# MATHEMATIK

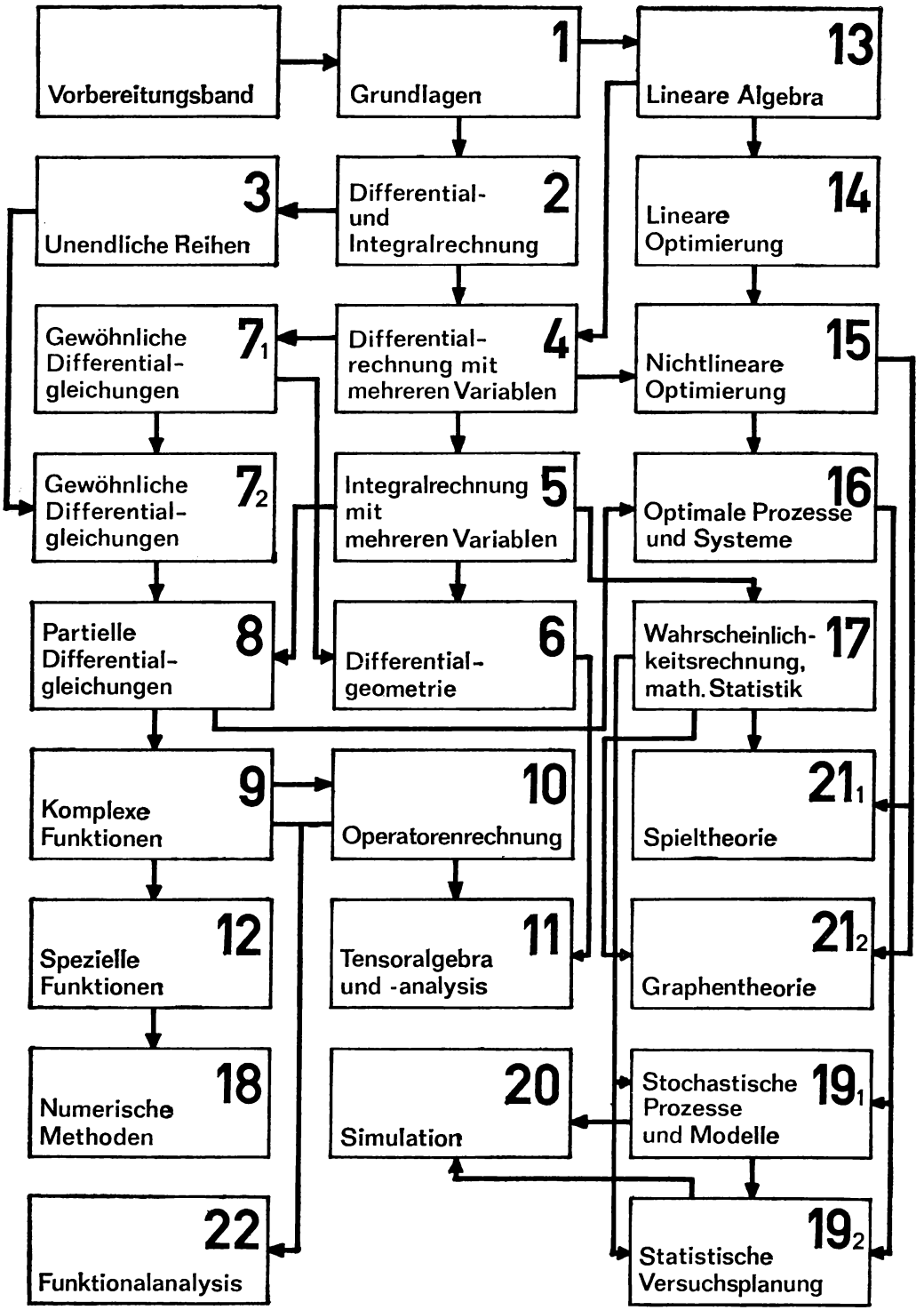
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

4

HARBARTH · RIEDRICH

# Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

# Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER, ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 4

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

DOZ. DR. K. HARBARTH
PROF. DR. T. RIEDRICH

# Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

2., überarbeitete Auflage

BSB B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
LEIPZIG
1978

Verantwortlicher Herausgeber:
Dr. sc. nat. Karl Manteuffel, o. Professor an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg

Autoren:
Dr. rer. nat. Klaus Harbarth, Dozent an der Technischen Universität Dresden
Dr. rer. nat. habil. Thomas Riedrich, o. Professor an der Technischen Universität Dresden

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, August 1978 Minister für Hoch- und Fachschulwesen

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1974

2. Auflage
VLN 294 - 375/35/78 · LSV 1034
Lektor: Dorothea Ziegler
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig
Bestell-Nr. 665 713 9

DDR 8,– M

# Vorwort

Der vorliegende Band der Lehrbuchreihe „Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte" gehört mit den ersten drei Bänden zu denen, auf welchen alle weiteren Bände wesentlich aufbauen. Der Band 4 ist einerseits eine unmittelbare Fortsetzung des Bandes 2: „Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen" und bereitet andererseits den Band 5 „Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen" direkt vor. Bei der Übertragung der gewöhnlichen Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen auf den Fall von Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängen, ergeben sich eine ganze Reihe grundlegender qualitativer Unterschiede in Begriffen, Sätzen und Methoden, so daß ein gesonderter Band speziell über die Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen berechtigt erscheint.

Wie im Band 2 wurden schwierige Beweise im allgemeinen weggelassen und mehr Gewicht auf die anschauliche Interpretation und Anwendung der dargestellten Methoden und Zusammenhänge gelegt.

Als Besonderheiten dieses Bandes möchten wir die folgenden Punkte hervorheben:

1. Eine Einführung in die Vektoranalysis (Abschnitt 3.9.), in der die Differentialrechnung von Feldern behandelt wird, soweit es ohne Begriffe der Tensoranalysis möglich ist.
2. Die Diskussion hinreichender Bedingungen für Extremwerte (Maxima und Minima) mit Nebenbedingungen, die u. W. in der vorhandenen Lehrbuchliteratur noch nicht dargestellt wurden (s. Abschnitt 4.2.4.). Damit ergibt sich eine sehr einfache und praktisch wichtige Behandlung von Standortproblemen mit Restriktionen (s. Abschnitt 4.2.5.1.).
3. Ausführungen über die „Methode der kleinsten Quadrate" und ihre Anwendung bei Ausgleichs- und Approximationsproblemen.

Für wertvolle Hinweise danken wir vor allem dem Herausgeber, Herrn Prof. Dr. K. Manteuffel (TH Magdeburg) und Herrn Prof. Dr. S. Dümmel (TH Karl-Marx-Stadt) – ferner danken wir besonders Frau C. Hertzschuch und Frau I. Kamenz, beide Sachbearbeiterinnen an der Sektion Mathematik der TU Dresden, für die präzise Durchführung aller Schreibarbeiten. Dem Verlag sei für die gute Zusammenarbeit herzlich gedankt.

Dresden, April 1973 K. Harbarth T. Riedrich

Bei der Vorbereitung der zweiten Auflage konnten wir uns auf wertvolle Hinweise von Herrn Prof. Dr. W. Wallisch (FSU Jena) und von Herrn Doz. Dr. E. A. Pforr (TU Dresden) stützen, denen wir für diese Hinweise herzlich danken.

Dresden, September 1977 K. Harbarth T. Riedrich

# Inhalt


| | | |
|---|---|---|
| 1. | Elemente der Theorie der Punktmengen | 6 |
| 1.1. | Grundbegriffe der Theorie der Punktmengen | 6 |
| 1.1.1. | Definition des $R^n$; Abstand im $R^n$ | 6 |
| 1.1.2. | Der Umgebungsbegriff im $R^n$ | 8 |
| 1.1.3. | Gebiete im $R^n$ | 11 |
| 1.2. | Konvergenz von Punktfolgen | 16 |
| 2. | Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler | 20 |
| 2.1. | Begriff einer reellen Funktion von mehreren unabhängigen Variablen | 20 |
| 2.2. | Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variabler | 24 |
| 2.3. | Grenzwertsätze | 26 |
| 2.4. | Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler | 28 |
| 2.5. | Sätze über stetige Funktionen | 30 |
| 2.6. | Vektorfunktionen | 32 |
| 2.6.1. | Begriff der Vektorfunktion | 32 |
| 2.6.2. | Krummlinige Koordinaten im $R^2$ | 33 |
| 2.6.3. | Krummlinige Koordinaten im $R^3$ | 37 |
| 2.6.4. | Parameterdarstellung von Kurven und Flächen | 40 |
| 3. | Partielle Ableitungen und totales Differential | 44 |
| 3.1. | Partielle Ableitungen erster Ordnung | 44 |
| 3.2. | Partielle Ableitungen höherer Ordnung | 48 |
| 3.3. | Das totale Differential | 52 |
| 3.3.1. | Das totale Differential und die Zerlegungsformel | 52 |
| 3.3.2. | Eigenschaften des totalen Differentials | 55 |
| 3.3.3. | Der Gradient einer reellen Funktion $f(x, y, z)$ | 61 |
| 3.3.4. | Der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher | 62 |
| 3.4. | Differentiale höherer Ordnung | 64 |
| 3.5. | Anwendungen des totalen Differentials in der Fehlerrechnung | 67 |
| 3.6. | Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Die verallgemeinerte Kettenregel | 72 |
| 3.6.1. | Zusammengesetzte Funktionen mehrerer Veränderlicher | 72 |
| 3.6.2. | Die verallgemeinerte Kettenregel | 74 |
| 3.7. | Implizite Funktionen. Implizite Differentiation | 80 |
| 3.7.1. | Implizit definierte Funktionen einer Variablen | 80 |
| 3.7.2. | Implizite Differentiation implizit definierter Funktionen einer Variablen | 83 |
| 3.7.3. | Implizite Funktionen von mehreren Variablen | 87 |
| 3.7.4. | Die Differentiation implizit definierter Funktionen mehrerer Variabler | 88 |
| 3.7.5. | Extremwerte impliziter Funktionen | 90 |
| 3.8. | Die Funktionaldeterminante eines Funktionensystems | 92 |
| 3.8.1. | Geometrische Eigenschaften, die mittels der Funktionaldeterminante ausgedrückt werden können | 92 |
| 3.8.2. | Der Multiplikationssatz für Funktionaldeterminanten | 96 |
| 3.8.3. | Die Transformation von Differentialausdrücken bei Transformation der unabhängigen Variablen | 97 |
| 3.8.3.1. | Transformation auf ebene Polarkoordinaten | 98 |

3.8.3.2. Transformation auf Zylinderkoordinaten ... 100
3.8.3.3. Transformation auf Kugelkoordinaten ... 101
3.8.4. Abhängigkeit differenzierbarer Funktionen ... 102
3.9. Skalare Felder und Vektorfelder ... 106
3.9.1. Allgemeine Betrachtungen zum Feldbegriff ... 106
3.9.2. Die Differentialoperatoren der Vektoranalysis ... 111
3.9.2.1. Richtungsableitung und Gradient ... 111
3.9.2.2. Divergenz ... 113
3.9.2.3. Rotation ... 115
3.9.2.4. Der Vektordifferentialoperator $\nabla$. Rechenregeln für die Operatoren grad; div; rot ... 116
3.9.2.5. Differentialoperatoren zweiter Ordnung ... 120

4. Der Satz von Taylor und Extremwertaufgaben ... 123

4.1. Die Taylor-Formel für Funktionen zweier Variabler ... 123
4.2. Extremwertaufgaben ... 129
4.2.1. Notwendige Bedingungen für Extremwerte ... 130
4.2.2. Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Extremwertes ... 131
4.2.3. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen ... 136
4.2.4. Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen relativer Extremwerte für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen ... 141
4.2.5. Beispiele für Extremwertaufgaben ... 144
4.2.5.1. Standortproblem. Steiner-Weber-Problem ... 144
4.2.5.2. Kritische Punkte des elektrischen Feldes ... 146
4.2.5.3. Geometrische Beispiele ... 148
4.3. Die Methode der kleinsten Quadrate ... 149

Lösungen der Aufgaben ... 156

Literatur ... 162

Namen- und Sachregister ... 163

# 1. Elemente der Theorie der Punktmengen

## 1.1. Grundbegriffe der Theorie der Punktmengen

### 1.1.1. Definition des $R^n$; Abstand im $R^n$

In der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen werden alle Überlegungen in der Menge der reellen Zahlen als Grundmenge durchgeführt. Es bezeichne wie bisher R oder $R^1$ die Menge der reellen Zahlen. Wir rechnen im $R^1$ nach den üblichen Regeln. Als Abstand $d(x_1, x_2)$ zweier reeller Zahlen $x_1$ und $x_2$ verwenden wir die Zahl

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|. \tag{1.1}$$

Für eine Ausdehnung der Theorie auf Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen ist es erforderlich, neue Grundmengen heranzuziehen. Wir betrachten zunächst Paare von reellen Zahlen und legen für je zwei reelle Zahlen $a$, $b$ eine Reihenfolge fest. Soll $a$ die erste und $b$ die zweite Zahl sein, so schreiben wir $x_1 = a$ und $x_2 = b$ und fassen beide Zahlen durch Klammern in *der* Weise zu einem Paar zusammen, daß wir innerhalb der Klammern $x_1$ an die erste und $x_2$ an die zweite Stelle setzen. Wir schreiben also $(x_1, x_2)$ und bezeichnen $(x_1, x_2)$ als **geordnetes Zahlenpaar**. Die Zahlen 3 und $-1$ können also zu dem Paar $(3, -1)$ oder zu dem Paar $(-1, 3)$ zusammengefaßt werden. Zwei geordnete Zahlenpaare $(x_1, x_2)$ und $(y_1, y_2)$ nennen wir gleich, wenn innerhalb der Klammern an der jeweils entsprechenden Stelle die gleiche Zahl steht. Wir setzen also $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ gilt. Somit ist $(3, -1) \neq (-1, 3)$ und auch $(3, -1) \neq (3, 0)$ wegen $-1 \neq 0$.

Eine geometrische Veranschaulichung von geordneten Zahlenpaaren ist in einer mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene möglich. Man erkennt an Bild 1.1, daß man das Zahlenpaar $(x_1, x_2)$ durch den Punkt $X$ mit den Koordinaten $x_1$ und $x_2$ oder durch den Vektor $\mathbf{x}$ mit den Koordinaten $x_1$ und $x_2$ veranschauli-

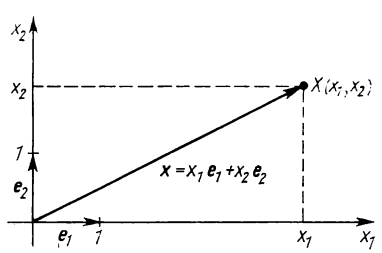



Bild 1.1

chen kann. Gleichbedeutend reden wir in diesem Zusammenhang also von dem **geordneten Zahlenpaar** $(x_1, x_2)$, dem **Punkt** $X(x_1, x_2)$ oder dem **Vektor** $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Eine Menge von geordneten Zahlenpaaren nennen wir demzufolge auch eine Punktmenge. Unter dem $R^2$ verstehen wir die Menge *aller* geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2)$.

Sind $X(x_1, x_2)$ und $Y(y_1, y_2)$ zwei beliebige Punkte des $R^2$, so bezeichnet man unter Beachtung des Satzes von Pythagoras die Zahl

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \tag{1.2}$$

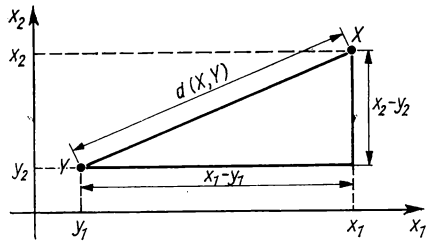



Bild 1.2

als Abstand der Punkte $X$ und $Y$ (vgl. 1.2). Bei Benutzung der Vektorschreibweise $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ bzw. der Koordinatenschreibweise hätte man zu formulieren:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

bzw.

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,.$$

Speziell für $X(-1, 3)$ und $Y(5, -4)$ erhält man

$$d(X, Y) = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (3 + 4)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}\,.$$

Je zwei Punkten $X$ und $Y$ ist also eine nichtnegative reelle Zahl $d(X, Y)$ als Abstand zwischen $X$ und $Y$ zugeordnet. Man sagt für diesen Sachverhalt auch, daß im $R^2$ eine **Abstandsfunktion** oder **Metrik** erklärt ist. Man erkennt leicht, daß die Metrik im $R^2$ die von der Abstandsfunktion (1.1) im $R^1$ her bekannten drei Eigenschaften erfüllt:

1. $d(X, Y) \geqq 0$ für beliebige $X, Y \in R^2$ und $d(X, Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$; (1.3
2. $d(X, Y) = d(Y, X)$ für beliebige $X, Y \in R^2$; (1.4)
3. $d(X, Z) \leqq d(X, Y) + d(Y, Z)$ für beliebige $X, Y, Z \in R^2$. (1.5)

Eigenschaft (1.5) heißt **Dreiecksungleichung**. Der Name wird deutlich, wenn man z. B. die Abstände in dem in Bild 1.3 gezeichneten Dreieck betrachtet.

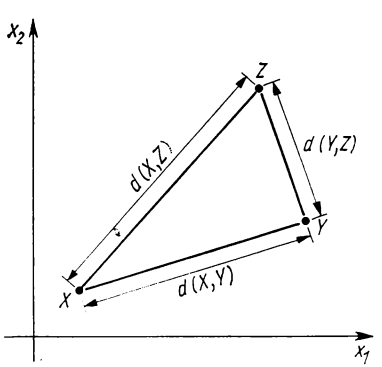



Bild 1.3

Bei Verwendung der Vektorschreibweise gilt

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1)\,\mathbf{e}_1 + (x_2 - y_2)\,\mathbf{e}_2$$

und somit

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,(\mathbf{x} - \mathbf{y})}\,.$$

Der Abstand $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist also gleich der Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ mit sich selbst. Zusammen mit der Metrik (1.2) bezeichnet man den $R^2$ auch als **zweidimensionalen euklidischen Raum.**

Alle angestellten Überlegungen können wörtlich zur Definition des dreidimensionalen euklidischen Raumes $R^3$ bzw. allgemein zur Definition des $n$-dimensionalen euklidischen Raumes $R^n$ übernommen werden. Der $R^n$ ist also die Menge aller geordneten $n$-Tupel von reellen Zahlen; wir bezeichnen sie mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Der Index gibt die Stelle an, an welcher die betreffende Zahl angeordnet werden soll. Für zwei $n$-Tupel gilt die Gleichheit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ genau dann, wenn zugleich $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$ erfüllt ist. Für die Verschiedenheit zweier $n$-Tupel reicht also aus, daß an mindestens *einer* Stelle innerhalb der beiden $n$-Tupel verschiedene reelle Zahlen stehen. Die geordneten $n$-Tupel bezeichnen wir auch als Punkte eines $n$-dimensionalen Raumes und die Zahlen innerhalb der $n$-Tupel dann als Koordinaten der Punkte. Punkte im $R^2$ bzw. $R^3$ bezeichnet man gelegentlich auch durch $(x, y)$ oder $(a, b)$ oder $(x_0, y_0)$ bzw. durch $(x, y, z)$ oder $(a, b, c)$ oder $(x_0, y_0, z_0)$; d.h., man verzichtet hier auch gelegentlich auf die konsequente Verwendung der Indexschreibweise $(x_1, x_2)$ bzw. $(x_1, x_2, x_3)$ zur Kennzeichnung der Anordnung innerhalb der Paare bzw. Tripel. Unter dem Abstand zweier Punkte $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ versteht man die nichtnegative Zahl

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\,. \tag{1.6}$$

Die so im $R^n$ erklärte Abstandsfunktion erfüllt die Eigenschaften (1.3) bis (1.5).

*Aufgabe 1.1:* Bestimmen Sie alle Punkte $P(x, y)$ des $R^2$, für die der Abstand zwischen $P(x, y)$ und dem festen Punkt $A(0, 0)$ genau so groß ist wie der Abstand zwischen $P(x, y)$ und dem festen Punkt $B(-1, 1)$. Es soll also gelten $d(P, A) = d(P, B)$.

### 1.1.2. Der Umgebungsbegriff im $R^n$

Ehe im weiteren Verlauf Funktionen untersucht werden, die auf dem $R^n$ bzw. auf Teilmengen des $R^n$ erklärt sind, müssen einige Begriffe eingeführt werden. An vielen Stellen wird eine Analogie zum Vorgehen im $R^1$ deutlich erkennbar sein.

Beginnen wir mit dem Umgebungsbegriff. Es sei $\varepsilon$ eine vorgegebene reelle Zahl, $\varepsilon > 0$. Im $R^1$ bezeichnet man als $\varepsilon$-Umgebung eines festen Punktes $x_0$ der reellen Achse die Menge aller Zahlen $x$, deren Abstand zu $x_0$ kleiner als $\varepsilon$ ist. Verwenden wir für die $\varepsilon$-Umgebung von $x_0$ das Symbol $U(x_0; \varepsilon)$, so ist also $U(x_0; \varepsilon)$ die Menge aller Zahlen $x$, für die $d(x, x_0) = |x - x_0| < \varepsilon$ gilt. Abgekürzt schreiben wir

$$U(x_0; \varepsilon) = \{x \in R^1 \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}.^{1}) \tag{1.7}$$

[1]) Die Klammern { } verwenden wir wie auch im Band 1 zur Kennzeichnung von Mengen. Gemeint ist also die Menge aller $x$ des $R^1$, für die $d(x, x_0) < \varepsilon$ gilt.

Im $R^1$ gilt für $d(x, x_0) = |x - x_0|$ nun

$$|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Im $R^1$ ist die $\varepsilon$-Umgebung $U(x_0; \varepsilon)$ also gerade das offene Intervall der Länge $2\varepsilon$ mit dem Mittelpunkt $x_0$, d.h.

$$U(x_0; \varepsilon) = \{x \in R^1 \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}. \tag{1.8}$$

Die Formulierung (1.7) ist sofort auf den $R^n$ für $n \geqq 2$ übertragbar, da auch im $R^n$ ein Abstand erklärt ist. Ist $X_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein fester Punkt des $R^n$, so versteht man unter der **$\varepsilon$-Umgebung** $U(X_0; \varepsilon)$ von $X_0$ die Menge aller Punkte $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des $R^n$ mit $d(X, X_0) < \varepsilon$, also

$$\begin{aligned} U(X_0; \varepsilon) &= \{X(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid d(X, X_0) < \varepsilon\} \\ &= \left\{X(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \,\middle|\, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} < \varepsilon\right\}, \\ &= \left\{X(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 < \varepsilon^2\right\} \end{aligned}$$

Speziell für $n = 2$ ist $U(X_0; \varepsilon)$ die in Bild 1.4 dargestellte Kreisscheibe ohne Rand mit dem Mittelpunkt $X_0$ und dem Radius $\varepsilon$ und für $n = 3$ die Kugel ohne Oberfläche mit dem Mittelpunkt $X_0$ und dem Radius $\varepsilon$. Entsprechend dem Aussehen im $R^3$ werden die $\varepsilon$-Umgebungen ganz allgemein auch als **Kugel-Umgebungen** bezeichnet.

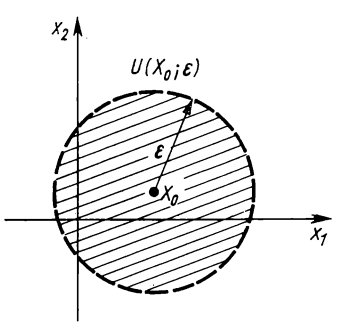



Bild 1.4

Durchläuft $\varepsilon$ alle positiven reellen Zahlen, so erhält man für jeden Punkt $X_0$ ein ganzes System von $\varepsilon$-Umgebungen $U(X_0; \varepsilon)$. Ist $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, so folgt $U(X_0; \varepsilon_1) \subset U(X_0; \varepsilon_2)$, d.h., die $\varepsilon$-Umgebungen eines festen Punktes $X_0$ sind ineinandergeschachtelt. Nimmt man aus einer $\varepsilon$-Umgebung $U(X_0; \varepsilon)$ von $X_0$ den Punkt $X_0$ heraus, so bezeichnet man die verbleibende Menge als **punktierte** (oder auch **reduzierte**) **$\varepsilon$-Umgebung** von $X_0$; symbolisch

$$U^*(X_0; \varepsilon) = U(X_0; \varepsilon) \setminus \{X_0\}.^{1}) \tag{1.9}$$

[1]) Das Minuszeichen $\setminus$ für Mengen verwenden wir in dem im Band 1 erklärten Sinne. Sind $A$ und $B$ beliebige Mengen, so bezeichnet $A \setminus B$ die Menge aller Elemente von $A$, die nicht zu $B$ gehören.

Gelegentlich betrachtet man neben den Kugelumgebungen auch **Rechteckumgebungen** im $R^2$ bzw. allgemein **Quaderumgebungen** im $R^n$. Es sei $X_0(a_1, a_2)$ ein fester Punkt des $R^2$ und $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zwei positive reelle Zahlen. In Bild 1.5 ist die zugehörige

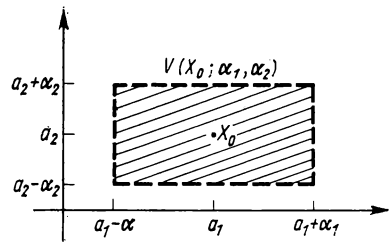



Bild 1.5
(Korrektur: Statt $a_1-\alpha$ muß es heißen $a_1-\alpha_1$)

Rechteckumgebung $V(X_0; \alpha_1, \alpha_2)$ von $X_0$ eingezeichnet – es ist das Rechteck ohne Rand mit den Kantenlängen $2\alpha_1$ und $2\alpha_2$ und dem Mittelpunkt $X_0$, also

$$V(X_0; \alpha_1, \alpha_2) = \{X(x_1, x_2) \in R^2 \mid a_1 - \alpha_1 < x_1 < a_1 + \alpha_1 \text{ und } a_2 - \alpha_2 < x_2 < a_2 + \alpha_2\}. \tag{1.10}$$

Im Spezialfall $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon$ erhält man eine quadratische $\varepsilon$-Umgebung. Analog können im $R^n$ mit Hilfe von Ungleichungen Quaderumgebungen eines Punktes $X$ mit $n$ Kantenlängen $2\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_n$ erklärt werden.

Im $R^2$ erkennt man an den Bildern 1.6 und 1.7 sofort, daß jede Kreisumgebung eines Punktes $X_0$ auch eine Rechteckumgebung von $X_0$ enthält und umgekehrt. In diesem Sinne sind für einen Punkt $X_0$ das System aller Rechteckumgebungen und das System aller Kreisumgebungen als gleichwertig anzusehen. Für viele Überlegungen ist es daher gleichgültig, welche Umgebungsart man verwendet.

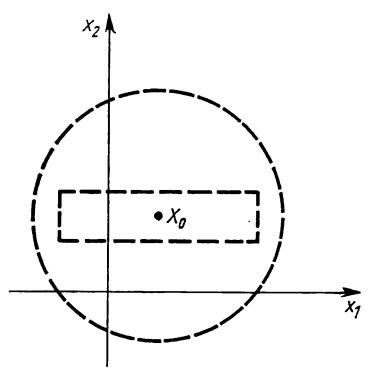



Bild 1.6

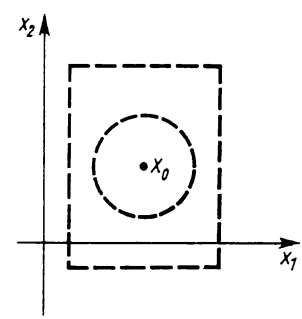



Bild 1.7

Mit Hilfe von Umgebungen des Nullpunktes kann auch die Beschränktheit von Mengen erklärt werden. Es sei zunächst $M$ eine Teilmenge des $R^2$. Für jeden Punkt $X$ von $M$ sei $d(X, 0)$ der Abstand des Punktes $X$ vom Nullpunkt, also

$d(X,0)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ für $X(x_1, x_2)$. Wir nennen die Menge $M$ **beschränkt,** wenn es eine positive Zahl $K$ gibt, so daß

$$d(X,0)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}<K \text{ für alle } X(x_1,x_2)\in M \tag{1.11}$$

gilt. (1.11) besagt gerade, daß alle Punkte von $M$ in der Kreisumgebung mit dem Radius $K$ um den Nullpunkt liegen müssen. Anders formuliert erhalten wir also: Eine Menge $M<R^2$ heißt beschränkt, wenn es eine Kreisumgebung des Nullpunktes gibt, welche die Menge $M$ ganz enthält.

Ist $M$ das Quadrat mit den Eckpunkten $P_1(2,-1)$, $P_2(5,-1)$, $P_3(5,2)$ und $P_4(2,2)$, so gilt ganz sicher

$$d(X,0)<10 \text{ für alle Punkte } X \text{ des Quadrates } M.$$

$M$ ist also ganz enthalten in der Kreisumgebung mit dem Radius 10 um den Nullpunkt; $M$ ist somit beschränkt. (Es ist an dieser Stelle unwichtig, daß es auch schon „kleinere" Umgebungen des Nullpunktes gibt, welche das Quadrat $M$ ganz enthalten; d.h., $K=10$ ist nicht die *kleinste* Zahl, so daß (1.11) gilt. Es genügt die Angabe von *mindestens einer* solchen Zahl $K$.)

Die Menge $M'$ aller Punkte des ersten Quadranten in der $x, y$-Ebene ist ein Beispiel für eine nicht beschränkte Menge.

Die Definition der Beschränktheit ist wörtlich zu übernehmen für Teilmengen des $R^n$.

### 1.1.3. Gebiete im $R^n$

Wir erinnern an den Begriff der Stetigkeit einer reellen Funktion $f$ einer unabhängigen Variablen an einer Stelle $x_0$. Es wird der Funktionswert $f(x_0)$ verglichen mit den Funktionswerten $f(x)$ für $x$-Werte, die zu $x_0$ benachbart sind. Der Definitionsbereich von $f$ muß also die Eigenschaft haben, daß sowohl $x_0$ als auch eine ganze Umgebung von $x_0$ zu ihm gehören; $x_0$ muß ein sogenannter innerer Punkt des Definitionsbereiches von $f$ sein.

Nun sei allgemein $M$ eine Teilmenge des $R^2$ und $X_0(x_0, y_0)$ ein Punkt von $M$. Wenn dann *mindestens ein* $\varepsilon_0>0$ existiert, so daß die $\varepsilon_0$-Umgebung $U(X_0;\varepsilon_0)$ von $X_0$ ganz zur Menge $M$ gehört, dann heißt $X_0$ **innerer Punkt** von $M$.

*Beispiel 1.1:* $Q$ sei das in Bild 1.8 gezeichnete Quadrat. Für die Koordinaten aller Punkte $P(x,y)$ von $Q$ soll gelten $0\leqq x<1$ und $0\leqq y<1$. Die rechte und die obere Quadratseite sollen also nicht zur Menge $Q$ gehören. $P_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ ist ein innerer Punkt von $Q$, denn z.B. für $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ ist $U\left(P_0;\frac{1}{4}\right)$ ganz in $Q$ enthalten. $U(P_0;\varepsilon)<Q$ gilt sogar für alle $\varepsilon$ mit $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{3}$ während für $\varepsilon>\frac{1}{3}$ die Umgebung $U(P_0;\varepsilon)$ nicht mehr ganz in $Q$ enthalten ist. Die Definition eines inneren Punktes verlangt lediglich, daß $U(P_0;\varepsilon_0)<Q$ für gewisse $\varepsilon_0>0$ gilt. Die Wahl solcher Werte $\varepsilon_0$ hängt von der Lage von $P_0$ ab. $P_1\left(1,\frac{3}{4}\right)$ ist kein Punkt von $Q$, also erst recht auch kein innerer Punkt von $Q$. Wir sehen an Bild 1.8, daß *jede* $\varepsilon$-Umgebung von $P_1$ zwar Punkte von $Q$ enthält aber zugleich auch Punkte, die nicht zu $Q$ gehören.

Die folgenden allgemeinen Bezeichnungen sind üblich: Die Menge aller inneren Punkte von $M$ heißt das **Innere** von $M$. Das Innere von $M$ ist also stets ein Teil

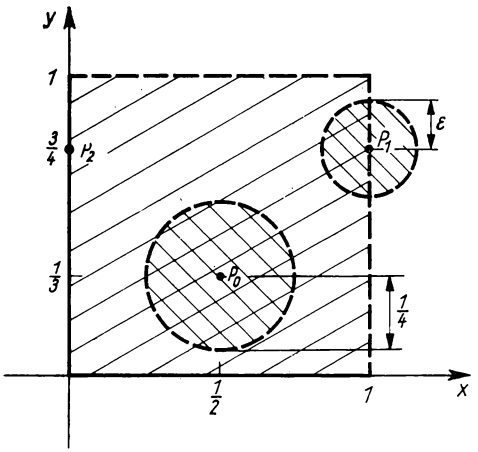



Bild 1.8

von $M$. Ein Punkt $X_1$ heißt **Randpunkt** von $M$, wenn *jede* Umgebung von $X_1$ sowohl Punkte enthält, die zu $M$ gehören als auch Punkte, die nicht zu $M$ gehören. Die Menge aller Randpunkte von $M$ heißt der **Rand** von $M$. Beim Rand von $M$ ist zu unterscheiden zwischen Randpunkten, die zu $M$ gehören und Randpunkten, die nicht zu $M$ gehören. $M$ heißt eine **offene Menge**, wenn *jeder* Punkt von $M$ ein innerer Punkt von $M$ ist. Ist $M$ eine offene Menge, so gehören also alle Randpunkte von $M$ nicht zu $M$. $M$ heißt eine **abgeschlossene Menge**, wenn $M$ alle Randpunkte von $M$ enthält. Fügt man zu einer Menge $M$ sämtliche Randpunkte von $M$ hinzu, so heißt die entstehende neue Menge die **Abschließung** von $M$ oder die **abgeschlossene Hülle** von $M$. Wenn eine Menge $M \subset R^2$ sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist, dann heißt $M$ eine **kompakte Menge**. Abgeschlossene Rechtecke bzw. abgeschlossene Kreise (d.h. alle Randpunkte sollen zur Rechteckfläche bzw. zur Kreisfläche dazugehören) sind also Beispiele für kompakte Teilmengen des $R^2$. Auf der Zahlengeraden sind abgeschlossene Intervalle Beispiele für kompakte Teilmengen des $R^1$.

Im Beispiel 1.1 ist $P_1(1, \frac{3}{4})$ ein nicht zu $Q$ gehörender Randpunkt und $P_2(0, \frac{3}{4})$ ein zu $Q$ gehörender Randpunkt. Alle Punkte der vier Seiten des Quadrates sind Randpunkte von $Q$. Das Innere von $Q$ besteht aus allen Punkten $P(x, y)$ mit $0 < x < 1$ und $0 < y < 1$. Die Menge $Q$ ist also weder offen noch abgeschlossen, weil es sowohl Randpunkte gibt, die zu $Q$ gehören als auch Randpunkte, die nicht zu $Q$ gehören. Beispiele für offene Mengen in der $x, y$-Ebene sind Kreisscheiben ohne die Punkte der begrenzenden Kreislinie. Speziell die $\varepsilon$-Umgebungen $U(P; \varepsilon)$ von Punkten $P \in R^2$ sind somit offene Mengen.

Zwei Begriffe sollen noch erwähnt werden. Eine Menge $M \subset R^2$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $X$, $Y \in M$ auch alle Punkte der Verbindungsstrecke von $X$ und $Y$ zu $M$ gehören. In der Sprache der Vektorrechnung bedeutet das: Gehören $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zu $M$, so auch alle $\mathbf{z}$ der Gestalt

$$\mathbf{z} = t\mathbf{y} + (1 - t)\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{1.12}$$

Für $t = 0$ erhält man $\mathbf{x}$ und für $t = 1$ dann $\mathbf{y}$. Setzen wir $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, so müssen mit $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ auch alle $\mathbf{z} = \mathbf{x} + t\mathbf{h}$ für $0 \leqq t \leqq 1$ zu $M$ gehören. Halbebenen, Kreisscheiben, Rechteckflächen sind Beispiele für konvexe Mengen.

Eine *offene* Teilmenge $G$ des $R^2$ heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte von $G$ durch einen ganz in $G$ verlaufenden Streckenzug mit nur endlich vielen Eckpunkten verbunden werden können. Die in Bild 1.9 skizzierte Menge (– die Randpunkte

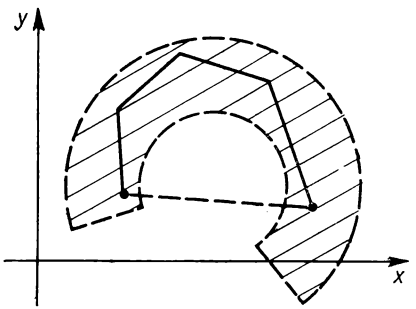



Bild 1.9

sollen nicht zur Menge gehören –) ist nicht konvex, wohl aber zusammenhängend. Jede offene und konvexe Menge ist somit erst recht zusammenhängend. Eine offene und zusammenhängende Punktmenge nennt man auch ein **Gebiet**. Gelegentlich unterscheidet man noch zwischen einfach zusammenhängenden und mehrfach zusammenhängenden Gebieten. Dabei soll ein Gebiet $G$ des $R^2$ **einfach zusammenhängend** heißen, wenn jede in $G$ liegende doppelpunktfreie geschlossene Kurve innerhalb $G$ stetig zu einem Punkt deformiert werden kann[1]). Andernfalls heißt ein Gebiet $G$ **mehrfach zusammenhängend**. Die in Bild 1.10 skizzierte Menge (Kreisring ohne Randpunkte) ist ein Beispiel für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet[2]). Das Gebiet in Bild 1.9 ist einfach zusammenhängend.

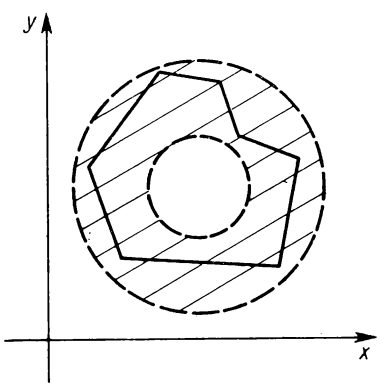



Bild 1.10

Ist $G$ ein Gebiet und nehmen wir zur Menge $G$ alle Randpunkte von $G$ hinzu, so nennt man die so entstehende Abschließung $\overline{G}$ von $G$ auch einen **Bereich**.

---

[1]) Eine genaue mathematische Formulierung für diesen Sachverhalt geben wir an dieser Stelle nicht – uns genügt eine anschauliche Interpretation.

[2]) Das Gebiet „enthält ein Loch", welches „das stetige Zusammenziehen" für gewisse geschlossene Kurven „verhindert".

In den Anwendungen werden Gebiete oder Bereiche häufig durch Ungleichungen beschrieben – wir erläutern dies durch einige Beispiele.

*Beispiel 1.2:* Es sei $B_1$ die Menge aller Punkte $P(x, y)$, für deren Koordinaten $y < 3x + 1$ gilt, also

$$B_1 = \{P(x, y) \in R^2 | y < 3x + 1\}.$$

$B_1$ ist die in Bild 1.11 unterhalb der Geraden $y = 3x + 1$ gelegene Halbebene ohne die Punkte der Geraden selbst. Die Menge $B_1$ ist offen und konvex und damit ein Gebiet. $B_1$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

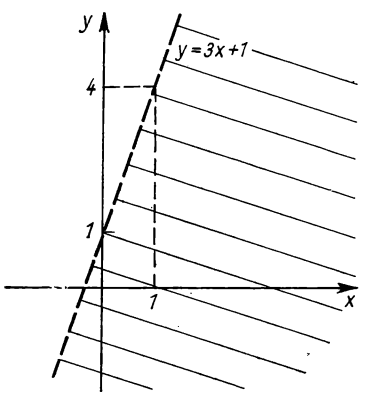



Bild 1.11

*Beispiel 1.3:* Es sei

$$B_2 = \{P(x, y) \in R^2 \mid (16 - x^2)(9 - y^2) \geqq 0\}.$$

$B_2$ ist die Menge aller Punkte $P(x, y)$, für deren Koordinaten entweder gilt

$$16 - x^2 \geqq 0 \quad \text{und zugleich} \quad 9 - y^2 \geqq 0 \tag{1.13}$$

oder

$$16 - x^2 \leqq 0 \quad \text{und zugleich} \quad 9 - y^2 \leqq 0. \tag{1.14}$$

(1.13) bedeutet $|x| \leqq 4$ und zugleich $|y| \leqq 3$,

(1.14) bedeutet $|x| \geqq 4$ und zugleich $|y| \geqq 3$.

$B_2$ ist die in Bild 1.12 schraffierte Punktmenge; sie ist abgeschlossen und nicht konvex.

*Beispiel 1.4:* Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall auf der $x$-Achse und $\varphi_1$ und $\varphi_2$ zwei auf $[a, b]$ definierte reelle stetige Funktionen der unabhängigen Variablen $x$ mit $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ für alle $x$ aus $[a, b]$. Für jede feste Zahl $x_0$ mit $a \leqq x_0 \leqq b$ ist dann die Menge aller Punkte $(x_0, y)$ mit $\varphi_1(x_0) \leqq y \leqq \varphi_2(x_0)$ gerade die Strecke, die von den Punkten $(x_0, \varphi_1(x_0))$ und $(x_0, \varphi_2(x_0))$ begrenzt wird. Durchläuft $x_0$ alle Punkte von $[a, b]$, so erhalten wir die in Bild 1.13 skizzierte Menge

$$\overline{G} = \{(x, y) \in R^2 \mid a \leqq x \leqq b \text{ und } \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}.$$

Die Menge $\bar{G}$ ist ein Bereich. Man nennt Mengen dieser Art auch **Normalbereiche** oder **Fundamentalbereiche.** (Die Menge $\bar{G}$ können wir auch auffassen als Abschließung der offenen Menge

$$G = \{(x, y) \in R^2 \mid a < x < b \text{ und } \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

Die Menge $G$ ist ein Gebiet.)

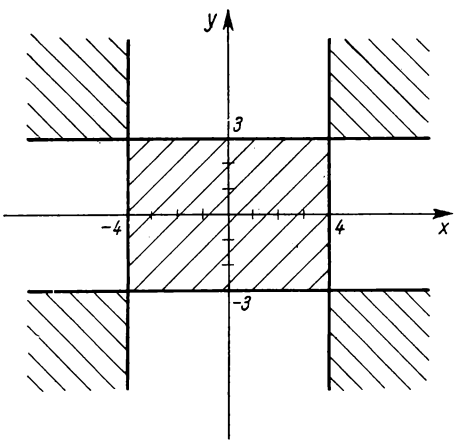



Bild 1.12

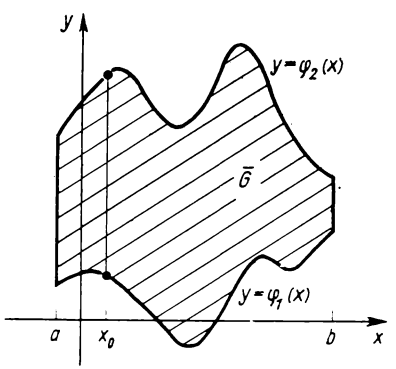



Bild 1.13

*Beispiel 1.5:* Ganz ähnlich aufgebaut ist die folgende Menge $H$: Es sei $[c, d]$ ein abgeschlossenes Intervall auf der $y$-Achse und $\psi_1$ und $\psi_2$ zwei auf $[c, d]$ erklärte reelle stetige Funktionen der unabhängigen Variablen $y$ mit $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ für alle $y$ aus $[c, d]$. $H$ sei dann die Menge

$$H = \{(x, y) \in R^2 \mid c < y < d \text{ und } \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$$

mit der in Bild 1.14 gezeichneten Abschließung:

$$\bar{H} = \{(x, y) \in R^2 \mid c \leqq y \leqq d \text{ und } \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}.$$

Alle eingeführten Begriffe können wieder allgemein im $R^n$ formuliert werden.

*Aufgabe 1.2:* Skizzieren Sie in der $x, y$-Ebene die folgenden Normalbereiche:

a) $B_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 2 \text{ und } -\sqrt{1-(x-1)^2} \leqq y \leqq 0\}$,

b) $B_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 4 \text{ und } \sqrt{4x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{4x}\}$,

c) $B_3 = \{(x, y) \mid 1 \leqq y \leqq 2 \text{ und } 0 \leqq x \leqq \sqrt{1-(y-1)^2}\}$.

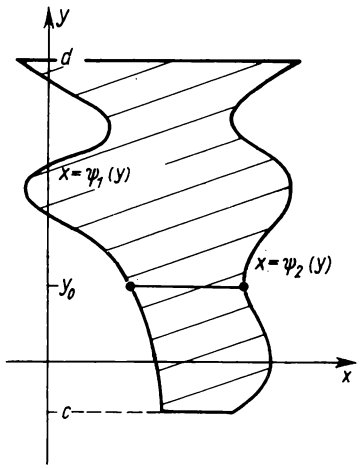



Bild 1.14

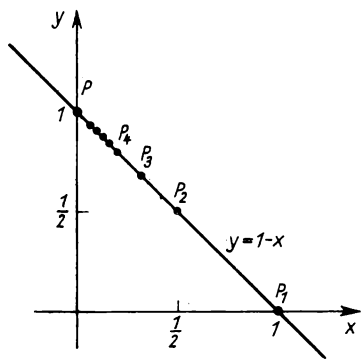



Bild 1.15

## 1.2. Konvergenz von Punktfolgen

In Band 1 wurden im $R^1$ Zahlenfolgen betrachtet, und diese wurden auf Konvergenz untersucht. Wir betrachten nun Punktfolgen in einem $m$-dimensionalen euklidischen Raum $R^m$. Den Begriff einer gegen einen Punkt des $R^m$ *konvergenten Punktfolge* werden wir in der Weise erklären, daß wir der Punktfolge eine Zahlenfolge zuordnen und von dieser zugeordneten Zahlenfolge ein gewisses Konvergenzverhalten fordern. Zur Vereinfachung der Schreibarbeit nehmen wir wieder $m = 2$ an. Es sei $(P_n)$ eine Punktfolge im $R^2$ mit den Koordinaten $(x_n, y_n)$, d.h., jeder natürlichen Zahl $n = 1, 2, \ldots$ ist ein Punkt $P_n(x_n, y_n)$ zugeordnet.[1]) Als Beispiel betrachten wir die Punktfolge $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n},\ 1 - \frac{1}{n}\right)$. Es gilt also $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = 1 - \frac{1}{n} = 1 - x_n$. Alle Punkte $P_n$ liegen auf der in Bild 1.15 gezeichneten Geraden $y = 1 - x$. Weiter betrachten wir den Punkt $P(a, b)$ mit $(a, b) = (0, 1)$. Für die Abstände der Punkte $P_n$ von $P$ gilt

$$d(P_n, P) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

[1]) Zur Beschreibung einer Folge könnte anstelle des Buchstaben $n$ selbstverständlich auch jeder andere Buchstabe als Index verwendet werden. So könnten wir für eine Punktfolge auch schreiben $P_k\,(x_k, y_k)$ mit $k = 1, 2, 3 \ldots$.

Der Punktfolge $(x_n, y_n)$ soll nun die Zahlenfolge $(d(P_n, P))$ dieser Abstände zugeordnet werden. Im vorliegenden Beispiel gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0.$$

Die Folge der Abstände ist eine Nullfolge. Anschaulich bedeutet dies, daß die Punktfolge $(P_n)$ für $n \to \infty$ gegen den Punkt $P$ konvergiert. Allgemein wird definiert:

**Definition 1.1:** *Eine* **Punktfolge** $(P_n)$ *heißt* **konvergent** *gegen den Punkt $P$, wenn die Zahlenfolge der Abstände der Punkte $P_n$ von dem Punkt $P$ eine Nullfolge ist, d.h., wenn* $\lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0$ *gilt. Wir schreiben dann für diesen Sachverhalt:* $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

Besonders wichtig ist die Charakterisierung der Konvergenz einer Punktfolge durch die Konvergenz der Zahlenfolgen der einzelnen Koordinaten. Es seien wieder $x_n$ und $y_n$ die Koordinaten der Punkte $P_n$ und $a$ und $b$ die Koordinaten des Punktes $P$. Dann beweisen wir den

**Satz 1.1:** *Für eine Punktfolge $(P_n)$ und einen Punkt $P$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \text{ genau dann, wenn } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = b \text{ gilt.}$$

*Beweis:* Die Konvergenz einer Zahlenfolge $(\alpha_n)$ gegen die Zahl $\alpha$ besagt, daß es zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ geben muß, so daß für alle Indizes $n$ mit $n \geqq n_0(\varepsilon)$ gilt $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$.

1. Teil des Beweises: Wir setzen voraus, daß die Folge der Abstände $d(P_n, P)$ eine Nullfolge ist und haben zu zeigen, daß dann folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Nun gelten die Abschätzungen

$$0 \leqq |x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leqq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = d(P_n, P) \tag{1.15}$$

und entsprechend

$$0 \leqq |y_n - b| = \sqrt{(y_n - b)^2} \leqq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = d(P_n, P). \tag{1.16}$$

Da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0$ gilt, so folgt aus der Ungleichung (1.15) bzw. (1.16) dann auch $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} |y_n - b| = 0$, und das bedeutet aber gerade $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bzw. $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

2. Teil des Beweises: Wir setzen voraus, daß $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ gilt und haben zu zeigen, daß dann $\lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0$ folgt. Es werde eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu zeigen ist nun die Existenz von einem Index $n_0$, so daß für alle $n \geqq n_0$ gilt $d(P_n, P) < \varepsilon$. (Wegen $d(P_n, P) \geqq 0$ ist $|d(P_n, P)| = d(P_n, P)$; wir brauchen also nicht mit Beträgen zu arbeiten.) Wir bilden nun die Zahl $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, so existiert speziell zu der Zahl $\varepsilon_1$ ein Index $n_1$, so daß für alle Indizes $n \geqq n_1$ gilt:

$|x_n - a| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Da zugleich $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ gilt, so existiert wieder speziell zu der Zahl $\varepsilon_1$ ein weiterer Index $n_2$, so daß für alle Indizes $n \geqq n_2$ gilt $|y_n - b| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Es sei nun $n_0$ die größere der beiden Zahlen $n_1$ und $n_2$. Für alle $n \geqq n_0$ gilt dann erst recht

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und zugleich} \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.17}$$

Ebenfalls für alle $n \geqq n_0$ folgt dann:

$$\begin{aligned} d(P_n, P) &= \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \\ &\leqq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{wegen} \quad (1.17). \end{aligned}$$

Damit ist ein Index $n_0$ mit der geforderten Eigenschaft gefunden. (Liegt die Punktfolge $(P_n)$ nicht im $R^2$, sondern im $R^3$ oder allgemein in einem $R^m$, so wählen wir für $\varepsilon_1$ die Zahl $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ oder allgemein $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{m}$ und gehen mit dieser speziellen Zahl $\varepsilon_1$ in die Konvergenzdefinition der einzelnen Koordinatenfolgen hinein. Wir erhalten dann drei Indizes $n_1, n_2, n_3$ bzw. allgemein $m$ Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_m$ und wählen als $n_0$ den größten dieser Indizes.) Damit ist der Beweis beendet.

Die Konvergenz einer Punktfolge liegt also genau dann vor, wenn die Zahlenfolgen der einzelnen Koordinaten sämtlich konvergieren, und zwar jeweils gegen die entsprechende Koordinate des Grenzelementes. Es ist einleuchtend, daß für die Konvergenz von Punktfolgen Eigenschaften gelten, wie sie vom $R^1$ her bekannt sind. Insbesondere gilt das *Konvergenzkriterium von Cauchy*. Es besagt, daß eine Punktfolge $(P_n)$ genau dann konvergiert, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0$ gibt, so daß für alle Indizes $n_1$ und $n_2$ mit $n_1 \geqq n_0$, $n_2 \geqq n_0$ gilt $d(P_{n_1}, P_{n_2}) < \varepsilon$. Wenn eine Punktfolge konvergiert, dann ist das Grenzelement eindeutig bestimmt.

Es bezeichne 0 den Nullpunkt des rechtwinklig kartesischen Koordinatensystems. Eine Punktfolge $(P_n)$ heißt dann **beschränkt**, wenn die Zahlenfolge $(d(P_n, 0))$ der Abstände der Punkte $P_n$ vom Nullpunkt 0 beschränkt ist im Sinne der Sprechweise für Zahlenfolgen. Es muß also eine Zahl $K$ existieren, so daß gilt

$$d(P_n, 0) = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} < K \quad \text{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Dann gelten die folgenden Sätze:

**Satz 1.2:** *Jede konvergente Punktfolge ist beschränkt.*

**Satz 1.3** *(Satz von Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Punktfolge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Verwenden wir die Vektorschreibweise, so können wir formulieren:

**Satz 1.4:** *Für zwei Folgen* $(\mathbf{x}_n)$ *und* $(\mathbf{y}_n)$ *gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}.$$

*Dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha\mathbf{x}_n = \alpha\mathbf{x}$$

*für jede reelle Zahl* $\alpha$.

*Aufgabe 1.3:* Im $R^3$ betrachten wir die Punktfolge $P_n(x_n, y_n, z_n)$ mit

$$(x_n, y_n, z_n) = \left(3 + \frac{5}{n^2}, -1, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Ist diese Punktfolge konvergent? In welcher Ebene liegen die Punkte dieser Folge?

*Aufgabe 1.4:* Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Punktfolge

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \text{ im } R^2.$$

# 2. Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler

## 2.1. Begriff einer reellen Funktion von mehreren unabhängigen Variablen

Wir kennen bereits viele Beispiele für das Aufteten von Funktionen von mehreren Veränderlichen. So ist z. B. der Umfang $U$ eines Rechtecks eine Funktion seiner Seitenlängen $a$ und $b$:

$$U = U(a, b) = 2a + 2b.$$

Das Volumen $V$ eines Quaders ist eine Funktion seiner Seitenlängen $a$, $b$ und $c$:

$$V = V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c.$$

Für $a$, $b$ und auch $c$ kommen selbstverständlich nur positive Zahlen in Frage.

Nach dem Ohmschen Gesetz hängt die Spannung $U$ in einem elektrischen Stromkreis mit dem Widerstand $R$ und der Stromstärke $I$ durch $U = R \cdot I$ zusammen. Wenn $U$ und $R$ gegeben sind, so kann man $I$ als Funktion von $U$ und $R$ bestimmen:

$$I = I(U, R) = \frac{U}{R}.$$

In den genannten Beispielen wird also gewissen Zahlenpaaren bzw. gewissen Zahlentripeln von reellen Zahlen eine weitere reelle Zahl als Funktionswert zugeordnet. Die Verallgemeinerung dieser Beispiele führt auf den Begriff einer reellen Funktion von mehreren unabhängigen Variablen:

**Definition 2.1:** *Es sei $M$ eine Teilmenge des $R^n$. Wenn dann durch eine Vorschrift jedem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ von $M$ genau eine reelle Zahl zugeordnet wird, so sagen wir, daß auf $M$ eine* **reelle Funktion von n unabhängigen Veränderlichen** *$x_1, \ldots, x_n$ mit dem Definitionsbereich $M$ erklärt ist. Für die dem Element $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ zugeordnete reelle Zahl schreiben wir dann $f(\mathbf{x})$ oder $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Die Zuordnungsvorschrift ist in den meisten Fällen durch einen analytischen Rechenausdruck gegeben. Wir betrachten zunächst die Spezialisierung $n = 2$, da dieser Fall leichter überschaubar ist. Der Definitionsbereich ist dann eine Teilmenge der $x$, $y$-Ebene. Statt $f(x_1, x_2)$ schreiben wir dann auch $f(x, y)$. Vieles kann unmittelbar auf den Fall $n > 2$ übertragen werden.

*Beispiel 2.1:* $f(x, y) = x \cdot y$. Als Definitionsbereich $M$ können wir die gesamte $x$, $y$-Ebene betrachten. Dann gilt z. B. $f(0, 0) = 0$ oder $f(-1, 2) = (-1) \cdot 2 = -2$. Für alle Punkte auf den Koordinatenachsen ist der Funktionswert Null; er ist positiv für alle Punkte des ersten und dritten Quadranten und negativ für alle Punkte des zweiten und vierten Quadranten.

*Beispiel 2.2:* $f(x, y) = x^2 + y^2$. Die Funktion $f$ ist für alle Punkte der gesamten $x$, $y$-Ebene erklärt. Es ist $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) >$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Es seien $r > 0$ und $K$ der Kreis mit dem Radius $r$ um den Nullpunkt. Dann gilt $f(r, 0) = f(0, r) = f(-r, 0) = f(0, -r) = r^2$. Gleiches gilt für alle Punkte $(x, y)$ auf $K$, d. h., für alle $(x, y)$ mit $x^2 + y^2 = r^2$ gilt $f(x, y) = r^2$. Die geometrische Veranschaulichung dieser Funktion erfolgt in Bild 2.1.

*Beispiel 2.3:* $f(x, y) = \sqrt{x - y}$. Wegen des Auftretens der Wurzel kann die Funktion $f$ nur für solche Punkte $P(x, y)$ erklärt werden, für deren Koordinaten $0 \leqq x - y$, d.h., $y \leqq x$ gilt. $f$ ist also nur für alle Punkte der Geraden $y = x$ und alle Punkte unterhalb dieser Geraden erklärt.

*Beispiel 2.4:* $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2(x + y)}$. $f$ ist für alle $P(x, y)$ erklärt, für die $x + y \neq 0$ gilt, d.h., für alle Punkte der $x, y$-Ebene mit Ausnahme der Punkte auf der Geraden $y = -x$. Für Punkte oberhalb dieser Geraden gilt $x + y > 0$ und somit $f(x, y) > 0$; für Punkte unterhalb dieser Geraden gilt $x + y < 0$ und somit $f(x, y) < 0$.

Analog zum Vorgehen bei Funktionen einer unabhängigen Variablen ist eine geometrische Veranschaulichung auch für Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen möglich. Ausgehend von den Punkten des Definitionsbereiches $M$ einer Funktion $f(x, y)$ werde der Funktionswert $f(x, y)$ senkrecht über $P(x, y) \in M$ in Richtung der $z$-Achse abgetragen – im Fall $f(x, y) \geqq 0$ wird eine Strecke der Länge $|f(x, y)| = f(x, y)$ in Richtung der positiven $z$-Achse und im Fall $f(x, y) < 0$ eine Strecke der Länge $|f(x, y)| = -f(x, y)$ in Richtung der negativen $z$-Achse angetragen. Die Endpunkte aller dieser Strecken bilden in vielen Fällen eine Fläche im Raum. Diese Fläche wird dann als das geometrische Bild von $f(x, y)$ angesehen. Ein Punkt $R(x, y, z)$ des $R^3$ gehört also genau dann zum Bild einer Funktion $f(x, y)$, wenn $z = f(x, y)$ für die $z$-Koordinate des Punktes $R$ gilt.

Das geometrische Bild für die in Beispiel 2.2. betrachtete Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist in Bild 2.1 skizziert. Senkrecht über allen Punkten $(x, y)$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist überall der Funktionswert $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ in Richtung der positiven $z$-Achse abzutragen.

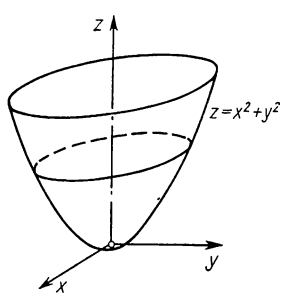



Bild 2.1

Eine weitere geometrische Veranschaulichung für eine Funktion $f(x, y)$ ist durch die folgende Überlegung möglich. Man geht von den Werten $c$ des Wertevorrates von $f$ aus und bestimmt für jede solche Zahl $c$ die Menge der Urbilder in der $x, y$-Ebene. Genauer: Ist $f$ eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen und $c$ eine Zahl aus dem Wertebereich von $f$, so werden alle Punkte $(x, y)$ aus dem Definitionsbereich von $f$ gesucht, für die $f(x, y) = c$ gilt.[1]) In vielen Fällen bilden diese Punkte eine im

[1]) Bei der Konstruktion des geometrischen Bildes der Funktion wäre über allen diesen Punkten der gleiche Funktionswert abzutragen.

Definitionsbereich verlaufende Kurve. Solche Kurven nennt man deshalb auch **Höhenlinien** oder **Niveaulinien** der Funktion $f$. Als geometrische Veranschaulichung von $f$ kann man dann im Definitionsbereich $M$ der Funktion $f$ das System der Niveaulinien skizzieren. Schreibt man an jede Niveaulinie den zugehörigen Funktionswert $c$, so erhält man auf diese Weise eine gute Vorstellung von der Funktion $f(x, y)$. Die Schar aller Höhenlinien bildet i. a. die einparametrige Kurvenschar $f(x, y) = c$ mit $c$ aus dem Wertevorrat der Funktion $f(x, y)$. Diese Kurvenschar nennt man gelegentlich die **Karte der Fläche** oder die **Karte der Funktion**.

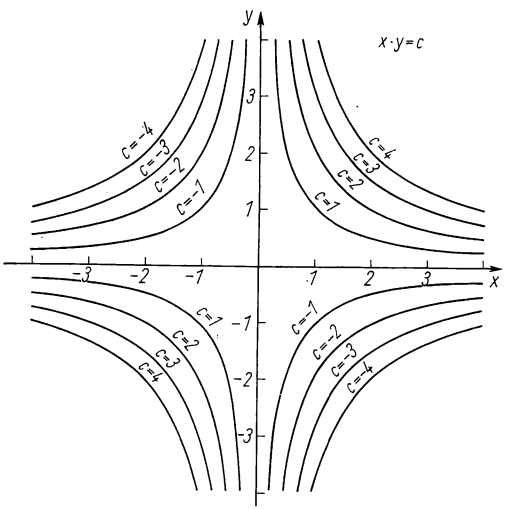



Bild 2.2

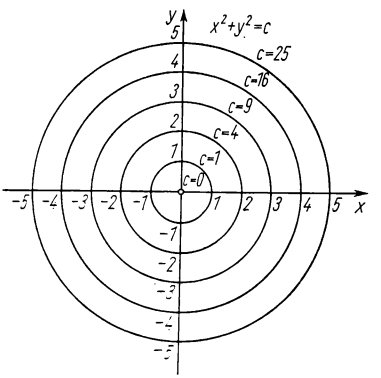



Bild 2.3

In Bild 2.2 ist die Karte der Fläche $f(x, y) = x \cdot y$ angedeutet. Die Niveaulinie $c = 0$ fällt mit den Koordinatenachsen zusammen. Für $c \neq 0$ erhält man als Niveaulinie $f(x, y) = c$ die Hyperbel $y = \frac{c}{x}$.

