

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

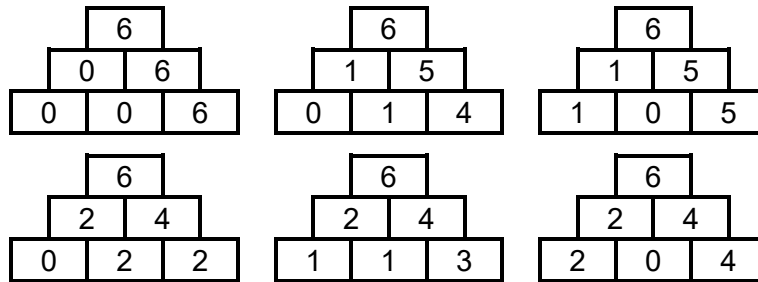
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu den Sommeraufgaben 2026: Rechenmauern

Aufgabe 1. Wie viele verschiedene Rechenmauern mit drei Zeilen und mit dem Gipfelwert 6 gibt es? Zeige, wie du dein Ergebnis gefunden hast!

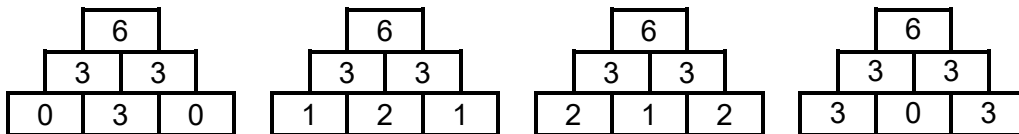
Antwortsatz: Es gibt 16 verschiedene dreizeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 6.

Begründung: Wir schreiben einige Rechenmauern auf und achten darauf, alle Möglichkeiten in der 2. Zeile zu finden. Die Auflistung beginnt mit:



Wir können diese Rechenmauern aber noch spiegeln, so dass in den 2. Zeilen jeweils 6-0, 5-1 oder 4-2 steht. Also sind es bereits $(6 \cdot 2 =)$ 12 verschiedene Rechenmauern.

Nun betrachten wir noch die dreizeiligen Rechenmauern mit dem Gipfelwert 6 und der 2. Zeile 3-3:



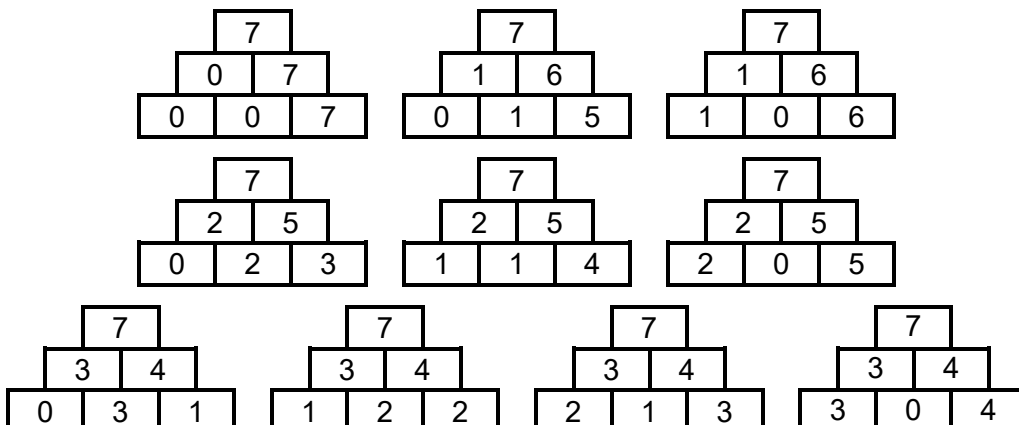
Hierbei ergeben gespiegelte Rechenmauern keine neuen Fälle (weil die Zahlen auf jeder der Rechenmauern symmetrisch angeordnet sind).

Somit gibt es insgesamt $(12 + 4 =)$ 16 verschiedene dreizeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 6.

