Lehrmaterial zur Ausbildung von Diplomlehrern
PHYSIK

Heft 16b

PHYSIK-PRAKTIKUM

(Teil 2)

1982

Das vorliegende Lehrmaterial wurde von der Hauptabteilung Lehrerbildung des Ministeriums für Volksbildung als Manuskriptdruck herausgegeben.
Es wurde unter Anleitung der Zentralen Fachkommission Physik beim Ministerium für Volksbildung und beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen erarbeitet.

Autorenkollektiv:

Prof. Dr. H. Melcher (Leiter)
Dr. H. Baller
Dr. R. Burmeister
E. Hannemann
Dr. E. Hudl
H. Kürschner
W. Leonhardt
H.H. Schmidt

Prof. Dr. H. Hänsel (Kap. 1.)

Redakteur:

Dr. H. Stöckel

Druck: VEB Kongreß- und Werbedruck Oberlungwitz
1/16/18/8.82/1188 Ag 124/169/82 EVP: 2,90 M

Inhaltsverzeichnis

3.	Mechanik und Thermodynamik	211
3.1.	Grundgesetz der Mechanik, Grundgleichung der Rotation	211
3.2.	Stoßgesetze, gerader Stoß	215
3.3.	Erzwungene Schwingungen, Messungen am Pohlschen Drehpendel	222
3.4.	Bestimmung von Trägheitsmomenten auf dem Drehtisch	227
3.5.	Elastische Eigenschaften isotroper Festkörper	236
3.6.	Oberflächenspannung	249
3.7.	Bestimmung der Viskosität mit Hilfe der Kugelfallmethode nach Stokes	260
3.8.	Strömung im Rohr	266
3.8.1.	Bestimmung der Viskosität mit einem Kapillarviskosimeter nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille	266
3.8.2.	Bestimmung von Reynoldsschen Zahlen	271
3.9.	Bestimmung der molaren Masse nach Viktor Meyer	278
3.10.	Phasenumwandlungen	281
3.10.1.	Dampfdruckkurve des Wassers	281
3.10.2.	Messung spezifischer Umwandlungsenthalpien	285
3.11.	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Clement und Desormes	289
3.12.	Bestimmung statistischer Häufigkeitsverteilungen	293
3.13.	Bestimmung der Boltzmann-Konstanten k aus der Brownschen Bewegung	300
4.	Elektrodynamik	304
4.1.	Kennlinien von Widerständen, Widerstandsbestimmung	304
4.2.	Drehspul-Spiegelgalvanometer	313
4.3.	Messungen mit dem Elektronenstrahloszillografen	328
4.4.	Bestimmung von Induktivitäten und Kapazitäten mit der Wechselstrombrücke	337

4.5.	Transformator	342
4.6.	Magnetische Messungen	348
4.7.	Elektrische Messungen nichtelektrischer Größen	355
4.8.	Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons	362
4.9.	Elektrolyse - Bestimmung der Faradayschen Konstante	369
4.10.	Kennlinien	372
4.11.	Netzgleichrichter	382
4.12.	Niederfrequenzverstärker	390
4.13.	RC-Generator mit Wien-Vierpol	399
4.14.	Hertzsche Wellen - Richtcharakteristik von UKW-Antennen	405
4.15.	Untersuchungen zum Hall-Effekt	410

3. Mechanik und Thermodynamik

3.1. Grundgesetz der Mechanik, Grundgleichung der Rotation

Der experimentellen Bestätigung der Grundgleichung der Mechanik stehen gewisse Schwierigkeiten im Wege. Wird etwa ein Wagen beschleunigt, treten die Reibung und die Rotation der Räder als Störfaktoren auf. Diese Störungen können durch die Bewegung des Probekörpers auf einem Luftkissen weitgehend ausgeschaltet werden. Im vorliegenden Experiment wird ein Rundlaufgerät eingesetzt; es ist einmal robust und wenig störanfällig, zum anderen lassen sich Fehlerursachen (Reibung u. ä.) verhältnismäßig einfach kompensieren.

Aufgaben

1. Das Trägheitsmoment eines Stabes (Drehachse $\perp$ Stablängsachse durch den Massenmittelpunkt) ist zu bestimmen und mit dem Wert zu vergleichen, der aus den Abmessungen des Stabes berechnet wurde.
2. Durch Metallscheiben, die auf den Stab aufgeschoben werden, läßt sich das Trägheitsmoment verändern. Für verschiedene Rotationsradien dieser Scheiben sind die Trägheitsmomente zu messen und mit den aus den Abmessungen von Stab und Scheiben berechneten Werten zu vergleichen.
3. Die Winkelbeschleunigung ist grafisch darzustellen
   a) bei konstantem Drehmoment als Funktion des Trägheitsmomentes,
   b) bei konstantem Trägheitsmoment als Funktion des Drehmomentes.

Grundlagen

Zur Beschreibung der Rotation eines Körpers wird das Denkmodell "Starrer Körper" benutzt. Ein starrer Körper hat im allgemeinen 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation.

Werden 2 Punkte des starren Körpers im Raum festgehalten, kann er sich nicht mehr frei bewegen, er kann nur noch um die durch die zwei Punkte festgelegte Achse (körper- und raumfeste Rotationsachse) rotieren. Er besitzt nur noch einen Freiheitsgrad der Rotation, seine Lage kann eindeutig durch die Angabe des Drehwinkels φ beschrieben werden. Alle seine Massenelemente können sich nur auf konzentrischen Kreisen, deren Ebenen senkrecht zur Rotationsachse liegen, bewegen.

F 1 Stellen Sie die Größen gegenüber, mit denen die geradlinige Bewegung einer Punktmasse und die Rotation eines starren Körpers beschrieben werden!

Um den starren Körper um eine feste Rotationsachse beschleunigt rotieren zu lassen, muß (mindestens) eine Kraft $\underline{F}$ (mit veränderlicher

Richtung oder mit veränderlichem Angriffspunkt) auf ihn einwirken. Sie ruft ein Drehmoment

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \tag{1}$$

hervor, wobei $\underline{r}$ der Vektor des Abstandes des Angriffspunktes der Kraft von der Drehachse ist. Greift $\underline{F}$ senkrecht zu $\underline{r}$ in einem festen Abstand r von der Drehachse an, vereinfacht sich Gleichung (1) zu

$$M = rF. \tag{2}$$

Diese Kraft kann realisiert werden durch einen Faden, der um einen Zylinder gewickelt ist und an dem eine Kraft in einer zur Drehachse senkrechten Ebene zieht (Abb. 3.1.(1)).

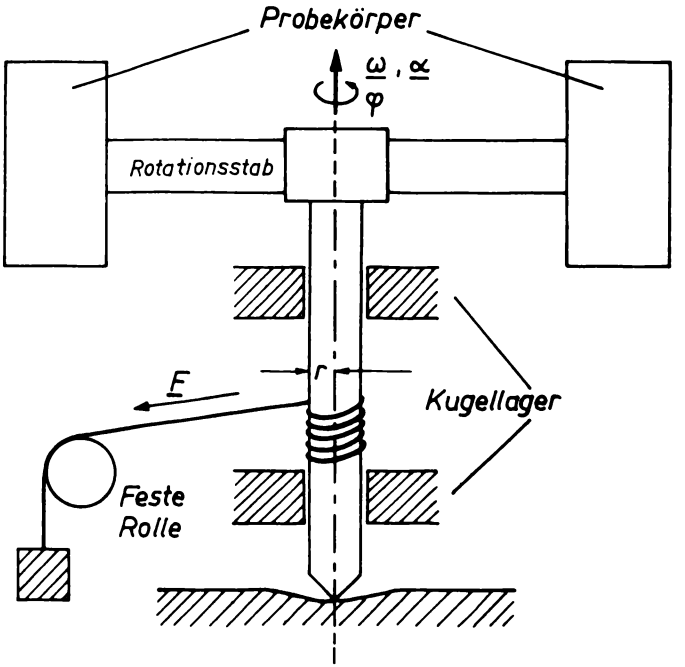


Abb. 3.1.(1) Rotorgerät zur Bestimmung von Trägheitsmomenten

Die kinetische Energie eines einzelnen Massenelementes dm ist

$$dW_{kin} = \frac{1}{2}\, dm\, v^2$$

oder, wenn man die Bahngeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ ersetzt,

$$dW_{kin} = \frac{1}{2}\, dm\, r^2\, \omega^2.$$

Durch Integration erhält man

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int r^2\, dm\, \omega^2. \qquad (3)$$

Den Ausdruck

$$\boxed{\int r^2\, dm = \varrho \int_V r^2 dV = J} \qquad (4)$$

nennt man das Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf die gewählte Drehachse.

F 2 Welcher wesentliche Unterschied ist zu beachten, wenn man von "Masse" und vom "Trägheitsmoment" eines Körpers spricht?

F 3 Das Trägheitsmoment eines langen dünnen Stabes bezüglich einer durch seinen Massenmittelpunkt gehenden Drehachse, die senkrecht zum Stab liegt, ist zu berechnen!

F 4 Vervollständigen Sie die in F 1 begonnene Gegenüberstellung durch die Größen Kraft, Masse, Impuls, kinetische Energie, die Grundgleichung der Mechanik und die Gesetze der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung!

Wirkt auf einen starren Körper mit fester Drehachse ein konstantes Drehmoment, rotiert er gleichmäßig beschleunigt, d. h.,

$$\omega = \alpha t \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{\alpha}{2} t^2.$$

Drückt man den Drehwinkel φ durch die Anzahl n der Umdrehungen des rotierenden Körpers aus, erhält man

$$2\pi n = \frac{\alpha}{2} t^2$$

und daraus die konstante Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{4\pi n}{t^2}.$$

Wenn also ein Körper dadurch in Rotation versetzt wird, daß um eine

zylindrische Welle mit dem Radius r ein Faden gewickelt ist, an dem in einer zur Achse senkrechten Ebene eine konstante Kraft F zieht, läßt sich die Grundgleichung der Mechanik für die Rotation

$$M = J\alpha \tag{5}$$

umformen zu

$$F\,r = J\,\frac{4\pi\,n}{t^2}\,. \tag{6}$$

F, r, n und t lassen sich bequem messen, aus Gl. (6) kann also das Trägheitsmoment von Körpern, die auf die Antriebswelle aufgesetzt werden, berechnet werden. Das Trägheitsmoment der Antriebswelle muß besonders bestimmt werden, im allgemeinen kann es vernachlässigt werden.

Zur Durchführung und Auswertung

Zunächst erfolgt der Ausgleich der Lagerreibung.
Der senkrecht zur Antriebswelle befestigte Trägerstab wird zunächst allein durch schrittweise wachsende Zugkräfte (Wägestücke mit Haken zu je 50 g) in Rotation versetzt. Die Zeit für die ersten 10 Umdrehungen wird für jede Zugkraft mehrfach gemessen. Gemäß Gl. (6) wird das Trägheitsmoment des Stabes berechnet. Das Ergebnis dieser Versuchsreihe wird mit dem Wert des Trägheitsmomentes verglichen, der aus den Abmessungen des Stabes berechnet wurde (siehe F 3). Zu beachten ist, daß bei der Herleitung der Gleichung (6) von $\varphi = \frac{\alpha}{2}\,t^2$ ausgegangen wurde, also eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 0$ vorausgesetzt wurde. Die Zeitmessung muß also mit dem Beginn der Rotation beginnen.

Auf den Trägerstab lassen sich in verschiedenen Abständen von der Drehachse symmetrisch zwei Metallscheiben aufsetzen. Es ist dabei auf festen Sitz dieser Scheiben zu achten, an den Enden des Trägerstabes müssen die Sicherungsplinte eingesetzt werden.

Im Vergleich zum Rotationsradius dieser Scheiben ist ihre Dicke zu vernachlässigen. Sie können als "Punktmassen" aufgefaßt werden. Das Gesamtträgheitsmoment ist die Summe der Trägheitsmomente von Stab und Scheiben. Auch bei dieser Aufgabe wird bei verschiedenen Zugkräften und verschiedenen Lagen der Scheiben die Zeit für die er-

sten 10 Umdrehungen gemessen und mit Hilfe von Gleichung (6) das Trägheitsmoment berechnet.

Die experimentell bestimmten Werte sind mit den aus den Abmessungen bestimmten Werten von J zu vergleichen.

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

F 5 Der Luftwiderstand des bewegten Systems wird bei diesen Messungen vernachlässigt. Wie wirkt sich diese Vernachlässigung auf das Ergebnis der Messungen aus?

F 6 Wie wird die Vertrauensabweichung der experimentell bestimmten Trägheitsmomente errechnet?

F 7 Was für Kurven erwarten Sie bei den grafischen Darstellungen, die in Aufgabe 3 verlangt werden?

3.2. Stoßgesetze, gerader Stoß

Stoß- und Streuvorgänge sind in der Natur wesentlich häufiger, als es nach den Standardbeispielen - Autozusammenstoß und Billardspiel -, die bei der einfachen Behandlung der Stoßgesetze gebracht werden, scheinen könnte.

So ist die Molekularbewegung eine dauernde Folge von Stößen der Moleküle untereinander und gegen die Gefäßwand. Die Brownsche Bewegung kommt zustande durch Stöße von Flüssigkeits- oder Gasmolekülen gegen größere Teilchen, die in der Flüssigkeit oder dem Gas verteilt sind.

Die Kernphysik und vor allem die Hochenergiephysik haben die meisten ihrer Erkenntnisse gewonnen und gewinnen sie auch weiterhin durch die Untersuchung von Stoß- und Streuprozessen, die sich zwischen Elementarteilchen oder auch zwischen Elementarteilchen und Atomkernen abspielen.

Das vorliegende Experiment soll zeigen, daß die Gesetze des elastischen und des unelastischen Stoßes Grenzgesetze sind und für den Stoß zweier realer Körper nur angenähert gelten.

Aufgaben

1. Für den geraden Stoß einer Stahlkugel auf verschiedene andere Kugeln ist die Gültigkeit des Energie- und Impulserhaltungssatzes zu prüfen. Der Stoßvorgang ist fotografisch festzuhalten.
2. Für jeden dieser Stoßvorgänge ist das Verhältnis des Gesamtimpulses nach dem Stoß zum Gesamtimpuls vor dem Stoß zu berechnen.
3. Es ist zu ermitteln, welcher Bruchteil der Energie der stoßenden Kugel (bezogen auf die Anfangsenergie) jeweils auf die gestoßene Kugel übertragen wird.
4. In Fällen von teilelastischen Stößen ist der Verlust an mechanischer Energie (bezogen auf die Anfangsenergie) zu ermitteln.

5. Die experimentellen Ergebnisse sind mit den aus der Theorie berechneten Werten für den vollkommen elastischen und den vollkommen unelastischen Stoß zu vergleichen und zu diskutieren.

Grundlagen

Beantworten Sie zunächst folgende Fragen nach grundlegenden Größen und Zusammenhängen:

F 1 Wann spricht man von Stoß-, wann von Streuprozessen?

F 2 Welche allgemeinen Gesetze liegen Stoß- und Streuprozessen zugrunde? Welche Probleme treten bei der mathematischen Behandlung auf?

F 3 Unterscheiden Sie zwischen elastischem und unelastischem Stoß!

F 4 Unterscheiden Sie zwischen geradem und schiefem Stoß!

F 5 Ein mathematisches Pendel der Länge l wird um den Winkel α aus seiner Ruhelage ausgelenkt und losgelassen. Geben Sie seine Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage als Funktion des Winkels α an!

Damit Energie und Impuls der Kugeln einfach aus den Beobachtungsergebnissen berechnet werden können, wird im Experiment eine möglichst reine Translationsbewegung untersucht. Dazu sind Kugeln aus verschiedenem Material mit unterschiedlichen Massen bifilar als Pendel aufgehängt, sie bewegen sich dadurch nahezu in einer Ebene.

Denkbar wäre das Experiment auch mit Hilfe einer Fallrinne. Dabei muß aber die Rotation der Kugeln berücksichtigt werden, auch spielt die Reibung eine nicht mehr zu vernachlässigende Rolle.

Für die folgenden Herleitungen gelten die Symbole:
Index 1: stoßende Kugel, Index 2: gestoßene Kugel;
einfache Symbole: vor dem Stoß,
gestrichene Symbole: nach dem Stoß.

Beim vollkommen elastischen geraden Stoß gelten der Energie- und der Impulserhaltungssatz:

$$\boxed{\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2,} \qquad (1)$$

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.} \qquad (2)$$

Aus beiden Gleichungen folgt mit $\mu = m_1/m_2$

$$v_1' = \frac{2v_2 + (\mu - 1)v_1}{\mu + 1}, \qquad (3)$$

$$v_2' = \frac{2\mu v_1 - (\mu - 1)v_2}{\mu + 1} . \qquad (4)$$

Wie weiter unten in den Hinweisen zur Durchführung des Experimentes angegeben wird, ruht die zweite Kugel vor dem Stoß. Es liegt also der Sonderfall $v_2 = 0$ vor. Damit vereinfachen sich die Gleichungen (3) und (4) zu

$$v_1' = \frac{(\mu - 1)v_1}{\mu + 1} , \qquad (5)$$

$$v_2' = \frac{2\mu v_1}{\mu + 1} . \qquad (6)$$

Energieübergang beim Stoß

Die kinetischen Energien beider Kugeln vor und nach dem Stoß werden verglichen. Da im vorliegenden Sonderfall $v_2 = 0$ ist, ist auch $W_2=0$; W_2' ist also die Energie, die während des Stoßes von der stoßenden auf die gestoßene Kugel übergeht. Es ist

$$W_2' = \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{m_2}{2} \frac{4\mu^2 v_1^2}{(\mu + 1)^2} .$$

Wird W_2' auf die Anfangsenergie W_1 bezogen, folgt daraus

$$\frac{W_2'}{W_1} = \frac{4\mu}{(\mu + 1)^2} . \qquad (7)$$

Der Energieübergang von der stoßenden zur gestoßenen Kugel hängt beim geraden elastischen Stoß auf eine ruhende Kugel also nur vom Verhältnis der Massen der beiden Kugeln ab.

F 6 Wo hat die Kurve der in Gleichung (7) gegebenen Funktion Extremwerte und Wendepunkte? Der Verlauf der Kurve dieser Funktion ist zu skizzieren!

Beim vollkommen unelastischen geraden Stoß bewegen sich die beiden Körper nach dem Stoß gemeinsam weiter. Es gilt nur der Impulssatz, da

ein Teil der kinetischen Anfangsenergie durch die Verformung in innere (thermische) Energie umgewandelt wird:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v',$$

$$v' = \frac{\mu v_1 + v_2}{\mu + 1} . \qquad (8)$$

Diese Gleichung gilt für die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoß. Im Sonderfall $v_2 = 0$ vereinfacht sich (8) zu

$$v' = \frac{\mu v_1}{\mu + 1} .$$

Durch die Verformungsarbeit ist die kinetische Energie des Systems nach dem Stoß geringer als vor dem Stoß. Für den Verlust ΔW an kinetischer Energie gilt:

$$\Delta W = W_1 - W' = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2$$

$$= \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{\mu^2 v_1^2}{(\mu + 1)^2} .$$

Wenn auch dieser Verlust an kinetischer Energie auf die Anfangsenergie bezogen wird, ergibt sich

$$\frac{\Delta W}{W_1} = 1 - \frac{(m_1 + m_2)\mu^2}{m_1 (\mu + 1)^2} = \frac{1}{\mu + 1} . \qquad (9)$$

F 7 Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion (9)!

Zur Durchführung

Bei den stoßenden Körpern handelt es sich um Kugeln aus verschiedenem Material. Sie sind als Pendel bifilar so aufgehängt, daß die stoßende Kugel zentral auf die gestoßene trifft. Die stoßende Kugel ist in allen Fällen eine Stahlkugel bekannter Masse m_1, die gestoßene Kugel kann ausgetauscht werden. Die Massen der Kugeln sind der Anweisung am Arbeitsplatz zu entnehmen.

Die stoßende Kugel wird in ihrer Ausgangslage durch einen Elektromagneten festgehalten. Damit wird erreicht, daß sie in allen Fällen mit gleicher Energie und Geschwindigkeit auf die zweite Kugel stößt. Seitliche Bewegungen und Schwingungen werden außerdem weitgehend vermieden.

Die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß lassen sich nach F 5 aus den Auslenkwinkeln der Pendelfäden ermitteln. Der Stoßvorgang wird fotografisch aufgezeichnet. Dazu sind die Kugeln vor einem dunklen Hintergrund hell zu beleuchten. Der Verschluß des Fotoapparates wird auf "B" eingestellt und mit einem Drahtauslöser so lange offen gehalten, bis der Stoßvorgang abgeschlossen ist. Bei der Verschlußeinstellung "B" öffnet sich der Verschluß, wenn der Auslöser gedrückt, und schließt sich wieder, wenn er losgelassen wird.

Als Film wird ein normaler Kleinbildfilm (NP 15; NP 20) verwendet, die einzustellende Blendenzahl ist durch Probeaufnahmen zu ermitteln oder wird vom Betreuer gegeben. Der Fotoapparat wird auf einem standsicheren Stativ so aufgestellt, daß die Filmebene möglichst genau parallel zur Schwingungsebene der Pendel liegt. Jede Aufnahme ist in folgenden Schritten durchzuführen:

1. Kugeln genau ausrichten, Mittelpunkte müssen genau auf gleicher Höhe liegen.
2. Stoßende Kugel am Magneten festhalten; warten, bis sie nicht mehr schwingt.
3. Fotolampe einschalten und Verschluß des Fotoapparates öffnen.
4. Magnet ausschalten, stoßende Kugel beginnt zu schwingen.
5. Wenn die gestoßene Kugel den Umkehrpunkt überschritten hat, den Verschluß sofort schließen.
6. Fotolampe ausschalten.

Hinweis: Bei Fotolampen hat der Glühfaden zur Verbesserung der Lichtausbeute eine wesentlich höhere Temperatur als bei normalen Glühlampen. Ihre Lebensdauer ist daher wesentlich geringer; Fotolampen dürfen nur zur Aufnahme unter voller Spannung eingeschaltet werden.

Jeder Stoßvorgang ist zweimal zu fotografieren, damit eventuelle Abweichungen vom zentralen Stoß festgestellt werden können. Der Film wird entwickelt (ORWO-Entwickler A 49, 8 min oder F 43, 10 min), zwischengewässert und fixiert (Fixierbad A 300, 10 min). Wird der Film nach dem Schlußwässern mit Spiritus abgespült, trocknet er

schneller. Die Auswertung der Negative erfolgt entweder durch Anfertigung einer Vergrößerung oder einfach dadurch, daß das vergrößerte Bild auf der Kassette des Vergrößerungsapparates nachgezeichnet wird. Wichtig für diese Zeichnung sind die genaue Lage der beiden Aufhängepunkte und die Anfangs- und Endlagen der beiden Pendel.

Zur Auswertung des Experiments

In den Vergrößerungen wird zunächst noch die Ruhelage der stoßenden Kugel (Parallele zur Ruhelage der gestoßenen Kugel durch den Aufhängepunkt) eingezeichnet. Aus der Zeichnung können dann 4 Winkel (α_1; α_1'; α_2 = 0; α_2') abgelesen werden (Abb. 3.2.(1)). Ist die Pendellänge l bekannt oder kann sie genau gemessen werden, wird mit den Absolutwerten der Geschwindigkeit gearbeitet.

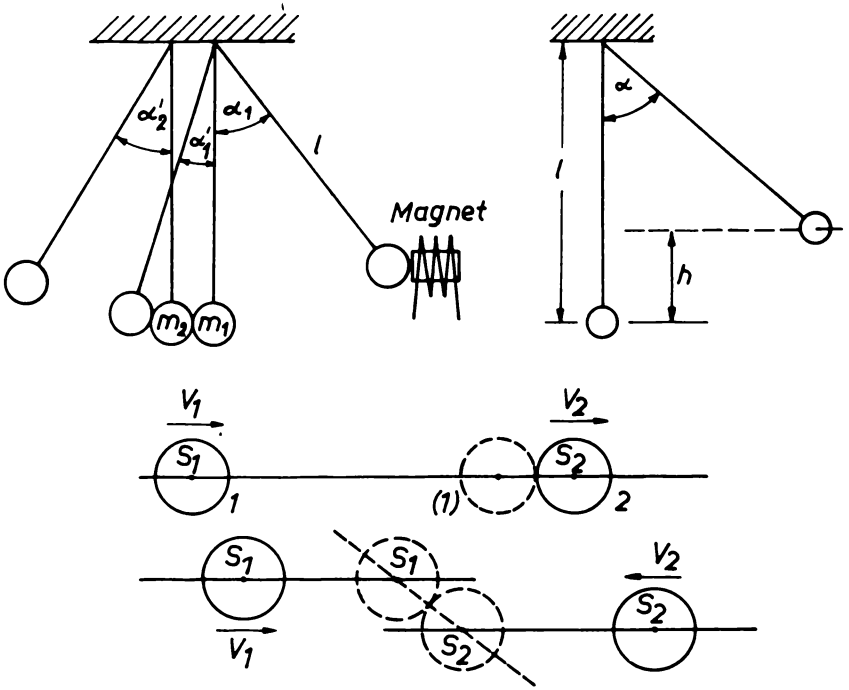


Abb. 3.2.(1) Zur Auswertung der Stoßversuche

Wenn die Pendellänge l nicht genau bestimmt werden kann, wird die Geschwindigkeit durch die maximalen Auslenkwinkel ersetzt und mit Verhältniswerten gearbeitet.

Bei Aufgabe 2 wird der Gesamtimpuls des Systems der beiden Kugeln nach dem Stoß auf den Gesamtimpuls vor dem Stoß bezogen:

$$\frac{p'}{p} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 v_1} . \tag{10}$$

Da der Impulserhaltungssatz sowohl beim elastischen wie auch beim unelastischen Stoß gilt, müßte beim Experiment in allen Fällen $p'/p = 1$ sein. Ergibt sich ein Wert $p'/p < 1$, heißt das, daß der Stoß nicht genau gerade war und nach dem Stoß noch Drehimpulse auftraten. Möglich ist auch, daß sich die gestoßene Kugel nicht genau in der Ebene der stoßenden Kugel bewegte und auf dem Film nur die Projektion ihrer Bahn in diese Ebene erschien.

Bei Aufgabe 3 wird

$$\frac{W_2'}{W_1} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \tag{11}$$

berechnet und bei Aufgabe 4

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{W_1 - W_1' - W_2'}{W_1} = 1 - \frac{W_1'}{W_1} - \frac{W_2'}{W_1} . \tag{12}$$

F 8 Formen Sie die Gleichungen (10), (11) und (12) um, indem Sie nach dem Ergebnis von F 5 die Geschwindigkeiten durch die maximalen Auslenkwinkel α, α_1' und α_2' ersetzen!

Die mit Hilfe der Gleichungen (11) und (12) erhaltenen Ergebnisse des Experiments werden mit den Werten verglichen, die nach den Gleichungen (7) und (9) für den vollkommen elastischen und unelastischen Stoß berechnet wurden. Die Werte aus Experiment und Theorie werden verglichen, Abweichungen ausführlich diskutiert.

Weiterführende Aufgaben

1. Werden Metallkugeln leitend so aufgehängt, daß sie Teil eines Stromkreises sind, wird dieser Stromkreis während des Stoßvorgan-

ges geschlossen. Aus dem Stoßausschlag eines ballistischen Galvanometers läßt sich die Stoßdauer bestimmen.

2. Bestimmung der Mündungsgeschwindigkeit eines Geschosses mit dem Stoßpendel.

Fragen

F 1 bis F 8 siehe Text.

3.3. Erzwungene Schwingungen, Messungen am Pohlschen Drehpendel

Schwingungsbeanspruchungen stellen in der gesamten Technik ein Problem dar, das bei Konstruktionen der vielfältigsten Art berücksichtigt werden muß. Bekannte Beispiele sind die Beanspruchung von Maschinenfundamenten, von Verkehrsbauten unter Belastung - z. B. Brükken - oder Lagerung rotierender Teile mit Unwucht. Im folgenden sollen einige Zusammenhänge bei (periodischer) Stoßbeanspruchung schwingungsfähiger Systeme betrachtet werden. Besonders die Abhängigkeiten der Amplitude und der Phasendifferenz von der Erregerkreisfrequenz sollen dabei untersucht werden. Die Messung sich verändernder Größen aus der Bewegung heraus stellt an die Genauigkeit des Beobachtens und die Sorgfalt des Messens hohe Anforderungen.

