{2}{3}$.

Um den Gewinn zu maximieren, müssen wir in unserer Parallelschar eine Gerade suchen, deren Schnittpunkt mit der x_2 -Achse möglichst weit vom Koordinatenanfangspunkt entfernt ist, auf der aber noch mindestens ein Punkt unseres schraffierten Gebietes liegt. Diese Gerade verläuft durch den Punkt $P_0 (30; 30)$, der ein Eckpunkt unseres schraffierten Lösungsgebietes ist. Die Lösung $x_1 = 30$; $x_2 = 30$ ist eine zulässige Lösung, die einen Gewinn von 750 GE bringt. Das ist der größte Gewinn, den wir unter den gegebenen Bedingungen erzielen können. $x_1 = 30$; $x_2 = 30$ ist also die optimale Lösung unseres Problems.

Ist der Punkt P_0 als Eckpunkt erkannt, so lassen sich die Koordinaten von P_0 leicht berechnen. Sie ergeben sich als Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden $2x_1 + 4x_2 = 180$ und $3x_1 + 3x_2 = 180$. Setzen wir diese Koordinaten in die Zielfunktion ein, so können wir auch den erzielten Gewinn berechnen.

Wir müssen also 30 E vom ersten Erzeugnis und 30 E vom zweiten Erzeugnis herstellen, um einen maximalen Gewinn von 750 GE zu realisieren.

2

Gesucht ist die Lösung folgender Optimierungsaufgabe, bei der die Zielfunktion ein Minimum annehmen soll (vgl. Abb. 7.2):

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 9x_2 \quad \text{minimal} \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 90 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

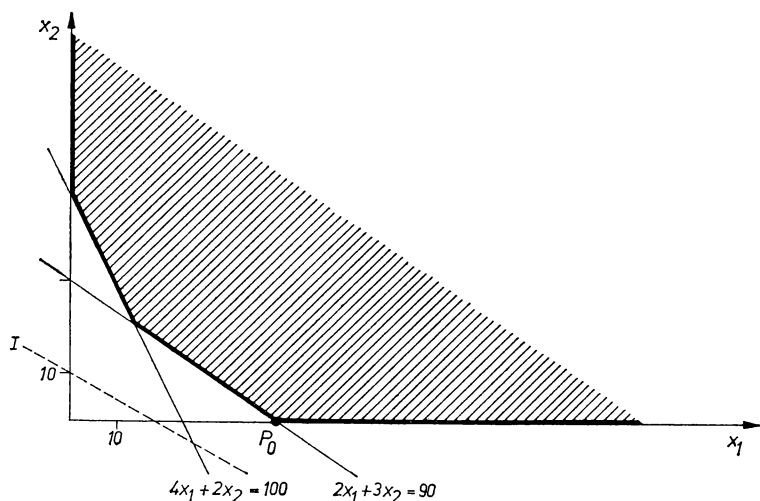


Abb. 7.2

Die Aufgabe lässt sich auch in der Form

$$\begin{aligned} -z &= -5x_1 - 9x_2 \quad \text{maximal} \\ -2x_1 - 3x_2 &\leq -90 \\ -4x_1 - 2x_2 &\leq -100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

darstellen, die der Aufgabe A) in 7.1. entspricht.

$2x_1 + 3x_2 \geq 90$ läßt als Erfüllungsmenge alle Punkte auf oder über der Geraden $2x_1 + 3x_2 = 90$ zu. Die Erfüllungsmenge von $4x_1 + 2x_2 \geq 100$ ist durch die Punkte auf oder über der Geraden $4x_1 + 2x_2 = 100$ gegeben. Die Bedingung $x_1 \geq 0$ wird von allen Punkten des I. und IV. Quadranten, einschließlich der x_2 -Achse, erfüllt; $x_2 \geq 0$ von allen Punkten des I. und II. Quadranten, die x_1 -Achse mit eingeschlossen.

Die Erfüllungsmenge des Systems von Nebenbedingungen ist wieder durch die Wertepaare (x_1, x_2) bestimmt, die alle Bedingungen gleichzeitig erfüllen. Diese Wertepaare werden durch Punkte dargestellt, die im schraffierten Gebiet liegen. Die Begrenzung des schraffierten Gebietes ist eingeschlossen.

Alle Wertepaare mit dem Zielfunktionswert z_0 werden durch die Gerade $z_0 = 5x_1 + 9x_2$ dargestellt. Die Gleichung läßt sich in $x_2 = -\frac{5}{9}x_1 + \frac{z_0}{9}$ umformen. Diese Gerade schneidet die x_2 -Achse

in $\frac{z_0}{9}$. Nimmt z_0 ab, so nähert sich der Schnittpunkt von $z_0 = 5x_1 + 9x_2$ mit der x_2 -Achse dem Koordinatenanfangspunkt. Bei unterschiedlichen z_0 ergibt $z_0 = 5x_1 + 9x_2$ bzw. $x_2 = -\frac{5}{9}x_1 + \frac{z_0}{9}$ eine

Parallelenschar mit dem Anstieg $-\frac{5}{9}$. Aus dieser Parallelenschar wählen wir eine Gerade, deren Schnittpunkt mit der x_2 -Achse möglichst dicht am Koordinatenanfangspunkt liegt, auf der aber noch ein Punkt unseres schraffierten Gebietes liegt. Das ist die Gerade durch den Punkt $P_0 (45; 0)$. Die optimale Lösung $x_1 = 45$; $x_2 = 0$ ergibt den minimalen Zielfunktionswert $z = 225$.

3

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, das keine optimale Lösung besitzt (Abb. 7.3):

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + 2x_2 \quad \text{maximal} \\ 2x_1 + x_2 &\geq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + 2x_2 \quad \text{maximal} \\ -2x_1 - x_2 &\leq -80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

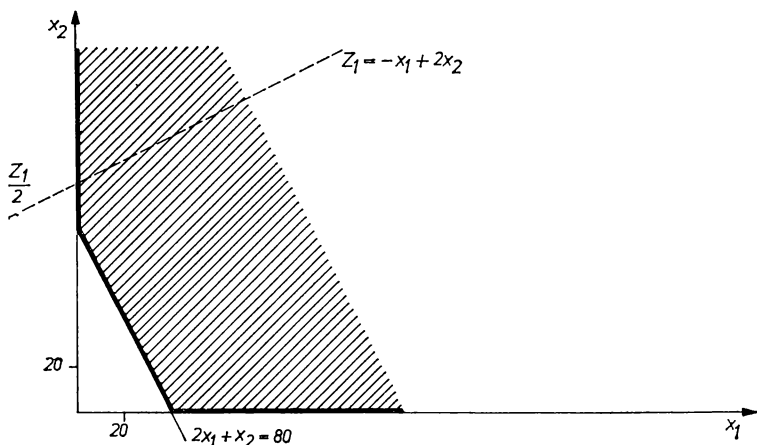


Abb. 7.3

Aus Abb. 7.3 ist zu erkennen, daß diese Aufgabe Lösungen besitzt. Zu jedem noch so großen z gibt es zulässige Lösungen, aber es existiert keine optimale Lösung.

4

Wir betrachten ein Beispiel, das keine Lösung besitzt (Abb. 7.4):

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 3x_2 \quad \text{maximal} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

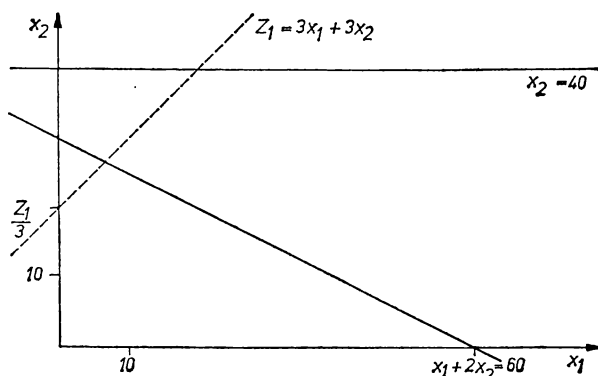


Abb. 7.4

Aus Abb. 7.4 ist zu erkennen, daß die Erfüllungsmenge des Systems von Nebenbedingungen leer ist. Diese Aufgabe hat keine Lösung, also gibt es auch keine optimale Lösung.

Aufgaben zu 7.2.

1

Lösen Sie das folgende Problem!

- (1) $z = x_1 + x_2 \max.$
- (2) $-x_1 + 2x_2 \leq 5$
 $2x_1 + x_2 \leq 12$
- (3) $x_1, x_2 \geq 0$ (L)

2

Lösen Sie das folgende Problem!

- (1) $z = x_1 - 2x_2 \min.$
- (2) $x_1 - x_2 \geq 3$
 $x_1 + x_2 \leq 12$
 $2x_1 + x_2 \leq 15$
- (3) $x_1, x_2 \geq 0$ (L)

3

Lösen Sie die folgenden Probleme!

- | | | | |
|----|---|----|---|
| a) | (1) $z = x_1 + x_2 \min.$ | b) | (1) $z = x_1 + 2x_2 \max.$ |
| | (2) $5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$2x_1 + 10x_2 \geq 20$ | | (2) $5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$2x_1 + 10x_2 \geq 20$ |
| | (3) $x_1, x_2 \geq 0$ | | (3) $x_1, x_2 \geq 0$ |
| | (L) | | (L) |
| c) | (1) $z = 3x_1 + x_2 \min.$ | d) | (1) $z = x_2 \min.$ |
| | (2) $5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$2x_1 + 10x_2 \geq 20$ | | (2) $5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$2x_1 + 10x_2 \geq 20$ |
| | (3) $x_1, x_2 \geq 0$ | | (3) $x_1, x_2 \geq 0$ |
| | (L) | | (L) |

4

Einem Betrieb stehen für die Herstellung von zwei unterschiedlichen Erzeugnissen drei verschiedene Materialien zur Verfügung, vom Material M_1 50 E, vom Material M_2 72 E und vom Material M_3 48 E. Für die Herstellung einer Längeneinheit (LE) des Erzeugnisses P_1 werden 5 E vom Material M_1 und 3 E vom Material M_3 benötigt. Für die Herstellung einer Längeneinheit des Erzeugnisses P_2 werden vom Material M_2 6 E und vom Material M_3 3 E gebraucht. Beim Verkauf einer Längeneinheit des Erzeugnisses P_1 wird ein Gewinn von 40 GE, beim Verkauf einer Längeneinheit des Erzeugnisses P_2 ein Gewinn von 80 GE erzielt. Wieviel Längeneinheiten muß man von den einzelnen Erzeugnissen herstellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

Zusammenstellung der Daten in einer Tabelle:

Material	Benötigte Materialmengen (E) je LE des Erzeugnisses		Materialfonds (E)
	P_1	P_2	
M_1	5	0	50
M_2	0	6	72
M_3	3	3	48
Gewinn je Einheit des Erzeugnisses in GE	40	80	

(L)

5

Zwei Gase sollen so gemischt werden, daß das Mischgas möglichst billig wird, einen Heizwert zwischen 1 600 und 2 200 kcal m^{-3} und einen Schwefelgehalt von höchstens 2,8 g m^{-3} besitzt. Das erste Gas hat einen Heizwert von 1 000 kcal m^{-3} , einen Schwefelgehalt von 6 g m^{-3} und kostet 10,00 M je m^3 . Das zweite Gas besitzt einen Heizwert von 2 000 kcal m^{-3} , einen Schwefelgehalt von 2 g m^{-3} und kostet 25,00 M je m^3 .

6

Einem Betrieb stehen für die Herstellung eines Erzeugnisses drei Maschinen zur Verfügung, die Maschine M_1 mit 520 Stunden, die Maschine M_2 mit 300 Stunden und die Maschine M_3 mit 630 Stunden. Das Erzeugnis kann nach drei Verfahren hergestellt werden.

Verfahren V_1 : Das Erzeugnis läuft über die erste, zweite und dritte Maschine. Um eine Einheit des Erzeugnisses herzustellen, werden auf der ersten Maschine 2, auf der zweiten Maschine 4 und auf der dritten Maschine 5 Stunden benötigt.

Verfahren V_2 : Das Erzeugnis läuft über die erste und zweite Maschine. Für die Herstellung einer Einheit werden auf der ersten Maschine 4 und auf der zweiten Maschine 2 Stunden benötigt.

Verfahren V_3 : Das Erzeugnis läuft über die erste und dritte Maschine.

Für die Herstellung einer Einheit werden auf der ersten Maschine 1 Stunde und auf der dritten Maschine 3 Stunden benötigt.

Die Selbstkosten je Einheit des Erzeugnisses betragen nach dem Verfahren V_1 20 GE, nach dem Verfahren V_2 25 GE und nach dem Verfahren V_3 30 GE.

Insgesamt sind 220 Stück des Erzeugnisses herzustellen. Wieviel Stück sind nach jedem Verfahren herzustellen, wenn die Selbstkosten der Produktion minimal sein sollen? (Die Aufgabe kann mit zwei Variablen formuliert werden.)

Maschine	Benötigte Stunden beim Verfahren			Maschinenzeitfonds in Stunden
	V_1	V_2	V_3	
M_1	2	4	1	520
M_2	4	2	0	300
M_3	5	0	3	630
Selbstkosten in GE	20	25	30	

7

Ein Betrieb stellt zwei Erzeugnisse her, die er entweder auf einer Maschine M_1 oder auf einer Maschine M_2 produzieren kann. Es stehen auf der Maschine M_1 300 Stunden, auf der Maschine M_2 400 Stunden zur Verfügung. Für eine Einheit des Erzeugnisses P_1 benötigt man 2 Stunden auf der Maschine M_1 oder 3 Stunden auf der Maschine M_2 . Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_2 werden auf M_1 4 Stunden oder auf M_2 5 Stunden gebraucht. Vom Erzeugnis P_1 sind 50 und vom Erzeugnis P_2 105 Einheiten herzustellen.

Wieviel Einheiten sind von jedem Erzeugnis auf den einzelnen Maschinen zu produzieren, wenn die beanspruchte Maschinenzeit minimal sein soll? (Die Aufgabe kann mit zwei Variablen formuliert werden.)

Maschine	Benötigte Zeit (in Stunden) für eine Einheit des Erzeugnisses		Maschinenzeitfonds (in Stunden)
	P_1	P_2	
M_1	2	4	300
M_2	3	5	400
Herzustellende Menge (E)	50	105	

8

Drei Gase sollen so gemischt werden, daß das Mischgas möglichst billig wird, einen Heizwert zwischen 1 700 und 2 200 kcal m^{-3} und einen Schwefelgehalt von höchstens 2,8 g m^{-3} besitzt. Das erste Gas G_1 hat den Heizwert 1 000 kcal m^{-3} , den Schwefelgehalt 6 g m^{-3} und kostet 10,00 M je m^3 . Das Gas G_2 hat den Heizwert 2 000 kcal m^{-3} ,

den Schwefelgehalt 2 g m^{-3} und kostet $25,00 \text{ M je m}^3$. Das Gas G_3 ist durch den Heizwert 1500 kcal m^{-3} und den Schwefelgehalt 3 gm^{-3} gekennzeichnet und kostet $20,00 \text{ M je m}^3$. (Die Aufgabe läßt sich mit zwei Variablen formulieren.) (L)

7.3.

Rechnerische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben

In diesem Abschnitt lernen wir die rechnerische Lösung von linearen Optimierungsaufgaben mit Hilfe der Simplexmethode kennen.

Die Simplexmethode ist für die Lösung jedes linearen Optimierungsproblems mit unendlich vielen Variablen und Nebenbedingungen geeignet. Liegt eine lineare Optimierungsaufgabe der Form A) aus 7.1.

$$\begin{aligned} (1) \quad & z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \quad \text{maximal} \\ (2) \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ A') \quad & \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ (3) \quad & x_1, \quad \cdots, \quad x_n \geq 0 \end{aligned}$$

vor, bei der die $b_1, \cdots, b_m$ nicht negativ sind, so sprechen wir von der *Normalaufgabe der linearen Optimierung*.

Mit Hilfe von Vektoren können wir die Normalaufgabe der linearen Optimierung wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} B') \quad (1) \quad & z = c^T x \quad \text{maximal} \\ (2) \quad & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b \\ (3) \quad & x \geq 0 \\ & \text{mit } b \geq 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Matrizen erhalten wir folgende Darstellung für die Normalaufgabe der linearen Optimierung:

$$\begin{aligned} C') \quad (1) \quad & c^T x \quad \text{maximal} \\ (2) \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & \text{mit } b \geq 0 \end{aligned}$$

1

Beispiel 1 aus 7.2. ist eine Normalaufgabe, während die Beispiele 2, 3 und 4 aus 7.2. keine Normalaufgaben sind.

Im Abschnitt 7.2. sind die Aufgaben 1 und 4 Normalaufgaben.

Wir beschränken uns in diesem Buch auf die Behandlung von Normalaufgaben. Die Lösung jeder linearen Optimierungsaufgabe, die keine Normalaufgabe ist, läßt sich auf die Lösung einer Normalaufgabe zurückführen.

Für die rechnerische Lösung formen wir die Ungleichungen in den Nebenbedingungen (2) in Gleichungen um. Dazu führen wir für jede Ungleichung eine Schlupfvariable v_i ($i = 1, \dots, m$) ein, die die Differenz zwischen der rechten und linken Seite der Ungleichung angibt:

$$v_i = b_i - (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Die Schlupfvariable v_i muß eine nichtnegative Variable sein, weil

$$b_i \geq a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, \dots, m) \text{ oder}$$

$$b_i - (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) \geq 0 \text{ ist.}$$

Es gilt also $v_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$).

Die Schlupfvariablen verändern den Wert unserer Zielfunktion nicht. Nach Einführung der Schlupfvariablen erhalten wir die folgende Form der linearen Optimierungsaufgabe:

$$(1') \quad z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + 0v_1 + \dots + 0v_m \quad \text{maximal}$$

$$(2') \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + v_1 = b_1$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ A'' \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + v_m = b_m \\ (3') \quad x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \quad \quad \quad v_1, \dots, v_m \geq 0 \end{array}$$

bzw.

$$(1) \quad z = c^T x + o^T v \quad \text{maximal}$$

$$B'' \quad (2) \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n + e_1v_1 + \dots + e_mv_m = b$$

$$(3) \quad x, v \geq o$$

$$\text{mit } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$\text{bzw. } (1) \quad z = c^T x + o^T v \quad \text{maximal}$$

$$C'' \quad (2) \quad Ax + Ev = b$$

$$(3) \quad x, v \geq o$$

Die Aufgaben A'), B'), C') sind den Aufgaben A''), B''), C'') völlig gleichwertig.

Haben die Aufgaben A''), B''), C'') die Lösung $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$, so ist der primale Teil x dieser Lösung zugleich eine Lösung der Aufgaben A'), B'), C').

Wir erläutern die Simplexmethode zuerst ohne die Basistransformation und gehen dann zur Beschreibung der Simplexmethode mit Hilfe der Basistransformation über. Die Simplexmethode mit Hilfe der Basistransformation ist auch ohne die Ausführungen des Abschnittes „Simplexmethode ohne Basistransformation“ verständlich.

2

Zur Erläuterung der Simplexmethode ohne Basistransformation benutzen wir die im Abschnitt 7.1. formulierte Aufgabe.

$$(1) \quad z = 10x_1 + 15x_2 \quad \text{maximal}$$

$$(2) \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 180$$

$$5x_1 + x_2 \leq 200$$

$$(3) \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Zuerst formen wir die Ungleichungen, die unter (2) genannt sind, in Gleichungen um. Dazu addieren wir auf der linken Seite der Ungleichung $2x_1 + 4x_2 \leq 180$ die Schlupfvariable v_1 . Sie soll die Differenz zwischen 180 und $2x_1 + 4x_2$ angeben. Dann gilt

$$2x_1 + 4x_2 + v_1 = 180.$$

Dabei muß v_1 eine nichtnegative Zahl sein, weil 180 größer oder gleich $2x_1 + 4x_2$ ist. Es gilt also $v_1 \geq 0$. Entsprechend führen wir in die zweite Ungleichung $3x_1 + 3x_2 \leq 180$ eine Schlupfvariable v_2 ein und erhalten

$$3x_1 + 3x_2 + v_2 = 180; \quad v_2 \geq 0.$$

Schließlich formen wir die Ungleichung

$$5x_1 + x_2 \leq 200$$

durch Einführung einer Schlupfvariablen v_3 in die Gleichung um:

$$5x_1 + x_2 + v_3 = 200; \quad v_3 \geq 0.$$

Diese Schlupfvariablen verändern den Wert unserer Zielfunktion nicht. Deshalb lautet unsere Aufgabe nach Einführung der Schlupfvariablen:

$$(1') \quad z = 10x_1 + 15x_2 + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \text{maximal}$$

$$(2') \quad 2x_1 + 4x_2 + v_1 = 180$$

$$3x_1 + 3x_2 + v_2 = 180$$

$$5x_1 + x_2 + v_3 = 200$$

$$(3') \quad x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$v_1 \geq 0$$

$$v_2 \geq 0$$

$$v_3 \geq 0$$

Lösungsschritt I

Zur Lösung der Aufgabe formen wir (1') und (2') um:

$$I \quad z = 0 + 10x_1 + 15x_2$$

$$v_1 = 180 - 2x_1 - 4x_2$$

$$v_2 = 180 - 3x_1 - 3x_2$$

$$v_3 = 200 - 5x_1 - x_2$$

Diese Form der Bedingungen (1') und (2') bezeichnen wir mit I.

Aus dieser Darstellung lesen wir eine Lösung ab, indem wir alle Variablen, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen, gleich Null setzen: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$

Dann ergeben sich die übrigen Variablen mit $v_1 = 180$, $v_2 = 180$, $v_3 = 200$ und die Zielfunktion mit $z = 0$.

Diese Lösung entspricht den Koordinaten des Punktes P_4 in Abb. 7.1 auf Seite 253.

Lösungsschritt II

Die Gleichung $z = 0 + 10x_1 + 15x_2$ läßt erkennen, daß der Wert der Zielfunktion verbessert werden kann, wenn x_1 oder x_2 einen größeren Wert als Null annehmen. Wir wollen in diesem Schritt nur eine dieser beiden Variablen größer als Null setzen. Da x_2 den größeren Koeffizienten hat, ist zu erwarten, daß wir durch Vergrößerung von x_2 den größten Zuwachs in der Zielfunktion erhalten (das trifft aber nicht immer zu). Wir setzen deshalb weiterhin $x_1 = 0$ und untersuchen, welchen Wert x_2 im Höchsthalle annehmen darf. Wir dürfen nämlich x_2 nicht beliebig groß wählen, weil in Abhängigkeit von dem gewählten Wert für x_2 die anderen Variablen eventuell einen negativen Wert annehmen. Das würde der Bedingung (3') widersprechen.