Die Karte der Funktion aus Beispiel 2.2 $f(x, y) = x^2 - y^2$ ist in Bild 2.3 skizziert. $f(x, y) = 0$ gilt nur für den Nullpunkt. Für $c > 0$ gilt $f(x, y) = x^2 + y^2 = c$ für alle Punkte des Kreises mit dem Radius $\sqrt{c}$ um den Nullpunkt. Geht man von diesem System aller Niveaulinien der Funktion $f(x, y)$ aus, so entsteht aus ihm das geometrische Bild der Funktion, wenn man jeden Kreis mit dem Radius $\sqrt{c}$ auf die Höhe $c$ gehoben denkt. Man erhält so das in Bild 2.1 skizzierte nach oben geöffnete Paraboloid, das im Nullpunkt auf der $x, y$-Ebene aufliegt.

In Beispiel 2.3 ist die Schar der Niveaulinien gerade die in Bild 2.4 skizzierte Schar der Geraden $y = x - c^2$.

Im Beispiel 2.4 ist $c = 0$ auszuschließen. Für $c \neq 0$ bedeutet $f(x, y) = c$ dann

$$x^2 + y^2 = 2cx + 2cy \quad \text{oder} \quad (x - c)^2 + (y - c)^2 = 2c^2. \tag{2.1}$$

(2.1) bedeutet die Kreisschar mit den Mittelpunkten $(c, c)$ und den Radien $\varrho = |c|\sqrt{2}$.

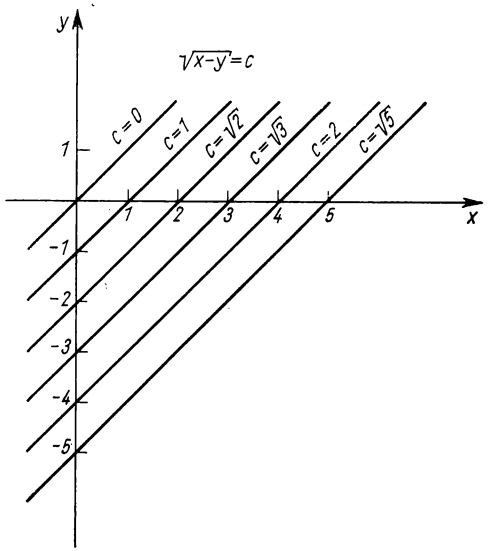



Bild 2.4

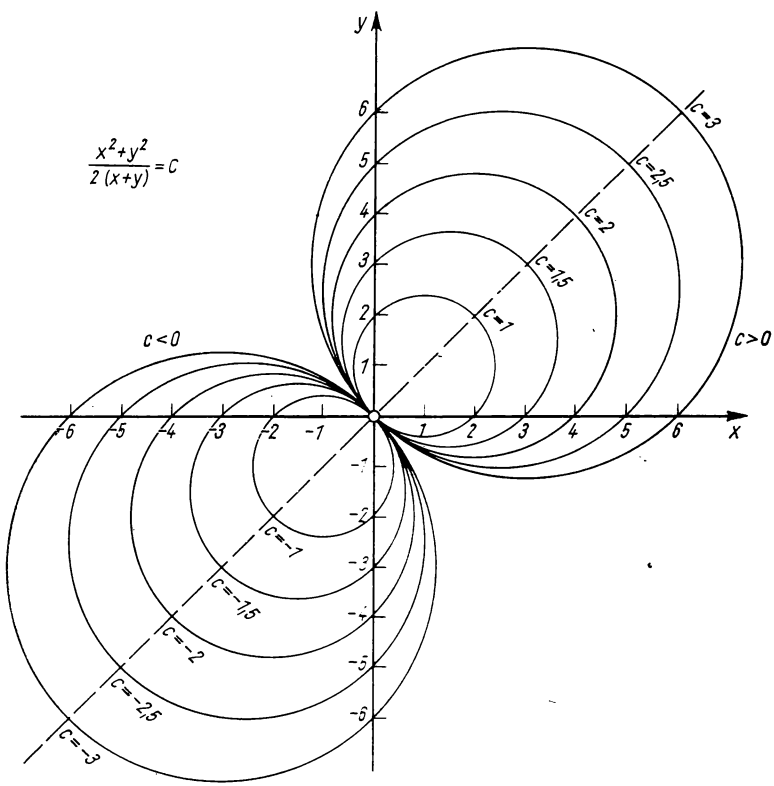



Bild 2.5

Man erkennt in Bild 2.5, daß alle Kreismittelpunkte auf der Geraden $y = x$ liegen. Der Nullpunkt gehört jeweils nicht zur Niveaulinie.

Bei reellen Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen ist eine analoge geometrische Interpretation nicht möglich, da wir Punkte des $n$-dimensionalen euklidischen Raumes $R^n$ für $n \geqq 4$ nicht mehr geometrisch veranschaulichen können.

## 2.2. Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variabler

Wir betrachten zunächst Funktionen von zwei unabhängigen Variablen. Es sei $f(x, y)$ eine solche Funktion, und ein Punkt $P_0(x_0, y_0)$ sei so gewählt, daß zumindest eine punktierte Umgebung von $P_0$ ganz zum Definitionsbereich $M$ der Funktion $f(x,y)$ gehört.[1]) Analog zum Vorgehen bei Funktionen *einer* unabhängigen Variablen betrachten wir nun Punktfolgen $P_n(x_n, y_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

(E 1) $(x_n, y_n) \in M$ für alle $n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$,

(E 2) $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ für alle $n$,

(E 3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.

Die betrachteten Punktfolgen sollen also ganz zum Definitionsbereich von $f(x, y)$ gehören, den Punkt $(x_0, y_0)$ nicht enthalten und gegen $(x_0, y_0)$ konvergieren. Für jede solche Punktfolge ist dann die zugehörige Folge der Funktionswerte $f(x_n, y_n)$ eine Zahlenfolge, und diese Zahlenfolge wird auf Konvergenz untersucht. Wir vereinbaren dann folgende

**Definition 2.2:** *Die Funktion $f(x, y)$ sei (mindestens) in einer punktierten Umgebung von $P_0(x_0, y_0)$ definiert. Eine Zahl $\lambda$ heißt* **Grenzwert** *von $f(x, y)$ für $P$ gegen $P_0$ (bzw. für $(x, y)$ gegen $(x_0, y_0)$), wenn für* **jede** *Folge $(x_n, y_n)$ mit den Eigenschaften* (E 1), (E 2), (E 3) *gilt, daß die Zahlenfolge $(f(x_n, y_n))$ der zugehörigen Funktionswerte stets gegen die Zahl $\alpha$ konvergiert. Wir schreiben dann*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \alpha \quad \text{oder} \quad \lim_{P\to P_0} f(x, y) = \lambda \quad \text{oder}$$

$$f(x, y) \to \alpha \quad \text{für} \quad (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Als Beispiel betrachten wir zunächst die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ und wählen z. B. $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Ist $(x_n, y_n)$ eine beliebige Folge mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3), so folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (-2, 1)$ dann für die Koordinatenfolgen $\lim\limits_{u\to\infty} x_n = -2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ und damit weiter

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^2 = 5. \tag{2.2}$$

---

[1]) Die Funktion $f$ ist also wenigstens für die Punkte einer Umgebung von $P_0$ mit eventueller Ausnahme von $P_0$ selber erklärt.

Da (2.2) für *jede* solche Folge gilt, erhalten wir

$$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} f(x,y) = 5. \tag{2.3}$$

Weiter betrachten wir die Funktion $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2(x+y)}$ aus Beispiel 2.4 und wählen $(x_0, y_0) = (0, 0)$; im Nullpunkt ist $f(x, y)$ nicht erklärt. Wir verfolgen unsere Über-

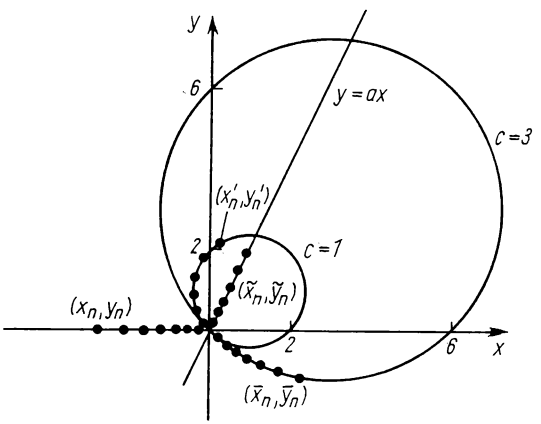



Bild 2.6

legungen in Bild 2.6. Ist $(x_n, y_n)$ eine Folge auf der $x$-Achse mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3), so gilt $y_n = 0$ für alle $n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{2x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} x_n = 0. \tag{2.4}$$

Das gleiche Ergebnis würde man erhalten, wenn die Punkte einer Folge $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3) auf einer beliebigen Geraden $y = ax$ $(a \neq -1)$ durch den Ursprung liegen. Dann gilt $\tilde{y}_n = a\tilde{x}_n$ für alle $n$ und weiter

$$\lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n^2 + a^2\tilde{x}_n^2}{2(\tilde{x}_n + a\tilde{x}_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n(1+a^2)}{2(1+a)} = 0. \tag{2.5}$$

An dieser Stelle darf auf keinen Fall geschlossen werden, daß $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ gilt, denn durch die bisherigen Betrachtungen sind bei weitem nicht alle Möglichkeiten für die Wahl von Folgen mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3) ausgeschöpft worden. Ist z. B. $(x_n', y_n')$ eine Folge mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3), die auf der Niveaulinie $c = 1$ liegt, so gilt also $f(x_n', y_n') = 1$ für alle $n$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = 1$. Ist $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ eine entsprechende Folge auf der Niveaulinie $c = 3$, die gegen den Nullpunkt konvergiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 3 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n').$$

Der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert also nicht, weil wir Folgen mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3) im Definitionsbereich der Funktion $f(x, y)$ angeben können, für welche die Zahlenfolgen der zugehörigen Funktionswerte unterschiedliches Grenzwertverhalten aufweisen.[1])

Analog zum Vorgehen im $R^1$ kann auch hier der Grenzwert mit Hilfe von Umgebungen charakterisiert werden. Ohne Beweis nennen wir den

**Satz 2.1:** *Die Funktion $f(x, y)$ sei (mindestens) in einer punktierten Umgebung von $P_0(x_0, y_0)$ definiert. Es gilt $\lim_{P\to P_0} f(x, y) = \alpha$ genau dann, wenn zu* **jeder** *beliebigen $\varepsilon$-Umgebung der Zahl $\alpha$ eine $\delta$-Umgebung von $P_0$ so gefunden werden kann, daß für alle Punkte $P(x, y)$ aus der* **punktierten** *$\delta$-Umgebung von $P_0$ die Funktionswerte $f(x, y)$ in der $\varepsilon$-Umgebung von $\alpha$ liegen.*

*Anders formuliert: $\lim_{P\to P_0} f(x, y) = \alpha$ gilt genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so gefunden werden kann, daß für alle $P(x, y)$ mit*

$$0 < d(P, P_0) < \delta^2) \quad \text{folgt} \quad |f(x, y) - \alpha| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Übertragen können wir auch die Definition der bestimmten Divergenz gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$. Wir schreiben z. B. $\lim_{P\to P_0} f(x, y) = +\infty$, wenn für jede Folge $(x_n, y_n)$ mit den Eigenschaften (E 1) bis (E 3) gilt, daß die Zahlenfolge der Funktionswerte $(f(x_n, y_n))$ bestimmt gegen $+\infty$ **divergiert.**

*Bemerkung 2.1:* Unmittelbar klar ist die Grenzwertdefinition für Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen. Auf eine Tatsache sei noch hingewiesen. Bei Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen wird außerdem der Begriff des einseitigen Grenzwertes eingeführt, indem man im Definitionsbereich nur solche Folgen betrachtet, die von rechts oder von links gegen die betrachtete Stelle konvergieren. Der Definitionsbereich ist dort Teil des „eindimensionalen" $R^1$, und eine Hervorhebung von ausgezeichneten Richtungen ist somit natürlich. Bei Funktionen von $n$ unabhängigen Veränderlichen ist im Fall $n \geqq 2$ die Definition von einseitigen Grenzwerten nicht sinnvoll. Wir betrachten ebenfalls kein Analogon zu den im $R^1$ üblichen „Bewegungen" $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ innerhalb des Definitionsbereiches der Funktion.

## 2.3. Grenzwertsätze

Die aus dem Band 2 bekannten Grenzwertsätze 2.3 bis 2.5 für Funktionen einer unabhängigen Variablen können wörtlich für Funktionen von zwei und mehr unabhängigen Variablen übertragen werden. Wir nennen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse und verwenden die Vektorschreibweise.

---

[1]) Es genügt die Angabe von mindestens zwei derartigen Folgen.

[2]) Daß es sich um eine punktierte Umgebung von $P_0$ handelt, kommt darin zum Ausdruck, daß wir schreiben $0 < d(P, P_0)$ und nicht $0 \leqq d(P, P_0)$.

**Satz 2.2:** *Für die Funktionen $f_1$ und $f_2$ mögen die Grenzwerte*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = \alpha \quad \textit{und} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = \beta$$

*existieren. Dann gilt*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})] = \alpha + \beta, \tag{2.7}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})] = \alpha - \beta, \tag{2.8}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [c \cdot f_1(\mathbf{x})] = c \cdot \alpha \ (c \textit{ beliebige Konstante}), \tag{2.9}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f_1(\mathbf{x}) \cdot f_2(\mathbf{x})] = \alpha \cdot \beta. \tag{2.10}$$

*Ist außerdem $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x}$ einer punktierten Umgebung von $\mathbf{x}_0$ und $\beta \neq 0$, dann gilt auch*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2.11}$$

*Gilt $\alpha = \beta$ und $f_1(\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{x}) \leqq f_2(\mathbf{x})$ für eine Funktion $f$ und alle $\mathbf{x}$ einer punktierten Umgebung von $\mathbf{x}_0$, so folgt aus*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = \alpha \textit{ dann auch } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \alpha. \tag{2.12}$$

Unter Ausnutzung dieses Satzes können oft sehr vorteilhaft Grenzwerte berechnet werden:

*Beispiel 2.5:* Die Funktion $f(x, y) = \dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$ ist für alle Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ erklärt. Für alle diese $(x, y)$ gilt

$$0 \leqq y^2 \leqq x^2 + y^2. \tag{2.13}$$

Wegen $x^2 + y^2 > 0$ folgt aus (2.13)

$$0 \leqq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leqq 1 \tag{2.14}$$

und dann weiter

$$0 \leqq \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y) \leqq x^2. \tag{2.15}$$

Betrachten wir nun im Definitionsbereich von $f$ den Grenzübergang $(x, y) \to (0, 0)$, so folgt speziell $x \to 0$ und damit weiter $x^2 \to 0$. Setzt man $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = x^2$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, so folgt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = 0$$

und aus (2.12) dann auch

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

*Aufgabe 2.1:* Bestimmen Sie alle Punkte $P(x, y)$, für die folgende Funktionen erklärt werden können:

a) $f(x, y) = \ln(1 - e^{x+y})$, b) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$.

*Aufgabe 2.2:* Zeichnen Sie für die folgenden Funktionen die Niveaulinien $c = 1, 2, 3, 4, 5$, und geben Sie anschließend an, durch welche Flächen die Funktionen veranschaulicht werden können.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + 4y^2}$.

*Aufgabe 2.3:* Die folgenden Funktionen $f(x, y)$ sind für $(x, y) \neq (0, 0)$ erklärt. Untersuchen Sie, ob $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert.

a) $f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}$, b) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

## 2.4. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler

Genau wie bei Funktionen einer unabhängigen Variablen ist auch bei Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler der Begriff des Grenzwertes einer Funktion $f$ an einer Stelle $(x_0, y_0)$ eng mit dem Begriff der Stetigkeit von $f$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ verbunden. Die Funktion muß jetzt nicht nur in einer punktierten Umgebung von $(x_0, y_0)$ erklärt sein, sondern auch an der Stelle $(x_0, y_0)$ selber. In wörtlicher Übertragung[1]) der Definition 3.1 aus Band 2 formulieren wir dann

**Definition 2.3:** *Eine in einer Umgebung von* $(x_0, y_0)$ *definierte Funktion* $f(x, y)$ *heißt an der Stelle* $(x_0, y_0)$ **stetig**, *wenn gilt*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{2.16}$$

Führt man für einen beliebigen zu $(x_0, y_0)$ benachbarten Punkt $(x, y)$ die Größen $h = x - x_0$ und $k = y - y_0$ ein, so gilt $x = x_0 + h$ und $y = y_0 + k$, und der Grenzübergang $(x, y) \to (x_0, y_0)$ bedeutet dann $(h, k) \to (0, 0)$. Für (2.16) können wir dann auch schreiben

$$\lim_{h,k\to 0,0} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0). \tag{2.17}$$

---

[1]) Eine wörtliche Übertragung ist möglich, weil auch zuvor im $R^n$ die Begriffe „Umgebung" und „Grenzwert" erklärt wurden.

Bei Benutzung von Punktfolgen bedeutet die Stetigkeit von $f$, daß für *jede* Folge $(x_n, y_n)$ aus dem Definitionsbereich von $f(x, y)$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f\left(\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)\right) = f(x_0, y_0). \tag{2.18}$$

Die Stetigkeit besagt also, daß man zwei mathematische Operationen vertauschen kann. Auf der linken Seite von (2.18) wird verlangt, daß man zuerst die Funktionswerte $f(x_n, y_n)$ und anschließend den Grenzwert der Zahlenfolge $(f(x_n, y_n))$ bestimmt. Auf der rechten Seite von (2.18) ist zunächst der Grenzwert der Punktfolge $(x_n, y_n)$ zu ermitteln und anschließend der Funktionswert von diesem Punkt aufzusuchen. Ist die Funktion $f(x, y)$ stetig, so ist das Ergebnis in beiden Fällen gleich.

Die „$\varepsilon$, $\delta$-Charakterisierung" der Stetigkeit kann wie folgt formuliert werden.

**Satz 2.3:** *Die Funktion $f(x, y)$ sei in einer Umgebung von $(x_0, y_0)$ definiert. Genau dann ist $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ stetig, wenn zu* **jeder** *Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt: Für* **alle** *$(x, y)$ mit*

$$d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta^{1}) \text{ folgt } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Mit Hilfe des Umgebungsbegriffes können wir die Bedingung für die Stetigkeit auch wie folgt formulieren: Zu *jedem* $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle $(x, y)$ aus der $\delta$-Umgebung $U((x_0, y_0); \delta)$ von $(x_0, y_0)$ der Funktionswert $f(x, y)$ in der $\varepsilon$-Umgebung der Zahl $f(x_0, y_0)$ liegt.[2])

*Beispiel 2.6:* Wir betrachten die Funktion:

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \text{ und } f(0, 0) = 0.$$

An jeder Stelle $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ ist $f(x, y)$ stetig, denn ist $(x_n, y_n)$ eine beliebige Punktfolge mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, so folgt für die Koordinaten $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{x_0 \cdot y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0).$$

Im Nullpunkt ist $f(x, y)$ nicht stetig, denn z. B. für die Folge $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ gilt $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0)$ und $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, also auch $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$. (Wir bemerken noch ergänzend, daß im vorliegenden Beispiel nicht einmal der Grenzwert $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert. Zum Beispiel für die Folge $(x_n', y_n') = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ gilt

---

[1]) $d(...)$ bedeutet den Abstand der beiden Punkte.

[2]) Die $\delta$-Umgebung von $(x_0, y_0)$ ist Teilmenge des $R^2$; die $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0, y_0)$ ist Teilmenge des $R^1$.

$(x_n', y_n') \to (0, 0)$ und $f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{5}$, also auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$.)

## 2.5. Sätze über stetige Funktionen

Die uns bekannten Sätze über stetige Funktionen einer unabhängigen Variablen aus Band 2 können nahezu wörtlich übertragen werden auf stetige Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen. Wir formulieren die entsprechenden Aussagen, ohne auf die Beweise der Sätze einzugehen. Der Begriff der einseitigen Stetigkeit kann für Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler nicht erklärt werden. Wir benutzen die Vektorschreibweise und betrachten gleich den allgemeinen Fall einer Funktion von $n$ unabhängigen Variablen. Die Übertragung der dortigen Sätze 3.3 und 3.4 lautet hier:

**Satz 2.4:** *Ist die Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$ stetig und gilt $f(\mathbf{x}_0) > 0$ (bzw. $f(\mathbf{x}_0) < 0$), so gibt es mindestens eine $\delta$-Umgebung $U(\mathbf{x}_0; \delta)$ von $\mathbf{x}_0$, so daß sogar $f(\mathbf{x}) > 0$ (bzw. $f(\mathbf{x}) < 0$) auch noch für* **alle** $\mathbf{x} \in U(x_0; \delta)$ *gilt.*

**Satz 2.5:** *Die Funktionen $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ seien an der Stelle $\mathbf{x}_0$ stetig. Dann sind auch die Funktionen*

$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $c \cdot f(\mathbf{x})$ *($c$ beliebige Konstante) und $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$ stetig. Gilt weiter $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$ stetig.*

In Übertragung der dortigen Sätze 3.8 und 3.9 können wir formulieren:

**Satz 2.6:** *Die Funktion $f(\mathbf{x})$ sei auf einer Menge $M$ erklärt. Ist $f(\mathbf{x})$ stetig auf $M$ und ist $M$ eine kompakte Teilmenge des $R^n$ (d. h., $M$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $R^n$), so besitzt $f(\mathbf{x})$ auf $M$ ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum. Es gibt also Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ in $M$, so daß*

$$f(\mathbf{x}_1) \leqq f(\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{x}_2) \text{ für } \textbf{alle } \mathbf{x} \in M \text{ gilt.}^1)$$

Speziell im Fall $n = 2$ gilt also, daß stetige Funktionen, die z. B. auf einem abgeschlossenen Rechteck definiert sind, dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum besitzen. Im Fall $n = 1$ sind abgeschlossene Intervalle kompakte Teilmengen des $R^1$.

Als Übertragung der Nullstelleneigenschaft formulieren wir den

**Satz 2.7:** *Die Funktion $f(\mathbf{x})$ sei in einem Gebiet $G$ definiert und dort stetig. Für ein $\mathbf{x}_1 \in G$ gelte $f(\mathbf{x}_1) > 0$ und für ein $\mathbf{x}_2 \in G$ gelte $f(\mathbf{x}_2) < 0$. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in G$ mit $f(\xi) = 0$.*

Für die Bildung zusammengesetzter (oder mittelbarer) Funktionen betrachten wir

---

[1]) Gilt $f(\mathbf{x}_1) \leqq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}$, so heißt $\mathbf{x}_1$ Stelle des absoluten Minimums der Funktion $f$. Gilt $f(\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{x}_2)$ für alle $\mathbf{x}$, so heißt $\mathbf{x}_2$ Stelle des absoluten Maximums der Funktion $f$.

wegen der besseren Übersicht wieder den Spezialfall $n = 2$ und besprechen zwei Möglichkeiten für die Bildung mittelbarer Funktionen. Ausführlicher gehen wir auf zusammengesetzte Funktionen im Abschnitt 3.6.1. ein.

*Beispiel 2.7:* In der gesamten $x, y$-Ebene erklärt ist die Funktion

$$f(x, y) = e^{x \cdot \sin y}. \tag{2.20}$$

Ausgehend von den beiden Funktionen

$$u(x, y) = x \cdot \sin y \quad \text{und} \quad z(u) = e^u \tag{2.21}$$

kann für einen beliebigen Punkt $(x, y)$ zunächst der Funktionswert $u(x, y) = x \cdot \sin y$ bestimmt werden. Da $z(u) = e^u$ für jede reelle Zahl definiert ist, gehört speziell $u(x, y) = x \cdot \sin y$ zum Definitionsbereich von $z = e^u$, und man kann anschließend

$$z(u(x, y)) = e^{u(x,y)} = e^{x \sin y} \tag{2.22}$$

bilden. Die Funktion (2.20) besteht somit aus den beiden „Bausteinen" (2.21), wobei die „innere Funktion" $u(x, y)$ eine Funktion von zwei Variablen und die „äußere Funktion" $z(u)$ eine Funktion von nur einer Variablen ist. Durch Zusammensetzung beider Funktionen oder Hintereinanderausführung beider Funktionen erhält man eine reelle Funktion von zwei Variablen.

*Beispiel 2.8:* Auf einer $t$-Achse betrachten wir etwa auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 2\pi]$ die beiden Funktionen

$$\varphi(t) = \cos t \quad \text{und} \quad \psi(t) = e^t.$$

Für jeden Wert $t$ aus $[0, 2\pi]$ gehören dann die Punkte $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t)) = (\cos t, e^t)$ zum Definitionsbereich der Funktion $f(x, y) = 2x + y^2$. Wir können also die mittelbare Funktion

$$g(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) = 2(\varphi(t)) + (\psi(t))^2 = 2 \cos t + e^{2t}$$

bilden und erhalten als Ergebnis durch Zusammensetzung eine auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ erklärte reelle Funktion einer unabhängigen Variablen.

Bezüglich der Stetigkeit gilt dann, daß mittelbare Funktionen stetig sind, wenn die zu ihrem Aufbau benutzten Funktionen an den verwendeten Stellen einzeln stetig sind.

Wir erkennen also sofort, daß die Funktion $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ für alle Punkte $(x, y)$ unterhalb der Geraden $y = x$ stetig ist, da $u(x, y) = x - y$ überall stetig und $z(u) = \sqrt{u}$ für alle $u > 0$ stetig ist.

*Aufgabe 2.4:* Bestimmen Sie

$$\lim_{(x,y) \to \left(3, -\frac{\pi}{2}\right)} x \cdot e^{x+y+\frac{\pi}{2}-2} \cdot \sin xy.$$

## 2.6. Vektorfunktionen

### 2.6.1. Begriff der Vektorfunktion

Bei den bisher betrachteten Funktionen war der Definitionsbereich eine geeignete Teilmenge $M$ des $R^2$ oder allgemeiner eine geeignete Teilmenge des $n$-dimensionalen euklidischen Raumes $R^n$, und die Funktionswerte waren reelle Zahlen, lagen also stets im $R^1$. Für die Anwendungen ist jedoch die folgende Verallgemeinerung wichtig. Es sei $M$ eine Teilmenge des $R^n$ und $W$ eine Teilmenge des $R^m$ ($m$ natürliche Zahl, $m \geqq 1$; an dieser Stelle interessiert besonders der Fall $m > 1$).

Es soll nun jedem Punkt $P$ aus $M$ als Funktionswert ein Punkt $Q$ von $W \subset R^m$ zugeordnet werden. Benutzen wir die Sprechweise der Vektorrechnung, so soll jedem Vektor $\mathbf{x} \in M$ als Funktionswert ein Vektor $\mathbf{y} \in W$ zugeordnet werden. Wir schreiben für $\mathbf{y} \in W$ dann $\mathbf{f}(P)$ oder auch $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und sprechen von einer **Vektorfunktion f.** (Durch das Symbol **f** wird angedeutet, daß die Funktionswerte wieder Punkte bzw. Vektoren sind.) Für die Anwendungen ist der Spezialfall $m = n = 3$ wichtig. Als erstes Beispiel nennen wir an dieser Stelle die stationäre Strömung einer Flüssigkeit. Ein Flüssigkeitsteilchen hat dann in einem Punkt $P$ des durchströmten Gebietes $G$ eine Geschwindigkeit $\mathbf{v}(P)$. Betrachtet man für *alle* Punkte $P$ des Gebietes $G$ den Vektor $\mathbf{v}(P)$, so erhält man eine in $G$ erklärte Vektorfunktion. Man spricht dann gelegentlich auch von einem in $G$ erklärten **Vektorfeld** im Gegensatz zu den bisher betrachteten Funktionen. Bei ihnen sind die Funktionswerte reelle Zahlen, und man bezeichnet solche Funktionen dann auch als **Skalarfelder.**

*Beispiel 2.9:* Es sei nun $m = n = 3$. Jedem Punkt $P(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ werde als Funktionswert der Punkt $Q(x_2x_3, x_3(x_1 + x_3), x_2(x_1 + x_3) + x_3(x_2 + x_3))$ zugeordnet. Bei Benutzung der Vektorschreibweise erhalten wir die Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_2x_3\mathbf{e}_1 + x_3(x_1 + x_3)\mathbf{e}_2 + [x_2(x_1 + x_3) + x_3(x_2 + x_3)]\,\mathbf{e}_3$$
$$\text{für jedes } \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in R^3.$$

Wichtig ist der folgende Zusammenhang zwischen einer **Vektorfunktion** und einem **System von reellen Funktionen.** Für jeden Punkt $P$ aus dem Definitionsbereich $M$ einer Vektorfunktion **f** ist der Funktionswert $\mathbf{f}(P)$ ein Punkt des $R^m$; wir können also schreiben $\mathbf{f}(P) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Jedem Punkt $P$ wird somit ein $m$-Tupel von reellen Zahlen zugeordnet. Schreiben wir

$$y_i = f_i(P) = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m \text{ und } P \in M, \tag{2.23}$$

so sind die Funktionen $f_i$ reelle Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich $M$, und es gilt

$$\mathbf{f}(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P)). \tag{2.24}$$

Ein Vektorfeld **f** kann somit auf ein System von $m$ reellen Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ zurückgeführt werden. Die Anzahl der reellen Funktionen ist gleich der Dimension des Bildraumes. Umgekehrt kann jedes System von $m$ reellen Funktionen *mit gemeinsamem Definitionsbereich M* zu einer Vektorfunktion auf $M$ mit Werten im $R^m$ zusammengefaßt werden. Wir können also die Vektorfunktion **f** identifizieren mit einem

$m$-Tupel $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ von reellen Funktionen und daher symbolisch schreiben

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Im Beispiel 2.9 wäre die Vektorfunktion $\mathbf{f}$ zu identifizieren mit folgendem Tripel von reellen Funktionen:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3; \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1 + x_3);$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = [x_2(x_1 + x_3) + x_3(x_2 + x_3)].$$

Die Definition des Grenzwertes für Vektorfunktionen $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist nahezu wörtlich zu übernehmen von Definition 2.2 mit dem Unterschied, daß die Funktionswertfolgen jetzt Punktfolgen und nicht Zahlenfolgen sind. Wenn also für *jede* Folge $(\mathbf{x}_n)$ aus dem Definitionsbereich $M$ der Vektorfunktion $\mathbf{f}$ mit $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ für alle natürlichen Zahlen $n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ dann im $R^m$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}$, so schreiben wir $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Analoges gilt für den Begriff der Stetigkeit von $\mathbf{f}$ an einer Stelle $\mathbf{x}_0$. Für *jede* Folge $(\mathbf{x}_n)$ aus dem Definitionsbereich von $\mathbf{f}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ muß folgen $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Beachten wir die Tatsache, daß eine Folge im $R^m$ genau dann konvergiert, wenn die $m$ Zahlenfolgen der einzelnen Koordinaten konvergieren, so können wir folgendes sagen: Eine Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist genau dann stetig, wenn die $m$ reellen Funktionen $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})$ im bekannten Sinne stetig sind. Die im Beispiel 2.9 genannte Vektorfunktion ist also überall stetig, da die drei reellen Funktionen $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, $f_3(\mathbf{x})$ überall stetig sind.

### 2.6.2. Krummlinige Koordinaten im $R^2$

In der Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen im Band 5 werden als Integrationsbereiche geeignete Punktmengen im $R^2$ oder $R^3$ betrachtet. Es wird darauf ankommen, diese Mengen möglichst übersichtlich zu beschreiben. Hierzu sind dann oft die sogenannten *krummlinigen Koordinaten* sehr geeignet. Sie stellen zugleich ein wichtiges Beispiel für das Arbeiten mit Vektorfunktionen dar und sollen nun besprochen werden. In allen Fällen betrachtet man neben dem $R^n$ eine geeignete Teilmenge eines $R^m$, die durch eine Vektorfunktion auf den gesamten $R^n$ abgebildet wird.

Zuerst behandeln wir für den Fall $m = n = 2$ die ebenen **Polarkoordinaten**. Neben der $x, y$-Ebene $E$ wird eine weitere Ebene $\tilde{E}$ ebenfalls mit einem rechtwinklig kartesischen Koordinatensystem betrachtet, in der wir die Koordinaten der Punkte mit $r$ und $\varphi$ bezeichnen. In der $r, \varphi$-Ebene $\tilde{E}$ sei $\tilde{B}$ der in Bild 2.7 gekennzeichnete Halbstreifen; die linke und obere Begrenzungsgerade sollen zu $\tilde{B}$ gehören. Wir können also schreiben

$$\tilde{B} = \{(r, \varphi) \in \tilde{E} \mid 0 \leqq r < \infty \quad \text{und} \quad -\pi < \varphi \leqq \pi\}. \tag{2.25}$$

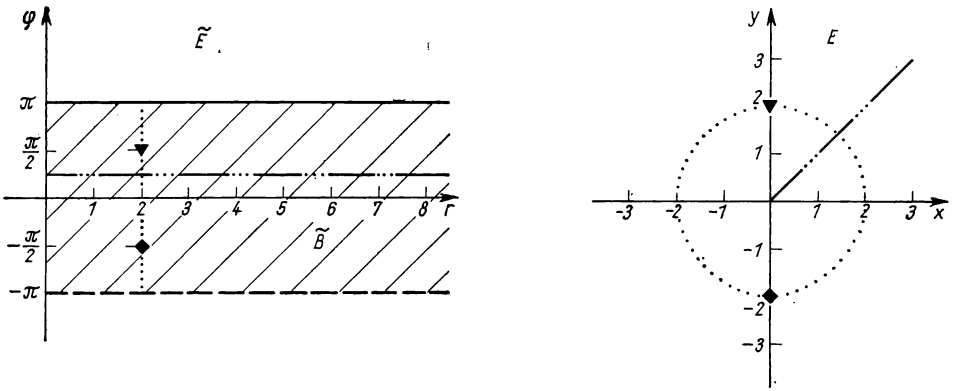



Bild 2.7

Jedem Punkt $(r, \varphi)$ aus $\tilde{B}$ werde nun der Punkt $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ in der $x, y$-Ebene zugeordnet. Auf der Menge $\tilde{B}$ wird also die durch die beiden reellen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{ für } 0 \leqq r < \infty \text{ und } -\pi < \varphi \leqq \pi \tag{2.26}$$

gekennzeichnete Vektorfunktion betrachtet. Aus (2.26) lesen wir dann folgende Zuordnung von Punkten aus $\tilde{B}$ zu Punkten in der $x, y$-Ebene ab: $(r_1, \varphi_1) = \left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$ wird abgebildet in $(x_1, y_1) = \left(2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, -2)$ oder $(r_2, \varphi_2) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ wird abgebildet in $(x_2, y_2) = \left(2\cos\frac{\pi}{2}, 2\sin\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2)$. Erteilen wir allgemein der Koordinate $r$ den festen Wert $r = 2$, so werden die Punkte $(r, \varphi) = (2, \varphi)$ aus $\tilde{B}$ abgebildet in die Punkte $(x, y) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$. Wegen $x^2 + y^2 = 4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi = 4$ sind dies gerade die Punkte des Kreises mit dem Radius $r = 2$ um den Nullpunkt in der $x, y$-Ebene. Erteilen wir andererseits der unabhängigen Variablen $\varphi$ z. B. den festen Wert $\varphi = \frac{\pi}{4}$, so gilt für die Bildpunkte von $(r, \varphi) = \left(r, \frac{\pi}{4}\right)$ dann $(x, y) = \left(r\cos\frac{\pi}{4}, r\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Wegen $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ durchläuft der Bildpunkt dann alle Punkte der Halbgeraden $y = x$ mit $0 \leqq x < \infty$ durch den Nullpunkt. In Bild 2.7 ist die Punktzuordnung durch die gleiche Markierung angedeutet. Die Bilder von Geraden $r = c$ ($c$ konstant, $-\pi < \varphi \leqq \pi$) in $\tilde{B}$ sind Kreise um den Nullpunkt in der $x, y$-Ebene; die Bilder von Geraden $\varphi = c$ ($c$ konstant, $0 \leqq r < \infty$) in $\tilde{B}$ sind vom Nullpunkt ausgehende Halbgeraden in der $x, y$-Ebene. Der Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$ in der Ebene $E$ ist Bildpunkt von *allen* Punkten $(r, \varphi) = (0, \varphi)$ mit $-\pi < \varphi \leqq \pi$, d. h., der Nullpunkt ist Bildpunkt von allen Punkten des linken Randes von $\tilde{B}$. Zu jedem anderen Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ gibt es genau einen Punkt $(r, \varphi)$ in $\tilde{B}$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Jeder Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ entsteht also in eindeutiger Weise aus genau einem Punkt $(r, \varphi)$ von $\tilde{B}$. Die durch (2.26) beschriebene Vektorfunktion ist also eineindeutig mit Ausnahme für gewisse Randpunkte von $\tilde{B}$.

In Bild 2.8 erkennt man den geometrischen Zusammenhang zwischen den Zahlen $r$, $\varphi$ und den zugehörigen Zahlen $x, y$. Wegen $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r$ ist $r$ der Abstand des Punktes $(x, y)$ vom Nullpunkt. $\varphi$ ist der von der positiven $x$-Achse aus gemessene Winkel gegen die Halbgerade durch den Nullpunkt und den Punkt $(x, y)$. Diese Zahlen $r$ und $\varphi$ bezeichnet man als die **Polarkoordinaten** des Punktes $P$. Die Bilder der Geraden $r = \text{const}$ bzw. $\varphi = \text{const}$ heißen **Koordinatenlinien**. Die Koordinatenlinien der Polarkoordinaten sind also Kreise um den Nullpunkt bzw. vom Nullpunkt ausgehende Halbgeraden.

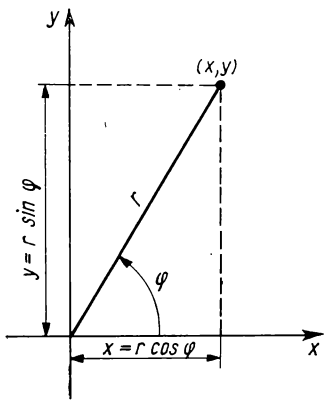



Bild 2.8

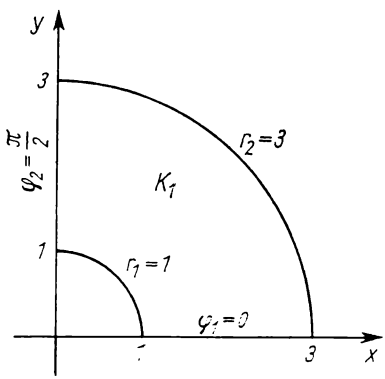



Bild 2.9

Mit Hilfe von Polarkoordinaten können Punktmengen in der $x, y$-Ebene immer dann bequemer beschrieben werden als dies mit den Koordinaten $x$ und $y$ möglich wäre, wenn sie durch Koordinatenlinien der Polarkoordinaten, also durch geeignete Kreise um den Nullpunkt und Halbgeraden durch den Nullpunkt, begrenzt werden. Für diese Punktmengen bilden die zugehörigen Punkte in der $r, \varphi$-Ebene einen übersichtlicheren Normalbereich.

*Beispiel 2.10:* Es sei $K$ die durch den Kreis $x^2 + y^2 = 4$ begrenzte Punktmenge. Es ist dies die Koordinatenlinie $r = 2$. Wollen wir die Punkte von $K$ mit Hilfe der rechtwinkligen $x, y$-Koordinaten beschreiben, so müssen wir den oberen Begrenzungshalbkreis $y = \sqrt{4 - x^2}$ und den unteren Begrenzungshalbkreis $y = -\sqrt{4 - x^2}$ heranziehen und können dann schreiben

$$K = \{(x, y) \in E \mid -2 \leqq x \leqq 2 \quad \text{und} \quad -\sqrt{4 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{4 - x^2}\}. \tag{2.27}$$

Betrachten wir in der $r, \varphi$-Ebene das Rechteck

$$\tilde{K} = \{(r, \varphi) \in \tilde{B} \mid 0 \leqq r \leqq 2 \quad \text{und} \quad -\pi < \varphi \leqq \pi\}, \tag{2.28}$$

so entsteht der Kreis $K$ durch die Abbildung (2.26) aus $\tilde{K}$. (2.28) ist in vielen Fällen eine übersichtlichere Darstellung für die genannte Menge.

*Beispiel 2.11:* Es sei $K_1$ die in Bild 2.9 skizzierte Menge; sie wird begrenzt durch die Koordinatenkennlinien $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ und die Koordinatenlinien $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. $K_1$ entsteht durch Anwendung der Abbildung (2.26) auf das Rechteck

$$K_1 = \left\{(r, \varphi) \in \tilde{B} \,|\, 1 \leqq r \leqq 3 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Mit Hilfe der $x, y$-Koordinaten wäre eine Beschreibung der Menge $K_1$ komplizierter.

*Beispiel 2.12:* Es sei $K_2$ die durch den Kreis $(x-2)^2 + y^2 = 4$ begrenzte Menge in der $x, y$-Ebene. Bezeichnet $O$ den Nullpunkt und $P$ einen variablen Punkt auf der Kreislinie, so erkennt man in Bild 2.10, daß die Menge $K_2$ aufgefaßt werden kann als

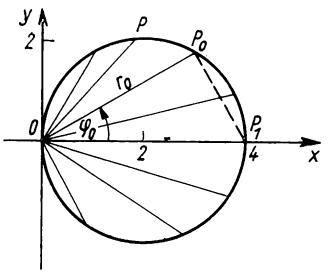



Bild 2.10

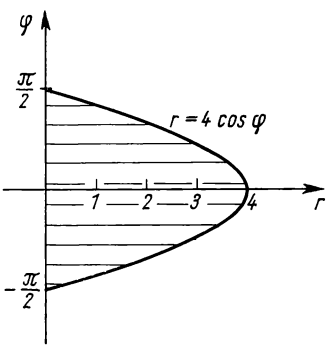



Bild 2.11

Menge aller Strecken $\overline{OP}$, wobei $P$ die gesamte Kreislinie durchläuft. Ein Kreispunkt $P_0$ werde herausgegriffen; seine Polarkoordinaten seien $r_0$ und $\varphi_0$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Eckpunkten $O$, $P_0$ und $P_1(4, 0)$ lesen wir dann

$$\cos \varphi_0 = \frac{r_0}{4} \quad \text{oder} \quad r_0 = 4 \cos \varphi_0$$

ab. Alle Punkte der Strecke $\overline{OP_0}$ haben die gleiche $\varphi$-Koordinate $\varphi_0$, sie liegen auf der Koordinatenlinie $\varphi = \varphi_0$. Die Strecke $\overline{OP_0}$ ist also die Menge aller Punkte $(x, y)$ mit $x = r \cos \varphi_0$, $y = r \sin \varphi_0$ und $r$ variabel in $0 \leqq r \leqq 4 \cos \varphi_0$. Speziell für $\varphi_0 = 0$ ist die Strecke $\overline{OP_1}$ die Menge aller Punkte

$$(x, y) = (r \cos 0, r \sin 0) = (r, 0) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq r \leqq 4 \cos 0 = 4.$$

Lassen wir nun $\varphi_0$ variieren zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir alle Punkte von $K_2$.

$K_2$ wird daher durch die Koordinatenlinien $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ begrenzt.

In der $r, \varphi$-Ebene betrachten wir die Menge:

$$\tilde{K}_2 = \left\{(r, \varphi) \in \tilde{B} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leqq r \leqq 4 \cos \varphi\right\}. \tag{2.29}$$

Die Begrenzung der $r$-Koordinate ist also von $\varphi$ abhängig. $\tilde{K}_2$ ist der in Bild 2.11 skizzierte Normalbereich in der $r, \varphi$-Ebene. Wendet man auf $\tilde{K}_2$ die Vektorfunktion (2.26) an, so erhält man den Kreis $K_2$ in der $x, y$-Ebene. Unter Benutzung der $x, y$-Koordinaten hätte man zu schreiben:

$$K_2 = \left\{(x, y) \in E \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 4 \quad \text{und} \quad -\sqrt{4-(x-2)^2} \leqq y \leqq \sqrt{4-(x-2)^2}\right\}. \tag{2.30}$$

Die Darstellung des Kreises durch (2.29) ist in vielen Fällen sehr viel günstiger als durch (2.30).

In Verallgemeinerung des geschilderten Sachverhaltes ist nun naheliegend, sogenannte **krummlinige Koordinaten** in der $x, y$-Ebene einzuführen. Neben der $x, y$-Ebene betrachtet man eine $u, v$-Ebene und in dieser $u, v$-Ebene eine gewisse Teilmenge $\tilde{B}$. Für die Punkte von $\tilde{B}$ soll eine Vektorfunktion durch die reellen Funktionen $f_1(u, v)$ und $f_2(u, v)$ derart erklärt sein, daß durch die Festsetzung

$$x = f_1(u, v) \quad \text{und} \quad y = f_2(u, v) \tag{2.31}$$

eine Abbildung von der Menge $\tilde{B}$ auf die *gesamte* $x, y$-Ebene entsteht. Die Abbildung soll eineindeutig sein mit eventueller Ausnahme von gewissen Randpunkten von $\tilde{B}$. Wenn dann $x_0 = f_1(u_0, v_0)$ und $y_0 = f_2(u_0, v_0)$ gilt, dann heißen $u_0$ und $v_0$ die krummlinigen Koordinaten des Punktes $P_0(x_0, y_0)$. Als **Koordinatenlinien** bezeichnet man die Bilder der Geraden $u = u_0$ bzw. der Geraden $v = v_0$. Die Wahl passender krummliniger Koordinaten geschieht in der Weise, daß die zu behandelnden Punktmengen in der $x, y$-Ebene durch möglichst übersichtliche Normalbereiche in der $u, v$-Ebene beschrieben werden können. Dies ist der Fall, wenn die Mengen durch Koordinatenlinien begrenzt werden.

*Aufgabe 2.5:* Die folgenden Punktmengen $K$ in der $x, y$-Ebene beschreibe man mit Hilfe von Polarkoordinaten:

a) $K$ sei der Kreisring, begrenzt durch die Kreise

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 6;$$

b) $K$ werde begrenzt durch den Kreis $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

### 2.6.3. Krummlinige Koordinaten im $R^3$

Alles, was über krummlinige Koordinaten in der $x, y$-Ebene gesagt wurde, gilt in sinnvoller Übertragung auch für krummlinige Koordinaten im Raum. Neben dem $x, y, z$-Raum wird ein $u, v, w$-Raum betrachtet und in diesem eine gewisse Teilmenge $\tilde{R}$. Für die Punkte von $\tilde{R}$ muß eine Vektorfunktion durch drei reelle Funktionen $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$ und $f_3(u, v, w)$ derart erklärt sein, daß durch die Festsetzung

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w) \quad \text{und} \quad z = f_3(u, v, w) \tag{2.32}$$

eine Abbildung von der Menge $\tilde{R}$ auf den *gesamten* $x, y, z$-Raum entsteht. Diese Abbildung muß eineindeutig sein mit eventueller Ausnahme von gewissen Randpunkten von $\tilde{R}$. $u, v, w$ heißen dann **krummlinige Koordinaten** des Punktes $P(x, y, z)$. Betrachtet man in der Menge $\tilde{R}$ eine Gerade, die dadurch entsteht, daß man zwei der unabhängigen Variablen einen festen Wert erteilt und die übrige Variable variieren läßt, so heißt das Bild dieser Geraden bei Anwendung der Vektorfunktion (2.32) eine Koordinatenlinie im $R^3$. Wählt man z. B. $u = u_0$ und $w = w_0$ fest und läßt $v$ variieren, so entsteht durch Anwendung von (2.32) eine $v$-**Koordinatenlinie** im $R^3$. Erteilt man

nur einer der unabhängigen Variablen einen festen Wert, so erhält man in $\tilde{R}$ Ebenen, die zu den Koordinatenebenen im $u, v, w$-Raum parallel sind. Die Bilder solcher Ebenen heißen **Koordinatenflächen** im $R^3$. Die Wahl geeigneter krummliniger Koordinaten im $R^3$ wird wieder so geschehen, daß die zu beschreibenden Punktmengen durch zugehörige Koordinatenflächen begrenzt werden.

*Beispiel 2.13:* **Zylinderkoordinaten**: Neben dem $x, y, z$-Raum wird ein $r, \varphi, z$-Raum betrachtet und in diesem die Menge

$$\tilde{R} = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leqq r < \infty \text{ und } -\pi < \varphi \leqq \pi \text{ und } -\infty < z < \infty\}. \quad (2.33)$$

Man gelangt zu $\tilde{R}$, indem man in der $r, \varphi$-Ebene von dem für ebene Polarkoordinaten bekannten Halbstreifen $\tilde{B}$ ausgeht und dann alle Punkte im $r, \varphi, z$-Raum betrachtet, die senkrecht über Punkten von $\tilde{B}$ liegen. Die zu den sogenannten Zylinderkoordinaten gehörende Abbildung der Menge $\tilde{R}$ in den $R^3$ ist gekennzeichnet durch

$$\left.\begin{aligned} x(r, \varphi, z) &= r \cos \varphi \\ y(r, \varphi, z) &= r \sin \varphi \\ z(r, \varphi, z) &= z \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad (r, \varphi, z) \in \tilde{R}. \quad (2.34)$$

Der Punkt $(r, \varphi, z) = \left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ wird also durch (2.34) abgebildet in den Punkt $(x, y, z) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, 1\right) = (0, 1, 1)$. In Bild 2.12 erkennt man sofort den Zusammenhang zwischen den Koordinaten $x, y, z$ und den Zylinderkoordinaten $r, \varphi, z$. Wird $r$ und $\varphi$ ein fester Wert erteilt und $z$ variabel gelassen, so erhält man als $z$-Koordinatenlinien im $R^3$ Geraden parallel zur $z$-Achse. Wird $r$ und $z$ ein fester Wert erteilt und $\varphi$ variabel gelassen, so erhält man als $\varphi$-Koordinatenlinien im $R^3$ Kreise, die in Ebenen $z = \text{const}$ parallel zur $x, y$-Ebene verlaufen; die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen auf der $z$-Achse. Wird $\varphi$ und $z$ ein fester Wert erteilt und $r$ variabel

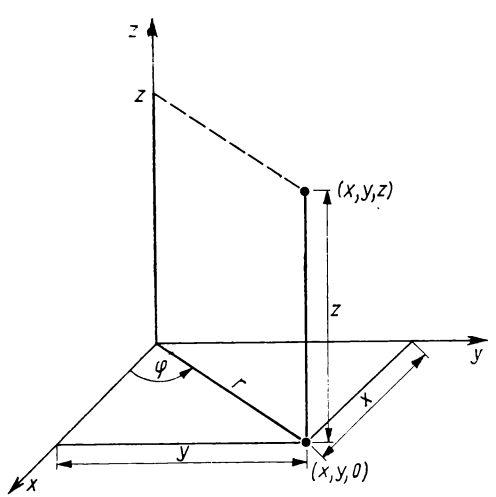



Bild 2.12

gelassen, so erhält man als $r$-Koordinatenlinien im $R^3$ Halbgeraden; sie gehen von Punkten der $z$-Achse aus und verlaufen parallel zur $x, y$-Ebene. Die Koordinatenflächen $z = \text{const}$ sind Ebenen parallel zur $x, y$-Ebene. Die Koordinatenflächen $\varphi = \text{const}$ sind von der $z$-Achse ausgehende Halbebenen; sie verlaufen senkrecht zur $x, y$-Ebene. Die Koordinatenflächen $r = \text{const}$ sind Zylinder; für alle diese Zylinder ist die $z$-Achse gemeinsame Zylinderachse.

Die Zylinderkoordinaten eignen sich besonders zur Beschreibung solcher Punktmengen im $R^3$, deren Begrenzungsflächen zum Teil Koordinatenflächen der Zylinderkoordinaten sind. Es sei z. B. $K$ derjenige Körper, der von dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Spitze im Nullpunkt; nach oben geöffnet), dem Zylinder $x^2 + y^2 = 9$ und der Ebene $z = 5$ begrenzt wird. Die Koordinatenflächen $z = 5$ und $r = 3$ gehören also mit zu den Begrenzungen von $K$. Wählen wir nun ein $r$ mit $0 \leqq r \leqq 3$ und ein $\varphi$ mit $-\pi < \varphi \leqq \pi$, so gehört der Punkt $(r, \varphi, z)$ genau dann zu $K$, wenn gilt $\sqrt{x^2 + y^2} \leqq z \leqq 5$, oder wegen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ muß gelten $r \leqq z \leqq 5$. Schreiben wir

$$\tilde{K} = \{(r, \varphi, z) \in \tilde{R} \mid 0 \leqq r \leqq 3, -\pi < \varphi \leqq \pi, r \leqq z \leqq 5\},$$

so entsteht der Körper $K$ aus der übersichtlichen Menge $\tilde{K}$ durch Anwendung der Abbildung (2.34). Mit Hilfe der $x, y, z$-Koordinaten hätte man zu schreiben

$$K = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, -3 \leqq x \leqq 3, -\sqrt{9 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{9 - x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leqq z \leqq 5\right\}.$$

*Beispiel 2.14:* **Kugelkoordinaten** oder sphärische Koordinaten oder räumliche Polarkoordinaten: Neben dem $x, y, z$-Raum betrachten wir einen $r, \vartheta, \varphi$-Raum und in diesem die Teilmenge

$$\tilde{R} = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leqq r < \infty \text{ und } 0 \leqq \vartheta \leqq \pi \text{ und } 0 \leqq \varphi < 2\pi\}. \tag{2.35}$$

Die durch die drei reellen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} x(r, \vartheta, \varphi) &= r \cos\varphi \sin\vartheta, \\ y(r, \vartheta, \varphi) &= r \sin\varphi \sin\vartheta, \\ z(r, \vartheta, \varphi) &= r \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (r, \vartheta, \varphi) \in \tilde{R} \tag{2.36}$$

gekennzeichnete Vektorfunktion bildet die Menge $\tilde{R}$ auf den gesamten $R^3$ ab. In Bild 2.13 erkennt man den geometrischen Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten $r, \vartheta, \varphi$ und den rechtwinkligen Koordinaten $x, y, z$. Die Koordinatenflächen $r = \text{const}$ sind Kugeln um den Nullpunkt, die Koordinatenflächen $\vartheta = \text{const}$ sind Kegel mit der Spitze im Nullpunkt. Sie sind nach oben geöffnet für $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$ und nach unten geöffnet für $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leqq \pi$. Die Koordinatenflächen $\varphi = \text{const}$ sind von der $z$-Achse ausgehende Halbebenen. In Anlehnung an entsprechende Begriffe aus der Geographie nennt man gelegentlich $\varphi$ bzw. $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ die **„geographische Länge"** bzw.

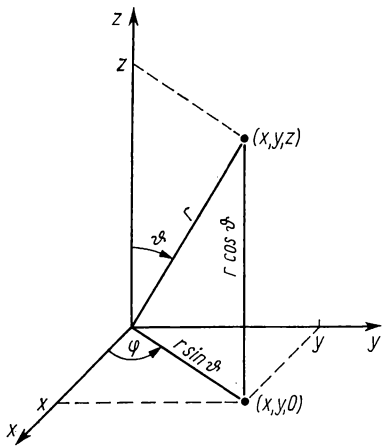



Bild 2.13

die **„geographische Breite"** des Punktes $P(x, y, z)$. Anstelle von $(r, \vartheta, \varphi)$ schreibt man bei Kugelkoordinaten auch oft $(\varrho, \Theta, \varphi)$.

Wir erwähnen noch abschließend, daß gelegentlich noch andere Beispiele für krummlinige Koordinaten als die hier genannten auftreten können.

*Aufgabe 2.6:*

a) $K_1$ sei der Körper, der begrenzt wird durch die $x, y$-Ebene, den Zylinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$ und das Paraboloid $z = x^2 + y^2$. Man charakterisiere die Punkte von $K_1$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.

b) $K_2$ sei der oberhalb der $x, y$-Ebene gelegene Körper, der von dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ begrenzt wird. Man charakterisiere die Punkte von $K_2$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten.

*Aufgabe 2.7:* Es seien $a > 0$ und $b > 0$ fest vorgegebene reelle Zahlen. Die sogenannten **Ellipsenkoordinaten** in der $x, y$-Ebene werden eingeführt durch die Festsetzung:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = au \cos v \\ y &= y(u, v) = bu \sin v \end{aligned} \quad \text{mit} \quad u \geqq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq v < 2\pi.$$

Welche Kurven bilden die Koordinatenlinien $u = \text{const}$ bzw. $v = \text{const}$?

### 2.6.4. Parameterdarstellung von Kurven und Flächen

Als weiteres Beispiel für das Auftreten von Vektorfunktionen betrachten wir zunächst die Parameterdarstellungen von Kurven. Wir betrachten ein Intervall $J$ auf der Zahlengeraden – es kann abgeschlossen, offen oder halboffen sein; $J$ kann auch der gesamte $R^1$ sein. Durch eine eindeutige Vorschrift sei jeder Zahl $t \in J$ ein Vektor $\mathbf{r}(t)$ des $R^3$ zugeordnet; es gelte also

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3 \quad \text{für} \quad t \in J. \tag{2.37}$$

Auf $J$ ist also eine Vektorfunktion mit Werten im $R^3$ erklärt und wir setzen voraus, daß $\mathbf{r}(t)$ eine stetige Vektorfunktion ist. Die reellen Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ sol-

:en also stetig sein. Für jeden Wert $t \in J$ suchen wir also den Punkt $(x(t), y(t), z(t))$ im $R^3$. Ist $t_0 \in J$ gewählt, so folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $\mathbf{r}(t)$, daß für nahe bei $t_0$ gelegene Werte $t$ die Punkte $(x(t), y(t), z(t))$ nahe bei dem Punkt $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ liegen. Die Gesamtheit aller dieser Punkte $(x(t), y(t), z(t))$ nennen wir eine **stetige Kurve** $C$ im $R^3$. Die Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ heißt in diesem Zusammenhang eine **Parameterdarstellung** der Kurve. Die unabhängige Veränderliche $t$ heißt **Kurvenparameter**[1]) und das betrachtete Intervall $J$ heißt **Parameterintervall.** Eine Parameterdarstellung legt in natürlicher Weise eine *Orientierung* der Kurve fest, indem die Kurvenpunkte im Sinne wachsender Parameterwerte durchlaufen werden sollen.

Man erhält eine Parameterdarstellung einer Kurve in der $x, y$-Ebene, wenn in (2.37) gilt $z(t) = 0$, wenn also $\mathbf{r}(t)$ eine stetige Vektorfunktion mit Werten im $R^2$ ist. Für eine Kurve $C$ in der $x, y$-Ebene gilt also

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 \quad \text{für} \quad t \in J \tag{2.38}$$

mit stetigen auf $J$ erklärten Funktionen $x(t), y(t)$.

Wir erwähnen einige wichtige Beispiele.

*Beispiel 2.15:* $P_1(a_1, b_1)$ und $P_2(a_2, b_2)$ seien feste Punkte in der $x, y$-Ebene mit $\mathbf{x}_1 = a_1\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{x}_2 = a_2\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$. Als Intervall $J$ betrachten wir den gesamten $R^1$ und betrachten für alle $t$ mit $-\infty < t < \infty$ die Vektorfunktion

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = [a_1 + t(a_2 - a_1)]\mathbf{e}_1 + [b_1 + t(b_2 - b_1)]\mathbf{e}_2. \tag{2.39}$$

(2.39) ist eine Parameterdarstellung der Geraden durch $P_1$ und $P_2$.

*Beispiel 2.16:* Es seien $a$, $b$ und $R$ vorgegebene Zahlen. Auf dem Intervall $J = [0, 2\pi)$ betrachten wir

$$x(t) = a + R\cos t \quad \text{und} \quad y(t) = b + R\sin t. \tag{2.40}$$

Dann gilt $(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = R^2$. Durchläuft der Parameter $t$ das Intervall $J$ von 0 bis $2\pi$, so durchläuft der Punkt $(x(t), y(t))$ den **Kreis** mit dem Mittelpunkt $(a, b)$ und dem Radius $R$ einmal im mathematisch positiven Sinne[2]) – beginnend beim Punkt $(a + R, b)$.

*Beispiel 2.17:* Eine Parameterdarstellung der **Ellipse** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ erhält man, wenn man auf dem Intervall $J = [0, 2\pi)$ die Funktionen

$$x(t) = a\cos t \quad \text{und} \quad y(t) = b\sin t \tag{2.41}$$

betrachtet.

*Beispiel 2.18:* Schraubenlinie im Raum: Es seien $a > 0$ und $R > 0$ vorgegebene Zahlen. Eine Parameterdarstellung der **Schraubenlinie** lautet dann

$$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,\ z(t) = at \quad \text{mit} \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi. \tag{2.42}$$

---

[1]) Der Kurvenparameter wird gelegentlich auch mit anderen Buchstaben bezeichnet, z.B. mit $\tau, \sigma, \ldots$.

[2]) Durchlaufung im mathematisch positiven Sinn bedeutet Durchlaufung entgegen dem Uhrzeigersinn.

Die geometrische Konstruktion der Schraubenlinie erkennen wir in Bild 2.14; sie ist wie folgt möglich: Für jedes $t \in [0, 2\pi]$ suchen wir zunächst in der $x$, $y$-Ebene den Punkt $F(R \cos t, R \sin t)$. Er liegt auf dem Kreis mit dem Radius $R$ um den Nullpunkt. Anschließend gehen wir in Richtung der $z$-Achse zum Punkt $F'(R \cos t, R \sin t, at)$. Zu $t = 0$ bzw. $t = 2\pi$ gehören die Punkte $(R, 0, 0)$ bzw. $(R, 0, 2\pi a)$: sie liegen übereinander. Beschränkt man $t$ auf das Intervall $[0, 2\pi]$, so nennt man das entstehende Kurvenstück einen **Gang** der Schraubenlinie mit der **Ganghöhe** $2\pi a$. Als Parameterintervall könnte das Intervall $[0, \infty)$ oder auch die gesamte reelle Achse betrachtet werden. Die Schraubenlinie verläuft auf dem Zylinder mit dem Radius $R$ und der $z$-Achse als Zylinderachse.