Aufgaben

1. Die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Drehpendels soll bestimmt werden.
2. Für unterschiedliche Dämpfungen werden die logarithmischen Dekremente bestimmt, die Dämpfungskurven als Funktionen der Zeit grafisch dargestellt und der Verlauf der gedämpften Schwingungen $\varphi = \varphi(t)$ skizziert.
3. Nehmen Sie für verschiedene Dämpfungen den Phasenwinkel zwischen erregender und erzwungener Schwingung sowie die Amplitude der erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz auf und stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar!

Grundlagen

Läßt man auf ein schwingungsfähiges System der Eigenkreisfrequenz ω_0 von außen ein Drehmoment periodisch mit der Erregerfrequenz ω_a einwirken, so wird das System zu einer erzwungenen Schwingung angeregt. Sieht man von der Zeit des Einschwingvorganges ab, so ist die erzwungene Schwingung stationär und stimmt in ihrer Kreisfrequenz mit der Erregerkreisfrequenz ω_a überein - auch dann, wenn $\omega_0 \neq \omega_a$ ist. Die sich einstellende Amplitude φ_0 ist allerdings in starkem Maße von ω_a abhängig und wird außerdem von der Dämpfung des Systems beeinflußt. Die Versuchsanordnung besteht aus einem Drehpendel (Abb. 3.3.(1)): Eine flache Kupfer- oder Messingscheibe S ist um die Achse

A drehbar und möglichst reibungsarm gelagert. Das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich A sei J. Die Spiralfeder F ist einerseits an der Scheibe S und andererseits an dem um A drehbaren Hebel H befestigt, und zwar so, daß in der Ruhestellung beide Stellungen der

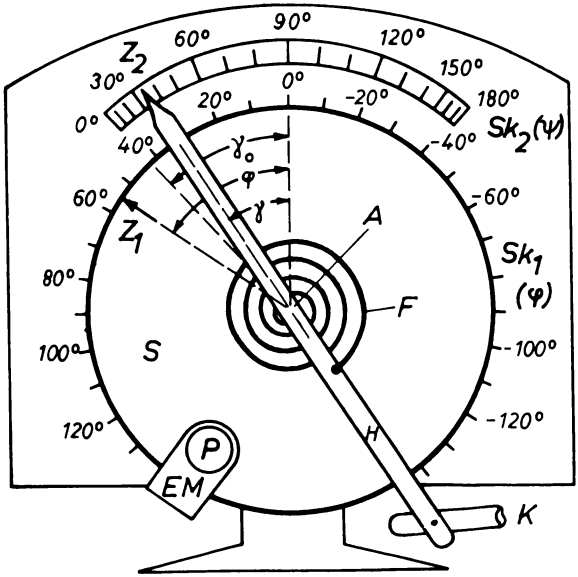


Abb. 3.3.(1) Drehpendel nach R. W. Pohl

Zeiger Z_1 und Z_2 übereinstimmen. Das Richtmoment dieser Feder sei D. Auf den Hebel H kann mittels der Schubkurbel K eine harmonische Schwingung übertragen werden, wenn am anderen Ende über einen Exzenter ein drehzahlvariabler Elektromotor angekoppelt wird. Der dann auftretende Verdrehungswinkel des Hebels H gegen die vertikale Stellung sei γ . Die Amplitude φ_0 der Scheibe S kann mit dem daran befestigten Zeiger Z_1 auf der Skale Sk_1 abgelesen werden. Ordnet man einen Elektromagneten EM so an, daß die Scheibe S sich im Spalt zwischen den Polschuhen P bewegt, dann kann durch diese Wirbelstrombremse das Schwingungssystem gedämpft werden, wobei das erzeugte Bremsmoment der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Scheibe proportional ist: es entstehen gedämpfte Schwingungen.

Der Grad der Dämpfung kann durch die Stromstärke des Erregerstromes für den Elektromagneten eingestellt werden. Wird bei feststehen-

dem vertikalem Hebel H die Scheibe bis zum Winkel φ_0 ausgelenkt, so schwingt sie nach dem Loslassen mit ihrer Eigenkreisfrequenz ω_0. In einer beliebigen Stellung φ wirken auf die Scheibe zwei Drehmomente: das von der Spiralfeder herrührende Drehmoment $M_1 = - D\varphi$ und das von der Wirbelstrombremse verursachte Drehmoment $M_2 = - C\dot{\varphi}$.

Das resultierende Drehmoment $M_1 + M_2$ ist durch das Grundgesetz der Drehbewegung mit dem Trägheitsmoment J der Scheibe und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ verknüpft: $J\ddot{\varphi} = M_1 + M_2$, so daß die Schwingungsgleichung lautet

$$J\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + D\varphi = 0. \tag{1}$$

Setzt man den Elektromotor in Bewegung, so überträgt die Schubkurbel über die Spiralfeder das Drehmoment

$$M = D(\gamma - \varphi) = D\gamma_0 \cos \omega_a t - D\varphi \tag{2}$$

auf die Scheibe. Die Schwingungsgleichung geht dann in die inhomogene Form

$$\boxed{J\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + D\varphi = D\gamma_0 \cos \omega_a t} \tag{3}$$

über, die sich vereinfachen läßt zu

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \varepsilon \cos \omega_a t, \tag{4}$$

wobei als Abkürzungen benutzt wurden

$$\beta := \frac{C}{2J}, \qquad \omega_0^2 := \frac{D}{J}, \qquad \varepsilon := \frac{D\gamma_0}{J} =: \frac{M_0}{J}.$$

β ist eine Dämpfungskonstante des Systems. Als stationäre Lösung der Differentialgleichung findet man (nach dem Abklingen des Einschwingvorganges, also für den stationären Schwingungszustand)

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_a t - \psi)} \tag{5}$$

mit

$$\varphi_0 := \gamma_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega_0} \right)^2 \right] + \left(\frac{2\beta\omega_a}{\omega_0^2} \right)^2 \right\}^{-1/2} \tag{6}$$

und

$$\psi = \arctan \frac{2\beta\omega_a}{\omega_o^2 - \omega_a^2} \,. \tag{7}$$

Damit läßt sich Gl. (5) wie folgt interpretieren: Die Scheibe schwingt mit der Erregerkreisfrequenz ω_a. Zwischen der Erregerschwingung und der erzwungenen Schwingung besteht ein Phasenunterschied ψ, der für $\omega_a = \omega_o$ - Erregerkreisfrequenz und Eigenkreisfrequenz des Systems stimmen überein, also Resonanzfall der ungedämpften Schwingung - den Wert $\pi/2$ annimmt. Für $\omega_a < \omega_o$ gilt $0 < \psi < \pi/2$ und für $\omega_a > \omega_o$ schließlich ist $\pi/2 < \psi < \pi$ wegen des nun negativen Wertes des Tangens.

Mit zunehmender Dämpfung β wird das Maximum der Amplitude der erzwungenen Schwingung nicht mehr bei $\omega_a = \omega_o$ erreicht, sondern bereits bei Werten $\omega_a < \omega_o$ - die Resonanzstelle und damit die Resonanzkreisfrequenz verlagert sich zu niedrigeren Werten hin (Abb. 3.3.(2))

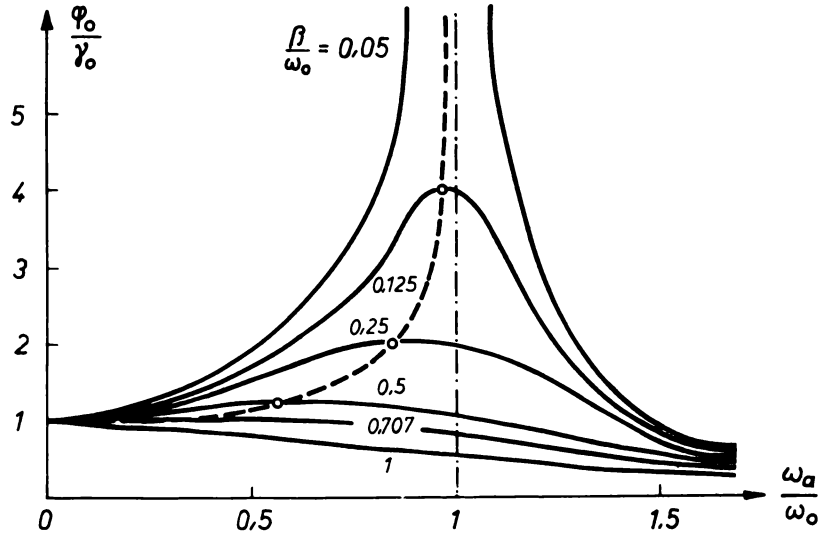


Abb. 3.3.(2) Amplitude der erzwungenen Schwingung über der Erregerkreisfrequenz für verschiedene Dämpfungsparameter

Hinweise zur Durchführung und Auswertung

Zu Aufgabe 1

Die Versuchsanordnung ist zunächst so einzustellen, daß der Zeiger Z_2 vertikal steht. Für die Dämpfung $\beta = 0$ - durch den Elektromagneten fließt kein Strom - wird die Zeit für einige Perioden mehrfach gemessen und daraus die Schwingungsdauer $T_0 = 2\pi/\omega_0$ des (ungedämpft angenommenen) Drehpendels bestimmt.

F 1 Klären Sie, ob die Behandlung als ungedämpfte Schwingung einen Fehler ergibt, der im Ergebnis berücksichtigt werden muß.

Die Anfangsamplitude φ_0 soll dabei möglichst groß gewählt werden. Aus der gefundenen mittleren Schwingungsdauer wird die Kreisfrequenz berechnet und mit ihrer Meßunsicherheit angegeben.

Zu Aufgabe 2

Bei dieser Aufgabe wird die Apparatur mit der Spannungsquelle verbunden. Der Betreuer erteilt die Erlaubnis zum Betreiben der Schaltung.

Das Drehpendel ist jeweils nach links auszulenken und bei einem konstanten Wert der Amplitude - z. B. bei $\varphi_0 = 140^\circ$ - die Schwingung zu beginnen. Zuvor ist eine bestimmte Dämpfung einzustellen. Das geschieht entweder durch Wahl einer bestimmten Schalterstufe bei stufiger Änderung des Erregerstromes durch den Elektromagneten oder durch Wahl einer bestimmten mit einem Stromstärkemeßgerät gemessenen Stromstärke bei stetiger Änderung des Erregerstromes über einen Stellwiderstand. Die Messungen sind so oft zu wiederholen, bis alle Umkehrpunkte der gedämpften Schwingung eindeutig bestimmt sind. Da die Messungen stets bei gleicher Maximalamplitude beginnen, können die Meßergebnisse aus verschiedenen Wiederholungen kombiniert und als Mittelwert angegeben werden. Die logarithmischen Dekremente zu den einzelnen Dämpfungsstufen werden für alle möglichen Kombinationen von Amplituden-Mittelwerten bei jeweils gleicher Dämpfung β berechnet.

Für die grafische Darstellung der gedämpften Schwingungen ist die t-Achse zweckmäßigerweise in Vielfachen von T/2 ($\triangleq T_0/2$ nach Aufgabe 1) zu unterteilen.

Zu Aufgabe 3

Es werden jeweils die Zeiten für 10 bzw. 20 Erregerschwingungen beim

Durchgang des Phasenzeigers Z_2 durch den 90^0-Wert der Skale Sk_2 gemessen, daraus $\bar{\omega}_a$ errechnet sowie die Amplituden φ_0 auf Skale Sk_1 mit dem Zeiger Z_1 abgelesen. Der Phasenwinkel ψ kann für einen Zeitpunkt t_1, in dem $\varphi = \varphi_0$ ist, mittels Zeigers Z_2 auf der Skale Sk_2 unmittelbar in Winkelgrad abgelesen werden.

t_1 ergibt sich aus (5) für $\varphi = \varphi_0$ zu $t_1 = \psi/\omega_a \bmod 2\pi/\omega_a$. Gemäß (2)hat zur Zeit $t = t_1$ der "Hebelwinkel" γ den Wert $\gamma_1 = \gamma_0 \cos \omega_a t_1 = \gamma_0 \cos \psi$, woraus $\psi = \arccos(\gamma_1/\gamma_0)$ folgt. Entsprechend dieser Beziehung ist die Skale Sk_2 (nichtlinear) geteilt.

Es ist zu beachten, daß die Ablesung der Amplitude und des Phasenwinkels erst nach Abklingen des Einschwingvorganges gemacht werden dürfen. Bei den Messungen zu dieser Aufgabe ist das gute Zusammenarbeiten zweier Beobachter notwendig, und der Gang der Messungen muß zuvor genau überlegt werden.

Die grafische Darstellung erfolgt mit der Dämpfung als Parameter. Stromstärke angeben!

Die unterschiedlichen Erregerkreisfrequenzen können an einem als Spannungsteiler geschalteten veränderlichen Widerstand eingestellt werden, wenn der Elektromotor über diesen Spannungsteiler an die Versorgungsspannung angeschlossen wird. Der Betreuer gibt den elektrischen Anschluß frei.

Fragen

F 1 siehe Text

F 2 Warum müssen alle Schwingungen mit der gleichen Amplitude begonnen werden?

F 3 Welchen Vorteil bietet die Darstellung der Dämpfungskurven in einem Diagramm mit logarithmisch geteilter Ordinate?

F 4 Wie lauten die Meßgleichungen zur Bestimmung des logarithmischen Dekrementes, wenn Umkehrpunkte nach mehr als einer Periode zur Berechnung benutzt werden sollen?

F 5 Diskutieren Sie den (qualitativen) Verlauf der experimentell bestimmten Abhängigkeiten der Amplitude bzw. des Phasenwinkels von der Erregerkreisfrequenz im Vergleich mit den theoretisch begründeten Erwartungswerten und interpretieren Sie auftretende Abweichungen!

3.4. Bestimmung von Trägheitsmomenten auf dem Drehtisch

Die Kenntnis des Trägheitsmomentes eines Körpers ist in vielen Meßaufgaben erforderlich. Bei Körpern unregelmäßiger Gestalt und inhomo-

gener Massenverteilung ist eine rechnerische Bestimmung des Trägheitsmomentes sehr aufwendig bzw. unmöglich. In diesen Fällen muß es experimentell bestimmt werden.

Aufgaben

1. Die Proportionalität zwischen angreifendem Drehmoment und Auslenkung ist für den gegebenen Aufbau zu prüfen.
2. Das Direktionsmoment des Drehtisches ist aus Schwingungsdauer und Trägheitsmoment zu bestimmen.
3. Das Trägheitsmoment um die Figurenachse eines drehsymmetrischen Körpers ist zu bestimmen.
4. Die Hauptträgheitsmomente eines Körpers sind zu bestimmen.
5. Die Gültigkeit des Satzes von STEINER ist zu prüfen.

Grundlagen

Bei Drehbewegung ist die kinetische Energie eines starren Körpers durch

$$W_{rot} = J\omega^2/2$$

gegeben, worin das Trägheitsmoment J durch

$$J = \int r^2 \, dm$$

definiert ist. Mit r bezeichnet man den (senkrechten) Abstand des Massenelementes dm von der Drehachse. Ist das Trägheitsmoment J_M eines Körpers bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt bekannt, dann kann man mit Hilfe des Steinerschen Satzes das Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen Achse A berechnen, wenn der Abstand s der beiden Achsen und die Gesamtmasse m des Körpers bekannt sind:

$$J_A = J_M + ms^2.$$

Das Grundgesetz der Mechanik lautet für ebene Drehungen:

Kraftmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung.

Mit Hilfe von Drehschwingungen bestimmt man das Trägheitsmoment J bei bekanntem Direktionsmoment D (Richt- oder Direktionsgröße), oder aber man bestimmt D bei bekanntem J.

Das Hookesche Gesetz für Drehungen lautet

$$M = - D\varphi ,$$

d. h., das Kraftmoment (Drehmoment) M ist bei kleinen Auslenkungen dem Drehwinkel φ proportional. Die Schwingungsdifferentialgleichung lautet

$$J_A\ddot{\varphi} = - D\varphi .$$

Als Schwingungsdauer erhält man daraus $T = 2\pi\sqrt{J_A/D}$.

Zur Durchführung und Auswertung

Zu Aufgabe 1

Mit einem dünnen Faden wird eine geringe Kraft auf den Umfang der Scheibe des Drehtisches übertragen (Abb. 3.4.(1)). An einer Winkel-

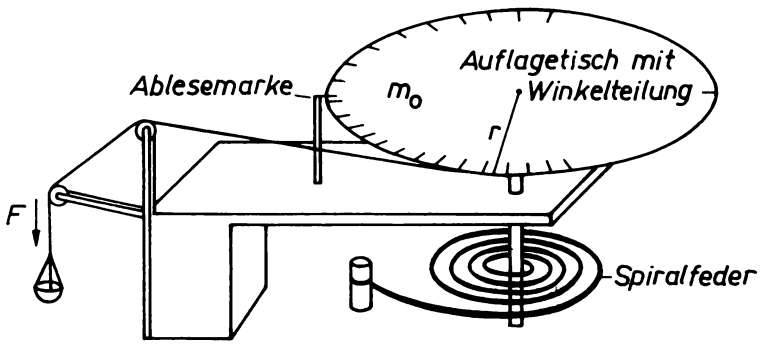


Abb. 3.4.(1) Drehpendel zur Bestimmung von Trägheitsmomenten

meßeinrichtung können die Auslenkwinkel von 0° bis etwa 90° abgelesen werden, die zu bestimmten - mit Federwaage oder Waagschale mit

aufgelegten Wägestücken meßbaren - Kräften gehören. Aus der angreifenden Kraft F und dem Radius r der Kreisscheibe wird das jeweilige Drehmoment M berechnet.

Aus der Meßgleichung $M = Fr = mgr = D\varphi$ folgt $D = Fr/\varphi = mgr/\varphi$. Die Proportionalität $M \sim \varphi$ ist rechnerisch und grafisch zu prüfen und der Wert für D mit seiner Meßunsicherheit anzugeben.

Zu Aufgabe 2

Der Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer T_o und Direktionsmoment D ist durch

$$D = 4\pi^2 J_o / T_o^2 \qquad (1)$$

gegeben. Das Trägheitsmoment J_o wird gemäß $J_o = (1/2)m_o r^2$ berechnet (wenn der Drehtisch aus einer homogenen Kreisscheibe besteht), und die endgültige Meßgleichung lautet dann

$$D = 2\pi^2 m_o r^2 / T_o^2 \,. \qquad (2)$$

F 1 Welche Vernachlässigungen wurden dabei gemacht?

Eine andere experimentelle Bestimmung des Direktionsmomentes D ist möglich, wenn ein Körper mit bekanntem Trägheitsmoment J_1 zur Verfügung steht (am besten ein Vollzylinder). Wird dieser Körper auf dem Drehtisch befestigt, so gilt

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_o + J_1 + m_1 s^2}{D} \,. \qquad (3)$$

Es bedeuten J_1 das bekannte Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf die durch den Massenmittelpunkt gehende Hauptträgheitsachse, m_1 die Masse des Körpers und s den Abstand des Massenmittelpunktes des Körpers von der Drehachse des Drehtisches. Aus der Differenz

$$T_1^2 - T_o^2 = 4\pi^2 \frac{J_1 + m_1 s^2}{D}$$

folgt

$$D = 4\pi^2 \frac{J_1 + m_1 s^2}{T_1^2 - T_o^2} \qquad (4)$$

bzw. für s = 0

$$D = 4\pi^2 \frac{J_1}{T_1^2 - T_0^2} . \qquad (5)$$

Mit diesem Wert für D läßt sich aus (1) das Trägheitsmoment J_0 des Drehtisches berechnen:

$$J_0 = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2} . \qquad (6)$$

Die Messung der Schwingungsdauern T_0 und T_1 muß mit großer Genauigkeit erfolgen, weil deren Fehler alle Ergebnisse dieses Experimentes beeinflussen.

F 2 Bei allen Ableitungen wurde die Bewegung des Drehtisches als reibungsfrei vorausgesetzt. Prüfen Sie, ob die Tatsache der reibungsgedämpften Bewegung des Drehtisches die Messung beeinflußt und dabei Fehler entstehen, die im Ergebnis berücksichtigt werden müssen.

Zu Aufgabe 3

Der Körper wird auf den Drehtisch so aufgesetzt, daß seine Figurenachse mit der Drehachse des Drehtisches zusammenfällt. Zur Auswertung wird Gl. (5) entsprechend umgestellt. Die Ergebnisse wiederholter Messungen sind zu mitteln und kritisch zu werten.

Zu Aufgabe 4

Die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente verläuft analog zu dem Vorgehen bei Aufgabe 3. Nur ist der Körper nacheinander so aufzusetzen, daß jeweils eine andere Hauptträgheitsachse mit der Drehachse übereinstimmt.

Zu Aufgabe 5

Durch Stifte und Bohrungen in der Scheibe des Drehtisches sind Orte mit definiertem Abstand s zur Drehachse festgelegt, an die nacheinander der Körper gemäß Aufgabe 3 bzw. 4 zu bringen ist. Messung und Auswertung verlaufen analog zum Gang bei Aufgabe 3.

F 3 Welche Forderungen sind im Interesse einer exakten Messung an das Trägheitsmoment J_0 des Drehtisches im Verhältnis zu den zu bestimmenden Trägheitsmomenten zu stellen?

Fragen

F 1 bis F 3 siehe Text.

3.4.2. Bestimmung von Trägheitsmomenten mittels Torsionsschwingungen

Aufgaben

1. Mittels der Stabkörper mit bekannten Trägheitsmomenten und ihrer Kombinationen sind das Trägheitsmoment des "Drehtisches" und das Direktionsmoment des Spannbandes zu bestimmen.
2. Die Proportionalität zwischen dem Quadrat der Schwingungsdauer und dem Trägheitsmoment ist grafisch zu veranschaulichen.
3. Das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe bezüglich der Mittelsenkrechten ist zu bestimmen und zur Kontrolle aus Masse und Radius der Scheibe zu berechnen.
4. Die Trägheitsmomente eines geschlitzten Stabes sind für die verschiedenen möglichen Drehachsen zu bestimmen; mit den experimentell ermittelten Ergebnissen soll der Satz von STEINER geprüft werden.

Zur Durchführung und Auswertung

Eine Methode zur experimentellen Bestimmung von Massenträgheitsmomenten beruht auf der Untersuchung von Torsionsschwingungen. Der experimentelle Aufbau (Abb. 3.4.(2)) besteht aus einer Auflage für die zu untersuchenden Körper, die zwischen zwei Spannbändern (i. allg. gleicher Abmessungen und) gleichen Materials aufgespannt ist. Die Meßgleichung $T_0 = 2\pi \sqrt{J_0/D}$ gilt für Bänder mit beliebigem Querschnitt. Die Auslenkung aus der Ruhelage sollte hinreichend klein bleiben, um den Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes nicht zu überschreiten.

Zu Aufgabe 1

Im allgemeinen ist das Trägheitsmoment J_0 der Anordnung nicht bekannt. Durch Auflegen von Körpern mit bekanntem Trägheitsmoment kann man

durch Kombination von zwei verschiedenen Messungen nach der Differenzmethode das Direktionsmoment D ohne Kenntnis von J_o bestimmen:

$$D = \frac{4\pi^2(J_1 - J_2)}{T_1^2 - T_2^2} . \qquad (1)$$

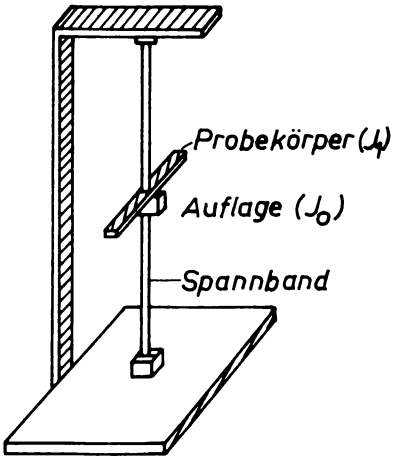


Abb. 3.4.(2) Torsionsapparatur zur Bestimmung von Trägheitsmomenten

Besonders günstig gestalten sich Messung und Rechnung, wenn man zuerst die Schwingungsdauer für die Kombination zweier Stäbe auf dem "Drehtisch" bestimmt und danach die Messung mit dem einen der beiden Stäbe dieser Kombination wiederholt:
Kombination Stab 1 mit Stab 2:

$$T_{1,2}^2 = 4\pi^2(J_1 + J_2 + J_o)/D. \qquad (2)$$

Stab 1 allein:

$$T_1^2 = 4\pi^2(J_1 + J_o)/D. \qquad (3)$$

Differenzbildung für beide Gleichungen liefert

$$D = \frac{4\pi^2 J_2}{T_{1,2}^2 - T_1^2} , \tag{4}$$

wobei J_2 ein gegebener Wert ist und die Differenz der Schwingungsdauer-Quadrate bei geeigneter Anlage der Meßtabelle unmittelbar abgelesen werden kann. Mit dem so berechneten D folgt aus der Messung mit dem Stab 1 allein

$$J_o = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - J_1 . \tag{5}$$

Es kann auch zusätzlich die Messung mit Stab 2 allein ausgeführt werden:

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_2 + J_o}{D} . \tag{6}$$

Durch Differenzbildung folgt $T_2^2-(T_{1,2}^2 - T_1^2) = 4\pi^2 J_o/D$ und somit

$$J_o = \frac{T_2^2-(T_{1,2}^2 - T_1^2)}{4\pi^2} D. \tag{7}$$

Die Bestimmung von J_o ist i. allg. nur sinnvoll, wenn die Möglichkeit einer sehr präzisen Zeitmessung gegeben ist, z. B. einer elektronischen Zeitmessung mit Lichtschranken-Steuerung.

In der Vorbereitung sollte tabellarisch zusammengestellt werden, welche Kombinationen zu Gleichungspaaren möglich und welche davon hinsichtlich des Meßganges und der Genauigkeit besonders günstig sind unter Beachtung der Forderung, daß $\overline{D}$ und $\overline{J_o}$ aus mindestens 5 Einzelwerten gemittelt werden sollen.

Zu Aufgabe 3

Sind das Direktionsmoment D des Spannbandes und das Trägheitsmoment J_o des Drehtisches nach Aufgabe 1 bestimmt, können die Trägheitsmomente beliebiger Körper auf dem Drehtisch bestimmt werden. Ist der Abstand des Massenmittelpunktes von der Drehachse $s \neq 0$ (wie bei Aufgabe 4), so ist der Satz von STEINER anzuwenden und die Gleichung $T = 2\pi \sqrt{(J_o + J' + m's^2)/D}$ zu benutzen. Die experimentelle Bestim-

mung des Trägheitsmomentes der Kreisscheibe verläuft analog zu den Messungen bei Aufgabe 1 unter Benutzung der Meßgleichung (3).

F 1 Zur rechnerischen Bestimmung ist die Formel für das Trägheitsmoment der Kreisscheibe um die Mittelsenkrechte herzuleiten.

Die Ergebnisse der experimentellen und der rechnerischen Bestimmung sollen unter Beachtung der Meßunsicherheiten vergleichend diskutiert werden.

Zu Aufgabe 4

Für diese Aufgabe steht ein Stab zur Verfügung, bei der die Drehachse in unterschiedlichen Abständen s zum Massenmittelpunkt gewählt werden kann. Der Stab ist dazu in den jeweiligen Schlitzen auf dem Träger zu befestigen. Anhand einer grafischen Darstellung für $J = J(s^2)$ wird die Richtigkeit des Satzes von STEINER geprüft und außerdem aus dem Trägheitsmoment und der Stablage die Masse des Stabes (als Genauigkeitskontrolle) bestimmt.

F 2 Leiten Sie die Formel für das Trägheitsmoment eines Stabes bezüglich der Mittelsenkrechten her!

