

R e p e t i t o r i u m

der Mathematik

zur schriftlichen und mündlichen

R e i f e p r ü f u n g

mit Originalprüfungsaufgaben

Ausgearbeitet (1976) und überarbeitet (1978):

U. Beiersdorf und H.-J. Haase, VHS Berlin-Mitte

Anfertigen der Druckvorlage: VHS Berlin-Treptow

Druck:

VHS Berlin-Lichtenberg

Zur Einführung:

1. Dieses Material soll Ihnen helfen, sich auf die schriftliche und mündliche Reifeprüfung vorzubereiten. Alle notwendigen Informationen entnehmen Sie dem Tafelwerk und Ihren Aufzeichnungen. Sehr geeignet zur Wiederholung ist auch der "Wissensspeicher Mathematik" (von Mader und Richter, Verlag Volk und Wissen).
2. Das vorliegende Material ist auch für permanente Wiederholungen im gesamten Abiturlehrgang verwendbar.
3. Bevor Sie die Aufgaben lösen, machen Sie sich gründlich mit den mit $\textcircled{W}$ bezeichneten Begriffen vertraut!
Aufgaben mit dem Zeichen $\textcircled{*}$ sind den schriftlichen Reifeprüfungen der letzten Jahre entnommen.*)
Versuchen Sie, im Hinblick auf die mündliche Prüfung, alle Rechen- und Beweisschritte ausführlich zu begründen!
4. Im Anhang finden Sie die Aufgaben der "schriftlichen Reifeprüfung" des Faches Mathematik von 1977/78.
Lösen Sie diese vor der schriftlichen Reifeprüfung im Zusammenhang. Kontrollieren Sie, wieviel Zeit Sie dazu benötigt haben.

*) Der Zusatz **V** bedeutet verkürzte Prüfungsaufgabe,
der Zusatz **E** bedeutet erweiterte Prüfungsaufgabe.

Inhalt:

1. Beweisverfahren der vollständigen Induktion
2. Zahlenfolgen
3. Grenzwerte von Zahlenfolgen
4. Nullstellen von Funktionen; Gleichungen; Gleichungssysteme
5. Definitions- und Wertebereiche von Funktionen; Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen
6. Differentialrechnung: Grundbegriffe
7. Anwendung der Differentialrechnung. I: Kurvenuntersuchungen
8. Anwendung der Differentialrechnung. II: Extremwertaufgaben
9. Integralrechnung: Grundbegriffe
10. Anwendung der Integralrechnung
11. Vektorrechnung und analytische Geometrie
12. Kegelschnitte und analytische Geometrie

Anhang: Reifeprüfungsarbeit

Thema 1

W Prinzip und Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Fakultätsfunktion; Binomialkoeffizienten; Summenzeichen; Binomischer Satz

- ① Erläutern Sie das Prinzip der vollständigen Induktion.
Nennen Sie die Beweisschritte, die für den Beweis der Aussage
"Für alle natürlichen Zahlen n gilt $H(n)$ "
notwendig sind.

- ② Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle n folgendes gilt:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \quad n \geq 1$

b) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad n \geq 0$

c) $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} \quad n \geq 2$

Begründen Sie die einzelnen Beweisschritte!

- ③ Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$

b) $\binom{n}{n-2}$

- c) Schreiben Sie die Gleichungen aus Aufgabe ② mit dem Summenzeichen!

④. a) Berechnen Sie die Summe $\sum_{k=1}^3 \frac{k-1}{k}$



b) Berechnen Sie die Summe $\sum_{k=1}^5 k(k+1)$

⑤. Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Satzes !

a) $(x-y)^7$

b) $(x+1)^8$

⑥. Bestimmen Sie die Koeffizienten von a^4b^9 und a^9b^4 in $(a-b)^{13}$!

Thema 2

Folge; Bildungsvorschriften für Folgen; Monotonie von Folgen; Schranken und Grenzen von Folgen; arithmetische und geometrische Folgen; Partialsummen; Beweisverfahren der vollständigen Induktion

- ①. Die ersten beiden Glieder einer Folge sind $a_1 = 27$ und $a_2 = 18$.

a) Nennen Sie die ersten sechs Glieder der Folge unter der Voraussetzung, daß

a_1) die Folge arithmetisch ist,

a_2) die Folge geometrisch ist.

Stellen Sie die Paare $[k; a_k]$ in einem geeigneten Diagramm dar.

b) Geben Sie für beide Folgen eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift an.

c) Untersuchen Sie die geometrische Folge auf Monotonie und Grenzen.

Für welche a_k gilt: $|a_k - G_U| < \frac{1}{60}$?

- ②. Die Anfangsglieder einer Folge sind 4; 9; 14; 19; 24; ...

a) Geben Sie eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift an.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß beide Bildungsvorschriften die gleiche Folge beschreiben.

c) Treffen Sie eine Aussage über die oberen und unteren Schranken der Folge.

3. Eine Zahlenfolge (a_n) hat die Folge der Partialsummen (s_n) .
Eine Bildungsvorschrift für (s_n) sei gegeben durch



$$s_n = \frac{2n}{n+1} ; n \in \mathbb{N} ; n \geq 1$$

- a) Geben Sie die Glieder s_1 , s_2 und s_3 der Folge (s_n) an.
- b) Weisen Sie nach, daß die Folge (s_n) monoton wachsend ist.
- c) Wie viele Glieder der Folge (s_n) sind kleiner als 1,94 ?
- d) Berechnen Sie die Glieder a_1 , a_2 , a_3 und das allgemeine Glied a_n der Zahlenfolge (a_n) .
4. a) Durch Angabe der ersten fünf Glieder ist je ein Beispiel einer arithmetischen Folge und einer geometrischen Folge zu geben.
- b) Nennen Sie für Ihre Beispiele die explizite und rekursive Bildungsvorschrift. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß beide Bildungsvorschriften die gleiche Folge beschreiben.

5. Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch

$$a_n = 3n(n-1) \quad (n \geq 1)$$



- a) Berechnen Sie die Glieder a_1 , a_2 und a_3 der Zahlenfolge!

- b) Bestimmen Sie die Partialsummen

$$s_1 = a_1; s_2 = a_1 + a_2; s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

der gegebenen Zahlenfolge!

- c) Das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen kann in der Form

$$s_n = n^3 + r \cdot n \quad (r \in \mathbb{P}; n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

dargestellt werden.

Bestimmen Sie den Wert der Variablen r unter Verwendung der im Teil b) berechneten Partialsummen!

- d) Setzen Sie den von Ihnen ermittelten Wert der Variablen r in die in c) angeführte Gleichung ein!

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß der so erhaltene Ausdruck das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen ist!

Thema 3

Ⓢ Konvergenz und Divergenz von Folgen; Grenzwerte von Folgen; Grenzwertsätze über Folgen

- ① Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n^2 + 2n + 1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n + 1}$

- ② a) Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{3n - 2} = 1 \quad \text{ist.}$$

- b) Berechnen Sie das von ξ abhängige n_0 mit der Eigenschaft $|a_n - 1| < \xi$ für alle $n > n_0$. Wählen Sie

$$\xi = \frac{1}{1000}.$$

- c) Bestätigen Sie die Gleichung a) durch schrittweises Anwenden der Grenzwertsätze.