Wählen wir zum Beispiel $x_2 = 10$, lassen aber $x_1 = 0$. Durch Einsetzen in I erhalten wir:

$$\begin{aligned} z &= 0 + 10 \cdot 0 + 15 \cdot 10 = 150 \\ v_1 &= 180 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 10 = 140 \\ v_2 &= 180 - 3 \cdot 0 - 3 \cdot 10 = 150 \\ v_3 &= 200 - 5 \cdot 0 - 1 \cdot 10 = 190 \end{aligned}$$

Wählen wir dagegen $x_1 = 0$, $x_2 = 50$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} z &= 0 + 15 \cdot 50 = 750 \\ v_1 &= 180 - 4 \cdot 50 = -20 \\ v_2 &= 180 - 3 \cdot 50 = 30 \\ v_3 &= 200 - 1 \cdot 50 = 150 \end{aligned}$$

Jetzt haben wir zwar einen höheren Wert der Zielfunktion als bei $x_2 = 10$, aber die Lösung ist nicht mehr zulässig, weil v_1 negativ ist. Das widerspricht der Nebenbedingung $v_1 \geq 0$ aus (3') und bedeutet, daß die erste Nebenbedingung in (2)

$$2x_1 + 4x_2 \leq 180$$

nicht erfüllt ist. Mithin ist x_2 zu groß gewählt. Um den größten Zuwachs der Zielfunktion zu erhalten, der sich durch eine Vergrößerung von x_2 erreichen läßt, ohne die Bedingungen unserer Aufgabe zu verletzen, müssen wir x_2 geeignet wählen. Das geschieht auf folgende Weise:

Wir setzen $x_1 = 0$. Dann erhalten wir aus I:

$$v_1 = 180 - 2 \cdot 0 - 4x_2 = 180 - 4x_2$$

$$v_2 = 180 - 3 \cdot 0 - 3x_2 = 180 - 3x_2$$

$$v_3 = 200 - 5 \cdot 0 - x_2 = 200 - x_2$$

Da die Variablen nicht negativ sein dürfen, folgt:

$$v_1 = 180 - 4x_2 \geq 0$$

$$v_2 = 180 - 3x_2 \geq 0$$

$$v_3 = 200 - x_2 \geq 0$$

Das bedeutet

$$x_2 \leq \frac{180}{4}$$

$$x_2 \leq \frac{180}{3}$$

$$x_2 \leq \frac{200}{1}$$

Von diesen Quotienten wählen wir den kleinsten Wert, also $x_2 = \frac{180}{4} = 45$.

Dann wird

$$z = 0 + 15 \cdot 45 = 675$$

$$v_1 = 180 - 4 \cdot 45 = 0$$

$$v_2 = 180 - 3 \cdot 45 = 45$$

$$v_3 = 200 - 1 \cdot 45 = 155.$$

Der maximale Wert von x_2 ist also durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_1 = 180 - 2x_1 - 4x_2$$

Wir lösen die Gleichung $v_1 = 180 - 2x_1 - 4x_2$ nach x_2 auf:

$$x_2 = 45 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}v_1$$

Wir setzen $x_2 = 45 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}v_1$ in die Zielfunktionsgleichung

$$z = 0 + 10x_1 + 15x_2$$

und in die beiden Gleichungen

$$v_2 = 180 - 3x_1 - 3x_2$$

$$v_3 = 200 - 5x_1 - 1x_2$$

ein. Wir erhalten

$$z = 0 + 10x_1 + 15 \left(45 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}v_1 \right)$$

$$v_2 = 180 - 3x_1 - 3 \left(45 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{4} v_1 \right)$$

$$v_3 = 200 - 5x_1 - 1 \left(45 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{4} v_1 \right).$$

Durch Vereinfachung bekommen wir

$$z = 675 + \frac{5}{2} x_1 - \frac{15}{4} v_1$$

$$v_2 = 45 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{4} v_1$$

$$v_3 = 155 - \frac{9}{2} x_1 + \frac{1}{4} v_1.$$

Fassen wir diese Gleichungen mit

$$x_2 = 45 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{4} v_1$$

zusammen, so erhalten wir an Stelle von I das Gleichungssystem II.

$$z = 675 + \frac{5}{2} x_1 - \frac{15}{4} v_1$$

$$x_2 = 45 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{4} v_1$$

II

$$v_2 = 45 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{4} v_1$$

$$v_3 = 155 - \frac{9}{2} x_1 + \frac{1}{4} v_1$$

Aus dieser Darstellung lesen wir eine Lösung ab, indem wir wieder alle Variablen, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen, gleich Null setzen:

$$x_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

Dann ergeben sich die übrigen Variablen mit $x_2 = 45$, $v_2 = 45$, $v_3 = 155$ und die Zielfunktion mit $z = 675$.

Diese Lösung entspricht den Koordinaten des Punktes P_6 in Abb. 7.1.

Lösungsschritt III

Die Gleichung $z = 675 + \frac{5}{2} x_1 - \frac{15}{4} v_1$ läßt erkennen, daß es nicht günstig ist, für v_1 einen größeren Wert als Null anzusetzen, weil dadurch unsere Zielfunktion abnimmt. Weiter ist erkennbar, daß eine Vergrößerung von x_1 einen Zuwachs in der Zielfunktion bringt. Es ist vorteilhaft, dieses x_1 möglichst groß zu machen, weil damit auch ein großer Zuwachs in der Zielfunktion zustande kommt. Bei der Berechnung von x_1 müssen wir so vorgehen, daß die anderen

Variablen nicht negativ werden. Berücksichtigen wir $v_1 = 0$, so ergeben sich aus II für die Bestimmung von x_1 folgende Bedingungen:

$$x_2 = 45 - \frac{1}{2} x_1 \geq 0$$

$$v_2 = 45 - \frac{3}{2} x_1 \geq 0$$

$$v_3 = 155 - \frac{9}{2} x_1 \geq 0$$

Das bedeutet

$$x_1 \leq \frac{45}{\frac{1}{2}} = 90$$

$$x_1 \leq \frac{45}{\frac{3}{2}} = 30$$

$$x_1 \leq \frac{155}{\frac{9}{2}} = \frac{310}{9}.$$

Wir wählen wieder unter den Quotienten $\frac{45}{\frac{1}{2}}$, $\frac{45}{\frac{3}{2}}$ und $\frac{155}{\frac{9}{2}}$ den klein-

sten Wert, also $x_1 = \frac{45}{\frac{3}{2}} = 30$. Der maximale Wert von x_1 ist also

durch die Gleichung

$$v_2 = 45 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{4} v_1$$

bestimmt. Wir lösen die Gleichung $v_2 = 45 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{4} v_1$ nach x_1 auf:

$$x_1 = 30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1$$

Wir setzen $x_1 = 30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1$ in die Zielfunktionsgleichung

$$z = 675 + \frac{5}{2} x_1 - \frac{15}{4} v_1$$

und in die beiden Gleichungen

$$x_2 = 45 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{4} v_1$$

$$v_3 = 155 - \frac{9}{2} x_1 + \frac{1}{4} v_1$$

ein und erhalten

$$z = 675 + \frac{5}{2} \left(30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1 \right) - \frac{15}{4} v_1$$

$$x_2 = 45 - \frac{1}{2} \left(30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1 \right) - \frac{1}{4} v_1$$

$$v_3 = 155 - \frac{9}{2} \left(30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1 \right) + \frac{1}{4} v_1.$$

Durch Vereinfachung bekommen wir

$$z = 750 - \frac{5}{3} v_2 - \frac{5}{2} v_1$$

$$x_2 = 30 + \frac{1}{3} v_2 - \frac{1}{2} v_1$$

$$v_3 = 20 + 3v_2 - 2v_1.$$

Fassen wir diese Gleichungen mit

$$x_1 = 30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1$$

zusammen, so erhalten wir an Stelle von II das Gleichungssystem III.

$$z = 750 - \frac{5}{3} v_2 - \frac{5}{2} v_1$$

$$\text{III } x_2 = 30 + \frac{1}{3} v_2 - \frac{1}{2} v_1$$

$$x_1 = 30 - \frac{2}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_1$$

$$v_3 = 20 + 3v_2 - 2v_1$$

Aus dieser Darstellung lesen wir eine Lösung ab, indem wir alle Variablen, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen, gleich Null setzen: $v_2 = 0$, $v_1 = 0$.

Dann ergeben sich die übrigen Variablen mit $x_2 = 30$, $x_1 = 30$, $v_3 = 20$ und die Zielfunktion mit $z = 750$.

Diese Lösung entspricht den Koordinaten des Punktes P_0 in Abb. 7.1.

Aus der Gleichung $z = 750 - \frac{5}{3} v_2 - \frac{5}{2} v_1$ ist zu ersehen, daß es nicht sinnvoll ist, die Werte von v_1 und v_2 zu erhöhen, weil dadurch der Wert der Zielfunktion abnimmt. Wir haben somit keine weitere Möglichkeit, den Wert der Zielfunktion zu erhöhen. Die Lösung $x_1 = 30$, $x_2 = 30$, $z = 750$ ist die optimale Lösung unserer Aufgabe, wie es auch die graphische Lösung in Abschnitt 7.2. ergab.

Verallgemeinerung

Ist eine lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned}
 z &= c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j + \cdots + c_n x_n \quad \text{maximal} \\
 a_{11} x_1 + \cdots + a_{1j} x_j + \cdots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{i1} x_1 + \cdots + a_{ij} x_j + \cdots + a_{in} x_n &\leq b_i \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mj} x_j + \cdots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\
 x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n &\geq 0
 \end{aligned}$$

gegeben, in der alle $b_1, \cdots, b_m$ nicht negativ sind, so bringen wir sie durch Einführung von Schlupfvariablen auf die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z &= c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j + \cdots + c_n x_n \quad \text{maximal} \\
 (2) \quad a_{11} x_1 + \cdots + a_{1j} x_j + \cdots + a_{1n} x_n + v_1 &= b_1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{i1} x_1 + \cdots + a_{ij} x_j + \cdots + a_{in} x_n + v_i &= b_i \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mj} x_j + \cdots + a_{mn} x_n + v_m &= b_m \\
 (3) \quad x_1, \cdots, x_n; v_1, \cdots, v_m &\geq 0
 \end{aligned}$$

Lösungsschritt I

Die Gleichungen aus (1) und (2) formen wir um in:

$$\begin{aligned}
 z &= 0 + c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j + \cdots + c_n x_n \quad \text{maximal} \\
 v_1 &= b_1 - a_{11} x_1 - \cdots - a_{1j} x_j - \cdots - a_{1n} x_n \\
 I \quad &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 v_i &= b_i - a_{i1} x_1 - \cdots - a_{ij} x_j - \cdots - a_{in} x_n \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 v_m &= b_m - a_{m1} x_1 - \cdots - a_{mj} x_j - \cdots - a_{mn} x_n
 \end{aligned}$$

Setzen wir in diesem Gleichungssystem I alle Variablen, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen, gleich Null, so können wir aus dem Gleichungssystem I folgende Lösung ablesen:

$$\begin{aligned}v_1 &= b_1, \dots, v_i = b_i, \dots, v_m = b_m \\x_1 &= 0, \dots, x_j = 0, \dots, x_n = 0 \\z &= 0\end{aligned}$$

Diese Lösung erfüllt die Bedingungen (2) und (3) unserer Aufgabe, ist also eine zulässige Lösung.

Lösungsschritt II

$$\text{In } z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

suchen wir die Variable mit dem größten positiven Koeffizienten. Es sei dies die Variable x_j mit dem Koeffizienten c_j . Wir versuchen, die Variable x_j so groß wie möglich zu machen, während wir alle übrigen Variablen der Zielfunktion

$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n,$$

also $x_1, \dots, x_n$ (außer x_j), gleich Null setzen.

Wenn wir im Gleichungssystem I alle Variablen $x_1, \dots, x_n$ (außer x_j) gleich Null setzen, sind die Variablen $v_1, \dots, v_m$ durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$v_1 = b_1 - a_{1j}x_j$$

.

.

.

$$v_i = b_i - a_{ij}x_j$$

.

.

.

$$v_m = b_m - a_{mj}x_j.$$

Weil die Variablen $v_1, \dots, v_m$ auch weiterhin größer oder gleich Null bleiben sollen, entsprechend Bedingung (3), folgen aus diesen letzten Gleichungen für $v_1, \dots, v_m$ die Bedingungen:

$$v_1 = b_1 - a_{1j}x_j \geq 0$$

.

.

.

$$v_i = b_i - a_{ij}x_j \geq 0$$

.

.

.

$$v_m = b_m - a_{mj}x_j \geq 0$$

Bei der Bestimmung von x_j müssen wir drei Fälle unterscheiden:

$$\text{a) } a_{ij} < 0$$

Wenn wir x_j größer als Null wählen, so werden die $v_1, \dots, v_m$ größer als die entsprechenden $b_1, \dots, b_m$ (die wir nicht negativ vorausgesetzt

haben), wenn die entsprechenden $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ kleiner als Null sind. Bei negativen $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ bleiben die entsprechenden $v_1, \dots, v_m$ also positiv, unabhängig davon, wie groß wir x_j wählen (x_j positiv).

b) $a_{ij} > 0$

Sind die $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ dagegen positiv, so werden die entsprechenden $v_1, \dots, v_m$ kleiner als die zugehörigen $b_1, \dots, b_m$, wenn wir x_j größer als Null werden lassen.

c) $a_{ij} = 0$

Sind die $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ gleich Null, so verändern sich die entsprechenden $v_1, \dots, v_m$ nicht, gleichgültig, wie wir x_j wählen. Es gilt also:

Aus $x_j > 0$ folgt

$$v_i > b_i, \text{ wenn } a_{ij} < 0$$

$$v_i = b_i, \text{ wenn } a_{ij} = 0$$

$$v_i < b_i, \text{ wenn } a_{ij} > 0.$$

Bei der Vergrößerung von x_j müssen wir darauf achten, daß die Veränderung der Lösung nicht zu negativen $v_1, \dots, v_m$ führt, weil das der Bedingung (3) widersprechen würde. Deshalb müssen wir bei der Bestimmung von x_j unter den Bedingungen

$$v_1 = b_1 - a_{1j}x_j \geq 0$$

.

$$v_i = b_i - a_{ij}x_j \geq 0$$

.

$$v_m = b_m - a_{mj}x_j \geq 0$$

auf Bedingungen achten, bei denen die $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ größer als Null sind. Für diese Bedingungen mit positiven $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ erhalten wir aus den letzten Bedingungen für $v_1, \dots, v_m$ folgende Begrenzungen für x_j :

$$x_j \leq \frac{b_1}{a_{1j}} \quad (a_{1j} > 0)$$

.

$$x_j \leq \frac{b_i}{a_{ij}} \quad (a_{ij} > 0)$$

.

$$x_j \leq \frac{b_m}{a_{mj}} \quad (a_{mj} > 0)$$

(Diese Umformungen erfolgen nur für Bedingungen, bei denen die $a_{1j}, \dots, a_{mj} > 0$ sind!)

Unter diesen Quotienten wählen wir den kleinsten Quotienten.

Es sei dies $\frac{b_i}{a_{ij}}$. Dann setzen wir $x_j = \frac{b_i}{a_{ij}}$. Diese Festsetzung garantiert, daß kein $v_1, \dots, v_m$ negativ wird. (Wählen wir nicht diesen kleinsten Quotienten, so wird irgendein $v_1, \dots, v_m$ negativ.)

Dann lösen wir die zu diesem kleinsten Quotienten $\frac{b_i}{a_{ij}}$ gehörige

Gleichung aus I

$$v_i = b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{ij}x_j - \dots - a_{in}x_n$$

nach x_j auf. Wir erhalten

$$x_j = \frac{b_i}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \dots - \frac{1}{a_{ij}}v_i - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n.$$

(Auf der rechten Seite stehen die Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit den Koeffizienten $\frac{a_{i1}}{a_{ij}}, \dots, \frac{a_{in}}{a_{ij}}$ außer x_j . An Stelle von x_j steht die Variable

v_i mit dem Koeffizienten $\frac{1}{a_{ij}}$.)

Diesen Ausdruck setzen wir in die übrigen Gleichungen von I (außer für v_i)

$$v_1 = b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1j}x_j - \dots - a_{1n}x_n$$

.

.

.

$$v_m = b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mj}x_j - \dots - a_{mn}x_n$$

und in die Zielfunktion

$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

ein.

Damit erhalten wir an Stelle des Gleichungssystems I das Gleichungssystem II.

$$z = z_0 + c'_1x_1 + \dots + c'_jv_i + \dots + c'_nx_n$$

$$v_1 = b'_1 - a'_{11}x_1 - \dots - a'_{1j}v_i - \dots - a'_{1n}x_n$$

II

.

.

.

$$x_j = b'_j - a'_{j1}x_1 - \dots - a'_{ji}v_i - \dots - a'_{jn}x_n$$

.

.

.

$$v_m = b'_m - a'_{m1}x_1 - \dots - a'_{mi}v_i - \dots - a'_{mn}x_n$$

(Auf der linken Seite stehen die Variablen $v_1, \dots, v_m$ mit Ausnahme von v_i . An Stelle von v_i steht x_j .)

Setzen wir in diesem Gleichungssystem II alle Variablen, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen, gleich Null, so können wir aus dem Gleichungssystem II folgende Lösung ablesen:

$$\begin{aligned} v_1 &= b'_1, \dots v_m = b'_m; v_i = 0 \\ x_1 &= 0, \dots x_n = 0; x_j = b'_i \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

Diese neue Lösung erfüllt wieder die Bedingungen (2) und (3), ist also eine zulässige Lösung unserer Aufgabe. Gegenüber der Lösung aus I haben wir eine Vergrößerung von z erreicht.

Lösungsschritt III

Jetzt suchen wir in der Zielfunktion

$$z = z_0 + c'_1 x_1 + \dots + c'_j v_i + \dots + c'_n x_n$$

wieder die Variable mit dem größten positiven Koeffizienten. Diese Variable wählen wir wieder so groß wie möglich, während alle übrigen Variablen der Zielfunktion

$$z = z_0 + c'_1 x_1 + \dots + c'_j v_i + \dots + c'_n x_n$$

weiterhin Null bleiben. Bei der Berechnung der Variablen mit dem größten positiven Koeffizienten müssen wir wieder wie vorher darauf achten, daß die anderen Variablen nicht negativ werden.

Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis kein Koeffizient in der Zielfunktion mehr positiv ist. Dann ist die optimale Lösung erreicht.

Wir haben bisher bei der rechnerischen Lösung der linearen Optimierungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungssystemen nur spezielle Lösungen betrachtet, die Basislösungen. Dies ist möglich, weil unter den optimalen Lösungen (es gibt oft mehrere) mindestens eine Basislösung existiert. Wir wollen jetzt zeigen, wie wir lineare Optimierungsaufgaben mit Hilfe der Basistransformation lösen können.

Simplexmethode mit Hilfe der Basistransformation

Bereits im Abschnitt 6.6. haben wir bei der rechnerischen Lösung von linearen Ungleichungssystemen kennengelernt, wie wir mit Hilfe der Basistransformation die Basislösungen eines linearen Ungleichungssystems finden können. Dabei war es nötig, alle Basislösungen des betreffenden Ungleichungssystems zu bestimmen. Bei der linearen Optimierung werden nicht alle Basislösungen benötigt. Besitzen wir irgendeine Basislösung und kennen wir den zugehörigen Wert der Zielfunktion, so betrachten wir in der weiteren Rechnung

nur solche Basislösungen, die einen besseren Zielfunktionswert bringen. Alle Basislösungen, die einen schlechteren Zielfunktionswert bringen als die bereits vorhandenen Basislösungen, werden „vergessen“.

Wir zeigen jetzt, wie wir von einer gegebenen Basislösung ausgehend zu einer weiteren Basislösung gelangen, die einen besseren Zielfunktionswert bringt. Entscheidend ist dabei die Wahl des Hauptelementes der Basistransformation. Alle Regeln über die Wahl des Hauptelementes, die wir für lineare Ungleichungssysteme hergeleitet haben, müssen weiterhin beachtet werden. Nach Auswahl der Spalte liegt also das Hauptelement fest. Deshalb bleibt uns nur noch die Spaltenwahl. Bei der linearen Optimierung dürfen wir nur bestimmte Spalten für das Hauptelement wählen, damit wir im nächsten Schritt eine Basislösung mit verbessertem Zielfunktionswert erhalten.

Für die Spaltenwahl und die Berechnung des Zielfunktionswertes führen wir in die Rechentabelle, die wir für die Lösung des linearen Ungleichungssystems benötigen, eine zusätzliche Zeile ein. In die erste Rechentabelle mit der trivialen Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}$ kommen in die letzte Zeile die Koeffizienten der Zielfunktion und der negative Wert der Zielfunktion $-z = 0$ (bei $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ist $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{z}^T \mathbf{o} = 0$). Bei der Umrechnung in die nächste Rechentabelle wird die letzte Zeile wie jede andere Zeile umgerechnet.

Zu jeder Rechentabelle gehört eine Basislösung. Damit die nächste Basislösung günstiger ist, müssen wir das Hauptelement in einer Spalte wählen, die in der letzten Zeile eine positive Zahl aufweist. Wir wollen vereinbaren, daß wir für das Hauptelement die Spalte wählen, die in der letzten Zeile die größte positive Zahl besitzt.

Gibt es in der letzten Zeile keine positive Zahl, so ist die optimale Lösung erreicht.

3

Wir betrachten die Aufgabe aus Beispiel 2.

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + 15x_2 && \text{maximal} \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 180 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Für die Lösung des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 180 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

benötigen wir die Tabelle 7.2.

Tabelle 7.2

	x_1	x_2	
u_1	2	4	180
u_2	3	3	180
u_3	5	1	200

Aus Tabelle 7.2 lesen wir folgende Lösung ab: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $u_1 = 180$; $u_2 = 180$; $u_3 = 200$.

Für die Lösung der linearen Optimierungsaufgabe benötigen wir eine zusätzliche Zeile. Wir erhalten dann die Tabelle 7.3.

Tabelle 7.3

	x_1	x_2	
u_1	2	4	180
u_2	3	3	180
u_3	5	1	200
— z	10	15	0

Aus Tabelle 7.3 lesen wir folgende Lösung ab:

$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $u_1 = 180$; $u_2 = 180$; $u_3 = 200$; — z = 0 oder z = 0.

Diese Lösung entspricht dem Lösungsschritt I im Beispiel 2. In der letzten Zeile unserer Tabelle 7.3 ist die größte positive Zahl 15, sie gehört zur 2. Spalte. Also wird das Hauptelement der Basistransformation in der 2. Spalte gewählt. Nach unseren Überlegungen aus 6.6. wird die eingerahmte 4 Hauptelement.

Nach der Basistransformation erhalten wir die Tabelle 7.4.