Die Bestimmung der Stabmasse m kann direkt auch aus dem Satz von STEINER erfolgen: Aus $J_1 = J_o + ms_1^2$ erhält man

$$m = \frac{J_1 - J_o}{s_1^2} .$$

Wendet man dieses Verfahren auf verschiedene J_i an, so kann aus der (näherungsweisen) Konstanz der errechneten Werte für m ebenfalls die Richtigkeit des Satzes von STEINER gefolgert werden.

Erweiterung: Ein Quader wird in drei Lagen auf die Kreisscheibe aufgesetzt. Unter Anwendung des Satzes von STEINER können - bei präziser Zeitmessung - die drei Hauptträgheitsmomente bestimmt werden.

Fragen

F 1 und F 2 siehe Text.

3.5. Elastische Eigenschaften isotroper Festkörper

Wichtige mechanische Stoffeigenschaften von Körpern werden z. B. durch die Größen Elastizitäts- und Torsionsmodul sowie durch die Poissonsche Zahl charakterisiert.

Aufgaben

1. Bestimmung des Elastizitätsmoduls E aus der Dehnung eines Drahtes.
2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls E aus der Durchbiegung von Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten.
3. Bestimmung des Torsionsmoduls G zylindrischer Stäbe aus unterschiedlichen Materialien.

Grundlagen

Durch das Einwirken von Kräften kann ein Körper verformt werden. Diese Verformung kann beständig sein (plastische Verformung) oder nach Fortfall der Krafteinwirkung wieder vollständig verschwinden (elastische Verformung). Für einen bestimmten Stoff ist i. allg. der Übergang von elastischer zu plastischer Verformung vom Anwachsen der Kraft über einen bestimmten kritischen Wert hinaus abhängig. Die Untersuchung dieser Verformung ist nicht nur von systematischer (Übergang vom Teilchen- zum Kontinuums-Modell), sondern auch von großer praktischer Bedeutung besonders im Hinblick auf Festigkeitsprobleme und Stabilitätsfragen, sowohl im Bauwesen als auch im Maschinenbau, und in bezug auf charakteristische Stoffeigenschaften.

Hinsichtlich der Theorie der elastischen Verformungen wird unterschieden zwischen der Gestaltelastizität und der Volumenelastizität; in den praktischen Anwendungen unterscheidet man Scherung, Dehnung, Biegung und Knickung. Im Fall der Scherung (Drillung, Torsion) bleibt das Volumen des Körpers konstant, und nur seine Gestalt verändert sich: es liegt also reine Gestaltelastizität vor. Bei der Dehnung eines Körpers tritt stets neben der Längenänderung auch eine Querschnittsänderung auf; weder Gestalt noch Volumen bleiben konstant. Reine Volumenelastizität tritt nur bei der - selten untersuchten - vollkommenen Kompression einer Flüssigkeit bzw. eines Festkörpers auf.

Da für geringe Verformungen Proportionalität zwischen verursachender Kraft und elastischer Verformung gilt, kann der dabei auftretende Proportionalitätsfaktor zur Charakterisierung des elastischen Verhaltens benutzt werden. Man spricht dann vom Elastizitätsmodul der

Scherung bzw. Drillung (oder kurz Schub- bzw. Torsionsmodul G), vom Elastizitätsmodul der Dehnung (oder kurz Youngschem Modul bzw. Elastizitätsmodul E), Vom Elastizitätsmodul der Kompression (oder Kompressionsmodul K) und vom Elastizitätsmodul der Querkontraktion (oder der Poissonschen Zahl μ). Die allgemeine Formulierung des proportionalen Zusammenhangs zwischen Spannung σ und relativer Längenänderung

$$\frac{\Delta l}{l} =: \varepsilon \tag{1}$$

gibt das Hookesche Gesetz

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon\ .} \tag{2}$$

Darin ist die Spannung σ definiert als Quotient aus der verformenden Kraft F und der Fläche A, auf welche die Kraft wirkt. (Für den Fall der Dehnung wäre das die senkrecht zum Querschnitt wirkende Kraft bzw. -Koordinate F_n - also eine Normalkraft -, und der Dehnung proportional ist dann die Normalspannung σ_n.)

Das elastische Verhalten eines festen Körpers kann durch die Angabe von E und μ vollständig beschrieben werden. Die anderen elastischen Materialgrößen G und K sind von E und μ abhängig; und zwar gilt

$$\boxed{G = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\mu}} \tag{3a}$$

bzw.

$$\boxed{K = \frac{1}{3}\,\frac{E}{1-2\mu}\ .} \tag{3b}$$

Die Bestimmung der Poissonschen Zahl ist experimentell recht aufwendig, da ja von einer im Normalfall ohnehin schon "kleinen Größe" (z. B. Durchmesser eines Drahtes $\approx$ 1 mm) noch eine relative Änderung der Größenordnung 10^{-3} gemessen werden muß; mechanische Meßgeräte scheiden dafür üblicherweise aus, da sie bestenfalls eine Schätzung in der Größenordnung 10^{-6} m zulassen; d. h. Meßunsicherheit und Meßgröße sind von gleicher Größenordnung. Für eine sinnvolle Messung sollte aber die Meßunsicherheit mindestens zwei Zehnerpotenzen kleiner sein als die Meßgröße (im Beispiel also etwa 10^{-8} m betragen).

Da die experimentelle Bestimmung von E und G i. allg. wesentlich

einfacher durchgeführt werden kann, bestimmt man die Poissonsche Zahl zumeist rechnerisch aus diesen beiden Größen, wofür aus Gl. (3) folgt

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1. \qquad (4)$$

Zur Durchführung und Auswertung von Aufgabe 1

Für die in Form von Drähten vorliegenden Materialien soll die Proportionalität zwischen Belastung und Längenänderung nachgewiesen und der Elastizitätsmodul des jeweiligen Materials bestimmt werden.

Der Draht wird am oberen Ende in eine massive Aufnahme fest eingespannt und sein unteres Ende mit dem Wägeteller und einem geeignet gewählten Wägestück (m_o) vorbelastet. Die Längenänderung Δl_i kann dann auf verschiedene Weise gemessen werden.

a) Das untere Ende des Drahtes wird mit dem Taststift einer Meßuhr gekoppelt (Abb. 3.5.(1)); die Differenz zweier Ablesungen bei

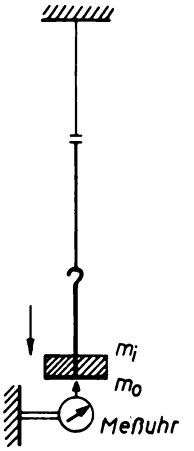


Abb. 3.5.(1) Bestimmung der Längenänderung mit einer Meßuhr

unterschiedlichen Belastungen m_1 und m_2 liefert direkt die zur Belastung $\Delta m = m_2 - m_1$ gehörende Längenänderung Δl als Differenz der beiden Meßuhr-Ablesungen in Millimetern (i. allg. entspricht die Skalenlänge der Meßuhr 1 mm für eine Umdrehung des Zeigers und ist in 100 Skalenteile unterteilt, so daß die Ablesung auf 10^{-5} m möglich ist mit einer Abschätzung auf einige μm). Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß die obere Aufhängung durch die Belastung nicht verändert wird. Bei entsprechend massiver Ausführung (z. B. in die Wand eingelassene Schiene) und nicht zu großen Drahtquerschnitten ist diese Voraussetzung sicher erfüllt. Anderenfalls kann man diese Durchbiegung relativ einfach kompensieren, wenn an der oberen Aufhängung noch ein zweiter, recht stabiler Draht zusätzlich befestigt ist, dessen unteres Ende ebenfalls einen Wägeteller trägt. Die zur Belastung des Meßdrahtes zu benutzenden Wägestücke befinden sich zu Beginn der Messung sämtlich auf dem zweiten Wägeteller und werden zur Belastung lediglich von Wägeteller 2 auf Wägeteller 1 umgesetzt: Die Aufhängung unterliegt in allen Fällen der gleichen (nämlich der maximalen) Belastung und somit gleicher Durchbiegung.

b) Wird das untere Drahtende mit der Achse eines Drehspiegelsystems gekoppelt (Abb. 3.5.(2)), so können die Längenänderungen mit-

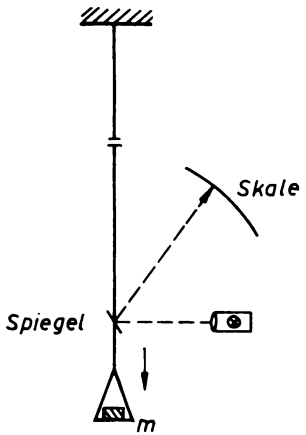


Abb. 3.5.(2) Lichtzeigeranordnung zur Messung der Längenänderung

tels Lichtzeigerablesung entsprechend vergrößert auf einer Skale abgelesen werden: die Lichtmarkenverschiebung Δs auf der Skale im Abstand e vom Drehpunkt des Spiegelsystems ist

$$\Delta s = 4 \frac{e}{D} \Delta l, \tag{5}$$

wenn D der Wellendurchmesser der Spiegelhalterung ist. Analog zur Ablesung an der Meßuhr folgt Δs und damit Δl aus der Differenz zweier Skalenablesungen. Eine Kompensation der Halterungsdurchbiegung kann wie bei a) erfolgen.

c) Sehr geringe Längenänderungen können vorteilhaft mittels Mikroskop und Okularstrichplatte bzw. Meßschraubenokular erfolgen, wenn damit die Verschiebung einer Meßmarke im Gesichtsfeld des Mikroskops gemessen wird. Der Skalenwert der Strichplatte bzw. Meßtrommel wird, falls er nicht am Arbeitsplatz angegeben ist, durch Vergleich mit einer Objektstrichplatte bestimmt.

Arbeitet man mit je einem Mikroskop am fest eingespannten und am belasteten Ende des Drahtes (horizontaler Aufbau vorteilhaft), so kann der eventuelle Einfluß einer Verformung der Aufhängung messend nachgewiesen werden; selbstverständlich muß dann ohne Kompensation gearbeitet werden. Als Länge des Drahtes ist in diesem Fall der Abstand der beiden Meßmarken auf dem unbelasteten Draht anzugeben.

Es empfiehlt sich in jedem Fall, durch eine entsprechende Vorbelastung m_0 zu sichern, daß der Draht weitgehend frei von Knickstellen und Verbiegungen ist, da deren Begradigung unter dem Einfluß der Belastung eine überwiegend plastische Verformung darstellen und das Meßergebnis damit verfälschen würden. Beginnt man die Meßreihe mit der höchstzulässigen Belastung m_{max}, so sind diese Begradigungen am Anfang der Meßreihe weitestgehend erfolgt, und ihr Einfluß auf die Meßwerte wird somit vermieden.

Speziell für die Dehnung eines Drahtes kann Gl. (1) umgeschrieben werden. Die Zugspannung σ wird bei kreisförmigem Querschnitt durch den Ausdruck

$$\sigma = \frac{4mg}{\pi d^2} \tag{6}$$

angegeben, wobei d den (mittels Bügelmeßschraube gemessenen) Durchmesser des unbelasteten Drahtes und m die Masse des zur Belastung

benutzten Körpers bzw. Wägestücks bedeuten. Mit den Gleichungen (1), (2) und (6) findet man

$$E = \frac{4gl}{\pi d^2} \frac{m}{\Delta l} . \tag{7}$$

Aus Gl. (7) läßt sich die Proportionalität $\Delta l \sim m$ als Forderung ablesen und mit den Meßergebnissen bestätigen. (Aus (7) folgen auch die Proportionalitäten $\Delta l \sim F_n = mg$ und $\Delta l/l = \varepsilon \sim \sigma = \frac{4mg}{\pi d^2}$.)

Bei Messungen mit erhöhter Genauigkeit (z. B. gemäß c)) läßt sich nachweisen, daß der Drahtdurchmesser d im unbelasteten Zustand größer als unter Belastung ist. Durch eine entsprechende Meßreihe kann man

$$\frac{\Delta d}{d} \quad E \sim \frac{4mg}{\pi d^2} = \sigma \tag{8a}$$

bzw. mit der Poissonschen Zahl μ als Proportionalitätsfaktor

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\mu}{E} \sigma = -\mu\varepsilon \tag{8b}$$

finden.

F 1 Warum ist für diese Messungen erhöhte Meßgenauigkeit erforderlich?

Die Vermutung, daß sich aus der Querschnittsverringerung bei Längenzunahme eine von der Zugbelastung unabhängige Volumenkonstanz (also reine Formelastizität bei Dehnung) ergeben könnte, erweist sich als falsch. Für die relative Volumenänderung folgt nämlich (in erster Näherung)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (1 - 2\mu) \frac{\Delta l}{l} . \tag{9}$$

F 2 Leiten Sie diese Formel her!

Für die Poissonsche Zahl gilt $0 < \mu < 0{,}5$, also ist stets $\Delta V/V > 0$.

Zur Durchführung und Auswertung von Aufgabe 2

Ein einseitig eingespannter Stab der Länge l werde an seinem freien

Ende durch eine (Quer-)Kraft $F_t = mg$ beansprucht (Abb. 3.5.(3)). Die Folge ist dann eine Biegung des Stabes, d. h., der Stab erfährt auf seiner konvexen (oberen) Seite eine Streckung um Δl und auf seiner konkaven (unteren) Seite eine Stauchung um $-\Delta l$, und das freie Ende erfährt eine Verschiebung s. Für ein kurzes Stabstück kann diese Bie-

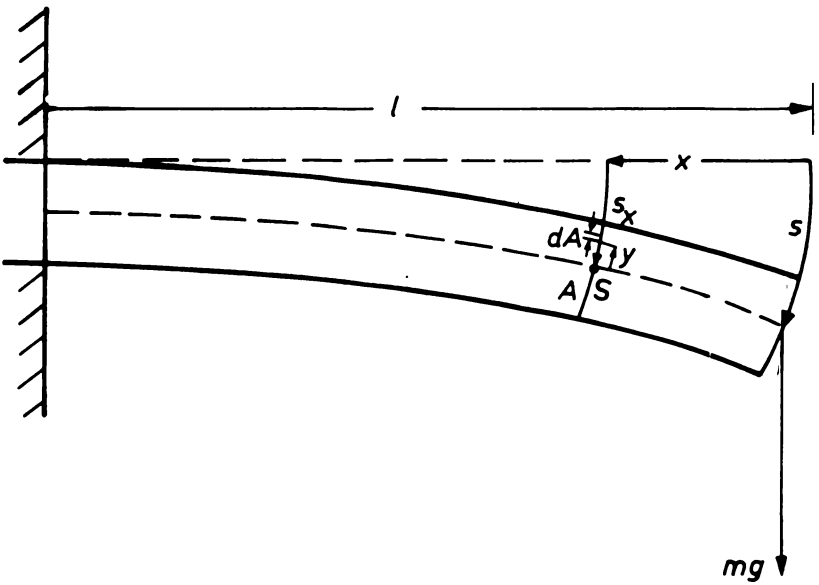


Abb. 3.5.(3) Biegung eines einseitig eingespannten Stabes

gung als Krümmung mit dem Krümmungsradius r aufgefaßt werden. Dann gilt für die Längenänderung

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{r}\,, \tag{10}$$

wenn y darin die Querkoordinate der betrachteten Schicht bezüglich der "neutralen Schicht" bedeutet, deren Länge bei der Biegung unverändert bleibt.

Bei nicht zu großen Biegungen gilt das Hookesche Gesetz und damit für die die Längenänderung hervorrufende Kraft

$$dF = \sigma\, dA = E\,\frac{\Delta l}{l}\, dA = E\,\frac{y}{r}\, dA \tag{11}$$

mit dA als Querschnittsfläche der betrachteten Schicht. Da sich im Gleichgewichtszustand die elastischen Längskräfte innerhalb des betrachteten Stabquerschnitts aufheben, gilt

$$\int_{(A)} dF = \frac{E}{r} \int_{(A)} y\, dA = 0, \tag{12}$$

d. h., die y-Koordinate des Schwerpunktes S der Querschnittsfläche verschwindet

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} y\, dA = 0.$$

Die neutrale Schicht verläuft durch die Schwerpunkte der Querschnittsflächen des Stabes.

Es werden die Drehmomente bezüglich des Flächenschwerpunktes S einer Querschnittsfläche (A) im Abstand x vom Stabende betrachtet. Die äußere Querkraft mg erzeugt das Drehmoment

$$M = m\, g\, x. \tag{13}$$

Ihm entgegengesetzt gleich ist das Drehmoment M', das durch die elastischen Gegenkräfte -dF zustande kommt, die am Stabquerschnitt (A) angreifen:

$$M' = \int_{(A)} dM' = -\int_{(A)} y\, dF = -\frac{E}{r} \int_{(A)} y^2 dA =: -\frac{E}{r}\, J_A. \tag{14}$$

Das Integral

$$J_A := \int_{(A)} y^2 dA$$

wird als Flächenträgheitsmoment der Querschnittsfläche (A) bezeichnet. Im Gleichgewicht gilt $M + M' = 0$, also

$$m\, g\, x = \frac{E}{r} J_A,$$

woraus

$$\frac{1}{r} = \frac{mg}{EJ_A} x \qquad (15)$$

als Bestimmungsgleichung für den Krümmungsradius r folgt. Andererseits gilt für den reziproken Krümmungsradius der neutralen Schicht $s_x = s_x(x)$ bei geringer Durchbiegung

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 s_x}{dx^2} = s_x'' \,. \qquad (16)$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) folgt die Differentialgleichung

$$s_x'' = \frac{mg}{EJ_A} x$$

und daraus als Funktionsgleichung für die neutrale Schicht

$$s_x(x) = \frac{1}{6} \frac{mg}{EJ_A} (x^3 - 3l^2 x + 2l^3),$$

die für das Stabende ($x = 0$) die Form

$$s_x(0) = s = \frac{mgl^3}{3EJ_A} \qquad (17)$$

erhält.

Betrachtet man die Durchbiegung eines auf zwei Schneiden gelagerten, in der Mitte durch eine lotrecht nach unten wirkende Kraft mg belasteten Stabes, so ist desssen Durchbiegung gleich der eines einseitig eingespannten Stabes der Länge l/2 bei Belastung mit der halben Kraft (1/2)mg am freien Ende:

$$s = \frac{mgl^3}{48EJ_A} \,. \qquad (18)$$

Besondere Beachtung verdient die Tatsache, daß das Biegeverhalten eines Stabes bei Belastung also nicht nur von der Querschnittsfläche schlechthin, sondern in starkem Maß von der speziellen Form des Querschnittes abhängig ist. Für einige der unterschiedlichen Formen von Trägerquerschnitten, wie sie besonders bei technischen Anwendungen bevorzugt werden, sind in der Tabelle 1 die Flächenträgheitsmomente sowie die Koordinaten b_o, h_o des Flächenschwerpunktes zusammengestellt.

Für die praktische Anwendung erweist es sich als notwendig, sowohl den Abstand l der Schneiden als auch die Höhen (bzw. Radien) der Stabprofile mit erhöhter Genauigkeit zu messen, da diese Größen mit höherer Potenz in die Meßgleichung eingehen.

Der zu untersuchende Stab wird so auf die Schneiden der massiven Trägersäulen aufgelegt, daß Stab und Säulen rechte Winkel bilden. In der Mitte zwischen den Auflagen wird mittels einer dritten Schneide der Wägeteller angehängt, auf den dann die zur Belastung notwendigen Wägestücke aufgelegt werden können (Abb. 3.5.(4)). Da i. allg. der Stab schon unter dem Einfluß seines Eigengewichtes sich etwas biegt,

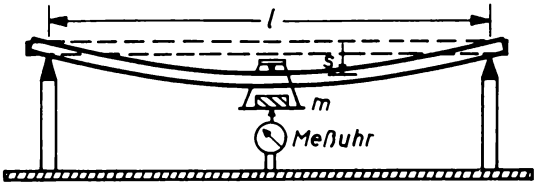
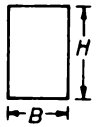


Abb. 3.5.(4) Biegung eines zweiseitig unterstützten Stabes

muß die Verschiebung s jeweils als Differenz $s = s^* - s_o$ aus den Messungen bei belastetem (s^*) und "unbelastetem" (s_o) Stab bestimmt werden, wobei der Wägeteller stets am Stab angehängt bleibt und also nicht zur Belastung zu addieren ist; die Belastung wird nur durch

Tabelle 1 Flächenträgheitsmomente J_A und Koordinaten b_o, h_o des Flächenschwerpunktes für einige Querschnittsprofile von Stäben



$$J_A = H^3B/12$$

$$b_o = B/2, h_o = H/2$$





$$J_A = \frac{1}{12}(H^3B - h^3b)$$

$$b_o = B/2, h_o = H/2$$

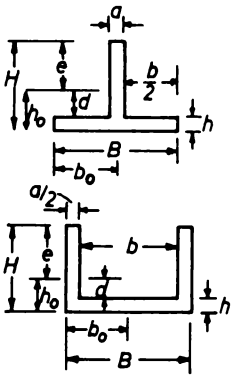


$$J_A = \frac{\pi}{4} R^4, b_o = R\ h_o = R$$



$$J_A = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

$$b_o = R, h_o = R$$



$$J_A = \frac{1}{2}(Bh_o^3 - bd^3 + ae^3) \text{ mit } d = h_o - h,$$

$$e = H - h_o$$

$$b_o = \frac{B}{2}, h_o = \frac{1}{2}\frac{aH^2 + bh^2}{aH + bh}$$

die aufgelegten Wägestücke m gegeben. Damit folgt aus Gl. (18) als Bestimmungsgleichung für den Elastizitätsmodul

$$E = \frac{gl^3}{48J_A} \frac{m}{s} .$$

Aus dem (im Mittel) konstanten Quotienten m/s folgt die Proportionalität von m und s; dieser Quotient kann sowohl rechnerisch aus den Meßwerten bestimmt als auch aus der grafischen Darstellung der Auslenkung s^* über der Masse m als mittlerer reziproker Anstieg abgelesen werden. Die Lösung auf grafischem Weg hat den Vorteil, daß die Differenz $s = s^* - s_0$ nicht bestimmt zu werden braucht: s_0 ergibt sich als Abschnitt auf der s-Achse.

Bei einseitig eingespannten Stäben verläuft der Gang der Messungen und Auswertung analog; die Meßgleichung folgt dann aus Gl. (17) und lautet

$$E = \frac{gl^3}{3J_A} \frac{m}{s} ,$$

wobei l in diesem Fall der Abstand der Wägeteller-Schneide von der Vorderkante der Einspannung ist.

Zur Durchführung und Auswertung von Aufgabe 3

Es werden für die Torsion zylindrischer Stäbe unterschiedlicher Materialien die Proportionalität zwischen dem Drehmoment M und dem Torsionswinkel φ nachgewiesen und die Torsionsmoduln dieser Materialien berechnet.

Ein einseitig fest eingespannter zylindrischer Stab (Länge l, Durchmesser d) wird an seinem freien Ende tangential von einem Kräftepaar beansprucht. Dann ist eine Torsion des Stabes die Folge, wobei zwischen dem aus dem Kräftepaar resultierenden Drehmoment M und dem Torsionswinkel φ die Beziehung

$$M = \frac{\pi r^4 G}{2l} \varphi$$

besteht. Daraus folgt mit

$$M = 2mgR = mgD \qquad (19)$$

(D = Durchmesser der Kreisscheibe - Abb. 3.5.(5)) und mit d = 2r als Durchmesser des Stabes für den Torsionsmodul

$$G = \frac{32\, l g D}{\pi d^4} \frac{m}{\varphi} \,. \qquad (20)$$

(Bei dünnen Stäben bzw. Drähten ist diese Methode nicht sinnvoll; die dynamische Methode liefert bessere Ergebnisse.)

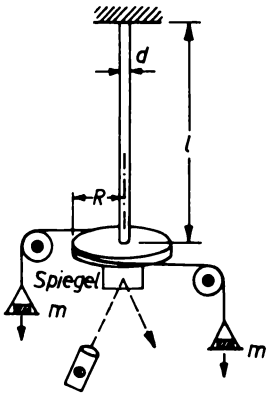


Abb. 3.5.(5) Bestimmung des Torsionsmoduls

Als Drahtdurchmesser wird der Mittelwert aus mindestens zehn an verschiedenen Stellen des Stabes mit einer Bügelmeßschraube gemessenen Werten eingesetzt. Die zu untersuchende Stabprobe wird am oberen Ende fest eingespannt; das untere Ende wird mit der drehbaren Kreisscheibe verbunden (s. Abb. 3.5.(5)).

Am Umfang der Kreisscheibe ist eine Nut eingedreht, in die an zwei Stiften die beiden zur Kraftübertragung benötigten Fäden mitsamt ihren Wägetellern eingehängt werden können. Die Kreisscheibe trägt außerdem noch eine Gradteilung, an der mittels Strichmarke bzw. Nonius und Meßlupe die jeweiligen Stellungswinkel α_i abgelesen werden können. Die unterschiedlichen Belastungen werden so realisiert, daß für beide Wägeteller gleichartig jeweils Wägestücke der Masse m_i

aufgelegt und die zugehörigen Stellungswinkel α_i abgelesen werden. Aus der Differenz

$$\alpha_i - \alpha_0 = \varphi_i \tag{21}$$

mit α_0 als Stellungswinkel bei unbelasteten Wägetellern bestimmt man den jeweiligen Torsionswinkel φ_i.

Es werden mehrere Meßreihen, abwechselnd mit zunehmender und mit abnehmender Belastung m_i durchgeführt. Aus den Mittelwerten aller zu einer Belastungsstufe gehörenden φ_i werden die Quotienten m_i/φ_i gebildet.

Die (im Mittel) gefundene Konstanz der Quotienten m_i/φ_i weist die Proportionalität zwischen m und φ nach.

Der Torsionsmodul G folgt aus Gl. (20), wobei für m/φ der Mittelwert aller, bei den verschiedenen Belastungsstufen m_i gebildeten Quotienten eingesetzt wird, um den Rechenaufwand zu vereinfachen.

Für die grafische Lösung empfiehlt sich die Darstellung des Torsionswinkels φ_i gemäß Gl. (21) über der Masse m_i der die Drehmomente hervorrufenden Wägestücke. Der benötigte Quotient m/φ kann als reziproker Anstieg der grafisch ausgeglichenen Ursprungsgeraden bestimmt werden.

Fragen

F 1 und F 2 siehe Text.

F 3 Man gebe eine anschauliche Interpretation für die Poissonsche Zahl.

3.6. Oberflächenspannung

Es sollen einige Grundbegriffe der Molekularphysik bei Grenzflächenerscheinungen dargestellt werden. Zur Bestimmung der Oberflächenspannung können verschiedene Methoden angewendet werden.

Aufgaben

1.1. Bestimmung der Oberflächenspannung einer Meßflüssigkeit nach der Abreißmethode mit dem Lenard-Bügel.

1.2. Bestimmung der Oberflächenspannung einer Meßflüssigkeit nach der Abreißmethode mit einem Metallring.

2. Bestimmung der Oberflächenspannung einer Meßflüssigkeit aus der Steighöhe dieser Flüssigkeit in einer Kapillare.
3. Bestimmung der Oberflächenspannung nach der Tropfenmethode.
4. Bestimmung der Oberflächenspannung in Abhängigkeit von der Temperatur nach der Blasenmethode.

Grundlagen

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirken Kräfte recht kurzer Reichweite. Sie haben eine Wirkungssphäre mit dem Radius $r_w \approx 10^{-9}$ m. Daraus folgt, daß nur wenige Nachbarmoleküle das Verhalten eines Einzelmoleküls beeinflussen.

Im Inneren der Flüssigkeit heben sich die Kräfte gegenseitig auf. Anders ist es jedoch bei Molekülen, die sich in der "Grenzschicht", einer etwa r_w dicken Zone an der Oberfläche der Flüssigkeit (z. B. der Grenzfläche gegen Luft oder den Flüssigkeitsdampf bzw. der Grenzfläche gegen die Gefäßwand) befinden: Die Wirkungssphäre dieser Moleküle liegt nur z. T. innerhalb der Flüssigkeit, und es bildet sich für jedes Molekül eine Resultierende aus, die normal zur Oberfläche und in das Innere der Flüssigkeit hinein gerichtet ist. Für alle in der Grenzschicht befindlichen Moleküle summieren sich diese Resultierenden zu einer Gesamtkraft und bewirken, daß die Grenzschicht sich wie eine elastische undurchdringliche Haut über die Flüssigkeit spannt.