- ③ Gegeben ist die Folge $\left(\frac{k}{2k + 1} \right)$

- a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

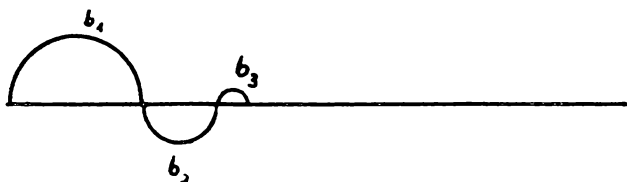
- b) Welche Glieder der Folge erfüllen die Bedingung

$$|s - a_k| < \frac{1}{100} \quad ?$$

- c) Wählen Sie aus der Folge alle a_k aus, für die k gerade ist.
Geben Sie das Bildungsgesetz der ausgewählten Folge (b_k) an.

Welchen Grenzwert hat die Folge (b_k) ?

- ④ In der Skizze sind Halbkreise dargestellt. Der erste Halbkreis mit der Bogenlänge b_1 hat den Radius r .
Der Radius jedes weiteren Halbkreises ist halb so groß wie der Radius seines unmittelbaren Vorgängers.



- a) Die Längen $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ der Halbkreisbögen bilden eine unendliche Folge (b_n) . Geben Sie die Glieder b_1, b_2, b_3 und das allgemeine Glied b_n dieser Folge in Abhängigkeit von r an!
- b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für die Summe der ersten n Glieder der Folge (b_n) gilt:

$$s_n = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (n \geq 1) !$$

- c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (s_n) !

- ⑤ Eine geometrische Folge ist durch $a_1 = 2$ und $g = \frac{1}{3}$ gegeben.

Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

6. Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch



$$a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad (n \geq 1)$$

- a) Geben Sie die Glieder a_1 , a_2 und a_3 dieser Folge an!
 Berechnen Sie die Glieder s_1 , s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge!
 Für diese Glieder der Partialsummenfolge gilt

$$s_n = \frac{n}{3(n+c)} \quad (n = 1; 2; 3).$$

Ermitteln Sie den Wert der Konstanten c !

- b) Setzen Sie den ermittelten Wert für c ein, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß der so erhaltene Ausdruck für s_n allgemeines Glied der Partialsummenfolge (s_n) ist!
- c) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge (s_n) !
- d) Von welchem $n = n_0$ ab liegen die Glieder der Partialsummenfolge (s_n) in der ε -Umgebung des Grenzwertes g , wenn $\varepsilon = 10^{-2}$ ist?

Thema 4

W

Nullstellen von rationalen und nichtrationalen Funktionen; Wurzelgleichungen; goniometrische Gleichungen; Linearfaktorenzerlegung von ganzen rationalen Funktionen; Schnittpunkte der Bilder von Funktionen

- ①. Berechnen Sie die Nullstellen von

a) $y = f(x) = \frac{x^3 - x}{x + 2}$

b) $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x}$

- ②. Gegeben: $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- a) Zeigen Sie: $x_1 = 1$ ist Nullstelle der Funktion!
 b) Bestimmen Sie weitere Nullstellen der Funktion!
 c) Nennen Sie die Schnittstelle mit der y-Achse!
 d) Skizzieren Sie das Bild der Funktion!

- ③. Geben Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen in P an:

a) $\sqrt{2x + 1} = 1 - x$

b) $\sqrt{x - 9} = \frac{36}{\sqrt{x-9}} + \sqrt{x}$

c) $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 3$

d) $\sqrt{2} \cos x - 2 \cos^2 x + 6 = 0$

e) $2x^4 - 4x^2 - 6 = 0$

f) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

- ④ a) Gegeben ist eine Funktion g durch

$$y = g(x) = 1 - \ln x \quad (x \in P; x > 0)$$



Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

- b) Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = \frac{1}{4} x^2 \quad (x \in P)$$

$$y = g(x) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + 6 \quad (x \in P)$$

Ihre Bilder schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2 .

Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2 .

Die Bilder der gegebenen Funktion begrenzen eine Fläche allseitig. Fertigen Sie eine Skizze an.

- c) Gegeben ist die Funktion f durch



$$y = f(x) = \frac{1}{2} + \cos 2x \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (x \in P)$$

Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion.

Ermitteln Sie die Funktionswerte $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Thema 5

- W Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion; Grenzwerte von Funktionen; Grenzwertsätze für Funktionen; Stetigkeit von Funktionen; Unstetigkeitsstellen; Verhalten im Unendlichen; Gleichungen der Asymptoten
-

- ①. Geben Sie zu den Funktionen die Definitionsbereiche an.

Welche Werte nimmt die Funktion an?

a) $y = f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $y = f(x) = \sin\sqrt{x}$

- ②. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^4 - x_0^4}{h}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

- ③. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen f an den angegebenen Stellen stetig sind:

a) $y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} \quad x_0 = -1$

b) $y = f(x) = \frac{1}{x^3} \quad x_0 = 0$

$$c) \quad y = f(x) = \sin x + 1 \quad x_0 = -\frac{\pi}{3}$$

$$d) \quad y = f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für } x \geq 0 \\ -\cos x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

- ④. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten im Unendlichen. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an. Berechnen Sie die Polstellen. Bestimmen Sie für die Polstellen x_p

$$f(x_p + \frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad f(x_p - \frac{1}{2})$$

$$a) \quad y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$b) \quad y = f(x) = \frac{4x + 8}{x^2 - 4}$$

$$c) \quad y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$d) \quad y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Thema 6

W

Differenzenquotient; Differentialquotient; Ableitungen von Funktionen; Differentiationsregeln, insbesondere auch Kettenregel; Mittelwertsatz der Differentialrechnung; geometrische Bedeutung der Ableitung einer Funktion; Anstieg der Tangente

- ①. Bilden Sie von nachstehenden Funktionen $y = f(x)$ die erste Ableitung. Erläutern Sie die jeweiligen Differentiationsregeln.

a) $y = 10x^5 + 20x^4 - 10x^2 + 2$ b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

c) $y = 5x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ d) $y = (x+1) \sin x$

e) $y = \frac{x}{\tan x}$ f) $y = x^2 \cdot e^x$

g) $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

i) $y = \ln \cos x^2$ j) $y = \ln \cos^2 x$

k) $y = \ln^2 \cos x$ l) $y = x \cdot \sin x$

m) $y = 4^{\cot x}$ n) $y = e^{x \sin x}$

Bestimmen Sie für b), d), f), i), j) $f'(0)$ und $f'(1)$.

- ② Für $y' = f(x) = x^2$ und $a = 0$ und $b = 2$ ist dasjenige ξ zu bestimmen, für das gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (\text{Mittelwertsatz})$$

- ③ a) Geben Sie eine geometrische Deutung des Differenzen- und Differentialquotienten einer Funktion f an der Stelle x_0 (Skizze!).

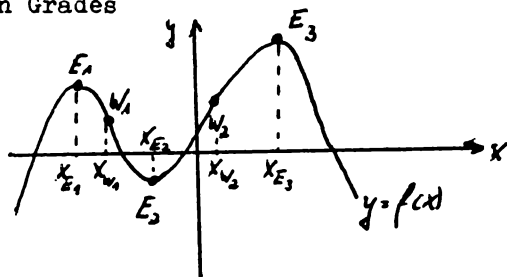
b) Bilden Sie den Differenzenquotienten der Funktion

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

Entwickeln Sie daraus den Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = -1$.

- ④ An welcher Stelle x_0 hat das Bild der Funktion $y = x^2$ eine Tangente, die senkrecht zur Geraden $y = x$ verläuft?

- ⑤ Gegeben ist das Bild einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades



a) Skizzieren Sie zu dem gegebenen Bild den Verlauf der Graphen von

$$y' = f'(x); \quad y'' = f''(x); \quad y''' = f'''(x).$$

(E_1, E_2, E_3 sind Extrempunkte; W_1, W_2 sind Wendepunkte)

- b) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von $y = f(x)$ unter Benutzung der Begriffe
lokale Monotonie, lokale Extremwerte,
lokale Konkavität bzw. Konvexität.