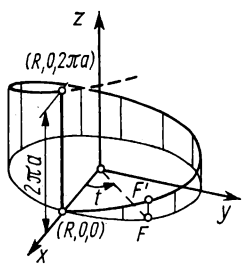



Bild 2.14

*Beispiel 2.19:* Wir kennen bereits Kurven in der $x$, $y$-Ebene als Veranschaulichungen von stetigen Funktionen $f(x)$, die z.B. auf einem Intervall $[a, b]$ der $x$-Achse erklärt sind. Eine Parameterdarstellung dieser Kurven lautet etwa

$$x(t) = t \quad \text{und} \quad y(t) = f(t) \quad \text{für} \quad a \leqq t \leqq b. \tag{2.43}$$

*Bemerkung 2.2:* Es ist möglich, daß eine Kurve $C$ durch mehrere unterschiedliche Parameterdarstellungen dargestellt werden kann. Auf der reellen Achse betrachten wir z.B. die Vektorfunktionen

$$\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 \quad \text{für} \quad -\infty < t < \infty \tag{2.44}$$

und

$$\mathbf{r}_2(\tau) = (1 + 2\tau)\mathbf{e}_1 + (1 + 2\tau)\mathbf{e}_2 \quad \text{für} \quad -\infty < \tau < \infty. \tag{2.45}$$

In beiden Fällen handelt es sich um Parameterdarstellungen der Geraden $y = x$. Man erhält in beiden Fällen die gleiche Punktmenge; zu jedem Kurvenpunkt gehören dann je nach Verwendung der Parameterdarstellung (2.44) oder (2.45) unterschiedliche Parameterwerte. Den Punkt (1, 1) erhalten wir z.B. aus (2.44) für $t = 1$ und aus (2.45) für $\tau = 0$.

*Bemerkung 2.3:* Für gewisse weitergehende Betrachtungen ist es nützlich, solche Kurven $C$ zu betrachten, für die es Parameterdarstellungen $\mathbf{r}(t)$ mit sogar differenzierbaren Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ gibt. Solche Kurven haben gewisse „Glattheitseigenschaften". Bezeichnen wir die Ableitungen der Koordinatenfunktionen nach $t$ mit $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$, so verläuft z.B. der Vektor $\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\,\mathbf{e}_1 + \dot{y}(t)\,\mathbf{e}_2 + \dot{z}(t)\,\mathbf{e}_3$ in Richtung der Kurventangente im Kurvenpunkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_1 + y(t)\,\mathbf{e}_2 + z(t)\,\mathbf{e}_3$. Derartige Betrachtungen werden an dieser Stelle nicht weitergeführt.

Wir behandeln noch den Begriff der Parameterdarstellung einer Fläche im Raum. Gegeben sei eine $u$, $v$-Ebene und in dieser ein Rechteck $R$ oder auch allgemeiner ein

Normalbereich $R$. Auf $R$ sei eine stetige Vektorfunktion

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{e}_1 + y(u, v)\mathbf{e}_2 + z(u, v)\mathbf{e}_3 \tag{2.46}$$

erklärt; die drei reellen Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sollen also auf $R$ stetig sein. Die Menge aller Punkte $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ bezeichnet man dann als **stetige Fläche** $F$ im $R^3$. (2.46) heißt dann eine **Parameterdarstellung** von $F$; $R$ heißt der **Parameterbereich** von $F$ und $u, v$ heißen die **Parameter der Fläche.**

*Bemerkung 2.4:* Man erkennt die Verallgemeinerung, die vom Begriff der Parameterdarstellung einer Kurve zum Begriff der Parameterdarstellung einer Fläche führt. An die Stelle einer $t$-Parameterachse tritt eine $u, v$-Parameterebene. Das Parameterintervall ist zu ersetzen durch ein Rechteck bzw. durch einen Normalbereich, und die stetige Vektorfunktion $\mathbf{r}$ ist jetzt eine Abbildung einer Teilmenge des $R^2$ in den $R^3$.

*Beispiel 2.20:* Parameterdarstellung einer **Schraubenfläche:** Als Parameterebene betrachten wir eine $r, \varphi$-Ebene und in dieser das Rechteck

$$A = \{(r, \varphi) \mid 0 \leqq r \leqq R \quad \text{und} \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}. \tag{2.47}$$

und auf $A$ die stetige Vektorfunktion

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi,\ y(r, \varphi) = r \sin \varphi,\ z(r, \varphi) = a\varphi \tag{2.48}$$

mit vorgegebenen Zahlen $a > 0$ und $R > 0$. Für jeden festen Wert $r = r_0$ ist (2.48) die Parameterdarstellung eines Ganges einer Schraubenlinie, die auf dem Zylinder $x^2 + y^2 = r_0^2$ verläuft. Für jeden festen Wert $\varphi = \varphi_0$ ist (2.48) die Parameterdarstellung der in der Ebene $z = a\varphi_0$ verlaufenden Strecke vom Punkt $(0, 0, a\varphi_0)$ zum Punkt $(R \cos \varphi_0, R \sin \varphi_0, a\varphi_0)$. Die Schraubenfläche können wir uns in der Weise entstanden denken, daß die auf der $x$-Achse verlaufende Strecke vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(R, 0, 0)$ im mathematisch positiven Sinn um $2\pi$ gedreht wird und dabei gleichzeitig kontinuierlich um $a\varphi$ gehoben wird.

Wir kennen Flächen als geometrische Veranschaulichungen von stetigen Funktionen $f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen. Identifiziert man die $x, y$-Ebene mit der Parameterebene und setzt man dann

$$x(x, y) = x,\ y(x, y) = y,\ z(x, y) = f(x, y), \tag{2.49}$$

so ist (2.49) eine Parameterdarstellung der genannten Fläche.

Es gilt auch hier, daß zu einer Fläche unterschiedliche Parameterdarstellungen gehören können.

Wird in (2.46) einer der unabhängigen Veränderlichen ein fester Wert erteilt (also $u = u_0$ gesetzt und nur $v$ variabel gelassen bzw. $v = v_0$ gesetzt und $u$ variabel gelassen), so ist (2.46) die Parameterdarstellung einer auf der Fläche verlaufenden Raumkurve. Man bezeichnet diese Kurven auf $F$ gelegentlich auch als **Parameterkurven** oder als **Parameterlinien.** Die Fläche $F$ erscheint dann als Zusammenfassung der Schar aller $u$-Parameterlinien bzw. als Zusammenfassung der Schar aller $v$-Parameterlinien.

Für gewisse weiterführende Betrachtungen benötigt man wieder Flächen mit gewissen „Glattheitseigenschaften". Die Funktionen $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ müssen dann bezüglich der partiellen Ableitungen (vgl. Kapitel 3.) gewisse Eigenschaften besitzen; an dieser Stelle verfolgen wir diesen Gedanken nicht weiter. In Band 6 (Differentialgeometrie) findet man weitere Ausführungen über Kurven und Flächen.

# 3. Partielle Ableitungen und totales Differential

## 3.1. Partielle Ableitungen erster Ordnung

Wir betrachten zunächst eine in der gesamten $x, y$-Ebene erklärte stetige Funktion $f(x, y)$. Es sei $P_0(x_0, y_0)$ ein fester Punkt und $y = y_0$ die feste Gerade durch $P_0$ parallel zur $x$-Achse. Wird die Funktion $f(x, y)$ nur für die Punkte dieser Geraden betrachtet, so wird $y$ der feste Wert $y_0$ erteilt, und variabel ist lediglich $x$. Man erhält die Funktion der *einen* unabhängigen Variablen $x$:

$$\psi(x) = f(x, y_0). \tag{3.1}$$

Die geometrische Veranschaulichung von $\psi(x)$ erkennt man in Bild 3.1, wenn man senkrecht über jedem Punkt $(x, y_0)$ der genannten Geraden den Funktionswert $f(x, y_0)$ abträgt. Wir erhalten eine in der Ebene $y = y_0$ verlaufende Kurve, die wir auch als Schnitt der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$[1]) entstanden denken können.

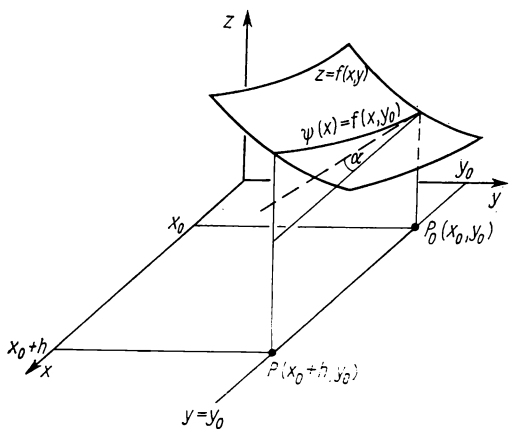



Bild 3.1

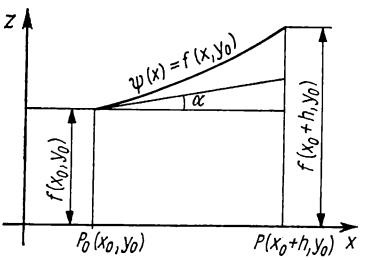



Bild 3.2

Diese Schnittkurve soll in jedem Punkt $(x, y_0)$ eine Tangente mit dem Anstieg $\psi'(x)$ besitzen. Speziell für den festen Wert $x_0$ erhält man

$$\psi'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{3.2}$$

Der Quotient

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.3}$$

---

[1]) Durch die Gleichung $y = y_0$ wird im $R^1$ ein Punkt festgelegt. Deuten wir $y = y_0$ im $R^2$, so erhalten wir eine Gerade parallel zur $x$-Achse: die Menge aller Punkte $(x, y)$ mit der Forderung $y = y_0$. Deuten wir $y = y_0$ im $R^3$, so erhalten wir eine Ebene parallel zur $x, z$-Ebene: die Menge aller Punkte $(x, y, z)$ mit der Forderung $y = y_0$.

heißt dann der **Differenzenquotient** der Funktion $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ bei festem $y = y_0$ bezüglich der Variablen $x$. Bezogen auf die ursprünglich gegebene Funktion $f(x, y)$ folgt also, daß die Ableitung $\psi'(x_0)$ aus dem speziellen Differenzenquotienten (3.3) durch den Grenzübergang $h \to 0$ gewonnen werden kann. In Bild 3.2 ist der Schnitt der Ebene $y = y_0$ mit der Fläche $z = f(x, y)$ noch gesondert herausgezeichnet worden. Dort ist die Tangente an die Schnittkurve deutlich sichtbar. Es gilt $\psi'(x_0) = \tan\alpha$. Der analoge Gedankengang ist möglich, wenn wir der unabhängigen Variablen $x$ einen festen Wert $x = x_0$ erteilen und die Funktion $f(x, y)$ auf die Punkte der Geraden $x = x_0$ einschränken. Wir erhalten eine Funktion der unabhängigen Variablen $y$:

$$\varphi(y) = f(x_0, y). \tag{3.4}$$

Die zugehörige Kurve entsteht als Schnitt der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $x = x_0$. $\varphi(y)$ sei an jeder Stelle $(x_0, y)$ nach $y$ differenzierbar mit der Ableitung $\varphi'(y)$. Speziell für einen festen Wert $y_0$ erhalten wir

$$\varphi'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{3.5}$$

Der Quotient

$$\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.6}$$

heißt dann der Differenzenquotient der Funktion $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ bei festem $x_0$ bezüglich der Variablen $y$. $\varphi'(y_0)$ ergibt sich also aus (3.6) durch den Grenzübergang $h \to 0$.

Speziell für $f(x, y) = x^2y^3$ würde man bei der Wahl eines festen Punktes $(x_0, y_0)$ erhalten:

$$\psi(x) = f(x, y_0) = x^2 y_0^3 \quad \text{mit} \quad \psi'(x) = 2xy_0^3$$

und

$$\varphi(y) = f(x_0, y) = x_0^2 y^3 \quad \text{mit} \quad \varphi'(y) = 3x_0^2 y^2.$$

Allgemein vereinbaren wir die folgende

**Definition 3.1:** *Die Funktion $f(x, y)$ sei in einer Umgebung eines Punktes $(x_0, y_0)$ definiert. Bei festgehaltenem $y = y_0$ sei die Funktion $\psi(x) = f(x, y_0)$ an der Stelle $x = x_0$ im gewöhnlichen Sinne nach $x$ differenzierbar. Dann heißt*

$$\psi'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.7}$$

*die* **partielle Ableitung der Funktion** $f(x, y)$ **nach** $x$ **an der Stelle** $(x_0, y_0)$. *Für $\psi'(x_0)$ verwenden wir die Symbole*

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

*Ist analog bei festgehaltenem $x = x_0$ die Funktion $\varphi(y) = f(x_0, y)$ an der Stelle $y = y_0$*

*im gewöhnlichen Sinne nach y differenzierbar, so heißt*

$$\varphi'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(y_0+h)-\varphi(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h)-f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.8}$$

*die* **partielle Ableitung der Funktion** $f(x, y)$ **nach** $y$ **an der Stelle** $(x_0, y_0)$. $\varphi'(y_0)$ *bezeichnen wir durch die Symbole*

$$f_y(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Wir lesen die Symbole für die partiellen Ableitungen als „d-$f$ nach d-$x$ partiell" oder kürzer „$f$ nach $x$", wenn klar ist, daß es sich um eine partielle Ableitung handelt, bzw. als „d-$f$ nach d-$y$ partiell" oder kürzer „$f$ nach $y$". Die Angabe der Argumente entfällt auch gelegentlich, wenn aus dem Zusammenhang heraus ersichtlich ist, welche Argumente zu wählen sind.

Ist $f(x, y)$ an jeder Stelle $(x, y)$ einer Menge $M$ partiell nach $x$ und $y$ differenzierbar, so sind $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ wiederum Funktionen von $x$ und $y$. Wir merken uns: Bei der Bildung der partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ bzw. $f_y(x, y)$ wird $y$ bzw. $x$ behandelt wie eine Konstante, und es wird $f(x, y)$ dann nach $x$ bzw. nach $y$ im gewöhnlichen Sinne differenziert. Für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen gehören somit zu einem festen Punkt $(a, b)$ des Definitionsbereiches von $f(x, y)$ zwei Ableitungszahlen $f_x(a, b)$ und $f_y(a, b)$. Wir können diese Zahlen geometrisch interpretieren als Geradenanstiege der Tangenten an die Schnittkurven der Ebenen $y = b$ bzw. $x = a$ mit der Fläche $z = f(x, y)$. Der Anschauung entnehmen wir, daß diese beiden Kurventangenten eine Ebene durch den Punkt $(a, b, f(a, b))$ aufspannen – die sogenannte **Tangentialebene** an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(a, b, f(a, b))$.

Aus obiger Definition ergibt sich, daß man zur Durchführung einer partiellen Differentiation bei vorliegenden Funktionen $f$ und $g$ keine neuen Regeln entwickeln muß. Vorausgesetzt, die jeweils rechtsstehenden Ableitungen existieren, erhält man dann sofort für die partiellen Ableitungen nach $x$:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial(f+g)}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial(fg)}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} g + f\dfrac{\partial g}{\partial x}, \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x} g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \quad (g \neq 0), \\ \dfrac{\partial f(u(x,y))}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{array}\right|$$

*Beispiel 3.1:* $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 y}$ ist an jeder Stelle $(x, y)$ partiell nach $x$ und nach $y$ differenzierbar, und es gilt

$$f_x(x, y) = 2xy\,\mathrm{e}^{x^2 y},\ f_y(x, y) = x^2\,\mathrm{e}^{x^2 y}.$$

Für $f(x, y) = x^2 + \mathrm{e}^{2y}$ gilt $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2\mathrm{e}^{2y}$. $\left(\text{Es gilt } \dfrac{\partial \mathrm{e}^{2y}}{\partial x} = 0 \text{ und } \dfrac{\partial x^2}{\partial y} = 0.\right)$

Wir verallgemeinern unsere Betrachtungen jetzt auf den Fall einer reellen Funktion von $n$ unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es sei $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine auf einer Menge $M \subset R^n$ erklärte reelle Funktion. $f$ sei in einer Umgebung der festen Stelle $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ erklärt. Wir definieren dann die Funktion

$$g_1(x_1) = f(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \tag{3.9}$$

d.h., wir erteilen den unabhängigen Variablen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ die festen Werte $x_2 = a_2$, $\ldots$, $x_n = a_n$, und lassen nur $x_1$ variieren. Ist nun $g_1(x_1)$ für $x_1 = a_1$ im gewöhnlichen Sinne nach $x_1$ differenzierbar, so heißt $f$ an der Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **partiell nach** $x_1$ **differenzierbar**, und die Ableitung

$$g_1'(a_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}{h} \tag{3.10}$$

heißt die partielle Ableitung von $f$ nach $x_1$ an der Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Wir bezeichnen sie durch die Symbole

$$f_{|1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{oder} \quad f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{a}}. \tag{3.11}$$

(Man beachte genau die Schreibweise $f_{|1}$ für den Fall, daß nach der ersten unabhängigen Variablen $x_1$ partiell differenziert wird bei festgewählten Variablen $x_2, \ldots, x_n$. Wir verwenden kaum das Symbol $f_{x_1}$.) Zur Bildung der übrigen partiellen Ableitungen $f_{|i}$ für $2 \leqq i \leqq n$ wird gebildet

$$g_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

d.h., die $i$-te unabhängige Veränderliche wird variabel gelassen, und den übrigen $n - 1$ Veränderlichen werden feste Werte erteilt. Falls die gewöhnliche Ableitung

$$g_i'(a_i) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)] \tag{3.12}$$

von $g_i(x_i)$ nach $x_i$ an der Stelle $x_i = a_i$ existiert, heißt sie die partielle Ableitung von $f$ nach $x_i$ im Punkt $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$. Wir bezeichnen sie mit

$$f_{|i}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{oder} \quad f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{a}}. \tag{3.13}$$

*Bemerkung 3.1:* Ist $f$ eine reelle Funktion von zwei unabhängigen Variablen und bezeichnen wir diese mit $x$ und $y$, so schreiben wir für die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ dann $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$. Bezeichnen wir die unabhängigen Variablen mit $x_1$ und $x_2$, so haben wir für die partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2)$ zu schreiben $f_{|1}(x_1, x_2)$ und $f_{|2}(x_1, x_2)$.

Der Strich wird also immer dann verwendet, wenn die unabhängigen Variablen numeriert sind. Ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, wollen wir jedoch gelegentlich auch in dem Fall, daß die unabhängigen Variablen mit $x$ und $y$ bezeich-

net sind, für die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ bzw. $f_y(x, y)$ die Bezeichnungen $f_{|1}(x, y)$ bzw. $f_{|2}(x, y)$ zulassen. Werden gleichzeitig mehrere Funktionen

$$f_1(x_1, ..., x_n),\ f_2(x_1, ..., x_n),\ ...,\ f_m(x_1, ..., x_n)$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich betrachtet, so würde man die partielle Ableitung der Funktion $f_i(x_1, ..., x_n)$ nach der unabhängigen Variablen $x_k$ bezeichnen mit $\frac{\partial f_i(x_1, ..., x_n)}{\partial x_k}$ oder mit $f_{i|k}(x_1, ..., x_n)$. (Vor dem Strich steht die Nummer der gerade betrachteten Funktion und nach dem Strich die Nummer derjenigen Variablen, nach der differenziert wird.)

## 3.2. Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Die Funktion $f(x, y) = x^4y^2 + 2x^3y - 6$ ist in der gesamten $x, y$-Ebene erklärt und besitzt überall die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) = 4x^3y^2 + 6x^2y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 2x^4y + 2x^3. \tag{3.14}$$

Aus (3.14) erkennt man sofort, daß $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ als Funktionen von $x$ und $y$ erneut partiell nach $x$ und nach $y$ differenziert werden können. Man erhält

$$\frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} = 12x^2y^2 + 12xy; \quad \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} = 8x^3y + 6x^2;$$

$$\frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} = 8x^3y + 6x^2; \quad \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y} = 2x^4. \tag{3.15}$$

Die so erhaltenen Ableitungen heißen die **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** von $f(x, y)$. Für $\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial x}$ verwenden wir die Symbole $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ oder $f_{xx}(x, y)$. Entsprechende Symbole führen wir in den anderen Fällen ein und schreiben dann (zur Erhöhung der Übersichtlichkeit schreiben wir die überall gleichen Argumente $x, y$ nicht mit)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y}. \tag{3.16}$$

(Die Wahl der Symbole ist so erfolgt, daß „von links nach rechts gelesen" die Reihenfolge erkennbar ist, in der die partiellen Ableitungen gebildet werden. Das Symbol $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ bzw. $f_{xx}$ lesen wir „$d$-2-$f$ nach $d$-$x$-Quadrat" bzw. „$f$ zweimal partiell nach $x$ differenziert".) Für eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen gibt es also vier Möglichkeiten für die Bildung von partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Es ist sofort klar, wie partielle Ableitungen dritter Ordnung und dann auch höherer Ordnung gebildet werden können. Das Symbol $f_{yyx}(x, y)$ bedeutet, daß die gegebene Funktion $f(x, y)$ zunächst zweimal partiell nach $y$ und anschließend ein-

... partiell nach $x$ differenziert werden soll. Klar ist weiterhin die Ausdehnung ... Definition auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen. Ist ... $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion von $n$ unabhängigen Variablen und z.B. $n \geqq 5$, so ... beispielsweise das Symbol

$$\frac{\partial^3 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_4 \, \partial x_1 \, \partial x_3} = f_{413}(x_1, \ldots, x_n),$$

... die Funktion $f$ zunächst nach $x_4$, anschließend nach $x_1$ und dann nach $x_3$ partiell ... differenzieren ist.

... kehren zu unserem Ausgangsbeispiel zurück und erkennen aus (3.15) die ... Gleichheit

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

... also gleichgültig, in welcher Reihenfolge die partiellen Ableitungen gebildet ... werden. Wichtig ist lediglich, daß einmal partiell nach $x$ und einmal partiell nach $y$ ... differenziert wurde. Dieses wichtige spezielle Ergebnis kann auf weitere Funktionen ... verallgemeinert werden, denn es gilt der

**Satz 3.1** *(Satz von Schwarz[1]): Sind für eine auf einer offenen Menge $M$ erklärte Funktion $f(x, y)$ die partiellen Ableitungen $f_{xy}(x, y)$ und $f_{yx}(x, y)$ stetig, so gilt auf $M$*

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y). \tag{3.17}$$

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Identität (3.17) könnten weiter abgeschwächt werden. Da in vielen Anwendungsbeispielen der Fall vorliegt, daß die betreffenden partiellen Ableitungen stetig sind, begnügen wir uns mit dem angegebenen ...

Zum *Beweis* von Satz 3.1: Es sei $(a, b)$ ein Punkt aus $M$. Dann gilt

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f_y(x, b) - f_y(a, b)}{x - a} \tag{3.18}$$

... betrachten weiter diejenigen Differenzenquotienten, aus denen man durch ... Grenzübergang $y \to b$ die im Zähler von (3.18) stehende partielle Ableitung ... $(x, b) - f_y(a, b)$ erhält; wir betrachten also insgesamt den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x - a}\left[\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} - \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}\right] \\ &= \frac{1}{y - b}\left[\frac{f(x, y) - f(x, b)}{x - a} - \frac{f(a, y) - f(a, b)}{x - a}\right] \\ &= \frac{1}{y - b}\,\frac{g(x) - g(a)}{x - a}, \end{aligned}$$

wenn wir $y$ und $b$ als konstant und nur $x$ als variabel betrachten und dann setzen
$g(x) = f(x, y) - f(x, b)$.
Dann ist $g(a) = f(a, y) - f(a, b)$.

[1] Hermann Amandus Schwarz, deutscher Mathematiker, 1843–1921.

$$= \frac{1}{y-b} g'(\xi)$$

mit $\xi$ zwischen $a$ und $x$, denn $g(x)$ ist nach $x$ differenzierbar und genügt den Voraussetzungen des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:
$g'(\xi) = f_x(\xi, y) - f_x(\xi, b)$

$$= \frac{1}{y-b}(f_x(\xi, y) - f_x(\xi, b))$$

$$= \frac{h(y) - h(b)}{y-b}$$

wenn wir $h(y) = f_x(\xi, y)$ setzen, also nur $y$ als variabel ansehen; $h(y)$ ist differenzierbar nach $y$.

$$= h'(\eta)$$

mit $\eta$ zwischen $y$ und $b$; wieder durch Anwendung des 1. Mittelwertsatzes, jetzt auf $h(y)$.

$$= f_{xy}(\xi, \eta).$$

Beim Grenzübergang $x \to a$ und $y \to b$ folgt für die Zwischenpunkte auch $\xi \to a$ und $\eta \to b$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f_{xy}(x, y)$ gilt dann $f_{xy}(\xi, \eta) \to f_{xy}(a, b)$, und wir erhalten $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$.

Der Satz von Schwarz für die Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei der Bildung der partiellen Ableitungen gilt auch für Ableitungen von höherer als zweiter Ordnung, wenn diese stetig sind. Es würde dann gelten

$$f_{xyy}(x, y) = f_{yxy}(x, y) = f_{yyx}(x, y). \tag{3.19}$$

Auf diese Weise wird die Anzahl der wirklich verschiedenen partiellen Ableitungen dritter Ordnung verringert. Es gibt dann nur vier verschiedene partielle Ableitungen dritter Ordnung und zwar

$$f_{xxx}(x, y),\ f_{xxy}(x, y),\ f_{xyy}(x, y),\ f_{yyy}(x, y).$$

Bei der Berechnung höherer Ableitungen wird man daher eine möglichst günstige Reihenfolge wählen. Soll z. B. $f_{xy}(x, y)$ für die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 + x^2}} + xy^2$$

gebildet werden, so wird man die Reihenfolge $f_y(x, y) = 2xy$, $f_{yx}(x, y) = 2y = f_{xy}(x, y)$ wählen und umgeht so die „komplizierte" Differentiation des ersten Summanden nach $x$.

Wir wollen noch die Frage beantworten, ob aus der Existenz der partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ bereits gefolgert werden kann, daß die Funktion $f(x, y)$

stetig ist. Wir betrachten die Funktion $f(x, y)$ aus Beispiel 2.6. Dort hatten wir gesehen, daß $f(x, y)$ im Nullpunkt nicht stetig ist. Es gilt jedoch

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_x(0,0);\quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0=f_y(0,0),$$

d. h., die beiden partiellen Ableitungen existieren im Nullpunkt. Aus der bloßen Existenz der partiellen Ableitungen kann also im allgemeinen noch nicht gefolgert werden, daß die Funktion selber stetig ist. Die Stetigkeit der Funktion $f$ kann gezeigt werden, wenn die Ableitungen $f_x$ und $f_y$ stetig sind.

Wir erwähnen abschließend noch die Erweiterungen der Kettenregel für die Bildung der Ableitung von zusammengesetzten Funktionen. Ausführlich wird diese Fragestellung in Abschnitt 3.6. behandelt.

**Satz 3.2:** *Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sollen auf der gleichen Menge $M_1$ einer t-Achse erklärt sein und stetige Ableitungen $x'(t)$ und $y'(t)$ besitzen. Alle Punkte $(x(t), y(t))$ sollen zum Definitionsbereich $M$ einer Funktion $f(x, y)$ gehören, und $f(x, y)$ soll auf $M$ stetige partielle Ableitungen besitzen. Die auf $M_1$ erklärte mittelbare Funktion $F(t)=f(x(t), y(t))$ ist dann nach $t$ differenzierbar, und es gilt*

$$F'(t)=f_x(x(t),y(t))\,x'(t)+f_y(x(t),y(t))\,y'(t). \tag{3.20}$$

**Satz 3.3:** *Auf einer Menge $M_1$ einer $u, v$-Ebene seien die beiden Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ erklärt, die beide auf $M_1$ stetige partielle Ableitungen nach $u$ und $v$ besitzen. Alle Punkte $(x(u, v), y(u, v))$ sollen zum Definitionsbereich $M$ einer Funktion $f(x, y)$ gehören, und $f(x, y)$ soll auf $M$ stetige partielle Ableitungen nach $x$ und $y$ besitzen. Die auf $M_1$ erklärte mittelbare Funktion $F(u, v)=f(x(u, v), y(u, v))$ besitzt dann partielle Ableitungen nach $u$ und $v$, und es gilt*

$$\begin{aligned}F_u(u,v)&=f_x(x(u,v),y(u,v))\cdot x_u(u,v)+f_y(x(u,v),y(u,v))\cdot y_u(u,v),\\ F_v(u,v)&=f_x(x(u,v),y(u,v))\cdot x_v(u,v)+f_y(x(u,v),y(u,v))\cdot y_v(u,v).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Beweise übergehen wir. Die Aussage der Sätze müßte nicht unbedingt herangezogen werden, wenn sowohl die äußere Funktion als auch die inneren Funktionen explizit bekannt wären. Man könnte dann direkt die gewünschten Ableitungen bilden. Eine Bedeutung der Sätze wird z. B. dann deutlich, wenn man von den inneren Funktionen nur gewisse Eigenschaften kennt, ohne sie explizit angeben zu können. Aus (3.20) bzw. (3.21) kann man dann mitunter weitere Eigenschaften herleiten.

*Beispiel 3.2:* Gegeben sei die Funktion $f(x, y)=x^3+y^2$. Von einer stetig differenzierbaren Funktion $y(x)$ sei lediglich bekannt, daß $y(1)=3$ gilt und daß $y(x)$ der Beziehung $f(x, y(x))=5$ genügt. Den expliziten Ausdruck von $y(x)$ kennen wir nicht. Wir fragen nach dem Wert der Ableitung $y'(1)$. Auf die differenzierbare Funktion $F(x)=f(x, y(x))$ kann (3.20) angewendet werden. Aus $f(x, y(x))=5$ folgt dann durch Differentiation nach $x$: $f_x(x, y(x))+f_y(x, y(x))\,y'(x)=0$ und wegen $y(1)=3$ und $f_x(x, y)=3x^2$ und $f_y(x, y)=2y$ dann $f_x(1, 3)+f_y(1, 3)\,y'(1)=0$, also $3+6y'(1)=0$ und damit $y'(1)=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$.

Die Erweiterungen der Kettenregel gelten auch für Ableitungen höherer Ordnung, ohne daß neue Sätze erforderlich sind.

*Aufgabe 3.1:* Man bilde die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von

a) $f(x, y) = x \arctan y$,

b) $f(x, y) = x + y - |x - y|$ für $x \neq y$,

c) $f(x, y) = x^y + y^x$ für $x > 0, y > 0$.

*Aufgabe 3.2:* Man zeige, daß die Funktion

$u(x, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ ($a = \text{const}$) eine Lösung der sogenannten Wärmeleitungsgleichung $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$ ist.

*Aufgabe 3.3:* Es sei $f(x, y) = xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$. Man zeige, daß $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ gilt. Was folgt bezüglich der Stetigkeit von $f_{xy}(x, y)$ und $f_{yx}(x, y)$ im Nullpunkt?

## 3.3. Das totale Differential

### 3.3.1. Das totale Differential und die Zerlegungsformel

Wir führen analoge Betrachtungen durch wie im Band 2 im Kapitel 5 über Differentiale für Funktionen einer unabhängigen Variablen. Es ging darum, für eine Funktion $f(x)$ und für benachbarte Stellen $x_0$ und $x_0 + h$ des Definitionsbereiches von $f(x)$ den Funktionswertzuwachs $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mit Hilfe der Ableitung $f'(x_0)$ durch eine Zerlegungsformel auszudrücken. Der Wert $f(x_0 + h)$ kann dann mit Hilfe der Werte $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ angenähert werden.

Zunächst sei $f(x, y, z)$ eine Funktion von drei unabhängigen Variablen, die z. B. in einem Gebiet $G$ erklärt ist, und es sei $P(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt von $G$. Es bezeichne $h_1 = \Delta x$ bzw. $h_2 = \Delta y$ bzw. $h_3 = \Delta z$ einen Zuwachs der unabhängigen Variablen $x$ bzw. $y$ bzw. $z$, und der benachbarte Punkt $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ gehöre ebenfalls zu $G$. Dann ist

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{3.22}$$

der **totale Zuwachs (das totale Inkrement) der Funktion** $f(x, y, z)$ an der Stelle $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mit dem Zuwachs $\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (h_1, h_2, h_3)$. Der totale Zuwachs wird mit $\Delta f$ bzw. ausführlich mit $\Delta f|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{h}}$ bezeichnet. Bei einer Funktion von $n$ Variablen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\Delta f = \Delta f|_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

der totale Zuwachs der Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$ mit dem Zuwachs $\mathbf{h}$.

*Hinweis:* Die Bezeichnung $\Delta f|_{\mathbf{x}, \mathbf{h}}$ – anstelle der einfachen Schreibweise $\Delta f$ – wird nur dann gebraucht, wenn „Stelle" und „Zuwachs" nicht aus dem Zusammenhang ersichtlich sind.

*Beispiel 3.3:* Wir betrachten die im gesamten $R^3$ erklärte Funktion

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 z. \tag{3.23}$$

Für $P(x_0, y_0, z_0)$ und beliebige (im allgemeinen „kleine") $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)\\ &= 2(x_0+\Delta x)^2 + (y_0+\Delta y)^2(z_0+\Delta z) - 2x_0^2 - y_0^2 z_0\\ &= [4x_0\Delta x + 2y_0 z_0 \Delta y + y_0^2 \Delta z] + [2(\Delta x)^2 + 2y_0 \Delta y \Delta z + z_0(\Delta y)^2 + (\Delta y)^2 \Delta z].\end{aligned}$$

Der totale Zuwachs von $f(x, y, z)$ ist somit in zwei Summanden zerlegt, von denen der erste die Gestalt

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z \quad \text{mit} \quad A = 4x_0,\ B = 2y_0 z_0,\ C = y_0^2 \tag{3.24}$$

hat. Die Koeffizienten $A, B, C$ hängen nur von $x_0, y_0, z_0$ und nicht von den Zuwachsgrößen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ab. Es gilt

$$A = f_x(x_0, y_0, z_0),\ B = f_y(x_0, y_0, z_0),\ C = f_z(x_0, y_0, z_0). \tag{3.25}$$

Den zweiten Summanden bringen wir ebenfalls auf die Gestalt $\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$; etwa in der Form $(2\Delta x)\,\Delta x + (2y_0\Delta z + z_0\Delta y)\Delta y + (\Delta y)^2\Delta z$. Dann ist

$$\alpha = 2\Delta x, \quad \beta = 2y_0\Delta z + z_0\Delta y, \quad \gamma = (\Delta y)^2. \tag{3.26}$$

Die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma$ hängen somit sowohl von $x_0, y_0, z_0$ als auch von $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ab. Es bezeichne $\varrho$ den Abstand zwischen den Punkten $P$ und $P'$, also

$$\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\,. \tag{3.27}$$

Dann können wir schreiben

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\varrho} + \beta\frac{\Delta y}{\varrho} + \gamma\frac{\Delta z}{\varrho}\right)\varrho = \eta\varrho, \tag{3.28}$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\eta = \alpha\frac{\Delta x}{\varrho} + \beta\frac{\Delta y}{\varrho} + \gamma\frac{\Delta z}{\varrho} \tag{3.29}$$

Man erhält

$$\left|\frac{\Delta x}{\varrho}\right| = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} \leqq \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2}} = \frac{|\Delta x|}{|\Delta x|} = 1 \tag{3.30}$$

und analog $\left|\frac{\Delta y}{\varrho}\right| \leqq 1, \left|\frac{\Delta z}{\varrho}\right| \leqq 1$. Wir lassen nun den Punkt $P'$ gegen den festen Punkt $P$ rücken, betrachten also den Grenzübergang $\varrho \to 0$. Aus (3.27) folgt dann auch $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ und aus (3.26) dann weiter $\alpha \to 0, \beta \to 0$ und $\gamma \to 0$. Wegen

$$|\eta| \leqq |\alpha| \cdot \left|\frac{\Delta x}{\varrho}\right| + |\beta| \cdot \left|\frac{\Delta y}{\varrho}\right| + |\gamma| \cdot \left|\frac{\Delta z}{\varrho}\right| \leqq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$$

folgt aus $\varrho \to 0$ dann letztlich auch $\eta \to 0$. Als Ergebnis fassen wir zusammen: Der totale Zuwachs der Funktion $f(x, y, z)$ an einer Stelle $(x_0, y_0, z_0)$ kann durch die Zerlegungsformel

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)\\ &= (A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z) + \eta\varrho\\ &= (f_x(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\,\Delta z) + \eta\varrho\end{aligned} \tag{3.31}$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten $A$, $B$, $C$ hängen nur von $x_0, y_0, z_0$ und nicht von den Zuwachsgrößen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ab, während die Größe $\eta$ sowohl von $x_0, y_0, z_0$ als auch von $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ abhängt; aus dem Grenzübergang $\varrho \to 0$ folgt dann auch $\eta \to 0$; wir schreiben hierfür

$$\lim_{\varrho \to 0} \eta = 0. \tag{3.32}$$

Im ersten Anteil von (3.31) treten $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ nur linear auf.

Die Frage nach der Gültigkeit einer Zerlegungsformel der Gestalt (3.31) mit der Zusatzforderung (3.32) für die Größe $\eta$ wird nun ganz allgemein gestellt. Wir vereinbaren die

**Definition 3.2:** *Eine Funktion $f(x, y, z)$ besitze in einem Gebiet $G$ partielle Ableitungen erster Ordnung. Es sei $P(x_0, y_0, z_0)$ aus $G$, und für beliebige Zuwachsgrößen $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ gelte*

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\,\Delta z + \eta \cdot \varrho. \end{aligned} \tag{3.33}$$

*Dabei sei $\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, und die Größe $\eta$ hänge von $x_0, y_0, z_0$ und von $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ ab und erfülle die Zusatzeigenschaft*

$$\lim_{\varrho \to 0} \eta = 0. \tag{3.34}$$

*Der lineare Anteil von* (3.33) *heißt dann das* **totale** *oder* **vollständige Differential** *der Funktion $f(x, y, z)$ an der Stelle $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mit dem Zuwachs $\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (h_1, h_2, h_3)$. Das totale Differential wird mit $\mathrm{d}f$ bzw. ausführlich mit $\mathrm{d}f|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{h}}$ bezeichnet. Es gilt also*

$$\mathrm{d}f = f_x(x_0, y_0, z_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\,\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\,\Delta z. \tag{3.35}$$

*Wenn eine Zerlegungsformel der beschriebenen Art – bezogen auf den Punkt $P$ – gilt, dann sagt man auch, die Funktion $f(x, y, z)$ sei im Punkt $P$* **total differenzierbar** *oder* **vollständig differenzierbar.**

Bei einer Funktion von $n$ Variablen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f = \mathrm{d}f|_{\mathbf{x},\mathbf{h}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \\ &= f_{,1}(\mathbf{x})\, h_1 + f_{,2}(\mathbf{x})\, h_2 + \ldots + f_{,n}(\mathbf{x})\, h_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{,i}(\mathbf{x})\, h_i \end{aligned}$$

das totale Differential der Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$ mit dem Zuwachs $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Für das ausführliche Symbol $\mathrm{d}f|_{\mathbf{x},\mathbf{h}}$ lassen wir auch die Schreibweise $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ oder $\mathrm{d}f(x, y, z)$ zu, wenn die Hervorhebung der Zuwachsgröße $\mathbf{h}$ nicht wesentlich ist.

Man erkennt sofort die folgenden Rechenregeln für das Arbeiten mit dem vollständigen Differential: Besitzen die zwei Funktionen $f$ und $g$ ein vollständiges Differential, so gilt dies auch für die Funktionen

$$f + g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad (g \neq 0).$$

Für die vollständigen Differentiale gilt

$$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \tag{3.36}$$

$$\mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g \tag{3.37}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2} \quad (g \neq 0) \tag{3.38}$$

Folgerungen: $\mathrm{d}(cf) = c\mathrm{d}f$ $(c = \text{const})$ und $\mathrm{d}(f^2) = 2f\mathrm{d}f$.

Weiter erkennt man den folgenden

**Satz 3.4:** *Ist die Funktion $f(x, y, z)$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ total differenzierbar, so ist $f(x, y, z)$ dort auch stetig.*

*Beweis*: Wir gehen aus von Punkten $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ die zu $P(x_0, y_0, z_0)$ benachbart sind. Dann gilt (3.33). Betrachten wir nun im Definitionsbereich der Funktion $f(x, y, z)$ den Grenzübergang $\varrho \to 0$, so folgt wegen $\lim_{\varrho \to 0} \eta = 0$ dann auch $\lim_{\varrho \to 0} \eta \cdot \varrho = 0$. Da aus $\varrho \to 0$ folgt $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, so konvergiert für $\varrho \to 0$ die rechte Seite von (3.33) gegen null, d.h. aber, die Funktionswerte $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ konvergieren gegen den Funktionswert $f(x_0, y_0, z_0)$. Das ist gerade die Bedingung für die Stetigkeit der Funktion $f(x, y, z)$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0)$.

### 3.3.2. Eigenschaften des totalen Differentials

Wir schließen einige Bemerkungen an:

*Bemerkung 3.2:* Unter den genannten Voraussetzungen können wir in (3.33) den Summanden $\eta \cdot \varrho$ für „kleine" $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ vernachlässigen und näherungsweise schreiben

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx \mathrm{d}f$$

oder

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f, \tag{3.39}$$

falls der Zuwachs $\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ klein ist. Bei Kenntnis des Funktionswertes und der Werte der partiellen Ableitungen an der festen Stelle $(x_0, y_0, z_0)$ kann somit mit Hilfe des vollständigen Differentials der Funktionswert an einer benachbarten Stelle approximiert werden. Dieser Gedanke wird später im Satz von Taylor erneut aufgegriffen.

Wir betrachten zur Approximation $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ das folgende

*Beispiel 3.4:* Für die Funktion $f(x, y) = xy$ setzen wir $x_0 = 2$ und $y_0 = 3$. Dann ist $f(x_0, y_0) = 6$. Mit $\Delta x = 0{,}2$ und $\Delta y = 0{,}1$ wird $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 2{,}2 \cdot 3{,}1 - 6 = 6{,}82 - 6 = 0{,}82$. Wegen $f_x = y$ und $f_y = x$ wird

$$\mathrm{d}f = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y = 3 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}80.$$

Der Unterschied $\Delta f - \mathrm{d}f = 0{,}02$ ist also sehr klein im Vergleich zu den Argument-

änderungen $\Delta x$ und $\Delta y$, und es gilt $\Delta f \approx \mathrm{d}f$. Die Aussage dieses speziellen Beispiels können wir im Bild 3.3 verdeutlichen. Zur Veranschaulichung des Funktionswertes $f(x, y) = xy$ verwenden wir den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten $x$ und $y$. Die Differenz $\Delta f - \mathrm{d}f$ wird dann durch das doppelt schraffierte kleine Rechteck dargestellt. Man erkennt, daß diese Differenz um so kleiner wird, je kleiner man $\Delta x$ und $\Delta y$ wählt. Man sagt auch, die Differenz $\Delta f - \mathrm{d}f$ wird „von höherer Ordnung klein" als $\Delta x$ und $\Delta y$. Auf eine Präzision dieses Begriffes gehen wir nicht ein.

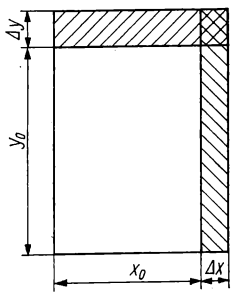



Bild 3.3

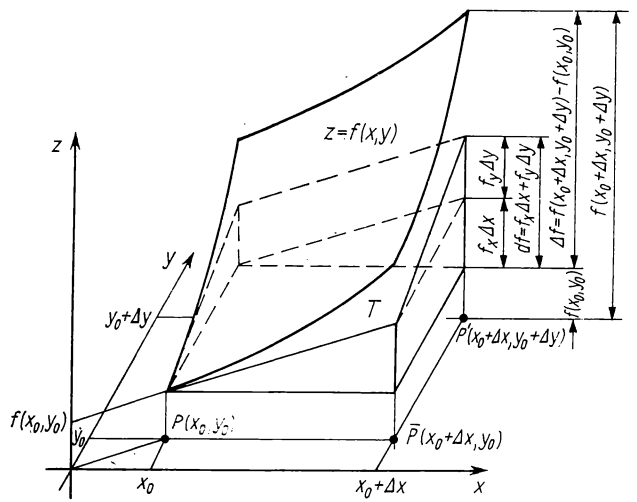



Bild 3.4

*Bemerkung 3.3:* Im Fall einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen können wir für das vollständige Differential die in Bild 3.4 ablesbare geometrische Interpretation geben. Eine Funktion $f(x, y)$ kann im $R^3$ durch eine Fläche veranschaulicht werden. Es seien $P(x_0, y_0)$ bzw. $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ im Definitionsbereich von $f(x, y)$ gewählt. Wird senkrecht über $P$ bzw. über $P'$ der Funktionswert $f(x_0, y_0)$ bzw. der Wert $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ abgetragen, so kommt man zu den zugehörigen Punkten auf der Fläche der Funktion $f(x, y)$. Im festen Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ werde nun die Tangentialebene $T$ an die genannte Fläche gelegt. Trägt man nun senkrecht über $P'$ nur den Näherungswert $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f$ ab, so gelangt man gerade bis zu dem über $P'$ liegenden Punkt der genannten Tangentialebene. Das vollständige Differential $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ drückt also den Funktionswertzuwachs aus, wenn die zur Funktion $f(x, y)$ gehörige Fläche durch die Tangentialebene an diese Fläche im festen Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ ersetzt wird. Es leuchtet anschaulich ein, daß in vielen Fällen in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0, z_0)$ die Fläche und die Tangentialebene einander gut annähern.

*Bemerkung 3.4:* Wir erwähnen einige Bezeichnungsmöglichkeiten. Schreibt man für die Zuwachsgrößen $h_1 = \Delta x$, $h_2 = \Delta y$, $h_3 = \Delta z$, so erhält man für einen Punkt $(x, y, z)$

$$\mathrm{d}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, h_1 + f_y(x, y, z)\, h_2 + f_z(x, y, z)\, h_3 . \tag{3.40}$$

Für die spezielle Funktion $f(x, y, z) = x$ liefert (3.35) uns $\mathrm{d}f(x, y, z) = \mathrm{d}x = \Delta x$. Analog ergibt sich $\mathrm{d}y = \Delta y$, $\mathrm{d}z = \Delta z$, so daß wir auch schreiben

$$\mathrm{d}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x + f_y(x, y, z)\,\mathrm{d}y + f_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.41}$$

Bei Benutzung der Vektorschreibweise würden wir

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \mathrm{d}x\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{d}y\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{d}z\,\mathbf{e}_3$$

setzen und dann erhalten

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f(\mathbf{x}) + \varrho \cdot \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\varrho \to 0} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 0, \tag{3.42}$$

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x + f_y(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y + f_z(\mathbf{x})\,\mathrm{d}z.$$

*Bemerkung 3.5:* Gilt unter den genannten Voraussetzungen für den totalen Zuwachs von $f(x, y, z)$ eine Zerlegungsformel der Gestalt

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)\\ &= A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \eta \cdot \varrho \quad \text{mit} \quad \lim_{\varrho \to 0} \eta = 0,\end{aligned}$$

so folgt automatisch $A = f_x(x_0, y_0, z_0)$, $B = f_y(x_0, y_0, z_0)$, $C = f_z(x_0, y_0, z_0)$. Man setze etwa $\Delta y = \Delta z = 0$ und erhält

$$\begin{aligned}f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) &= A\Delta x + \eta \cdot |\Delta x|\\ &= A\Delta x + \tilde{\eta}\Delta x \quad \text{mit} \quad \tilde{\eta} = \begin{cases} \eta & \text{für } \Delta x \geqq 0,\\ -\eta & \text{für } \Delta x < 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.43}$$

Wegen $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \tilde{\eta} = 0$ folgt aus (3.43) dann

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A - \lim_{\Delta x \to 0} \tilde{\eta} = A,$$

also $A = f_x(x_0, y_0, z_0)$. Analog erhält man die Beziehungen für $B$ und $C$.

*Bemerkung 3.6:* Die bloße Existenz der partiellen Ableitungen $f_x(\mathbf{x}), f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})$ reicht im allgemeinen nicht dafür aus, daß mit diesen Ableitungen (3.42) gilt. Wir erhalten jedoch den

**Satz 3.5:** *Existieren die partiellen Ableitungen $f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)$ für eine Umgebung des Punktes $P(x_0, y_0, z_0)$ und sind sie sogar stetig im Punkt $P$,* so *gilt die Zerlegungsformel* (3.33).

*Beweis:* Der Beweis macht deutlich, wie man durch geschickte Zusatzüberlegungen Sätze aus der an dieser Stelle bekannten Theorie über reelle Funktionen von nur einer unabhängigen Variablen einsetzen kann. Wir wählen $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, gehen dann vom Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ über zum Punkt $P'(x_0 - \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ und haben dann die Funktionswertdifferenz bezüglich der Punkte $P$ und $P'$ zu betrachten. Für den Übergang von $P$ nach $P'$ wählen wir einen ganz speziellen Weg. Zunächst gehen wir in Richtung der $z$-Achse von $P$ zum Punkt $R_1(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)$ – auf diesem Weg haben $x$ bzw. $y$ die konstanten Werte $x_0$ bzw. $y_0$, und nur $z$ allein ist variabel. Anschließend gehen wir parallel zur $x, y$-Ebene in Richtung der $y$-Achse von $R_1$ zum Punkt $R_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ – auf diesem Weg haben $x$ bzw. $z$ die konstanten

Werte $x_0$ bzw. $z_0 + \Delta z$, und nur $y$ allein ist variabel. Zuletzt gehen wir in Richtung der $x$-Achse von $R_2$ zu $P'$; auf diesem Weg ist $x$ allein variabel. Dann gilt

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] \\ &\qquad + [f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)] \\ &\qquad + [f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)]^1). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Auf der rechten Seite greifen wir einen der drei Summanden heraus; die Behandlung der anderen beiden Summanden ist dann ganz entsprechend. Betrachten wir z. B. den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (3.44). Die Variablen $x$ und $z$ haben feste Werte angenommen; veränderlich ist allein $y$. Wir können also den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängigen Variablen bezüglich der Variablen $y$ anwenden. Es existiert also eine Zahl $\vartheta_2$ mit $0 < \vartheta_2 < 1$, so daß gilt

$$\begin{aligned} &f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \\ &\quad = f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y, z_0 + \Delta z) \cdot \Delta y. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Wir führen die Größe $\beta$ ein durch die Festsetzung

$$\beta = f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y, z_0 + \Delta z) - f_y(x_0, y_0, z_0) \tag{3.46}$$

und können dann in (3.45) fortsetzen:

$$= f_y(x_0, y_0, z_0)\, \Delta y + \beta \Delta y.$$

Bezogen auf die Variable $x$ gilt für den ersten Summanden in (3.44) durch die gleiche Überlegung: Es existiert eine Zahl $\vartheta_1$ mit $0 < \vartheta_1 < 1$, so daß

$$\begin{aligned} &[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] \\ &= f_x(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \cdot \Delta x = f_x(x_0, y_0, z_0)\, \Delta x + \alpha \Delta x \end{aligned} \tag{3.47}$$

mit

$$\alpha = f_x(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f_x(x_0, y_0, z_0). \tag{3.48}$$

Bezogen auf die Variable $z$ folgt die Existenz einer Zahl $\vartheta_3$ mit $0 < \vartheta_3 < 1$, so daß

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) &= f_z(x_0, y_0, z_0 + \vartheta_3 \Delta z)\, \Delta z \\ &= f_z(x_0, y_0, z_0)\, \Delta z + \gamma \Delta z \end{aligned} \tag{3.49}$$

mit

$$\gamma = f_z(x_0, y_0, z_0 + \vartheta_3 \Delta z) - f_z(x_0, y_0, z_0). \tag{3.50}$$

Insgesamt können wir dann in (3.44) weiterschreiben:

$$\begin{aligned} &= f_x(x_0, y_0, z_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\, \Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\, \Delta z \\ &\qquad + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z. \end{aligned}$$

---

[1]) Derartige „künstliche Erweiterungen" findet man in vielen mathematischen Beweisen, indem man wie hier geeignete Zahlen subtrahiert und sie dann sofort wieder addiert.

Der Beweis des Satzes ist erbracht, wenn wir nun noch zeigen können, daß für den Grenzübergang $\varrho \to 0$ folgt, daß dann auch gilt $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, $\gamma \to 0$. Der Grenzübergang $\varrho \to 0$ bedeutet nun aber, daß gilt $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Dann gilt aber in (3.46) bzw. in (3.48) bzw. in (3.50):

$$(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y, z_0 + \Delta z) \to (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{bzw. } (x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \to (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{bzw. } (x_0, y_0, z_0 + \vartheta_3 \Delta z) \to (x_0, y_0, z_0).$$

Da die partiellen Ableitungen als stetig vorausgesetzt wurden, folgt dann aber

$$f_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y, z_0 + \Delta z) \to f_y(x_0, y_0, z_0), \quad \text{d.h.} \quad \beta \to 0.$$

Analog erhält man $\alpha \to 0$ und $\gamma \to 0$. Damit ist der Beweis beendet.

Die Voraussetzung, daß die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, wird an vielen Stellen benötigt. Wir vereinbaren daher die folgende

**Definition 3.3:** *Wir nennen die Funktion* $f(x, y, z)$ im *Punkt* $P(x_0, y_0, z_0)$ **stetig differenzierbar,** *wenn die partiellen Ableitungen* $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ *und* $f_z(x, y, z)$ *für eine Umgebung von* $P$ *existieren und im Punkt* $P$ *stetig sind.*

Daß die Aussage von Satz 3.5 nicht zu gelten braucht, wenn die partiellen Ableitungen nicht stetig sind, zeigt

*Beispiel 3.5:* Wir betrachten

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{3.51}$$

Die Beziehung $(x, y) \neq (0, 0)$ ist gleichbedeutend mit der Forderung $x^2 + y^2 > 0$. Man erkennt sofort, daß $f(x, y)$ stetig für alle Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ ist. Aus der Abschätzung

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqq |y| \text{ folgt auch } \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

d.h., $f(x, y)$ ist auch im Nullpunkt stetig. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 = f_x(0, 0); \quad \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 = f_y(0, 0).$$

Die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ existieren somit für alle Punkte $(x, y)$; sie sind jedoch im Nullpunkt nicht stetig. Betrachten wir z.B. die gegen den Nullpunkt konvergierende Folge $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, so gilt $f_x\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{n^4}}{4 \cdot \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$.

Daher gilt auch $\lim_{n\to\infty} f_x\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f_x(0, 0)$.

Wir zeigen noch, daß eine Zerlegungsformel der Gestalt (3.33) bezogen auf den Nullpunkt nicht gilt. Für z.B. $\Delta x = \Delta y > 0$ ist dann

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) = \tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Wegen $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ und $\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{2}\,\Delta x$ muß dann gelten

$$\frac{1}{2}\Delta x = \eta \cdot \varrho = \eta \cdot \sqrt{2}\,\Delta x, \text{ also } \eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Somit gilt nicht $\lim_{\varrho\to 0} \eta = 0$, d.h., bezogen auf den Nullpunkt gilt eine Zerlegungsformel der Gestalt (3.33) nicht.

Für Funktionen $f(x)$ einer unabhängigen Variablen reicht die Existenz der Ableitung $f'(x_0)$ bereits aus für das Bestehen der entsprechenden Zerlegungsformel. Bei Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen ist die Forderung nach der Gültigkeit der genannten Zerlegungsformel also stärker als die bloße Forderung, daß alle partiellen Ableitungen an den betrachteten Stellen existieren.

*Bemerkung 3.7:* **Das totale Differential für zusammengesetzte Funktionen.** Wir betrachten wieder zusammengesetzte Funktionen und wollen annehmen, daß für alle auftretenden Funktionen das vollständige Differential existiert. Wir betrachten nur eine herausgegriffene Möglichkeit. Es sei z.B. $g(v)$ eine Funktion einer unabhängigen Variablen $v$, und es gelte $v = v(x, y)$. Bezüglich der unabhängigen Variablen $v$ gilt dann

$$\mathrm{d}g(v) = g'(v)\,\mathrm{d}v. \tag{3.52}$$

Wollen wir nun das vollständige Differential für die zusammengesetzte Funktion $f(x, y) = g(v(x, y))$ ermitteln, so können wir von (3.52) ausgehen und in diese Formel für $\mathrm{d}v$ das vollständige Differential $\mathrm{d}v(x, y)$ der Funktion $v(x, y)$ und in die Ableitung $g'(v)$ die Beziehung $v = v(x, y)$ einführen (vgl. hierzu auch die Betrachtungen unter 3.6.2.).

Auf diese Weise können gelegentlich die partiellen Ableitungen für Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen mit Hilfe des vollständigen Differentials für zusammengesetzte Funktionen bequemer berechnet werden. Wir bringen zwei Beispiele.

*Beispiel 3.6:* Es sei $f(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$. Wir setzen $v(x, y) = \frac{y}{x}$ und betrachten die Funktion $g(v) = \arctan v$ mit

$$\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}v}{1 + v^2}. \tag{3.53}$$

Führen wir $\mathrm{d}v = -\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\mathrm{d}y$ und $v = \frac{y}{x}$ in (3.53) ein, so erhalten wir für $f(x, y) = \arctan v(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$ dann

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\left[-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\mathrm{d}y\right] = \frac{1}{x^2 + y^2}\left[-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\right].$$

Somit gilt $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ und $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

*Beispiel 3.7:* Es sei $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$. Wir betrachten zunächst $g(v) = \ln \sqrt{v} = \frac{1}{2} \ln v$ mit

$$\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{v}. \tag{3.54}$$

Führen wir $v(x,y) = x^2 + y^2$ und $\mathrm{d}v = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$ in (3.54) ein, so erhalten wir

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y), \quad \text{also } f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

### 3.3.3. Der Gradient einer reellen Funktion $f(x, y, z)$

Es sei $f(x,y,z)$ eine reelle Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$. Das vollständige Differential lautet dann

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.55}$$

Die Größen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ drücken dabei Änderungen der unabhängigen Variablen aus; wir können sie zusammenfassen zum Vektor

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{d}y\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{d}z\,\mathbf{e}_3. \tag{3.56}$$

Es liegt nun nahe, in (3.55) auch die jeweils ersten Faktoren $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ als Koordinaten eines Vektors aufzufassen. Dann wäre das vollständige Differential gerade das Skalarprodukt zweier Vektoren. Wir vereinbaren die folgende

**Definition 3.4:** *Die reelle Funktion $f(x,y,z)$ besitze partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x$, $y$ und $z$. Für jeden Punkt $(x,y,z)$ des Definitionsbereiches von $f(x,y,z)$ definieren wir dann den Vektor*

$$f_x(x,y,z)\,\mathbf{e}_1 + f_y(x,y,z)\,\mathbf{e}_2 + f_z(x,y,z)\,\mathbf{e}_3.$$

*Er heißt* **Gradient** *von $f$ im Punkt $(x,y,z)$ und wird mit* $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ *bezeichnet:*

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{e}_3$$

$$= f_x(x,y,z)\,\mathbf{e}_1 + f_y(x,y,z)\,\mathbf{e}_2 + f_z(x,y,z)\,\mathbf{e}_3. \tag{3.57}$$

Bei der Bildung des Gradienten geht man also von einem Skalarfeld aus und erhält als Ergebnis ein Vektorfeld. Für die Bildung des Vektors $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ ist es nicht erforderlich, daß die partiellen Ableitungen von $f(x,y,z)$ stetig sind.

*Beispiel 3.8:* Für $f(x,y,z) = x + y - z$ gilt $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1$ und daher

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

*Beispiel 3.9:* Für $f(x,y,z) = z^2\,\mathrm{e}^{x^2-yz}$ gilt

$$f_x = 2x z^2\,\mathrm{e}^{x^2+yz}, \quad f_y = z^3\,\mathrm{e}^{x^2-yz}, \quad f_z = (2z + yz^2)\,\mathrm{e}^{x^2+yz}$$

und somit

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x, y, z) &= \mathrm{e}^{x^2+yz}\,(2xz^2\,\mathbf{e}_1 + z^3\,\mathbf{e}_2 + (2z + yz^2)\,\mathbf{e}_3)\\ &= z\,\mathrm{e}^{x^2+yz}\,(2xz\,\mathbf{e}_1 + z^2\,\mathbf{e}_2 + (2 + yz)\,\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Das vollständige Differential $\mathrm{d}f(x, y, z)$ ist dann als Skalarprodukt der beiden Vektoren $\operatorname{grad} f(x, y, z)$ und $\mathbf{dr}$ darstellbar:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\,\mathrm{d}x + f_y(x, y, z)\,\mathrm{d}y + f_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\\ &= (\operatorname{grad} f(x, y, z))\,\mathbf{dr}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

An Rechenregeln für den Gradienten ergibt sich sofort:

**Satz 3.6:** *Zwei beliebige Funktionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ mögen partielle Ableitungen besitzen, und es sei ferner $K$ eine beliebige Konstante. Dann gilt*

$$\operatorname{grad}(f(x, y, z) + g(x, y, z)) = \operatorname{grad} f(x, y, z) + \operatorname{grad} g(x, y, z), \tag{3.59}$$

$$\operatorname{grad}(K \cdot f(x, y, z)) = K \operatorname{grad} f(x, y, z) \quad (K \textit{ konstant}), \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)) &= f(x, y, z) \operatorname{grad} g(x, y, z)\\ &\quad + g(x, y, z) \operatorname{grad} f(x, y, z).\end{aligned} \tag{3.61}$$

Der Beweis dieser Regeln ergibt sich als leichte Übungsaufgabe, indem man die Regeln für die Differentiation einer Summe und eines Produktes beachtet. Weitere Ausführungen über den Gradienten folgen später.