Tabelle 7.4

	x_1	u_1	
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	45
u_2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	45
u_3	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{4}$	155
— z	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{4}$	—675

Wir führen nur die Umrechnung der letzten Zeile vor. Nach der Basistransformation erhalten wir:

$$-\frac{1}{4} \cdot 15 = -\frac{15}{4}$$

$$10 - \frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{5}{2}$$

$$0 - 45 \cdot 15 = -675$$

Aus Tabelle 7.4 lesen wir folgende Lösung ab:

$$x_1 = 0; x_2 = 45; u_1 = 0; u_2 = 45; u_3 = 155; -z = -675 \text{ bzw. } z = 675.$$

Diese Lösung hat also einen höheren Zielfunktionswert als die vorangehende Lösung. Sie entspricht dem Lösungsschritt II im Beispiel 2. In der letzten Zeile unserer Tabelle 7.4 steht nur noch eine positive

Zahl $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}$ gehört zur 1. Spalte. Also wählen wir das Hauptelement in der 1. Spalte. Nach unseren Überlegungen aus 6.6. wird das

Element $\boxed{\frac{3}{2}}$ Hauptelement.

Nach der Basistransformation erhalten wir die Tabelle 7.5.

Tabelle 7.5

	u_2	u_1	
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	30
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	30
u_3	-3	2	20
$-z$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	-750

Wir führen nur die Umrechnung der letzten Zeile vor. Nach der Basistransformation erhalten wir:

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{15}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$-675 - 30 \cdot \frac{5}{2} = -750$$

Aus Tabelle 7.5 lesen wir folgende Lösung ab:

$$x_1 = 30; x_2 = 30; u_1 = 0; u_2 = 0; u_3 = 20; -z = -750 \text{ bzw. } z = 750.$$

Diese Basislösung hat einen höheren Zielfunktionswert als die vorangehende Basislösung. Sie entspricht dem Lösungsschritt III im Beispiel 2.

Hauptelement der Basistransformation wählen müssen, damit nach der Basistransformation eine neue Basislösung vorliegt, die einen höheren z -Wert liefert als die vorangehende Basislösung. Wir demonstrieren die Wahl des Hauptelementes an der Rechentabelle 7.7. Die Rechentabelle 7.7 ist aus der Rechentabelle 7.6 durch Basistransformation hervorgegangen.

($y_1, \dots, y_j, \dots, y_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_i, \dots, \tilde{y}_m$ sind irgendwelche der Variablen $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, v_1, \dots, v_i, \dots, v_m$.)

Tabelle 7.7

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	
$\tilde{y}_1$	a'_{11}	$\dots$	a'_{1j}	$\dots$	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$	$\dots\dots\dots$					$\vdots$
$\tilde{y}_i$	a'_{i1}		a'_{ij}		a'_{in}	b'_i
$\vdots$	$\dots\dots\dots$					$\vdots$
$\tilde{y}_m$	a'_{m1}	$\dots$	a'_{mj}	$\dots$	a'_{mn}	b'_m
	c'_1	$\dots$	c'_j	$\dots$	c'_n	$-z = -z'$

Wahl des Hauptelementes:

a) Spaltenwahl

In der letzten Zeile der Tabelle 7.7 wird der größte positive Koeffizient gesucht.

$$\max \{c'_1, \dots, c'_j, \dots, c'_n\} = c'_j > 0$$

Ist dies der Koeffizient $c'_j > 0$, so wird das Hauptelement in der Spalte j mit der zugehörigen Variablen y_j gesucht.

b) Zeilenwahl (wie bei linearen Ungleichungssystemen)

Für alle *positiven* $a'_{1j}, \dots, a'_{ij}, \dots, a'_{mj}$, das heißt für alle *positiven* Werte in der Spalte j , bilden wir die Quotienten

$$\frac{b'_1}{a'_{1j}}, \dots, \frac{b'_i}{a'_{ij}}, \dots, \frac{b'_m}{a'_{mj}} :$$

Von diesen Quotienten wird der kleinste bestimmt;

$$\min \left\{ \frac{b'_1}{a'_{1j}}, \dots, \frac{b'_i}{a'_{ij}}, \dots, \frac{b'_m}{a'_{mj}} \right\} = \frac{b'_i}{a'_{ij}}$$

Ist dies $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$, so wird das Hauptelement in der Zeile i gewählt.

Das Hauptelement ist a'_{ij} , denn es liegt in der Spalte j und der Zeile i .

Umrechnung der Tabelle 7.7 mit Hilfe der Basistransformation:

Tabelle 7.8

	y_1	$\dots$	$\tilde{y}_i$	$\dots$	y_n	
$\tilde{y}_1$	$a'_{11} - \frac{a'_{i1}}{a'_{ij}} a'_{1j} \dots - \frac{a'_{1j}}{a'_{ij}} \dots a'_{1n} - \frac{a'_{in}}{a'_{ij}} a'_{1j}$					$b'_1 - \frac{b'_i}{a'_{ij}} a'_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_j	$\frac{a'_{j1}}{a'_{ij}} \dots \frac{1}{a'_{ij}} \dots \frac{a'_{jn}}{a'_{ij}}$					$\frac{b'_i}{a'_{ij}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{y}_m$	$a'_{m1} - \frac{a'_{i1}}{a'_{ij}} a'_{mj} \dots - \frac{a'_{mj}}{a'_{ij}} \dots a'_{mn} - \frac{a'_{in}}{a'_{ij}} a'_{mj}$					$b'_m - \frac{b'_i}{a'_{ij}} a'_{mj}$
	$c_1 - \frac{a'_{i1}}{a'_{ij}} c'_j \dots - \frac{c'_j}{a'_{ij}} \dots c'_n - \frac{a'_{in}}{a'_{ij}} c'_j$					$-z = -z' - \frac{b'_i}{a'_{ij}} c'_j$

- a) In die linke Randspalte und die obere Randzeile der Tabelle 7.8 tragen wir wie vorher die Variablen ein, allerdings vertauschen wir die Plätze von $\tilde{y}_i$ und y_j . Das heißt, es werden die Variablen ausgetauscht, die in der zum Hauptelement a_{ij} gehörenden Spalte bzw. Zeile stehen.
- b) An die Stelle des Hauptelementes a'_{ij} tritt der Kehrwert $\frac{1}{a'_{ij}}$;
- c) Alle übrigen Elemente der *Zeile* des Hauptelementes werden mit $\frac{1}{a'_{ij}}$ multipliziert oder durch a'_{ij} dividiert. Das gilt auch für das entsprechende Element der rechten Randspalte; also aus b'_i wird $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$.
- d) Alle übrigen Elemente der *Spalte* des Hauptelementes werden mit $-\frac{1}{a'_{ij}}$ multipliziert oder durch $-a'_{ij}$ dividiert. Das gilt auch für das entsprechende Element der unteren Randzeile; aus c'_j wird also $-\frac{c'_j}{a'_{ij}}$.
- e) Alle übrigen Elemente der Tabelle 7.7 werden nach dem gleichen Schema umgerechnet:
 An die Stelle von e tritt $e - g \cdot f$.
 Dabei ist e ein beliebiges Element aus Tabelle 7.7, das nicht in der Zeile bzw. Spalte des Hauptelementes liegt.
 f steht in der alten Tabelle 7.7 in der *Spalte* des Hauptelementes und in der *Zeile* des ausgewählten Elementes e .

g steht in der *neuen* Tabelle 7.8 in der *Zeile* des Hauptelementes und in der *Spalte* des ausgewählten Elementes e.

(Bei der Umrechnung ist es von Vorteil, wenn wir erst alle Elemente einer Spalte umrechnen, dann zur nächsten Spalte übergehen usw. Der gleiche Rechenvorteil ergibt sich, wenn wir erst alle Elemente einer Zeile umrechnen. Für die Übersicht ist es günstig, in der *alten* Tabelle 7.7 die *Spalte* des Hauptelementes und in der *neuen* Tabelle 7.8 die *Zeile* des Hauptelementes einzurahmen.)

In der eingerahmten Spalte lesen wir die Elemente f und in der eingerahmten Zeile die Elemente g ab.)

Ablezen der Lösung:

Alle Variablen der linken Randspalte nehmen die entsprechenden Werte der rechten Randspalte an.

$$\tilde{y}_1 = b'_1 - \frac{b'_i}{a'_{ij}} a'_{1j}$$

.....

$$y_j = \frac{b'_i}{a'_{ij}}$$

.....

$$\tilde{y}_m = b'_m - \frac{b'_i}{a'_{ij}} a'_{mj}$$

Alle Variablen der Kopfzeile werden Null.

$$y_1 = 0, \dots, \tilde{y}_i = 0, \dots, y_n = 0$$

Die Zielfunktion hat den Wert

$$z = z' + \frac{b'_i}{a'_{ij}} c'_j.$$

Optimalitätskriterium:

Eine optimale Lösung ist erreicht, wenn in der letzten Zeile (Zeile der Zielfunktionskoeffizienten) keine positive Zahl steht.

4

$$z = 50x_1 + 130x_2 + 150x_3 \quad \text{maximal}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 150$$

$$x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Tabelle 7.9

	x_1	x_2	x_3	
v_1	2	4	5	200
v_2	1	5	2	150
v_3	0	1	0	20
— z	50	130	150	0

Spaltenwahl: $\max \{50, 100, 150\} = 150$. Das Hauptelement ist in der dritten Spalte zu wählen.

$$\text{Zeilenwahl: } \min \left\{ \frac{200}{5}, \frac{150}{2} \right\} = \frac{200}{5} = 40.$$

Das Hauptelement ist in der ersten Zeile zu wählen, es ist die eingerahmte 5.

Tabelle 7.10

	x_1	x_2	v_1	
x_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	40
v_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$	$-\frac{2}{5}$	70
v_3	0	1	0	20
	-10	10	-30	-6 000

Die Variablen v_1 und x_3 vertauschen ihre Plätze. Alle übrigen Variablen behalten ihre alten Plätze.

Umrechnung der Elemente:

An die Stelle des Hauptelementes 5 tritt der Kehrwert $\frac{1}{5}$. Mit $\frac{1}{5}$ werden alle übrigen Elemente der Zeile des Hauptelementes multipliziert.

$$\frac{1}{5} \cdot 2, \frac{1}{5} \cdot 4, \frac{1}{5} \cdot 200$$

Mit $-\frac{1}{5}$ werden alle übrigen Elemente der Spalte des Hauptelementes multipliziert.

$$-\frac{1}{5} \cdot 2, -\frac{1}{5} \cdot 0, -\frac{1}{5} \cdot 150$$

Für die Umrechnung der übrigen Elemente rahmen wir die Zeile des Hauptelementes in der neuen Tabelle 7.10 und die Spalte des Hauptelementes in der alten Tabelle 7.9 (die Umrahmung ist ausgezogen) ein.

1. Spalte	2. Spalte	rechte Randspalte
$1 - \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{1}{5}$	$5 - \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{17}{5}$	$150 - 40 \cdot 2 = 70$
$0 - \frac{2}{5} \cdot 0 = 0$	$1 - \frac{4}{5} \cdot 0 = 1$	$20 - 40 \cdot 0 = 20$
$50 - \frac{2}{5} \cdot 150 = -10$	$130 - \frac{4}{5} \cdot 150 = 10$	$0 - 40 \cdot 150 = -6 000$

Lösung

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 40$$

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 70; \quad v_3 = 20$$

$$z = 6\,000$$

Diese Lösung ist nicht optimal, denn in der letzten Zeile der Tabelle 7.10 steht noch eine positive Zahl.

Spaltenwahl: $\max \{10\} = 10$ (es gibt nur eine positive Zahl in der letzten Zeile). Das Hauptelement ist in der zweiten Spalte zu wählen.

$$\text{Zeilenwahl: } \min \left\{ \frac{40}{\frac{4}{5}}, \frac{70}{\frac{17}{5}}, \frac{20}{1} \right\} = \frac{20}{1} = 20.$$

Das Hauptelement ist in der dritten Zeile zu wählen, es ist die eingerahmte 1.

Tabelle 7.11

	x_1	v_3	v_1	
x_3	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	24
v_2	$\frac{1}{5}$	$-\frac{17}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2
x_2	0	1	0	20
— z	— 10	— 10	— 30	— 6 200

Die Variablen v_3 und x_2 vertauschen ihre Plätze. Alle übrigen Variablen der Tabelle 7.10 behalten ihre Plätze.

Umrechnung der Elemente:

An die Stelle des Hauptelementes 1 tritt der Kehrwert 1. Mit dem Kehrwert 1 multiplizieren wir alle übrigen Elemente der Zeile des Hauptelementes.

$$1 \cdot 0, \quad 1 \cdot 0, \quad 1 \cdot 20$$

Mit dem negativen Kehrwert -1 multiplizieren wir alle übrigen Elemente der Spalte des Hauptelementes.

$$-1 \cdot \frac{4}{5}, \quad -1 \cdot \frac{17}{5}, \quad -1 \cdot 10$$

Für die Umrechnung der übrigen Elemente rahmen wir die Zeile des Hauptelementes in der neuen Tabelle 7.11 und die Spalte des Hauptelementes in der alten Tabelle 7.10 (die Umrahmung ist gestrichelt) ein.

1. Spalte

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} - 0 \cdot \frac{4}{5} &= \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} - 0 \cdot \frac{17}{5} &= \frac{1}{5} \\ -10 - 0 \cdot 10 &= -10\end{aligned}$$

3. Spalte

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} - 0 \cdot \frac{4}{5} &= \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} - 0 \cdot \frac{17}{5} &= -\frac{2}{5} \\ -30 - 0 \cdot 10 &= -30\end{aligned}$$

rechte Randspalte

$$\begin{aligned}40 - 20 \cdot \frac{4}{5} &= 24 \\ 70 - 20 \cdot \frac{17}{5} &= 2 \\ -6\,000 - 20 \cdot 10 &= -6\,200\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0; \quad x_2 = 20; \quad x_3 = 24 \\ v_1 &= 0; \quad v_2 = 2; \quad v_3 = 0 \\ z &= 6\,200\end{aligned}$$

Diese Lösung ist optimal, denn in der letzten Zeile der Tabelle 7.11 gibt es keine positive Zahl.

Aufgaben zu 7.3.

Lösen Sie rechnerisch die folgenden Aufgaben!

1

$$\begin{aligned}z &= 20x_1 + 40x_2 \quad \text{maximal} \\ 4x_1 + x_2 &\leq 36 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

(L)

2

$$\begin{aligned}z &= 2x_1 + 5x_2 \quad \text{maximal} \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

(L)

3

$$\begin{aligned}z &= 3x_1 + 2x_2 + 20x_3 \quad \text{maximal} \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &\leq 500 \\ 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 &\leq 1\,050 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

(L)

4

$$\begin{aligned}
 z &= 7x_1 + 2x_2 + 20x_3 \quad \text{maximal} \\
 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &\leq 500 \\
 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 &\leq 1\,050 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{L}$$

5

Die folgende Aufgabe ist als Maximierungsaufgabe zu formulieren und dann zu lösen.

$$\begin{aligned}
 z &= -3x_1 + 4x_2 - 8x_3 \quad \text{minimal} \\
 x_1 + 7x_2 - 4x_3 &\leq 2\,520 \\
 2x_1 + x_2 + 10x_3 &\leq 6\,300 \\
 x_2 &\leq 30 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{L}$$

6

Die folgende Aufgabe ist als Normalaufgabe zu formulieren (Maximierungsaufgabe, Nebenbedingungen nur mit dem Zeichen „ $\leq$ “ außer $x_1, x_2, x_3 \geq 0$) und dann zu lösen.

$$\begin{aligned}
 z &= -5x_1 - 2x_2 + 10x_3 \quad \text{minimal} \\
 2x_1 - 5x_2 - x_3 &\geq -700 \\
 2x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 600 \\
 -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq -150 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{L}$$

~~7~~

Für die Fertigung von Tischen und Schränken werden zwei Holzarten gebraucht. Die Herstellung eines Tisches erfordert 0,15 Einheiten (E) der ersten Holzart und 0,20 E der zweiten Holzart. Die Herstellung eines Schrankes erfordert 0,20 E der ersten Holzart und 0,10 E der zweiten Holzart.

Von der ersten Holzart stehen 60 E und von der zweiten Holzart stehen 40 E zur Verfügung.

Der Gewinn je Tisch beträgt 12 Geldeinheiten (GE), der Gewinn je Schrank 15 GE.

		je Tisch	je Schrank	Holzvorrat in E
Erforderliche	Holzart 1	0,15	0,20	60
Holzmenge in E	Holzart 2	0,20	0,10	40
Gewinn in GE		12	15	

Wieviel Schränke und Tische sind aus dem gegebenen Material zu fertigen, damit der Gewinn möglichst hoch wird? (L)

~~293~~

8

Ein Betrieb produziert drei Erzeugnisse, die in zwei Produktionsstufen hergestellt werden.

- a) Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_1 werden in der ersten Stufe 2 Zeiteinheiten (ZE) und in der zweiten Stufe 5 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_2 werden in der ersten Stufe 3 ZE und in der zweiten Stufe 2 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_3 werden in der ersten Stufe 4 ZE und in der zweiten Stufe 1 ZE benötigt.

In der ersten Stufe stehen 3 300 ZE und in der zweiten Stufe 6 600 ZE zur Verfügung.

		für Erzeugnis			
		P_1	P_2	P_3	Fonds in ZE
Erforderliche	Stufe 1	2	3	4	3 300
Zeit in ZE	Stufe 2	5	2	1	6 600

Es ist ein Produktionsplan aufzustellen, der die vorhandenen Fonds maximal auslastet. (L)

- b) Der Gewinn je Einheit des Erzeugnisses beträgt beim Erzeugnis P_1 10 Geldeinheiten (GE), beim Erzeugnis P_2 20 GE und beim Erzeugnis P_3 15 GE.

		Erzeugnis		
		P_1	P_2	P_3
Gewinn je Einheit des Er- zeugnisses in GE		10	20	15

Es ist ein Produktionsplan zu bestimmen, der dem Betrieb den höchsten Gewinn bringt. (L)

9

Ein Betrieb produziert drei Erzeugnisse, die in zwei Produktionsstufen hergestellt werden.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_1 werden in der ersten Stufe 2 Zeiteinheiten (ZE) und in der zweiten Stufe 5 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_2 werden in der ersten Stufe 3 ZE und in der zweiten Stufe 2 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_3 werden in der ersten Stufe 4 ZE und in der zweiten Stufe 1 ZE benötigt.

In der ersten Stufe stehen 700 ZE und in der zweiten Stufe 1 400 ZE zur Verfügung.

Für die Produktion wird ein bestimmtes Material benötigt, für eine Einheit des Erzeugnisses P_1 8 Materialeinheiten (ME), für eine Einheit des Erzeugnisses P_2 10 ME und für eine Einheit des Erzeugnisses P_3 4 ME. Insgesamt stehen 2 100 ME von diesem Material zur Verfügung. Der Preis je Einheit des Erzeugnisses beträgt beim Erzeugnis P_1 60 GE, beim Erzeugnis P_2 120 GE und beim Erzeugnis P_3 90 GE.

		Erzeugnis			Fonds in ZE bzw. ME
		P_1	P_2	P_3	
Erforderliche Zeit in ZE	Stufe 1	2	3	4	700
	Stufe 2	5	2	1	1 400
Erforderliches Material in ME		8	10	4	2 100
Preis in GE		60	120	90	

Berechnen Sie einen Plan, der dem Betrieb eine maximale Preissumme sichert!
(L)

10

Ein Betrieb hat die Möglichkeit, ein Erzeugnis nach drei verschiedenen Technologien herzustellen. (Nach allen Technologien wird in der gleichen Zeiteinheit die gleiche Menge des Erzeugnisses hergestellt.)

Für die Herstellung des Erzeugnisses werden drei Rohstoffe benötigt. Nach der ersten Technologie werden für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses 4 Einheiten (E) des ersten Rohstoffes R_1 , 0,5 E des Rohstoffes R_2 und 0 E des Rohstoffes R_3 benötigt. Nach der zweiten Technologie werden für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses 3 E des Rohstoffes R_1 , 1 E des Rohstoffes R_2 und 0,5 E des Rohstoffes R_3 benötigt.

Nach der dritten Technologie werden für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses 1 E des Rohstoffes R_1 , 2 E des Rohstoffes R_2 und 3 E des Rohstoffes R_3 benötigt.

Insgesamt stehen vom Rohstoff R_1 540 E, vom Rohstoff R_2 150 E und vom Rohstoff R_3 90 E zur Verfügung.

		Technologie			Vorhandene Rohstoffmenge in E
		1	2	3	
Erforderliche	Rohstoff 1	4	3	1	540
Rohstoffmenge in E	Rohstoff 2	0,5	1	2	150
	Rohstoff 3	0	0,5	3	90

Wieviel Einheiten sind nach jeder Technologie zu produzieren, damit die Gesamtproduktion möglichst groß wird?
(L)

11

Ein Betrieb stellt vier Erzeugnisse her, die in zwei Stufen gefertigt werden.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_1 werden in der ersten Stufe 5 Zeiteinheiten (ZE) und in der zweiten Stufe 4 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_2 werden in der ersten Stufe 1 ZE und in der zweiten Stufe 3 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_3 werden in der ersten Stufe 2 ZE und in der zweiten Stufe 3 ZE benötigt.

Für die Herstellung einer Einheit des Erzeugnisses P_4 werden in der ersten Stufe 2 ZE und in der zweiten Stufe 4 ZE benötigt.

In der ersten Stufe stehen 325 ZE und in der zweiten Stufe 520 ZE zur Verfügung.

Durch Vertrag ist der Betrieb verpflichtet, vom Erzeugnis P_1 mindestens 10 Einheiten (E), vom Erzeugnis P_2 mindestens 15 E, vom Erzeugnis P_3 mindestens 20 E und vom Erzeugnis P_4 mindestens 50 E zu liefern. Durch Bedarfsforschung ist bekannt, daß der Betrieb vom Erzeugnis P_1 nicht mehr als 20 E, vom Erzeugnis P_2 nicht mehr als 80 E, vom Erzeugnis P_3 nicht mehr als 25 E und vom Erzeugnis P_4 nicht mehr als 150 E absetzen kann.

		Erzeugnis				Fonds in ZE
		1	2	3	4	
Erforderliche Zeit in ZE	Stufe 1	5	1	2	2	325
	Stufe 2	4	3	3	4	520
Mindestmengen in E		10	15	20	50	
Höchstmengen in E		20	80	25	150	

- Es wird ein Produktionsprogramm gefordert, das unter Beachtung der aufgeführten Bedingungen eine maximale Auslastung der Fonds garantiert. Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell auf! (L)
- Überführen Sie das mathematische Modell aus Aufgabe a) durch Absetzen der Mindestforderungen und die entsprechende Korrektur der Fonds in eine Normalaufgabe (in den Nebenbedingungen tritt nur das Zeichen „ $\leq$ “ auf, außer bei $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$) für die Bestimmung der „Restproduktion“ (die über den Mindestmengen liegt)! (L)
- Lösen Sie diese Normalaufgabe (Bestimmung des Restprogramms)! (L)

- d) Bestimmen Sie das Gesamtproduktionsprogramm des Betriebes (Summe aus Mindestmengen und Restprogramm)! (1.)