Um ein Molekül aus dem Inneren der Flüssigkeit durch die Grenzschicht hindurch in die Oberfläche zu verschieben, muß Arbeit aufgebracht werden: ein Oberflächenmolekül hat gegenüber einem Molekül im Flüssigkeitsinneren eine höhere potentielle Energie $W + \Delta W$, wobei die Energiezunahme dem Betrag der Verschiebungsarbeit gleich ist. Zusätzlich in die Oberfläche gebrachte Moleküle vergrößern aber auch die Flüssigkeitsoberfläche um den Betrag ΔA. Der Quotient

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta A} \qquad (1)$$

wird Oberflächenenergiedichte genannt. Für geringe Änderungen dA der Oberfläche folgt aus $dW = \omega dA$, daß im Gleichgewichtszustand $dA = 0$ werden muß. Die Flüssigkeitsoberfläche ist eine Minimalfläche, eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes, wenn außer den Molekularkräften keine anderen äußeren Kräfte auf die Flüssigkeitsoberfläche einwirken. (Z. B. besitzen kleine Wassertropfen Kugelgestalt, denn die Ku-

gel hat bei gegebenem Volumen von allen Körperformen die geringste Oberfläche.)

Der Lenard-Bügel besteht aus einem Rahmen, in dem ein dünner Draht der Länge l waagerecht eingespannt ist (Abb. 3.6.(1)). Wird dieser Meßdraht um die Höhe h über die Flüssigkeitsoberfläche hochgezogen, so hängt an ihm eine Flüssigkeitslamelle mit der Oberfläche (Vorder- und Rückseite) A = 2lh. Soll die Oberfläche z. B. durch Verschieben von l um Δh um den Zuwachs $\Delta A = 2l\Delta h$ vergrößert werden, so beträgt die dafür aufzuwendende Arbeit

$$W = \Delta A\omega = 2l\Delta h\omega = F\Delta h, \tag{2}$$

wenn F die an der Seite l angreifende Kraft ist. Der Quotient

$$\frac{F}{2l} =: \sigma \tag{3}$$

heißt Oberflächenspannung. Damit gilt wegen Gl. (2) $\sigma 2l\Delta h = F\Delta h = 2l\Delta h\omega$, also

$$\sigma = \omega : \tag{4}$$

Oberflächenspannung σ und Oberflächenenergiedichte ω sind gleich. Ihre SI-Einheit ist $Nm^{-1} = 10^5$ dyn cm^{-1}.

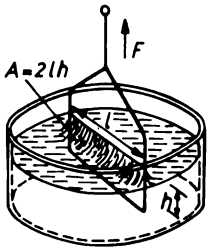


Abb. 3.6.(1) Flüssigkeitslamelle am Meßdraht der Länge l

Die Oberflächenspannung ist - wie alle Molekulareffekte - sehr empfindlich gegen Verunreinigungen der Materialien. Deshalb ist peinlichste Sauberkeit am Arbeitsplatz notwendig. Insbesondere ist zu beachten, daß bestimmte Versuchskörper und Untersuchungsgefäße stets nur mit der gleichen Meßflüssigkeit benutzt werden dürfen.

Zur Durchführung

Zu Aufgabe 1.1

Vor Beginn der Messungen wird der Meßdraht sorgfältig und unter Beachtung der notwendigen Vorsicht gründlich gereinigt (entfettet und in destilliertem Wasser gespült). Es ist ein sicheres Kriterium für einen sauberen Meßdraht, wenn nach dem Abriß des Bügels von der Oberfläche der Meßflüssigkeit sich die Flüssigkeitsreste als Kette kleiner Tröpfchen am Meßdraht aufreihen. Die Waage mit dem Lenard-Bügel wird in der Flüssigkeit austariert, wobei der Bügel so weit in die Meßflüssigkeit reicht, daß der Draht vollständig untergetaucht ist. Um den Bügel aus der Flüssigkeit wieder herauszuziehen, muß eine Kraft F aufgewendet werden, da sich eine Flüssigkeitslamelle der Länge l über den Draht gelegt hat und mit ihm zusammen herausgezogen werden muß, wobei die Flüssigkeitsoberfläche vergrößert wird. Die aufzuwendende Kraft kann mit einer Federwaage (oder Torsionswaage oder Feinwaage bzw. Analysenwaage) sehr genau bestimmt werden. Und zwar ist genau diejenige Kraft F zu bestimmen, bei der die Lamelle gerade noch nicht abgerissen ist - das ist zugleich die größte von der Waage während des Zerreißversuches gemessene Kraft.

Nach Gl. (3) ist $\sigma = F/2l$. Die Kraft F berechnet man - bei mehrfacher Wiederholung der Messungen - als Differenz aus dem Mittelwert der Ablesungen der Waage beim Abriß $\overline{F_{max}}$ und dem Mittelwert $\overline{F_0}$ der Ablesungen bei nur mit dem eingetauchten Bügel belasteter Waage.

Die so ermittelte Oberflächenspannung σ ist mit der Vertrauensabweichung und Meßtemperatur anzugeben. (Die Angabe der Meßtemperatur ist notwendig, weil i. allg. die Oberflächenspannung mit steigender Temperatur abnimmt.)

Zu Aufgabe 1.2

Wird bei der Abreißmethode mit einem Ring - Durchmesser 2r, scharfe Schneide (Abb. 3.6.(2)) - gearbeitet, so ist zunächst dafür Sorge zu

tragen, daß Ringschneide und Flüssigkeitsoberfläche genau parallel zueinander verlaufen. Bei etwaigem Verkanten des Ringes gegenüber der

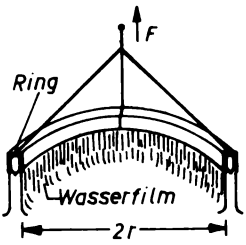


Abb. 3.6.(2) Wasserfilm am Metallring

Flüssigkeitsoberfläche sind die Kräfte nicht gleichmäßig längs des Umfanges verteilt; es kommt zu einem vorzeitigen Abriß und damit zur Fehlmessung. Die Korrektur der Lage von Ringschneide und Flüssigkeitsoberfläche zueinander geschieht durch vorsichtiges Verändern der Ringaufhängung.

F 1 Die Schale mit der Meßflüssigkeit steht auf einem Tischchen mit Justierschrauben; kann man dadurch auch die Lagekorrektur Ringschneide-Flüssigkeitsoberfläche vornehmen?

Der Gang der Messungen verläuft analog zu dem bei Aufgabe 1.1. Da auch hier der Flüssigkeitsfilm zwei Grenzflächen gegen Luft bildet, ist als Länge des Lamellenrandes $2l = 4\pi r$ in Gl. (3) einzusetzen, damit der Wert der Oberflächenspannung zu berechnen und mit Vertrauensabweichung und Temperaturangabe zu versehen.

Bei Flüssigkeiten mit geringer Oberflächenspannung wird der Ring sehr weit aus der Flüssigkeit herausgezogen bis zum Abriß der Lamelle. Sie schnürt sich dann im unteren Teil mehr oder weniger stark ein und weicht damit von der idealen zylindrischen Form ab. Die Auswertung wird dadurch i. allg. sehr erschwert, weil der Lamellenumfang dann an der engsten Stelle gemessen werden muß.

Zu Aufgabe 2

Taucht man eine Kapillare mit dem Innendurchmesser 2r so in eine flüssigkeitsgefüllte zylindrische Schale ein, daß die Kapillare vollständig benetzt wird (Abb. 3.6.(3)), dann steigt die Flüssigkeit in der Kapillare bis zu einer Höhe h über den äußeren Meniskus hoch. Das Gewicht der angehobenen Flüssigkeitssäule in der Kapillare

$$mg = \pi r^2 h \, g = F \tag{5}$$

ist proportional der Oberflächenspannung σ:

$$F = \sigma \cdot 2\pi r, \tag{6}$$

so daß im Gleichgewichtszustand durch Gleichsetzung von (5) und (6) folgt

$$\sigma = \frac{1}{2} \varrho g h r. \tag{7}$$

Dieser Zusammenhang gilt allerdings als gute Näherung nur unter der Voraussetzung, daß der innere Schalendurchmesser 2R groß ist gegenüber dem Außendurchmesser 2r' der Kapillare. Für strenge Gültigkeit muß die rechte Seite von Gl. (7) noch durch

$$1 - r/(R - r') \tag{8}$$

dividiert werden.

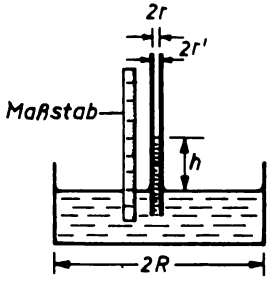


Abb. 3.6.(3) Kapillarmethode zur Bestimmung der Oberflächenspannung

Um eine vollständige Benetzung zu erreichen, muß die Kapillare vor Beginn der Messungen sorgfältig gereinigt werden. Zur Messung taucht man die Kapillare zunächst schräg in die Meßflüssigkeit ein, verschließt das obere Ende mit der Fingerkuppe und stellt die Kapillare dann in der Mitte der Schale senkrecht auf. Zweckmäßig wird sie in dieser Lage mittels Bürettenklammer und Stativ fixiert. Gibt man die obere Öffnung durch Wegnahme der Fingerkuppe wieder frei, so stellt sich die Flüssigkeitshöhe von oben her ein, die das Gleichgewicht nach Gl. (6) gewährleistet. Durch diese Art der Einstellung vermeidet man Fehlmessungen infolge ungleichmäßiger Benetzung der Kapillaren-Innenfläche.

Wenn die Kapillare selbst keine Teilung trägt, auf der die Steighöhe abgelesen werden kann, sollte man einen gut geteilten Glasmaßstab an der Kapillare befestigen und daran die Steighöhe ablesen oder diese Messung unter Zuhilfenahme eines Kathetometers ausführen. Zur Ablesung zieht man die Kapillare aus der Flüssigkeit so weit heraus, bis bei Betrachtung von schräg unten ein Teilstrich gerade in der Flüssigkeit verschwindet. Damit hat man den unteren Rand der Flüssigkeitssäule markiert. Den oberen Flüssigkeitsstand liest man an der tiefsten Stelle des Meniskus ab. Diese Messungen sind mehrfach zu wiederholen, wobei bei jeder neuen Messung die Kapillare erst etwas tiefer in die Flüssigkeit eingetaucht und dann bis zum Verschwinden des unteren Skalenstriches in der Flüssigkeit (s. o.) gehoben wird. Den Mittelwert $\bar{h}$ aus allen Messungen setzt man in Gl. (7) ein. Die Dichte ϱ der Meßflüssigkeit ist am Meßplatz angegeben. Gleiches gilt i. allg. für den Kapillarradius r.

Sollte der Kapillarradius nicht angegeben sein, so bestimmt man ihn in folgender Weise: Man füllt die Kapillare vorsichtig (Saugvorrichtung benutzen! Ansaugen mit dem Mund ist verboten - Quecksilber und besonders Quecksilberdämpfe verursachen gesundheitliche Schäden!) teilweise mit Quecksilber und mißt mit einem genauen Meßstab - z. B. Meßschieber, evtl. unter Benutzung einer Lupe - die Länge des Quecksilberfadens. Diese Messung ist mehrfach zu wiederholen, wobei man den Quecksilberfaden nacheinander an verschiedene Stellen der Kapillare bringt.

F 2 Warum soll die Messung an verschiedenen Stellen der Kapillare wiederholt werden?

Die Masse des benutzten Quecksilbers wird auf einer Waage auf mg genau bestimmt, indem man das Quecksilber aus der Kapillare in ein Glasschälchen - z. B. Uhrglas -, mit dem zusammen die Waage zunächst im Gleichgewicht war, entleert. Mit der bekannten Dichte ϱ_{Hg} des Quecksilbers folgt aus

$$m = \pi r^2 l \varrho_{Hg} \tag{9}$$

der Kapillarradius zu

$$r = \sqrt{m/\pi \varrho_{Hg} l} \,. \tag{10}$$

F 3 Warum ist es vorteilhaft, für diese Messung Quecksilber trotz seiner Giftigkeit zu verwenden?

Zu Aufgabe 3

Zum Austropfen benutzt man Kapillaren mit einem äußeren Radius $r' \approx 3$ mm. Die untere Querschnittsfläche muß dabei gut glatt geschliffen sein, um eine gleichmäßige Tropfenbildung zu gewährleisten. Die Tropfenbildung und die Größe der Tropfen sind von der Oberflächenspannung abhängig. Hängt an der unteren Öffnung der Kapillare ein Tropfen, so wird dieser mit der Kraft

$$F = 2\pi r \sigma \tag{11}$$

festgehalten. Durch weiteres Ausfließen von Flüssigkeit vergrößert sich (Abb. 3.6.(4)) der Tropfen und schnürt sich ein, bis sein Gewicht G die Kraft F überschreitet: der Tropfen reißt ab. Das Gewicht des abfallenden Tropfens ist jedoch geringer als der Wert F angibt, da ein Teil der Flüssigkeit an der Kapillare hängen bleibt. Als Erfahrungswert gilt für das Gewicht des abfallenden Tropfens

$$G = 4\sigma r, \tag{12}$$

wobei r der Tropfenradius ist.

Für zwei verschiedene Flüssigkeiten gilt

$$\sigma_1/\sigma_2 = G_1/G_2. \tag{13}$$

Durch Einsetzen von $G = V\varrho g$ ergibt sich daraus

$$\sigma_1/\sigma_2 = V_1\varrho_1/V_2\varrho_2. \qquad (14)$$

Die Tropfenzahl pro Volumen n steht im umgekehrten Verhältnis zum Tropfenvolumen. Damit folgt aus Gl. (14)

$$\sigma_1 = n_2\varrho_1\sigma_2/n_1\varrho_2. \qquad (15)$$

Bei der Durchführung der Messungen ist eine gründlich gereinigte Kapillare wiederum wichtigste Voraussetzung. Die Kapillare wird durch

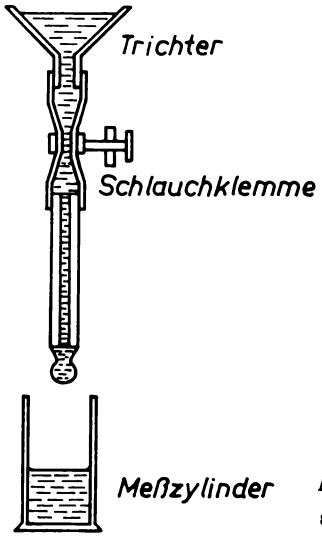


Abb. 3.6.(4) Tropfmethode zur Bestimmung der Oberflächenspannung

ein Schlauchstück mit Schlauchklemme an einen Trichter zur Aufnahme der Flüssigkeit angesetzt. Mit der Schlauchklemme wird der Flüssigkeitsstrom so eingerichtet, daß die Tropfenbildung nicht durch die nachfließende Flüssigkeit zu früh unterbrochen wird. Für ein bestimmtes Volumen V - z. B. 5 ml - zählt man die Tropfenzahl N_1 ge-

nau ab. Aus mehrfacher Wiederholung des Verfahrens gewinnt man den Mittelwert $\bar{n}_1 = \bar{N}_1/V$.

F 4 Unter welchen Voraussetzungen kann mit der Tropfenzahl $\bar{N}$ anstelle von $\bar{n}$ gearbeitet werden?

Nach sorgfältiger Reinigung der Apparatur wiederholt man das Meßprogramm mit einer Flüssigkeit bekannter Oberflächenspannung σ_2 und bestimmt damit $\bar{n}_2$. Zur Auswertung wird Gl. (15) benutzt.

F 5 Welchen Vorteil bietet die Vergleichsmessung nach Gl. (15) gegenüber einer Auswertung nach Gl. (13)?

Zu Aufgabe 4

Zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung bedarf es einer Methode, die einerseits genau ist und andererseits eine Messung bei verschiedenen, exakt bestimmbaren Temperaturen ermöglicht. Eine solche Methode, die Blasenmethode, soll im folgenden dargelegt werden.

Drückt man eine Luftblase aus einer Kapillare in eine Flüssigkeit, so steht die Luft im Inneren der Luftblase infolge der Oberflächenspannung beim Abriß der Blase unter einem Druck

$$p = 2\sigma/r. \tag{16}$$

Darin ist r der Radius der Luftblase und näherungsweise zugleich der Radius der Kapillare. Da die Kapillare aber in die Flüssigkeit eintaucht, muß auf die Luftblase ein zusätzlicher Druck einwirken, um den hydrostatischen Druck

$$p_h = \varrho g h \tag{17}$$

zu überwinden.

F 6 Nennen Sie die Möglichkeiten zur Messung der genauen Eintauchtiefe! Warum ist für diese Angabe eine große Genauigkeit notwendig?

Der Gesamtdruck ist demnach

$$p_{max} = \frac{2\sigma}{r} + \varrho g h \tag{18}$$

und kann an einem entsprechend empfindlichen Manometer als Maximaldruck abgelesen werden.

F 7 Wie muß das Manometer beschaffen sein, damit es geringe Druckwerte mit großer Gemauigkeit anzeigt?

Für die Oberflächenspannung erhält man

$$\sigma = (\varrho_M \Delta h_M - \varrho h) rg/2. \qquad (19)$$

Darin sind ϱ_M die Dichte der Manometerflüssigkeit, ϱ die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit, Δh_M die Höhendifferenz der Manometermenisken und h die Eintauchtiefe der Kapillare.

Den genauen Maximaldruck kann man auf günstige Weise so ermitteln, daß man durch Öffnen des Hahnes H_1 (Abb. 3.6.(5)) Wasser aus dem Vorratsgefäß in das Druckgefäß einlaufen läßt, bis sich an der Kapillare eine Luftblase bildet. Nun beobachtet man nur das Manometer und läßt ganz langsam weiteres Wasser in das Druckgefäß einfließen. Die Manometerflüssigkeit steigt ganz langsam weiter an, bis sie plötzlich einige Millimeter absinkt. Das ist der Moment, wo die Luftblase sich gelöst hat und eine neue Blase sich zu bilden beginnt. Der als Höchstwert - also unmittelbar vor dem Absinken - abgelesene Druckwert gilt als p_{max}. Bevor man die Messung wiederholt, kann bei geschlossenem Hahn H_1 durch Öffnen des Hahnes H_2 ein Druckausgleich hergestellt werden.

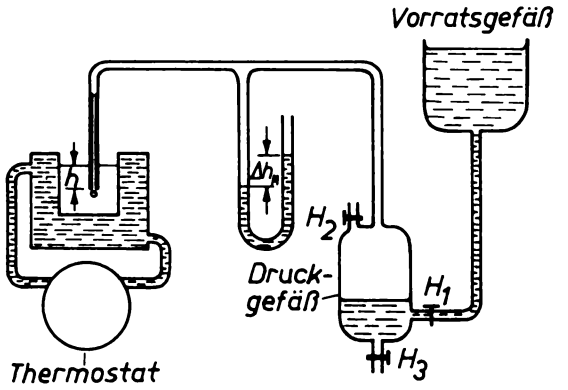


Abb. 3.6.(5) Blasenmethode zur Bestimmung der Oberflächenspannung

F 8 Warum ist die Herstellung des Druckausgleiches zweckmäßig?

Da keinesfalls Wasser aus dem Druckgefäß in das Manometer gelangen darf, muß das Druckgefäß bei geschlossenem Hahn H_1 durch Öffnen der Hähne H_2 und H_3 rechtzeitig entleert werden.

Mit dem Mittelwert aus mehreren Wiederholungen der Messungen zu einer mittels Thermostat konstant gehaltenen Temperatur berechnet man die Oberflächenspannung $\sigma(\vartheta)$ gemäß Gl. (19). Stellen Sie die Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Temperatur grafisch dar und diskutieren Sie die Ergebnisse ausführlich!

Fragen

F 1 bis F 8 siehe Text.

F 9 Man deute das Zustandekommen konkaver bzw. konvexer Flüssigkeitsmenisken bei benetzenden bzw. nichtbenetzenden Flüssigkeiten!

3.7. Bestimmung der Viskosität mit Hilfe der Kugelfallmethode nach Stokes

Die Viskosität hat auf vielen technischen Gebieten, z. B. im Zusammenhang mit Problemen bei Schmierölen, große Bedeutung. Es sind Messungen der Viskosität nach der Absolut- und Relativmethode (HÖPPLER) möglich.

Aufgaben

1.1. Die dynamische Viskosität eines Öles soll nach der Kugelfallmethode (STOKES) bei Zimmertemperatur bestimmt werden.

1.2. Die Messungen sind für verschiedene Durchmesser des Fallrohres oder/und verschiedene Kugeldurchmesser durchzuführen.

1.3. Bei den Messungen ist die Temperatur der Meßflüssigkeit mit Hilfe eines Thermostaten zu variieren. Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität soll grafisch dargestellt und eine Kurvenanpassung durchgeführt werden.

1.4. Das Gesetz von STOKES soll korrigiert werden; hierbei sind die üblichen Korrekturen auf ihre Zweckmäßigkeit zu prüfen.

2. Die dynamische Viskosität einer Flüssigkeit soll mit einem Höppler-Viskosimeter bestimmt werden.

3. Weitere Aufgaben siehe 3.8.1. (Kapillarviskosimeter)!

Grundlagen

Bei der Bewegung eines festen Körpers durch eine ruhende Flüssigkeit (Gas) ist zur Aufrechterhaltung einer gleichförmigen Bewegung (v = const) eine Kraft F_R erforderlich, die von Größe und Form des Körpers, seiner Geschwindigkeit und einer Eigenschaft der Flüssigkeit, ihrer Zähigkeit oder dynamischen Viskosität abhängt. Durch die folgende Modellvorstellung läßt sich die aufzuwendende Kraft deuten: Bei genügend geringer Geschwindigkeit haftet die unmittelbar an den Körper grenzende Molekülschicht (der Flüssigkeit) an diesem fest und bewegt sich mit ihm zusammen fort. Die benachbarten Flüssigkeitsschichten übernehmen teilweise diese Geschwindigkeit, weit entfernte Schichten bleiben völlig in Ruhe. Es handelt sich also nicht um eine Reibung zwischen der Oberfläche des festen Körpers und der Flüssigkeit, sondern um eine innere Reibung zwischen benachbarten Flüssigkeitsschichten.

Die Viskosität η ist für viele Flüssigkeiten und Gase eine kennzeichnende Stoffgröße, die nur von der Temperatur und vom Druck abhängt. Voraussetzung für die Gültigkeit der folgenden Gleichungen ist, daß die Bewegung turbulenzfrei verläuft.

Läßt man eine Kugel in einer Flüssigkeit fallen (Abb. 3.7.(1)),

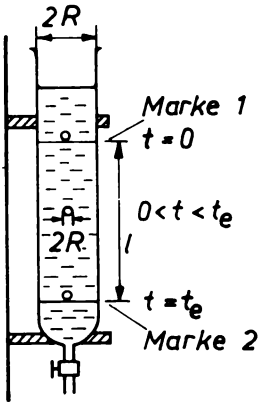
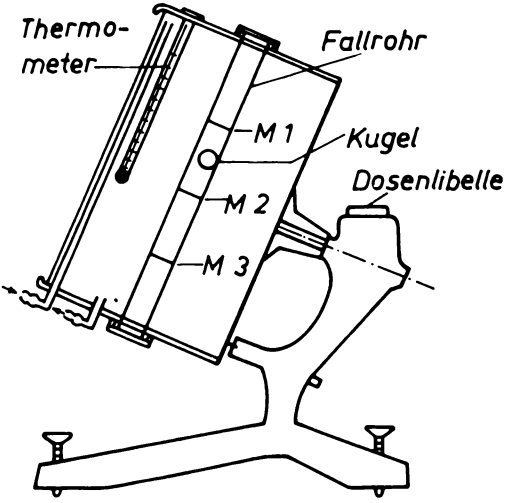


Abb. 3.7.(1) Viskositätsbestimmung nach Stokes



3.7.(2) Höppler - Viskosimeter

so erreicht sie im allgemeinen nach kurzer Fallzeit in der Flüssigkeit eine gleichförmige Geschwindigkeit (v = const). Die Fallzeit hängt bei gleichen Meßbedingungen allein von der Art des Öles ab. Damit ist die Fallzeit ein Maß für die Viskosität.

Die Bewegungsgleichung für die im Medium der Dichte ϱ fallende Kugel (Dichte ϱ_K) lautet

$$\boxed{\frac{m\,dv}{dt} = Vg(\varrho_K - \varrho) - 6\pi\eta rv.} \qquad (1)$$

Sie besagt, daß die resultierende Kraft gleich der Differenz aus dem Gewicht der Kugel (vermindert um den Auftrieb) und der Stokesschen Reibungskraft ist. Die Stokessche Reibungskraft - gültig für Kugeln - ist der Geschwindigkeit v proportional,

$$F_R = - kv \qquad (2)$$

mit

$$k = 6\pi\eta r. \qquad (3)$$

Die Integration der Bewegungsgleichung (1) führt mit der Anfangsbedingung v(0) = 0 zu

$$v(t) = \frac{Vg(\varrho_K - \varrho)}{6\pi\eta r}\left(1 - e^{- kt/m}\right) \qquad (4)$$

Gleichbleibende Geschwindigkeit wird für $t \to \infty$ erreicht. Man verwendet kleine (leichte) Kugeln nicht nur wegen der Randkorrekturen, sondern auch wegen des Exponenten der Gl. (4).

Aus dem Gleichgewicht der drei Kräfte (Gewichts-, Auftriebs- und Reibungskraft) ergibt sich die konstante Fallgeschwindigkeit (dv/dt=0, also v = const). Mit der Kenntnis von v = s/t - s ist die Länge der Fallstrecke - und dem Kugelvolumen $V = 4\pi r^3/3$ bestimmt man aus (4) für $t \gg m/k$

$$\eta = \frac{2gr^2}{9v}(\varrho_K - \varrho), \qquad (5)$$

bzw. bei Berücksichtigung der Ladenburgschen Korrektur

$$\eta_{korr} = \frac{2gr^2(\varrho_K - \varrho)}{9v(1 + 2{,}1r/R)} = \frac{\eta}{1 + 2{,}1r/R} . \qquad (6)$$

Statt der korrigierten Form (6) schreibt man auch

$$\eta_{korr} = \eta(1 - r/R)^{-n}; \qquad (7)$$

daraus erhält man für $r/R \ll 1$

$$\eta_{korr} \approx \frac{\eta}{1 + n\, r/R} . \qquad (8)$$

Weitere Korrekturen sind erforderlich, wenn die Voraussetzung kleiner Reynoldsscher Zahlen - für hinreichend kleine Geschwindigkeiten - nicht erfüllt ist, und wenn man die Lage der oberen Marke der Meßstrecke berücksichtigen möchte.

Für eine Relativmessung faßt man die Gerätekonstanten als Konstante K zusammen, so daß dann gilt

$$\eta = K(\varrho_K - \varrho)t. \qquad (9)$$

Die Bestimmung der Viskosität reduziert sich in diesem Fall bei Kenntnis der Dichtedifferenz $\varrho_K - \varrho$ auf die Messung der Zeit, die die Kugel benötigt, um von einer Meßmarke bis zur anderen zu sinken - oder zu rollen wie beim Höppler-Viskosimeter.

Bei einem Höppler-Viskosimeter (Abb. 3.7.(2)) steht das Fallrohr, dessen Durchmesser nur geringfügig größer ist als der Durchmesser der Kugel, etwa unter 10^0 gegen die Vertikale geneigt in einem Temperiermantel. Die Neigung des Rohres macht aus der - nicht exakt reproduzierbaren - Fallbewegung eine Abrollbewegung auf einer Mantellinie des zylindrischen Fallrohres, die genau reproduziert werden kann. Die Meßstrecke ist durch Ringmarken (Abstand 50 bzw. 100 mm) auf dem Rohr gekennzeichnet. Für jede Kugel des zugehörigen Kugelsatzes ist die Kugelkonstante angegeben.