Wir bemerken noch, daß der Gradient auch für Funktionen von $n$ unabhängigen Variablen gebildet werden kann. Besitzt die reelle Funktion von $n$ unabhängigen Variablen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ partielle Ableitungen erster Ordnung, so setzt man

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) &= f_{|1}(x_1, \ldots, x_n)\,\mathbf{e}_1 + \cdots + f_{|n}(x_1, \ldots, x_n)\,\mathbf{e}_n\\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{|i}(x_1, \ldots, x_n)\,\mathbf{e}_i.\end{aligned} \tag{3.62}$$

$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n)$ ist dann ein $n$-dimensionaler Vektor.

*Hinweis:* Bei Benutzung der Matrizenschreibweise hätte man zu schreiben

$$\operatorname{grad} \mathrm{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathsf{T}}.$$

### 3.3.4. Der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Wir erinnern an den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängigen Variablen (vgl. Bd. 2). Eine Funktion $f(x)$ sei in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und im offenen Intervall $(a, b)$ differenzierbar. Sind $x_0$ und $x_0 + h$ zwei Stellen aus dem Intervall $[a, b]$, so gilt näherungsweise

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx h f'(x_0) \quad \text{für kleine } |h|. \tag{3.63}$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt nun aus, daß es bei Erfülltsein der

genannten Voraussetzungen eine Zahl $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$ gibt, so daß anstelle von 3.63) exakt gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \vartheta h). \tag{3.64}$$

Die Funktionswertdifferenz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ist somit das Produkt aus der Argumentdifferenz $h$ und der Ableitung der Funktion $f$ an einer geeigneten zwischen $x_0$ und $x_0 + h$ gelegenen Zwischenstelle $x_0 + \vartheta h$. Da die Funktion $f$ in einem Intervall betrachtet wird, so folgt von selbst, daß die Zwischenstelle $x_0 + \vartheta h$ ebenfalls zum Definitionsbereich von $f$ gehört. Im $R^1$ sind Intervalle Beispiele für konvexe Teilmengen des $R^1$.

Wir wollen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für Funktionen von drei unabhängigen Variablen herleiten. Unter analogen Voraussetzungen wie im Fall einer Funktion $f(x)$ werden wir zu einer Aussage kommen, die große Ähnlichkeit zur Formel (3.64) hat. An die Stelle von $h$ wird ein Differenzvektor $\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3$ treten; die Ableitung wird zu ersetzen sein durch den Gradienten der betrachteten Funktion, und anstelle des gewöhnlichen Produktes ist dann mit dem Skalarprodukt zweier Vektoren zu arbeiten.

Die Funktion $f(x, y, z)$ sei definiert in einer offenen Teilmenge $D$ des $R^3$ und die Menge $D$ sei konvex – d.h., sind $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und $P(x, y, z)$ zwei Punkte von $D$, so sollen auch alle Punkte der Verbindungsstrecke von $P_0$ und $P$ zu $D$ gehören. Dies sind aber gerade alle Punkte der Gestalt

$$(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{3.65}$$

Für $t = 0$ erhält man in (3.65) den Punkt $P_0$, für $t = 1$ erhält man den Punkt $P$ und für $t$ mit $0 < t < 1$ liegt der zugehörige Punkt aus (3.65) auf der Verbindungsstrecke zwischen $P_0$ und $P$. Setzen wir $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$ und $h_3 = z - z_0$, so ist die genannte Verbindungsstrecke die Menge aller Punkte der Gestalt

$$(x_0 + th_1, y_0 + th_2, z_0 + th_3) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{3.66}$$

**Satz 3.7 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung):** *Die reelle Funktion $f(x, y, z)$ sei definiert in der offenen und konvexen Teilmenge $D$ des $R^3$ und besitze überall in $D$ stetige partielle Ableitungen nach $x$, $y$ und $z$. Sind dann die Punkte $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und $P(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3)$ in $D$ gewählt, so existiert eine Zahl $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß gilt*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0) \\ = f_x(x_0 + \vartheta h_1, y_0 + \vartheta h_2, z_0 + \vartheta h_3)\, h_1 + f_y(\ldots)\, h_2 + f_z(\ldots)\, h_3. \end{aligned} \tag{3.67}$$

*Bemerkung 3.8:* In Formel (3.67) sind alle drei partiellen Ableitungen an der gleichen Zwischenstelle $(x_0 + \vartheta h_1, y_0 + \vartheta h_2, z_0 + \vartheta h_3)$ zu betrachten. Man beachte ferner, daß für alle drei Koordinaten die gleiche Zahl $\vartheta$ auftritt.

Verwenden wir die Vektorschreibweise, so würden wir setzen $\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3$. Unter den genannten Voraussetzungen für die Funktion $f(\mathbf{x})$ und den Definitionsbereich der Funktion können wir dann sagen: Es gibt eine Zahl $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß gilt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) &= f_x(\mathbf{x} + \vartheta\mathbf{h})\, h_1 + f_y(\mathbf{x} + \vartheta\mathbf{h})\, h_2 + f_z(\mathbf{x} + \vartheta\mathbf{h})\, h_3 \\ &= (\operatorname{grad} f(\mathbf{x} + \vartheta\mathbf{h})) \cdot \mathbf{h}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Wir werden in 4.1. sehen, daß der Mittelwertsatz durch eine Spezialisierung aus der Taylorformel gewonnen werden kann.

*Beweis:* Die Funktion $f(x, y, z)$ werde eingeschränkt auf die Punkte der Verbindungsstrecke (3.66), d.h., wir betrachten die zusammengesetzte Funktion der unabhängigen Variablen $t$:

$$F(t) = f(x_0 + th_1, y_0 + th_2, z_0 + th_3) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{3.69}$$

Die Funktion $F(t)$ erfüllt nun auf dem Intervall [0, 1] die Voraussetzung des Mittelwertsatzes für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen. Es gibt also eine Zahl $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß gilt

$$F(1) - F(0) = F'(\vartheta)^1). \tag{3.70}$$

Die Ableitung $F'(t)$ berechnen wir nach Satz 3.2 für den Spezialfall $x(t) = x_0 + th_1$, $y(t) = y_0 + th_2$, $z(t) = z_0 + th_3$. Es gilt $x'(t) = h_1$, $y'(t) = h_2$, $z'(t) = h_3$ und damit insgesamt

$$F'(t) = f_x(x_0 + th_1, y_0 + th_2, z_0 + th_3)\, h_1 + f_y(...)\, h_2 + f_z(...)\, h_3{}^2). \tag{3.71}$$

Also ist

$$\begin{aligned} F'(\vartheta) &= f_x(x_0 + \vartheta h_1, y_0 + \vartheta h_2, z_0 + \vartheta h_3)\, h_1 + f_y(...)\, h_2 + f_z(...)\, h_3 \\ &= (\operatorname{grad} f(\mathbf{x} + \vartheta \mathbf{h}))\, \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Wegen $F(1) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ und $F(0) = f(\mathbf{x})$ liefert die Umschreibung von (3.70) gerade die Behauptung. Damit ist der Beweis beendet. Es ist sofort klar, wie der Mittelwertsatz für Funktionen von zwei unabhängigen Variablen oder allgemein für Funktionen von $n$ Variablen lautet. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich der

**Satz 3.8:** *Die reelle Funktion $f(x, y, z)$ erfülle die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.7, und es gelte noch zusätzlich $f_x(x, y, z) = f_y(x, y, z) = f_z(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in D$. Dann ist die Funktion $f(x, y, z)$ auf $D$ konstant.*

*Beweis:* Es sei $(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt aus $D$. Für jeden weiteren Punkt $(x, y, z)$ aus $D$ folgt dann nach Satz 3.7 $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0$, da die partiellen Ableitungen für alle Punkte von $D$ verschwinden. Also gilt $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ für alle $(x, y, z) \in D$; d.h., $f(x, y, z)$ ist konstant auf $D$.

## 3.4. Differentiale höherer Ordnung

Wir betrachten zunächst den Fall einer reellen Funktion von zwei unabhängigen Variablen. Eine Funktion $f(x, y)$ sei in einer offenen Teilmenge der $x, y$-Ebene definiert und besitze überall stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Dann können wir das **vollständige Differential** $\mathrm{d}f(x, y)$ bilden:

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{3.72}$$

---

[1]) Für die Anwendung des Mittelwertsatzes müssen wir die Spezialisierung $a = 0$, $b = 1$ und $h = 1$ betrachten.

[2]) Alle drei partiellen Ableitungen werden an der gleichen Stelle betrachtet.

Dabei bedeuten $dx$ bzw. $dy$ Zuwachsgrößen der unabhängigen Veränderlichen $x$ bzw. $y$. Wählen wir in (3.72) nun feste Zuwachsgrößen $dx$ und $dy$, so ist das vollständige Differential (3.72) wieder eine Funktion von $x$ und $y$. Setzen wir voraus, daß $f(x, y)$ sogar stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung nach $x$ und nach $y$ besitzt, so besitzt also $df(x, y)$ als Funktion von $x$ und $y$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x$ und nach $y$. Man kann daher von (3.72) erneut das vollständige Differential $d(df(x, y))$ bestimmen. Wir nennen es das **Differential zweiter Ordnung** von $f(x, y)$ an der Stelle $\mathbf{x} = (x, y)$ mit dem Zuwachs $\mathbf{h} = (dx, dy) = (h_1, h_2)$ und bezeichnen es mit $d^2f(x, y)$ bzw. ausführlicher mit $d^2f|_{\mathbf{x},\mathbf{h}}$. Wir haben also bei der Bildung von $d^2f(x, y)$ die Größen $dx$ und $dy$ zu behandeln wie Konstanten. Wir betrachten das folgende

*Beispiel 3.10:* Die Funktion

$$f(x, y) = x^3 e^{2y} \tag{3.73}$$

besitzt in der gesamten $x, y$-Ebene stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung nach $x$ und $y$, und es gilt für das Differential erster Ordnung:

$$df(x, y) = 3x^2 e^{2y}\, dx + 2 e^{2y} x^3\, dy. \tag{3.74}$$

Wir wählen jetzt feste Zuwächsgrößen $dx$ und $dy$ und betrachten dann die rechte Seite von (3.74) nur als Funktion von $x$ und $y$. Setzen wir vorübergehend $F(x, y) = 3x^2 e^{2y}\, dx - 2 e^{2y} x^3\, dy$, so soll nun das vollständige Differential $dF(x, y)$ gebildet werden. Es ist dann für konstantes $dx$ und $dy$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 6x e^{2y}\, dx + 6x^2 e^{2y}\, dy, \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 6x^2 e^{2y}\, dx + 4x^3 e^{2y}\, dy,$$

und daher gilt für $dF(x, y) = d^2f(x, y)$:

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= [6x e^{2y}\, dx + 6x^2 e^{2y}\, dy]\, dx + [6x^2 e^{2y}\, dx + 4x^3 e^{2y}\, dy]\, dy \\ &= 6x e^{2y} (dx)^2 + 2 \cdot 6x^2 e^{2y}\, dx\, dy + 4x^3 e^{2y} (dy)^2 \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} (dy)^2 \end{aligned} \tag{3.75}$$

wegen

$$f_{xx}(x, y) = 6x e^{2y},\ f_{yy}(x, y) = 4x^3 e^{2y},\ f_{xy}(x, y) = 6x^2 e^{2y}.$$

Die zuletzt gefundene Beziehung (3.75) für $d^2f(x, y)$ gilt nun ganz allgemein. Unter den genannten Voraussetzungen für $f(x, y)$ gilt für die gemischten partiellen Ableitungen die Vertauschungsregel $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Beachten wir ferner die Rechenregeln (3.36) und (3.37) für das Arbeiten mit dem vollständigen Differential, so erhalten wir ($dx$ und $dy$ sind zu behandeln wie Konstanten) wegen

$$d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dy$$

und

$$d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x}\, dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\, dy,$$

dann weiter

$$d^2f(x, y) = d(df(x, y)) = d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy\right)$$

$$= (\mathrm{d}x) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) + (\mathrm{d}y) \cdot \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

$$= (\mathrm{d}x) \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}y\right]$$

$$+ (\mathrm{d}y) \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2\,^{1}). \tag{3.76}$$

Analog wird das Differential dritter Ordnung $\mathrm{d}^3 f(x,y)$ anschließend erklärt als $\mathrm{d}^3 f(x,y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 f(x,y))$. Dieser Bildungsprozeß kann weiter fortgesetzt werden. Besitzt also $f(x,y)$ stetige partielle Ableitungen bis zur $k$-ten Ordnung und ist das Differential $(k-1)$-ter Ordnung schon gebildet, so verstehen wir unter dem Differential $k$-ter Ordnung dann

$$\mathrm{d}^k f(x,y) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1} f(x,y)). \tag{3.77}$$

Man erkennt, daß die bei der sukzessiven Bildung der Differentiale auftretenden Ausdrücke immer komplizierter werden. Zur besseren Übersicht führen wir daher eine formale Bezeichnung ein und können mit dieser dann die Differentiale $\mathrm{d}^k f(x,y)$ bequem darstellen.

Der explizite Ausdruck für $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ in (3.76) weist eine gewisse Ähnlichkeit mit der rechten Seite der Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ($a, b$ beliebige reelle Zahlen) auf. Wir definieren daher das *formale Symbol*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^2 f(x,y) \tag{3.78}$$

in der folgenden Weise: Der Ausdruck in der Klammer wird zur zweiten Potenz erhoben und dabei werden die Symbole $\partial$, $\partial x$, $\partial y$ wie selbständige algebraische Symbole behandelt. Anschließend werden die Klammern fortgelassen, und zu jedem Symbol $\partial^2$ wird der „Faktor" $f(x,y)$ hinzugesetzt (der „Faktor" $f(x,y)$ wird also „hineinmultipliziert"). Nach diesem Vorgang soll dann alles wieder seine ursprüngliche Bedeutung haben. Wichtig für diesen Gedankengang ist die Vertauschbarkeit der gemischten partiellen Ableitungen von $f(x,y)$. Also ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^2 f(x,y)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2\right) f(x,y)$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2. \tag{3.79}$$

Für das Differential zweiter Ordnung von $f(x,y)$ erhalten wir dann die sehr einprägsame Darstellung

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^2 f(x,y). \tag{3.80}$$

[1]) Anstelle von $(\mathrm{d}x)^2$ bzw. $(\mathrm{d}y)^2$ schreibt man auch kürzer ohne Klammer nur $\mathrm{d}x^2$ bzw. $\mathrm{d}y^2$.

Ganz entsprechend ist die Schreibweise

$$\mathrm{d}f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)f(x,y) \tag{3.81}$$

zu interpretieren; der „Faktor" $f(x,y)$ wurde „ausgeklammert". Man kann nun zeigen, daß allgemein gilt

$$\mathrm{d}^k f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^k f(x,y). \tag{3.82}$$

Für das Differential dritter Ordnung einer Funktion $f(x,y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen dritter Ordnung gilt also

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3 f(x,y)&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^3 f(x,y)\\&=f_{xxx}(x,y)\,\mathrm{d}x^3+3f_{xxy}(x,y)\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y\\&\quad+3f_{xyy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2+f_{yyy}(x,y)\,\mathrm{d}y^3.\end{aligned} \tag{3.83}$$

Ist $f(x_1,\ldots,x_n)$ eine reelle Funktion von $n$ unabhängigen Veränderlichen mit stetigen partiellen Ableitungen $k$-ter Ordnung, so gilt entsprechend

$$\mathrm{d}^k f(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n\right)^k f(x_1,\ldots,x_n). \tag{3.84}$$

Das Symbol auf der rechten Seite von (3.84) ist ganz entsprechend zu lesen wie für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen. Für eine Funktion von drei unabhängigen Variablen $f(x_1,x_2,x_3)$ mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gilt dann für das Differential zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(x_1,x_2,x_3)&=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3\right)^2 f(x_1,x_2,x_3)\\&=f_{11}\,\mathrm{d}x_1^2+f_{22}\,\mathrm{d}x_2^2+f_{33}\,\mathrm{d}x_3^2\\&\quad+2f_{12}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2+2f_{13}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3+2f_{23}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

(Alle partiellen Ableitungen sind an der Stelle $(x_1,x_2,x_3)$ zu betrachten – wir haben die Argumente nicht mitgeschrieben, wie es gelegentlich üblich ist, falls keine Verwechslungen zu befürchten sind.)

## 3.5. Anwendungen des totalen Differentials in der Fehlerrechnung

Wir führen analoge Überlegungen durch wie im Band 2 im Kapitel 5.2. für Funktionen einer unabhängigen Variablen und betrachten zunächst Funktionen von zwei unabhängigen Variablen. Es liege also der Fall vor, daß eine Größe $z$ als Funktion zweier Größen $x$ und $y$ berechnet werden soll als $z=f(x,y)$. Es seien $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ Näherungswerte für $x$ bzw. $y$, so daß anstelle des exakten Wertes $z=f(x,y)$ auch nur der Näherungswert

$$\tilde{z}=f(\tilde{x},\tilde{y}) \tag{3.85}$$

berechnet werden kann. Wir schreiben dann

$$x = \tilde{x} + \mathrm{d}x, \quad y = \tilde{y} + \mathrm{d}y \tag{3.86}$$

und bezeichnen in diesem Zusammenhang $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ auch als *Meßfehler*. Weiter seien zwei Schranken $h > 0$ bzw. $k > 0$ für die Meßfehler bekannt, d.h., es gelte

$$|\mathrm{d}x| \leqq h \quad \text{bzw.} \quad |\mathrm{d}y| \leqq k. \tag{3.87}$$

Es gelte also die Abschätzung

$$\tilde{x} - h \leqq x \leqq \tilde{x} + h \text{ und } \tilde{y} - k \leqq y \leqq \tilde{y} + k, \tag{3.88}$$

wofür wir mit der Symbolik aus Band 2 auch schreiben $x = \tilde{x} \pm h$ und $y = \tilde{y} \pm k$.

Gesucht ist nun eine obere Schranke für den absoluten Fehler

$$|\Delta z| = |z - \tilde{z}\,| = |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| = |f(\tilde{x} + \mathrm{d}x, \tilde{y} + \mathrm{d}y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})|. \tag{3.89}$$

Sind $h$ und $k$ „klein", so sind nach (3.87) auch $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ „klein", und man kann die Funktionswertdifferenz (3.89) durch das zu der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{y})$ und den Zuwächsen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ gehörige Differential von $f$ annähern. Man setzt also $|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z|$ und erhält die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Delta z| \approx |\mathrm{d}z| &= |f_x(\tilde{x}, \tilde{y})\,\mathrm{d}x + f_y(\tilde{x}, \tilde{y})\,\mathrm{d}y| \leqq |f_x(\tilde{x}, \tilde{y})| \cdot |\mathrm{d}x| + |f_y(\tilde{x}, \tilde{y})| \cdot |\mathrm{d}y| \\ &\leqq |f_x(\tilde{x}, \tilde{y})| \cdot h + |f_y(\tilde{x}, \tilde{y})| \cdot k. \text{ [1]} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Die Abschätzung (3.90) ist zwar nur eine genäherte, aber sehr einfache und praktisch durchaus brauchbare Abschätzung für den absoluten Fehler von $\tilde{z}$. Anstelle des relativen Fehlers $\frac{\Delta z}{\tilde{z}}$ berechnet man in der Praxis dann auch die Größe $\frac{\mathrm{d}z}{\tilde{z}}$.

Die Betrachtungen können sofort auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen ausgedehnt werden.

*Beispiel 3.11:* In einem Dreieck seien für die Seiten $a$ und $b$ und den eingeschlossenen Winkel $\gamma$ die Näherungswerte $\tilde{a} = 84{,}3$ m, $\tilde{b} = 73{,}2$ m und $\tilde{\gamma} = 48{,}6°$ (d.h. $\tilde{\gamma} = 0{,}27\pi$) gemessen worden. Für die Meßfehler $\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}b$ und $\mathrm{d}\gamma$ soll gelten

$$|\mathrm{d}a| \leqq h_1 = 0{,}1 \text{ m}; \quad |\mathrm{d}b| \leqq h_2 = 0{,}2 \text{ m} \quad \text{und} \quad |\mathrm{d}\gamma| \leqq h_3 = 0{,}01 \cdot \frac{\pi}{9}.$$

Gesucht ist eine Abschätzung des absoluten Fehlers für die Länge der dritten Seite $c$, die sich aus den angegebenen Werten ergibt. Nach dem Kosinussatz gilt

$$c = f(a, b, \gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}. \tag{3.91}$$

---

[1]) Vom Standpunkt des Mathematikers wäre in jedem Einzelfall zu überlegen, ob $|\mathrm{d}x|$ und $|\mathrm{d}y|$ hinreichend klein sind, um die Ersetzung von $|\Delta z|$ durch $|\mathrm{d}z|$ zu rechtfertigen.

Also ist

$$c = f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\gamma}) = \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - 2\tilde{a}\tilde{b}\cos\tilde{\gamma}}$$
$$= \sqrt{(84{,}3)^2 + (73{,}2)^2 - 2\,(84{,}3)\,(73{,}2)\cos 0{,}27\pi} = 65{,}5. \tag{3.92}$$

Für das zur Stelle $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\gamma})$ und den Zuwächsen $da$, $db$, $d\gamma$ gehörige Differential gilt

$$df(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\gamma}) = \frac{(2\tilde{a} - 2\tilde{b}\cos\tilde{\gamma})\,da + (2\tilde{b} - 2\tilde{a}\cos\tilde{\gamma})\,db + 2\tilde{a}\tilde{b}\sin\tilde{\gamma}\,d\gamma}{2\sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - 2\tilde{a}\tilde{b}\cos\tilde{\gamma}}}$$
$$= \frac{\tilde{a} - \tilde{b}\cos\tilde{\gamma}}{\tilde{c}}\,da + \frac{\tilde{b} - \tilde{a}\cos\tilde{\gamma}}{\tilde{c}}\,db + \frac{\tilde{a}\tilde{b}\sin\tilde{\gamma}}{\tilde{c}}\,d\gamma. \tag{3.93}$$

Für den absoluten Fehler erhält man die Abschätzung

$$|\Delta c| \approx |dc| \leqq \left|\frac{84{,}3 - 73{,}2\cos\tilde{\gamma}}{65{,}5}\right| \cdot 0{,}1 + \left|\frac{73{,}2 - 84{,}3\cos\tilde{\gamma}}{65{,}5}\right| \cdot 0{,}2$$
$$+ \left|\frac{84{,}3 \cdot 73{,}2\sin\tilde{\gamma}}{65{,}5}\right| \cdot 0{,}01\,\frac{\pi}{9}$$
$$= 0{,}055 + 0{,}053 + 0{,}246 = 0{,}354 < 0{,}4.$$

Für den wahren Wert $c$ besteht also praktisch die Ungleichung $|c - 65{,}5| < 0{,}4$, d.h.

$$65{,}5 - 0{,}4 < c < 65{,}5 + 0{,}4. \tag{3.94}$$

Hierfür schreiben wir auch $c = 65{,}5 \pm 0{,}4$. Für den relativen Fehler gilt

$$\left|\frac{\Delta c}{\tilde{c}}\right| \approx \left|\frac{dc}{\tilde{c}}\right| < \frac{0{,}4}{65{,}5} = 0{,}0061 = 0{,}61\%. \tag{3.95}$$

Für die relativen Fehler der Meßwerte gilt

$$\left|\frac{da}{\tilde{a}}\right| \leqq \frac{0{,}1}{84{,}3} = 0{,}0012 = 0{,}12\%; \quad \frac{db}{\tilde{b}} \leqq \frac{0{,}2}{73{,}2} = 0{,}0027 = 0{,}27\%;$$

$$\left|\frac{d\gamma}{\tilde{\gamma}}\right| \leqq \frac{0{,}01}{2{,}43} = 0{,}0041 = 0{,}41\%.$$

Im folgenden Beispiel führen wir eine geänderte Betrachtungsweise durch. Bei der Abschätzung des Fehlers betrachten wir wieder das vollständige Differential der betreffenden Funktion; wir arbeiten dann aber nicht nur mit Abschätzungen für die Zuwachsgrößen der unabhängigen Variablen, sondern bestimmen auch Abschätzungen für die auftretenden partiellen Ableitungen. Wie mit dem Mittelwertsatz nachgewiesen werden kann, erhält man hierbei tatsächlich eine obere Schranke für den absoluten Fehler der betrachteten Funktion.

*Beispiel 3.12:* Bei einem konzentrischen (einadrigen) Ölkabel, dessen Außenleiter den inneren Radius $b = 1{,}75$ cm und dessen Innenleiter den Radius $a = 0{,}35$ cm hat, ist die maximale Feldstärke (am Innenleiter) durch

$$E = \frac{U}{a \ln \frac{b}{a}} = \frac{U}{a(\ln b - \ln a)} \tag{3.96}$$

mit dem Scheitelwert $U$ der Betriebsspannung gegeben. Wie groß ist der relative Fehler von $E$ für $U = 100$ kV, wenn die relativen Fehler von $a$ und $b$ mit je 1 % und von $U$ mit 2% angesetzt werden? Es ist also $E$ eine Funktion der drei unabhängigen Variablen $U$, $a$ und $b$: $E = E(U, a, b)$. Nach der Voraussetzung über die relativen Fehler von $U, a, b$ ist die Funktion $E(U, a, b)$ zu betrachten in der Menge $B$ aller Punkte $(U, a, b)$, für die gilt $100 - 2 \leqq U \leqq 100 + 2$; $0{,}35 - 0{,}0035 \leqq a \leqq 0{,}35 + 0{,}0035$; $1{,}75 - 0{,}0175 \leqq b \leqq 1{,}75 + 0{,}0175$. $B$ ist also die Menge aller Punkte $(U, a, b)$ mit

$$98 \leqq U \leqq 102;\ 0{,}3465 \leqq a \leqq 0{,}3535;\ 1{,}7325 \leqq b \leqq 1{,}7675. \tag{3.97}$$

Nun ist

$$\frac{\partial E}{\partial U} = \frac{1}{a(\ln b - \ln a)};\quad \frac{\partial E}{\partial a} = \frac{U(1 - \ln b + \ln a)}{(a(\ln b - \ln a))^2};\quad \frac{\partial E}{\partial b} = \frac{-U}{ab(\ln b - \ln a)^2}.$$

Für das vollständige Differential der Funktion $E(U, a, b)$ gilt dann

$$\mathrm{d}E(U, a, b) = \frac{\partial E}{\partial U}\,\mathrm{d}U + \frac{\partial E}{\partial a}\,\mathrm{d}a + \frac{\partial E}{\partial b}\,\mathrm{d}b. \tag{3.98}$$

Für alle auf der rechten Seite von (3.98) stehenden Größen werden obere Schranken – bezogen auf die Menge $B$ – angegeben. Wir lassen also alle Punkte $(U, a, b)$ zu, für die (3.97) gilt, und erhalten dann

$$|\mathrm{d}U| \leqq 2; \quad |\mathrm{d}a| \leqq 0{,}0035; \quad \mathrm{d}b \leqq 0{,}0175;$$

$$\left|\frac{\partial E}{\partial U}\right| \leqq \frac{1}{0{,}3465\,(\ln 1{,}7325 - \ln 0{,}3535)} \leqq 1{,}8158;$$

$$\left|\frac{\partial E}{\partial a}\right| \leqq \frac{102(-1 + \ln 1{,}7675 - \ln 0{,}3465)}{(0{,}3465(\ln 1{,}7325 - \ln 0{,}3535))^2} \leqq 204{,}9412;$$

$$\left|\frac{\partial E}{\partial b}\right| \leqq \frac{102}{0{,}3465 \cdot 1{,}7325\,(\ln 1{,}7325 - \ln 0{,}3535)^2} \leqq 68{,}6320.\ ^{1})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\Delta E| \approx |\mathrm{d}E| &\leqq \left|\frac{\partial E}{\partial U}\right| \cdot |\mathrm{d}U| + \left|\frac{\partial E}{\partial a}\right| \cdot |\mathrm{d}a| + \left|\frac{\partial E}{\partial b}\right| \cdot |\mathrm{d}b| \\ &\leqq 1{,}8158 \cdot 2 + 204{,}9412 \cdot 0{,}0035 + 68{,}6320 \cdot 0{,}0175 \\ &\leqq 5{,}5499. \end{aligned}$$

[1]) Man hat darauf zu achten, daß der Zähler den größtmöglichen und der Nenner den kleinstmöglichen Wert annimmt.

Für $E$ selber erhält man mit den angegebenen Werten: $E = 177{,}52$. Für den relativen Fehler erhält man somit die Abschätzung

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| \leqq 0{,}03 = 3\%.$$

In Band 2 wurde folgendes gefunden: Es seien $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ Näherungen für $n$ Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Betrachten wir nun $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{x}_n$ als Näherung für die Summe $z = x_1 + \cdots + x_n$ der $n$ Zahlen, so gilt, daß der absolute Fehler der Summe von $n$ Zahlen höchstens gleich der Summe der absoluten Fehler der einzelnen Summanden ist. Dieses Ergebnis würden wir an dieser Stelle sofort erhalten durch die Betrachtung der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ mit dem vollständigen Differential ($f_{|1} = \cdots = f_{|n} = 1$):

$$\mathrm{d}f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{d}x_1 + \cdots + \mathrm{d}x_n.$$

Also folgt

$$|\mathrm{d}f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq |\mathrm{d}x_1| + \cdots + |\mathrm{d}x_n|.$$

Es soll jetzt eine Zahl $z$ berechnet werden als Produkt zweier Zahlen $x$ und $y$: $z = x \cdot y$. Wir betrachten dann die Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ mit dem vollständigen Differential $\mathrm{d}f(x, y) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Sind $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ Näherungen für $x$ bzw. $y$, so gilt also

$$|\Delta z| = |z - \tilde{z}| \approx |\mathrm{d}z(\tilde{x}, \tilde{y})| = |\tilde{y}\,\mathrm{d}x + \tilde{x}\,\mathrm{d}y|$$

und damit weiter mit $\tilde{z} = \tilde{x} \cdot \tilde{y}$:

$$\left|\frac{\Delta z}{\tilde{z}}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}z}{\tilde{z}}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\tilde{x}} + \frac{\mathrm{d}y}{\tilde{y}}\right| \leqq \left|\frac{\mathrm{d}x}{\tilde{x}}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{\tilde{y}}\right|. \tag{3.99}$$

Die Abschätzung (3.99) besagt: Der relative Fehler eines Produktes ist höchstens gleich der Summe der relativen Fehler der einzelnen Faktoren.

Zum Abschluß betrachten wir noch den Fall, daß eine Zahl $z$ als Quotient zweier Zahlen $x$ und $y$ berechnet werden soll:

$$z = \frac{x}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Wir betrachten an dieser Stelle $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ mit dem vollständigen Differential

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\mathrm{d}x}{y} - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y.$$

Sind wieder $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ Näherungen für $x$ bzw. $y$, so gilt

$$|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z(\tilde{x}, \tilde{y})| = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\tilde{y}} - \frac{\tilde{x}\mathrm{d}y}{\tilde{y}^2}\right| \text{ und damit weiter mit } \tilde{z} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}:$$

$$\left|\frac{\Delta z}{\tilde{z}}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}z}{\tilde{z}}\right| = \left|\left(\frac{\mathrm{d}x}{\tilde{y}} - \frac{\tilde{x}\,\mathrm{d}y}{\tilde{y}^2}\right)\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)\right| \leqq \left|\frac{\mathrm{d}x}{\tilde{x}}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{\tilde{y}}\right|. \tag{3.100}$$

Die Abschätzung (3.100) besagt: Der relative Fehler eines Quotienten ist höchstens gleich der Summe der relativen Fehler von Zähler und Nenner.

*Beispiel 3.13:* Nach dem Stokesschen Reibungsgesetz erfährt eine Kugel vom Radius $r$ beim Fallen in einer zähen Flüssigkeit von der Zähigkeit $\eta$ einen Reibungswiderstand vom Betrag $F = 6\pi\eta r v$. $v$ sei der Betrag der Fallgeschwindigkeit. Wie groß ist maximal der relative Fehler von $F$, wenn der relative Fehler von $\eta$ bzw. $r$ bzw. $v$ gerade 0,5% bzw. 4,3% bzw. 2,7% beträgt?

Wir können (3.99) anwenden, da die Größen $\eta$, $r$ und $v$ miteinander multipliziert werden. Für den relativen Fehler von $F$ gilt also

$$\left|\frac{\Delta F}{\tilde{F}}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}F}{\tilde{F}}\right| \leqq 0{,}5\% + 4{,}3\% + 2{,}7\% = 7{,}5\%.$$

*Aufgabe 3.4:* Die Funktion $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$ werde für alle Punkte $(x, y)$ der oberen Halbebene betrachtet, d.h., für alle Punkte $(x, y)$ mit $y > 0$. Man bilde das Differential zweiter Ordnung: $\mathrm{d}^2 f(x, y)$.

*Aufgabe 3.5:* Für die Koordinaten des Punktes $P(x, y, z)$ wurden die Werte $\tilde{x} = 2{,}51$; $\tilde{y} = -1{,}72$; $\tilde{z} = 3{,}43$ gemessen. Gesucht ist der Abstand $r$ des Punktes $P$ vom Koordinatenursprung: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wie groß ist der Näherungswert $\tilde{r}$ für $r$ und mit welchem absoluten und relativen Fehler muß man rechnen, wenn die Koordinaten $x$ und $y$ mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}02$ und die Koordinate $z$ mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}03$ bestimmt wurden?

## 3.6. Differentiation zusammengesetzter Funktionen Die verallgemeinerte Kettenregel

### 3.6.1. Zusammengesetzte Funktionen mehrerer Veränderlicher

Wir betrachten zunächst folgenden Sachverhalt: Es sei $M$ eine Teilmenge des $R^2$, und auf $M$ sei eine reelle Funktion $f$ erklärt; d.h., durch die Abbildung $f$ wird jedem Punkt $(x, y)$ aus $M$ eine Zahl $f(x, y)$ zugeordnet. Weiter sei $[a, b]$ ein Intervall auf der reellen Achse, und auf $[a, b]$ seien zwei reelle Funktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ erklärt. Jedem $t$ aus $[a, b]$ sind also zwei Zahlen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ zugeordnet. Wir betrachten nun im $R^2$ alle Punkte $(x, y)$ mit $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ und nehmen an, daß alle Punkte $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ zum Definitionsbereich $M$ von $f$ gehören. Als **zusammengesetzte Funktion** bezeichnet man dann diejenige Abbildung, die jedem $t$ aus $[a, b]$ die Zahl $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ zuordnet. Schreibweise: $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ für $t$ aus $[a, b]$. In diesem Spezialfall bildet die Gesamtheit aller Punkte $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ im allgemeinen eine in $M$ verlaufende Kurve Die Bildung der zusammengesetzten Funktion bedeutet dann eine Einschränkung von $f$ auf die Punkte dieser Kurve. Die folgenden Bilder 3.5 und 3.6 veranschaulichen diesen Sachverhalt.

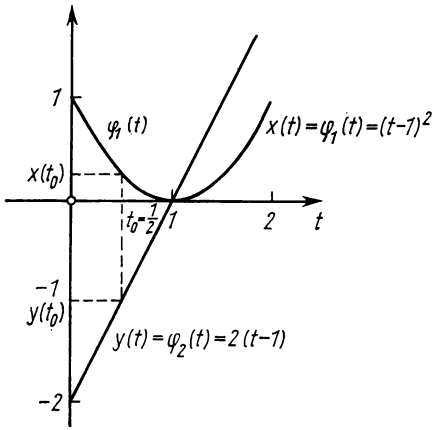



Bild 3.5

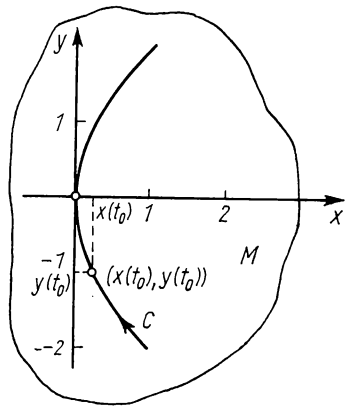



Bild 3.6

*Beispiel 3.14:* Auf $[a, b] = [0, 2\pi]$ werden die Funktionen $\varphi_1(t) = 2\cos t$ und $\varphi_2(t) = 2\sin t$ betrachtet. In der $x, y$-Ebene sei $M$ die Fläche des Kreises mit dem Radius $R = 20$ um den Nullpunkt und $f(x, y) = e^x \sin y$ auf $M$ erklärt. Die Punkte $(x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (2\cos t, 2\sin t)$ gehören dann zu $M$ für alle $t$ aus $[0, 2\pi]$ und bilden in $M$ den Kreis mit dem Radius 2 um den Nullpunkt. Für alle $t$ aus $[0, 2\pi]$ erhält man die zusammengesetzte Abbildung

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = e^{2\cos t} \cdot \sin(2\sin t).$$

Speziell für $t = \frac{\pi}{2}$ folgt $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{2\cos\frac{\pi}{2}} \sin\left(2\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^0 \cdot \sin 2 = \sin 2.$

Folgende Verallgemeinerung ist möglich: Es sei $M$ eine Teilmenge des $R^n$, und auf $M$ sei eine reelle Funktion $f$ erklärt. Anstelle des Intervalls $[a, b]$ der Vorbetrachtung sei jetzt $\tilde{M}$ eine Teilmenge des $R^k$. Auf $\tilde{M}$ seien dann $n$ reelle Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ erklärt, d.h., jedem $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ aus $\tilde{M}$ sind $n$ Zahlen $\varphi_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_k)$ zugeordnet. Wenn nun alle Punkte mit den Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_k))$ zum Definitionsbereich $M$ von $f$ gehören, kann die zusammengesetzte Funktion

$$F(u_1, \cdots, u_k) = f(\varphi_1(u_1, \cdots, u_k), \cdots, \varphi_n(u_1, \cdots, u_k))$$

gebildet werden. (In der Vorbetrachtung war $n = 2$ und $k = 1$.)

*Beispiel 3.15* (Potential zweier Punktladungen): An den Punkten $P_1(1, 0, 0)$ und $P_2(0, 1, 0)$ befinden sich Punktladungen $Q_1$ bzw. $Q_2$. Gesucht ist das Potential $\varphi$ der beiden Punktladungen im beliebigen Raumpunkt $P(x, y, z)$ als Funktion von $(x, y, z)$.

Nach den Grundgesetzen der Elektrostatik erhalten wir für das Potential $\varphi = \varphi(P)$ der vorgegebenen Ladungsverteilung den Ausdruck $\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$, wobei $r_1$ bzw. $r_2$ den Abstand des Punktes $P$ von $P_1$ bzw. $P_2$ bezeichnet ($\varepsilon_0$ ist die Influenzkonstante oder „elektrische Feldkonstante"). In dieser Schreibweise erscheint das Potential $\varphi$ als Funktion der Variablen $r_1$ und $r_2$ ($Q_1$ und $Q_2$ seien fest). Es interessiert aber die Abhängigkeit $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Dazu stellen wir $r_1$ und $r_2$ mittels des Satzes von

Pythagoras durch die Koordinaten $(x, y, z)$ des Punktes $P$ dar. Es gilt

$$r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}, \tag{3.101}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}. \tag{3.102}$$

Also ist die gesuchte Funktion gegeben durch den Ausdruck

$$\varphi = \varphi(P) = \varphi(x, y, z)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}}\right) \tag{3.103}$$

($(x, y, z) \neq (1, 0, 0)$; $(x, y, z) \neq (0, 1, 0)$). Sie entsteht durch Zusammensetzung; die Ausdrücke (3.101) und (3.102) werden in den Ausdruck für $\varphi$ eingesetzt. Der Ausdruck (3.103) kann also als eine zusammengesetzte Funktion aufgefaßt werden.

### 3.6.2. Die verallgemeinerte Kettenregel

Natürlich interessieren (z.B. zur Berechnung der Feldstärke $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$ im vorhergehenden Beispiel 3.15) die partiellen Ableitungen der zusammengesetzten Funktionen nach den neuen unabhängigen Variablen. Die Rechenvorschrift, die diese Aufgabe löst, nennt man die **verallgemeinerte Kettenregel.**

Zur Beschreibung dieser Rechenregel betrachten wir zunächst den Fall, daß in einem Gebiet $G$ des Raumes $R^3$ eine reelle Ortsfunktion $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ gegeben ist und daß der Ortsvektor $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ selbst eine Funktion einer weiteren Variablen $t$ ist; d.h., daß $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ gilt. Aus $U$ wird durch Einsetzen von $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ eine zusammengesetzte Funktion von $t$. (Man betrachtet z.B. die Temperaturverteilung $U(\mathbf{r})$ in einem Gefäß $G$ auf einer speziellen Raumkurve $\mathbf{r}(t)$.)

**Satz 3.9:** *Es sei die Funktion $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ stetig differenzierbar in einem Gebiet $G \subset R^3$, und die Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ seien stetig differenzierbar im Intervall $a < t < b$. Für $t \in (a, b)$ liege $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ in $G$. Dann ist die Funktion $U(\mathbf{r}(t)) = U(x(t), y(t), z(t))$ auf $(a, b)$ stetig differenzierbar* nach $t$, *und es gilt die Gleichung* **(verallgemeinerte Kettenregel)**

$$\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} = U_x\dot{x} + U_y\dot{y} + U_z\dot{z}, \tag{3.104}$$

*wobei $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ist und die partiellen Ableitungen $U_x$, $U_y$, $U_z$ an der Stelle $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ zu nehmen sind.*

Gleichberechtigt verwenden wir die folgenden Schreibweisen:

$$\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

und

$$\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}U(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} = (\operatorname{grad} U)\cdot\mathbf{r}.$$

Wir gehen jetzt zum allgemeinen Fall über, daß die zusammengesetzte Funktion eine Funktion mehrerer Veränderlicher ist.

**Satz 3.10:** *Es sei $f(x, y, z)$ eine in einem Gebiet $G < R^3$ definierte stetig differenzierbare Funktion, und die Funktionen $x = g_1(u, v)$; $y = g_2(u, v)$; $z = g_3(u, v)$ seien stetig differenzierbar in einem Gebiet $B < R^2$. Für $(u, v) \in B$ liege $(g_1(u, v); g_2(u, v); g_3(u, v))$ in $G$. Dann kann die zusammengesetzte Funktion $F(u, v) = f(g_1(u, v); g_2(u, v); g_3(u, v))$ gebildet werden. Die Funktion $F(u, v)$ ist stetig differenzierbar in $B$, und es gelten die Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= f_{|x}\cdot g_{1|u} + f_{|y}\cdot g_{2|u} + f_{|z}\cdot g_{3|u}\left(= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right),\\
\frac{\partial F}{\partial v} &= f_{|x}\cdot g_{1|v} + f_{|y}\cdot g_{2|v} + f_{|z}\cdot g_{3|v}\left(= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{3.105}$$

*wobei die partiellen Ableitungen $f_{|x}, f_{|y}, f_{|z}$ an der Stelle $(x, y, z) = (g_1(u, v); g_2(u, v); g_3(u, v))$ zu nehmen sind.*

*Bemerkung 3.9:* Zur Gültigkeit der verallgemeinerten Kettenregel (in irgendeiner ihrer bisher oder im folgenden angegebenen Formen) reicht die Voraussetzung der totalen Differenzierbarkeit der zur Bildung der zusammengesetzten Funktion benutzten Funktionen aus. Einen diesbezüglichen Beweis findet man in [4]. Er beruht auf der Benutzung der Zerlegungsformel (s. 3.2.).

*Beweis der Kettenregel*

Wir beweisen die verallgemeinerte Kettenregel für den Fall, daß eine zusammengesetzte Funktion von einer Veränderlichen dadurch gebildet wird, daß in eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen zwei Funktionen von nur einer Veränderlichen eingesetzt werden. Genauer sei vorausgesetzt: Die Funktion $f(x, y)$ sei im Gebiet $G \subseteq R^2$ definiert und dort total differenzierbar, ferner seien die Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ im Intervall $(a, b)$ $(a < b)$ erklärt und differenzierbar. Für $t \in (a, b)$ gelte, daß der Punkt (Vektor) $\varphi_1(t)\,\mathbf{e}_1 + \varphi_2(t)\,\mathbf{e}_2$ in $G$ liegt, so daß die zusammengesetzte Funktion

$$U(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad (a < t < b)$$

definiert ist. Anstelle der totalen Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ kann man auch fordern, daß $f(x, y)$ in $G$ überall stetig partiell nach beiden unabhängigen Variablen differenzierbar ist, da aus dieser Voraussetzung die totale Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ folgt. Wir halten ein $t_0 \in (a, b)$ fest und betrachten den zugehörigen Differenzen-

quotienten für die Funktion $U(t)$. Es sei $h \neq 0$, und damit wird

$$\frac{U(t_0+h)-U(t_0)}{h} = \frac{f(\varphi_1(t_0+h), \varphi_2(t_0+h)) - f(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))}{h}$$

$$= \frac{f(\varphi_1(t_0+h)-\varphi_1(t_0)+\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0+h)-\varphi_2(t_0)+\varphi_2(t_0)) - f(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))}{h}$$

$$= \frac{f(\varphi_1(t_0)+\Delta x_0, \varphi_2(t_0)+\Delta y_0) - f(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))}{h},$$

wobei zur Abkürzung $\Delta x_0 = \varphi_1(t_0+h) - \varphi_1(t_0)$, $\Delta y_0 = \varphi_2(t_0+h) - \varphi_2(t_0)$ gesetzt wurde.

Nach der Zerlegungsformel (s. 3.3.1.), angewandt auf den Zähler des obigen Bruches, ergibt sich mit $\varrho = \sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2}$

$$\frac{U(t_0+h)-U(t_0)}{h} = \frac{1}{h}(f_{|1}(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))\,\Delta x_0 + f_{|2}(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))\,\Delta y_0 + \eta\varrho),$$

wobei $\eta = \eta(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \Delta x_0, \Delta y_0)$ mit $\varrho \to 0$ ebenfalls gegen null geht.

Es bestehen die folgenden Gleichungen (ausführliche Schreibweise der obigen Abkürzungen)

$$\frac{\Delta x_0}{h} = \frac{\varphi_1(t_0+h)-\varphi_1(t_0)}{h}, \qquad \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\varphi_2(t_0+h)-\varphi_2(t_0)}{h},$$

$$\frac{\varrho}{h} = \frac{\sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2}}{h} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_0}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_0}{h}\right)^2}.$$

Auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ ergeben sich aus diesen Gleichungen die folgenden Limesbeziehungen für den Grenzübergang $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta x_0}{h} = \varphi_1'(t_0), \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y_0}{h} = \varphi_2'(t_0),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varrho}{h} = \sqrt{(\varphi_1'(t_0))^2 + (\varphi_2'(t_0))^2} = A.$$

Aus der letzteren Limesbeziehung folgt die weitere

$$\lim_{h\to 0}\varrho = 0$$

$\left(\text{denn } \varrho = h\cdot\left(\frac{\varrho}{h}\right), \text{ also } \lim_{h\to 0}\varrho = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\varrho}{h} = 0\cdot A = 0\right)$. Daraus ergibt sich weiter

$$\lim_{h\to 0}\eta\cdot\left(\frac{\varrho}{h}\right) = 0$$

denn $\lim_{h\to 0}\eta\left(\frac{\varrho}{h}\right)=\left(\lim_{h\to 0}\eta\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\varrho}{h}\right)=0\cdot A=0$, da $\lim_{h\to 0}\varrho=0$ und somit $\lim_{h\to 0}\eta=0$ ist).

Auf der rechten Seite der zuletzt hingeschriebenen Gleichung für den Differenzenquotienten von $U(t)$ läßt sich in jedem der drei Summanden der Grenzübergang $h\to 0$ durchführen. Also existiert auch der Grenzwert der linken Seite, und dieser ist dann nach Definition gleich dem Differentialquotienten $U'(t_0)$. Wir erhalten somit die gewünschte Beziehung

$$U'(t_0)=f_{|1}\varphi_1'+f_{|2}\varphi_2',$$

wobei rechts die Variablenwerte $x=\varphi_1(t_0)$, $y=\varphi_2(t_0)$, $t=t_0$ einzusetzen sind.

Im allgemeinen Fall haben wir $s$ Funktionen von je $n$ Veränderlichen $f_1(x_1,\ldots,x_n)$; $f_2(x_1,\ldots,x_n)$; $\ldots$; $f_s(x_1,\ldots,x_n)$, in die $n$ Funktionen von je $k$ Veränderlichen $x_1=g_1(u_1,\ldots,u_k)$; $x_2=g_2(u_1,\ldots,u_k)$; $\ldots$; $x_n=g_n(u_1,\ldots,u_k)$ eingesetzt werden und damit $s$ zusammengesetzte Funktionen

$$\begin{aligned}
&F_1(u_1,\ldots,u_k)=f_1(g_1(u_1,\ldots,u_k);\ \ldots;\ g_n(u_1,\ldots,u_k)),\\
&F_2(u_1,\ldots,u_k)=f_2(g_1(u_1,\ldots,u_k);\ \ldots;\ g_n(u_1,\ldots,u_k)),\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_s(u_1,\ldots,u_k)=f_s(g_1(u_1,\ldots,u_k);\ \ldots;\ g_n(u_1,\ldots,u_k))
\end{aligned}$$

gebildet werden. Die verallgemeinerte Kettenregel lautet für diesen allgemeinen Fall

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j}=\sum_{r=1}^{k}f_{i|r}g_{r|j}\left(=\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial f_i}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial x_r}{\partial u_j}\right),\tag{3.106}$$

wobei die rechts auftretenden partiellen Ableitungen $f_{i|r}$ an der Stelle $x_1=g_1(u_1,\ldots,u_k)$; $x_2=g_2(u_1,\ldots,u_k)$; $\ldots$; $x_n=g_n(u_1,\ldots,u_k)$ zu nehmen sind.

Die verallgemeinerte Kettenregel gewinnt die einfache und anschauliche Bedeutung der gewöhnlichen Kettenregel für reelle Funktionen einer reellen Variablen zurück, wenn wir sie vektoriell schreiben. Hierbei fassen wir die Variablen $x_1,\ldots,x_n$ zu einem Spaltenvektor $\mathbf{x}$; die Funktionen $f_1(x_1,\ldots,x_n)$; $\ldots$; $f_s(x_1,\ldots,x_n)$ zu einem Spaltenvektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$; entsprechend die Variablen $u_1,\ldots,u_k$ zu einem Spaltenvektor $\mathbf{u}$ und die Funktionen $g_1(u_1,\ldots,u_k)$; $\ldots$; $g_n(u_1,\ldots,u_k)$ zu einem Spaltenvektor $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ und schließlich die zusammengesetzten Funktionen $F_1(u_1,\ldots,u_k),\ldots,F_s(u_1,\ldots,u_k)$ zu einem Spaltenvektor $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ zusammen. Bezeichnet $(\mathbf{DF})(\mathbf{u})$ die Matrix $\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)$ und sind $(\mathbf{Df})(\mathbf{x})$ bzw. $(\mathbf{Dg})(\mathbf{u})$ die entsprechenden Matrizen für $\mathbf{f}$ bzw. $\mathbf{g}$, so läßt sich die in der obigen Formel (3.106) ausgedrückte Regel in der Form

$$(\mathbf{DF})(\mathbf{u})=(\mathbf{Df})(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\cdot(\mathbf{Dg})(\mathbf{u})\tag{3.106'}$$

schreiben (man beachte hierzu die Regeln der Matrizenmultiplikation). Berücksichtigt man die Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{u})=\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))$, so erhält man die Beziehung

$$(\mathbf{Df}(\mathbf{g}))(\mathbf{u})=(\mathbf{Df})(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\cdot(\mathbf{Dg})(\mathbf{u}).\tag{3.106''}$$

*Beispiel 3.16:* Für das Potential zweier Punktladungen (s. Beispiel 3.14) $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1}+\frac{Q_2}{r_2}\right)$ mit $r_1=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ und $r_2=\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$ berechne

man die Feldstärke $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$ im Punkte $P_0(0,0,0)$. Zur Lösung bilden wir grad $\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_3 = \varphi_x\,\mathbf{e}_1 + \varphi_y\,\mathbf{e}_2 + \varphi_z\,\mathbf{e}_3$ und dazu nach der verallgemeinerten Kettenregel

$$\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial x},$$
$$\varphi_y = \frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial y},$$
$$\varphi_z = \frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial z}.$$

Da alle Größen $\varphi_x, \ldots, \varphi_z$ nur an der Stelle $P_0(0,0,0)$ benötigt werden, berechnen wir die erforderlichen Hilfsgrößen $\frac{\partial\varphi}{\partial r_1}, \frac{\partial r_1}{\partial x}$ für diese Stelle. Es gilt dann $x = y = z = 0$ und $r_1 = r_2 = 1$, und daher ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_1} = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_1^2} = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r_2} = \frac{-Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_2^2} = \frac{-Q_2}{4\pi\varepsilon_0};$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x-1}{r_1} = -1; \qquad \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x}{r_2} = 0;$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{r_1} = 0; \qquad \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y-1}{r_2} = -1;$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial z} = \frac{z}{r_1} = 0; \qquad \frac{\partial r_2}{\partial z} = \frac{z}{r_2} = 0.$$

Daraus folgt $\varphi_x(0,0,0) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$; $\varphi_y(0,0,0) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}$; $\varphi_z(0,0,0) = 0$. Die gesuchte Feldstärke ist daher gleich $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q_1\,\mathbf{e}_1 + Q_2\,\mathbf{e}_2)$. Wie läßt sich dieses Ergebnis physikalisch deuten?

Die Notwendigkeit für die Benutzung der verallgemeinerten Kettenregel wird dann besonders deutlich, wenn die Ableitungen einer zunächst nicht näher bestimmten Funktion auf neue unabhängige Variablen umgerechnet werden sollen. Ist z.B. $f(x, y)$ eine bekannte (nicht näher festgelegte) hinreichend oft differenzierbare Funktion der unabhängigen Variablen $x$ und $y$ und werden anstelle dieser unabhängigen Variablen durch die Beziehungen $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ neue unabhängige Variablen $r$ und $\varphi$ eingeführt (sog. Polarkoordinaten, s. auch 2.6.2.), so erhalten wir eine zusammengesetzte Funktion $F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$, für die in entsprechenden Punkten $(x, y)$ und $(r, \varphi)$ die Gleichung $F(r, \varphi) = f(x, y)$ gilt.

Es werde z.B. die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ gesucht. Nach der verallgemeinerten Kettenregel gilt

$$\frac{\partial F}{\partial r} = f_{|1}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + f_{|2}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial F}{\partial r} = f_{|1}\cos\varphi + f_{|2}\sin\varphi$$

und weiter wird, wieder nach der verallgemeinerten Kettenregel,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \left(f_{|11} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + f_{|12} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) \cos\varphi + \left(f_{|21} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + f_{|22} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) \sin\varphi$$

$$= f_{|11} \cos^2\varphi + f_{|12} \sin\varphi \cos\varphi + f_{|21} \cos\varphi \sin\varphi + f_{|22} \sin^2\varphi$$

$$= f_{|11} \cos^2\varphi + 2f_{|12} \sin\varphi \cos\varphi + f_{|22} \sin^2\varphi \quad \text{oder schließlich}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = f_{|11} \cos^2\varphi + f_{|12} \sin 2\varphi + f_{|22} \sin^2\varphi.$$

Wesentlich ist nun, daß auf der rechten Seite der letzteren Gleichung die partiellen Ableitungen einer ganz beliebigen (zweimal differenzierbaren) Funktion $f(x, y)$ auftreten. Die verallgemeinerte Kettenregel verhilft uns hier zu einem allgemeingültigen Ausdruck, der die Rechnung für Spezialfälle vereinfacht und abkürzt.

Ist z.B. $f(x, y) = x^2 + y^2 + y^3$, so gilt $f_{|11} = 2$, $f_{|12} = 0$, $f_{|22} = 2 + 6y$ und somit wegen $y = r \sin\varphi$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 2\cos^2\varphi + (2 + 6r \sin\varphi) \sin^2\varphi.$$

Man beachte, daß für die Variablen $x$ und $y$ überall die durch $r$ und $\varphi$ gegebenen Ausdrücke eingesetzt werden müssen.

Wir betrachten noch ein zweites Beispiel. Es seien $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ zwei verschiedene Punkte des $R^3$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Mit $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, dem Ortsvektor eines (variablen) Punktes im $R^3$, bilden wir die Abstände

$$r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \quad \text{und} \quad r_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|.$$

Es sei $f(u, v)$ eine für $(u, v) \in R^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wenn wir für $u$ den Wert $r_1$, für $v$ den Wert $r_2$ in $f(u, v)$ einsetzen, erhalten wir eine zusammengesetzte Funktion $h(x, y, z) = f(r_1, r_2)$. Wir stellen uns die Aufgabe, den Ausdruck $\Delta h = h_{|11} + h_{|22} + h_{|33}$ zu berechnen. Nach der Kettenregel erhalten wir:

$$h_{|1} = f_{|1} r_{1|1} + f_{|2} r_{2|1} \quad \text{und} \quad h_{|11} = f_{|11} \cdot r_1^2{}_{|1} + f_{|12}\, r_{1|1}\, r_{2|1} + f_{|21}\, r_{1|1} r_{2|1}$$

$$+ f_{|22} r_2^2{}_{|1} + f_{|1} r_{1|11} + f_{|2} r_{2|11}.$$

Ferner gilt, wegen $r_1 = ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$r_{1|1} = \frac{x - x_1}{r_1}; \quad r_{1|11} = \frac{1}{r_1^3}(r_1^2 - (x - x_1)^2);$$

$$r_{1|2} = \frac{y - y_1}{r_1}; \quad r_{1|3} = \frac{z - z_1}{r_1};$$

entsprechende Ausdrücke erhalten wir für $h_{|22}$ und $h_{|33}$ sowie $r_{1|22}, r_{1|33}, r_{2|1}, r_{2|2}, r_{2|3}, r_{2|11}, r_{2|22}, r_{2|33}$.

Die Zusammenfassung von $h_{|11}$, $h_{|22}$ und $h_{|33}$ im Ausdruck $\Delta h$ ergibt (wegen $f_{|12} = f_{|21}$)

$$\begin{aligned}\Delta h &= f_{|11}[r_1{}^2{}_{|1} + r_1{}^2{}_{|2} + r_1{}^2{}_{|3}] + 2f_{|12}[r_{1|1}r_{2|1} + r_{1|2}r_{2|2} + r_{1|3}r_{2|3}] + f_{|22}[r_2{}^2{}_{|1} \\ &\quad + r_2{}^2{}_{|2} + r_2{}^2{}_{|3}] + f_{|1}[r_{1|11} + r_{1|22} + r_{1|33}] + f_{|2}[r_{2|11} + r_{2|22} + r_{2|33}] \\ &= f_{|11} + \frac{2f_{|12}}{r_1 r_2}[(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2)] \\ &\quad + f_{|22} + \frac{2}{r_1} f_{|1} + \frac{2}{r_2} f_{|2}.\end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß das Ergebnis auch in der Form

$$\Delta h = f_{|11} + f_{|22} + f_{|12}\left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} - \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{r_1 r_2}\right) + \frac{2}{r_1} f_{|1} + \frac{2}{r_2} f_{|2}$$

geschrieben werden kann.

*Aufgabe 3.6:* Mittels der verallgemeinerten Kettenregel berechne man die erste Ableitung $z = \frac{dz}{dt}$ der Funktionen

a) $z = e^{x-2y}$ mit $x = \sin t$; $y = t^3$;

b) $z = \frac{x^n}{y^m}$ mit $x = x(t)$; $y = y(t)$ ($m, n$ reell und positiv; $x > 0, y > 0$);

c) $z = y^{\frac{1}{x}}$ mit $x = t$; $y = t$ $(t > 0)$.

## 3.7. Implizite Funktionen. Implizite Differentiation

### 3.7.1. Implizit definierte Funktionen einer Variablen

Bei der Berechnung von Planetenbahnen stößt man auf die „Keplersche Gleichung"

$$x + y - e \sin y = 0,$$

die den Zusammenhang zwischen der exzentrischen Anomalie $y$ und der mittleren Anomalie $x$ bei gegebener Planetenbahn ($e$: Exzentrizität der Bahnellpise) festlegt. Es interessiert hierbei die explizite Abhängigkeit der Variablen $y$ von der Variablen $x$,

$$y = f(x).$$

Offensichtlich kann man diesen Zusammenhang nicht ohne weiteres durch Auflösen finden. Andererseits erkennt man sofort, daß das Wertepaar $x = 0$, $y = 0$ die obige Gleichung erfüllt und somit die Gleichung

$$0 = f(0)$$

gelten muß (falls überhaupt eine Auflösung in der gewünschten Form existiert). Zur näheren Bestimmung des Verhaltens von $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ wäre es günstig, den Wert $f'(x)|_{x=0}$ zu kennen. Da $f(x)$ nicht bekannt ist, fehlt zunächst jede Möglichkeit, diesen Wert der ersten Ableitung zu berechnen. Wir werden im folgenden ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Ableitungen von $f(x)$ kennenlernen, das die explizite Funktion $f(x)$ nicht benötigt. Zuvor fragen wir nach Bedingungen, wann es überhaupt zu erwarten ist, daß ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den reellen Variablen $x$ und $y$

$$F(x, y) = 0$$

auch in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden kann. Falls dies möglich ist, muß also $F(x, f(x)) = 0$ gelten. Wir sagen dann, die Funktion $f$ ist **implizit** durch die Beziehung $F(x, y) = 0$ gegeben oder $F(x, y) = 0$ kann eindeutig nach $y$ aufgelöst werden. Zunächst einige Beispiele zur Erläuterung:

*Beispiel 3.17:* Die Funktion $F(x, y) = y^3 - x^2$ ist in der gesamten $x, y$-Ebene erklärt. $F(x, y) = 0$ bedeutet dann $y^3 - x^2 = 0$, und hieraus folgt $y = \sqrt[3]{x^2}$. Zu jeder Zahl $x$ gehört also genau eine Zahl $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, so daß $F(x, f(x)) = 0$ gilt. Bei gegebenem $x$ kann also $F(x, y) = 0$ auch als Bestimmungsgleichung für $y$ aufgefaßt werden. Die Niveaulinie $F(x, y) = 0$ ist die im Bild 3.7 skizzierte Kurve.