Aufgabe 2. Wie viele verschiedene Rechenmauern mit drei Zeilen und mit dem Gipfelwert 7 gibt es? Zeige, wie du dein Ergebnis gefunden hast!

Antwortsatz: Es gibt 20 verschiedene dreizeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 7.

Begründung: Wir schreiben wieder einige Rechenmauern auf und achten darauf, alle Möglichkeiten in der 2. Zeile zu finden. Die Auflistung beginnt mit:



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir können alle diese Rechenmauern aber noch spiegeln, so dass in den 2. Zeilen jeweils 7-0, 6-1 5-2 oder 4-3 steht. Also sind es insgesamt $(10 \cdot 2 =)$ 20 verschiedene dreizeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 7.

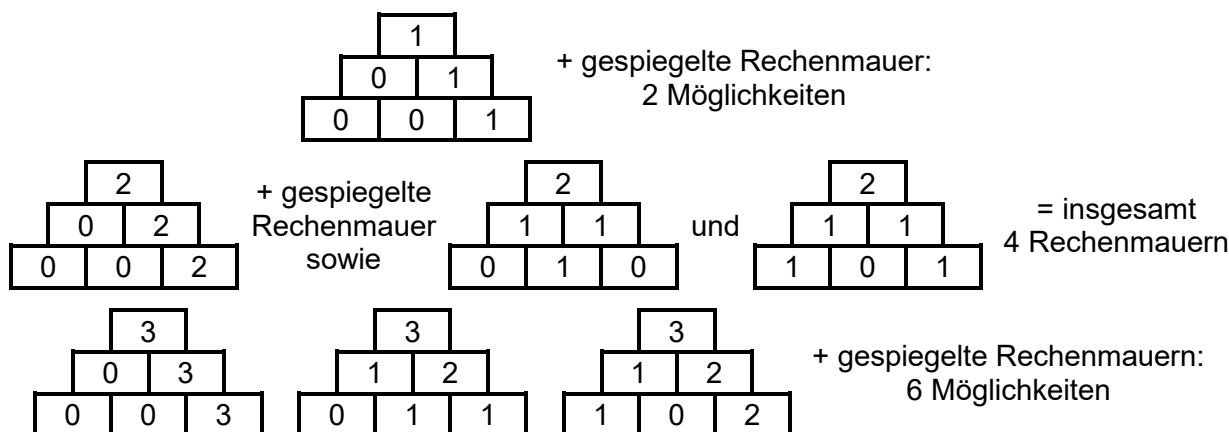
Aufgabe 3) Hast du in den Aufgaben 1 und 2 eine Möglichkeit entdeckt, die Anzahl der verschiedenen Rechenmauern mit drei Zeilen und einem Gipfelwert X zu ermitteln, wenn du die Anzahlen für kleinere Gipfelwerte als X kennst? Schreibe dazu in eine Tabelle, wie viele verschiedene Rechenmauern es für die Gipfelwerte 0, 1, ..., 7 gibt. Ermittle auf diese Weise die Anzahl der verschiedenen Rechenmauern mit drei Zeilen und dem Gipfelwert 13!

Antwortsatz: Es gibt 56 verschiedene dreizeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 13.

Herleitung: Wir schreiben eine Tabelle mit den Gipfelwerten von 0 bis 7 und tragen die bekannten Ergebnisse bereits ein.

Gipfelwert	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Rechenmauern	1	?	?	?	?	?	16	20

Ohne Schwierigkeiten finden wir die Anzahlen für die Gipfelwerte 1, 2 und 3:



Wir ergänzen nun die Tabelle:

Gipfelwert	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Rechenmauern	1	2	4	6	?	?	16	20

Wir erkennen: Vom Gipfelwert 0 zum Gipfelwert 2 kommen 3 Rechenmauern hinzu. Wenn vom Gipfelwert 2 zum Gipfelwert 4 weitere 5 Rechenmauern und vom Gipfelwert 4 zum Gipfelwert 6 weitere 7 Rechenmauern hinzukommen, erhalten wir beim Gipfelwert 6 die Anzahl 16 wie bereits nachgewiesen.

