Lehrmaterial zur Ausbildung von Diplomlehrern

PHYSIK

PHYSIK-PRAKTIKUM

Heft 16a

1982

Das vorliegende Lehrmaterial wurde von der Hauptabteilung Lehrerbildung des Ministeriums für Volksbildung als Manuskriptdruck herausgegeben.

Es wurde unter Anleitung der Zentralen Fachkommission Physik beim Ministerium für Volksbildung und beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen erarbeitet.

Autorenkollektiv:

Prof. Dr. H. Melcher (Leiter)
Dr. H. Baller
Dr. R. Burmeister
E. Hannemann
Dr. E. Hudl
H. Kürschner
W. Leonhardt
H. H. Schmidt

Prof. Dr. H. Hänsel (Kap. 1.)

Redakteur: Dr. H. Stöckel

1/16/18/8.82/1187 Ag 124/168/82 EVP: 2,80 M

"Ich aber arbeitete die meiste Zeit im physikalischen Laboratorium, fasziniert durch die direkte Berührung mit der Erfahrung."

ALBERT EINSTEIN
("Autobiographisches")

Vorwort

Das Experiment ist ein grundlegendes Mittel der physikalischen Erkenntnisfindung.

Dem physikalischen Praktikum kommt demzufolge seit jeher beim Studium der Physik eine große Bedeutung zu. Der Studierende soll sich unmittelbar selbst - maßgeblich durch eigene Aktivitäten - mit den physikalischen Sachverhalten und Erscheinungen an entsprechenden Geräten auseinandersetzen. Damit erkennt er beispielsweise, daß man die Physik nicht allein in Vorlesungen durch bloßes Sehen und Hören beherrschen lernt. Für das Verstehen und Begreifen der Physik ist das eigene Experimentieren im Prozeß der Erkenntnisgewinnung von großer Wichtigkeit.

Dieser notwendige Bestandteil jeder Physikausbildung erfordert vom Studierenden eine auf konkrete physikalische Probleme gerichtete Selbsttätigkeit und ein eigenes aktives Gestalten bei dem Aufbau von Versuchsanordnungen, bei der Durchführung, Auswertung und kritischen Analyse von Experimenten.

Diese schöpferische Auseinandersetzung mit physikalischen Sachverhalten sowie das Kennenlernen und Aneignen typischer physikalischer Denk- und Arbeitsverfahren im Labor ist eine wesentliche Basis für die weiterführenden Studien.

Die Studierenden werden im Labor mit den wichtigsten experimentellen Methoden vertraut gemacht und erhalten grundlegendes Rüstzeug für ihren späteren Beruf. Im Praktikum werden die in anderen Lehrveranstaltungen vermittelten Kenntnisse angewendet, vertieft, gefestigt und erweitert.

Die Tätigkeit im Physiklabor vollzieht sich im engen Wechselspiel zwischen Theorie und Experiment. Die Vertiefung und Entwicklung physikalischen Denkens und Verständnisses wird im Physikstudium nicht zuletzt durch die praktische Arbeit im Labor erreicht. Es kommt hierbei nicht so sehr auf die Bearbeitung einer Vielzahl von Versuchen

an, als vielmehr auf eine tiefe wissenschaftliche Durchdringung ausgewählter Experimente.

Das Benutzen, Handhaben und Ablesen der Meßgeräte ist eine notwendige Voraussetzung beim Kennenlernen verschiedener Meß- und Untersuchungsverfahren. Ganz besonders geht es aber hierbei darum, daß sich die Studenten Klarheit über den Aufbau und die Wirkungsweise sowie über die Präzision der Apparate, über die jeweiligen Leistungsgrenzen der Verfahren sowie über den Gültigkeitsbereich der physikalischen Feststellungen und Aussagen verschaffen. Ein Vergleich einzelner Meßmethoden und eine kritische Analyse hinsichtlich ihrer Unzulänglichkeiten, Ökonomie und Grenzen trägt zur Erweiterung der experimentellen Kenntnisse der Studierenden bei. Nicht zuletzt dient das Arbeiten im Praktikum einer ständigen kritischen Diskussion und Präzisierung physikalischer Begriffe, deren Anwendung und Entwicklung, aber es dient auch dem Erwerb gewisser Handfertigkeiten. Wenn in der Anfangsphase des Praktikums erreicht wird, daß die Studenten gern selber experimentieren und jede Scheu vor Apparaten überwunden haben, wenn sie das Protokollieren beherrschen und sicherer sind im logischen Schlußfolgern, dann kann in einer weiteren Phase dem Teil des Praktikums, der sich auf anspruchsvollere und umfangreichere Experimente und auf das selbständige Mitwirken der Studenten bezieht, erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Die an verschiedenen Stellen des Textes eingefügten Fragen sollen den Lehr- und Lernprozeß unterstützen und auch zeigen, daß die Studenten es lernen müssen, sich selbst Fragen zu stellen. Kurze Antworten zu ausgewählten Fragen sind z. T. abgedruckt.

Zu jedem Experiment sind gesondert die "Grundlagen" dargestellt, wobei für Theoretisches und Experimentelles ein ausgewogenes Verhältnis angestrebt wurde. Das besondere Ziel des Buches besteht darin, einen Querschnitt der hauptsächlichen Aufgaben aus vielen Gebieten eines physikalischen Praktikums zu bieten. Das aber bedeutet z. B., daß man - bei einer begrenzten Studienzeit - auf eine Reihe bekannter und mancherorts lieb gewordener Aufgaben verzichten muß, um neueren Entwicklungen den gebührenden und notwendigen Platz einzuräumen (Statistik, Elektronik, Mikrophysik).

Die Darstellung sollte so allgemein wie möglich gehalten werden, damit nicht - evtl. durch "Rezepte" - die örtlichen Gegebenheiten der einzelnen Praktika eingeengt werden, damit also genügend Spielraum für spezielle experimentelle Varianten und somit schließlich

für dauernde Gestaltung experimenteller Abwechslungen und Neuheiten Gelegenheit bleibt, ohne die ein Praktikum steril wird.

Dem Buch ist ein Kapitel 1. "Zur Auswertung von Meßergebnissen" vorangestellt. Die dargestellten Praktikumsexperimente der Semester 1 bis 5 korrespondieren in den Kapiteln 2. bis 6. mit der Gliederung des Lehrprogramms (1975). So bedeutet z. B. der Punkt 3.6.4., daß es sich um das Experiment 4 des 6. Themas im 2. Semester handelt. Zur Vorbereitung auf die erste Praktikumsveranstaltung dient demnach der Abschnitt 2.1.

Die Gleichungen sind jeweils für den betreffenden Abschnitt durchnumeriert. Für den Abbildungshinweis gilt z. B. 3.12.(2): Abbildung Nr. 2 im Abschnitt 3.12.

An vorbereitenden Diskussionen haben sich zahlreiche Kollegen fast aller Hochschulen und Universitäten der DDR beteiligt, denen für ihre Bemühungen bestens gedankt sei. Hinweise und Vorschläge jeder Art werden jederzeit gern dankbar entgegengenommen.

Horst Melcher

Inhaltsverzeichnis

1.	Zur Auswertung von Meßergebnissen	9
1.1.	Mathematische Vorbemerkungen	9
1.1.1.	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, Wahrscheinlichkeitsdichte, Verteilungsfunktion	9
1.1.2.	Gauß-Verteilung	14
1.2.	Zur Einteilung der Meßfehler	17
1.3.	Zur Erfassung der zufälligen Fehler	24
1.3.1.	Absoluter Fehler	24
1.3.2.	Scheinbarer Fehler, Gaußsches Verfahren der kleinsten Quadratsumme, Mittelbildung	24
1.3.3.	Standardabweichung der Einzelmessungen	26
1.3.4.	Fehlerfortpflanzungsgesetz	30
1.3.5.	Vertrauensabweichung und Vertrauensintervall des Mittelwertes	36
1.3.6.	Auswertung von Meßwerten verschiedener Genauigkeit	42
1.3.7.	Ausgleichung von Meßwerten durch lineare Funktionen	49
1.3.7.1.	Grafische Ausgleichung	49
1.3.7.2.	Rechnerische Ausgleichung	55
1.3.7.2.1.	y proportional zu x	56
1.3.7.2.2.	y ist linear von x abhängig	62
1.4.	Zur Erfassung der systematischen Fehler	73
1.4.1.	Meßunsicherheit	74
1.4.2.	Fehlerfortpflanzung für systematische Fehler	76
1.5.	Rechnen mit kleinen Größen	78
2.	Laborpraxis	80
2.1.	Einführung	80
2.1.1.	Zum Arbeiten im Labor	80
2.1.2.	Vorbereitungsarbeiten	80
2.1.3.	Experimentelles Arbeiten	81
2.1.4.	Protokollführung	82

2.1.5.	Häufig vorkommende Meßverfahren und Techniken	84
2.1.5.1.	Längenmessungen	84
2.1.5.2.	Zeitmessungen	86
2.1.5.3.	Die Analysenwaage	88
2.1.5.4.	Zum Einsatz elektrischer Meßgeräte	96
2.1.5.5.	Verarbeitung fotografischen Materials	105
2.1.5.6.	Einfache Löttechnik	107
2.1.5.7.	Einfache Glasarbeiten	108
2.2.	Bestimmung von Basisgrößen	117
2.2.1.	Längenmessungen	117
2.2.2.	Zeitmessungen	121
2.2.3.	Massebestimmung	124
2.3.	Dichtebestimmung	126
	1. Dichtebestimmung mit der Federwaage nach JOLLY	126
	2. Dichtebestimmung mit der Mohr-Westphalschen Waage	130
	3. Dichtebestimmung mit dem Pyknometer	136
	4. Bestimmung der relativen Gasdichte nach BUNSEN	140
2.4.	Schwingungen	146
	1. Bestimmung der Gravitationsfeldstärke	146
	2. Bestimmung der Federkonstante	149
2.5.	Thermometrie	152
	1. Messungen mit dem Gasthermometer	152
2.6.	Kalorimetrie	155
	1. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Stoffe	155
2.7.	Strahlenoptik	161
	1. Bestimmung von Linsenbrennweiten	170
	2. Bestimmung der Vergrößerung bei Lupe und Mikroskop	176
	3. Bestimmung von Brechzahlen	183
2.8.	Grundstromkreis (Gleichstrom)	190
	1. Strom- und Spannungsmessungen	190
	2. Widerstandsmessungen	193
	3. Spannungsteilermessungen	198

1. Zur Auswertung von Meßergebnissen

Jede Auswertung einer physikalischen Messung, die nicht zugleich mit dem Ergebnis auch eine Angabe seiner Meßunsicherheit enthält, ist wertlos. Dieser Tatsache ist bei der Durchführung und Auswertung der Versuche des physikalischen Praktikums größte Aufmerksamkeit zu widmen, da in ihm der Praktikant nicht nur in die Fertigkeiten des Experimentierens, sondern vor allem auch in die wissenschaftliche Auswertung der Meßergebnisse und ihre kritische Beurteilung eingeführt werden soll, denn erst diese gewährleistet zusammen mit der sorgfältigen Durchführung des Versuches eine wirklich sinnvolle Lösung der gestellten Aufgabe.

Vorliegende Darstellung soll die Studierenden in die Lage versetzen, alle in einem physikalischen Grundpraktikum üblichen Versuche exakt auswerten zu können. Die mit * gekennzeichneten Abschnitte dienen darüber hinaus dem Ziel, das Rüstzeug auch für spätere experimentelle Aufgabenstellungen (z. B. im Praktikum der wahlobligatorischen Ausbildung, bei der Anfertigung einer experimentellen Diplomarbeit) zu vermitteln. Sie können von den niederen Semestern beim ersten Lesen überschlagen werden.

1.1. Mathematische Vorbemerkungen

1.1.1. Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, Wahrscheinlichkeitsdichte, Verteilungsfunktion

Betrachtet werde ein bestimmtes Ereignis x_i, z. B. das Auftreten einer Sechs beim Würfeln mit einem idealen Würfel. Man unterscheidet sichere, unmögliche und zufällige Ereignisse. Ein sicheres Ereignis ist ein Ereignis, das stets, d. h. bei beliebiger Wiederholung des Versuches, eintritt. Ein unmögliches Ereignis kann niemals eintreten, ein zufälliges kann, aber muß nicht eintreten.

Bleiben wir bei unserem Beispiel, so heißt sicheres Ereignis, daß beim Wurf eine Ziffer x_i zwischen Eins und Sechs auftritt, das Auftreten einer Sechs ist dagegen ein zufälliges Ereignis, das Auftreten einer Sieben ein unmögliches.

Bei gleichartigen Versuchen unter unveränderten Versuchsbedingun-

gen (z. B. beim Würfeln) werde das gleiche Ereignis x_i (z. B. das Auftreten einer Sechs) n_i-mal gefunden. Als relative Häufigkeit $h_n(x_i)$ für das Auftreten des Ereignisses x_i bezeichnet man den Quotienten

$$h_n(x_i) = \frac{n_i}{n} . \qquad (1)$$

Lassen wir die Anzahl n der Versuche über jede Grenze wachsen und strebt die relative Häufigkeit $h_n(x_i)$ für das Auftreten des Ereignisses x_i gegen den Grenzwert

$$h_\infty(x_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n} , \qquad (2)$$

so heißt dieser Grenzwert statistische Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses x_i.

LAPLACE definiert demgegenüber die Wahrscheinlichkeit w eines Ereignisses wie folgt: Die Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl g der dem Ereignis günstigen Fälle dividiert durch die Anzahl m der möglichen Fälle,

$$w := \frac{g}{m} . \qquad (3)$$

Die Laplacesche Wahrscheinlichkeitsdefinition geht von der stillschweigenden Annahme aus, daß alle möglichen Fälle "gleichwahrscheinlich" sind, benutzt somit den Begriff Wahrscheinlichkeit schon zu einer Definition. Deshalb führt man heute die Wahrscheinlichkeit nach KOLMOGOROW meist axiomatisch ein. Gl. (3) ist dann eine aus diesem Axiomensystem beweisbare Formel. Diesem Weg können wir uns leider nicht anschließen, da die hierzu benötigten Begriffe über den Rahmen dieser Darstellung hinausgehen.

Während die Laplacesche Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, gewinnt man die statistische Wahrscheinlichkeit $h_\infty(x_i)$ experimentell, und zwar nur näherungsweise durch eine Vielzahl n von Versuchen. Die Differenz $w - h_\infty(x_i)$ können wir als Maß für die Anwendbarkeit von (3) ansehen, d. h. als Maß dafür, inwieweit die Voraussetzung "alle möglichen Fälle sind gleichwahrscheinlich" erfüllt ist. Wenn diese Differenz sehr klein ausfällt, stimmen Theorie und Experiment gut überein.

Unser Beispiel möge vorstehende Definition erläutern: Beim Würfeln mit einem idealen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für das

Auftreten einer Sechs w = 1/6. Dies heißt aber nicht, daß beim Durchführen von sechs Würfen unbedingt eine Sechs auftreten muß. Erst für eine sehr große Anzahl von Würfen (theoretisch nach (1) erst bei einer unendlichen großen Anzahl von Würfen) gewinnt man aus (1) die Aussage, daß bei 1/6 der Würfe die gewünschte Ziffer auftritt. Einem sicheren Ereignis entspricht (bei einer endlichen Anzahl möglicher Ereignisse) die Wahrscheinlichkeit w = 1, einem unmöglichen die Wahrscheinlichkeit w = 0:

$$\boxed{\begin{array}{l} w = 1 \text{ (sicheres Ereignis),} \\ w = 0 \text{ (unmögliches Ereignis).} \end{array}} \qquad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array}$$

Gibt es im betrachteten Intervall nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte x_i (wie z. B. beim Würfeln die Werte 1 bis 6), dann heißt die Zufallsgröße X diskrete Zufallsgröße. Kann sie dagegen innerhalb des Intervalls $a < x < b$ jeden beliebigen Wert x annehmen (wie z. B. die zufälligen Fehler, vgl. Abschnitt 1.2.), dann nennt man sie stetige oder kontinuierliche Zufallsgröße. Die diskrete Zufallsgröße X ist dann bekannt, wenn man alle Werte x_i kennt, die sie annehmen kann, und ferner die Wahrscheinlichkeiten $w(x_i)$ für das Eintreten der Ereignisse x_i bekannt sind. Diese Angaben ermöglichen es, eine Verteilungsfunktion F(x) für die Zufallsgröße X aufzustellen.

Zur Festlegung der Verteilungsfunktion gehen wir von der diskreten Zufallsgröße X aus. Wieder bedeute x irgendeine reelle Zahl. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X einen Wert kleiner als x annimmt, bezeichnen wir mit $w(X < x)$ und schreiben für sie

$$\boxed{F(x) := w(X < x).} \qquad (6)$$

Lassen wir nun x die Menge aller reellen Zahlen durchlaufen, dann heißt die so durch (6) definierte Funktion F(x) Verteilungsfunktion der diskreten Zufallsgröße X.

Eine kontinuierliche Zufallsgröße X kann innerhalb eines bestimmten Intervalls jeden Wert annehmen, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines genau bestimmten Wertes x_i ist demzufolge gleich Null. Es ist daher nur sinnvoll, eine Wahrscheinlichkeit dw(x) dafür anzugeben, das Ereignis zwischen den Werten x und x + dx zu finden:

$$dw(x) = \frac{dw(x)}{dx}\,dx = w'(x)dx. \tag{7}$$

$w'(x) \geqq 0$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte.

In Analogie zu (6) definieren wir als Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Zufallsgröße

$$F(x) = w(X < x) = \int_a^x w'(t)dt. \tag{8}$$

Da das Ereignis mit Sicherheit im Intervall $a \leqq x \leqq b$ liegt, gilt nach (3) bzw. (4) die Nebenbedingung

$$\boxed{\sum_i w(x_i) = 1} \quad \text{(diskrete Zufallsgröße)} \tag{9}$$

bzw.

$$\boxed{\int_a^b w'(x)dx = \int_a^b dw = 1} \quad \text{(kontinuierliche Zufallsgröße)} \tag{10}$$

Den Erwartungswert $\langle x \rangle$ der diskreten Zufallsgröße X erhält man, indem man jeden der möglichen Werte x_i mit der Wahrscheinlichkeit $w(x_i)$ seines Auftretens multipliziert und die Summe über sämtliche möglichen Produkte bildet:

$$\boxed{\langle x \rangle := \sum_i x_i w(x_i).} \tag{11}$$

Der Erwartungswert ist das gewogene Mittel (vgl. (55)) aller Werte x_i von X, wobei als Gewicht des Wertes x_i die zugehörige Wahrscheinlichkeit $w(x_i)$ für das Auftreten dieses Wertes Verwendung findet.

Kann die Zufallsgröße X abzählbar-unendlich viele Werte annehmen, dann können in (11) Konvergenzschwierigkeiten auftreten. Für abzählbar-unendlich viele Werte kann ein Erwartungswert nur dann durch (11) festgelegt werden, wenn $\sum_i x_i w(x_i)$ absolut konvergiert, d. h., wenn $\sum_i |x_i|\, w_i(x_i) < \infty$ gilt.

Nach (11) beträgt der Erwartungswert <x> beim Würfeln ($w(x_i) = 1/6$; $x_i = 1, 2, \ldots, 6$)

$$\langle x \rangle = \frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \ldots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Im vorstehenden Beispiel ist der Erwartungswert eine Zahl, die unter den möglichen Werten x_i der diskreten Zufallsgröße X überhaupt nicht vorkommt. Besitzen die diskreten Werte x_i verschiedene Wahrscheinlichkeiten $w(x_i)$, so entspricht der Erwartungswert <x> auch nicht der Zufallsgröße x_i mit größter Wahrscheinlichkeit. Der Erwartungswert entspricht vielmehr dem Wert, der im Mittel bei einer großen Anzahl von Realisierungen der Zufallsgröße zu erwarten ist. Speziell heißt dies für unser Beispiel, daß das aus n Würfen x_i (i = 1,2,..,n) gebildete arithmetische Mittel (vgl. (22)) $\sum x_i/n$ um so mehr dem Erwartungswert 3,5 zustrebt, je größer die Anzahl der betrachteten Würfe ist.

Der Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsgröße wird analog zu (11) festgelegt:

$$\langle x \rangle := \int_a^b x w'(x)dx = \int_a^b x \frac{dw}{dx}dx = \int_a^b x dw. \qquad (12)$$

Es sind Wahrscheinlichkeitsdichten w'(x) denkbar, für die (12) nicht existiert. Man pflegt daher für kontinuierliche Zufallsgrößen nur dann einen Erwartungswert durch (12) zu definieren, wenn das Integral

$$\int_a^b |x|\, w'(x)dx$$

existiert. Alle hier betrachteten Wahrscheinlichkeitsdichten erfüllen diese Forderung.

Zufallsgrößen können den gleichen Erwartungswert besitzen, sich jedoch erheblich in der Verteilungsfunktion unterscheiden. Unter anderem aus diesem Grund wird zur weiteren Kennzeichnung der Zufallsgröße die Standardabweichung σ_x der Grundgesamtheit (Anzahl n der Realisierungen der Zufallsgröße $n \to \infty$) eingeführt. Sie lautet für

diskrete Zufallsgrößen

$$\sigma_x := \sqrt{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 w(x_i)}, \tag{13}$$

(i = 1,2,...,m, m Anzahl der für X möglichen Werte) für kontinuierliche Zufallsgrößen

$$\sigma_x := \sqrt{\int_a^b (x - \langle x \rangle)^2 w'(x)\,dx}. \tag{14}$$

σ_x^2 wird häufig auch mittleres Streuungsquadrat der Größen x_i bzw. x genannt.

Voraussetzung für (13) ist, daß die Reihe konvergiert, für (14), daß das Integral existiert. Alle nachstehend besprochenen Probleme erfüllen diese Forderung.

Für unser Würfelbeispiel ergibt sich als Standardabweichung der Augenzahlen x_i ($\langle x \rangle = 3{,}5$; $w(x_i) = 1/6$; $x_i = 1,2,\ldots,6$)

$$\sigma_x = \left(\frac{(1 - 3{,}5)^2}{6} + \frac{(2 - 3{,}5)^2}{6} + \ldots + \frac{(6 - 3{,}5)^2}{6} \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2{,}92} = 1{,}71.$$

1.1.2. Gauß-Verteilung

Die Gauß- oder Normalverteilung

$$w'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(- \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2} \right) \tag{15}$$

ist eine der wichtigsten Verteilungen.
$dw(x) = w'(x)dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung des betrachteten Zufallsereignisses vom Erwartungswert $\langle x \rangle$ zwischen x und x + dx liegt, d. h., das Integral

$$w(a) = \int_{\langle x\rangle - a}^{\langle x\rangle + a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx \qquad (16)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße X innerhalb der Grenzen $\langle x\rangle \pm a$ zu finden ist. Wie die Berechnung dieses Integrals für verschiedene a zeigt, liegen innerhalb der Grenzen

$\langle x\rangle \pm \sigma_x$	68,3 %,
$\langle x\rangle \pm 1{,}96\,\sigma_x$	95,0 %,
$\langle x\rangle \pm 2{,}00\,\sigma_x$	95,4 %,
$\langle x\rangle \pm 2{,}58\,\sigma_x$	99,0 %,
$\langle x\rangle \pm 3{,}00\,\sigma_x$	99,7 %

(17)

der von w'(x) und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche. Abb. 1a zeigt die Gauß-Verteilung, Abb. 1b die zugehörige Verteilungsfunktion.

Die von w'(x) und der Abszissenachse eingeschlossene Fläche ist nach (10) für alle σ_x gleich Eins. σ_x bestimmt lediglich die Höhe und "Breite" der Verteilungsfunktion, denn mit abnehmendem σ_x wird die Gaußverteilung höher und "schmaler".

Die Wendepunkte der Gaußschen Glockenkurve w'(x) haben die Abszissenwerte $x_w = \pm \sigma_x$, wie man aus der notwendigen Bedingung $w''(x) = 0$ leicht folgert.

Weitere Verteilungen findet der Leser im Abschnitt 3.12.

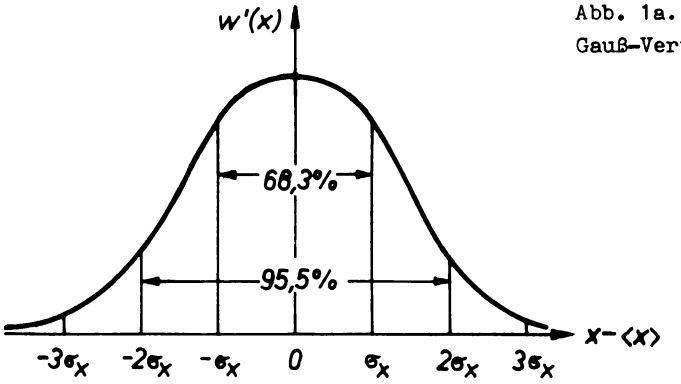
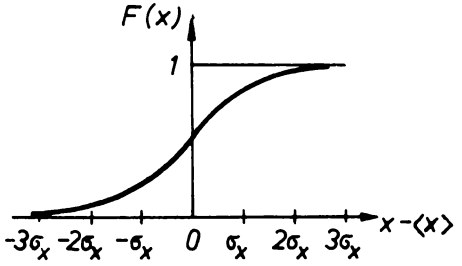


Abb. 1a.
Gauß-Verteilung

Abb. 1b.
Verteilungsfunktion F(x) der Gauß-Verteilung



1.2. Zur Einteilung der Meßfehler

Physikalische Größen besitzen quantitativen und qualitativen Charakter, sie werden angegeben als Produkt von Zahlenwert und Einheit. Die experimentelle Bestimmung des Zahlenwertes einer Größe x durch Anwendung eines bestimmten Meßverfahrens bei gewähltem Einheitensystem heißt Messung dieser Größe, die zu messende physikalische Größe (z. B. Länge, Kraft, Temperatur, Vakuumlichtgeschwindigkeit) Meßgröße. Ist die Meßgröße eine meßbare Eigenschaft eines Körpers, dann wird dieser Körper Meßgegenstand oder Meßobjekt genannt. Das aus der Anzeige des verwendeten Meßgerätes ermittelte Produkt aus Zahlenwert und Einheit heißt Meßwert der Meßgröße. Der ermittelte Meßwert kann schon das gesuchte Meßergebnis darstellen. Meist wird es jedoch bei direkt meßbaren Größen (z. B. bei einer Längenmessung) aus mehreren Meßwerten gleicher Größenart bzw. bei indirekt meßbaren Größen (z. B. bei der Messung des elektrischen Widerstandes mittels einer gleichzeitigen Strom- und Spannungsmessung) aus Meßwerten ungleicher Größenart gewonnen.

Es werde angenommen, daß der gesuchte Meßwert der physikalischen Größe existiert und prinzipiell exakt bestimmbar ist[1]. Er wird als wahrer Wert x_w der Meßgröße bezeichnet.

Bedingt durch die immer vorhandene Unzulänglichkeit der apparativen Möglichkeiten, durch die Unvollkommenheit der menschlichen Sinnesorgane, durch die nie idealen experimentellen Fertigkeiten und Fähigkeiten des Beobachters, durch verfälschende Umwelteinflüsse, wie z. B. Temperatur, magnetische und elektrische Störfelder usw., ist die praktische Durchführung der Messung stets mit Fehlern - den Meß- oder Beobachtungsfehlern - behaftet. So ergeben schon zwei mit gleicher Sorgfalt und gleicher Meßapparatur durchgeführte Messungen derselben physikalischen Größe nie ein völlig identisches Ergebnis. Aus den Messungen kann daher stets nur auf einen Näherungswert mit einem entsprechenden Vertrauensintervall geschlossen werden. Das Vertrauensintervall wird durch die aufgewandte Sorgfalt, durch die verwendete Meßapparatur usw. gegeben. Der wahre Wert der gesuchten Größe ist somit ein Grenzwert, dem man sich bei der Bestimmung der zu messenden Größe wohl prinzipiell durch Verkleinerung der Meßfeh-

---

[1] Auf die Problematik der Messung von Objekten der Mikrophysik wird hier nicht eingegangen.

ler (Verbesserung der Meßtechnik, größere Sorgfalt usw.) immer mehr nähern, den man aber niemals mit Sicherheit angeben kann. So sind z. B. die Konstanten der Physik, wie die Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c = (2{,}99792456 \pm 0{,}00000001) \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\ s^{-1}},$$

die Ruhmasse des Elektrons

$$m_{oe} = (9{,}10956 \pm 0{,}00006) \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg},$$

die Planck-Konstante

$$h = (6{,}62620 \pm 0{,}00005) \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}.$$

Näherungswerte mit bestimmten Vertrauensabweichungen für eine bestimmte "statistische Sicherheit" (hier für P = 99,7%).

Aufgabe der Fehlerrechnung ist es, geeignete Mittelwerte mit Meßunsicherheiten zu definieren und geeignete Methoden zu ihrer Berechnung aus dem vorgegebenen experimentellen Material herzuleiten. Die Fehlerrechnung bildet die Grundlage für die kritische Auswertung der Meßergebnisse. Dagegen ist jede Angabe eines Meßergebnisses ohne gleichzeitige Angabe der Meßunsicherheit wertlos. Nur eine sinnvoll durchgeführte Fehlerabschätzung gibt die Gewähr, die Güte der verwendeten Meßapparatur und die mit ihr gewonnenen Resultate richtig eingeschätzt, d. h. nicht über-, aber auch nicht unterschätzt zu haben.

Ebenso wie die zur Bestimmung einer physikalischen Größe anzuwendende experimentelle Methode von der speziellen Aufgabenstellung abhängig ist, kann auch für die Art der durchzuführenden Fehlerbetrachtung kein allgemeingültiges Schema gegeben werden. So wird manch ein Ungeübter die im Abschnitt 1.3.1. gegebenen Methoden womöglich auch dort bedenkenlos verwenden, wo die systematischen Fehler dies gar nicht mehr zulassen. Eine Anwendung der im folgenden gegebenen Beziehungen darf deshalb nie schematisch erfolgen, sondern es muß immer erst sorgfältig erwogen werden, welche der angeführten Methoden der Fehlerabschätzung bei vorliegender Versuchsapparatur und Meßmethode zweckmäßig ist. Nur durch strenge Beachtung dieses Grundsatzes kann man Fehleinschätzungen der Meßunsicherheit vermeiden. Weiterhin ist

es immer empfehlenswert, eine Fehlerbetrachtung schon vor Beginn des Versuches durchzuführen, weil sie wichtige Hinweise dafür geben kann, welche Teile der Messung mit besonderer Sorgfalt durchgeführt werden müssen.

Die bei einer Messung auftretenden Fehler werden in drei ihrer Entstehung und ihrem Wesen nach grundsätzlich verschiedene Fehlerklassen eingeteilt: in grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler

Ein Fehler heißt grober Fehler, wenn seine Ursachen in einer prinzipiell vermeidbaren groben Unachtsamkeit des Experimentators liegen. Grobe Fehler können sowohl durch die mangelnde Sorgfalt des Beobachters beim Experimentieren als auch durch die Wahl eines ungeeigneten Meß- oder Auswerteverfahrens bedingt sein. Da grobe Fehler prinzipiell vermeidbar sind bzw. mindestens erkannt und somit aus einer Meßreihe eliminiert werden können, werden sie im folgenden nicht betrachtet.

Systematische Fehler

Ein Fehler heißt ein systematischer Fehler, wenn

a) für Messungen unter gleichen Bedingungen der Fehler einen konstanten Wert hat,
b) bei gesetzmäßiger Veränderung der Versuchsbedingungen der Fehler sich gleichfalls gesetzmäßig verändert bzw. konstant bleibt.

Systematische Fehler werden hauptsächlich hervorgerufen durch die Unvollkommenheiten der Maßverkörperungen (z. B. Wägestücke, Widerstandsnormale, Endmaße), der Meßgeräte, der Meß- und Auswerteverfahren, von meßtechnisch erfaßbaren Einflüssen der Umwelt und von persönlichen Einflüssen des Beobachters.

Wird beispielsweise eine Längenmessung mit einem Maßstab falscher Teilung durchgeführt, so werden alle Längen, auch bei noch so großer Sorgfalt des Experimentators, zu klein oder zu groß ermittelt, je nachdem, ob die Teilstriche des Maßstabes einen zu großen oder zu kleinen Abstand voneinander haben. Ebenso führt ein falsch geeichtes Thermometer zu einem systematischen Fehler bei der Temperaturmessung. Resultiert diese fehlerhafte Eichung nur aus einer Verschiebung des Temperaturnullpunktes, so ist dieser systematische Fehler - sofern man nicht eine absolute Temperaturmessung benötigt - im Gegensatz zu dem bei obiger Längenmessung angenommenen, sofort durch Verwendung von Temperaturdifferenzen eliminierbar. Im physikalischen Anfängerpraktikum bestimmt man vielfach den Elastizitätsmodul von Stahl aus

der Dehnung eines Stahldrahtes bei wachsender Belastung, wobei die Dehnung aus der Längenänderung des Drahtes zwischen dem festen Aufhänge- und dem beweglichen Belastungspunkt ermittelt wird. In Wirklichkeit ist die so gewonnene Längendifferenz gar nicht mit der Verlängerung des Drahtes identisch, sondern setzt sich aus der Verlängerung des Drahtes und der Durchbiegung der Aufhängevorrichtung zusammen. Die gemessene Verlängerung des Drahtes ist somit immer um die Durchbiegung der Aufhängevorrichtung zu groß. Dieser systematische Fehler läßt sich leicht dadurch eliminieren, daß man nicht den Aufhängepunkt des Drahtes als zweiten Bezugspunkt wählt, sondern eine am Draht angebrachte Marke. Bei der Durchführung einer Präzisionswägung wäre es prinzipiell falsch, die Wägung des Körpers nur auf der einen, z. B. der rechten Waagschale vorzunehmen und den aus einer Vielzahl von derartigen Wägungen sich ergebenden Mittelwert und die zugehörige Vertrauensabweichung zu ermitteln. Durch eine derartige Meßmethode würde u. a. der systematische Fehler unberücksichtigt bleiben, welcher durch den immer vorhandenen geringen Längenunterschied der Waagebalken hervorgerufen wird. Dieser kann aber die allein durch die zufälligen Fehler (s. u.) ermittelte Vertrauensabweichung erheblich überschreiten. Es ist daher unbedingt erforderlich, den durch Längenunterschiede der Waagebalken verursachten systematischen Fehler durch eine Doppelwägung zu eliminieren. Ferner müßte bei einer Präzisionswägung noch der unterschiedliche Auftrieb des zu wägenden Körpers und der zur Wägung benutzten Wägestücke beachtet werden. Der so entstehende systematische Fehler läßt sich leicht durch Berücksichtigung der Auftriebskorrektur beseitigen.

Ein systematischer Fehler kann auch dadurch zustande kommen, daß die verwendete Meßmethode den Voraussetzungen der zur Auswertung der Meßwerte verwendeten Beziehungen nicht entspricht. Will man z. B. die Schwerefeldstärke g aus der Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels bekannter Länge l mit Hilfe der Beziehung $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ bestimmen, so muß man beachten, daß diese Beziehung nur für kleine Ausschläge des Pendels Gültigkeit hat, bei einer vorgegebenen Grenze des systematischen Fehlers daher ein ganz bestimmter Betrag der Elongation nicht überschritten werden darf.

Diese Beispiele zeigen sehr deutlich, daß es vor Durchführung jeder Messung unerläßlich ist, die zu verwendende Apparatur in bezug auf systematische Fehler zu untersuchen, diese soweit wie möglich auszuschalten (erfaßbare systematische Fehler) und die verbleibenden nicht erfaßbaren beim Endergebnis durch Abschätzung zu berücksichtigen. Eine solche Abschätzung kann nicht willkürlich erfolgen, sondern muß äußerst sorgfältig unter Beachtung aller das Meßergebnis verfälschenden Einflüsse durchgeführt werden. Hierzu können u. a. die Garantiefehlergrenzen der verwendeten Meßgeräte dienen. Durch sie wird vom Hersteller garantiert, daß die Fehler der mit dem Meßgerät unter bestimmten Bedingungen ermittelten Meßwerte (Anzeigen) innerhalb vorgeschriebener Grenzen, den sogenannten Garantiefehlergrenzen, liegen. Bei elektrischen Meßinstrumenten wird die Einhaltung der Garantiefehlergrenzen ($\pm$a % vom Endausschlag bei Klasse a) bei den Nennwerten (oder in den Nennbereichen) bestimmter Einflußgrößen

(z. B. der Temperatur) garantiert. Für die Einflußgrößen sind im Anschluß an ihre Nennwerte (oder Nennbereiche) Einflußbereiche vorgesehen. Haben sämtliche Einflußgrößen ihre Nennwerte (bzw. liegen sie im Nennbereich) und wandert jeweils eine von ihrem Nennwert (bzw. von dem Grenzwert des Nennbereiches) aus in den anschließenden Einflußbereich, so darf sich hierdurch bei einem Gerät der Klasse a die Anzeige um höchstens $\pm a$ % ändern.

Ein Beispiel diene der Erläuterung. Ein Voltmeter der Klasse 0,2 mit 150 V Meßbereich hat eine Fehlergrenze von $\pm 0{,}2$ % vom Endwert des Meßbereiches, d. h. $\pm 0{,}3$ V, wenn jede der festgelegten Einflußgrößen ihren Nennwert hat bzw. im Nennbereich liegt. Nimmt z. B. die Temperatur als Einflußgröße (Nennwert z. B. 20 °C) einen beliebigen Wert innerhalb der Einflußbereiche $10\ ^{\circ}\mathrm{C} \leqq \vartheta \leqq 20\ ^{\circ}\mathrm{C}$ oder $20\ ^{\circ}\mathrm{C} \leqq \vartheta \leqq 30\ ^{\circ}\mathrm{C}$ ein, so darf sich hierbei die Anzeige gegenüber der bei 20 °C um höchstens $\pm 0{,}3$ V ändern.

TGL 0-1319 fordert darüber hinaus, daß zum sicheren Nachweis der Einhaltung der Garantiefehlergrenzen die sonstige Meßunsicherheit (z. B. Ableseunsicherheit) der Geräte klein gegen die angegebene Garantiefehlergrenze sein soll (etwa 1/5).

Wenn der systematische Fehler des Meßgerätes bekannt ist, kann damit die Istanzeige korrigiert werden:

Fehler der Anzeige = Istanzeige minus Sollanzeige.

Ein Quecksilberthermometer habe z. B. den Anzeigebereich 0 bis 50 °C und sei in (1/10)K geteilt. Die Eichordnung für derartige Thermometer läßt Eichfehlergrenzen von $\pm 0{,}15$ K zu. Vergleicht man dieses Thermometer mit einem "Normalthermometer" in einem Wasserbad und zeigt das Normalthermometer eine Celsiustemperatur von 20,36 °C, das Quecksilberthermometer dagegen 20,46 °C, dann besitzt bei dieser Temperatur das Quecksilberthermometer einen erfaßbaren systematischen Fehler von 20,46 °C - 20,36 °C = 0,10 K. Er fällt noch in die Eichfehlergrenzen. Ist dies auch für alle übrigen Meßpunkte im Anzeigebereich des Quecksilberthermometers der Fall, dann entspricht dieses Thermometer den Eichvorschriften, es kann den Eichstempel bekommen. Die Meßunsicherheit des Thermometers betrage 0,02 K, ist also entsprechend klein gegenüber dem systematischen Fehler. Wenn der Benutzer des Thermometers bei allen Messungen den erfaßbaren systematischen Fehler des Thermometers eliminiert, so kann er mit ihm innerhalb der Meßunsicherheit von $\pm 0{,}02$ K "richtig" messen.

Vielfach kann das Vorliegen eines systematischen Fehlers auch dadurch erkannt werden, daß die erhaltenen Meßwerte bei Veränderungen eines Versuchsparameters einen systematischen Gang zeigen. Läßt man z. B. bei der Bestimmung der Schwerefeldstärke g aus der Schwingungsdauer T und der Länge l eines mathematischen Pendels die Amplitude der Pendelschwingung immer mehr wachsen und berechnet die Werte g mit der Beziehung $g = 4\pi^2 l/T^2$, so wächst auch der systematische Fehler.

Führt der eigentliche Meßvorgang zu einer Erwärmung der Meßapparatur, so können Messungen von verschiedener Zeitdauer unterschiedliche Ergebnisse liefern usw.

Ein systematischer Fehler kann auch durch den Experimentator selbst hervorgerufen werden. Der bekannte Parallaxenfehler führt z. B. - falls man immer unter dem gleichen Winkel abliest - zu einem systematischen Fehler, dessen Ursache letztlich in der Unachtsamkeit des Experimentators liegt.

Zufällige Fehler

Ein Fehler, der durch ein zufälliges Ereignis bedingt ist, heißt zufälliger Fehler. Zufällige Fehler werden hervorgerufen von meßtechnisch nicht erfaß- und beeinflußbaren Änderungen der Maßverkörperungen, der Meßgeräte, des Meßgegenstandes, der Umwelt (z. B. unregelmäßige Luftbewegungen, Schwingungen des Laborgebäudes) und des Beobachters (z. B. Unzulänglichkeit der menschlichen Sinnesorgane). Mißt ein Beobachter denselben Meßgegenstand mit demselben Meßgerät unter gleichen Bedingungen, dann weichen die einzelnen Meßwerte als Folge der zufälligen Fehler voneinander ab. Sie streuen statistisch nach Betrag und Richtung und sind daher nicht einzeln, sondern nur in ihrer Gesamtheit durch eine Rechengröße zu erfassen. Da zufällige Fehler durch zufällige Ereignisse bedingt sind, können sie nur durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen rechnerisch erfaßt werden, und zwar um so zuverlässiger, je größer die Anzahl der durchgeführten Messungen ist.

Während also zufällige Fehler das Meßergebnis unsicher machen, aber durch Rechengrößen charakterisiert werden können, machen systematische Fehler das Meßergebnis unrichtig und müssen daher stets - wie oben angeführt - durch Korrekturen berücksichtigt werden.

Voraussetzung für die Erfassung von zufälligen Fehlern ist, daß eine hinreichend kleine Ableseunsicherheit existiert, um die vorhandene Streuung beobachten zu können. Die Ableseunsicherheit begrenzt die Zahl der gültigen Dezimalstellen, mit denen der Beobachter das Ergebnis einer einzelnen Messung angeben kann. Sie ist u. a. abhängig von der Beschaffenheit der Marke des Meßgerätes (z. B. von einer bestimmten Stelle eines Zeigers, von einem Noniusstrich) und von der Art der Hilfsmittel, mit denen zwischen den Teilungsstrichen interpoliert wird (z. B. visuelle Schätzung, Nonius, Meßschraube, Ableselupe). Zum Beispiel erlaubt der Nonius eines einfachen Meßschiebers Zehntel eines Millimeters mit Sicherheit anzugeben. Liest man durch Feststellung der am besten übereinstimmenden Noniusstriche $l = 12{,}3$ mm ab, so heißt dies, die Länge l der zu vermessenden

Strecke liegt mit Sicherheit im Intervall 12,25 mm $\leqq$ l $\leqq$ 12,35 mm. Bei sorgfältiger Durchführung der Messung beträgt der Ablesefehler demnach 0,05 mm.

Beim Ablesen von Skalen müssen die Bruchteile eines Teilungsstrichabstandes geschätzt werden. Die Sicherheit dieser Schätzung hängt sowohl vom Teilungsstrichabstand als auch von der Breite der Teilungsstriche und der Breite des Zeigers ab. Ferner ist sie von Beobachter zu Beobachter verschieden und hängt auch beim gleichen Beobachter u. a. von den Versuchsbedingungen (z. B. von den Beleuchtungsverhältnissen) und seinem Ermüdungsgrad ab. Vielfach können die Bruchteile 1/2 bis 1/3 zuverlässig geschätzt werden.

Bei Ziffernskalen von Zählern und digital anzeigenden Meßgeräten **ist die Anzeigeunsicherheit grundsätzlich eine Einheit der letzten** angezeigten Dezimalstelle.

Falls sich die Fehlerbetrachtung ausschließlich mit den durch zufällige Fehler bedingten Abweichungen der zu messenden Größe von ihrem prinzipiell nicht angebbaren wahren Wert beschäftigt, ist es grundsätzlich unmöglich, festzustellen, ob der durch Mittelung gefundene Meßwert positiv oder negativ vom wahren Wert abweicht. Hat man den Mittelwert $\bar{l}$ einer Länge aus den Einzelmessungen l_i ermittelt und die zugehörige Vertrauensabweichung $\varepsilon_{\bar{l}}$ für eine vorgegebene statistische Sicherheit P bestimmt, so muß seine Angabe z. B. lauten

$$l = \bar{l} \pm \varepsilon_{\bar{l}} = (50{,}4 \pm 0{,}3)\,\text{cm}.$$

Vertrauensabweichungen und Meßunsicherheiten werden stets auf eine zählende Stelle aufgerundet.

Durch Rechnung läßt sich die Genauigkeit eines Meßwertes nicht verbessern. Es ist daher sinnlos, für den Mittelwert mehr Ziffern anzugeben als die Vertrauensabweichung bzw. die Meßunsicherheit erlaubt, d. h. im vorstehenden Fall, statt $\bar{l}$ = 50,4 cm z. B. $\bar{l}$ = 50,3978 cm zu schreiben.

Häufig wird auch die relative Vertrauensabweichung angegeben, die ein sehr anschauliches Maß für die Genauigkeit der durchgeführten Messung gibt. Für unser obiges Beispiel beträgt sie

$$\frac{\varepsilon_{\bar{l}}}{\bar{l}} = \frac{0{,}3\ \text{cm}}{50{,}4\ \text{cm}} = 0{,}595 \cdot 10^{-2} \approx 0{,}6\ \% = 6\ ‰ .$$

Bei jeder Meßwertauswertung müssen zufällige und systematische Fehler betrachtet werden. Entsprechend ihrem unterschiedlichen Cha-

rakter sind auch die Methoden zu ihrer Erfassung unterschiedlich. Im Abschnitt 1.3. beschäftigen wir uns mit der Auswertung der zufälligen Fehler, im Abschnitt 1.4. mit der Auswertung der systematischen. Dominieren die systematischen Fehler, dann kann auf die im Abschnitt 1.3. entwickelten rechnerischen Methoden zur Erfassung der zufälligen Fehler verzichtet werden. Dies ist vielfach bei den einfachen Versuchsaufbauten des physikalischen Grundpraktikums der Fall. Man sollte daher stets vor Beginn der Auswertung der zufälligen Fehler eine Betrachtung der systematischen durchführen.

1.3. Zur Erfassung der zufälligen Fehler

1.3.1. Absoluter Fehler

Die Größe x (z. B. eine Länge) werde von einem bzw. mehreren Beobachtern nach derselben Meßvorschrift mit der gleichen Sorgfalt und Meßvorrichtung n-mal gemessen, systematische Fehler seien gegenüber den zufälligen vernachlässigbar. Die Meßwerte seien

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \quad (n > 1). \tag{18}$$

Die Differenzen zwischen den Meßwerten x_i und dem wahren Wert x_w,

$$v_{wi} = x_i - x_w\ , \tag{19}$$

werden als absolute Fehler bezeichnet. Da x_w i. allg. nicht bekannt ist, entzieht sich auch v_{wi} i. allg. der Ermittlung.

1.3.2. Scheinbarer Fehler, Gaußsches Verfahren der kleinsten Quadratsumme, Mittelbildung

Da der wahre Wert x_w der Meßwerte (18) i. allg. nicht angebbar ist, muß eine geeignete Mittelbildung festgelegt werden. Hierbei ist keineswegs von vornherein abzusehen, welche Mittelbildung (ob z. B. das arithmetische Mittel, das geometrische Mittel oder eine andere durch eine bestimmte Vorschrift festgelegte Mittelbildung) zur Lösung des gegebenen Problems am geeignetsten ist.

Der durch irgendeine Vorschrift gewonnene Mittelwert sei $\bar{x}$. Man bezeichnet dann

$$\boxed{v_i = x_i - \bar{x}} \tag{20}$$

als scheinbaren Fehler des Meßwertes x_i.

Eine einfache Forderung zur Festlegung des Mittelwertes $\bar{x}$ wäre, durch die Wahl des Mittelwertes $\bar{x}$ die Summe der Absolutbeträge der scheinbaren Fehler v_i zum Minimum zu machen. Wie sich leicht zeigen läßt, führt sie zu einem physikalisch unsinnigen Mittelwert. Ist n ungerade, dann besitzt die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x| \qquad (x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_n)$$

beim Wert $x = x_{(n+1)/2}$ ein Minimum, dessen Lage vollkommen unabhängig vom Wert der übrigen x_i ist. Ist n gerade, dann kann überhaupt kein Mittelwert angegeben werden.

Statt der Forderung

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| =: \text{Min}$$

wird der Mittelwert $\bar{x}$ der Meßwerte $x_1, \ldots, x_n$ durch die Bedingung

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 =: \text{Min}} \tag{21}$$

festgelegt (Gaußsches Verfahren der kleinsten Quadratsumme).

Bekanntlich ist eine notwendige Bedingung für einen Extremwert der Funktion $y = f(x)$ bei $x = \bar{x}$ das Verschwinden der ersten Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle. Man erhält durch Differentiation

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)$$

und somit die Extremwertbedingung

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = -2 \sum_{i=1}^{n} v_i = 0,} \tag{22}$$

aus der

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = 0$$

oder

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (23)$$

folgt. Die Forderung (21) führt hiernach zum arithmetischen Mittel. Gl. (22) kann als Rechenprobe dienen.

1.3.3. Standardabweichung der Einzelmessungen

Der Vergleich von (23) mit (11) zeigt, daß jedem Meßpunkt x_i die Wahrscheinlichkeit $w(x_i) = 1/n$ zuzuordnen ist. Die Standardabweichung σ_x der Grundgesamtheit ergibt sich demzufolge nach (13) und (20) aus

$$\sigma_x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i^2. \qquad (24a)$$

Die Anzahl der vorliegenden Meßwerte ist aber stets endlich. Will man auch einer endlichen Anzahl n von Werten x_i eine Standardabweichung s_x zuordnen, dann muß sie zwei Forderungen genügen. Erstens muß sie beim Übergang zu unendlich vielen Werten x_i in (24a) übergehen:

$$s_x \cong \sigma_x \quad \text{für} \quad n \gg 1 \qquad (24b)$$

($\cong$ lies: asymptotisch gleich).

Zweitens darf einem einzelnen Meßwert (n = 1) keine endliche Standardabweichung zukommen, da für ihn keine Vergleichsmöglichkeit vorliegt, die Definition einer Standardabweichung somit unsinnig wäre. Beide Forderungen lassen sich am einfachsten erfüllen, wenn man in (24a) $\lim_{n\to\infty}$ wegläßt und n durch n - 1 ersetzt:

$$\boxed{s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 .} \qquad (25)$$

s_x heißt Standardabweichung der Einzelmessungen (früher mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessungen).

Bei einer sehr großen Anzahl n von Meßwerten und bei Vorliegen einer Normalverteilung besitzt die Standardabweichung s_x eine sehr anschauliche Bedeutung. Nach (17) liegen dann wegen (24b) innerhalb der Grenzen

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x} \pm s_x & \text{etwa } P = 68{,}3\ \%, \\ \bar{x} \pm 1{,}96 s_x & P = 95{,}0\ \%, \\ \bar{x} \pm 2 s_x & P = 94{,}4\ \%, \\ \bar{x} \pm 2{,}58 s_x & P = 99{,}0\ \%, \\ \bar{x} \pm 3 s_x & P = 99{,}7\ \% \end{array}\right\} \qquad (26)$$

der von w'(x) und der x-Achse eingeschlossenen Fläche (vgl. Abb. 1). Bei Vorliegen einer Normalverteilung liegen demzufolge im Mittel von 1000 unabhängigen Einzelmessungen etwa 317 außerhalb des Intervalls $\bar{x} \pm s_x$, etwa 50 außerhalb des Intervalls $\bar{x} \pm 1{,}96 s_x$, etwa 10 außerhalb des Intervalls $\bar{x} \pm 2{,}58 s_x$ und etwa 3 außerhalb des Intervalls $\bar{x} \pm 3 s_x$. Das Intervall $\bar{x} \pm s_x$ heißt Standardintervall zur statistischen Sicherheit P = 68,3 %, das Intervall $\bar{x} \pm 1{,}96 s_x$ Standardintervall zur statistischen Sicherheit P = 95,0 %, das Intervall $\bar{x} \pm 2{,}58 s_x$ Standardintervall zur statistischen Sicherheit P = 99,0 % und das Intervall $\bar{x} \pm 3 s_x$ Standardintervall zur statistischen Sicherheit P = 99,7 %.

In der Physik und der Vermessungstechnik rechnet man meist mit der statistischen Sicherheit P = 68,3 %; in der Biologie weithin mit P = 99,7 %. Die Industrie bevorzugt die statistische Sicherheit P = 95,0 %.

Beispiel 1

Bei einer Längenmessung wurden nachfolgende Meßdaten ermittelt:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{l_i}{cm}$	5,87	5,01	5,24	5,19	5,25	5,00	5,65	5,42	5,46	5,32

Man berechne den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardintervalle zu den statistischen Sicherheiten P = 68,3 % und P = 99,7 %.

Lösung:

Aus Tabelle 1 folgt

Mittelwert (23) $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{1}{10}\,53{,}41\ \text{cm} = 5{,}341\ \text{cm};$

Tabelle 1

i	$\frac{l_i}{\text{cm}}$	$\frac{10v_i}{\text{cm}}$	$\frac{10v_i^2}{\text{cm}^2}$
1	5,87	5,29	2,798
2	5,01	-3,31	1,096
3	5,24	-1,01	0,102
4	5,19	-1,51	0,228
5	5,25	-0,91	0,083
6	5,00	-3,41	1,163
7	5,65	3,09	0,955
8	5,42	0,79	0,062
9	5,46	1,19	0,142
10	5,32	-0,21	0,004
Σ	53,41	0	6,633

Standard-abweichung (25) $s_l = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 0{,}6633}\ \text{cm} = 0{,}272\ \text{cm};$

Standardintervall zu der statistischen Sicherheit

$P = 68{,}3\ \%$: $\bar{l} \pm s_l = (5{,}3 \pm 0{,}3)\text{cm},$

$P = 99{,}7\ \%$: $\bar{l} \pm 3s_l = (5{,}3 \pm 0{,}9)\text{cm}.$

Ergibt sich für den Mittelwert $\bar{x}$ der gemessenen Werte x_i eine für die Berechnung der Summe Σv_i^2 unbequeme Zahl, dann kann durch die Transformation

$$\hat{\bar{x}} = \bar{x} + \alpha \qquad (27)$$

der Mittelwert $\bar{x}$ durch die für die Rechnung günstigere Größe $\hat{\bar{x}}$ ersetzt werden. Statt der v_i berechnet man jetzt die durch die spezielle Wahl von $\hat{\bar{x}}$ bequemeren Hilfsdifferenzen

$$\hat{v}_i = x_i - \hat{\bar{x}} \qquad (28)$$

und daraus $\sum \hat{v}_i^2$. Da weiter nach (27), (28) und (20)

$$\hat{v}_i = v_i - \alpha,$$

ergibt sich mit $\sum v_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} v_i + n\alpha^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + n\alpha^2. \qquad (29)$$

Da $n > 0$ und $\alpha^2 \geqq 0$, gilt $\sum \hat{v}_i^2 \geqq \sum v_i^2$. Man erkennt hieran sehr anschaulich, daß das arithmetische Mittel die Mittelbildung ist, die die Quadratsumme der scheinbaren Fehler zum Minimum macht.

Beispiel 2

Man berechne $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$ für Beispiel 1 mit Hilfe vorstehenden Verfahrens.