7.4.

Lösung von Transportaufgaben

1

Für die Belieferung von drei Baustellen mit Mauersteinen stehen zwei Ziegelwerke zur Verfügung. Im Ziegelwerk Z_1 stehen für diese drei Baustellen 200 000, im Ziegelwerk Z_2 400 000 Mauersteine bereit. Die Baustelle B_1 benötigt 350 000, die Baustelle B_2 150 000 und die Baustelle B_3 100 000 Ziegelsteine. Es ist ein Belieferungsplan aufzustellen, der die Transportkosten minimiert. Die Transportkosten je 1 000 Ziegelsteine betragen für den Transport

von der Ziegelei Z_1 zur Baustelle B_1 13,00 M,
 zur Baustelle B_2 17,00 M,
 zur Baustelle B_3 22,00 M,
 von der Ziegelei Z_2 zur Baustelle B_1 14,00 M,
 zur Baustelle B_2 20,00 M,
 zur Baustelle B_3 15,00 M.

Tabelle 7.12

		Kosten für den Transport von 1 000 Ziegelsteinen von den Ziegeleien zu den Baustellen (in M je 1 000 Stück)			Zur Verfügung stehende Menge an Ziegelsteinen (in Stück)
		Baustelle 1	Baustelle 2	Baustelle 3	
Ziegelei	1	13	17	22	200 000
	2	14	20	15	400 000
Bedarf an Ziegelsteinen (in Stück)		350 000	150 000	100 000	600 000

7.4.1. Aufstellung des mathematischen Modells

Nehmen wir an, daß von der

Ziegelei Z_1 an die Baustelle B_1 die Menge x_{11} ,
 an die Baustelle B_2 die Menge x_{12} ,
 an die Baustelle B_3 die Menge x_{13} , und daß von der

Ziegelei Z_2 an die Baustelle B_1 die Menge x_{21} ,
 an die Baustelle B_2 die Menge x_{22} ,
 an die Baustelle B_3 die Menge x_{23} geliefert wird.

Tabelle 7.13

		Kosten für den Transport von 1 000 Ziegelsteinen und Transportmengen in Stück			Zur Verfügung stehende Menge an Ziegelsteinen (in Stück)
		Baustelle 1	Baustelle 2	Baustelle 3	
Ziegelei	1	$\frac{13}{x_{11}}$	$\frac{17}{x_{12}}$	$\frac{22}{x_{13}}$	200 000
	2	$\frac{14}{x_{21}}$	$\frac{20}{x_{22}}$	$\frac{15}{x_{23}}$	400 000
Bedarf an Ziegelsteinen (in Stück)		350 000	150 000	100 000	

Dann sind die Transportkosten durch die folgende Zielfunktion gegeben:

$$Z = \frac{1}{1\,000} (13x_{11} + 17x_{12} + 22x_{13} + 14x_{21} + 20x_{22} + 15x_{23})$$

Diese Zielfunktion soll ein Minimum annehmen.

Nun dürfen wir die Variablen x_{11} , x_{12} , $\dots$, x_{23} nicht völlig beliebig wählen.

Die Summe der Lieferungen der Ziegelei Z_1 an die verschiedenen Baustellen muß mit der Liefermöglichkeit der Ziegelei Z_1 übereinstimmen. Es muß also gelten: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200\,000$.

Die Summe der Lieferungen der Ziegelei Z_2 an die verschiedenen Baustellen muß mit der Liefermöglichkeit der Ziegelei Z_2 übereinstimmen. Es muß also gelten: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400\,000$.

Die Summe der Lieferungen aus den Ziegeleien Z_1 und Z_2 an die Baustelle B_1 muß den Bedarf der Baustelle B_1 decken. Es muß also gelten $x_{11} + x_{21} = 350\,000$.

Die Summe der Lieferungen aus den Ziegeleien Z_1 und Z_2 an die Baustelle B_2 muß den Bedarf der Baustelle B_2 decken. Es muß also gelten:

$$x_{12} + x_{22} = 150\,000.$$

Die Summe der Lieferungen aus den Ziegeleien Z_1 und Z_2 an die Baustelle B_3 muß den Bedarf der Baustelle B_3 decken. Es muß also gelten:

$$x_{13} + x_{23} = 100\,000.$$

Die Variablen dürfen nicht negativ sein, denn wir können keine negativen Mengen liefern. Also gilt außerdem: x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} , $x_{23} \geq 0$.

Wir fassen jetzt die Zielfunktion und die Nebenbedingungen zusammen.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) \quad Z = \frac{1}{1000} (13x_{11} + 17x_{12} + 22x_{13} + 14x_{21} + 20x_{22} + 15x_{23}) & \text{minimal} & \\
 & & = 200\,000 \\
 & & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400\,000 \\
 & & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 350\,000 \\
 (2) \quad & x_{11} & + x_{21} = 150\,000 \\
 & x_{12} & + x_{22} = 350\,000 \\
 & x_{13} & + x_{23} = 100\,000 \\
 (3) \quad & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} & \geq 0
 \end{array}$$

Es liegt wieder eine lineare Zielfunktion vor, die ein Optimum (in unserem Falle ein Minimum) annehmen soll. Die Nebenbedingungen sind durch lineare Gleichungen gegeben, außerdem sollen die Variablen nicht negativ sein.

Es liegt also eine lineare Optimierungsaufgabe vor, allerdings ist die Aufgabe nicht als Normalaufgabe der linearen Optimierung formuliert. Eine Aufgabe der vorliegenden Form läßt sich auch mit Hilfe des in Abschnitt 7.3. beschriebenen Algorithmus lösen, wenn einige zusätzliche Überlegungen beachtet werden. Die vorliegende Aufgabe hat aber eine solch spezielle Struktur, daß es günstiger ist, einen speziellen Lösungsalgorithmus anzuwenden. Da die Transportaufgaben in der aufgeführten Form sehr häufig auftreten und außerdem der spezielle Lösungsalgorithmus relativ einfach ist, wollen wir uns mit der Lösung von Transportaufgaben etwas näher beschäftigen.

Bei der Lösung der Normalaufgabe der linearen Optimierung fanden wir sehr einfach eine Anfangslösung ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, z = 0$), die wir dann schrittweise verbesserten, bis wir das Optimum erreichten.

Bei der Lösung der Transportaufgabe können wir ähnlich vorgehen, d. h. erst eine Anfangslösung suchen und sie dann schrittweise verbessern.

Für das Finden der Anfangslösung gibt es verschiedene Verfahren. Ein Verfahren, das im allgemeinen relativ günstige Anfangslösungen liefert, ist das Vogelsche Näherungsverfahren. Dieses Verfahren führt zu Lösungen, die in der Nähe des Optimums liegen bzw. in vielen Fällen das Optimum darstellen.

Weil die Anfangslösungen nach diesem Näherungsverfahren bereits sehr günstig sind, verzichten wir in diesem Buch auf die gegebenenfalls notwendige schrittweise Verbesserung bis zum Optimum.

7.4.2. Näherungsverfahren zur Lösung von Transportaufgaben

Wir führen das Näherungsverfahren am Beispiel 1 vor. Dazu stellen wir zuerst eine Arbeitstabelle auf, die alle wichtigen Angaben aus Tabelle 7.12 enthält. Zusätzlich werden eine Zeile und eine Spalte aufgenommen, in die wir bestimmte Hilfsgrößen eintragen.

Tabelle 7.14

	B ₁	B ₂	B ₃	
z_1	<u>13</u>	<u>17</u>	<u>22</u>	200 000
z_2	<u>14</u>	<u>20</u>	<u>15</u>	400 000
	350 000	150 000	100 000	

- a) In der Zeile z_1 suchen wir die günstigsten Kosten 13 sowie die nächstgünstigsten Kosten 17 und berechnen die Differenz $17 - 13 = 4$. Diese Differenz vermerken wir in der rechten Randspalte der Tabelle 7.14.

In der Zeile z_2 suchen wir die günstigsten Kosten 14 sowie die nächstgünstigsten Kosten 15 und berechnen die Differenz $15 - 14 = 1$. Diese Differenz tragen wir ebenfalls in die rechte Randspalte der Tabelle 7.14 ein.

Nun suchen wir in der Spalte B₁ die günstigsten Kosten 13 sowie die nächstgünstigsten Kosten 14 und berechnen die Differenz $14 - 13 = 1$. Diese Differenz tragen wir in die unterste Zeile der Tabelle 7.14 ein.

Auf die gleiche Weise bestimmen wir für die Spalte B₂ die Differenz $20 - 17 = 3$ und tragen sie in die unterste Zeile der Tabelle 7.14 ein.

Schließlich bestimmen wir auf die gleiche Weise für die Spalte B₃ die Differenz $22 - 15 = 7$ und tragen sie ebenfalls in die unterste Zeile der Tabelle 7.14 ein.

Nach Eintragen der Differenzen in die Tabelle 7.14 erhalten wir die Tabelle 7.15.

- b) Wir suchen unter allen Differenzen die größte. Das ist die Differenz 7 in der Spalte B₃.

Tabelle 7.15

	B ₁	B ₂	B ₃		
z_1	<u>13</u>	<u>17</u>	<u>22</u>	200 000	4
z_2	<u>14</u>	<u>20</u>	<u>15</u>	400 000	1
	350 000	150 000	100 000		
	1	3	7		

- c) In der Spalte B_3 mit der größten Differenz 7 suchen wir das Feld mit den günstigsten Kosten. Das ist das mit den Kosten 15.
- d) Das ausgewählte Feld mit den Kosten 15 wird jetzt mit der größtmöglichen Menge belegt. z_2 könnte 400 000 liefern, aber B_3 benötigt nur 100 000. Wir können das Feld höchstens mit 100 000 belegen. Diese 100 000 Einheiten tragen wir in Tabelle 7.15 in das Feld mit den Kosten 15 ein.
- e) Die Liefermöglichkeiten von z_2 werden um 100 000 reduziert, betragen also noch $400\,000 - 100\,000 = 300\,000$. Die alte Liefermöglichkeit 400 000 wird durch die neue Liefermöglichkeit 300 000 ersetzt.
- Der Bedarf von B_3 wird ebenfalls um 100 000 reduziert, beträgt also noch $100\,000 - 100\,000 = 0$. Der alte Bedarf 100 000 wird durch den neuen Bedarf 0 ersetzt.

Durch Veränderung der Tabelle 7.15 nach d) und e) und das Weglassen der Differenzen in Tabelle 7.15 erhalten wir Tabelle 7.16.

Tabelle 7.16

	B_1	B_2	B_3		
z_1	<u>13</u>	<u>17</u>	<u>22</u>	200 000	4
z_2	<u>14</u>	<u>20</u>	<u>15</u>	300 000	6
	350 000	150 000	0		
	1	3			

Wir gehen bei unserer weiteren Rechnung von Tabelle 7.16 aus, wobei wir die Spalte B_3 streichen, weil der Bedarf für B_3 voll gedeckt ist.

Wir führen wieder die Arbeitsschritte a) bis e) aus.

- a) Für Zeile z_1 berechnen wir aus den günstigsten und den nächstgünstigen Kosten die Differenz $17 - 13 = 4$ und tragen sie in Tabelle 7.16 ein.

Für Zeile z_2 erhalten wir die Differenz $20 - 14 = 6$ (beachten Sie, daß die Spalte B_3 mit den Kosten 15 gestrichen ist!).

Für die Spalte B_1 ergibt sich die Differenz $14 - 13 = 1$ und für die Spalte B_2 $20 - 17 = 3$. (Weil die Spalte B_3 gestrichen ist, wird für sie keine Differenz berechnet.)

- b) Unter allen Differenzen wird die größte gesucht. Das ist die Differenz 6 in der Zeile z_2 .

- c) In der Zeile z_2 mit der größten Differenz suchen wir das Feld mit den günstigsten Kosten. Das ist das Feld mit den Kosten 14.
- d) Das ausgewählte Feld mit den Kosten 14 wird mit der größtmöglichen Menge belegt. z_2 könnte 300 000 liefern, aber B_1 benötigt 350 000. Wir können das Feld höchstens mit 300 000 belegen. Diese 300 000 Einheiten tragen wir in Tabelle 7.16 in das Feld mit den Kosten 14 ein.
- e) Die Liefermöglichkeiten von z_2 werden um 300 000 reduziert, betragen also noch $300\,000 - 300\,000 = 0$. Die alte Liefermöglichkeit 300 000 wird durch die neue Liefermöglichkeit 0 ersetzt. Der Bedarf von B_1 wird ebenfalls um 300 000 reduziert, beträgt also noch $350\,000 - 300\,000 = 50\,000$. Der alte Bedarf 350 000 wird durch den neuen Bedarf 50 000 ersetzt.

Durch Veränderung der Tabelle 7.16 nach d) und e) und das Weglassen der Differenzen erhalten wir Tabelle 7.17.

Tabelle 7.17

	B_1	B_2	B_3	
z_1	<u>13</u>	<u>17</u>	<u>22</u>	200 000
z_2	<u>14</u> 300 000	<u>20</u>	<u>15</u> 100 000	0
	50 000	150 000	0	

Wir gehen bei unserer weiteren Rechnung von Tabelle 7.17 aus, wobei wir Zeile z_2 streichen, weil die Liefermöglichkeit von z_2 erschöpft ist.

Wollten wir jetzt den Arbeitsschritt a) durchführen, so könnten wir für die Spalten B_1 und B_2 (B_3 ist ja bereits gestrichen) keine Kostendifferenzen berechnen, weil die Zeile z_2 gestrichen ist. Wir benötigen diese Differenzen für die Auswahl der zu belegenden Felder auch nicht mehr, weil wir die beiden verbliebenen Felder mit den Kosten 13 und 17 auf jeden Fall voll belegen müssen.

In das Feld mit den Kosten 13 (wir könnten auch beim Feld mit den Kosten 17 beginnen) müssen wir 50 000 Einheiten legen, damit der Bedarf von B_1 voll gedeckt ist. Der neue Bedarf von B_1 ist $50\,000 - 50\,000 = 0$, die neue Liefermöglichkeit von z_1 ist $200\,000 - 50\,000 = 150\,000$.

Tragen wir die Veränderungen in Tabelle 7.17 ein, so erhalten wir Tabelle 7.18.

Wir gehen in der weiteren Rechnung von Tabelle 7.18 aus, wobei wir die Spalte B_1 streichen, weil der Bedarf von B_1 voll gedeckt ist.

Tabelle 7.18

	B ₁	B ₂	B ₃	
	<u>13</u>	<u>17</u>	<u>22</u>	
z ₁	50 000			150 000
	<u>14</u>	<u>20</u>	<u>15</u>	
z ₂	300 000		100 000	0
	0	150 000	0	

In das verbliebene Feld mit den Kosten 17 müssen wir 150 000 legen, damit der Bedarf von B₂ voll gedeckt ist. Damit ist auch die Liefermöglichkeit von z₁ erschöpft.

Der neue Bedarf von B₂ ist $150\,000 - 150\,000 = 0$ und die neue Liefermöglichkeit von z₁ ebenfalls $150\,000 - 150\,000 = 0$. Tragen wir die Veränderungen in Tabelle 7.18 ein, so erhalten wir Tabelle 7.19.

Tabelle 7.19

	B ₁	B ₂	B ₃	
	<u>13</u>	<u>17</u>	<u>22</u>	
z ₁	50 000	150 000		0
	<u>14</u>	<u>20</u>	<u>15</u>	
z ₂	300 000		100 000	0
	0	0	0	

(Wir haben für die einzelnen Rechenschritte aus methodischen Gründen immer neue Rechentabellen aufgestellt, um die Veränderung der Ausgangstabelle deutlich sichtbar zu machen. Für das praktische Rechnen genügt die Rechentabelle 7.14, in die wir alle Veränderungen eintragen können, nachdem wir die ungültigen Werte gestrichen haben.)

Aus Tabelle 7.19 lesen wir folgende Lösung ab:

$$x_{11} = 50\,000; \quad x_{12} = 150\,000; \quad x_{13} = 0$$

$$x_{21} = 300\,000; \quad x_{22} = 0; \quad x_{23} = 100\,000$$

Zu dieser Lösung gehören die Transportkosten

$$z = \frac{1}{1\,000} (13 \cdot 50\,000 + 17 \cdot 150\,000 + 22 \cdot 0 + \\ + 14 \cdot 300\,000 + 20 \cdot 0 + 15 \cdot 100\,000)$$

$$z = 8\,900$$

von der Ziegelei z_1	zur Baustelle B_1	50 000 Ziegelsteine,
	zur Baustelle B_2	150 000 Ziegelsteine,
von der Ziegelei z_2	zur Baustelle B_1	300 000 Ziegelsteine,
	zur Baustelle B_3	100 000 Ziegelsteine.

Diese Lösung ist bereits optimal, lässt sich also nicht verbessern.

Verallgemeinerung

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

m Anzahl der Lieferanten

n Anzahl der Verbraucher

b_i ($i = 1, \dots, m$) Liefermöglichkeit des Lieferanten i

a_j ($j = 1, \dots, n$) Bedarf des Verbrauchers j

c_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) Bewertung für den Transport einer Wareneinheit vom Lieferanten i zum Verbraucher j

x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) Liefermenge vom Lieferanten i an den Verbraucher j .

Tabelle 7.20

		Verbraucher					Liefermöglichkeit
		1	...	j	...	n	
Lieferant	1	$\frac{c_{11}}{x_{11}}$	...	$\frac{c_{1j}}{x_{1j}}$	...	$\frac{c_{1n}}{x_{1n}}$	b_1
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	i	$\frac{c_{i1}}{x_{i1}}$	...	$\frac{c_{ij}}{x_{ij}}$	...	$\frac{c_{in}}{x_{in}}$	b_i
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.
	m	$\frac{c_{m1}}{x_{m1}}$	...	$\frac{c_{mj}}{x_{mj}}$	...	$\frac{c_{mn}}{x_{mn}}$	b_m
	.	.	.	.	.	.	.
Bedarf	a_1	...	a_j	...	a_n	$\sum_{j=1}^n a_j$	$\sum_{i=1}^m b_i$

Eine einheitliche Ware ist von m Lieferanten an n Verbraucher zu liefern. Dabei sind die Liefermöglichkeiten der Lieferanten und der Bedarf der Verbraucher zu berücksichtigen. Die Summe der Liefermöglichkeiten stimmt mit der Summe der benötigten Mengen überein, es gilt also

$$\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{j=1}^n a_j.$$

Der Belieferungsplan soll so aufgestellt werden, daß der bewertete Transportplan ein Minimum ergibt.

Aufstellung des mathematischen Modells

Der bewertete Transportplan ist durch folgende Zielfunktion gegeben:

$$z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}.$$

Diese Zielfunktion soll ein Minimum annehmen.

Für die Lieferungen des Lieferanten i ($i = 1, \dots, m$) muß gelten

$$x_{i1} + \cdots + x_{ij} + \cdots + x_{in} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i.$$

Für die Lieferungen an den Verbraucher j ($j = 1, \dots, n$) muß gelten

$$x_{1j} + \cdots + x_{ij} + \cdots + x_{mj} = \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j.$$

Die Variablen dürfen nicht negativ sein, es gilt also

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Wir fassen die Zielfunktion und die Nebenbedingungen zusammen.

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad \text{minimal} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= a_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Zur näherungsweisen Lösung der Transportaufgabe benutzen wir eine Arbeitstabelle, die Tabelle 7.21. Sie ist aus der Tabelle 7.20 durch Weglassen aller überflüssigen Informationen und durch Hinzufügen einer Zeile und einer Spalte hervorgegangen.

a) In jeder Zeile i ($i = 1, \dots, m$) werden die günstigsten Kosten c_{ij} und die nächstgünstigen Kosten c_{ij^*} gesucht. Daraus bestimmen wir die Differenz $d_i = c_{ij^*} - c_{ij}$.

Tabelle 7.21

	1	...	j	...	n		Zeilen- differenzen
1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	b_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	b_i	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	b_m	
	a_1	...	a_j	...	a_n		
Spalten- differenzen							

In jeder Spalte j ($j = 1, \dots, n$) werden die günstigsten Kosten c_{i^*j} und die nächstgünstigen Kosten c_{i^*j} gesucht. Daraus bestimmen wir die Differenz $d_j = c_{i^*j} - c_{i^*j}$. Diese Differenzen werden in Tabelle 7.21 in die Spalte der Zeilendifferenzen bzw. in die Zeile der Spaltendifferenzen eingetragen.

- b) Unter allen Zeilendifferenzen d_i ($i = 1, \dots, m$) und Spaltendifferenzen d_j ($j = 1, \dots, n$) suchen wir die größte Differenz.

Ist die größte Differenz eine Zeilendifferenz d_{i^*} , so gehen wir nach c_1

Ist die größte Differenz eine Spaltendifferenz d_{j^*} , so gehen wir nach c_2) vor.

- c_1) In der Zeile i^* suchen wir das Feld mit den günstigsten Kosten. Es sei dies das Feld i^*j^* .

- c_2) In der Spalte j^* suchen wir das Feld mit den günstigsten Kosten. Es sei dies das Feld i^*j^* .

- d) Das ausgewählte Feld i^*j^* wird jetzt mit der größtmöglichen Menge belegt. Kann der Lieferant i^* die Menge b_{i^*} liefern und hat der Verbraucher j^* den Bedarf a_{j^*} , so wird das Feld i^*j^* mit der kleineren der beiden Mengen belegt.

$$x_{i^*j^*} = \min \{b_{i^*}, a_{j^*}\}$$

- e) Die Liefermöglichkeit des Lieferanten i^* wird um $x_{i^*j^*}$ reduziert, beträgt also noch $b_{i^*} - x_{i^*j^*}$.

Der Bedarf des Verbrauchers j^* wird ebenfalls um $x_{i^*j^*}$ reduziert, beträgt also noch $a_{j^*} - x_{i^*j^*}$.

Ist $b_{i^*} - x_{i^*j^*} = 0$, so wird die Zeile i^* gestrichen. Sonst wird Spalte j^* gestrichen, weil $a_{j^*} - x_{i^*j^*} = 0$ ist. (Mindestens einer der beiden Werte ist Null.)

Die Schritte a) bis e) werden so oft wiederholt, bis nur noch eine Zeile bzw. Spalte frei ist. Dann werden alle Felder dieser Zeile bzw. Spalte mit den möglichen Höchstmengen belegt.