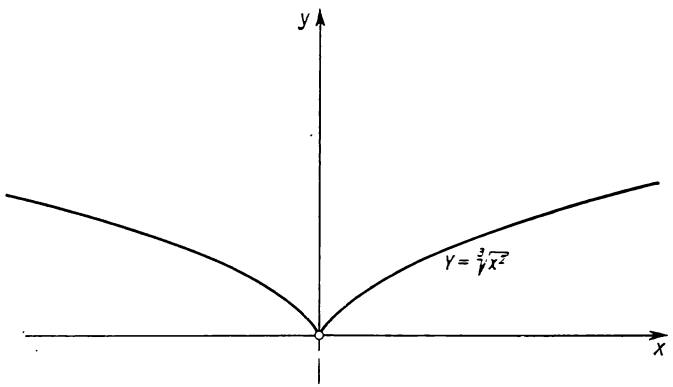



Bild 3.7

*Beispiel 3.18:* Die Funktion $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ist in der gesamten $x, y$-Ebene erklärt. $F(x, y) = 0$ gilt für keinen Punkt $(x, y)$ – denn für alle $(x, y)$ gilt $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Die genannte Fragestellung entfällt also für dieses Beispiel.

*Beispiel 3.19:* Die Funktion $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9)$ ist in der gesamten $x, y$-Ebene erklärt. $F(x, y) = 0$ bedeutet $x^2 + y^2 - 1 = 0$ oder $x^2 + y^2 - 9 = 0$, d.h., $F(x, y) = 0$ gilt für alle Punkte auf dem Einheitskreis und alle Punkte auf dem Kreis mit dem Radius 3 um den Nullpunkt. Man erkennt folgendes (s. Bild 3.8): Es sei $x_1$ gewählt mit $-1 < x_1 < 1$. Dann gibt es zu $x_1$ vier Zahlen $y_1, y_2, y_3, y_4$, so daß $F(x_1, y_1) = F(x_1, y_2) = F(x_1, y_3) = F(x_1, y_4) = 0$ gilt (zu $x_1 = \frac{1}{2}$ gehören die vier

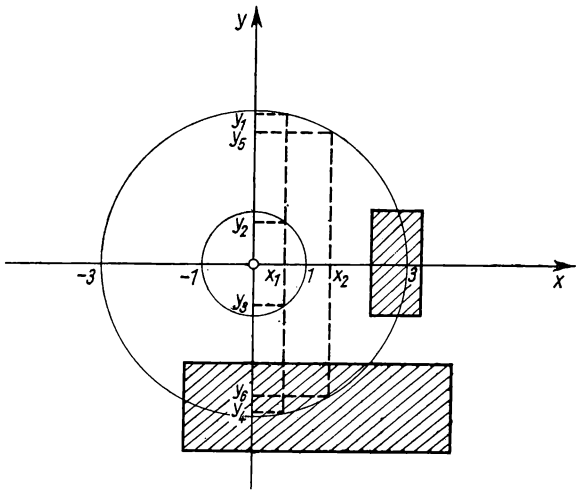



Bild 3.8

Zahlen $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{35}$, $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{35}$). Zu einem $x_2$ mit $1 < |x_2| < 3$ gehören zwei Zahlen $y_5, y_6$, so daß $F(x_2, y_5) = F(x_2, y_6) = 0$ gilt.

Es gibt also bestimmt keine Funktion $f$, so daß die *gesamte* Niveaulinie $F(x, y) = 0$ (die in die beiden Kreise $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 9$ zerfällt) in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden kann. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ ist also nicht eindeutig nach $y$ auflösbar, d.h., $F(x, y) = 0$ ist bei gegebenem $x$ keine eindeutige Bestimmungsgleichung für $y$. Jedoch ist folgendes möglich: Wir greifen einen der genannten Punkte heraus, etwa den Punkt $P(x_1, y_4)$. Man kann dann eine Rechtecksumgebung $U$ um $P$ legen, so daß das in dieser Umgebung $U$ von $P$ verlaufende Teilstück der gesamten Niveaulinie $F(x, y) = 0$ in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden kann. Der Punkt $P(x_1, y_4)$ liegt auf der unteren Hälfte des Kreises $x^2 + y^2 = 9$; für das genannte Teilstück würde also die eindeutige Auflösung nach $y$ lauten: $y = f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$. Man sagt für diesen Sachverhalt auch: $F(x, y) = 0$ konnte **lokal eindeutig** nach $y$ aufgelöst werden. Im Beispiel 3.17 könnte man dann sagen: $F(x, y) = 0$ ist **global** nach $y$ auflösbar. In der Nähe des Punktes $Q(3; 0)$ ist allerdings auch eine lokale Auflösung nach $y$ der eben genannten Art nicht möglich. Betrachten wir nämlich eine beliebige Rechtecksumgebung $\tilde{U}$ von $Q(3; 0)$, so enthält sie sowohl Punkte vom oberen als auch vom unteren Halbkreis. Zu einem $x$ in der Nähe von $x = 3$ gibt es dann zwei $y$-Werte so, daß $(x, y)$ in $\tilde{U}$ liegt und $F(x, y) = 0$ gilt. (Im Punkt $Q(3; 0)$ besitzt die Niveaulinie $F(x, y) = 0$ eine horizontale Tangente; es gilt $F_{|y}(3; 0) = 0$.)

Unsere Beispiele zeigen, daß wir im allgemeinen nicht erwarten dürfen, daß durch eine Gleichung der Form $F(x, y) = 0$ eine einzige ganz bestimmte Funktion $y = f(x)$ gegeben ist. Erst wenn wir unsere Betrachtung auf ein hinreichend kleines Gebiet der $x, y$-Ebene einschränken, können wir mit der eindeutigen Auflösbarkeit der Gleichung $F(x, y) = 0$ und damit mit der Existenz genau einer **implizit definierten Funktion** rechnen. Der folgende Satz gibt darüber genauere Auskunft.

**Satz 3.11:** *Die Funktion $F(x, y)$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung $F_{|1}(x, y)$; $F_{|2}(x, y)$ seien in einem Gebiet $G$ der $(x, y)$-Ebene stetig. Der Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gehöre*

*...r Menge aller Punkte $P(x, y)$, für die die Gleichung $F(x, y) = 0$ gilt, d.h., es gelte $F(x_0, y_0) = 0$. Außerdem gelte die Ungleichung*

$$F_{|2}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{3.107}$$

*...nn gibt es genau eine Funktion $y = f(x)$, die in einer gewissen Umgebung $U_0$ von $x_0$ ...f der Zahlengeraden) definiert ist und für die die Beziehungen*

$$f(x_0) = y_0, \tag{3.108}$$
$$F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in U_0)$$

*...lten. Die Funktion $f(x)$ ist für $x \in U_0$ stetig differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = -\frac{F_{|1}(x, f(x))}{F_{|2}(x, f(x))} \quad (x \in U_0) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right| \quad (x \in U_0;\ y = f(x)) \tag{3.109}$$

### 3.7.2. Implizite Differentiation implizit definierter Funktionen einer Variablen

Der Satz 3.11 liefert nur eine Existenzaussage und informiert uns nicht darüber, wie die Auflösung $y = f(x)$ (die implizit definierte Funktion) der Gleichung $F(x, y) = 0$ gefunden werden kann. Tatsächlich ist es in der Mehrzahl der auftretenden Fälle unmöglich, eine exakte Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ (Auflösung nach $y$ bei gegebenem $x$) in formelmäßig geschlossener Form (s. Beispiele 3.17 und 3.18) anzugeben. Die Funktion $f(x)$ kann im allgemeinen nur näherungsweise berechnet werden.

Häufig interessieren jedoch nur Werte der Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots$ der durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ gegebenen Funktion an der Stelle $x = x_0$. An der Stelle $x = x_0$ ist der Funktionswert $f(x_0)$ ja gleich $y_0$; $f(x_0) = y_0$ und $y_0$ sind bekannt. Zur Berechnung dieser Ableitungen (ihre Existenz vorausgesetzt) geht man von der Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ aus, die für alle hinreichend nahe bei $x_0$ gelegenen $x$ besteht, und wendet auf diese Gleichung die verallgemeinerte Kettenregel an. Das heißt, in die Funktion von zwei Variablen $F(x, y)$ setzen wir die Funktionen einer Variablen $g_1(x) = x$; $g_2(x) = f(x)$ anstelle der ursprünglichen Variablen ein und bilden so die zusammengesetzte Funktion $u(x) = f(g_1(x), g_2(x)) = F(x, f(x))$. Auf Grund der Definition von $f(x)$ gilt aber (s. Gleichung (3.108)) $u(x) = 0$ für alle $x$ aus einer Umgebung von $x_0$. Also sind sämtliche Ableitungen $u'(x), u''(x), \ldots$ dort ebenfalls gleich null. Die Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel liefert somit die Beziehungen:

$$0 = u'(x) = F_{|1}(x, f(x)) + F_{|2}(x, f(x)) \cdot f'(x), \tag{*}$$

$$0 = u''(x) = F_{|11}(x, f(x)) + 2F_{|12}(x, f(x)) \cdot f'(x) + F_{|22}(x, f(x))\,(f'(x))^2 + F_{|2}(x, f(x)) f''(x), \tag{**}$$

. . . . . .

Aus der ersten Gleichung (*) ermitteln wir durch Auflösen $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{F_{|1}(x, f(x))}{F_{|2}(x, f(x))} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (y = f(x)). \tag{3.110}$$

Den gefundenen Ausdruck setzen wir in die zweite Gleichung (**) ein und lösen nach $f''(x)$ auf. Dies ergibt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1}{F_{|2}(x,f(x))}\left(F_{|11}(x,f(x)) - \frac{2F_{|12}(x,f(x))\,F_{|1}(x,f(x))}{F_{|2}(x,f(x))}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{F_{|22}(x,f(x))\,(F_{|1}(x,f(x)))^2}{(F_{|2}(x,f(x)))^2}\right) \\ &= \frac{-1}{(F_{|2}(x,f(x)))^3}\,((F_{|2}(x,f(x)))^2\,F_{|11}(x,f(x)) \\ &\quad -2F_{|1}(x,f(x))\,F_{|2}(x,f(x))\,F_{|12}(x,f(x)) + (F_{|1}(x,f(x)))^2\,F_{|22}(x,f(x))) \\ &= \frac{1}{(F_y)^3}\,(-F_x^2\,F_{yy} + 2F_xF_yF_{xy} - F_y^2F_{xx}) \qquad (y=f(x)). \end{aligned} \tag{3.111}$$

Der letzte Ausdruck läßt sich auch als Determinante schreiben:

$$f''(x) = \frac{1}{(F_y)^3}\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} \qquad (y=f(x)). \tag{3.112}$$

Auf diese Weise können auch alle höheren Ableitungen von $f(x)$ ermittelt werden. An der speziellen Stelle $x = x_0$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0\,, \\ f'(x_0) &= -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\,, \\ f''(x_0) &= \frac{1}{(F_y(x_0,y_0))^3}\,(-(F_y(x_0,y_0))^2\,F_{xx}(x_0,y_0) \\ &\qquad + 2F_x(x_0,y_0)\,F_y(x_0,y_0)\,F_{xy}(x_0,y_0) - (F_x(x_0,y_0))^2\,F_{yy}(x_0,y_0))\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3.113}$$

*Beispiel 3.20:* Man überprüfe, ob in einer Umgebung von $x_0 = 0$ durch die Gleichung $F(x,y) = x\,e^y - y\,e^x + x = 0$ eine Funktion $y = f(x)$ implizit dargestellt wird und berechne gegebenenfalls die Werte $f'(0)$, $f''(0)$. Zunächst folgt aus $x = 0$ und $F(x,y) = 0$ die Gleichung $y = 0$, so daß also $(x_0, y_0) = (0,0)$ die zu untersuchende Stelle ist. Es gilt

$$F_x = e^y - y\,e^x + 1\,; \qquad F_y = x\,e^y - e^x$$

und speziell

$$F_x(0,0) = 2\,; \qquad F_y(0,0) = -1\,.$$

Wegen $F_y(0,0) \neq 0$ ist (nach Satz 3.11) eine Auflösung der Gleichung $x\,e^y - y\,e^x + x = 0$ nach $y$ für alle $x$ aus einer Umgebung von $x_0 = 0$ möglich; es gilt dort $y = f(x)$

$f(0) = 0$. Nach den obigen Formeln erhalten wir

$$f'(0) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = 2.$$

Ferner gilt $F_{xx} = -y\,e^x$; $F_{xy} = e^y - e^x$; $F_{yy} = x\,e^y$, und speziell ist $F_{xx}(0, 0) = 0$; $F_{xy}(0, 0) = 0$; $F_{yy}(0, 0) = 0$, und wir erhalten nach den obigen Formeln die Gleichung $f''(0) = 0$.

*Beispiel 3.21:* Die Stromlinien einer ebenen Potentialströmung (wirbelfreie Strömung einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit), die durch zwei feste Wände $y = 0$ und $y = x\sqrt{3}$ $(x \geqq 0)$ begrenzt wird und in dem von diesen Wänden berandeten Winkelraum verläuft, sind durch die Gleichung $U(x, y) = \text{const}$ mit $U(x, y) = 3x^2y - y^3$ gegeben ($U$ bezeichnet die sog. *Stromfunktion*). In welchen Gebieten der $(x, y)$-Ebene lassen sich diese Stromlinien in der Form $y = f(x)$ darstellen? Man untersuche speziell die Stromlinie $U(x, y) = 11$; diese enthält den Punkt $P(2;1)$. Zur Lösung dieser Aufgabe setzen wir $F(x, y) = U(x, y) - 11 = 3x^2y - y^3 - 11$. Es gilt $F_x = 6xy$ und $F_y = 3(x^2 - y^2)$. Die partielle Ableitung $F_y$ verschwindet im betrachteten Winkelraum nur für $y = x$, also auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Der Strömungsbereich wird also in die beiden Teilbereiche $B_1 = \{(x, y) \mid x \leqq y \leqq x\sqrt{3};\ x \geqq 0\}$ und $B_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqq y < x;\ x \geqq 0\}$ zerlegt. Die Punkte der Stromlinie $F(x, y) = 0$, die in $B_1$ liegen, lassen sich durch eine Funktion $y = f_1(x)$ darstellen; die Punkte der Stromlinie $F(x, y) = 0$, die in $B_2$ liegen, lassen sich entsprechend durch eine Funktion $y = f_2(x)$ beschreiben. Nach der Formel $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ gilt somit $y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$ $(x > 0;\ y \neq x)$, wobei $F(x, y) = 0$ ist. Im Inneren von $B_1$ bzw. $B_2$ ist der Ausdruck $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ positiv bzw. negativ. Somit gelten die Ungleichungen $f_1'(x) > 0$ und $f_2'(x) < 0$; d.h., $f_1(x)$ ist eine wachsende, $f_2(x)$ eine fallende Funktion. Die Stromlinie $F(x, y) = 0$ schneidet die Gerade $y = x$ in einem Punkt, für dessen Abszisse $x$ die Gleichung $F(x, x) = 0$ oder $x^3 = \frac{11}{2}$ gilt, also im Punkt $P\left(\sqrt[3]{\frac{11}{2}}, \sqrt[3]{\frac{11}{2}}\right)$. Bei Annäherung an diesen Punkt von rechts gehen die Ableitungen $f_1'(x)$ bzw. $f_2'(x)$ gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$; die Stromlinie besitzt also bei $x = \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$ eine zur $y$-Achse parallele Tangente. Die Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ beschreiben somit zwei Kurven, die im Punkt $P\left(\sqrt[3]{\frac{11}{2}}; \sqrt[3]{\frac{11}{2}}\right)$ zusammenhängen, d.h., es liegt in Wirklichkeit nur eine einzige Kurve vor, die aber durch zwei Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ beschrieben werden muß. An der Stelle $P\left(\sqrt[3]{\frac{11}{2}}; \sqrt[3]{\frac{11}{2}}\right)$ ist eine Auflösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ in der Form $y = f(x)$ nicht möglich, denn in jeder Umgebung des genannten Punktes hat die Gleichung $F(x, y) = 0$ die beiden verschiedenen Lösungen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$. Für jeden anderen Punkt der Stromlinie $F(x, y) = 0$, z.B. den Punkt $P(2; 1)$, gibt es eine hinreichend kleine Umgebung

dieses Punktes, in der $y = f_1(x)$ oder $y = f_2(x)$ (z.B. für den Punkt $P(2; 1)$) die einzige Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist.

Zur weiteren Untersuchung der Form der Kurve $F(x, y) = 0$ betrachten wir die Auflösbarkeit der Gleichung $F(x, y) = 0$ nach $x$. Für jeden Kurvenpunkt $P(x, y)$ mit $x > 0$ und $y > 0$ ist wegen $F_x(x, y) = 6xy > 0$ eine solche Auflösung in einer gewissen Umgebung von $P(x, y)$ in eindeutiger Weise mittels einer Funktion $x = g(y)$ möglich, und man kann, indem man die Gleichung $F(x, y) = 3x^2y - y^3 - 11 = 0$ nach $x$ auflöst, die Funktion $g(y)$ erhalten: $x = g(y) = \sqrt{\dfrac{11 + y^3}{3y}}$ $(0 < y < +\infty)$. Diese Funktion stellt den gesamten Verlauf der Stromlinie $F(x, y) = 0$ dar (denn das Bestehen der Bedingungen $F(x, y) = 0$; $x > 0, y > 0$, ist zum Bestehen der Gleichung $x = g(y)$ $(0 < y < +\infty)$ ersichtlich gleichwertig). Man rechnet leicht nach, daß $g'(y) = 0$ nur für $y = \sqrt[3]{\dfrac{11}{2}}$ gilt und $g''(y)$ für dieses $y$ positiv ist. Die Stelle $y = \sqrt[3]{\dfrac{11}{2}}$

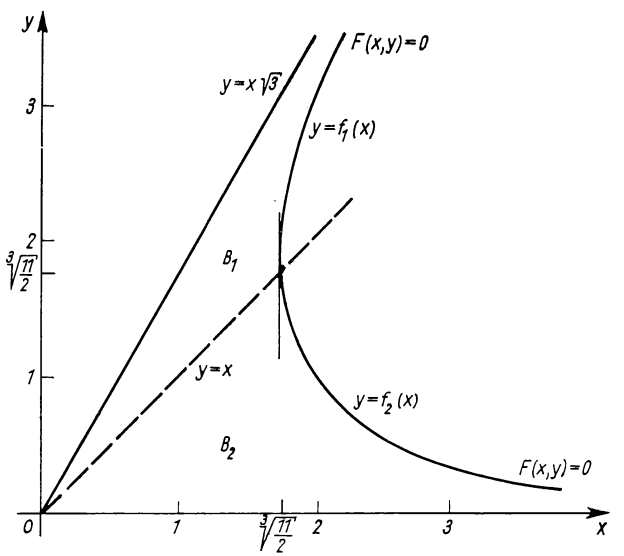



Bild 3.9

ist also die einzige relative Extremstelle von $x = g(y)$, und zwar die eines Minimums. Da die Limesbeziehungen $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = +\infty$ und $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$ gelten, liefert dieses relative Minimum sogar das absolute Minimum von $g(y)$. Es gilt also $\sqrt[3]{\dfrac{11}{2}} = g\left(\sqrt[3]{\dfrac{11}{2}}\right) \leqq g(y)$ für $0 < y < +\infty$, d.h., die Stromlinie $F(x, y) = 0$ enthält nur Punkte $P(x, y)$ mit $\sqrt[3]{\dfrac{11}{2}} \leqq x$. Somit erhalten wir nachträglich den (gemeinsamen) Definitionsbereich von $f_1(x)$ und $f_2(x)$; diese Funktionen sind definiert für $\sqrt[3]{\dfrac{11}{2}} \leqq x < +\infty$. Der Quotient $\dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{g(y)} = \sqrt{\dfrac{3y^3}{11 + y^3}}$ hat für $y \to 0$ den Grenzwert 0 und für $y \to +\infty$

den Grenzwert $\sqrt{3}$, d.h., die Kurve $y = f_2(x)$ nähert sich für $x \to +\infty$ der $x$-Achse, und die Kurve $y = f_1(x)$ nähert sich für $x \to +\infty$ der Geraden $y = x\sqrt{3}$. Das Bild 3.9 faßt die über den Verlauf der Stromlinie $F(x, y) = 0$ gewonnenen Erkenntnisse zusammen. Man überlegt sich leicht, daß die weiteren Stromlinien $U(x, y) = \text{const}$ ein qualitativ ähnliches Verhalten aufweisen.

*Aufgabe 3.7:* Man berechne durch implizite Differentiation die erste und zweite Ableitung der durch die Gleichung $3x^2 - 2xy - y^2 = 0$ implizit gegebenen Funktionen $y = f(x)$. Wie läßt sich das Ergebnis erklären?

### 3.7.3. Implizite Funktionen von mehreren Variablen

Es liege nun der allgemeine Fall vor, daß in einem gewissen Gebiet $G$ des Raumes $R^{m+n}$ insgesamt $n$ reelle Funktionen von $m + n$ unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n$ gegeben sind:

$$\begin{aligned} z_1 &= F_1(x_1, \ldots, x_m; \quad y_1, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= F_n(x_1, \ldots, x_m; \quad y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.114}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{3.114'}$$

mit $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$; $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Uns interessiert die Frage, ob die Gleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{3.114''}$$

eine Auflösung nach $\mathbf{y}$ in der Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

besitzt; mit anderen Worten, ob das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_m; \quad y_1, \ldots, y_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m; \quad y_1, \ldots, y_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.115}$$

sich nach den Variablen $y_1, \ldots, y_n$ in der Form

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned} \tag{3.116}$$

auflösen läßt. Ist dies möglich, so nennen wir (3.116) ein **Lösungssystem** für das Gleichungssystem (3.115) oder ein System von durch die Gleichungen (3.115) **implizit definierter Funktionen mehrerer Variabler.** Ohne Beweis geben wir zur Beant-

wortung dieser Frage den folgenden Satz an, der den entsprechenden Satz 3.11 (3.7.1.) verallgemeinert.

**Satz 3.12:** *Es sei* $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ *ein System von Werten, welches die Gleichungen* (3.115) *erfüllt. Die Funktionen* $F_j(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *seien in einer Umgebung des Punktes* $P_0 = P(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ *im* $R^{m+n}$ *nach allen Variablen* $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n$ *stetig partiell differenzierbar. Die Matrix* $\left(\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(P_0)\right)_{1 \leqq j,\, k \leqq n}$, *die aus den ersten partiellen Ableitungen der Funktionen* $F_j$ *nach den Variablen* $y_1, \ldots, y_n$ *an der Stelle* $P_0 = P(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ *gebildet wird, sei nichtsingulär (d.h., ihre Determinante sei von null verschieden). Dann gibt es eine Umgebung des Punktes* $P_0$ *im* $R^{m+n}$, *in der ein einziges Lösungssystem*

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned} \tag{3.117}$$

*des Gleichungssystems* (3.115) *existiert. Dieses Lösungssystem hat die folgenden Eigenschaften (die Eigenschaft 2. drückt die Eigenschaft „Lösungssystem zu sein" formelmäßig aus).*

1. $$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= f_1(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(0)} &= f_n(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}); \end{aligned} \tag{3.118}$$

2. *es gilt*

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_m; \quad f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(x_1, \ldots, x_m; \quad f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0; \end{aligned} \tag{3.119}$$

*für alle* $x_1, \ldots, x_m$ *aus einer Umgebung des Punktes* $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ *im* $R^m$;

3. *die Funktionen* $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ *sind nach den Variablen* $x_1, \ldots, x_m$ *in einer Umgebung des Punktes* $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ *im* $R^m$ *stetig partiell differenzierbar.*

### 3.7.4. Die Differentiation implizit definierter Funktionen mehrerer Variabler

Die Differentiation implizit definierter Funktionen mehrerer Variabler erweist sich als eine Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel. Wir gehen hierbei aus von der Eigenschaft 2., Satz 3.12 (3.7.3.) für ein Lösungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y_1^{(0)} &= f_1(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(0)} &= f_n(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \end{aligned}$$

eines Gleichungssystems

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_m;\quad y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(x_1, \ldots, x_m;\quad y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{aligned}$$

Es gelten nämlich (für alle $x_1, \ldots, x_m$ aus einer Umgebung von $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ im $R^m$) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_m;\quad f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(x_1, \ldots, x_m;\quad f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Es seien auch die übrigen Voraussetzungen des Satzes 3.12 (3.7.3.) (stetige Differenzierbarkeit, Matrix $\left(\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(P_0)\right)$ nichtsingulär) erfüllt. Dann erhalten wir durch partielle Differentiation der $j$-ten Zeile von (3.120) nach der Variablen $x_k$ mittels der verallgemeinerten Kettenregel die folgenden Beziehungen:

$$0 = \frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k}$$

$$(j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m). \tag{3.121}$$

Bezeichnet man die Matrizen $\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right)_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ 1 \leqq k \leqq m}}$; $\left(\frac{\partial F_j}{\partial y_r}\right)_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ 1 \leqq r \leqq n}}$ und $\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_k}\right)_{\substack{1 \leqq r \leqq n \\ 1 \leqq k \leqq m}}$ mit $\mathbf{D_xF}$; $\mathbf{D_yF}$ und $\mathbf{Df}$, so lautet das System (3.121) in Matrizenschreibweise ($\mathbf{0}$: Nullmatrix)

$$\mathbf{0} = \mathbf{D_xF} + \mathbf{D_yF} \cdot \mathbf{Df}, \tag{3.121'}$$

wobei für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ überall die Werte $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ einzusetzen sind. Nach Voraussetzung ist die Matrix $(\mathbf{D_yF})\,(P_0)$ nichtsingulär. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung von $F_1, \ldots, F_n$ trifft dies auch für die Matrix $(\mathbf{D_yF})\,(P)$ für alle $P$ aus einer gewissen Umgebung von $P_0$ im $R^{m+n}$ zu. Es existiert also die inverse Matrix $[(\mathbf{D_yF})\,(P)]^{-1}$ für diese $P$. Daher können wir die Gleichung (3.121') nach $\mathbf{Df}$ auflösen. Es gilt zunächst

$$\mathbf{D_yF} \cdot \mathbf{Df} = -\mathbf{D_xF},$$

und nach Multiplikation beider Seiten mit der inversen Matrix von $\mathbf{D_yF}$ von links her ergibt sich die Beziehung

$$\mathbf{Df} = -[\mathbf{D_yF}]^{-1} \cdot \mathbf{D_xF}, \tag{3.122}$$

die ausführlich geschrieben lautet

$$\mathbf{(Df)\,(x)} = -[\mathbf{(D_yF)\,(x, f(x))}]^{-1} \cdot \mathbf{(D_xF)\,(x, f(x))}. \tag{3.123}$$

In Koordinatenschreibweise kann die Gleichung (3.123) wie folgt geschrieben

werden:

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_k}\right)_{1\leqq r\leqq n} = -\left[\left(\frac{\partial F_j}{\partial y_r}\right)\right]^{-1}_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ 1\leqq r\leqq n}} \cdot \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right)_{1\leqq j\leqq n} \qquad (k = 1, \ldots, m), \tag{3.124}$$

womit eine formale Ähnlichkeit zur Formel für die Ableitung einer implizit definierten Funktion von einer Variablen hergestellt ist (s. 3.7.2.).

*Aufgabe 3.8:* Man zeige, daß die Gleichung $u(x^2 + y^2) - (z^3 + u^3) - 4 = 0$ die implizite Darstellung einer Funktion $u = u(x, y, z)$ in der Umgebung des Punktes $P_0(2\,|-3|\,2)$ mit $u(P_0) = 1$ ist und berechne grad $u\,|_{P_0}$!

*Aufgabe 3.9:* Man untersuche, nach welchen zwei Unbekannten $(x, y)$; $(x, z)$ oder $(y, z)$ sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x + y)^4 - xz(x^2 - z^2) - 1 &= 0\\ (x - z)^4 - xy(x^2 + z^2) \qquad &= 0\end{aligned}$$

in der Umgebung des Punktes $P_0(0\,|1|\,0)$ gemäß der allgemeinen Theorie in 3.7.4. auflösen läßt. Man berechne dann die ersten Ableitungen dieser implizit dargestellten Funktionen an dieser Stelle.

### 3.7.5. Extremwerte impliziter Funktionen

Häufig interessiert man sich für Extremwerte implizit definierter Funktionen. Wir betrachten nur den Fall, daß die implizite Funktion durch eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0 \tag{3.125}$$

gegeben ist, wo $F(x, y)$ eine in einem Gebiet $G$ des $R^2$ definierte Funktion ist. Zur analytischen Behandlung dieser Aufgabenstellung setzen wir voraus, daß $F(x, y)$ in $G$ stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Es sei in $G$ eine Auflösung der Gleichung (3.125) nach $y$ in der Form $y = f(x)$ möglich, und es sei $F_y(x, y) \neq 0$ in $G$. Dann gilt nach 3.7.2., Formel (3.110) und (3.111),

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{1}{(F_y)^3}(-F_x{}^2F_{yy} - 2F_xF_yF_{xy} - F_y{}^2F_{xx}).$$

Eine notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremwertes ist das Bestehen der Gleichung

$$f'(x) = 0,$$

d.h. der Gleichung $F_x(x, y) = 0$ (neben der Gleichung $F(x, y) = 0$, die die Funktion $y = f(x)$ beschreibt; denn nach unserer Voraussetzung ist $F_y \neq 0$). Die zusätzliche Bedingung $f''(x) \neq 0$ für eine Stelle $x$, für die $f'(x) = 0$ gilt, ist bekanntlich hinreichend für das Eintreten eines Extremwertes. Ist $f'(x_0)$ und damit $F_x(x_0, y_0) = 0$ (mit $F(x_0, y_0) = 0$), so gilt nach der obigen Formel $f''(x_0) = -\dfrac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$. Wir erhalten somit das folgende Ergebnis:

**Satz 3.13:** *Notwendig für das Eintreten eines relativen Extremwertes der durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit dargestellten Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0$ ist das Bestehen der Gleichung*

$$F_x(x_0, y_0) = 0$$

*mit $y_0 = f(x_0)$. Hinreichend für das Vorliegen eines Extremwertes von $f(x)$ an dieser Stelle ist das Nichtverschwinden des Ausdrucks*

$$\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

*Ist dieser Ausdruck positiv, so hat $f(x)$ bei $x = x_0$ ein relatives Maximum, ist er negativ, so hat $f(x)$ bei $x = x_0$ ein relatives Minimum.*

*Anmerkungen*

1. Zur Ermittlung der für relative Extremwerte der durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit gegebenen Funktion in Frage kommenden Stellen sind $(x, y)$ mit

$$F(x, y) = 0,$$
$$F_x(x, y) = 0$$

zu suchen und die gefundenen Werte in den Ausdruck $\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ einzusetzen.

2. Erweist sich der letztere Ausdruck dabei als gleich null, so müssen mittels impliziter Differentiation höhere Ableitungen gebildet und auf ihr Nichtverschwinden hin untersucht werden. Es sind dann die Kriterien aus Band 2, Abschnitt 7.3., anzuwenden.

3. Punkte, in denen außer $F(x, y) = 0$, $F_x(x, y) = 0$ noch $F_y(x, y) = 0$ gilt, schließen wir grundsätzlich von der Betrachtung aus, da sie jeweils gesonderte Untersuchungen erfordern.

*Beispiel 3.22:* $F(x, y) = y^3 - 3xy + x^3$. Gesucht sind die relativen Extremwerte der durch $F(x, y) = 0$ implizit dargestellten Funktion $y = f(x)$. Es gilt $F_x = -3y + 3x^2$, $F_y = 3y^2 - 3x$, $F_{xx} = 6x$. Das Gleichungssystem $F = 0$, $F_x = 0$ liefert die Bedingungen $y = x^2$ und damit $x^6 - 3x^3 + x^3 = x^3(x^3 - 2) = 0$ mit den reellen Wurzeln $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt[3]{2}$ (es gibt noch zwei komplexe Wurzeln $x_3$, $x_4$, die natürlich nicht in Betracht kommen). Zu $x_1$ gehört der Wert $y_1 = 0$; zu $x_2$ gehört der Wert $y_2 = \sqrt[3]{4}$. Im Punkt $(x_1, y_1)$ ist $F_y(x, y) = 0$, solche Punkte sollten nicht betrachtet werden. Im Punkt $(x_2, y_2)$ ist $F_y(x, y) \neq 0$ (es gilt $F_y(x_2, y_2) = 3\sqrt[3]{2}$), und weiter gilt $F_{xx}(x_2, y_2) = 6\sqrt[3]{2}$, und somit ist $f''(x_2) = -2$. Also liegt bei $x_2 = \sqrt[3]{2}$ ein relatives Maximum der in einer gewissen Umgebung des Punktes $(x_2, y_2)$ durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit dargestellten Funktion $y = f(x)$ vor.

## 3.8. Die Funktionaldeterminante eines Funktionensystems

### 3.8.1. Geometrische Eigenschaften, die mittels der Funktionaldeterminante ausgedrückt werden können

In neuerer Zeit setzt sich immer mehr die Auffassung durch, Abhängigkeiten und Zusammenhänge, die durch Funktionen mehrerer Variabler beschrieben werden, als **Abbildungen** aus einem Raum $R^m$ in einen Raum $R^n$ aufzufassen. Wir haben von dieser Auffassung bereits an den verschiedensten Stellen Gebrauch gemacht (s. Abschnitt 3.6.). Die **Funktionaldeterminante** oder auch sog. **Jacobische Determinante** stellt ein weiteres Hilfsmittel dar, Abbildungseigenschaften auszudrücken. Zur besseren Verständlichkeit betrachten wir zunächst nur Abbildungen $\mathbf{f}: R^2 \to R^2$ bzw. $\mathbf{g}: R^3 \to R^3$. Es sei $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ eine Abbildung eines Gebietes $G < R^2$ in den $R^2$. Hierbei ist es zweckmäßig, von der Vorstellung auszugehen, daß die Werte $f_1(x_1, x_2); f_2(x_1, x_2)$ die Koordinaten des Bildpunktes $Q(u, v) \in R^2$ des Original- oder Urbildpunktes $P(x_1, x_2) \in R^2$ sind. Wir setzen also

$$\begin{aligned} u &= f_1(x_1, x_2) \\ v &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad ((x_1, x_2) \in G).$$

Jedes Teilgebiet $G'$ von $G$ (allgemeiner: jede Teilmenge $M$ von $G$) wird dabei auf eine Teilmenge $\mathbf{f}(G')$ (bzw. $\mathbf{f}(M)$) abgebildet. Hierbei entstehen Fragen, wie z. B.

1. Ist $\mathbf{f}(G')$ wieder ein Gebiet?

2. Gibt es zu jedem Bildpunkt $Q(u, v)$ nur einen einzigen Originalpunkt $P(x_1, x_2) \in G$, dessen Bildpunkt er ist? Mit anderen Worten, läßt die Abbildung $\mathbf{f}$ eine Umkehrung zu, besitzt sie eine inverse Abbildung $(\mathbf{f})^{-1}$?

3. Ist $C < G$ eine einfach geschlossene Kurve (stetig differenzierbare geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte bzw. Selbstüberschneidungen), die ein Teilgebiet $G'$ von $G$ so berandet, daß $G'$ bei positivem Umlauf (entgegen dem Uhrzeigersinn) stets auf der linken Seite von $C$ liegt, besitzt dann die Bildkurve $\mathbf{f}(C)$ bezüglich des Bildgebietes $\mathbf{f}(G')$ die gleiche Orientierung?

Setzt man voraus, daß $f$ eine **differenzierbare Abbildung** ist, d. h., daß die Koordinatenfunktionen $f_i$ total differenzierbar sind (s. 3.3.1.), so lassen sich diese Fragen weitestgehend mittels der Funktionaldeterminante der gegebenen Abbildung beantworten.

**Definition 3.5:** *Es sei $G < R^2$ ein Gebiet des $R^2$ und $\mathbf{f}: G \to R^2$ eine im Punkt $P_0 \in G$ differenzierbare Abbildung; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ $(\mathbf{x} \in G)$. Dann heißt die Determinante der im Punkt $P_0$ gebildeten* **Funktionalmatrix** *$(f_{i\vert k})$ von* $\mathbf{f}$ die **Funktionaldeterminante** *von $\mathbf{f}$ in $P_0$.* Sie wird mit den Symbolen $J(\mathbf{f})(P_0)$ oder $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ bezeichnet; d. h.,

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det \begin{pmatrix} f_{1\vert 1} & f_{1\vert 2} \\ f_{2\vert 1} & f_{2\vert 2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_{1\vert 1} & f_{1\vert 2} \\ f_{2\vert 1} & f_{2\vert 2} \end{vmatrix} = f_{1\vert 1} f_{2\vert 2} - f_{1\vert 2} f_{2\vert 1}. \tag{3.126}$$

Bezeichnet man $f_1(x_1, x_2)$ mit $u$ und $f_2(x_1, x_2)$ mit $v$, so lautet der Ausdruck für die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}. \tag{3.127}$$

*Beispiel 3.23*: Es sei $u = x_1^2 - x_2^2$ und $v = 2x_1x_2$. Wie groß ist $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)}$ allgemein und speziell im Punkt $P(0; 1)$?

Es gilt $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} u_{|1} & u_{|2} \\ v_{|1} & v_{|2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} = 4(x_1^2 + x_2^2)$.

Speziell ist $\left.\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)}\right|_{(0,1)} = 4$.

Es liegt auf der Hand, wie die Definition der Funktionaldeterminante für den allgemeinen Fall einer Abbildung $\mathbf{f}: R^n \to R^n$ zu verallgemeinern ist.

**Definition 3.6:** *Es sei $G < R^n$ ein Gebiet des $R^n$ und $\mathbf{f}: G \to R^n$ eine im Punkt $P_0 \in G$ differenzierbare Abbildung;* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ $(\mathbf{x} \in G)$. *Dann heißt die Determinante der im Punkt $P_0$ gebildeten* **Funktionalmatrix** $(f_{i|k})$ *von* $\mathbf{f}$ *die* **Funktionaldeterminante** *von* $\mathbf{f}$ *in $P_0$. Sie wird mit den Symbolen $J(\mathbf{f})(P_0)$ oder $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ bezeichnet, d.h.,*

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det(f_{i|k})_{1 \leqq i, k \leqq n} = \begin{vmatrix} f_{1|1} & \cdots & f_{1|n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n|1} & \cdots & f_{n|n} \end{vmatrix} = J(\mathbf{f})(P_0) \tag{3.128}$$

*(hierbei sind die partiellen Ableitungen im Punkt $P_0$ zu nehmen).*

Im folgenden betrachten wir Abbildungen $\mathbf{f}: G \to R^2$ bzw. $\mathbf{g}: B \to R^3$ ($G$; $B$ Gebiete im $R^2$ bzw. $R^3$), die in $G$ bzw. $B$ überall stetig differenzierbar sind. Man nennt solche Abbildungen **$C^1$-Abbildungen** oder **Abbildungen der Klasse $C^1$** in $G$ bzw. $B$. Beispielsweise ist die in Beispiel 3.23 angegebene Abbildung eine $C^1$-Abbildung im gesamten $R^2$. Wir kommen nunmehr zur Beantwortung der eingangs gestellten Fragen über das Verhalten der Bildmengen von $C^1$-Abbildungen und formulieren dazu einige Sätze. Es sind dies die Sätze von der **Gebietsinvarianz (Gebietstreue)**, der **lokalen Umkehrbarkeit** und der **Erhaltung der Orientierung**.

**Satz 3.14** *(Gebietsinvarianz): Es sei $G$ ein Gebiet des $R^2$ und $\mathbf{f}: G \to R^2$ eine $C^1$-Abbildung in $G$ mit $J(\mathbf{f})(P) \neq 0$ für alle $P \in G$. Dann wird jedes Gebiet $G' < G$ durch die Abbildung $\mathbf{f}$ auf ein Gebiet des $R^2$ abgebildet; d.h., $\mathbf{f}(G')$ ist ein Gebiet.*

**Satz 3.15** *(Lokale Umkehrbarkeit): Es sei $G$ ein Gebiet des $R^2$ und $\mathbf{f}: G \to R^2$ eine $C^1$-Abbildung in $G$ mit $J(\mathbf{f})(P_0) \neq 0$ für ein $P_0 \in G$. Dann gibt es eine Umgebung $U$ von $P_0$, so daß $V = \mathbf{f}[U]$ eine Umgebung von $Q_0 = \mathbf{f}(P_0)$ enthält. Ferner ist die Abbildung $\mathbf{f}$, eingeschränkt auf $U$, eine eineindeutige Abbildung (d.h., jeder Bildpunkt besitzt genau einen Originalpunkt), und die inverse Abbildung $\mathbf{f}^{-1}$ dieser auf $U$ eingeschränkten Abbildung ist eine $C^1$-Abbildung auf $V$ und bildet $V$ auf $U$ ab.*

Wir sagen, daß eine beschränkte einfach geschlossene Kurve $C$ in der Ebene (im Raum $R^2$) positiv (bzw. negativ) *orientiert* sei, wenn ein Durchlaufungssinn von $C$ so festgelegt ist, daß das von $C$ berandete Innengebiet stets linksseitig (bzw. rechtsseitig) der Durchlaufungsrichtung der Kurve $C$ liegt (s. Bild 3.6.).

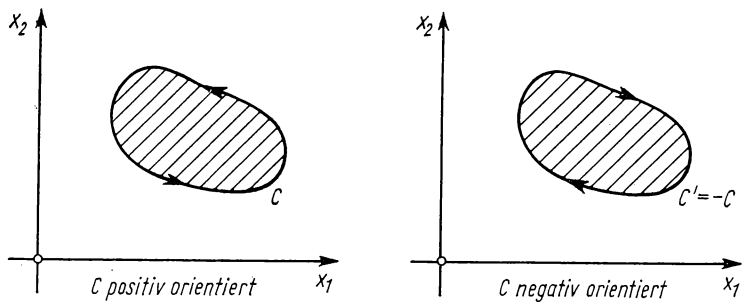



Bild 3.10

**Satz 3.16** *(Erhaltung der Orientierung): Es sei $G$ ein Gebiet des $R^2$ und $\mathbf{f}: G \to R^2$ eine $C^1$-Abbildung in $G$. Die Funktionaldeterminante von $\mathbf{f}$ sei überall in $G$ positiv*

$$J(\mathbf{f})(P) > 0 \quad (P \in G).$$

*Dann geht jede orientierte beschränkte einfach geschlossene Kurve $C$, die in $G$ liegt, in eine Bildkurve $C' = \mathbf{f}[C]$ über, die die gleiche Orientierung wie $C$ besitzt. Ist $J(\mathbf{f})(P)$ in jedem Punkt von $G$ negativ, so besitzt die Bildkurve $C'$ die entgegengesetzte Orientierung wie die gegebene Kurve $C$. Das heißt, durchläuft man in $G$ die Kurve $C$ entsprechend ihrer positiven Orientierung, so durchlaufen die Bildpunkte der Punkte von $C$ die Kurve $C'$ entsprechend ihrer positiven bzw. negativen Orientierung, je nachdem, ob in $G$ die Funktionaldeterminante der betrachteten Abbildung positiv oder negativ ist.*

*Bemerkung 3.10:* Ist $G$ ein Gebiet des $R^2$ und $\mathbf{f}: G \to R^2$ eine $C^1$-Abbildung in $G$, so folgt aus der Eigenschaft

$$J(\mathbf{f})(P) = 0 \quad \text{für alle } P \in G$$

nicht, daß $\mathbf{f}$ auch „im Großen" eineindeutig ist; d.h., der Satz 3.15 gibt nur die Eineindeutigkeit in der Umgebung eines Punktes $P$ von $G$ an. Die Größe dieser Umgebung hängt von $P$ ab. Zur Begründung betrachten wir nochmals das obige Beispiel: $u = x_1^2 - x_2^2$; $v = 2x_1x_2$ und $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_2)} = 4(x_1^2 + x_2^2)$. Im Ringgebiet $\{(x_1, x_2)\ \frac{1}{10} < x_1^2 + x_2^2 < 10\}$ ist überall $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_2)} > 0$. Trotzdem haben z.B. die beiden verschiedenen Punkte $P(1;0)$ und $P(-1;0)$ beide den gleichen Bildpunkt $Q(1;0)$ bezüglich der gegebenen Abbildung $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$.

Die Funktionaldeterminante einer Abbildung läßt sich auch als **„lokale lineare Volumenverzerrung"** auffassen und besitzt durch diese Eigenschaft große Bedeutung bei der Berechnung mehrfacher Integrale (s. Bd. 5).

Zur Erklärung dieser Eigenschaft betrachten wir diejenige lineare Abbildung $\mathbf{f}: R^3 \to R^3$, die durch $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(a_i, b_i, c_i \text{ gegebene Konstanten}) \\ &i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

gegeben ist. Die Abbildung $\mathbf{f}$ ist linear, und es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{c}$$

mit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Auf Grund der Linearität von $\mathbf{f}$ wird der von den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ aufgespannte Würfel $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leqq x_i \leqq 1; i = 1, 2, 3\}$ auf den von den drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannten Spat $Q$ (Parallelflach; schiefer Quader) abgebildet:

$$\mathbf{f}[W] = Q.$$

(Man überlege sich die Richtigkeit dieser Behauptung!) Nun gilt

$$J(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} f_1|_1 & f_1|_2 & f_1|_3 \\ f_2|_1 & f_2|_2 & f_2|_3 \\ f_3|_1 & f_3|_2 & f_3|_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die rechtsstehende Determinante ist andererseits gleich dem Spatprodukt $[\mathbf{abc}]$ der drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, welches seinem Betrage nach gleich dem Rauminhalt des von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gebildeten Spates $Q$ ist. Also gilt in diesem Fall die Gleichheit

$$\text{Rauminhalt von } \mathbf{f}[W] = |J(\mathbf{f})| \cdot \text{Rauminhalt von } W$$

der zweite Faktor rechts hat den Wert 1), und es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichung richtig bleibt, wenn man für $W$ einen Quader mit beliebigen Kantenlängen nimmt, dessen Kanten zu den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ parallel sind. Speziell gilt dies für einen Quader $\Delta W$ mit den Kanten $\Delta x_1\,\mathbf{e}_1, \Delta x_2\,\mathbf{e}_2, \Delta x_3\,\mathbf{e}_3$; d.h., es gilt die Gleichung

$$\text{Rauminhalt von } \mathbf{f}[\Delta W] = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \tag{3.129}$$

Geht man von der (bis jetzt erhobenen) Forderung der Linearität der Abbildung $\mathbf{f}$ ab, so wird aus der Gleichung (3.129) eine nur näherungsweise gültige Gleichung, die umso genauer gilt, je kleiner der Ausdruck $|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|$ wird. Diese Näherungsbeziehung ist die Grundlage für die in Band 5 behandelten Transformationen mehrfacher Integrale.

### 3.8.2. Der Multiplikationssatz für Funktionaldeterminanten

Aus der verallgemeinerten Kettenregel (s. 3.6.2.) läßt sich eine einfache Folgerung über die Funktionaldeterminante der zusammengesetzten Abbildung herleiten. Zur Vereinfachung der Darstellung behandeln wir diesen Sachverhalt für den Fall der Funktionen zweier Variabler. Es seien $h_1(x_1, x_2)$; $h_2(x_1, x_2)$ zwei differenzierbare Funktionen, die in einem gewissen Gebiet des $R^2$ definiert sind; desgleichen $g_1(u_1, u_2)$; $g_2(u_1, u_2)$, wobei der Definitionsbereich von $g_1$ und $g_2$ die Menge der Bildpunkte der Abbildung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_1(x_1, x_2) \\ h_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ enthält. Wir bilden zusammengesetzte Abbildungen

$$f_1(x_1, x_2) = g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)), \quad f_2(x_1, x_2) = g_2(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

Nach der verallgemeinerten Kettenregel gelten die folgenden vier Gleichungen

$$f_{1|1} = g_{1|1}h_{1|1} + g_{1|2}h_{2|1}$$

$$f_{1|2} = g_{1|1}h_{1|2} + g_{1|2}h_{2|2}$$

$$f_{2|1} = g_{2|1}h_{1|1} + g_{2|2}h_{2|1}$$

$$f_{2|2} = g_{2|1}h_{1|2} + g_{2|2}h_{2|2},$$

die wir, wie bereits in 3.6.2. durchgeführt, als Matrizengleichung schreiben können:

$$\begin{pmatrix} f_{1|1} & f_{1|2} \\ f_{2|1} & f_{2|2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1|1} & g_{1|2} \\ g_{2|1} & g_{2|2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1|1} & h_{1|2} \\ h_{2|1} & h_{2|2} \end{pmatrix},$$

wobei als Argumente der Ableitungen $g_{i|k}$ die Punkte $(h_1(x_1, x_2); h_2(x_1, x_2))$ einzusetzen sind (s. 3.6.2., Formel (3.106)). Aus der bekannten Determinanteneigenschaft $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ für zwei $(n, n)$-Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ folgt somit die Gleichung

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left( \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u_1, u_2)} \Bigg|_{\substack{u_1 = h_1(x_1, x_2) \\ u_2 = h_2(x_1, x_2)}} \right) \cdot \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x_1, x_2)}, \tag{3.130}$$

die wir als **Multplikationssatz für Funktionaldeterminanten** bezeichnen.

*Bemerkung 3.11:* Setzt man zur Abkürzung $h_1(x_1, x_2) = u_1$, $h_2(x_1, x_2) = u_2$, so kann man die letztere Gleichung in der (in älteren Lehrbüchern anzutreffenden, mathematisch ungenauen, aber leichter einzuprägenden) Form schreiben:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}, \tag{3.131}$$

in der sich der Anteil „$\partial(u_1, u_2)$" gewissermaßen „herauskürzt".

Dieser Multiplikationssatz läßt sich ohne Schwierigkeiten formal auf den Fall einer zusammengesetzten Abbildung $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ zweier Abbildungen $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ übertragen. Unter den üblichen Voraussetzungen (die

zusammengesetzte Abbildung läßt sich bilden; es existieren die erforderlichen partiellen Ableitungen) gilt der **Multiplikationssatz**

$$J(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = J(\mathbf{g})(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\, J(\mathbf{h})(\mathbf{x}). \tag{3.132}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall, daß $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x}$ aus dem Definitionsbereich von $\mathbf{h}$ gilt. In diesem Fall gilt $J(\mathbf{f})(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$, also ist dann $J(\mathbf{g})(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = [J(\mathbf{h})(\mathbf{x})]^{-1}$. Dieser Fall tritt speziell dann ein, wenn $\mathbf{g}$ die Umkehrabbildung einer differenzierbaren Abbildung $\mathbf{h}$ ist, die ein Gebiet des $R^n$ abbildet. Es ist dann $\mathbf{g} = (\mathbf{h})^{-1}$, und somit gilt die Gleichung

$$J((\mathbf{h})^{-1})(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = [J(\mathbf{h})(\mathbf{x})]^{-1}, \tag{3.133}$$

die man in Worten so ausdrücken kann: „in einander zugeordneten Punkten sind die Werte der Funktionaldeterminanten der gegebenen Abbildung und ihrer Umkehrabbildung zueinander reziprok".

*Beispiel 3.24:* Es seien $u = h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $v = h_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Man erhält durch Auflösen nach $x_1$ und $x_2$ die Beziehungen: $x_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$; $x_2 = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$ und daraus weiter

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \text{ sowie } \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Durch direkte Rechnung bestätigt sich also die (allgemeingültige) Relation

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} = 1.$$

### 3.8.3. Die Transformation von Differentialausdrücken bei der Transformation der unabhängigen Variablen

Häufig entsteht bei Anwendungen die Aufgabe, für ein spezielles Problem geeignete, dem Problem angepaßte Koordinaten zu verwenden, die bereits gewisse Eigenschaften des zu untersuchenden Sachverhalts in einfacher Weise zum Ausdruck bringen. Zum Beispiel verwendet man für ebene Probleme, die nur vom Abstand vom Nullpunkt abhängen, zweckmäßigerweise nicht die kartesischen Koordinaten $x_1$, $x_2$, sondern die ebenen Polarkoordinaten $r$, $\varphi$, die mit $x_1$ und $x_2$ durch die Gleichungen $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ zusammenhängen. Dabei ergibt sich zwangsläufig die Aufgabe, Differentialausdrücke, die in kartesischen Koordinaten gegeben sind, auf die neuen Koordinaten umzurechnen. Es interessiert u.a., wie der Begriff einer harmonischen Funktion $U = U(x_1, x_2)$ der Variablen $x_1$, $x_2$, d.h. einer Funktion $U$, für die die Gleichung $\Delta U = U_{11} - U_{22} = 0$ gilt, in ebenen Polarkoordinaten zu beschreiben ist. Dazu muß der Differentialausdruck (Differentialoperator) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ auf ebene Polarkoordinaten umgerechnet werden.

Entsprechende Fragen treten auf, wenn partielle Differentialgleichungen, deren Lösungen bestimmte gesuchte technisch wichtige Funktionen sind, in einem geeigneten Koordinatensystem betrachtet werden sollen (und vom Standpunkt der Anwendungen aus gesehen dort betrachtet werden müssen).

#### 3.8.3.1. Transformation auf ebene Polarkoordinaten

Liegen ebene, axialsymmetrische Probleme vor, wobei die Symmetrieachse auf der betrachteten Ebene senkrecht steht, ist es zweckmäßig, ebene Polarkoordinaten einzuführen. Neben der $x_1, x_2$-Ebene betrachten wir eine $r, \varphi$-Ebene und stellen den Zusammenhang zwischen beiden Ebenen dadurch her, daß wir fordern, daß $r$ der Abstand des Punktes $(x_1, x_2)$ vom Nullpunkt ist und $\varphi$ der im mathematisch positiven Sinn gemessene Winkel des Strahls vom Nullpunkt durch den Punkt $(x_1, x_2)$ gegen die positive $x_1$-Richtung (vgl. Abschn. 2.6.2.). Aus der Elementargeometrie ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. Damit jeder Punkt in der Ebene, der nicht der Nullpunkt ist, nur ein einziges Mal durch die Polarkoordinaten $r, \varphi$ beschrieben wird, verlangt man das Bestehen der Ungleichung $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Durch diese Festsetzung erreichen wir, daß die Zuordnung $(x_1, x_2) \to (r, \varphi)$ eine (bis auf den Nullpunkt) eineindeutige Abbildung der $x_1, x_2$-Ebene auf einen Teil einer (rechtwinkligen) $r, \varphi$-Ebene wird. Dieser Teil ist der Halbstreifen $r \geqq 0$; $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Treten innerhalb einer Rechnung (z. B. durch Addition) Winkel gegen die positive $x_1$-Richtung auf, die größer als $\pi$ oder kleiner gleich $-\pi$ sind, so können sie stets durch Hinzufügen eines geeigneten Vielfachen von $2\pi$ in das Intervall $-\pi < \varphi \leqq \pi$ transformiert werden. Sind $x_1$ und $x_2$ gegeben, so findet man die zugehörigen Werte $(r, \varphi)$ mittels der folgenden Formeln, die leicht zu beweisen sind:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad (x_1, x_2 \text{ beliebig}),$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \dfrac{x_2}{x_1} & (x_1 > 0;\ x_2 \text{ beliebig}) \\ \arctan \dfrac{x_2}{x_1} & (x_1 < 0;\ x_2 \text{ beliebig}) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x_1 = 0;\ x_2 > 0) \\ -\dfrac{\pi}{2} & (x_1 = 0;\ x_2 < 0). \end{cases}$$

$\varphi$ ist nicht festgelegt für den Fall $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ und kann dann beliebige Werte aus dem Intervall $(-\pi, \pi]$ annehmen. Aus der verallgemeinerten Kettenregel folgt die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial r}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(s. 3.6.2., Formel (3.106)). Die Matrix der Ableitungen (Funktionalmatrix) von $x_1, x_2$

nach $r$ und $\varphi$ läßt sich sehr leicht berechnen; es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r. \tag{3.134}$$

Die Matrix der Ableitungen von $r$, $\varphi$ nach $x_1$ und $x_2$ erhalten wir nach den Betrachtungen in Punkt 3.8.2. als die zur eben berechneten Matrix inverse Matrix. Hat die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine von null verschiedene Determinante $D = ad - bc$, so ist ihre inverse Matrix durch den Ausdruck $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gegeben (man überzeugt sich davon sofort durch Multiplikation beider Matrizen). Also gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

aus der die gesuchten Ableitungen abgelesen werden können. Als Anwendung behandeln wir die Umrechnung des (zweidimensionalen) Laplace-Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ auf Polarkoordinaten. Hierzu werde durch Einsetzen von $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\sin\varphi$ in eine gegebene Funktion $U(x_1, x_2)$ eine zusammengesetzte Funktion $V(r, \varphi) = U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gebildet. Die Funktion $\Delta U = U_{|11} + U_{|22}$ wird nun durch $V$ und die partiellen Ableitungen von $V$ nach $r$ und $\varphi$ ausgedrückt. Mittels der Kettenregel erhalten wir die Beziehungen:

$$U_{|1} = V_r \cdot r_{|1} + V_\varphi \cdot \varphi_{|1} = V_r \cos\varphi - \frac{1}{r} V_\varphi \sin\varphi,$$

$$U_{|2} = V_r \cdot r_{|2} + V_\varphi \cdot \varphi_{|2} = V_r \sin\varphi + \frac{1}{r} V_\varphi \cos\varphi$$

und weiter mit Kettenregel und Produktregel

$$\begin{aligned} U_{|11} &= (V_{rr} r_{|1} + V_{r\varphi}\varphi_{|1})\cos\varphi - V_r(\sin\varphi)\varphi_{|1} + \frac{1}{r^2} r_{|1} V_\varphi \sin\varphi \\ &\quad - \frac{1}{r}(V_\varphi r_{|1} + V_{\varphi\varphi}\varphi_{|1})\sin\varphi - \frac{1}{r} V_\varphi (\cos\varphi)\varphi_{|1} \\ &= V_{rr}\cos^2\varphi - \frac{1}{r} V_{r\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{V_r}{r}\sin^2\varphi + \frac{1}{r^2} V_\varphi \sin\varphi\cos\varphi \\ &\quad - \frac{1}{r} V_{r\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi}\sin^2\varphi + \frac{1}{r^2} V_\varphi \cos\varphi\sin\varphi, \end{aligned}$$

entsprechend

$$U_{|22} = (V_{rr} \cdot r_{|2} + V_{r\varphi} \cdot \varphi_{|2}) \sin\varphi + V_r(\cos\varphi)\,\varphi_{|2} - \frac{1}{r^2} V_\varphi(\cos\varphi)\, r_{|2}$$

$$+ \frac{1}{r}(V_{\varphi r} r_{|2} + V_{\varphi\varphi}\varphi_{|2})\cos\varphi - \frac{1}{r} V_\varphi(\sin\varphi)\,\varphi_{|2}$$

$$= V_{rr}\sin^2\varphi + \frac{1}{r} V_{r\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{r} V_r\cos^2\varphi - \frac{1}{r^2} V_\varphi\cos\varphi\sin\varphi$$

$$+ \frac{1}{r} V_{\varphi r}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi - \frac{1}{r^2} V_\varphi\sin\varphi\cos\varphi.$$

Die Addition der erhaltenen Ausdrücke ergibt schließlich $\Delta U = U_{|11} + U_{|22} = V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi}$. Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten hat daher die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{3.135}$$

*Aufgabe 3.10:* Man überlege sich, daß der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten auch in der Form $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ geschrieben werden kann.

#### 3.8.3.2. Transformation auf Zylinderkoordinaten

Räumliche Probleme, die bezüglich einer festen Achse axialsymmetrisch sind, werden zweckmäßig mittels Zylinderkoordinaten beschrieben. Die Symmetrieachse $P(x_1, x_2, x_3)$ kann beschrieben werden durch ihre $x_3$-Koordinate $z$, den Abstand $r$ von der $x_3$-Achse und den im mathematisch positiven Sinn gemessenen Winkel $\varphi$ des Strahls vom Nullpunkt durch den Punkt $P'(x_1, x_2, 0)$ gegen die positive $x_1$-Richtung (vgl. Abschn. 2.6.3.). Es ergeben sich die (elementargeometrischen) Beziehungen

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z.$$

Der gesamte Raum $R^3$ der Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ wird hierbei auf einen Teil eines dreidimensionalen $(r, \varphi, z)$-Raumes abgebildet, wobei analoge Festsetzungen zu treffen sind wie im Fall ebener Polarkoordinaten. Man nennt $(r, \varphi, z)$ die Zylinderkoordinaten des Punktes $P(x_1, x_2, x_3)$. Die Funktionalmatrix der $x_1, x_2, x_3$ bezüglich $r, \varphi, z$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial\varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so daß sich für die zugehörige Funktionaldeterminante der Wert

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{3.136}$$

ergibt. Bei der Umrechnung von Differentialausdrücken sind dieselben Rechnungen wie im Fall ebener Polarkoordinaten durchzuführen, wegen $x_3 = z$ können Ableitungen nach $x_3$ sofort als (dieselben) Ableitungen nach $z$ geschrieben werden. Zum Beispiel ergibt sich für den (dreidimensionalen) Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ unter Benutzung des Ergebnisses von 3.8.3.1. in Zylinderkoordinaten sofort der Ausdruck

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.137}$$

#### 3.8.3.3. Transformation auf Kugelkoordinaten

Räumliche Probleme, die nur vom Abstand der zu betrachtenden Punkte von einem festen Punkt abhängen (z. B. Einwirkung einer Zentralkraft) bzw. gewisse Symmetrieeigenschaften gegenüber Drehungen des Raumes um einen festen Punkt aufweisen, werden in Kugelkoordinaten beschrieben. Der feste Punkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems. Ein beliebiger Raumpunkt $P(x_1, x_2, x_3)$ kann beschrieben werden durch seinen Abstand $r$ vom Nullpunkt, den Winkel $\varphi$, den der Strahl vom Nullpunkt durch den Punkt $P'(x_1, x_2, 0)$ gegen die positive $x_1$-Richtung (im mathematisch positiven Sinn gemessen) besitzt und den Winkel $\vartheta$, den der Strahl vom Nullpunkt durch den gegebenen Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ gegen die positive $x_3$-Richtung hat. Es gelten die Transformationsbeziehungen (vgl. 2.6.3.)