Lösung

Wir wählen $\hat{\bar{l}} = 5{,}30$ cm und bekommen (s. Tab. 2)

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i - \hat{\bar{l}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i^2 = 6{,}801 \text{ cm}^2.$$

Nach (27) gilt weiter $\alpha = \bar{l} - \hat{\bar{l}} = (5{,}341 - 5{,}300)\text{cm} = 0{,}041$ cm, mithin folgt aus (29)

$$\sum_{i=1}^{n} v_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i^2 - n\alpha^2 = (0{,}6801 - 10 \cdot 0{,}00168)\text{cm}^2 = 0{,}6633 \text{ cm}^2.$$

Tabelle 2

	$\frac{l_i}{\text{cm}}$	$\frac{10\hat{v}_i}{\text{cm}}$	$\frac{10\hat{v}_i^2}{\text{cm}^2}$
1	5,87	5,7	3,249
2	5,01	-2,9	0,841
3	5,24	-0,6	0,036
4	5,19	-1,1	0,121
5	5,25	-0,5	0,025
6	5,00	-3,0	0,900
7	5,65	3,5	1,225
8	5,42	1,2	0,144
9	5,46	1,6	0,256
10	5,32	0,2	0,004
Σ			6,801

1.3.4. Fehlerfortpflanzungsgesetz

Bei den meisten physikalischen Größen ergibt sich die zu messende Größe nicht direkt, sondern sie muß indirekt aus einem funktionalen Zusammenhang zwischen l voneinander unabhängigen einzeln meßbaren Größen bestimmt werden. So ist z. B. der Flächeninhalt A eines Rechtecks meist nicht direkt meßbar. Es müssen zuerst die Längen a und b seiner Seiten einzeln gemessen und aus diesen Werten dann mit Hilfe der Beziehung A = ab der gesuchte Flächeninhalt berechnet werden. Wie sich Mittelwert und Standardabweichung der zu bestimmenden Größe aus den entsprechenden Größen der Einzelmessungen errechnen lassen, soll im folgenden näher untersucht werden.

Zum besseren Verständnis der Beweisführung werde zunächst vorausgesetzt, daß sich die zu ermittelnde Größe aus nur zwei einzeln bestimmbaren Größen x_1 und x_2 ergibt:

$$z = f(x_1, x_2). \tag{30}$$

(In unserem Beispiel der Flächenmessung wäre $x_1 = a$, $x_2 = b$ und $z = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = ab$ zu setzen).

Die Größe x_1 werde n_1-mal, die Größe x_2 werde n_2-mal (mit gleicher Meßunsicherheit der Einzelmessungen $x_{1i}(i = 1,2,\ldots,n_1)$, $x_{2k}(k = 1,2,\ldots,n_2)$) gemessen. Dann ergeben sich die Mittelwerte zu

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}; \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} x_{2k}, \tag{31}$$

die scheinbaren Fehler der Meßwerte x_{1i} und x_{2k} aus (20) zu

$$v_{1i} = x_{1i} - \bar{x}_1, \qquad v_{2k} = x_{2k} - \bar{x}_2 \tag{32}$$

und schließlich nach (25) die Standardabweichungen der Meßwerte x_{1i} und x_{2k} zu

$$s_{x_1} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} v_{1i}^2}; \quad s_{x_2} = \sqrt{\frac{1}{n_2 - 1} \sum_{k=1}^{n_2} v_{2k}^2}. \tag{33}$$

Aus diesen Werten sind $\bar{z}$ und s_z zu errechnen. Durch Einsetzen der Werte x_{1i} und x_{2k} in (31) gewinnt man mit (32) die Darstellung

$$z_{ik} = f(x_{1i}, x_{2k}) = f(\bar{x}_1 + v_{1i}, \bar{x}_2 + v_{2k}). \tag{34}$$

Die Taylorsche Reihenentwicklung für eine Funktion der zwei Variablen x und y lautet bei Vernachlässigung von Gliedern quadratischer und höherer Ordnung

$$f(x+h_1,y+h_2) = f(x,y) + h_1 f_x(x,y) + h_2 f_y(x,y).$$

Setzt man $x = \bar{x}_1$, $y = \bar{x}_2$, $h_1 = v_{1i}$ und $h_2 = v_{2k}$, so lautet (34)

$$z_{ik} = f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + v_{1i} f_{x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + v_{2k} f_{x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2). \tag{35}$$

Durch zweimalige Anwendung von (23) ergibt sich zunächst

$$z_i = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} z_{ik}$$

und dann für den gesuchten Mittelwert

$$\bar{z} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} z_i = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} z_{ik}$$

oder mit (35)

$$\bar{z} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \left(f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + v_{1i} f_{x_1} + v_{2k} f_{x_2} \right)$$

$$= \frac{n_1 n_2 f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} v_i f_{x_1} + \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} v_k f_{x_2}$$

und schließlich mit (22)

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1,\bar{x}_2). \tag{36}$$

Der gesuchte Mittelwert $\bar{z}$ ergibt sich also dadurch, daß man in die zur Bestimmung von z gegebene Beziehung (30) die Mittelwerte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ einsetzt.

Zur Bestimmung der Standardabweichung σ_z der Grundgesamtheit und der Standardabweichung s_z von z führen wir nach (20) die scheinbaren Fehler

$$v_{ik} = z_{ik} - \bar{z} \tag{37}$$

ein. Mit ihnen ergibt sich σ_z^2 nach (24) und (35):

$$\sigma_z^2 = \lim_{n_1,n_2 \to \infty} \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \left(v_{1i} f_{x_1} + v_{2k} f_{x_2} \right)^2$$

$$= \lim_{n_1,n_2 \to \infty} \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \left(v_{1i}^2 f_{x_1}^2 + v_{2k}^2 f_{x_2}^2 + 2 v_{1i} v_{2k} f_{x_1} f_{x_2} \right)$$

$$= \lim_{n_1,n_2 \to \infty} \frac{1}{n_1 n_2} \left[n_2 \sum_{i=1}^{n_1} v_{1i}^2 f_{x_1}^2 + n_1 \sum_{k=1}^{n_2} v_{2k}^2 f_{x_2}^2 \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^{n_1} v_{1i} \sum_{k=1}^{n_2} v_{2k} f_{x_1} f_{x_2} \right]$$

und mit (22) bei nochmaliger Anwendung von (24) und Beachtung des Überganges von (24) zu (25) für σ_z bzw. s_z

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 f_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 f_{x_2}^2}, \qquad s_z = \sqrt{s_{x_1}^2 f_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 f_{x_2}^2}. \tag{38}$$

f_{x_1} und f_{x_2} bedeuten die Werte der Ableitungen von $f(x_1,x_2)$ an der Stelle $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$.

Beispiel 3

Für die Seiten a und b eines Rechtecks wurden folgende Meßwerte gewonnen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{a_i}{cm}$	15,03	15,00	15,96	16,95	15,57	15,75	16,38	17,61	15,72	16,46
$\frac{b_i}{cm}$	7,41	7,07	7,72	7,99	7,52	7,67	7,09	7,34	-	-

Man ermittle die Mittelwerte $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{A}$ der Seitenlängen und des Flächeninhalts des Rechtecks und die zugehörigen Standardabweichungen s_a, s_b und s_A.

Lösung

Tabelle 3

i	a_i / cm	$\hat{v}_{ai}$ / cm	$\hat{v}_{ai}^2$ / cm^2	b_i / cm	$\hat{v}_{bi}$ / cm	$\hat{v}_{bi}^2$ / cm^2
1	15,03	-0,97	0,94	7,41	-0,09	0,01
2	15,00	-1,00	1,00	7,07	-0,43	0,19
3	15,96	-0,04	0	7,72	0,22	0,05
4	16,95	0,95	0,90	7,99	0,49	0,24
5	15,57	-0,43	0,19	7,52	0,02	0
6	15,75	-0,25	0,06	7,67	0,17	0,03
7	16,38	0,38	0,14	7,09	-0,41	0,17
8	17,61	1,61	2,59	7,34	-0,16	0,03
9	15,72	-0,28	0,08	-	-	-
10	16,46	0,46	0,21	-	-	-
Σ	160,43		6,11	59,81		0,72

Mit Hilfe von Tab. 3 erhält man die Mittelwerte (s. (23) und (36)):

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{1}{10}\cdot 160{,}43 \text{ cm} = 16{,}04 \text{ cm},$$

$$\bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} b_i = \frac{1}{8}\cdot 59{,}81 \text{ cm} = 7{,}48 \text{ cm},$$

$$\bar{A} = \bar{a}\,\bar{b} = 119{,}98 \text{ cm}^2.$$

Berechnung von $\sum_{i=1}^{10} v_{ai}^2$ und $\sum_{i=1}^{8} v_{bi}^2$:

Verwendet wird das in (27) bis (29) angegebene Verfahren. Hierzu werden gewählt $\hat{a} = 16{,}00$ und $\hat{b} = 7{,}50$. Es gilt dann gemäß (27)

$$\alpha_a = \bar{a} - \hat{a} = (16{,}04 - 16{,}00)\text{cm} = 4\cdot 10^{-2}\text{cm},$$
$$\alpha_b = \bar{b} - \hat{b} = (7{,}48 - 7{,}50)\text{cm} = 2\cdot 10^{-2}\text{cm}$$

und damit gemäß (29)

$$\sum_{i=1}^{10} v_{ai}^2 = \sum_{i=1}^{10} \hat{v}_{ai}^2 - n\alpha_a^2 = (6{,}11 - 10\cdot 1{,}6\cdot 10^{-3})\text{cm}^2 = 6{,}09 \text{ cm}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{8} v_{bi}^2 = \sum_{i=1}^{8} \hat{v}_{bi}^2 - n\bar{e}_b^2 = (0{,}72 - 8{\cdot}4{\cdot}10^{-4})\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}72\ \mathrm{cm}^2.$$

Standardabweichungen (s. (25) und (38)):

$$s_a = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10} v_{ai}^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 6{,}09}\ \mathrm{cm} = 0{,}82\ \mathrm{cm},$$

$$s_b = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{8} v_{bi}^2} = \sqrt{\frac{1}{7}\cdot 0{,}72}\ \mathrm{cm} = 0{,}32\ \mathrm{cm},$$

$$s_A = \sqrt{s_a^2\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2_{\bar{a},\bar{b}} + s_b^2\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2_{\bar{a},\bar{b}}} = \sqrt{s_a^2\bar{b}^2 + s_b^2\bar{a}^2}$$

$$= \sqrt{0{,}68{\cdot}55{,}95 + 0{,}10{\cdot}257{,}28}\ \mathrm{cm}^2 = 7{,}99\ \mathrm{cm}^2.$$

Vorstehende Überlegungen können leicht auf den Fall erweitert werden, daß z von l meßbaren Größen x_k (k = 1,2,...,l) abhängig ist, d. h., daß

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_l) \tag{39}$$

gilt. Man mißt zuerst diese Größen x_k (k = 1,2,...,l) einzeln und bestimmt dann ihre Mittelwerte $\bar{x}_k$ aus (vgl. (31))

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} \quad (k=1,2,\ldots,l). \tag{40}$$

Der Mittelwert $\bar{z}$ berechnet sich dann aus (vgl. (36))

$$\boxed{\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l).} \tag{41}$$

Für die Standardabweichungen s_{x_k} der Einzelmessungen x_{ki} ($i = 1,2,\ldots,n_k$; $k = 1,2,\ldots,l$) folgt (vgl. (33))

$$s_{x_k} = \sqrt{\frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki} - \bar{x}_k)^2}. \tag{42}$$

Mit diesen Werten ergibt sich die Standardabweichung s_z entsprechend (38) zu

$$\boxed{s_z = \sqrt{\sum_{k=1}^{I} s_{x_k}^2 f_{x_k}^2}\,.} \tag{43}$$

(43) heißt Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Standardabweichungen s_{x_k}. Die f_{x_k} bedeuten die Werte der Ableitungen an den Stellen $\bar{x}_k$.

Für zwei wichtige Spezialfälle soll noch die Berechnung von s_z angegeben werden. Ist die Funktion (39) eine Summe der Gestalt

$$\boxed{z = \sum_{k=1}^{I} a_k x_k,} \tag{44}$$

dann ergibt sich s_z zu

$$\boxed{s_z = \sqrt{a_1^2 s_{x_1}^2 + a_2^2 s_{x_2}^2 + \ldots + a_k^2 s_{x_k}^2}\,,} \tag{45}$$

ist f ein Potenzprodukt der Gestalt

$$\boxed{z = c \prod_{k=1}^{I} x_k^{a_k},} \tag{46}$$

dann ergibt sich die relative Standardabweichung

$$\boxed{\frac{s_z}{\bar{z}} = \sqrt{\left(a_1 \frac{s_{x_1}}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(a_2 \frac{s_{x_2}}{\bar{x}_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_1 \frac{s_{x_1}}{\bar{x}_1}\right)^2}\,.} \tag{47}$$

(45) und (47) können leicht durch Einsetzen von (44) bzw. (46) in (43) gefolgert werden.

Beispiel 4

Die Schwerefeldstärke g soll aus der Schwingungsdauer T und der Länge l eines mathematischen Pendels bestimmt werden. Welche der beiden Größen l und T muß mit größerer Sorgfalt gemessen werden?

Lösung

Die Schwerefeldstärke g berechnet sich für kleine Pendelausschläge aus der Beziehung $g = 4\pi^2 l/T^2$, welche die Form (46) besitzt:

$$4\pi^2 \mathrel{\hat{=}} c,\ g \mathrel{\hat{=}} z,\ T \mathrel{\hat{=}} x_1,\ -2 \mathrel{\hat{=}} a_1,\ I \mathrel{\hat{=}} x_2,\ 1 \mathrel{\hat{=}} a_2.$$

Die relative Standardabweichung $s_g/\bar{g}$ ergibt sich demzufolge nach (70) zu

$$\frac{s_g}{\bar{g}} = \sqrt{4\left(\frac{s_T}{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{s_l}{\bar{l}}\right)^2}$$

$s_T/\bar{T}$ geht viermal so stark in $(s_g^2/\bar{g})^2$ ein wie $s_l/\bar{l}$. Die Messung der Schwingungsdauer ist also besonders sorgfältig durchzuführen.

1.3.5. Vertrauensabweichung und Vertrauensintervall des Mittelwertes

Der durch die Vorschrift (23) festgelegte Mittelwert wird zumeist als endgültiges Meßergebnis einer Meßreihe von n voneinander unabhängigen und gleich zuverlässigen Meßwerten angesehen. Im allgemeinen ist er aber nicht identisch mit dem wahren Wert der Meßgröße. Es ist daher nur möglich, den Mittelwert in zwei Grenzen einzuschließen, zwischen denen bei Abwesenheit von systematischen Fehlern der wahre Wert der Meßgröße mit der gewählten statistischen Sicherheit P zu erwarten ist. Diese Grenzen heißen Vertrauensgrenzen des Mittelwertes, das von diesen eingeschlossene Intervall sein Vertrauensintervall.

Durch (25) wird die Standardabweichung der Einzelmessungen $x_i (i = 1,2,\ldots,n)$ bestimmt. Mit ihr soll jetzt das Vertrauensintervall des Mittelwertes festgelegt werden. Wir setzen zunächst eine so große Anzahl von Meßwerten voraus, daß (26) gilt, d. h., daß der Bereich mit der statistischen Sicherheit P durch $\bar{x} \pm \varepsilon_x$ mit der Vertrauensabweichung ε_x der Meßwerte x_i,

$$\varepsilon_x = t_\infty s_x \text{ mit } \begin{cases} t_\infty = 1 & \text{für } P = 68{,}3\ \%, \\ t_\infty = 1{,}96 & \text{" } P = 95{,}0\ \%, \\ t_\infty = 2{,}58 & P = 99{,}0\ \%, \\ t_\infty = 3 & \text{" } P = 99{,}7\ \%, \end{cases} \tag{48}$$

bestimmt ist.

Für ein vorgegebenes ε_x ergibt sich die zugehörige Vertrauensabweichung $\varepsilon_{\bar{x}}$ des Mittelwertes $\bar{x}$ durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (43):

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 \varepsilon_x^2}\ . \tag{49}$$

Beachtung von $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_i+\ldots+x_n)$ und damit $\partial\bar{x}/\partial x_i = 1/n$ und (46) ergibt

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{n\, t_\infty^2\, s_x^2}{n^2}}$$

oder

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{t_\infty\, s_x}{\sqrt{n}} \,. \tag{50}$$

Vorstehende Überlegungen setzen eine genügend große Zahl n von Meßwerten voraus. Läßt man diese Voraussetzung fallen, d. h., läßt man eine beliebige Anzahl $n \geqq 2$ von Meßwerten zu, dann bleibt Beziehung (50) formal erhalten. Es muß nur der von P abhängige Faktor $t_\infty(P)$ durch eine Größe $t(P,n)$ ersetzt werden, die jetzt sowohl von der gewählten statistischen Sicherheit P als auch von der Anzahl n der Meßwerte abhängt:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{t\, s_x}{\sqrt{n}} = t\,\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}. \tag{51}$$

Der Faktor t berücksichtigt, daß insbesondere bei einer kleinen Anzahl von Meßwerten ($n < 10$) die relative Häufigkeit i. allg. stark von der Gauß-Verteilung abweicht und damit auch s_x von σ_x. Statt der Gauß-Verteilung muß dann die hier nicht besprochene t-Verteilung[1] (auch Student-Verteilung genannt) Anwendung finden, die mit wachsendem n asymptotisch in die Gauß-Verteilung übergeht. Der Faktor t kann berechnet werden. Entsprechende Werte für t und $t/\sqrt{n}$ sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Insbesondere für hohe statistische Sicherheiten findet man ein starkes Anwachsen von t mit abnehmendem n. Weiter erkennt man, daß mit wachsendem n der Parameter t dem Wert t_∞ zustrebt:

$$\lim_{n\to\infty} t \to t_\infty \,.$$

[1] vgl. u. a. G. Maibaum, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Mathematik für Lehrer, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

Tabelle 4

	P = 68,3 %		P = 95,0 %		P = 99,0 %		P = 99,7 %	
n	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$	t	$\frac{t}{\sqrt{n}}$
2	1,80	1,270	12,7	9,00	64,0	45,30	235,0	166,20
3	1,32	0,762	4,3	2,50	9,9	5,70	19,2	11,10
4	1,20	0,600	3,2	1,60	5,8	2,90	9,2	4,60
5	1,15	0,514	2,8	1,20	4,6	2,10	6,6	3,00
6	1,11	0,453	2,6	1,10	4,0	1,70	5,5	2,30
8	1,08	0,382	2,4	0,84	3,5	1,20	4,5	1,60
10	1,06	0,335	2,3	0,72	3,2	1,00	4,1	1,30
20	1,03	0,230	2,1	0,47	2,9	0,64	3,4	0,77
30	1,02	0,186	2,0	0,37	2,8	0,50	3,3	0,60
50	1,01	0,143	2,0	0,28	2,7	0,38	3,2	0,45
100	1,00	0,100	2,0	0,20	2,6	0,26	3,1	0,31
200	1,00	0,071	1,99	0,14	2,6	0,18	3,0	0,21
$n \to \infty$	$\to 1$		$\to 1,96$		$\to 2,58$		$\to 3$	

$\varepsilon_{\bar{x}} = ts_x/\sqrt{n}$ heißt Vertrauensabweichung des Mittelwertes $\bar{x}$ für die gewählte statistische Sicherheit P, $\bar{x} + ts_x/\sqrt{n}$ obere Vertrauensgrenze, $\bar{x} - ts_x/\sqrt{n}$ untere Vertrauensgrenze, $\bar{x} \pm ts_x/\sqrt{n}$ Vertrauensintervall des Mittelwertes. Oft wird $s_x/\sqrt{n}$ auch mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwertes genannt. Das Meßergebnis einer Meßreihe von n Einzelmessungen gibt man durch den (von erfaßbaren systematischen Fehlern befreiten) Mittelwert $\bar{x}$ und seine Vertrauensgrenzen, d. h. durch das Vertrauensintervall an:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_{\bar{x}} = \bar{x} \pm \frac{ts_x}{\sqrt{n}} . \qquad (52)$$

Das Vertrauensintervall legt das Intervall fest, innerhalb dessen bei Abwesenheit systematischer Fehler der wahre Wert der Meßgröße mit einer bestimmten zu wählenden statistischen Sicherheit P zu erwarten ist. Der wahre Wert kann also in jedem Fall auch außerhalb des Vertrauensintervalles liegen, nämlich mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 1 - P.

Mit wachsendem n strebt das Vertrauensintervall des Mittelwertes folgenden Grenzwerten zu ($\lim_{n\to\infty} s_x \to \sigma_x$):

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad P = 68{,}3\ \%,$$

$$x = \bar{x} \pm \frac{1{,}96\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad P = 95{,}0\ \%,$$

$$x = \bar{x} \pm \frac{2{,}58\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad P = 99{,}0\ \%,$$

$$x = \bar{x} \pm \frac{3\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad P = 99{,}7\ \%. \qquad (53)$$

Beispiel 5

Man bestimme für die statistischen Sicherheiten P = 68,3 %; 95,0 %; 99,0 % und 99,7 % das Vertrauensintervall des in Beispiel 1 errechneten Mittelwertes!

Lösung

Mit dem in Beispiel 1 errechneten Wert für die Standardabweichung s_I = 0,272 cm folgt nach (51) für die Vertrauensabweichung

$$\varepsilon_{\bar{I}} = \frac{t\, s_I}{\sqrt{n}} = t\,\frac{0{,}272\ \text{cm}}{\sqrt{9}} = t \cdot 0{,}091\ \text{cm},$$

folglich mit dem in Beispiel 1 errechneten Mittelwert $\bar{I}$ = 5,341 cm das Vertrauensintervall (s. (52))

$$I = \bar{I} \pm \varepsilon_{\bar{I}} = (5{,}341 \pm 0{,}091\ t)\ \text{cm}.$$

t ist für die gewünschte statistische Sicherheit aus Tab. 4 zu entnehmen:

P = 68,3 %	t = 1,06	I = (5,3 ± 0,1) cm
P = 95,0 %	t = 2,30	I = (5,3 ∓ 0,3) cm
P = 99,0 %	t = 3,20	I = (5,3 ∓ 0,3) cm
P = 99,7 %	t = 4,10	I = (5,3 ∓ 0,4) cm.

Kann die zu messende Größe z nur über eine funktionale Abhängigkeit der Form (39) bestimmt werden, so berechnet man zuerst die Vertrauensabweichungen

$$\varepsilon_{\bar{x}_k} = \frac{t_k s_{x_k}}{\sqrt{n_k}} = t_k \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_k} (x_{k_i} - \bar{x}_k)^2}{n_k(n_k - 1)}} \qquad (54)$$

der Mittelwerte $\bar{x}_k$. Analog (43) folgt dann die Vertrauensabweichung für $\bar{z}$ aus

$$\varepsilon_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_{\bar{x}_k}^2 \, f_{\bar{x}_k}^2} \; . \qquad (55)$$

Dabei bedeutet $f_{\bar{x}_k}$ die Kurzschreibweise für

$$f_{\bar{x}_k} := \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \ldots \bar{x}_l).$$

Gleichung (55) wird Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Vertrauensabweichungen genannt.

Beispiel 6

Man bestimme für die statistischen Sicherheiten P = 68,3 % und P = 99,0 % die Vertrauensabweichungen und die Vertrauensintervalle des in Beispiel 3 ermittelten Flächeninhaltes.

Lösung

Man berechnet zunächst die Vertrauensabweichungen $\varepsilon_{\bar{a}}$ und $\varepsilon_{\bar{b}}$ der Seitenlängen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ des Rechtecks. Nach (51) gilt mit den in Beispiel 3 berechneten Standardabweichungen s_a = 0,82 cm, s_b = 0,32 cm und den aus Tabelle 4 für die gewünschte statistische Sicherheit P zu entnehmenden **Faktoren t für P = 68,3 %:**

$$\varepsilon_{\bar{a}} = \frac{t_a s_a}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}06 \cdot 0{,}82 \text{ cm}}{\sqrt{10}} = 0{,}28 \text{ cm},$$

$$\varepsilon_{\bar{b}} = \frac{t_b s_b}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}08 \cdot 0{,}32 \text{ cm}}{\sqrt{8}} = 0{,}12 \text{ cm};$$

für P = 99,0 %:

$$\varepsilon_{\bar{a}} = \frac{t_a s_a}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}2 \cdot 0{,}82 \text{ cm}}{\sqrt{10}} = 0{,}83 \text{ cm},$$

$$\varepsilon_{\bar{b}} = \frac{t_b s_b}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}5 \cdot 0{,}32 \text{ cm}}{\sqrt{8}} = 0{,}40 \text{ cm}.$$

Die Vertrauensabweichung $\varepsilon_{\bar{A}}$ des Flächeninhalts erhält man nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (55) mit A = ab aus

$$\varepsilon_{\bar{A}} = \sqrt{\varepsilon_{\bar{a}}^2 \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2_{\bar{a},\bar{b}} + \varepsilon_{\bar{b}}^2 \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2_{\bar{a},\bar{b}}} = \sqrt{\varepsilon_{\bar{a}}^2 \bar{b}^2 + \varepsilon_{\bar{b}}^2 \bar{a}^2},$$

das Vertrauensintervall des Flächeninhalts aus (s. (52))

$$A = \bar{A} \pm \varepsilon_{\bar{A}} .$$

Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte für $\bar{a}$, $\bar{b}$ (s. Beispiel 3), $\varepsilon_{\bar{a}}$ und $\varepsilon_{\bar{b}}$ ergibt für P = 68,3 %:

$$\varepsilon_{\bar{A}} = \sqrt{0{,}08 \cdot 55{,}95 + 0{,}01 \cdot 257{,}28} \text{ cm}^2 = 2{,}7 \text{ cm}^2,$$

$$A = (120 \pm 3)\text{cm}^2;$$

für P = 99,0 %:

$$\varepsilon_{\bar{A}} = \sqrt{0{,}69 \cdot 55{,}95 + 0{,}16 \cdot 257{,}28} \text{ cm}^2 = 8{,}9 \text{ cm}^2,$$

$$A = (120 \pm 9)\text{cm}^2.$$

Ist die Funktion (39) eine Summe der Gestalt (44), dann ergibt sich für diesen Spezialfall die Vertrauensabweichung zu

$$\varepsilon_{\bar{z}} = \sqrt{a_1^2 \varepsilon_{\bar{x}_1}^2 + a_2^2 \varepsilon_{\bar{x}_2}^2 + \ldots + a_1^2 \varepsilon_{\bar{x}_1}^2} , \qquad (56)$$

ist f ein Potenzprodukt der Gestalt (46), dann ergibt sich als relative Vertrauensabweichung

$$\boxed{\frac{\varepsilon_{\bar{z}}}{\bar{z}} = \sqrt{\left(a_1 \frac{\varepsilon_{\bar{x}_1}}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(a_2 \frac{\varepsilon_{\bar{x}_2}}{\bar{x}_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_1 \frac{\varepsilon_{\bar{x}_1}}{\bar{x}_1}\right)^2}.} \qquad (57)$$

Beispiel 7

Man bestimme nach Beziehung (57) die relative Vertrauensabweichung (P = 68,3 %) für den im Beispiel 3 ermittelten Flächeninhalt!

Lösung

A = ab ist ein Potenzprodukt der Gestalt (46). Für die relative Vertrauensabweichung folgt demzufolge aus (57)

$$\frac{\varepsilon_A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{b}\right)^2}.$$

Mit den aus den Beispielen 3 und 4 zu entnehmenden Werten ergeben sich die relativen Vertrauensabweichungen

$$\frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{0{,}28}{16{,}04} = 0{,}0175 = 1{,}75\ \%; \qquad \frac{\varepsilon_b}{b} = \frac{0{,}12}{7{,}48} = 0{,}0160 = 1{,}60\ \%,$$

und damit folgt

$$\frac{\varepsilon_A}{A} = \sqrt{1{,}75^2 + 1{,}60^2}\ \% = \sqrt{3{,}05 + 2{,}56}\ \% = 2{,}4\ \%,$$

ein Wert, der innerhalb der Rundungsfehler mit dem in Beispiel 6 ermittelten Wert 2,7/120 = 2,3 % übereinstimmt.

1.3.6.* Auswertung von Meßwerten verschiedener Genauigkeit

Wird im Gegensatz zur Annahme in Abschnitt 1.3.2. die Größe x mit verschiedener Genauigkeit gemessen, so wird dem Meßwert x_i entsprechend seiner Genauigkeit das Gewicht p_i zugeordnet. Dem Meßwert x_i ist dann nicht mehr die Wahrscheinlichkeit $w(x_i) = 1/n$, sondern unter Beachtung von (4) die Wahrscheinlichkeit

$$w(x_i) = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

zuzuordnen. Nach (11) geht daher das arithmetische Mittel (23) in das gewogene Mittel

$$\bar{x}^g := \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{58}$$

über. Diese Mittelbildung ist analog (21) gleichbedeutend mit der entsprechenden Forderung

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x}^g)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 =: \text{Min}; \tag{59}$$

denn die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x)^2$$

besitzt ihren Extremwert $x = \bar{x}^g$ für

$$2 \sum_{i=1}^{n} p_i (\bar{x}^g - x_i) = 0, \tag{60}$$

d. h. bei

$$\bar{x}^g \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \,.$$

Wie der Vergleich von (56) mit (21) zeigt, muß daher bei der Auswertung von Meßwerten ungleicher Genauigkeit in den Beziehungen des vorigen Abschnittes eine weitere Größe abgeändert werden: statt

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \quad \text{ist} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2$$

zu setzen. Man definiert als Standardabweichung der Einzelmessungen x_i (vgl. (25))

$$s_{x_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j v_j^2}{p_i (n-1)}}\,, \tag{61}$$

als Vertrauensabweichung des gewogenen Mittels (vgl. (51))

$$\varepsilon_{\bar{x}^g} := t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{(n-1) \sum_{i=1}^{n} p_i}}\,. \tag{62}$$

Rechenprobe vgl. (57))

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i = 0.} \qquad (63)$$

Beispiel 8

Im Gegensatz zur Aufgabenstellung in Beispiel 1 seien die dort angegebenen Meßwerte l_i mit drei Längenmeßgeräten unterschiedlicher Ableseunsicherheit gewonnen worden. Die unterschiedlichen Meßgenauigkeiten werden durch Gewichtsfaktoren p_i berücksichtigt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
$\frac{l_i}{cm}$	5,32	5,24	5,25	5,46	5,42	5,19	5,87	5,00	5,65	5,01

Man berechne das gewogene Mittel, die Standardabweichungen, die Vertrauensabweichung und das Vertrauensintervall für die statistischen Sicherheiten P = 68,3 % und P = 99,7 %.

Lösung

Tabelle 5

i	p_i	$\frac{l_i}{cm}$	$\frac{p_i l_i}{cm}$	$\frac{v_i}{cm}$	$\frac{v_i^2 \cdot 10^3}{cm^2}$	$\frac{p_i v_i \cdot 10^1}{cm}$	$\frac{p_i v_i^2 \cdot 10^2}{cm^2}$
1	3	5,32	15,96	0	0	0	0
2	3	5,24	15,72	-0,08	6,4	-2,4	1,92
3	3	5,25	15,75	-0,07	4,9	-2,1	1,47
4	2	5,46	10,92	0,14	19,6	2,8	3,92
5	2	5,42	10,84	0,10	10,0	2,0	2,00
6	2	5,19	10,38	-0,13	16,9	-2,6	3,38
7	1	5,87	5,87	0,55	302,5	5,5	30,25
8	1	5,00	5,00	-0,32	102,4	-3,2	10,24
9	1	5,65	5,65	0,33	108,9	3,3	10,89
10	1	5,01	5,01	-0,31	96,1	-3,1	9,61
$\sum$	19		101,10			0,2	73,68

Mit Tabelle 5 folgt:

gewogenes Mittel (s. (58)) $\bar{l}^g = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{101{,}10\ \text{cm}}{19} = 5{,}32\ \text{cm},$

Standardabweichung (s. (61))

Meßwerte mit p = 3: $s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{p(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}7368}{3 \cdot 9}}\ \text{cm} = 0{,}17\ \text{cm},$

Meßwerte mit p = 2: $s_1 = \sqrt{\frac{0{,}7368}{2 \cdot 9}}\ \text{cm} = 0{,}20\ \text{cm},$

Meßwerte mit p = 1: $s_1 = \sqrt{\frac{0{,}7368}{9}}\ \text{cm} = 0{,}29\ \text{cm}.$

Vertrauensabweichung (s. (62) und Tab. 4)

P = 68,3 %: $\varepsilon_{\bar{l}g} = t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} p_i v_i^2}{(n-1) \sum_{i=1}^{10} p_i}} = 1{,}06 \sqrt{\frac{0{,}7368}{9 \cdot 19}}\ \text{cm} = 0{,}070\ \text{cm}.$

P = 99,7 %: $\varepsilon_{\bar{l}g} = 4{,}1 \sqrt{\frac{0{,}7368}{9 \cdot 19}}\ \text{cm} = 0{,}27\ \text{cm}.$

Vertrauensintervall (s. (52))

P = 68,3 %: $l = \bar{l}^g \pm \varepsilon_{\bar{l}g} = (5{,}32 \pm 0{,}07)\text{cm},$

P = 99,7 %: $l = (5{,}3 \pm 0{,}3)\text{cm}.$

Rechenprobe: $\sum_{i=1}^{10} p_i v_i = 0{,}02\ \text{cm} \approx 0.$

Daß sich hier nicht genau der Wert Null ergibt, ist eine Folge der Rundungsfehler.

Wird die Größe x mit gleicher Genauigkeit in einzelnen Meßreihen gemessen, so wird jeder Meßreihe λ ($\lambda = 1,2,\ldots,\mu$) mit dem Mittelwert $\bar{x}_\lambda$ und der Vertrauensabweichung $\varepsilon_{\bar{x}_\lambda}$ das Gewicht

$$p_\lambda = \frac{C}{\varepsilon_{\bar{x}_\lambda}^2} \qquad (\lambda = 1,2,\ldots\mu;\ C > 0) \tag{64}$$

zugeordnet. Mit diesen p_λ bestimmt sich das gewogene Mittel $\bar{x}^g$ der Meßreihen aus (55) zu

$$\bar{x}^g = \frac{\sum_{\lambda=1}^{\mu} p_\lambda \bar{x}_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{\mu} p_\lambda} . \tag{65}$$

Die zugehörige Vertrauensabweichung gewinnt man durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (55) auf (64). Mit

$$\frac{\partial \bar{x}^g}{\partial \bar{x}_\lambda} = \frac{p_\lambda}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} p_\varrho}$$

erhält man

$$\varepsilon_{\bar{x}^g}^2 = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \left(\frac{\partial \bar{x}^g}{\partial \bar{x}} \varepsilon_{\bar{x}_\lambda} \right)^2 = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \left(\frac{p_\lambda \varepsilon_{\bar{x}_\lambda}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} p_\varrho} \right)^2$$

oder

$$\varepsilon_{\bar{x}^g} = \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^{\mu} p_\lambda} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{\mu} p_\lambda^2 \varepsilon_{\bar{x}_\lambda}^2} . \tag{66}$$

Das gewogene Mittel ist von der Konstanten C unabhängig. Ihr Wert kann deshalb so gewählt werden, daß die p_λ für die durchzuführenden Rechnungen möglichst zweckmäßige Zahlenwerte annehmen.

Beispiel 9

Es soll die mittlere Dichte eines Körpers durch Wägung des Körpers und Bestimmung seines Volumens ermittelt werden. Hierzu wurden unabhängig voneinander drei Meßreihen zur Bestimmung der Masse m und des Volumens V durchgeführt. Die systematischen Fehler dieser Meßwerte sind gegenüber den zufälligen Fehlern vernachlässigbar. Die

Auswertung der Ergebnisse der einzelnen Meßreihen entsprechend den in Beispiel 1 und 5 behandelten Methoden ergab für die statistische Sicherheit P = 68,3 % als Vertrauensintervalle dieser Meßreihen

$$m_1 = (19{,}53 \pm 0{,}07)g, \qquad V_1 = (7{,}5 \pm 0{,}3)\ cm^3,$$
$$m_2 = (19{,}51 \pm 0{,}03)g, \qquad V_2 = (7{,}8 \pm 0{,}6)\ cm^3,$$
$$m_3 = (19{,}80 \pm 0{,}10)g, \qquad V_3 = (7{,}7 \pm 0{,}5)\ cm^3.$$

Man bestimme aus diesen Werten die mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ des Körpers und deren Vertrauensabweichung.

Lösung

Wir betrachten zunächst die Massenbestimmung. Wählen wir hierfür den Wert der Konstanten C in (64) zu $C_m = 10^{-2}g^2$, dann ergeben sich als Gewichte der drei Meßreihen $p_1 = 2$, $p_2 = 11$ und $p_3 = 1$ und damit die Werte der Tabelle 6. Damit erhält man das gewogene Mittel (vgl.(58))

$$\bar{\bar{m}}^g = \frac{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda \bar{m}_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda} = \frac{2{,}735 \cdot 10^2}{14}\ g = 19{,}54\ g.$$

Die Vertrauensabweichung des gewogenen Mittels (vgl. (66)) wird

$$\varepsilon_{\bar{\bar{m}}^g} = \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda^2 \varepsilon_{\bar{m}_\lambda}^2} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 10^{-1}}{1{,}96 \cdot 10^2}}\ g = \sqrt{7{,}1 \cdot 10^{-4}}\ g = 3 \cdot 10^{-2} g,$$

so daß sich als Vertrauensintervall des gewogenen Mittels

$$m = \bar{\bar{m}}^g \pm \varepsilon_{\bar{\bar{m}}^g} = (19{,}54 \pm 0{,}03)g$$

ergibt.

Die Bestimmung von $\bar{V}_g$ erfolgt analog zu der von $\bar{m}_g$. Wählt man C zu $C_V = 1\ cm^6$, so erhält man für die Gewichte der Volumenbestimmung $p_1 = 11$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$ und damit die Werte der Tabelle 7, womit sich ergeben

gewogenes Mittel:

$$\bar{\bar{V}}^g = \frac{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda V_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda} = \frac{1{,}367 \cdot 10^2}{18}\ cm^3 = 7{,}594\ cm^3,$$

Vertrauensabweichung des gewogenen Mittels:

$$\varepsilon_{\bar{V}g} = \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{3} p_\lambda^2 \varepsilon_{\bar{V}_\lambda}^2} = \sqrt{\frac{18}{324}}\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}3\ \mathrm{cm}^3,$$

Vertrauensintervall des gewogenen Mittels:

$$V = \bar{V}^g \pm \varepsilon_{\bar{V}g} = (7{,}6 \pm 0{,}3)\mathrm{cm}^3,$$

mittlere Dichte (vgl. (36)):

$$\bar{\varrho} = \frac{\bar{m}^g}{\bar{V}^g} = \frac{19{,}54}{7{,}6}\ \frac{g}{\mathrm{cm}^3} = 2{,}570\ \frac{g}{\mathrm{cm}^3},$$

relative Vertrauensabweichung von $\bar{\varrho}$ (vgl. (57)):

$$\frac{\varepsilon_{\bar{\varrho}}}{\bar{\varrho}} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{\bar{V}g}}{\bar{V}^g}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{\bar{m}g}}{\bar{m}^g}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}3}{7{,}6}\right)^2 + \left(\frac{0{,}03}{19{,}5}\right)^2} = 4\ \%.$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Wert der mittleren Dichte

$$\bar{\varrho} = (2{,}57 \pm 0{,}11)\,g\ \mathrm{cm}^{-3}.$$

Tabelle 6

λ	$\frac{\bar{m}\cdot 10^{-1}}{g}$	p_λ	$\frac{p_\lambda \bar{m}_\lambda \cdot 10^{-1}}{g}$	$\frac{\varepsilon_{\bar{m}_\lambda}\cdot 10^{1}}{g}$	$\frac{p_\lambda \varepsilon_{\bar{m}_\lambda}\cdot 10^{1}}{g}$	$\frac{p_\lambda^2 \varepsilon_{\bar{m}_\lambda}^2 \cdot 10^{2}}{g^2}$
1	1,953	2	3,906	0,7	1,4	1,96
2	1,951	11	21,461	0,3	3,3	10,89
3	1,980	1	1,980	1,0	1,0	1,00
Σ		14	27,347			13,85

Tabelle 7

λ	$\bar{\nu}_\lambda$ / cm^{-1}	p	$p_\lambda \bar{\nu}_\lambda \cdot 10^{-1}$ / cm^{-1}	$\varepsilon_{\bar{\nu}_\lambda} \cdot 10^{-1}$ / cm^{-1}	$p_\lambda \varepsilon_{\bar{\nu}_\lambda}$ / cm^{-1}	$p_\lambda^2 \varepsilon_{\bar{\nu}_\lambda}^2$ / cm^{-2}
1	7,5	11	8,25	3,0	3,3	10,89
2	7,8	3	2,34	6,0	1,8	3,24
3	7,7	4	3,08	5,0	2,0	4,00
Σ		18	13,67			18,13

1.3.7. Zur Ausgleichung von Meßwerten durch lineare Funktionen

1.3.7.1. Grafische Ausgleichung

Es werde die Aufgabe gestellt, den elektrischen Widerstand R eines Metalles in Abhängigkeit von der Celsiustemperatur ϑ zu ermitteln. Innerhalb eines weiten Temperaturintervalles findet man, daß R linear von ϑ abhängt (vgl. Beispiel 12). Trägt man also in einem rechtwinkligen Koordinatensystem den gemessenen Widerstand über der Celsiustemperatur auf, dann streuen die gefundenen Meßpunkte $P_i(\vartheta_i, R_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$ um eine optimale Gerade, aus deren Anstieg a_{opt} und aus deren absolutem Glied b_{opt} der Temperaturkoeffizient ermittelt werden kann.

Vielfach kann die Festlegung der optimalen Geraden

$$\boxed{y = a_{opt}\, x + b_{opt}} \qquad (67)$$

grafisch geschehen. Man stellt hierzu die Meßpunkte $P_i(x_i, y_i)$ in einem geeigneten Koordinatenpapier grafisch dar (vgl. Abb. 2) und zeichnet - z. B. mit Hilfe eines durchsichtigen Lineals - die Gerade, die den Meßpunkten optimal entspricht. Den Maßstab der Ordinaten- und Abszissenachse wählt man so, daß die Gerade etwa unter einem Winkel α von 45° bzw. 135° die Abszisse schneidet (vgl. Abbn. 2 und 3). b_{opt} entspricht dem Ordinatenwert y_s des Schnittpunktes der optima-

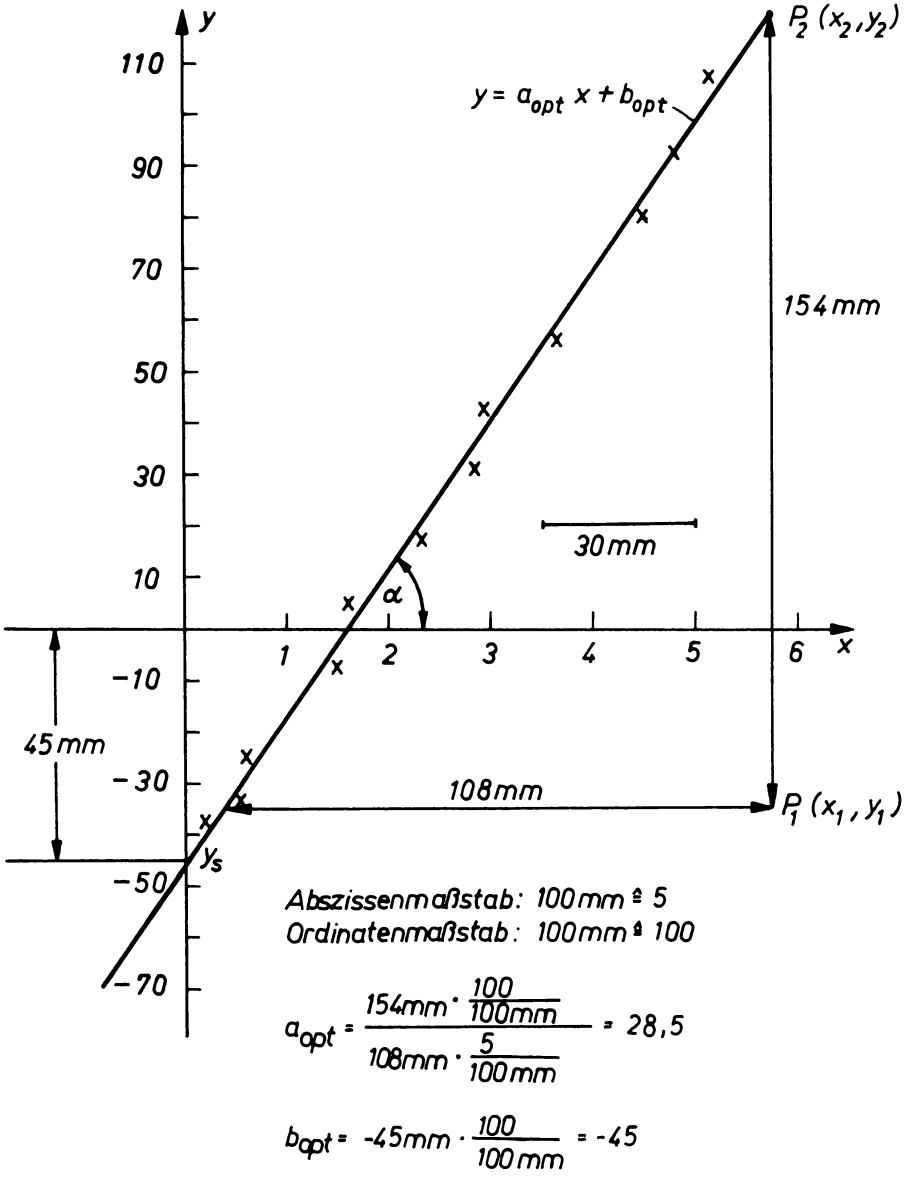


Abb. 2 Grafische Ausgleichung einer Geraden mit $a_{opt} > 0$ und $b_{opt} < 0$

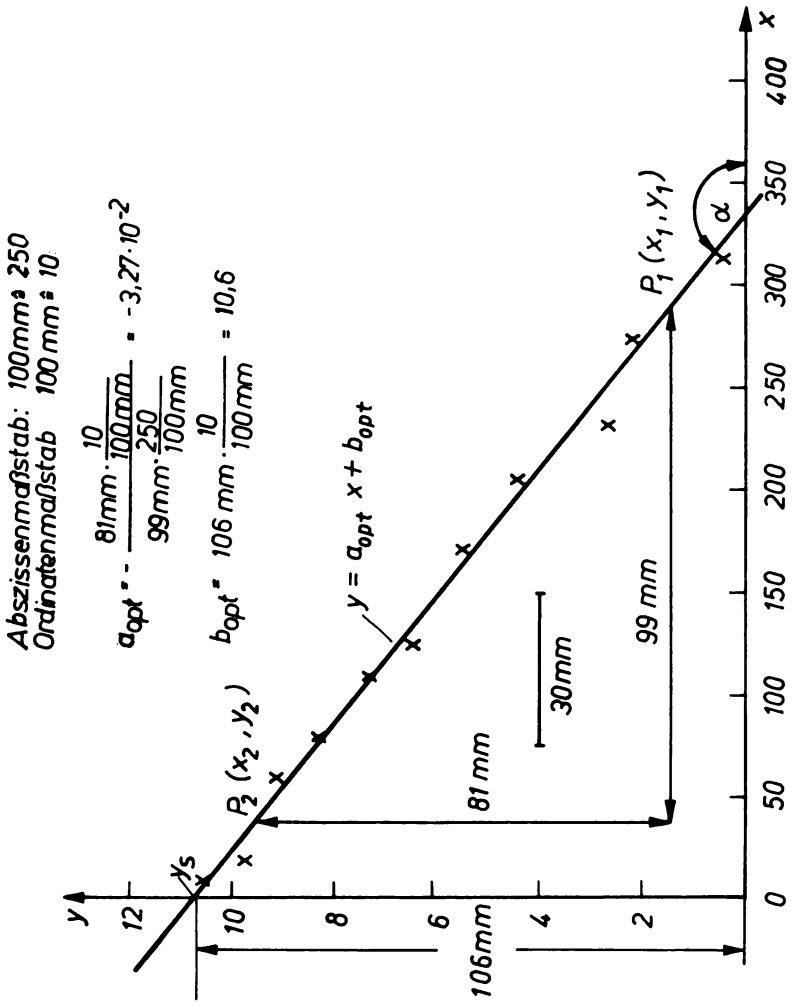


Abb. 3 Grafische Ausgleichung einer Geraden mit $a_{opt} < 0$ und $b_{opt} > 0$

len Geraden mit der Ordinatenachse, a_{opt} läßt sich aus den Abszissen- und Ordinatenwerten zweier geeignet gewählter Punkte $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ auf der optimalen Geraden errechnen:

$$\boxed{b_{opt} = y_s; \qquad a_{opt} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} \tag{68}$$

Zweckmäßigerweise geht man zur Bestimmung von a_{opt} und b_{opt} so vor, daß man die Strecken $|y_2 - y_1|$, $|x_2 - x_1|$ und $|y_s|$ ausmißt und unter Beachtung des Ordinaten- und Abszissenmaßstabes in (68) einsetzt. Bei diesem Verfahren erhält a_{opt} für Schnittwinkel der Geraden mit der Abszissenachse für $0 < \alpha < 90^0$ positives Vorzeichen, für $90^0 < \alpha < 180^0$ negatives Vorzeichen (s. Abbn. 2 und 3). Um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erzielen, sind die Strecken $|y_2 - y_1|$ und $|x_2 - x_1|$ möglichst groß zu wählen. Weiter kann man für die grafische Ausgleichung die Tatsache ausnutzen, daß der "Mittelpunkt" $P_M(\bar{x},\bar{y})$ der Meßpunkte auf der optimalen Geraden liegt (vgl.(86a)). Man berechnet zunächst $\bar{x}$ und $\bar{y}$ und wählt dann von allen möglichen Geraden durch den Punkt P_m diejenige aus, die den Meßpunkten optimal entspricht.

Vorstehendes Ausgleichsverfahren ist nun nicht nur auf die Auswertung von Meßwerten x_i, y_i beschränkt, die einer linearen Beziehung $y_i = ax_i + b$ genügen, sondern kann sofort auf funktionale Zusammenhänge der Art $y = C_1 e^{ax^k}$ (C_1 und k beliebige reelle Konstanten) und $y = ax^k + b$ übertragen werden. Im ersten Fall wird statt y die Funktion $\ln\{y\} = at + b$ mit $t = x^k$ und $b = \ln\{C_1\}$ der Ausgleichung unterworfen, im zweiten Fall nur $x^k = t$ substituiert, also die Funktion $y = at + b$ mit der unabhängigen Veränderlichen t betrachtet. Beim Logarithmieren von y sind die Größen y und C_1 durch ihre Zahlenwerte $\{y\}$ und $\{C_1\}$ bezüglich einer Einheit $[y] = [C_1]$ entsprechend der Beziehung

$$\boxed{u = \{u\}[u]} \tag{69}$$

zu ersetzen, da der Logarithmus nur von Zahlen gebildet werden kann.

Zwei Beispiele sollen vorstehendes Verfahren erläutern:

Die elektrische Leitfähigkeit eines Eigenhalbleiters zeigt die Temperaturabhängigkeit $\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta W/kT}$, wobei ΔW die Breite der verbotenen Zone bedeutet. Mißt man die zu verschiedenen Temperaturen T_i gehörigen Leitfähigkeiten σ_i und trägt $\ln\{\sigma_i\}$ über $1/T_i$ auf, dann streuen

die Meßpunkte um eine optimale Gerade

$$\ln\{\sigma\} = -\frac{\Delta W}{kT} + \ln\{\sigma_0\} = \frac{a_{opt}}{T} + b_{opt}.$$

Aus ihrem Anstieg $a_{opt} = -\Delta W/k$ kann die Breite der verbotenen Zone des Halbleitermaterials und aus der Konstanten b_{opt} der Faktor σ_0 gewonnen werden.

Für ein mathematisches Pendel werden die zu verschiedenen Pendellängen l_i gehörenden Schwingungsdauern T_i bei kleinen Amplituden bestimmt. Im T^2, l-Diagramm streuen die Meßpunkte um eine Gerade, aus deren Anstieg $a_{opt} = 4\pi^2/g$ die Schwerefeldstärke g entnommen werden kann.

Um den Arbeitsaufwand bei einer grafischen Ausgleichung so gering wie möglich zu halten, stehen Koordinatenpapiere mit spezieller Teilung der Koordinatenachsen zur Verfügung, wie z. B. Ordinate logarithmisch, Abszisse normal geteilt, (einfach logarithmisches Papier), Ordinate und Abszisse logarithmisch geteilt (doppelt logarithmisches Papier), Ordinate logarithmisch, Abszisse reziprok geteilt usw. Bei der Verwendung von logarithmisch geteiltem Koordinatenpapier ist zu beachten, daß die Achsen im Zehnerlogarithmus geteilt sind, man also bei ihrer Verwendung stets im Zehnerlogarithmus zu rechnen hat.

Beispiel 10

Die Spannung U an einem Kondensator C wird bei der Entladung des Kondensators über einen Entladewiderstand von R = 3 MΩ in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen. Da zwischen U und T die Beziehung $U = U_0 \exp(-t/RC)$ besteht, also

$$\ln\{U\} = -\frac{t}{RC} + \ln\{U_0\}$$

gilt, streuen die Meßwerte $P_i(t_i, U_i)$ im lg {U}, t-Diagramm um eine optimale Gerade. Die gemessenen Werte $P_i(t_i, U_i)$ sind in Abb. 4 auf einfach logarithmischem Papier dargestellt. Man bestimme durch grafische Ausgleichung dieser Meßwerte die Kapazität des Kondensators.

Lösung

In Abb. 4 wird mit Hilfe eines durchsichtigen Lineals die optimale Gerade eingezeichnet, die beiden Bezugspunkte P_2 und P_1 zur Bestimmung von a_{opt} eingezeichnet und die Strecken $\{|U_2 - U_1|\}$, $\{|t_2 - t_1|\}$ ausgemessen. Danach werden der Abszissen- und Ordinatenmaßstab unter

Beachtung der Tatsache bestimmt, daß zwischen U und t eine Beziehung der Gestalt

$$\lg \{U\} = -\frac{t \lg e}{RC} + \lg \{U_0\} = a_{opt} t + b_{opt}$$

besteht:

Abszissenmaßstab 30 mm ≙ 10 s
Ordinatenmaßstab 120 mm ≙ lg 10^3 = 3.

Damit folgt unter Beachtung von (68) und der Vorzeichenfestsetzung

$$a_{opt} = -\frac{118\ \text{mm} \cdot \frac{3}{120\ \text{mm}}}{197\ \text{mm} \cdot \frac{10\ \text{s}}{30\ \text{mm}}} = -4{,}49 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}.$$

Nach obiger Beziehung gilt weiter $a_{opt} = -\lg e/RC$, woraus sich durch Einsetzen und Umstellen

$$C = -\frac{\lg e}{R\, a_{opt}} = \frac{0{,}4343}{3 \cdot 10^6 \Omega \cdot 4{,}49 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}} = 3{,}2\ \mu\text{F}$$

ergibt.

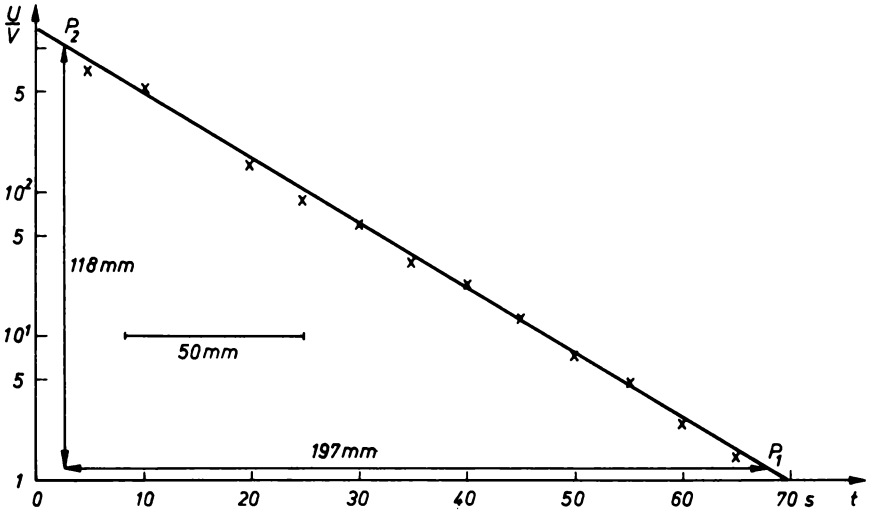


Abb. 4 U(t) für die Entladung eines Kondensators

Ist y zu x proportional ($y = cx$), so ist es oft zweckmäßig, die Meßpunkte $P_i(x_i,y_i)$ nicht im y,x-Diagramm, sondern im lg y, lg x-Diagramm darzustellen, da man durch diesen Übergang vielleicht eine wesentlich gleichmäßigere Verteilung der Meßpunkte über das gesamte Diagramm erreichen kann.