Die SI-Einheit der (dynamischen) Viskosität η ist die Pascalsekunde (Pa•s); es sind aber auch noch die Einheiten Poise ($1\ P = 10^{-1} kg\ m^{-1} s^{-1}$) oder Centipoise ($1\ cP = 1\ g\ m^{-1} s^{-1} = 10^{-3}$ Pa•s) gebräuchlich. Den Quotienten aus dynamischer Viskosität und der Dich-

te ϱ nennt man die kinematische Viskosität $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ und mißt ihn in $m^2 s^{-1}$ oder in Stokes (1 St = 1 $cm^2 s^{-1}$).

Mit steigender Temperatur nimmt die Viskosität der Flüssigkeiten stark ab. Für viele Flüssigkeiten wird diese Temperaturabhängigkeit durch die Exponentialfunktion $\eta(T) = A \exp(B/T)$ mit guter Näherung beschrieben; A und B sind empirische Konstanten, T die Temperatur. Nach UBBELOHDE gibt die grafische Darstellung $\lg\{\eta\}$ über 1/T eine für die Temperaturabhängigkeit des betreffenden Stoffes charakteristische Gerade.

Zur Durchführung und Auswertung

Zu Aufgabe 1

Die Radien der benutzten Kugeln werden mittels Bügelmeßschraube - eventuell auch mit einem Meßmikroskop - genau bestimmt. Dichte und Temperatur der Meßflüssigkeit müssen an allen Stellen gleich sein; es muß notfalls durch Rühren für einen vollkommenen Ausgleich gesorgt werden. Achten Sie darauf, daß die obere Meßmarke einen genügend großen Abstand von der Flüssigkeitsoberfläche hat.

F 1 Begründen Sie die Notwendigkeit dieser Forderung!

Die Kugeln werden einzeln in der Mitte des Gefäßquerschnitts dicht über den Flüssigkeitsmeniskus gebracht und dann fallen gelassen.

Beim Durchgang durch die beiden Meßmarken wird die Fallzeit mit einer Stoppuhr gemessen und aus mindestens zehn Wiederholungen der Mittelwert errechnet. Ist die Länge der Meßstrecke nicht angegeben, so muß sie mit einem entsprechend genauen Maßstab oder mittels Kathetometer bestimmt werden.

Die Dichte der Kugeln bestimmt man, wenn außer der erwähnten Radienbestimmung noch eine Wägung durchgeführt wird. Bei der Ermittlung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität ist darauf zu achten, daß auch die Temperaturabhängigkeit der Dichte berücksichtigt wird. Man muß also die Dichte bei den vorgegebenen Temperaturwerten gesondert bestimmen (Mohr-Westphalsche Waage). Eine analytische Beziehung für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität kann man entweder aus der grafischen Darstellung gewinnen, oder aber man führt eine Kurvenanpassung mit Hilfe eines Rechenprogrammes durch.

Beim Vergleich der Korrekturformeln (6), (7) und (8) sind die aus den Messungen ermittelten Werte für n anzugeben und zu diskutieren.

Die Meßtemperatur wird am Kontaktthermometer des Thermostaten eingestellt und am Schlifthermometer - auf 0,1 °C genau - abgelesen. Der Kühlwasserzulauf am Thermostaten muß so eingeregelt werden, daß Heizzeit (Kontrollampe hell) zu Kühlzeit sich etwa wie 1:2 verhalten; nur dann regelt der Thermostat genau und auf 0,1 °C konstant.

Nach Erreichen der Solltemperatur ist eine Wartezeit von wenigstens 5 min erforderlich, damit die Meßflüssigkeit diese Solltemperatur auch annehmen kann.

Die Mittelwerte der Messungen zu jeweils einer Temperatur werden in Koordinatenpapier mit logarithmisch geteilter Ordinatenachse und einer 1/T-Teilung der Abszissenachse eingetragen und die Meßpunkte (ausgleichend) miteinander verbunden. Aus der grafischen Darstellung können die substanzspezifischen Konstanten A und B berechnet werden.

Ergänzend können die Meßwerte auch in normaler (d. h. linearer) Teilung der Koordinatenachsen dargestellt werden als $\eta = \eta(T)$.

Zu Aufgabe 2

Vor Beginn der Messungen muß das Gerät genau justiert werden. Es gibt eine eindeutige Meßstellung; in der umgekehrten Lage kann die Kugel zurücklaufen, eine Messung in dieser Lage ist nicht möglich. Die Temperatur der Meßflüssigkeit muß exakt bestimmt und innerhalb der gesamten Meßflüssigkeit an allen Stellen konstant gehalten werden; eventuell ist ein Thermostat zu benutzen. Vor Beginn der eigentlichen Messungen läßt man deshalb die Kugel mehrfach hin und her laufen, um damit für eine gute Durchmischung zu sorgen. Erst wenn die Fallzeiten aufeinanderfolgender Messungen gleich sind, kann mit den Messungen begonnen werden. Sollte die Kugelkonstante der vorliegenden Kugel nicht bekannt sein, ist die Benutzung der Gl. (9) nicht möglich. In diesem Fall bestimmt man - nach vorhergehender gründlicher Reinigung des Fallrohres - die Kugelkonstante unter Benutzung einer "Eichflüssigkeit", d. h. einer Flüssigkeit, für welche die Viskosität wenigstens einer bestimmten Temperatur genau bekannt ist. Dazu wird Gl. (9) nach K aufgelöst, die Fallzeit der Kugel für mindestens fünf Messungen bei der konstant einzuhaltenden vorgegebenen Meßtemperatur bestimmt und die Kugelkonstante daraus und aus dem bekannten Viskositätswert errechnet. Die Dichte der Meßflüssigkeit muß, wenn sie

nicht bekannt ist, mittels Mohr-Westphalscher Waage für die Meßtemperatur bestimmt werden.

Alle Messungen - Fallzeit der Kugel, Dichte der Meßflüssigkeit - müssen mehrfach gemessen und aus den Mittelwerten unter Benutzung von Gl. (9) der Meßwert und sein Fehler errechnet werden.

Um den Zeitpunkt des Kugeldurchgangs durch die Meßmarke genau zu bestimmen, betrachte man die Ringmarke so, daß sie als einfacher gerader Strich erscheint. Bei "Eintauchen" der Kugel in diese Meßstrecke muß die Stoppuhr betätigt werden.

Zur Prüfung der Korrekturbeziehung (7) und damit zur Bestimmung des Exponenten n kann man auch von der Viskositätsmessung desselben Öles mit dem Höppler-Viskosimeter ausgehen. Die Bestimmungsgleichung für n erhält man aus (7).

Fragen

F 1 siehe Text.

F 2 Geben Sie weitere Methoden zur Viskositätsbestimmung an!

F 3 Begründen Sie die unterschiedlichen Temperaturabhängigkeiten der Viskosität bei Flüssigkeiten und bei Gasen!

F 4 Lösen Sie die Differentialgleichung für eine im zähen Medium fallende Kugel!

F 5 Wie definiert man die Viskosität? (Erläuterung des Ansatzes nach NEWTON.)

3.8. Strömung im Rohr

3.8.1. Bestimmung der Viskosität mit einem Kapillarviskosimeter nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille

Strömungsprobleme spielen vor allem in der Verkehrstechnik eine wichtige Rolle. Um den Energieaufwand gering zu halten, muß der Strömungswiderstand möglichst klein sein. Hierbei sind laminare und turbulente Strömung zu unterscheiden. Die Reynoldssche Zahl kennzeichnet den Übergang zwischen beiden Strömungsformen.

Aufgaben

1. Es ist die Viskosität verschiedener Substanzen mit einem Kapillarviskosimeter zu bestimmen.

2. Es ist die Hagenbach-Korrektur für das Kapillarviskosimeter zu ermitteln.
3. Es ist die Temperaturabhängigkeit der Viskosität zu messen und darzustellen.

Grundlagen

Zur Behandlung der laminaren Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr werden koaxiale Flüssigkeitsschichten betrachtet (Abb. 3.8.(3)). An einem Zylinder (Radius r, Länge l), an dessen Ende die Drücke p_1 und p_2 wirken, greifen die Druckkräfte $\pi r^2 p_1$ und $-\pi r^2 p_2$ sowie die Reibungskräfte $\eta 2\pi rl dv/dr$ an, deren Summe null sein muß, solange die Flüssigkeit stationär strömt:

$$\pi r^2(p_1 - p_2) + 2\pi rl\eta dv/dr = 0. \qquad (1)$$

Daraus folgt für die Randbedingung $v(R) =: 0$ die Lösung der Differentialgleichung (1)

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2); \qquad (2)$$

für die Rohrmitte $r = 0$ ist demnach $v_{max} = (p_1 - p_2)R^2/4l\eta$. Die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren $\underline{v} = (1/4\eta)(R^2 - r^2)$ grad p liegen auf einem Paraboloid.

Durch den Hohlzylinder zwischen r und r + dr strömt in der Zeit t das Volumen $dV = 2\pi r\, dr\, vt$. Durch den gesamten Rohrquerschnitt strömt dann in der Zeit t das Volumen

$$V = \int_0^R \pi rt \frac{p_1 - p_2}{2l\eta}(R^2 - r^2)dr = \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)t}{8l\eta} . \qquad (3)$$

Dies ist das Gesetz von HAGEN und POISEUILLE.

Ist im speziellen Fall das Rohr senkrecht angeordnet, so ist die Druckdifferenz

$$p_1 - p_2 = \varrho gh \qquad (4)$$

der Schweredruck der Flüssigkeitssäule. In diesem Fall folgt aus Gl. (3) die Meßgleichung für die Viskosität

$$\eta = \frac{\pi R^4 g h}{8Vl} \varrho t =: K \varrho t, \qquad (5)$$

wobei $K := \pi R^4 g h/8Vl$ eine Apparatekonstante ist, die meist in das Viskosimeter geätzt ist. Die Höhe h in Gl. (4) bzw. (5) stellt einen Mittelwert dar, $h = (1/2)(h_1 + h_2)$; h_1 entspricht der oberen und h_2 der unteren Meßmarke des Füllstandes, jeweils gemessen in bezug auf das Ausflußniveau der Flüssigkeit, in die die Kapillare eintaucht (Abb. 3.8.(1)).

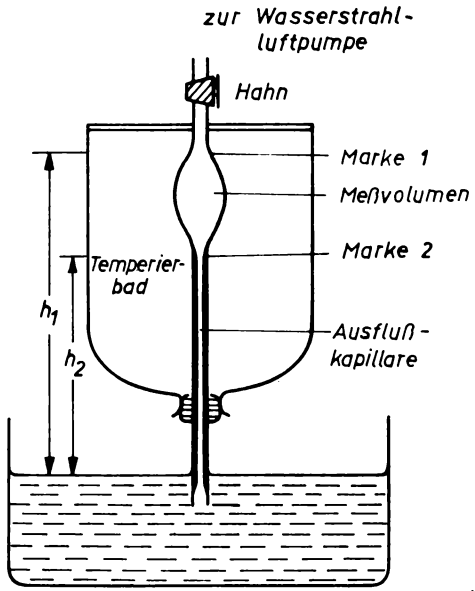


Abb. 3.8.(1) Viskositätsbestimmung nach Hagen und Poiseuille

Die Gl. (5) ist für Relativmessungen geeignet. Kennt man z. B. die Viskosität von Wasser η_1, so kann man die Viskosität einer anderen Flüssigkeit η_2 - unter denselben Meßbedingungen - gemäß

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{\varrho_2 t_2}{\varrho_1 t_1} \tag{6}$$

bestimmen.

Bei Präzisionsmessungen stellt man Abweichungen vom Gesetz (5) fest. Es liegen i. allg. Abweichungen von der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt vor. Schließlich spielt es eine Rolle, ob die Kapillare am Auslaufende scharfkantig abgeschnitten oder trichterförmig erweitert ist. Man faßt diese Einflüsse als Hagenbachsche Korrektur zusammen, so daß man statt (5) erhält

$$\eta = K\varrho t - K'\varrho/t. \tag{7}$$

Die Größen K und K' sind für eine bestimmte Apparatur konstant. Man kann sie in der Weise ermitteln, daß man für zwei Flüssigkeiten bekannter Viskosität das Gleichungssystem

$$\eta_1 = K\varrho_1 t_1 - K'\varrho_1/t_1,$$

$$\eta_2 = K\varrho_2 t_2 - K'\varrho_2/t_2 \tag{8}$$

nach K und K' auflöst.

Die gebräuchlichsten Kapillarviskosimeter sind die nach UBBELOHDE und nach OSTWALD (Abb. 3.8.(2)). Hinsichtlich der Auswertung besteht zwischen beiden ein Unterschied in der Bestimmung der Höhe h. In der Ausführung nach UBBELOHDE ist das untere Ende der Kapillare zugleich das Ausflußniveau, denn der anschließende Kugelraum ist über das dritte Rohr mit der Außenatmosphäre verbunden, und es herrscht dort also ebenfalls Luftdruck.

Bei der Ausführung nach OSTWALD dagegen ist die Flüssigkeitssäule mit der Füllung des Reservoirs verbunden, und dessen Flüssigkeitsoberfläche ist das Bezugsniveau; die Höhe h kann in diesem Fall erst bei der Messung bestimmt werden.

Zur Durchführung und Auswertung

Das Kapillarviskosimeter wird zunächst gründlich gereinigt: Ausspülen und Waschen mit destilliertem Wasser und Chromschwefelsäure. Das

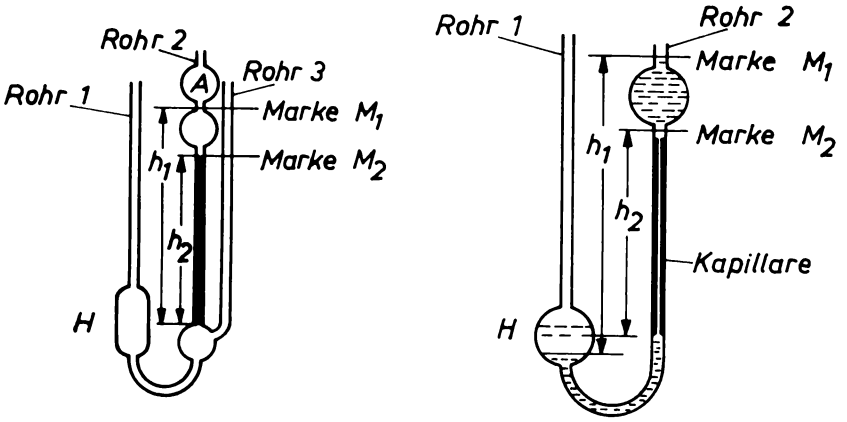


Abb. 3.8.(2) Kapillarviskosimeter a) nach Ubbelohde, b) nach Ostwald

getrocknete Kapillarviskosimeter wird durch das Rohr 1 bis zur Marke H mit der Meßflüssigkeit gefüllt. Dann saugt man am Kapillarrohr 2 mittels Wasserstrahlluftpumpe die Flüssigkeit bis zur vollständigen Füllung des Gefäßes A bzw. bis über die Meßmarke M_1 empor; Rohr 3 muß dabei natürlich geschlossen werden. Bei nunmehr geöffneten Rohren 2 und 3 läßt man die Meßflüssigkeit durch die Kapillare fließen, wobei die Zeit zwischen den Marken M_1 und M_2 (mehrfach!) genau gemessen wird.

Mit Kenntnis der Apparatekonstanten K und der - nötigenfalls durch Messung bestimmten - Dichte ϱ wird für den Mittelwert von t die Viskosität nach Gl. (5) berechnet.

Für sehr präzise Messungen kann die Auswertung durch Korrektur von Störeinflüssen noch verbessert werden. Zu diesem Zweck bestimmt man η gemäß (7). Die Korrekturkonstante K' wird am Arbeitsplatz mitgeteilt oder gemäß (8) bestimmt.

Zur Gewährleistung einer definierten und konstanten Temperatur wird das Viskosimeter in ein Temperierbad gebracht, dessen Tempera-

tur man mit Hilfe eines Thermostaten regelt. (Vergleiche hierzu die Hinweise beim Exp. 3.7.1.)

Die ermittelte Temperaturabhängigkeit $\eta = \eta(T)$ ist sowohl in linearen Koordinaten als auch in einfach-logarithmischen Koordinaten darzustellen: $\lg(\eta/gm^{-1}s^{-1}) = f(1/T)$. Daraus ist ein analytischer Ausdruck für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität herzuleiten.

Fragen

F 1 Unter welchen Voraussetzungen gilt das Gesetz von HAGEN und POISEUILLE?

F 2 Wo spielt das "R^4-Gesetz" von HAGEN und POISEUILLE eine Rolle?

F 3 Begründen Sie die unterschiedliche Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität bei Flüssigkeiten und Gasen.

F 4 Welche Größen lassen sich aus der Viskositätsmessung mit einem Kapillarviskosimeter bei Gasen bestimmen?

3.8.2. Bestimmung von Reynoldsschen Zahlen

Bei einer bestimmten kritischen Strömungsgeschwindigkeit geht eine laminare in eine turbulente Strömung über. Die kennzeichnende Reynoldssche Zahl soll für eine Rohrströmung mit einer einfachen Apparatur bestimmt werden.

Aufgabe

Es ist die Reynoldssche Zahl für den Umschlag der laminaren in eine turbulente Strömung in einem zylindrischen Rohr zu bestimmen.

Grundlagen

Eine stationäre Strömung ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihr die Druckkraft F und die Reibungskraft F_R im Gleichgewicht stehen:

$$F + F_R = 0. \tag{1}$$

Mit dem Newtonschen Ansatz $F_R = \eta A\, dv/dr$ können nur laminare Strömungen erfaßt werden. Hingegen ist der vom Widerstandsgesetz der turbulenten Strömung bekannte Ansatz

$$\boxed{F_R = - c\, A\, \frac{\varrho}{2}\, \bar{v}^2} \tag{2}$$

mit A als der "angeströmten Fläche" sowohl für turbulente als auch für laminare Strömungen brauchbar: c ist die Widerstandszahl, die im

Falle einer turbulenten Strömung geschwindigkeitsunabhängig ist und nur von der Form des angeströmten Gebildes bestimmt wird. Für laminare Strömungen ist sie nicht konstant und deshalb allgemein nicht gebräuchlich. Es läßt sich aber zeigen, daß ihre Anwendung zu keinem Widerspruch führt: Im Falle der Strömung durch ein Rohr der Länge l ist die angeströmte Fläche die Rohrwand, also die Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius R:

$$A = 2\pi Rl. \tag{3}$$

Damit schreibt sich Gl. (2) in der Form

$$F_R = - c\, 2\pi Rl \frac{\varrho}{2} \bar{v}^2. \tag{2a}$$

Die Druckkraft läßt sich angeben als

$$F = \pi R^2 (p_1 - p_2), \tag{4}$$

worin p_1 der Druck am Anfang und p_2 der Druck am Ende des Rohres ist. Mit (4) und (2a) erhält (1) die Form

$$\pi R^2 (p_1 - p_2) - c\, \pi Rl \varrho \bar{v}^2 = 0, \tag{5}$$

woraus sich

$$c = \frac{(p_1 - p_2)R}{\varrho l \bar{v}^2} \tag{6}$$

ergibt mit Gültigkeit für laminare und für turbulente Strömungen.

Werden die Drücke p_1 und p_2 aus den Flüssigkeitshöhen h_1 und h_2 in seitlich an das durchströmte Rohr angesetzten Manometerröhrchen bestimmt (Abb. 3.8.(3)), so vereinfacht sich Gl. (6) zu

$$c = g(h_1 - h_2)R/l\bar{v}^2. \tag{6a}$$

Für eine laminare Strömung durch ein Rohr gilt das Gesetz von HAGEN und POISEUILLE

$$V/t = \pi (p_1 - p_2) R^4 / 8\eta l, \tag{7}$$

worin $V/t = \pi R^2 \bar{v}$ die Stromstärke darstellt, die zur Definition der mittleren Geschwindigkeit

$$\boxed{\bar{v} := V/\pi R^2 t} \qquad (8)$$

der Strömung durch das Rohr führt. Diese Definition ist von großer

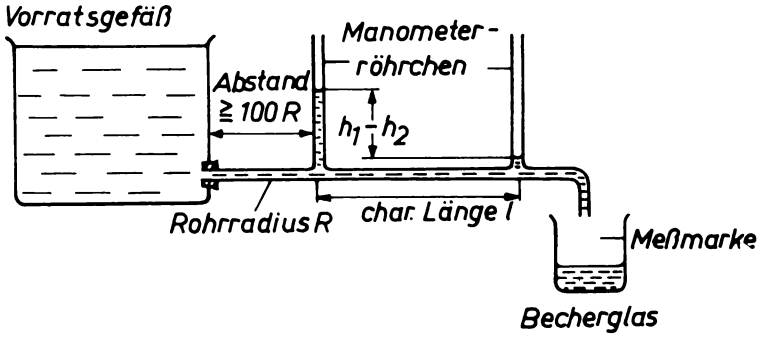


Abb. 3.8.(3) Bestimmung von Reynoldsschen Zahlen

praktischer Bedeutung, da ja wegen der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt die Angabe einer tatsächlichen Geschwindigkeit immer nur für eine Stelle des Rohrquerschnittes möglich wäre.

Die Gültigkeit des Gesetzes von HAGEN und POISEUILLE ist aber noch an eine energetische Bedingung gebunden: Die kinetische Energie der Strömung kann in keinem Falle größer sein als die in die Strömung hineingesteckte Arbeit. Für die kinetische Energie eines Volumenelementes (Hohlzylinder mit Radius r, Länge l und Dicke dr) gilt bei parabolischer Geschwindigkeitsverteilung

$$dW_{kin} = \frac{1}{2} v^2 \, dm = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 - p_2}{4 l \eta} (R^2 - r^2) \right)^2 \varrho 2\pi \, r \, l \, dr.$$

Die gesamte kinetische Energie der Strömung im Rohr der Länge l folgt daraus durch Integration:

$$W_{kin} = \int_0^R \left(\frac{p_1 - p_2}{4l\eta}\right)^2 \varrho\pi l(R^2 - r^2)^2 r\, dr$$

$$= \pi R^2(p_1 - p_2)\,\frac{\varrho\bar{v}R}{\eta}\,\frac{R}{12}\,, \qquad (9)$$

wenn

$$\bar{v} = (p_1 - p_2)R^2/8\eta l \qquad (10)$$

aus dem Gesetz von HAGEN und POISEUILLE eingesetzt wird (aus (7) und (8)).

Der in Gl (9) auftretende Quotient

$$\boxed{\frac{\varrho\bar{v}R}{\eta} =: \mathrm{Re}} \qquad (11)$$

wird als Reynoldssche Zahl definiert. Die von der Strömung auf der Rohrlänge l verrichtete Arbeit ist

$$W = \pi R^2(p_1 - p_2)l. \qquad (12)$$

Die Forderung $W \geq W_{kin}$ ist folglich identisch mit

$$l \geq \mathrm{Re}\cdot R/12. \qquad (13)$$

Für eine laminare Strömung gilt $\mathrm{Re} < 1200$ und damit

$$l > 100\,R. \qquad (14)$$

Diese Ungleichung besagt, daß sich eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung in einer laminaren Strömung durch ein zylindrisches Rohr nur dann einstellen kann, wenn die Rohrlänge mindestens das 100fache des Rohrradius beträgt. Diese Forderung muß bei einer ordnungsgemäßen Apparatur im Interesse richtiger Versuchsergebnisse unbedingt eingehalten werden.

Aus Gl. (10) folgt als Druckkraft

$$F = \pi R^2(p_1 - p_2) = 8\pi\eta l\bar{v} = -F_R. \qquad (15)$$

Die Gleichsetzung von $F_R = -8\pi\eta l\bar{v}$ mit (2a) liefert mit (11)

$$c = 8/Re. \qquad (16)$$

Damit ist für den Fall der laminaren Rohrströmung die Widerstandszahl c mit der Reynoldsschen Zahl verknüpft.

Aus Gl. (16) läßt sich noch ein für die Auswertung der Messungen an Rohrströmungen wichtiger Zusammenhang ableiten: logarithmiert man Gl. (16), so folgt $\lg c = \lg 8 - \lg Re$. Stellt man $\lg c$ in Abhängigkeit von $\lg Re$ grafisch dar, so ergibt sich im laminaren Strömungsbereich (denn nur dort ist Gl. (16) gültig) eine Gerade mit dem Anstieg (-1) und einem Schnittpunkt mit der positiven Ordinatenachse bei $\lg 8$.

Zur Durchführung und Auswertung

Durch ein horizontales Glasrohr von wenigen Millimetern Durchmesser und etwa 40 cm Länge kann Wasser aus einem Vorratsgefäß auslaufen. Zur Druckmessung dienen zwei senkrecht angesetzte Glasröhrchen, deren erstes sich nicht zu nahe am Rohrfang befinden darf, um die dort durch Einlaufstörungen sich ausbildenden Druckverfälschungen nicht mit in die Messungen einzubeziehen (Abb. 3.8.(3)). Der Abstand l der beiden Meßstellen wird als "charakteristische Länge" - entweder auf Millimeter genau messen oder den Wert der Platzanweisung entnehmen - in die Auswertungsgleichungen eingesetzt. Um die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ für die Zeit der Messung (jeweils dreifache Wiederholung) konstant zu halten, muß entweder mit einem sehr breiten Vorratsgefäß gearbeitet werden oder aber eine Mariottesche Flasche (Abb. 3.8.(4)) eingesetzt werden. Bei einer Mariotteschen Flasche wird durch ein in die Vorratsflüssigkeit eintauchendes Rohr - ein sogenanntes Niveauröhrchen - erreicht, daß beim Ausfließen des Wassers stets bis zur Höhe des unteren Niveauröhrchenendes Atmosphärendruck herrscht; der Überdruck des ausfließenden Wassers ist nur von der Höhendifferenz zwischen Ausflußöffnung und unterem Ende des Niveauröhrchens abhängig und bleibt so lange konstant, wie das Röhrchen noch in das Wasser eintaucht. Es muß aber darauf geachtet werden, daß der Stopfen den Flaschenhals völlig dicht abschließt und das Niveauröhrchen ungehindert von der atmosphärischen Luft durchströmt werden kann. Durch Einsetzen unterschiedlich langer Niveauröhrchen kann der Druck in genügend vielen Stufen variiert werden. Es ist sinnvoll, zunächst

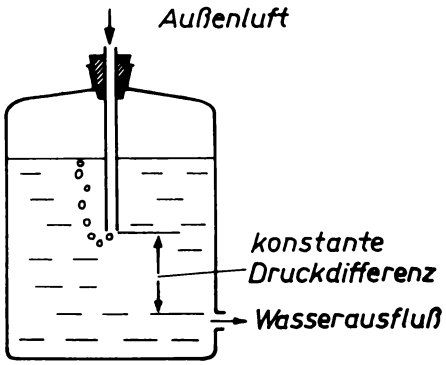


Abb. 3.8.(4) Mariottesche Flasche für eine konstante Ausflußgeschwindigkeit

das kürzeste Röhrchen zu verwenden, die benötigten drei Messungen nacheinander auszuführen und dann gegen das nächstlängere Röhrchen auszuwechseln. Während dieses Röhrchenwechsels kann das zuvor ausgelaufene Wasser wieder in das Vorratsgefäß zurückgegossen werden. Auf keinen Fall darf die Mariottesche Flasche während der Meßreihe zu einem Niveauröhrchen geöffnet werden, weil sonst die Reproduzierbarkeit der genauen Eintauchtiefe nicht gewährleistet ist.