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x_2 = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad x_3 = r\cos\vartheta.$$

Der gesamte Raum $R^3$ wird auf einen Teil des $(r, \vartheta, \varphi)$-Raumes abgebildet, wobei man aus der Forderung, eine (weitestgehend) eineindeutige Abbildung von $(x_1, x_2, x_3)$ auf die Werte $(r, \vartheta, \varphi)$ zu erhalten, die folgenden Vereinbarungen trifft:

$$0 \leqq r < +\infty, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$
$$-\pi < \varphi \leqq \pi \quad (\text{oder} \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi).$$

Die Funktionalmatrix der Transformation $(x_1, x_2, x_3) \to (r, \vartheta, \varphi)$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante, die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)}$, hat den Wert

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta. \tag{3.138}$$

Der (dreidimensionale) Laplace-Operator hat in Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\end{aligned} \tag{3.139}$$

### 3.8.4. Abhängigkeit differenzierbarer Funktionen

*Beispiel 3.25:* Aus der Vektorrechnung ist der Begriff der linearen Abhängigkeit von Vektoren bekannt. Zum Beispiel seien **a**, **b**, **c** drei Vektoren im dreidimensionalen Raum. Sie heißen linear abhängig, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gibt, die nicht sämtlich gleich null sind und für die die (Vektor-)Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{o} \quad (|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0) \tag{3.140}$$

gilt (**o**: Nullvektor). Geometrisch bedeutet dies, daß die drei Vektoren **a**, **b**, **c** in einer Ebene liegen (komplanare Vektoren). Neben den Vektoren **a**, **b**, **c** betrachten wir die ihnen zugeordneten linearen Funktionen. Es seien

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix};$$

dann bilden wir die Funktionen der unabhängigen Variablen $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{aligned} l_1(x_1, x_2, x_3) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ l_2(x_1, x_2, x_3) &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \\ l_3(x_1, x_2, x_3) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3. \end{aligned}$$

Ferner betrachten wir die lineare Funktion $L(u_1, u_2, u_3) = \lambda_1 u_1 \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ der drei unabhängigen Variablen $u_1, u_2, u_3$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$M(x_1, x_2, x_3) = L(l_1(x_1,, x_2, x_3);\ l_2(x_1, x_2, x_3);\ l_3(x_1, x_2, x_3))$$

für *alle* $x_1, x_2, x_3$ gleich null;

$$L(l_1(x_1, x_2, x_3);\ l_2(x_1, x_2, x_3);\ l_3(x_1, x_2, x_3)) = 0 \quad ((x_1, x_2, x_3) \in R^3).$$

Zum Nachweis dieser Behauptung setzen wir die obigen Ausdrücke für $l_1, l_2, l_3$ in $L(u_1, u_2, u_3)$ ein und benutzen die Gleichung (3.140),

$$\begin{aligned} &L(l_1(x_1, x_2, x_3);\ \ l_2(x_1, x_2, x_3);\ \ l_3(x_1, x_2, x_3)) \\ &\quad = \lambda_1 l_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 l_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 l_3(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad = \lambda_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda_2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) + \lambda_3(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) \\ &\quad = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1) x_1 + (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2) x_2 + (\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3) x_3 \\ &\quad = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0, \end{aligned}$$

weil die Klammerausdrücke in der vorletzten Zeile infolge des Bestehens der Gleichung (3.140) alle verschwinden.

*Beispiel 3.26:* Wir betrachten die folgenden Funktionen von zwei unabhängigen Variablen $x_1, x_2$: $f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$.
Aus der für alle reellen Zahlen $t$ gültigen Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ folgt mit $t = x_1 + x_2$ die Gleichung

$$[f_1(x_1, x_2)]^2 + [f_2(x_1, x_2)]^2 = \sin^2(x_1 + x_2) + \cos^2(x_1 + x_2) = 1$$

für alle $x_1, x_2$. Es sei $F(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 1$ für $(u_1, u_2) \in R^2$.
Die zusammengesetzte Funktion

$$F(f_1(x_1, x_2);\ f_2(x_1, x_2)) = [f_1(x_1, x_2)]^2 + [f_2(x_1, x_2)]^2 - 1$$

ist dann nach den obigen Feststellungen für *alle* $x_1, x_2$ gleich null:

$$F(f_1(x_1, x_2);\ f_2(x_1, x_2)) = 0 \quad ((x_1, x_2) \in R^2).$$

In den Beispielen 3.25 und 3.26 stellten wir fest, daß die Werte der betrachteten Funktionen nicht unabhängig voneinander sind, da zwischen den Funktionswerten der betrachteten Funktionensysteme ($l_1, l_2, l_3$ bzw. $f_1, f_2$) gewisse Bindungen in Gleichungsform bestehen. Im Beispiel 3.25 ist das die Beziehung

$$\lambda_1 l_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 l_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 l_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und im Beispiel 3.26 haben wir die Gleichung

$$[f_1(x_1, x_2)]^2 + [f_2(x_1, x_2)]^2 - 1 = 0.$$

Diese Beispiele sind Sonderfälle eines *allgemeinen* Abhängigkeitsbegriffs für Funktionen.

**Definition 3.7:** *Es seien $f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ stetig differenzierbare Funktionen, die in einem Gebiet $G$ des $R^n$ definiert sind. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ heißen* **abhängig in** *$G$, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $F(u_1, \ldots, u_m)$ der $m$ unabhängigen Variablen $u_1, \ldots, u_m$ gibt, die in keinem Teilgebiet des $R^m$ konstant ist, so daß die Gleichung* **(Abhängigkeitsbeziehung)**

$$F(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \tag{3.141}$$

*für alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus $G$ gilt.*

Wir suchen nun ein einfaches Kriterium dafür, wann ein Funktionensystem $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ abhängig ist, ohne daß wir eine Abhängigkeitsbeziehung selbst angeben müssen, da diese Abhängigkeitsbeziehung oft nur mit großem Aufwand gefunden werden kann. Dabei orientieren wir uns zunächst wieder am Beispiel 3.25, d.h. der linearen Abhängigkeit von linearen Funktionen. Aus der Vektorrechnung ist bekannt, daß eine lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

genau dann besteht, wenn das Spatprodukt [**abc**] der Vektoren **a**, **b**, **c** verschwindet, d.h. die Gleichung

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

gilt. Da die Vektoren **a**, **b**, **c** aber nun genau dann linear abhängig sind, wenn die zugehörigen linearen Funktionen $l_1$, $l_2$, $l_3$ linear abhängig sind, ist somit das Verschwinden der obigen Determinante eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung für die lineare Abhängigkeit der Funktionen $l_1$, $l_2$, $l_3$ des Beispiels 3.25. Diese Determinante ist jedoch gerade die Determinante der partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_k}\right)$, d.h. die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(l_1, l_2, l_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$. Es liegt daher nahe, auch zur Untersuchung der Abhängigkeit allgemeiner Funktionen die ersten partiellen Ableitungen heranzuziehen. Wir gehen davon aus, daß zwischen $m$ gegebenen differenzierbaren Funktionen $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ von $n$ unabhängigen Veränderlichen eine Abhängigkeitsbeziehung besteht, die in der Form

$$F(f_1(x_1, \ldots, x_n);\ \ldots;\ f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \quad ((x_1, \ldots, x_n) \in G)$$

geschrieben werden kann. Durch partielle Differentiation nach den $x_i$ erhalten wir aus dieser Gleichung mittels der verallgemeinerten Kettenregel (s. 3.6.2.) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &F_{|1} f_{1|1} + F_{|2} f_{2|1} + \cdots + F_{|m} f_{m|1} = 0 \\ &F_{|1} f_{1|2} + F_{|2} f_{2|2} + \cdots + F_{|m} f_{m|2} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_{|1} f_{1|n} + F_{|2} f_{2|n} + \cdots + F_{|m} f_{m|n} = 0, \end{aligned}$$

wobei die Werte von $F_{|i}$ an der Stelle

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_n);\ f_2(x_1, \ldots, x_n);\ \ldots;\ f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

zu nehmen sind ($i = 1, \ldots, m$). Man kann die obigen Gleichungen als ein homogenes Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $(f_{i|k})$ $(1 \leqq i \leqq m;\ 1 \leqq k \leqq n)$ und dem Lösungsvektor $(F_{|i})_{1 \leqq i \leqq m}$ auffassen. Da dieser Lösungsvektor nicht der Nullvektor sein kann (evtl. abgesehen von einer nicht interessierenden Ausnahmemenge von Punkten aus $G$), weil $F(u_1, \ldots, u_m)$ in keinem Teilgebiet des $R^m$ konstant ist, folgt aus der Theorie der linearen homogenen Gleichungssysteme, daß der Rang der Koeffizientenmatrix $(f_{i|k})$ kleiner als $m$ sein muß. Damit haben wir eine notwendige Bedingung für die Abhängigkeit der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ erhalten, die man *ohne Kenntnis einer Abhängigkeitsfunktion* $F(u_1, \ldots, u_m)$ *überprüfen kann.* Ohne Beweis zitieren wir die folgenden Sätze über die Abhängigkeit von Funktionen (in einer unseren Zwecken angepaßten Form).

**Satz 3.17:** *Es seien $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ in einem Gebiet $G$ des $R^n$ gegebene, dort stetig differenzierbare Funktionen. Dafür, daß die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in $G$ abhängig sind, ist notwendig, daß die Ungleichung*

$$\operatorname{Rang}(f_{i|k}) < m \tag{3.142}$$

*überall in $G$ erfüllt ist.*

**Satz 3.18:** *Es seien $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ in einem beschränkten Gebiet $G$ des $R^n$ gegebene, dort stetig differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen* 1.–3.:

1. *Es sei $m = n$. Dann sind die $f_i$ genau dann abhängig in $G$, wenn die Funktionaldeterminante* $\det(f_{i|k})$ *überall in $G$ verschwindet.*

2. *Es sei $m > n$. Dann sind die $f_i$ abhängig in $G$.*

3. *Es sei $m < n$. Ist der Rang der Matrix $(f_{i|k})$ in $G$ konstant und kleiner als $m$, so sind die Funktionen $f_i$ abhängig in $G$.*

*Beispiel 3.27:* Es sei $f_1(x_1, x_2) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2$,

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - c)^2 + (x_2 - d)^2 \quad ((x_1, x_2) \in R^2),$$

wobei $a, b, c, d$ beliebige reelle Zahlen bezeichnen. Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Funktionen $f_1, f_2$ bilden wir die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned}\det(f_{i|k}) &= \begin{vmatrix} f_{1|1} & f_{1|2} \\ f_{2|1} & f_{2|2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x_1 - a) & 2(x_2 - b) \\ 2(x_1 - c) & 2(x_2 - d) \end{vmatrix} \\ &= 4(x_1(b - d) + x_2(c - a) + ad - bc).\end{aligned}$$

Nach Satz 3.18 besteht Abhängigkeit zwischen den Funktionen $f_1$ und $f_2$ in einem (beliebigen) beschränkten Gebiet $G$ des $R^2$ genau dann, wenn diese Determinante für alle $(x_1, x_2)$ aus $G$ verschwindet. Der Ausdruck für $\det(f_{i|k})$ ist ein Polynom ersten Grades in $x_1$ und $x_2$, der nur dann in einem Gebiet des $R^2$ verschwindet, wenn seine Koeffizienten gleich null sind, also die Gleichungen

$$\begin{aligned} b - d &= 0, \\ c - a &= 0, \\ ad - bc &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Man sieht sofort, daß mit den ersten beiden Gleichungen, die auch in der Form $b = d$, $a = c$ geschrieben werden können, auch die letzte dieser Gleichungen erfüllt ist. Wir haben somit das folgende Ergebnis:

1. Ist $(a, b) \neq (c, d)$, so sind $f_1$ und $f_2$ unabhängig.

2. Ist $(a, b) = (c, d)$, so sind $f_1$ und $f_2$ abhängig; in diesem Fall gilt sogar $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in R^2$. (Man interpretiere das Ergebnis geometrisch!)

## 3.9. Skalare Felder und Vektorfelder

### 3.9.1. Allgemeine Betrachtungen zum Feldbegriff

Im Unterschied zur Betrachtungsweise der Punktmechanik, die davon ausgeht, daß die physikalischen Eigenschaften eines Teilchens, z. B. die Masse (näherungsweise) in einem Punkt konzentriert sind, wird beim Feldbegriff die Vorstellung zugrundegelegt, daß eine bestimmte physikalische Größe in jedem Punkt eines räumlichen Gebietes betrachtet werden kann. Man unterscheidet (mehr aus historischen Gründen) zwischen skalaren Feldern und Vektorfeldern.

Ein **skalares Feld** ordnet jedem Punkt eines Gebietes des $R^3$ einen Skalar, d. h. eine reelle Zahl, zu. Beispielsweise sind die Temperaturverteilung in einem Gewächshaus oder die Größe des Luftdruckes in den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche und der Atmosphäre Spezialfälle skalarer Felder. Zu einem festen Zeitpunkt kann ein skalares Feld durch eine (reelle) Funktion $U = U(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{r} = \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ beschrieben werden, die in einem gewissen Gebiet des $R^3$ definiert ist. Ändert sich das betrachtete skalare Feld zeitlich nicht **(stationäres Feld)**, so genügt seine Kenntnis zu einem festen Zeitpunkt. Im allgemeinen muß jedoch eine zeitliche Änderung des Feldes berücksichtigt werden **(instationäres Feld)**, d. h., das skalare Feld $U$ ist sowohl eine Funktion des Ortes $\mathbf{r}$ als auch der Zeit $t$: $U = U(\mathbf{r}, t)$. Bei der Untersuchung grundlegender Eigenschaften eines Feldes geht man zunächst so vor, daß ein fester (aber beliebiger) Zeitpunkt betrachtet wird.

Eine anschauliche Vorstellung eines skalaren Feldes $U(\mathbf{r})$ (die Zeitabhängigkeit wird, wie vereinbart, nicht hervorgehoben) erhält man durch die Einführung der Flächen, auf denen $U(\mathbf{r})$ einen jeweils konstanten Wert annimmt. Diese Flächen heißen **Niveau-** oder **Äquipotentialflächen** von $U$. Sie sind (als Mengen) erklärt durch

$$H(c) = \{\mathbf{r} \mid U(\mathbf{r}) = c\} \quad (c \text{ beliebig, reell}).$$

Als Beispiel betrachten wir das durch die Gleichung $U(\mathbf{r}) = 1/r$ ($r = |\mathbf{r}| \neq 0$) gegebene skalare Feld im $R^3$. Genau dann gilt für eine reelle Zahl $c > 0$ die Gleichheit $U(\mathbf{r}) = c$, wenn die Beziehung $|\mathbf{r}| = 1/c$ besteht (der Fall „$c \leqq 0$" kann ersichtlich ausgeschlossen werden). Alle Punkte $\mathbf{r} \in R^3$, für die die Gleichung $|\mathbf{r}| = 1/c$ ($c$ fest) gilt, liegen auf der Oberfläche der Kugel mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius $1/c$, und für jeden Punkt dieser Kugeloberfläche ist diese Gleichung erfüllt. Die Äquipotentialflächen von $U(\mathbf{r})$ sind daher konzentrische Kugelflächen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Durchläuft die Zahl $c$ alle positiven reellen Zahlen, so durchläuft auch die Zahl $1/c$ alle positiven reellen Zahlen. Die Gesamtheit aller Niveauflächen der gegebenen Funktion $U(\mathbf{r}) = 1/r$ besteht also aus allen Kugeloberflächen mit dem Mittelpunkt 0.

Das skalare Feld $U(\mathbf{r})$ heiße ein **ebenes Feld**, wenn (bei geeigneter Koordinatenwahl) $U(\mathbf{r}) = U(x_1, x_2)$ **gilt**, also $U$ nicht von $x_3$ abhängt. Setzt man $f(x_1, x_2) = U(x_1, x_2)$ und stellt die Funktion $f$ in der Form $x_3 = f(x_1, x_2)$ als (krumme) Fläche über der $x_1, x_2$-Ebene $R^2$ dar, so sind die Schnittkurven der Niveauflächen von $U$ mit der $x_1, x_2$-Ebene gleichzeitig die **Höhenlinien** von $f(x_1, x_2)$ (s. 2.1.).

Man bezeichnet diese auch als **Niveaulinien** von $U(x_1, x_2)$. Ist z. B. $U(\mathbf{r}) = U(x_1, x_2) = x_1x_2$, so erhält man die Gleichung einer Niveaulinie durch die Beziehung

$$U(x_1, x_2) = x_1x_2 = c \quad (c \text{ reell, fest}),$$

die bekanntlich die Gleichung für eine Hyperbel (mit den Koordinatenachsen als Asymptoten) darstellt. Für $c > 0$ liegen die Hyperbeläste im ersten und dritten Quadranten, für $c < 0$ im zweiten und vierten Quadranten, der Fall $c = 0$ liefert die beiden Koordinatenachsen. Faßt man das System der Niveaulinien als Karte der Fläche $x_3 = x_1 x_2$ auf, so erkennt man aus dem Verlauf der Höhenlinien (= Niveaulinien), daß der Nullpunkt ein Sattelpunkt dieser Fläche ist (in Richtung des ersten und dritten Quadranten wächst die Höhe $c$, in Richtung des zweiten und vierten Quadranten fällt die Höhe $c$ – der Leser fertige eine Skizze an!).

Ein **Vektorfeld** ordnet jedem Punkt des Raumes bzw. eines Gebietes des $R^3$ einen Vektor zu. Beispiele für Vektorfelder sind das Magnetfeld der Erde, das elektrische Feld zwischen Ladungsverteilungen, das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung (jedem Raumpunkt wird hierbei der Geschwindigkeitsvektor des dort befindlichen Flüssigkeitsteilchens zugeordnet). Zu einem festen Zeitpunkt kann ein Vektorfeld durch eine Vektorfunktion $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ (vgl. Abschnitt 2.6.) angegeben werden, die in einem gewissen Gebiet des $R^3$ erklärt ist. Wie bei skalaren Feldern unterscheiden wir zwischen stationären (zeitunabhängigen) und instationären (zeitlich veränderlichen) Vektorfeldern. Die letztgenannten Vektorfelder sind in der Form $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ zu beschreiben. Eine anschauliche Vorstellung eines Vektorfeldes zu einem festen Zeitpunkt ergibt die Einführung seiner **Feldlinien (Stromlinien)**, das sind diejenigen Kurven $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ ($\tau \in R$, Kurvenparameter), deren Tangentenrichtung $\dot{\mathbf{r}}(\tau) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}$ in jedem Raumpunkt mit der Richtung des Feldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ übereinstimmt. Daher muß das vektorielle Produkt $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$ verschwinden, wenn für $\mathbf{r}$ die Punkte der Feldlinie $\mathbf{r}(\tau)$ eingesetzt werden. Somit ergibt sich als eine notwendige Bedingung für den Verlauf von $\mathbf{r}(\tau)$ die **Differentialgleichung der Feldlinien**

$$\dot{\mathbf{r}}(\tau) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}(\tau)) = \mathbf{0}. \tag{3.143}$$

In Koordinatenschreibweise lautet diese Gleichung für

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &v_3(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))\, \dot{x}_2(\tau) - v_2(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))\, \dot{x}_3(\tau) = 0 \\ &v_1(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))\, \dot{x}_3(\tau) - v_3(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))\, \dot{x}_1(\tau) = 0 \\ &v_2(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))\, \dot{x}_1(\tau) - v_1(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))\, \dot{x}_2(\tau) = 0. \end{aligned} \tag{3.143'}$$

(3.143') stellt ein nichtlineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung dar. Seine Lösung (die entweder geschlossen angebbar ist oder näherungsweise gefunden werden muß) enthält drei feste Konstanten, die durch die Vorgabe eines Punktes, durch den eine Feldlinie gehen soll, bestimmt werden können (s. Band 7). Häufig kann man durch geeignete Wahl des Parameters $\tau$ erreichen, daß das Differentialgleichungssystem für die Feldlinien die folgende (einfachere) Gestalt besitzt

$$\dot{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(\tau)). \tag{3.143''}$$

Diese Form ist zur praktischen Berechnung besser geeignet als das Differentialgleichungssystem (3.143'). Als Beispiel betrachten wir das **homogene Feld,** das durch einen konstanten, ortsunabhängigen Vektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

gegeben ist. Das Differentialgleichungssystem (3.143'') lautet hier

$$\dot{\mathbf{r}}(\tau) = \mathbf{a}$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$\dot{x}_1 = a_1, \quad \dot{x}_2 = a_2, \quad \dot{x}_3 = a_3.$$

Es besitzt als Lösung (Kontrolle durch Differenzieren!) die Funktionen

$$x_1(\tau) = a_1\tau + b_1, \quad x_2(\tau) = a_2\tau + b_2, \quad x_3(\tau) = a_3\tau + b_3$$

mit beliebigen Konstanten $b_j$ ($j = 1, 2, 3$). Vektoriell geschrieben lautet diese Lösung (es sei $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$)

$$\mathbf{r}(\tau) = \tau\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (-\infty < \tau < +\infty),$$

das ist die Gleichung einer Geraden mit dem Richtungsvektor **a**. Die Feldlinien sind also zu **a** parallele Geraden.

Ein weiteres einfaches Beispiel erhalten wir mittels

$$\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}.$$

Dieses Feld besitzt überall die Richtung des Ortsvektors **r,** ist also radial vom Nullpunkt weg gerichtet. Die Feldlinien sind (beliebige) Geraden durch den Ursprung, **v** stellt ein sog. **radiales Feld** dar.

Die Vorstellung eines Feldes bietet die Möglichkeit, die unserer Anschauung ungewohnten Fernwirkungen als Nahwirkungen darzustellen. So kann man sich erklären, daß das Gravitationsfeld der Sonne die Kraft auf die Planeten überträgt und direkt am Körper angreift. Das wesentliche bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge durch Felder besteht aber darin, daß man die Eigenschaften der untersuchten Größe an irgendeinem Raumpunkt in Zusammenhang bringt mit den Eigenschaften in benachbarten Raumpunkten und zu benachbarten Zeiten. Dazu bedarf es insbesondere der Differentialrechnung in Vektorfeldern, der der folgende Abschnitt gewidmet ist.

*Beispiel 3.28:* In den Punkten $P_1$ und $P_2$ sind elektrische Punktladungen $Q_1 = Q > 0$ bzw. $Q_2 = -2Q$ angebracht. Es ist die zugehörige Äquipotentialfläche mit dem Potential Null zu bestimmen (im Unendlichen gehe das Potential der Ladungen gegen Null). Die Ortsvektoren der Punkte $P_1$ und $P_2$ im $(x_1, x_2, x_3)$-System seien $\mathbf{r}_1$ bzw. $\mathbf{r}_2$. Die Superposition (Überlagerung) der Coulomb-Potentiale beider Ladungen ergibt das resultierende Potential $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}\right) (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{1,2})$. Die Punkte **r** der Potentialfläche $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ genügen daher der Gleichung

$$\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} = -\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2}.$$

Wir denken uns durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ eine Gerade $g$ gelegt. Alle Punkte, die von $P_1$ und gleichzeitig von $P_2$ einen festen Abstand $\varrho_1$ bzw. $\varrho_2$ besitzen, liegen auf der Schnittkurve der Kugelflächen um $P_1$ mit dem Radius $\varrho_1$ und um $P_2$ mit dem Radius $\varrho_2$. Diese Schnittkurve ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf $g$ liegt und dessen Ebene auf $g$ senkrecht steht. Auf diesem Kreis ändert sich der Wert von $\varphi$ ersichtlich nicht. Jede Potentialfläche enthält mit jedem ihrer Punkte auch den gesamten Kreis, der durch diesen Punkt geht, dessen Mittelpunkt auf $g$ liegt und dessen Ebene auf $g$ senkrecht steht. Alle Potentialflächen sind somit axialsymmetrisch bezüglich der Achse $g$. Es reicht daher aus, die Schnittkurven der Potentialflächen mit einer beliebigen durch die Gerade $g$ gehenden Ebene zu bestimmen. Die Potentialflächen ergeben sich dann durch Rotation dieser Schnittkurven um die Achse $g$. Wir wählen eine solche Ebene $E$ aus und führen in ihr ein zusätzliches rechtwinkliges $x$, $y$-Koordinatensystem ein, dessen Ursprung der Mittelpunkt $M$ der Strecke $P_1P_2$ sei, dessen $x$-Achse die Gerade $g$ mit positiver Richtung von $M$ nach $P_1$ und dessen $y$-Achse beliebig orientiert sei (s. Bild 3.11). In diesem Koordinatensystem hat $P_1$ die Koordinaten $(a, 0)$, $P_2$ die

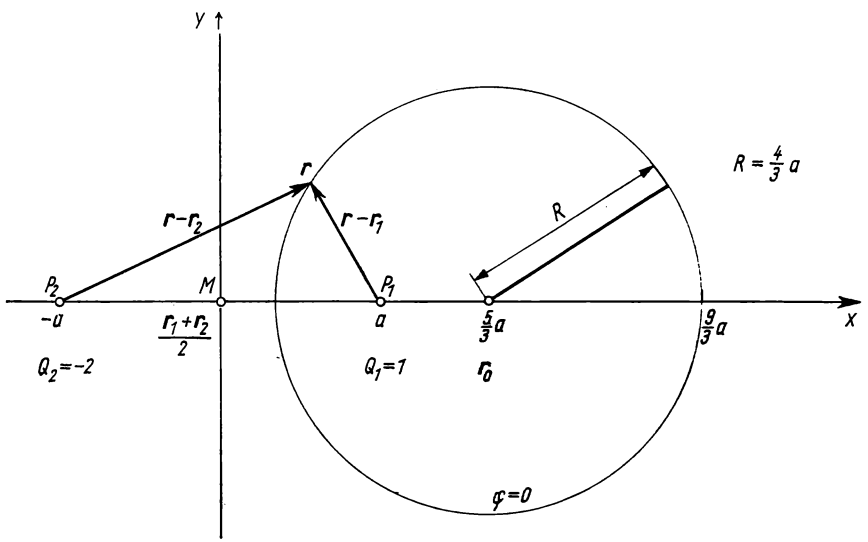



Bild 3.11

Koordinaten $(-a, 0)$, wobei $a = \frac{1}{2}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Es gelten die Beziehungen ($\mathbf{r} \in E$)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Auf der gesuchten Niveaufläche gilt daher

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

oder (quadrieren!)

$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 4y^2 = x^2 + 2ax + a^2 + y^2,$$

d. h. (umstellen!)

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + a^2 + y^2 = 0$$

oder (quadratische Ergänzung bilden!)

$$\left(x - \frac{5}{3}a\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}a^2.$$

Die gesuchte Schnittkurve ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{5}{3}a, 0)$ und dem Radius $R = \frac{4}{3}a$. Gehen wir zur räumlichen Betrachtung im $(x_1, x_2, x_3)$-System zurück und beachten die Definition von $a$, so erhalten wir das folgende Ergebnis: die gesuchte Potentialfläche ist eine Kugel vom Radius $R = \frac{2}{3}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Der Ortsvektor $\mathbf{r}_0$ des Mittelpunktes dieser Kugel ergibt sich aus der Gleichung (s. Bild 3.11)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \frac{5}{3}a\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\\ &= \frac{4}{3}\mathbf{r}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{r}_2.\end{aligned}$$

Wir stellen noch die folgende Eigenschaft fest (einsetzen!):

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| = \frac{4}{9}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 = R^2. \tag{3.144}$$

*Bemerkung 3.12.* Es sei $B$ eine Kugel im dreidimensionalen Raum mit dem Mittelpunkt $\mathbf{r}_0$ und dem Radius $R > 0$ und $\mathbf{r}_1$ der Ortsvektor eines weiteren von $\mathbf{r}_0$ verschiedenen Punktes. Dann gibt es auf dem Strahl (Halbgerade) von $\mathbf{r}_0$ durch $\mathbf{r}_1$ genau einen Punkt $\mathbf{r}_2$, für den die Gleichung

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| = R^2$$

gilt. Man sagt: „$\mathbf{r}_2$ ist der zu $\mathbf{r}_1$ bezüglich $B$ **spiegelbildlich** liegende Punkt" bzw. „$\mathbf{r}_2$ geht aus $\mathbf{r}_1$ durch die **Kelvin-Transformation** hervor (bezüglich $B$)" oder „man erhält $\mathbf{r}_2$ aus $\mathbf{r}_1$ mittels der „**Transformation durch reziproke Radien**". Die Gleichung (3.144) des Beispiels 3.28 zeigt, daß die Ladungspunkte $P_1$ und $P_2$ bezüglich der Potentialfläche $\varphi = 0$ spiegelbildlich liegen.

*Aufgabe 3.11:* Unter den übrigen Voraussetzungen des Beispiels 3.28 gelte für das Verhältnis der Ladungen $Q_1$ und $Q_2$ jetzt $\frac{Q_1}{Q_2} = -k$ mit $0 < k < 1$. Man zeige, daß

die Potentialfläche mit dem Potential Null (ebenfalls) eine Kugel ist, die den Punkt $P_1$ im Inneren enthält und deren Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden von $P_1$ und $P_2$ liegt. Man bestimme den Mittelpunkt $\mathbf{r}_0$ und den Radius $R$ dieser Kugel und zeige, daß auch im vorliegenden Fall die Beziehung $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| = R^2$ erfüllt ist.

*Aufgabe 3.12:* Bestimmen Sie die Feldlinien der folgenden Vektorfelder durch einfache geometrische Überlegungen:

$$\text{a) } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \qquad \text{b) } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o} \text{ konstanter Vektor}).$$

## 3.9.2. Die Differentialoperatoren der Vektoranalysis

### 3.9.2.1. Richtungsableitung und Gradient

Wir haben bisher nur Ableitungen (gewöhnliche oder partielle) betrachtet, in denen eine skalare Funktion nach einer skalaren Variablen differenziert wird. Es ist aber auch erforderlich, Ableitungen nach vektoriellen Variablen zu betrachten, um die Änderungen eines Feldes nach beliebigen Richtungen hin zu verfolgen. Wir betrachten zunächst den Fall eines skalaren Feldes $U(\mathbf{r}) = U(x_1, x_2, x_3)$.

**Definition 3.8:** *Es sei* $\mathbf{s}$ *ein Vektor der Länge* 1 ($|\mathbf{s}| = 1$). *Wir untersuchen die Funktion* $U(\mathbf{r})$ *auf der Geraden durch den Punkt* $\mathbf{r}$ *in Richtung* $\mathbf{s}$ *und betrachten die Änderung*

$$\delta(U) = U(\mathbf{r} + t\mathbf{s}) - U(\mathbf{r}) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

*von* $U(\mathbf{r})$ *auf dieser Geraden. Der Grenzwert des Quotienten*

$$\frac{\delta(U)}{t}$$

*für* $t \to 0$ *heißt, falls er existiert, die* **Richtungsableitung** *von* $U$ *im Punkte* $\mathbf{r}$ *in Richtung* $\mathbf{s}$ *und wird mit* $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ *bezeichnet. In Formeln lautet dies*

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [U(\mathbf{r} + t\mathbf{s}) - U(\mathbf{r})]. \tag{3.145}$$

*Bemerkung 3.13:* In verschiedenen Lehrbüchern wird bei der Definition der Richtungsableitung auf die Forderung, daß $\mathbf{s} = 1$ gilt, verzichtet.

Wenn wir $\mathbf{s} = s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + s_3\mathbf{e}_3$ setzen, so sehen wir, daß

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (U(x_1 + ts_1, x_2 - ts_2, x_3 + ts_3)) \mid_{t=0}$$

gilt, falls die rechte Seite existiert. Im weiteren besitze $U(\mathbf{r}) = U(x_1, x_2, x_3)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Nach der verallgemeinerten Kettenregel (3.6.2.)

gilt somit

$$\frac{\partial U}{\partial s} = U_{|1}s_1 + U_{|2}s_2 + U_{|3}s_3 \tag{3.146}$$

(denn es ist z. B. $\left.\frac{\partial(x_1 + ts_1)}{\partial t}\right|_{t=0} = s_1, \cdots$), oder, wenn wir die rechte Seite letzterer Gleichung als Skalarprodukt auffassen:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = (\text{grad } U) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \text{grad } U.$$

Nach der Definition des Skalarprodukts gilt weiter $\frac{\partial U}{\partial s} = |\mathbf{s}| \cdot |\text{grad } U| \cos(\text{grad } U, \mathbf{s})$ $= |\text{grad } U| \cos(\text{grad } U, \mathbf{s})$. Aus dieser Beziehung entnehmen wir, daß (wegen $|\cos \alpha| \leqq 1$ für jedes reelle $\alpha$) stets die Ungleichung

$$-|\text{grad } U| \leqq \frac{\partial U}{\partial s} \leqq |\text{grad } U|$$

gilt. Stimmt die Richtung von grad $U$ mit $\mathbf{s}$ überein, gilt also $\mathbf{s} = \frac{\text{grad } U}{|\text{grad } U|}$, so ist $\cos(\text{grad } U, \mathbf{s}) = 1$, und daher gilt dann

$$\frac{\partial U}{\partial s} = |\text{grad } U| \quad \left(\mathbf{s} = \frac{\text{grad } U}{|\text{grad } U|}\right).$$

In Worten lautet dieses Ergebnis: *Die Richtung des Gradienten ist die Richtung des größten Anstieges der Funktion* $U(\mathbf{r})$ *(d. h. die Richtung der größten Richtungsableitung im Vergleich zu allen Richtungen vom Punkt* $\mathbf{r}$ *aus); dieser größte Anstieg hat den Wert* $|\text{grad } U|$.

Es sei weiter $\mathbf{r}(t)$ eine Raumkurve, die in der Niveaufläche $U(\mathbf{r}) = C$ liegt. Es gilt somit $U(\mathbf{r}(t)) = C\ (a \leqq t \leqq b)$. Differentiation beider Seiten letzterer Gleichung nach $t$ liefert die Beziehung $(\mathbf{r}(t) = x_1(t)\,\mathbf{e}_1 + x_2(t)\,\mathbf{e}_2 + x_3(t)\,\mathbf{e}_3)$ (Kettenregel)

$$U_{|1}\dot{x}_1 + U_{|2}\dot{x}_2 + U_{|3}\dot{x}_3 = 0$$

oder

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \text{grad } U = 0. \tag{3.147}$$

Mit anderen Worten, der Gradient von $U$ steht senkrecht auf den Tangentenrichtungen aller in der betrachteten Niveaufläche verlaufenden Raumkurven, d. h., *er steht senkrecht auf der Niveaufläche.* Bildet man grad $U(\mathbf{r})$ für jeden Raumpunkt $\mathbf{r}$, so erhält man ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } U(\mathbf{r})$. Die Feldlinien dieses Vektorfeldes, die sogenannten *Gradientenlinien*, verlaufen überall senkrecht zu den Niveauflächen von $U(\mathbf{r})$. Ist z. B. $U(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$ das elektrostatische Potential einer beschränkten Ladungsverteilung, so ergibt sich auf diese Weise, daß die Feldlinien des elektrischen Feldes $(\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}))$ überall auf den Äquipotentialflächen senkrecht stehen.

Das folgende Bild 3.12 veranschaulicht die Verhältnisse zwischen Niveaufläche $U(\mathbf{r}) = c$, dem Gradienten grad $U$ und der Richtungsableitung $\partial U$ in einem festen Raumpunkt $P$.

Für $|\alpha| \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt $\frac{\partial U}{\partial s} = \mathrm{d}(P, Q)$; für $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{\partial U}{\partial s} = -\mathrm{d}(P, Q)$ ($\mathrm{d}(P, Q)$ bezeichnet den Abstand zwischen $P$ und $Q$, vgl. Abschnitt 1.1.1.).

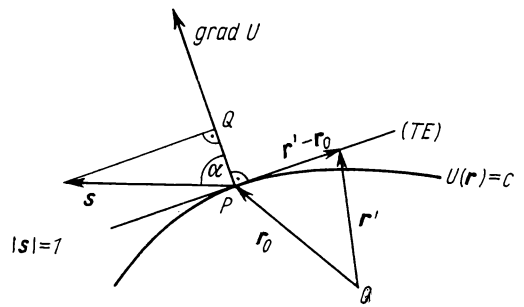



Bild 3.12

Hat ferner $P$ den Ortsvektor $\mathbf{r}_0$, so ist der (laufende) Ortsvektor $\mathbf{r}'$ der Tangentialebene (TE) an die Fläche $U(\mathbf{r}) = c$ im Punkt $P$ ersichtlich durch die folgende Gleichung gebunden (s. Bild 3.12):

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \cdot \operatorname{grad} U = 0. \tag{3.147'}$$

Das ist die Gleichung der Tangentialebene in vektorieller Form.

*Beispiel 3.29:* Man berechne die Richtungsableitung des Potentials $U(\mathbf{r})$ zweier Punktladungen $Q_1 = Q > 0$ und $Q_2 = -2Q$, die sich in den Punkten $P_1$ bzw. $P_2$ mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ befinden, an der Stelle $\mathbf{r}_3 = \frac{2}{3}\mathbf{r}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{r}_2$ in Richtung des Vektors $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ (vgl. Beispiel 3.27).

*Lösung.* Es gilt $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}\right)$.

Somit ist grad $U$ gegeben durch die Beziehung grad $U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}\right)$.

Für die betrachtete Stelle $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3$ ergibt sich grad $U_{|\mathbf{r}=\mathbf{r}_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}\left(9 + \frac{9}{2}\right) = \frac{27}{8} \cdot \frac{Q}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$. Skalare Multiplikation mit $\mathbf{s}$ ergibt die gesuchte Richtungsableitung $\frac{\partial U}{\partial s} = \operatorname{grad} U|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_3} \cdot \mathbf{s} = \frac{27}{8} \cdot \frac{Q}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$.

#### 3.9.2.2. Divergenz

Zur Erläuterung des Begriffes der Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ gehen wir von der Vorstellung aus, daß das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung darstellt. Ist nun $S$ irgendein Flächenstück, das ganz im Definitionsbereich von $\mathbf{v}(x, y, z)$ liegt, so ist der **Fluß von** $\mathbf{v}(x, y, z)$ **durch** $S$ gegeben durch das durch das Flächenstück $S$ pro Zeiteinheit fließende Flüssigkeits-

volumen (eine genaue Definition kann erst im Bd. 5, Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen, gegeben werden). Ist jetzt $G$ ein beschränktes Gebiet des $R^3$ und $S$ speziell gleich der Oberfläche (Rand) von $G$, so heißt der Fluß von $\mathbf{v}(x, y, z)$ durch $S$ die **Quellung** von $\mathbf{v}(x, y, z)$ aus dem Gebiet $G$. (Die Quellung ist positiv, wenn im Inneren von $G$ stets ein „Überschuß" an ausfließender Flüssigkeitsmenge erzeugt wird, anschaulich: wie von einer Quelle; die Quellung ist negativ, wenn in $G$ Flüssigkeit abgeführt wird – man spricht dann von einer Senke – und die Quellung ist gleich null, wenn sich – wie häufig der Fall – die ein- und ausfließende Flüssigkeitsmenge die Waage halten, also stets gleich sind.) Der Quotient

$$q = q(G) = \frac{\text{Quellung von } \mathbf{v}(x, y, z) \text{ aus } G}{\text{Volumen von } G}$$

heißt die **mittlere Quelldichte** von $\mathbf{v}(x, y, z)$ in $G$. Durch einen Grenzübergang kann man von der mittleren Quelldichte von $\mathbf{v}(x, y, z)$ zur Quelldichte von $\mathbf{v}(x, y, z)$ in einem Punkt gelangen (analog zum Übergang von der mittleren Geschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit bei der Bewegung eines Massenpunktes). Diese **lokale Quelldichte** heißt die **Divergenz** von $\mathbf{v}(x, y, z)$. Sie wird folgendermaßen definiert. Es sei $P(x_0, y_0, z_0)$ ein innerer Punkt aus dem Definitionsbereich von $\mathbf{v}(x, y, z)$ und $(G_n)$ eine Folge von Würfeln mit dem Mittelpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$, deren Kantenlängen gegen null gehen. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} q(G_n)$$

der mittleren Quelldichten von $\mathbf{v}(x, y, z)$ in $G_n$ für jede solche Folge von Würfeln $G_n$, so ist dieser Grenzwert von der speziell gewählten Folge $(G_n)$ unabhängig und heißt die Divergenz von $\mathbf{v}(x, y, z)$ in $P(x_0, y_0, z_0)$. Die Divergenz von $\mathbf{v}(x, y, z)$ in einem Punkt wird mit dem Symbol

$$\operatorname{div} \mathbf{v}$$

bezeichnet. In der Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher wird gezeigt, daß die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix},$$

dessen kartesische Koordinaten $v_i(x, y, z)$ $(i = 1, 2, 3)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, durch den Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{1|1} + v_{2|2} + v_{3|3} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{3.148}$$

gegeben ist. An dieser Stelle interessieren uns nur die Rechenregeln, die für die Operation „div" gelten.

*Beispiel 3.30:* Man berechne die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$

$= \mathbf{r}$. Wir erhalten mit $v_1 = x$, $v_2 = y$, $v_3 = z$ die Gleichungen $\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{1|1} + v_{2|2} + v_{3|3} = 1 + 1 + 1 = 3$, also gilt $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$.

#### 3.9.2.3. Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes leitet sich anschaulich aus dem Begriff der auf eine Flächeneinheit bezogenen Zirkulation des betrachteten Vektorfeldes her. Da sich die exakte Herleitung dieses Begriffs nur mit Hilfsmitteln der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (s. Bd. 5) durchführen läßt, geben wir nur die formale Definition der Rotation eines Vektorfeldes für ein kartesisches Koordinatensystem.

**Definition 3.9:** *Es sei* $\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\mathbf{e}_1 + v_2(x, y, z)\,\mathbf{e}_2 + v_3(x, y, z)\,\mathbf{e}_3$ *ein in einem Gebiet* $G$ *des* $R^3$ *differenzierbares Vektorfeld. Die Differentialoperation* rot $\mathbf{v}$, *die* **Rotation** *von* $\mathbf{v}(x, y, z)$, *wird durch die Gleichung*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3 \\ &= (v_{3|2} - v_{2|3})\,\mathbf{e}_1 + (v_{1|3} - v_{3|1})\,\mathbf{e}_2 + (v_{2|1} - v_{1|2})\,\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{3.149}$$

definiert.

Zur übersichtlichen Schreibweise empfiehlt sich die Darstellung

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{3.149'}$$

wobei der Ausdruck rechts wie eine gewöhnliche dreireihige Determinante ausgerechnet wird mit der Besonderheit, daß die Multiplikation mit einem der Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ die Bildung der entsprechenden partiellen Ableitung bedeutet.

(Durch Entwicklung der obigen „Determinante" nach den Elementen der ersten Zeile stellt man sofort die Übereinstimmung mit dem in der Definition eingeführten Ausdruck für rot $\mathbf{v}$ fest.) Im Unterschied zur Divergenz von $\mathbf{v}$, einem Skalar, ist rot $\mathbf{v}$ wieder ein Vektor. Ein Vektorfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt **wirbelfrei**, wenn rot $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ gilt.

*Beispiel 3.31:* Ein starrer Körper rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um eine feste Achse der Richtung $\mathbf{n}$ (mit $|\mathbf{n}| = 1$). Die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}$, die den Punkten $\mathbf{r}$ (Ortsvektor) dieses starren Körpers zugeordnet sind, bilden ein Vektorfeld. Bezeichnet $\mathbf{w} = \omega\mathbf{n}$ den Winkelgeschwindigkeitsvektor, so gilt, wie aus der Mechanik bekannt ist, die Gleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}.$$

Wie groß ist rot $\mathbf{v}$?

Es ist $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, und es sei $\mathbf{w} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$. Dann wird

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_2 - y\omega_3)\,\mathbf{e}_1 + (x\omega_3 - z\omega_1)\,\mathbf{e}_2 + (y\omega_1 - x\omega_2)\,\mathbf{e}_3$$

$$= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$

Also ist

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left[\frac{\partial(y\omega_1 - x\omega_2)}{\partial y} - \frac{\partial(x\omega_3 - z\omega_1)}{\partial z}\right]\mathbf{e}_1$$

$$+ \left[\frac{\partial(z\omega_2 - y\omega_3)}{\partial z} - \frac{\partial(y\omega_1 - x\omega_2)}{\partial x}\right]\mathbf{e}_2$$

$$+ \left[\frac{\partial(x\omega_3 - z\omega_1)}{\partial x} - \frac{\partial(z\omega_2 - y\omega_3)}{\partial y}\right]\mathbf{e}_3$$

$$= 2\omega_1\,\mathbf{e}_1 + 2\omega_2\,\mathbf{e}_2 + 2\omega_3\,\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{w}.$$

Die Rotation von $\mathbf{v}$ beträgt also das Doppelte des Winkelgeschwindigkeitsvektors.

*Beispiel 3.32:* Es sei $\mathbf{v}(x, y, z) = -y\mathbf{e}_1$. Deutet man dieses Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so erkennt man, daß die Stromlinien Geraden sind, die parallel zur $x$-Achse ($\mathbf{e}_1$-Richtung) verlaufen. Es gilt

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Es ist also $\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, obwohl keine „Drehbewegung" in der strömenden Flüssigkeit erfolgt.

*Aufgabe 3.13:* Man berechne die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{v}(x, y, z) = x^2\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2 + z^2\mathbf{e}_3$.

*Aufgabe 3.14:* Man bestimme die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{v}(x, y, z) = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)$ $(\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$; (elektrisches Feld einer bei 0 liegenden Punktladung).

#### 3.9.2.4. Der Vektordifferentialoperator $\nabla$. Rechenregeln für die Operatoren grad; div; rot

Mittels des **Vektordifferentialoperators** $\nabla$ (gelesen „Nabla" = griechisches Wort für „Harfe") können die in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten Differentialoperatoren der Vektoranalysis „grad"; „div"; „rot" in einer einheitlichen, dem Wesen dieser Operatoren besser angepaßten Schreibweise ausgedrückt werden. Gleichzeitig ergibt sich durch diese Schreibweise eine wesentliche Vereinfachung beim Be-

weis von Rechenregeln für diese Operatoren (bzw. bei der Anwendung dieser Operatoren). Wegen weiterer Einzelheiten und Verallgemeinerungen vgl. Bd. 11, Abschnitt 4.

**Definition 3.10:** *Es seien* $(x_1, x_2, x_3)$ *die kartesischen Koordinaten eines Punktes des euklidischen Raumes* $R^3$. *Der Differentialoperator*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 \tag{3.150}$$

*wird mit dem Ausdruck* $\nabla(.)$ *bzw.* $\frac{\partial(.)}{\partial \mathbf{r}}$ *bezeichnet* ($\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$).

*Bemerkung 3.14:*

1. Ist $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ eine reelle, partiell differenzierbare Funktion (also ein skalares Feld), so gilt

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = \varphi_{|1}\,\mathbf{e}_1 + \varphi_{|2}\,\mathbf{e}_2 + \varphi_{|3}\,\mathbf{e}_3;$$

also ist (s. Def. 3.3)

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi. \tag{3.151}$$

2. Ist $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ ein (partiell differenzierbares) Vektorfeld mit partiell differenzierbaren Koordinaten $v_i(x_1, x_2, x_3)$ und wendet man den Operator $\nabla$ auf das Vektorfeld $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ analog zur Bildung eines Skalarproduktes von $\nabla$ und $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ an, so erhält man

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\right)\cdot(v_1\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathbf{e}_2 + v_3\,\mathbf{e}_3)\\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = v_{1\,1} + v_{2\,2} + v_{3\,3}\end{aligned}$$

(die Klammern werden formal wie bei der Bildung des Skalarproduktes ausmultipliziert, wobei Multiplikation mit $\frac{\partial}{\partial x_1}$ die partielle Differentiation nach $x_1$ bedeutet usw.), d.h., wir können die Gleichung

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v} \tag{3.152}$$

schreiben.

3. Ist $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ ein Vektorfeld mit partiell differenzierbaren Koordinaten $v_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ und wendet man den Operator $\nabla$ auf das Vektorfeld $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ analog zur Bildung des Vektorproduktes von $\nabla$ und $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ an, so erhält man (Multiplikation mit $\frac{\partial(.)}{\partial x_i}$ bedeutet stets die Bildung der partiellen Ablei-

tung nach $x_i$)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial(.)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(.)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial(.)}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

also ist (s. (3.149′))

$$\nabla \times \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v}. \tag{3.153}$$

4. Ist $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ ein Vektorfeld, so kann man den Differentialoperator (v grad) $= (\mathbf{v}, \nabla)$, gelesen „v mit grad", einführen, der analog zu dem Skalarprodukt von v mit $\nabla$, aber ohne Anwendung der Differentialoperatoren auf v gebildet wird und durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}, \nabla) &= (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\right) \\ &= v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\end{aligned} \tag{3.154}$$

definiert ist. Es gilt z. B. für ein Skalarfeld $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ die Beziehung

$$(\mathbf{v}, \nabla)\,\varphi = v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = v_1 \varphi_{|1} + v_2 \varphi_{|2} + v_3 \varphi_{|3}$$

oder für ein Vektorfeld $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ ($u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$; $i = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}, \nabla)\,\mathbf{u} &= (\mathbf{v}, \nabla)\,u_1 \mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}, \nabla)\,u_2 \mathbf{e}_2 + (\mathbf{v}, \nabla)\,u_3 \mathbf{e}_3 \\ &= (v_1 u_{1|1} + v_2 u_{1|2} + v_3 u_{1|3})\,\mathbf{e}_1 + (v_1 u_{2|1} + v_2 u_{2|2} + v_3 u_{2|3})\,\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (v_1 u_{3|1} + v_2 u_{3|2} + v_3 u_{3|3})\,\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Mittels der oben eingeführten Schreibweisen für die Operatoren „grad", „div", „rot" lassen sich die Rechenregeln für diese Differentialoperatoren mittels der Rechenregeln der gewöhnlichen Vektorrechnung erhalten, wobei nur darauf zu achten ist, daß die auftretenden Vektorfelder und der Operator $\nabla$ in der richtigen Reihenfolge aufgeschrieben werden. Außerdem ist bei der Anwendung des Operators $\nabla$ auf Produkte die Produktregel der Differentialrechnung einzuhalten; d. h., der Operator $\nabla$ ist auf jeden Faktor einzeln anzuwenden, während die anderen Faktoren konstant bleiben, und die Ergebnisse sind zu addieren. Im einzelnen gelten die folgenden Rechenregeln

1. *Linearität*

Es seien $\varphi$, $\psi$, ... skalare Felder; **u**, **v**, ... Vektorfelder mit geeigneten Differenzierbarkeitseigenschaften.

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi; \tag{3.155}$$

$$\operatorname{grad}(c\varphi)=c\operatorname{grad}\varphi \quad (c \text{ reell, beliebig}); \tag{3.156}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\operatorname{div}\mathbf{u}+\operatorname{div}\mathbf{v}; \tag{3.157}$$

$$\operatorname{div}(c\mathbf{v})=c\operatorname{div}\mathbf{v} \quad (c \text{ reell, beliebig}); \tag{3.158}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\operatorname{rot}\mathbf{u}+\operatorname{rot}\mathbf{v}; \tag{3.159}$$

$$\operatorname{rot}(c\mathbf{v})=c\operatorname{rot}\mathbf{v} \quad (c \text{ reell, beliebig}). \tag{3.160}$$

2. *Produktregeln*

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi; \tag{3.161}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{uv})=\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}+(\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}+(\mathbf{u}\operatorname{grad})\mathbf{v}; \tag{3.162}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{v})=\mathbf{v}\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{div}\mathbf{v}; \tag{3.163}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{u}-\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{v}; \tag{3.164}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{v})=(\operatorname{grad}\varphi)\times\mathbf{v}+\varphi\operatorname{rot}\mathbf{v}; \tag{3.165}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{u}-\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v}-(\mathbf{u}\operatorname{grad})\mathbf{v}. \tag{3.166}$$

Diese Regeln lassen sich mittels des $\nabla$-Operators unter Benutzung der Gesetze der Vektorrechnung ohne großen Rechenaufwand beweisen. Wir erläutern das an drei der obigen Regeln, die übrigen sollten vom Leser in analoger Form behandelt werden. Zum Beweis der Formel (3.161) bilden wir

$$\nabla(\varphi\psi)=\nabla\overset{\downarrow}{\varphi}\psi+\nabla\varphi\overset{\downarrow}{\psi}=\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi=\psi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\psi$$

und erhalten das richtige Ergebnis, das wir auch durch Rückgriff auf die Definition der Operation „grad" erhalten würden, wie eine ausführliche Rechnung zeigt. Die Pfeile in der obigen Beziehung markieren diejenige Funktion (bzw. dasjenige Feld), auf die der Differentiationsoperator $\nabla$ gerade angewandt werden soll, wobei die einzelnen Summanden wie bei der gewöhnlichen Produktregel zu bilden sind. Die Berechtigung für diese Verfahrensweise ergibt sich aus der folgenden ausführlichen Rechnung:

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi)=\operatorname{grad}(\varphi\psi)&=\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}\mathbf{e}_1+\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y}\mathbf{e}_2+\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}\mathbf{e}_3\\&=\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\mathbf{e}_1+\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathbf{e}_2+\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_3\\&=\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_1+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e}_2+\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_3\right)+\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_3\right)\\&=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi.\end{aligned}$$

Diese ausführliche Rechnung zeigt, daß (abgesehen von der Berücksichtigung der Produktregel) mit dem Operator $\nabla$ wie mit einem Vektor gerechnet werden kann, weil formal die gleichen Operationen auszuführen sind. Auf diese Überlegung stützen wir uns bei der Ableitung der Regeln (3.164) und (3.166). Zum Beweis der Formel (3.164) bilden wir $\operatorname{div}\,\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \nabla(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\times\mathbf{v}) + \nabla(\mathbf{u}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{v}})$. Der Ausdruck $\nabla(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ hat die Form eines Spatprodukts (vgl. Bd. 13, Satz 2.15). Nach den Rechenregeln der Vektoralgebra $(\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))$ gilt somit

$\nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\times\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}(\nabla\times\mathbf{u})$. Entsprechend ist

$\nabla\left(\mathbf{u}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = -\nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\times\mathbf{u}\right) = -\mathbf{u}(\nabla\times\mathbf{v})$. Insgesamt wird

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}(\nabla\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

Zum Beweis der Formel (3.166) stützen wir uns auf den sog. „Entwicklungssatz" der Vektoralgebra (vgl. Bd. 13, Satz 2.16)

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \nabla\times\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\times\mathbf{v}\right) + \nabla\times\left(\mathbf{u}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right)\\ &= (\nabla\mathbf{v})\,\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} - \left(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\right)\mathbf{v} + \left(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right)\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\,\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\\ &= (\mathbf{v}\operatorname{grad})\,\mathbf{u} - \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} - (\mathbf{u}\operatorname{grad})\,\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Auch beim Beweis der Regel (3.162) muß der Entwicklungssatz herangezogen werden.

#### 3.9.2.5. Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Wendet man die von uns betrachteten Differentialoperatoren für skalare Felder und Vektorfelder wiederholt an, so erhält man Differentialausdrücke höherer Ordnung, im einfachsten Falle von zweiter Ordnung. Nicht jede denkbare Kombination der Differentialoperatoren grad, div, rot ist sinnvoll, z. B. ist der Ausdruck div (div $\mathbf{v}$) sinnlos, da div $\mathbf{v}$ ein skalares Feld ist und die Divergenz nur für Vektorfelder erklärt ist (div(div $\mathbf{v}$) wäre die Divergenz eines skalaren Feldes). Man kann sich leicht überlegen, daß nur die folgenden fünf Kombinationen von grad, div, rot definiert sind: div (grad $\varphi$); rot (grad $\varphi$); grad (div $\mathbf{v}$); div (rot $\mathbf{v}$); rot (rot $\mathbf{v}$). Mittels der bereits oben benutzten formalen Übereinstimmung des Rechnens mit Vektoren und des Arbeitens mit dem Differentialoperator $\nabla$ erkennt man, daß rot (grad $\varphi$) und div (rot $\mathbf{v}$) stets verschwinden. Denn es gilt rot (grad $\varphi$) $= \nabla\times(\nabla\varphi) = \mathbf{o}$ (das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren ist stets gleich $\mathbf{o}$) und div (rot $\mathbf{v}$) $= \nabla(\nabla\times\mathbf{v})$ (das Spatprodukt $\mathbf{a}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ ist stets gleich 0). Der Ausdruck div (grad $\varphi$) lautet ausführlich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) &= \left(\frac{\partial(.)}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial(.)}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial(.)}{\partial z}\mathbf{e}_3\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi.\end{aligned}$$

Der Operator div (grad) stimmt also mit dem bereits früher (s. 3.8.3.) eingeführten Laplace-Operator $\Delta$ überein. Man kann diesen Operator auch für Vektorfelder definieren: ist $\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\mathbf{e}_1 + v_2(x, y, z)\,\mathbf{e}_2 + v_3(x, y, z)\,\mathbf{e}_3$ ein Vektorfeld, so gelte

$$\Delta\mathbf{v} = (\Delta v_1)\,\mathbf{e}_1 + (\Delta v_2)\,\mathbf{e}_2 + (\Delta v_3)\,\mathbf{e}_3.$$

Ersichtlich kann $\Delta\mathbf{v}$ auch in der Form $(\nabla\nabla)\mathbf{v}$ geschrieben werden. Mittels des Entwicklungssatzes erhalten wir

$$\text{rot (rot } \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla\mathbf{v}) - (\nabla\nabla)\,\mathbf{v}, \text{ also rot (rot } \mathbf{v}) = \text{grad (div } \mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}. \tag{3.167}$$

Besonders häufig werden alle diese Differentialausdrücke für skalare oder Vektorfelder benötigt, welche nur vom Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ des Raumpunktes $P(x, y, z)$ vom Ursprung $(0, 0, 0)$ abhängen (sog. **radialsymmetrische Felder**). Für ein skalares Feld $\varphi(x, y, z)$ mit dieser Eigenschaft gilt somit

$$\varphi(x, y, z) = f(r), \tag{3.168}$$

und für ein solches Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z)$ gilt entsprechend

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{a}(r). \tag{3.169}$$

Es ergeben sich für die vier Differentialoperatoren grad, div, rot, $\Delta$ bei der Anwendung auf die radialsymmetrischen Felder (3.168) und (3.169) die folgenden Ausdrücke („′“ bedeute: Ableitung nach der Variablen $r$):

$$\text{grad } f(r) = \left(\frac{f'(r)}{r}\right)\mathbf{r} \quad (\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3); \tag{3.170}$$

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r); \tag{3.171}$$

$$\text{div } \mathbf{a}(r) = \frac{(\mathbf{a}(r))'}{r}\,\mathbf{r}; \tag{3.172}$$

$$\text{rot } \mathbf{a}(r) = \frac{1}{r}(\mathbf{r} \times (\mathbf{a}(r))'); \tag{3.173}$$

$$\Delta\mathbf{a}(r) = (\mathbf{a}(r))'' + \frac{2}{r}(\mathbf{a}(r))'. \tag{3.174}$$

*Aufgabe 3.15:* Man beweise die Formel (3.171).

*Aufgabe 3.16:* Man berechne grad(**er**) (**e** fester Vektor).

Die Formeln (3.170)–(3.174) bleiben bestehen, wenn die Variable $r$ überall durch $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$

($\mathbf{r}_0$ ein fester Punkt des $R^3$ mit den Koordinaten $x_0, y_0, z_0$) und der Vektor $\mathbf{r}$ überall durch

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{e}_1 + (y - y_0)\mathbf{e}_2 + (z - z_0)\mathbf{e}_3$$

ersetzt werden.

*Beispiel 3.33.* Man berechne die Divergenz des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ einer im Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ befindlichen Punktladung der Größe $Q$ mit dem Potential $\varphi$. Es gilt $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ $(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0)$, und gesucht ist $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi)$ $= -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$. Es gilt also (s. oben) $\operatorname{div}\mathbf{E} = -\Delta\varphi$. Mit $f(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ folgen aus der Formel (3.171) die Gleichungen $\operatorname{div}\mathbf{E} = -\Delta\varphi = -\Delta f(r) = -\left(f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right)$ $= -\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r}\frac{(-1)}{r^2}\right) = 0$ $(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0)$, also $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$.

(Ein Vektorfeld, dessen Divergenz in einem gewissen Gebiet verschwindet, heißt **quellenfrei** in dem betrachteten Gebiet. Das elektrische Feld einer ruhenden Punktladung ist in jedem räumlichen Gebiet, das den Ort $\mathbf{r}_0$ der Ladung nicht enthält, ein quellenfreies Feld. Eine entsprechende Aussage gilt auch für allgemeinere Ladungsverteilungen im Raum (vgl. Band 8).

*Bemerkung 3.15.* Für ebene zylindersymmetrische Felder gelten zu den Formeln (3.170–3.174) analoge Beziehungen, wobei sich aber einige Koeffizienten verändern. Es ist dann $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi(x, y, z) = f(r)$ bzw. $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{a}(r)$ vorausgesetzt. Mit $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ gilt dann (analog zur Formel (3.170))

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r} \tag{3.175}$$

aber (analog zur Formel (3.171))

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) \tag{3.176}$$

(vergleiche auch Formel (3.135)).

Zum Abschluß des Kapitels über Vektoranalysis (= Theorie der skalaren Felder und der Vektorfelder) erwähnen wir noch ohne Beweis den in der Physik wichtigen Fundamentalsatz der Vektoranalysis (vgl. [12]).