Ein Beispiel möge dies erläutern: Es werde die Aufgabe gestellt, den elektrischen Widerstand R eines Bauelementes durch Strom-Spannungsmessungen bei konstanter Temperatur zu ermitteln. Besitzt der Widerstand eine ohmsche Charakteristik, so ist nach dem Ohmschen Gesetz der Strom der angelegten Spannung proportional. Wählt man zum Nachweis dieser Gesetzmäßigkeit Spannungen, die sich um etwa den gleichen Faktor unterscheiden (z. B. 1, 2, 5, 10, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000 V), dann häufen sich im U,I-Diagramm die Meßpunkte in der Nähe des Nullpunktes. Im lg {U}, lg {I}-Diagramm besitzen sie dagegen eine etwa gleiche Verteilung. Aus $U = I\,R$ folgt

$$\lg \{U\} = \lg \{I\} + \lg \{R\}$$

mit $\{U\} = U/V$, $\{I\} = I/A$, $\{R\} = R/\Omega$, also eine Gerade mit der Steigung eins, deren absolutes Glied gleich dem (dekadischen) Logarithmus des Zahlenwertes des Widerstandes ist.

Auch bei der Potenzfunktion $y = c\,x^a$ ist es oft aus gleichem Grunde nützlich, ihre grafische Darstellung nicht im y,x^a-Diagramm, sondern doppelt logarithmisch vorzunehmen:

$$\lg y = a \lg x + \lg c.$$

Es ergibt sich eine Gerade, deren Steigung der Exponent a ist und aus deren absolutem Glied die Konstante c errechnet werden kann.

1.3.7.2. Rechnerische Ausgleichung

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir die grafische Ausgleichung von n Meßpunkten, die um eine Gerade streuen, kennengelernt. Wir wollen uns jetzt mit ihrer rechnerischen Ausgleichung beschäftigen. Rechnerische Ausgleichungen müssen u. a. in allen den Fällen vorgenommen werden, in denen die Meßpunkte $P_i(x_i,y_i)$ im y,x-Diagramm so streuen, daß die optimale Gerade grafisch nicht oder nur mit großem Fehler ermittelt werden kann. Die Aufgabenstellung ist dann in allgemeinster Form wie folgt zu formulieren: Gegeben seien n Meßpunkte $P_i(x_i,y_i)$ ($i = 1,2,3,\ldots,n$), die in einem rechtwinkligen x,y-Koordinatensystem um die Gerade $y = a\,x + b$ streuen. Gesucht wird die

optimale Gerade. Wir setzen hierzu voraus, die x_i seien genau gemessen, nur die y_i seien mit Fehlern behaftet. Setzen wir den i-ten Meßpunkt $P_i(x_i,y_i)$ in die optimale Gerade (67) ein, so wird dieser im allgemeinen die Geradengleichung nicht erfüllen. Statt $y_i - a_{opt}x_i - b_{opt} = 0$ erhält man die scheinbaren Fehler

$$\boxed{v_i = y_i - a_{opt}\,x_i - b_{opt}.} \tag{70}$$

Die Konstanten a_{opt} und b_{opt} werden aus der Forderung (31), $\sum p_i v_i^2 =: \text{Min}$, bestimmt.

1.3.7.2.1. y proportional zu x

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß aus der physikalischen Problemstellung die Proportionalität von y zu x angenommen werden kann. Dies ist z. B. bei der Widerstandsbestimmung durch Strom-Spannungsmessungen im Gültigkeitsbereich des Ohmschen Gesetzes der Fall, bei der Bestimmung der Dehnung eines Stahldrahtes in Abhängigkeit von seiner Belastung im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes usf. Im ersten Fall ist die Proportionalitätskonstante der elektrische Widerstand, im zweiten Fall kann aus ihr der Elastizitätsmodul berechnet werden. In dem hier angenommenen Fall wird also nach der Größe a_{opt} und ihrem Vertrauensintervall gefragt, d. h., es ist die optimale Gerade

$$\boxed{y = a_{opt}x} \tag{71}$$

zu berechnen, indem man die scheinbaren Fehler

$$\boxed{v_i = y_i - a_{opt}\,x_i \qquad (x_i \neq 0)} \tag{72}$$

der Bedingung

$$f(a_{opt}) = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - a_{opt}x_i)^2 =: \text{Min} \tag{73}$$

unterwirft. Mit der Extremwertbedingung

$$\frac{df(a_{opt})}{da_{opt}} = -2\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - a_{opt}x_i)x_i = 0 \qquad (74)$$

folgt für den gesuchten Proportionalitätsfaktor

$$\boxed{a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2}} \; . \qquad (75)$$

Wir setzen zunächst eine so große Anzahl n von Meßpunkten voraus, daß für jedes y_i die Beziehung (26) gilt, die Vertrauensabweichung ε_{y_i} von y_i also entsprechend (48) und (61) zu berechnen ist:

$$\varepsilon_{y_i} = t_\infty s_{y_i} = t_\infty \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j v_j^2}{p_i(n-1)}} \; . \qquad (76)$$

Hieraus folgt durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (55) für die Vertrauensabweichung ε_a von a_{opt} unter Beachtung von

$$\frac{\partial a_{opt}}{\partial y_i} = \frac{p_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2}$$

$$\varepsilon_a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{opt}}{\partial y_i}\right)^2 \varepsilon_{y_i}^2} = t_\infty \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j v_j^2}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \left(\frac{p_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2}\right)^2}$$

$$= t_\infty \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2}}$$

Läßt man eine beliebige Anzahl $n \geq 2$ von Meßpunkten zu, dann bleibt vorstehende Beziehung formal erhalten. Man muß nur entsprechend dem Übergang von (50) zu (51) t_∞ durch $t(P,n)$ ersetzen:

$$\varepsilon_a = t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{(n-1) \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2}} \,. \tag{77}$$

Zur Festlegung der Gewichtsfaktoren betrachten wir die Möglichkeiten:

a) bei festgehaltenem x_i wurden die zugehörigen y_i n_i-mal gemessen. Aus diesen Werten werden nach (23) und (51) die Mittelwerte $\bar{y}_i$ und ihre Vertrauensabweichungen $\varepsilon_{\bar{y}_i}$ bestimmt, danach die Meßpunkte $P_i(x_i, \bar{y}_i)$ der Ausgleichung unterworfen. Nach (64) ist dem i-ten Meßpunkt das Gewicht

$$\boxed{p_i = \frac{C}{\varepsilon^2_{\bar{y}_i}} \quad (C > 0 \text{ beliebig})} \tag{78}$$

zuzuordnen.

b) Alle Meßpunkte $P_i(x_i, y_i)$ haben das gleiche Gewicht, d. h., die Vertrauensabweichung der y_i ist unabhängig von der Größe x_i. Dieser Fall liegt z. B. bei der vorstehend beschriebenen Widerstandsmessung vor, wenn die Spannung am Widerstand unabhängig vom fließenden Strom mit gleicher Vertrauensabweichung gemessen wird. Aus (75) und (77) folgt dann

$$\boxed{a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,; \qquad \varepsilon_a = t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{(n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \,.} \tag{79}$$

c) Die Vertrauensabweichungen der y_i ändern sich mit der Größe x_i derart, daß die Vertrauensabweichungen der Größen y_i/x_i konstant bleiben. In diesem Fall müssen wir nicht wie im Fall b) $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$ zum Minimum machen, sondern $\sum (v_i/x_i)^2 =: \text{Min}$ fordern. Wie der Vergleich mit (73) zeigt, ist also dem Meßpunkt P_i der Gewichtsfak-

tor $p_i = 1/x_i^2$ zuzuordnen. Somit folgt aus (75) und (77)

$$a_{opt} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}\ ; \quad \varepsilon_a = t\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{x_i^2}}$$

$$= t\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{x_i} - a_{opt}\right)^2} \qquad (80)$$

Beispiel 11

Die Längenänderung Δl eines Stahldrahtes wurde in Abhängigkeit von seiner Belastung F gemessen. Man fand folgende Werte:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{F_i}{kp}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\frac{\Delta l_i}{mm}$	0,36	0,75	1,05	1,41	1,74	2,07	2,45	2,78	3,11	3,51

Für P = 95,0 % wurden ferner für die Vertrauensintervalle der Länge l des Drahtes und des Drahtdurchmessers d gefunden
l = (2457 ± 2)mm, d = (0,302 ± 0,005)mm. Man berechne aus diesen Daten den Elastizitätsmodul E des Drahtmaterials für P = 95,0 % unter der Voraussetzung
a) daß die Größen $\Delta l_i/F_i$ gleiche Vertrauensabweichungen besitzen und
b) daß die Meßpunkte P_i gleiches Gewicht besitzen.
Zusätzlich ermittle man a_{opt} grafisch und vergleiche diesen Wert mit dem in b) rechnerisch ermittelten.

Lösung

Wegen der geringen Belastung des Drahtes befinden wir uns im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes. Daher gilt (A Querschnitt des Drahtes)

$$l = \frac{1}{AE}F = a_{opt}F.$$

Zu a)

Man erhält unter Beachtung von Tabelle 8 gemäß (80)

$$a_{opt} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta l_i}{F_i} = \frac{17{,}625\ \text{mm}}{10\ \text{kp}} = 1{,}763\ \frac{\text{mm}}{\text{kp}}\ ,$$

$$\varepsilon_a = t\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta l_i}{F_i} - a_{opt}\right)^2} = 2{,}3\sqrt{\frac{0{,}018}{10\cdot 9}}\ \frac{\text{mm}}{\text{kp}} \approx 0{,}03\ \frac{\text{mm}}{\text{kp}}\ ,$$

$$a_{opt} = (1{,}76 \pm 0{,}03)\ \frac{\text{mm}}{\text{kp}}\ .$$

Mit $A = \pi d^2/4$ ergibt sich als mittlerer Drahtquerschnitt $\bar{A} = 7{,}16\cdot 10^{-2}\text{mm}^2$, nach obiger Beziehung für den Elastizitätsmodul

$$\bar{E} = \frac{\bar{l}}{a_{opt}\bar{A}} = \frac{2457\ \text{mm}}{1{,}763\ \text{mm kp}^{-1}\cdot 7{,}16\cdot 10^{-2}\text{mm}^2} = 19464\ \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}\ .$$

Tabelle 8

i	F_i / kp	Δl_i / mm	$\Delta l_i/\text{mm}\,/\,F_i/\text{kp}$	$\Delta l_i/\text{mm}\,/\,F_i/\text{kp} - 1{,}763$	$\left(\Delta l_i/\text{mm}\,/\,F_i/\text{kp} - 1{,}763\right)^2$
1	0,2	0,36	1,800	0,037	0,0014
2	0,4	0,75	1,875	0,112	0,0125
3	0,6	1,05	1,750	-0,013	0,0002
4	0,8	1,41	1,763	0,000	0,0000
5	1,0	1,74	1,740	-0,023	0,0005
6	1,2	2,07	1,725	-0,038	0,0014
7	1,4	2,45	1,750	-0,013	0,0002
8	1,6	2,78	1,738	-0,025	0,0006
9	1,8	3,11	1,728	-0,035	0,0012
10	2,0	3,51	1,756	-0,007	≈0
$\sum$			17,625		0,0180

Da die Beziehung zur Berechnung von $\bar{E}$ die Gestalt (46) besitzt, errechnet sich nach (57) die Vertrauensabweichung $\varepsilon_{\bar{E}}$ von $\bar{E}$ aus

$$\frac{\varepsilon_{\bar{E}}}{\bar{E}} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{\bar{l}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_a}{a_{opt}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{\bar{A}}}{\bar{A}}\right)^2}$$

In die Beziehung zur Berechnung von A geht d quadratisch ein. Nach (57) ist demzufolge die relative Vertrauensabweichung von A doppelt so groß wie die von d. Wir erhalten

$$\frac{\varepsilon_{\bar{A}}}{\bar{A}} = 2\,\frac{\varepsilon_{\bar{d}}}{\bar{d}} = 0{,}033, \qquad \frac{\varepsilon_{\bar{I}}}{\bar{I}} = 8{,}1\cdot10^{-4}, \qquad \frac{\varepsilon_a}{a_{opt}} = 1{,}85\cdot10^{-2},$$

folglich

$$\frac{\varepsilon_{\bar{E}}}{\bar{E}} = \sqrt{(8{,}1\cdot10^{-4})^2 + (1{,}85\cdot10^{-2})^2 + (0{,}033)^2} = 5{,}15\cdot10^{-2}$$

oder $\varepsilon_{\bar{E}} = 1000\ \mathrm{kp/mm^2}$, demnach für das Vertrauensintervall des Elastizitätsmoduls

$$E = (1{,}95 \pm 0{,}10)10^4\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{mm}^2}\ .$$

Zu b)

Der Rechengang ist derselbe wie in a), nur daß hier die Beziehungen (79) anzuwenden sind. Man erhält mit Tabelle 9

$$a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \Delta l_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i^2} = \frac{26{,}85\ \mathrm{kp\ mm}}{15{,}40\ \mathrm{kp}^2} = 1{,}744\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kp}}\ ,$$

$$\varepsilon_a = t\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} F_i^2}} = 2{,}3\sqrt{\frac{4{,}6\cdot10^{-3}}{9\cdot15{,}4}}\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kp}} = 1{,}33\cdot10^{-2}\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kp}}\ ;$$

Vertrauensintervall für P = 95,0 %

$$a_{opt} = (1{,}74 \pm 0{,}01)\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{kp}}\ ,$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{I}}{a_{opt}\bar{A}} = \frac{2457\ \mathrm{mm}}{1{,}744\ \mathrm{mm\ kp^{-1}}\cdot7{,}16\cdot10^{-2}\mathrm{mm}^2} = 19676\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{mm}^2}\ ,$$

$$\frac{\varepsilon_{\bar{E}}}{\bar{E}} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{\bar{I}}}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_a}{a_{opt}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{\bar{A}}}{\bar{A}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(8{,}1\cdot10^{-4})^2 + (7{,}63\cdot10^{-3})^2 + (0{,}033)^2} = 3{,}39\cdot10^{-2},$$

$$\varepsilon_{\bar{E}} = 667\ \frac{kp}{mm^2}, \qquad \bar{E} = (1{,}97 \pm 0{,}07)10^4\ \frac{kp}{mm^2}.$$

Tabelle 9

i	Δl_i / mm	F_i / kp	$F_i \Delta l_i$ / kp mm	F_i^2 / kp^2	$a_{opt} F_i$ / mm	v_i / mm	$10^4 v_i^2$ / mm^2
1	0,36	0,2	0,072	0,04	0,35	0,01	1
2	0,75	0,4	0,300	0,16	0,70	0,05	25
3	1,05	0,6	0,630	0,36	1,05	0,00	0
4	1,41	0,8	1,128	0,64	1,40	0,01	1
5	1,74	1,0	1,740	1,00	1,74	0,00	0
6	2,07	1,2	2,484	1,44	2,09	-0,02	4
7	2,45	1,4	3,430	1,96	2,44	0,01	1
8	2,78	1,6	4,448	2,56	2,79	0,01	1
9	3,11	1,8	5,598	3,24	3,14	-0,03	9
10	3,51	2,0	7,020	4,00	3,49	0,02	4
$\sum$			26,850	15,40			46

Zur grafischen Auswertung der Meßwerte betrachten wir Abbildung 5. Man erhält

Abszissenmaßstab: 100 mm $\hat{=}$ 1 kp,
Ordinatenmaßstab: 50 mm $\hat{=}$ 1 mm,

$$a_{opt} = \frac{166\ \text{mm} \cdot \frac{1\ \text{mm}}{50\ \text{mm}}}{189\ \text{mm} \cdot \frac{1\ \text{kp}}{100\ \text{mm}}} = 1{,}757\ \frac{mm}{kp}.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem rechnerisch für a_{opt} gewonnenen, so erkennt man, daß beide Werte praktisch übereinstimmen. Dies zeigt, welch gutes Ergebnis eine grafische Ausgleichung geben kann.

1.3.7.2.2.* y ist linear von x abhängig

Wir wollen jetzt den allgemeinen Fall der linearen Ausgleichung behandeln, also annehmen, die Meßpunkte $P_i(x_i, y_i)$ streuen um die Gerade

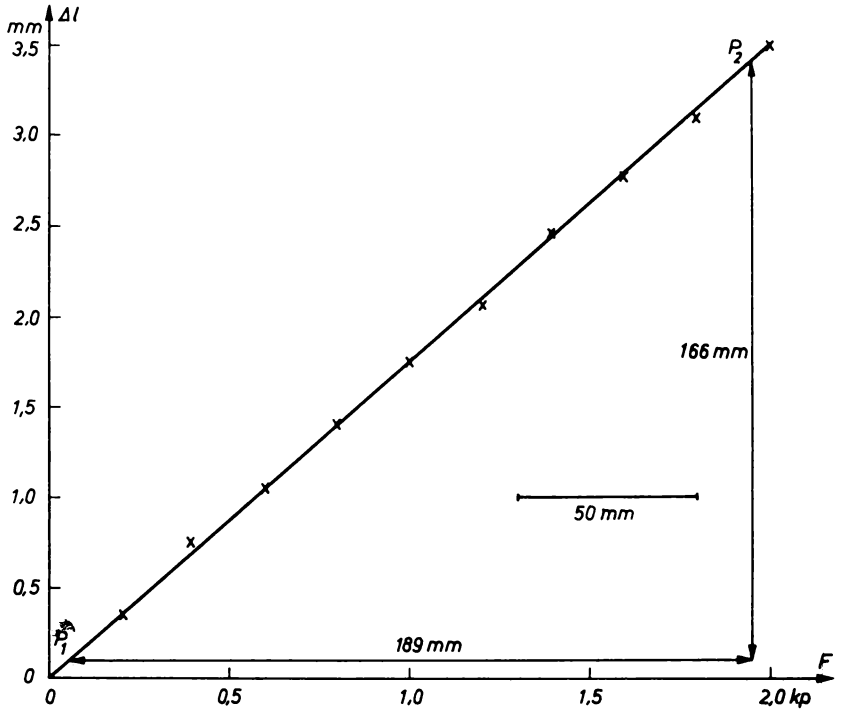


Abb. 5 Längenänderung Δl des Drahtes in Abhängigkeit von der wirkenden Kraft F

$y = a\,x + b$. Setzen wir den i-ten Meßpunkt $P_i(x_i, y_i)$ ein, so wird dieser im allgemeinen die Geradengleichung nicht erfüllen. Statt $y_i - a_{opt}\,x_i - b_{opt} = 0$ erhält man den scheinbaren Fehler (70)
$v_i = y_i - a_{opt}\,x_i - b_{opt}$.

Die Konstanten a_{opt} und b_{opt} errechnen sich wieder aus der Bedingung (31), d. h. aus der Forderung

$$f(a_{opt},b_{opt}) := \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - a_{opt}x_i - b_{opt})^2 =: \text{Min.} \tag{81}$$

Sie führt zu dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial a_{opt}} = -2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(y_i - a_{opt}x_i - b_{opt}) = 0, \tag{82}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_{opt}} = -2\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - a_{opt}x_i - b_{opt}) = 0 \tag{83}$$

zur Bestimmung der gesuchten Konstanten a_{opt} und b_{opt}. Seine Auflösung ergibt

$$a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j y_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2}, \tag{84}$$

$$b_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j y_j - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2}. \tag{85}$$

Aus (83) kann noch eine interessante Folgerung für die grafische Ausgleichung der n Meßpunkte entnommen werden. Hierfür überführen wir sie zunächst in

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i - a_{opt}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - b_{opt}\sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Beachtet man die durch (58) gegebene Vorschrift zur Bildung des gewogenen Mittels, dann folgt

$$\bar{y}^g - a_{opt}\,\bar{x}^g - b_{opt} = 0. \tag{86a}$$

Diese Gleichung besagt, daß der "Mittelpunkt" $P_M(\bar{x}^g,\bar{y}^g)$ der Meßpunkte auf der optimalen Geraden liegt. Dies kann man zur grafischen Ausgleichung direkt ausnutzen, indem man zunächst $\bar{x}^g$ und $\bar{y}^g$ berechnet und dann von allen möglichen Geraden durch den Punkt $P_M(\bar{x}^g,\bar{y}^g)$ diejenige auswählt, die den Meßpunkten optimal entspricht (vgl. Abb. 6).

Führt man die Transformation

$$y_i = \bar{y}^g + y_i' \; ; \qquad x_i = \bar{x}^g + x_i' \tag{86b}$$

durch, so streuen die Punkte $P_i'(x_i',y_i')$ um eine optimale Gerade, die durch den Punkt $P'(0,0)$ geht (s. Abb. 6).

Demnach können für die rechnerische Ausgleichung der Punkte $P_i'(x_i',y_i')$ die im vorstehenden Abschnitt entwickelten Verfahren dienen. Z. B. erhält man (vgl. (75) und (77))

$$a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i' x_i'}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i'^2} \; ; \qquad \varepsilon_a = t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i' - a_{opt} x_i')^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i'^2}} \; . \tag{86c}$$

Zur Berechnung der Vertrauensabweichungen ε_a und ε_b von (84) und (85) müssen wir beachten, daß hier für die Vertrauensabweichung ε_{y_i} von y_i analog zu (76) für $n \gg 1$ als

$$\varepsilon_{y_i} = t_\infty s_{y_i} = t_\infty \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_j v_j^2}{p_i (n-2)}} \tag{87}$$

anzusetzen ist. Der Ersatz von n - 1 durch n - 2 erfolgt, damit die Standardabweichung für nur zwei Meßpunkte unendlich groß wird, denn nach Voraussetzung streuen die Meßwerte um eine Gerade, und durch zwei Punkte kann stets eine Gerade gelegt werden, das Verfahren einer Geradenausgleichung wird also dann sinnlos (vgl. auch den Übergang von (24) zu (25)). Für (76) wird dagegen zusätzlich vorausgesetzt, daß die optimale Gerade durch den Nullpunkt geht. Es liegen dann im Gegensatz zu dem hier vorliegenden Fall schon zwei Meßpunkte im allgemeinen nicht mehr auf der optimalen Geraden.

Die gesuchten Vertrauensabweichungen ε_a und ε_b ergeben sich aus

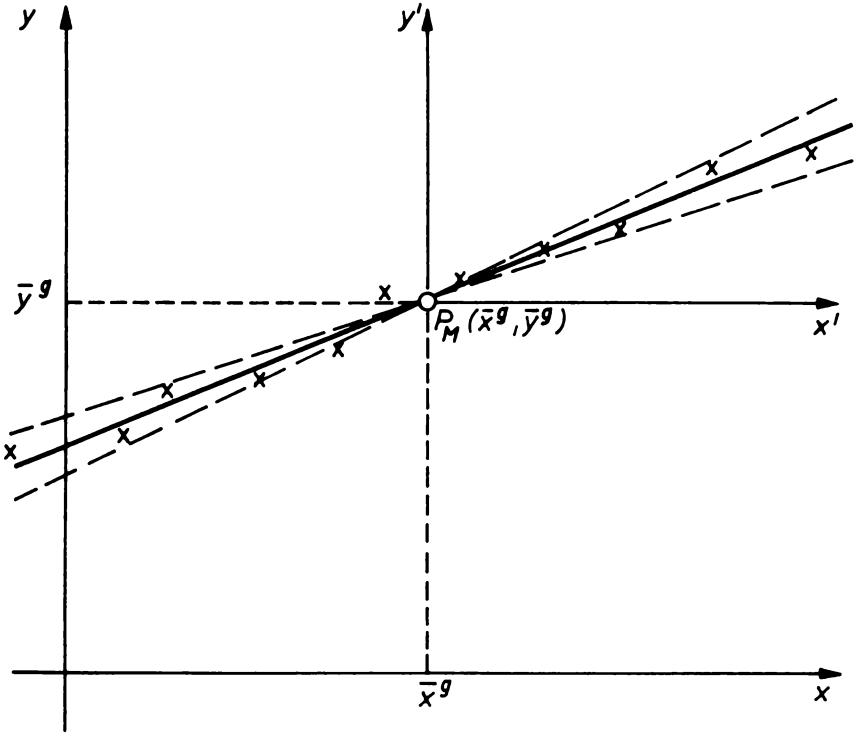


Abb. 6 Die optimale Gerade geht stets durch den Mittelpunkt $P_M(\bar{x}^g, \bar{y}^g)$ der Meßpunkte.

den Vertrauensabweichungen ε_{y_i} durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (55). Analog der Herleitung von (77) erhält man

$$\varepsilon_a = t^* \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-2}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2}}, \tag{88}$$

$$\varepsilon_b = t^* \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-2}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2}} \tag{89}$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i^2 - a_{opt} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i - b_{opt} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i, \tag{90}$$

wobei t^* den Wert von t für n - 1 anstelle von n bedeutet: $t^* := t(P, n-1)$.

Besitzen die Meßpunkte $P_i(x_i, y_i)$ gleiches Gewicht, (Meßpunkte gleicher Genauigkeit), so ist in den Beziehungen (84) bis (90) $p_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$ zu setzen (vgl. auch das nachfolgende Beispiel).

Vielfach läßt sich eine Verminderung des Rechenaufwandes dadurch erreichen, daß man zunächst (z. B. durch eine grafische Ausgleichung) Näherungswerte a_n und b_n für a und b aufsucht und dann die Transformation

$$a = a_n + \hat{a}\,; \quad b = b_n + \hat{b} \tag{91}$$

durchführt. Einsetzen in die Gleichung $y_i = a\,x_i + b$ ergibt

$$y_i = (a_n + \hat{a})\,x_i + b_n + \hat{b} \tag{92}$$

oder

$$y_i - (a_n x_i + b_n) =: Y_i = \hat{a} x_i + \hat{b}. \tag{93}$$

Faßt man jetzt $P_i(x_i, Y_i)$ statt $P_i(x_i, y_i)$ als Meßpunkte auf, so streuen diese ebenfalls nach (93) um eine Gerade mit den Konstanten $\hat{a}$ und $\hat{b}$. Bestimmt man durch diese Meßpunkte die optimale Gerade, so kommt

man bei der Berechnung mit wenigerstelligen Zahlen aus, da nach (91) $\hat{a}$ und $\hat{b}$ nur Korrekturen bedeuten.

Beispiel 12

Der elektrische Widerstand R eines Metalldrahtes wurde in Abhängigkeit von der Celsiustemperatur ϑ gemessen. Man fand folgende Werte:

$\frac{\vartheta_i}{^oC}$	6,1	17,2	24,3	31,8	47,2	59,5	65,9	80,3	91,7	96,5
$\frac{R_i}{\Omega}$	1,44	1,55	1,63	1,67	1,73	1,86	1,95	2,02	2,12	2,19

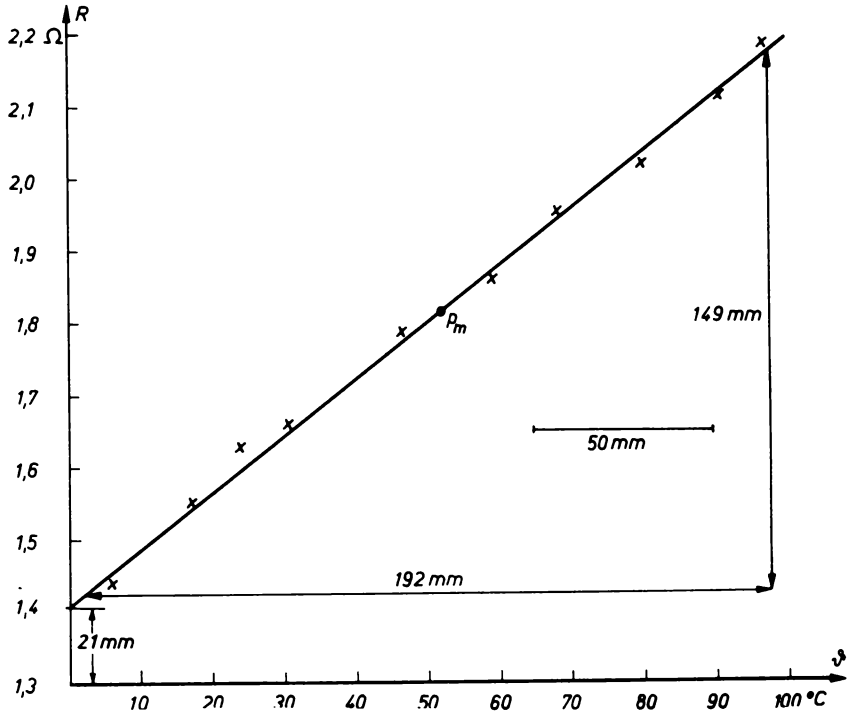


Abb. 7 R = f(ϑ)

Trägt man die für den elektrischen Widerstand gefundenen Werte über der Celsiustemperatur auf, so erkennt man, daß sie um eine Gerade streuen (s. Abb. 7). Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes muß sich demzufolge durch

$$R = R_0(1 + \beta\vartheta) \tag{94}$$

darstellen lassen.

a) Man bestimme R_0, den Temperaturkoeffizienten β und ihre Vertrauensintervalle für P = 68,3 % durch rechnerische Ausgleichung.

b) Man vergleiche die für a_{opt} und b_{opt} rechnerisch ermittelten Werte mit den grafisch bestimmten.

Lösung

Zu a)

Für die Konstanten a_{opt} und b_{opt} der optimalen Geraden

$$R = a_{opt}\vartheta + b_{opt} \tag{95}$$

und deren Vertrauensabweichungen ε_a und ε_b erhält man aus (84) bis (90) unter Beachtung von Tabelle 10 und, daß hier $p_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$ gesetzt werden muß, folgende Werte:

$$a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i \sum_{j=1}^{10}R_j - n\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i R_i}{\left(\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i^2} = \frac{520{,}5\cdot 18{,}22 - 10\cdot 1019{,}767}{(520{,}5)^2 - 10\cdot 36214{,}91}\,\frac{\Omega}{^\circ C}$$

$$= \frac{-714{,}16}{-91229}\,\Omega\,^\circ C^{-1} = 7{,}828\cdot 10^{-3}\Omega\,^\circ C^{-1},$$

$$b_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i \sum_{j=1}^{10}\vartheta_j R_j - \sum_{i=1}^{10}R_i \sum_{j=1}^{10}\vartheta_j^2}{\left(\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{10}\vartheta_i^2}$$

$$= \frac{520{,}5\cdot 1019{,}767 - 18{,}22\cdot 36214{,}91}{(520{,}5)^2 - 10\cdot 36214{,}91}\,\Omega$$

$$= \frac{-129047}{-91229}\,\Omega = 1{,}415\,\Omega\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{10} v_i^2 = \sum_{i=1}^{10} R_i^2 - a_{opt} \sum_{i=1}^{10} \vartheta_i R_i - b_{opt} \sum_{i=1}^{10} R_i$$

$$= (33{,}759 - 7{,}828 \cdot 10^{-3} \cdot 1019{,}767 - 1{,}415 \cdot 18{,}22)\Omega^2$$

$$= 5{,}036 \cdot 10^{-3}\Omega^2$$

und mit dem aus Tab. 4 für P = 68,3 % durch Interpolation gewonnenen Wert $t^* = 1{,}5$

$$\varepsilon_a = t^* \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^{10} v_i^2}{(n-2)\left[\left(\sum_{i=1}^{10} \vartheta_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{10} \vartheta_i^2\right]}} = 1{,}5 \sqrt{\frac{10 \cdot 5{,}036 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 91229}} \frac{\Omega}{^oC}$$

$$= 3{,}9 \cdot 10^{-4}\Omega\,^oC^{-1},$$

$$\varepsilon_b = t^* \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} v_i^2 \sum_{i=1}^{10} \vartheta_i^2}{(n-2)\left[\left(\sum_{i=1}^{10} \vartheta_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{10} \vartheta_i^2\right]}} = 1{,}5 \sqrt{\frac{5{,}036 \cdot 10^{-3} \cdot 36215}{8 \cdot 91229}}\,\Omega$$

$$= 2{,}3 \cdot 10^{-2}\Omega,$$

damit für die Vertrauensintervalle (P = 68,3 %)

$$a_{opt} = (7{,}8 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}\Omega\,^oC^{-1},$$
$$b_{opt} = (1{,}42 \pm 0{,}02)\,\Omega.$$

Wie der Vergleich von (94) mit (95) zeigt, gilt $b_{opt} = R_o$;

$$\beta = \frac{a_{opt}}{R_o} = \frac{a_{opt}}{b_{opt}} = \frac{7{,}828 \cdot 10^{-3}}{1{,}415}\,^oC^{-1} = 5{,}53 \cdot 10^{-3}\,^oC^{-1} = \frac{1}{180{,}8}\,^oC^{-1}.$$

Die Vertrauensabweichung ε_β bestimmt sich aus ε_a und ε_b mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Da $\beta = a_{opt}/b_{opt}$ die Gestalt (46) besitzt, kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz in der Form (55) Anwendung finden:

$$\frac{\varepsilon_\beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{a_{opt}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{b_{opt}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3{,}9\cdot10^{-4}}{7{,}8\cdot10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{2{,}3\cdot10^{-2}}{1{,}4}\right)^2}$$

$$= 5{,}26\cdot10^{-2} \approx 5{,}3\ \%.$$

Damit erhält man als Vertrauensabweichung

$$\varepsilon_\beta = \beta\cdot5{,}26\cdot10^{-2}\ {}^\circ C^{-1} = 2{,}91\cdot10^{-4}\ {}^\circ C^{-1},$$

demzufolge als Vertrauensintervalle der gesuchten Größen

$$\beta = (5{,}5 \pm 0{,}3)\ 10^{-3}\ {}^\circ C^{-1},$$
$$R_0 = (1{,}42 \pm 0{,}02)\,\Omega,$$
$$R = (1{,}42 \pm 0{,}02)\left[1 + (5{,}5 \pm 0{,}3)\ 10^{-3}\ \frac{\vartheta}{{}^\circ C}\right]\Omega.$$

Tabelle 10

i	ϑ_i / °C	$\vartheta_i^2\cdot10^{-1}$ / °C²	R_i / Ω	$R_i\,\vartheta_i$ / Ω°C	R_i^2 / Ω²
1	6,1	3,721	1,44	8,784	2,0736
2	17,2	29,584	1,55	26,660	2,4025
3	24,3	59,049	1,63	39,609	2,6569
4	31,8	101,124	1,67	53,106	2,7889
5	47,2	222,784	1,79	84,488	3,2041
6	59,5	354,025	1,86	110,670	3,4596
7	65,9	434,281	1,95	128,505	3,8025
8	80,3	644,809	2,02	162,206	4,0804
9	91,7	840,889	2,12	194,404	4,4944
10	96,5	931,225	2,19	211,335	4,7961
$\sum$	520,5	3621,431	18,22	1019,767	33,759

Zu b)

Abszissenmaßstab: 20 mm ≙ 10 °C,

Ordinatenmaßstab: 20 mm ≙ 0,1 Ω;

$$a_{opt} = \frac{149\ \text{mm}\ \frac{0{,}1\,\Omega}{20\ \text{mm}}}{192\ \text{mm}\ \frac{10\ {}^\circ C}{20\ \text{mm}}} = 7{,}760\cdot10^{-3}\ \Omega\,{}^\circ C^{-1},$$

$$b_{opt} = 22\ \text{mm}\ \frac{0{,}1\,\Omega}{20\ \text{mm}} + 1{,}30\,\Omega = 1{,}41\,\Omega.$$

Diese Werte entsprechen praktisch den rechnerisch ermittelten. Der Mittelpunkt $P_m(\vartheta = 52{,}1\ ^{\circ}C,\ R = 1{,}82\Omega)$ liegt auf der optimalen Geraden.

Bei der Berechnung von a_{opt}, b_{opt} und $\sum v_i^2$ nach (84), (85) und (90) kann die Differenz von sehr großen, fast gleichen Zahlen auftreten. Um den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen zu halten, empfiehlt sich dann die Einführung folgender Substitution

$$\tilde{x}_i := x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} . \tag{96}$$

Sie überführt die Beziehungen (84) bis (90) in

$$a_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{x}_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{x}_i^2} ; \qquad \tilde{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{97}$$

mit

$$\tilde{b} := a_{opt} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} + b_{opt}, \tag{98}$$

$$\varepsilon_a = t^* \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{v}_i^2}{(n-2) \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{x}_i^2}} , \tag{99}$$

$$\varepsilon_b = \sqrt{\varepsilon_{\tilde{b}}^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^2 \varepsilon_a^2} , \tag{100}$$

$$\tilde{v}_i = y_i - a_{opt} x_i - \tilde{b}, \tag{101}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i^2 - a_{opt} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i - b \sum_{i=1}^{n} p_i y_i, \qquad (102)$$

$$s_{\tilde{b}} = t^* \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{v}_i^2}{(n-2) \sum_{i=1}^{n} p_i}} \,. \qquad (103)$$

1.4. Zur Erfassung der systematischen Fehler

Die vorhergehenden Überlegungen basieren auf der Annahme, daß die systematischen Fehler prinzipiell erkannt und eliminiert wurden bzw. gegenüber den zufälligen vernachlässigbar sind. Meist erfüllen aber die vielfach sehr einfachen Versuchsaufbauten des physikalischen Grundpraktikums diese Forderungen gerade nicht. Zum Beispiel kann bei kalorischen Messungen der Wärmeaustausch mit der Umgebung einen erheblichen, nicht erfaßbaren systematischen Fehler verursachen. Systematische Fehler können dann die gleiche Größenordnung wie die zufälligen erreichen oder zu den bestimmenden Fehlerquellen überhaupt werden. Die Abschätzung ihres Einflusses auf die Unsicherheit des Meßergebnisses wird unumgänglich. Hierzu muß man zunächst prüfen, ob die verwendete Meßanordnung erfaßbare systematische Fehler enthält.

Ein Beispiel möge dies erläutern: Ein elektrischer Widerstand soll durch Strom-Spannungsmessungen bestimmt werden. Dazu sind prinzipiell die in Abb. 8 dargestellten Schaltungen verwendbar. Bei der in Abb. 8a dargestellten Meßanordnung mißt das Voltmeter die Spannung am Widerstand richtig, das Amperemeter mißt dagegen nicht den durch den Widerstand fließenden Strom, sondern die Summe der durch den Widerstand und das Voltmeter fließenden Ströme. Mit der in Abb. 8b dargestellten Schaltung läßt sich wohl der durch den Widerstand fließende Strom richtig messen, das Voltmeter mißt aber die Summe der Spannungen am Widerstand und am Amperemeter. Beide Schaltungen enthalten einen systematischen Fehler, der wohl durch Wahl des Innenwiderstandes der Instrumente (Schaltung 8a Innenwiderstand des Voltmeters $R_i \gg R$, Schaltung 8b Innenwiderstand des Amperemeters $R_i \ll R$) in Grenzen gehalten, aber nicht gänzlich beseitigt werden kann. Dieser systematische Fehler ist aber rechnerisch erfaßbar und damit aus den Meßwerten eliminierbar.

In Schaltung 8a hat man hierzu mit Hilfe des Innenwiderstandes des Voltmeters den durch das Voltmeter fließenden Strom zu berechnen, in Schaltung 8b mit Hilfe des Innenwiderstandes des Ampere-

meters die an ihm liegende Spannung. Im Fall der Schaltung entsprechend Abb. 8a erhält man

$$I = \frac{U}{R}\left(1 + \frac{R}{R_V}\right)$$

(R_V Innenwiderstand des Voltmeters), im Fall der Schaltung entsprechend Abb. 8b gilt

$$U = I(R + R_A) = IR\left(1 + \frac{R_A}{R}\right)$$

(R_A Innenwiderstand des Amperemeters).

Zu weiteren systematischen Fehlern könnten Kontaktwiderstände führen. Diese können nicht rechnerisch erfaßt werden, ihr Einfluß auf die Meßgröße läßt sich jedoch durch den Übergang zu einer Kompensationsmethode beseitigen.

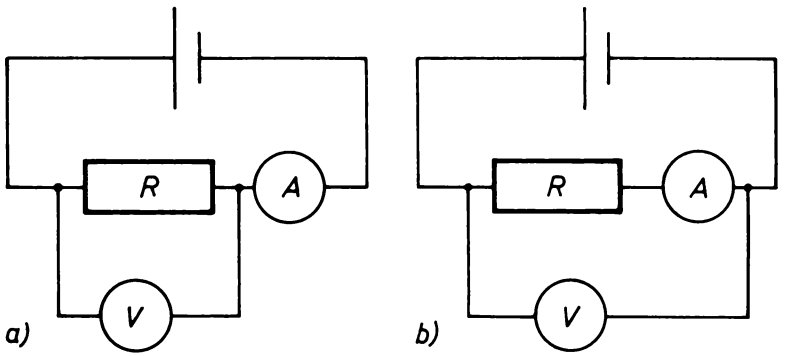


Abb. 8 Meßanordnungen zur Bestimmung des Widerstandes R.
a) Das Amperemeter mißt nicht den durch R fließenden Strom;
b) das Voltmeter mißt nicht die Spannung an R.

1.4.1. Meßunsicherheit

Die Meßunsicherheit u eines Meßergebnisses umfaßt die zufälligen Fehler und die nicht erfaßbaren, weil nicht meßbaren und daher nur abschätzbaren systematischen Fehler. Nicht erfaßbare systematische Fehler können dadurch entstehen, daß ein Meßgerät einen unbekannten systematischen Fehler besitzt oder bei dem verwendeten Meßverfahren

unvermeidbare Störeinflüsse (z. B. bei kalorimetrischen Messungen Wärmeaustausch mit der Umgebung) existieren.

Eine Aufklärung über die nicht erfaßbaren systematischen Fehler könnte u. a. die Anwendung andersartiger Meßsysteme und andersartiger Meßverfahren bringen. Dieser Weg ist im physikalischen Grundpraktikum kaum gangbar, so daß nur die Abschätzung des Einflusses dieser Fehlerquellen auf das Meßergebnis bleibt.

Mit Hilfe der Meßunsicherheit u wird das Meßergebnis angegeben durch (vgl. (56))

$$\boxed{x = \bar{x} \pm u,} \tag{104}$$

wobei $\bar{x}$ den von erfaßbaren systematischen Fehlern befreiten Mittelwert (23) bedeutet.

Die Meßunsicherheit wird meist additiv aus der Vertrauensabweichung $\varepsilon_x = t s_x/\sqrt{n}$ des Mittelwertes und dem abgeschätzten Betrag des systematischen Fehlers $|\Delta x|$ zusammengesetzt,

$$u = \frac{t\, s_x}{\sqrt{n}} + |\Delta x| . \tag{105}$$

Der durch den systematischen Fehler bedingte Anteil $|\Delta x|$ wird anhand des verwendeten Meßverfahrens, der eigenen Sorgfalt beim Experimentieren und der Fehlergrenzen des verwendeten Meßgerätes abgeschätzt.

Die Fehlerangabe eines Meßgerätes ist begrifflich streng von der Meßunsicherheit zu unterscheiden. In der praktischen Meßtechnik bezeichnet man als Fehlergrenze eines Meßgerätes die vereinbarten oder garantierten zugelassenen äußersten Abweichungen nach oben oder unten von der Sollgrenze oder vom Nennwert. Fehlergrenzen können einseitig (Vorzeichen + oder -) oder zweiseitig (Vorzeichen $\pm$) sein. Wichtige Sonderfälle sind die Garantie- und Eichfehlergrenzen eines Meßinstrumentes. Bei den Garantiefehlergrenzen wird vom Hersteller des Gerätes garantiert, daß die Fehler der mit dem Meßgerät unter bestimmten Bedingungen ermittelten Werte innerhalb vorgeschriebener Grenzen liegen (Garantiefehlergrenzen, z. B. 0,1 % des Endwertes). Die Eichfehlergrenzen bezeichnen die größten Abweichungen der Anzeige vom richtigen Wert, die beim Vergleich mit einem Normal noch zulässig sind (z. B. für ein Thermometer $\pm$ 0,1 K bei 20 °C).

Da systematische Fehlereinflüsse durchaus nur einseitig wirken

können, sind hier Fehlerangaben der Art $\Delta x > 0$ oder $\Delta x < 0$ prinzipiell möglich. Ist der systematische Fehler Δx gegenüber den zufälligen Fehlern vernachlässigbar, dann ist die Meßunsicherheit gleich der Vertrauensabweichung des Mittelwertes. Gilt dagegen $|\Delta x| \gg e_x$, dann kann auf die Beachtung und damit auf die Auswertung der zufälligen Fehler verzichtet werden. Hat man von der Größe x nur wenige Meßwerte, dann wird meist der zufällige Fehler zusammen mit systematischen Fehlern abgeschätzt. In diesem Fall wird $|\Delta x|$ auch als Größtfehler der Messung bezeichnet.

1.4.2. Fehlerfortpflanzung für systematische Fehler

Die zu messende Größe z sei nicht direkt meßbar, sondern sie sei indirekt aus einem funktionalen Zusammenhang $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_l)$ zwischen z und l voneinander unabhängigen einzeln meßbaren Größen x_k bestimmbar. Δx_k sei der systematische Fehler der Meßgröße x_k. Den systematischen Fehler Δz der zu messenden Größe z gewinnt man aus den Δx_k mit Hilfe der linearen Glieder der Taylorschen Reihe (vgl. auch (35)):

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_l}\Delta x_l, \tag{106}$$

wobei wieder $\partial f/\partial x_k$ den Wert der Ableitung an den Stellen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l$ bedeutet. Δz entspricht also dem totalen Differential dz.

Ist $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_l)$ eine Summe der Gestalt $\sum_{k=1}^{l} a_k x_k$, dann ergibt sich für den systematischen Fehler

$$\Delta z = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \ldots + a_k \Delta x_k + \ldots + a_l \Delta x_l. \tag{107}$$

Ist f ein Potenzprodukt der Gestalt $z = c \prod_{k=1}^{l} x_k^{a_k}$ dann gilt für den relativen systematischen Fehler

$$\frac{\Delta z}{\bar{z}} = a_1 \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + a_2 \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \ldots + a_k \frac{\Delta x_k}{\bar{x}_k} + \ldots + a_l \frac{\Delta x_l}{\bar{x}_l}. \tag{108}$$

Vielfach wird (106) bzw. (107) bzw. (108) noch verschärft, indem man jede Kompensation systematischer Fehler ausschließt:

$$|\Delta z|_{max} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| \tag{109}$$

bzw.

$$|\Delta z|_{max} = \left|a_1\Delta x_1\right| + \left|a_2\Delta x_2\right| + \ldots + \left|a_1\Delta x_1\right| \tag{110}$$

bzw.

$$\left|\frac{\Delta z}{\bar{z}}\right|_{max} = \left|a_1\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right| + \left|a_2\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right| + \ldots + \left|a_1\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right| . \tag{111}$$

Läßt man dagegen eine gewisse Kompensation systematischer Fehler zu, dann läßt sich Bedingung (106) bzw. (107) bzw. (108) etwas abschwächen:

$$|\Delta z|_{komp} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2} \tag{112}$$

bzw.

$$|\Delta z|_{komp} = \sqrt{(a_1\Delta x_1)^2 + (a_2\Delta x_2)^2 + \ldots + (a_1\Delta x_1)^2} \tag{113}$$

bzw.

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta\bar{z}}\right|_{komp} = \sqrt{\left(a_1\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(a_2\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_1\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)^2} . \tag{114}$$

Beispiel 13

In einem Wechselstromkreis soll die Phasenverschiebung φ zwischen anliegender Spannung u und fließendem Strom i durch eine gleichzeitige Messung der Wirkleistung P_W, der Effektivstromstärke I_{eff} und Effektivspannung U_{eff} gemessen werden. Die Beträge der relativen Fehlergrenzen der verwendeten Meßinstrumente betragen $|\Delta P_W/P_W|_{max} = 1\ \%$, $|\Delta I_{eff}/I_{eff}|_{max} = 0{,}5\ \%$ und $|\Delta U_{eff}/U_{eff}|_{max} = 0{,}5\ \%$. Man bestimme den Betrag der relativen Fehlergrenze für $\cos\varphi$. Die zufälligen Fehler können gegenüber den Fehlergrenzen der Geräte vernachlässigt werden.

Lösung

Da $\cos\varphi = P_W/I_{eff}U_{eff}$ die Gestalt (46) besitzt, kann (111) Anwendung finden:

$$\left|\frac{\Delta\cos\varphi}{\cos\varphi}\right|_{max} = \left|\frac{\Delta P_W}{P_W}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta I_{eff}}{I_{eff}}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta U_{eff}}{U_{eff}}\right|_{max} = 2\ \%.$$

Hat man μ Meßreihen mit gleichen systematischen Fehlern Δx_λ der Meßwerte innerhalb der einzelnen Meßreihen, so führt man analog (64) Gewichtsfaktoren

$$p_\lambda = \frac{C}{(\Delta x_\lambda)^2} \tag{115}$$

ein und berechnet Mittelwert und zugehörigen systematischen Fehler entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 1.3.6.

1.5. Rechnen mit kleinen Größen

Eine erhebliche Einsparung von Rechenaufwand bei der Meßwertauswertung ist oft durch die Benutzung von Näherungsformeln zu erzielen. Einige oft gebrauchte Näherungsformeln seien daher zusammengestellt. Für $|x| \ll 1$ gilt

$$\sin x \approx x \approx \tan x,$$

$$\cos x \approx 1,$$

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx,$$

$$\sqrt[n]{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{n}x,$$

$$(1 \pm x_1)(1 \pm x_2) \approx 1 \pm x_1 \pm x_2,$$

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x,$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x.$$

Schema für die Durchführung einer Fehlerrechnung

$z = f(x,y)$ (z wird bestimmt durch Messung von x und y)

Bestimmung des arithmetischen Mittels (23)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} x_i}{n_x}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n_y} y_i}{n_y}$$

zufällige Fehler

Bestimmung der Vertrauensabweichungen (51)

$$\varepsilon_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n_x(n_x - 1)}}$$

$$\varepsilon_{\bar{y}} = t \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{n_y(n_y - 1)}}$$

Anwendung des quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetzes (55)

$$\varepsilon_{\bar{z}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\varepsilon_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\,\varepsilon_{\bar{y}}\right)^2$$

Sonderfall $z = x^a y^b$ (57)

$$\frac{\varepsilon_{\bar{z}}}{\bar{z}} = \left(a\,\frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(b\,\frac{\varepsilon_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$$

systematische Fehler

Beurteilung der systematischen Fehler der Größen x und y (Arten der Fehler, Fehlerursachen). Eliminierung der erfaßbaren systematischen Fehler, d. h. Korrektur von $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Bestimmung von $\bar{z}$ (36) $\bar{z} = f(\bar{x},\bar{y})$

Abschätzung der nichterfaßbaren systematischen Fehler x und y (vgl. 1.4.1.1.)

Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes (109)

$$|\Delta z|_{max} = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y\right|$$

Sonderfall $z = x^a y^b$ (111)

$$\left|\frac{\Delta z}{\bar{z}}\right|_{max} = \left|a\,\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right| + \left|b\,\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right|$$

$$z = \bar{z} \pm \left(\varepsilon_{\bar{z}} + |\Delta z|_{max}\right)$$

2. Laborpraxis

2.1. Einführung

2.1.1. Zum Arbeiten im Labor

Mit Rücksicht auf die örtlichen Besonderheiten können nachstehend nur einige allgemeine Hinweise und Ratschläge für das Arbeiten im Labor gegeben werden. Der organisatorische Ablauf der Praktika ist i. allg. Bestandteil einer Praktikums- oder Laborordnung, die den Studenten in der jeweils einführenden Veranstaltung zur Kenntnis gebracht wird. Vor Beginn der Arbeit im Labor werden Arbeitsschutzbelehrungen durchgeführt, deren Kenntnisnahme schriftlich vermerkt wird.

Eigene Arbeitsmittel

Folgende Arbeitsmittel muß jeder Student selbst besitzen: Rechenstab, Logarithmen- und Funktionentafeln, Zeichengeräte (Zirkel, Dreieck, Lineal, Kurvenlineal), Millimeterpapier und Protokollhefte (Format A 4).

Es ist nützlich, mathematische Taschenbücher (mit Tabellen) neben grundlegenden Lehrbüchern der experimentellen (und theoretischen) Physik auch selbst zu besitzen, gegebenenfalls auch elektronische Taschenrechner. Daneben ist z. B. die Anschaffung von physikalischen Taschenbüchern, des Brockhaus abc "Physik" (2 Bände) und der Kleinen Enzyklopädie "Atom" zu empfehlen.

2.1.2. Vorbereitungsarbeiten

Zur Durchführung des Praktikums ist i. allg. eine mehrstündige Vorbereitungszeit erforderlich. Diese Vorbereitung soll durch das vorliegende Lehrmaterial maßgeblich unterstützt werden. Es kann jedoch nicht alle Detailinformationen enthalten. In diesem Fall ist es selbstverständlich, daß weitere Bücher (Handbücher, Lehrbücher oder Originalarbeiten) studiert werden müssen. Hierbei ist es wünschenswert, daß die Studenten möglichst frühzeitig mit dem Arbeiten in einer Bibliothek vertraut werden. Bei der Vorbereitung auf ein Praktikumsexperiment empfiehlt es sich, den wesentlichen Extrakt der eingesehenen Literatur zu konspektieren und der Protokollführung voranzustellen, wobei es auf eine wohldurchdachte und prägnante - eigene - Formulierung ankommt.

Je nach örtlichen Gegebenheiten können spezielle Informationen, die am Arbeitsplatz vorhanden sind, auch in der Bibliothek eingesehen werden. In allen Fällen ist es zweckmäßig, sich im Zusammenhang mit den Vorbereitungsarbeiten vor dem Praktikumstag am Arbeitsplatz zu informieren.

Ein wesentlicher Bestandteil der Vorbereitungsaufgaben ist in der gewissenhaften Planung des Arbeitsablaufes zu sehen, die in der wissenschaftlichen Forschung eine wachsende Rolle spielt.

2.1.3. Experimentelles Arbeiten

In der Anfangsphase des physikalischen Praktikums wird den Studenten das komplette Zubehör für das durchzuführende Experiment zur Verfügung gestellt, so daß i. allg. nur wenige Handgriffe für das Aufbauen der Versuchsanordnung erforderlich sind.

In einer fortgeschrittenen Phase des experimentellen Arbeitens - meistens erst im Zusammenhang mit der Diplomarbeit - wird dann der Student mit einem höchst wichtigen Teil des experimentellen Arbeitens vertraut gemacht: Er muß dann selbst die Überlegungen anstellen, die erst zu einem Experiment führen (und zwingen); er muß selbst das Experiment planen und entwerfen, die Zubehörteile konstruieren und erproben.

Zunächst hat man sich am Arbeitsplatz davon zu überzeugen, ob alle Einzelheiten vorhanden und funktionstüchtig sind. Auftretende Mängel sind sofort dem Betreuer mitzuteilen. Es ist in keinem Praktikum gestattet, Apparaturen zu zerlegen, Geräte - ohne Einverständnis des Betreuers - zu reparieren oder gar Teile von den Arbeitsplätzen zu entfernen.

Die Arbeitsmittel sind Volkseigentum und besonders pfleglich und sorgfältig zu behandeln.

Bei den elektrischen und elektronischen Meßaufgaben darf der Anschluß der elektrischen Verbindungen an eine Spannungsquelle in der Anfangsphase des Praktikums nur nach Überprüfung der Schaltung durch den Betreuer erfolgen.