Vom Gipfelwert 1 zum Gipfelwert 3 kommen 4 Rechenmauern hinzu. Wenn vom Gipfelwert 3 zum Gipfelwert 5 weitere 6 Rechenmauern und vom Gipfelwert 5 zum Gipfelwert 7 weitere 8 Rechenmauern hinzukommen, erhalten wir beim Gipfelwert 7 die Anzahl 20 wie bereits nachgewiesen.

Wir vermuten folgende Regeln zur Ermittlung der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten:

Gipfelwert	0		2		4		6	
Anzahl Rechenmauern	1	+ 3 =	4	+ 5 =	9	+ 7 =	16	

Gipfelwert		1		3		5		7
Anzahl Rechenmauern		2	+ 4 =	6	+ 6 =	12	+ 8 =	20

Wir können damit die Tabelle der Anzahlen fortsetzen:

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

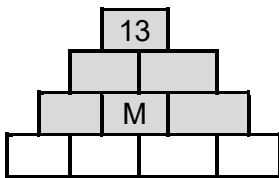
Gipfelwert	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Anzahl	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64

Aufgabe 4) Wie viele verschiedene Rechenmauern mit vier Zeilen und mit dem Gipfelwert 13 gibt es? Zeige, wie du dein Ergebnis gefunden hast!

Antwortsatz: Es gibt 90 verschiedene vierzeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 13.

Herleitung: Es sind sicherlich sehr viele verschiedene Rechenmauern möglich. Wir versuchen deshalb, durch systematisches Probieren die Anzahl aus dreizeiligen Rechenmauern herzuleiten. Um nicht alle Rechenmauern zeichnen zu müssen, verwenden wir statt Zahlen auch Variablen.

Wir stellen fest, dass in einer vierzeiligen Rechenmauer die ersten drei Zeilen eine dreizeilige Rechenmauer bilden. Wir müssen also untersuchen, ob wir jede dreizeilige Rechenmauer durch eine passende 4. Zeile zu einer vierzeiligen Rechenmauer ergänzen können.

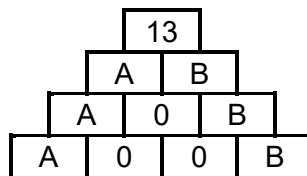


Wir betrachten die dreizeiligen Rechenmauern mit dem Gipfelwert 13 und konzentrieren uns auf den mittleren Wert der 3. Zeile. Der Wert M kann nicht größer als 6 sein, weil sonst der Gipfelwert größer als 13 wird.

Für **M = 0** gibt es 1 Möglichkeit für die Zerlegung der Zahl 0 in der 4. Zeile.

Wegen $A + B = 13$ gibt es also für $M = 0$ insgesamt $1 \cdot 14 = 14$ Rechenmauern

- mit $A = 0$ und $B = 13$, $A = 1$ und $B = 12$, ..., $A = 12$ und $B = 1$ sowie $A = 13$ und $B = 0$.

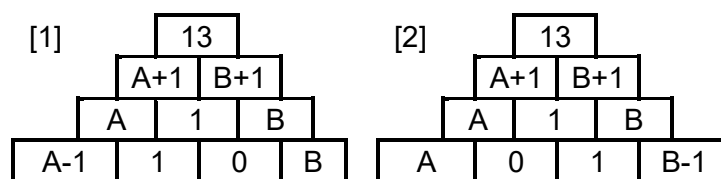


Für **M = 1** gibt es 2 Möglichkeiten für die Zerlegung von 1 für die 4. Zeile. Wegen $A + B = 11$ mit den Einschränkungen

- in der Rechenmauer [1] $A \geq 1$,
- in der Rechenmauer [2] $B \geq 1$,

gibt es für $M = 1$ insgesamt $11 + 11 = 2 \cdot 11 = 22$ Rechenmauern, und zwar

- in [1] mit $A = 1$ und $B = 10$, $A = 2$ und $B = 9$, ..., $A = 11$ und $B = 0$,
- in [2] mit $A = 0$ und $B = 11$, $A = 1$ und $B = 10$, ..., $A = 10$ und $B = 1$.