2

Für die Versorgung von vier Verbrauchern (V) mit Kartoffeln stehen drei Lager (L) zur Verfügung. Die Entfernungen zwischen den Verbrauchern und den Lagern betragen:

vom Lager L_1 zum Verbraucher V_1 25 km,
zum Verbraucher V_2 15 km,
zum Verbraucher V_3 7 km,
zum Verbraucher V_4 6 km,

vom Lager L_2 zum Verbraucher V_1 22 km,
zum Verbraucher V_2 21 km,
zum Verbraucher V_3 35 km,
zum Verbraucher V_4 33 km,

vom Lager L_3 zum Verbraucher V_1 7 km,
zum Verbraucher V_2 5 km,
zum Verbraucher V_3 25 km,
zum Verbraucher V_4 16 km.

In den Lagern stehen folgende Mengen zur Verfügung: Lager L_1 500 t, Lager L_2 1 000 t, Lager L_3 1 600 t.

Die Verbraucher haben folgenden Bedarf: Verbraucher V_1 700 t, Verbraucher V_2 500 t, Verbraucher V_3 1 100 t, Verbraucher V_4 800 t. Es ist ein Belieferungsplan aufzustellen, der die geringste Anzahl von Tonnenkilometern (tkm) erfordert.

Tabelle 7.22

		Entfernungen von den Lagern zu den Verbrauchern in km				Zur Verfügung stehende Menge (in t)
		Ver- braucher 1	Ver- braucher 2	Ver- braucher 3	Ver- braucher 4	
Lager	1	25	15	7	6	500
	2	22	21	35	33	1 000
	3	7	5	25	16	1 600
Bedarf in t		700	500	1 100	800	3 100

Aufstellung des mathematischen Modells

Wir nehmen an, daß folgende Mengen geliefert werden:

vom Lager L_1 an den Verbraucher V_1 die Menge x_{11} ,
 an den Verbraucher V_2 die Menge x_{12} ,
 an den Verbraucher V_3 die Menge x_{13} ,
 an den Verbraucher V_4 die Menge x_{14} ,

vom Lager L_2 an den Verbraucher V_1 die Menge x_{21} ,
 an den Verbraucher V_2 die Menge x_{22} ,
 an den Verbraucher V_3 die Menge x_{23} ,
 an den Verbraucher V_4 die Menge x_{24} ,

vom Lager L_3 an den Verbraucher V_1 die Menge x_{31} ,
 an den Verbraucher V_2 die Menge x_{32} ,
 an den Verbraucher V_3 die Menge x_{33} ,
 an den Verbraucher V_4 die Menge x_{34} .

Wir ergänzen die Tabelle 7.22 mit diesen Transportmengen und erhalten die Tabelle 7.23.

Tabelle 7.23

		Entfernungen (in km) und Transportmengen (in t) von den Lagern zu den Verbrauchern				Zur Verfügung stehende Menge (in t)
		Verbraucher 1	Verbraucher 2	Verbraucher 3	Verbraucher 4	
Lager	1	$\begin{array}{ c } \hline 25 \\ \hline \end{array}$ x_{11}	$\begin{array}{ c } \hline 15 \\ \hline \end{array}$ x_{12}	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ x_{13}	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ x_{14}	500
	2	$\begin{array}{ c } \hline 22 \\ \hline \end{array}$ x_{21}	$\begin{array}{ c } \hline 21 \\ \hline \end{array}$ x_{22}	$\begin{array}{ c } \hline 35 \\ \hline \end{array}$ x_{23}	$\begin{array}{ c } \hline 33 \\ \hline \end{array}$ x_{24}	1 000
	3	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ x_{31}	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ x_{32}	$\begin{array}{ c } \hline 25 \\ \hline \end{array}$ x_{33}	$\begin{array}{ c } \hline 16 \\ \hline \end{array}$ x_{34}	1 600
Bedarf (in t)		700	500	1 100	800	3 100

Dann sind die Tonnenkilometer durch die folgende Zielfunktion gegeben:

$$\begin{aligned}
 z = & 25x_{11} + 15x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} \\
 & + 22x_{21} + 21x_{22} + 35x_{23} + 33x_{24} \\
 & + 7x_{31} + 5x_{32} + 25x_{33} + 16x_{34}
 \end{aligned}$$

Diese Zielfunktion soll ein Minimum annehmen.

Nun dürfen wir die Variablen x_{11} , x_{12} , $\dots$, x_{34} nicht völlig beliebig wählen.

Es muß gelten:

für die Lieferungen des Lagers L_1

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500,$$

für die Lieferungen des Lagers L_2

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1\,000,$$

für die Lieferungen des Lagers L_3

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1\,600.$$

Ferner muß gelten:

für die Lieferungen an Verbraucher V_1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700,$$

für die Lieferungen an Verbraucher V_2

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 500,$$

für die Lieferungen an Verbraucher V_3

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1\,400,$$

für die Lieferungen an Verbraucher V_4

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 800.$$

Die Variablen dürfen nicht negativ sein, weil es sich um Liefermengen handelt. Es muß also gelten:

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34} \geq 0.$$

Wir fassen zunächst die Zielfunktion und die Nebenbedingungen zusammen (vgl. Seite 300).

Zur Lösung der Aufgabe stellen wir eine Arbeitstabelle 7.24 auf, die alle wichtigen Daten der Tabelle 7.22 enthält und gegenüber dieser Tabelle zusätzlich eine Zeile und eine Spalte für die Differenzen erhält.

Tabelle 7.24

	v_1	v_2	v_3	v_4		Zeilen- differenzen
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u>	<u>6</u>	500	1
L_2	<u>22</u>	<u>21</u>	<u>35</u>	<u>33</u>	1 000	1
L_3	<u>7</u>	<u>5</u>	<u>25</u>	<u>16</u>	1 600	2
	700	500	1 400	800		
Spalten- differenzen	15	10	18	10		

(4)	$z = 25x_{11} + 15x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 22x_{21} + 21x_{22} + 35x_{23} + 33x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 25x_{33} + 16x_{34}$	minimal
	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$	$= 500$
	$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$	$= 1\,000$
	$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$	$= 1\,600$
(2)	$x_{11} + x_{21} + x_{31}$	$= 700$
	$x_{12} + x_{22} + x_{32}$	$= 500$
	$x_{13} + x_{23} + x_{33}$	$= 1\,400$
	$x_{14} + x_{24} + x_{34}$	$= 800$
(3)	$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$	≥ 0

- a) Für jede Zeile und Spalte werden die günstigsten und die nächstgünstigen Entfernungen gesucht und daraus folgende Differenzen berechnet:

$$\begin{aligned} L_1: 7 - 6 &= 1 & L_2: 22 - 21 &= 1 & L_3: 7 - 5 &= 2 \\ V_1: 22 - 7 &= 15 & V_2: 15 - 5 &= 10 & V_3: 25 - 7 &= 18 \\ V_4: 16 - 6 &= 10 \end{aligned}$$

Diese Differenzen tragen wir in die dafür vorgesehene Zeile bzw. Spalte der Tabelle 7.24 ein.

- b) Die größte Differenz 18 gehört zur Spalte V_3 .
c) In der Spalte V_3 beträgt die günstigste Entfernung 7 km.
d) Für das ausgesuchte Feld mit der Entfernung 7 km beträgt die Liefermöglichkeit 500, der Bedarf 1100. Wir belegen das Feld mit 500 t; $x_{13} = 500$.
e) Die neue Liefermöglichkeit von L_1 ist $500 - 500 = 0$, der neue Bedarf von V_3 ist $1100 - 500 = 600$.

Nach Eintragung von $x_{13} = 500$ und der Veränderungen in der Liefermöglichkeit und im Bedarf erhalten wir Tabelle 7.25 (Zeile L_1 wird gestrichen, weil die Liefermöglichkeit Null ist).

Tabelle 7.25

	V_1	V_2	V_3	V_4		
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u> 500	<u>6</u>	0	
L_2	<u>22</u>	<u>21</u>	<u>35</u>	<u>33</u>	1 000	,1
L_3	<u>7</u>	<u>5</u>	<u>25</u>	<u>16</u>	1 600	2
	700	500	600	800		
	15	16	10	17		

- a) Es ergeben sich folgende Differenzen:

$$\begin{aligned} L_2: 22 - 21 &= 1 & L_3: 7 - 5 &= 2 \\ V_1: 22 - 7 &= 15 & V_2: 21 - 5 &= 16 \\ V_3: 35 - 25 &= 10 & V_4: 33 - 16 &= 17 \end{aligned}$$

Diese Differenzen tragen wir in Tabelle 7.25 ein.

- b) Die größte Differenz 17 gehört zur Spalte V_4 .
c) In der Spalte V_4 beträgt die günstigste Entfernung 16 km.
d) Für das ausgesuchte Feld mit der Entfernung 16 km beträgt die Liefermöglichkeit 1600, der Bedarf 800. Wir belegen das Feld mit 800 t, $x_{34} = 800$.

- e) Die neue Liefermöglichkeit von L_3 ist $1600 - 800 = 800$, der neue Bedarf von V_4 ist $800 - 800 = 0$.

Nach Eintragung von $x_{34} = 800$ und der Veränderungen in der Liefermöglichkeit und im Bedarf erhalten wir Tabelle 7.26 (Spalte V_4 wird gestrichen, weil der Bedarf Null beträgt).

Tabelle 7.26

	V_1	V_2	V_3	V_4		
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u> 500	<u>6</u>	0	
L_2	<u>22</u>	<u>21</u>	<u>35</u>	<u>33</u>	1 000	1
L_3	<u>7</u>	<u>5</u>	<u>25</u>	<u>16</u> 800	800	2
	700	500	600	0		
	15	16	10			

- a) Es ergeben sich folgende Differenzen:

$$L_2: 22 - 21 = 1 \quad L_3: 7 - 5 = 2$$

$$V_1: 22 - 7 = 15 \quad V_2: 21 - 5 = 16 \quad V_3: 35 - 25 = 10$$

Diese Differenzen tragen wir in Tabelle 7.26 ein.

- b) Die größte Differenz 16 gehört zur Spalte V_2 .
c) In der Spalte V_2 beträgt die günstigste Entfernung 5 km.
d) Für das ausgesuchte Feld mit der Entfernung 5 km beträgt die Liefermöglichkeit 800, der Bedarf 500. Wir belegen das Feld mit 500 t, $x_{32} = 500$.
e) Die neue Liefermöglichkeit von L_3 ist $800 - 500 = 300$, der neue Bedarf für V_2 ist $500 - 500 = 0$.

Nach Eintragung von $x_{32} = 500$ und der Veränderungen in der Liefermöglichkeit und im Bedarf erhalten wir Tabelle 7.27 (Spalte V_2 wird gestrichen, weil der Bedarf Null beträgt).

- a) Es ergeben sich folgende Differenzen:

$$L_2: 35 - 22 = 13 \quad L_3: 25 - 7 = 18$$

$$V_1: 22 - 7 = 15 \quad V_3: 35 - 25 = 10$$

Diese Differenzen tragen wir in Tabelle 7.27 ein.

- b) Die größte Differenz 18 gehört zur Zeile L_3 .
c) In der Zeile L_3 beträgt die günstigste Entfernung 7 km.
d) Für das ausgesuchte Feld mit der Entfernung 7 km beträgt die Liefermöglichkeit 300, der Bedarf 700. Wir belegen das Feld mit 300, $x_{31} = 300$.

Tabelle 7.27

	v_1	v_2	v_3	v_4		
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u> 500	<u>6</u>	0	
L_2	<u>22</u>	<u>21</u>	<u>35</u>	<u>33</u>	1 000	13
L_3	<u>7</u>	<u>5</u> 500	<u>25</u>	<u>16</u> 800	300	18
	700	0	600	0		
	15		10			

e) Die neue Liefermöglichkeit von L_3 ist $300 - 300 = 0$, der neue Bedarf von V_1 ist $700 - 300 = 400$.

Nach Eintragung von $x_{31} = 300$ und der Veränderungen in der Liefermöglichkeit und im Bedarf erhalten wir Tabelle 7.28 (Zeile L_3 wird gestrichen, weil die Liefermöglichkeit Null ist).

Tabelle 7.28

	v_1	v_2	v_3	v_4	
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u> 500	<u>6</u>	0
L_2	<u>22</u>	<u>21</u>	<u>35</u>	<u>33</u>	1 000
L_3	<u>7</u> 300	<u>5</u> 500	<u>25</u>	<u>16</u> 800	0
	400	0	600	0	

Es bleibt nur eine Zeile. Beide Felder der Zeile L_2 sind maximal zu belegen. Das Feld mit der Entfernung 22 km kann maximal mit 400 belegt werden. Dann reduziert sich der Bedarf von V_1 auf $400 - 400 = 0$, die Liefermöglichkeit von L_2 auf $1000 - 400 = 600$.

Nach Eintragung von $x_{21} = 400$ und der Veränderungen in der Liefermöglichkeit und im Bedarf erhalten wir Tabelle 7.29 (Spalte V_1 wird gestrichen, weil der Bedarf Null ist).

Tabelle 7.29

	v_1	v_2	v_3	v_4	
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u> 500	<u>6</u>	0
L_2	<u>22</u> 400	<u>21</u>	<u>35</u>	<u>33</u>	600
L_3	<u>7</u> 300	<u>5</u> 500	<u>25</u>	<u>16</u> 800	0
	0	0	600	0	

Das verbleibende Feld mit der Entfernung 35 km kann maximal mit 600 belegt werden. Dann reduziert sich der Bedarf von V_3 auf $600 - 600 = 0$, die Liefermöglichkeit von L_2 auf $600 - 600 = 0$. Nach Eintragung von $x_{23} = 600$ und der Veränderungen in der Liefermöglichkeit und im Bedarf erhalten wir Tabelle 7.30 (Spalte V_3 wird gestrichen, weil der Bedarf Null ist. Zeile L_2 wird gestrichen, weil die Liefermöglichkeit Null ist).

Tabelle 7.30

	v_1	v_2	v_3	v_4	
L_1	<u>25</u>	<u>15</u>	<u>7</u> 500	<u>6</u>	0
L_2	<u>22</u> 400	<u>21</u>	<u>35</u> 600	<u>33</u>	0
L_3	<u>7</u> 300	<u>5</u> 500	<u>25</u>	<u>16</u> 800	0
	0	0	0	0	

Tabelle 7.30 liefert bereits die optimale Lösung.

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 0; x_{12} = 0; x_{13} = 500; x_{14} = 0 \\
 x_{21} &= 400; x_{22} = 0; x_{23} = 600; x_{24} = 0 \\
 x_{31} &= 300; x_{32} = 500; x_{33} = 0; x_{34} = 800
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Tonnenkilometer sind

$$\begin{aligned}
 z &= 25 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 7 \cdot 500 + 6 \cdot 0 \\
 &\quad + 22 \cdot 400 + 21 \cdot 0 + 35 \cdot 600 + 33 \cdot 0 \\
 &\quad + 7 \cdot 300 + 5 \cdot 500 + 25 \cdot 0 + 16 \cdot 800 = 50\,700
 \end{aligned}$$

Somit wird die geringste Anzahl von Tonnenkilometern erreicht, wenn folgende Mengen geliefert werden:

aus dem Lager L_1 an Verbraucher V_1 0 t,
 an Verbraucher V_2 0 t,
 an Verbraucher V_3 500 t,
 an Verbraucher V_4 0 t,
 aus dem Lager L_2 an Verbraucher V_1 400 t,
 an Verbraucher V_2 0 t,
 an Verbraucher V_3 600 t,
 an Verbraucher V_4 0 t,
 aus dem Lager L_3 an Verbraucher V_1 300 t,
 an Verbraucher V_2 500 t,
 an Verbraucher V_3 0 t,
 an Verbraucher V_4 800 t.

Dieser Belieferungsplan erfordert 50 700 tkm.

Aufgaben zu 7.4.

Lösen Sie die folgenden Transportaufgaben!

1

$$\begin{aligned}
 z &= 2x_{11} + 3x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} \quad \text{minimal} \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 600 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 500 \\
 x_{11} + x_{21} &= 200 \\
 x_{12} + x_{22} &= 800 \\
 x_{13} + x_{23} &= 100 \\
 x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Benutzen Sie die folgende Rechentabelle!

<u>2</u>	<u>3</u>	<u>7</u>	600
<u>1</u>	<u>5</u>	<u>8</u>	500
200	800	100	1 100
			1 100

(L)

2

$$\begin{aligned}
 z &= 2x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23} \quad \text{minimal} \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 100 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200 \\
 x_{11} + x_{21} &= 50 \\
 x_{12} + x_{22} &= 200 \\
 x_{13} + x_{23} &= 50 \\
 x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} &\geq 0
 \end{aligned}$$

(L)

3

$$\begin{aligned}
 z &= x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 2x_{21} + 9x_{22} + 10x_{23} && \text{minimal} \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} &&& = 200 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} &&& = 300 \\
 x_{11} + x_{21} &&& = 80 \\
 x_{12} + x_{22} &&& = 220 \\
 x_{13} + x_{23} &&& = 200 \\
 x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} &&& \geq 0
 \end{aligned} \tag{L}$$

4

$$\begin{aligned}
 z &= 3x_{11} + 2x_{12} + 5x_{21} + 3x_{22} + 7x_{31} + 4x_{32} && \text{minimal} \\
 x_{11} + x_{12} &&& = 100 \\
 x_{21} + x_{22} &&& = 500 \\
 x_{31} + x_{32} &&& = 100 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} &&& = 300 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} &&& = 400 \\
 x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} &&& \geq 0
 \end{aligned} \tag{L}$$

5

Ein Handelsbetrieb bezieht eine bestimmte Ware von drei Betrieben und lagert sie in vier Lagern.

Die Liefermöglichkeiten, die Lagerkapazitäten und die Transportkosten je Einheit der Ware sind in der folgenden Tabelle gegeben. Es ist ein Belieferungsplan aufzustellen, der die niedrigsten Transportkosten erfordert.

	Lager				Liefer- möglichkeit	
	1	2	3	4		
Betrieb	1	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>9</u>	<u>28</u>	650
	2	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	100
	3	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>7</u>	<u>30</u>	1 000
Lagerkapazität	400	550	500	300	1 750	

(L)

6

Für die Belieferung von drei Baustellen mit Kies stehen vier Kiesgruben zur Verfügung. Die Kiesgrube K_1 kann für diese drei Baustellen 450 m^3 zur Verfügung stellen, die Kiesgrube K_2 200 m^3 , die Kiesgrube K_3 200 m^3 und die Kiesgrube K_4 50 m^3 . Die Baustelle B_1 benötigt 500 m^3 , die Baustelle B_2 100 m^3 , die Baustelle B_3 300 m^3 .

Die Transportkosten je Kubikmeter Kies betragen für den Transport

von der Kiesgrube K_1	zur Baustelle B_1	6 M,
	zur Baustelle B_2	11 M,
	zur Baustelle B_3	10 M,
von der Kiesgrube K_2	zur Baustelle B_1	7 M,
	zur Baustelle B_2	3 M,
	zur Baustelle B_3	4 M,
von der Kiesgrube K_3	zur Baustelle B_1	5 M,
	zur Baustelle B_2	4 M,
	zur Baustelle B_3	8 M,
von der Kiesgrube K_4	zur Baustelle B_1	10 M,
	zur Baustelle B_2	5 M,
	zur Baustelle B_3	12 M.

Es wird ein Belieferungsplan mit minimalen Transportkosten verlangt. (L)

7

Für die Zuckerversorgung von vier Großverbrauchern stehen Vorräte in vier Lagern zur Verfügung, im Lager L_1 400 t, im Lager L_2 800 t, im Lager L_3 650 t und im Lager L_4 400 t. Der Verbraucher V_1 benötigt 450 t, der Verbraucher V_2 800 t, der Verbraucher V_3 700 t und der Verbraucher V_4 300 t.

Die Entfernungen betragen

vom Lager L_1	zum Verbraucher V_1	9 km,
	zum Verbraucher V_2	25 km,
	zum Verbraucher V_3	30 km,
	zum Verbraucher V_4	5 km,
vom Lager L_2	zum Verbraucher V_1	8 km,
	zum Verbraucher V_2	20 km,
	zum Verbraucher V_3	12 km,
	zum Verbraucher V_4	6 km,
vom Lager L_3	zum Verbraucher V_1	20 km,
	zum Verbraucher V_2	4 km,
	zum Verbraucher V_3	6 km,
	zum Verbraucher V_4	30 km,
vom Lager L_4	zum Verbraucher V_1	3 km,
	zum Verbraucher V_2	10 km,
	zum Verbraucher V_3	12 km,
	zum Verbraucher V_4	15 km.

Es ist ein Belieferungsplan aufzustellen, der die geringste Zahl von Tonnenkilometern erfordert. (L)

8

In vier Standorten A_1 bis A_4 stehen leere gleichartige Waggons, die in fünf Einsatzorten B_1 bis B_5 benötigt werden.

Im Standort A_1 stehen 7, in den Standorten A_2 und A_3 je 19 und im Standort A_4 14 Waggon zur Verfügung.

Im Einsatzort B_1 werden 10 Waggon benötigt, im Einsatzort B_2 12 Waggon, im Einsatzort B_3 8 Waggon, im Einsatzort B_4 16 Waggon und im Einsatzort B_5 13 Waggon.

Die Entfernungen zwischen den Orten sind Abb. 7.5 zu entnehmen. Wie sind die Waggon zu den Einsatzorten zu leiten, damit die Transportstrecke der leeren Waggon minimal ist? (L)

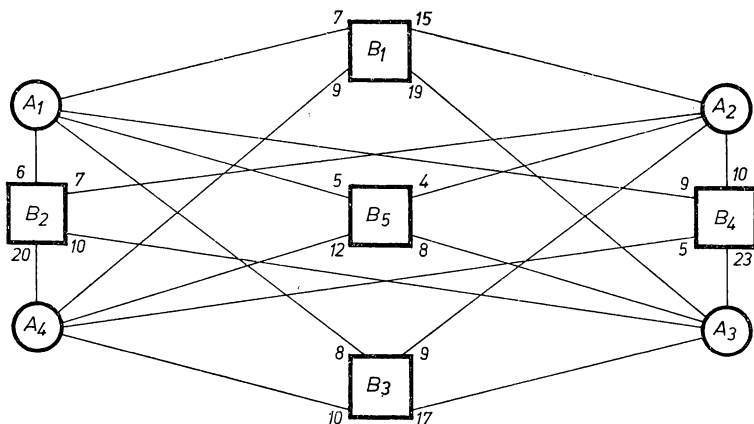


Abb. 7.5

7.5.

Verschiedene lineare Optimierungsmodelle (numerische Beispiele)

7.5.1. Optimierungsmodelle für die Produktionsplanung

a) Ein Betrieb kann fünf verschiedene Erzeugnisse herstellen, für die er vier bestimmte Einsatzgrößen (das können Maschinen, Arbeitskräfte, Material und anderes sein) benötigt. Die Fonds dieser Einsatzgrößen sind gegeben. Ferner ist bekannt, wieviel Einheiten dieser Fonds für die Produktion einer Einheit der verschiedenen Erzeugnisse benötigt werden.