⑥ Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x \in P; x \neq 1)$$

Pr a) Berechnen Sie die Stellen x_1 und x_2 , an denen die erste Ableitung dieser Funktion den Wert 1 hat.

b) Weisen Sie nach, daß die Funktion f an der Stelle

$$x_0 = \frac{3}{2} \text{ den Anstieg 4 hat.}$$

c) Bilden Sie die 2., die 3. und die 4. Ableitung der Funktion.
Geben Sie eine Vermutung für die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$ an. (Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Fakultätsschreibweise zu verwenden.)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß diese Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ richtig ist.

⑦ Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der Funktionen $y = f(x) = \sin x$ und $y = g(x) = \tan x$?

⑧ Gegeben ist die Funktion f durch

Pr $y = f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \quad (x \in P)$

- a) Bilden Sie die ersten drei Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.
- b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für die n -te Ableitung der Funktion f gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{2}x}$$

- c) Berechnen Sie $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ und $f^{(n)}(0)$. Diese Werte bilden eine Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_1 = f'(0); a_2 = f''(0); a_3 = f'''(0); \dots; a_n = f^{(n)}(0); \dots$$

Zeigen Sie für die Folge (a_n) , daß der Quotient

aufeinanderfolgender Glieder $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstant ist.

- d) Aus den Gliedern dieser Zahlenfolge (a_n) läßt sich die unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bilden.

Berechnen Sie deren Summe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

9. Gegeben sind Funktionen mit Gleichungen der Form

$$y = f(x) = \frac{a}{x^2} \quad (x \in P; x > 0; a \in P; a > 0)$$



- a) Skizzieren Sie den Graph der Funktion für $a = 4$ im Intervall $0 < x \leq 4$.
- b) An das Bild einer beliebigen Funktion $y = f(x) = \frac{a}{x^2}$ wird im Punkt $P_0(1; a)$ die Tangente gelegt.

Bilden Sie die erste Ableitung dieser Funktion, und zeigen Sie, daß die Abszisse des Schnittpunktes der Tangente mit der x -Achse von a unabhängig ist.

T h e m a 7

W

Kurvenuntersuchungen ganzer rationaler Funktionen, gebrochen rationaler Funktionen und nichtrationaler Funktionen

Ann.: In den Aufgaben 1 bis 3 sind Kurvenuntersuchungen durchzuführen. Verwenden Sie hier den Algorithmus, den Sie im Unterricht kennengelernt haben. Ziel der Untersuchung ist das Skizzieren der Graphen!

① Untersuchen Sie die ganze rationale Funktion

a) $y = f(x) = x^3 - x$ b) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

② Untersuchen Sie die gebrochen rationale Funktion

a) $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$

b) $y = f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

c) $y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

③ Untersuchen Sie die nichtrationale Funktion

a) $y = f(x) = e^{-x^2}$ b) $y = f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$

c) $y = \sqrt{2x + 1} - 1$

④ Durch die Gleichung



$$y = f(x) = \frac{x^2 + q}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{P}, q \in \mathbb{P}; q \neq 1)$$

sind rationale Funktionen gegeben.

- a) Untersuchen Sie, ob diese Funktionen für $q > 0$ bzw. für $q < 0$ Nullstellen besitzen. (Begründen Sie Ihre Aussagen!)
- b) Ermitteln Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- c) Jede derartige Funktion hat genau eine lokale Extremstelle. Berechnen Sie diese und den zugehörigen Funktionswert. (Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung kann verzichtet werden.)

⑤. Durch die Gleichung



$$y = f(x) = e^{x(x^2 - a)} \quad (x \in \mathbb{P}; a \in \mathbb{P})$$

sind nichtrationale Funktionen gegeben.

- a) Bilden Sie die erste und zweite Ableitung.
- b) Für $a = 3$ hat das Funktionsbild zwei lokale Extrempunkte. Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Minimumpunktes.
- c) Weisen Sie nach, daß die Funktionen für $a < -1$ keine Extrema haben.

⑥. Gegeben ist die Funktion f durch



$$y = f(x) = \frac{9 - x^2}{x^2 + 3} \quad (x \in \mathbb{P})$$

- a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!
- b) Weisen Sie nach, daß die Funktion keine Pole hat!
- c) Ermitteln Sie Anzahl, Art und Koordinaten der Extrempunkte des Bildes der Funktion!
- d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen!
- e) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-7 \leq x \leq 7$!

7. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung

$\diamond$ $y = f(x) = ax^3 + cx + d$ (x, a, c, d sind Elemente aus P)

Das Bild der Funktion schneidet die y -Achse im Punkt $P_1(0; 4)$. Die Kurve hat in diesem Punkt P_1 den Anstieg $m_1 = -3$

- Berechnen Sie die Koeffizienten c und d !
- Der Punkt $P_E(1; y_E)$ ist ein Extrempunkt des Bildes der Funktion.
Bestimmen Sie den Koeffizienten a !
- Berechnen Sie die Ordinate y_E des Extrempunktes, und weisen Sie die Art des Extremums nach!
- Ermitteln Sie die Koordinaten des zweiten Extrempunktes!

8. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{-x^4}{32} + \frac{3x^2}{4} - 5 \quad (x \in P)$$

- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion!
- Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte!
- Skizzieren Sie das Bild der Funktion sowie die Bilder der ersten drei Ableitungen!
- Weisen Sie nach, daß das Bild von $f(x)$ nur im 3. und 4. Quadranten liegt!
- Ermitteln Sie die Anstiege der beiden Wendetangenten!

9. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung

$y = f(x) = x^3 - 3a^2x + b \quad (a \in G; b \in \mathbb{R})$

- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes!
- Zeigen Sie, daß die Abszissen der Extrempunkte Elemente des Bereiches der ganzen Zahlen sind.
- Geben Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes für $a = 2$ und $b = -\frac{1}{2}$ an.

10. Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung

$y = f(x) = \ln 2x \quad x \in P; x > 0$

- a) Ergänzen Sie die folgende Wertetafel:

x	0,1	0,3	0,5	1	2	4	(Tabelle übertragen!)
y		- 0,51		0,69			

- Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $\langle 0,1; 4 \rangle$
- Das Bild der Funktion schneidet die x -Achse im Punkt P_0 . Berechnen Sie den Anstieg der Tangente im Punkt P_0 an die Kurve.
- Das Bild jeder Funktion $y = g(x) = \ln ax$ ($x > 0; a > 0$) schneidet die x -Achse im Punkt $Q(\frac{1}{a}; 0)$.

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente in Q an das Funktionsbild.

Begründen Sie, daß für jedes $a > 0$ diese Tangente die y -Achse im Punkt $R(0; -1)$ schneidet.

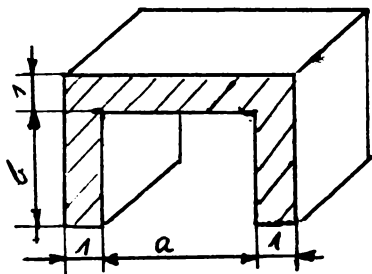
Thema 8Extremwertaufgaben

1. Zum Schutz gegen mechanische Beschädigungen werden unterirdisch verlegte Kabel mit Formstücken aus Beton so abgeschirmt, daß die Kabel in einem Hohlraum liegen (siehe Skizze).



Der Hohlraum muß eine rechteckige Querschnittsfläche von 18 dm^2 Inhalt haben. Wand- und Deckenstärke betragen jeweils 1 dm.