Insgesamt gilt die Regel, daß man in Zweifelsfällen den Betreuer konsultieren sollte. Auftretende Schäden an Apparaturen oder Verletzungen von Personen müssen unverzüglich gemeldet werden. Eine geschickt und übersichtlich aufgebaute experimentelle Anordnung ist nicht nur bequem bedienbar, sie ermöglicht mitunter auch eine höhere

Meßgenauigkeit.

Je größer die Zahl der Einzelmessungen ist, umso kleiner ist die Standard- bzw. Vertrauensabweichung der zu bestimmenden Größe; die Messungen sind damit zuverlässiger. Im allgemeinen genügt es im Praktikum, eine Größe 5- bis 10mal zu messen. Insbesondere muß beachtet werden, daß bei Fehlerangaben nur sinnvolle Stellenangaben das Verständnis belegen; durch Rechnung kann die Meßgenauigkeit nicht erhöht werden.

Nicht immer können genügend Meßwerte (Meßreihen) aufgenommen werden. In diesen Fällen ist die Fehlerabschätzung der zu ermittelnden Größe unerläßlich. Entsprechende Notizen im Protokoll müssen beim Experimentieren vorgenommen werden. Die experimentelle Anordnung soll erst nach Abschluß der Auswertungsarbeiten abgebaut werden, da es sich mitunter herausstellt, daß noch die eine oder andere Messung nachgeprüft oder wiederholt werden muß.

2.1.4. Protokollführung

Erfolg und Güte der experimentellen Arbeit hängen nicht nur von der gewählten Meßmethode, von der Präzision der Meßinstrumente und von der sorgfältigen Ausführung der Messungen ab, sondern nicht zuletzt von der exakten Protokollführung während des Experimentes.

Das Protokoll muß alle erforderlichen Angaben enthalten, nach denen das Experiment zu jeder beliebigen Zeit und unter denselben Bedingungen wiederholt werden kann. Das ist nicht nur zur Kontrolle der Meßwerte erforderlich, sondern auch um notfalls systematische Fehler finden und Änderungen vornehmen zu können.

Jeder Praktikant muß ein eigenes Protokoll führen. Die Eintragungen ins Protokoll werden mit Tinte oder Kugelschreiber und unmittelbar im Praktikum vorgenommen. Empfohlen wird die Protokollführung in einem gebundenen Protokollbuch (Format A 4, mit Linien oder Karos) mit numerierten Seiten. Radieren und Heraustrennen von Seiten ist nicht zulässig. Falsche oder zu ändernde Eintragungen werden unter Angabe der Gründe oder Ursachen durchgestrichen.

Der Gebrauch von Notizzetteln ist unzulässig, da es sich bei der Protokollführung um ein dokumentarisches Festhalten aller experimentellen Daten handelt. Auch zunächst nebensächlich erscheinende Daten, Hinweise und Bemerkungen müssen protokolliert werden, häufig werden sie bei der Auswertung Grundlage wichtiger Erkenntnisse.

Das zu einem Experiment angefertigte Protokoll muß mindestens folgende Angaben enthalten:

1. Protokollkopf

Datum und Uhrzeit des Praktikums; Namen des Protokollanten und seiner Mitarbeiter; Name des Betreuers; Thema und Kennzeichen des Experimentes.

2. Aufgabenstellung

3. Vorbereitung

Knappe Formulierung des physikalischen Problems, daraus Schlußfolgerungen für die Durchführung des Experiments, Angabe der erforderlichen Teilschritte, keine theoretischen Abhandlungen.

Angabe der Meßgleichungen und Fehlergleichungen, gegebenenfalls mit Herleitung.

4. Durchführung des Experiments

Beschreibung des experimentellen Aufbaus. Dabei ist zu beachten, daß eine Skizze oft mehr aussagt als eine lange Beschreibung. Bei elektrischen Schaltungen müssen die Schaltskizzen im Protokoll enthalten sein.

Angabe der verwendeten Meßgeräte (Typ, Güteklasse, Meßbereich, möglichst Gerätenummer).

Die Tabellen enthalten im Tabellenkopf den Quotienten Größe/Einheit und in den Tabellenspalten dann nur die Zahlenwerte. Zehnerpotenzen sollen bevorzugt verwendet werden. Die Tabellen sind so anzulegen, daß zunächst die Originalmeßwerte (Urliste) aufgenommen werden, erst in weiteren Spalten eventuelle Umrechnungen (z. B. bei elektrischen Meßgeräten; Meßbereich und abgelesene Skalenteile, dann erst Spannungs- bzw. Stromstärkewerte).

Bei allen Gleichungen, Tabellen und Rechnungen sind die vorkommenden Größen zu erläutern, bei Gleichungen der Gültigkeitsbereich anzugeben.

Die einzelnen Tabellen und die Teilschritte der Durchführung des Experiments sind durch eindeutige Überschriften, die die Ziele der einzelnen Schritte angeben, zu kennzeichnen. Allgemein ist auf übersichtliche Gliederung zu achten.

5. Auswertung des Experiments

Die Rechnungen werden möglichst in Tabellenform durchgeführt. Im all-

gemeinen reicht die Rechenstabgenauigkeit aus. Es empfiehlt sich allerdings, jeweils ein Beispiel als Gleichung aufzuschreiben und durchzurechnen. Damit wird eine Kontrolle auf eventuelle Fehler erleichtert. Alle Gleichungen sind grundsätzlich als Größengleichungen zu schreiben. Im Protokoll erscheinen auch die Nebenrechnungen!

Diagramme werden grundsätzlich auf Koordinatenpapiere gezeichnet und mit einem Titel versehen. Häufig ist die Benutzung von Spezialpapieren, z. B. mit einer oder zwei logarithmisch geteilten Achsen zweckmäßig. Beispiele werden bei den jeweiligen Experimenten angegeben. Die Koordinatenachsen sind mit dem Quotienten Größe/Einheit zu bezeichnen, Die Skalenteilung der Achsen ist deutlich anzugeben. Der Maßstab ist so zu wählen, daß die Kurve möglichst das ganze zur Verfügung stehende Format ausnutzt und - in den entscheidenden Bereichen - etwa unter 45° verläuft. Die Diagramme werden an der entsprechenden Stelle im Protokollheft eingeklebt.

6. Das Ergebnis des Experiments

(auch eventuelle Zwischenergebnisse) ist kurz zu formulieren.

In der Diskussion ist das Ergebnis mit dem erwarteten Wert zu vergleichen. Treten Abweichungen auf, sollte man versuchen, diese zu begründen. Man sollte außerdem darlegen, welche systematischen Fehler Einfluß auf das Ergebnis gehabt haben. Es sind Hinweise auf Störeinflüsse zu geben, das Meßverfahren wird kritisch eingeschätzt und gegebenenfalls anderen Meßverfahren gegenübergestellt.

2.1.5. Häufig vorkommende Meßverfahren und Techniken

2.1.5.1. Längenmessungen

Zur einfachen Längenmessung stehen im Praktikum drei Gruppen von Längenmeßgeräten zur Verfügung:

1. Bank- oder Stabmaßstäbe,
2. Meßschieber,
3. Feinmeßschrauben.

In dieser Reihenfolge nimmt auch ihre Meßunsicherheit ab. Da Bank- oder Stabmeßstäbe eine mm-Teilung (je nach Fabrikation und Material mit unterschiedlichen systematischen Teilungsfehlern) tragen und die Längenmessung mit ihnen durch einfaches Anlegen an die Meßstrecke bei möglichst genauer Übereinstimmung der Anfangs- und der Endmarke

mit jeweils einem Teilungsstrich ausgeführt werden, ist mit ihnen i. allg. keine kleinere Ableseunsicherheit a als 1 mm erzielbar. Bei einer Anwendung auf Längen $l \geq 10$ cm ergibt das immerhin eine relative Ableseunsicherheit $a/l \leqq 1$ %. Die Möglichkeit von Parallaxenfehlern wird durch Hinterlegung der Skale mit einem Spiegel (sog. Spiegelmaßstab) eingeschränkt.

Eine wesentliche Verbesserung wird erreicht, wenn die Einstellung auf die Meßmarken optisch, z. B. vermittels eines mit Fadenkreuz versehenen Fernrohres geschieht: Kathetometer. Die mm-geteilte Skale ist als massive Säule ausgebildet, die durch Stellschrauben an ihrem Fuß nach Kontrolle an einer Dosenlibelle genau senkrecht justiert werden kann. An ihr ist das Fernrohr - mittels Libelle und Stellschrauben ebenfalls genau horizontal justierbar - mit der klemmbaren Schiebehülse grob und durch einen Stellring mit Feingewinde fein einstellbar angebracht. Das Fernrohr kann in der horizontalen Ebene frei geschwenkt werden, womit sich die Längenmessung auch auf Abstandsmessungen nicht genau vertikal untereinander angeordneter Meßmarken ausdehnen läßt. Entsprechend der erheblich verbesserten Einstellgenauigkeit der Meßmarken auf die Maßteilung (durch das Fadenkreuz) ist die Ableseunsicherheit durch eine (meist 20teilige) Noniusteilung verkleinert; 0,1 mm ist sicher ablesbar. Damit wird eine relative Ableseunsicherheit von 1 % schon bei einer Länge $l = 1$ cm erreicht, für $l = 10$ cm beträgt sie nur 1 ‰.

Beim Gebrauch des Kathetometers muß unbedingt eine Urliste protokolliert werden, da ja i. allg. die untere Meßmarke schon einen von Null verschiedenen Maßstabwert besitzt und die gesuchte Länge als Differenz aus "oberer Ablesung" und "unterer Ablesung" berechnet werden muß.

Der Meßschieber ist ein Längenmeßgerät für Längen bis etwa $l = 120$ mm. Da die Meßbacken an den Meßling von außen angelegt bzw. die Innenmeßspitzen bei Bohrungen oder Öffnungen in diese eingesetzt werden, entfällt der Parallaxenfehler weitgehend (wenn von groben Meßfehlern abgesehen wird). Da auch der Meßschieber über eine Nonius-Ablesung verfügt, ergeben sich die gleichen Meßunsicherheiten wie beim Kathetometer (wobei allerdings wegen der Beschränkung auf $l_{max} \approx 120$ mm eine relative Meßunsicherheit von 1 ‰ nicht unterschritten wird).

Für noch geringere Längen (i. allg. bis $l_{max} = 25$ mm) kann die Feinmeßschraube eingesetzt werden, wobei der Einsatz auf Außenmes-

sungen - durch Anlegen - eingeschränkt bleibt. In einem starren Bügel von etwa der Form einer halben Ellipse ist auf der einen Seite ein Auflager mit genau plan geschliffener und gehärteter Meßfläche eingesetzt, die andere Seite trägt die Meßspindel, deren Feingewinde (0,5 mm Ganghöhe) geschliffen und ebenfalls gehärtet ist. Die an der Spindel befestigte 50teilige Meßtrommel-Skale gestattet die Ablesung von (1/50)·0,5 mm = 0,01 mm; bei Abschätzung von halben Skalenteilen (und das ist ohne große Meßfertigkeit möglich) erniedrigt sich die Ableseunsicherheit auf 0,005 mm. (Die früher gebräuchliche Bezeichnung "Mikrometerschraube" ist also falsch und irreführend, da selbst sehr geübte Meßpersonen (1/10) Skt nicht mit Zuverlässigkeit abschätzen, geschweige denn echt messen können!)

Bei Gebrauch der Feinmeßschraube sind folgende Punkte zu beachten:

1. Die Meßspindel darf nur an dem mit Ratschkupplung versehenen Einstellknopf verstellt werden - damit wird für alle Messungen der gleiche Auflagedruck der Meßflächen auf den Meßling und damit eine reproduzierbare Messung gewährleistet.

2. Vor bzw. nach jeder Messung muß der "Anfangsindex" der Meßtrommel bestimmt werden, was durch Anlegen der Meßspindelfläche an die Meßfläche des Auflagers - also ohne Meßling - geschieht. Der vorzeichenbehaftete Wert des Anfangsindex ist bei jeder Messung von der Endeinstellung zu subtrahieren.

3. Nach Gebrauch muß dafür gesorgt werden, daß die beiden Meßflächen sich nicht berühren; evtl. anhaftende Feuchtigkeitsreste würden die Oberflächengüte der Meßflächen schnell verderben. (Gleiches geschieht übrigens auch, wenn man die Feinmeßschraube unter Umgehung der Ratschkupplung im wörtlichen Sinne "zusammenschraubt"!)

2.1.5.2. Zeitmessungen

Trotz der Fortschritte in der Elektronik bleibt die mechanische Stoppuhr noch immer das häufigste Meßgerät zur Zeitmessung im Praktikum. Gebräuchlich sind 30 min-Uhren mit (1/10)s-Teilung und 60 min-Uhren mit (1/5)s-Teilung. Die Teilung gibt zugleich die Ableseunsicherheit an, denn der Zeiger der Stoppuhr springt (entsprechend dem Weiterrücken um einen Zahn des Steigrades) von Skalenstrich zu Skalenstrich ohne Zwischenwerte! Es ist also völlig illusorisch, z. B.

bei einer (1/5)s-geteilten Uhr noch (1/10)s ablesen zu wollen ("weil der Zeiger zwischen zwei Skalenstrichen steht"), wenn auch dieser Irrtum (vor allem bei Anfängern) weit verbreitet ist.

Genaues Messen setzt eine entsprechende Meßtechnik voraus:

1. Die Stoppuhr wird so in der Hand gehalten, daß die Krone (d. i. der Start-Stopp-Knopf) am Handballen anliegt und die Spitzen der vier Finger den (unteren) Rand der Stoppuhr umfassen; damit wird der geringste "persönliche" Stoppfehler erreicht.

2. Bei periodischen Vorgängen "zählt" man sich erst in den Rhythmus ein. Das kann zweckmäßig in der Art eines "count down" geschehen, wobei "Null" Start bedeutet; damit wird zugleich die Zahl der Perioden richtig gezählt (Anfänger starten gelegentlich mit "Eins" und messen dann tatsächlich nur n - 1 Perioden!).

3. Periodische Vorgänge werden niemals nur über eine Periode gemessen, sondern wenigstens über 10 Perioden; der absolute Fehler der Stoppung wird dadurch zwar nicht beeinflußt, aber das Ergebnis für die zu bestimmende Zeitdauer wird bezüglich der Meßunsicherheit verbessert.

4. Für Schwingungsmessungen wählt man den Durchgang durch die Ruhelage als Meßmarke.

5. Infolge der Reaktionszeit ist eine absolut richtige Stoppung nicht möglich und jeder Messende hat seine, i. allg. recht konstant bleibende individuelle "Verzögerungszeit", deren Einfluß auf die Meßgenauigkeit meist überschätzt wird: da sie sowohl zu Beginn als auch zu Ende des Meßintervalls in gleicher Weise wirkt, ist ihr Gesamteinfluß meist vernachlässigbar klein.

6. Bei einmaligen Vorgängen erfordert das richtige Stoppen viel Konzentration und ein präzises, parallaxenfreies Beobachten der Markierungen - hierbei treten die größten Stoppfehler auf.

7. Nach Beendigung der Messungen soll die Stoppuhr nicht mit aufgezogener Feder weggelegt werden, d. h., sie sollte auf Start gedrückt werden, bevor sie in die Aufbewahrung zurückgelegt wird: damit wird ihre Lebensdauer erhöht und eine weitgehend konstant bleibende Spannkraft erhalten.

Vor einer Unsitte sei am Ende noch gewarnt: manche Messende glauben, die Meßgenauigkeit dadurch erhöhen zu können, daß sie die Schwingungen mit der Uhr "mitgehen" und die Uhr zum Stoppen zusammen mit dem Unterarm "durchreißen": die Stoppgenauigkeit wird dadurch keinesfalls erhöht, wohl aber die Lebensdauer der Stoppuhr verrin-

gert!

2.1.5.3. Die Analysenwaage

Die Waage ist ein wichtiges Feinmeßgerät und seit langer Zeit unerläßlich in vielen Bereichen der Physik. Mit relativ geringem Aufwand läßt sich bei ihrem Gebrauch eine außerordentliche Genauigkeit erzielen. Obwohl heute in der Praxis recht häufig halbautomatische Analysenwaagen die Präzisions-Balkenwaage abgelöst haben, sollte jeder Physikstudent Aufbau und Handhabung der Balkenwaage kennengelernt haben, weil sich an ihrem Beispiel mit anschaulicher Klarheit die bei einer Wägung zu beachtenden Prinzipien und Meßkorrekturen begründen und erläutern lassen. Das Verständnis dieser Zusammenhänge ist notwendige Voraussetzung, um auch mit einer modernem Waage sinnvoll und richtig hantieren zu können.

Eine Balkenwaage (gleicharmige Zweischalenwaage) besteht aus einer soliden Waagesäule und dem darauf gelagerten Waagebalken mit dem Zeiger und den angehängten Waagschalen. Der Waagebalken wird zumeist aus speziellen Metallegierungen hergestellt, um eine merkliche Änderung durch Belastung bzw. Temperaturänderung zu vermeiden; er soll hohe Starrheit mit möglichst geringer Masse verbinden.

Grundsätzlich ist jede gute Waage in einem Schutzgehäuse mit Glasscheiben untergebracht, in dem sie auch während der Messungen verbleibt. Das Gehäuse schützt die Waage sowohl vor Verschmutzung und Beschädigung als auch vor Luftbewegungen, die sich bei der Durchführung einer präzisen Messung störend bemerkbar machen. Zum Gebrauch muß die Waage auf einer soliden Unterlage - am besten einem speziellen Wägetisch - möglichst erschütterungsfrei und gut justiert aufgestellt werden: die Waagesäule muß genau senkrecht stehen. Das kann durch Verstellen der Stellschrauben unter der Bodenplatte geschehen; von den drei Füßen ist i. allg. der hintere Fuß fest angebracht, während die beiden vorderen durch Verdrehen auf unterschiedliche Höhe eingestellt werden können. Die genau vertikale Anordnung der Säule kann an einem Fadenlot mit Spitze bzw. an einer Dosenlibelle (diese sind an der Säule bzw. deren Fuß angebracht) abgelesen werden.

Der Waagebalken ist bei einer gleicharmigen Waage in der Mitte mit einem Schneidenlager versehen. An den beiden Enden des Waagebalkens befinden sich die ebenfalls schneidengelagerten Gehänge für die beiden Waagschalen. Bei guten Waagen bestehen die Auflagen der

Schneiden aus polierten Achatplatten, um die Reibung zu vermindern. Eine genaue Parallelität der drei Schneiden zueinander ist eine konstruktive Voraussetzung für die gute Funktion der Waage. Mit dem Waagebalken ist der lange und schlanke, am unteren Ende spitz auslaufende Zeiger fest verbunden. Waagebalken, Waagschalen mit Aufhängung und Zeiger bilden zusammen das schwingende System der Waage. Zur Ablesung der Gleichgewichtslage befindet sich am Fuß der Säule eine Hilfsskale, vor der die Zeigerspitze hin- und herschwingt; zur Verbesserung der Ablesung, die parallaxenfrei erfolgen muß, ist häufig noch eine Lupe angebracht.

Zur Durchführung einer einfachen Wägung belegt man die eine Waagschale mit dem zu wägenden Körper der Masse m und gibt auf die andere Waagschale so lange Wägestücke der Gesamtmasse m', bis der Zeiger nahezu beim Nullstrich der Skale zur Ruhe kommt. Der Körper erzeugt dann ein Drehmoment

$$M = mgl_1, \tag{1a}$$

die Wägestücke erzeugen ein (gegensinniges) Drehmoment

$$M' = -m'gl_2; \tag{1b}$$

$l_1 = l_2 = l$ sind dabei die - nach Voraussetzung gleichen - Abstände der Waagschalen-Aufhängungen vom Drehpunkt, d. h. von der mittleren Schneide. Im Falle des Gleichgewichts muß gelten

$$M + M' = 0; \tag{2}$$

d. h. $(m - m')gl = 0$ und damit

$$m = m'. \tag{3}$$

(Die Gleichgewichtsbedingung (2) gilt i. allg. nur näherungsweise, genauer gilt Gl. (7)).

Die Wägung mit der Balkenwaage ist also ein Meßverfahren zur Bestimmung der Masse eines Körpers durch Vergleich mit (geeichten) Wägestücken, den "Masse-Normalen". Diese Wägestücke sind meist zu einem Wägesatz mit bestimmter Stückelung zusammengefaßt, wobei innerhalb einer "Dekade" die Aufteilung $1 \cdot 10^n$, $2 \cdot 2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$ bevorzugt wird. Je nach den Anforderungen an die Wägung enthält ein Wägesatz zu den Dekaden mit 10^2 g = 100 g, 10^1 g = 10 g und 10^0 g = 1 g noch Dekaden mit 10^{-1}g = 100 mg, 10^{-2}g = 10 mg und evtl. 10^{-3}g = 1 mg.

Zwecks vereinfachter Handhabung der Wägestücke < 1 g sind diese als regelmäßig geformte Blechstücke ausgeführt (bei denen jeweils

eine Kante aufgebogen ist). Dreieckform haben die Wägestücke 1, 10, 100 mg, Viereckform: 2, 20, 200 mg, Sechseckform: 5, 50, 500 mg. Man beachte: Wägestücke dürfen niemals mit den Fingern angefaßt werden; zur Handhabung muß eine Wägepinzette benutzt werden!

Das schwingende System einer Waage ist so konstruiert, daß sein Massenmittelpunkt im Ruhe-Fall stets unterhalb des Drehpunktes liegt. Damit erhält das Waagesystem eine stabile Gleichgewichtslage, um die es schwingt. Da i. allg. der Abstand des Massenmittelpunktes vom Drehpunkt nur gering ist, wird die Schwingungsdauer recht lang. Infolge der reibungsarmen Lagerung ist (wenn nicht durch konstruktive Maßnahmen, z. B. durch Anbringen von Dämpfungsglocken an den Waagschalen-Aufhängungen, für eine zusätzliche Dämpfung gesorgt wird) die Schwingung der Waage nur wenig gedämpft, und es dauert sehr lange, bis die Waage in ihre Gleichgewichtslage eingeschwungen ist. Mit geringerem Zeitaufwand erhält man die Gleichgewichtslage aus der Beobachtung einer (ungeraden) Anzahl von aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten des vor der Skale schwingenden Zeigers. Werden die Umkehrpunkte links von Null mit negativem Vorzeichen versehen, so erhält man als Mittelwert der n linken bzw. als Mittelwert der n - 1 rechten Umkehrpunkte jeweils vorzeichenbehaftete Werte; der Mittelwert dieser beiden vorzeichenbehafteten Mittelwerte ist die Gleichgewichtslage der Waage.

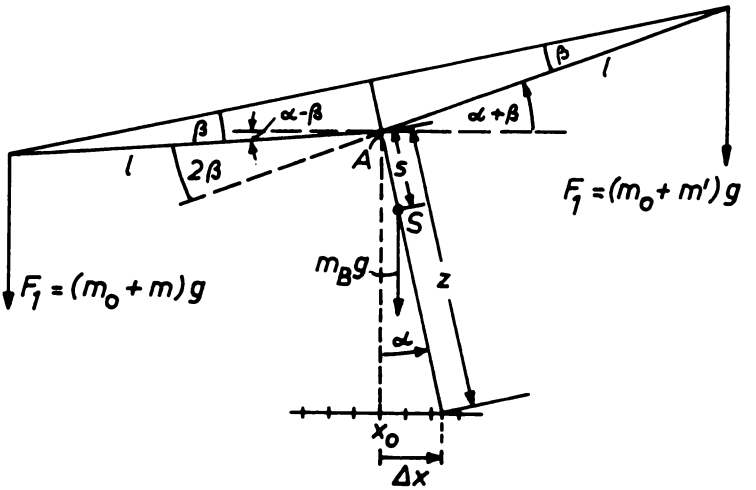


Abb. 2.1.(1) Drehmomente an der zweiarmigen Waage

Die Gleichgewichtslage einer belasteten Waage ergibt sich aus dem Zusammenspiel dreier, vom Drehwinkel α des Zeigers gegen die "Nullage" x_0 abhängigen Drehmomente: den beiden Drehmomenten, die von den an den Enden des Waagebalkens angreifenden Kräften F_1 und F_2 hervorgerufen werden (Abb. 2.1.(1)),

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= F_1 l \cos(\alpha - \beta) = (m_0 + m) g l \cos(\alpha - \beta), \\ M_2 &= -F_2 l \cos(\alpha + \beta) = -(m_0 + m') g l \cos(\alpha + \beta), \end{aligned}} \qquad (4)$$

und dem Drehmoment, das von dem am Massenmittelpunkt S von Waagebalken und Zeiger angreifenden Gewicht $m_B g$ des Waagebalkens hervorgerufen wird,

$$\boxed{M_3 = -m_B g s \sin\alpha .} \qquad (5)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, daß die "Nullage" x_0 mit dem Nullstrich der Skale zusammenfalle, der lotrecht unter der Drehachse A liege. Im allgemeinen darf x_0 wenig von dem Nullstrich abweichen. Dann gelten die Gleichungen (4) und (5) in guter Näherung. $m_{01} = m_{02} = m_0$ sind die als gleich vorausgesetzten Massen der beiden Waagschalen mitsamt ihren Aufhängungen, m und m' die Massen der aufgelegten Körper bzw. Wägestücke, s die auf dem Zeiger gemessene Entfernung des Massenmittelpunktes S von der Drehachse A.

Mit der Voraussetzung $m > m'$ wird die Waage um einen (positiven) Winkel aus der "Nullage" herausgedreht; ihre Schwingung kommt bei einem (ebenfalls positiven) Winkel α zur Ruhe: α ist also der die Gleichgewichtslage der Waage kennzeichnende Auslenkwinkel. Die Gleichgewichtsbedingung lautet $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ oder

$$(m_0 + m) g l \cos(\alpha - \beta) = (m_0 + m') g l \cos(\alpha + \beta) + m_B g s \sin\alpha . \qquad (6)$$

Da für die Auslenkwinkel stets gilt $|\alpha| \ll 1$, folgt mit $\sin\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$ aus Gl. (7) (nach Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen der zusammengesetzten Argumente) mit der Abkürzung

$$m - m' =: \Delta m \qquad (7)$$

schließlich

$$2m_o \sin \beta + \frac{\Delta m}{\alpha} \cos \beta + 2m \sin \beta + \Delta m \sin \beta = m_B \frac{s}{l}$$

und daraus für die sicher erfüllte Voraussetzung $\beta \ll 1$ und damit $\sin \beta \approx \beta$ bzw. $\cos \beta \approx 1$

$$2m_o\beta + \frac{\Delta m}{\alpha} + 2m\beta + \Delta m\, \beta = m_B \frac{s}{l} . \qquad (8)$$

Der Winkel α kann an der Skale als Verschiebung

$$\Delta x = x - x_o \qquad (9)$$

abgelesen werden; es gilt der Zusammenhang $\alpha \approx \Delta x/z$ mit z als Zeigerlänge, und damit kann für Gl. (8) geschrieben werden

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m_B s}{lz} - \frac{l\beta(2m_o + 2m + \Delta m)}{lz} .$$

Der Betrag des Kehrwertes wird als Maß für die Güte einer Waage benutzt und Empfindlichkeit E genannt:

$$\boxed{E := \left|\frac{\Delta x}{\Delta m}\right| , \quad \Delta m = \frac{\Delta x}{E} .} \qquad (10a,b)$$

Für die Empfindlichkeit einer Waage kann aus Gl. (9) abgelesen werden

$$E = \frac{lz}{m_B s - l\beta(2m_o + 2m + \Delta m)} ,$$

wofür wegen $2m_o + 2m \gg \Delta m$ näherungsweise gesetzt werden kann

$$E \approx \frac{lz}{|m_B s - 2l\beta(m_o + m)|} . \qquad (11)$$

(Sowohl durch die Konstruktion der Waage als auch durch die Festlegung einer Höchstbelastung m_{max} für jede Waage wird gesichert, daß stets gilt $m_B s > 2l\beta(m_o + m)$ und damit der Nenner von Gl. (11) niemals gleich Null werden kann.)

Aus Gl. (11) läßt sich ablesen, daß die Empfindlichkeit einer Waage mit der Länge der Waagebalken l und der Zeigerlänge z wächst und mit der Masse des Waagebalkens sowie mit der Entfernung s des Massenmittelpunktes S von der Drehachse A abnimmt; da eine Verlänge-

rung des Waagebalkens aber mit einer Massenzunahme verbunden ist, sind einer beliebigen Erhöhung der Empfindlichkeit konstruktiv Grenzen gesetzt.

Für eine bestimmte Waage sind l, z, m_0 und m_B unveränderliche Größen: die Empfindlichkeit wird nur noch durch m, s und ß beeinflußt. Mit zunehmender Belastung m wird der Waagebalken - wenn auch kaum merklich - unvermeidlich durchgebogen: s vergrößert sich, während ß kleiner wird. Damit verändert sich der Nenner von Gl. (11) nicht monoton. Für eine bestimmte Belastung m_1 erreicht er ein Minimum und die Waage erreicht dort ihr Empfindlichkeitsmaximum. Dieses Maximum legt man üblicherweise an jenen Belastungswert, in dessen näherer Umgebung die Waage hauptsächlich benutzt werden soll: das entspricht etwa 10 % der angegebenen Höchstbelastung. Bei weiter zunehmender Belastung verringert sich dann die Empfindlichkeit der Waage infolge Zunahme des Nenners. Bei einer bestimmten Belastung $m_2 > m_1$ und einer Entfernung $s = s_2$ liegen die Waagschalen-Aufhängungen und der Drehpunkt der Waage auf einer Geraden, und es gilt wegen ß = 0

$$E = \frac{lz}{m_B s_2} .$$

Mit dieser speziellen Form (als Vereinfachung von Gl. (11) wird häufig gearbeitet, wenn die Abhängigkeit der Empfindlichkeit einer Waage von ihrer konstruktiven Auslegung erläutert werden soll.

Die Empfindlichkeitskurve einer Waage wird experimentell bestimmt, indem man bei genügend feiner Stufung der Belastung die Empfindlichkeit gemäß Gl. (10a) aus einer geringen Zusatzmasse Δm und der durch sie verursachten Verschiebung Δx der Gleichgewichtslage berechnet. Ist für eine Waage die Empfindlichkeitskurve bekannt, so kann zu jeder beliebigen (zulässigen) Belastung die Empfindlichkeit daraus abgelesen werden. Mit bekannter Empfindlichkeit aber kann unter Benutzung der Gleichungen (7) und (10b) aus der Verschiebung der Gleichgewichtslage die Differenz aus der Masse des Körpers und der Masse der Wägestücke bestimmt werden:

$$\boxed{m = m' + \Delta m = m' + \frac{\Delta x}{E} .} \qquad (12)$$

Damit bietet sich die Möglichkeit einer relativ schnellen und genauen Massebestimmung ohne Benutzung von Wägestücken sehr geringer Masse.

Beispiel

Der zu wägende Körper liege auf der linken Waagschale, der rechte Waagearm sei mit Wägestücken der Gesamtmasse $m' = 28{,}000$ g belastet. Im unbelasteten Zustand sei die Gleichgewichtslage der Waage mit $x_0 = 2{,}4$ Skt und im belasteten Zustand als $x = -3{,}2$ Skt bestimmt worden. Die Verschiebung der Gleichgewichtslage beträgt nach Gl. (9) $\Delta x = -5{,}6$ Skt. Bei einer Belastung von 28 g entnehme man der Empfindlichkeitskurve eine Empfindlichkeit $E_{28} = 0{,}4$ Skt mg^{-1}. Dann liefert Gl. (10b) $\Delta m = -14$ mg, und die Masse des zu wägenden Körpers ist gemäß Gl. (8) $m = 28{,}000$ g $- 14$ mg $= 27{,}986$ g.

Achtung: Die Verschiebung Δx der Gleichgewichtslage ist stets eine vorzeichenbehaftete Größe! Dabei zählt man die Skalenteile auf der Seite der Waage, die mit Wägestücken belastet ist, als positiv!

Bei der Herleitung der Gl. (3) war vorausgesetzt worden, daß die Hebelarme l_1 und l_2 gleich lang sind. Diese Voraussetzung ist fertigungsbedingt nicht exakt erfüllt. Um diese Differenz zu kompensieren, wendet man bei einer präzisen Wägung geeignete Wägemethoden an:

1. Verfahren der Doppelwägung

Legt man den Körper m zunächst auf die linke Waagschale, so benötigt man zur Herstellung des Gleichgewichtes Wägestücke m_2', die auf die rechte Waagschale aufgelegt werden:

$$m l_1 = m_2' l_2 .$$

Vertauscht man die Seiten, so möge die Gleichgewichtslage durch Auflegen der Wägestücke m_1' auf die linke Waagschale erreicht werden:

$$m l_2 = m_1' l_1 .$$

Dann folgt für die Masse des zu wägenden Körpers

$$m = m_2' \frac{l_2}{l_1} = m_1' \frac{l_1}{l_2} \tag{13}$$

und damit

$$m = \sqrt{m_1' m_2'} \tag{14a}$$

die Masse des zu wägenden Körpers ergibt sich als geometrisches Mittel aus den Massen der Wägestücke für die Wägung auf der linken und auf der rechten Waagschale. Da das Verhältnis l_1/l_2 der Hebelarme

nur geringfügig vom Wert Eins abweicht und also m_1' nahezu mit m_2' übereinstimmt, darf anstelle des geometrischen das arithmetische Mittel gesetzt werden:

$$m = \frac{m_1' + m_2'}{2} . \tag{14b}$$

2. Austauschverfahren nach BORDA

Man bringt die Waage dadurch ins Gleichgewicht, daß man auf die andere Waagschale eine entsprechende Menge eines geeigneten Stoffes (z. B. Glasperlen, feinen Sand o. ä.) auflegt. Ist das Gleichgewicht hergestellt, tauscht man den zu wägenden Körper m gegen so viele Wägestücke der Gesamtmasse m' aus, daß die Waage wieder genau die gleiche Gleichgewichtslage einnimmt. Es gilt unmittelbar $m = m'$, und das Verhältnis der Waagebalkenlängen geht in die Massenbestimmung nicht ein.

3. Luftauftriebs-Korrektur

Bei einer genauen Wägung muß noch berücksichtigt werden, daß der zu wägende Körper und die zu seiner Massebestimmung benötigten Wägestücke i. allg. einen unterschiedlichen Auftrieb erfahren. Mit ϱ_L als Dichte der Luft, ϱ_1 als Dichte des Körpers und ϱ_2 als Dichte der Wägestücke gilt dann im Gleichgewichtsfall allgemein (analog zu Gl. (7))

$$\left(m_o + m - \frac{m}{\varrho_1}\varrho_L\right) gl \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \left(m_o + m' - \frac{m'}{\varrho_2}\varrho_L\right) gl \cos(\alpha + \beta) + m_B g s \sin\alpha \tag{15a}$$

und speziell für $\alpha = 0$ sowie $l_1 = l_2 = l$

$$m(1 - \varrho_L/\varrho_1) = m'(1 - \varrho_L/\varrho_2). \tag{15b}$$

Für die Masse des zu wägenden Körpers gilt dann

$$m = m' \frac{(\varrho_2 - \varrho_L)\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_L)} \tag{16}$$

und wegen $\varrho_L \ll \varrho_1$ und $\varrho_L \ll \varrho_2$ schließlich (in erster Näherung)

$$m = m'(1 + \varrho_L/\varrho_1 - \varrho_L/\varrho_2). \qquad (17)$$

Hinsichtlich der fehlerkritischen Einschätzung des Ergebnisses einer Wägung muß beachtet werden, daß alle Einzelwägestücke im Protokoll notiert werden müssen ("Urliste") und die Verwendung eines einzelnen Wägestückes anstelle mehrerer Wägestücke mit gleicher Gesamtmasse vorteilhafter ist.

So hat z. B. ein Feinwägestück der Masse m' = 20 g eine Garantiefehlergrenze (höchstzulässige Abweichung vom angegebenen Wert) von 0,3 mg; werden diese 20 g aber aus je einem Feinwägestück von 10 g, 5 g, 2 g, 2 g, 1 g zusammengesetzt, so ist der maximale Gesamtfehler 0,91 mg, d. h. mehr als das Dreifache!

Regeln beim Wägen mit der Analysenwaage

1. Erschütterungsfreie Aufstellung der Waage.
2. Berührung während des Wägevorgangs vermeiden!
3. Horizontales Justieren mittels Stellschrauben und Dosenlibelle bzw. Fadenlot.
4. Beim Wägevorgang das Schutzgehäuse vollständig schließen!
5. Nullpunktbestimmung durch vorsichtiges Entarretieren der unbelasteten Waage. Wenn die Waagschalen "taumeln", sofort wieder arretieren.
6. Tabelle anlegen zur Nullpunktbestimmung! (Beispiel Exp. 2.2.3.)
7. Belastung und Entlastung der Waage nur im arretierten Zustand vornehmen!
8. Alle Wägestücke - möglichst auch den zu wägenden Körper - stets mit der Wägepinzette anfassen!
9. Lose Substanzen (Pulver) dürfen niemals auf die Waagschale geschüttet werden. Deren Masse ist durch Differenzwägung (Wägegläschen, Filterpapier) zu bestimmen.
10. Wägestücke i. allg. auf die rechte Waagschale legen und Arretierung vorsichtig - oft gar nicht vollständig - lösen.
11. Zwischenkontrollen des Nullpunktes.
12. Bei Präzisionswägungen ist die Empfindlichkeit der Waage zu beachten sowie eine Doppelwägung und die Auftriebskorrektur durchzuführen.

2.1.5.4. Zum Einsatz elektrischer Meßgeräte

Im physikalischen Praktikum werden hauptsächlich drei Typen von elektrischen Meßgeräten eingesetzt:

1. Drehspulgeräte (Vielfachmesser, Galvanometer).

2. Dreheisengeräte,
3. Elektrodynamische Meßgeräte (Leistungs-, cos φ-Messer).

Die Wirkungsweise von Drehspulgeräten beruht auf der Wechselwirkung zwischen einem stromführenden Leiter und einem konstanten Magnetfeld. Der stromführende Leiter ist eine kleine Rechteckspule mit n Windungen. Das Magnetfeld wird von einem Permanentmagneten erzeugt, dessen Polschuhe zylindrisch ausgefräst sind. Zwischen diesen Polschuhen befindet sich ein koaxialer, ebenfalls zylindrischer Kern aus ferromagnetischem Material, so daß ein ringförmiger Luftspalt entsteht. In diesem Luftspalt kann sich die Spule um die gemeinsame Achse von Spule, Kern und Bohrung drehen. Sie befindet sich in einem magnetischen Radialfeld, die Flußdichte $\underline{B}$ ist radial gerichtet und hat an allen Stellen des Luftspaltes denselben Betrag.

Für die Lagerung der Spule gibt es drei Möglichkeiten:

- Spitzenlagerung. In der Ruhelage wird die Spule durch Spiralfedern gehalten, die gleichzeitig der Stromzuführung dienen.
- Spannbandhalterung,
- Aufhängung an einem Torsionsdraht. Wird die Spule aus ihrer Ruhelage verdreht, tritt durch die Torsion der Spannbänder bzw. des Torsionsdrahtes ein rücktreibendes Drehmoment auf.

In allen drei Fällen ist das rücktreibende Drehmoment M_r dem Drehwinkel α der Spule proportional,

$$\boxed{M_r = -D\alpha \ .} \qquad (1)$$

Fließt durch die Spule der Strom I, wirkt auf jede der beiden im Magnetfeld befindlichen Spulenlängsseiten (Länge l) die Kraft

$$\boxed{F = n\, l\, B\, I.} \qquad (2)$$

Auf die Spule wirkt also bei Stromfluß das antreibende Drehmoment M_{el} ein. Wenn b die Breite der Spule ist, gilt

$$\boxed{M_{el} = 2\, F\, \frac{b}{2} \ .} \qquad (3)$$

n, l, b, B sind durch die Konstruktion des Meßgerätes bestimmt, sie lassen sich zu einer Konstanten G zusammenfassen,

$$M_{el} = G\,I.$$

Das antreibende Drehmoment dreht die Spule, bis M_{el} und $-M_r$ gleich groß geworden sind,

$$M_{el} = -M_r, \qquad G\,I = D\alpha\ ,$$

also

$$\boxed{\alpha = \frac{G\,I}{D}\ .} \tag{4}$$

Die Auslenkung der Drehspule (und damit des Zeigers) ist also dem durch die Drehspule fließenden Strom proportional. $G/D = \alpha/I$ wird als die "Empfindlichkeit" des Gerätes bezeichnet. Die Skale von Drehspulgeräten ist linear geteilt. Da die Richtung von M_{el} von der Stromrichtung abhängt, sind sie nur für Gleichstrommessungen geeignet.

Bei Dreheisengeräten befinden sich im Innern einer Spule zwei konzentrisch zur Spulenachse angeordnete Weicheisenbleche. Das eine ist fest mit der Spule verbunden, das andere um die Spulenachse drehbar gelagert. Bei Stromfluß in der Spule werden beide Bleche gleichsinnig magnetisiert und stoßen sich demzufolge ab. Durch Form und Lagerung der Bleche wird erreicht, daß auf das bewegliche Blech ein Drehmoment um die Spulenachse wirkt. Beim Dreheisen-Meßgerät gilt

$$M_{el} \sim I^2.$$

F 1 Welche Überlegung führt zu dieser Beziehung?
Das bewegliche Blech wird von einer Spiralfeder in seiner Ruhelage gehalten, es wirkt also gemäß Gleichung (1) ein rücktreibendes Drehmoment. Beim Dreheisen-Meßgerät gilt demnach:

$$\alpha = kI^2. \tag{5}$$

Die gleichsinnige Magnetisierung der beiden Bleche ist unabhängig von der Stromrichtung in der Spule, das Dreheisengerät ist also auch für die Messung von Wechselströmen geeignet. Seine Skale ist nach Gleichung (5) quadratisch geteilt. Auf Grund der Trägheit des Zeigers folgt er nicht den zeitlichen Schwankungen von I^2, er stellt sich auf einen Mittelwert ein: Dreheisengeräte zeigen den Effektivwert I_{eff} an.

Sowohl Drehspul- als auch Dreheisenmeßgeräte sind also grundsätzlich Strommeßgeräte. Gemäß dem Ohmschen Gesetz ist der durch das Gerät fließende Strom der an den Klemmen des Gerätes liegenden Spannung proportional,

$$U = R_i I, \tag{6}$$

wobei R_i der Innenwiderstand des Meßgerätes ist. Sowohl Drehspul- als auch Dreheisenmeßgeräte können also als Strom- und als Spannungsmeßgeräte skaliert werden.

Elektrodynamische Meßgeräte

sind im Prinzip wie Drehspulgeräte gebaut, nur wird das Magnetfeld nicht von einem Permanent-, sondern von einem Elektromagneten erzeugt (Abb. 2.1.(2)). Die magnetische Flußdichte B in Gleichung (3)

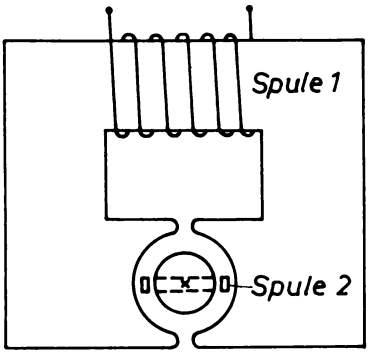


Abb. 2.1.(2) Elektrodynamisches Meßgerät

wird also durch den Strom I_1 in Spule 1 erzeugt, der Strom I in Gleichung (3) ist der Strom I_2 in Spule 2. Für das elektrodynamische Meßwerk gilt also gemäß Gleichung (3)

$$M_{el} = kI_1I_2, \tag{7}$$

es mißt das Produkt der in beiden Spulen fließenden Stromstärken. Da in der Gerätekonstanten k die Permeabilität des Eisenkernes enthalten ist, muß dieser Kern aus solchem Material bestehen und so bemessen sein, daß μ_r möglichst konstant bleibt oder sich wenigstens nur linear mit I_1 ändert.

Liegt an den Eingangsklemmen der beiden Spulen 1 und 2 eine Wechselspannung, so lautet die Gleichung (7)

$$\boxed{M_{el} = kI_1(t)I_2(t).} \tag{8}$$

Das antreibende Drehmoment ist dem Produkt der Momentanwerte der Stromstärken proportional; wegen der Trägheit des Zeigersystems stellt sich dieses auf einen Mittelwert ein. Bei sinusförmigem Wechselstrom erhält man

$$M_{el} = \frac{k}{T}\int_0^T I_{10}\sin\omega t \cdot I_{20}\sin(\omega t + \varphi)dt. \tag{9}$$

I_{10} und I_{20} sind dabei die Maximalwerte der beiden Wechselströme. Setzt man $T = 2\pi/\omega$ und zerlegt nach dem Additionstheorem für Winkelfunktionen $\sin(\omega t + \varphi)$, so entsteht

$$M_{el} = \frac{k}{T} I_{10}I_{20}\cos\varphi\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2\omega t\, dt + \sin\varphi\int_0^{2\pi/\omega} \sin\omega t\cos\omega t\, dt$$

und daraus schließlich

$$M_{el} = \frac{k\pi}{T\omega} I_{10}I_{20}\cos\varphi\ . \tag{10}$$

Schaltet man das Gerät so in einen Stromkreis, daß durch die eine Spule der Strom $I_{10} = I_o$ fließt und durch die andere Spule (über einen großen Vorwiderstand) der Strom $I_{20} = RU_o$, wird aus Gleichung (10)

$$M_{el} = \frac{k\pi R}{T\omega} I_oU_o\cos\varphi \tag{11}$$

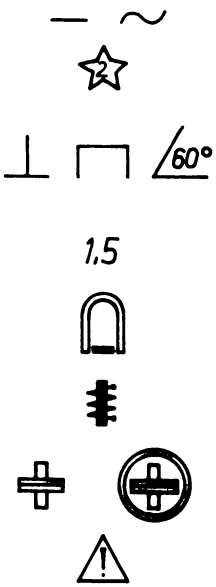
oder, wenn man noch die Effektivwerte $U_{eff} = U_o/\sqrt{2}$ und $I_{eff} = I_o/\sqrt{2}$ einführt und $T = 2\pi/\omega$ einsetzt,

$$\boxed{\begin{aligned} M_{el} &= kRI_{eff}\cos\varphi\ , \\ M_{el} &\sim P_w\ . \end{aligned}} \tag{12}$$

Das antreibende Drehmoment und damit die Auslenkung der Spule 2 mit dem Zeiger ist also der Wirkleistung des Wechselstromes proportional.

Das elektrodynamische Meßwerk kann somit als Wirkleistungsmesser eingesetzt werden.

Jedes elektrische Meßinstrument muß nach TGL 19472, Blatt 2, mit den für seine Benutzung wichtigen Hinweisen beschriftet sein. Diese Kennzeichen sind i. allg. in einer Ecke der Skalenplatte angebracht. Wichtig sind die in Abb. 2.1.(3) erläuterten Symbole.



Gleich-, Wechselstrom

Prüfspannung 2kV

Gebrauchslage senkrecht, waagerecht, schräg

Genauigkeitsklasse. Betrag des maximalen relativen Anzeigefehlers (in %) bei Vollausschlag

Drehspul-Meßwerk

Dreheisen-Meßwerk

Elektrodynamisches Meßwerk (eisenlos, eisengeschlossen)

Achtung, Gebrauchsanweisung beachten!

Abb. 2.1.(3) Symbole für elektrische Meßgeräte (Auswahl)

Hinweise für die Arbeit mit elektrischen Meßgeräten

1. Schaltung der Geräte

Beim Aufbau von Stromkreisen gemäß Schaltbild sollte man sich davor hüten, an einem Punkt des Schaltbildes zu beginnen und dann Leitung für Leitung zu ziehen. Man beginnt an der Spannungsquelle und baut Stromkreis für Stromkreis auf, die Meßgeräte werden zum Schluß eingesetzt. Vor allem sollte man vermeiden, die Anschlußklemmen von Meß-

geräten als Träger von Verzweigungspunkten zu benutzen, da dadurch eine Schaltung unübersichtlich wird.

Ein Strommesser (Amperemeter) soll die Stromstärke in einem bestimmten Zweig eines Stromkreises messen. Dazu unterbricht man diesen Stromkreis an einer geeigneten Stelle und schließt ihn wieder durch den Einbau des Strommessers.

Mit einem Spannungsmesser (Voltmeter) werden Spannungen gemessen. Da längs eines Leiters eine Potentialdifferenz auftritt, wird der Spannungsmesser verschiedene Spannungen anzeigen, wenn er an verschiedene Punkte des Stromkreises angeschlossen wird. Die Anzeige des Spannungsmessers ist abhängig von der Potentialdifferenz $U = R\,I$ zwischen den beiden Anschlußpunkten.

Man baut also zunächst die Schaltung fertig auf und schließt dann die Spannungsmesser an den zwei Punkten an, zwischen denen man die Spannung messen will. Meist sind das die Anschlußklemmen der Spannungsquelle, der Ausgang eines Potentiometers oder Ein- bzw. Ausgang eines Verbrauchers.

Sehr häufig werden Meßinstrumente für Spannung und Stromstärke gleichzeitig gebraucht, z. B. um den Widerstand R eines Verbrauchers zu bestimmen. Dann sind zwei Schaltungen möglich:

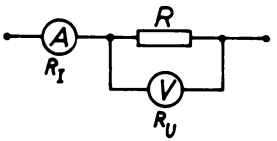


Abb. 2.1.(4) Spannungsrichtige Schaltung

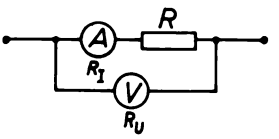


Abb. 2.1.(5) Stromrichtige Schaltung

Beim Anschluß der Meßgeräte gemäß Abb. 2.1.(4) zeigt der Spannungsmesser die gesuchte Spannung an den Enden des Verbrauchers an, der Strommesser gibt das gegen eine zu große Stromstärke (I_R durch den

Verbraucher und I_V durch das Voltmeter) an. Man bezeichnet diese Schaltung daher als spannungsrichtige oder Stromfehlerschaltung.

Die Schaltung der Meßgeräte gemäß Abb. 2.1.(5) wird dagegen als stromrichtige oder Spannungsfehlerschaltung bezeichnet, da der Strommesser den tatsächlich durch R fließenden Strom, der Spannungsmesser dagegen die am Verbraucher und Strommesser abfallende Spannung anzeigt.

F 2: Wie lassen sich in beiden Fällen trotz der Fehlanzeige eines Gerätes die wahren Werte von I, U und R ermitteln?

Im allgemeinen läßt sich die in der Antwort F 2 angegebene Rechnung vermeiden, wenn man die den realen Umständen angepaßte Schaltung verwendet. Da ein Meßgerät den Meßwert möglichst nicht verändern soll, sind gute Spannungsmesser so konstruiert, daß sie einen hohen Innenwiderstand haben, gute Strommesser haben dagegen einen kleinen Innenwiderstand. Bei den üblichen Vielfachmessern beträgt der Widerstand des Spannungsmessers mehrere $k\Omega$, der Widerstand des Strommessers dagegen liegt bei und weit unter 1Ω.

Man verwendet also die stromrichtige Schaltung bei einem sehr großen Verbraucherwiderstand R, die spannungsrichtige Schaltung bei einem kleinen Verbraucherwiderstand R. Dann ist die Spannung am Strommesser bzw. der Strom durch den Spannungsmesser zu vernachlässigen.

2. Erweiterung des Meßbereiches

Bei einem Strommesser mit dem Meßwerkwiderstand R_I werde der Zeiger beim Strom I_0 bis zum Ende der Skale ausgelenkt. Soll mit diesem Gerät ein Strom $I > I_0$ gemessen werden, muß der Strom I so geteilt werden, daß durch das Meßwerk der Teilstrom I_0 fließt; der Reststrom $I - I_0$ fließt durch einen Widerstand R_p (Parallelwiderstand, Shunt), also nicht über das Meßwerk (Abb. 2.1.(6)). Gemäß den Gesetzen der

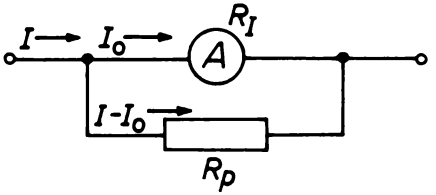


Abb. 2.1.(6) Meßbereichserweiterung beim Strommesser

Stromverzweigung gilt

$$R_p = \frac{I_o}{I - I_o} R_I. \qquad (13)$$

Der Gesamtwiderstand des Strommessers wird durch Meßbereichserweiterung kleiner.

Bei einem Spannungsmesser, mit dem eine Spannung $U > U_o$ gemessen werden soll, darf am Meßwerk selbst nur die Spannung U_o anliegen, die Spannung $U - U_o$ muß an einem Vorwiderstand R_v anliegen (Abb. 2.1.(7)). Wegen $I = (U - U_o)/R_v = U_o/R_U$ gilt

$$R_v = \frac{U - U_o}{U_o} R_U. \qquad (14)$$

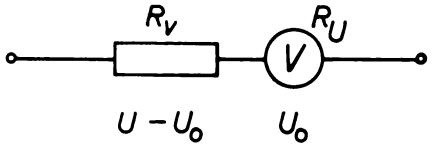


Abb. 2.1.(7) Meßbereichserweiterung beim Spannungsmesser

Der Gesamtwiderstand eines Spannungsmessers wächst also bei der Meßbereichserweiterung.

Man wählt zweckmäßig R_p bzw. R_v so groß, daß man die Anzeige des Gerätes mit erweitertem Meßbereich ohne umständlichen Rechenaufwand ablesen kann. Ist das in Ausnahmefällen nicht möglich, notiert man die Geräteanzeige in "Skalenteilen" (Skt) und rechnet nachträglich in Strom- bzw. Spannungswerte um, indem man Gleichung (13) bzw. (14) nach I bzw. U auflöst. I_o bzw. U_o sind dann die Werte, die der Zeigerauslenkung beim nicht erweiterten Gerät entsprechen.

Regeln beim Umgang mit elektrischen Meßgeräten

1. Schaltbild anfertigen.
2. Festlegung der Stromart (Gleich- oder Wechselstrom).
3. Abschätzung der zu erwartenden Spannungs- und Stromwerte.

4. Meßinstrumente auswählen.
5. Spannung erst einschalten, wenn die Schaltung fertiggestellt ist.
6. Schaltung nicht mehr berühren.
7. Bei Änderung an der Schaltung stets Spannung abschalten.
8. Bei Verwendung von Vielfachmessern zunächst größten Meßbereich einschalten und erst dann auf kleinere herunterschalten.

2.1.5.5. Verarbeitung fotografischen Materials

Bei experimentellen Arbeiten werden häufig fotografische Techniken angewendet. So werden z. B. bei verschiedenen Experimenten Meßergebnisse fotografisch registriert. Deshalb sollen hier einige Hinweise für den Umgang mit fotografischem Material gegeben werden.

1. Einlegen des Filmes in die Patrone

Im Praktikum wird Kleinbildfilm vorwiegend als "Meterware" - Filmstreifen von 5 m und 17 m Länge, verpackt in Blechdosen - verwendet. Der für ein Experiment erforderliche Film muß zunächst in eine Patrone umgepackt werden, die dann in den Fotoapparat eingesetzt wird.

Bei völliger Dunkelheit wird von der Filmrolle ein Stück Film in erforderlicher Länge abgeschnitten. Der restliche Film wird sofort wieder in das Schutzpapier eingepackt, in die Dose zurückgelegt, die fest verschlossen wird. Die lichtempfindliche Schicht liegt auf der Innenseite des gewölbten Filmes, sie darf nicht berührt werden, der Film wird nur am Rande angefaßt. Kassette und Filmspule legt man sich so zurecht, daß Kassettenöffnung und Dorn der Spule zum Körper zeigen. An das eine Ende des vorbereiteten Filmstückes schneidet man eine Spitze. Diese Spitze wird unter die Feder in der Mitte der Filmspule geklemmt, dazu muß die lichtempfindliche Schicht unten liegen und die Spitze nach links zeigen. Der Film wird im Sinne seiner Wölbung auf die Spule gewickelt und diese so in die Patrone geschoben, daß etwa 3 cm Film aus dem Patronenschlitz herausragen. Die Patrone wird wieder mit ihrem Deckel verschlossen. Der Film ist richtig eingelegt, wenn Patronendeckel und Dorn der Filmspule zum Körper zeigen und der oben liegende Filmaustrittsschlitz nach rechts zeigt. Erst wenn Patrone und Filmdose wieder fest verschlossen sind, darf Licht eingeschaltet werden. Es empfiehlt sich, das Filmeinlegen erst mit einem Stück belichteten Filmes bei Raumbeleuchtung zu üben.