Der Betrieb hat bestimmte Mindestmengen der fünf Erzeugnisse zu produzieren. Die Produktion ist außerdem durch die Absatzmöglichkeit begrenzt. Für die Produktion einer Einheit des jeweiligen Erzeugnisses ist eine Bewertung (zum Beispiel Gewinn, Preis, Arbeitszeitaufwand) gegeben. Es wird ein Produktionsplan verlangt, der bezüglich der gewählten Bewertung ein maximales Ergebnis bringt.

Im Inneren der Tabelle 7.31 stehen die Einsatznormen, das heißt die Mengen der verschiedenen Fonds, die für die Produktion einer Erzeugniseinheit benötigt werden (so besagt die 7 im Inneren der Tabelle, daß für die Herstellung einer Einheit des dritten Produkts

Tabelle 7.31

		Bedarf an den Fonds der Einsatzgrößen in Fondseinheiten je Einheit des Erzeugnisses					Fonds in Fondseinheiten
		1	2	3	4	5	
Einsatzgröße	1	2	3	2	8	2	400
	2	3	1	0	1	6	500
	3	1	4	3	4	8	800
	4	8	5	7	0	10	1 000
Mindestmenge in Mengeneinheiten							
		15	20	10	5	10	
Höchstmenge in Mengeneinheiten							
		100	50	60	80	150	
Bewertung in Bewertungseinheiten							
		7	4	8	15	20	

7 Einheiten vom Fonds der vierten Einsatzgröße gebraucht werden). Wir bezeichnen die Produktionshöhe der verschiedenen Erzeugnisse mit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Dann lautet unser mathematisches Modell:

$$(1) \quad z = 7x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 15x_4 + 20x_5 \quad \text{maximal}$$

$$(2) \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 \leq 400$$

$$3x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 6x_5 \leq 500$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 8x_5 \leq 800$$

$$8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 10x_5 \leq 1\,000$$

$$(3) \quad x_1 \geq 15$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_3 \geq 10$$

$$x_4 \geq 5$$

$$x_5 \geq 10$$

$$(4) \quad x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_3 \leq 60$$

$$x_4 \leq 80$$

$$x_5 \leq 150$$

In (1) ist unsere Zielsetzung festgelegt, daß bezüglich der gegebenen Bewertung ein Maximum erzielt werden soll.

Die Bedingungen (2) sichern, daß die Fonds nicht überschritten werden. Mit den Bedingungen (3) wird festgelegt, daß die Mindestmengen für die einzelnen Erzeugnisse eingehalten werden, während durch die Bedingungen (4) gesichert ist, daß die Absatzmöglichkeiten (Höchstmengen) berücksichtigt werden.

Im Beispiel 1 des Abschnittes 7.1. haben wir eine Vereinfachung dieses Modells (ohne Mindest- und Höchstmengen) kennengelernt.

b) Eine Volkswirtschaft kann ein Erzeugnis nach fünf verschiedenen Verfahren herstellen. Bei den einzelnen Verfahren werden bestimmte Einsatzgrößen (zum Beispiel Material) in verschiedenen Mengen benötigt. Die Einsatzgrößen stehen in begrenzter Menge zur Verfügung.

Die Herstellung einer Erzeugniseinheit nach den verschiedenen Verfahren wird unterschiedlich bewertet (zum Beispiel Kosten). Vom Erzeugnis ist eine bestimmte Anzahl von Einheiten herzustellen. Wieviel Einheiten sind nach den einzelnen Verfahren herzustellen, wenn wir bezüglich der gegebenen Bewertung (zum Beispiel Kosten) ein Minimum erreichen wollen?

Die Tabelle 7.32 enthält die Fonds der einzelnen Einsatzgrößen, die Anzahl der Fondseinheiten, die für die Herstellung einer Erzeugniseinheit bei den verschiedenen Verfahren benötigt werden, und die Bewertung für die Herstellung einer Erzeugniseinheit nach den verschiedenen Verfahren.

Tabelle 7.32

		Bedarf in Fondseinheiten beim Verfahren					Fonds in Fondseinheiten
		1	2	3	4	5	
Einsatzgröße	1	3	8	4	1	4	400
	2	7	0	5	8	3	600
	3	0	1	2	7	3	500
	4	5	3	0	2	5	800
Bewertung in Bewertungseinheiten		30	40	35	50	45	

Vom Produkt sind 125 Einheiten herzustellen.

Bezeichnen wir die Mengen, die nach den Verfahren 1 bis 5 hergestellt werden, mit $x_1, \dots, x_5$, so lautet unser mathematisches Modell:

$$(1) \quad z = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 50x_4 + 45x_5 \quad \text{minimal}$$

$$(2) \quad 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 400$$

$$7x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 \leq 600$$

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 \leq 500$$

$$5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 800$$

$$(3) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 125$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

In der Zielfunktion (1) wird zum Ausdruck gebracht, daß unsere Aufteilung auf die verschiedenen Verfahren ein Minimum bezüglich der gegebenen Bewertung bringen soll.

Die Nebenbedingungen (2) sichern, daß die Fonds der Einsatzgrößen nicht überschritten werden. Die Nebenbedingung (3) garantiert, daß

die geforderte Anzahl von Produkteinheiten hergestellt wird. Die Nichtnegativitätsbedingung (4) ist erforderlich, weil die $x_1, \dots, x_5$ Mengenangaben sind.

7.5.2. Optimierungsmodell für ein Mischungsproblem

Aus vier verschiedenen Erzeugnissen mit unterschiedlichen Eigenschaften soll durch Mischung ein Enderzeugnis hergestellt werden, das bestimmte Eigenschaften aufweist. Es soll so gemischt werden, daß das Enderzeugnis möglichst billig wird.

Zum Beispiel enthalten die vier Erzeugnisse drei verschiedene Einsatzstoffe in unterschiedlicher Menge. Im Enderzeugnis sollen diese Einsatzstoffe in einer geforderten Menge enthalten sein.

Tabelle 7.33

		Anteil der Einsatzstoffe je Einheit des Erzeugnisses				Enderzeugnis	
		1	2	3	4	Mindestmengen in Mengen- einheiten	Höchstmengen in Mengen- einheiten
Einsatz- stoffe	1	0,3	0,6	0,4	0,4	0,4	0,5
	2	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3	0,4
	3	0,3	0,1	0,1	0,4	0,2	0,4
Kosten in Geld- einheiten		10	15	20	30		

Im Inneren der Tabelle 7.33 ist verzeichnet, wie eine Einheit des jeweiligen Erzeugnisses aus den drei Einsatzstoffen zusammengesetzt ist. In den beiden letzten Spalten sind die Eigenschaften des Enderzeugnisses formuliert.

Bezeichnen wir die Mengen der vier Erzeugnisse, die in die Mischung eingehen, mit x_1, x_2, x_3, x_4 , so lautet unser mathematisches Modell:

$$(1) \quad z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 \quad \text{minimal}$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 0,3x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 \geq 0,4$$

$$0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,2x_4 \geq 0,3$$

$$0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,4x_4 \geq 0,2$$

$$(4) \quad 0,3x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 \leq 0,5$$

$$0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,2x_4 \leq 0,4$$

$$0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,4x_4 \leq 0,4$$

$$(5) \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

In (1) ist die Zielsetzung formuliert, daß unser Enderzeugnis möglichst billig sein soll.

In (2) kommt zum Ausdruck, daß wir eine Einheit vom Enderzeugnis betrachten.

(3) sichert, daß im Enderzeugnis bestimmte Mindestmengen der Einsatzstoffe enthalten sind, während durch (4) gesichert wird, daß die Einsatzstoffe bestimmte Höchstmengen nicht überschreiten. Die Nichtnegativitätsbedingung (5) müssen wir aufnehmen, weil x_1, x_2, x_3, x_4 Mengenangaben sind. Dieses Modell tritt in der Aufgabe 8 des Abschnittes 7.2. bei der Gasmischung auf. Es kann aber auch in der Ernährungswirtschaft bzw. Futterwirtschaft angewandt werden.

7.5.3. Das geschlossene Transportmodell

Von drei Lieferanten ist an drei Verbraucher ein einheitliches Erzeugnis zu liefern. Der Bedarf der drei Verbraucher stimmt mit der Liefermöglichkeit der drei Lieferanten überein. Wie ist zu liefern, damit die Transportkosten minimal werden?
Die Transportkosten je Erzeugniseinheit, die Liefermöglichkeiten und der Bedarf sind in der Tabelle 7.34 gegeben.

Tabelle 7.34

		Verbraucher			Liefermöglichkeiten in Mengeneinheiten
		1	2	3	
Lieferant	1	$\frac{10}{x_{11}}$	$\frac{7}{x_{12}}$	$\frac{3}{x_{13}}$	60
	2	$\frac{2}{x_{21}}$	$\frac{1}{x_{22}}$	$\frac{5}{x_{23}}$	80
	3	$\frac{8}{x_{31}}$	$\frac{7}{x_{32}}$	$\frac{6}{x_{33}}$	100
Bedarf in Mengen- einheiten		70	110	60	240

Werden die Liefermengen mit $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34}$ bezeichnet, so lautet unser mathematisches Modell:

(1)

$$z = 10x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 8x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33}$$

minimal

(2)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 100$$

(3)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$$

(4)

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

In der Zielfunktion (1) wird zum Ausdruck gebracht, daß die Transportkosten minimal sein sollen. Die Nebenbedingungen (2) sichern, daß die Liefermöglichkeit eingehalten wird, während die Nebenbedingungen (3) die Bedarfsbefriedigung sichern. Die Nichtnegativitätsbedingungen (4) sind notwendig, weil die Variablen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34}$ Liefermengen sind. Dieses Modell haben wir im Abschnitt 7.4. ausführlich behandelt.

7.5.4. Das offene Transportmodell

Wir sprechen vom offenen Transportmodell, wenn der Bedarf der Verbraucher und die Liefermöglichkeiten der Lieferanten nicht übereinstimmen. Dieser Fall liegt in dem durch Tabelle 7.35 gegebenen Beispiel vor.

Tabelle 7.35

		Verbraucher			Liefermöglichkeiten in Mengeneinheiten
		1	2	3	
Lieferant	1	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$ x_{11}	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ x_{12}	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$ x_{13}	80
	2	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline \end{array}$ x_{21}	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$ x_{22}	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ x_{23}	90
	3	$\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline \end{array}$ x_{31}	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ x_{32}	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ x_{33}	100
Bedarf in Mengen- einheiten		70	110	60	270 240

Benutzen wir die Bezeichnung aus dem Abschnitt 7.5.3., so lautet unser mathematisches Modell:

- (1) $z = 10x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 8x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} = \text{minimal}$
- (2) $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 80$
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 90$
 $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 100$
- (3) $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70$
 $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110$
 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$
- (4) $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$

(1), (3) und (4) haben die gleiche Bedeutung wie im Abschnitt 7.5.3. Die Nebenbedingungen (2) sichern, daß die Liefermöglichkeiten nicht überschritten werden. Eine volle Ausnutzung der Liefermöglichkeiten wird nicht gefordert. Durch Einführung eines „gedachten“ Verbrauchers kann das offene Transportmodell auf ein geschlossenes Transportmodell zurückgeführt werden.

7.5.5. Das Transport-Produktions-Modell

Wir gehen vom Beispiel im Abschnitt 7.5.4. aus. Zusätzlich sind jetzt die Produktionskosten je Einheit des Produkts für die drei Lieferanten gegeben.

Tabelle 7.36

	Verbraucher			Liefer- möglichkeiten in Mengen- einheiten	Produk- tionskosten je Mengen- einheit
	1	2	3		
Lieferant 1	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$ x_{11}	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ x_{12}	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$ x_{13}	80	4
2	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline \end{array}$ x_{21}	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$ x_{22}	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ x_{23}	90	3
3	$\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline \end{array}$ x_{31}	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ x_{32}	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ x_{33}	100	5
Bedarf in Mengen- einheiten	70	110	60	270 240	

Es wird eine Belieferung der Verbraucher gefordert, die die Summe aus Transport- und Produktionskosten minimal gestaltet. Mit der Bezeichnung aus Abschnitt 7.5.3. lautet unser mathematisches Modell:

(1)
$$\begin{aligned}
z &= 10x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 8x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} \\
&\quad + 4(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 3(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 5(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\
&= 14x_{11} + 11x_{12} + 7x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} + 13x_{31} + 12x_{32} + 11x_{33} \quad \text{minimal}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 80 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 90 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 100
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 70 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 110 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 60
\end{aligned}$$

(4)
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

Hier haben die Bedingungen (2), (3), (4) die gleiche Bedeutung wie in Abschnitt 7.5.4. In der Zielfunktion sind die Transport- und Produktionskosten erfaßt.
Durch Zusammenfassung der Kosten für Produktion und Transport kann dieses Problem auf das offene Transportmodell zurückgeführt werden.

7.5.6. Das Optimierungsmodell für ein Transportproblem mit Beschränkungen

Von drei Lieferanten ist an drei Verbraucher ein einheitliches Erzeugnis zu liefern. Der Bedarf stimmt mit der Liefermöglichkeit überein. Für die Lieferungen der einzelnen Lieferanten an die verschiedenen Verbraucher sind Höchstgrenzen festgelegt, die nicht überschritten werden dürfen (diese Höchstgrenzen können zum Beispiel durch die Transportmöglichkeiten bestimmt sein). Wie ist zu liefern, damit die Transportkosten minimal werden? Die Transportkosten je Erzeugniseinheit, die Liefermöglichkeiten und der Bedarf sind in der Tabelle 7.37 gegeben.

Tabelle 7.37

		Verbraucher			Liefermöglichkeiten in Mengeneinheiten
		1	2	3	
Lieferant	1	$\frac{10}{x_{11}}$	$\frac{7}{x_{12}}$	$\frac{3}{x_{13}}$	60
	2	$\frac{2}{x_{21}}$	$\frac{1}{x_{22}}$	$\frac{5}{x_{23}}$	80
	3	$\frac{8}{x_{31}}$	$\frac{7}{x_{32}}$	$\frac{6}{x_{33}}$	100
Bedarf in Mengeneinheiten		70	110	60	240

Die Höchstgrenzen für die einzelnen Lieferungen enthält Tabelle 7.38.

Tabelle 7.38

		Höchstmengen in Mengeneinheiten für die Belieferung der Verbraucher		
		1	2	3
Lieferant	1	50	100	30
	2	30	10	40
	3	60	50	10

Benutzen wir für die Liefermengen die Bezeichnung, die in Tabelle 7.37 eingetragen ist, so lautet unser mathematisches Modell:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & z = 10x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 5x_{23} + 8x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} \quad \text{minimal} \\
 (2) & \begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} & & = 60 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 80 \\
 & & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 100
 \end{array} \\
 (3) & \begin{array}{rcl}
 x_{11} & + & x_{21} + x_{31} = 70 \\
 & x_{12} & + x_{22} + x_{32} = 110 \\
 & & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60
 \end{array} \\
 (4) & \begin{array}{rcl}
 x_{11} & & \leq 50 \\
 & x_{12} & \leq 100 \\
 & & x_{13} \leq 30 \\
 & & & x_{21} \leq 30 \\
 & & & & x_{22} \leq 10 \\
 & & & & & x_{23} \leq 40 \\
 & & & & & & x_{31} \leq 60 \\
 & & & & & & & x_{32} \leq 50 \\
 & & & & & & & & x_{33} \leq 10
 \end{array} \\
 (5) & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0
 \end{array}$$

In der Zielfunktion (1) wird zum Ausdruck gebracht, daß die Transportkosten minimal sein sollen.

Die Nebenbedingungen (2) sichern die Einhaltung der Liefermöglichkeiten, und die Nebenbedingungen (3) sichern die Bedarfsbefriedigung. Durch die Nebenbedingungen (4) werden die Höchstgrenzen für die einzelnen Liefermengen erfaßt.

(5) enthält die Nichtnegativitätsbedingungen für die Liefermengen. Vergleichen wir dieses Modell mit dem Modell in Abschnitt 7.5.3., so stellen wir fest, daß (1), (2), (3) und (5) völlig mit dem Modell in Abschnitt 7.5.3. übereinstimmen. Nur unsere Höchstgrenzen für die Liefermengen, die in (4) erfaßt sind, erweitern das Modell in Abschnitt 7.5.3. Auch die Modelle in den Abschnitten 7.5.4. und 7.5.5. lassen sich durch die Aufnahme von Höchstgrenzen für die Liefermengen erweitern.

Um eine Lösung des in diesem Abschnitt beschriebenen Modells zu finden, können wir nicht ohne weiteres das Lösungsverfahren anwenden, das wir für die Lösung der Transportaufgabe angegeben haben. Es ist eine geringfügige Abänderung des Lösungsverfahrens notwendig, um damit auch Transportaufgaben mit Beschränkungen lösen zu können.

7.5.7. Optimierungsmodell für das Zuordnungsproblem als spezielles Transportproblem

Drei Einsatzkollektive befinden sich in unterschiedlichen Standorten. Die Kollektive sollen in drei Einsatzorten Arbeiten übernehmen. (Die einzelnen Kollektive sind geschlossen einzusetzen.) Wie sind die Kollektive auf die Einsatzorte zu verteilen, damit der Transportweg von den Standorten zu den Einsatzorten minimal wird? Die Entfernungen sind in der Tabelle 7.39 gegeben.

Tabelle 7.39

		Einsatzort		
		1	2	3
Standort	1	$\frac{2}{x_{11}}$	$\frac{8}{x_{12}}$	$\frac{6}{x_{13}}$
	2	$\frac{4}{x_{21}}$	$\frac{3}{x_{22}}$	$\frac{10}{x_{23}}$
	3	$\frac{7}{x_{31}}$	$\frac{5}{x_{32}}$	$\frac{3}{x_{33}}$

Bezeichnen wir die Anzahl der Kollektive, die von den einzelnen Standorten zu den verschiedenen Einsatzorten fahren, mit x_{11} , x_{12} , $\dots$, x_{33} , wie es Tabelle 7.39 zeigt, so lautet unser mathematisches Modell:

$$\begin{array}{ll}
(1) & z = 2x_{11} + 8x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 10x_{23} + 7x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} \quad \text{minimal} \\
(2) & \begin{array}{rcl}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & & = 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 1 \\
& & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1
\end{array} \\
(3) & \begin{array}{rcl}
x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & = & 1 \\
& x_{12} & & + & x_{22} & & + & x_{32} & = & 1 \\
& & x_{13} & & + & x_{23} & & + & x_{33} & = & 1
\end{array} \\
(4) & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \quad \geq 0 \\
(5) & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \quad \text{ganzzahlig}
\end{array}$$

In der Zielfunktion (1) kommt zum Ausdruck, daß der Transportweg minimal sein soll.

Die Nebenbedingungen (2) sagen aus, daß von den einzelnen Standorten jeweils ein Kollektiv abreist. Die Nebenbedingungen (3) sichern, daß in jedem Einsatzort genau ein Kollektiv arbeitet.

Die Nichtnegativitätsbedingungen (4) sind notwendig, weil mit $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33}$ die Anzahl der zugeordneten Kollektive bezeichnet wird.

Die Tatsache, daß die Kollektive nicht auseinandergerissen werden dürfen, kommt in der Nebenbedingung (5) zum Ausdruck.

Die Variablen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33}$ können nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Dieses Modell für das Zuordnungsproblem ist ein spezielles Transportmodell.

Scherzaufgabe

Ein Vater bringt drei verschiedene Spielzeuge für seine drei Kinder nach Hause. Nun stellt sich heraus, daß sich die Interessen der Kinder überschneiden, sie möchten zum Teil das gleiche Spielzeug. Wie soll der Vater die Spielzeuge verteilen? Er stellt eine Interessenskala auf, indem er jedem Kind für das Spielzeug mit dem größten

Interesse die Nummer 1 gibt, für das Spielzeug, das als nächstes interessiert, die Nummer 2 und für das verbleibende Spielzeug die Nummer 3. Die Interessenskala ist in der Tabelle 7.40 festgehalten. Mit Hilfe dieser Interessenskala stellt der Vater ein Optimierungsmodell für das Zuordnungsproblem auf.

Tabelle 7.40

Kind	Bewertung für Spielzeug		
	1	2	3
1	3	2	1
2	1	2	3
3	1	3	2

Mit der Zielfunktion

$$z = 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} \quad \min.$$

will der Vater die Interessen der Kinder soweit wie möglich berücksichtigen. Im Idealfalle wäre $z = 3$; dann würde jedes Kind das beliebteste Spielzeug erhalten. Das ist in unserer Aufgabe nicht möglich.

Im Falle $z = 9$ wären die Interessen der Kinder am schlechtesten berücksichtigt (Kind 1 Spielzeug 1, Kind 2 Spielzeug 3, Kind 3 Spielzeug 2). Für unser Beispiel ist die beste Lösung für $z = 4$ gegeben, Kind 1 erhält Spielzeug 3, Kind 2 das Spielzeug 2 und Kind 3 das Spielzeug 1.

Lösungen

Lösungen zu 1.3.