**Satz 3.19:** *Jedes im ganzen $R^3$ definierte stetig differenzierbare Vektorfeld* $\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\mathbf{e}_1 + v_2(x, y, z)\,\mathbf{e}_2 + v_3(x, y, z)\,\mathbf{e}_3$, *für welches die Limesrelationen*

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} v_i(x, y, z) = 0; \quad \lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} v_{i|k}(x, y, z) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

*gelten, läßt sich in ein wirbelfreies Feld* $\mathbf{u}(x, y, z)$ *und ein quellenfreies Feld* $\mathbf{w}(x, y, z)$ *zerlegen; d.h., es gelten die Beziehungen*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{w}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{u} &= \mathbf{o}; \\ \operatorname{div}\mathbf{w} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.177}$$

# 4. Der Satz von Taylor und Extremwertaufgaben

## 4.1. Die Taylor-Formel für Funktionen zweier Variabler

Es sei $z = f(x, y)$ eine in einem Gebiet $G$ des $R^2$ $n$-mal stetig (partiell) differenzierbare Funktion und $P(x_0, y_0)$ ein fester Punkt aus $G$. Uns interessiert das Verhalten von $f$ in einer Umgebung von $P(x_0, y_0)$. Dazu betrachten wir den Punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$ für hinreichend kleine Werte von $|h|$ und $|k|$ und führen die folgende Funktion einer reellen Variablen ein:

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad (-\alpha \leqq t \leqq \alpha;\ \alpha > 0 \text{ hinreichend klein}).$$

Mit anderen Worten, wir setzen $x = x_0 + th = x(t)$ und $y = y_0 + tk = y(t)$ und bilden die zusammengesetzte Funktion $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$. Die Funktion $\varphi(t)$ wird nach $t$ differenziert (Ableitungen nach $t$ sind durch „′“ gekennzeichnet). Nach der verallgemeinerten Kettenregel erhalten wir

$$\varphi'(t) = f_{|1}x'(t) + f_{|2}y'(t)$$

und mit $x'(t) = (x_0 + th)' = h$, $y'(t) = (y_0 + kt)' = k$, $\varphi'(t) = f_{|1}h + f_{|2}k = f_{|1}(x(t), y(t))\, h + f_{|2}(x(t), y(t))\, k$. Zweimalige Differentiation nach $t$ liefert entsprechend (der Leser überprüfe dies)

$$\varphi''(t) = f_{|11}h^2 + f_{|12}hk - f_{|21}kh - f_{|22}k^2 = f_{|11}h^2 + 2f_{|12}hk + f_{|22}k^2,$$

wobei die partiellen Ableitungen $f_{|ik}$ an der Stelle $(x(t), y(t))$ zu nehmen sind. Analog ergibt sich die dritte Ableitung

$$\begin{aligned}\varphi'''(t) &= f_{|111}h^3 + f_{|112}h^2k + 2f_{|121}h^2k + 2f_{|122}hk^2 + f_{|221}k^2h + f_{|222}k^3 \\ &= f_{|111}h^3 + 3f_{|112}h^2k + 3f_{|122}hk^2 + f_{|222}k^3,\end{aligned}$$

wobei vom Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit der Reihenfolge der partiellen Ableitungen) Gebrauch gemacht wurde. Um eine übersichtlichere Schreibweise zu erhalten, erinnern wir an die in 3.4. unter den Formeln (3.78) bis (3.84) getroffenen Bezeichnungsvereinbarungen. Wenn wir nun $h$ anstelle von $dx$ und $k$ anstelle von $dy$ setzen und für die Bezeichnung der partiellen Ableitungen von $f$ die Symbole $f_{|1}, f_{|2}$ usw. verwenden, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= [f_{|1}h + f_{|2}k]^{(2)}, \\ \varphi'''(t) &= [f_{|1}h + f_{|2}k]^{(3)}.\end{aligned}$$

Anstelle der Potenzen von $f_{|1}$ bzw. $f_{|2}$ sind die entsprechenden Ableitungen einzusetzen; also ist z. B. $f_{|11}$ anstelle von $(f_{|1})^2$ und analog $f_{|112}$ anstelle von $(f_{|1})^2 f_{|2}$ einzusetzen, während für $h$ und $k$ die üblichen Potenzen und die üblichen Koeffizienten zu benutzen sind. Diese Vereinbarung gilt auch allgemein für die $n$-te Ableitung, so daß wir erhalten

$$\varphi^{(n)}(t) = [f_{|1}h + f_{|2}k]^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei der Ausdruck rechts gemäß der allgemeinen binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \binom{n}{k}$$

zu bilden ist (vgl. auch Abschn. 3.4.). Die auftretenden partiellen Ableitungen von $f$ sind dabei stets an der Stelle $x = x(t) = x_0 + th$; $y = y(t) = y_0 + tk$ einzusetzen. Nun bilden wir den Ausdruck der Taylorformel für die Funktion $\varphi(t)$ mit der Entwicklungsstelle $t_0 = 0$ mit dem Ziel, einen Taylor-Ausdruck für $f$ zu erhalten. Es gilt (s. Band 2)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + R_n(t)$$

mit $R_n(t) = \frac{1}{n!} t^n \varphi^{(n)}(\vartheta t)$ $(0 < \vartheta < 1)$. Speziell erhalten wir für $t = 1$ die Beziehung

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + R_n(1) \quad (4.1)$$

mit $R_n(1) = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\vartheta)$ $(0 < \vartheta < 1)$.

Zur Bestimmung der einzelnen Ausdrücke $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... verwenden wir die oben eingeführte Schreibweise und erhalten (man beachte, daß jetzt $t = 0$ gilt)

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0),$$
$$\varphi'(0) = f_{|1}(x_0, y_0)\, h + f_{|2}(x_0, y_0)\, k = \mathrm{d}f$$

(vgl. Abschnitt 3.4., man setze dort $\mathrm{d}x = h$, $\mathrm{d}y = k$),

$$\varphi''(0) = f_{|11}(x_0, y_0)\, h^2 + 2f_{|12}(x_0, y_0)\, hk + f_{|22}(x_0, y_0)\, k^2$$
$$= [f_{|1}(x_0, y_0)\, h + f_{|2}(x_0, y_0) k]^{(2)} = \mathrm{d}^2 f$$

und allgemein

$$\varphi^{(m)}(0) = [f_{|1}(x_0, y_0)\, h + f_{|2}(x_0, y_0)\, k]^{(m)} = \mathrm{d}^m f \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Andererseits ist

$$\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) \quad \text{und}$$
$$\varphi^{(n)}(\vartheta) = [f_{|1}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, h + f_{|2}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, k]^{(n)}.$$

Aus (4.1) folgt damit endgültig, wenn wir die zuletzt notierten Ausdrücke einsetzen,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[f_{|1}(x_0, y_0)\, h + f_{|2}(x_0, y_0)\, k] \\ &\quad + \frac{1}{2!}[f_{|1}(x_0, y_0)\, h + f_{|2}(x_0, y_0)\, k]^{(2)} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}[f_{|1}(x_0, y_0)\, h + f_{|2}(x_0, y_0)\, k]^{(n-1)} + R_n(h, k) \qquad (4.2) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{d}^{n-1} f + R_n(h, k) \qquad (4.2') \end{aligned}$$

mit

$$R_n(h, k) = \frac{1}{n!}[f_{|1}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, h + f_{|2}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)\, k]^{(n)} \quad (0 < \vartheta < 1). \qquad (4.3)$$

*Bemerkung 4.1:* Gelegentlich gibt man das **Restglied $R_n(h, k)$ in Integralform** an; es lautet dann

$$R_n(h,k) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,[f_{|1}(x_0+th, y_0+tk)\,h + f_{|2}(x_0+th, y_0+tk)k]^{(n)}\,\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

Die Formel (4.2) bzw. (4.2′) heißt die **Taylorformel** für $f(x, y)$ mit der **Entwicklungsstelle** $(x_0, y_0)$ und dem **Restglied der Ordnung** $n$. Für Funktionen von mehr als zwei Variablen gilt eine analoge Taylorformel, die man sich leicht aus der Beziehung (4.2) durch Verallgemeinerung herstellt.

*Bemerkungen und Beispiele*

1. Setzen wir in dem Ausdruck (4.2) für $n$ speziell den Wert $n = 1$ ein, so erhalten wir die Beziehung

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + R_1(h, k)$$

oder

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_{|1}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)\,h + f_{|2}(x_0+\vartheta h, y_0+\vartheta k)\,k \quad (0<\vartheta<1),$$

mit anderen Worten, für $n = 1$ geht die Taylorformel in den Mittelwertsatz (s. 3.3.4.) für Funktionen mehrerer Variabler (hier: zweier Variabler) über.

2. Setzt man $x_0 + h = x$, $y_0 + k = y$, so gilt $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, und aus (4.2) wird die Beziehung

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{1}{1!}[f_{|1}(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{|2}(x_0,y_0)(y-y_0)] \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{|1}(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{|2}(x_0,y_0)(y-y_0)]^{(2)} \\ &+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!}[f_{|1}(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{|2}(x_0,y_0)(y-y_0)]^{(n-1)} \\ &+ R_n(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

mit

$$R_n(x-x_0, y-y_0) = \frac{1}{n!}[f_{|1}(x_0+\vartheta(x-x_0), y_0+\vartheta(y-y_0))(x-x_0) + f_{|2}(x_0+\vartheta(x-x_0), y_0+\vartheta(y-y_0))(y-y_0)]^{(n)} \quad (0<\vartheta<1). \tag{4.5}$$

Wählt man speziell $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, so entsteht aus der letzteren Beziehung die sog. *Formel von Mac Laurin* (zur Vereinfachung der Schreibweise arbeiten wir mit dem Summenzeichen)

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}[f_{|1}(0,0)\,x + f_{|2}(0,0)\,y]^{(k)} + R_n(x,y)$$

mit

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n!}[f_{|1}(\vartheta x, \vartheta y)\, x + f_{|2}(\vartheta x, \vartheta y)\, y]^{(n)} \quad (0 < \vartheta < 1). \tag{4.6}$$

In dieser letzten Form wird die Taylorformel sehr häufig verwendet.

3. Bricht man die Taylorformel (in der Form unter 2. oben) nach den Gliedern mit den ersten Ableitungen ab, so erhält man eine lineare Näherungsfunktion $f_1(x, y)$ für $f(x, y)$, $f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_{|1}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_{|2}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$. Faßt man (vgl. Abschnitt 2.1.) $z = f(x, y)$ als Darstellung einer Fläche im $(x, y, z)$-Koordinatensystem auf, so liefert $z = f_1(x, y)$ die Darstellung der Tangentialebene dieser Fläche im Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Mit Benutzung des vollständigen Differentials gilt die Gleichung

$$f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f.$$

4. Bricht man die Taylorformel (in der Form unter 2. oben) nach den Gliedern mit den zweiten Ableitungen ab, so erhält man eine quadratische Näherungsfunktion $f_q(x, y)$ für $f(x, y)$,

$$\begin{aligned} f_q(x, y) = {} & f(x_0, y_0) + f_{|1}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_{|2}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} f_{|11}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^2 + 2 f_{|12}(x_0, y_0)\,(x - x_0)\,(y - y_0) \\ & + f_{|22}(x_0, y_0)\,(y - y_0)^2 = f_1(x, y) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f. \end{aligned}$$

Die Gleichung $z = f_q(x, y)$ liefert die Darstellung einer Fläche zweiter Ordnung, die die gegebene Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ berührt und lokal approximiert. Im folgenden Beispiel 4.1 ist diese Fläche ein hyperbolisches Paraboloid; im Beispiel 4.2 erhalten wir ein (zweischaliges) Rotationshyperboloid.

Das Verhalten der quadratischen Näherungsfunktion $f_q(x, y)$ ist vor allem für die Diskussion von Extremwertaufgaben wesentlich (s. Abschnitt 4.2.).

*Beispiel 4.1:* Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x, y) = (\sin x)\,(\sin y)$ und entwickeln diese Funktion an der Stelle $(0, 0)$ bis zum Restglied $R_3$. Wir legen uns eine Tabelle der partiellen Ableitungen von $f$ bis zur 3. Ordnung einschließlich an.

$$\begin{aligned} & f_{|1}(x, y) = f_{|1} = \cos x \sin y; \quad && f_{|2} = \sin x \cos y; \quad && f_{|12} = \cos x \cos y; \\ & f_{|11} = -\sin x \sin y; && f_{|22} = -\sin x \sin y; && f_{|112} = -\sin x \cos y; \\ & f_{|111} = -\cos x \sin y; && f_{|222} = -\sin x \cos y; && f_{|122} = -\cos x \sin y. \end{aligned}$$

Die speziellen Werte der Funktion $f$ und ihrer ersten und zweiten (partiellen) Ableitungen an der Entwicklungsstelle $(0, 0)$ lauten:

$$\begin{aligned} & f(0, 0) = 0; \quad f_{|1}(0, 0) = 0; \quad f_{|2}(0, 0) = 0; \quad f_{|12}(0, 0) = 1; \\ & f_{|11}(0, 0) = 0; \quad f_{|22}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mittels der Formel (4.6) für $n = 3$ die Entwicklung

$$\sin x \cdot \sin y = f(0,0) + \frac{1}{1!}[f_{|1}(0,0)\,x + f_{|2}(0,0)\,y]$$

$$+ \frac{1}{2!}[f_{|11}(0,0)\,x^2 + 2f_{|12}(0,0)\,xy + f_{|22}(0,0)\,y^2] + R_3(x,y)$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot 2xy + R_3 = xy + R_3$$

mit

$$R_3 = \frac{1}{3!}[f_{|1}(\vartheta x, \vartheta y)\,x + f_{|2}(\vartheta x, \vartheta y)\,y]^{(3)}$$

$$= \frac{1}{6}[f_{|111}(\vartheta x, \vartheta y)\,x^3 + 3f_{|112}(\vartheta x, \vartheta y)\,x^2 y + 3f_{|122}(\vartheta x, \vartheta y)\,xy^2$$
$$+ f_{|222}(\vartheta x, \vartheta y)\,y^3]$$

$$= \frac{1}{6}[-x^3 \cos \vartheta x \sin \vartheta y + 3x^2 y(-\sin \vartheta x \cos \vartheta y)$$
$$- 3xy^2 \cos \vartheta x \sin \vartheta y - y^3 \sin \vartheta x \cos \vartheta y]$$

$$= -\frac{1}{6}[(x^3 + 3xy^2) \cos \vartheta x \sin \vartheta y + (3x^2 y + y^3) \sin \vartheta x \cos \vartheta y]$$
$$(0 < \vartheta < 1).$$

Das Restglied $R_3$ läßt sich wegen $\cos \vartheta x \leqq 1$; $\sin \vartheta x_i \leqq 1$ betragsmäßig wie folgt abschätzen (Anwendung der Dreiecksungleichung):

$$|R_3| \leqq \tfrac{1}{6}(|x|^3 + 3|x|\,|y^2 - 3x^2 y + y^3|) = \tfrac{1}{6}(|x| + |y|)^3.$$

Für kleine Werte von $(|x| + |y|)$ wird daher $R_3$ von 3. Ordnung klein, d.h., für nahe beim Nullpunkt gelegene Punkte $P(x, y)$ verhält sich die Funktion $f(x, y) = \sin x \sin y$ wie die Funktion $g(x, y) = xy$. Bei der Darstellung von $f(x, y)$ als Fläche im Raum $R^3$ der Punkte $P(x, y, z)$ mit $z = f(x, y) = (\sin x)(\sin y)$ können wir daher näherungsweise diese Fläche durch die Fläche 2. Ordnung $z = xy$ (hyperbolisches Paraboloid, s. [3] S. 197) ersetzen.

*Beispiel 4.2:* Als weiteres Beispiel betrachten wir das Potential einer Punktladung, die sich im Punkt (0, 0, 0) befindet, und entwickeln dieses in einen Taylorausdruck an der Stelle (1, 0, 0). Dieses Potential ist (bis auf einen hier weggelassenen Zahlenfaktor, s. auch Beisp. 3.27, Beisp. 3.28) gleich der Funktion

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}};$$

d.h., es liegt eine Funktion von drei Veränderlichen vor. Wir wollen diesmal so vorgehen, daß wir die Entwicklung mit dem Restglied $R_3$ abbrechen, dieses Restglied aber

nicht näher berechnen, sondern an einzelnen Zahlenbeispielen uns ein Bild von der Güte der Approximation der Funktion $\varphi(x, y, z)$ durch die ersten Glieder der Taylorformel (ohne das Restglied) verschaffen. Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen von $\varphi(x, y, z)$ allgemein und anschließend an der interessierenden Stelle $(1, 0, 0)$. Es gelten die Beziehungen (s. auch Abschnitt 3.6.2.) $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

$$\varphi_{|1} = -\frac{x}{r^3}; \qquad \varphi_{|2} = -\frac{y}{r^3}; \qquad \varphi_{|3} = -\frac{z}{r^3};$$

$$\varphi_{|11} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}; \qquad \varphi_{|12} = \varphi_{|21} = \frac{3xy}{r^5}; \qquad \varphi_{|22} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

$$\varphi_{|13} = \varphi_{|31} = \frac{3xz}{r^5}; \qquad \varphi_{|23} = \varphi_{|32} = \frac{3yz}{r^5}; \qquad \varphi_{|33} = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

Diese Funktionen haben an der Stelle $(1, 0, 0)$ in der obigen Reihenfolge die Werte $-1; 0; 0; 2; 0; -1; 0; 0; -1$ und ferner gilt noch $\varphi(1, 0, 0) = 1$. Die Taylorformel lautet allgemein mit dem Restglied $R_3$ und dann mit den speziellen Werten

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(1, 0, 0) + \frac{1}{1!}[\varphi_{|1} \cdot (x - 1) + \varphi_{|2} \cdot y + \varphi_{|3} \cdot z]$$

$$+ \frac{1}{2!}[\varphi_{|11}(x - 1)^2 + 2\varphi_{|12} \cdot (x - 1)\, y + \varphi_{|22} \cdot y^2$$

$$+ 2\varphi_{|13} \cdot (x - 1)\, z + 2\varphi_{|23} \cdot yz + \varphi_{|33} \cdot z^2] + R_3,$$

wobei die partiellen Ableitungen an der Stelle $(1, 0, 0)$ einzusetzen sind. Es gilt also

$$\varphi(x, y, z) = 1 + (-1)(x - 1) + \frac{1}{2!}[2(x - 1)^2 + (-1)\, y^2 + (-1)\, z^2] + R_3$$

$$= 3 - 3x + x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + R_3.$$

Den ersten Anteil auf der rechten Seite letzterer Gleichung bezeichnen wir mit $\varphi^*(x, y, z)$, wir setzen also

$$\varphi^*(x, y, z) = 3 - 3x + x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}.$$

Es gilt (s. o.)

$$\varphi(x, y, z) = \varphi^*(x, y, z) + R_3.$$

In dieser letzteren Schreibweise sehen wir den formelmäßig einfacheren Ausdruck (keine Wurzeln) $\varphi^*$ als eine Näherung von $\varphi$ an. Die Funktion $\varphi^*(x, y, z)$ ist ein Polynom zweiten Grades in $x, y, z$ und rechnerisch in ihren Eigenschaften leicht zu überschauen. Wir verzichten hier auf eine Restgliedabschätzung und stellen nur einige

Funktionswerte (Zahlenwerte) von $\varphi$ und $\varphi^*$ gegenüber.

| $(x, y, z)$ | $\varphi(x, y, z)$ | $\varphi^*(x, y, z)$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|
| $(1, 0, 0)$ | 1 | 1 | 0 |
| $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ | 2 | 1,75 | 0,25 |
| $(\frac{3}{2}, 0, 0)$ | $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ | 0,75 | −0,08 |
| $(1, 1, 0)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071$ | 0,5000 | 0,2071 |
| $(1, 1, 1)$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}5774$ | 0 | 0,5774 |

Man erkennt aus dieser Tabelle, daß die Funktion $\varphi^*$ die Werte der Funktion $\varphi$ in einer gewissen Umgebung der Entwicklungsstelle $(1, 0, 0)$ relativ gut annähert oder approximiert, so daß wir in einer solchen Umgebung die Funktion $\varphi^*$ als einen Ersatz, als eine Approximation für die Funktion $\varphi$ benutzen können. In größerer Entfernung von der Entwicklungsstelle wird die Genauigkeit der Annäherung von $\varphi$ durch $\varphi^*$ zunehmend schlechter.

Ergänzend werde noch auf den folgenden einfachen geometrischen Sachverhalt hingewiesen.

Die Äquipotentialfläche $\varphi(x, y, z) = 1$ enthält den Punkt $(1, 0, 0)$, um welchen wir die Funktion $\varphi(x, y, z)$ entwickelt haben.

Die Niveauflächen

$$2 - x = 1$$

bzw.

$$(\varphi^*(x, y, z) \equiv)\ 3 - 3x - x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 1,$$

die sich als Näherungsflächen für die Äquipotentialfläche $\varphi(x, y, z) = 1$ ergeben, wenn die Taylorentwicklung bei den linearen bzw. den quadratischen Gliedern in $x, y, z$ abgebrochen wird, liefern die Tangentialebene der Äquipotentialfläche $\varphi(x, y, z) = 1$ bzw. eine Fläche zweiten Grades (hier: ein zweischaliges Rotationshyperboloid mit dem einen Scheitel $(1, 0, 0)$ und der $x$-Achse als Drehachse), die die Äquipotentialfläche im Punkt $(1, 0, 0)$ berührt.

## 4.2. Extremwertaufgaben

Im Rahmen der Operationsforschung hat die Frage nach den bestmöglichen (weil wirtschaftlichsten) Lösungen bestimmter praktischer Probleme der Theorie der Extremwerte besonderen Aufschwung gegeben. Insbesondere sind Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Restriktionen) für die Anwendungen wichtig, weil in der Praxis gerade ein maximaler Nutzeffekt „bei Einhaltung gewisser Bedingungen" zu erzielen ist, z. B. die höchste Tagesproduktion in einem Betrieb bei vorgegebenem Energieverbrauch. Das Kapitel über Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen verdient also besonderes Interesse und kann als ein Teilgebiet der Disziplin „Optimierung" angesehen werden. Bevor wir uns aber dieser Problematik zuwenden, müssen wir die Frage nach den Extremwerten schlechthin (also ohne Nebenbedingungen)

diskutieren. Unsere Entwicklungen knüpfen dabei an die Ausführungen über Extremwerte in Band 2, Abschnitt 7.3., an (vgl. auch Bd. 16).

### 4.2.1. Notwendige Bedingungen für Extremwerte

Wir behandeln die Frage nach der Bestimmung von Extremwerten von Funktionen mehrerer Variablen am Beispiel von Funktionen zweier Variabler und geben anschließend die Verallgemeinerung auf den Fall der Funktionen von $n \geqq 2$ Variablen an.

**Definition 4.1:** *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine in einem Gebiet $G < R^2$ definierte und dort differenzierbare reelle Funktion und $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ein (innerer) Punkt von G. Der Punkt $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ heißt* **Stelle eines (relativen oder lokalen) Maximums bzw. Minimums,** *wenn die Ungleichung*

$$f(x_1, x_2) < f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \tag{4.7}$$

*bzw.*

$$f(x_1, x_2) > f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \tag{4.8}$$

*für alle Punkte $P(x_1, x_2)$ aus einer reduzierten Umgebung von $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ gilt. Werden in der Ungleichung* (4.7) *bzw.* (4.8) *die Zeichen „$<$" bzw. „$>$" durch „$\leqq$" bzw. „$\geqq$" ersetzt, so sprechen wir von einem* **(relativen) Maximum bzw. Minimum von $f(x_1, x_2)$ „im weiteren Sinne".** *Hat $f(x_1, x_2)$ bei $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ein Maximum oder Minimum, so sagen wir, $f(x_1, x_2)$ hat bei $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ einen (relativen) Extremwert bzw. Extremwert im weiteren Sinne.*

*Gelten die Ungleichungen* (4.7) *bzw.* (4.8) *mit „$\leqq$" bzw. „$\geqq$" für* **alle** *Punkte $P(x_1, x_2) \in G$, so heißt $P(x_1^0, x_2^0)$ eine Stelle des* **absoluten Maximums** *bzw.* **Minimums** *von $f(x_1, x_2)$ in G.*

**Satz 4.1:** *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine in einem Gebiet $G < R^2$ definierte und dort differenzierbare reelle Funktion. Ist $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ eine Stelle eines relativen Maximums (bzw. Minimums), so gelten die Gleichungen*

$$\left| \begin{aligned} f_{|1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= 0, \\ f_{|2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{4.9}$$

*Beweis des Satzes 4.1:* Es sei z.B. $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ eine Stelle eines relativen Maximums; es gilt also die Ungleichung (4.7). Wir betrachten die Funktionen $\varphi_1(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)})$ und $\varphi_2(x_2) = f(x_1^{(0)}, x_2)$, die nur von einer Variablen abhängen. Die Funktion $\varphi_1(x_1)$ besitzt wegen (4.7) an der Stelle $x_1 = x_1^{(0)}$ ein (relatives) Maximum. Aus der Extrem-

werttheorie von Funktionen einer reellen Variablen (Band 2, 7.3.) folgt, daß die Gleichung

$$\left.\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right|_{x_1=x_1^{(0)}} = 0$$

gilt. Es gilt aber $\frac{d\varphi_1}{dx_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2^{(0)})$. Somit folgt die erste der Gleichungen (4.9). Die zweite Gleichung ergibt sich entsprechend durch Betrachtung der Funktion $\varphi_2(x_2)$.

*Bemerkung 4.2:* Die Gleichungen (4.9) gelten auch, wenn $f(x_1, x_2)$ bei $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ einen (relativen) Extremwert im weiteren Sinne besitzt. Die Untersuchung konkreter Beispiele zeigt nun, daß die Bedingung (4.9) nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes an der Stelle $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ist.

*Beispiel 4.3:* Es sei $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ $(-\infty < x_1, x_2 < +\infty)$. Es gilt $f_{|1} = x_2, f_{|2} = x_1$. Die Gleichung (4.9) ist (genau dann) erfüllt, wenn $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gilt. Hat die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ bei $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = P(0, 0)$ einen Extremwert? Dazu betrachten wir die Funktion $f(x_1, x_2)$ auf der Geraden $g^+$ mit der Parameterdarstellung $x_1 = t$, $x_2 = t$ $(-\infty < t < +\infty)$. Die Gerade $g^+$ geht durch den Punkt $P(0, 0)$, und es gilt auf $g^+$ die Gleichung

$$f(x_1, x_2) \mid g^+ = f(t, t) = t^2 \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Wegen $f(0, 0) = 0$ ist $f(0, 0) < f(t, t)$ für $0 < t$. In jeder Umgebung von $P(0, 0)$ gibt es also Punkte mit größerem Funktionswert als an dieser Stelle. Andererseits betrachten wir die Funktion $f(x_1, x_2)$ auf der Geraden $g^-$ mit der Parameterdarstellung $x_1 = t$, $x_2 = -t$ $(-\infty < t < +\infty)$. Die Gerade $g^-$ geht durch den Punkt $P(0, 0)$, schneidet die Gerade $g^+$ unter rechtem Winkel, und es gilt auf $g^-$ die Gleichung

$$f(x_1, x_2) \mid g^- = f(t, -t) = -t^2 \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Es gilt also $f(0, 0) > f(t, -t)$ für $0 < |t|$. In jeder Umgebung von $P(0, 0)$ gibt es also Punkte mit kleinerem Funktionswert als an dieser Stelle. Die Stelle $P(0, 0)$ kann daher weder eine Maximal- noch eine Minimalstelle (auch nicht im weiteren Sinne) der Funktion $f(x_1, x_2)$ sein, denn es gibt keine Umgebung von $P(0, 0)$, in der alle Funktionswerte entweder größer (oder gleich) als $f(0, 0)$ oder kleiner (oder gleich) als $f(0, 0)$ sind. Es sind also zusätzliche Entscheidungsregeln über das tatsächliche Vorliegen eines Extremwertes erforderlich. Wir nennen einen Punkt $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, für den die Gleichungen (4.9) gelten, einen **kritischen Punkt** der Funktion $f(x_1, x_2)$. Unsere Frage muß also lauten: Wann ist ein kritischer Punkt von $f(x_1, x_2)$ eine Extremalstelle?

### 4.2.2. Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Extremwertes

**Satz 4.2:** *Es sei $f(x_1, x_2)$ eine in einem Gebiet $G \subset R^2$ definierte reelle Funktion, die in $G$ zweimal stetig differenzierbar ist. Ferner sei $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ein kritischer Punkt von $f$ in $G$, und es sei $D$ die sogenannte* **Diskriminante** *von $f(x_1, x_2)$ im Punkt $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$,*

*die durch die Gleichung*

$$D = f_{|11} f_{|22} - (f_{|12})^2 \tag{4.10}$$

*definiert ist, wobei die auftretenden partiellen Ableitungen an der Stelle* $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$ *zu nehmen sind. Dann gelten die folgenden Entscheidungsregeln für das Vorliegen eines Extremwertes an der kritischen Stelle* $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$:

a) *Ist* $D < 0$, *so hat* $f(x_1, x_2)$ *an der Stelle* $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ *keinen Extremwert.*

b) *Ist* $D > 0$ *und* $f_{|11}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) > 0$, *so hat* $f(x_1, x_2)$ *an der Stelle* $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ *ein relatives Minimum.*

c) *Ist* $D > 0$ *und* $f_{|11}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) < 0$, *so hat* $f(x_1, x_2)$ *an der Stelle* $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ *ein relatives Maximum.*

*Bemerkung 4.3:* Ist unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 die Gleichung $D = 0$ an der Stelle $P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ erfüllt, so läßt sich auf Grund dieser Tatsache allein noch keine Entscheidung über das Vorliegen oder Nichtvorliegen eines Extremwertes treffen. Zum Beispiel hat die Funktion $f_1(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^4$ an der Stelle $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$ ein relatives Minimum; zum anderen hat die Funktion $f_2(x_1, x_2) = (x_1)^3 + (x_2)^3$ an der Stelle $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$ keinen Extremwert. Für beide Funktionen gilt an der kritischen Stelle $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0$ die Gleichung $D = 0$. Stellt man also fest, daß an einer kritischen Stelle der Funktion $f(x_1, x_2)$ die Beziehung $D = 0$ gilt, so sind zusätzliche Untersuchungen über das Vorliegen eines Extremwertes erforderlich.

Für einen vollständigen Beweis des Satzes 4.2 verweisen wir auf [7].

Damit aber die Nützlichkeit der Taylorformel besser zum Ausdruck kommt, beweisen wir wenigstens die Teilaussage Satz 4.2b).

*Beweis* von 4.2b): Es sei $(x_0, y_0)$ eine kritische Stelle von $f(x, y)$, und es seien $h, k$ reelle Zahlen mit $h^2 + k^2 = \delta^2$ $(\delta > 0)$ sowie

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + th \\ y &= y_0 + tk \end{aligned}\right\}, 0 \leqq t \leqq 1,$$

beliebige Punkte aus einer $\delta$-Umgebung von $(x_0, y_0)$, wobei über den Wert von $\delta$ weiter unten noch verfügt wird.

Die Taylorsche Formel liefert bei Verwendung des Restgliedes zweiter Ordnung in jeder solchen (hinreichend kleinen) $\delta$-Umgebung

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \frac{1}{1!} f_{|1}((x_0, y_0)\, th + f_{|2}(x_0, y_0)\, tk) \\ &+ \frac{1}{2!}(f_{|11}(x_0 + \vartheta th, y_0 + \vartheta tk)\, t^2h^2 \\ &+ 2f_{|12}(x_0 + \vartheta th, y_0 + \vartheta tk)\, t^2hk + f_{|22}(x_0 + \vartheta th, y_0 + \vartheta tk)\, t^2k^2) \\ &\qquad (0 < \vartheta < 1). \end{aligned}$$

Da $(x_0, y_0)$ ein kritischer Punkt von $f$ ist, verschwindet die erste Klammer, und wir erhalten

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{t^2}{2}(a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2) = f(x_0, y_0) + \frac{t^2}{2} Q(h, k),$$

wobei zur Abkürzung

$$a_{11} = f_{|11}(x_0 + \vartheta th, y_0 + \vartheta tk); \quad a_{12} = f_{|12}(x_0 + \vartheta th, y_0 + \vartheta tk);$$
$$a_{22} = f_{|22}(x_0 + \vartheta th, y_0 + \vartheta tk); \quad Q(h, k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2$$

gesetzt wurde.

Somit gilt

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{t^2}{2} Q(h, k). \tag{*}$$

$Q(h, k)$ ist eine quadratische Form, deren Koeffizienten $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ nach Voraussetzung ($f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar) stetig von $\vartheta$, $t$, $h$, $k$ abhängen. Speziell gelten für $t \to 0$ die Limesrelationen

$$\lim_{t\to 0} a_{11} = f_{|11}(x_0, y_0); \quad \lim_{t\to 0} a_{12} = f_{|12}(x_0, y_0);$$
$$\lim_{t\to 0} a_{22} = f_{|22}(x_0, y_0).$$

Es gelte nun $f_{|11}(x_0, y_0) > 0$ und $D = f_{|11}f_{|22} - f^2{}_{|12} > 0$ (an der Stelle $(x_0, y_0)$). Aus Stetigkeitsgründen ($f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar) gilt dann

$$a_{11} > 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0 \tag{**}$$

für hinreichend kleines $\delta > 0$ und alle $\vartheta$, $t$, $h$, $k$ mit $0 < \vartheta < 1$, $t \leqq 1$, $h^2 + k^2 = \delta^2$.

Wir formen um (man beachte die Relation $a_{11} > 0$):

$$Q(h, k) = a_{11}\left(\left(h + \frac{a_{12}}{a_{11}}k\right)^2 + \frac{k^2}{a_{11}^2}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\right).$$

Da wegen $h^2 + k^2 = \delta^2$ nicht gleichzeitig $h$ und $k$ gleich null sein können, ist $Q(h, k)$ wegen (**) positiv. Folglich ergibt sich aus (*) die Ungleichung

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$$

für alle $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, die in einer hinreichend kleinen $\delta$-Umgebung von $(x_0, y_0)$ liegen. Somit besitzt $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ ein relatives Minimum. Entsprechend wird die Aussage c) bewiesen.

*Beispiel 4.4:* Es sei $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$. Gesucht sind die Extremwerte von $f(x, y)$. Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = x - 4y + 3$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 18y - 14$. Als notwendige Bedingung für eine kritische Stelle von $f(x, y)$ haben wir die beiden Gleichungen

$$x - 4y + 3 = 0,$$
$$-4x + 18y - 14 = 0,$$

aus denen sich $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ ergibt. Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -4$ erhalten wir $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 18 - 16 = 2$; also $D > 0$. Es ist also in

$P(1, 1)$ ein Extremwert von $f(x, y)$ vorhanden, der wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 > 0$ ein Minimum ist. Der Wert von $f(x, y)$ beträgt dort $f(1, 1) = -5$.

*Beispiel 4.5:* Die Summe $S = x + y + z$ der Kantenlängen $x, y, z$ eines Quaders sei gegeben. Wie lang sind diese Kanten zu wählen, damit der Oberflächeninhalt des Quaders maximal wird? Es sei $A$ der Oberflächeninhalt des betrachteten Quaders, dann gilt $A = 2(xy + yz + xz)$. Wir eliminieren die Variable $z$ durch die Beziehung $z = S - x - y$ ($S$ ist konstant). Daher wird $A = f(x, y) = 2(xy + y(S - x - y) + x(S - x - y)) = 2(-x^2 - xy - y^2 + Sx + Sy)$. Als notwendige Bedingung für eine kritische Stelle von $f(x, y)$ erhalten wird durch Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen die Beziehungen

$$2(-2x - y + S) = 0,$$
$$2(- x - 2y + S) = 0,$$

woraus sich $x = \frac{1}{3} S$, $y = \frac{1}{3} S$ und daher auch $z = \frac{1}{3} S$ ergibt. Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -2$ gilt $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 12$; d.h., $D$ ist positiv. Also liegt ein Extremwert für $A$ an der Stelle $x = \frac{1}{3} S$; $y = \frac{1}{3} S$ vor, der wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^3} = -4 < 0$ ein Maximum ist. Der gesuchte Quader ist ein Würfel; die maximale Oberfläche $A_{max}$ ist gleich $f(\frac{1}{3} S; \frac{1}{3} S) = \frac{2}{3} S^2$.

Zum Abschluß dieses Abschnittes formulieren wir noch die einfachsten Kriterien für das Vorliegen eines relativen Extremwertes einer Funktion von $n$ Variablen. Alle Definitionen sind vom Fall der Funktionen zweier Variabler her sinngemäß zu übertragen.

**Satz 4.3:** *Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine in einem Gebiet des $R^n$ definierte und dort stetig differenzierbare Funktion mit reellen Werten. Besitzt $f(x_1, \ldots, x_n)$ an der Stelle $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ einen (relativen) Extremwert, so gilt notwendig*

$$f_1(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0;\ f_2(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0;\ \ldots;\ f_n(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \tag{4.11}$$

*oder kürzer*:

$$\mathrm{d}f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0. \tag{4.11'}$$

Zur Entscheidung über das Vorliegen eines (relativen) Extremwertes an einer kritischen Stelle einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion untersucht man die quadratische Form der Matrix (sog. **Hesse-Matrix**) der zweiten partiellen Ableitungen $\mathbf{H} = (a_{ik})$ mit

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = f_{ik}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

d.h. die Form

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i y_k. \tag{4.12}$$

Dann gilt der folgende Satz:

**Satz 4.4** *(Entscheidungsregel):*

1. *Ist die quadratische Form* $Q = Q(\mathbf{y})$ (s. (4.12)) *für alle von* $\mathbf{o}$ *verschiedenen Vektoren* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *positiv (man sagt: Q ist positiv definit), so hat* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *an der Stelle* $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *ein (relatives) Minimum.*

2. *Ist die quadratische Form* $Q = Q(\mathbf{y})$ (s. (4.12)) *für alle von* $\mathbf{o}$ *verschiedenen Vektoren* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *negativ (man sagt: Q ist negativ definit), so hat* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *an der Stelle* $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *ein (relatives) Maximum.*

3. *Nimmt die quadratische Form* $Q = Q(\mathbf{y})$ (s. (4.12)) *sowohl positive als auch negative Werte an (man sagt: Q ist indefinit), so hat* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *an der Stelle* $P(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *keinen Extremwert.*

(Für die Beweise der Sätze 4.3 und 4.4 siehe z.B. [4].)

*Bemerkungen:*

1. Für den Fall, daß die quadratische Form $Q = Q(\mathbf{y})$ für alle Vektoren $\mathbf{y}$ nichtnegativ bzw. nichtpositiv ist, aber für gewisse $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ gleich null ist (man sagt: $Q$ ist positiv bzw. negativ semidefinit), sind zusätzliche Untersuchungen erforderlich (der obige Satz liefert dann keine Entscheidung).

2. Für $n = 2$ sind die Aussagen der Sätze 4.2 und 4.4 gleichwertig. Dies zeigt eine einfache, hier übergangene Betrachtung.

3. In vielen praktischen Fällen ergibt sich das Vorliegen eines Extremwertes an der untersuchten kritischen Stelle nach folgendem einfachen Prinzip, das die Anwendung der Entscheidungsregel (Satz 4.4) erübrigt (und auf dem Weierstraßschen Satz über stetige Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Definitionsbereichen im $R^n$ beruht):

Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ auf der Abschließung $\overline{G}$ eines beschränkten Gebietes $G < R^n$ definiert und stetig und in $G$ differenzierbar, besitzt ferner $f(x_1, \ldots, x_n)$ in $G$ einen einzigen kritischen Punkt $P_0$ und gilt die Ungleichung $f(P_0) < f(P)$ für alle Randpunkte $P$ von $G$ (d. h. für alle $P \in (\overline{G} \setminus G)$), so ist $P_0$ die Stelle des absoluten Minimums von $f(x_1, \ldots, x_n)$ in $\overline{G}$ (d. h. $f(P_0) \leqq f(Q)$ für alle $Q \in (\overline{G} \setminus \{P_0\})$). Eine entsprechende Aussage gilt für das absolute Maximum von $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Häufig gegebene Begründungen der Form „nach der Anschauung ist klar, daß $f(x_1, \ldots, x_n)$ an der gefundenen kritischen Stelle einen Extremwert besitzt" entbehren oft jeder Grundlage.

4. Zur praktischen Benutzung der Entscheidungsregel ist die folgende Tatsache nützlich: Die quadratische Form $Q(y)$ ist genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle Eigenwerte der zugehörigen symmetrischen Matrix $(a_{ik})$ positiv (negativ) sind. (Auf diese Weise ergibt sich auch der Satz 4.2.; vgl. hierzu auch Bd. 13; 4.1., 4.2.5.)

### 4.2.3. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Extremwertbetrachtungen finden bei vielen Problemen sowohl in Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie im Rahmen der sog. „Operationsforschung" zahlreiche Anwendungen. Das Ziel besteht immer darin, unter allen möglichen Varianten diejenige zu finden, die im Hinblick auf ein besonderes Merkmal (z.B. Kosten in Mark; Energieverbrauch in kWh) eine bestmögliche Variante darstellt. Diese bestmögliche oder, wie man sagt, „optimale" Variante realisiert unter den gegebenen Bedingungen z.B. die geringsten (= minimalen) Kosten oder den geringsten Energieverbrauch. Das betrachtete Merkmal heißt auch **„Zielfunktion"**, wenn es als eine Funktion der Variablen, die die möglichen Varianten beschreiben, dargestellt werden kann. Rein äußerlich haben wir damit die folgende Problemstellung. Gegeben ist eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, die in einer gewissen Menge $G$ des $R^n$ erklärt ist. Gesucht sind alle Punkte $P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ aus $G$, in denen $f(x_1, \ldots, x_n)$ einen minimalen (bzw. maximalen) Wert annimmt, d.h. für welche die Ungleichung

$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \leqq f(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.13}$$

für alle $P(x_1, \ldots, x_n)$ aus $G$ gilt. Ist die Menge $G$ ein beschränktes Gebiet des $R^n$, so liegt die in den vorangegangenen Abschnitten behandelte Problemstellung der Bestimmung relativer Extremwerte vor: zur Bestimmung der Punkte $P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ermittelt man alle relativen Minimalstellen und nimmt alle Punkte davon, in denen die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ den kleinsten Wert der (endlich vielen) relativen Minimalwerte annimmt. (Dieser kleinste Wert heißt auch das **absolute Minimum** von $f(x_1, \ldots, x_n)$ in $G$.) In der Praxis liegt jedoch meist der Fall vor, daß die Menge $G$ kein Gebiet ist, sondern u.U. sogar eine recht komplizierte Struktur hat. Wir betrachten hier nur den Fall, in welchem die Menge $G$ durch Gleichungen beschrieben werden kann. Ist z.B. die Menge $G$ eine Kugeloberfläche im $R^3$ mit dem Mittelpunkt $(x_0, y_0, z_0)$ und dem Radius $a > 0$, so lautet die Beschreibung der Menge $G$ in Gleichungsform:

$$G = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2\}$$

oder kurz

$$G: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

oder auch

$$G: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0.$$

Gerade die letztgenannte Form der Beschreibung von $G$ erweist sich für die Behandlung von Extremwertaufgaben als zweckmäßig. Ist nun eine (Ziel-)Funktion gegeben, z.B. $f(x, y, z) = x + y + z$, die auf der Menge $G$ betrachtet werden soll, so stellt die Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0$$

eine Zusatzbedingung oder **Nebenbedingung (Restriktion)** dar, die die Menge aller zum Vergleich zugelassenen Punkte festlegt. Die Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ ist also nicht schlechthin zu einem Minimum (bzw. Maximum) zu machen, sondern unter der Einhaltung von Nebenbedingungen. Dies führt auf folgende Definition:

**Definition 4.2:** *Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine in einem Gebiet $G$ des $R^n$ erklärte reelle Funktion. Die Menge $G_0 < R^n$ sei die Menge aller Punkte $P(x_1, \ldots, x_n)$ aus $G$, für welche (gleichzeitig) die folgenden Gleichungen gelten ($m < n$):*

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned} \tag{N}$$

*wobei die Funktionen $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ reelle, in $G$ erklärte Funktionen sind. Die Aufgabe: „Man bestimme alle Punkte $P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ aus $G_0$ mit*

$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \leqq f(x_1, \ldots, x_n)$$

*für alle $P(x_1, \ldots, x_n)$ aus $G_0$" heißt das Minimumproblem für $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den* **Nebenbedingungen** (N) (*bzw.* **Restriktionen** (N)).

Ist anstelle des Minimums von $f(x_1, \ldots, x_n)$ das Maximum von $f(x_1, \ldots, x_n)$ gesucht, so sprechen wir von einem Maximumproblem mit Nebenbedingungen; beide Möglichkeiten zusammenfassend sprechen wir von einem **Extremwertproblem mit Nebenbedingungen.**

Mittels der Differentialrechnung läßt sich eine einfache notwendige Bedingung dafür aufstellen, daß ein Punkt eine Extremalstelle eines Extremwertproblems mit Nebenbedingungen ist. Diese Bedingung ist die sogenannte **Multiplikatorenregel von Lagrange**, die wir im folgenden Satz formulieren:

**Satz 4.5:** *Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine im Gebiet $G < R^n$ definierte (reelle) differenzierbare Funktion, ebenso seien $m < n$ (reelle) stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ in $G$ gegeben. Es sei $H(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$, wobei die $\lambda_k$ beliebige reelle Zahlen bezeichnen. Notwendig für das Eintreten eines Extremwertes (relatives Maximum oder Minimum) an der Stelle $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ für die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ist, unter der Voraussetzung, daß der Rang der Matrix $(\varphi_{il k})$ für diese Stelle gleich $m$ ist, das Bestehen der Gleichungen*

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0 \tag{4.14}$$

*an der Stelle $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ sowie die Gültigkeit der Beziehungen*

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Gleichungssysteme (4.14), (4.15) bilden ein System von insgesamt $n + m$ Gleichungen für die $n + m$ Unbekannten $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}; \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Zeigt es sich, daß ein gewisses $\lambda_k$ für diese Lösung verschwindet, $\lambda_k = 0$, so heißt die Restriktion $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine **inaktive Restriktion.**

*Beispiel 4.6:* Welche Punkte der Ellipse $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ haben vom Punkt $P(2; 0)$ extremalen Abstand (relative Extremwerte)?

*Lösung:* Wir betrachten zur Vereinfachung der Rechnung das Quadrat des Abstandes des Punktes $P(2, 0)$ von einem beliebigen Ellipsenpunkt $P(x, y)$. Hat dieser Abstand ein Maximum (Minimum) an einer bestimmten Stelle, so gilt das gleiche für sein Quadrat. Wir betrachten daher die Funktion

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2.$$

Als Nebenbedingung (Restriktion) kommt hinzu, daß der Punkt $P(x, y)$ auf der Ellipse liegen soll. Es muß daher die Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

gelten mit $\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$. Nach Satz 4.5 bilden wir die Funktion

$$H(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

also

$$H(x, y; \lambda) = (x - 2)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4),$$

und stellen das Gleichungssystem für $(x_0, y_0; \lambda)$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0$$

auf. Im Beispiel lautet dieses System

$$2(x - 2) + 8\lambda x = 0,$$
$$2y + 2\lambda y = 0,$$
$$4x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen kann in der äquivalenten Form

$$y(1 - \lambda) = 0$$

geschrieben werden. Es ist also entweder $\lambda = -1$ oder $\lambda \neq -1$ und im letzteren Falle $y = 0$. Im Fall $\lambda = -1$ erhalten wir aus der ersten Gleichung den Wert $x = -\frac{2}{3}$ und damit aus der letzten Gleichung die Werte $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ und $y = -\frac{2}{3}\sqrt{5}$. Im Fall $\lambda \neq -1$ erhalten wir wegen $y = 0$ aus der letzten Gleichung den Wert $x = 1$ oder $x = -1$. Aus der ersten Gleichung ergeben sich die zugehörigen Werte von $\lambda$ zu $\lambda = \frac{1}{4}$ bzw. $\lambda = -\frac{3}{4}$. Wir erhalten also die folgenden Lösungssysteme

$$x_1 = 1; \quad y_1 = 0; \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{4};$$
$$x_2 = -1; \quad y_2 = 0; \quad \lambda_2 = -\tfrac{3}{4};$$
$$x_3 = -\tfrac{2}{3}; \quad y_3 = \tfrac{2}{3}\sqrt{5}; \quad \lambda_3 = -1;$$
$$x_4 = -\tfrac{2}{3}; \quad y_4 = -\tfrac{2}{3}\sqrt{5}; \quad \lambda_4 = -1.$$

Zu diesen Lösungen gehören die folgenden Werte von $f(x, y)$: $f(x_1, y_1) = 1$; $f(x_2, y_2) = 9$; $f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = \frac{84}{9}$. Wie man aus der Ungleichung $f(x_2, y_2) < f(x_3, y_3)$ erkennt und mittels Bild 4.1 begründen kann, gelten die folgenden Feststellungen:

$P(x_1, y_1)$ ist ein Punkt, für den der Abstand ein relatives Minimum (hier sogar das absolute Minimum) hat;
$P(x_2, y_2)$ ist ein Punkt, für den der Abstand ein relatives Minimum hat;
$P(x_3, y_3)$; $P(x_4, y_4)$ sind Punkte, in denen der Abstand ein relatives Maximum (und sogar das absolute Maximum) annimmt.

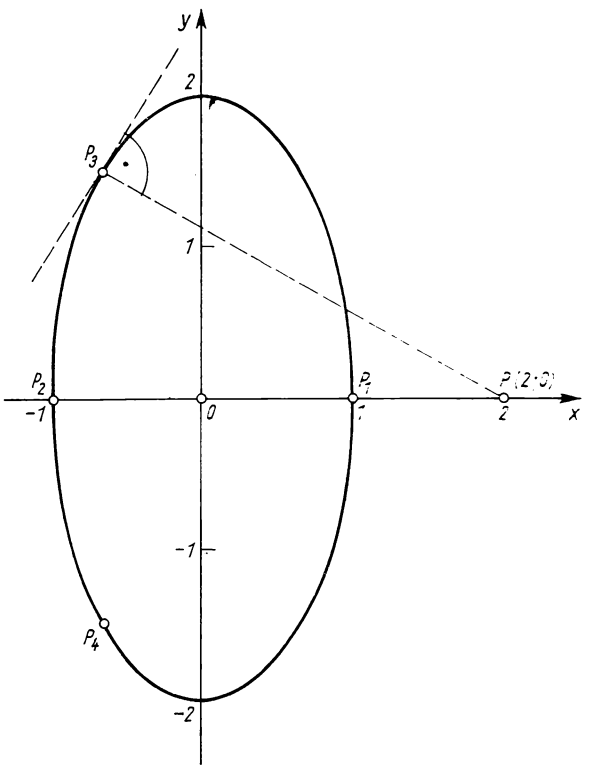



Bild 4.1

Es stellt sich natürlich sofort die Frage, ob es nicht möglich ist, gewisse hinreichende Kriterien dafür aufzustellen, daß eine mittels der Lagrange-Multiplikatorenmethode gefundene Stelle wirklich eine Extremalstelle ist. Im nächsten Abschnitt werden wir (ohne Beweis) eine solche Bedingungen angeben und ihre Anwendbarkeit bei verschiedenen Beispielen zeigen. Den Beweis des Satzes 4.5 führen wir für den Spezialfall, daß eine Funktion $f(x_1, x_2)$ zweier unabhängiger Veränderlicher unter einer Nebenbedingung der Form $g(x_1, x_2) = 0$ auf Extremwerte hin zu untersuchen ist. Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 4.5 beweisen wir einen Hilfssatz:

**Hilfssatz 4.1:** *Im Gebiet $G \subset R^2$ seien die reellen Funktionen $f(x_1, x_2)$ und $g(x_1, x_2)$ stetig differenzierbar. Der Punkt $P_0 = P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ sei ein Punkt von $G$ mit $g(P_0) = g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 0$ und $f(P_0) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = z_0$. Der Rang der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{|1} & g_{|1} \\ f_{|2} & g_{|2} \end{pmatrix}$ ($f_{|i}$; $g_{|j}$ gebildet an der Stelle $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$) sei gleich 2.*

*Dann besitzt die Funktion $f(x_1, x_2)$ unter den Nebenbedingungen $g(x_1, x_2) = 0$ an der Stelle $P_0 = P(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ keinen relativen Extremwert.*

*Beweis* des Hilfssatzes 4.1: Es sei $U$ eine beliebige, in $G$ enthaltene Umgebung von $P_0$. Wir zeigen, daß in $U$ sowohl Punkte liegen, die die Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = 0$ erfüllen und in denen $f(x_1, x_2)$ größere Werte als $z_0 = f(P_0)$ annimmt, als auch solche Punkte, die diese Nebenbedingung erfüllen und in denen $f(x_1, x_2)$ kleinere Werte als $z_0 = f(P_0)$ annimmt.

Nach der Voraussetzung über den Rang von $\mathbf{A}$ gilt

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} f_{|1}(P_0) & g_{|1}(P_0 \\ f_{|2}(P_0 & g_{|2}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$f(x_1, x_2) = z_0 + h,$$
$$g(x_1, x_2) = 0,$$

wobei $h$ ein reeller Parameter ist. Wegen $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist auf dieses Gleichungssystem der Satz von der impliziten Funktion anwendbar (Satz 3.12). Nach diesem Satz folgt, daß es ein $\delta_1 > 0$ gibt, so daß das obige Gleichungssystem für $|h| \leqq \delta_1$ nach $x_1$ und $x_2$ auflösbar ist: $x_1 = \varphi_1(h)$; $x_2 = \varphi_2(h)$ ($|h| \leqq \delta_1$), wobei $x_1^{(0)} = \varphi_1(0)$; $x_2^{(0)} = \varphi_2(0)$ gilt und der Punkt $(\varphi_1(h), \varphi_2(h))$ für $|h| \leqq \delta_1$ in $U$ liegt.

Wir setzen $x_1^{(1)} = \varphi_1(-\delta_1)$; $x_2^{(1)} = \varphi_2(-\delta_1)$ und erklären damit einen Punkt $P_1 = P(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, entsprechend sei $x_1^{(2)} = \varphi_1(\delta_1)$; $x_2^{(2)} = \varphi_2(\delta_1)$ und $P_2 = P(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$. Die Punkte $P_1$ und $P_2$ liegen in $U$, und nach Definition der Auflösungsfunktionen $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$ gelten die Beziehungen ($z_0 = f(P_0)$):

$$f(P_1) = z_0 - \delta_1 < z_0 \text{ und } g(P_1) = 0;$$
$$f(P_2) = z_0 + \delta_1 > z_0 \text{ und } g(P_2) = 0.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Zum Beweis des Satzes 4.5 (für unseren Spezialfall) ergibt sich mittels des eben bewiesenen Hilfssatzes 4.1 als notwendige Bedingung für einen Punkt $P_0$ aus $G$ mit $g(P_0) = 0$ als Stelle eines relativen Extremwertes von $f(x_1, x_2)$ unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = 0$ die Forderung, daß der Rang der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{|1}(P_0) & g_{|1}(P_0) \\ f_{|2}(P_0) & g_{|2}(P_0) \end{pmatrix}$ kleiner ist als 2. Da der Rang von $\begin{pmatrix} g_{|1}(P_0) \\ g_{|2}(P_0) \end{pmatrix}$ nach Voraussetzung (des Satzes 4.5) gleich 1 ist, muß der Rang von $\mathbf{A}$ ebenfalls gleich 1 sein. Daraus folgt, daß das homogene lineare Gleichungssystem für die Werte $\lambda_1$ und $\lambda_2$

$$\lambda_1 f_{|1}(P_0) + \lambda_2 g_{|1}(P_0) = 0,$$
$$\lambda_1 f_{|2}(P_0) + \lambda_2 g_{|2}(P_0) = 0$$

eine nichttriviale Lösung ($\lambda_1, \lambda_2$ nicht beide gleich null) besitzt. Da $g_{|1}(P_0)$ und $g_{|2}(P_0)$ nicht beide gleich null sind, ist $\lambda_1 \neq 0$. Teilen wir die beiden letzteren Gleichungen durch $\lambda_1$ und setzen wir $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, so sehen wir, daß es eine reelle Zahl $\lambda$ gibt, für die die Gleichungen

$$f_{|1}(P_0) + \lambda g_{|1}(P_0) = 0,$$
$$f_{|2}(P_0) + \lambda g_{|2}(P_0) = 0$$

erfüllt sind. Damit ist die Behauptung des Satzes 4.5 (für den betrachteten Spezialfall) bewiesen.

### 4.2.4. Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen relativer Extremwerte für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Analog zu den hinreichenden Bedingungen, die wir für Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen angegeben hatten (s. 4.2.2.), lassen sich auch für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen hinreichende Bedingungen mittels des Verhaltens einer aus den zweiten Ableitungen gebildeten quadratischen Form formulieren. Die Besonderheit, welche neu hinzukommt, ist darin zu sehen, daß die zu betrachtende quadratische Form jetzt nur auf einem Teilraum des $R^n$ auf (positive, negative) Definitheit zu untersuchen ist. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes betrachten wir zunächst das Beispiel am Ende des vorangegangenen Abschnitts. Wir hatten festgestellt, daß die Funktion

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$$

mit der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

im Punkt $(x_1, y_1) = (1, 0)$ ein Minimum annimmt. Bei der Untersuchung, ob die Funktion $f(x, y)$ dort tatsächlich ein Minimum (bei Einhaltung der Nebenbedingungen) annimmt, muß man die Funktionswerte von $f(x, y)$ mit dem Funktionswert $f(x_1, y_1) = 1$ für zu $(x_1, y_1)$ benachbarte $(x, y)$ vergleichen und zeigen, daß die Ungleichung $f(x, y) \geqq f(x_1, y_1)$ für alle hinreichend nahe benachbarten $(x, y)$, die der Nebenbedingung genügen, gilt. Es ist sinnvoll, diese zu $(x_1, y_1)$ benachbarten Werte $(x, y)$ in der Form $x = x_1 + h_1$, $y = y_1 + h_2$ zu schreiben. Es interessiert also das Vorzeichen der Differenz

$$f(x_1 + h_1, y_1 + h_2) - f(x_1, y_1)$$

für $|h_1| + |h_2| < \delta$ ($\delta$ hinreichend klein) bei Einhaltung der Nebenbedingung

$$4(x_1 + h_1)^2 + (y_1 + h_2)^2 - 4 = 0.$$

Die letzte Bedingung läßt sich aber wegen des Bestehens der Beziehung

$$4x_1^2 + y_1^2 - 4 = 0$$

auch in der Form

$$4(2x_1h_1 + h_1^2) + (2y_1h_2 + h_2^2) = 0$$

schreiben. Division durch 2 ergibt schließlich

$$4x_1h_1 + y_1h_2 + (2h_1^2 + \tfrac{1}{2}h_2^2) = 0.$$

Da $h_1, h_2$ betragsmäßig kleine Werte sind, wird das Verhalten der linken Seite letzterer Gleichung hauptsächlich durch den linearen Anteil $(4x_1h_1 + y_1h_2)$ bestimmt. Man kann zeigen, daß man die Glieder höherer Ordnung tatsächlich vernachlässigen darf und daher mit solchen Änderungen $h_1, h_2$ arbeitet, für die

$$4x_1h_1 + y_1h_2 = 0$$

gilt. Im Beispiel $(x_1 = 1;\ y_1 = 0)$ lautet diese Bedingung

$$4h_1 = 0 \quad \text{oder} \quad h_1 = 0.$$

Diese Gleichung legt in der $h_1, h_2$-Ebene einen linearen Teilraum fest, nämlich den Teilraum $E = \{(h_1, h_2) \mid h_1 = 0;\ h_2 \text{ beliebig}\}$, der mit der $h_2$-Achse identisch ist. Die geometrische Deutung dieses Teilraumes ist die folgende: durch Parallelverschiebung dieses Raumes derart, daß der Punkt $(x_1, y_1)$ in dem parallel verschobenen Teilraum liegt, erhält man die Tangente an die Kurve $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ (Ellipse) im Punkt $(x_1, y_1)$. Die betrachteten Änderungen $x = x_1 + h_1$, $y = y_1 + h_2$ werden also durch solche ersetzt, für die der Punkt $(x, y)$ nicht die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ (mit $\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$) erfüllt, sondern auf der Tangente an die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ im Punkt $(x_1, y_1)$ liegt. Das Vorzeichen der interessierenden Differenz

$$f(x_1 + h_1, y_1 + h_2) - f(x_1, y_1)$$

wird daher durch das Verhalten einer mit den zweiten Ableitungen von $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ gebildeten quadratischen Form auf dem zur Tangente durch den Punkt $(x_1, y_1)$ an die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ parallelen linearen Teilraum $E$ (durch den Punkt $(0, 0)$) beschrieben. Die exakte allgemeine Formulierung dieser Aussage ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 4.6:** *Es sei $G$ ein Gebiet des $R^n$ und $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine reellwertige zweimal stetig differenzierbare in $G$ definierte Funktion; ebenso seien die Funktionen $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ in $G$ zweimal stetig differenzierbar $(m < n)$. Das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

*wobei*

$$H(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

*ist, besitze die Lösung*

$$(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)};\ \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}).$$

*An dieser Stelle $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ sei der Rang der Matrix $(\varphi_{i/k})$ gleich $m$.*

*Dafür, daß die Stelle* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *eine Stelle eines relativen Minimums (Maximums) der Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *unter den Nebenbedingungen*

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

*ist, ist hinreichend, daß die quadratische Form*

$$Q = Q(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_{|ij}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\, h_i h_j \tag{4.16}$$

*auf dem linearen Teilraum E aller Vektoren* $(h_1, \ldots, h_n)$, *die den Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{1|i}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\, h_i = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{m|i}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\, h_i = 0 \tag{4.17}$$

*genügen, positiv (negativ) definit ist. Ist Q auf E indefinit, so liegt an der Stelle* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *kein Extremwert der Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *unter den gestellten Nebenbedingungen vor.*

Das Arbeiten mit der in Satz 4.6 formulierten hinreichenden Bedingung erläutern wir am Beispiel der am Ende von Abschnitt 4.2.3. behandelten Extremwertaufgabe. Die Funktion $H(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ hat dort die (bereits früher angegebene) Form

$$H(x, y; \lambda) = (x - 2)^2 - y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4).$$

Es gelten daher die folgenden Beziehungen $H_{|11} = H_{xx} = 2 + 8\lambda$, $H_{|12} = H_{|21} = H_{xy} = H_{yx} = 0$, $H_{|22} = H_{yy} = 2 - 2\lambda$. Die quadratische Form $Q = Q(h_1, h_2)$ hat also die Gestalt (für beliebige Punkte $(x, y; \lambda)$)

$$Q(h_1, h_2) = (2 + 8\lambda)\, h_1^2 - (2 + 2\lambda)\, h_2^2.$$

Wir erhielten bei der früheren Betrachtung dieser Extremwertaufgabe vier Lösungen. Für jede von diesen muß auf dem jeweils zugehörigen Teilraum $E$ die Definitheit der zugehörigen quadratischen Form $Q$ untersucht werden. Die Gleichung für den linearen Teilraum $E$ lautet allgemein

$$\varphi_{|1}(x, y)\, h_1 + \varphi_{|2}(x, y)\, h_2 = 0$$

mit $\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$, also

$$8xh_1 + 2yh_2 = 0.$$

Für $x, y; \lambda$ sind jeweils die speziellen Werte der betrachteten Lösung einzusetzen. Wir erhalten also die folgenden Fälle für $E$ und $Q$:

Für $(x_1, y_1; \lambda_1) = \left(1, 0; \frac{1}{4}\right)$ gilt

$$E_1: h_1 = 0, \quad Q(h_1, h_2) = -\frac{5}{2} h_2^2.$$

Für $(x_2, y_2; \lambda_2) = \left(-1, 0; \frac{3}{4}\right)$ gilt

$$E_2: h_1 = 0, \quad Q(h_1, h_2) = \frac{1}{2} h_2^2.$$

Für $(x_3, y_3; \lambda_3) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}; -1\right)$ gilt

$$E_3: -\frac{16}{3} h_1 + \frac{4}{3}\sqrt{5}\, h_2 = 0, \quad Q(h_1, h_2) = -6h_1^2.$$

Für $(x_4, y_4; \lambda_4) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5}; -1\right)$ gilt

$$E_4: -\frac{16}{3} h_1 - \frac{4}{3}\sqrt{5}\, h_2 = 0, \quad Q(h_1, h_2) = -6h_1^2.$$

Wir betrachten weiter den Fall der Lösung $(x_1, y_1; \lambda_1)$. Gilt $(h_1, h_2) \in E_1$ und $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$, so muß wegen $h_1 = 0$ notwendig $h_2 \neq 0$ gelten. Dann ist aber $Q(h_1, h_2) = \frac{5}{2} h_2^2$ eine positive Zahl, $Q(h_1, h_2) > 0$. Mit anderen Worten, $Q(h_1, h_2)$ ist auf $E_1$ positiv definit, nach Satz 4.6 liegt bei $(x_1, y_1)$ ein Minimum der Funktion $f(x, y)$ (unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$) vor. Man beachte, daß die quadratische Form $Q(h_1, h_2) = \frac{5}{2} h_2^2$, wenn wir sie auf dem gesamten $R^2$ betrachten (also für $(h_1, h_2)$ sämtliche Werte und nicht nur die mit $h_1 = 0$ zulassen), keineswegs positiv definit, sondern nur positiv semidefinit ist. Denn für alle Vektoren der Form $(h_1, h_2) = (a, 0)$ ist $Q(h_1, h_2)$ gleich null (ohne daß $(a, 0) = (0, 0)$ gilt). Durch eine entsprechende Diskussion erhält man für die anderen Fälle die folgenden Aussagen:

1. Für $(x_2, y_2; \lambda_2)$ ist $Q(h_1, h_2)$ auf $E_2$ positiv definit.
2. Für $(x_3, y_3; \lambda_3)$ ist $Q(h_1, h_2)$ auf $E_3$ negativ definit.
3. Für $(x_4, y_4; \lambda_4)$ ist $Q(h_1, h_2)$ auf $E_4$ negativ definit.