Für **M = 2** gibt es 3 Möglichkeiten für die Zerlegung der Zahl 2 für die 4. Zeile. Wegen $A + B = 9$ mit den Einschränkungen

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

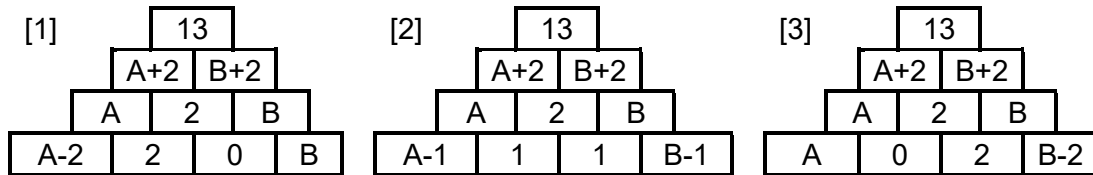
Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

- in der Rechenmauer [1] $A \geq 2$,
- in der Rechenmauer [2] $A \geq 1$ und $B \geq 1$,
- in der Rechenmauer [3] $B \geq 2$,

gibt es für $M = 2$ insgesamt $8 + 8 + 8 = 3 \cdot 8 = 24$ Rechenmauern, und zwar

- in [1] mit $A = 2$ und $B = 7$, $A = 3$ und $B = 6$, ..., $A = 9$ und $B = 0$,
- in [2] mit $A = 1$ und $B = 8$, $A = 2$ und $B = 7$, ..., $A = 8$ und $B = 1$,
- in [3] mit $A = 0$ und $B = 9$, $A = 1$ und $B = 8$, ..., $A = 7$ und $B = 2$.

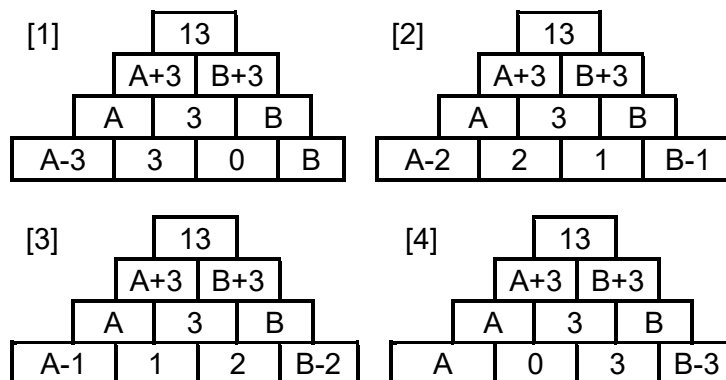


Für $M = 3$ gibt es 4 Möglichkeiten für die Zerlegung der Zahl 3 für die 4. Zeile. Wegen $A + B = 7$ mit den Einschränkungen

- in der Rechenmauer [1] $A \geq 3$,
- in der Rechenmauer [2] $A \geq 2$ und $B \geq 1$,
- in der Rechenmauer [3] $A \geq 1$ und $B \geq 2$,
- in der Rechenmauer [4] $B \geq 3$,

gibt es für $M = 3$ insgesamt $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5 = 20$ Rechenmauern, und zwar