1

- a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
b) $b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$
c) $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$
d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$
e) $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$

2

- a) $\sum_{i=1}^6 z_i$ b) $\sum_{i=1}^5 k_i l_i$ c) $\sum_{i=1}^7 \frac{c_i}{d_i}$ d) $\sum_{i=1}^4 (a_i + b_i)^2$

3

- a) $\frac{177}{5} = 35,4$ b) $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

4

- a) $\sqrt{\frac{1658}{24}} \approx 8,31$ b) $\sqrt{\frac{3001}{14}} \approx 14,6$

5

- a) $z_{1j} + z_{2j} + z_{3j} + z_{4j} + z_{5j} + z_{6j} + z_{7j} + z_{8j} + z_{9j} + z_{10j}$
b) $z_{i1} + z_{i2} + z_{i3} + z_{i4} + z_{i5} + z_{i6} + z_{i7} + z_{i8} + z_{i9}$
c) $c_{1j}x_{1j} + c_{2j}x_{2j} + c_{3j}x_{3j} + c_{4j}x_{4j} + c_{5j}x_{5j}$
d) $c_{i1}x_{i1} + c_{i2}x_{i2} + c_{i3}x_{i3} + c_{i4}x_{i4} + c_{i5}x_{i5} + c_{i6}x_{i6} + c_{i7}x_{i7}$

6

- a) $\sum_{i=1}^5 b_{1i}$ b) $\sum_{j=1}^6 c_{3j}$ c) $\sum_{i=1}^7 d_{i2}$ d) $\sum_{j=1}^5 k_{1j}y_{1j}$

7

- a) $z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{31} + z_{32} + z_{33} + z_{34}$
- b) $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45}$
- c) $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{41}x_{41} + c_{42}x_{42} + c_{43}x_{43} + c_{51}x_{51} + c_{52}x_{52} + c_{53}x_{53}$

8

- a) $\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 x_{ij}$
- b) $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 c_{ij}y_{ij}$

Lösungen zu 1.5.**1**

- a) $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$
- b) $b_4 \cdot b_5 \cdot b_6 \cdot b_7 \cdot b_8 \cdot b_9 \cdot b_{10}$
- c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2$
- d) $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$
- e) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$
- f) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

2

- a) $\prod_{i=1}^6 z_i$
- b) $\prod_{i=1}^5 (k_i \cdot l_i)$
- c) $\prod_{i=1}^7 \frac{c_i}{d_i}$
- d) $\prod_{i=1}^4 (a_i + b_i)$
- e) $\prod_{i=1}^5 (a_i + b_i)$

3

- a) $\sqrt[5]{2^{20}} = 2^4 = 16$
- b) $\sqrt[4]{2^{-24}} = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0,125$

4

- a) $z_{1j} \cdot z_{2j} \cdot z_{3j} \cdot z_{4j} \cdot z_{5j} \cdot z_{6j} \cdot z_{7j} \cdot z_{8j}$
- b) $z_{i1} \cdot z_{i2} \cdot z_{i3} \cdot z_{i4} \cdot z_{i5} \cdot z_{i6}$
- c) $(a_{1j} \cdot x_{1j}) \cdot (a_{2j} \cdot x_{2j}) \cdot (a_{3j} \cdot x_{3j}) \cdot (a_{4j} \cdot x_{4j})$
- d) $(a_{i2} \cdot x_{i2}) \cdot (a_{i3} \cdot x_{i3}) \cdot (a_{i4} \cdot x_{i4}) \cdot (a_{i5} \cdot x_{i5}) \cdot (a_{i6} \cdot x_{i6})$
- e) $(c_{1j} \cdot y_0) \cdot (c_{2j} \cdot y_1) \cdot (c_{3j} \cdot y_2) \cdot (c_{4j} \cdot y_3) \cdot (c_{5j} \cdot y_4)$

5

- a) $\prod_{j=1}^5 b_{1j}$
- b) $\prod_{i=1}^4 c_{i3}$
- c) $\prod_{i=1}^3 (k_{i2} \cdot d_{i2})$
- d) $\prod_{i=2}^5 (k_i \cdot y_{i-1}) \prod_{i=1}^4 k_{i+1} y_i$

**Lösungen
zu 2.2**

- 1**
2 062 000 M
- 2**
131 Personen
- 3**
Lohngruppe 4,7
- 4**
584,97 M
- 5**
b) 0,794
d) 43 226 M/Std.
- 6**
475,62 kWh/1 000 M
- 7**
174,4 dt/ha
- 8**
a) 3,35 M/St.
b) 6 200 St.

**Lösungen
zu 2.3.**

- 1**
12,2 %
- 2**
a) 52,80 M
b) 0,098 9 oder 9,89 %
- 3**
a) $10,67 \cdot 10^3$ M
b) 0,1 oder 10 %
- 4**
1,28
- 5**
192 010 M
- 6**
a) 1,200 9
b) 0,255 oder 25,5 %

**Lösungen
zu 2.4.**

- 4**
b) 73,03 M/Std.

- 9**
470 000 M
- 10**
85,6 Arbeitskräfte

- 11**
a) 105,46 %
b) 103,51 %

- 12**
a) 103,3 %
b) 102,3 %

- 13**
119,6 %

- 14**
104,3 %

- 15**
b) 1,017 13 oder 101,7 %
c) 13,285 Mill. Valutamark

- 16**
a) 11 400 t

- 7**
a) 21,01 M
b) 0,035 9 oder 3,6 %

- 8**
a) 8,59 dt/ha
b) 0,049 oder 4,9 %

- 9**
a) 1,962 %
b) 0,018 6 oder 1,86 %

- 10**
a) 3,21 %
b) 5,2 Mill. Valutamark

- 8**
b) $\frac{a_2}{a_0}$ oder $\frac{a_0}{a_2}$

11

- a) 111,35 %
 b) Jahr 0: 52,910 Mill. M
 1: 55,556 Mill. M
 2: 55,000 Mill. M
 3: 55,000 Mill. M
 4: 56,650 Mill. M
 5: 58,916 Mill. M

12

- a) 1,026
 b) 0,933; 0,958; 1,00
 c) 1,067; 0,833; 1,15
 d) 0,966

13

- a) 0,867; 1,167; 0,931; 1,0124
 b) 1,125; 0,75; 1,133; 0,952
 c) 0,989
 d) 0,977
 e) 1,012
 f) $-413 = -840 + 427$

**Lösungen
zu 2.5.**

1

- b) $y = 47,6 + 3,365x$
 c) $y_1 = 51,0$
 $y_2 = 54,3$
 $y_3 = 57,7$
 $y_4 = 60,1$
 $y_5 = 64,4$
 $y_6 = 67,8$
 $y_7 = 71,2$
 $y_8 = 74,5$
 $y_9 = 77,9$
 $y_{10} = 81,3$
 $y_{11} = 84,6$

2

- b) $y = 572,1 + 8,85x$
 c) 510,1
 527,8
 545,5
 563,2
 581,0
 598,7
 616,4
 634,1

14

- a) 0,971
 b) 0,938
 c) 0,966

15

- a) 1,066; 0,957; 1,143; 0,98
 b) 1,039
 c) 23 670,— M

16

- a) 1,126 oder 112,6 %
 b) 1,057 oder 105,7 %

17

- a) 5,56 Jahre; 5,46 Jahre
 b) 0,982 oder 98,2 %

3

- b) $y = 1\,341,6 + 75,3x$
 c) 965,1
 1 115,7
 1 266,3
 1 416,9
 1 567,5
 1 718,1

4

- b) $y = 2\,059,4 + 11,5x$
 c) 1 886,9
 1 909,9
 1 932,9
 1 955,9
 1 978,9
 2 001,9
 2 024,9
 2 047,9
 2 070,9
 2 093,9
 2 116,9
 2 139,9
 2 162,9
 2 185,9
 2 208,9
 2 231,9

5

b) $y = 116,1 + 3,3x$

c) 99,6

106,2

112,8

119,4

126,0

132,6

6

b) $64,14 + 7,46 + 0,89x^2$

c) $y_{-3} = 43,77 \text{ St./Std.}$

$y_{-2} = 52,78 \text{ St./Std.}$

$y_{-1} = 57,57 \text{ St./Std.}$

$y_0 = 64,14 \text{ St./Std.}$

$y_1 = 72,49 \text{ St./Std.}$

$y_2 = 82,64 \text{ St./Std.}$

$y_3 = 94,53 \text{ St./Std.}$

7

b) $y = 23,41 + 4,09 + 0,33x^2$

c) $y_{-7} = 10,95 \text{ Mill. M}$

$y_{-5} = 11,21 \text{ Mill. M}$

$y_{-3} = 14,11 \text{ Mill. M}$

$y_{-1} = 19,65 \text{ Mill. M}$

$y_1 = 27,83 \text{ Mill. M}$

$y_3 = 38,65 \text{ Mill. M}$

$y_5 = 52,11 \text{ Mill. M}$

$y_7 = 68,22 \text{ Mill. M}$

d) $y_9 = 86,77 \text{ Mill. M}$

$y_{11} = 108,33 \text{ Mill. M}$

**Lösungen
zu 3.2.****1**

a) $+2 < +4 \text{ oder } +4 > +2$

b) $-2 > -4 \text{ oder } -4 < -2$

c) $+3 > -4 \text{ oder } -4 < +3$

d) $-3 < +4 \text{ oder } +4 > -3$

3

$a > b$

4

a) $2x_1 - 5x_2 = -14$

$3x_1 + x_2 = 13$

b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

5

a)
$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

6

Mit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ soll gelten $\mathbf{x} > \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

7

Mit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ soll gelten $\mathbf{x} < \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

8

Mit $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ soll gelten $y \geq \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$

9

Mit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ muß gelten

- a) $x > 0$
- b) $x \geq 0$
- c) $x < 0$
- d) $x \leq 0$

10

Mit $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$ muß gelten $\begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} < z \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 100 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$

11

$$t \leq f$$

12

$$m \leq x \leq h$$

13

$$t \leq f$$

$$x \geq 0$$

14

a) $A < \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 & 0 \\ 6 & -7 & 3 & 0,5 \\ 2 & -10 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A \geq \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 0 \\ 10 & 3 & 17 & 12 \\ 5 & \pi & 0,7 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & -10 & 0 \\ 15 & -15 & 25 & -11 \end{bmatrix}$

15

a) $A > 0$

c) $A < 0$

b) $A \geq 0$

d) $A \leq 0$

Lösungen zu 3.3.1.

1

a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 15 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 15 & 6 \\ 3 & 2 & 9 \\ 7 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

- c) $\mathbf{A}$ ist die transponierte Matrix von $\mathbf{B}$ bzw.
 $\mathbf{B}$ ist die transponierte Matrix von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 10 & -\frac{1}{3} \\ 7 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$$

(m, n) (n, m)

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{K}^T = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{k}_m]$$

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \mathbf{s}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n^T \end{bmatrix}$$

Lösungen zu 3.3.2.

1

$$\begin{aligned} \text{a) } [\mathbf{a} + \mathbf{b}]^T &= [-4 \quad 8 \quad -4, 5] \\ \text{b) } [\mathbf{a} + \mathbf{b}]^T &= [4,5 \quad -5,2 \quad 10] \\ \text{c) } [\mathbf{a} + \mathbf{b}]^T &= \left[2 \quad 0 \quad -\frac{9}{4} \quad \frac{16}{5} \right] \end{aligned}$$

2

Ungleiche Anzahl von Komponenten.

3

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 20 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 17 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

4

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4 = \mathbf{d} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{b}_1^T = [2x_1 \quad x_1 \quad -x_1]; \quad \mathbf{b}_2^T = [-5x_2 \quad 6x_2 \quad 2x_2]$$

$$\mathbf{b}_3^T = [3x_3 \quad x_3 \quad -7x_3]; \quad \mathbf{b}_4^T = [-x_4 \quad 5x_4 \quad 3x_4]$$

$$\mathbf{d}^T = [70 \quad 90 \quad 60]$$

5

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 7x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 500 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 600 \end{array} \right\}$$

6

$$\begin{array}{l} \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 \leq \mathbf{f} \\ \mathbf{x}^T \geq \mathbf{o}^T \end{array}$$

7

$$\text{a) } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & -3 \\ 11 & -3 & 0 & 6 \\ 38 & 25 & 20 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 22 & 4 \end{bmatrix}$$

8

Die Matrizen haben ungleiche Zeilenzahlen.

9

$$\text{a) } \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 400 & 450 & 350 & 300 & 300 \\ 770 & 700 & 700 & 1050 & 1500 \\ 550 & 850 & 750 & 500 & 310 \end{bmatrix}$$

Lösungen zu 3.3.3.

1

$$\text{a) } \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = [-5 \ 2 \ 3]; \quad \mathbf{b}^T - \mathbf{a}^T = [5 \ -2 \ -3]$$

$$\text{b) } \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}^T - \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{o} - \mathbf{b} = -\mathbf{b}; \quad \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{o} = \mathbf{b}$$

$$\text{d) } \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{o} = \mathbf{a}; \quad \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{o} - \mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

2

$$\text{a) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -17 & -9 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -19,4 & 15 & -27 & 64,5 \\ 31 & 2,2 & -130 & 2,4 \\ -16,1 & 7,5 & -10,2 & 1,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19,4 & -15 & 27 & -64,5 \\ -31 & -2,2 & 130 & -2,4 \\ 16,1 & -7,5 & 10,2 & -1,5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4,7 & 18,6 \\ 9,6 & -0,1 \\ 2,8 & 9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4,7 & -18,6 \\ -9,6 & 0,1 \\ -2,8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

$$\text{e) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{B}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\text{f) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\text{h) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\text{i) } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

3

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ haben ungleiche Zeilenzahlen:

4

$$\text{a) } \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{Z}_1 - \mathbf{A}_1$$

$$\text{b) } \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{Z}_1 - \mathbf{A}_1 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{A}_2$$

$$\text{c) } \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 330 & 0 \\ 200 & 0 & 300 & 200 \\ 40 & 1090 & 440 & 200 \\ 0 & 100 & 650 & 200 \\ 300 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 160 & 90 \\ 0 & 250 & 340 & 100 \\ 90 & 280 & 90 & 0 \\ 0 & 250 & 350 & 50 \\ 380 & 50 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

5

$$\text{a) } \mathbf{L}_0 + \mathbf{Z} = \mathbf{L}_1$$

$$\text{b) } \mathbf{Z} = \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 300 & 400 \\ 450 & 0 & 450 & 750 \\ 100 & 450 & 120 & 0 \\ 100 & 680 & 0 & 150 \\ 960 & 450 & 550 & 150 \end{bmatrix}$$

6

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}$$

7

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}$$

8

a) $\mathbf{x} = \mathbf{b}$

b) $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{n} + \mathbf{m}$

9

a) $\mathbf{X} = \mathbf{N}$

b) $\mathbf{X} = \mathbf{K} + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{K}$

10

$\mathbf{x} \leq \mathbf{c}$

11

$\mathbf{X} \leq \mathbf{D}$

12

a) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$

c) $\mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$

b) $\mathbf{x} = \mathbf{o} - \mathbf{c} = -\mathbf{c}$

d) $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$

13

a) $\mathbf{X} = \mathbf{M}$

c) $\mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

b) $\mathbf{X} = \mathbf{0} - \mathbf{N} = -\mathbf{N}$

d) $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$

14

a) $\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

e) $\mathbf{X} \leq \mathbf{B}$

b) $\mathbf{x} \leq \mathbf{o} - \mathbf{c} = -\mathbf{c}$

f) $\mathbf{X} \leq \mathbf{0} - \mathbf{D} = -\mathbf{D}$

c) $\mathbf{x} \leq \mathbf{d} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$

g) $\mathbf{X} \leq \mathbf{F} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{F}$

d) $\mathbf{x} \leq \mathbf{d} - \mathbf{b}$

h) $\mathbf{X} \leq \mathbf{F} - \mathbf{B}$

**Lösungen
zu 3.3.4.****1**

a) $\alpha \mathbf{a}^T = [12 \quad -4 \quad 40]$

c) $\alpha \mathbf{o} = \mathbf{o}$

b) $\alpha \mathbf{a}^T = \left[-\frac{2}{3} \quad 0 \quad -\frac{1}{12} \quad 2 \right]$

d) $\alpha \mathbf{a} = \mathbf{o}$

2

$3\mathbf{x} \leq 40$

$4\mathbf{x} \leq 50$

$2\mathbf{x} \leq 24$

3

$2x_1 + x_2 = 10$

$-3x_1 + 4x_2 = 20$

4

$\mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{d}$

5

$\mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_3 + \mathbf{a}_4 \mathbf{x}_4 \geq \mathbf{d}$

6

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{z}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{z}_3 \mathbf{x}_3 &\leq \mathbf{f} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{o} \end{aligned}$$

7

$\mathbf{a} = \mathbf{f} - \mathbf{x}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_3 \mathbf{z}_3$

8

$$\text{a) } \alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 & 15 \\ 3 & 12 & 18 & 27 \\ -9 & 0 & 24 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & 10 & 15 & -5 & 20 \\ 1,5 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 700 & 1 & -25 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & \frac{7}{30} \\ \frac{1}{18} & -\frac{7}{66} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \alpha \mathbf{A} = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \text{e) } \alpha \mathbf{A} = \mathbf{0} \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\text{f) } \alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

9

$$\text{a) } \mathbf{A} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 13 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 8 & 18 & 15 \\ -9 & 0 & 16 \\ -6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 30 & 24 & 1360 \\ -21 & 1470 & 10 \\ 0 & -1 & 60 \end{bmatrix}$$

10

$$\text{a) } \mathbf{B} = 18 \mathbf{A}$$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 54 & 108 & 144 & 36 \\ 90 & 18 & 108 & 162 \\ 54 & 72 & 180 & 36 \\ 162 & 198 & 360 & 90 \\ 0 & 54 & 108 & 36 \end{bmatrix}$$

11

$$\text{a) } 5 \mathbf{A} + 3 \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_0$$

b) Bedingung nicht verletzt

12

$$\mathbf{x} = \beta \cdot \mathbf{a}$$

13

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{D}$$

14

a) $\mathbf{x} = -2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$

b) $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

15

$\mathbf{x} \leq 3\mathbf{b}$

16

a) $\mathbf{x} \leq \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{4}{3}\mathbf{a}$

b) $\mathbf{x} \leq -6\mathbf{a}$

17

a) $\mathbf{X} = \frac{1}{\gamma}\mathbf{L}$

b) $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

c) $\mathbf{X} = -\frac{3}{2}\mathbf{A} + \frac{5}{4}\mathbf{B}$

d) $\mathbf{X} = -4,5\mathbf{B}$

e) $\mathbf{X} = -1,075\mathbf{A} + 0,925\mathbf{B}$

18

$\mathbf{X} \geq \frac{1}{\alpha}\mathbf{B} \quad \text{für } \alpha > 0$

$\mathbf{X} \leq \frac{1}{\alpha}\mathbf{B} \quad \text{für } \alpha < 0$

19

a) $\mathbf{X} < \frac{1}{\gamma}\mathbf{L} \quad \text{für } \gamma > 0$

$\mathbf{X} > \frac{1}{\gamma}\mathbf{L} \quad \text{für } \gamma < 0$

b) $\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad \text{für } \gamma > 0$

$\mathbf{X} \leq \mathbf{0} \quad \text{für } \gamma < 0$

c) $\mathbf{X} \leq \frac{2}{3}\mathbf{A} + \frac{5}{6}\mathbf{B}$

d) $\mathbf{X} \leq -\frac{13}{8}\mathbf{B}$

e) $\mathbf{X} < \frac{3}{4}\mathbf{B} + \frac{16}{7}\mathbf{A}$

**Lösungen
zu 3.3.5.****1**

a) $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 74$

c) $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

b) $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \frac{17}{2}$

d) $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$

2

$5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$

3

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 100$

4

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 20 \end{aligned}$$

5

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 &> 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &> 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &> 40 \end{aligned} \right\}$$

6

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 15x_1 - 15x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 50 \\ x_1 - 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

7

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\leq 180 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 240 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 300 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 150 \end{aligned} \right\}$$

8

$$\begin{bmatrix} t_1^T x \\ t_2^T x \\ t_3^T x \end{bmatrix} \leq f; \quad x \geq 0; \quad s = p^T x$$

9

Mit $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$
gilt $x^T s \geq 400; \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 400)$

Lösungen zu 3.3.6.

1

a) $Ax = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$

d) $Ax = Ex = x$

b) $Ax = \begin{bmatrix} -100 \\ -70 \\ 540 \end{bmatrix}$

e) $Ax = 0x = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $Ax = \begin{bmatrix} 379 \\ 202 \end{bmatrix}$

f) $Ax = Ao = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

g) $Ax = As = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} \end{bmatrix}$

2

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 40 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 60 \end{aligned} \right\}$$

3

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 400 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 600 \\ -2x_1 + 3x_3 &\leq 200 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 500 \end{aligned} \right\}$$

4

$$\text{Mit } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{gilt } Ax = d$$

5

$$\text{Mit } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{gilt } Ax > d$$

6

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 1\,200 \\ 1\,500 \\ 1\,900 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } Ax \leq f$$

7

$$\text{a) } y^TB = [4 \ 34 \ 45 \ 132]$$

$$\text{b) } y^TB = \left[\frac{13}{4} \quad \frac{7}{12} \quad -\frac{37}{12} \right]$$

$$\text{c) } y^TB = y^T \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = [10 \ 360 \ -30]$$

$$\text{d) } y^TB = y^TE = y^T$$

$$\text{e) } y^TB = y^T0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\text{f) } y^TB = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\text{g) } y^TB = s^TB = [b_{11} + b_{21} + b_{31}; \ b_{12} + b_{22} + b_{32}]$$

8

$$\left. \begin{array}{l} 4y_1 + 3y_2 \leq 400 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 600 \\ -2y_1 + 3y_3 \leq 200 \\ 4y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 500 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 40 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = 20 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 = 60 \end{array} \right\}$$

9**10**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]; \quad d^T = [10 \ 15 \ 12]$$

$$x^TB = d^T$$

11

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & -1 \\ 4 & -5 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -1 & 15 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]; \quad \mathbf{d}^T = [70 \ 80 \ 100 \ 10]$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} > \mathbf{d}^T$$

12

$$\text{a) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^T = [1 \ 000 \ 1 \ 200 \ 1 \ 500 \ 1 \ 900]$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$$

$$\text{b) } \mathbf{x}^T \mathbf{B} \leq \mathbf{f}^T$$

$$\text{c) } \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B}^T = \mathbf{A}$$

$$\text{d) } \mathbf{s}^T \mathbf{A} = [12 \ 15 \ 14]$$

Lösungen zu 3.3.7.

1

$$\text{a) } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 44 & 35 & 12 & 8 \\ 88 & 82 & 39 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 16 & -9 \\ 8 & 0 & -24 & 12 \\ -25 & 65 & 10 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 19 & 50 \\ -16 & -10 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \mathbf{AB} = \mathbf{0B} = \mathbf{0}_{(3,4) \ (3,2)}$$

$$\text{d) } \mathbf{AB} = \mathbf{EB} = \mathbf{B} \quad \text{g) } \mathbf{AB} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}_{(4,5) \ (3,5)}$$

$$\text{e) } \mathbf{AB} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$$

2

$$\text{a) } \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -6,2 & 69,2 & -25,7 \\ 4,1 & -3,5 & 4,05 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{23}{12} & -\frac{5}{21} \\ \frac{2}{7} & 1 & \frac{3}{49} \end{bmatrix}$$

c) Zur Aufgabe a)

$\mathbf{A} \ \mathbf{B}$ nicht möglich
(3, 2) (3, 3)

$\mathbf{B} \ \mathbf{A}$ möglich
(3, 3) (3, 2)

$\mathbf{B}^T \ \mathbf{A}^T$ nicht möglich
(3, 3) (2, 3)

Zur Aufgabe b)

$\mathbf{A} \ \mathbf{B}$ nicht möglich
(2, 2) (3, 2)

$\mathbf{B} \ \mathbf{A}$ möglich
(3, 2) (2, 2)

$\mathbf{B}^T \ \mathbf{A}^T$ nicht möglich
(2, 3) (2, 2)

3

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{y} = \mathbf{Bz}$$

$$\text{d) } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2\,400 \\ 2\,200 \\ 4\,600 \\ 1\,900 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \mathbf{x} = \mathbf{Ay}$$

$$\text{f) } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 20\,800 \\ 19\,700 \\ 24\,900 \\ 29\,400 \\ 31\,300 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$\text{h) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 27 \\ 15 & 8 & 24 \\ 29 & 3 & 30 \\ 21 & 9 & 39 \\ 34 & 14 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\text{i) } \mathbf{x} = \mathbf{Cz}$$

$$\text{j) } \mathbf{x} \text{ wie in f)}$$

Lösungen zu 3.5.