Für die Herstellung der Formstücke soll möglichst wenig Beton verbraucht werden, d.h., der Inhalt der in der Skizze schraffierten Fläche soll minimal werden.



Berechnen Sie für diesen Fall die Abmessungen a und b der Querschnittsfläche des Hohlraumes.

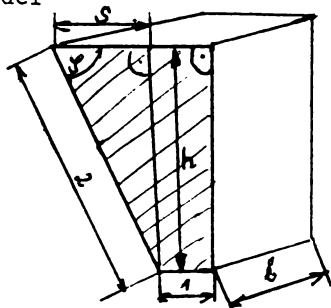
Skizze nicht maßstäblich
(Maßangabe in dm)

2. Ein Abfallcontainer hat die in der Skizze dargestellte Form. Damit er bei konstanter Breite b ein möglichst großes Fassungsvermögen erhält, muß der Inhalt der in der Skizze hervorgehobenen Seitenfläche maximal werden.



a) Geben Sie sowohl die Höhe h als auch die Strecke s in Abhängigkeit vom Winkel α an.

b) Stellen Sie den Inhalt A der hervorgehobenen Seitenfläche als Funktion des Winkels α dar.



Skizze nicht maßstäblich
(Maßangabe in m)

- c) Bestimmen Sie den Winkel α , daß der Inhalt seiner Seitenfläche maximal wird.

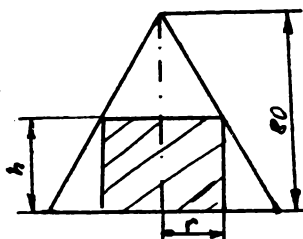
Hinweis: Auf den Nachweis des Maximums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.

- ③. Ein Raketenkopf hat die Form eines geraden Kreiskegels (Grundkreisradius 16 cm, Höhe 80 cm). Er soll einen zylindrischen Behälter für einen Meßgerätesatz aufnehmen (siehe Skizze).



Aus technischen Gründen soll die Oberfläche des Zylinders (Grund-, Deck- und Mantelfläche) maximalen Flächeninhalt erhalten.

Berechnen Sie den Radius r und die Höhe h des Zylinders für diesen Fall.



Skizze des Achsenschnitts nicht maßstäblich
(Angabe in cm)

- ④. Es soll ein allseitig geschlossener quaderförmiger Container gebaut werden, der folgende Bedingungen erfüllt:



Das Volumen beträgt $9,0 \text{ m}^3$,

die Länge ist doppelt so groß wie die Breite,

der Inhalt der Oberfläche soll minimal sein.

Berechnen Sie die Abmessungen dieses Containers!

- ⑤ Für die Wurfhöhe eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit beim senkrechten Wurf nach oben gilt

$$h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Dabei ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers und g die Fallbeschleunigung.

- Nach welcher Zeit erreicht der Körper die größte Höhe?
- Wie groß ist diese Höhe?

- ⑥ Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen



$$y = f(x) = \frac{1}{4} x^2 + 2 \quad (x \in P) \text{ und}$$

$$y = g(x) = x - 2 \quad (x \in P; x \geq 0)$$

- Eine der beiden Funktionen hat eine Nullstelle. Berechnen Sie diese!
- Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen im Intervall $0 \leq x \leq 4$ in einem Koordinatensystem.
- Bilden Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$!
- Schneidet eine Parallele zur y -Achse die Bilder der Funktionen f und g in je einem Punkt, so stellt

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

den Abstand dieser beiden Punkte dar.

Berechnen Sie diejenige Abszisse x_E , für die dieser Abstand minimal wird!

Berechnen Sie diesen minimalen Abstand!

Thema 9

W

Bestimmtes und unbestimmtes Integral; Grundintegrale; Integrationsregeln; Integration durch Substitution; Mittelwertsatz der Integralrechnung; Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- ①. Geben Sie zu den Funktionen $y = f(x)$ die unbestimmten Integrale an:

a) $y = x^2 + 5$

b) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

c) $y = \cos x - \sin x$

d) $y = \frac{1}{x} + 3x^2$

e) $y = \pi \cdot 5x$

f) $y = \sin 3x$

g) $y = \cos (x+3)$

h) $y = \sqrt{3x + 2}$

i) $y = e^{6x}$

j) $y = 5^{\pi x}$

(Bei f) bis j) substituieren!)

- ②. a) Ermitteln Sie die Menge aller Stammfunktionen F zu $f(x) = 4x$

b) Zeichnen Sie die Graphen für $c_1 = 0$, $c_2 = 1$,

$c_3 = -\frac{1}{2}$, und erläutern Sie daran die geometrische Bedeutung der Integrationskonstanten c .

c) Welchen Anstieg haben die unter a) ermittelten Funktionen an der Stelle $x_0 = -1$?

d) Geben Sie die Stammfunktion an, die an der Stelle $x_0 = 1$ den Funktionswert -1 hat.

- ③ Berechnen Sie die bestimmten Integrale mit den angegebenen Substitutionen.

a) $\int_1^2 x \sqrt{x-1} \, dx \quad t = x - 1$

b) $\int_1^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 2}} \, dx \quad t = 2x^2 + 2$

- ④ Für $y = x^2$ und $a = 0$, $b = 2$ ist das $\int$ anzugeben, für das gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) (b - a)$$

Veranschaulichen Sie an diesem Beispiel den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

- ⑤ Lösen Sie die Gleichung $\int_{-x}^x (3t^2 + 2t) dt = 16$

und machen Sie die Probe!

- ⑥ a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

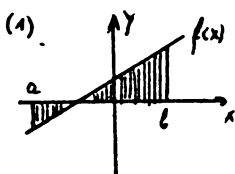
$\boxed{Pr}_V \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx$

$\boxed{Pr}_V$ b) Gegeben ist $\int_0^t \cos x \, dx = \frac{1}{2} \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$

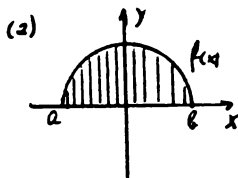
Berechnen Sie t !

Thema 10Anwendung der Integralrechnung

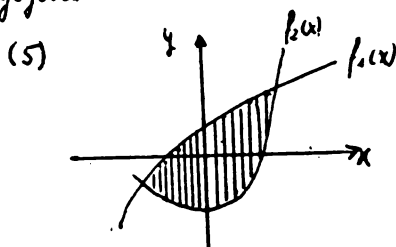
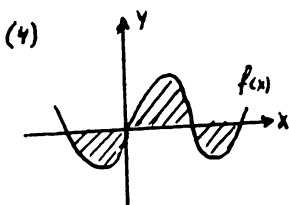
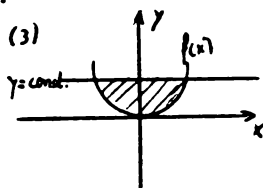
- ① Erläutern Sie, wie Sie den Inhalt folgender schraffierter Flächen berechnen, wenn die jeweilige Funktionsgleichung gegeben ist!



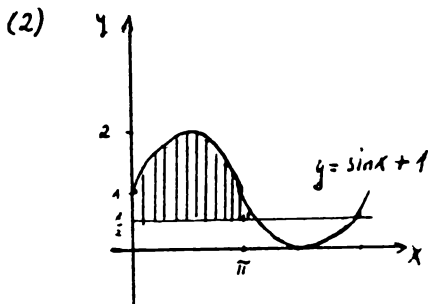
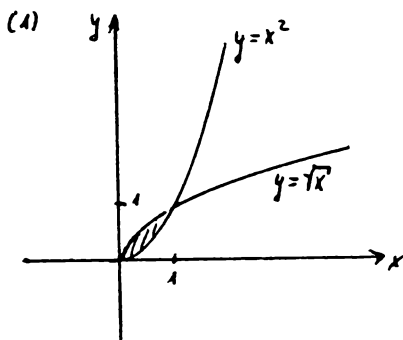
a und b gegeben



*a und b sind
nicht gegeben*



- ② Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Flächen. Erläutern Sie die Lösungsschritte!