2. Entwickeln des Filmes

Filme und Filmabschnitte werden grundsätzlich in der Entwicklungsdose entwickelt. In die Dose wird soviel Entwickler-Lösung (etwa 400 bis 500 ml) gefüllt, daß der Doseneinsatz mit dem Film sicher bedeckt wird. Der Film wird in vollkommener Dunkelheit auf den Doseneinsatz aufgespult. Je nach Bauart der Dose wird der Film dazu an einem Dorn an der Spulenachse befestigt und in die Spiralführung eingelegt (nicht für einzelne kurze Filmabschnitte geeignet!) oder zusammen mit einem Plastband, das am Rande Abstandsnoppen enthält, um den Kern der Einsatzspule gewickelt. Spiralführung bzw. Abstandsnoppen verhindern, daß die einzelnen Filmwindungen zusammenkleben. Der Einsatz wird in die Dose eingelegt und mehrfach auf- und abbewegt, damit Luftblasen am Film entfernt werden. Nachdem der Dosendeckel aufgesetzt und durch Rechtsdrehung verriegelt ist, kann bei voller Raumbeleuchtung weitergearbeitet werden. Die geschlossene

Dose ist lichtdicht.
Es gelten folgende Entwicklungszeiten

Film	Entwickler		Zeit
NP 15, NP 20	A 49, F 43		8...10 min
NP 27	A 49, F 43		12...14 min
DK 5	MH 28, 1:4	verdünnt	4 min
NP 15, NP 20	R 09, 1:40	verdünnt	8...10 min
Vergrößerungspapiere	MH 28, 1:2	verdünnt	2 min

Die Temperatur der Lösung muß zwischen 18 °C und 20 °C liegen. Nach Ablauf der Entwicklungszeit wird die Lösung aus der geschlossenen Dose in eine Vorratsflasche gegossen. Der Entwickler kann nämlich - außer R 09 in Verdünnung 1:40 - weiterverwendet werden. Die Dose wird mit Wasser gefüllt, dem unter Umständen etwas Essigessenz zugesetzt ist und sofort wieder geleert. Der Deckel der Dose ist in der Mitte trichterförmig geformt, die Flüssigkeiten können also bei geschlossenem Dosendeckel eingefüllt werden.

Nach der "Zwischenwässerung" werden in die Dose 400 ml bis 500 ml Fixierbad eingefüllt, dieses Bad muß 10 min bis 15 min auf den Film einwirken.

Damit der Film immer wieder mit frischer Lösung (Entwickler und Fixierbad) in Berührung kommt, muß der Doseneinsatz während des Entwickelns und des Fixierens bewegt werden. Dazu ist die Achse des Doseneinsatzes so lang, daß sie aus der Dose herausragt. Mit diesem Griff wird der Einsatz alle 30 s kräftig hin- und hergedreht.

Das Fixierbad wird in die Vorratsflasche zurückgegossen, es kann mehrfach verwendet werden. Nach dem Fixieren ist der Film lichtbeständig, die Dose kann geöffnet werden, eine erste Kontrolle der Brauchbarkeit des Filmes ist möglich. Der Film bleibt jedoch im Einsatz aufgespult, er wird noch 20 min unter fließendem Wasser gewässert, damit alle Fixierbadreste aus der Schicht ausgewaschen werden. Dem letzten Wasser wird ein Netzmittel (ORWO F 905 oder Fit flüssig) zugesetzt, damit der Film nach dem Trocknen keine Wasserflecken behält.

Zum Trocknen wird der Film mit Filmklammern an einem staubfreien Ort aufgehängt. Wenn keine Ansprüche an die Dauerhaftigkeit des Filmes gestellt werden, kann die Trocknung wesentlich beschleunigt werden, wenn der Film nach dem Wässern etwa 30 s lang in Spiritus gebadet wird. Die Qualität des Filmes wird dadurch allerdings etwas verschlechtert.

Der Film ist während der ganzen Behandlung nur am Rande anzufassen, die Schicht sollte unter keinen Umständen mit den Fingern berührt werden.

Besonderer Hinweis:
Bei allen Arbeiten in der Dunkelkammer ist äußerste Sauberkeit zu beachten. Jede, auch die geringste Verunreinigung des Entwicklers mit Fixierbad oder Fixiersalz macht ihn sofort unbrauchbar. Auch das Fixierbad wird verdorben, wenn es mit Entwicklerlösung vermischt wird.

3. Herstellen von Vergrößerungen

Erforderlich: Vergrößerungsgerät mit Belichtungs-Schaltuhr und Papierkassette, je eine Schale mit Entwickler, Unterbrecherbad (Wasser mit Essigzusatz) und Fixierbad; Becken zum Wässern.

Es kann bei Beleuchtung gearbeitet werden (15 W-Lampe, Grün- oder Orangefilter, Abstand mindestens 1 m vom lichtempfindlichen Material).

Der Film wird mit der Schicht nach unten in die Filmbühne des Vergrößerungsgerätes eingelegt. Das Bild wird auf der Vergrößerungskassette aufgefangen und bei geöffneter Blende der Abbildungsoptik scharf eingestellt. Mit zwei verschiebbaren Blechstreifen am Kassettendeckel kann das gewünschte Bildformat eingestellt werden.

Die richtige Belichtungszeit wird mit einer Probebelichtung ermittelt. Man legt ein Blatt Papier in die Kassette und deckt es bis auf einen etwa 2 cm breiten Streifen lichtdicht ab. Dieser Streifen wird 2 s lang belichtet, die Abdeckung um etwa 2 cm verschoben, wieder 2 s belichtet und so fort. Man erhält ein streifenweise mit 2 s, 4 s, 6 s, ... belichtetes Blatt und kann nach dem Entwickeln die richtige Belichtungszeit auszählen.

Das belichtete Papier wird in den Entwickler eingelegt, es dürfen keine Luftblasen am Papier haften, und es muß vollständig von der Flüssigkeit bedeckt sein. Nach etwa 1 min muß das Bild bereits zu sehen sein, nach 2 min ist die Entwicklung abgeschlossen. Längeres "Quälen" des Papiers im Entwickler macht das Papier fleckig.

Aus dem Entwickler kommt das Papier in das Unterbrecherbad, durch den Essigzusatz wird der basische Entwickler sofort unschädlich gemacht. Nach etwa 10 min Fixierzeit und 20 min Wässern unter fließendem Wasser ist das Positiv fertig. Zum Trocknen legt man das tropfnasse Papier mit der Schicht nach oben (gegen das Spanntuch) in die Trockenpresse.

Damit man nicht dauernd in die Bäder fassen muß, arbeitet man mit Papierklammern (Zangen aus Plaste). Für jedes Bad verwendet man eine besondere Zange, damit die Bäder nicht untereinander verunreinigt werden.

2.1.5.6. Einfache Löttechnik

Unter Löten versteht man die Herstellung einer Verbindung zweier Metallteile durch leicht schmelzbare Legierungen (Lote), deren Schmelzpunkte unter denen der zu verbindenden Metallteile liegen.

Arbeitsschutz

1. Nur Schukodosen für den elektrischen Anschluß verwenden.
2. Lötkolbenständer zum sicheren Ablegen des Kolbens benutzen.
3. Einatmen der Dämpfe vermeiden.
4. Überschüssiges Zinn mit Lappen abstreichen.

Hinweise zum Zubehör

1. Die Cu-Spitze des Lötkolbens muß verzinnt sein. Gegebenenfalls muß die Spitze im warmen Zustand mit einer Feile von einer Zunderschicht befreit und sodann neu verzinnt werden. Eine Zunderschicht bildet sich, wenn der erhitzte Kolben längere Zeit dem Luftsauerstoff ausgesetzt ist. Zum Verzinnen taucht man die gesäuberte und erwärmte Spitze in das Flußmittel und bringt sie sodann in Kontakt mit dem Weichlot, das die Spitze überzieht.
2. Das Weichlot steht in Stangen oder Drahtform zur Verfügung.

3. Ein Flußmittel löst die dünne Oxidschicht auf Metallen und schützt die Lötstelle vor Oxydation. Es werden nur solche Flußmittel verwendet, die keine Korrosion hervorrufen. Es wird Kolophonium empfohlen; Lötfett sollte nicht verwendet werden. Insbesondere kommen ätzende Flußmittel nicht in Frage (Lötwasser), da sie elektrische Eigenschaften der Lötstellen beeinträchtigen. Spritzer können Isoliermaterialien beeinflussen und Kriechströme hervorrufen.

Hinweise zum Lötvorgang

1. Man bringt die zu verbindenden (gesäuberten, entfetteten) oxidfreien Oberflächen aneinander (Pinzette!).
2. Der Lötkolben wird kurz in Kolophonium getaucht und damit das Flußmittel an die Lötstelle herangebracht.
3. Die Lötstelle wird mit dem Lötkolben, an dessen Spitze sich Lötzinn befindet, ein bis zwei Sekunden berührt; oder: Nach Erwärmen der Verbindungsstelle bringt man Lötzinn (Drahtstück) an die Kolbenspitze.
4. Die Verbindungsstelle ist bis zum Erstarren des Lotes unbeweglich (fixiert) zu halten.
5. Bei mißlungenen oder zweifelhaften Lötstellen ist der Lötvorgang (nach Trennung der Verbindung) zu wiederholen.
6. Bei Isolierdrähten entfernt man die Isolierhülle entweder mit Hilfe eines Messers, einer Zange oder mit Hilfe einer erwärmten kerbartigen Vorrichtung am Lötkolben (thermisches Abisolieren). Isolierlacke werden abgekratzt.
7. Bei sehr wärmeempfindlichen Halbleiterbauelementen sollten die vorgesehenen Anschlußdrähte (Lötfahnen) nicht verkürzt werden. Damit diese Elemente beim Lötvorgang nicht einer zu starken Wärmebelastung ausgesetzt sind, hält man sie zwecks Wärmeableitung am Draht mit einer Flachzange.

Kennzeichen einer einwandfreien Lötstelle

1. Das Lot ist fest mit den zu verlötenden Teilen verbunden.
2. Glatte und glänzende Oberflächen.
3. Die Oberfläche weist keine Löcher (Grieß) auf.

Ursachen fehlerhafter Lötstellen

Sogenannte "Kaltlötstellen" mit stumpfgrauer Oberfläche entstehen durch
1. unsaubere Oberflächen,
2. nicht ausreichende Flußmittelmenge,
3. unzulässig hohe Erwärmung,
4. nicht ausreichende Erwärmung,
5. Bewegen der Teile während des Erstarrens des Lötzinns.

2.1.5.7. Einfache Glasarbeiten

Reinigen von Glasrohren

1. In das Rohr hauchen und mittels eines Fadens ein Leinentuch hin-

durchziehen.

2. Spülen mit Wasser, evtl. unter Verwendung einer Flaschenbürste.
3. Nachspülen mit (bi)destilliertem Wasser.
4. Verwendung von Säuren oder Laugen.
   Am wirksamsten: Chromschwefelsäure. Bei Kapillaren saugt man diese Säure mit Hilfe einer Wasserstrahlpumpe hindurch, wobei das offene Ende mit Filterpapier abgedeckt wird. In allen Fällen wird mit (bi)destilliertem Wasser nachgespült.
5. Glasfilter werden gereinigt, indem man mehrmals heiße Salzsäure hindurchgießt und danach destilliertes Wasser mit Hilfe einer Vakuumpumpe hindurchsaugt.
6. Fette entfernt man mittels Kohlenstofftetrachlorid.

Schneiden und Abtrennen von Glasrohren und Glasstäben

1. Anritzen mit dem Glasmesser: Das Rohr wird unter mäßigem Druck angeschnitten (nicht gesägt). Das Glasmesser muß eine rauhe Schärfe besitzen, damit die Glasoberfläche auch tatsächlich geritzt wird. Ein Benetzen der Schneidstelle mit Wasser kann den Ritzvorgang fördern.
2. Man zieht und biegt zugleich das Rohr (oder den Stab) entgegengesetzt zu dem Einschnitt, wobei die Daumen auf der Seite der geritzten Markierung liegen. Bei kurzen Rohren hingegen befinden sich die Daumen unterhalb der Ritzstelle; man zieht in diesem Fall unter gleichzeitigem Drücken in Richtung der Daumen.
3. Man kann auch eine erweichte (erhitzte) Spitze eines Glasstabes auf die angeschnittene Stelle aufsetzen und dann unter leichtem ziehendem Biegedruck das Rohr trennen. Der heiße Glastropfen darf nicht zu groß sein.
4. Rohre größeren Durchmessers trennt man in der Weise, daß man einen erhitzten (schwach glühenden) halbkreisförmig gebogenen stabilen Metalldraht an das Rohr legt! Bei Hartglas legt man den Ring zuerst auf die Ritzstelle, bei Normalglas setzt man den Sprengring zunächst entgegengesetzt zur Ritzstelle auf und bewegt ihn auf der gewünschten Trennlinie. Anstelle dieses Sprengringes kann man auch einen elektrisch geheizten Widerstandsdraht verwenden.

Erwärmen und Abkühlen des Glases

1. In allen Fällen vorsichtig und langsam erwärmen.
2. Das erwärmte Glasstück stets drehen.
3. Der Flamme wird allmählich Luft (bzw. Sauerstoff) durch ein Gebläse hinzugegeben.
4. Das Abkühlen des Glases hat noch vorsichtiger als das Erwärmen zu erfolgen, um Spannungen zu verhindern. Zugluft muß vermieden werden.
5. Man geht z. B. langsam von einer scharfen Schmelzflamme zu einer lockeren Brauseflamme und dann zur einfachen Gasflamme (ohne Luftzufuhr) über. Zeigt sich eine Rußschicht auf dem Glas, so erweist sich dieser Umstand für eine langsame Abkühlung günstig.

Abrunden scharfer Glaskanten

1. Man hält das Ende des abgeschmolzenen Glasrohres vorsichtig und (nur ein wenig) in die spitze Stichflamme und dreht es langsam, bis die Kanten rund geschmolzen sind.
2. Das Glas darf nicht zu heiß werden, da sich sonst das Rohr verengen würde.

Bördeln der Rohrenden; Auslauftülle

1. Zum Einsetzen eines Stopfens ist eine leicht trichterförmige Öffnung des Glasrohres zweckmäßig. Man erhitzt das Ende des Glasrohres bis zu einem gewissen Erweichungsgrad. Dann führt man ein erhitztes kegelförmiges Kohlestück oder ein erhitztes dreieck- oder trapezförmiges Messingblech als Auftreiber in das erweichte Glas ein.
2. Den Auftreiber dreht man hin und her, wobei man den gewünschten Aufweitungswinkel vorgeben kann.
3. Diesen Vorgang der Rohrerweiterung kann man nicht in einem einzigen Arbeitsgang erledigen. Man muß das Rohr mehrere Male erhitzen und den Auftreiber einführen.
4. Nach dem letzten Arbeitsgang erhitzt man das Rohr noch einmal und sorgt für langsames Abkühlen.
5. Eine Auslauftülle am aufgebördelten Rohrende erleichtert das Ausgießen von Flüssigkeiten. Zu diesem Zweck erwärmt man eine Stelle der Rohrerweiterung gesondert und drückt dort die Kante

des Auftreibers hinein. Die äußeren seitlichen Teile dieser Tülle können mit dem Auftreiber nachgeformt werden.

Ausziehen von Spitzen (Düsen)

Für viele Glasarbeiten ist es wichtig, ein zu bearbeitendes Rohr beidseitig zunächst mit Spitzen zu versehen; dadurch ergibt sich u. a. eine bessere Handhabung. In einfachen Fällen kann man auf das Ansetzen von Spitzen bei Glasrohren bis zu einem Zentimeter Durchmesser verzichten.

1. Methode

1. Man erhitzt ein Glasrohr ca. 5 cm vor seinem Ende in einer Stichflamme - unter ständigem Drehen.
2. Hat sich an der auszuziehenden (erweichten) Stelle etwas Glas angesammelt, so nimmt man das Rohr aus der Flamme und zieht es - unter ständigem Drehen - auseinander. Hierbei verengt sich der heißeste Teil des Rohres am meisten.
3. Das Rohr wird auf eine solche Länge ausgezogen, bis die Düse den gewünschten Durchmesser hat; die Wandstärke sollte dabei gleich bleiben.
4. Nach Abkühlung schneidet man das Rohr an der Stelle des gewünschten Durchmessers durch und rundet die Ränder in der Flamme.
5. Auf analoge Weise kann man auch Glasstäbchen ausziehen (verjüngen; diese dünnen Stäbchen benötigt man z. B. beim Absprengen von Röhren).

2. Methode

1. Man erhitzt ein Rohr an seinem Ende und schiebt das Glas an drei Stellen zur Mitte. Damit verbindet man einen ebenfalls erhitzten Glasstab.
2. Das Glasrohr erhitzt man in einem gewissen Längenintervall vom Ende aus - unter gleichmäßiger Drehbewegung.
3. Bei hinreichender Erweichung zieht man mit dem angehefteten Glasstab das genügend erweichte Rohr - außerhalb der Flamme - zur Spitze aus.
4. Man bringt die Spitze wieder in die Flamme und kühlt langsam ab.
5. Der Glasstab wird durch einen leichten Schlag (Holz) abgetrennt. Das Ende der Spitze wird verschmolzen.

Schließen eines Rohrendes

Die abschließende Kuppe soll - z. B. bei einem Barometerrohr - von gleichmäßiger Wandstärke sein.

1. Man bringt das Rohr in die Gebläseflamme und erhitzt - unter ständigem Drehen - eine Stelle, bis sich dort erweichtes Glas ansammelt.
2. Sodann zieht man das Rohr - ständig drehend - auseinander und erhitzt mit einer spitzen Stichflamme die taillenartige Einschnürung, so daß man es auseinandertrennt.
3. Der dabei entstehende Glasfaden wird abgeschmolzen (Behälter).
4. Am zugeschmolzenen Glasrohr befindet sich nun i. allg. ein Glastropfen (mit Spitze). Diesen erweichten Glastropfen berührt man nun mit einem kalten Glasstäbchen und zieht ihn kurz aus; der entstehende Faden wird abgeschmolzen.
5. Den mitunter noch spitzen und ungleich dicken Rohrendenabschluß erhitzt man und bläst ihn leicht auf. Hierbei wird das Glasstück wie üblich ständig gedreht und - wenn erforderlich - wiederholt in das Rohr geblasen, bis sich schließlich am Rohrende eine gleichmäßige Wandstärke ergibt.
6. Wird ein flacher Boden als Rohrabschluß gewünscht, so nimmt man das erhitzte Rohr aus der Flamme und drückt es auf ein ebenes Eisen - oder Messingblech. Man kann auch mit Hilfe eines Auftreibers glätten.

Einengen von Glasrohren

1. Methode

1. Man erhitzt das Rohr an der gewünschten Stelle - unter ständigem Drehen.
2. Bei hinreichender Erweichung drängt man das Rohr langsam und stetig zusammen, so daß sich viel Glas ansammelt. Hierbei soll der äußere Durchmesser konstant bleiben, während sich die lichte Weite verringert.
3. Abkühlung unter ständigem Drehen.

2. Methode

1. Das Rohr wird an der zu verengenden Stelle erhitzt, wobei es ständig gedreht wird.

2. Man zieht das Rohr etwas auseinander, wobei eine taillenartige Verjüngung entsteht.
3. Nochmals erhitzen und langsam abkühlen lassen.

3. Methode

1. Man bringt die zu verengende Stelle auf den erforderlichen Weichheitsgrad.
2. Beidhändig drehend, drückt man die weiche Stelle gegen den bereitgestellten Einenger, bis die gewünschte Einschnürung erreicht ist. Ein Einenger ist ein Ausschnitt in einer Metallscheibe. Eine solche Scheibe enthält mehrere Einkerbungen.

Biegen von Glasrohren (Winkelrohre)

1. Die vorgesehene Biegezone wird erhitzt, so daß sich eine kleine Glasansammlung (Verdickung) zeigt. Beide Ellenbogen sind auf den Tisch gestützt; das Rohr wird von oben gefaßt.
2. Bei hinreichender Erweichung nimmt man das Glas aus der Flamme und biegt es bis zum gewünschten Winkel - unter ständigem Drehen.
3. Man muß ein Auseinanderziehen und Verdrillen tunlichst vermeiden. Der heißere Teil befindet sich beim Biegen in der konkaven Rundung.
4. Knicke beim abgewinkelten Rohr (als Folge zu schwacher Erwärmung oder zu scharfen Abwinkelns) beseitigt man mit einer kleinen Flamme; man bläst zugleich in das eine Rohrende hinein, wobei das andere durch einen Stopfen oder Finger verschlossen ist.
5. Vor dem gleichmäßigen Abkühlen wird das gesamte Winkelrohr nochmals erwärmt. (Eine scharfe Abwinkelung stellt man her, indem man zwei einzelne Glasrohre im gewünschten Winkel zusammensetzt).

Zusammensetzen von Glasrohren

Enge Rohre gleichen Durchmessers. Beispiel: Ansetzen von Zwei- oder Dreiweghähnen.

1. Nach dem Erhitzen treibt man beide zu verbindenden Rohrenden ein wenig auf (s. o. Auftreiber).
2. Man verschließt das eine Rohrende mit einem Stopfen bzw. mit einem Schlauchstück und Klemme.

3. Es werden beide etwas aufgetriebenen Öffnungen erhitzt und - ohne Aufstauchen - miteinander verschmolzen. Hierbei bläst man die Verschmelzungsstelle - stets außerhalb der Flamme - etwas auf und streckt das Rohr ein wenig. Beim Arbeiten wird das Rohr ständig gedreht.

Rohre verschiedenen Durchmessers

Man benötigt sie beispielsweise als Übergangsstücke (Reduzierstücke) für Schläuche verschiedenen Durchmessers.

1. Man erhitzt das engere Rohr am Ende und bringt es mit einem Auftreiber auf den Durchmesser des weiteren Rohres.
2. Unter ständigem Drehen erwärmt man nun beide zusammenzusetzenden Rohrenden und verfährt wie beim "Zusammensetzen von Rohren gleichen Durchmessers" (s. o.).
3. Das Verblasen der Schmelzstelle kann durch mehrfaches Wiederholen verbessert werden.
4. Bei einiger Übung gelingt es auch, das Ende des weiteren Rohres durch Erhitzen auf einen kleineren Durchmesser zu bringen, indem man es gegebenenfalls auszieht (s. o. Ausziehen von Spitzen).

Schlauchverbindungen (Oliven)

1. Methode: Gleiche Olivendurchmesser an beiden Rohrenden

Bei Druck-, Vakuum- und Hg-Leitungen sind Oliven unbedingt erforderlich, die ein Abziehen des Schlauches verhindern sollen; zusätzlich kann man den Schlauch bei Oliven mit Hilfe von Draht oder Schellen absichern.

1. Man versieht das betreffende Rohrstück mit Spitzen (s. o.).
2. In ein bis zwei Zentimeter Entfernung stellt man die erste Einengung her (Einenger s. o.).
3. Nach Abkühlen wiederholt man die Herstellung dieser Einengungen in den gewünschten Abständen - je nachdem, wie viele Oliven gewünscht werden.
4. Diese Arbeitsgänge wiederholt man am anderen Rohrende, so daß zwischen den Oliven noch ein glattes Rohrstück verbleibt.
5. Man trennt die Spitzen ab und verschmilzt die Kanten.

2. Methode: Oliven an verjüngten Rohrstücken (Übergänge)

1. Man versieht das vorgesehene Rohrstück mit Spitzen (s. o.).

2. Das Rohr wird erwärmt und durch Ausziehen einseitig (oder auch beidseitig) verjüngt.
3. Man stellt durch mehrfache Einengungen eine Anzahl von Oliven her (vorstehend beschrieben).
4. Die Spitzen werden schließlich - wie oben angegeben - abgetrennt und die scharfen Kanten verschmolzen.

T- und Y-Stücke

1. Man schneidet zwei Rohrstücke der gewünschten Länge und rundet die Kanten in der Flamme ab.
2. Jedes Rohrstück wird an einem Ende durch einen Stopfen abgeschlossen.
3. Das Rohr erhitzt man - drehend - in seiner Mitte und richtet eine kleine Stichflamme gegen das (ruhende) Rohr, bis es an einer kleinen Stelle hinreichend weich ist.
4. Außerhalb der Flamme bläst man in das Rohr, bis sich eine Wölbung in der Mitte zeigt.
5. Man erhitzt diesen Buckel scharf mit einer Stichflamme und bläst - stets außerhalb der Flamme - kurz und kräftig hinein, so daß die entstehende Glasblase aufplatzt.
6. Die dünnwandigen Glasreste streicht man mit dem Glasmesser ab (Behälter für Glasreste) und schmilzt die Ränder des entstandenen Loches rund.
7. Diese hergestellte Öffnung wird zugleich mit dem Ende des zweiten Rohrstückes erhitzt. Beide Teile werden durch sanften Druck aneinandergefügt.
8. Man dreht das gesamte T-Stück in der Flamme, bis die Rohre gut verschmolzen sind. Sodann nimmt man es aus der Flamme und bläst es vorsichtig auf. Dabei stellt man das Ansatzstück senkrecht zum anderen Rohr.
9. Ein Y-Stück wird in analoger Weise hergestellt. Zu diesem Zweck biegt man ein Rohrstück V-förmig und schafft an der äußeren Biegestelle die Öffnung (s. o.) für den Ansatz des zweiten Rohres.
10. Selbstverständlich können die drei Enden eines T- oder Y-Stückes auch mit Oliven (s. o.) versehen werden.

Ineinanderschmelzen von zwei Röhren

1. Man erhitzt das engere Rohr an der Stelle, wo es mit dem weiteren

verblasen werden soll. Zu diesem Zweck bläst man das engere dort etwas auf (wulst- oder buckelförmig).

2. Das weitere Rohr wird an der Verschmelzungsstelle verengt, so daß das engere Rohr gut hindurchpaßt. Dazu ist zuvor das weitere Rohr halbkugelförmig zu verblasen; danach wird die Halbkugel aufgeblasen und die entsprechende Öffnung geschaffen. Die dünnen Teile der Glasblase wirft man in den Abfallbehälter.
3. Wenn das engere Rohr nicht aus dem weiteren herausragen, also kürzer sein soll, klemmt man es im Inneren des weiten Rohres mit Hilfe von Asbestpappe fest. Diese Klemmvorrichtung zieht man mit einem an dem Asbest befestigten Draht nach Abschluß der Arbeit heraus.
4. Mit Hilfe einer nicht zu großen Stichflamme verschmilzt man die Verbindungsstelle beider Rohre. Dabei richtet man das engere Rohr aus.

U-Rohr mit seitlichen Ansätzen

Diese U-Rohre werden z. B. für die Aufnahme von Substanzen bei der Gastrocknung benötigt. Die engeren seitlichen Ansätze kann man notfalls auch durch Glasrohre ersetzen, die durch Stopfen in die Öffnungen des U-Rohres eingeführt werden.

Arbeitsgang

1. Gerades Rohr, das U-förmig gebogen werden soll, beiderseitig mit Spitzen versehen. (In einfachen Fällen kann man anstelle der Spitzen auch dünne Glasrohre wählen, die durch Stopfen zu beiden Seiten in das Rohr eingeführt werden.)
2. Loch ausblasen für das erste seitliche Ansatzstück.
3. Enges Rohr mit diesem seitlichen Loch (2.) verbinden.
4. Spitze bei diesem Ansatz abziehen, Loch ausblasen, Glaskugel abstreifen, Randaufbördeln für Stopfen.
5. Loch für das zweite seitliche Rohr ausblasen.
6. Das zweite seitliche Ansatzrohr mit diesem Loch (5.) verschmelzen.
7. Siehe Punkt 4.
8. Enden der Ansatzstücke (3. und 6.) auf die gewünschte Länge bringen (abschneiden und verschmelzen).
9. Zur weiteren Handhabung verschließt man das weite Rohr an den Enden mit Stopfen mit eingesetzten Glasrohren (Klammersatz von

Punkt 1.). Diese Vorrichtung erfüllt nun die Aufgabe der Glasspitzen.

10. Man verschließt die Öffnungen der engen Rohre mit Stopfen sowie auch eine weite Öffnung.
11. Das weite Rohr wird mit einer breiten Flamme erhitzt und U-förmig gebogen. Hierzu muß man zur Formung der Biegestelle u. U. mehrfach erwärmen und einblasen.

Bohren von Glas

Bohren kleiner Löcher (Durchmesser einige Millimeter)

1. Man verwendet einen gehärteten Drillbohrer. Bis zu Durchmessern von 10 mm können Spezial-Hartmetallbohrer jeder beliebigen Form verwendet werden.
2. Während des Bohrvorganges gibt man als Kühlmittel Terpentinöl (mit Kampfer).
3. Beim Einschleifen sollte eine niedrige Drehzahl gewählt werden.

Bohren größerer Löcher

1. Als Bohrer dient ein Hohlzylinder der Wandstärke 1 bis 1,5 mm aus Kupfer, Messing oder Eisen.
2. Auf die Bohrstelle wird fortlaufend Wasser mit einem (nicht zu feinen) Schmirgelpulver gegeben (unter Glyzerinzusatz).
3. Die Bohrung kann sowohl mit einer elektrischen Bohrmaschine als auch - bei geeigneter Einspann- und Führungsvorrichtung - von Hand ausgeführt werden.

Bezüglich der Herstellung komplizierterer Glasteile, spezieller Metalleinschmelzungen in Glas, verschiedener Spezialarbeiten an Vakuumanlagen, der Behandlung von Schliffen und Hähnen, der Bearbeitung von Quarz, Ziehen von Quarzfäden u. a. sei auf die Literatur verwiesen, z. B. Herbst, J.: Glastechnische Praxis, Leipzig 1962.

2.2. Bestimmung von Basisgrößen

2.2.1. Längenmessungen

Es soll die Handhabung einfacher Längenmeßgeräte geübt werden. Insbesondere kommt es auf die Angabe der Meßunsicherheit an.

Aufgaben

1. Es soll das Volumen eines würfelförmigen, zylindrischen oder kugelförmigen Körpers mit Hilfe eines Meßschiebers und einer Feinmeßschraube aus Längenmessungen bestimmt werden.
2. Es ist die Dichte der gemessenen Körper (Aufgabe 1) anzugeben, wenn zusätzlich noch eine Wägung durchgeführt wird.
3. Es ist der Durchmesser einer Kapillare durch Kalibrieren mit Quecksilber zu bestimmen.
4. Es ist mit dem Sphärometer die Dicke eines Glasplättchens und der Krümmungsradius einer plankonvexen Linse (Uhrglas) zu bestimmen.

Grundlagen

Ein Skalenteil des Nonius ist gleich 0,9 Skalenteilen des Hauptmaßstabes.

F 1 Stellen Sie dar, wie man die Zehntelmillimeter an dem Meßschieber abliest.

Auch an Winkelskalen (Sphärometer, Theodolit, Spektralapparat) sind Nonien angebracht. Bei Verwendung von Spiegelmaßstäben werden Parallaxenfehler vermieden.

F 2 Was versteht man unter Parallaxe?

Setzt man Homogenität der obigen regelmäßigen Meßkörper voraus, so kann man die Dichte ϱ aus der Volumen- und Massenbestimmung gemäß $\varrho = m/V$ ermitteln.

F 3 Worin besteht der Unterschied dieser Gleichung gegenüber $\varrho = dm/dV$?

Den Durchmesser d einer Kapillare bestimmt man aus dem Volumen V eines Quecksilbertropfens, der in der Kapillare die Länge l annimmt. Man wägt den Quecksilbertropfen (Masse m, $\varrho = 13{,}59\,\mathrm{gcm}^{-3}$) und findet für d die Beziehung $d = 2\sqrt{m/\pi\varrho l}$.

F 4 Leiten Sie diese Gleichung her und stellen Sie die zugehörige Gleichung für den relativen systematischen Fehler auf!

Die Länge l des Tropfens ist in verschiedenen Abschnitten der Kapillare zu messen. Da die Kapillaren nicht exakt konstante lichte Weite haben, muß man Mittelwerte aus mehreren Messungen bilden.

Mit einem Sphärometer (Abb. 2.2.(1)) kann man Krümmungsradien r konkaver oder konvexer Flächen (Krümmungsmittelpunkt M) und auch Dicken von Plättchen bestimmen. Die drei spitzen Füße des Instrumentes bilden ein gleichseitiges Dreieck CEG (Abb. 2.2.(2)). Die Seiten-

länge a des Dreiecks erhält man, indem man die Entfernung mit einem Stechzirkel zwischen den Punkten des Dreiecks bestimmt, wenn zuvor das Sphärometer auf Papier gedrückt wurde.

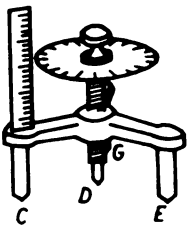


Abb. 2.2.(1) Sphärometer

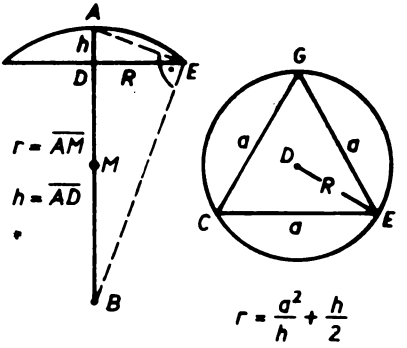


Abb. 2.2.(2) Bestimmung des Krümmungsradius einer plankonvexen Linse

An der horizontalen Winkelskale kann man tausendstel Millimeter ablesen. Die Mikrometerschraube hat eine Ganghöhe von 0,500 mm. Eine Schraubenumdrehung entspricht also 0,5 mm Verschiebung der Schraubenspitze. Die Zahl der Schraubenumdrehungen liest man an dem vertikalen Maßstab ab.

Aus der Messung der Differenz h bei zwei Mikrometerstellungen erhält man den Krümmungsradius einer plankonvexen Linse gemäß

$$r = \frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2} .$$

F 5 Leiten Sie diese Beziehung und die zugehörige Gleichung für die Vertrauensabweichung ε_r her!

Hinweise zur Durchführung der Messungen

1. Als Meßobjekte sind z. B. die würfelförmigen Körper der Lehrmittelindustrie geeignet. Die Vertrauensabweichung ε_V für das mittlere Volumen ist für die statistische Sicherheit P = 0,95 zu ermitteln.

2. Aus einer größeren Anzahl (ca. 100 Stück) von Durchmesserbestimmungen bei Kugeln (Schrote) kann die Gaußsche Verteilungskurve bestimmt werden.
3. Bei der Durchführung von Wägungen (Aufgaben 2 und 3) wird auf eine Absolutwägung verzichtet. Diese wird im Exp. 2.2.3. durchgeführt.
4. Das Pipettieren des Quecksilbers mit dem Mund ist nicht zulässig. Man setzt zu diesem Zweck ein Gummihütchen auf die Kapillare. Mit Quecksilber muß äußerst vorsichtig hantiert werden. Die mit dem Hg-Tropfen gefüllte Kapillare wird in einem geeigneten Auffanggefäß (großes Uhrglas) auf die Waagschale gestellt. In allen Fällen ist über einer größeren Kunststoffschale mit dem Quecksilber zu manipulieren.

   Zum Säubern einer Kapillare verwendet man Chromschwefelsäure. Hg-Tröpfchen werden mit einer Hg-Zange bzw. mit Hilfe eines mit einer Saugleitung verbundenen Gefäßes (Schmütflers) eingesammelt.
5. Man bestimmt zunächst die Nullstellung des Sphärometers am Vertikalmaßstab und an der Kreisteilung, wenn die Schraubenspitze gerade ihr Spiegelbild auf einer ebenen Glasplatte berührt. Danach wird diese Spitze hochgeschraubt und das Meßobjekt (Plättchen) auf die Glasplatte gelegt. Die Schraube wird nunmehr wieder heruntergedreht bis die Spitze das Meßobjekt berührt. Die Differenz beider Messungen ergibt die Dicke des Plättchens. Jede Messung soll fünf- bis zehnmal wiederholt werden. - Analog verfährt man bei der Radienbestimmung einer sphärischen Fläche, auf die man das Sphärometer aufsetzt.

Hinweise zur Auswertung

1. Besondere Sorgfalt ist den Meßunsicherheitsangaben und der Erörterung von Fehlerquellen zu widmen.
2. In allen Fällen sind geeignete und übersichtliche Meß- und Ergebnistabellen aufzustellen.
3. Es sind die Unterschiede bei der Dichtebestimmung zu diskutieren:
   a) Dichte aus der Messung des Volumens und der Masse einer Kugel;
   b) Dichte aus der Messung des Volumens von 10 Kugeln und der Gesamtmasse dieser 10 Kugeln.

Fragen

F 1 bis F 5 siehe Text.

F 6 Was versteht man unter einem Interferenzsphärometer und wie arbeitet man damit?

F 7 Wie groß ist die Brennweite einer plankonvexen Linse, wenn für die Brechzahl des Glases n = 1,5 gesetzt wird?

2.2.2. Zeitmessungen

Bei vielen Experimenten sind Zeitmessungen erforderlich. Die nachstehenden Meßaufgaben sollen in den Umgang mit der Stoppuhr und in die Technik elektronischer Kurzzeitmesser einführen.

Aufgaben (Auswahl)

1. Die persönliche Reaktionszeit soll bestimmt werden.
2. Die Schwingungsdauer eines Sekundenpendels soll mit einer zuvor zu eichenden Stoppuhr überprüft werden.
3. Die Fallzeit eines Körpers soll in Abhängigkeit von der Fallhöhe a) mit einer Stimmgabel und b) mit einem elektronischen Kurzzeitmesser gemessen werden, um die Schwerefeldstärke g zu bestimmen.
4. Mit einem elektronischen Kurzzeitmesser sollen bestimmt werden:
   4.1. die Öffnungszeiten des Verschlusses eines Fotoapparates;
   4.2. die Schallgeschwindigkeit in Luft oder in anderen Gasen (auch bei unterschiedlichen Temperaturen und Gemischen);
   4.3. die Schaltzeit eines Relais;
   4.4. die Stoßzeit beim Zusammenprallen zweier Stahlkugeln.

Grundlagen

Viele Zeitmeßgeräte arbeiten nach dem Prinzip der Zählung von Schwingungen, die in den digitalen elektronischen Kurzzeitmessern häufig von einem quarzgesteuerten Generator erzeugt werden. Hierbei werden Quarzfrequenzen von 10^4 bis 10^6 Hz angewendet, was der Messung von Zeitintervallen von 10^{-4} bis 10^{-6} s entspricht. Beginn und Ende des zu messenden Zeitintervalls werden meist durch elektrische Impulse ausgelöst. Mit Kurzzeitmessungen können die Pendel-, Fall- und Stoßgesetze sehr genau experimentell verifiziert werden.

Zur Durchführung

1. Die Reaktionszeit (Verzögerung) bestimmt man, indem eine Stopptaste bei Erscheinen eines optischen Signals betätigt wird. Der Start- oder Zählvorgang wird - von der Testperson nicht wahrnehmbar - durch

eine zweite Person eingeleitet. Die für die Testperson optisch angezeigten Signale (Ziffern des elektronischen Zählwerks) sollen so rasch wie möglich registriert werden: Es wird ein Stoppschalter betätigt. Die Zeitdauer für diese Reaktion kann unmittelbar abgelesen werden.

2. Man realisiert ein Sekundenpendel als mathematisches Pendel (mit einer Schwingungsdauer von 2 Sekunden), indem man die zugehörige Pendellänge berechnet und einstellt (siehe auch Exp. 2.4.1.). Die Zeit für 10 Schwingungen wird mehrmals gemessen und der systematische Fehler der Stoppuhr berücksichtigt. - Die Stoppuhr wird vor den Messungen geeicht, z. B. mit Hilfe des Dauerzeitzeichens, das vom Zentralinstitut Physik der Erde (Potsdam) auf der Frequenz 4525 kHz gesendet wird, oder aber mit Hilfe eines elektronischen (quarzgesteuerten) Zählgerätes.

3. Man mißt die Fallzeiten eines Körpers für 10 verschiedene Fallhöhen (zwischen 0,5 m und 2,5 m) jeweils dreimal. Es können Kugeln, Zylinder oder beliebig geformte andere Körper in geeigneter Weise an der magnetischen Auslösevorrichtung gehaltert werden. Die Apparatur und die Schaltung sind zu skizzieren!

Bei Beginn des freien Falles wird zugleich die Zählapparatur in Gang gesetzt. Der Zählvorgang wird von dem Fallkörper nach Passieren einer vorgegebenen Fallstrecke selbst gestoppt, entweder durch einen elektromechanischen Schalter oder durch eine Lichtschranke.

Eine frei fallende schwingende Stimmgabel schreibt den Schwingungsvorgang längs des Fallweges selbsttätig auf, so daß aus der Fallstrecke und aus der Zahl der Schwingungen, also aus der Schwingungs- bzw. Fallzeit, ebenfalls die Schwerefeldstärke g bestimmt werden kann, siehe Abb. 2.4.(2) und 2.4.(3).

4.1. Mit Hilfe einer Lichtschranke läßt sich die Belichtungszeit von Fotoapparaten bestimmen (Schaltung am Arbeitsplatz).

4.2. Der vom Lautsprecher emittierte Schallimpuls startet das elektronische Zählwerk, das - nach Eintreffen des Impulses im Mikrofon - elektronisch gestoppt wird. Aus den Laufstrecken s_1, s_2 (Differenzmessung) und den elektronisch gemessenen Laufzeiten t_1, t_2 des Schallimpulses ermittelt man die Schallgeschwindigkeit $v = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$, die von der Temperatur und dem Druck des betreffenden Gases abhängt. - Gegebenenfalls können auch definierte Gasgemische verwendet werden.

4.3. Die Ruhekontakte eines Relais sind im stromlosen Zustand miteinander verbunden. Die Arbeitskontakte werden geschlossen, wenn Strom durch die Relaisspule fließt. Skizzen am Arbeitsplatz nach vorhandenen Angaben anfertigen! - Aus je 5 Kurzzeitmessungen sollen folgende Zeitintervalle bestimmt werden:

1. das Zeitintervall zwischen dem Einschalten des Spulenstromes und dem Öffnen des Ruhekontaktes,
2. das Zeitintervall zwischen dem Einschalten des Spulenstromes und dem Schließen des Arbeitskontaktes,
3. das Zeitintervall zwischen dem Öffnen des Ruhekontaktes bis zum Schließen des Arbeitskontaktes.

4.4. Man mißt die Zeit, während der Strom durch die beiden stoßenden Körper fließt. Es werden z. B. an dünnen Drähten aufgehängte Stahlkugeln verwendet.

Zur Auswertung

1. Es ist das Vertrauensintervall $t = \bar{t} \pm \varepsilon_t$ der Reaktionszeit für P = 0,95 anzugeben.

2. Der Einfluß von systematischen Fehlern ist zu diskutieren.

3. Die Ergebnisse der Meßtabellen sind im Hinblick auf die Beziehung $s = gt^2/2$ grafisch darzustellen, erstens $s = f(t)$ und zweitens $t^2 = f(2s)$. Aus der zweiten (linearen) Beziehung ermittelt man den Anstieg $a = 1/g$ durch Geradenausgleich. - In allen Fällen ist das Ergebnis kritisch zu erörtern.

4.1. Tabellarisch sind Ist- und Soll-Belichtungszeiten des Fotoapparates gegenüberzustellen und die relativen Abweichungen anzugeben.

4.2. Die für die Schallgeschwindigkeit ermittelten Werte sind mit Literaturangaben zu vergleichen und die Meßfehler anzugeben.

4.3. Für die ermittelten Zeitintervalle sind (tabellarisch) die Vertrauensintervalle für P = 0,95 zu berechnen. Die Einsatzmöglichkeiten des Relais sollen kritisch eingeschätzt werden.

4.4. Die (mittleren) Stoßzeiten sind in Abhängigkeit von der Aufprallenergie zu berechnen und grafisch darzustellen.

Fragen

F 1 Wie ist die SI-Basiseinheit der physikalischen Basisgröße Zeit definiert?

F 2 Nennen Sie einige Zeitmeßverfahren!

F 3 Orientieren Sie sich über die Begriffe Zeit, Sekunde, Schwing-

quarz, Quarzgenerator, Quarzuhr, Atomuhr, Piezoelektrizität!

F 4 Welcher prinzipielle Meßfehler ergibt sich bei der Zeitmessung mit Zählgeräten?

F 5 Wodurch kommen die "besseren" Zeiten bei verschiedenen Sportwettbewerben durch Handstoppung zustande?

2.2.3. Massebestimmung

Massebestimmungen sind bei vielen Experimenten durchzuführen. Die nachstehende Aufgabe soll mit dem Gebrauch einer zweischaligen Analysenwaage und mit der Absolutwägung vertraut machen.

Aufgabe

Es ist die Absolutwägung eines Körpers durchzuführen (z. B. eines Pyknometers).

Grundlagen

Die Analysenwaage ist eines der genauesten Meßinstrumente des Physikers und Chemikers. Man kann damit eine Masse von 100 g auf 0,1 mg genau messen. Das bedeutet einen sehr kleinen relativen Fehler von nur 10^{-6}. Bezüglich der detaillierten physikalischen Grundlagen der Funktionsweise einer Analysenwaage und der Regeln beim Wägen sei auf Abschnitt 2.1.5.3. verwiesen. Bei einer Präzisionswägung geht man wie folgt vor:

1. Bestimmung des Nullpunktes,
2. Bestimmung der Empfindlichkeit,
3. Korrektur durch Doppelwägung,
4. Reduktion auf den luftleeren Raum.

Zur Durchführung und Auswertung

1. Der Nullpunkt x_0 der Waage (Gleichgewichtslage) wird während der Schwingungen des Waagebalkens bei geschlossenem Waagegehäuse festgestellt. Man entarretiert die Waage und beobachtet - bei unbelasteter Waagschale. - Hierbei notiert man die x-Werte von drei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten. Die Ausschläge nach links sind negativ, die nach rechts positiv zu zählen. Für drei Umkehrpunkte gilt

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3) + x_2\right).$$

Die Waage wird nach der Nullpunktbestimmung arretiert und für eine neue Meßreihe wieder entarretiert.

2. Die Waagen dürfen nur im arretierten Zustand be- oder entlastet werden. Zur Bestimmung der Empfindlichkeit belastet man die rechte Seite mit einer kleinen Masse Δm (Milligramm), indem man den Reiter z. B. auf den Teilstrich 4 setzt. Dadurch wird der ursprüngliche Ruhepunkt x_0 um $\Delta x (<0)$ verschoben.

Zur genaueren Ablesung der Zeigerstellung dient eine Lupe. Die Empfindlichkeit - kennzeichnend für die Konstruktion der Waage - hängt von der Belastung ab, so daß sie bei unterschiedlicher Belastung (auf beiden Waagschalen z. B mit 1, 3, 5, 10, 20, 50, 100 g) gemessen werden soll. Das Meßergebnis ist grafisch darzustellen.

Die Gleichgewichtslagen werden bei schwingender Waage aus drei Umkehrpunkten des Zeigers bestimmt. Nach Entlastung der Waage wird wiederum eine Nullpunktbestimmung zur Kontrolle vorgenommen.

Wenn sich die Nullpunkte vor und nach der Belastung nur wenig voneinander unterscheiden, kann mit dem arithmetischen Mittel aus beiden gerechnet werden.

Bei Setzen des Reiters in die Kerbe 4 sind bei der Empfindlichkeitsangabe die Werte $|\Delta x|$ (Nullpunktsänderung) durch 4 mg zu dividieren.

3. Wägung. Der zu wägende Körper wird auf die linke und die Wägestücke werden auf die rechte Waagschale gelegt. Man probiert wiederholt - durch Auflegen verschiedener Wägestücke und behutsames Entarretieren -, ob der schwingende Zeiger etwa um die Gleichgewichtslage schwingt. Mit Hilfe des Reiters stellt man schließlich die endgültige Gleichgewichtslage her. Nach der Wägung erfolgt stets eine Kontrolle des Nullpunktes.

4. Korrektur durch Doppelwägung. Durch Doppelwägung eliminiert man den Einfluß auf das Meßergebnis, der infolge geringer Längenunterschiede der Waagebalken entsteht. Man vertauscht die Seiten des zu wägenden Körpers und der Wägestücke und bestimmt die Masse m_D aus dem geometrischen Mittel der Doppelwägung (Links- bzw. Rechtswägung): $m_D = \sqrt{m_l m_r}$.

F 1 Zeigen Sie, unter welcher Voraussetzung man das geometrische Mittel durch das arithmetische $m_D = (1/2)(m_l + m_r)$ ersetzen kann!

F 2 Zeigen Sie, wie man aus m_l und m_r zu dem Längenverhältnis $l_l/l_r = 1 + (m_r - m_l)/2\,m_l$ der beiden Hebelarme gelangt!

5. Auftriebskorrektur. Gemäß dem Archimedischen Gesetz erfahren der zu wägende Körper und die Wägestücke einen unterschiedlichen Auftrieb. Das Wägeergebnis muß demzufolge auf das Vakuum reduziert werden.

F 3 Wie lautet das Archimedische Gesetz?

Man erhält nach Berücksichtigung dieser Auftriebskorrektur schließlich aus der durch Doppelwägung bestimmten Masse m_D
$m = m_D(1 + \varrho_L/\varrho_K - \varrho_L/\varrho_W)$. Die Indizes der Dichten ϱ beziehen sich auf die Luft, den zu wägenden Körper und die Wägestücke.

Geben Sie den Zahlenwert für den Klammerausdruck gesondert an!

F 4 Wieviel Promille macht diese Korrektur aus?

Da die Dichte der Luft druck- und temperaturabhängig ist, müssen Sie den Luftdruck und die Lufttemperatur notieren.

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

F 5 Welche Arten von Waagen kennen Sie?

F 6 Wie ist die SI-Basiseinheit der Basisgröße Masse definiert?

F 7 Erläutern Sie den Unterschied zwischen Masse und Gewicht!

2.3. Dichtebestimmung

Im weiteren Sinne versteht man unter Dichte den Quotienten einer physikalischen Größe und einer Länge oder Fläche oder einem Volumen. Im engeren (ursprünglichen) Sinn wird die Dichte im folgenden als Raumdichte der Masse physikalischer Körper aufgefaßt. Die Dichte ist eine wesentliche Größe zur Kennzeichnung eines Stoffes fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Zu ihrer Bestimmung sind zahlreiche absolute und relative Methoden entwickelt worden. Es werden zur Auswahl vier Verfahren dargestellt, wobei deren Grundlagen bei der jeweiligen Meßmethode beschrieben werden.

2.3.1. Dichtebestimmung mit der Federwaage nach JOLLY

Aufgaben

1. Es soll die Eichkurve der Feder aufgenommen und die Federkonstante k bestimmt werden.
2. Die Dichte ϱ_K eines festen Körpers ist zu ermitteln.
3. Unter Zugrundelegung der Ergebnisse von Aufgabe 2 soll die Dichte ϱ_F einer Flüssigkeit bestimmt werden.

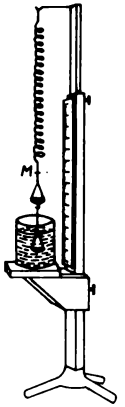


Abb. 2.3.(1) Federwaage nach JOLLY

Grundlagen

Die Dichte ϱ eines homogenen Körpers ist durch den Quotienten aus Masse und Volumen definiert:

$$\varrho = m/V. \qquad (1)$$

Aus einer Vielzahl von Dichtemeßverfahren wird im folgenden eine Auswahl getroffen.

Wird eine Schraubenfeder der Länge l durch einen Körper der Masse m belastet, so erfährt sie unter der Einwirkung des Körpergewichtes mg eine Längenzunahme x. Gemäß dem Gesetz von HOOKE gilt für eine Schraubenfeder

$$mg = F = kx. \qquad (2)$$

Der Proportionalitätsfaktor

$$k = mg/x \qquad (3)$$

heißt Federkonstante.

F 1 Unter welchen Voraussetzungen ist k tatsächlich eine Konstante?

Wie aus Gl. (2) ebenfalls folgt, ist die Längenzunahme x, wenn g und k als Konstanten vorausgesetzt werden, der Masse m proportional

$$x = \frac{mg}{k}, \qquad (4)$$

d. h., die grafische Darstellung x = x(m) ergibt eine Gerade.

Bei Belastung der Feder mit zwei leeren Waagschalen untereinander, wobei die untere Schale vollständig in eine Flüssigkeit bekannter Dichte ϱ_F eintaucht (Abb. 2.3.(1)), werde mit Hilfe der Ablesemarke M am Spiegelmaßstab die Länge l_0 abgelesen. Legt man nun den zu messenden Körper zunächst auf die obere Waagschale, so sei die neue Länge l_1 und die Differenz $l_1 - l_0 = x_1$ diejenige Längenänderung der Feder, die der Masse m des Körpers entspricht. Dann folgt wegen Gl. (4)

$$m = \frac{kx_1}{g}. \qquad (5)$$

Wird der Körper sodann auf die untere Waagschale gelegt, so daß er bei der Messung vollständig in die Flüssigkeit eintaucht, folgt

aus der jetzt abgelesenen Länge l_2 die Längenänderung $x_2 = l_2 - l_o$. Sie entspricht dem Gewicht mg des Körpers, vermindert um den Auftrieb $F_A = \varrho_F g V$, den der Körper in der Flüssigkeit erfährt, d. h.

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{k} \varrho_F g V \tag{6}$$

oder

$$V = \frac{k}{\varrho_F g} (x_1 - x_2). \tag{7}$$

Die Bestimmung des Körpervolumens ist auf die Differenz zweier Wägungen zurückgeführt. Mit Gl. (5) und Gl. (7) - eingesetzt in Gl. (1) - folgt schließlich

$$\varrho_K = \varrho_F \frac{x_1}{x_1 - x_2} . \tag{8}$$

Zur Durchführung

Zu Aufgabe 1

Zunächst wird der Stelltisch mit dem Flüssigkeitsgefäß ganz nach unten verschoben und der Spiegelmaßstab so eingestellt, daß die Ablesemarke M vor einem gut ablesbaren Anfangswert l_o steht. Sodann wird z. B. in Schritten von jeweils etwa 20 g die Waagschale belastet, die Differenz $l_i - l_o = x_i$ abgelesen und in einer grafischen Darstellung $x_i = x_i(m)$ die Längenänderung als Funktion der Belastung dargestellt. Zu den Meßpunkten wird die Ausgleichsgerade gezeichnet, und die erhaltene Abhängigkeit wird diskutiert.

F 2 Warum ist die Überprüfung des linearen Zusammenhanges vor Ausführung der eigentlichen Messung notwendig?

F 3 Welche Folgerungen muß man ziehen, wenn die gemessene Abhängigkeit x = x(m) keine Proportionalität ergibt?

Aus der grafischen Darstellung und aus den Meßwerten soll die Federkonstante k bestimmt werden.

Zu Aufgabe 2

Der Stelltisch wird so weit angehoben, daß die untere Waagschale vollständig und der Verbindungsdraht zwischen der unteren und der oberen Waagschale zu einem bestimmten Anteil seiner Länge in die

Flüssigkeit von bekannter Dichte ϱ_F (Tabellenwert unter Beachtung der Temperatur ablesen!), die sich in dem auf dem Stelltisch angeordneten Flüssigkeitsbehälter befindet, eintaucht. Für diese Anordnung wird mittels der Meßmarke an dem Spiegelmaßstab die Anfangslänge l_o abgelesen und protokolliert. Danach ist der Stelltisch mit dem Flüssigkeitsgefäß wieder abzusenken. Der zu messende Körper wird auf die obere Waagschale aufgelegt und die Messung in analoger Weise wiederholt. Die neue Länge l_1 wird am Spiegelmaßstab abgelesen und als l_1 sowie als $x_1 = l_1 - l_o$ protokolliert. Es muß sorgfältig darauf geachtet werden, daß - durch entsprechendes Heben oder Senken zu bewerkstelligen - der Aufhängedraht wieder in genau gleicher Länge wie zuvor in die Flüssigkeit eintaucht!