1

$$\text{a) } 4\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 + (-2)\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } 1\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3 + 5\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 26 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1$$

$$\text{e) } \frac{1}{5}\mathbf{a}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{5}\mathbf{a}_3 + \frac{1}{5}\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

2

$$\text{a) } 1\text{ b), } 1\text{ d), } 1\text{ e)}$$

$$\text{b) } 1\text{ d), } 1\text{ e)}$$

3

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 \leq \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \end{bmatrix}$$

5

Die konvexe Linearkombination muß auf der Verbindungsstrecke der Vektoren a_1 und a_2 liegen.

6

Die konvexe Linearkombination muß im Dreieck oder auf dem Rand des Dreiecks liegen, das durch die drei Vektoren a_1 , a_2 und a_3 gebildet wird.

7

Bezeichnen wir die Produktionshöhe

für Produkt 1 mit x_1 ,

für Produkt 2 mit x_2 ,

für Produkt 3 mit x_3 ,

so muß ein zulässiger Produktionsplan die Bedingung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

erfüllen.

Wenn wir die Produktionspläne mit

x_1 , x_2 , x_3 bezeichnen (jeder der Vektoren muß drei Komponenten besitzen), so müssen Skalare α_1 , α_2 , $\alpha_3 \geq 0$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ gesucht werden, mit denen die Linearkombinationen

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

gebildet werden. Die Komponenten x_1 , x_2 , x_3 des Vektors x müssen ebenfalls die Bedingung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

erfüllen.

Lösungen zu 3.7.

1

$$a) \quad b_1 = \frac{1}{5}c - \frac{4}{5}b_2 - \frac{2}{5}b_3$$

$$x = 2c - 6b_2 - \frac{7}{2}b_3$$

$$b) \quad b_2 = -\frac{5}{4}b_1 + \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}b_3$$

$$x = \frac{15}{2}b_1 + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b_3$$

$$c) \quad b_3 = -\frac{5}{2}b_1 - 2b_2 + \frac{1}{2}c$$

$$x = \frac{35}{4}b_1 + b_2 + \frac{1}{4}c$$

2

a)	b_1	x_1	x_2	x_3
c	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
b_2	$-\frac{1}{2}$	3	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{2}$
b_3	$-\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{9}{4}$

b)	b_2	x_1	x_2	x_3
b_1	-2	-6	-15	3
c	1	5	8	1
b_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$

c)	b_3	x_1	x_2	x_3
b_1	-4	-8	0	9
b_2	-2	-1	$\frac{15}{2}$	3
c	2	6	$\frac{1}{2}$	-2

3

a)	c_1	c_2	b_1	x
c_3	2	-1	1	7
b_2	-9	6	-4	-15
b_3	-1	1	-2	-2

b)		c_1	b_3	b_1	x
c_3		1	1	-1	5
b_2		-3	-6	8	-3
c_2		-1	1	-2	-2

c)		b_2	b_3	b_1	x
c_3		$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	4
c_1		$-\frac{1}{3}$	2	$-\frac{8}{3}$	1
c_2		$-\frac{1}{3}$	3	$-\frac{14}{3}$	-1

Lösungen zu 3.8.

1

- a) Rang 1 c) Rang 3 e) Rang 2 g) Rang 0
 b) Rang 2 d) Rang 3 f) Rang 1

2

- a) linear abhängig c) linear abhängig
 b) linear unabhängig d) linear unabhängig

Lösungen zu 4.2.

1

- a) lösbar b) lösbar c) nicht lösbar

2

- a) unendlich viele Lösungen b) unendlich viele Lösungen

3

genau eine Lösung

Lösungen zu 4.3.

1

- a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ d) $x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$
 b) $x = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ e) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 c) $x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 5 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ f) $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

2

38 und 17.

3

Die Ziffern sind 2 und 7, die unbekannten Zahlen 222, 72, 777, 27.

4

35 cm, 15 cm.

5

P_1 : 30 Einheiten, P_2 : 35 Einheiten.

6

15 Arbeitskräfte in der einen Brigade und 20 Arbeitskräfte in der anderen.

7

T_1 : 25 Einheiten, T_2 : 40 Einheiten.

8

Im ersten Falle 400 M Selbstkosten und 50 M Gewinn,
im zweiten Falle 372 M Selbstkosten und 78 M Gewinn.

9

150 m³ vom Gas G_1 und 350 m³ vom Gas G_2 .

10

350 Einheiten vom Produkt P_1 und 250 Einheiten vom Produkt P_2 .

11

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \text{c) } \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -7 \end{bmatrix} \\ \text{b) } \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} & \text{d) } \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

12

Die Zahlen sind 15; 20 und 35.

13

Die Kanten sind 10; 30 und 40 cm lang.

14

P_1 : 16 Einheiten, P_2 : 23 Einheiten, P_3 : 20 Einheiten.

15

$\frac{1}{4}$ m³ des Gases G_1 , $\frac{1}{5}$ m³ des Gases G_2 und $\frac{11}{20}$ m³ des Gases G_3 ergeben 1 m³ des gewünschten Mischgases.

Lösungen zu 4.4.

1

Mögliche Formen der Lösung:

$$\text{a) } x_1 = \frac{9}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)x_2; \quad x_2 \text{ beliebig}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{23} \\ \frac{25}{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{23} \\ \frac{19}{23} \end{bmatrix} x_2; \quad x_2 \text{ beliebig}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61 \\ -21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix} x_1; \quad x_1 \text{ beliebig}$$

$$\text{d) } x_2 = 50 - [-2; -7] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ beliebig}$$

$$\text{e) } x_1 = -4 - \left(-\frac{5}{2}\right)x_2; \quad x_2 \text{ beliebig}$$

$$\text{f) } x_2 = 2 - \left(-\frac{2}{5}\right)x_1; \quad x_1 \text{ beliebig}$$

$$\text{g) } x_1 = 10 - \left[-\frac{1}{2} \quad 2\right] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ beliebig}$$

$$\text{h) } x_2 = 25 - \left[\frac{3}{4} \quad -\frac{5}{4}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ beliebig}$$

$$\text{i) } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{2} \\ \frac{125}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ 7 \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} x_1; \quad x_1 \text{ beliebig}$$

$$\text{j) } x_3 = \frac{17}{4} - \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{7}{4}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ beliebig}$$

2

$$7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 1\,260$$

Die allgemeine Lösung läßt sich zum Beispiel folgendermaßen darstellen:

$$x_3 = 420 - \left[\frac{7}{3} \quad \frac{8}{3}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung ergibt sich zum Beispiel mit

$$x_1 = 30; \quad x_2 = 60; \quad x_3 = 190.$$

3

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640 \\ 490 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung läßt sich zum Beispiel folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 65 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 \\ 27 \\ 16 \end{bmatrix} x_1.$$

Eine spezielle ganzzahlige Lösung ist zum Beispiel

$$x_1 = 20; \quad x_2 = 30; \quad x_3 = 50.$$

4

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung läßt sich zum Beispiel folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} x_1.$$

Eine spezielle Lösung ergibt sich zum Beispiel mit $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = \frac{1}{5}$; $x_3 = \frac{2}{5}$. Nach dieser Lösung sind $\frac{2}{5} \text{ m}^3$ vom Gas G_1 , $\frac{1}{5} \text{ m}^3$ vom Gas G_2 und $\frac{2}{5} \text{ m}^3$ vom Gas G_3 zu mischen.

Lösungen zu 5.2.

1

- Keine inverse Matrix, denn A ist nicht quadratisch.
- Keine inverse Matrix, denn der Rang ist $r = 1$; während die Zeilen- bzw. Spaltenzahl 2 ist.
- Inverse Matrix existiert, denn der Rang $r = 3$ stimmt mit der Zeilen- bzw. Spaltenzahl überein.
- Die Nullmatrix hat keine inverse Matrix, ihr Rang ist $r = 0$.
- Die Einheitsmatrix besitzt eine inverse Matrix, ihr Rang ist gleich der Zeilen- bzw. Spaltenzahl.

2

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} & \frac{11}{25} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} \\ \frac{13}{25} & -\frac{1}{25} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{23}{128} & \frac{25}{128} & -\frac{17}{128} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{128} & \frac{11}{128} & \frac{13}{128} \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

3

$$\text{a) } (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{65}{53} & \frac{14}{53} & \frac{10}{53} \\ \frac{50}{53} & \frac{76}{53} & \frac{24}{53} \\ \frac{70}{53} & \frac{64}{53} & \frac{76}{53} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & \frac{9}{40} & \frac{17}{40} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{13}{40} & \frac{69}{40} \end{bmatrix}$$

Lösungen zu 6.2.

1

- a) $a < -b - c + d$
- b) $b > a - c - d$
- c) $a \leq bc$ für $b > 0$, $a \geq bc$ für $b < 0$

$$b \geq \frac{a}{c} \text{ für } b > 0 \text{ und } c > 0 \\ \text{oder für } b < 0 \text{ und } c < 0$$

$$b \leq \frac{a}{c} \text{ für } b < 0 \text{ und } c > 0 \\ \text{oder für } b > 0 \text{ und } c < 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } a &\leq e - \frac{c}{d} \\
 c &\leq ed - ad \text{ für } d > 0 \\
 c &\geq ed - ad \text{ für } d < 0 \\
 d &\geq \frac{c}{e-a} \text{ für } d > 0 \text{ und } e-a > 0 \\
 &\text{oder für } d < 0 \text{ und } e-a < 0 \\
 d &\leq \frac{c}{e-a} \text{ für } d > 0 \text{ und } e-a < 0 \\
 &\text{oder für } d < 0 \text{ und } e-a > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } x > -\frac{7}{5}$$

$$\text{f) } x \geq 4$$

$$\text{g) } x \leq 5$$

$$\text{h) } x \leq -3$$

$$\text{i) } x \leq -2$$

$$\text{j) } x \leq -\frac{4}{5}$$

$$\text{k) } x \geq \frac{5}{4} \text{ für } x > 0$$

$$x \leq \frac{5}{4} \text{ für } x < 0$$

$$\text{l) } x > -\frac{3}{4} \text{ für } x > 0$$

$$x < -\frac{3}{4} \text{ für } x < 0$$

2

Keine Lösung.

3

x darf beliebige Werte annehmen.

Lösungen zu 6.3.

1

$x = \frac{26}{9}$ und $x = 2,5$ gehören zur Erfüllungsmenge; $x = \frac{13}{3}$ gehört nicht zur Erfüllungsmenge.

2

a) $x = 3$ gehört nicht zur Erfüllungsmenge; $x = \frac{1}{4}$ und $x = -2$ gehören zur Erfüllungsmenge.

b) $x = 3$, $x = \frac{1}{4}$ und $x = -2$ gehören zur Erfüllungsmenge.

- c) $x = 3$, $x = \frac{1}{4}$ und $x = -2$ gehören zur Erfüllungsmenge.
- d) $x = 3$, $x = \frac{1}{4}$ und $x = -2$ gehören nicht zur Erfüllungsmenge.
- e) $x = 3$, $x = \frac{1}{4}$ und $x = -2$ gehören nicht zur Erfüllungsmenge.

Lösungen zu 6.4.

1

- a) $x \geq 6$
 b) $x > 3$
 c) $-11 < x \leq 3$
 d) Die Erfüllungsmenge ist leer.
 e) $x = 3$
 f) $x > 5$
 g) Die Erfüllungsmenge ist leer.
 h) Die Erfüllungsmenge ist leer.

2

$$4x \leq 380; 2x \leq 210; 2,5x \leq 235$$

Es lassen sich höchstens 94 Einheiten herstellen.

Lösungen zu 6.5.

1

- a) $x_1 < 0$
 $x_2 > 0$ (ohne x_1 - und x_2 -Achse)
 b) $x_1 < 0$; $x_2 < 0$ (ohne x_1 - und x_2 -Achse)
 c) $x_1 > 0$; $x_2 < 0$ (ohne x_1 - und x_2 -Achse)

4

- a) 0: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ D: $x_1 = 30$; $x_2 = 30$
 B: $x_1 = 40$; $x_2 = 0$ A: $x_1 = 0$; $x_2 = 45$
 C: $x_1 = 40$; $x_2 = 20$
- b) 0: $x_1 + x_2 = 0$ D: $x_1 + x_2 = 60$
 B: $x_1 + x_2 = 40$ A: $x_1 + x_2 = 45$
 C: $x_1 + x_2 = 60$

Die günstigsten Lösungen in bezug auf die Höchststückzahl liegen in C und D. Alle Punkte auf CD liefern diese günstigsten Stückzahlen von 60.

- c) Der Gewinn z beträgt $z = 20x_1 + 30x_2$:
 $z(0) = 0$ $z(D) = 1\,500$
 $z(B) = 800$ $z(A) = 1\,350$
 $z(C) = 1\,400$

Die günstigste Lösung in bezug auf den Gewinn liegt in D. Der Gewinn beträgt hier 1 500 M.

5

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & 3x_1 + 6x_2 \leq 240 \\
& 6x_1 + 4x_2 \leq 360 \\
& 5x_2 \leq 150 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & z = 40x_1 + 30x_2 \\
\text{d)} \quad & 400 = 40x_1 + 30x_2 \\
& 800 = 40x_1 + 30x_2 \\
& 1\,200 = 40x_1 + 30x_2 \\
& 2\,400 = 40x_1 + 30x_2
\end{aligned}$$

**Lösungen
zu 6.6.****1**

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\
\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

2

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad x_4 = \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \end{bmatrix}; \quad x_5 = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= 1 \\
\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

3

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \end{bmatrix}; \quad x_4 = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad x_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= 1 \\
\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

4

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1 \\
\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

5

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 33 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1 \\
\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

6

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 140 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\,000 \\ \frac{9}{9} \\ \frac{700}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} \frac{500}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 + \alpha_4 \mathbf{x}_4 + \alpha_5 \mathbf{x}_5 + \alpha_6 \mathbf{x}_6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 1 \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Lösungen
zu 7.2.**

1

$$x_1 = \frac{19}{5}, \quad x_2 = \frac{22}{5}, \quad z = \frac{41}{5}$$

2

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 3, \quad z = 0$$

3

$$\text{a) } x_1 = \frac{30}{23}, \quad x_2 = \frac{40}{23}, \quad z = \frac{70}{23}$$

b) Keine optimale Lösung, aber zulässige Lösungen vorhanden,

$$\text{c) } x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad z = 5$$

$$\text{d) } x_1 \geq 10, \quad x_2 = 0, \quad z = 0$$

4

Vom Erzeugnis P_1 sind 4 LE und vom Erzeugnis P_2 12 LE herzustellen, um den höchstmöglichen Gewinn von 1120 GE zu erzielen,

8

1 Teil vom ersten Gas, 5 Teile vom zweiten und 4 Teile vom dritten Gas. Minimale Kosten je Kubikmeter: 21,50 M.

**Lösungen
zu 7.3.**

1

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 6, \quad z = 360$$

2

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad z = 19$$

3

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 50, \quad z = 1\,000$$

4

$$x_1 = 160, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 18, \quad z = 1\,480$$

5

$$x_1 = 2\,800, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 70, \quad z = -8\,960$$

6

$$\begin{aligned} -z = z' &= 5x_1 + 2x_2 - 10x_3 \quad \text{maximal} \\ &- 2x_1 + 5x_2 + \quad x_3 \leq 700 \\ &2x_1 + \quad x_2 - 3x_3 \leq 600 \\ &x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 150 \\ &\quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 &= 270, \quad x_2 = 60, \quad x_3 = 0, \quad z = -1\,470 \end{aligned}$$

7

Modell

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 + 15x_2 \quad \text{maximal} \\ 0,15x_1 + 0,20x_2 &\leq 60 \\ 0,20x_1 + 0,10x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung

80 Tische, 240 Schränke, Gewinn 4 560 GE.

8

a) *Modell*

$$\begin{aligned} z &= 7x_1 + 5x_2 + 5x_3 \quad \text{maximal} \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 3\,300 \\ 5x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &\leq 6\,600 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung

Es gibt mehrere Lösungen, die die vorhandenen Fonds voll auslasten. Ein möglicher optimaler Plan liegt vor, wenn vom ersten Erzeugnis 1 200 E, vom zweiten Erzeugnis 300 E und vom dritten Erzeugnis 0 E hergestellt werden. Dann werden die Fonds voll ausgelastet ($z = 9\,900$).

b) *Modell*

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \quad \text{maximal} \\ 2x_1 + \quad 3x_2 + \quad 4x_3 &\leq 3\,300 \\ 5x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 &\leq 6\,600 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung

Erzeugnis P₁: 0 E; Erzeugnis P₂: 1 100 E; Erzeugnis P₃: 0 E;
Gewinn: 22 000 GE.

9

Modell

$$\begin{aligned} z &= 60x_1 + 120x_2 + 90x_3 \quad \text{maximal} \\ 2x_1 + \quad 3x_2 + \quad 4x_3 &\leq 700 \\ 5x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 &\leq 1\,400 \\ 8x_1 + 10x_2 + \quad 4x_3 &\leq 2\,100 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung

Erzeugnis P₁: 0 E, Erzeugnis P₂: 200 E, Erzeugnis P₃: 25 E,
Preissumme: 26 250 GE.

10

Modell

$$\begin{aligned} z = & \quad x_1 + \quad x_2 + x_3 \quad \text{maximal} \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 540 \\ & 0,5x_1 + \quad x_2 + 2x_3 \leq 150 \\ & \quad \quad 0,5x_2 + 3x_3 \leq 90 \\ & \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Es gibt mehrere optimale Lösungen, eine davon lautet:

Technologie T₁: 68 E; Technologie T₂: 84 E; Technologie T₃: 16 E;
Gesamtproduktion: 168 E.

11

a) Modell

$$\begin{aligned} z = & 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \quad \text{maximal} \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 325 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 520 \\ & \quad x_1 \leq 10 \\ & \quad \quad x_2 \leq 15 \\ & \quad \quad \quad x_3 \leq 20 \\ & \quad \quad \quad \quad x_4 \leq 50 \\ & \quad \quad x_1 \leq 20 \\ & \quad \quad \quad x_2 \leq 80 \\ & \quad \quad \quad \quad x_3 \leq 25 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad x_4 \leq 150 \end{aligned}$$

b) Modell der Restproduktion

$$\begin{aligned} z' = & 9x_1' + 4x_2' + 5x_3' + 6x_4' \quad \text{maximal} \\ & 5x_1' + x_2' + 2x_3' + 2x_4' \leq 120 \\ & 4x_1' + 3x_2' + 3x_3' + 4x_4' \leq 175 \\ & \quad x_1' \leq 10 \\ & \quad \quad x_2' \leq 65 \\ & \quad \quad \quad x_3' \leq 5 \\ & \quad \quad \quad \quad x_4' \leq 100 \\ & \quad \quad x_1', x_2', x_3', x_4' \geq 0 \end{aligned}$$

c) Lösung für die Restproduktion

Erzeugnis P₁: 10 E; Erzeugnis P₂: 0 E; Erzeugnis P₃: 5 E;
Erzeugnis P₄: 30 E.

d) Gesamtproduktion

Erzeugnis P₁: 20 E; Erzeugnis P₂: 15 E; Erzeugnis P₃: 25 E;
Erzeugnis P₄: 80 E.

Die Fonds der ersten und zweiten Stufe sind voll ausgelastet.

**Lösungen
zu 7.4.**

Die optimalen Lösungen sind:

1

$$\begin{aligned}x_{11} &= 0, & x_{12} &= 600, & x_{13} &= 0 \\x_{21} &= 200, & x_{22} &= 200, & x_{23} &= 100 \\z &= 3\,800\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}x_{11} &= 0, & x_{12} &= 50, & x_{13} &= 50 \\x_{21} &= 50, & x_{22} &= 150, & x_{23} &= 0 \\z &= 1\,800\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}x_{11} &= 0, & x_{12} &= 200, & x_{13} &= 0 \\x_{21} &= 80, & x_{22} &= 20, & x_{23} &= 200 \\z &= 3\,140\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}x_{11} &= 100; & x_{12} &= 0 \\x_{21} &= 200; & x_{22} &= 300 \\x_{31} &= 0; & x_{32} &= 100 \\z &= 2\,600\end{aligned}$$

5

Lieferungen vom Betrieb B ₁	an Lager L ₁	400 E,
	an Lager L ₂	50 E,
	an Lager L ₃	0 E,
	an Lager L ₄	200 E,
vom Betrieb B ₂	an Lager L ₁	0 E,
	an Lager L ₂	0 E,
	an Lager L ₃	0 E,
	an Lager L ₄	100 E,
vom Betrieb B ₃	an Lager L ₁	0 E,
	an Lager L ₂	500 E,
	an Lager L ₃	500 E,
	an Lager L ₄	0 E.

Transportkosten 12 250 GE.

6

Lieferungen der Kiesgrube K ₁	an Baustelle B ₁	450 m ³ ,
	an Baustelle B ₂	0 m ³ ,
	an Baustelle B ₃	0 m ³ ,
der Kiesgrube K ₂	an Baustelle B ₁	0 m ³ ,
	an Baustelle B ₂	0 m ³ ,
	an Baustelle B ₃	200 m ³ ,
der Kiesgrube K ₃	an Baustelle B ₁	50 m ³ ,
	an Baustelle B ₂	50 m ³ ,
	an Baustelle B ₃	100 m ³ ,

der Kiesgrube K_4 an Baustelle B_1 0 m³,
 an Baustelle B_2 50 m³,
 an Baustelle B_3 0 m³.

Transportkosten 5 000 M.

7

Lieferungen des Lagers L_1 an Verbraucher V_1 100 t,
 an Verbraucher V_2 0 t,
 an Verbraucher V_3 0 t,
 an Verbraucher V_4 300 t,
 des Lagers L_2 an Verbraucher V_1 100 t,
 an Verbraucher V_2 0 t,
 an Verbraucher V_3 700 t,
 an Verbraucher V_4 0 t,
 des Lagers L_3 an Verbraucher V_1 0 t,
 an Verbraucher V_2 650 t,
 an Verbraucher V_3 0 t,
 an Verbraucher V_4 0 t,
 des Lagers L_4 an Verbraucher V_1 250 t,
 an Verbraucher V_2 150 t,
 an Verbraucher V_3 0 t,
 an Verbraucher V_4 0 t.

Die Zahl der Tonnenkilometer beträgt 16 450.

8

Optimaler Verteilungsplan der Waggon

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	7				
A_2			8	5	6
A_3		12			7
A_4	3			11	

Transportstrecke $z = 453$ km