- [1] mit $A = 3$ und $B = 4$, $A = 4$ und $B = 3$, $A = 5$ und $B = 2$, $A = 6$ und $B = 1$, $A = 7$ und $B = 0$,
- [2] mit $A = 3$ und $B = 4$, $A = 4$ und $B = 3$, $A = 5$ und $B = 2$, $A = 6$ und $B = 1$, $A = 7$ und $B = 0$,
- [3] mit $A = 3$ und $B = 4$, $A = 4$ und $B = 3$, $A = 5$ und $B = 2$, $A = 6$ und $B = 1$, $A = 7$ und $B = 0$,
- [4] mit $A = 3$ und $B = 4$, $A = 4$ und $B = 3$, $A = 5$ und $B = 2$, $A = 6$ und $B = 1$, $A = 7$ und $B = 0$.



Für $M = 4$ gibt es 5 Möglichkeiten für die Zerlegung der Zahl 4 für die 4. Zeile. Wegen $A + B = 5$ mit den Einschränkungen

- in der Rechenmauer [1] $A \geq 4$,
- in der Rechenmauer [2] $A \geq 3$ und $B \geq 1$,
- in der Rechenmauer [3] $A \geq 2$ und $B \geq 2$,
- in der Rechenmauer [4] $A \geq 1$ und $B \geq 3$,
- in der Rechenmauer [5] $B \geq 4$,

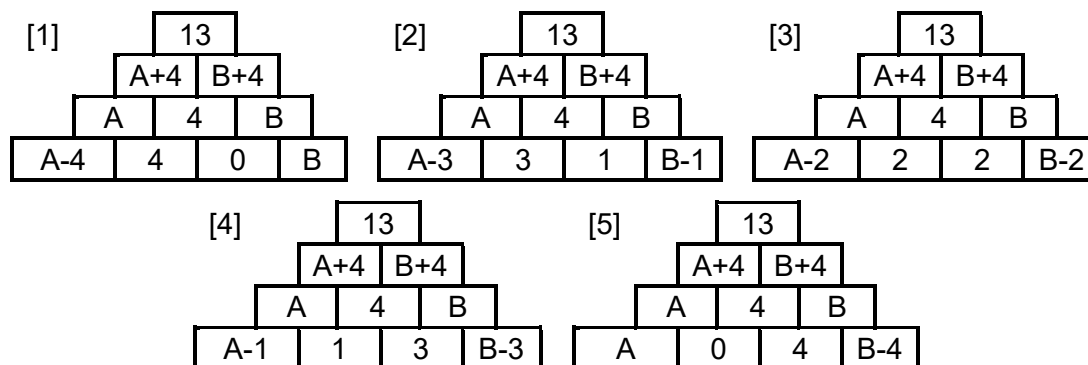
gibt es für $M = 4$ insgesamt $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \cdot 2 = 10$ Rechenmauern, und zwar

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

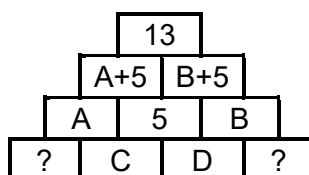
- [1] mit $A = 4$ und $B = 1$, $A = 5$ und $B = 0$,
- [2] mit $A = 3$ und $B = 2$, $A = 4$ und $B = 1$,
- [3] mit $A = 2$ und $B = 3$, $A = 3$ und $B = 2$,
- [4] mit $A = 1$ und $B = 4$, $A = 2$ und $B = 3$,
- [5] mit $A = 0$ und $B = 5$, $A = 1$ und $B = 4$.



Insgesamt ergeben sich bis dahin

$$1 \cdot 14 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 90 \text{ vierzeilige Rechenmauern.}$$

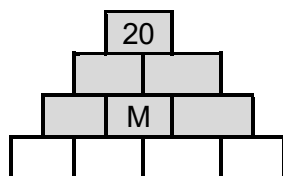
Versuchen wir es noch mit $M = 5$ (oder größer). Dann muss $A + B = 3$ gelten. Zerlegen wir in der 4. Zeile die Zahl 5 mit $C + D = 5$, dann ist $A \geq C$ und $B \geq D$, also $A + B \geq C + D = 5$. Es ist also nicht möglich, eine passende 4. Zeile zu finden.