F 4 Wie wird das Ableseergebnis beeinflußt, wenn der Aufhängedraht a) weiter, b) weniger weit in die Flüssigkeit eintaucht?

F 5 Welche Vernachlässigung liegt in der Annahme, die Längenänderung x_1 der Feder entspreche genau der Masse des zu untersuchenden Körpers?

Nachdem der Stelltisch mit dem Flüssigkeitsgefäß wiederum abgesenkt wurde, wird der Körper jetzt auf die untere Waagschale gelegt und durch Anheben des Stelltisches die untere Waagschale und der bestimmte Längenanteil des Aufhängedrahtes in die Meßflüssigkeit eingetaucht. Die Ablesung am Spiegelmaßstab liefert die zu protokollierende Länge l_2 bzw. daraus errechnet $x_2 = l_2 - l_1$.

Die rechnerische Auswertung geschieht unter Benutzung der Gl. (8). Das Ergebnis wird als Mittelwert aus mindestens drei Wiederholungen mit Angabe der Meßunsicherheit ausgewiesen und diskutiert.

Beachten Sie, daß vor jeder Wiederholung der Meßreihe der zu untersuchende Körper sorgfältig gesäubert und getrocknet werden muß, weil anhaftende Flüssigkeitsreste das Ergebnis verfälschen würden. Durch sorgfältiges Arbeiten muß außerdem verhindert werden, daß Flüssigkeitsspuren - etwa durch Spritzer bei unachtsamem Eintauchen - an die obere Waagschale gelangen; solche Verunreinigungen können auch entstehen, wenn Sie mit feuchten Händen an der Apparatur hantieren.

Zu Aufgabe 3

Die zu untersuchende Flüssigkeit wird in dem dafür bestimmten Gefäß auf den Stelltisch gebracht. Das Meßprogramm verläuft in gleicher Weise wie bei Aufgabe 2. Zur Auswertung wird Gl. (8) nach ϱ_F umge-

stellt und lautet dann $\varrho_F = \varrho_K(x_1 - x_2)/x_1$; für ϱ_K wird der in Aufgabe 2 ermittelte Wert eingesetzt. Beachten Sie, daß bei der Bestimmung der Meßunsicherheit von ϱ_F für ϱ_K ebenfalls der in Aufgabe 2 bestimmte Wert eingesetzt werden muß; keinesfalls darf ϱ_K etwa als fehlerfrei angenommen werden.

2.3.2. Dichtebestimmung mit der Mohr-Westphalschen Waage

Aufgaben

1. Die Dichte einer 20 %igen NaCl-Lösung soll mit der Mohr-Westphalschen Waage bestimmt werden.
2. Aus dieser Ausgangslösung werden 15 %ige, 10 %ige und 5 %ige NaCl-Lösungen hergestellt; es soll die Abhängigkeit der Dichte von der Konzentration bestimmt werden.
3. Die Dichte eines festen Stoffes soll nach der Schwebemethode bestimmt werden.

Grundlagen

Die Mohr-Westphalsche Waage (Abb. 2.3.(2)) ist eine ungleicharmige Hebelwaage, die auf der einen Seite den Meßkörper im Abstand l vom Drehpunkt und auf der anderen Seite den Ausgleichskörper trägt. Der Meßkörper (Masse m, Volumen V) ist meist mit einem Thermometer kombiniert. Das um den Luftauftrieb verminderte Gewicht des Meßkörpers erzeugt ein Drehmoment, welches von dem durch den Ausgleichskörper hervorgerufenen Drehmoment M kompensiert wird: die Waage ist im Gleichgewicht, und die Spitze des Ausgleichskörpers steht dem Dorn am Waagebalkenträger genau gegenüber. Es gilt also im Gleichgewichtsfall

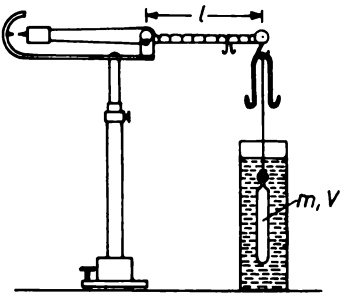


Abb. 2.3.(2) Mohr-Westphalsche Waage

$$M = mgl - V\varrho_L gl. \qquad (9)$$

Taucht der Meßkörper in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_F, so erfährt er darin einen Auftrieb

$$F_A = - V\varrho_F g, \tag{10}$$

und auf der rechten Seite der Waage wirkt jetzt das Drehmoment

$$M' = mgl - V\varrho_F gl.$$

Wegen $\varrho_F > \varrho_L$ kann die Waage nicht mehr im Gleichgewicht sein, und es gilt

$$mgl - V\varrho_L gl > mgl - V\varrho_F gl. \tag{11}$$

Um das Gleichgewicht wieder herzustellen, muß auf der rechten Seite ein zusätzliches Drehmoment erzeugt werden. Dies wird bei der Mohr-Westphalschen Waage dadurch erreicht, daß Korrekturkörper - sogenannte Reiter - auf der den Meßkörper tragenden Seite des Waagebalkens in 9 Kerben und das Häkchen (an dem der Meßkörper hängt) eingehängt werden können.

Da die Massen der Reiter (zu einem vollständigen Satz gehören vier verschiedene Größen) sich wie 1 : 0,1 : 0,01 : 0,001 verhalten, also dekadisch gestuft sind, entspricht ein Reiter am Häkchen dem nächst größeren Reiter in der Kerbe 1. Die Masse $m_R \approx 5$ g des größten Reiters ist so gewählt, daß er am Häkchen ein Drehmoment erzeugen würde, das genau jenes Drehmoment kompensiert, welches der Meßkörper vermöge seines Auftriebes in einer Flüssigkeit der Dichte 1,0000 $g \cdot cm^{-3}$ erzeugt. (Diese Forderung wird allerdings in der Praxis nicht exakt erfüllt, so daß sich bei jeder Waage ein produktionsbedingter Korrekturfaktor - s. u. - ergibt.) Ein Reiter der Masse $0{,}1\ m_R$ erzeugt in Kerbe 4 z. B. ein zusätzliches Drehmoment $0{,}1\ m_R\ g \cdot 0{,}4$ l, ein Reiter der Masse $0{,}001\ m_R$ entsprechend nur $0{,}001\ m_R\ g \cdot 0{,}4$ l.

Das gesamte Drehmoment M_R zum Ausgleich des Auftriebs-Drehmomentes ist die Summe aller von den verschiedenen Reitern erzeugten Zusatzdrehmomente: $M_R = m_F gl$ (darin ist $m_F := \left[n_1 \cdot 10^{-1} + n_2 \cdot 10^{-2} + n_3 \cdot 10^{-3} + n_4 \cdot 10^{-4}\right] m_R =: n_F m_R$, wenn $n_1 = 1, 2, \ldots, 10$ die Kerbenzahl des größten Reiters der Masse M_R ist, $n_2 = 1, 2, \ldots, 10$ die des zweitgrößten Reiters der Masse $0{,}1\ m_R \approx 0{,}5$ g usw. Dabei ist die Kerbenzahl 10 dem Häkchen zuzuordnen). Damit ist das Gesamtdrehmoment M_F

der rechten Seite der Waage

$$\boxed{M_F = M'_D + M_R = mgl - V\varrho_F gl + n_F m_R gl.} \qquad (12)$$

Nach den bisherigen Darlegungen wäre eine Dichtebestimmung für ϱ_F bei Kenntnis der Masse m_R des größten Reiters und des Volumens V des Meßkörpers möglich, wenn nach Gleichsetzen von Gl. (9) und Gl. (12):

$$mgl - V\varrho_L gl = mgl - V\varrho_F gl + n_F m_R gl$$

und Vereinfachung

$$\varrho_F = \frac{n_F m_R}{V} + \varrho_L \qquad (13)$$

als Meßgleichung benutzt würde.

Es ist nun weder m_R exakt bekannt noch das Volumen V des Meßkörpers. Bei der Fabrikation der Mohr-Westphalschen Waagen kann zwar erreicht werden, daß die Verhältnisse der Reitermassen mit guter Genauigkeit dekadisch gestuft sind; es ist aber mit vertretbarem Aufwand nicht möglich, den Quotient m_R/V exakt gleich 1,0000 $g \cdot cm^{-3}$ zu machen. Diese Schwierigkeit ist aber auf einfache Weise behebbar, wenn vor der eigentlichen Messung erst eine Eichmessung gemacht wird. (Damit läuft die Messung auf eine Bestimmung der relativen Dichte hinaus; d. h., als Ergebnis wird angegeben, wievielmal so groß die Dichte der zu messenden Flüssigkeit im Vergleich zu der einer - möglichst exakt bekannten - Eichflüssigkeit ist.

Als Eichflüssigkeit dient destilliertes Wasser, weil dafür i. allg. recht genaue Tabellenwerte in Abhängigkeit von der Temperatur zur Verfügung stehen und destilliertes Wasser in jedem Labor vorhanden ist. Für diese Messung bekommt Gl.(13)die Form

$$\varrho_W = \frac{n_W m_R}{V} + \varrho_L. \qquad (14)$$

Wird Gl. (14) nach 1/V aufgelöst und in Gl. (13) eingesetzt, so folgt

$$\varrho_F = \frac{n_F}{n_W}\varrho_W + \left(1 - \frac{n_F}{n_W}\right)\varrho_L. \qquad (15a)$$

Damit sind m_R und V aus der Meßgleichung eliminiert.

Für Messungen mit geringeren Genauigkeitsansprüchen kann auf die Luftauftriebs-Korrektur verzichtet werden. Gl. (15a) vereinfacht sich dann zu

$$\varrho_F \approx \frac{n_F}{n_W}\,\varrho_W; \qquad (15b)$$

der Ausdruck $\varrho_W/n_W =: K$ wird auch als Korrekturfaktor der Waage bezeichnet.

F 6 Die Dichtebestimmung werde mit drei dezimal gestuften Reitern ausgeführt (z. B. 0,867 g cm^{-3}).

Geben Sie an, wie groß der Einfluß des Luftauftriebs bei Benutzung von Gl. (15a) ist, wenn $n_W = 0{,}998$ beträgt. Wie groß ist die Abweichung, wenn zur Auswertung Gl. (15b) benutzt wird?

Zur Durchführung

Man beachte, daß die Meßergebnisse mindestens vier Stellen erfassen; die Rechenstabgenauigkeit ist hier nicht ausreichend!

Zu Aufgabe 1

Die Mohr-Westphalsche Waage wird auf eine feste Unterlage gestellt und mittels der Stellschrauben am Stativ nach der ebenfalls dort angebrachten Dosenlibelle genau waagerecht ausgerichtet. Dann wird der Meßkörper vermittels seines Aufhängedrahtes am Haken des Waagebalkens (≙ Kerbe 10) eingehängt und notfalls durch Aufsetzen eines kleinen Hilfsreiters so einjustiert, daß Spitze und Dorn sich genau gegenüberstehen. (Dieser Reiter darf in die Meßergebnisse nicht mit einbezogen werden!) Nunmehr erfolgt die Eichkorrektur der Waage: der Meßkörper wird in die Eichflüssigkeit - i. allg. destilliertes Wasser - der gemessenen Temperatur eingetaucht, so daß der Meßkörper vollständig und der Aufhängedraht zu einem genau bestimmten Anteil seiner Länge in die Eichflüssigkeit eintaucht und möglichst an allen Stellen gleichen Abstand von der Gefäßwand des Standzylinders hat, in dem sich die Eichflüssigkeit befindet. Achten Sie darauf, daß sie für diese Messung den Standzylinder benutzen, der die Kennzeichnung "Eichen" trägt! Die Temperatur der Eichflüssigkeit bestimmt man zweckmäßigerweise nicht mit dem in den Meßkörper eingebauten, recht ungenauen Thermometer, sondern mit einem zusätzlich vorhandenen, möglichst in (1/10) °C geteilten Thermometer.

F 7 Warum muß der Anteil des eingetauchten Aufhängedrahtes genau bestimmt werden?

F 8 Warum ist es ungünstig, den Meßkörper so einzutauchen, daß der Aufhängedraht gerade vollständig außerhalb der Flüssigkeit verbleibt?

F 9 Was bezweckt die Forderung, daß der Meßkörper gleich weit von der Gefäßwand entfernt sein soll?

Nachdem durch passendes Aufsetzen der Reiter die Waage ins Gleichgewicht gebracht worden ist, wird die Reiterstellung n_W abgelesen und protokolliert. Ebenfalls muß die Celsiustemperatur ϑ_W der Eichflüssigkeit protokolliert werden. Die Messungen werden z. B. fünffach wiederholt und das Ergebnis als Mittelwert daraus zusammen mit der Vertrauensabweichung für P = 0,95 im Protokoll angegeben. Mit dem zur gemessenen Temperatur zugehörenden Tabellenwert ϱ_W der Dichte der Eichflüssigkeit kann jetzt der Korrekturfaktor $K := \varrho_W/n_W$ der Waage bestimmt werden. Der Meßkörper muß nach dieser Messung - wie nach jeder weiteren ebenfalls - (mit destilliertem Wasser) abgespült und abgetrocknet werden, bevor er für die nächste Messung benutzt oder in die Aufbewahrung zurückgelegt werden kann.

F 10 Warum ist das notwendig?

Die Meßflüssigkeit wird in den dafür bestimmten und gekennzeichneten Standzylinder eingefüllt, so daß der Aufhängedraht des Meßkörpers wieder bis zu dem gleichen Anteil seiner Länge von der Meßflüssigkeit bedeckt wird. Nach Wiederherstellung des Gleichgewichts werden die neue Reiterstellung n_F sowie die Temperatur ϑ_F der Meßflüssigkeit protokolliert.

Die Berechnung der Dichte der Meßflüssigkeit geschieht nach Gl. (15a), wobei geprüft werden soll, ob eventuell Gl. (15b) den gestellten Genauigkeitsanforderungen bzw. der bei ihrer Messung erzielbaren Genauigkeit sinnvoller angepaßt ist. Selbstverständlich sind auch in diesem Fall die Messungen fünfmal durchzuführen und zu einem Mittelwert mit Vertrauensabweichung zusammenzufassen.

Zu Aufgabe 2

Für diese Aufgabe stehen 20%ige NaCl-Lösung und destilliertes Wasser in gekennzeichneten Spritzflaschen zur Verfügung. Damit werden die geforderten Konzentrationen durch Mischung selbst hergestellt. In 100 g 20%iger Lösung sind 20 g gelöste Substanz (hier NaCl) und 80 g Lösungsmittel (destilliertes Wasser) enthalten. Die Bestimmung

der benötigten Massen kann auch auf volumenometrischem Wege erfolgen: aus Gl. (1) folgt

$$V = m/\varrho_{20},$$

wobei ϱ_{20} die in Aufgabe 1 bestimmte Dichte ist. Für eine 15%ige Lösung benötigt man 15 g Salz, die in 75 g 20%iger Lösung enthalten sind. Aus Gl. (16) folgt dann: $V'_{15} = 75\ g/\varrho_{20}$ für das Volumen der benötigten 20%igen Lösung. Da diese 15 g Salz in 100 g Lösung enthalten sein müssen, sind dem Volumen V'_{15} noch $V''_{15} = 25\ g/\varrho_W$ destilliertes Wasser der Dichte ϱ_W zuzugießen. Die erforderlichen Volumina 20%iger NaCl-Lösung und destillierten Wassers werden am besten mittels zweier Büretten abgemessen.

F 11 Stellen Sie die entsprechenden Gleichungen für die Herstellung der 10- bzw. 15%igen Lösungen auf! Gehen Sie dabei einmal stets von 20%iger Grundlösung aus und zum anderen stellen Sie die geforderten Konzentrationen schrittweise durch Verdünnen aus der jeweils zuvor verlangten Konzentration her!

F 12 Warum ist der letzte Weg - abgesehen von der dabei möglichen "Ersparnis" an 20%iger Lösung - günstiger zu beschreiten?

Nachdem die Dichte aller verlangten Konzentrationen bestimmt ist - die Ergebnisse sollen jeweils als Mittelwert aus mindestens drei Wiederholungen und mit der errechneten Vertrauensabweichung angegeben werden - soll die Abhängigkeit $\varrho = \varrho$(Konzentration) auch grafisch dargestellt werden.

F 13 Welche Konzentrationsangaben sind außer der Angabe in Massenprozenten noch möglich und üblich? Was besagen sie jeweils? Rechnen Sie die Angabe "20%ige NaCl-Lösung" in diese anderen Konzentrationsangaben um!

Zu Aufgabe 3

Dieses Meßverfahren beruht auf der Aussage: "Ein Körper schwebt genau dann in einer Flüssigkeit, wenn der auf ihn wirkende Auftrieb seinem Gewicht gleich ist". Das heißt,

$$F_A = \varrho_F g V_K = \varrho_K g V_K = F_G \qquad (17)$$

und damit

$$\varrho_F = \varrho_K. \qquad (18)$$

Die Dichte eines festen Körpers kann also bestimmt werden, indem man zunächst durch Mischung geeigneter Komponenten eine Flüssigkeit herstellt, in welcher der Körper gerade schwebt. Von dieser "Schwebelösung" kann man dann die Dichte in gleicher Weise wie bei Aufgabe 1

bzw. 2 bestimmen. Man hat damit die Dichte eines festen Körpers nach einem indirekten Verfahren gemessen. Die Vertrauensabweichung des so bestimmten Dichtewertes ist anzugeben und das Meßverfahren sowie seine Genauigkeit ausführlich zu diskutieren - auch unter Einbeziehung des zeitlichen, experimentellen und rechnerischen Aufwandes. Man vergleiche diese Meßmethode mit dem Meßverfahren mittels Pyknometers unter den gleichen Gesichtspunkten.

F 14 Für technische Zwecke und z. T. bei Produktionsabläufen in der chemischen Industrie werden zur schnellen Dichtebestimmung häufig Aräometer (auch Senkspindeln genannt) verwendet. Erklären Sie das Funktionsprinzip und den Meßvorgang! Welche Meßunsicherheit ist hier zu erwarten?

2.3.3. Dichtebestimmung mit dem Pyknometer

Aufgaben

1. Die Dichte einer gegebenen Flüssigkeit soll mittels Pyknometers und Waage bestimmt werden.
2. Bestimmen Sie die Dichte vorgegebener Probekörper mit Pyknometer und Waage!

Grundlagen

Ein Pyknometer (Abb. 2.3.(3)) ist ein Glaskolben mit durchbohrtem Schliffstopfen, der - für eine bestimmte Temperatur - exakt ein angegebenes Flüssigkeitsvolumen V enthält. Dazu muß das Pyknometer

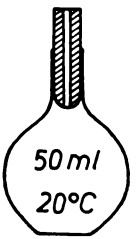


Abb. 2.3.(3) Pyknometer

zunächst blasenfrei mit der Flüssigkeit nahezu vollständig gefüllt werden. (Luftblasen werden beim Einfüllen vermieden, wenn die Flüssigkeit in schwachem Strahl auf die Innenwand des Pyknometers ge-

leitet wird - z. B. aus einer Spritzflasche.) Setzt man den Schliffstopfen - der gelegentlich auch mit einem Thermometer kombiniert ist - in den Kolbenhals ein, so wird die überschüssige Flüssigkeit verdrängt und fließt durch die Bohrung im Stopfen aus. Das exakt gefüllte Pyknometer - die Flüssigkeit muß genau bis zum abgeschliffenen Bohrungsende stehen, überschüssige Flüssigkeit müssen Sie abstreifen - wird äußerlich gut abgetrocknet, wobei zwecks Vermeidung schädlichen Erwärmens das Pyknometer nur vorsichtig mit zwei Fingern am Hals angefaßt wird.

Durch Wägung auf einer guten Feinwaage kann man die vom Flüssigkeitsvolumen repräsentierte Masse als Differenz aus der Masse des gefüllten und des leeren Pyknometers bestimmen:

$$m = m_V - m_0. \tag{18}$$

Soll die Dichte einer Flüssigkeit bestimmt werden, liefert Einsetzen in Gl. (1) das Ergebnis

$$\varrho_F = (m_V - m_0)/V, \tag{19}$$

wozu allerdings noch die Bestimmung und Angabe der Temperatur notwendig ist, um eine eindeutige und exakte Dichteangabe zu erhalten.

Es muß nun noch der Einfluß der Luft berücksichtigt werden (vgl. 2.1.8.3.). Die Summe m_0' der zum Gleichgewicht erforderlichen Wägestücke enthält außer der "Leermasse" m_0 auch die Masse der von den Wägestücken verdrängten Luft, vermindert um die Masse der vom Pyknometer verdrängten Luft:

$$m_0' = m_0 + \frac{m_0'}{\varrho}\varrho_L - (V' - V)\varrho_L, \tag{20}$$

woraus folgt

$$m_0 = m_0' - \varrho_L\left(\frac{m_0'}{\varrho} + V - V'\right). \tag{21}$$

Darin bedeuten: V das Innenvolumen und V' das Außenvolumen des Pyknometers, ϱ die Dichte der Wägestücke und ϱ_L die Dichte der Luft bei der Raumtemperatur ϑ und dem Luftdruck p am Versuchsplatz. Analog gilt für die bezüglich des Luftauftriebs korrigierte Masse des gefüllten Pyknometers

$$m_V = m_V' - \varrho_L\left(\frac{m_V'}{\varrho} - V'\right). \tag{22}$$

Damit erhält Gl. (19) die Form

$$\varrho_F = \frac{m'_V - m'_O}{V} - \frac{m'_V - m'_O - V\varrho}{V\varrho}\,\varrho_L. \tag{23}$$

F 15 Überprüfen Sie am Zahlenbeispiel, mit welchem Stellenwert die einzelnen Anteile an der Korrektur beteiligt sind.

Zur Bestimmung der Dichte ϱ_K eines festen Körpers benötigt man drei Wägungen: der zu untersuchende Körper hat die Masse m_K, das mit einer Flüssigkeit bekannter Dichte ϱ_F gefüllte Pyknometer die Masse m_v, die Masse des mit Flüssigkeit und dem zu bestimmenden Stoff gefüllte Pyknometer sei m_P. Das Volumen V_K des zu untersuchenden Stoffes ist gleich dem Volumen der von ihm verdrängten Flüssigkeit:

$$V_K = (m_v + m_K - m_P)/\varrho_F. \tag{24}$$

Damit folgt für die gesuchte Dichte

$$\varrho_K = m_K\,\varrho_F/(m_v + m_K - m_P). \tag{25}$$

Darin werden die einzelnen Massen ersetzt durch die jeweiligen Summen der zum Gleichgewicht benötigten Wägestücke, vermindert um die Auftriebskorrektur:
Aus

$$m_K - V_K\varrho_L = m'_K\,(1 - \varrho_L/\varrho)$$

(Wägung des Körpers) und

$$m_P - m_v = (m'_P - m'_v)(1 - \varrho_L/\varrho)$$

(Differenz der Wägung des Pyknometers mit und ohne Körper) folgt wegen $m_K - V_K\varrho_F = m_P - m_v$ (aus Gl. (24)) schließlich

$$\varrho_K = \frac{m'_K\varrho_{Fl} - (m'_P - m'_v)\varrho_L}{m'_K - (m'_P - m'_v)}\,. \tag{26}$$

Bei der Auswahl der Flüssigkeit muß darauf geachtet werden, daß sich der zu untersuchende Stoff in ihr keinesfalls löst!

F 16 Beim Lösen eines Stoffes in einem Lösungsmittel bleibt die Masse beider Substanzen erhalten. Warum führt die Pyknometermethode trotzdem i. allg. zu falschen Ergebnissen hinsichtlich der zu bestimmenden Dichte?

Zur Durchführung

Zu Aufgabe 1

Zunächst muß die Masse des leeren Pyknometers bestimmt werden. Die notwendigen Angaben über die Empfindlichkeit der Waage kann man den Angaben am Arbeitsplatz entnehmen. Die auf 1 mg genau ermittelte Masse m_0 wird mit ihrer Meßunsicherheit angegeben. Danach wird die Meßflüssigkeit in das Pyknometer eingefüllt und der Schliffstopfen eingesetzt. Das Pyknometer ist in eine Glasschale oder auf eine saugfähige Unterlage zu stellen, um Verunreinigungen am Arbeitsplatz zu vermeiden! Die auslaufende Flüssigkeit muß von der Außenfläche des Pyknometers sorgfältig und restlos abgewischt werden, wozu die Benutzung eines nicht fasernden Lappens zu empfehlen ist. Dann wird die Masse des gefüllten Pyknometers als $\overline{m_V} \pm u(\overline{m_V})$ - wiederum über die Empfindlichkeit und die Verschiebung der Gleichgewichtslage bis auf 1 mg genau korrigiert - bestimmt. Zur Berechnung der gesuchten Dichte ϱ_F der Meßflüssigkeit benutzt man Gl. (23).

F 17 Vergleichen Sie das so erhaltene Ergebnis mit dem nach Gl. (19) bestimmten Wert! Wie groß ist der Einfluß der Luftauftriebs-Korrektur?

Die Temperatur ϑ der Flüssigkeit bestimmt man nach erfolgter Wägung durch Einsetzen eines genügend genauen Thermometers in das Pyknometer.

Zu Aufgabe 2

Wenn mit der in Aufgabe 1 untersuchten Flüssigkeit weitergearbeitet wird, kann man gleich den dort bestimmten Wert für m_V verwenden. Anderenfalls muß man die Dichte der Hilfsflüssigkeit (i. allg. destilliertes Wasser) - für die Arbeitstemperatur korrigiert - einer Tabelle entnehmen und die Masse des mit dieser Flüssigkeit gefüllten Pyknometers analog zu Aufgabe 1 zunächst durch Wägung bestimmen. Die gekennzeichneten Untersuchungskörper sind aus gleichem Material und müssen einzeln gewogen werden; ihre Massen m_{Ki} werden mitsamt Vertrauensabweichung im Protokoll angegeben. Damit Sie möglichst rationell arbeiten, geben Sie zunächst den ersten Untersuchungskörper in

das flüssigkeitsgefüllte Pyknometer. - Achtung, nicht werfen oder fallen lassen, sondern den Körper am Rand des geneigt gehaltenen Pyknometers hinabgleiten lassen! - Nach dem Einsetzen des Schliffstopfens - Unterlage benutzen - muß das Pyknometer wieder sorgfältig abgewischt werden, bevor die Wägung ausgeführt und m_{K1} angegeben wird. Anschließend legen Sie den zweiten Untersuchungskörper ebenfalls mit in das Pyknometer. Es befinden sich jetzt zwei Körper darin, deren Gesamtmasse Sie aus den schon ausgeführten Einzelwägungen leicht bestimmen können. Sie brauchen also nur das gefüllte Pyknometer zu wägen und das Ergebnis $m_{K1,2}$ anzugeben. Analog verfahren Sie dann mit dem dritten Untersuchungskörper.

Durch dieses Verfahren ersparen Sie sich das Entleeren und erneute Füllen des Pyknometers, ohne die Messungen negativ zu beeinflussen. Alle Wägungen werden nach den oben gegebenen Hinweisen ausgeführt und über die Empfindlichkeit der Waage korrigiert. Auf Grund der erzielten Meßunsicherheiten muß man entscheiden, ob der Berechnung der Meßunsicherheit der Dichte ϱ_K Gl. (26) oder Gl. (25) zugrunde zu legen ist.

2.3.4. Bestimmung der relativen Gasdichte mit dem Effusiometer nach BUNSEN

Für stationäre reibungsfreie Gasströmungen ist das zur Begründung der verschiedensten Erscheinungen vorherrschende Gesetz die Bernoullische Gleichung. Am Beispiel des Effusiometers nach BUNSEN soll gezeigt werden, wie diese Gleichung gehandhabt werden muß. Zugleich zeigt die Effusionsmethode, wie durch eine indirekte Meßmethode die Bestimmung einer gesuchten Größe (häufig) vereinfacht werden kann, die Anwendung aber ein genaueres Durchdringen der Problematik und Kenntnisse über Zusammenhänge voraussetzt.

Aufgabe

Die relative Gasdichte D eines Gases soll mittels Effusiometers nach der Bunsenschen Ausströmungsmethode bestimmt werden. Aus dem experimentell bestimmten Wert für D soll die relative Molekülmasse des gemessenen Gases berechnet und mit dem Literaturwert verglichen werden.

Grundlage

Ein zylindrisches Gefäß (Volumen V, Querschnitt A') sei mit einem Gas (Dichte ϱ) gefüllt und nach unten durch eine bewegliche Grenz-

fläche (Flüssigkeit/Gas) abgeschlossen. Durch eine enge Düse (Querschnitt A) kann das Gas ausströmen, wobei es zu Beginn unter dem Druck p stehen soll, während der Druck der Außenatmosphäre p_o sei. Dann gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{A'v' = Av,} \qquad (1)$$

wobei v' die Geschwindigkeit ist, mit der sich die bewegliche Grenzfläche (= abschließender Meniskus) bewegt; v ist die Ausströmgeschwindigkeit des Gases aus der Düse (Abb. 2.3.(4)).

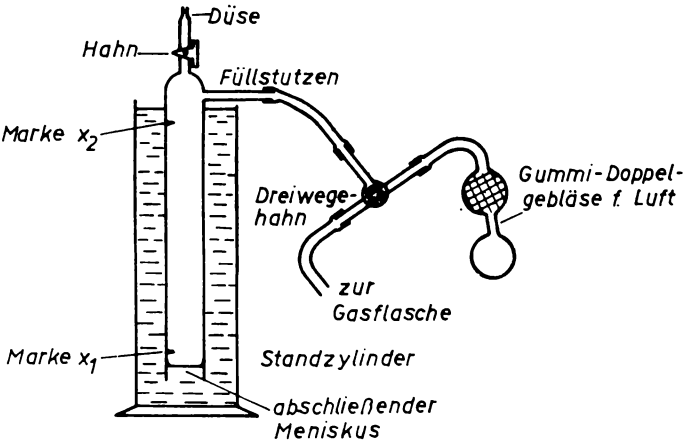


Abb. 2.3.(4) Effusiometer

Unter der Voraussetzung einer stationären reibungsfreien Strömung lautet der Energieerhaltungssatz

$$mgh + \frac{mp}{\varrho} + \frac{1}{2} mv^2 = \text{const}, \qquad (2)$$

d. h., die Summe aus potentieller Energie, Druckenergie und Bewegungsenergie ist konstant. Es müssen sich also stets mindestens zwei Energieanteile ändern, wenn nicht alle drei konstant bleiben. Wird Gl. (2) durch das Volumen V dividiert, so ergibt sich die Bernoullische Gleichung

$$\boxed{\varrho g h + p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \text{const.}} \tag{3}$$

Wendet man die Bernoullische Gleichung auf die Strömung des Gases durch das zylindrische Gefäß an, so erhält Gl. (3) die Form

$$\varrho g h + p_o + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \varrho g x + \varrho_F g(y - x) + p_o + \frac{1}{2}\varrho v'^2. \tag{4}$$

Hierbei bedeuten h die Höhe der Düsenöffnung über dem Boden des Standzylinders, x die Höhe der unteren Flüssigkeitsoberfläche (abschließender Meniskus) über dem Boden, y die Höhe der oberen Flüssigkeitsoberfläche über dem Boden. Durch Substitution von Gl. (1) in der Form $v' = v\,A/A'$ und Vereinfachung wird daraus

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 \left[1 - \left(\frac{A}{A'}\right)^2\right] = \varrho_F g(y - x) - \varrho g(h - x). \tag{5}$$

Da $\varrho_F \gg \varrho$ ist, folgt

$$\varrho = \frac{2\varrho_F g(y - x)}{v^2\left[1 - (A/A')^2\right]}. \tag{6a}$$

Speziell für Luft als Füllgas hat Gl. (6a) die Form

$$\varrho_L = \frac{2\varrho_F g(y - x)}{v_L^2\left[1 - (A/A')^2\right]}, \tag{6b}$$

und die beiden Gleichungen liefern nach Division durcheinander die Bestimmungsgleichung

$$\varrho/\varrho_L =: D = v_L^2/v^2 \tag{7}$$

für die relative Gasdichte D. Nachteilig ist nur, daß die Geschwindigkeit der aus der Düse ausströmenden Gase auf einfache Weise nicht gemessen werden kann und sich außerdem während des Ausströmens in Abhängigkeit von $y - x$ ändert.

Folgende Überlegung eliminiert die Geschwindigkeiten und ersetzt sie durch einfach zu messende Größen. Die Geschwindigkeit v', mit der die Trennfläche Flüssigkeit-Gas sich bewegt, ist mit Gl. (6a) bestimmbar als

$$v' = \frac{A}{A'} v = \frac{A}{A'} \sqrt{\frac{2 F g}{1 - (A/A')^2}} \sqrt{\frac{y - x}{\varrho}} =: K \sqrt{\frac{y - x}{\varrho}} = \frac{dx}{dt} .$$

Also gilt

$$t = \frac{\sqrt{\varrho}}{K} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{y - x}} . \qquad (8)$$

Anstelle der Geschwindigkeit ist jetzt die Zeit t zu messen, in welcher der Flüssigkeitsmeniskus von einer Marke x_1 bis zu einer Marke x_2 steigt. Da diese Meßmarken am Gefäß fest angebracht sind, handelt es sich bei dieser Zeit um die Ausströmzeit eines wohldefinierten Gasvolumens, und das Integral ist eine nur vom apparativen Aufbau abhängige, bei Wiederholungen mit dem gleichen Gerät also konstante Größe.

Wird Gl. (8) durch die analoge, für Luft als spezielles Füllgas geschriebene Form dividiert, so folgt nach Quadrieren

$$\boxed{D = \varrho/\varrho_L = t^2/t_L^2 .} \qquad (9)$$

Die relative Dichte eines Gases kann bestimmt werden, wenn bei Vergleichsmessungen mit Luft gleiche Volumina (Gas oder Luft) unter gleichen Bedingungen (gleiche Apparatur) aus einer Düse ausströmen. Dabei verhalten sich die Dichten wie die Quadrate der zugehörigen Ausströmzeiten.

Die eingangs gemachten Voraussetzungen (inkompressibel, reibungsfreie stationäre Strömung) sind im praktischen Fall nicht genau erfüllt, da weder Luft noch die anderen zur Messung benutzten Gase sich wirklich wie ideale Gase verhalten: Die Dichte ist während des Ausströmens nicht konstant und ändert sich bei den verschiedenen Gasen auch unterschiedlich; die Reibungskräfte sind i. allg. ebenfalls unterschiedlich, da die Gase in ihrer Viskosität nicht übereinstimmen. Die Einflüsse der Düsenform und dadurch bedingte Einschnürungen im Gasstrom sind i. allg. von geringer Bedeutung, da diese Einflüsse bei den verschiedenen Gasen nahezu übereinstimmen und die Strahleinschnürungen wie virtuelle Düsenverengungen wirken.

Die nach der Effusiometermethode bestimmten Werte der relativen Gasdichte sind also mit systematischen Fehlern behaftet, wobei diese um so stärker ins Gewicht fallen, je größer der Viskositätsunterschied des Gases zu Luft ist.

Zur Durchführung

Als Gasgefäß wird z. B. eine Müllersche Glocke benutzt, das ist ein zylindrisches Glasgefäß von wenigen Zentimetern Durchmesser und etwa 50 cm Länge, das am oberen Ende mit einem (Dreiwege-) Hahn abgeschlossen ist. Dieses Gefäß ist in einen entsprechend weiten und hohen Standzylinder hineingesteckt. Anstelle des üblicherweise benutzten Quecksilbers als Sperrflüssigkeit wird Wasser verwendet. Der Standzylinder darf nicht zu hoch mit Wasser gefüllt werden, damit die gasgefüllte Müllersche Glocke das Wasser nicht zum Überlaufen bringt.

Bevor die eigentlichen Messungen beginnen können, muß das Gasgefäß ausgespült werden, um damit zu erreichen, daß die Füllung aus vollständig reinem Gas besteht. Dazu wird die Müllersche Glocke bei geöffnetem Hahn so weit in den wassergefüllten Standzylinder eingetaucht, daß der (gemeinsame) Wasserspiegel die obere Meßmarke x_2 um einiges übersteigt (falls das möglich ist, sollte er bis zum Hahnküken steigen!) Der Dreiwegehahn wird in Füllstellung gedreht und das zu untersuchende Gas in langsamem Strom eingelassen. Wenn bekannt ist, daß das zu untersuchende Gas von größerer Dichte als die vorherige Füllung ist, kann die Ausströmdüse ebenfalls geöffnet sein.

F 18 Welchen Vorteil bietet diese Füllmethode?

Knapp vor Erreichen des unteren Endes der Müllerschen Glocke muß der Wassermeniskus durch Abdrehen des Gaszustromes angehalten und der Dreiwegehahn in Sperrstellung gebracht werden.

F 19 Warum darf die Müllersche Glocke nicht bis zum "Überlaufen" gefüllt werden?

Nachdem die Sperrflüssigkeit sich beruhigt hat, wird die Ausströmdüse geöffnet und mit einer Stoppuhr die Ausströmzeit zwischen den Marken x_1 und x_2 gemessen. Anschließend wird erneut gefüllt (s. o.) und die Messung der Ausströmzeit wiederholt. Diese Schritte werden zunächst so oft wiederholt, bis die Gasfüllung mit Sicherheit reines Gas ist.

F 20 Woran kann man erkennen, daß die Füllung aus wirklich reinem Gas besteht?

Erst dann dürfen die der Auswertung zugrunde gelegten Messungen durchgeführt werden. Achten Sie darauf, daß sich der innere Flüssigkeitsmeniskus beruhigt haben muß, bevor die Düse geöffnet wird. Um die Meßzeitpunkte möglichst exakt zu bestimmen, sollte das Auge des

Beobachters sich mit der Meßmarke auf gleicher Höhe befinden; gestoppt wird dann genau in dem Augenblick, wo Flüssigkeitsmeniskus und Ringmarke als zwei identische Striche gesehen werden. Gleiches geschieht auch an der oberen Marke, wobei infolge der geringen Geschwindigkeit bei nicht genügender Aufmerksamkeit leicht Meßfehler entstehen können.

Aus einer genügenden Zahl von Wiederholungen wird der Mittelwert der Ausströmzeit berechnet und dann quadriert; Meßunsicherheitsangaben nicht vergessen! Zur Wiederholung des Meßprogramms mit einem anderen Gas ist in gleicher Weise zu verfahren: Zuerst durch etwa zehn Spülfüllungen dafür sorgen, daß die Gasfüllung rein ist (Kontrolle anhand der Ausströmzeiten), dann Ausführung der geforderten Anzahl von Wertungsmessungen, Mittelwertbildung und Quadrieren. Die Berechnung von D geschieht mit Gl. (9).

Um als Ergebnis die relativen Gasdichten angeben zu können, muß eine der Meßreihen mit Luft durchgeführt werden. Um für die Strömung reproduzierbare Verhältnisse zu schaffen, sollte das Hahnküken immer in gleichem Drehsinn geöffnet bzw. entgegengesetzt geschlossen werden, damit die Bohrung des Hahnkükens stets in gleicher Richtung durchströmt wird.

F 21 Warum muß das gesamte Meßprogramm wiederholt werden, wenn infolge unachtsamen Füllens durch Gasblasen Wasser aus dem Standzylinder herausgeschwappt wird?

Wenn die zu untersuchenden Gase am Versuchsplatz in einem Gasentwicklungsapparat erzeugt werden, müssen sie vor dem Einleiten in die Müllersche Glocke gereinigt und getrocknet werden.

F 22 Warum ist das unbedingt notwendig?

Stehen die Untersuchungsgase in Druckflaschen zur Verfügung, so sind unbedingt die Arbeitsschutzhinweise zu beachten! Das Betätigen des Reduzierventils an der Gasflasche darf nur durch den Betreuer geschehen.

F 23 Wie wirkt es sich auf das Ergebnis aus, wenn die Messungen nach der Ausströmmethode nicht unter "Normalbedingungen" durchgeführt werden?

Fragen
.....

F 1 bis F 23 siehe Text.

2.4. Schwingungen

2.4.1. Bestimmung der Gravitationsfeldstärke

Mit Hilfe eines Fadenpendels oder einer fallenden Stimmgabel kann die lokale Gravitationsfeldstärke bestimmt werden. Neben der Anwendung einfachen experimentellen Zubehörs soll insbesondere der Gültigkeitsbereich der Meßgleichung beachtet werden.

Aufgaben

1. Für die geografische Lage des Meßortes ist der Wert der Erdfeldstärke g aus der Schwingungsdauer eines Fadenpendels zu bestimmen.
2. Der Einfluß der Amplitude auf die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist zu untersuchen und grafisch darzustellen.
3. Der Wert von g ist mit Hilfe einer Stimmgabel und einer fallenden berußten Platte zu bestimmen.

Grundlagen

Das Fadenpendel (Abb. 2.4.(1)) ist ein physikalisches Pendel. Man kann es - idealisiert - als mathematisches Pendel darstellen. Dafür gilt die Formel für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots \right] . \qquad (1)$$

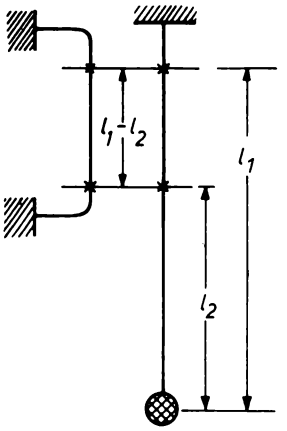


Abb. 2.4.(1) Fadenpendel mit Aufhängung für die Differenzlängenmethode

T ist abhängig von der Länge des Pendels l und der Amplitude α. Selbstverständlich gilt diese Beziehung nur für ein im Vakuum schwingendes Pendel. - Die Größe g ist abhängig von der geografischen Breite und der Ortshöhe über Meeresniveau sowie von Erzlagerstätten.

Für hinreichend kleine Auslenkungswinkel α kann man den Ausdruck in der eckigen Klammer näherungsweise gleich Eins setzen, so daß man für g die einfache Beziehung erhält $g = l(2\pi/T)^2$. Geht man von der einfachen Beziehung für T aus, so beträgt der relative Fehler gegenüber dem exakten Wert bei $\alpha = 1^\circ$ ca. $2 \cdot 10^{-5}$, bei $\alpha = 2^\circ$ ca. 10^{-4} und bei $\alpha = 5^\circ$ ca. $2 \cdot 10^{-4}$.

Die Länge des Pendels l ist der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Aufhängepunkt (Drehpunkt). Wenn sie nicht genau meßbar ist, wendet man die Differenzmethode an: Man bestimmt dann die zu den Längen l_1 und l_2 gehörenden Schwingungsdauern T_1 und T_2. Damit erhält man die Meßgleichung $g = 4\pi^2(l_1 - l_2)/(T_1^2 - T_2^2)$.

F 1 Leiten Sie diese Gleichung her!

Die Erdfeldstärke g kann auch aus dem Weg-Zeit-Gesetz des freien Falles $s = gt^2/2$ ermittelt werden: $g = 2s/t^2$. Man läßt z. B. eine berußte Platte an einer schwingenden Stimmgabel vorbei fallen, so daß der Schreibstift der Stimmgabel die Weg-Zeit-Markierung aufschreibt (Abb. 2.4.(2)). Ist $\overline{AB} = l$ der Fallweg in der Zeit t (Abb. 2.4.(3)),

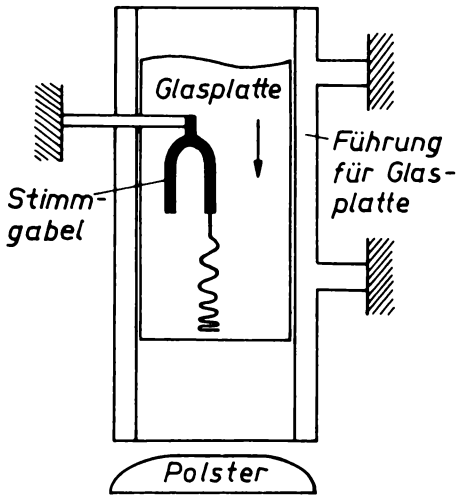


Abb. 2.4.(2) Bestimmung von g mit fallender Glasplatte und Stimmgabel

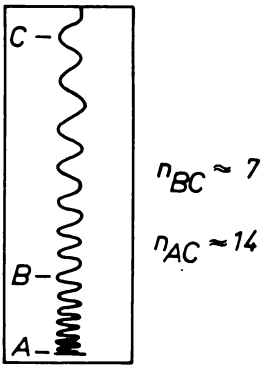


Abb. 2.4.(3) Ausmessen einer Spur auf der berußten Glasplatte

so durchfällt die Platte in der Zeit 2t den Weg $\overline{AC} = 4l$, d. h., für die Strecke $\overline{BC}$ wird ebenfalls die Zeit t benötigt. Da f die Frequenz der Stimmgabel ist, so entsprechen n Perioden der Zeit $t = n/f$, so daß man erhält $g = 2lf^2/n^2$ bzw. $= \overline{AC} \cdot f^2/2n^2$.

Zur Durchführung und Auswertung

Zu Aufgabe 1

Bei Verwendung einer (1/5)s-Stoppuhr sollte die Zeitmessung mindestens über 10 Perioden erfolgen. Die einzustellenden Differenzen $l_1 - l_2$ sollten nicht kleiner als 30 cm sein. Der Mittelwert der Erdfeldstärke g soll aus mindestens drei verschiedenen Längendifferenzen rechnerisch durch das gewogene Mittel und grafisch bestimmt werden.

Zu Aufgabe 2

Aus Gl. (1) erhält man als zweite Näherung $T = 2\pi \sqrt{l/g}(1 + \alpha^2/16)$.

F 2 Leiten Sie die zweite Näherung für T^2 her!

Um den Sachverhalt, daß sich die Schwingungsdauer mit der Amplitude α vergrößert, experimentell zu untersuchen, sind die Auslenkungen in Schritten von 5 cm zu vergrößern und die zugehörigen Zeiten für jeweils wieder mindestens 10 Perioden zu messen. Statt α kann man die Auslenkung x_m wählen. Man stellt die Funktion $T = T(x_m^2)$ grafisch dar und vergleicht sie mit $T = T(\alpha^2)$.

Zu Aufgabe 3

Die Stimmgabel wird in ihrer Halterung so angebracht, daß die federnde Schreibspitze leicht auf die in der oberen Lage festgehaltene Glasplatte drückt. Nach dem kräftigen Anschlagen der Stimmgabel mit einem Gummihammer muß die Glasplatte - zwecks Markierung des Anfangspunktes - kurze Zeit festgehalten werden, ehe man sie in ihrer Führung auf ein am unteren Ende der Apparatur angebrachtes Polster fallen läßt. Längs der aufgezeichneten Spur werden von der Anfangsmarkierung aus die Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ mit $\overline{AB}:\overline{AC} = 1:4$ aufgetragen und die Zahl der Schwingungen im Bereich $\overline{BC}$ genau ausgezählt (Abb. 2.4.(3)).

F 3 Warum ist ein Auszählen im Bereich $\overline{AB}$ nicht sinnvoll?

Durch seitliches Verschieben der Stimmgabel in ihrer Halterung lassen sich auf der Glasplatte mehrere Spuren nebeneinander aufzeichnen, wobei die Messungen in der gleichen Weise ablaufen. Es sind mindestens drei Messungen durchzuführen. Es wird der Mittelwert als gewogenes Mittel angegeben.

F 4 Wie ist das Auswerteverfahren sinnvoll auszuführen, wenn eine hohe Genauigkeit erreicht werden soll?

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

F 5 Wodurch erreicht man, daß die Schwingungsdauern bei unterschiedlichen Auslenkungen des Fadenpendels gleich bleiben?

F 6 Was versteht man unter einer Tautochrone?

F 7 Ein Körper soll sich zwischen zwei (nicht vertikal) übereinanderliegenden Punkten bewegen. Auf welcher Bahn benötigt er dafür die kürzeste Zeit?

F 8 Geben Sie weitere Methoden zur Bestimmung von g an!

F 9 Was ist ein Reversionspendel?

F 10 Wie lautet die Differentialgleichung für die Pendelschwingung? Legen Sie den Lösungsweg dar!

2.4.2. Bestimmung der Federkonstante

Das Hookesche Gesetz wird für einen Sonderfall betrachtet. Dabei werden statisches und dynamisches Verfahren zur Bestimmung einer Materialkonstante gegenübergestellt und das Messen von Längen und Zeiten geübt.

Aufgaben

1. Die Proportionalität zwischen der Längenänderung einer Schraubenfeder und einer Gewichtskraft soll rechnerisch und durch grafische Darstellung bestätigt werden. Aus den Meßergebnissen ist die Federkonstante k zu bestimmen (statisches Verfahren).
2. Die Abhängigkeit des Quadrats der Schwingungsdauer von der Masse der aufgelegten Wägestücke eines Federschwingers soll rechnerisch und grafisch untersucht werden.
3. Unter Benutzung der Ergebnisse von Aufgabe 1 und 2 ist die Masse eines gegebenen Körpers zu bestimmen.

Grundlagen

Hängt man einen Körper der Masse m an das untere Ende einer senkrecht aufgehängten Schraubenfeder, so erhält man ein schwingungsfähiges System, den Federschwinger. Die rücktreibende Kraft rührt

aus der elastischen Verformung der Schraubenfeder her.

Mit dem Hookeschen Gesetz $F_r = -kx$ lautet die Bewegungsgleichung $mx + kx = 0$. Hieraus folgt für die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

F 1 Zeigen Sie, wie man von der Bewegungsgleichung zur Beziehung für die Schwingungsdauer gelangt!

Zur Durchführung und Auswertung

Zu Aufgabe 1

Das obere Ende der Feder wird an der Aufhängung befestigt und das untere Ende durch eine Waagschale vorbelastet. Durch Auflegen von Wägestücken kann die Belastung in geeignet gewählten Schritten - z. B. von je 0,1 kg - verändert werden. Bringt man einen Maßstab geeignet an, so läßt sich an ihm die zur jeweiligen Belastung gehörende Längenänderung direkt (Nullmarke des Maßstabes stimmt mit dem Meßpunkt an der vorbelasteten Feder überein) oder als Differenz aus der End- und Anfangslage ablesen.

F 2 Warum ist die Verwendung eines Spiegelmaßstabes oder eines Kathetometers zu empfehlen?

F 3 Wie muß die Meßmarke an der Feder gewählt werden?

Die Messungen sind in einem angemessenen Bereich sowohl für zunehmende als auch für abnehmende Belastung mehrfach zu wiederholen. Für die grafische Darstellung $x = x(m)$ sind die Mittelwerte aller Messungen der Längenänderung zu jeweils einer Belastungsstufe zu verwenden. Es ergibt sich eine Gerade, aus deren Steigung die Federkonstante ermittelt werden kann.

F 4 Wie hängen Federkonstante und Steigung der Geraden zusammen?

Für die rechnerische Auswertung ist es zweckmäßig, ebenfalls mit den Mittelwerten aller Messungen zur jeweiligen Belastungsstufe zu arbeiten. Die so bestimmten Quotienten mg/x sind für die einzelnen Belastungsstufen - im wesentlichen - konstant.

Zu Aufgabe 2

Es ist zu beachten, daß die Masse der Waagschale in die Berechnung der Schwingungsdauer mit einbezogen werden muß; d. h., es gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_W}{k}} .$$

Für eine genaue Betrachtung muß noch beachtet werden, daß auch die Federmasse mit einem bestimmten Anteil m'_F in die Bestimmungsgleichung eingeht.

F 5 Wie lautet dann die vollständige Gleichung für die Schwingungsdauer?

Ist die Masse der Waagschale m_W nicht bekannt, so kann man durch die Differenzenmethode (vgl. 2.4.1.) m_W eliminieren:

$$T_1^2 - T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 - m_2}{k};$$

hierin sind m_1 und m_2 die Massen der auf die Waagschale aufgelegten Körper (Wägestücke). Für eine grafische Lösung ist es zweckmäßig, die Meßgleichung in die Formen

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{m + m_W}{k} \quad \text{bzw.} \quad m + m_W = \left(k \frac{T}{2\pi}\right)^2$$

umzuschreiben. Der abgelesene Anstieg der Geraden ist dann der Reziprokwert bzw. der direkte Wert der gesuchten Federkonstante. Für die Fehlerrechnung zur rechnerischen Auswertung gilt das bei Aufgabe 1 Gesagte analog.

Zusatz: Wird bei dieser Aufgabe eine Kombination zweier gleicher Federn (parallel oder hintereinander aufgehängt) benutzt, so ist die resultierende Federkonstante auch in Abhängigkeit von der Federkonstante der Einzelfedern anzugeben. Die gefundenen Beziehungen sind zu begründen.

Zu Aufgabe 3

Zur Massenbestimmung sind beide Methoden - sowohl die statische als auch die dynamische - zu verwenden. Die Ergebnisse sind in einem Mittelwert zusammenzufassen und kritisch zu diskutieren. Beachten Sie, daß im Falle der dynamischen Methode bei der rechnerischen Ermittlung der Federkonstante wieder die Masse der Waagschale berücksichtigt werden muß!

Zusatzaufgaben

1. Anstelle von Einzelfedern sind zwei gleiche Federn in Reihe bzw. parallel aufgehängt zu benutzen.
2. Geben Sie an, in welchem Maße die Masse der Feder an der Schwingung beteiligt ist! Prüfen Sie, ob die Meßgenauigkeit Ihrer Messungen ausreicht, den mitschwingenden Anteil der Federmasse auch experimentell zu bestimmen!

Fragen

F 1 bis F 5 siehe Text.

2.5. Thermometrie

2.5.1. Messungen mit dem Gasthermometer

Es soll bei diesem Experiment vor allem erkannt werden, wie vielfältig die Vereinfachungen und Vernachlässigungen bei einer Anwendung der Zustandsgleichung idealer Gase auf ein reales Problem sind.

Aufgaben

1. Mit Hilfe eines luftgefüllten Gasthermometers sind etwa 20 verschiedene Temperaturen zwischen der Schmelztemperatur des Eises und der Siedetemperatur des Wassers zu bestimmen.
2. Im untersuchten Temperaturintervall ist ein Thermoelement zu eichen.

Grundlagen

Ein Gasthermometer (Abb. 2.5.(1)) besteht aus einem gasgefüllten Glaskolben, der durch eine Kapillare mit einem offenen Quecksilber-

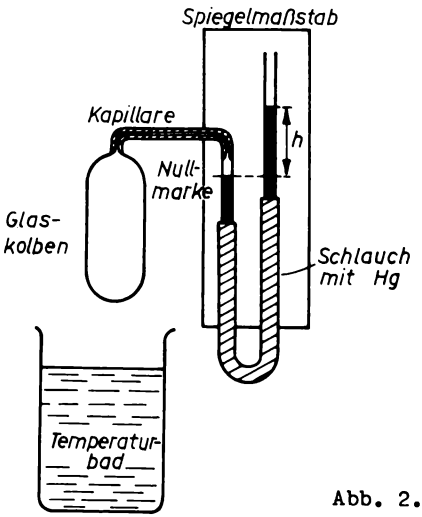


Abb. 2.5.(1) Gasthermometer

manometer verbunden ist. Mit Hilfe der Schlauchverbindung kann durch Höhenverstellung des rechten Manometerrohres das Quecksilber im linken Rohr stets auf die gleiche Marke eingestellt werden. Dadurch arbeitet man mit einem konstanten Gasvolumen. Die Zustandsgleichung idealer Gase

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_o V_o}{T_o} \qquad (1)$$

vereinfacht sich für diesen Fall wegen $V_1 = V_o$ zu

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_o}{T_o} \; . \qquad (2)$$

Hierbei ist p_o der Druck im Glaskolben bei der Temperatur T_o, p_1 der Druck bei der Temperatur T_1.