Die Stromstärke $I = V/t$ wird mittels Stoppuhr und markiertem Becherglas (z. B. $V = 250$ ml) gemessen. Achten Sie darauf, daß sich nach dem Entfernen des Abschlußstopfens die stationäre Strömung erst als Gleichgewichtszustand einstellen muß und die Messung erst begonnen werden darf, wenn sich keine Luftblasen mehr in der Strömung befinden. Das Becherglas wird unter die Ausflußöffnung des Strömungsrohres gehalten und zugleich die Zeitmessung gestartet. Bei Erreichen der Niveaumarke am Becherglas wird die Uhr abgestoppt und anschließend die Ausflußöffnung wieder mit dem Abschlußstopfen ver-

schlossen. Während des Ausströmens muß die Höhendifferenz der Flüssigkeitsstände in den Manometerröhrchen abgelesen und zusammen mit der Ausströmzeit protokolliert werden. Die Ergebnisse der dreifach wiederholten Messungen mit jeweils einem Niveauröhrchen werden auch als Mittelwerte im Protokoll (Meßtabelle entwerfen) vermerkt.

Der zur Auswertung benötigte Rohrradius R des Ausflußrohres wird aus Gl. (7) in der Form $V/t = \pi \varrho g(h_1 - h_2)R^4/8\eta l$ bestimmt.

F 1 Unter welcher Voraussetzung ist diese Gleichung gültig?

F 2 Welche Messungen dürfen zur Bestimmung des Radius benutzt werden?

Die dafür benötigten Werte von ϱ und η sind nach Bestimmung der Temperatur geeigneten Tabellen zu entnehmen.

Um den Fehler von R trotz des Auftretens in der vierten Potenz gering zu halten, müssen die dieser Berechnung zugrundegelegten Messungen mit besonderer Sorgfalt ausgeführt und eventuell auch mehr als dreifach wiederholt werden.

Zur Berechnung der Reynoldsschen Zahlen wird Gl. (11) nach Einsetzen von Gl. (8) benutzt:

$$Re = \frac{\varrho V}{\eta \pi R} \frac{1}{t} .$$

Der Vorfaktor enthält nur konstante Größen.

Ähnlich vereinfacht sich auch die Berechnung der Widerstandszahlen, wenn Gl. (8) in Gl. (6a) eingesetzt wird:

$$c = \frac{\varrho R^5 \pi^2}{lV^2} (h_1 - h_2)t^2 .$$

Die kritische Reynoldssche Zahl Re_{krit} wird aus einer grafischen Darstellung bestimmt. In einem Diagramm mit zwei logarithmisch geteilten Achsen wird lg c über lg Re aufgetragen. Wegen Gl. (16) müssen die zu Meßwerten aus laminarer Strömung gehörigen Punkte auf einer Geraden liegen. Damit kann der Ausgleich eventueller Meßfehler recht einfach vorgenommen werden. Liegen die Meßpunkte für größere Re-Werte nicht mehr auf dieser Geraden, so ist der Laminaritätsbereich überschritten - die zugehörige (kritische) Reynoldssche Zahl kann abgelesen werden. An den laminaren Bereich schließt sich ein Übergangsgebiet mit zunächst schwankenden Werten für c und danach

der Turbulenzbereich mit konstantem c an.

Fragen

F 1 und F 2 siehe Text.

F 3 Geben Sie die physikalische Bedeutung der Reynoldsschen Zahl an!

F 4 Bei welchen Strömungsproblemen spielt die Reynoldssche Zahl eine Rolle?

F 5 Was versteht man unter einem hydrodynamischen Ähnlichkeitsgesetz?

3.9. Bestimmung der molaren Masse nach VIKTOR MEYER

Neben der Vermittlung experimenteller Fertigkeiten wird vor allem angestrebt, den Umgang mit der Basisgröße Objektmenge (Stoffmenge) zu üben und die Zustandsgleichung idealer Gase anzuwenden.

Aufgaben

1. Von einer bei Normalbedingungen als Flüssigkeit existierenden Substanz ist die Gasdichte zu bestimmen.
2. Die molare Masse der Substanz ist zu errechnen.

Grundlagen

Das Verdampfungsgefäß der Apparatur (Abb. 3.9.(1)) wird durch das Heizbad auf einer (höheren) konstanten Temperatur gehalten. Meist wählt man die Siedetemperatur des Wassers. Gelangt das Mikrokölbchen mit der Versuchsflüssigkeit in diesen Teil der Apparatur, so verdampft die Flüssigkeit. Der Dampf verdrängt Luft aus der Apparatur. Diese wird im Meßzylinder aufgefangen.

Der Grundgedanke des Verfahrens besteht in folgendem: Für die verdrängte Luft gilt mit guter Näherung die Zustandsgleichung idealer Gase. Der Ausdruck pV/T ist also unter den Bedingungen im Verdampfungsgefäß und unter denen im Meßzylinder gleich. Im Verdampfungsgefäß ist aber das Volumen der verdrängten Luft gleich dem der verdampften Substanz. Da beide unter gleichem Druck und gleicher Temperatur stehen, ist damit auch pV/T für die verdampfte Substanz meßbar.

Wendet man auf die aufgefangene Luft die Zustandsgleichung idealer Gase an, so kann das Volumen der ausgeströmten Luft bei Normalbedingungen berechnet werden. Daraus und aus der Masse der verdampften

Substanz erhält man die Dichte der gasförmigen Substanz bei Normalbedimgungen. Die Dichten verschiedener Gase unter gleichen Bedingungen verhalten sich wie ihre molaren Massen.

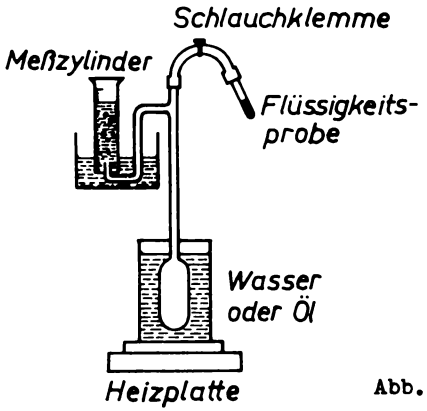


Abb. 3.9.(1) Verdampfungsapparatur nach V. Meyer

F 1 Weshalb muß die Dichte der verdampften Substanz beim Verfahren nach V. MEYER größer sein als die Dichte der Luft?

F 2 Nimmt die verdrängte Luft im Meßzylinder das gleiche Volumen ein wie die verdampfte Substanz im Verdampfungsgefäß?

F 3 Wie ist ein ideales Gas definiert? Ist es gerechtfertigt, im vorliegenden Fall die Zustandsgleichung idealer Gase anzuwenden?

Die Einführung der Basisgröße Objektmenge und der molaren Größen vereinfachen die Naturbeschreibung. Insbesondere wird in der Zustandsgleichung idealer Gase

$$\frac{pV}{T} = R$$

die molare Gaskonstante R stoffunabhängig

$$R = 8{,}314\ J\ mol^{-1}K^{-1}.$$

Es wurde gezeigt, daß man für den Ausdruck pV/T der verdampften Sub-

stanz auch die (meßbaren) Werte für die verdrängte Luft im Meßzylinder einsetzen kann.

Einführung des molaren Volumens v = V/n ergibt

$$\frac{pV}{T} = n\,R. \qquad (1)$$

Mit Gl. (1) ist es möglich, die Objektmenge n der verdampften Substanz zu bestimmen: n = pV/RT; hierin setzt man p gemäß Gl. (2) ein.

Aus M = m/n erhält man bei bekannter Masse m die molare Masse M der Substanz.

F 4 Wie lauten die Definitionen der Objektmenge (Stoffmenge) und deren SI-Einheit?

F 5 Wie werden molare aus extensiven Größen gebildet?

F 6 Zeigen Sie, daß die Dichten zweier Gase sich unter gleichen Bedingungen wie ihre molaren Massen verhalten!

F 7 Welcher Zusammenhang besteht zwischen der molaren Masse M einer Substanz und ihrer relativen Molekülmasse?

F 8 Geben Sie weitere Verfahren zur Bestimmung der molaren Masse bzw. relativen Molekülmasse an!

Zur Bestimmung des Drucks im Meßzylinder

Im Meßzylinder befindet sich die verdrängte Luft, die mit Wasserdampf gesättigt ist. Bezeichnet man mit p' den Druck der verdrängten Luft im Meßzylinder, mit p_D den Dampfdruck des Wassers und mit $p_h = \varrho gh$ den Schweredruck der Wassersäule der Höhe h (Abb. 3.9.(1)), so ergibt sich

$$\boxed{p + p_D + p_h = p_a\,.} \qquad (2)$$

p_a ist hierbei der äußere Luftdruck (Barometer).

Zur Durchführung

Vor jedem Versuch wird zur Reinigung längere Zeit mit Hilfe einer Glasröhre und einer Wasserstrahlpumpe Luft durch das Verdampfungsgefäß gesaugt. Dabei wird dieses Gefäß von außen mit dem Fön erwärmt.

F 9 Welche Verunreinigung des Gefäßes soll dabei beseitigt werden?

In ein Mikrokölbchen bringt man mit der Pipette etwas Versuchsflüssigkeit. Ihre Masse wird durch Differenzwägung auf einer Analysen-

waage bestimmt. Die Masse soll 50 bis 80 mg betragen. Die Apparatur wird verschlossen und erhitzt. Erst wenn keine Luftblasen mehr aus der Ausströmöffnung aufsteigen, wird das gefüllte Mikrokölbchen zwischen die beiden Quetschhähne am Einfüllschlauch gebracht. Nachdem der wassergefüllte Meßzylinder über dem Ausströmrohr befestigt ist, läßt man das Kölbchen mit der Versuchsflüssigkeit in das Verdampfungsgefäß fallen. Danach ist der innere Quetschhahn sofort wieder zu schließen. Das erste Experiment dient zur Orientierung, ob die gewählte Substanzmenge geeignet ist. Zwei weitere Experimente werden ausgewertet. Für eine der Messungen sind die Meßunsicherheiten aller Meßwerte abzuschätzen.

Zur Auswertung

Der Dampfdruck des Wasserdampfes ist temperaturabhängig. Er kann einer Tabelle entnommen werden (Anhang Abschnitt 7.4.3).

Da die Temperatur des Gases im Meßzylinder erheblich von der Zimmertemperatur abweichen kann, ist es erforderlich, die Temperatur in unmittelbarer Nähe des Meßzylinders zu bestimmen. Diese Temperatur ist auch für die Ermittlung des Wasserdampfdrucks p_D im Meßzylinder heranzuziehen.

Es ist zu diskutieren, ob die beiden errechneten molaren Massen im Rahmen der Meßunsicherheit übereinstimmen. Dabei ist die für einen Wert errechnete Meßunsicherheit auch für den zweiten Wert zu übernehmen.

Fragen

F 1 bis F 9 siehe Text.

3.10. Phasenumwandlungen

3.10.1. Dampfdruckkurve des Wassers

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen ist es möglich, die molare Verdampfungsenthalpie aus Dampfdruckmessungen zu bestimmen. Mit einer ähnlichen Anordnung kann in der Schule die Druckabhängigkeit der Siedetemperatur demonstriert werden.

Aufgaben

1. Im Temperaturintervall von etwa 20 °C bis 100 °C ist die Dampfdruckkurve des Wassers aufzunehmen.

2. $p = p(T)$ und $\ln(p/p_0) = f(1/T)$ sind grafisch darzustellen.
3. Für das untersuchte Temperaturintervall sind mittlere molare Verdampfungsenthalpien und mittlere spezifische Verdampfungsenthalpien zu ermitteln.

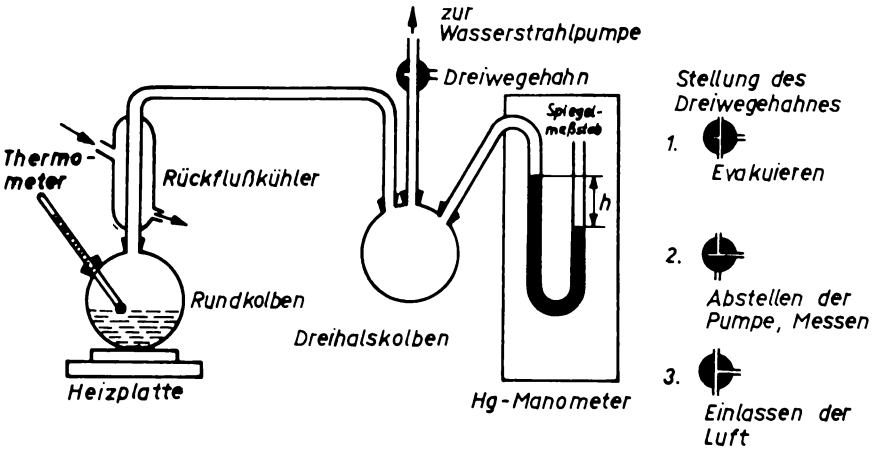


Abb. 3.10.(1) Apparatur zur Dampfdruckbestimmung

Die Versuchsapparatur (Abb. 3.10.(1)) besteht aus einem Rundkolben mit zwei Schliffen, an die ein Thermometer und ein Rückflußkühler angeschlossen werden. Der Dreihalskolben dient dem Ausgleich von Druckschwankungen bei ungleichmäßigem Sieden des Wassers. Er fängt außerdem Wasser auf, das bei falscher Stellung des Dreiwegehahnes aus der Wasserstrahlpumpe angesaugt werden könnte.

Mit dem offenen Quecksilbermanometer kann die Differenz zwischen Innen- und Außendruck gemessen werden.

Grundlagen

Für den Gleichgewichtszustand zwischen flüssiger Phase und Gasphase gilt unter vereinfachenden Annahmen die Clausius-Clapeyronsche Gleichung

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p\Delta h_{verd}}{R\,T^2}\ ; \qquad (1)$$

p = Dampfdruck, T = Temperatur, Δh_{verd} = molare Verdampfungsenthalpie, R = molare Gaskonstante. Nach Trennung der Variablen und Integration folgt daraus

$$\ln \frac{p}{p_o} = -\frac{\Delta h_{verd}}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o}\right). \qquad (2)$$

Das ergibt in der Darstellung $\ln(p/p_o) = f(1/T)$ bei Annahme einer temperaturunabhängigen Verdampfungsenthalpie eine Gerade, aus deren Anstieg $-\Delta h_{verd}/R$ die molare Verdampfungsenthalpie bestimmt wird. Für p_o kann dabei ein beliebiger "Anfangsdruck" eingesetzt werden. Der Geradenanstieg wird entweder durch Ausgleichsrechnung (zweckmäßigerweise an einer Rechenstelle) oder grafisch ermittelt.

Die molare Verdampfungsenthalpie des Wassers kann nur in grober Näherung als temperaturunabhängig angesehen werden. Sie hängt im untersuchten Temperaturintervall gemäß

$$\frac{d\Delta h_{verd}}{dT} = -45\ \frac{J}{mol\ K} \qquad (3)$$

von der Temperatur ab.

Die Annäherung der Gl. (2) durch eine Gerade liefert eine molare Verdampfungsenthalpie, die etwa für die Mitte des untersuchten Temperaturintervalls zutrifft. Will man diesen Wert mit einem Tabellenwert vergleichen, so ist zu beachten, daß dieser meist nur für Wasser von 100 °C angegeben ist. Aus ihm kann nach Gl. (3) der "Tabellenwert" für die Mitte des jeweiligen Temperaturintervalls berechnet werden.

F 1 Führen Sie die angegebene Integration der Gl. (1) aus!

F 2 In der Literatur sei die spezifische Verdampfungswärme (Verdampfungsenthalpie) des Wassers bei 100 °C mit 539 cal/g angegeben. Berechnen Sie daraus die molare Verdampfungsenthalpie bei 60 °C!

Zur Durchführung

Achtung! Während der Messung Schutzbrille tragen! Beim Zusammenbau von Vakuumapparaturen dürfen keine inneren Spannungen entstehen.

Siedeverzug der sich durch "Stoßen" bemerkbar macht, ist durch Verwendung von getrockneten Siedesteinen zu vermeiden. Man füllt den Kolben zu einem Drittel mit destilliertem Wasser, gibt einige gut getrocknete Siedesteine dazu, evakuiert, trennt das Vakuumgefäß von der Pumpe und stellt dann erst die Wasserstrahlpumpe ab. Man prüft einige Minuten die Konstanz des erreichten Vakuums. Eventuell müssen die Schliffe sparsam nachgefettet werden. Das Kühlwasser ist bereits vor dem Evakuieren anzustellen. Mit einem Laborheizgerät wird die Temperatur im Versuchsgefäß langsam erhöht.

Nachdem sich das Gleichgewicht zwischen Gasphase und Flüssigkeitsphase eingestellt hat, werden Druck und Temperatur abgelesen. Die jeweilige Siedetemperatur hat sich dann eingestellt, wenn bei weiterer Wärmezuführung und konstantem Druck die Temperatur nicht weiter ansteigt. Nach und nach läßt man Luft in die Apparatur einströmen und ermittelt jeweils beim Sieden die zusammengehörigen Werte von p und T. Sollte (besonders bei den ersten Messungen) zu viel Luft eingelassen worden sein, so kann der Innendruck mit der Wasserstrahlpumpe wieder erniedrigt werden.

Zur Auswertung

Die Tabelle im Meßprotokoll wird so angelegt, daß neben den Meßwerten auch alle benötigten Zwischenergebnisse eingetragen werden können. Wird der Anstieg der Geraden (2) an einer Rechenstelle ermittelt, so liefert ein geeignetes Programm auch die Vertrauensabweichung des Anstiegs, aus der dann die Meßunsicherheiten für die molare bzw. spezifische Verdampfungsenthalpie ermittelt werden können. In jedem Falle muß der erhaltene Wert in der kritischen Einschätzung mit dem nach Gleichung (3) korrigierten Tabellenwert verglichen werden.

Fragen

F 1 und F 2 siehe Text.

F 3 Stellen Sie die Gleichung für den Druck im Versuchsgefäß auf!

F 4 Herleitung der Clapeyronschen Gleichung.

F 5 Herleitung der Clausius-Clapeyronschen Gleichung aus der Clapeyronschen Gleichung; zeigen Sie dabei, welche Vereinfachungen vorgenommen wurden!

F 6 Zeichnen Sie das p,T-Zustandsdiagramm des Wassers!

F 7 Erläutern Sie an diesem Zustandsdiagramm die Entstehung der verschiedenen Arten der Niederschläge (Regen, Schnee, Hagel, Tau, Reif)!

3.10.2. Messung spezifischer Umwandlungsenthalpien

Die Änderung der thermodynamischen Zustandsgröße Enthalpie eines Systems kann für spezielle Prozesse durch die Messung der die Systemgrenzen in Form von Wärme überschreitenden Energie bestimmt werden.

Aufgaben

Es sind zu bestimmen:

1. Die Wärmekapazität des Kalorimeters.
2. Die spezifische Schmelzenthalpie des Eises.
3. Die spezifische Kondensationsenthalpie des Wassers.
4. Die molare Schmelz- und Kondensationsenthalpie.

Die in Abb. 3.10.(2) dargestellte Apparatur dient zur Bestimmung der spezifischen Verdampfungsenthalpie des Wassers. Zur Bestimmung der spezifischen Schmelzenthalpie wird nur das Kalorimeter benutzt.

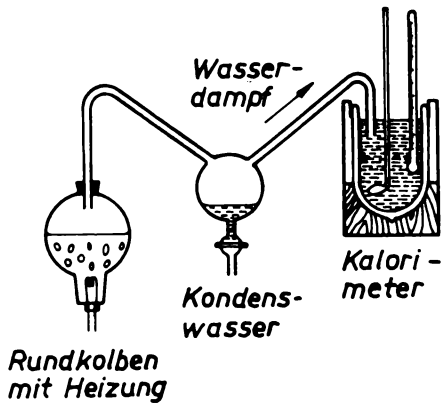


Abb. 3.10.(2) Bestimmung der spezifischen Verdampfungsenthalpie

Grundlagen

Es ist zunächst der Abschnitt Grundlagen des Experiments "spezifische Wärmekapazität fester Stoffe" zu studieren. Die Wärme ist keine thermodynamische Zustandsgröße. Man kann im allgemeinen Fall bei bekanntem Anfangszustand eines Systems nichts über den Endzustand aussagen, den es nach Zufuhr der Wärme Q annehmen wird. Das ist aber z. B. für die Enthalpie eines Systems bei definierter Enthalpieänderung möglich. Die Enthalpie ist eine thermodynamische Zustandsgröße.

Die bei isothermer Umwandlung einer Phase in eine andere, etwa fest → flüssig, ausgetauschte Energie umfaßt sowohl die für die Volumenänderung erforderliche Arbeit als auch die Änderung der inneren Energie.

Das totale Differential der Zustandsgröße Enthalpie,

$$dH = dU + pdV + Vdp, \tag{1}$$

nimmt für einen isobaren Prozeß, z. B. eine isobare Phasenumwandlung, die Form an: $dH = dU + pdV$. Da andererseits gilt $đQ = dU + pdV$, ergibt sich für den Fall der isobaren Phasenumwandlung

$$dH = đQ. \tag{2}$$

Die vom System bei der Phasenumwandlung ausgetauschte Wärme ist gleich der Änderung seiner Enthalpie.

Charakteristisch für die Phasenumwandlung ist also die Änderung der Enthalpie, die Umwandlungsenthalpie (Schmelzenthalpie, Kondensationsenthalpie). Aus Gl. (2) kann sie durch Messung der zu- oder abgeführten Wärme ermittelt werden.

Es ist deshalb richtig, für einen isobaren Prozeß von der spezifischen Umwandlungsenthalpie (spezifische Schmelzenthalpie, spezifische Kondensationsenthalpie) zu sprechen statt von der spezifischen Umwandlungswärme (Schmelzwärme, Kondensationswärme). In der physikalischen Literatur werden aber auch diese Bezeichnungen noch häufig verwendet.

F 1 Begründen Sie, weshalb eine Phasenumwandlung durch die Umwandlungsenthalpie charakterisiert wird.

F 2 Wie sind innere Energie, Wärmekapazität und spezifische Wärmekapazität definiert?

F 3 Leiten Sie die Gleichung zur Bestimmung der Wärmekapazität des Kalorimeters her!

Bestimmung der spezifischen Schmelzenthalpie des Eises

Als Schmelzenthalpie H_{schm} bezeichnet man die Enthalpieänderung eines Systems beim Schmelzen. Die spezifische Schmelzenthalpie ist

$$\Delta\hat{h}_{schm} = \frac{\Delta\hat{H}_{schm}}{m} , \tag{3}$$

die molare Schmelzenthalpie $\Delta h_{schm} = \Delta\hat{h}_{schm} M$. Wegen Gl. (2) ist die Schmelzenthalpie gleich der beim isobaren Schmelzprozeß zugeführten Wärme.

Bringt man in ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter Eis, das die Schmelztemperatur angenommen hat, so wird sich eine gemeinsame Temperatur einstellen.

Die Größen des zunächst höher temperierten Teilsystems werden durch den Index A, die des niedriger temperierten Teilsystems durch den Index B gekennzeichnet.

m_A Masse des Wassers im Kalorimeter, T_A Temperatur von Wasser und Kalorimeter vor dem Mischungsvorgang, C Wärmekapazität des Kalorimeters, m_B Masse des Eises, T_B Schmelztemperatur des Eises, T_M Mischungstemperatur, $\hat{c}_W$ spezifische Wärmekapazität des Wassers.

Die spezifische Schmelzenthalpie ergibt sich zu

$$\boxed{\Delta\hat{h}_{schm} = \frac{(m_A\hat{c}_W + C)(T_A - T_M)}{m_B} - \hat{c}_W(T_M - T_B).} \tag{4}$$

F 4 Leiten Sie Gl. (4) her!

Analog zu Gl. (3) bezeichnet man

$$\Delta\hat{h}_k = \frac{\Delta H_k}{m} \tag{5}$$

als spezifische Kondensationsenthalpie.

Werden bei diesem Mischungsexperiment die Größen des höher temperierten Teilsystems wieder mit dem Index A gekennzeichnet, so bedeuten: m_A Masse des kondensierten Wasserdampfes, T_A Kondensationstemperatur, m_B Masse des Wassers im Kalorimeter, T_B Temperatur von Wasser und Kalorimeter vor dem Mischungsvorgang. Es gilt

$$\Delta\hat{h}_k = \hat{c}_W(T_A - T_M) - \frac{(m_B\hat{c}_W + C)(T_M - T_B)}{m_A} . \qquad (6)$$

F 5 Leiten Sie Gl. (6) her!

Beachten Sie, daß sich nach Gl. (6) für die spezifische Kondensationsenthalpie ein negativer Wert ergeben muß, da sich die Enthalpie des Teilsystems A beim Kondensieren verkleinert. Der positive Wert vom gleichen Betrag wäre die spezifische Verdampfungsenthalpie.

Zur Durchführung

Die beim Experiment "Spezifische Wärmekapazität fester Stoffe" gegebenen Hinweise gelten auch für diesen Versuch. Die Wärmekapazität des Kalorimeters wird nach der dort beschriebenen Methode bestimmt.

Messung der Schmelzenthalpie

Das Kalorimeter wird zu etwa zwei Dritteln mit Wasser gefüllt. Die Temperatur soll über Zimmertemperatur liegen. Nachdem die Temperatur etwa 5 Minuten gemessen wurde, läßt man gut abgetrocknete Eisstückchen in das Kalorimeter fallen. Während der Mischung muß gut umgerührt werden. Danach ist die Temperatur noch über mehrere Minuten zu messen. Die Temperaturdifferenz $T_A - T_M$ wird durch das grafische Ausgleichsverfahren ermittelt.

Messung der Verdampfungsenthalpie

Die Temperatur im fast vollständig gefüllten Kalorimeter soll zunächst unter Zimmertemperatur liegen. Nachdem sie über mehrere Minuten gemessen wurde, wird der Dampfstrahl aus der Verdampfungsapparatur direkt auf die Oberfläche des Wassers im Kalorimeter gerichtet. Das Ausströmungsrohr ist dabei so zu stellen, daß aus dem Rohr herabtropfendes Wasser nicht in das Kalorimeter gelangt. Während der Mischung ist gut umzurühren. Die Temperaturdifferenz $T_M - T_B$ wird durch das grafische Ausgleichsverfahren ermittelt. Die Meßunsicherheiten der Meßwerte sind am Versuchsplatz abzuschätzen.

Zur Auswertung

Außer der Wärmekapazität des Kalorimeters, der spezifischen und mola-

ren Schmelz- und Kondensationsenthalpie sind auch deren Meßunsicherheiten zu berechnen.

Es ist anzugeben, ob der Tabellenwert innerhalb des Intervalls der berechneten Meßunsicherheit liegt. Anderenfalls sind die offensichtlich aufgetretenen systematischen (oder groben) Fehler zu diskutieren.

F 6 Es kann sein, daß Sie in einer Tabelle als spezifische Schmelzenthalpie (Schmelzwärme) des Eises den Wert 80 cal/g angegeben finden. Geben Sie diesen Wert mit SI-Einheiten an!

Weitere experimentelle Aufgaben

Bestimmung der spezifischen Verdampfungsenthalpie des Wassers

In einem gut wärmeisolierten Verdampfungsgefäß wird dem Wasser mit einem Tauchsieder Energie zugeführt. Sobald ein gleichmäßiger Dampfstrahl ausströmt, wird der Dampf während einer bestimmten Zeit durch einen Verdichter (Kondensator) geleitet. Aus der Masse des abgeschiedenen Wassers und der zugeführten elektrischen Energie kann die spezifische Verdampfungsenthalpie berechnet werden.

Fragen

F 1 bis F 6 siehe Text.

F 7 Motivieren Sie die Einführung der Zustandsgröße Enthalpie!

F 8 Erläutern Sie das graphische Ausgleichsverfahren!

3.11. Bestimmung des Adiabatenexponenten nach CLEMENT und DESORMES

Die Untersuchung adiabater Zustandsänderungen ermöglicht die Bestimmung des Adiabatenexponenten $\varkappa$. Gilt für die untersuchten Gase hinreichend genau die Zustandsgleichung eines idealen Gases, so können aus dem Adiabatenexponenten die molaren Wärmekapazitäten c_p und c_v berechnet werden.

Aufgaben

1. Der Adiabatenexponent $\varkappa$ ist für verschiedene Gase nach dem Verfahren von CLEMENT und DESORMES zu bestimmen.
2. Aus den Meßergebnissen sind die molaren und die spezifischen Wärmekapazitäten der Gase zu berechnen.