3. Gegeben ist die Funktion f_1 durch

$\diamond_{Pr}$ $y = f_1(x) = 2\sqrt{x - 4}$ ($4 \leq x \leq 13$; $x \in P$)

- a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f_1 !
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f_1 , von der x -Achse und der Geraden $x = 13$ eingeschlossen wird!
- c) Im Punkt $B(8; y_B)$ wird an das Bild von f_1 die Tangente gelegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!
- d) Das Bild jeder der Funktionen

$$y = f(x) = c\sqrt{x - c^2} \quad (c \in P; c > 0) \text{ hat eine Tangente mit der Gleichung } y = \frac{1}{2}x$$

Berechnen Sie die Abszisse des jeweiligen Berührungspunktes (in Abhängigkeit von c)!

4. Das Bild der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{2}x + \cos 2x$ und

$\diamond_{Pr}$ die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche allseitig. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

5. Die Bilder der Funktionen

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (x \in P)$$

$$y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 \quad (x \in P)$$

begrenzen eine Fläche allseitig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

6. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung

$\diamond_{Pr}$ $y = f(x) = \sqrt{x + 1} - 1 \quad (x \in P; x \geq -1)$

- a) Ergänzen Sie folgende Wertetabelle dieser Funktion

<u>x</u>	-1	0	8
y		1	

(Tabelle übertragen!)

- b) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall

$$-1 \leq x \leq 8$$

- c) Im I. Quadranten liegt eine Fläche, die vom Bild der Funktion, der x-Achse und der Geraden $x = 8$ vollständig eingeschlossen wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt.

- ⑦ Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Bilder der Funktionen $y = f(x) = e^x$ und $y = g(x) = e^{-x}$ und der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $P(1; 0)$ begrenzt wird.

- ⑧ Gegeben sind die Funktionen mit den Gleichungen

$$y = f_1(x) = \sin 2x$$

$$y = f_2(x) = -2 \sin x \quad \text{im Intervall } \langle 0; \pi \rangle$$

- a) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen in ein Koordinatensystem.
- b) Die Bilder der Funktionen sollen von einer Parallelen zur y-Achse in zwei Punkten P_1 und P_2 so geschnitten werden, daß die Länge der Strecke P_1P_2 ein Maximum wird.
Berechnen Sie die Abszissen der Schnittpunkte P_1 und P_2 .
- c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Bildern der beiden Funktionen im genannten Intervall begrenzt wird!

9. Gegeben sind die Funktionen g und h durch

$\diamond 7r$ $y = g(x) = 3 + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi; x \in P)$ und
 $y = h(x) = 1 + \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi; x \in P)$

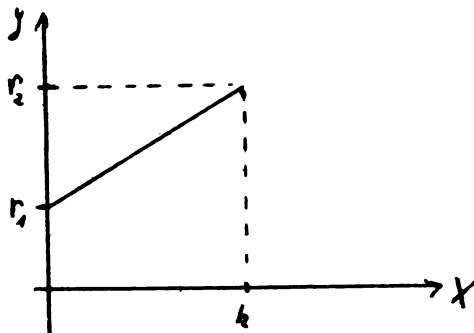
- a) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen g und h in ein und demselben Koordinatensystem!
- b) Die Bilder der Funktionen g und h sollen von einer Parallelen zur y -Achse so in zwei Punkten P und Q geschnitten werden, daß die Länge der Strecke PQ minimal wird.
 Berechnen Sie die Abszisse der Punkte P und Q !
- c) Die y -Achse, die Bilder der Funktionen g und h und die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
 Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

10. Lassen Sie das Parabelstück mit der Gleichung
 $y = 4x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$ einmal um die x -Achse, zum anderen um die y -Achse rotieren. Berechnen Sie hierfür die Volumina!

11. Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Formel zur Berechnung des Volumens eines Kreiskegestumpfes

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Lassen Sie dazu das in der Skizze gegebene Geradenstück um die y -Achse rotieren!



- 12) Das Bild der Funktion $y = f(x) = 6 - \frac{6}{x^2}$ und die Geraden $x = 2$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A allseitig.

- Zeigen Sie, daß die Nullstellen von $y = f(x)$ außerhalb des Intervalls $\langle 2; 6 \rangle$ liegen!
- Berechnen Sie den Flächeninhalt A!
- Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht!

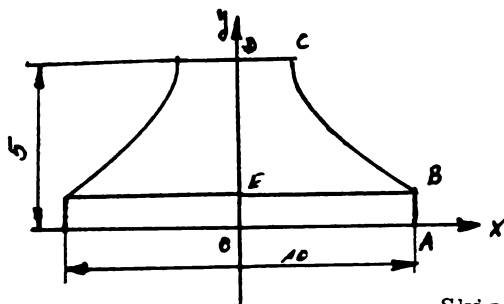
- 13) Gegeben ist $f(x) = 2x + 6$ und

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$$

- Bestimmen Sie $y_1 = F(x)$, wobei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ mit dem absoluten Glied Null ist.
- Bestimmen Sie $y_2 = g'(x)$
- Bestimmen Sie die Nullstellen und Extrempunkte von (1) y_1 und (2) y_2
- Zeichnen Sie die Bilder von y_1 und y_2
- Bestimmen Sie die beiden Schnittpunkte $S_1 [x_{s_1}; y_{s_1}]$ und $S_2 [x_{s_2}; y_{s_2}]$ der Bilder der Funktionen.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den Bildern der Funktionen y_1 und y_2 allseitig begrenzt wird. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation der Fläche um die y-Achse entsteht.
- Bestimmen Sie den ~~den~~ parallel zur y-Achse gemessen - ~~den~~ maximalen Abstand der Bilder von y_1 und y_2 .

14.

Die Skizze zeigt den Aufriß eines Stativfußes, der durch Rotation der Flächen OABE und EBCD um die y-Achse entsteht.



Skizze nicht maßstäblich
(Maßangaben in cm)

- a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $x \cdot y = 5$ im Intervall $1 \leq x \leq 5$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem! Stellen Sie eine Wertetabelle auf! (Koordinateneinheit: 1 cm)

Geben Sie Koordinaten der Punkte B und C an!

- b) Ermitteln Sie das Volumen des zylindrischen Teiles des Stativfußes!
- c) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen des Teilkörpers, der bei Rotation der Fläche EBCD um die y-Achse entsteht!
- d) Geben Sie die Masse des Stativfußes an!