Nimmt man beispielsweise den Schmelzpunkt des Eises bei 760 Torr als Anfangstemperatur T_o an, so kann man mit einem Gasthermometer andere Temperaturen durch Druckmessungen bestimmen. Für den Gasdruck im Kolben gilt

$$p = p_B + p_h \; . \qquad (3)$$

p_B ist der äußere Luftdruck (Barometerstand), p_h ist der durch die Quecksilbersäule der Höhe h erzeugte Überdruck. Eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe erzeugt bei 0 °C hinreichend genau einen Schweredruck von 1 Torr.

F 1 Weshalb kann man den Schweredruck einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe bei 0 °C nicht als genau gleich 1 Torr ansehen?

Bei Benutzung der Gleichung 2 zur Bestimmung der zu messenden Temperatur muß man sich darüber klar werden, daß eine Reihe zum Teil recht grober Vereinfachungen vorgenommen wird:

- Das Gas im "schädlichen Volumen", d. h. in der Kapillare und im linken Manometerrohr über der Marke, nimmt nicht die zu messende Temperatur an, sondern bleibt etwa auf Zimmertemperatur.
- Die thermische Ausdehnung des Glaskolbens wird nicht berücksichtigt.

F 2 Wie wirken sich diese Fehlerquellen auf die Messung einer Temperatur aus, die höher liegt als die Anfangstemperatur?

- Das Füllgas wird als ideales Gas aufgefaßt, ohne daß eine Extrapolation auf verschwindenden Druck vorgenommen wird.

F 3 Wie wäre eine solche Extrapolation vorzunehmen?

Zur Durchführung des Experiments

Vor jeder Abkühlung des eingeschlossenen Gasvolumens muß der rechte Manometerschenkel abgesenkt werden, damit kein Quecksilber in den Glaskolben gelangen kann. Der Glaskolben wird vorsichtig mit einer Eis-Wasser-Mischung umgeben.

Besonders sorgfältig (mehrmals) ist der Gasdruck bei der Schmelztemperatur des Eises und bei der Siedetemperatur des Wassers zu bestimmen. Im dazwischenliegenden Temperaturintervall sind etwa 20 Temperaturmessungen während des Aufheizens vorzunehmen; zur ungefähren Einteilung der Temperaturintervalle dient ein Quecksilberthermometer.

Als zusätzliche Aufgabe kann ein Thermoelement geeicht werden.

Eine Lötstelle dieses Elements befindet sich während des gesamten Experiments in einer Eis-Wasser-Mischung, während sich die zweite Lötstelle im gleichen Wasserbad wie der Glaskolben des Gasthermometers befindet. Bei jeder Temperaturmessung wird auch die Thermospannung gemessen.

F 4 Nennen Sie geeignete Kombinationen verschiedener Metalle, die als Thermoelemente verwendet werden! Welche Eigenschaften sind wünschenswert?

Zur Auswertung

Es ist zweckmäßig, bereits im Meßprotokoll eine Tabelle vorzusehen, die alle Meßwerte, die Zwischenergebnisse und auch die Endergebnisse aufnehmen kann. Bei der Druckbestimmung ist zu beachten, daß das Quecksilber im Manometer nicht die Temperatur 0 °C hat, so daß eine Reduktion erforderlich ist (Tabelle "Barometerablesung").

F 5 Diskutieren Sie die Verfälschung des Ergebnisses bei unterlassener Reduktion der Manometerablesung!

Für die gasthermometrisch bestimmte Temperatur des siedenden Wassers ist die relative Vertrauensabweichung zu berechnen. Das Ergebnis ist kritisch einzuschätzen.

Die Thermospannung wird als Funktion der gasthermometrisch gemessenen Temperatur grafisch dargestellt.

Weitere experimentelle Aufgaben

1. Bestimmung des Spannungskoeffizienten eines Gases. Die Bestimmung ist möglich, wenn im Gegensatz zu der hier angegebenen Auswertung

zwei Temperaturen als bekannt vorausgesetzt werden können.

2. Extrapolation auf das Ergebnis, das bei verschiedenen Drücken zu erreichen wäre.

Die hier beschriebene Temperaturmessung ist bei verschiedenen Anfangsdrücken p_0 durchzuführen. Eindeutige Extrapolationen erfordern eine hohe Meßgenauigkeit bei der Druckmessung oder die Verwendung eines Meßgases, welches vom Verhalten eines idealen Gases stark abweicht.

Fragen

F 1 bis F 5 siehe Text.

F 6 Wie ist die (thermodynamische) Temperatur und ihre SI-Einheit definiert?

F 7 Wie ist ein ideales Gas definiert?

F 8 Geben Sie die Zustandsgleichung idealer Gase für die Spezialfälle der isothermen, isobaren und isochoren Zustandsänderung an!

F 9 Geben Sie verschiedene technische Möglichkeiten der Temperaturmessung an!

2.6. Kalorimetrie

2.6.1. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Stoffe

Mit kalorimetrischen Messungen kann die Änderung einer Zustandsgröße eines thermodynamischen Systems dann ermittelt werden, wenn diese Änderung für spezielle Prozesse gleich der zu- oder abgeführten Wärme wird. Mit solchen Messungen können Materialgrößen bestimmt werden. Kalorimetrische Messungen werden auch im physikalischen Praktikum der Schulen ausgeführt, so daß sich Lehrerstudenten mit dieser Problematik auseinandersetzen müssen.

Aufgaben

1. Die Wärmekapazität eines Kalorimeters ist zu ermitteln.
2. Die spezifischen Wärmekapazitäten mehrerer Metalle sind nach der Mischungsmethode zu bestimmen.
3. Aus den spezifischen Wärmekapazitäten sind die molaren Wärmekapazitäten zu berechnen.

Apparatur

Um den Wärmeaustausch mit der Umgebung gering zu halten, wird als

Kalorimetergefäß ein Dewar-Gefäß verwendet. Das ist ein doppelwandiges evakuiertes und verspiegeltes Glasgefäß. Es enthält zur Verminderung der Bruchgefahr einen Metalleinsatz und muß wegen der Gefahr einer Implosion stets von einer Schutzhülle umgeben sein. Die Probekörper werden im Wasserbad auf ihre Anfangstemperatur gebracht (Abb. 2.6.(1)).

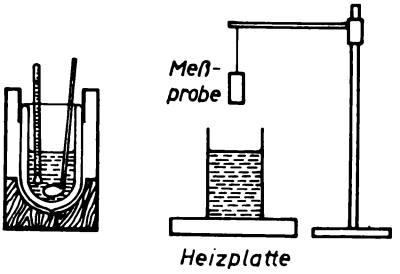


Abb. 2.6.(1) Kalorimeter und Heizvorrichtung

F 1 Warum ist der Doppelmantel des Dewar-Gefäßes verspiegelt und evakuiert?

Grundlagen

Die Definitionsgleichung der Zunahme der inneren Energie lautet

$$\boxed{dU := đQ + đW.} \qquad (1)$$

Hierbei bedeutet $đQ > 0$ die dem System in Form von Wärme und $đW > 0$ die dem System als Arbeit zugeführte Energie. Gleichung (1) vereinfacht sich für den bei kalorischen Messungen häufig vorliegenden Fall, daß keine Energie in Form von Arbeit mit der Umgebung ausgetauscht wird, wenn also $đW = 0$ ist, zu

$$dU = đQ. \qquad (2)$$

Die Wärmekapazität eines Systems bei konstantem Volumen ist definiert als

$$\boxed{C_V := \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V .} \qquad (3)$$

Berücksichtigt man, daß für flüssige und feste Stoffe in guter Näherung $C_p = C_V = C$ gilt, und nimmt man ferner an, daß die Wärmekapazität im untersuchten Temperaturintervall temperaturunabhängig ist, so kann man statt (3) auch schreiben

$$C = \frac{Q}{\Delta T} . \tag{4}$$

F 2 Weshalb ist bei flüssigen und festen Stoffen $C_p \approx C_V$?

Die spezifische Wärmekapazität ergibt sich zu

$$\hat{c} = \frac{Q}{m \Delta T} , \tag{5}$$

wobei m die Masse des Körpers ist. Die molare Wärmekapazität ist

$$c = \hat{c} M. \tag{6}$$

Hierin bedeutet M die molare Masse des Stoffes.

Mit Hilfe der Gleichung (5) kann die Bestimmung der Wärmen erfolgen, die bei speziellen Prozessen einem System zugeführt oder entzogen werden. Dabei wird häufig die spezifische Wärmekapazität des Wassers mit

$$\hat{c}_W \approx 4{,}19 \frac{J}{g \cdot K}$$

als bekannt vorausgesetzt und im betreffenden Temperaturintervall als temperaturunabhängig angenommen.

Nach einem Erfahrungssatz der Thermodynamik - mitunter auch als nullter Hauptsatz bezeichnet - streben zwei zunächst abgeschlossene Teilsysteme A und B einem gemeinsamen thermischen Gleichgewicht (einer gemeinsamen Temperatur) zu, wenn sie in Kontakt miteinander gebracht werden. Wird dabei Energieaustausch in Form von Arbeit ausgeschlossen und ist das Gesamtsystem abgeschlossen, so gilt

$$Q_A + Q_B = 0. \tag{7}$$

Das bedeutet: Die von einem Teilsystem abgegebene Wärme ist gleich der vom anderen Teilsystem aufgenommenen Wärme. Gleichung (7) ist die Grundlage für die aufzustellenden Meßgleichungen.

Bestimmung der Wärmekapazität des Kalorimeters

Da zur Wärmekapazität verschiedene Teile der Anordnung (Metalleinsatz, Dewar-Gefäß, Rührer, Thermometer) beitragen, muß sie durch einen Mischungsversuch experimentell bestimmt werden. Dazu wird das Kalorimeter zu einem Teil mit Wasser (Masse m_A) gefüllt, das die Temperatur T_A hat. Gießt man Wasser einer tieferen Temperatur $T_B < T_A$ zu (Masse m_B), so stellt sich im thermischen Gleichgewicht die Mischungstemperatur T_M ein. Für die gesuchte Wärmekapazität gilt

$$C = \hat{c}_W\left(m_B \frac{T_M - T_B}{T_A - T_M} - m_A\right) . \qquad (8)$$

F 3 Leiten Sie Gl. (8) aus Gl. (7) unter Benutzung der Gleichungen (4) und (5) her!

F 4 Wie müßte die Gl. (8) lauten, wenn sich im Kalorimeter zunächst Wasser der tieferen Temperatur T_B befinden würde?

Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität $\hat{c}_f$ eines festen Stoffes

Auch hier werden die Größen des zunächst höher temperierten Teilsystems mit dem Index A, die des zunächst auf tieferer Temperatur befindlichen Teilsystems mit dem Index B bezeichnet. Der Probekörper aus dem zu untersuchenden Material (Masse m_A) wird auf die Temperatur T_A gebracht. In das Kalorimeter mit der Wärmekapazität C wird Wasser der tieferen Temperatur T_B gefüllt (Masse m_B). Bringt man den Probekörper in das Kalorimeter, so stellt sich allmählich die Mischungstemperatur T_M ein.

Für die spezifische Wärmekapazität des zu untersuchenden Stoffes ergibt sich

$$\hat{c}_f = \frac{(C + m_B\hat{c}_W)(T_M - T_B)}{m_A(T_A - T_M)} . \qquad (9)$$

F 5 Leiten Sie die Gleichung (9) her!

Berücksichtigung des Wärmeaustausches mit der Umgebung

Das für die Gültigkeit der Gl. (7) vorausgesetzte abgeschlossene System läßt sich nicht exakt verwirklichen. Es findet eine Wechselwirkung mit der Umgebung statt, die bei der Bestimmung der Wärme-

kapazität etwa zu dem in Abb. 2.6.(2) dargestellten Temperaturverlauf im Kalorimeter führen kann.

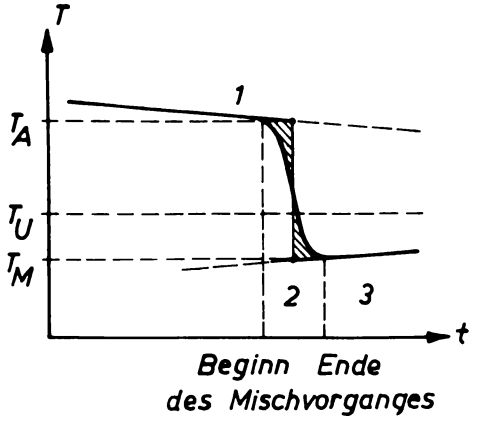


Abb. 2.6.(2) Temperaturverlauf im Kalorimeter

Solange die Temperatur im Kalorimeter über der Umgebungstemperatur T_U liegt, geht Wärme zur Umgebung über (Bereich 1). Die Temperatur fällt dabei nach einem Exponentialgesetz ab. Der Temperaturverlauf läßt sich für die relativ kurze Beobachtungszeit durch eine Gerade gut annähern. Ist die Temperatur im Kalorimeter kleiner als die Umgebungstemperatur, so erfolgt ein Wärmeübergang von der Umgebung zum Kalorimeter. Die Temperatur steigt (Bereich 3). Da auch während der Mischung Kontakt mit der Umgebung besteht (Bereich 2), kann nicht einfach die Temperatur am Ende des Bereichs 1 als T_A und die zu Beginn des Bereichs 3 als T_M angenommen werden.

Es kann gezeigt werden, daß die Temperaturen T_A und T_M sich richtig ergeben, wenn die Temperaturverläufe in den Bereichen 1 und 3 linear extrapoliert werden und eine senkrechte Gerade so eingezeichnet wird, daß die beiden in Abb. 2.6.(2) schraffiert eingezeichneten Flächen gleich groß werden. Die Temperaturen T_A und T_M ergeben sich dabei aus den Schnittpunkten der Extrapolationskurven mit der senkrechten Geraden.

Zur Durchführung

Alle zur Auswertung erforderlichen Massen sind durch Wägung zu bestimmen. Dabei sind die verschiedenen Wassermengen nicht in Bechergläsern, sondern stets im Kalorimeter zu wägen.

F 6 Weshalb führt diese Art der Massenbestimmung bei der Ermittlung der Wärmekapazität des Kalorimeters zu genaueren Ergebnissen als die Wägung des höher temperierten Wassers im Kalorimeter und die des niedriger temperierten Wassers in einem Becherglas?

Wärmekapazität des Kalorimeters

Zunächst bestimmt man die Masse des leeren Kalorimeters. Danach wird das Dewar-Gefäß zu etwa einem Drittel mit Wasser von ungefähr 40 °C gefüllt. Eine zweite Wägung ergibt die Masse dieses Wassers.

Man mißt den Temperaturverlauf im Kalorimeter unter gelegentlichem Umrühren über mehrere Minuten (alle 30s eine Ablesung). Das Kalorimeter wird mit Wasser aufgefüllt, dessen (tiefere) Temperatur T_B unmittelbar vorher bestimmt wurde. Während der Mischung (kräftig rühren!) und danach noch etwa 5 Minuten lang wird die Temperatur gemessen.

Eine dritte Wägung dient zur Bestimmung der Masse m_B.

Achten Sie darauf, daß sich Thermometer und Rührer entweder bei allen Wägungen oder bei keiner Wägung im Kalorimeter befinden! Es ist sinnvoll, die Temperatur gleich als Funktion der Zeit auf Millimeterpapier grafisch darzustellen. Aus der Darstellung, die einen ähnlichen Verlauf wie Abb. 2.6.(2) zeigt, können die zur Auswertung erforderlichen Temperaturen T_A und T_M entnommen werden.

Spezifische Wärmekapazität von Metallen

Der Probekörper muß vor Beginn der Messung mindestens 10 Minuten lang vollständig in siedendes Wasser eintauchen. Er darf die Gefäßwand (oder den Boden) nicht berühren. Das Kalorimeter wird zu zwei Dritteln mit kaltem Wasser gefüllt. (Masse m_B bestimmen!)

Nachdem die Temperatur im Kalorimeter etwa 5 Minuten lang in Abständen von 30s ermittelt ist, wird der Probekörper schnell aus dem siedenden Wasser in das Kalorimeter gebracht. Für die Temperatur T_A kann dann die Siedetemperatur des Wassers angenommen werden. Die Temperaturen T_M und T_B sind der grafischen Darstellung des Temperaturverlaufs zu entnehmen.

Die Anzahl der zu untersuchenden Probekörper (Masse m_A bestimmen!), wird am Experimentierplatz festgelegt. Für alle Meßwerte sind die Meßunsicherheiten zu schätzen.

Zur Auswertung

Es sind neben den Werten auch die absoluten "Größtfehler" der Wärmekapazität des Kalorimeters und der spezifischen Wärmekapazitäten zu ermitteln.

Das Teilchenmodell liefert die Aussage, daß bei nicht zu tiefen Temperaturen die molare Wärmekapazität aller festen Stoffe den gleichen Wert $c = 3\,R$ annimmt (Dulong-Petitsche Regel). Die Voraussetzungen, unter denen diese Regel gilt, sind für Metalle im untersuchten Temperaturbereich erfüllt. Vergleichen Sie die von Ihnen ermittelten molaren Wärmekapazitäten mit diesem theoretischen Wert!

F 7 Leiten Sie die Aussage der Dulong-Petitschen Regel aus dem Gleichverteilungssatz der Energie her!

F 8 Begründen Sie, warum die im Metall als freies Elektronengas betrachteten Elektronen keinen weiteren Beitrag $c = (3/2)R$ zur molaren Wärmekapazität liefern! Zeigen Sie, wie groß der von den Elektronen gelieferte Beitrag tatsächlich ist!

F 9 Die spezifische Wärmekapazität ist temperaturabhängig. Skizzieren und begründen Sie den Verlauf $\hat{c} = \hat{c}(T)$!

Weitere experimentelle Aufgaben

Auf der Grundlage der Gleichungen (4) bis (7) sind auch andere kalorische Messungen möglich. Als Beispiele seien aufgeführt:

- Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Flüssigkeiten mit dem Thermophor.
- Messung einer Flammentemperatur. Hierbei wird in der Flamme ein Metallstück erhitzt und danach in das Kalorimeter gebracht.

Fragen

F 1 bis F 9 siehe Text.

2.7. Strahlenoptik

Einleitung

Die Wirkungsweise der optischen Geräte Lupe, Mikroskop, Fernrohr, Foto- sowie Filmapparate und Bildwerfer wird mit der Strahlenoptik (geometrische Optik) dargestellt. Die nachfolgenden Experiments sollen Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Beherrschung der Gesetze und der Problematik der optischen Abbildung entwickeln.

Ein Gegenstand (Objekt) G läßt sich auf optischem Wege abbilden (siehe Abb. 2.7.(1)), wenn man erreichen kann, daß das von einem Punkt P dieses Gegenstandes ausgehende Licht zumindest zum Teil durch irgendein optisches System S wieder in einem Punkt P' vereinigt wird. Wenn das für alle Punkte P_i des Gegenstandes zutrifft und wenn die Punkte P_i' ähnlich wie die Punkte P_i angeordnet sind, nennt man die Gesamtheit der Punkte P_i' ein "reelles Bild" B des Gegenstandes G.

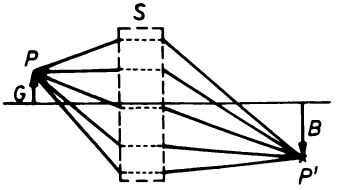


Abb. 2.7.(1) Optisches System, das die Abbildungsbedingung erfüllt

Für die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten dieser Bildentstehung ist es nicht notwendig, das Licht als elektromagnetischen Wellenvorgang zu behandeln. Es genügt, davon auszugehen, daß sich Licht in homogenen Medien geradlinig ausbreitet und nur an den Grenzflächen zweier homogener Medien Richtungsänderungen erfahren kann. Das Teilgebiet der Optik, das sich mit der Untersuchung der Lichtausbreitung unter den genannten Voraussetzungen befaßt, nennt man Strahlenoptik.

Es ist üblich, in der Strahlenoptik mit sogenannten "Lichtstrahlen" zu arbeiten. Man muß dabei bedenken, daß der Lichtstrahl eine Abstraktion darstellt, die für die geometrische Konstruktion des Lichtweges brauchbar ist. Im Experiment und in der Natur hat man es dagegen nie mit eindimensionalen Lichtstrahlen, sondern immer nur mit "Lichtbündeln" endlichen Querschnitts zu tun.

Als optische Systeme zur Bilderzeugung und -wiedergabe werden Linsen und Spiegel verwendet, die wesentliche Bestandteile der optischen Geräte sind. Wegen der großen Bedeutung, die Linsen als abbildende Systeme besitzen, soll hier auf ihre Wirkungsweise und auf die grundlegenden Linsengleichungen ausführlicher eingegangen werden. Dabei soll darauf hingewiesen werden, daß die allgemein bekannten Linsengesetze nur unter sehr eng begrenzten Voraussetzungen gelten.

Als Linsen bezeichnet man in der Optik Körper aus durchsichtigem Material (Glas, Quarz, Plaste), die im allgemeinen von 2 Kugelflächen begrenzt werden. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte dieser beiden Begrenzungsflächen heißt die optische Achse der Linse. In der Praxis werden die in der Abb. 2.7.(2) dargestellten Linsenformen verwendet. Die allgemeine Faustregel, daß Sammellinsen in der Mitte

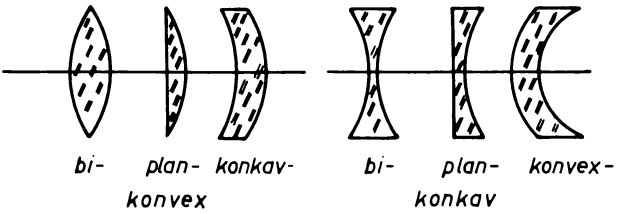


Abb. 2.7.(2) Sammel- und Zerstreuungslinsen

dicker, Zerstreuungslinsen in der Mitte dünner sind als am Ende, trifft nur bedingt zu. Als Beispiel für eine Ausnahme sei eine dicke Meniskuslinse (Abb. 2.7.(3)) angeführt, die trotz gleicher Krümmungsradien und damit gleicher "Dicke" die Eigenschaften einer Sammellinse

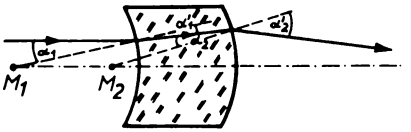


Abb. 2.7.(3) Dicke Meniskuslinse

besitzt. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß die Bezeichnung Sammel- oder Zerstreuungslinse nur zutrifft, wenn sich die Linse in einem Medium mit kleinerer Brechzahl befindet. Ist die Linse von einem Medium größerer Brechzahl umgeben, kehrt sich die Linsenwirkung um (z. B. Luftlinsen in Wasser).

Dünne Linsen

Man bezeichnet eine Linse als dünn, wenn ihre Dicke klein gegenüber der Brennweite f ist. Für geometrische Bildkonstruktionen (Abb. 2.7.(4)) ersetzt man in diesem Falle die Linse durch eine Ebene im Linsenmittelpunkt senkrecht zur optischen Achse. Zur Bildkonstruktion benutzt man Strahlen, deren Verlauf hinter der Linse leicht zu verfolgen ist:

Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen.
Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen.
Mittelpunktstrahlen werden in der Linse nicht gebrochen.

Ein reelles Bild eines Gegenstandes entsteht, wenn alle von einem Gegenstandspunkt aus durch die Linse gehenden Strahlen wieder in einem Bildpunkt vereinigt werden. Von einem virtuellen Bild spricht man dann, wenn sich die rückwärtigen Verlängerungen der Lichtstrahlen, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen, zu einem Punkt ver-

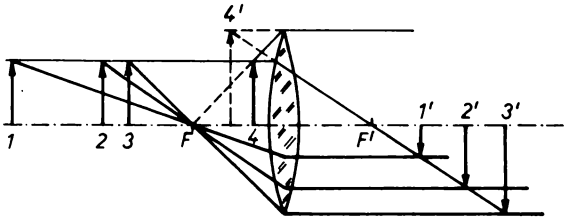


Abb. 2.7.(4) Bildkonstruktion bei dünnen Linsen

einigen lassen. Für die Konstruktion werden z. B. Parallel- und Brennpunktstrahlen verwendet.

Gegenstandsweite g	Bildweite b	Gegenstandsgröße G und Bildgröße B
$g > 2f$	$f < b < 2f$	G > B
$g = 2f$	$b = 2f$	G = B
$f < g < 2f$	$b > 2f$	G < B
$g < f$	Bild virtuell	G < B

Man erkennt folgenden Zusammenhang: Liegt der Gegenstand weit vor der Linse, entsteht ein umgekehrtes, verkleinertes, reelles Bild, das um so größer wird und um so weiter von der Linse entfernt liegt, je näher der Gegenstand der Linse rückt. Liegt der Gegenstand innerhalb der Brennweite f der Linse, entstehen aufrechte, vergrößerte, virtuelle Bilder.

Bei Zerstreuungslinsen entstehen in allen Fällen aufrechte, verkleinerte, virtuelle Bilder.

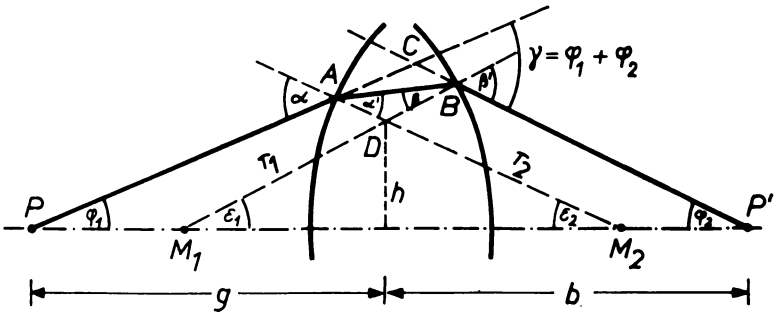


Abb. 2.7.(5) Zur Abbildungsgleichung für dünne Linsen

Abbildungsgleichung für dünne Linsen

Die Abb. 2.7.(5) soll eine dünne Linse darstellen, die Dicke ist stark übertrieben gezeichnet, damit Strahlengang und Bezeichnungen noch erkennbar eingetragen werden konnten.

Der vom Gegenstandspunkt P kommende achsennahe (paraxiale) Lichtstrahl trifft in A unter dem Einfallswinkel α auf die vordere Linsenfläche (Krümmungsradius r_2), wird gebrochen und geht bei B (Einfallswinkel β) unter nochmaliger Brechung durch die hintere Linsenfläche (Krümmungsradius r_1) zum Bildpunkt P'. C ist der Schnittpunkt der Verlängerungen der beiden Strahlen vor und hinter der Linse. Auf beiden Seiten der Linse soll sich das gleiche Medium (z. B. Luft mit der Brechzahl $n_L \approx 1$) befinden. γ ist Außenwinkel im Dreieck $\Delta PP'C$ und gleichzeitig Außenwinkel im Dreieck ΔABC. Daher ist

$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 = (\alpha - \alpha') + (\beta' - \beta); \qquad (1)$$

α und α' bzw. β und β' hängen nach dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz zusammen:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = n}$$

(n = Brechzahl des Linsenmaterials). Für kleine Winkel vereinfachen sich diese beiden Gleichungen zu

$$\alpha = n\alpha' \quad \text{und} \quad \beta' = n\beta.$$

Damit wird aus (1)

$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 = (n - 1)(\alpha' + \beta). \tag{2}$$

Die Dreiecke ΔABD und ΔM_1M_2D haben bei D den gleichen Außenwinkel, der gleich der Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist:

$$\alpha' + \beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

so daß

$$\varphi_1 + \varphi_2 = (n - 1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tag{3}$$

gilt. Die nach der Voraussetzung (achsennahe Strahlen) kleinen Winkel φ_1, φ_2, ε_1, ε_2 lassen sich durch die Höhe h, die Krümmungsradien r_1 und r_2 die Gegenstandsweite g und die Bildweite b ersetzen:

$$\varphi_1 \approx \tan\varphi_1 \approx \frac{h}{g}, \qquad \varphi_2 \approx \tan\varphi_2 \approx \frac{h}{b},$$

$$\varepsilon_1 \approx \sin\varepsilon_1 \approx \frac{h}{r_1}, \qquad \varepsilon_2 \approx \sin\varepsilon_2 \approx \frac{h}{r_2}.$$

Aus Gleichung (3) wird damit

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{4}$$

Für große Gegenstandsweiten ($g \to \infty$) bzw. Bildweiten ($b \to \infty$) werden in dieser Gleichung b bzw. g zur bild- bzw. gegenstandsseitigen

Brennweite f' bzw. f, und man erhält aus Gleichung (4) f = f' und

$$(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f}\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\,. \tag{6}$$

Bei der Anwendung dieser beiden Gleichungen sind unbedingt die Voraussetzungen zu beachten, unter denen sie hergeleitet wurden: 1. dünne Linsen, 2. achsennahe, enge Strahlenbündel. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, treten Abbildungsfehler auf.

Dicke Linsen und Linsensysteme

Wenn die Dicke einer Linse nicht mehr klein gegenüber ihrer Brennweite ist, bezeichnet man sie als dicke Linse. Linsensysteme sind aus mehreren Linsen zur Verringerung der Abbildungsfehler zusammengesetzt. Obwohl sie aus mehreren Linsen bestehen, werden sie als ein abbildendes System behandelt. Gegenüber dünnen Linsen ist hier der Lichtweg innerhalb der dicken Linse oder des Linsensystems so lang, daß man die Mittelebene nicht mehr als die Ebene auffassen kann, an der die Lichtstrahlen geknickt werden; g, b und f können nicht mehr von dieser Mittelebene aus gemessen werden.

Man ersetzt deshalb bei dicken Linsen und Linsensystemen die Mittelebene durch eine dingseitige Hauptebene H und eine bildseitige Hauptebene H' und mißt g, b und f von der zugehörigen Hauptebene aus (Abb. 2.7.(6)). Bei der geometrischen Bildkonstruktion werden

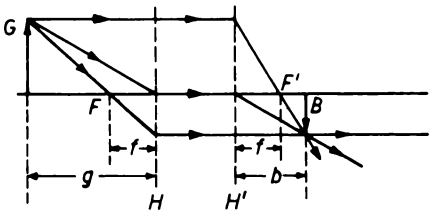


Abb. 2.7.(6) Hauptebenen bei dicken Linsen

Brennpunkt- und Parallelstrahl an einer der beiden Hauptebenen geknickt, der Mittelpunktstrahl an beiden Hauptebenen (Parallelverschiebung des Strahls). Je nach dem Aufbau eines Linsensystems oder der Form einer dicken Linse können die Hauptebenen innerhalb oder außerhalb des Linsensystems oder der Linse liegen. Beide Hauptebenen können sich auch auf derselben Seite des Systems befinden (z. B. bei Teleobjektiven für Fotoapparate).

Die Lage der Hauptebenen läßt sich experimentell mit Hilfe des Abbildungsmaßstabes β der Linse nach dem Verfahren von ABBE bestimmen: In die Grundgleichung für Linsen (6) wird der Abbildungsmaßstab

$$\boxed{\beta := \frac{B}{G} = \frac{b}{g}} \tag{7}$$

eingeführt:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{\beta g} = \frac{1}{f},$$

$$g = f\left(1 + \frac{1}{\beta}\right); \tag{8}$$

entsprechend gilt

$$b = f(1 + \beta). \tag{9}$$

Da die Lage der Hauptebenen noch nicht bekannt ist, sind g, b und f nicht meßbar. An ihrer Stelle mißt man g', b' bis zu einer an dem Linsensystem beliebig angebrachten Marke A, siehe Abb. 2.7.(7).

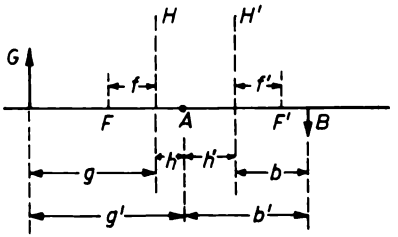


Abb. 2.7.(7) Bestimmung der Lage der Hauptebenen

Aus (8) und (9) wird dann

$$g' = g + h = f(1 + 1/\beta) + h, \tag{10}$$

$$b' = b + h' = f(1 + \beta) + h'. \tag{11}$$

Mißt man bei 2 verschiedenen Gegenstandsweiten g_1' und g_2' die zugehörigen Bildweiten b_1' und b_2' sowie die Gegenstands- und Bildgrößen G_1, G_2, B_1, B_2 (für den Abbildungsmaßstab!), lassen sich aus (10) und (11) h und h' eliminieren:

$$g_1' - g_2' = f(1/\beta_1 - 1/\beta_2),$$

$$b_1' - b_2' = f(\beta_1 - \beta_2).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich zunächst die Brennweite f des Systems

$$f = (g_1' - g_2')\,(1/\beta_1 - 1/\beta_2) = (b_1' - b_2')\,(\beta_1 - \beta_2). \tag{12}$$

Hiermit werden weiter aus (10) und (11) h und h' errechnet:

$$h = g' - f(1 + 1/\beta), \tag{13}$$

$$h' = b' - f(1 + \beta). \tag{14}$$

Es sind damit die Abstände der Hauptebenen von der Ablesemarke A bestimmt.

Für die Signum-Vereinbarung der Strecken g, b, f, f', h und h' ist folgendes zu beachten:

1. Dingseitige und bildseitige Brennweite f und f' sind gleich, wenn sich auf beiden Seiten der Linse das gleiche Medium befindet.
2. g und f sind positiv bei Sammellinsen, g bei Zerstreuungslinsen.
3. Bei Zerstreuungslinsen ist f negativ.
4. Bei reellen Bildern sind b und f' positiv, bei virtuellen Bildern werden b und f' negativ, da sie auf der Gegenstandsseite der Linse liegen.
5. Für die Hauptebenenbestimmung nach ABBE gilt:

   $h < 0$: H liegt zwischen A und Bildebene,
   $h' < 0$: H' liegt zwischen A und Gegenstandsebene,
   $f < 0$: F liegt zwischen H und Bildebene, F' zwischen H' und Gegenstandsebene.

Abbildungsmaßstab und Vergrößerung

Bei optischen Abbildungen ist zu unterscheiden zwischen den Größen Abbildungsmaßstab (gebraucht beim Vergleich von Bildgröße und Gegenstandsgröße) und Vergrößerung (gebraucht bei optischen Geräten zur subjektiven Beobachtung).

Der Abbildungsmaßstab ist definiert durch Gleichung (7). Als Vergrößerung bezeichnet man das Verhältnis der Sehwinkel φ_m mit und φ_o ohne Gerät (Abb. 2.7.(8)):

$$\Gamma := \varphi_m / \varphi_o \,. \qquad (15)$$

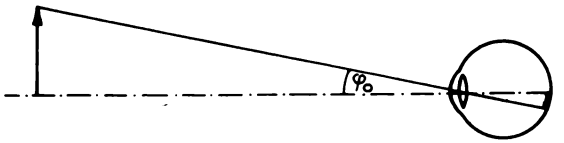


Abb. 2.7.(8) Sehwinkel φ_o des Auges

Dabei muß darauf hingewiesen werden, daß optische Geräte nicht etwa den Gegenstand vergrößern, wie es umgangssprachlich oft falsch ausgedrückt wird, sie vergrößern lediglich den Sehwinkel, unter dem ein Gegenstand gesehen wird.

2.7.1. Bestimmung von Linsenbrennweiten

Es werden verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Brennweite von Linsen und Linsensystemen praktiziert. Dabei sollen die einzelnen Verfahren in bezug auf Anwendbarkeit, experimentellen Aufwand und Genauigkeit des Ergebnisses kritisch verglichen werden. Die Grundbegriffe der Strahlenoptik, besonders der optischen Abbildung, werden angewendet, ebenso die Grundgleichungen für Linsen.

Aufgaben

1. Die Brennweite einer Bikonvexlinse ist durch Messung von Gegenstands- und Bildweite für "monochromatisches" Licht (Rot- und Blaufilter) rechnerisch und grafisch zu ermitteln. Die Brechzahl des Linsenglases ist zu berechnen.
2. Mit der Spiegelmethode (Autokollimationsverfahren) ist die Brennweite einer Plankonvexlinse für rotes und blaues Licht zu bestimmen.
3. Die Brennweite eines Linsensystems (Achromat) ist mittels der Methode von BESSEL zu ermitteln.
4. Die bei Aufgabe 1. verwendete Linse ist mit einer Konkavlinse zu einem Linsensystem zu kombinieren. Die Brennweite dieses Systems ist zu bestimmen und die Lage seiner Hauptebenen zu ermitteln. Außerdem ist die Brennweite der Konkavlinse zu berechnen.

Grundlagen

Bei dünnen Linsen, die so gefaßt sind, daß ihre Mittelebene zugänglich ist, bestimmt man die Brennweite am einfachsten aus Gleichung (6). Gemäß dieser Gleichung läßt sich f auch grafisch ermitteln. Auf zwei zueinander senkrechten Strahlen trägt man von ihrem Schnittpunkt O aus auf dem einen Strahl die Bildweiten b_i, auf dem anderen Strahl die Gegenstandsweiten g_i ab (Abb. 2.7.(9)). Verbindet man die End-

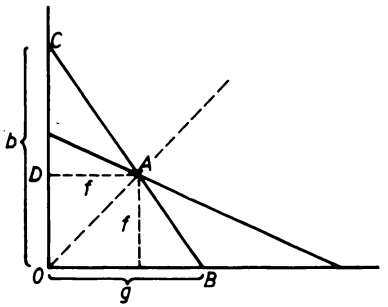


Abb. 2.7.(9) Grafische Ermittlung der Brennweite

punkte der zusammengehörigen Paare g_i, b_i, dann schneiden sich die Verbindungsstrecken in einem Punkte A, der von beiden Strahlen den Abstand f haben müßte, also auf der gestrichelt gezeichneten Winkelhalbierenden liegen müßte.

In den rechtwinkligen Dreiecken ΔOBC und ΔDAC gilt nämlich wegen

der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$b/g = (b - f)/f.$$

Durch Umformen folgt hieraus

$$1/g + 1/b = 1/f.$$

Bestimmung der Brennweite nach der Spiegelmethode (Autokollimationsverfahren): Hinter der Linse wird senkrecht zu ihrer optischen Achse ein ebener Spiegel angebracht. Der Abstand des Gegenstandes von der Linse ist gleich der Brennweite der Linse, wenn in der Gegenstandsebene ein scharfes Bild des Gegenstandes entsteht.

F 1 Nach der Tabelle (Einleitung) ist $b = g$, wenn $b = g = 2f$ ist. Weshalb ist bei diesem Meßverfahren $b = g = f$?

Aus der Messung von Gegenstands- und Bildgrößen (bei einem ebenen Gegenstand!) läßt sich nach Gleichung (7) der Abbildungsmaßstab ß der Linse bestimmen. Aus diesem Abbildungsmaßstab ß ergeben sich nach den Gleichungen (12), (13) und (14) die Brennweite und die Lage der Hauptebenen.

BESSELsche Methode zur Brennweitenbestimmung

Bei einer gefaßten dünnen Linse, bei Linsensystemen und bei dicken Linsen ist die direkte Messung von g, b und f nicht möglich. Das BESSELsche Verfahren zur Brennweitenbestimmung macht davon Gebrauch, daß Gegenstand und reelles Bild miteinander vertauschbar sind.

F 2 Auf welchem Grundgesetz der Strahlenoptik beruht diese Aussage?

Man stellt bei festem Abstand s zwischen Gegenstand G und Schirm S zwei Linsenstellungen L_1 und L_2 so ein, daß man einmal ein vergrößertes und einmal ein verkleinertes Bild erhält, siehe Abb. 2.7.(10).

Die Verschiebung e der Linsenstellung L_1 nach L_2 läßt sich mittels einer an der Fassung angebrachten Marke genau messen. Dann gilt $s = g + b + \overline{HH'}$ und wegen $g_2 = b_1$ (Vertauschbarkeit von Gegenstand und Bild) auch $e = g_1 - g_2 = g - b$. Diese beiden Gleichungen werden nach g und b aufgelöst:

$$g = (s + e - \overline{HH'})/2, \qquad b = (s - e - \overline{HH'})/2,$$

und in Gl. (6) eingesetzt:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{s + e - \overline{HH'}} + \frac{2}{s - e - \overline{HH'}},$$

$$f = \frac{1}{4}\left(s - \overline{HH'} - \frac{e^2}{s - \overline{HH'}}\right). \qquad (16)$$

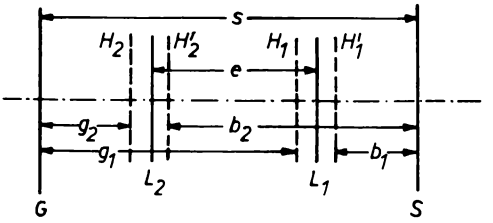


Abb. 2.7.(10) Brennweitenbestimmung nach BESSEL

Der Hauptebenenabstand $\overline{HH'}$ muß vorher nach dem ABBEschen Verfahren bestimmt werden. Für dünne Linsen ($\overline{HH'} = 0$) vereinfacht sich Gl. (16) zu

$$f = \frac{1}{4}\left(s - \frac{e^2}{s}\right). \qquad (17)$$

Aus den Gleichungen (16) und (17) folgt, daß $s > 4f$ sein muß, wenn Gegenstand und Bild vertauschbar sein sollen.

Brennweite von Linsenkombinationen

H_1 und H_1' sowie H_2 und H_2' seien die Hauptebenen zweier Linsen, die zu einem System zusammengesetzt sind, siehe Abb. 2.7.(11).

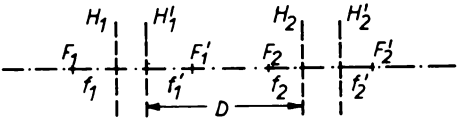


Abb. 2.7.(11) Bestimmung von Brennweiten bei Linsenkombinationen

Für die Brennweite dieses Systems gilt dann, wenn f_1 und f_2 die Einzelbrennweiten sind:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} \quad . \tag{18}$$

Ist $D := \overline{H_1 H_2}$ sehr klein (z. B. bei verkitteten dünnen Sammel- und Zerstreuungslinsen, Achromaten), dann vereinfacht sich Gleichung (18) zu

$$\frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad . \tag{19}$$

Dabei ist die Vorzeichenfestlegung für die Brennweite von Sammel- und Zerstreuungslinsen zu beachten.

F 3 Was versteht man unter "Brechkraft" einer Linse?

Zur Durchführung und Auswertung

Die Fassung der Abbildungslinse wirkt als Blende für den zum Auffangschirm gelangenden Lichtstrom. Damit möglichst viel Licht zum Schirm gelangt und man ein möglichst helles Bild erhält, sollte der Kondensor der Lampe, mit der der Gegenstand beleuchtet wird, immer so eingestellt werden, daß der Glühfaden der Lampe auf der bilderzeugenden Linse abgebildet wird.

Als Gegenstand kann ein von hinten beleuchteter transparenter Maßstab dienen. Zweckmäßigerweise trägt dann der Auffangschirm den gleichen Maßstab. Auf diese Weise läßt sich ohne Schwierigkeiten der jeweilige Abbildungsmaßstab der Linse bestimmen. Es ist auch möglich, als Gegenstand einen in eine Metallfolie geschnittenen Buchstaben (am geeignetsten sind "F" oder "L") zu verwenden. Diese Folie ist dann am besten in einer Halterung vor dem Kondensor der Beleuchtungslampe zu befestigen.

Bei den Aufgaben 1. und 2. werden ein Rot- und ein Blaufilter zusätzlich in den Strahlengang gebracht.

Am Gegenstand, an den Linsen und am Auffangschirm sind Marken angebracht, mit denen die Stellung auf der optischen Bank an dem daran befestigten Maßstab eindeutig festgelegt werden kann. Im Protokoll werden zunächst diese Einstellungen festgehalten, durch Differenzbildung ergeben sich daraus dann die jeweiligen Bild- und Gegenstands-

weiten.

Zu Aufgabe 1

Der Gegenstand bleibt an dem einen Ende der optischen Bank fest stehen. Die Gegenstandsweite wird durch Änderung der Linsenstellung in einem möglichst großen Bereich variiert. Mit dem beweglichen Schirm wird der Ort des Bildes bei Rot- und bei Blaufilterlicht aufgesucht.

Die Brennweite wird für jedes Wertepaar g_i, b_i berechnet, daraus ist der Mittelwert f zu bilden und die Vertrauensabweichung von $\bar{f}$ für P = 0,95 anzugeben. Zum Vergleich wird f auch grafisch bestimmt.

Die Brechzahl n des Linsenglases ergibt sich aus Gleichung (5). Wenn die Krümmungsradien r_1, r_2 der Linsenoberfläche nicht gegeben sind, werden sie mit einem Sphärometer gemessen (Exp. 2.2.1.).

Zu Aufgabe 2

Hinter der Linse befindet sich ein Planspiegel. Die Linse mit dem Spiegel wird soweit verschoben, bis in der Ebene des Gegenstandes ein gleichgroßes, umgekehrtes Bild entsteht. Ist der Gegenstand ein in eine Folie geschnittener Buchstabe "F" oder "L", dreht man die Linsenfassung mit dem Spiegel so, daß sich Bild und Gegenstand zu einem Rechteck ergänzen. Die Einstellung der Linse wird bei Rot- und bei Blaufilterlicht mehrfach wiederholt. Die Brennweite ergibt sich als Mittelwert der Einzelmessungen, die Vertrauensabweichung von $\bar{f}$ ist für P = 0,95 anzugeben.

Zu Aufgabe 3

Gegenstand und Schirm werden fest eingestellt, die beiden Linsenstellungen gesucht, bei denen auf dem Schirm scharfe Bilder entstehen. Die Einstellungen werden für mindestens 3 verschiedene Gegenstands-Schirmabstände wiederholt, wobei zu beachten ist, daß dieser Abstand möglichst groß ist ($s > 4f$).

F 4 Bei diesem Experiment wird mit weißem Licht gearbeitet. Warum?

Zu Aufgabe 4

Auch hier wird mit weißem Licht gearbeitet. Wie bei Aufgabe 1 werden

verschiedene Gegenstandsweiten eingestellt und der Ort des Bildes gesucht. Damit die Lage der Hauptebenen berechnet werden kann, sind für jede Einstellung Gegenstands- und Bildgrößen zu messen und daraus der Abbildungsmaßstab ß der Linse zu berechnen.

Die Ergebnisse aller Messungen sind kritisch zu diskutieren.

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

F 5 Wo liegen die Grenzen des Denkmodells "Lichtstrahl" und die der Anwendbarkeit der Strahlenoptik?

F 6 Welche Abbildungsfehler sind bekannt? Wie können sie korrigiert werden?

F 7 Die Funktionen $b = b(g)$ und $b^{-1} = b^{-1}(g^{-1})$ sind grafisch darzustellen.

2.7.2. Bestimmung der Vergrößerung bei Lupe und Mikroskop

Der Begriff "Vergrößerung" spielt bei optischen Geräten eine große Rolle. Es soll hier am Beispiel der Lupe die Bestimmung der Vergrößerung gezeigt werden.

Der grundsätzliche Aufbau eines Mikroskops wird untersucht, eine wesentliche Kenngröße des Mikroskopobjektivs, seine Apertur, soll gemessen werden.

Aufgaben

1. Die Vergrößerung einer Lupe ist zu bestimmen.
2. Die Vergrößerung eines Mikroskopmodells aus Aufbauteilen ist zu bestimmen.
3. Die Vergrößerung eines einfachen Mikroskops (Schülermikroskop) ist mit Hilfe einer Objektstrichplatte (Objektmikrometer) zu bestimmen.
4. Die Apertur des Mikroskop-Objektivs ist zu bestimmen.

Grundlagen

Das Sehen beruht darauf, daß die Augenlinse ein reelles Bild der Umwelt auf der Netzhaut des Auges entwirft. Die dort befindlichen "Stäbchen" und "Zäpfchen" als licht- bzw. farbempfindliche Elemente leiten dieses Bild über den Sehnerv an das Sehzentrum im Gehirn weiter. Diese Zerlegung des Bildes in Bildelemente hat zur Folge, daß das Auge zwei Objekteinzelheiten nur dann als zwei getrennte Bildelemente auffaßt, wenn sie auf zwei Stäbchen bzw. Zäpfchen abgebil-

det werden, d. h., wenn das Objekt auf der Netzhaut in genügender Größe abgebildet wird. Die Größe des Netzhautbildes hängt nicht nur von der Größe des Objektes, sondern auch von seinem Abstand vom Auge ab. Maßgebend für die Größe des Netzhautbildes ist der Sehwinkel φ_0 (siehe Abb. 2.7.(8)), unter dem ein Gegenstand gesehen wird. Er ergibt sich aus

$$\tan \varphi_0 = \frac{G}{g}$$

(G Gegenstandsgröße, g Abstand Gegenstand/Augenlinse) oder, da φ_0 meist ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\varphi_0 = \frac{G}{g} \,. \qquad (20)$$

Bei genügend großer Entfernung vom Auge ist also auch das Bild eines sehr großen Gegenstandes so klein geworden, daß es nur noch wenige Empfangselemente im Auge bedeckt - das Auge ist nicht mehr in der Lage, Objekteinzelheiten zu erkennen. Das gleiche gilt für sehr kleine Objekte, auch wenn sie sich sehr nahe am Auge befinden. Da sich die Augenlinse nicht beliebig stark krümmen kann (begrenzte Akkomodationsfähigkeit des Auges), muß ein Gegenstand, von dem auf der Netzhaut noch ein scharfes Bild entstehen soll, eine Mindestentfernung vom Auge haben. Diesen Mindestabstand bezeichnet man als den "Nahpunkt" des Auges. Vom Nahpunkt ist die "deutliche Sehweite" s zu unterscheiden. Beim gesunden Auge ist die deutliche Sehweite s = 25 cm.

Lupe, Mikroskop und Fernrohr sind optische Geräte, die es ermöglichen, sehr kleine oder sehr weit entfernte Objekte in genügender Größe auf der Netzheut des Auges abzubilden.

Als Lupe bezeichnet man eine Sammellinse, die von dem zu betrachtenden Gegenstand ein virtuelles, vergrößertes, aufrechtes Bild liefert, bei der der Gegenstand sich also innerhalb der Brennweite befindet. Die Lupe wird dicht vor das Auge gehalten, als Sammellinse verstärkt sie die Wirkung der Augenlinse. Dadurch ist es möglich, den Gegenstand auf kleinere Entfernung als die deutliche Sehweite an das Auge heranzubringen. Befindet sich die Lupe dicht vor dem Auge, rechnet man näherungsweise sowohl die deutliche Sehweite s als auch die Gegenstandsweite g nicht vom Auge sondern von der Lupe aus. Für die Lupenvergrößerung gilt dann mit $\varphi_m = B/s = G/g$ und $\varphi_0 = G/s$ nach Gleichung (15)

$$\Gamma := \frac{\varphi_m}{\varphi_0} = \frac{s}{g} = \frac{B}{G} \; . \qquad (21)$$

Diese Beziehung gilt wegen der Akkomodationsfähigkeit des Auges auch dann, wenn sich das virtuelle Bild nicht in der deutlichen Sehweite s befindet; d. h. aber, daß man mit einer Lupe der Brennweite f ein scharfes Bild des Gegenstandes sieht, wenn nur $0 < g \leq f$ erfüllt ist. Die Vergrößerung der Lupe hängt also von g und damit von der Akkomodation des Auges ab.

Um diese Abhängigkeit der Vergrößerung von subjektiven Faktoren auszuschalten, führt man die Normalvergrößerung einer Lupe ein:

$$\Gamma_N := \frac{s}{f} \; . \qquad (22)$$

Der Vergleich mit (21) zeigt, daß g = f gesetzt worden ist, der Gegenstand sich also in der Brennebene der Lupe befindet. In das Auge treten in diesem Fall Parallelbündel, die von der entspannten (auf Unendlich akkomodierten) Augenlinse zu einem Bild vereinigt werden.

Beim Mikroskop wird durch das Objektiv vom Gegenstand ein reelles, vergrößertes, umgekehrtes Bild ("Zwischenbild") entworfen, das mit dem Okular als Lupe betrachtet wird, siehe Abb. 2.7.(12). Es

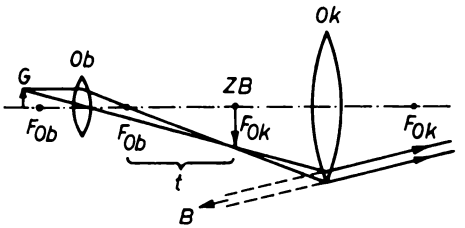


Abb. 2.7.(12) Strahlenverlauf im Mikroskop

wird also eine zweimalige Vergrößerung erzielt. Damit ein möglichst stark vergrößertes Zwischenbild in nicht allzugroßer Entfernung vom Objektiv entsteht, muß die Brennweite des Objektivs möglichst klein sein und der Gegenstand sich innerhalb der doppelten, außerhalb der

einfachen Brennweite befinden. Das Okular befindet sich so weit vom Objektiv entfernt, daß das Zwischenbild gerade in seiner objektivseitigen Brennebene liegt. Die vom Objekt kommenden Strahlen verlassen das Okular als Parallelbündel und werden von der entspannten (auf Unendlich akkomodierten) Augenlinse zu einem Bild vereinigt. Da durch das Okular, genau die Ebene, in der das Zwischenbild entsteht, scharf gesehen wird, werden in dieser Ebene eine Bildfeldblende (zur kreisförmigen Begrenzung des Bildfeldes), evtl. auch ein Fadenkreuz oder eine Strichteilung als Okularmikrometer angebracht.

Die Gesamtvergrößerung Γ des Mikroskops ist das Produkt aus dem Abbildungsmaßstab β_{Ob} des Objektivs und der Vergrößerung Γ_{Ok} des Okulars

$$\Gamma = \beta_{Ob}\,\Gamma_{Ok} \,. \tag{23}$$

Für den Abbildungsmaßstab γ_{Ob} des Objektivs ergibt sich aus der Definition des Abbildungsmaßstabes (7) und der Linsengleichung (6)

$$\beta_{Ob} = \frac{t}{f_{Ob}} \,. \tag{24}$$

t wird als optische Tubuslänge des Mikroskops bezeichnet. Man versteht darunter den Abstand der beiden inneren Brennpunkte von Objektiv und Okular. Von der optischen Tubuslänge ist die mechanische Tubuslänge - der Abstand der Auflageflächen von Objektiv und Okular - zu unterscheiden.

F 1 Wie läßt sich Gl. (24) aus den Gleichungen (6) und (7) herleiten?

Die Normalvergrößerung des Okulars ist nach Gl. (22)

$$\Gamma_{Ok} = \frac{s}{f_{Ok}} \,.$$

Damit wird die Gesamtvergrößerung des Mikroskops nach (23)

$$\Gamma = \frac{st}{f_{Ob} f_{Ok}} \,. \tag{25}$$

Für die Güte eines Mikroskops ist neben seiner Gesamtvergrößerung besonders sein Auflösungsvermögen maßgebend. Darunter versteht man die Eigenschaft eines optischen Systems, zwei benachbarte Objektpunkte auch als zwei getrennte Bildpunkte wiederzugeben. Nach ABBE

gilt für den Mindestabstand zweier Punkte, die noch getrennt wiedergegeben werden,

$$d_{min} = \frac{\lambda}{n \cdot \sin u} = \frac{\lambda}{A} ; \qquad (26)$$

(λ = Wellenlänge des verwendeten Lichtes, u = halber Öffnungswinkel des von einem Punkt auf der optischen Achse in das Objektiv eintretenden Lichtbündels, n = Brechzahl des Mediums zwischen Objekt und Objektiv). A = n·sin u wird als numerische Apertur, oft auch einfach als Apertur (Öffnung) des Objektivs bezeichnet. Sie ist eine charakteristische Größe jedes Mikroskopobjektivs, die sein Auflösungsvermögen bestimmt.

F 2 Wie kann das Auflösungsvermögen verbessert werden?

F 3 Durch eine sehr starke Okularvergrößerung könnte man eine sehr hohe Gesamtvergrößerung des Mikroskops erhalten. Kann man dadurch das Auflösungsvermögen des Mikroskops vergrößern?

Was versteht man unter "sinnvoller" und unter "leerer" Vergrößerung?