Grundlagen

Für adiabate Zustandsänderung eines idealen Gases gelten die Poissonschen Gleichungen

$$pV^{\varkappa} = \text{const}, \tag{1}$$

$$TV^{\varkappa-1} = \text{const}, \tag{2}$$

$$\frac{T^{\varkappa}}{p^{\varkappa-1}} = \text{const}. \tag{3}$$

F 1 Leiten Sie diese Gleichungen her!

Das Experiment verläuft folgendermaßen: Im Glasgefäß (Abb. 3.11. (1)) wird ein kleiner Überdruck $\Delta_1 p$ erzeugt. Nach hinreichend langer Zeit hat das Gas im Gefäß die Umgebungstemperatur T angenommen. Sein

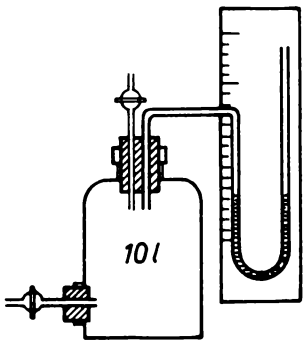


Abb. 3.11.(1) Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Clement und Desormes

Druck ist $p + \Delta_1 p$ (äußerer Luftdruck).

Wird jetzt ein Hahn des Gefäßes kurzzeitig geöffnet, so erfolgt eine adiabate Entspannung des eingeschlossenen Gases. Sein Druck sinkt auf p, seine Temperatur erniedrigt sich auf $T - \Delta T$. Nach Gl. (3) gilt für diesen Prozeß

$$\frac{T^{\varkappa}}{(p + \Delta_1 p)^{\varkappa-1}} = \frac{(T - \Delta T)^{\varkappa}}{p^{\varkappa-1}} .$$

Eine Umstellung ergibt

$$\left(\frac{p + \Delta_1 p}{p}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{T}{T - \Delta T}\right)^{\varkappa} . \qquad (4)$$

Sofort nach der adiabaten Entspannung beginnt die zweite Zustandsänderung. Das eingeschlossene Gas nimmt Energie in Form von Wärme aus der Umgebung auf. Seine Temperatur erhöht sich auf Zimmertemperatur T, sein Druck steigt auf $p + \Delta_2 p$ an. Es handelt sich um einen isochoren Prozeß, für den nach der Zustandsgleichung gilt

$$\frac{T}{T - \Delta T} = \frac{p + \Delta_2 p}{p} .$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (4) ein, so folgt

$$\left(1 + \frac{\Delta_1 p}{p}\right)^{\varkappa - 1} = \left(1 + \frac{\Delta_2 p}{p}\right)^{\varkappa} .$$

Entwickelt man diese Ausdrücke in Reihen, so ergibt sich bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$1 + (\varkappa - 1)\frac{\Delta_1 p}{p} = 1 + \varkappa \frac{\Delta_2 p}{p} ,$$

$$\varkappa = \frac{\Delta_1 p}{\Delta_1 p - \Delta_2 p} .$$

Da für das U-Rohr-Manometer gilt $\Delta p = \varrho g h$, wird daraus die für die Auswertung geeignete Gleichung

$$\varkappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} . \qquad (5)$$

F 2 Welche Idealisierung enthält das beschriebene Meßverfahren?

Aus $\varkappa = c_p/c_v$ und

$$c_p - c_v = R \qquad (6)$$

lassen sich die molaren Wärmekapazitäten c_p und c_v eines idealen Gases berechnen.

F 3 Leiten Sie Gl. (6) her!

Zur Durchführung

Informieren Sie sich vor der Benutzung der Druckgasflaschen über die Arbeitsschutzanordnungen und über die Bedienung des Reduzierventils!

Untersucht man die Gase in der Reihenfolge nach steigender Gasdichte, so kann man das Gas mit der größeren Dichte jeweils durch den unteren Absperrhahn einleiten. Das zuvor untersuchte Gas geringerer Dichte wird dabei durch den oberen Absperrhahn herausgedrückt.

F 4 Wie kann man die Reihenfolge der Untersuchung festlegen, wenn eine Tabelle der Gasdichten nicht zur Verfügung steht?

Wenn die Flasche mit dem zu untersuchenden Gas vollständig gefüllt ist (Kontrolle!) erzeugt man in ihr einen Überdruck von etwa 10 cm Flüssigkeitssäule und wartet, bis die Manometerflüssigkeit ihren Stand h_1 nicht mehr ändert. Man öffnet den Hahn (etwa (1/2)s), bis der Druck in der Flasche auf den äußeren Luftdruck abgesunken ist. Infolge des anschließenden Temperaturausgleichs steigt der Druck wieder an. Wenn sich die Stellung der Flüssigkeitssäule nicht mehr ändert, wird h_2 abgelesen.

Man errechnet $\varkappa$ aus Gl. (5) und bildet aus 10 Messungen den Mittelwert.

Zur Auswertung

Aus den Mittelwerten der Adiabatenexponenten werden die molaren Wärmekapazitäten c_p und c_v sowie die spezifischen Wärmekapazitäten $\hat{c}_p$ und $\hat{c}_v$ berechnet.

Für die molaren Wärmekapazitäten sind die Meßunsicherheiten zu berechnen. Es ist einzuschätzen, ob die Ergebnisse mit ihrem Meßunsicherheitsintervall die Tabellenwerte umfassen. Ist das nicht der Fall, so sind die vermuteten systematischen oder groben Fehler zu diskutieren.

Fragen

F 5 Weshalb gilt bei allen Gasen $c_p > c_v$?

F 6 Welchen Wert hat $c_p - c_v$ bei Stoffen in anderen Aggregatzuständen?

F 7 Leiten Sie mit Hilfe molekularkinetischer Überlegungen den Wert

der molaren Wärmekapazität c_v für ein-, zwei- und mehratomige Gase her! Wo liegen die Grenzen dieses einfachen Modelles?

F 8 Unterscheiden Sie Adiabaten- und Polytropenexponent.

3.12. Bestimmung statistischer Häufigkeitsverteilungen

Statistische Gesetzmäßigkeiten spielen in vielen physikalischen Gebieten - nicht nur im Zusammenhang mit der Thermodynamik - eine hervorragende Rolle. Die Experimente zu statistischen Schwankungen dienen dem Ziel, den Umgang mit Grundbeziehungen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu üben. Das betrifft vor allem die Anwendung der Bernoulli-, Poisson- und Gaußverteilung sowie einige Tests zur Prüfung statistischer Reinheit.

Aufgaben

1. Statistisch verteilte Ereignisse (z. B. Zählimpulse) werden mit Hilfe eines Geiger-Müller-Zählgerätes registriert.

1.1. Es werden die Häufigkeitsverteilungen gemäß der Poisson- und Gaußbeziehung gemessen und grafisch dargestellt.

1.2. Es werden aus den erhaltenen experimentellen Verteilungskurven die Mittelwerte und die mittleren Schwankungen bestimmt. Diese Werte werden mit den theoretischen verglichen.

1.3. Durchführung eines χ^2- und t-Testes.

2. Variante des Experimentes: Ermittlung von Häufigkeitsverteilungen (Mittelwerte statistischer Reinheit) mit Hilfe eines Modellgases (Schüttelgerät).

Grundlagen

Statistische Schwankungen bei physikalischen Vorgängen liegen in der Natur der Dinge und Erscheinungen selbst. Im folgenden werden Verteilungen von Ereignissen (Impulse, Besetzungszahlen u. a.) betrachtet, die voneinander unabhängig sind. Die Betrachtungen beziehen sich auf die Bernoulli-, Poisson- und Gauß-Verteilung. Die Auswertung statistischer Ergebnisse verlangt auch die Prüfung der statistischen Reinheit und Zuverlässigkeit der Resultate; somit werden auch zugehörige Reinheitstests dargestellt.

Folgendes Problem führt zur Bernoulli- oder Binomial-Verteilung:

Wenn p die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß in einem einzigen Versuch ein bestimmtes Ereignis (Ergebnis) eintritt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß bei N voneinander unabhängigen Versuchen das Ereignis n-mal eintritt?

Dieses Problem lautet, wenn man es auf die statistisch schwankende Teilchenzahl n in einem Teilvolumen v eines Gasbehälters des Volumens V > v anwendet:

F 1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n Moleküle von insgesamt N in dem Teilvolumen aufhalten?

Beantworten Sie diese Frage und geben Sie auch die Wahrscheinlichkeit für den Fall an, daß sich sämtliche N Moleküle im Teilvolumen v befinden!

Das Bernoulli-Problem lautet im Falle statistischer Impulszählung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_B(n)$ dafür, daß n Impulse im Intervall Δt registriert werden, wenn im Mittel N Impulse registriert werden? N soll ganzzahlig angenommen werden.

Die Lösung dieses Problems ergibt die Bernoulli-Verteilung, die auch als Newtonsche Formel bezeichnet wird,

$$P_B(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}. \qquad (1)$$

F 2 Erläutern Sie diese Beziehung!

Aus der Gl. (1) erhält man die häufig in Anwendungsbeispielen verwendete Poisson-Verteilung: In diesem Fall ist $p \ll 1$. $P_B(n)$ ist aber nach Gl. (1) nur dann merklich von Null verschieden, wenn $n \ll N$. Damit erhält man

$$P_P(n) = \frac{(pN)^n}{n!} e^{-pN}. \qquad (2)$$

F 3 Zeigen Sie in einzelnen Schritten, wie (2) aus (1) folgt!

Es ist $pN = \bar{n}$ der Mittelwert; man bezeichnet ihn auch als Erwartungswert oder Moment erster Ordnung.

F 4 Zeigen Sie, wie man $\bar{n} = pN$ aus (2) erhält!

Aus den graphischen Darstellungen (Abb. 3.12.(1)) erkennt man, daß für kleine Werte des Parameters $\bar{n}$ die Poisson-Verteilung (2) unsymmetrisch ist. Für große Werte von $\bar{n}$ geht die Poisson-Verteilung näherungsweise in eine symmetrische (glockenförmige) Verteilung über. Betrachtet man die Abweichung vom Mittelwert, also $|n-\bar{n}|$, so gelangt man von Gl. (1) bzw. Gl. (2) zu der Gauß-Verteilung

$$P_G(n-\bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (3)$$

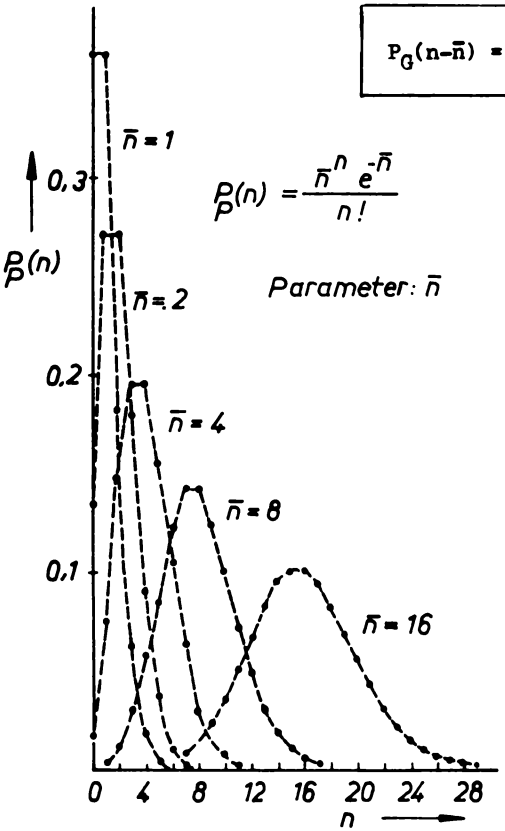


Abb. 3.12.(1) Übergang von Poisson- zu Gauß-Kurven

Hierin ist σ die Wurzel aus dem mittleren Quadrat der Schwankungen $(n-\bar{n})$ um den Mittelwert $\bar{n}$:

$$\sigma := \sqrt{\overline{(n-\bar{n})^2}} .$$

σ heißt auch mittlere Schwankung oder Standardabweichung und σ^2 Varianz, Dispersion oder mittleres Schwankungsquadrat.

F 5 Man zeige, wie die Gl. (3) aus (2) folgt.

F 6 Man zeige, wie die Gl. (3) aus (1) folgt.

Für jede Art einer Verteilungsfunktion erhält man

$$\sigma^2 := \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2} - 2\bar{n}\bar{n} + \bar{n}^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2. \qquad (4)$$

$\overline{n^2}$ wird als Moment zweiter Ordnung der Verteilungsfunktion P(n) bezeichnet und wird aus

$$\overline{n^2} := \sum_{n=1}^{N} n^2 P(n)$$

berechnet.

Im Fall einer Poisson-Verteilung spezialisiert sich Gl. (4) zu

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} \; . \qquad (5)$$

Diese Beziehung wird häufig angewendet. Stets handelt es sich bei den n-Werten um reine Zahlen, also z. B. nicht um Zählraten.

Das Meßergebnis ist durch die Angabe des Standardintervalls $\bar{n} \pm \sqrt{\bar{n}}$ gekennzeichnet. Hiermit ist ausgesagt, daß der "wahre Wert" mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,27 % innerhalb dieses Standardintervalls liegt.

Bei einer Gauß-Verteilung liegen 68,27 % der Meßwerte innerhalb des Intervalls $\bar{n} \pm \sigma$, 95,45 % der Meßwerte innerhalb des Intervalls $\bar{n} \pm 2\sigma$ und 99,73 % innerhalb $\bar{n} \pm 3\sigma$. Aus der Abb. 3.12.(2) entnimmt man einige weitere charakteristische Werte für die Gauß-Kurve.

Die Prüfung der statistischen Reinheit z. B. von Impulsmessungen dient dazu, mögliche Fehler festzustellen, die nicht auf statistische Einflüsse zurückzuführen sind. Zu diesem Zweck kann man grafische Verfahren sowie den t-Test (nach GOSSET, Pseudonym STUDENT) und den χ^2-Test (nach PEARSON) verwenden.

Grafisch kann man Abweichungen von der reinen statistischen Verteilung z. B. mit dem integralen Wahrscheinlichkeitspapier Nr. 500 nach BECKEL (siehe /7/) prüfen. In diesen Koordinaten erscheinen Verteilungen, die der integralen Gauß-Kurve entsprechen, als gerade Linien.

F 7 Geben Sie die integrale Gauß-Verteilung mit Herleitung an!

Abweichungen von der Geraden in diesen Koordinaten, die einen bestimmten Wert überschreiten, deuten auf nichtstatistische Fehlerquellen (z. B. apparative Mängel) hin. Zur Prüfung der Differenzen

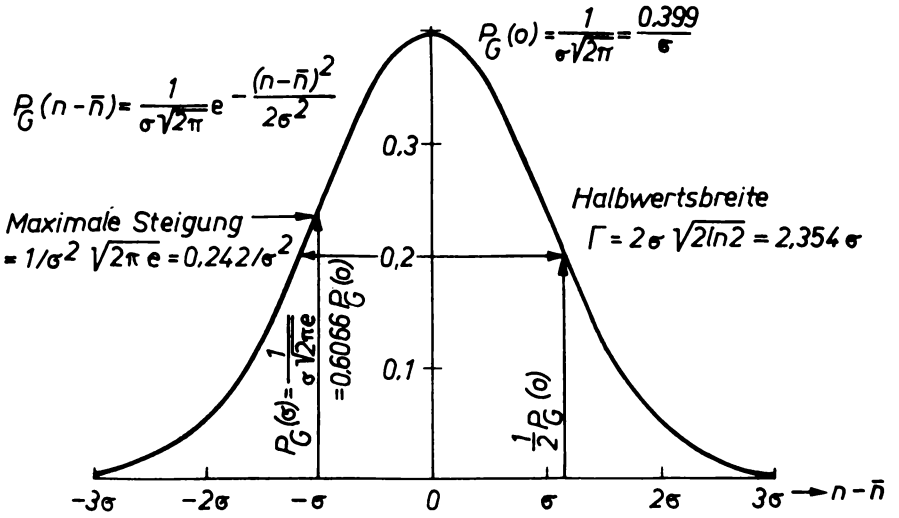


Abb. 3.12.(2) **Gauß-Verteilungskurve**

ist der t-Test (two tail hypothesis, Alternativ-Hypothese; entweder-oder) besonders geeignet.

Der t-Test wird nachfolgend an einem Beispiel demonstriert: Man ermittelt z. B. zehnmal die Zeit für je 10^4 Impulse (Impulsvorwahl am Meßgerät), berechnet die zugehörigen Zählraten $z = n/t$ und bestimmt den Mittelwert $\bar{x}$ aus den ersten fünf Messungen und den Mittelwert $\bar{y}$ aus den zweiten fünf Messungen. Des weiteren berechnet man die Standardabweichung der Differenz $\bar{x} - \bar{y}$, also $(\bar{x} - \bar{y})$. Dann bildet man

$$t := \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma(\bar{x} - \bar{y})} \,. \qquad (6)$$

Ergibt sich hieraus $|t| > 1{,}96$, so sind nichtstatistische Fehler anzunehmen.

Ein weiteres oft angewendetes Verfahren - der χ^2-Test - vergleicht eine experimentelle Stichprobenverteilung mit der theoretisch zu erwartenden Verteilung. Sämtliche Tests sind am zuverlässigsten, wenn möglichst viele Meßwerte verfügbar sind, d. h., wenn möglichst lange Meßzeiten gewählt werden. Der χ^2-Test, der im nachfolgenden Beispiel demonstriert wird, ist nur anwendbar, wenn $n > 30$ ist, d. h., wenn die Verteilungskurve bereits als symmetrisch angesehen werden kann.

Man bildet aus k Einzelmessungen n_1, n_2, ... n_k, für die sich der Mittelwert $\bar{n} = \frac{1}{k}\sum n_i$ ergibt,

$$\chi^2 := \frac{1}{\bar{n}} \sum_{i=1}^{k} (n_i - \bar{n})^2 \ .$$

Bei der Ermittlung von $\bar{n}$ aus Zählratenmessungen $z = n/t$ hat man die Zeitdauer t für alle Einzelmessungen gleich groß zu wählen.

Für die Durchführung des χ^2-Tests ist die nachfolgende Tabelle nützlich.

Grenzen für den χ^2-Test

Zahl der Beobachtungen (Messungen)	untere Grenze für χ^2	obere Grenze für χ^2
3	0,103	5,99
4	0,352	7,81
5	0,711	9,49
6	1,14	11,07
7	1,63	12,59
8	2,17	14,07
9	2,73	15,51
10	3,33	16,92
15	6,57	23,68
20	10,12	30,14
25	13,85	36,42
30	17,71	42,56

Liegt beispielsweise χ^2 außerhalb der Grenzen, so sind nichtstatistische Fehler anzunehmen.

Zur Durchführung

Die statistischen Verteilungen nach POISSON und GAUSS bestimmt man bereits aus der Registrierung der ionisierenden Umgebungsstrahlung, also durch Messung des Nulleffektes z. B. mit einem Geiger-Müller-Zählrohr.

Geeigneter für das Experiment ist allerdings die Verwendung eines radioaktiven Präparates, dessen Halbwertszeit sehr viel größer als die gesamte Meßdauer sein muß. Man wählt die Anordnung Präparat/Zählrohr in der Weise, daß z. B. in ein vorzugebendes Meßintervall (z. B. t = 5 s) im Mittel 3 bis 6 Impulse fallen. Das erreicht man z. B. durch Abstandsveränderung des Präparates oder durch Abdecken des Strahlers mit Absorbern. Mit 400 bis 500 Einzelmessungen erhält man bereits brauchbare Häufigkeitsverteilungen.

Die Untersuchung der statistischen Schwankungen kann i. allg. mit jedem beliebigen Präparat oder auch allein mit Hilfe des Nulleffektes durchgeführt werden, so daß jedes beliebige Zählrohr und Zählgerät verwendet werden können, sofern die Quantenenergie ausreicht, um die Zählrohrwand zu durchdringen.

Das Aufnehmen von Verteilungskurven für höhere Impulszahlen läßt sich entweder durch Wahl größerer Zeitintervalle, d. h. durch Zusammenfassung mehrerer kleiner Intervalle, oder durch Verringerung des Abstandes zwischen Präparat und Zählrohr durchführen. Das Starten und Stoppen der Zeitintervalle mit der Hand erübrigt sich bei Zählgeräten mit "Zeitvorwahl".

Zur Auswertung

Die Meßreihen werden als übersichtliche Tabellen angelegt. Sie enthalten die für ein vorgegebenes (Zeit)intervall registrierten Impulse (Beobachtungswerte) mit der dazugehörigen absoluten Häufigkeit. In zwei weiteren Spalten trägt man die zu berechnende relative Häufigkeit und die (theoretische) erwartete Häufigkeit ein. Die Meßkurven und ihre berechneten Verläufe werden grafisch dargestellt; ihre jeweiligen Mittelwerte sind zu vergleichen.

Aus einzelnen Meßintervallen entnimmt man stichprobenartig Werte und führt mit diesen den t- bzw. χ^2-Test durch.

Fragen

F 1 bis F 7 siehe Text.

F 8 Mit Hilfe der Gamma-Funktion kann der Begriff der Fakultät, der nur für ganzzahlige positive x definiert ist, auf beliebige reelle x verallgemeinert werden: $x! := \Gamma(x + 1)$. Berechnen Sie die Gamma-Funktion für $x = 1/2$; $x = -1/2$; $x = 0,7$; $x = 3,5$!

F 9 Wie lautet die Stirlingsche Formel und wo wird sie angewendet?

F 10 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß n nicht mehr als 200 - 180 = 20 vom Erwartungswert 200 abweicht? Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit, daß n zwischen den Grenzen $n_1 = 18C$ und $n_2 = 220$ liegt.

5.13. Bestimmung der Boltzmann-Konstanten k aus der Brownschen Bewegung

Schwankungserscheinungen haben auf vielen Gebieten der Physik eine große Bedeutung erlangt, so daß eine experimentelle Einführung in statistische Grundbegriffe und Zusammenhänge möglichst frühzeitig im Studium erfolgen sollte. Die in vielen physikalischen Zusammenhängen auftretende Boltzmann-Konstante kann aus dem mittleren Verschiebungsquadrat eines Brownschen Teilchens bestimmt werden.

Aufgabe

Mit Hilfe eines Millikan-Kondensators, der auch zur Bestimmung der elektrischen Elementarladung e dient, werden aus der statistisch-ungeordneten Bewegung eines Öltröpfchens die Verschiebungen Δx eines solchen Brownschen Teilchens gemessen und aus dem mittleren Schwankungsquadrat $\overline{\Delta x^2}$ die Boltzmann-Konstante bestimmt.

Grundlagen

Die mikroskopische Beobachtung von Teilchen, die sich in einem gasförmigen oder flüssigen Dispersionsmittel befinden, zeigt, daß diese Teilchen - selbst bei Abwesenheit eines äußeren Feldes - nicht in Ruhe sind, sondern eine dauernde und unregelmäßige zickzackförmige Bewegung ausführen. Diese Erscheinung wird nach dem englischen Botaniker BROWN (1827) als Brownsche Bewegung bezeichnet, obwohl sie bereits etwa 100 Jahre vor BROWN dem Mikroskopiker A. van LEEUVENHOEK bekannt war.

EINSTEIN (1905) und v. SMOLUCHOWSKI (1906) haben unabhängig voneinander Theorien der Brownschen Bewegung aufgestellt, in denen als Ursache für diese Bewegung die thermische Bewegung der Moleküle oder Atome des Dispersionsmittels erkannt wird. Man unterscheidet eine

Brownsche Bewegung der Translation und eine der Rotation. Sie ist ein anschaulicher Beweis für den statistischen Charakter der thermischen Bewegung.

Mit Hilfe der Boltzmann-Konstanten k läßt sich auch die Avogadro-Konstante N_A bestimmen, womit dann Aussagen über die Größen von Molekülen und Atomen möglich sind:

$$\boxed{N_A = \frac{R}{k};} \tag{1}$$

hierin bedeutet R die molare Gaskonstante.

F 1 In welchen wesentlichen physikalischen Gesetzen tritt die Boltzmann-Konstante auf?

F 2 Nennen Sie weitere Möglichkeiten zur Bestimmung von k!

Aus der Einsteinschen Theorie ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem mittleren Verschiebungsquadrat und der Boltzmann-Konstanten

$$\boxed{\overline{\Delta x^2} = \frac{kT}{3\pi\eta r}\,\Delta t;} \tag{2}$$

hierin bedeuten η die Viskosität der Luft, r den Tröpfchenradius, T die Temperatur und Δt das Zeitintervall, in dem die Verschiebungen Δx erfolgen.

Der Radius des Tröpfchens ergibt sich wie im Millikan-Experiment 5.7. aus den Beobachtungen des vertikal mit der Geschwindigkeit v fallenden Tröpfchens zu

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\varrho - \varrho_L)}} \tag{3}$$

(ϱ Dichte des Öltröpfchens, ϱ_L Dichte der Luft), wobei dieser Wert allerdings noch korrigiert werden muß. Die erforderliche Korrektur ergibt sich - wie im Millikan-Experiment - auf Grund der Tatsache, daß der Tröpfchenradius r in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge $\bar{\lambda}$ der Gasmoleküle der Luft liegt. Damit erhält man schließlich

$$k = \frac{3\pi\eta r\overline{\Delta x^2}}{T\Delta t}\left(1 + \frac{A^*\bar{\lambda}}{r}\right)^{-3/2}; \tag{4}$$

Hierin ist A^* eine Konstante für die Korrekturformel des Stokesschen

Gesetzes (siehe Experiment 5.7.).

Zur Durchführung

Die Brownsche Bewegung von elektrisch geladenen Öltröpfchen wird im Millikan-Kondensator bei Dunkelfeldbeleuchtung mikroskopisch betrachtet. Bei vertikal stehender Skale des Okularmikrometers wird zunächst der Radius r eines geeigneten, d. h. deutliche Bewegung zeigenden Tröpfchens durch eine Reihe von Messungen der Fallbewegung bestimmt.

Die an die Platten des Kondensators gelegte Spannung wird mit einem Spannungsteiler so geregelt, daß die Kondensatorfeldstärke das geladene Teilchen in bequemer Nähe der nunmehr horizontal gestellten Okularskale hält. In regelmäßigen Zeitabständen Δt (etwa 5 oder 10 s) wird nur die x-Koordinate des Teilchens abgelesen (Abb. 3.13.(1)).

Aus der Differenz Δx zweier aufeinanderfolgender Ablesungen bildet man Δx^2 und durch Mittelung über alle Werte $\overline{\Delta x^2}$.

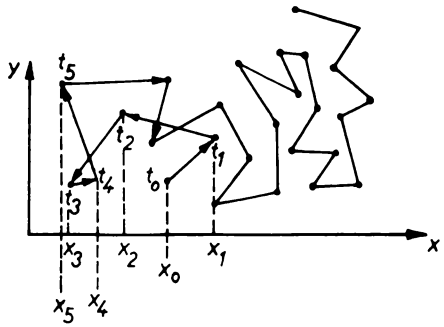


Abb. 3.13.(1) Brownsche Bewegung: x-Koordinaten nach den Zeitintervallen Δt

Es sind für mindestens zwei verschiedene Teilchen Messungen mit wenigstens 100 Ablesungen durchzuführen. Bei diesen Beobachtungen braucht das Mikroskop nicht auf die vertikale Mittelebene eingestellt zu sein; es kann bei Wanderungen der Teilchen nachgeführt werden, da es allein auf die Projektionen auf die x-Achse ankommt. Wandert das Teilchen in vertikaler Richtung, so kann es durch Spannungsänderungen am Kondensator wieder in die Mitte der Kondensatorplatten gebracht werden.

Zur Auswertung

Die Auswertung erfolgt zunächst mit dem gewählten Zeitintervall

(z. B. 5s), sodann mit dem doppelten Δt-Wert (10s), um die Proportionalität von $\overline{\Delta x^2}$ mit Δt zu prüfen.