Es sind also $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$ Stellen relativer Maxima; $(x_2, y_2)$ eine Stelle eines relativen Minimums von $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Damit sind die auf mehr anschaulichem Wege erhaltenen Ergebnisse am Ende von Abschnitt 4.2.3. bestätigt.

*Aufgabe 4.1:* Man führe die Diskussion der Lösungen $(x_2, y_2; \lambda_2)$; $(x_3, y_3; \lambda_3)$; $(x_4, y_4; \lambda_4)$ der oben behandelten Aufgabe mittels der quadratischen Form $Q(h_1, h_2)$ vollständig durch.

## 4.2.5. Beispiele für Extremwertaufgaben

### 4.2.5.1. Standortproblem. Steiner-Weber-Problem

Unter einem **Standortproblem** versteht man eine Aufgabe des folgenden Typs: Gegeben sind $n$ Betriebe, die sich (in einer ebenen Darstellung) an den Orten $P(x_1, y_1)$, ..., $P(x_n, y_n)$ befinden. Gesucht ist die Lage $S(x, y)$ einer Versorgungseinrichtung (eines gemeinsamen Zulieferbetriebes usw.) derart, daß die Kosten für die Transporte zwischen $S(x, y)$ und den Betrieben an den Stellen $P(x_1, y_1)$, ..., $P(x_n, y_n)$ ins-

gesamt minimal werden. Sieht man die Kosten von $S(x, y)$ zu $P(x_k, y_k)$ proportional zum Abstand (bzw. zum Abstandsquadrat) dieser beiden Punkte an, was in vielen Fällen zutrifft, so haben diese Kosten die Form

$$a_k[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2]^{\frac{1}{2}},$$

wobei $a_k$ ein geeigneter Proportionalitätsfaktor ist ($k = 1, \ldots, n$). Die Gesamtkosten

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

sollen minimal werden. Wir erhalten somit die Aufgabe, die Funktion $f(x, y)$ (das sog. „*Zielfunktional*") auf ihre Minimalstellen hin zu untersuchen, ein Problem, das wir mit den in Abschnitt 4.2.4. entwickelten Methoden im Prinzip (d.h. abgesehen von Schwierigkeiten bei der numerischen Auswertung) lösen können.

Anstelle der Funktion (4.18) betrachtet man zur Vereinfachung auch häufig die Funktion

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2]. \tag{4.19}$$

Aufgaben, bei denen eine Funktion vom Typ (4.18) oder vom Typ (4.19) auf Extremwerte hin zu untersuchen ist, bezeichnet man auch als Aufgaben vom Typ des **„Steiner-Weber-Problems"** (s. Literatur [8], [15]).

Wir behandeln zur Veranschaulichung eine auf den Ansatz (4.19) begründete **Standortaufgabe mit Restriktionen**, d.h., der gesuchte Punkt $S(x, y)$ unterliegt noch zusätzlichen Nebenbedingungen. Solche Nebenbedingungen können zustande kommen, wenn z.B. gewisse Gebiete für die Lage von $S(x, y)$ auszuschließen sind (infolge ungünstigen Baugrundes usw.) oder der Punkt $S(x, y)$ an einer bestimmten Straße, Eisenbahnlinie usw. liegen soll.

*Beispiel 4.5:* An den Orten $P_1(0; 0)$, $P_2(0; 1)$, $P_3(0; 2)$ befinden sich Großbaustellen, die durch ein gemeinsames Betonwerk mit Fertigteilen zu versorgen sind (s. Bild 4.2). Das Betonwerk $S(x, y)$ soll an der Bahnlinie mit der Kurvendarstellung $y^2 - x^2 + 1 = 0$ ($x < 0$) errichtet werden, und zwar so, daß die Gesamttransportkosten (pro Tag) möglichst gering werden.

Zur Lösung dieser Aufgaben benutzen wir den Ansatz mit (4.19) $a_k = 1$ (Transportkosten nur abhängig von der Entfernung). Es ist also die Funktion $g(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 + (y - 1)^2 + x^2 + (y - 2)^2$ zum Minimum zu machen unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ mit $\varphi(x, y) = y^2 - x^2 + 1$ ($x < 0$). Es gilt $g(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6y + 5$, und damit ist $H(x, y; \lambda) = 3x^2 + 3y^2 - 6y + 5 + \lambda(y^2 - x^2 + 1)$. Zugehörige Gleichungen:

$$H_{1_1} = 0.\ H_{2} = 0,\ \varphi(x, y) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} 2x(3 - \lambda) &= 0, \\ 2y(3 + \lambda) &= 6, \\ y^2 - x^2 &= -1. \end{aligned}$$

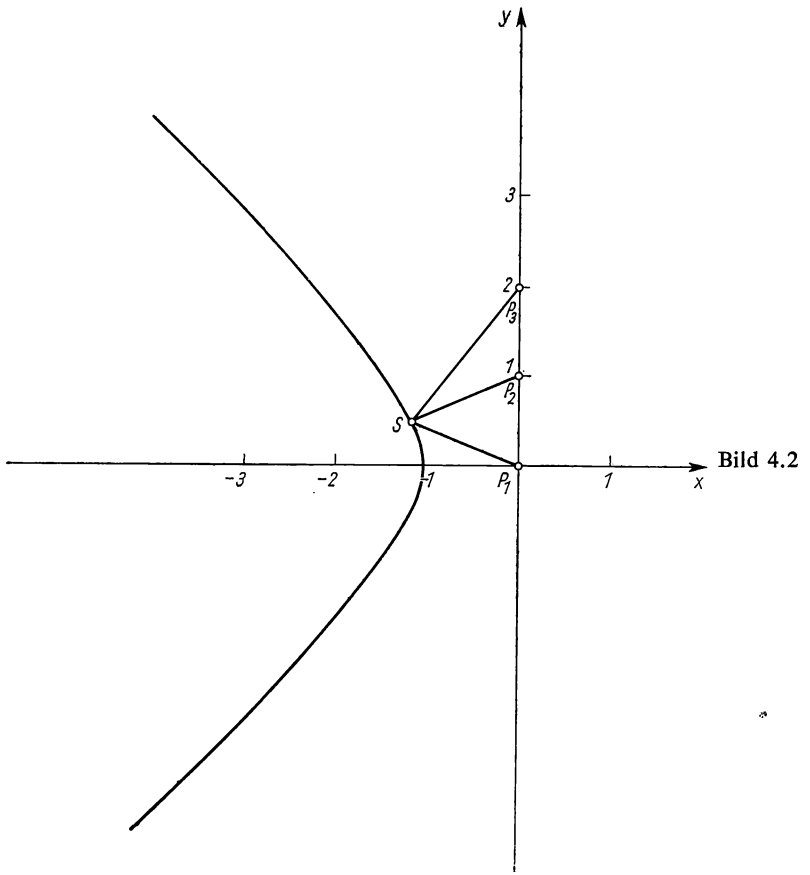



Bild 4.2

Aus der ersten Gleichung folgt, daß $x = 0$ oder $\lambda = 3$ gelten muß. Da für die Punkte der Bahnlinie $x < 0$ gilt, entfällt die erste Möglichkeit, und es gilt $\lambda = 3$. Damit folgt aus der zweiten Gleichung $12y = 6$ oder $y = \frac{1}{2}$, womit sich aus der dritten Gleichung (wegen $x < 0$) die Lösung $x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ergibt. Diese Werte $(x, y; \lambda) = (-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}; 3)$ sind die einzige Lösung des betrachteten Gleichungssystems. Die Diskussion der zugehörigen quadratischen Form auf dem entsprechenden linearen Teilraum zeigt, daß ein relatives Minimum vorliegt. Da mit $x \to -\infty$, $y \to -\infty$ (bzw. $y \to -\infty$) auch $g(x, y) \to -\infty$ geht, ist der gefundene Punkt $S(x, y) = S(-\frac{1}{2}\sqrt{5}; \frac{1}{2})$ die Stelle des absoluten Minimums von $g(x, y)$ unter der Nebenbedingung $y^2 - x^2 + 1 = 0$.

*Bemerkung 4.4:* Gehen wir nicht von $g(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6y + 5$, sondern von $f(x, y) = |\sqrt{x^2 - y^2} - |\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ aus, so erhalten wir eine Lösung $S(x, y)$, die in der Nähe der oben gefundenen Lösung liegt, deren rechnerische Ermittlung jedoch wesentlich schwieriger ist. Die obige Lösung kann als eine für die Zwecke der Praxis ausreichende Näherung für die Lösung der Extremwertaufgabe für $f(x, y)$ unter denselben Nebenbedingungen angesehen werden.

#### 4.2.5.2. Kritische Punkte des elektrischen Feldes

*Beispiel 4.8:* Gegeben seien zwei Punktladungen $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$, die sich an den Orten $P_1(1, 1, 1)$ bzw. $P_2(-1, -1, -1)$ befinden. Man weise nach, daß der Punkt $P(0, 0, 0)$ ein kritischer Punkt des von den beiden Punkten erzeugten Potentials $U(x, y, z)$ ist, daß aber $U(x, y, z)$ an dieser Stelle weder ein relatives Maximum noch ein relatives Minimum hat. Ein solcher Punkt heißt, da die Feldstärke $(-\text{grad } U)$ dort verschwindet, ein sogenannter **„Gleichgewichtspunkt"** des elektrischen Feldes.

Wir betrachten anstelle von $U(x, y, z)$ die Funktion $V(x, y, z) = 4\pi\varepsilon_0\, U(x, y, z)$. Dann gilt

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \qquad (r_1, r_2 \neq 0)$$

mit $r_1^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ und $r_2^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$.

Ferner ist

$$V_{|1} = \frac{(-1)}{r_1^3}(x-1) + \frac{(-1)}{r_2^3}(x+1),$$

$$V_{|2} = \frac{(-1)}{r_1^3}(y-1) + \frac{(-1)}{r_2^3}(y+1),$$

$$V_{|3} = \frac{(-1)}{r_1^3}(z-1) + \frac{(-1)}{r_2^3}(z+1).$$

Für $x = y = z = 0$ gilt $r_1 = r_2 = \sqrt{3}$, und daher ist dort $V_{|1} = V_{|2} = V_{|3} = 0$; somit ist $P(0, 0, 0)$ tatsächlich ein kritischer Punkt von $V$ (und auch von $U$). An dieser Stelle gilt

$$V_{|11} = -\left(\frac{r_1^3 - 3(x-1)^2 r_1}{r_1^6} + \frac{r_2^3 - 3(x+1)^2 r_2}{r_2^6}\right)\Bigg|_{(0,0,0)}$$

$$= 0; \quad V_{|22} = V_{|33} = 0;$$

$$V_{|12} = -\left((x-1)\frac{r_1^3 \cdot 0 - 3(y-1)\, r_1}{r_1^6} + (x+1)\frac{r_2^3 \cdot 0 - 3(y+1)\, r_2}{r_2^6}\right)\Bigg|_{(0,0,0)}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}; \; V_{|13} = V_{|23} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Die Matrix **A** der zweiten partiellen Ableitungen von $V$ (sog. **Hessesche Matrix**) hat also die Form

$$\mathbf{A} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Die zugehörige quadratische Form lautet (s. 4.2.4.)

$$Q(h_1, h_2, h_3) = \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{h} = a(h_1, h_2, h_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= a(h_1, h_2, h_3)\begin{pmatrix} h_2 + h_3 \\ h_1 + h_3 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2a(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3).$$

Diese quadratische Form ist indefinit. Also liegt kein Extremwert vor. Dieses Verhalten ist für elektrostatische Potentiale typisch (vgl. Bd. 8).

#### 4.2.5.3. Geometrische Beispiele

*Beispiel 4.9:* Im dreidimensionalen Raum $R^3$ sei ein Punkt $P(u, v, w)$ gegeben mit $u > 0, v > 0, w > 0$. Gesucht ist diejenige Ebene durch den Punkt $P(u, v, w)$, für die das von den Koordinatenebenen und der gesuchten Ebene im ersten Oktanten ($x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$) gebildete Tetraeder einen kleinstmöglichen Rauminhalt hat.

Zur Lösung verwenden wir die Abschnittsgleichung der Ebene, die die Koordinatenachsen in den Punkten $P(a, 0, 0)$; $P(0, b, 0)$; $P(0, 0, c)$ schneidet. Ist $P(x, y, z)$ der laufende Punkt dieser Ebene, so gilt

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$

Das Volumen des von dieser Ebene vom ersten Oktanten abgeschnittenen Körpers ist $V = V(a, b, c) = \frac{1}{6}abc$. Da der Punkt $P(u, v, w)$ auf dieser Ebene liegen soll, erhalten wir als Nebenbedingung die Gleichung

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c} = 1.$$

Zur Behandlung der Aufgabe sind die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $H(a, b, c; \lambda) = \frac{1}{6}abc + \lambda\left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c} - 1\right)$ nach $a$, $b$, $c$ gleich null zu setzen. Das ergibt folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{6}bc - \frac{\lambda u}{a^2} = 0,$$

$$\frac{1}{6}ac - \frac{\lambda v}{b^2} = 0,$$

$$\frac{1}{6}ab - \frac{\lambda w}{c^2} = 0,$$

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c} = 1.$$

Durch Auflösen der ersten drei Gleichungen jeweils nach $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ und Addition der so erhaltenen Gleichungen ergibt sich unter Verwendung der Nebenbedingung (vierte Gleichung) die Beziehung $\frac{3}{\lambda} = \frac{6}{abc}$, aus der weiter die Gleichungen $a = 3u$, $b = 3v$, $c = 3w$, $\lambda = \frac{27}{2} uvw$ sowie $V(3u, 3v, 3w) = \frac{9}{2} uvw$ folgen. Man kann zeigen, daß tatsächlich das (absolute) Minimum von $V(a, b, c)$ vorliegt. Die gesuchte Ebene hat die Gleichung $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 3$.

## 4.3. Die Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate wird vor allem bei Problemen der Ausgleichsrechnung (Ausgleichung von Fehlern) und bei der Approximation von Funktionen mittels „einfacherer" Funktionen angewandt. Sie kann wahrscheinlichkeitstheoretisch begründet werden (s. [5]). Da die Anwendung dieser Methode auf eine Extremwertaufgabe für Funktionen mehrerer Variablen führt, wollen wir sie im Rahmen dieses Bandes behandeln. Wir werden feststellen, daß man genauer von einer „Methode der kleinsten Quadratsumme" sprechen müßte. (vgl. Bd. 18, Abschn. 3.).

Wir erläutern diese Methode am Beispiel des Mittelwertes einer Beobachtungsreihe. Die einzelnen Meßwerte für eine bestimmte interessierende Größe, die als konstant anzusehen ist, werden infolge unvermeidbarer Meßfehler unterschiedlich ausfallen. Die Ausgleichsrechnung hat die Aufgabe, einen „brauchbaren Ersatzwert" für den wahren, aber unbekannten Wert der gemessenen Größe zu definieren. Sind $x_1, \ldots, x_n$ die gemessenen Werte und $\bar{x}$ der Wert, der die wahre Größe ersetzen soll, so verlangt die Methode der kleinsten Quadrate, daß für die scheinbaren Fehler

$$r_i = x_i - x \quad (i = 1, \ldots, n)$$

die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2$$

ein Minimum werden soll. Die obige „Fehlerquadratsumme" hängt von den festen, gegebenen Größen $x_1, \ldots, x_n$ und der zunächst als variabel aufzufassenden Größe $\bar{x}$ ab. Wir ersetzen $\bar{x}$ formal durch den Buchstaben $x$ und bezeichnen danach mit $\bar{x}$ nur denjenigen Wert von $x$, der das gesuchte Minimum der Quadratsumme liefert. Wir untersuchen also die Funktion $F(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2$ auf ihre Extremwerte. Diese Extremwertaufgabe für eine Funktion von nur einer Veränderlichen wird wie im Band 2 gelöst. Es gilt

$$F'(x) = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = -2 \left( \sum_{i=1}^{n} x_i - nx \right) \quad \text{und} \quad F''(x) = 2n.$$

$F'(x)$ wird gleich null nur für $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. Da $F''(x)$ durchweg größer als null ist,

liefert dieser Wert eine (und die einzige) Minimalstelle von $F(x)$ (absolutes Minimum). Diesen Wert $x = \bar{x}$, also

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4.20}$$

bezeichnet man bekanntlich als den **Mittelwert der Beobachtungsreihe** $x_1, \ldots, x_n$ oder auch als **arithmetisches Mittel** dieser Werte. Der gewöhnliche Mittelwert liefert also im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate den „besten Ersatz" für den wahren Wert einer beobachteten Größe.

Eine weitere Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate finden wir in der Ausgleichsrechnung bei der Aufgabe, die Werte von nur indirekt zugänglichen Meßgrößen **(vermittelnde Beobachtungen)** bestmöglich zu bestimmen. Dabei können einerseits überschüssige Beobachtungen vorliegen oder andererseits zusätzliche Bedingungsgleichungen vorhanden sein **(bedingte Beobachtungen)**. Beispielsweise kann sich diese Messung einer Strecke zusammensetzen aus der Messung zweier Teilstrecken, deren Summe die Gesamtstrecke ist. Wird unabhängig davon die Gesamtstrecke auf eine andere Weise gemessen, so liegt eine überschüssige Messung vor. Die Messungen der Teilstrecken und der Gesamtstrecke sind notwendig fehlerbehaftet, und die Summe der Meßwerte der Teilstrecken wird vom Meßwert der Gesamtstrecke verschieden sein. Also ergibt sich die Frage nach der günstigsten Korrektur der Meßwerte der Teilstrecken und der Gesamtstrecke. Ein Beispiel für das Vorliegen zusätzlicher Bedingungsgleichungen liefert die Messung der drei Innenwinkel eines Dreiecks; als Gleichung haben wir die Forderung, daß die Summe dieser Winkel 180° betragen muß. Wird jeder Innenwinkel gemessen, so ist diese Forderung infolge der auftretenden Meßfehler sicher nicht erfüllt, also muß die Frage nach einer Korrektur, einem „Ausgleich" dieser Werte, gestellt werden.

Die allgemeine Verfahrensweise in jedem dieser Fälle besteht darin, *daß man geeignete Fehlergrößen definiert, die von den auszugleichenden Werten abhängen, und die ausgeglichenen Werte so festlegt, daß die Summe der Quadrate dieser Fehlergrößen minimal wird.* Zur Erläuterung dieses Prinzips betrachten wir das folgende Beispiel:

*Beispiel 4.10* (vgl. [5]): Eine Strecke $AC$ (s. Bild 4.3) werde mit 165,21 m gemessen. Die Meßwerte der Teilstrecken $AB$ bzw. $BC$ seien 50,26 m bzw. 114,30 m. Die Summe dieser Meßwerte, 164,56 m, ist vom Meßwert für die Strecke $AC$ verschieden. Es ist also Ausgleich erforderlich. Die auszugleichenden Werte der Längen der Strecken $AB$ bzw. $BC$ bezeichnen wir mit $x_1$ bzw. $x_2$. Der Meßwert der Strecke $AC$ stellt also eine überschüssige Beobachtung für die Festlegung von $x_1$ und $x_2$ dar.

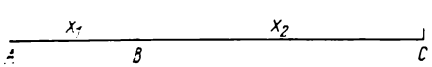


Bild 4.3

Wir betrachten die folgenden Fehlergrößen $v_1, v_2, v_3$:

$$v_1 = x_1 \quad - 50{,}26,$$
$$v_2 = x_2 \quad - 114{,}30,$$
$$v_3 = x_1 + x_2 - 165{,}21.$$

Wir wählen die ausgeglichenen Werte $x_1 = x_1, x_2 = \tilde{x}_2$ so, daß die Summe $Q = Q(x_1, x_2) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = (x_1 - 50{,}26)^2 + (x_2 - 114{,}30)^2 + (x_1 + x_2 - 165{,}21)^2$ minimal wird. Dazu bilden wir die ersten partiellen Ableitungen von $Q$ nach $x_1, x_2$ und setzen diese Ableitungen gleich null. Das entstehende Gleichungssystem hat als Lösung die gesuchten Werte $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$. Es gilt

$$Q_{|1} = 2(x_1 - 50{,}26) + 2(x_1 + x_2 - 165{,}21),$$
$$Q_{|2} = 2(x_2 - 114{,}30) + 2(x_1 + x_2 - 165{,}21).$$

Daher hat das Gleichungssystem $Q_{|1} = 0$, $Q_{|2} = 0$ die Form

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 215{,}47,$$
$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 279{,}51.$$

Man nennt diese Gleichungen auch die **„Normalgleichungen"** des gegebenen Ausgleichsproblems. Als (einzige) Lösungen ergeben sich $\tilde{x}_1 = 50{,}49$; $\tilde{x}_2 = 114{,}52$ mit der Summe $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 165{,}01$. Sie liefern, wie sich zeigen läßt, das (absolute) Minimum von $Q$.

*Aufgabe 4.2:* Für die Winkel eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Meßwerte $\alpha = 45°16'$; $\beta = 30°10'$; $\gamma = 105°12'$. Sie sind so auszugleichen, daß die Summe der ausgeglichenen Winkel 180° beträgt. Diese Aufgabe ist als Extremwertproblem mit Nebenbedingungen zu behandeln.

Die Methode der kleinsten Quadrate wird schließlich sehr ausgiebig bei der Bestimmung von Ausgleichskurven und zur Approximation von Funktionen benutzt. Der Grundgedanke besteht darin, daß kompliziert zusammengesetzte Funktionen bzw. Funktionen, die nur näherungsweise durch Meßwerte gegeben sind, durch Funktionen von bekannter einfacher Bauart ersetzt bzw. angenähert werden.

Bei physikalischen und technischen Meßvorgängen werden Wertepaare $(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gemessen. Man nimmt an, daß diese Wertepaare auf einer Kurve liegen, die einen bekannten, einfachen Funktionstyp beschreibt. Da man auch hier Meßfehler von vornherein nicht ausschließen kann, ermittelt man die gesuchte Kurve als sog. **Ausgleichskurve**, d.h. als eine Kurve, die sich dem vorliegenden Meßvorgang am besten anpaßt unter der Bedingung, daß sie einem gegebenen einfachen Kurventyp (Gerade, Parabel, ...) angehört.

Wir betrachten zur Verdeutlichung ein Beispiel für eine Ausgleichsgerade, die mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wird. Es seien die Werte $(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gegeben. Gesucht ist eine Gerade $y(x) = ax + b$, für die der Ausdruck

$$Q = Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y(x_i))^2 \tag{4.21}$$

minimal wird. Man sucht also diejenige Gerade, die an den Stellen $x_i$ von den gegebenen Werten $y_i$ im Sinne der Summe der Fehlerquadrate am wenigsten abweicht.

Die Bestimmung der Konstanten $a$, $b$ erfolgt in der üblichen Weise aus den Gleichungen

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0,$$

mit der gesuchten Lösung $a = \tilde{a}$, $b = \tilde{b}$. Zur Durchführung der Rechnung setzen wir in den Ausdruck (4.21) für $y(x_i)$ die Werte $y(x_i) = ax_i + b$ $(i = 1, \ldots, n)$ ein und erhalten

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Also wird

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)$$

(man beachte die Kettenregel!). Die Gleichungen $\frac{\partial Q}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ sind also gleichbedeutend mit den Gleichungen (sog. Normalgleichungen)

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4.22}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - nb,$$

aus denen man die gesuchten Werte $a = \tilde{a}$, $b = \tilde{b}$ berechnen kann. (4.22) stellt ein lineares Gleichungssystem für diese beiden Werte dar, welches für den Fall, daß nicht alle $x_i$ denselben Wert haben, eine von null verschiedene Koeffizientendeterminante und somit genau eine Lösung besitzt.

*Aufgabe 4.3:* Die Meßpunkte $P(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sollen nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Kurve der Form

$$f(x) = a + \frac{bx}{1 + x^2}$$

ausgeglichenen werden. Es ist das System der Normalgleichungen zu bestimmen und die gesuchten Werte $a$, $b$ sind speziell für die Punkte einer Meßreihe mit den Werten $P(-2; 15)$, $P(-1; 5)$, $P(0; 1)$, $P(1; 1)$, $P(2; 3)$ zu ermitteln. Wie groß ist die minimale Summe der Fehlerquadrate und wie groß ist das Maximum des absoluten Fehlers für die Meßpunkte?

Die Approximation von Funktionen mittels der Methode der kleinsten Quadrate ist eine weitere Anwendung dieses Prinzips, die es ermöglicht, eine gegebene komplizierte Funktion für einen gewissen Argumentbereich durch eine einfachere zu ersetzen. Im Unterschied zu den **Ausgleichskurven**, die die Fehlerquadrate an nur endlich vielen Bezugsstellen berücksichtigen, werden zur Bestimmung der **Approximationskurven** alle Argumentstellen bei der Bildung der Fehlerquadrate berücksichtigt; die bisher auftretende Summe über die Fehlerquadrate an endlich vielen Stellen wird

durch ein entsprechendes Integral ersetzt. Ganz besonders wichtig ist dieses Gebiet durch die Entwicklung der EDVA geworden, weil es bei der Benutzung dieser Anlagen darum geht, die häufig benutzten Funktionen (sin, cos, ...) durch eine *einfache Rechenvorschrift* darzustellen. Das Prinzip dieser Methode besteht darin, daß eine Funktion $f(x)$, die z.B. in einem Intervall $[x_1, x_2]$ gegeben ist, durch eine Funktion $\tilde{f}(x; a_1, ..., a_n)$ approximiert werden soll, die von einfacher Bauart (z.B. ein Polynom) ist und Parameter $a_1, ..., a_n$ enthält. Diese Parameter werden so bestimmt, daß das Integral über die Fehlerquadrate

$$Q = Q(a_1, ..., a_n) = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - \tilde{f}(x; a_1, ..., a_n)]^2 \, dx \tag{4.23}$$

ein Minimum wird. Man spricht daher auch von der **Approximation im Mittel.** Das folgende Beispiel verdeutlicht den allgemeinen Sachverhalt.

*Beispiel 4.11:* Welche Gerade $\tilde{f}(x; a_1, a_2) = a_1 x + a_2$ ersetzt die Kurve $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ im Intervall [0, 1] im Sinne der Approximation im Mittel am besten? Wir berechnen zur Lösung das Integral

$$Q = \int_0^1 [f(x) - \tilde{f}(x; a_1, a_2)]^2 \, dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}} - a_1 x - a_2\right]^2 dx$$

$$= \frac{a_1^2}{3} + a_2^2 + a_1 a_2 - \frac{4}{7} a_1 - \frac{4}{5} a_2 + \frac{1}{4}.$$

Die Extremwertaufgabe für $Q = Q(a_1, a_2)$ führt auf die Gleichungen $\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial a_2} = 0$ oder

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3} a_1 + a_2 - \tfrac{4}{7} &= 0, \\ a_1 + 2a_2 - \tfrac{4}{5} &= 0 \end{aligned}$$

mit der (einzigen) Lösung $a_1 = \frac{36}{35}$, $a_2 = -\frac{4}{35}$. Die gesuchte Gerade lautet daher $\tilde{f}\left(x; \frac{36}{35}, -\frac{4}{35}\right) = \frac{36x - 4}{35}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$. (Skizze!)

Ein besonders wichtiger Fall der Approximation ist die Approximation durch Systeme orthogonaler Funktionen. Hierzu geben wir erst die folgende Definition an.

**Definition 4.3:** *Eine Folge $(\varphi_n(x))$ von Funktionen, die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert sind, heißt ein* **Orthogonalsystem** *bezüglich des Intervalls $[a, b]$, wenn die Gleichung*

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx = 0 \quad (i \neq j) \tag{4.24}$$

*für alle $i, j$ mit $i \neq j$ besteht. Gilt zusätzlich die Gleichung*

$$\int_a^b (\varphi_i(x))^2 \, dx = 1 \quad (i = 1, 2, ...), \tag{4.25}$$

*so heißt die Folge $(\varphi_n(x))$ ein* **Orthonormalsystem** *auf $[a, b]$.*

Man stellt sich nun die Aufgabe, eine in $[a, b]$ gegebene Funktion $f(x)$ durch eine Linearkombination

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x; a_1, \ldots, a_n) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)$$

im Sinne der Approximation im Mittel bestmöglich zu ersetzen. Ein bekanntes Beispiel für ein Orthogonalsystem ist das System der trigonometrischen Funktionen $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$, betrachtet auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Es gelten die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases},$$

die zeigen, daß das genannte System ein Orthogonalsystem ist. Man schreibt hier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$$

und nennt diesen Ausdruck ein **trigonometrisches Polynom** vom Grade $n$. Der Vorteil der Orthogonalsysteme bei der Approximation liegt nun in folgendem Sachverhalt.

**Satz 4.7:** *Ist $(\varphi_n(x))$ ein Orthogonalsystem auf $[a, b]$, ferner $f(x)$ eine auf $[a, b]$ definierte (integrierbare) Funktion, so wird das (absolute) Minimum der quadratischen Abweichung*

$$Q = Q(a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b (f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x))^2 \, dx \tag{4.26}$$

*für die Werte*

$$a_i = \tilde{a}_i = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx}{\int_a^b (\varphi_i(x))^2\,dx} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.27}$$

*und nur für diese angenommen. Das (absolute) Minimum von $Q$ hat den Wert*

$$\tilde{Q} = Q(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left[\int_a^b (f(x))^2 \, dx\right] - \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{a}_i^2 \int_a^b (\varphi_i(x))^2 \, dx\right).$$

Für das Beispiel der trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ erhalten wir die Formeln von Euler und Fourier:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 0, \ldots, n) \\ \tilde{b}_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\}. \tag{4.28}$$

Für sogenannte vollständige Orthogonalsysteme $(\varphi_n(x))$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} Q(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = 0$, d. h., mit wachsendem $n$ wird die Approximation von $f(x)$ durch die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\varphi_k(x)$ immer besser. Man gelangt auf diesem Wege zur **Theorie der Orthogonalreihen** und, da die trigonometrischen Funktionen $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots; \sin x, \sin 2x, \ldots, \ldots, \sin nx, \ldots$ ein vollständiges Orthogonalsystem auf $[0, 2\pi]$ bilden, zur Theorie der trigonometrischen Reihen oder **Fourier-Reihen** (vgl. Band 3).

*Aufgabe 4.4:* Die Funktion $f(x) = x^2$ ist im Intervall $[0, 2\pi]$ im Sinne der Approximation im Mittel bestmöglich durch einen Ausdruck der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\sin x + b_2\sin 2x$$

zu approximieren.

# Lösungen der Aufgaben

**1.1:** $d(P,A)=\sqrt{x^2+y^2}$, $d(P,B)=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$. Aus $d(P,A)=d(P,B)$ folgt $y-x=1$. Für alle Punkte der Geraden $y=x+1$ (Mittelsenkrechte auf der Strecke mit den Endpunkten $A$ und $B$) gilt $d(P,A)=d(P,B)$.

**1.2:** a) $B_1$ wird begrenzt von der unteren Hälfte des Kreises $(x-1)^2+y^2=1$ und der $x$-Achse.

b) $B_2$ wird begrenzt von der oberen Hälfte des Kreises $(x-2)^2+y^2=4$ und dem darüber verlaufenden Stück der Parabel $y=\sqrt{4x}$.

c) $B_3$ wird begrenzt von der $y$-Achse und der rechten Hälfte des Kreises $x^2+(y-1)^2=1$.

**1.3:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$, $y_n=-1$ für alle $n$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\mathrm{e}$. Die Punktfolge konvergiert gegen $P(3,-1,\mathrm{e})$: Die Punkte liegen in der Ebene $y=-1$; sie verläuft parallel zur $x,z$-Ebene.

**1.4:** Folge nicht konvergent, da $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ nicht existiert.

**2.1:** a) $1-\mathrm{e}^{x+y}>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+y}<1 \Leftrightarrow x+y<0 \Leftrightarrow y<-x$. $f$ erklärbar für alle Punkte unterhalb der Geraden $y=-x$.

b) $\left|\frac{y}{x}\right|\leqq 1 \Leftrightarrow |y|\leqq|x|$. $f$ erklärbar für alle Punkte zwischen den Geraden $y=x$ und $y=-x$ einschließlich der Punkte dieser Geraden selbst. Nullpunkt auslassen.

**2.2:** a) $\sqrt{x^2+y^2}=k \Leftrightarrow x^2+y^2=k^2$; Kreis mit Radius $k$ um Nullpunkt. Fläche: nach oben geöffneter Kreiskegel mit Spitze im Nullpunkt.

b) $\sqrt{(x-1)^2+4y^2}=k \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{k^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{k}{2}\right)^2}=1$; Ellipse mit großer Halbachse $k$ und kleiner Halbachse $\frac{k}{2}$ und Mittelpunkt $(1,0)$. Fläche: nach oben geöffneter elliptischer Kegel mit Spitze in $(1,0)$.

**2.3:** a) $0\leqq\left|\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\right|\leqq|y|$, also $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}=0$.

b) $\lim\limits_{x,y\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ existiert nicht, denn für Folge $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},0\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$ und für Folge $(x_n',y_n')=\left(0,\frac{1}{n}\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n',y_n')=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=-1+1$.

**2.4:** $u(x,y)=x$, $v(x,y)=\mathrm{e}^{x+y+\frac{\pi}{2}-2}$, $w(x,y)=\sin xy$ sind in der gesamten $x,y$-Ebene stetig, also auch $f(x,y)=u\cdot v\cdot w$. Also $\lim\ldots=f\left(3,-\frac{\pi}{2}\right)=3\mathrm{e}$.

**2.5:** a) $\tilde{K}=\{(r,\varphi)\in\tilde{B}\mid\sqrt{2}\leqq r\leqq\sqrt{6}\text{ und }-\pi<\varphi\leqq\pi\}$.

b) Mittelpunkt des Kreises auf der $y$-Achse im Punkt $(0,3)$; Radius des Kreises $R=3$. Man betrachte Menge aller $\varphi$-Strahlen für $0\leqq\varphi\leqq\pi$. $P$ sei variabler Punkt auf dem Kreis mit Polarkoordinaten $r$

und $\varphi$. Aus rechtwinkligem Dreieck mit Eckpunkten $P_1(0,0)$, $P$ und $P_2(0,6)$ folgt $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{r}{6}$ im Fall $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ und $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{r}{6}$ im Fall $\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi$. Wegen $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ ist $\tilde{K}_1 = \left\{(r,\varphi) \in \tilde{B} \mid 0 \leqq \varphi \leqq \pi \text{ und } 0 \leqq r \leqq 6\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

**2.6:** a) Grundkreisfläche $F$ von $K$ in $x,y$-Ebene: $F = \left\{(r,\varphi) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\varphi\right\}$.
Für jedes $(r,\varphi) \in F$ variiert $z$ zwischen 0 und $x^2+y^2=r^2$.
Also $\tilde{K}_1 = \left\{(r,\varphi,z) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\varphi,\ 0 \leqq z \leqq r^2\right\}$.

b) Zu allen Punkten des Kegels gehört die geographische Breite $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

$$\tilde{K}_2 = \left\{(r,\vartheta,\varphi) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4},\ 0 \leqq \varphi < 2\pi\right\}.$$

**2.7:** Koordinatenlinien $u = c_1 > 0$: Ellipsen $\frac{x^2}{(ac_1)^2} + \frac{y^2}{(bc_1)^2} = 1$. Koordinatenlinien $v = c_2$:
Halbgeraden durch Nullpunkt $y = \frac{b\sin c_2}{a\cos c_2}x$ für $c_2 \neq \frac{\pi}{2}, c_2 \neq \frac{3}{2}\pi$. Für $c_2 = \frac{\pi}{2}$:
positive $y$-Achse; für $c_2 = \frac{3}{2}\pi$: negative $y$-Achse.

**3.1:** a) $f_x(x,y) = \arctan y$, $f_y(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$, $f_{xx}(x,y) = 0$,
$f_{yy}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+y^2)^2}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}$.
b) $y < x$, dann $f(x,y) = 2y$, also $f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 2$;
$y > x$, dann $f(x,y) = 2x$, also $f_x(x,y) = 2, f_y(x,y) = 0$.
In allen Fällen ist $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$.
c) $f_x(x,y) = yx^{y-1} + y^x \ln y, f_y(x,y) = x^y \ln x + xy^{x-1}$,
$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2} + y^x(\ln y)^2$,
$f_{yy}(x,y) = x^y(\ln x)^2 + x(x-1)y^{x-2}$,
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x + xy^{x-1}\ln y + y^{x-1}$.

**3.2:** $u_t(x,t) = \frac{1}{4a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{1}{\pi t} + \frac{x^2}{a^2t^2}\right) = a^2 u_{xx}(x,t)$.

**3.3:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = f_x(0,0)$;
$\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 = f_y(0,0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x} = 1 = f_{yx}(0,0)$;
$\lim\limits_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = -1 = f_{xy}(0,0)$.
Nicht beide partiellen Ableitungen $f_{xy}(x,y)$ sind im Nullpunkt stetig.

**3.4:** $\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$,

$\mathrm{d}^2f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}(-2xy(\mathrm{d}x)^2 + 2(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2xy(\mathrm{d}y)^2)$.

**3.5:** $\tilde{r} = \sqrt{(2{,}51)^2 + (-1{,}72)^2 + (3{,}43)^2} = 4{,}58$.

$\mathrm{d}r(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \dfrac{\tilde{x}\,\mathrm{d}x + \tilde{y}\,\mathrm{d}y + \tilde{z}\,\mathrm{d}z}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}}$.

$|\Delta r| \approx |\mathrm{d}r| \leqq \left|\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{r}}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{r}}\,\mathrm{d}y\right| + \left|\dfrac{\tilde{z}}{\tilde{r}}\,\mathrm{d}z\right|$

$< \dfrac{1}{4{,}58}(2{,}51\cdot 0{,}02 + 1{,}72\cdot 0{,}02 + 3{,}43\cdot 0{,}03) = 0{,}011 + 0{,}008 + 0{,}022 = 0{,}041.$

Für den Abstand $r$ gilt also $r = 4{,}58 \pm 0{,}04$ oder anders formuliert: $4{,}54 \leqq r \leqq 4{,}62$. Für den relativen Fehler gilt $\left|\dfrac{\Delta r}{\tilde{r}}\right| \approx \left|\dfrac{\mathrm{d}r}{\tilde{r}}\right| \leqq \dfrac{0{,}041}{4{,}58} < 0{,}009 = 0{,}9\,\%$.

**3.6:** Allgemein gilt $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z_x\dot{x} + z_y\dot{y}$. Also gilt im Falle

a) $\dot{z} = \mathrm{e}^{(\sin t) - 2t^3}((\cos t) - 6t^2)$;

b) $\dot{z} = \dfrac{x^{n-1}}{y^{m+1}}(n\dot{x}y - mx\dot{y})$;

c) $\dot{z} = t^{\frac{1}{t}-2}(1 - \ln t)\,(t > 0)$.

**3.7:** $F(x,y) = 3x^2 - 2xy - y^2 \cdot F_x = 6x - 2y,\ F_y = -2x - 2y,\ y' = \dfrac{3x-y}{x+y}\,(x \neq -y)$. Die weitere Differentiation wird mittels der verallgemeinerten Kettenregel gleich an dem letzteren Ausdruck für $y'$ durchgeführt.

$y'' = (x+y)^{-2}[(3-y')(x+y) - (3x-y)(1+y')]$

$= (x+y)^{-2}\cdot 4(y - xy') = (x+y)^{-3}(2xy + y^2 - 3x^2)$

$= -(x+y)^{-3}F(x,y) = 0\ (x \neq -y)$.

Schreibt man $F(x,y)$ in der Form $F(x,y) = 4x^2 - (x-y) = (2x - x + y)(2x - (x+y))$ $= (3x+y)(x-y)$, so erkennt man, daß die Gleichung $F(x,y) = 0$ das Geradenpaar $y = -3x$ und $y = x$ darstellt, für welches natürlich $y'' = 0$ gilt.

**3.8:** $F(x,y,z,u) = u(x^2+y^2) - (z^3+u^3) - 4$. $F(2\,|\,-3\,|\,2\,|\,1) = 0$. $F_u = (x^2+y^2) - 3u^2$ und $F_u(2\,|\,-3\,|\,2\,|\,1) = 10 \neq 0$. Also ist Auflösung nach $u$ in der Form $u = u(x,y,z)$ möglich. Es gilt $u_x = -\dfrac{F_x}{F_u},\ u_y = -\dfrac{F_y}{F_u},\ u_z = -\dfrac{F_z}{F_u}$. An der betrachteten Stelle gilt $F_x = 2ux = 4$, $F_y = 2uy = -6$, $F_z = -3z^2 = -12$. Also ist $\operatorname{grad} u(P_0) = u_x\,\mathbf{e}_1 + u_y\,\mathbf{e}_2 + u_z\,\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{5}\,\mathbf{e}_1 + \frac{3}{5}\,\mathbf{e}_2 + \frac{6}{5}\,\mathbf{e}_3$.

**3.9:** $f_1(x,y,z) = (x-y)^4 - xz(x^2-z^2) - 1$ und $f_1(0\,|\,1\,|\,0) = 0$,

$f_2(x,y,z) = (x-z)^4 - xy(y^2+z^2)$ und $f_2(0\,|\,1\,|\,0) = 0$.

Es bestehen die folgenden Beziehungen:

$f_{1|1}(P_0) = 4, f_{1,2}(P_0) = 4, f_{1,3}(P_0) = 0,$

$f_{2|1}(P_0) = -1, f_{2,2}(P_0) = 0, f_{2,3}(P_0) = 0.$

Für die Auflösbarkeit nach $(x, y)$; $(x, z)$ bzw. $(y, z)$ in einer Umgebung von $P_0$ ist das Verhalten der Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} f_{1|1} & f_{1|2} \\ f_{2|1} & f_{2|2} \end{pmatrix}(P_0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} f_{1|1} & f_{1|3} \\ f_{2|1} & f_{2|3} \end{pmatrix}(P_0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} f_{1|2} & f_{1|3} \\ f_{2|2} & f_{2|3} \end{pmatrix}(P_0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maßgebend. Da nur die Determinante der ersten Matrix ungleich null ist, kann (auf diesem Wege) nur gesagt werden, daß sich in einer Umgebung von $P_0$ eine Auflösung nach $(x, y)$ in der Form $x = x(z)$, $y = y(z)$ finden läßt. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} f_{1|1} & f_{1|2} \\ f_{2|1} & f_{2|2} \end{pmatrix}(P_0)\right]^{-1}\begin{pmatrix} f_{1|3} \\ f_{2|3} \end{pmatrix}(P_0) = -\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**3.11:** Mit den Bezeichnungen des Beispiels 3.27 ist jetzt die Gleichung

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

für die Schnittkurve der Potentialfläche mit der dort eingeführten $x, y$-Ebene zu diskutieren. Wir erhalten durch entsprechende Umformungen die Gleichung

$$x^2 - 2a\frac{(1+k^2)}{(1-k^2)}x + y^2 = -a^2,$$

aus der mittels quadratischer Ergänzung sich die gesuchte Kurve aus einer Kreisgleichung ergibt:

$$\left[x - a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)\right]^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Im $x, y$-System hat dieser Kreis den Mittelpunkt $x = a\dfrac{1+k^2}{1-k^2}$; $y = 0$ (dieser liegt auf der Verbindungsgeraden von $P_1$ und $P_2$), sein Radius beträgt $R = \dfrac{2ak}{(1-k^2)}$. Die gesuchte Potentialfläche ist (nach analogen Überlegungen wie im Beispiel 3.27) eine Kugel mit dem Radius $R = \dfrac{2ak}{(1-k^2)}$ $= \dfrac{k}{(1-k^2)}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Ihr Mittelpunkt ergibt sich aus der (geometrisch evidenten) Beziehung

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{1-k^2}\mathbf{r}_1 - \frac{k^2}{1-k^2}\mathbf{r}_2$$

$\left(\text{man beachte die Gleichung } a = \dfrac{1}{2}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)$. Daraus folgen die Beziehungen

$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| = \dfrac{2k^2a}{(1-k^2)}$ (wegen $0 < k < 1$ folgt hieraus, daß $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| < R$ gilt, also $P_1$ im Inneren der Kugel liegt!) und $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| = \dfrac{2a}{(1-k^2)}$, woraus sich ergibt, daß $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|$ $= \dfrac{4a^2k^2}{(1-k^2)^2} = R^2$ gilt.

**3.12:** a) Halbgeraden (Strahlen) durch den Nullpunkt.

b) Kreise, deren Mittelpunkte auf der Geraden durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\boldsymbol{\omega}$ liegen und deren Ebenen auf $\boldsymbol{\omega}$ senkrecht stehen.

**3.13:** $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial(x^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(y^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(z^2)}{\partial z} = (x + y + z).$

**3.14:** Die $x$-Komponente von $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ lautet

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \left(z \cdot \frac{-3y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - y \cdot \frac{-3z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\right) = 0.$$

Aus Symmetriegründen sind auch die weiteren Koordinaten von rot $\mathbf{v}$ gleich null. Also gilt rot $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ ($\mathbf{r} \neq \mathbf{o}$). Das elektrische Feld einer Punktladung ist (abgesehen vom Ort der Ladung) wirbelfrei, d. h., seine Rotation ist gleich null.

**3.15:** Es gilt $\Delta f(r) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = \operatorname{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\mathbf{r}$ (nach Formel (3.170)). Nach Rechenregel (3.163) gilt aber $\operatorname{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\mathbf{r} = \mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r} + \frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\mathbf{r}$. Wegen $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$ und Formel (3.170) wird

$$\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r} + \frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\mathbf{r} = \mathbf{r}\cdot\left(\frac{1}{r}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'\mathbf{r}\right) + 3\frac{f'(r)}{r}$$

$$= \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{r}\cdot\left[\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}\right] + \frac{3}{r}f'(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$$

(man beachte noch $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2 = r^2$).

**3.16:** $\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\,\mathbf{e}_2 + c_3\,\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{c}\cdot\mathbf{r} = c_1x + c_2y + c_3z$.
also $\operatorname{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) = c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\,\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{c}$.

**4.2:** Die Summe $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ der Quadrate der Abweichungen $v_1 = x_1 - \alpha$, $v_2 = x_2 - \beta$, $v_3 = x_3 - \gamma$ ist unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 180^\circ = k$ zum Minimum zu machen. Wir betrachten daher die Funktion (Anwendung der Multiplikatorenmethode von Lagrange) $Q(x_1, x_2, x_3) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - k)$
$= (x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2 + (x_3 - \gamma)^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - k)$ und setzen ihre partiellen Ableitungen nach $x_1$, $x_2$, $x_3$ gleich null. Dies ergibt die Gleichungen

$$Q_{|1} = 2(x_1 - \alpha) + \lambda = 0$$
$$Q_{|2} = 2(x_2 - \beta) + \lambda = 0$$
$$Q_{|3} = 2(x_3 - \gamma) + \lambda = 0.$$

Addition dieser Gleichungen liefert wegen $x_1 + x_2 + x_3 = k$ die Beziehung $0 = 2k - 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3\lambda$ oder $\lambda = \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma - k)$ und damit die ausgeglichenen Werte (Lösungen der obigen Gleichung)

$$\tilde{x}_1 = \alpha - \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - k) = 45^\circ\,3'$$
$$\tilde{x}_2 = \beta - \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - k) = 29^\circ\,57'$$
$$\tilde{x}_3 = \gamma - \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - k) = 105^\circ.$$

**4.3:** Die Summe der Abweichungsquadrate ist im gegebenen Fall gleich $Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - \frac{bx_i}{1 + x_i^2}\right)^2$. Die Gleichungen $\frac{\partial Q}{\partial a} = 0$; $\frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ (Normalgleichungen) lauten daher

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - \frac{bx_i}{1 + x_i^2}\right) = 0,$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - \frac{bx_i}{1 + x_i^2}\right)\cdot\frac{x_i}{1 + x_i^2} = 0.$$

Ausführung der Summation, Umstellung und Division durch $(-2)$ liefert zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten $a$ und $b$:

$$na - b\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1 + x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1 - x_i^2} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{(1 + x_i^2)^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_i}{1 + x_i^2}.$$

Mit den Zahlenwerten des Beispiels ergibt sich das (sehr einfache) Gleichungssystem

$$5a = 25,$$
$$0{,}82\,b = -6{,}8$$

mit der Lösung $\tilde{a} = 5$; $\tilde{b} = -8{,}293$. Die einzelnen Fehler $\Delta_i = y_i - \tilde{a} - \frac{bx_i}{1 + x_i^2}$ ergeben sich zu $\Delta_1 = 6{,}68$, $\Delta_2 = -4{,}15$, $\Delta_3 = -4{,}0$, $\Delta_4 = 0{,}15$, $\Delta_5 = 1{,}32$. Die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{5} \Delta_i^2$ ist gleich 79,66. Das Maximum des absoluten Fehlers für die Meßpunkte beträgt 6,68.

**4.4:** $\tilde{a}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad (k = 0, \ldots, n),$

$\tilde{b}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad (k = 1, \ldots, n)$

sind für $f(x) = x^2$; $n = 2$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ zu verwenden. Wir erhalten

$a_0 = \frac{32}{5} \pi^4$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$,

$b_1 = -4\pi$, $b_2 = -2\pi$. Die gesuchte Näherungsfunktion hat die Form $\tilde{f}(x) = \frac{16}{5} \pi^4 + 4 \cos x + \cos 2x - 4\pi \sin x - 2\pi \sin 2x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$.

# Literatur


I. Grundlagenwerke

[1] *Alexandroff, P. S.:* Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen (Übers. a. d. Russ.). 6. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973.

[2] Autorenkollektiv: Lehrbriefe für das Fernstudium (TU Dresden) Mathematik, Lehrbriefe 1–22, 3 Auflagen. Berlin: VEB Verlag Technik 1957–1970.

[3] *Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.:* Taschenbuch der Mathematik (Übers. a. d. Russ.). 17. Aufl. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977.

[4] *Fichtenholz, G. M.:* Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 (Übers. a. d. Russ.). 9. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975.

[5] *Ludwig, R.:* Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. 2. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.

[6] *Piskunow, N. S.:* Differential- und Integralrechnung Teil 1, 2, 3. (Übers. a. d. Russ.). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966–1967.

[7] *Smirnow, W. I.:* Lehrgang der Höheren Mathematik, Bd. I (Übers. a. d. Russ.). 12. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974.

II. Ergänzungsliteratur

[8] Autorenkollektiv: Mathematische Methoden zur Standortbestimmung. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1968.

[9] *Fleming, W. H.:* Functions of several variables. Mass.: Addison-Wesley Publishing Company 1965.

[10] *Hadley, G.:* Nichtlineare und dynamische Programmierung. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1969.

[11] *Haupt, O.; Aumann, G.; Pauc, C. Y.:* Differential- und Integralrechnung, Bd. II Differentialrechnung. Berlin: W. de Gruyter 1950.

[12] *Kästner, S.:* Vektoren, Tensoren, Spinoren. Berlin: Akademie-Verlag 1960.

[13] *Rothe, R.:* Höhere Mathematik, Teil I, 20. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.

[14] *Sikorski, R.:* Advanced calculus: Functions of several variables. Warszawa: PWN 1969.

[15] *Weber, A.:* Über den Standort der Industrien. Tübingen: Verlag Mohr 1922

# Namen- und Sachregister


Abbildungen der Klasse $C^1$ 93
Abhängigkeitsfunktion 104
abgeschlossene Hülle 12
– Menge 12
Ableitung von zusammengesetzten Funktionen 51
Ableitungen erster Ordnung, partielle 44
–, höherer Ordnung, partielle 48
Abschließung 12
absolutes Maximum 30, 130
– Minimum 30, 130, 136
Abstandsfunktion 7
Approximation im Mittel 153
Approximationskurve 152
Äquipotentialflächen 106
Ausgleichskurve 151, 152

Bereich 13
beschränkte Menge 11
– Punktfolge 18
Bolzano-Weierstraß 18
Breite, geographische 40

$C^1$-Abbildungen 93

Differential, vollständiges 54
Differentiale höherer Ordnung 64
Differentialgleichung der Feldlinien 107
Differentiation, implizite 80
Differenzenquotient 44
differenzierbar, partiell 47
–, total 54
Diskriminante 131
Divergenz 113, 114
Dreiecksungleichung 7

ebenes Feld 106
einfach zusammenhängend 13
Ellipse 41
Ellipsenkoordinaten 40
$\varepsilon$-Umgebung 9
Erhaltung der Orientierung 93
euklidischer Raum 8
Extremwertproblem mit Nebenbedingungen 137

Fehlerrechnung 67
Feld, ebenes, instationäres, skalares, stationäres 106
Felder, radialsymmetrische 121
Feldlinien 107
Feldlinien, Differentialgleichung der 107
Fläche, Karte der 22
–, Parameterdarstellung einer 43
–, stetige 43
Fluß 113
Fundamentalbereich 15
Funktion, implizit definierte 80, 83
–, Karte der 22
–, mittelbare 51
–, reelle 20
–, zusammengesetzte 72
Funktionaldeterminante 92, 93
Funktionaldeterminanten, Multiplikationssatz für 96
Funktionalmatrix 93

Gebiet 13
Gebietsinvarianz 93
geographische Länge bzw. Breite 39, 40
geordnetes Zahlenpaar 6
Gleichgewichtspunkt 147
Gradient 61
Gradientenlinien 112
Grenzwert 24
Grenzwertsätze 26

Hessesche Matrix 147
Höhenlinien 22, 106
Hülle, abgeschlossene 12

implizit definierte Funktion 80, 83
implizite Differentiation 80
inaktive Restriktion 136
Inkrement, totales 52
innerer Punkt 11
Inneres einer Menge 11
instationäres Feld 106

Karte der Fläche 22
– der Funktion 22
Kelvin-Transformation 110
Kettenregel, verallgemeinerte 74
kompakte Menge 12
konvergente Punktfolge 16
konvex 12
Koordinaten, krummlinige 33
Koordinatenflächen 38
Koordinatenlinien 35
Kreis 41
kritischer Punkt 131
krummlinige Koordinaten 33

Kugel-Umgebung 9
Kugelkoordinaten 39, 101
Kurve, Orientierung einer 41
– stetige 41
Kurven, Parameterdarstellung von 40, 41
Kurvenparameter 41

Länge, geographische 39
Lagrange, Multiplikatorenregel von 137
Laplace-Operator 121
lokale Quelldichte 114
– Umkehrbarkeit 93

Matrix, Hessesche 147
Maximum, absolutes 30, 130
–, relatives 130
mehrfach zusammenhängend 13
Menge, abgeschlossene, kompakte, offene 12
–, beschränkte 11
Metrik 7
Minimum, absolutes 30, 130, 136
–, relatives 130
mittelbare Funktion 51
Mittelwert 150
Mittelwertsatz der Differentialrechnung 63
mittlere Quelldichte 114
Multiplikationssatz für Funktionaldeterminanten 96
Multiplikatorenregel von Lagrange 137

Nabla 116
Nebenbedingungen 136, 137
Niveaulinien 22
Normalbereich 15
Normalgleichungen 151

offene Menge 12
Orientierung einer Kurve 41
–, Erhaltung der 93
Orthogonalsystem 153
Orthonormalsystem 153

Parameter der Fläche 43
Parameterbereich 43
Parameterdarstellung einer Fläche 43
– – Geraden 41
– von Kurven 40, 41
Parameterintervall 41
Parameterkurven 43
partiell differenzierbar 47
partielle Ableitungen erster Ordnung 44
– – höherer Ordnung 48
Polarkoordinaten 33, 98
Polynom, trigonometrisches 154

Punktfolge, beschränkte 18
–, konvergente 16
punktierte $\varepsilon$-Umgebung 9

Quaderumgebung 10
Quelldichte 114

radialsymmetrische Felder 121
Rand 12
Randpunkt 12
Raum, euklidischer 8
Rechteckumgebung 10
reelle Funktion 20
relatives Maximum bzw. Minimum 130
Restglied der Ordnung $n$ 125
Restriktion 136
–, inaktive 137
Richtungsableitung 111
Rotation 115

Schraubenfläche 43
Schraubenlinie 41
Schwarz 49
Skalarfeld 32, 106
Standortaufgabe mit Restriktionen 145
Standortproblem 144
stationäres Feld 106
stetige Fläche 43
– Kurve 41
Stetigkeit 28
Stromlinien 107

Tangentialebene 46
Taylorformel 125
trigonometrisches Polynom 154
total differenzierbar 54
totaler Zuwachs 52

Umgebung 9, 10
Umkehrbarkeit, lokale 93

Vektorfeld 32, 107
Vektorfunktion 32
Vektordifferentialoperator 116
verallgemeinerte Kettenregel 74
vollständiges Differential 54

Zahlenpaar, geordnetes 6
Zerlegungsformel 53
Zielfunktion 136
zusammenhängend 13
zusammengesetzte Funktion 72
Zuwachs, totaler 52
Zylinderkoordinaten 38, 100

## Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte

Vorbereitungsband *Schäfer/Georgi:* Vorbereitung auf das Hochschulstudium

Band 1 *Sieber/Sebastian/Zeidler:* Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen

Band 2 *Pforr/Schirotzek:* Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen

Band 3 *Schell:* Unendliche Reihen

Band 4 *Harbarth/Riedrich:* Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

Band 5 *Körber/Pforr:* Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

Band 6 *Schöne:* Differentialgeometrie

Band 7/1 *Wenzel:* Gewöhnliche Differentialgleichungen

Band 7/2 *Wenzel:* Gewöhnliche Differentialgleichungen 1

Band 8 *Meinhold/Wagner:* Partielle Differentialgleichungen 2

Band 9 *Greuel:* Komplexe Funktionen und konforme Abbildungen

Band 10 *Stopp:* Operatorenrechnung

Band 11 *Schultz-Piszachich:* Tensoralgebra und -analysis

Band 12 *Sieber/Sebastian:* Spezielle Funktionen

Band 13 *Manteuffel/Seiffart/Vetters:* Lineare Algebra

Band 14 *Seiffart/Manteuffel:* Lineare Optimierung

Band 15 *Elster:* Nichtlineare Optimierung

Band 16 *Bieß/Erfurth/Zeidler:* Optimale Prozesse und Systeme

Band 17 *Beyer/Hackel/Pieper/Tiedge:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

Band 18 *Oelschlägel/Matthäus:* Numerische Methoden

Band 19/1 *Beyer/Girlich/Zschiesche:* Stochastische Prozesse und Modelle

Band 19/2 *Bandemer/Bellmann:* Statistische Versuchsplanung

Band 20 *Piehler/Zschiesche:* Simulationsmethoden

Band 21/1 *Manteuffel/Stumpe:* Spieltheorie

Band 21/2 *Bieß:* Graphentheorie

Band 22 *Göpfert/Riedrich:* Funktionalanalysis

DDR 8,— M

Die Reihe „Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte“ wurde im Auftrage des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen erarbeitet.

Sie umfaßt insgesamt den in den Studienplänen vorgesehenen Lehrstoff für die Mathematikausbildung der genannten Fachrichtungen und bietet außerdem Möglichkeiten zur Vertiefung und Spezialisierung.

Die Gliederung nach dem Baukastenprinzip ermöglicht die Auswahl der für eine Fachrichtung notwendigen Bände.

Das Lehrwerk ist nach modernen fachlichen und hochschulpädagogischen Prinzipien aufgebaut.

Es ist sowohl im Direkt- als auch im Fernstudium einsetzbar.

Herausgeber, Autoren und Gutachter sind erfahrene Hochschullehrer von verschiedenen Universitäten, Hochschulen und Ingenieurhochschulen der DDR.

Alle Lehrbücher dieser Reihe wurden vom Minister für Hoch- und Fachschulwesen als „Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR“ anerkannt.