Zur Durchführung und Auswertung

Aufgabe 1

Es wird die Linse als Lupe untersucht, die bei Aufgabe 2 als Okular des Mikroskop-Modells verwendet werden soll. Diese Linse wird dicht vor das eine Auge gestellt, vor das andere kommt im Abstand s = 25 cm der eine Schirm mit Raster. Der zweite Schirm mit demselben Raster wird so aufgestellt, daß er durch die Lupe scharf gesehen wird, wenn beide Augen auf die deutliche Sehweite akkomodiert sind. Nach kurzer Eingewöhnung sind gleichzeitig beide Raster scharf zu sehen, das eine mit dem einen Auge mit Lupe, das andere mit dem anderen Auge ohne Lupe. Die Lupenvergrößerung Γ ergibt sich gemäß (21) als Quotient aus Bildgröße B und Gegenstandsgröße G.

Die Lupenvergrößerung läßt sich auch mit Hilfe der Linsengleichung (6) berechnen, in der wegen der Akkomodation auf deutliche Sehweite gemäß der Signum-Vereinbarung 4. nach Gl. (14) b = -s einzusetzen ist:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} - \frac{1}{s}.$$

Mit $\Gamma = B/G = s/g$ (21) ergibt sich für die Lupenvergrößerung

$$\boxed{\Gamma = \frac{s}{f} + 1,} \qquad (27)$$

wenn sich das virtuelle Bild in der deutlichen Sehweite befindet.

F 4 Wie erhält man aus diesem Ergebnis die Normalvergrößerung Γ_N der Lupe?

Da diese Messung der Vergrößerung stark subjektiven Einflüssen unterliegt, führt sie nur dann zu brauchbaren Ergebnissen, wenn sie mehrfach wiederholt und von mehreren Beobachtern durchgeführt wird.

Aufgabe 2

Aus den beiden Einzellinsen wird auf der optischen Bank ein Mikroskop-Modell aufgebaut. Als Objekt wird ein Transparentschirm mit Raster, der von der Rückseite her beleuchtet wird, in geeignetem Abstand vor dem Objektiv aufgestellt. Das vergrößerte Zwischenbild wird zunächst auf dem zweiten Rasterschirm aufgefangen und der Abbildungsmaßstab des Objektivs bestimmt. Das Okular wird dann als Lupe hinter den zweiten Schirm gestellt, so daß man ein scharfes Bild des Schirmes sieht. Wird dieser zweite Schirm entfernt, sieht man nochmals vergrößert das Zwischenbild. Da bei diesem Modell der Tubus fehlt und keine Gesichtsfeldblenden vorhanden sind, muß man das Auge genau in die optische Achse der beiden Linsen bringen. Die Gesamtvergrößerung dieses Mikroskops läßt sich auf drei Wegen bestimmen:

1. Wie bei Aufgabe 1 wird der zweite Schirm in s = 25 cm Entfernung vom Auge etwas seitlich der optischen Bank aufgestellt, so daß er gleichzeitig mit dem Mikroskop-Bild gesehen wird. Durch Vergleich der beiden Bilder wird die Vergrößerung bestimmt.
2. Aus dem Abbildungsmaßstab des Objektivs (Auffangen des Zwischenbildes!) und der in Aufgabe 1 bestimmten Lupenvergrößerung wird die Gesamtvergrößerung errechnet.
3. Die Mikroskopvergrößerung wird nach Gleichung (25) berechnet.

Bei Vergleich dieser 3 Werte für die Vergrößerung ist zu beachten, unter welchen Voraussetzungen (Akkomodation des Auges!) sie entstanden sind.

Aufgabe 3

Das Okular enthält ein "Okularmikrometer", eine Glasplatte mit eingeritzter Strichteilung. Der Strichabstand ist bekannt. Auf den Mikroskoptisch wird ein "Objektmikrometer", ein Objektträger mit eingeritzter Strichteilung, Strichabstand 0,01 mm, gelegt. Der Beleuchtungsspiegel wird so eingestellt, daß das Bildfeld hell und gleichmäßig ausgeleuchtet erscheint. Da sich das Okularmikrometer genau am Ort des Zwischenbildes befindet, sind nach Scharfeinstellen des Mikroskops beide Skalen gleichzeitig sichtbar. Durch Vergleich der Skalen wird der Abbildungsmaßstab des Objektivs bestimmt. Der Vergrößerungsfaktor des Okulars ist auf der Okularfassung angegeben.

Aufgabe 4

Eine sehr feine Lochblende wird auf den Mikroskoptisch gelegt und das Mikroskop auf die Öffnung scharf eingestellt. Okular und Beleuchtungsspiegel werden entfernt. Vorsicht, bei Oberflächenspiegeln dürfen die Spiegelflächen nicht mit den Fingern berührt werden! Auf den Mikroskopfuß wird ein auf einem Lineal montiertes Glühlämpchen gelegt und untersucht, wie weit das Lämpchen seitlich verschoben werden kann, ohne aus dem Blickfeld zu verschwinden. Aus dieser Verschiebungsstrecke und dem Abstand des Glühfadens von der Lochblende (am Arbeitsplatz angegeben!) läßt sich der Öffnungswinkel 2u des Objektivs und damit seine numerische Apertur bestimmen.

Zur Messung der seitlichen Grenzen des Blickfeldes des Objektivs kann auch ein spezielles Meßgerät, ein Apertometer, anstelle des Glühlämpchens verwendet werden.

Fragen

F 1 bis 4 siehe Text.

F 5 Erläutern Sie den Unterschied zwischen "reellem" und "virtuellem" Bild.

Literatur

Beyer: Handbuch der Mikroskopie, Berlin 1973.

2.7.3. Bestimmung von Brechzahlen

Die Anwendung der Gesetze der Strahlenoptik ermöglicht nicht nur die optische Abbildung von Objekten, sondern auch Messungen verschiedenster Art. Als Beispiel wird hier das Reflexionsgoniometer angewendet, ein Winkelmeßgerät, das auf dem Reflexionsgesetz beruht.

Aufgaben

1. Die Winkel zwischen den Seitenflächen eines Glasprismas sind zu messen.
2. Die Brechzahlen des Prismenglases sind für verschiedene Wellenlängen des Lichtes zu bestimmen.

Grundlagen

Mit dem Reflexionsgoniometer lassen sich die Winkel zwischen reflektierenden ebenen Flächen bestimmen. Es wird daher vorwiegend in der Kristallografie zur Messung der Winkel zwischen den Begrenzungsflächen von Kristallen verwendet. Das Gerät ist auch als Prismenspektrometer einsetzbar.

Die Hauptteile des Reflexionsgoniometers - Kollimatorrohr, Tisch und Fernrohr - sind um eine gemeinsame vertikale Achse drehbar, ihre Einstellung kann an zugehörigen Teilkreisen abgelesen werden.

Das Kollimatorrohr enthält einen Spalt und eine Sammellinse, die so einzustellen sind, daß sich der Spalt in der Brennebene der Linse befindet. Wird der Spalt dann von außen beleuchtet, tritt aus dem Kollimatorrohr ein Parallel-Lichtbündel aus. Dieses Lichtbündel trifft auf eine Fläche des zu untersuchenden Körpers, wird reflektiert und gelangt in ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr.

F 1 Was heißt "... auf Unendlich eingestelltes Fernrohr"? Beschreiben Sie die Wirkungsweise!

Wird jetzt der Tisch soweit gedreht, daß eine andere Fläche des zu untersuchenden Körpers das Licht vom Kollimatorrohr in das Fernrohr reflektiert, ist der Drehwinkel an der zum Tisch gehörenden Kreisteilung genau ablesbar. Der gesuchte Winkel zwischen den Flächen ergibt sich als Supplement des Drehwinkels. Damit das Licht nach der Drehung wieder genau in das Fernrohr trifft, müssen die beiden Flächen, zwischen denen der Winkel gemessen werden soll, genau parallel zur Drehachse des Tisches liegen. Die Tischebene muß entsprechend

einstellbar sein.

Für kristallografische Untersuchungen sind auch Tische in Gebrauch, die um 2 zueinander senkrechte Achsen (eine vertikale und eine horizontale) drehbar sind.

Als "optisches Prisma" bezeichnet man allgemein einen Körper, der aus lichtdurchlässigem Material besteht und von 2 ebenen Flächen, die einen Winkel miteinander bilden, begrenzt wird. Für Untersuchungen und Demonstrationen verwendet man speziell dreiseitige Prismen, Glaskörper mit der Form eines geometrischen dreiseitigen geraden Prismas. Sie werden so in den Strahlengang gebracht, daß das Licht den Körper parallel zu Grund- und Deckfläche durchsetzt.

Im Prismenspektralapparat dient das Prisma dazu, das einfallende Licht in seine spektralen Bestandteile zu zerlegen. Ein Parallelbündel Glühlicht, das ein Prisma durchsetzt, ist hinter dem Prisma nicht mehr parallel begrenzt, es wird zu einem "Spektrum" aufgefächert. Die einzelnen spektralen Bestandteile (Farben) werden durch das Prisma in verschiedene Richtungen abgelenkt (Dispersion).

Die Prismenkante bei A (Abb. 2.7.(13)) wird als "brechende Kante",

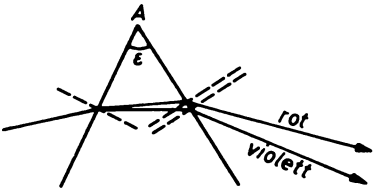


Abb. 2.7.(13) Prisma und Dispersion

ε als "brechender Winkel" des Prismas bezeichnet.

Nach dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz

$$\sin\alpha/\sin\alpha' = n'/n \qquad (28)$$

verhalten sich die Sinus von Einfalls- und Brechungswinkel umgekehrt wie die Brechzahlen der beiden Medien, an deren Grenzfläche das Licht gebrochen wird (Abb. 2.7.(14)).

Wendet man das Brechungsgesetz auf die Dispersion im Prisma an,

folgt, daß die Brechzahl n_p des Prismenglases keine eindeutige Materialkonstante ist, sondern von der Farbe des gebrochenen Lichtes abhängt.

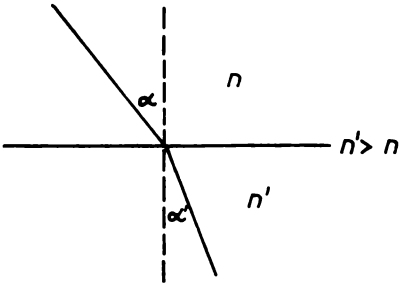


Abb. 2.7.(14) Zum Brechungsgesetz

Da der Begriff "Farbe" nicht ausreicht, um die spektralen Bestandteile des Glühlichtes eindeutig zu charakterisieren, sei hier ein Ergebnis der Wellenoptik eingefügt.

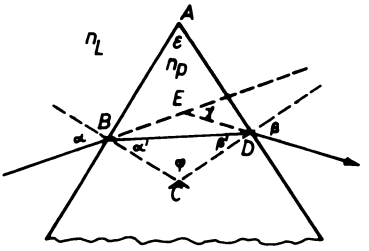
Das "Wellenmodell" beschreibt das Licht als elektromagnetische Transversalwelle, der subjektive Farbeindruck wird durch unterschiedliche Wellenlängen hervorgerufen. Der sichtbare Bereich des Spektrums umfaßt etwa das Gebiet zwischen den Wellenlängen λ = 400 nm (Violett) und λ = 760 nm (Rot).

"Dispersion des Lichtes im Prisma" bedeutet also, daß im Prisma das Licht unterschiedlich, je nach seiner Wellenlänge, gebrochen wird. Langwelliges Licht (Rot) wird am schwächsten, kurzwelliges Licht (Violett) wird am stärksten gebrochen und aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt.

Als monochromatisches Licht bezeichnet man einfarbiges Licht, Licht eines genügend schmalen Wellenlängenintervalls. Ein monochromatisches Lichtbündel wird beim Durchgang durch ein Prisma um den Winkel γ aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt (Abb. 2.7.(15)). Nach dem Brechungsgesetz (28) ist

$$n_L \sin\alpha = n_p \sin\alpha' \ , \tag{29}$$

$$n_L \sin\beta = n_p \sin\beta' . \tag{30}$$



n_L ≈ 1,0003 mittlere Brechzahl der Luft

n_P Brechzahl des Prismenmaterials

ε brechender Winkel

γ Ablenkungswinkel

Abb. 2.7.(15) Zur Bestimmung der Brechzahl eines Prismas

Im Dreieck ABD gilt für die Winkelsumme

$$180^\circ = \varepsilon + (90^\circ - \alpha') + (90^\circ - \beta'),$$

also

$$\varepsilon = \alpha' + \beta' \; ; \tag{31}$$

γ ist Außenwinkel im Viereck BCDE. Es gilt

$$\gamma = 180^\circ - (360^\circ - \alpha - \beta - \varphi).$$

Mit $\varphi = 180^\circ - \varepsilon$ (denn die Winkelsumme im Viereck ABCD ist 360°) wird daraus

$$\gamma = \alpha + \beta - \varepsilon \; . \tag{32}$$

Mit den Gleichungen (29) bis (32) läßt sich der Ablenkungswinkel γ berechnen, wenn der Einfallswinkel α, der brechende Winkel ε und die Brechzahlen n_P und n_L des Prismenmaterials und der Luft bekannt sind.

In einem Spezialfall - der Lichtstrahl durchsetzt das Prisma symmetrisch - lassen sich diese 4 Gleichungen vereinfachen und zusammenfassen. Bei diesem symmetrischen Strahlengang - Symmetrieachse ist die Winkelhalbierende von ε - sind

$$\alpha = \beta \quad \text{und} \quad \alpha' = \beta'.$$

Damit folgt aus (31), (32) und (29)

$$\varepsilon = 2\alpha' \,, \tag{33}$$

$$\gamma = 2\alpha - \varepsilon \,, \tag{34}$$

$$n_P = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} n_L = \frac{\sin\frac{\gamma+\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} n_L \,. \tag{35}$$

Aus dem Ablenkungswinkel γ bei symmetrischem Strahlengang, dem brechenden Winkel ε und der Brechzahl n_L der Luft läßt sich also die Brechzahl n_P des Prismenglases bestimmen. Bei sehr genauen Messungen ist zu beachten, daß n_L wellenlängen-, temperatur- und druckabhängig ist.

Experimentell und theoretisch läßt sich zeigen, daß der symmetrische Strahlengang im Prisma dann vorliegt, wenn der einfallende Lichtstrahl durch das Prisma am wenigsten aus seiner Richtung abgelenkt wird, d. h., wenn der Ablenkungswinkel γ ein Minimum wird - "Minimum der Ablenkung". Für Messungen dieser Art ist das Reflexionsgoniometer besonders gut geeignet. Man kann mit ihm einmal mit feststehendem Fernrohr durch Drehung des Tisches mit dem Prisma den brechenden Winkel ε genau bestimmen, zum anderen gibt der Winkel zwischen den Achsen von Kollimatorrohr und Fernrohr direkt den Ablenkungswinkel γ, wenn sich das Prisma im Strahlengang befindet. Durch Drehen von Prisma und Fernrohr läßt sich auch ohne Schwierigkeiten die minimale Ablenkung der Lichtstrahlen durch das Prisma feststellen.

Zur Durchführung und Auswertung

Durch Justieren des Gerätes muß erreicht werden, daß

- aus dem Spaltrohr (Kollimatorrohr) ein Parallelbündel in das Fernrohr fällt;
- die optischen Achsen von Spaltrohr und Fernrohr in derselben Ebene senkrecht zur gemeinsamen Drehachse liegen;
- reflektierende Fläche und brechende Kante des Prismas parallel zur gemeinsamen Drehachse liegen.

Das Fernrohrokular enthält ein Fadenkreuz. Die Augenlinse des Okulars wird so eingestellt, daß das Fadenkreuz scharf zu sehen ist. Das Fernrohr wird dann auf einen weit entfernten Gegenstand gerichtet

und durch Verschieben des Okulars auf diesen scharf eingestellt. Diese Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich ist richtig, wenn Gegenstand und Fadenkreuz scharf zu sehen sind und keine Parallaxe mehr zeigen (bei seitlichem Bewegen des Auges vor dem Okular dürfen sich Bild des Gegenstandes und Fadenkreuz gegeneinander nicht verschieben!). Das vom Fernrohrobjektiv entworfene Zwischenbild des Gegenstandes und das Fadenkreuz befinden sich dann in derselben Ebene, in der Brennebene des Objektivs und des Okulars.

Das auf Unendlich eingestellte Fernrohr wird dem Spaltrohr genau gegenübergestellt und der Spalt von außen beleuchtet. Je nach Bauart des Spaltrohres werden der Spalt oder die Kollimatorlinse so in der Längsachse des Rohres verschoben, daß im Fernrohr ein scharfes Bild des Spaltes zu sehen ist. Zwischen Spalt- und Fernrohr verläuft dann ein Parallel-Lichtbündel.

Das Prisma wird auf den Prismentisch gestellt. Damit es in die richtige Lage zur Drehachse gebracht werden kann, läßt sich die Tischfläche in geringem Maße nach allen Richtungen hin neigen. Die Tischplatte ist nicht starr befestigt, sie wird genau in der Mitte von einer Feder nach unten gezogen und auf 3 Stellschrauben gedrückt, die auf den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind.

Durch Verstellen dieser Schrauben läßt sich die richtige Neigung der Tischplatte und damit die richtige Stellung des Prismas erreichen. Kollimatorrohr, Prisma und Fernrohr befinden sich dann in der richtigen Lage zueinander, wenn bei beliebiger Fernrohrstellung das vom Spaltrohr kommende Lichtbündel durch eine Prismenfläche so in das Fernrohr reflektiert wird, daß das Spaltbild immer in gleicher Höhe erscheint. Treten Höhenabweichungen auf, werden sie zur Hälfte durch Änderung der Tischneigung und zur Hälfte durch Änderung der Höheneinstellung des Fernrohres beseitigt. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis bei verschiedenen Fernrohreinstellungen das Spaltbild immer in gleicher Höhe zu sehen ist.

Messen des brechenden Winkels: Bei feststehendem Fernrohr wird der Tisch mit dem Prisma so gedreht, daß die eine den brechenden Winkel begrenzende Fläche das Licht vom Spaltrohr in das Fernrohr reflektiert. Das Spaltbild muß genau mit dem senkrechten Faden des Fadenkreuzes übereinstimmen. Dann wird der Tisch um die brechende Kante gedreht, bis die zweite den brechenden Winkel begrenzende Fläche das Licht ins Fernrohr reflektiert und das Spaltbild mit dem Fadenkreuz übereinstimmt. Die Tischeinstellungen werden an der zum Tisch gehö-

renden Kreisteilung abgelesen und im Protokoll festgehalten. Aus der Differenz der Einstellungen ergibt sich als Ergänzung zu 180° der brechende Winkel. Um Ungleichmäßigkeiten der Kreisteilung auszugleichen, wird das Verfahren bei verschiedenen Fernrohrstellungen mehrfach wiederholt.

Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahl: Der Spalt wird mit einer Lichtquelle beleuchtet, die ein Linienspektrum emittiert. Geeignet sind Geißler-Röhren oder Metalldampflampen.

Die Hochspannungsquelle für Geißler-Röhren (Funkeninduktor, Hochspannungstrafo) darf wegen Überlastungsgefahr nicht im Dauerbetrieb arbeiten, sondern nur für maximal 5 min eingeschaltet werden. Metalldampflampen werden mit der zugehörigen Vorschaltdrossel betrieben. Ist die Drossel durch einen regelbaren Vorschaltwiderstand ersetzt, muß dieser so eingestellt werden, daß die Betriebsstromstärke nicht überschritten wird.

Bei richtiger Stellung des Prismas ist im Fernrohr ein Linienspektrum zu sehen. Wird das Prisma vorsichtig gedreht, verschieben sich die Linien je nach Drehrichtung des Prismas nach größerer oder kleinerer Ablenkung hin. Das Prisma wird soweit gedreht, bis das Minimum der Ablenkung eingestellt ist. Das ist der Fall und das Prisma wird symmetrisch vom Licht durchsetzt, wenn bei vorsichtiger Drehung des Prismas nach beiden Seiten das Spaltbild sich nach der Richtung der größeren Ablenkung hin verschiebt. Dieses Minimum der Ablenkung muß für jede zu untersuchende Spektrallinie neu eingestellt werden.

Aus dem brechenden Winkel ε und dem kleinsten Ablenkungswinkel $_{\text{min}}$ läßt sich für jede einzelne Linie die Brechzahl n_p des Prismenmaterials nach Gleichung (35) berechnen.

Es ist zu überprüfen, ob die Genauigkeit der Messung so groß war, daß die Abhängigkeit der Brechzahl der Luft n_L von Wellenlänge, Druck und Temperatur berücksichtigt werden muß oder ob mit $n_L \approx 1$ gerechnet werden kann.

Die Vertrauensabweichung von $\overline{n_p}$ ist für P = 0,95 zu berechnen, die Abhängigkeit $n_p = n_p(\lambda)$ ist grafisch darzustellen und zu diskutieren.

Fragen

F 1 siehe Text.

F 2 Wo spielen Brechzahlmessungen eine Rolle?

F 3 Nennen Sie weitere Verfahren zur Brechzahlmessung!

2.8. Grundstromkreis

2.8.1. Strom- und Spannungsmessungen

Es soll mit verschiedenen elektrischen Meßgeräten, ihrer Handhabung und Anwendung vertraut gemacht werden. Als Beispiele seien Demonstrations-Drehspulinstrument, Vielfachmesser sowie Lichtmarkengalvanometer und Röhrenvoltmeter genannt.

Aufgaben

1. Der Meßbereich eines Demonstrationsdrehspulinstruments ist auf einen angegebenen Strommeßbereich zu erweitern. Für diesen Bereich ist das Instrument zu eichen.
2. Der Meßbereich des Demonstrationsdrehspulinstruments ist auf einen angegebenen Wechselspannungsmeßbereich zu erweitern. Für diesen Bereich ist das Gerät zu eichen.
3. Mit zwei verschiedenen Typen von Vielfachmeßgeräten sind Wechselspannungen zu messen. Die für jeden Meßwert auftretenden Meßunsicherheiten sind anzugeben.
4. Es ist die Stromempfindlichkeit eines Lichtmarkengalvanometers zu bestimmen.
5. Durch Messungen an einem hochohmigen Spannungsteiler wird der Einfluß des Innenwiderstandes eines Meßgerätes auf die Ausgangsspannung des Spannungsteilers untersucht. Die Messungen erfolgen mit einem Universalmesser und mit einem Röhrenvoltmeter.

Grundlagen

Bezüglich einiger Typen und der Funktionsweise von elektrischen Meßgeräten sei auf den Abschnitt 2.2.4. verwiesen.

Zu den Aufgaben 1 und 2

Ist auf dem Instrument angegeben, bei welchem Strom bzw. bei welcher Spannung das Meßgerät Vollausschlag zeigt, so kann daraus der Innenwiderstand errechnet werden. Den für die verlangte Meßbereichserweiterung erforderlichen Parallelwiderstand (Shunt) bzw. Vorwiderstand berechnet man nach den Gesetzen der Parallel- bzw. Reihenschaltung.

Zu Aufgabe 3

Die Skale eines elektrischen Meßgerätes enthält meist am Rande meh-

rere Zahlen und Symbole. Sie symbolisieren das Meßwerk und die Gebrauchslage. In einem schwarzen Stern wird die Prüfspannung in kV angegeben. Die alleinstehende Zahl (z. B. 2,5) gibt die Klasse des Gerätes an. Diese Zahl ist der maximale Betrag des relativen Gerätefehlers in % bezogen auf den eingestellten Meßbereichsendwert. Der Hersteller garantiert, daß zum Auslieferungstermin der Betrag des relativen systematischen Fehlers bei Vollausschlag nicht größer als 2,5 % war.

Beispiel: Auf dem Gerät ist als Klasse 2,5 angegeben. Man mißt eine Spannung von 10,0 V bei einem Meßbereichsendwert von 50 V. Damit muß man maximal mit einem Fehlerbetrag von 2,5 %·50 V = 1,25 V rechnen. Die Garantiefehler-Intervallgrenzen sind demnach

$$U = (10{,}0 \pm 1{,}3)\text{V},$$

d. h., der maximale relative Fehler ist ± 13 %!

Zu Aufgabe 4

Die Skalen sehr empfindlicher Meßgeräte, wie Lichtmarken- oder Spiegelgalvanometer, sind oft nicht geeicht. Aus der angelegten Spannung, dem angegebenen Innenwiderstand des Gerätes und dem Vorwiderstand läßt sich der Strom jedoch berechnen.

Die Stromempfindlichkeit des Galvanometers ist der Quotient aus dem Ausschlag in Skalenteilen und der berechneten Stromstärke.

Zu Aufgabe 5

Wird die Ausgangsspannung an einem Spannungsteiler mit einem Spannungsmesser gemessen, so handelt es sich streng genommen um einen belasteten Spannungsteiler. Die Belastung erfolgt durch den Widerstand des Spannungsmessers. Das führt zu einer Veränderung der Ausgangsspannung gegenüber der des unbelasteten Spannungsteilers.

Zur Durchführung und Auswertung

1. Läßt sich der Innenwiderstand des Drehspulinstruments nicht errechnen, so kann über eine geeignete Spannungsteilerschaltung (eventuell mit Feineinstellung) eine sehr kleine Gleichspannung angelegt werden, siehe Abb. 2.8.(1). Dabei soll mit der Spannungstei-

lereinstellung begonnen werden, bei der U_A null ist. Aus einer Strom-Spannungsmessung mit geeigneten Meßgeräten läßt sich R_i bestimmen.

Zunächst wird die zur Verfügung stehende Gleichspannung U gemessen (z. B. Spannung einer Akkumulatoren-Zelle). Der zu berechnende Parallelwiderstand (Shunt) wird aus Dekadenwiderständen hergestellt.

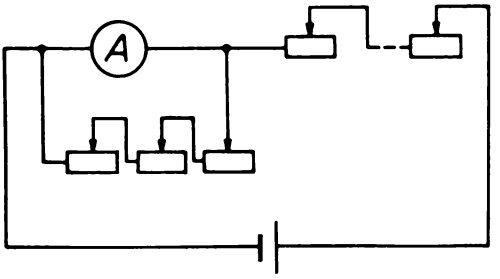


Abb. 2.8.(1) Zur Bestimmung des Innenwiderstandes eines Drehspulinstrumentes

Ein Satz Dekadenwiderstände in Reihe mit dem Meßgerät wird so eingestellt, daß auf dem Meßgerät ein Zeigerausschlag von etwa 1/10 des Skalenendwertes zu erwarten ist. Mit Hilfe des Vorwiderstandes wird danach der Zeigerausschlag schrittweise auf alle vollen Skalenteile eingestellt. Die Messungen sind mehrmals durchzuführen. Aus dem Mittelwert des Vorwiderstandes, des Parallelwiderstandes, des Innenwiderstandes des Meßgerätes und der angelegten Spannung werden bei der Auswertung für jede Zeigerstellung die fließenden Ströme berechnet. In einer Eichkurve wird der Zeigerausschlag als Funktion des Stromes grafisch dargestellt. Das Ergebnis ist zu diskutieren.

2. Die angegebene Wechselspannung wird mit dem Universalmesser gemessen. Mit einem niederohmigen Dekadenwiderstand als Spannungsteiler können zehn definierte Teilspannungen eingestellt werden. (Strombelastbarkeit des Dekadenwiderstandes beachten!). Das Demonstrationsdrehspulinstrument wird mit einem Vorwiderstand versehen, der für den geforderten Meßbereich Vollausschlag erwarten läßt. Es wird über einen Gleichrichter an den Ausgang des Spannungsteilers angeschlossen. Die Ausgangsspannung wird schrittweise erhöht und der Zeigerausschlag gemessen. Die Zeigerausschläge werden als Funktion der angelegten Spannungen grafisch dargestellt. Das Ergebnis

ist zu diskutieren.

3. Am Spannungsteiler der Aufgabe 2 werden die Ausgangswechselspannungen mit zwei verschiedenen Vielfachmessern gemessen. Unter Berücksichtigung der Klasse und der Ableseunsicherheit sind für jeden Meßwert beider Meßreihen die Meßunsicherheiten anzugeben. Aus dem Ergebnis dieser Untersuchung sind im Protokoll Schlußfolgerungen zu ziehen.

4. Mit dem Akkumulator der Aufgabe 1 und einem nicht zu hochohmigen Dekadenwiderstand wird eine Spannungsteilerschaltung aufgebaut. Die berechenbaren Ausgangsspannungen legt man über einen genügend großen Vorwiderstand an ein Lichtmarkengalvanometer, dessen Innenwiderstand bekannt ist.

Für eine Galvanometerskale wird aus jedem Meßwert die Stromempfindlichkeit berechnet. Der Mittelwert ist zu berechnen.

5. An einem hochohmigen Spannungsteiler (100 kΩ) werden die Ausgangsspannungen nacheinander mit einem Röhrenvoltmeter und mit einem Universalmesser gemessen. Der Meßbereich des Universalmessers darf während der Meßreihe nicht verändert werden, da sein Innenwiderstand vom Meßbereich abhängt. Er ist auf der Geräterückseite oder am Versuchsplatz angegeben. Der Innenwiderstand des Röhrenvoltmeters liegt auf jeden Fall mindestens bei einigen Megaohm. Die unterschiedlichen Ergebnisse der Messungen sind unter Berücksichtigung der verschiedenen Innenwiderstände zu deuten.

Fragen

F 1 Wie sind die SI-Einheiten von Stromstärke, Spannung und Leistung definiert?

F 2 Erläutern Sie die Wirkungsweise verschiedener Strom- und Spannungsmeßgeräte!

F 3 Wie berechnet man Parallel- und Vorwiderstände zur Meßbereichserweiterung?

F 4 Geben Sie die Bedeutung der Symbole auf den elektrischen Meßgeräten an!

2.8.2. Widerstandsmessungen

Mit Hilfe der Strom-Spannungs-Messungen, Brückenschaltungen und technischen Meßbrücken können ohmsche, kapazitive und induktive Widerstände bestimmt werden.

Aufgaben

1. Mit Hilfe verschiedener Meßmethoden ist der ohmsche Widerstand eines technischen Widerstandes zu bestimmen.
2. Die Kapazität eines Kondensators ist nach verschiedenen Meßmethoden zu ermitteln.
3. Die Induktivität einer Spule ist nach verschiedenen Meßmethoden zu ermitteln.

Grundlagen

Während im Gleichstromkreis nur der ohmsche Widerstand auftritt, sind im Wechselstromkreis darüber hinaus der induktive und der kapazitive Widerstand zu berücksichtigen.

Der Betrag des induktiven Widerstandes ist gegeben durch

$$X_L = \omega L \tag{1}$$

und der des kapazitiven Widerstandes durch

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\ , \tag{2}$$

$\omega = 2\pi f$ = Kreisfrequenz, L = Induktivität (Einheit: 1 Henry = 1 H = 1 Vs/A), C = Kapazität (Einheit: 1 Farad = 1 F = 1 As/V).

Induktive und kapazitive Widerstände nennt man auch Blindwiderstände. An ihnen treten im Gegensatz zu den ohmschen Widerständen (= Wirkwiderständen) keine Verluste an elektrischer Leistung auf.

Für den zeitlichen Verlauf von Strom i und Spannung u nehmen wir eine sinusförmige Abhängigkeit an, zwischen beiden besteht i. allg. eine Phasenverschiebung φ :

$$i = i_o \sin\omega t, \qquad u = u_o \sin(\omega t + \varphi). \tag{3}$$

Dabei sind u_o und i_o die Maximalwerte von Strom und Spannung, die mit den an Meßinstrumenten ablesbaren Effektivwerten u_{eff} und i_{eff} durch folgende Beziehungen verknüpft sind:

$$u_{eff} = \frac{u_o}{\sqrt{2}}\ , \qquad i_{eff} = \frac{i_o}{\sqrt{2}}\ . \tag{4}$$

Zur Phasenverschiebung

Da bei einer Hintereinanderschaltung von beliebigen Wechselstromwiderständen der Strom an allen Stellen der Schaltung den gleichen Momentanwert hat, ist es zweckmäßig, als Phasenverschiebung φ die der Spannung gegenüber dem Strom zu bezeichnen.

Für einen (rein) induktiven Widerstand gilt $\varphi = \pi/2$, für einen kapazitiven Widerstand $\varphi = -\pi/2$ und für einen ohmschen Widerstand $\varphi = 0$.

Die grafische Darstellung $i = i(t)$ bzw. $u = u(t)$ erhält man durch die Projektion der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω drehenden "Zeiger" $\underline{i}$ bzw. $\underline{u}$. Es kann gezeigt werden, daß man die Summe von Sinusspannungen gleicher Frequenz findet, indem man sie als Zeiger darstellt und diese geometrisch addiert.

Man erhält also für die Maximalspannung ein "Zeigerdiagramm". Die geometrische Addition dieser 3 Zeiger ergibt den Zeiger der Gesamtspannung. An den Längenverhältnissen ändert sich nichts, wenn man alle Zeiger durch den Maximalwert des Stromes dividiert. Da aber zum Beispiel $u_{Lo}/i_o = X_L$ ist, erhalten wir ein "Zeigerdiagramm" für Wechselstromwiderstände (Abb. 2.8.(2)).

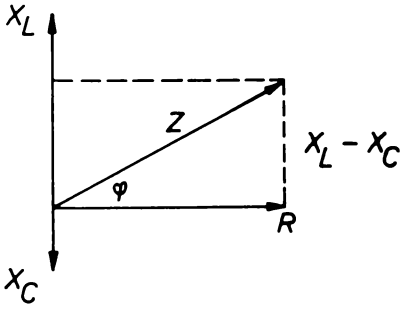


Abb. 2.8.(2) Zeigerdiagramm für Wechselstromwiderstände

Der Betrag des gesamten Wechselstromwiderstandes, der auch Scheinwiderstand genannt wird, ist für eine Reihenschaltung eines ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerstandes

$$\boxed{Z := \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.} \qquad (5)$$

Z kann auch nach $Z = u_o/i_o = u_{eff}/i_{eff}$ bestimmt werden.

Eine Spule besitzt stets einen induktiven und einen ohmschen Widerstandsanteil. Man kann ersatzweise eine Spule als Reihenschaltung eines induktiven und eines ohmschen Widerstandes darstellen. Als Scheinwiderstand ergibt sich aus (5)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Daraus erhält man eine Gleichung zur Ermittlung der Induktivität L der Spule:

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}.$$

Die Wheatstonesche Brücke ist eine spezielle elektrische Schaltung zur Bestimmung ohmscher Widerstände. In der Abbildung 2.8.(3) einer Brückenschaltung zur Bestimmung ohmscher Widerstände ist R_x der unbekannte Widerstand, R_N der Vergleichswiderstand, R_1 und R_2 sind die Teilwiderstände eines ausgespannten homogenen Widerstandsdrahtes der Länge $l_1 + l_2$, der durch einen Schleifkontakt B geteilt wird. R_1 und R_2 bzw. R_x und R_N sind paarweise in Reihe bzw. parallel geschaltet. Fließt durch den Brückenzweig kein Strom, dann liegen die Punkte A und B auf gleichem Potential. Die Spannungen an R_1 und R_x auf der einen Seite und an R_2 und R_N auf der anderen Seite sind

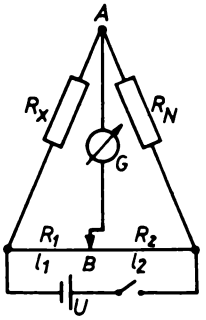


Abb. 2.8.(3) Wheatstonesche Brücke

dann gleich. Man erhält in diesem Fall

$$\boxed{R_x = R_N \frac{l_1}{l_2}} \quad . \tag{6}$$

Bei bekanntem R_N und dem ermittelten Längenverhältnis l_1/l_2 läßt sich der unbekannte Widerstand R_x berechnen.

Zur Durchführung und Auswertung

1. Bestimmung des ohmschen Widerstandes eines technischen Widerstandes.

1.1. Aus Meßwerten von Strom und Spannung berechnet man den ohmschen Widerstand. Als Spannungsquelle wird ein Akkumulator verwendet.

1.2. Es wird eine Wheatstonesche Brückenschaltung aufgebaut, wobei als Spannungsquelle wieder ein Akkumulator dient. Mit Hilfe des Vergleichsnormals und des gemessenen Längenverhältnisses am Meßdraht bestimmt man den ohmschen Widerstand.

1.3. Mit einer technischen Meßbrücke wird der ohmsche Widerstand bestimmt.

2. Bestimmung der Kapazität eines Kondensators

2.1. Aus den Effektivwerten von Strom und Spannung und der Frequenz des Wechselstromes ist die Kapazität eines unbekannten Kondensators zu bestimmen.

2.2. Dieselbe Kapazität ist mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brückenschaltung unter Verwendung eines C-Normals zu messen. Als Spannungsquelle dient ein Tonfrequenzgenerator, als Schalter die Morsetaste und als Nullinstrument der Kopfhörer.

2.3. Die Kapazität wird mit einer technischen Meßbrücke gemessen.

3. Bestimmung der Induktivität einer Spule

3.1. Man mißt den ohmschen Widerstand R der Spule mit einer technischen Meßbrücke. Danach bestimmt man aus den Effektivwerten von Strom und Spannung den Scheinwiderstand Z der Spule. Für diese Messung ist der Tonfrequenzgenerator als Spannungsquelle zu benutzen. Aus den Widerständen und der Frequenz ist die Induktivität zu berechnen.

3.2. Unter Verwendung eines L-Normals bestimmt man die Induktivität der Spule in einer Brückenschaltung. Als Spannungsquelle dient der Tonfrequenzgenerator.

3.3. Die Induktivität ist mit der technischen Meßbrücke zu messen.

Für die Messungen 1.1. bis 1.3. sind die Meßfehler anzugeben. Man erhält sie bei der Strom-Spannungsmessung aus der Klasse der Meßge-

räte, für die technische Meßbrücke aus der angegebenen Meßunsicherheit und für das Vergleichsnormal aus dem Aufdruck bzw. durch Abschätzung. Die Meßunsicherheit der Längenmessung bei Aufgabe 1.2. ist zu schätzen. In der Auswertung ist für die nach den drei Meßmethoden bestimmten Widerstände die Meßunsicherheit zu berechnen. Es ist zu diskutieren, ob die 3 Werte im Rahmen der Meßunsicherheit übereinstimmen.

Die nach den Aufgaben 2 und 3 erhaltenen L- und C-Werte sind miteinander zu vergleichen. Die Meßunsicherheiten aus den entsprechenden Messungen der Aufgabe 1 sind sinnvoll zu übernehmen.

Fragen

F 1 Geben Sie einige Meßmethoden zur Widerstandsbestimmung an!

F 2 Leiten Sie die für eine abgeglichene Wheatstonesche Brücke geltende Gleichung (6) her!

F 3 Erläutern Sie an Hand von Skizzen die spannungs- und die stromrichtige Schaltung von Meßinstrumenten bei einer Strom-Spannungs-Messung.

2.8.3. Spannungsteilermessungen

Die Spannungsteilerschaltung ist eine der grundlegenden und verbreiteten Schaltungen in der Elektrik; sie wird in vielfältiger Weise angewendet. Schaltungsaufbau und Messungen sollen mit einigen Grundlagen des belasteten und unbelasteten Spannungsteilers bekannt machen.

Aufgaben

1. An einem Spannungsteiler werden unbelastet und bei Belastung mit drei verschiedenen Widerständen ($R_1 \gg R_S$, $R_2 \approx R_S$, $R_3 < R_S$) Spannungsmessungen durchgeführt. Die Ergebnisse sind zu diskutieren.
2. Es soll eine Schaltung zur Feineinstellung einer Spannung aufgebaut werden. Die Meßergebnisse sind durch Rechnung zu überprüfen.

(Hinweis: Es sollen einige Grundfertigkeiten bei der Herstellung und Trennung von Lötverbindungen erworben werden; siehe hierzu Abschnitt 1.2.6.)

Grundlagen

Ein Spannungsteiler ist ein elektrischer Widerstand, an dem mittels eines Schleifkontaktes Widerstandswerte zwischen Null und einem Maximalwert eingestellt werden können. Auf diese Weise erhält man eine

regelbare sekundäre elektrische Spannungsquelle. Die primäre elektrische Spannungsquelle ist mit den Enden des Widerstandes verbunden. Hierbei muß beachtet werden, daß der Widerstand für den "Querstrom" richtig dimensioniert ist, d. h., der hindurchfließende Strom darf ihn auch nicht unzulässig hoch erwärmen. Des weiteren sollte der äußere Widerstand (Verbraucher) groß genug gegenüber dem Schiebewiderstand sein, da sonst die Gefahr besteht, daß bei Annäherung an die höchstzulässige Stromstärke die Drahtwicklung durchbrennt.

Zur sinnvollen Durchführung der Messungen ist die Kenntnis des Ohmschen Gesetzes sowie die der Kirchhoffschen Gesetze für den verzweigten Stromkreis erforderlich. Zur Vorbereitung sind einige Aufgaben zum belasteten und unbelasteten Spannungsteiler zu lösen.

1. Der unbelastete Spannungsteiler

1.1. a) Geben Sie die für eine Reihenschaltung (Abb. 2.8.(4)) geltender. Gesetze für Strom, Spannungen und Widerstände an!

b) Stellen Sie die Beziehung zwischen den Teilspannungen und Teilwiderständen auf!

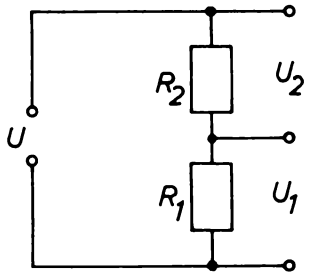


Abb. 2.8.(4) Zwei in Reihe geschaltete Widerstände

1.2. Berechnen Sie für U = 100 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 40 Ω die Spannungen an R_1 und an R_2!

1.3. Durch die Reihenschaltung (Abb. 2.8.(4)) wird die Spannung U im Verhältnis der Widerstände geteilt. Die Schaltung heißt deshalb Spannungsteilerschaltung, siehe Abb. 2.8.(5). Diese Schaltung kann auch dadurch realisiert werden, daß ein Widerstand R_S durch einen verschiebbaren Abgriff S in zwei veränderbare Teilwiderstände geteilt wird. U_A ist die Spannung an R_1. In welchem Bereich kann U_A

durch Verschieben von S eingestellt werden?

1.4. Bei welcher Stellung von S ist $U_A = 0$?

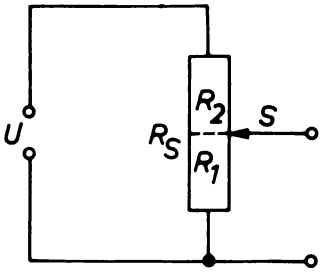


Abb. 2.8.(5) Spannungsteilerschaltung

1.5. Beim unbelasteten Spannungsteiler fließt unabhängig von der Einstellung des Abgriffs S durch R_S stets der gleiche Strom $I = U/R_S$. Welcher Zusammenhang ist zwischen U_A und R_1 zu erwarten? (Exponentielle, logarithmische, quadratische Abhängigkeit, Proportionalität, indirekte Proportionalität oder ein anderer Zusammenhang?) Man skizziere den erwarteten Verlauf der grafischen Darstellung von $U_A = (R_1)$!

2. Der belastete Spannungsteiler

2.1. Man gebe den Zusammenhang zwischen Gesamtspannung und Teilspannungen, Gesamtstrom und Teilströmen sowie zwischen Gesamtwiderstand und Teilwiderständen bei der Parallelschaltung (Abb. 2.8.(6)) an!

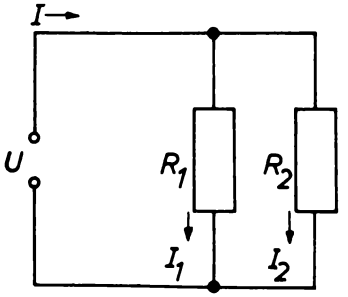


Abb. 2.8.(6) Zwei Widerstände in Parallelschaltung

2.2. Für Abschätzungen benötigt man häufig folgende Regeln, die aus den Gesetzen der Parallelschaltung folgen:

a) Bei einer Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

b) Schaltet man zu einem Widerstand R_1 einen Widerstand R_2 parallel, welcher groß gegen R_1 ist ($R_2 \gg R_1$), so ist der Gesamtwiderstand nur wenig kleiner als R_1.

c) Wie groß ist der Gesamtwiderstand von n gleich großen parallel geschalteten Widerständen?

2.3. Die Abb. 2.8.(7) zeigt einen durch den Widerstand R_A belasteten Spannungsteiler. Der Spannungsteilerwiderstand R_S ist durch den Abgriff in die beiden Teilwiderstände R_1 und R_2 geteilt. Man zeichne das Ersatzschaltbild, indem R_1, R_2 und R_A als Einzelwiderstände betrachtet werden.

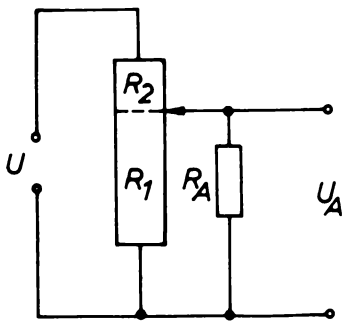


Abb. 2.8.(7) Belasteter Spannungsteiler

2.4. Ein zunächst unbelasteter Spannungsteiler, dessen Abgriff nicht in einer der Endstellungen steht, werde durch das Zuschalten von R_A belastet (Abb. 2.8.(8)). Wie ändert sich dabei U_A? Man bedenke, daß eine Parallelschaltung von R_1 und R_A entsteht (Abschätzungsregel 2.2.a).

2.5. Belastung des Spannungsteilers durch einen sehr kleinen Widerstand R_A. Man schätze für die in den Abbildungen 2.8.(9) a,b,c dargestellten Schaltungen die Spannung U_A ab und benutze dabei die Abschätzungsregel 2.2.b.

2.6. Zusammenfassung

Beim belasteten Spannungsteiler sind die Widerstände R_1 und R_A parallel geschaltet. U_A ist dadurch mit Ausnahme der beiden Endstellungen

stets kleiner als beim unbelasteten Spannungsteiler mit gleicher Einstellung des Abgriffs. Zwischen U_A und R_1 besteht kein linearer Zusammenhang. Am Beispiel 2.5. ist zu sehen, daß U_A bei Mittelstellung des Abgriffs kleiner als U/2 ist.

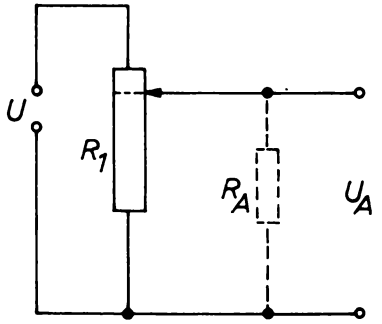


Abb. 2.8.(8) Zuschalten eines Widerstandes zu einem unbelasteten Spannungsteiler

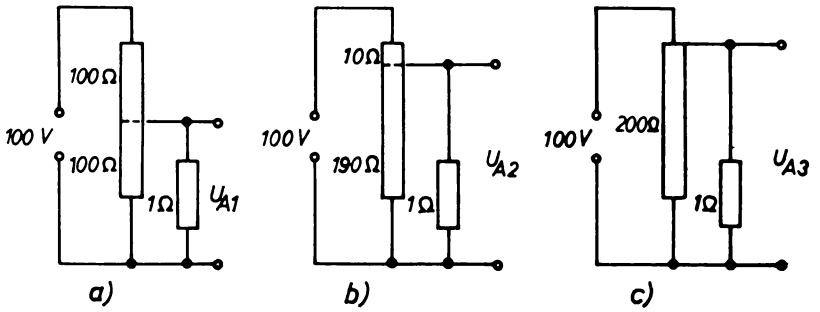


Abb. 2.8.(9) Zur Spannungsabschätzung

3. Auswahl geeigneter Spannungsteiler

3.1. Vor dem Anschließen an eine Spannungsquelle ist bei jedem Widerstand zu prüfen, ob er überlastet wird. Sind der Widerstand und der maximale Strom angegeben (Typenschild), so läßt sich die zulässige Maximalspannung berechnen.

a) Man gebe die Formel für die Maximalspannung an!

b) Man prüfe, welche der angegebenen Widerstände an U = 100 V ange-

schlossen werden dürfen:

	R/Ω	I_{max}/A
R_1	50	1
R_2	1000	0,5
R_3	100	2
R_4	8000	0,1

4. Spannungsteilerschaltungen für spezielle Meßaufgaben

4.1. Ein Dekadenwiderstand (Abb. 2.8.(10) hat ebenso wie ein Schiebewiderstand 3 Anschlüsse. Zwischen den beiden Anschlüssen liegen 10 gleiche Widerstände, z. B. $10 \times 100\,\Omega$. Der mittlere Anschluß S kann durch Drehen eines Einstellknopfes mit jedem Kontakt zwischen 0 (rote Buchse) und 10 verbunden werden. Dabei gibt die Zahl an der Einstellmarke an, wieviele Teilwiderstände zwischen 0 und S liegen.

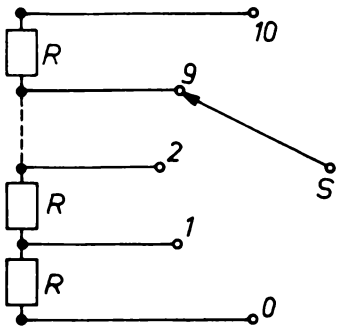


Abb. 2.8.(10) Dekadenwiderstand

a) Welcher Widerstand liegt beim obigen Beispiel zwischen 0 und S bei Einstellung auf "2" ?

b) Welcher Strom darf zwischen 0 und S fließen, wenn für den gesamten Dekadenwiderstand $I_{max} = 0,1$ A ist?

4.2. Mit einem Dekadenwiderstand als Spannungsteiler läßt sich R_1 in zehn gleichen Stufen verändern. Kann man mit einem Dekaden-

widerstand als Spannungsteiler jeden beliebigen Wert von U_A im Bereich $0 \leq U_A \leq U$ einstellen?

4.3. Die Feineinstellung einer Spannung ist bei der in Abb. 2.8.(11) dargestellten Spannungsteilerschaltung mit dem Abgriff am kleineren Spannungsteiler-Teilwiderstand möglich.

Beispiel: $R_A \longrightarrow \infty$ (unbelastet), $R_1 = 90\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $U = 100$ V.

a) Mit welchem Abgriff wird die Feineinstellung vorgenommen?

b) Wie groß ist der Feineinstellbereich?

c) In welchem Spannungsbereich läßt sich U_A insgesamt einstellen?

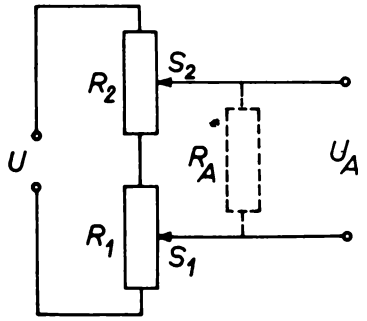


Abb. 2.8.(11) Spannungsteiler zur Feineinstellung

4.4. Bei vielen elektrischen und elektronischen Geräten wird die Schaltung Abb. 2.8.(11) so verwirklicht, daß die Grobeinstellung der Spannung an einem Dekadenwiderstand erfolgt und die Feineinstellung an einem kontinuierlich einstellbaren Drehpotentiometer vorgenommen wird.

Beispiel: Grobeinstellung der Spannung an einem Dekadenwiderstand R_1. Wie groß muß der Widerstand R_2 des Feineinstell-Spannungsteilers sein, damit der gesamte Spannungsbereich zwischen zwei Stufen der Grobeinstellung überstrichen werden kann (unbelasteter Fall)?

4.5. Eine Spannungsteilerschaltung zur Feineinstellung einer Spannung werde durch einen Widerstand R_A belastet. Wie wird sich U_A im Vergleich zur unbelasteten Schaltung ändern? ($U_A = 0$ und $U_A = U$ seien ausgenommen.)

4.6. Zusammenfassung

Bei einer Spannungsteilerschaltung mit Feineinstellung liegt die Ausgangsspannung zwischen den beiden Abgriffen der in Reihe geschalteten Spannungsteiler. Wird eine stufenweise Grobeinstellung ge-

wählt, so muß der Feineinstell-Spannungsteiler so dimensioniert werden, daß an ihm der gesamte Spannungsbereich zwischen zwei Stufen einstellbar ist.

Zur Durchführung und Auswertung

1. Der Spannungsteilerwiderstand wird mit einer technischen Meßbrücke gemessen. Anschließend sucht man mittels der Meßbrücke die Stellungen des Abgriffs, bei denen sich R_1 um jeweils den zehnten Teil des Gesamtwiderstandes des Spannungsteilers geändert hat. Diese Einstellungen werden markiert.

Auch die Werte der zur Belastung ausgewählten Widerstände R_A und die Widerstandswerte der Drehpotentiometer der Aufgabe 2 werden mit der Meßbrücke bestimmt. Nach dem Aufbau der Spannungsteilerschaltung wird die Spannung an R_1 als Funktion des Widerstandes gemessen. Dabei beginnt man bei der Abgriffsstellung, bei der U_A den Wert Null hat.

Nach der Messung ohne Belastung sind analoge Meßreihen mit den drei ausgewählten Widerständen aufzunehmen. Diese Widerstände sind dazu an Buchsen anzulöten.

Für alle vier Meßreihen werden die Ausgangsspannungen als Funktion der Widerstände R_1 grafisch dargestellt. Der unterschiedliche Kurvenverlauf ist zu diskutieren.

Für alle vier Schaltungen ist der Wert von U_A bei Mittelstellung des Abgriffes auch aus R, R_A und U zu berechnen. Für U wird dabei nicht der an der Schalttafel angegebene Wert, sondern die gemessene Spannung benutzt. Berechnete und gemessene Werte werden in einer Tabelle zusammengestellt und verglichen.

Für einen dieser Fälle sind die Meßunsicherheiten des gemessenen und des berechneten Wertes anzugeben. Dabei wird für die gemessenen Spannungen der am Meßgerät angegebene Wert der Klasse benutzt, während für die Widerstände die Meßunsicherheiten der Brückenmessung zu verwenden sind.

2. Feineinstellung einer Spannung. Die Auswahl geeigneter Drehpotentiometer geschieht nach folgenden Überlegungen: Steht für die Grobeinstellung ein stufenweise schaltbarer Spannungsteiler zur Verfügung, so soll der Feineinstell-Spannungsteiler gestatten, den gesamten Spannungsbereich zwischen zwei Stufen zu überstreichen. Steht kein Stufen-Spannungsteiler zur Verfügung, so soll am Feineinstell-

Spannungsteiler etwa 1/5 der gesamten Spannung einstellbar sein.

Die Drehpotentiometer werden am Chassis befestigt. Sie werden durch Lötverbindungen miteinander und mit den Buchsen verbunden. Für verschiedene Grobeinstellungen sind jeweils der mit dem kleineren Spannungsteiler einstellbare Bereich der Ausgangsspannung und daraus der Feineinstellbereich $\Delta U_A = U_{Amax} - U_{Amin}$ bestimmt. Mit den Gesetzen des unverzweigten Stromkreises ist der Feineinstellbereich zu berechnen. Berechnete und gemessene Werte werden in einer Tabelle zusammengestellt und verglichen. Nach beendeter Messung sind die Lötverbindungen wieder abzulöten.

Fragen

F 1 Wie groß ist die Ausgangsspannung U_A einer mit dem Ausgangswiderstand R_A belasteten Spannungsteilerschaltung bei bekannten Teilwiderständen R_1, R_2 und bekannter Eingangsspannung U?

F 2 Welche Teile einer Spannungsteilerschaltung sind bei unsachgemäßer Handhabung am ehesten gefährdet?

F 3 Welche Vor- und Nachteile einer möglichen Spannungsänderung hat ein Vorwiderstand gegenüber einer Spannungsteilerschaltung?

F 4 Auf Radiowiderständen und Drehpotentiometern sind oft der Widerstand R und die maximal zulässige Leistung angegeben. Wie kann man daraus die zulässige Spannung bzw. Stromstärke errechnen?

F 5 In welchen Fällen wird eine Spannungsteilerschaltung durch einen Spannungsmesser merklich belastet?