(Dichte: $\rho = 7,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$)

Thema 11

W

Begriff des Vektors; Rechenoperationen mit Vektoren; Koordinaten- und Komponentendarstellung von Vektoren; Koordinatensysteme in Ebene und Raum; Skalar- und Vektorprodukt; Geradengleichungen; Lagebeziehungen zwischen Geraden

- ①. Gegeben sind die Vektoren $a(3; -1; 0)$ und $\bar{a} = i + 3j$. Berechnen Sie:
- $|a|$; $|\bar{a}|$
 - $\angle(a; \bar{a})$
 - $|a + \bar{a}|$
 - λa mit $\lambda = -\frac{1}{2}$
 - Veranschaulichen Sie die Vektoren in einem geeigneten Koordinatensystem
- ②. a) Unter welchen Bedingungen ist mit $a \neq 0$ $b \neq 0$
- $a \cdot b > 0$
 - $a \cdot b = 0$
 - $a \cdot b < 0$
 - $|a \times b| = 0$
 - $|a \times b| = |a||b|$
- b) Vereinfachen Sie:
- $j \times (i + k) - k \times (j - i) + i \times (i + k)$
 - $(3a - b) \times (2a + b)$
- c) Überprüfen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:
- $|a|a^2 = a^3$ (wobei $a = |a|$)
 - $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2$
 - $(a_1 \cdot a_2)^2 = a_1^2 \cdot a_2^2$
 - $\lambda(a + z) = \lambda a + \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
- ③. Gegeben sind die Vektoren $a = 6i + 2j + 3k$ und $b = 9i + 3j + 4k$.
-  Ermitteln Sie $z = 3a - 2b$ und das Vektorprodukt $z \times z$.
- ④. Berechnen Sie die Länge der Seiten, die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A (2; -5; 1), B (6; -3; 5), C (6; -4; 9).

5. a) Leiten Sie die Gleichungen der Geraden

$$z = z_0 + t\alpha \quad \text{und} \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

her. Erläutern Sie die darin auftretenden Größen.

- b) Entwickeln Sie aus diesen Gleichungen die vektorfreien Gleichungen für die Ebene

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{und} \quad (x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

(Skizzen!)

6. Gegeben: $P_0 [2; 3]$ $P_1 [-1; 2]$

- a) Geben Sie die zu P_0 und P_1 gehörenden Ortsvektoren $\mathbf{z}_0$ und $\mathbf{z}_1$ an!

- b) Bestimmen Sie $\overrightarrow{P_0 P_1} = \alpha = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0$

- c) Zeichnen Sie $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}_1$, α sowie die durch P_0 und P_1 bestimmte Gerade g in ein Koordinatensystem!

- d) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an (in Vektorform mit Parameter t)!

- e) Kennzeichnen Sie die Teile der Geraden mit
(1) $t < 0$ und (2) $t > 1$

7. Über die Lageverhältnisse zweier Geraden können folgende Aussagen getroffen werden:

- a) g_1 und g_2 schneiden sich unter einem beliebigen Winkel
b) g_1 und g_2 sind zueinander orthogonal
c) g_1 und g_2 sind identisch
d) g_1 und g_2 verlaufen parallel
e) g_1 und g_2 sind zueinander windschief

Geben Sie für die Fälle a) bis e) die Bedingungen an und nennen Sie je ein Beispiel. (Hinweis: Unterscheiden Sie die Lageverhältnisse in der Ebene und im Raum.)

8. Gegeben sind die zwei Geraden

$$g_1: \vec{r} = (3-2t) \vec{i} + (2+4t) \vec{j} + (-1+t) \vec{k}$$

$$g_2: \vec{r} = (2+3t) \vec{i} + 4 \vec{j} + (3 - t) \vec{k}$$

Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden!

9. Bei einer gemeinsamen Übung der Luft- und Seestreitkräfte unserer NVA ortet eine Radarstation der Küstenüberwachung ein Schiff nacheinander in den Punkten $P_1 (30; 12; 0)$ und $P_2 (22; 8; 0)$.

Pr

Der Kurs des Schiffes verlaufe geradlinig.

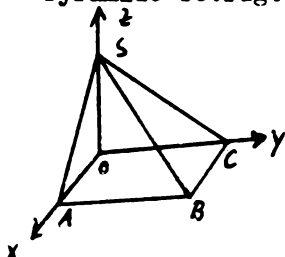
Zur Bekämpfung des Schiffes wird von einem Flugzeug aus im Punkt $P_3 (10; 7; 3)$ eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen.

Die Flugbahn der Rakete wird als geradlinig angenommen. Richtungsvektor dieser Flugbahn ist $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ (Koordinatenangaben in km)

- Ermitteln Sie je eine Parametergleichung für den Schiffskurs und für die Flugbahn der Rakete.
- Das Schiff wird von der Rakete im Punkt S getroffen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.
- Berechnen Sie den Winkel zwischen der Bahn der Rakete und dem Kurs des Schiffes.
- Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat die Rakete, wenn ihre Flugzeit vom Abschusspunkt bis zum Treffpunkt 7 Sekunden beträgt?

10. Die Skizze zeigt eine schiefe Pyramide, deren quadratische Grundfläche OABC in der xy-Ebene eines Koordinatensystems $\{\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ liegt. Die Spitze S befindet sich auf der z-Achse. Die Länge der Seite der quadratischen Grundfläche beträgt $a = 8$ cm; die Höhe der Pyramide beträgt $h = 6$ cm.

Pr



$$a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AO} = \overline{OC}$$

- a) Geben Sie die Koordinaten der fünf Eckpunkte der Pyramide an.
- b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seitenkante AS.
Geben Sie die Vektoren MB und MC in Komponenten-
darstellung an.
- c) Berechnen Sie $\angle BMC$
- d) Auf der Grundkante OC der Pyramide existiert ein Punkt P_0 derart, daß $\overline{MP_0} \perp \overline{MB}$ gilt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 .

- ⑪ Gegeben sind drei Eckpunkte eines Parallelogramms
A (-7; 2; 0) B (2; -1; 0) C (-1; 8; 0)

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunktes

$$D [x_0; y_0; 0] \quad x_0 < 0; \quad y_0 > 0$$

- b) Beweisen Sie, daß dieses Parallelogramm kein Rechteck ist!

- ⑫ In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A (-2; 8; 2) und B (-4; 10; 10) gegeben.



- a) Stellen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte A und B verläuft.
- b) Weisen Sie nach, daß der Punkt C (-2; 2; 8) nicht auf g liegt.
- c) Berechnen Sie die y-Koordinate und den zugehörigen Parameterwert für den Punkt D (2; y_D ; -14). D liegt auf der Geraden g.
- d) Berechnen Sie den $\angle AOC$ und den $\angle (\overline{OA}; \hat{z})$
(O ist der Ursprung des Koordinatensystems)
- e) Weisen Sie nach, daß das Viereck OABC ein Parallelogramm ist. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Parallelogramms.

f) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E, in dem die Gerade die xy-Ebene durchstößt.

g) Stellen Sie die Gleichung einer Geraden g_1 auf, die zu g parallel verläuft und durch den Punkt F (-1;3;5) geht.

h) Stellen Sie die Gleichung einer Geraden g_2 auf, die zu g orthogonal verläuft und durch den Punkt F (-1;3;5) geht.

③ In einem Koordinatensystem $\{0; i; j; k\}$ ist ein Dreieck durch die Eckpunkte O (0;0;0), A (2;2;1) und B (1;4;-1) gegeben.

a) Weisen Sie nach, daß die Seiten $\overline{OA}$ und $\overline{AB}$ gleiche Länge haben.

b) Weisen Sie nach, daß dieses Dreieck rechtwinklig ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

d) Durch die Punkte A und B geht die Gerade g . Geben Sie eine Gleichung für g an. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0 , in dem diese Gerade die yz-Ebene durchstößt.

④ In einem räumlichen Koordinatensystem $\{0; i; j; k\}$ sind die Punkte P_1 (2;2;4), P_2 (10;2;9) und P_3 (4;1;4) gegeben.

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g_1 auf, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht!

b) Eine Gerade g_2 geht durch den Punkt P_3 und hat die Richtung des Vektors $a = 2i + j + 2k$. Stellen Sie für die Gerade g_2 eine Gleichung auf!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2 !

d) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2 !