Aufgabe 5) Untersuche, wie die Anzahlen der verschiedenen drei- und vierzeiligen Rechenmauern zusammenhängen! Was hast du entdeckt, wenn die vierzeilige Rechenmauer den Gipfelwert 20 hat?

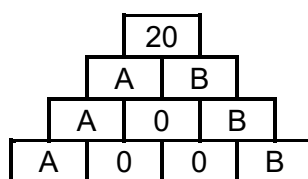
Antwortsatz: Es gibt 252 verschiedene vierzeilige Rechenmauern mit Gipfelwert 20.

Herleitung: Wir wenden das Verfahren aus Aufgabe 4 wieder an.



Wir betrachten die dreizeiligen Rechenmauern mit dem Gipfelwert 20 und konzentrieren uns auf den mittleren Wert der 3. Zeile. Der Wert M kann nicht größer als 10 sein, weil sonst der Gipfelwert größer als 20 wird.

Für $M = 0$ gibt es 1 Möglichkeit für die Zerlegung der Zahl 0 in der 4. Zeile. Wegen $A + B = 20$ gibt es also für $M = 0$ insgesamt $1 \cdot 21 = 21$ Rechenmauern



Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

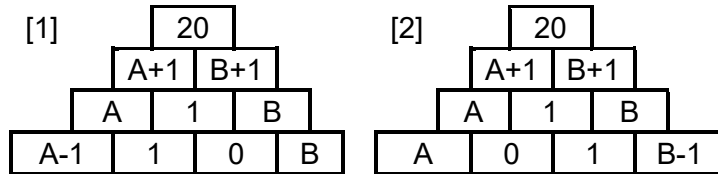
Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Für **M = 1** gibt es 2 Möglichkeiten für die Zerlegung der Zahl 1 in der 4. Zeile. Wegen $A + B = 18$ mit den Einschränkungen

- in der Rechenmauer [1] $A \geq 1$,
- in der Rechenmauer [2] $B \geq 1$,

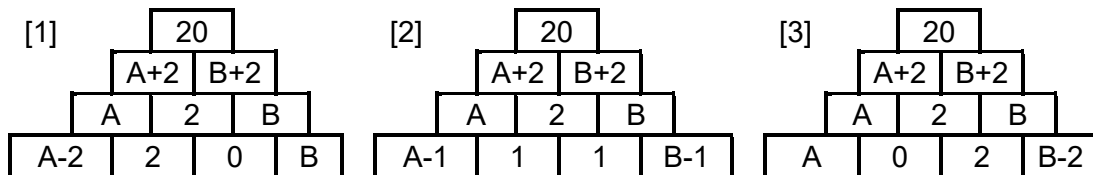
gibt es für $M = 1$ insgesamt $18 + 18 = 2 \cdot 18 = 36$ Rechenmauern.



Für **M = 2** gibt es 3 Möglichkeiten für die Zerlegung der Zahl 2 in der 4. Zeile. Wegen $A + B = 16$ mit den Einschränkungen

- in der Rechenmauer [1] $A \geq 2$,
- in der Rechenmauer [2] $A \geq 1$ und $B \geq 1$,
- in der Rechenmauer [3] $B \geq 2$,

gibt es für $M = 2$ insgesamt $15 + 15 + 15 = 3 \cdot 15 = 45$ Rechenmauern.



Wir setzen die Untersuchung bis **M = 6** fort. Insgesamt ergeben sich bis dahin

$$1 \cdot 21 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 3 = 252 \text{ vierzeilige Rechenmauern.}$$

Setzen wir $M = 7$, so gilt $A + B = 6$. Damit lässt sich aber die 4. Zeile nicht mit geeigneten Zahlen A und B vervollständigen. Ist M noch größer, gilt dies erst recht.