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$!

Thema 12

W

Entstehung, Arten, Ortsdefinitionen, Konstruktionen und Gleichungen der Kegelschnitte; Kegelschnitt und Gerade; Gleichungen der Asymptoten; Tangentengleichungen; Geradengleichungen; Flächenberechnung durch Integration; Differentiation von Wurzelfunktionen

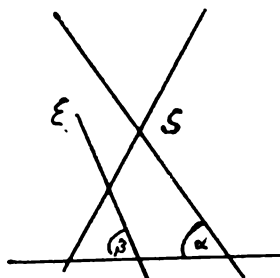
1. Es sei

- K ein gerader Kreiskegel, dessen Mantellinien zur Ebene des Grundkreises k den Neigungswinkel α haben;
- $\mathcal{E}$ eine Ebene, die zur Grundkreisebene von K den Neigungswinkel β hat.

(S liegt nicht auf $\mathcal{E}$)

Erläutern Sie die Entstehung der Kegelschnitte. Unterscheiden Sie dabei folgende Fälle:

- a) $0 \leq \beta \leq \alpha$
- b) $\beta = 0$
- c) $\beta = \alpha$
- d) $\frac{\pi}{2} > \beta > \alpha$



2. Wenden Sie die Ortsdefinitionen der Kegelschnitte auf die punktweise Konstruktion folgender Kegelschnitte an:

- a) Ellipse mit $S_1 (-5;0)$ $S_2 (5;0)$ $F_1 (-4;0)$
 $F_2 (4;0)$
 - b) Kreis mit $r = 3$ cm und $M (2;1)$
 - c) Hyperbel mit $M (0;0)$ und den Gleichungen der Asymptoten
 $y = \frac{3}{4} x$ bzw. $y = -\frac{3}{4} x$
 - d) linksoffene Parabel mit $S (0;0)$ und dem Punkt $P_0 (-1;2)$ auf der Parabel.
- Geben Sie für die Fälle a) bis d) die Mittelpunkts-
gleichungen an.

- ③ Die Halbachsen einer Ellipse seien $a = 5$ und $b = 4$. Ihr Mittelpunkt habe die Koordinaten $M(2; -1)$.
- Wie heißt die Mittelpunktsleichung der Ellipse?
 - Geben Sie die Koordinaten der Brennpunkte an.
 - Nennen Sie die Gleichungen der Achsen der Ellipse.
 - Untersuchen Sie, ob die Punkte $P_1(-2; 1)$ und $P_2(1; -5)$ auf, außerhalb oder innerhalb der Ellipse liegen.
- ④ Leiten Sie
- die Gleichung einer Parabel mit $S(0; 0)$ aus der Ortsdefinition,
 - die Gleichung der Tangente an einen Kreis k mit $M(0; 0)$, die durch den Punkt $P_0(x_0; y_0)$ ($P_0 \in k$) verläuft, her. Erläutern Sie die Lösungsschritte an einer Skizze.
- ⑤ Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 4x$
-  a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte der Parabel. Zeichnen Sie diese Parabel im Intervall $0 \leq x \leq 10$.
- Auf der Parabel liegen die Punkte $P_1(x_1; 2)$ und $P_2(9; y_2)$. Berechnen Sie x_1 und y_2 .
 - Zeichnen Sie die Gerade g_1 , die durch P_1 und P_2 verläuft. Geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.
 - Berechnen Sie die Abszisse x_0 des Schnittpunktes der Geraden g_1 mit der x -Achse.
 - Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Parabel und die Gerade g_1 begrenzt wird.
 - Berechnen Sie die Länge der Sehne, die im Brennpunkt der Parabel auf der x -Achse senkrecht steht.
 - Berechnen Sie den Anstieg und den Anstiegswinkel der Tangente an die Parabel im Punkt P_2 .

- h) Die Gerade g_2 mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 2$ berührt die Parabel im Punkt P_3 . Berechnen Sie die Koordinaten von P_3 .
- i) Geben Sie die Gleichung der Geraden g_3 an, die zu g_2 orthogonal ist und durch den Punkt $P_4 (6;0)$ verläuft.

⑥ Eine Hyperbel sei gegeben durch die Koordinaten ihrer Scheitelpunkte $A_1 (-3;0)$ und $A_2 (3;0)$ und ihrer Brennpunkte $F_1 (-5;0)$ und $F_2 (5;0)$.

- a) Konstruieren Sie mindestens zwölf Punkte dieser Hyperbel. Zeichnen Sie diese Hyperbel im Intervall $-6 \leq x \leq 6$.
- b) Geben Sie die Gleichungen dieser Hyperbel und ihrer beiden Asymptoten an.
- c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, geht durch die Scheitelpunkte der Hyperbel. Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf. Zeichnen Sie die Asymptoten und den Kreis in dasselbe Koordinatensystem wie die Hyperbel ein.
- d) Dieser Kreis schneidet einen der Asymptoten im ersten Quadranten im Punkt P_1 . Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 .
- e) Geben Sie die Gleichung der Ellipse an, deren Scheitel sich in den Brennpunkten der Hyperbel und deren Brennpunkte sich in den Scheiteln der Hyperbel befinden.

⑦ Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$$

- a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte A_1 und A_2 und der Brennpunkte F_1 und F_2 .
- b) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Hyperbel. Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $-4 \leq x \leq 4$!

- c) Die Gerade $y = 6$ schneidet diese Hyperbel in den Punkten P_1 und P_2 .

Die Strecken P_1P_2 und A_1A_2 und die Hyperbel begrenzen eine Fläche, die den Achsenschnitt des Innenraumes einer Düse von 6,0 cm Höhe darstellt.

Berechnen Sie den oberen Durchmesser P_1P_2 dieser Düse. (Koordinateneinheit 1 cm)

- d) Der obere Durchmesser der Düse soll auf 8,0 cm vergrößert werden, die Höhe und der untere Durchmesser A_1A_2 bleiben unverändert.

Ermitteln Sie für diesen Fall die Gleichung der Hyperbel!

8. Von jeder Ellipse mit der Gleichung



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \in P, b \in P, a > 0, b > 0)$$

wird eine Fläche eingeschlossen.

Berechnen Sie das Volumen des Rotationsparaboloids, wenn diese Fläche um die x -Achse rotiert.

9. Eine Hyperbel ist durch die Gleichung



$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{gegeben.}$$

- a) Geben Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2 und der Brennpunkte F_1 und F_2 an.

- b) Weisen Sie rechnerisch nach, daß die Punkte

$P_1 (5; \frac{9}{4})$ und $P_2 (5; -\frac{9}{4})$ auf dieser Hyperbel liegen.

- c) Skizzieren Sie diese Hyperbel.

- d) Durch S_1 und P_1 verläuft eine Gerade g_1 , durch S_2 und P_2 eine Gerade g_2 .

Stellen Sie die Gleichungen für die Geraden g_1 und g_2 auf.
Berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes S.

- e) Weisen Sie rechnerisch nach, daß der Schnittpunkt S auf der Ellipse liegt, die den gleichen Mittelpunkt und die gleichen Halbachsen a und b wie die gegebene Hyperbel hat.



10. Eine Ellipse wird von einer Parallelen zur Hauptachse geschnitten. Die Schnittpunkte sind 36 LE voneinander entfernt.

Ein Nebenscheitel und der Mittelpunkt haben von der schneidenden Geraden jeweils einen Abstand von 6 LE.

- a) Stellen Sie die Mittelpunkts Gleichung dieser Ellipse auf.
- b) Konstruieren Sie die Ellipse in einem geeigneten Maßstab.

A n h a n g Schriftliche Reifeprüfung 1977/78

Pflichtaufgaben

1. Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad (x \in P) \quad \text{und}$$

$$y = g(x) = 2x + 4 \quad (x \in P).$$

Die Bilder von f und g schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2 .

a) Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2 !

b) Die Bilder der gegebenen Funktionen begrenzen eine Fläche vollständig.

Fertigen Sie eine Skizze an!

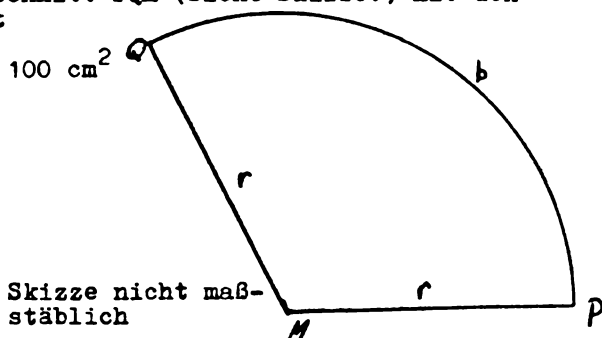
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

c) Es gibt genau eine Tangente an das Bild von f , die parallel zum Bild von g ist.

Berechnen Sie die Abszisse x_0 des Berührungspunktes!

2. Ein Kreisausschnitt PQM (siehe Skizze!) hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{b \cdot r}{2} = 100 \text{ cm}^2$$



Der Umfang des Kreisausschnittes, der sich aus den Strecken MP und MQ und dem Kreisbogen PQ zusammensetzt, soll minimal werden.

Berechnen Sie für diesen Fall

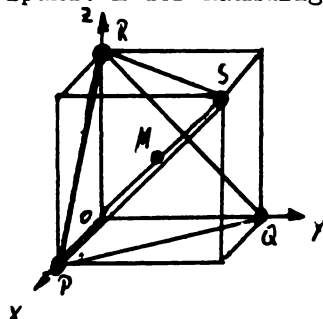
a) die Längen des Radius r und des Bogens b ;

b) die Größe des Winkels $\angle PMQ$ (in Grad)!

3. Das Modell des Methanmoleküls hat die Form eines Tetraeders.

Für Berechnungen ist es zweckmäßig, dieses einem Würfel mit der Kantenlänge 1 Längeneinheit einzu-
beschreiben. Die Skizze zeigt die Lage dieses Würfels in einem Koordinatensystem $\{O; \hat{i}; \hat{j}; \hat{k}\}$. Die Punkte P, Q, R und S kennzeichnen die Lage der Wasserstoffatomkerne.

Die Lage des Kohlenstoffatomkerns wird durch den Mittelpunkt M der Raumdiagonalen OS angegeben.



- Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte P, Q, R, S und M!
- Berechnen Sie den Abstand eines Wasserstoffatomkerns vom Kohlenstoffatomkern für dieses Modell!
- Berechnen Sie die Größe des Bindungswinkels

$$\varphi = \angle PMQ!$$

4. Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = 10 \frac{\ln x}{x} \quad (x \in \mathbb{R}; \quad 0,6 \leq x \leq 6)$$

- a) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetafel!

x	0,6	0,8	4	6
y		-2,8	0	3,5

- b) Das Bild der Funktion f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie **seine** Koordinaten!
Untersuchen Sie die **Art** des Extremums!
- c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f unter Verwendung der berechneten Werte!
5. a) Eine Zahlenfolge ist gegeben durch die rekursive Bildungsvorschrift
 $a_1 = 3$ und $a_{k+1} = a_k + 2^{k+2} \quad (k \in \mathbb{N}; k \geq 1).$
 Berechnen Sie das Glied a_2 dieser Folge!

- b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + h)^2 - 2x_0^2}{h} \quad \text{an der Stelle } x_0 = 3!$$

- c) Gegeben ist

$$\int_0^t \cos x \, dx = \frac{1}{2} \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

Berechnen Sie t !

Wahlaufgaben

Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur e i n e zu lösen.

6.1 Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 1 + \sin 2x \quad (x \in P; 0 \leq x \leq \pi)$$

- Berechnen Sie die Abszissen und Ordinaten der beiden Extrempunkte des Bildes dieser Funktion! Untersuchen Sie die Art der Extrema!
- Skizzieren Sie das Bild der Funktion f !
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird!
- Gegeben sind Funktionen durch

$$y = g(x) = 1 + \sin bx \quad (x \in P; b \in P; b > 0)$$

$P_1(0; 1)$ und $P_2\left(\frac{\pi}{b}; 1\right)$ sind Punkte der Bilder dieser Funktionen.

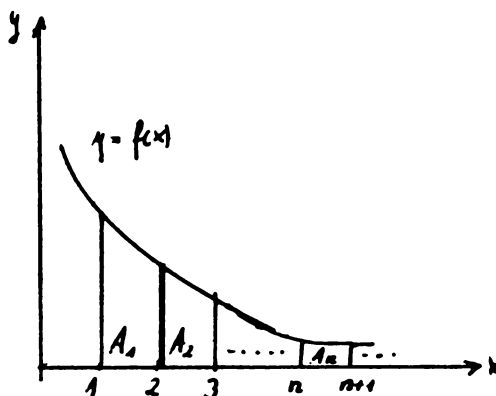
Ermitteln Sie den Wert des Parameters b für den Fall, daß die Tangenten in P_1 und P_2 an das Bild der entsprechenden Funktion aufeinander senkrecht stehen!

6.2 Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in P; x > 0)$$

Das Bild von f , die x -Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 2$ begrenzen die Fläche A_1 vollständig.

Die n -te Fläche A_n wird durch das Bild der Funktion f , die x -Achse und die Geraden $x = n$ und $x = n + 1$ vollständig begrenzt ($n = 1; 2; 3; \dots$) (siehe Skizze!)



Skizze nicht maßstäblich

- Berechnen Sie die Inhalte der Flächen A_1 , A_2 , A_3 und A_n !
- Die Inhalte der Flächen A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n , ... bilden die Glieder einer Zahlenfolge (A_n) .

Berechnen Sie die Glieder s_1 , s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n) !

- Geben Sie eine Vermutung für das n -te Glied s_n dieser Partialsummenfolge an! Beweisen Sie diese Vermutung!

- Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

6.3 Durch die Gleichung $y^2 = 4,8 x$ ist eine Parabel gegeben.

- Die Gerade g_1 mit der Gleichung $y = x$ schneidet diese Parabel in den Punkten P_1 und P_2 .

Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2 !

Berechnen Sie die Koordinaten x_M und y_M des Mittelpunktes M_1 der Strecke $\overline{P_1 P_2}$!

- Die zu g_1 parallele Gerade g_2 mit der Gleichung $y = x + 0,9$ schneidet die obige Parabel $y^2 = 4,8 x$ in P_3 und P_4 .

Weisen Sie nach, daß die Ordinate des Mittelpunktes M_2 der Strecke $\overline{P_3 P_4}$ gleich der Ordinate von M_1 ist!

- c) Weisen Sie nach, daß für jede Parabel $y^2 = 2px$ gilt:
 Schneidet eine Gerade $y = x + n$ diese Parabel in den Punkten Q_1 und Q_2 , so ergibt sich für die Ordinate y_H des Mittelpunktes H der Strecke $\overline{Q_1 Q_2}$ $y_H = p$.
- d) Geben Sie an, welche Bedingung für n (in Abhängigkeit von p) erfüllt sein muß, damit die Gerade $y = x + n$ die Parabel $y^2 = 2px$ ($p > 0$) in zwei Punkten schneidet!