Falls eine Konvektionsströmung in der Kondensatorkammer vorhanden ist, so ist die gemessene Verschiebung Δx von der Strömung überlagert, und $\overline{\Delta x^2}$ wird zu groß. Diesen Strömungseinfluß kann man mit Hilfe der Beziehung

$$(\overline{\Delta x^2})_{korr} = \overline{\Delta x^2} - \overline{\Delta x}^2 \qquad (5)$$

korrigieren, wenn konstante Strömungsgeschwindigkeit vorausgesetzt werden kann. In Gl. (5) bedeutet

$$\overline{\Delta x} = (x_N - x_0)/N$$

bei N + 1 Koordinatenablesungen.

Traten während der Messung merkliche Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit auf, so ist die Meßreihe in Abschnitte zu zerlegen, innerhalb derer die Geschwindigkeit als konstant angenommen werden kann; damit kann die Korrektur für jeden Abschnitt gesondert vorgenommen werden. Aus den korrigierten Werten des mittleren Verschiebungsquadrates wird die Boltzmann-Konstante berechnet, wobei die Meßunsicherheit anzugeben ist.

Fragen

F 1 bis F 3 siehe Text.

F 4 Inwiefern ist ein Galtonsches Brett ein Modell für die Brownsche Bewegung? Geben Sie weitere Modellexperimente zur Brownschen Bewegung an!

F 5 In welche mathematische Funktion geht die Häufigkeitsverteilung in den Auffangfächern des Galtonschen Brettes bei großer Anzahl der Kugeln und der ablenkenden Stöße approximativ über?

F 6 Interpretieren Sie die Stirlingsche Formel und geben Sie ein Anwendungsbeispiel an!

F 7 Wieviel Molekülstöße je Zeit kommen im Mittel auf die Oberfläche eines der im Experiment beobachteten Teilchen?

F 8 Genügen die beobachteten Δx-Werte einer Gauß-Verteilung?

F 9 Welche Beziehung besteht zwischen der Größe $\overline{\Delta x^2}$ und der Diffusionskonstanten?

F 10 Bis zu welchen Zeiten herab ist $\overline{\Delta x^2}$ proportional zu Δt zu erwarten?

F 11 Zeigen Sie, wie k in die statistische Definition der Entropie

eingeht. Erläutern Sie diese Beziehung!

F 12 Zeigen Sie, daß die Brownsche Bewegung die Grenzempfindlichkeit eines Meßinstrumentes bestimmt, bei dem - im extremen Vakuum - ein Spiegel an einem Quarzfaden zur Beobachtung des Ausschlages benutzt wird.

F 13 Wie groß müßte man Δt wählen, um dasselbe mittlere Verschiebungsquadrat wie im Experiment nunmehr an einer Kugel mit $r = 1$ cm zu erhalten? Bei welchen Δt-Werten ergibt sich für $r = 1$ cm und für $r = 5 \cdot 10^{-5}$ cm ein mittleres Verschiebungsquadrat von $(0{,}1\ \text{cm})^2$?

4. Elektrodynamik

4.1. Kennlinien von Widerständen, Widerstandsbestimmung

Der elektrische Widerstand ist neben Stromstärke und Spannung eine fundamentale elektrische Größe, durch deren Kenntnis elektrische Bauteile charakterisiert werden können. Es sollen einige Verfahren zur Bestimmung des elektrischen Widerstandes aufgezeigt und Zusammenhänge zwischen Schaltungsverhalten und Widerstandsänderung untersucht werden.

Aufgaben

1. Messen Sie für eine Metallfadenlampe und für eine Kohlefadenlampe die Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung und tragen Sie die Meßwertpaare unmittelbar in ein I(U)-Diagramm ein! Diskutieren Sie die Kennlinien hinsichtlich des elektrischen Widerstandes in Abhängigkeit von der Stromstärke!
2. Messen Sie für einen Varistor und für eine Z-Diode die Spannung in Abhängigkeit von der Stromstärke und tragen Sie die Meßwertpaare unmittelbar in ein U(I)-Diagramm ein! Diskutieren Sie die Kennlinien hinsichtlich des Widerstandes in Abhängigkeit von der Spannung!
3. Messen Sie die Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung für eine Halbleiterdiode sowohl in Durchlaß- als auch in Sperrichtung, zeichnen Sie unmittelbar nach den Meßwerten die I(U)-Kennlinien und diskutieren Sie diese hinsichtlich der Widerstandsänderung in Abhängigkeit von der Stromstärkeänderung!
4. Nehmen Sie für einen im Ölbad temperierten Thermistor die R,T-Kennlinie mittels Meßbrücke auf und vergleichen Sie damit die R,T-Kennlinie, die Sie aus der Messung der Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung für einen frei in Luft aufgebauten Thermistor gleichen Typs gewonnen haben!

Grundlagen

Der elektrische Widerstand R ist definiert als

$$R := U/I. \qquad (1)$$

Für Metalle (bei unveränderter Temperatur) und bestimmte Legierungen ist dieser Quotient eine Konstante; damit gilt das Ohmsche Gesetz

$$\boxed{U \sim I.} \qquad (2)$$

Die grafische Darstellung der Spannung in Abhängigkeit von der Stromstärke ergibt in diesem Fall eine (durch den Ursprung verlaufende) Gerade, deren Anstieg wegen Gl. (2) gleich dem elektrischen Widerstand ist (Abb. 4.1.(1)). Diese grafische Darstellung heißt "Kennlinie"; im Falle einer Geraden spricht man von einer "linearen Kennlinie" und überträgt diese Bezeichnung auch auf das Bauelement, für dessen U,I-Verhalten diese Kennlinie aufgenommen wurde: "lineares Schaltelement". Ist der Widerstand eines Schaltelementes eine Funktion der Stromstärke, der Quotient U/I = R also keine Konstante, so entsteht als grafische Darstellung eine "nichtlineare Kennlinie" und das Bauelement ist dann ein "nichtlineares Schaltelement" (vgl. Abb. 4.1.(1)).

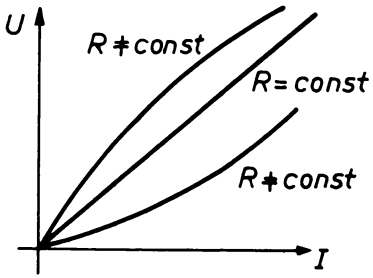


Abb. 4.1.(1) Lineare und nichtlineare Kennlinien

Strenggenommen sind im praktischen Betrieb alle Schaltelemente nichtlinear, da mit der Änderung der Stromstärke eine Änderung der Temperatur und damit wegen der Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes auch eine Änderung des Widerstandes einhergeht. In vielen Fällen (z. B. bei Schichtwiderständen in elektronischen Schaltungen bei ausreichender leistungsmäßiger Dimensionierung) sind diese Widerstandsänderungen allerdings so gering, daß sie vernachlässigt werden können. Solche Schaltelemente wären im strengeren Sinne nichtlinear, praktisch aber linear. Es ist üblich, nur solche Schaltelemente als nichtlinear zu bezeichnen, bei denen der Wider-

stand sich in stärkerem Maß mit der Stromstärke ändert. Die Kennlinien sind in diesen Fällen gekrümmte Linien. Dabei zeigt eine (von oben) konkav gekrümmte U,I-Kennlinie eine Widerstandszunahme mit steigender Stromstärke an, und eine (von oben) konvex gekrümmte Kurve entspricht einer Abnahme des Widerstandes mit zunehmender Stromstärke.

Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes läßt sich für viele Metalle und Metallegierungen innerhalb eines nicht zu breiten Temperaturintervalles durch die lineare Funktion

$$R_\vartheta = R_0(1 + \beta\vartheta) \qquad (3)$$

beschreiben. Der Temperaturkoeffizient ß des elektrischen Widerstandes ist dabei positiv, wenn $R_\vartheta > R_0$ gilt.

F 1 Wie kann die Widerstandszunahme mit steigender Temperatur für Metalle erklärt werden?

Für Halbleiter (z. B. Ge, Si, C) nimmt der Temperaturkoeffizient β negative Werte an, d. h. $R_\vartheta < R_0$.

F 2 Wie kann die Widerstandsabnahme mit steigender Temperatur für Halbleiter erklärt werden?

Ist die U,I-Kennlinie bekannt, so können aus den daraus abgelesenen Wertepaaren für Stromstärke und Spannung die Widerstandswerte berechnet werden. Das entspricht der Widerstandsbestimmung durch Messung von Stromstärke und Spannung. In den meisten Fällen ist das die einzige Möglichkeit der Bestimmung des elektrischen Widerstandes eines Schaltelementes unter Betriebsbedingungen. Dabei muß beachtet werden, daß entweder durch Wahl der geeigneten Schaltung (stromrichtige bzw. spannungsrichtige Schaltung) dafür gesorgt wird, daß die Meßwertverfälschung im Rahmen der Meßunsicherheit (Klasse des Meßinstrumentes) bleibt oder die Meßwerte rechnerisch entsprechend korrigiert werden.

Ist der Widerstand eines Bauelementes nicht von der Stromstärke bzw. Spannung abhängig, sondern von anderen physikalischen Größen wie z. B. der Temperatur, so kann die Widerstandsbestimmung auch durch eine Messung mittels einer Brückenschaltung (Wheatstonesche Brücke) bzw. bei geringeren Genauigkeitsansprüchen auch mittels Ohmmeter erfolgen.

In einer Brückenschaltung fließt dann in der Brückendiagonale CD

(vgl. Abb. 4.1.(2)) kein Strom, wenn die Punkte C und D auf gleichem Potential liegen. Das ist aber genau dann der Fall, wenn in den (an gleicher Spannung liegenden) Parallelzweigen ACB und ADB die Teilwiderstände R_x und R_N im gleichen Verhältnis stehen wie die Teillängen l_1 und l_2 des homogenen Drahtleiters AB. Dann gilt

$$\boxed{R_x = R_N \, l_1/l_2.} \qquad (4)$$

F 3 Leiten Sie diese Meßgleichung ausführlich selbst her!

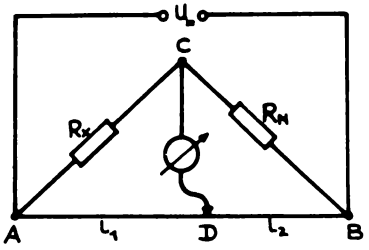


Abb. 4.1.(2) Brückenschaltung

Um mit einer solchen Brückenschaltung hinreichend genau messen zu können, sollte das Abgleichverhältnis $q = l_1/l_2$ nicht zu klein und nicht zu groß sein; praktisch wird gewählt $0{,}3 \leq q \leq 3$.

F 4 Begründen Sie, daß für $l_1 = l_2$ die relative Meßunsicherheit für R_x ein Minimum hat.

In der technischen Ausführung (vgl. Abb. 4.1.(3)) ist der Schleif-

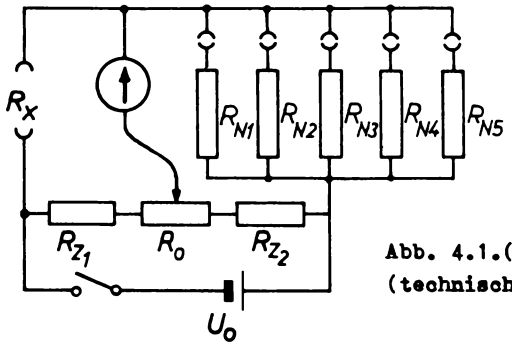


Abb. 4.1.(3) Brückenschaltung (technische Ausführung)

draht als Drehwiderstand ausgebildet, dem davor und dahinter jeweils ein Festwiderstand (R_{Z1} und R_{Z2}) zugeschaltet sind: damit wird erreicht, daß trotz voller Ausnutzung des Abgleichwiderstandes das Widerstandsverhältnis q innerhalb der oben angegebenen Grenzen bleibt. Zur Vereinfachung der Ablesung ist der Abgleichwiderstand in q-Werten skaliert und aus einem Satz von Normalwiderständen R_{Ni} kann jeweils der geeignete Widerstandswert mittels Knebel oder Schalter ausgewählt werden. Als Spannungsquelle dient zumeist eine eingebaute Trockenbatterie.

Ein "Ohmmeter" ist ein mit dem zu messenden Widerstand R_x in Reihe geschalteter Strommesser, dessen Skale in Ohmwerten kalibriert ist. Wird der R_x-Eingang des Ohmmeters - z. B. zum richtigen Einstellen der Betriebsspannung - kurzgeschlossen, so fließt durch das Meßwerk die maximale Stromstärke

$$I_o = U_o/R_i,$$

die dem Skalenendwert entspricht. Da der zusätzliche Widerstand $R_x = 0$ ist, trägt der Skalenendwert den Nullpunkt der Widerstandsskale. Wird dem Meßwerk ein Widerstand $R_x = (n - 1)R_i$ vorgeschaltet, so liegt am Meßwerk nur noch die Spannung $U = U_o n$ an und die Zeigerauslenkung geht auf

$$I = U_o/nR_i = I_o \qquad (5)$$

zurück; dieser Zeigerstellung wird dann der Widerstandswert nR_i auf der Skale zugeordnet.

F 5 Für ein Drehspul-Meßwerk sei $R_i = 100\,\Omega$; bei einer Betriebsspannung $U_o = 100$ mV folgt dann $I_e = 1$ mA. Ordnen Sie den ganzzahligen Skalenteilen einer 10-teiligen Skale die entsprechenden Widerstandswerte für R_x zu!

F 6 Welche Stromstärkewerte sind bei dem Drehspul-Meßwerk von F 5 den R_x-Werten zugeordnet, wenn R_x von $100\,\Omega$ bis $1000\,\Omega$ in $100\,\Omega$ -Schritten verändert wird?

Da es im Interesse der Meßgenauigkeit nur sinnvoll ist, Widerstände in einer mit dem Innenwiderstand R_i des Meßwerkes vergleichbaren Größenordnung zu messen, begrenzt man i. allg. die sinnvolle Skalenteilung auf

$$0{,}1\ R_i \leqq R_x \leqq 10\ R_i.$$

Für größere Widerstände kann durch feste Zuschaltung eines Widerstan-

des R_1 (z. B. $R_1 = 99\ R_i$) zum Meßwerk bei gleichzeitiger Erhöhung der Betriebsspannung (auf $U_o' = 100\ U_o$ im Beispiel) der Meßbereich z. B. um 2 Zehnerpotenzen auf

$$10\ R_i \leqq R_x \leqq 1000\ R_i$$

angehoben werden.

F 7 Beantworten Sie die Fragen F 5 und F 6 für diese Erweiterung, d. h. für $R_i' = 10\ k\Omega$ und $I_o = 1\ mA$ bei $U_o' = 10\ V$.

Zur Durchführung und Auswertung

Zu 1

Aus den Angaben über Leistungsaufnahme bei Nennspannung - beide Werte sind i. allg. auf den Glühlampen angegeben - können Sie den Betriebswiderstand der jeweiligen Glühlampe sowie Maximalspannung und Maximalstromstärke abschätzen. Auf der Grundlage dieser Werte und der charakteristischen Größen der Meßgeräte (Stromaufnahme I_U bei Skalenendwert für den Spannungsmesser - z. T. auch als "Stromdämmung" $1/I_U$ in Ohm pro Volt angegeben - und Spannung am Strompfad für den Strommesser) können Sie entscheiden, ob eine spannungsrichtige oder eine stromrichtige Schaltung günstiger ist. Die Meßgeräte sind dabei so auszuwählen, daß die Maximalwerte jeweils nahe am Skalenendwert abgelesen werden können. (Anstelle der Bestimmung der Betriebswiderstände kann auch eine Bestimmung der Kaltwiderstände mittels Meßbrücke oder Ohmmeter treten - das hat für die Interpretation der Widerstandsänderungen sogar einen Vorteil, da der Kaltwiderstand, d. h. $I = 0$ und $U = 0$, aus der Kennlinie nicht mit Exaktheit bestimmt werden kann!)

Als Spannungsquelle sollte entweder ein Stelltransformator - evtl. mit nachgeschaltetem Gleichrichter - oder ein Spannungsteiler benutzt werden. (Wird mit Wechselspannung gearbeitet, so muß darauf geachtet werden, daß die richtigen Skalenteilungen verwendet werden, die Ablesung auf der Gleichstromskale führt - wegen der Nichtlinearität der Wechselstromskale - zu groben Meßfehlern!)

Um für die unmittelbare grafische Darstellung der Meßwerte einen günstigen Maßstab wählen zu können, verschafft man sich nach Kontrolle der Schaltung durch den Betreuer zunächst einen Überblick über den ungefähren Kennlinienverlauf und die tatsächlichen Maximalwerte.

Erst danach werden geeignete Spannungs- bzw. Stromstärkewerte ausgewählt und die Kennlinien mit etwa 5 bis 9 Meßwerten aufgenommen. Dabei stellt man unter Beobachtung des Meßgerätes der besseren Klasse bzw. der höheren Ablesegenauigkeit an diesem Meßgerät skalenstrichgenau ein und liest auf dem anderen Meßgerät den zugehörigen Meßwert ab - unabhängig davon, welche Größe als Abszisse im Diagramm eingetragen wird. Die gefundenen Meßpunkte werden - unter Benutzung eines geeigneten Kurvenlineals - ausgleichend verbunden.

Um die beiden Kennlinien vergleichend diskutieren zu können, empfiehlt sich die Darstellung beider Kennlinien in einem gemeinschaftlichen Diagramm - evtl. mit unterschiedlichen Maßstäben der Achsenteilungen.

Für einige günstig ausgewählte Punkte der Kennlinien (das müssen keine gemessenen Wertepaare, wohl aber Punkte der ausgeglichenen Kennlinie sein!) berechnet man die Widerstandswerte als Quotienten aus Spannung und Stromstärke und vermerkt diese im Diagramm. Damit können der Diskussion des Widerstandsverlaufes neben einer qualitativen Einschätzung auch konkrete Widerstandswerte zugrunde gelegt werden.

F 8 Wie kann das unterschiedliche Widerstandsverhalten beider Meßobjekte aus den Festkörpereigenschaften erklärt werden?

Zu 2

Als Spannungsquelle muß bei dieser Aufgabe unbedingt ein Spannungsteiler benutzt werden, bei dem die abgreifbare Maximalspannung auf die höchstzulässige Betriebsspannung des Schaltelementes (vgl. Kenndaten) begrenzt ist. Während für den Varistor auch mit Wechselspannung gemessen werden kann, muß die Z-Diode mit Gleichspannung und unter Beachtung der richtigen Polung betrieben werden.

F 9 Wie ist ein Varistor aufgebaut und wie wirkt er?

F 10 Was versteht man unter dem Z-Effekt? Was folgt daraus für die Schaltung einer Z-Diode?

Auch hier ist - analog zu Aufgabe 1 - zunächst zu entscheiden, ob in stromrichtiger oder in spannungsrichtiger Schaltung gearbeitet werden muß und welcher ungefähre Kennlinienverlauf sich ergibt, um wiederum günstige Maßstäbe für die Diagrammachsen festlegen zu können. Die Kennlinie der Z-Diode wird im linearen Netz (Millimeterpapier), die Varistorkennlinie sowohl im linearen als auch im voll

logarithmischen Netz (Koordinatenpapier mit zwei logarithmisch geteilten Achsen) dargestellt. Aus den Kennlinien werden wieder die Widerstandswerte an ausgewählten Punkten der Meßkurve berechnet und mit in das Diagramm eingetragen, um neben einer qualitativen auch eine quantitative Diskussion der Widerstandsabhängigkeit von der Spannung durchführen zu können.

F 11 Welche praktischen Anwendungen ergeben sich für die untersuchten Bauelemente? (Als Zusatzaufgabe kann in Verbindung mit geeignet gewählten ohmschen Widerständen auch das Regelverhalten von Varistor und Z-Diode experimentell untersucht werden.)

Für den Varistor sollen aus der logarithmischen Darstellung der Kennlinie über den Grundzusammenhang $U = C\ I^b$ die Konstanten C und b bestimmt werden.

F 12 Welche Bedeutung haben die Konstanten C und b?

Wird aus Sicherheitsgründen die Z-Diode in Reihe mit einem Schutzwiderstand betrieben, so darf natürlich nur der Spannungsabfall direkt an der Z-Diode gemessen und in der Kennlinie verarbeitet werden. - Anstelle des Widerstandes $R = U/I$ aus den Koordinaten der Kurvenpunkte kann auch der differentielle Widerstand aus dem Anstieg der Kurve in den jeweiligen Punkten bestimmt werden.

F 13 Welcher Unterschied besteht zwischen dem Widerstand R und dem differentiellen Widerstand? Für welche Aussagen ist die Kenntnis des differentiellen Widerstandes von Vorteil?

Zu 3

Hier gelten sinngemäß die Hinweise von Aufgabe 2; es muß mit Gleichspannung gearbeitet werden. Für die Sperr-Kennlinie sollte die Ordinatenachse entsprechend gestreckt werden, um eine sinnvolle Darstellung zu erhalten. Auch hier gilt - wie bei der Z-Diode -, daß die Spannung an einem evtl. vorgeschalteten Schutzwiderstand nicht mit in die Messung einbezogen werden darf. Die Maximalwerte des Durchlaßstromes bzw. der Sperrspannung (vgl. Kenndaten!) dürfen in keinem Fall überschritten werden, weil sonst das Bauelement und das Strommeßgerät zerstört werden können.

F 14 Wie kann das unterschiedliche Verhalten in Sperr- und in Durchlaßrichtung aus dem Verhalten des p-n-Überganges erklärt werden?

F 15 Warum dürfen bei Halbleiter-Bauelementen unabhängig von der Strom- bzw. Spannungsbelastung die Grenzwerte der Bauelemen-

tetemperatur bzw. des Leistungsumsatzes im Bauelement (Verlustleistung) nicht überschritten werden?

Bezüglich der Diskussion des Widerstandsverhaltens gelten analog die Hinweise bei Aufgabe 1 und 2.

Zu 4

Wenn der Thermistor in einem Ölbad temperiert wird, liegt an ihm keine eigene Betriebsspannung an. Damit ist es möglich, den Widerstand bei den jeweils eingestellten Temperaturen (beachten Sie, daß bis zur Einstellung des Temperaturgleichgewichtes einige Zeit verstreichen muß) direkt mit einer Wheatstone-Brücke bzw. einem Ohmmeter zu messen. Steht ein Ohmmeter nicht zur Verfügung, kann auch mit einem Strommesser (analog zu den Fragen 5 bis 7) gearbeitet werden, den Sie sich selbst als Ohmmeter kalibriert haben.

Aus den Meßwerten kann unmittelbar die Widerstands-Temperatur-Kennlinie $R = R(T)$ dargestellt werden. Neben der Darstellung im linearen Netz sollte die Kennlinie auch linear-logarithmisch (T^{-1}-Achse linear geteilt) dargestellt werden. Neben der Diskussion des Widerstandsverhaltens können dann auch die näherungsweise gültige Widerstandsabhängigkeit $R = a_1 \exp(a_2 T^{-1})$ überprüft und die Konstanten a_1 und a_2 bestimmt werden.

F 16 Welche Bedeutung haben die Konstanten a_1 und a_2?

Für die praktische Anwendung interessiert gelegentlich weniger die explizite Temperaturabhängigkeit des Widerstandes, sondern das zeitliche Temperatur- bzw. Widerstandsverhalten bei bestimmter Strombelastung. Diesen Anforderungen entspricht die folgende Untersuchungsmethodik: An die Reihenschaltung aus Thermistor und einem geeigneten ohmschen Widerstand bzw. einer Glühlampe werden zunächst niedrige Spannungen angelegt (bis maximal 50 % der normalen Betriebsspannung lt. Datenblatt) und die zugehörigen Stromstärken sowie Spannungen am Thermistor und Widerstand gemessen. Bei diesen (geringen) Stromstärken erwärmt sich der Thermistor nur unwesentlich gegenüber der Umgebungstemperatur, und man kann den (nahezu) konstanten "Kaltwiderstand" bestimmen. Danach schaltet man sofort auf die normale Betriebsspannung und mißt in konstanten zeitlichen Abständen (etwa alle 30 s) die zugehörigen Spannungs- und Stromstärkewerte. Diese Wertetripel werden in eine Tabelle zusammen mit der Zeit eingetragen. Infolge der jetzt fließenden größeren Stromstärke erwärmt sich der

Thermistor, sein Widerstand und damit ändern sich die Spannungen am Thermistor und Widerstand in Abhängigkeit von der Zeit (und natürlich auch der Umgebungstemperatur). Nach etwa 5 bis 10 Minuten hat der Thermistor seinen Betriebswert erreicht, Stromstärke, Widerstand und Spannungen ändern sich nicht mehr: der Thermistor ist im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung, und der nun erreichte Widerstandswert heißt "Heißwiderstand". Aus den Wertepaaren U_{Th} und I der Tabelle können die Widerstandswerte zu den jeweiligen Zeiten berechnet und als Widerstands-Zeit-Kennlinie grafisch dargestellt werden. In Verbindung mit den Werten aus dem ersten Teil der Meßaufgabe können den Widerstandswerten auch Temperaturwerte zugeordnet werden; damit läßt sich auch eine Temperatur-Zeit-Kennlinie des Thermistors darstellen. Zusätzlich kann auch die Spannung am Widerstand (Lampe) über der Zeit grafisch dargestellt werden.

F 17 Wo und wie können Thermistoren praktisch angewendet werden?

Zusatz: Messungen an Glimmlampe bzw. Niederdruck-Gasentladungslampen und deren Auswertung hinsichtlich I = I(U) und R = R(I); Regel- und Meßaufgaben mittels Varistor, Z-Diode und Thermistor (vgl. auch "Elektrische Messung nichtelektrischer Größen").

Fragen

F 1 bis F 17 siehe Text.

4.2. Drehspul-Spiegelgalvanometer

Spiegelgalvanometer dienen zur Messung sehr geringer Ströme bzw. Spannungen. Sie können durch entsprechende Schaltungen vielseitig zur Messung anderer physikalischer Größen eingesetzt werden. Beispiele dafür sind die Bestimmung der Kraftflußdichte zwischen den Polschuhen eines Magneten und daraus die Aufnahme der Hysteresiskurve, die Messung der Öffnungszeit eines Fotoverschlusses sowie anderer, auch recht kurzer Zeiten, die Bestimmung des Widerstandes von Stab- oder Drahtproben und daraus des spezifischen Widerstandes des Probenmaterials. An einigen Beispielen soll diese vielseitige Einsetzbarkeit aufgezeigt werden. Darüber hinaus ist das Spiegelgalvanometer geeignet, die Wirkungsweise eines Drehspulinstrumentes genauer zu untersuchen und zu verstehen. Da Drehspulinstrumente die Mehrzahl der elektrischen Meßinstrumente ausmachen, ist das Verständnis dieses Prinzips von großer Bedeutung. Schließlich bietet sich im Spiegelgalvanometer eine sehr gute Möglichkeit, in die theoretischen Zusammenhänge bei den verschiedenen Schwingungsformen anhand experimenteller Untersuchungen tiefer einzudringen und das Verständnis dieser Zusammenhänge in der Praxis zu überprüfen. Je nach der Auswahl der Meßaufgaben läßt sich die eine oder die andere Seite stärker betonen und zu einem anspruchsvolleren Experiment zusammenfassen.

Aufgaben

1. Nach der Bestimmung der Eigenschwingungsdauer T_0 sollen durch Wahl verschiedener Außenwiderstände R_a Schwingfall, Kriechfall und aperiodischer Grenzfall für das Meßsystem eines Spiegelgalvanometers realisiert werden. Man bestimme außerdem den äußeren Grenzwiderstand und untersuche die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T sowie des logarithmischen Dekrements δ vom Außenwiderstand.
2. Bestimmung des Innenwiderstandes des Galvanometers und der Strom- und Spannungsempfindlichkeit für verschiedene Auslenkungen des Lichtzeigers.
3. Aus den Meßergebnissen der Aufgaben 1 und 2 sind die Galvanometerkonstanten G, D, J und ϱ zu berechnen.
4. Eichung des Spiegelgalvanometers als ballistisches Galvanometer zur Bestimmung der Kapazität eines Kondensators (bzw. zur Messung der magnetischen Induktion B in einer Spule in Abhängigkeit von der Erregerstromstärke).
5. Messung der Schaltzeit eines Relais, indem das Spiegelgalvanometer für den Kriechfall benutzt wird.

Grundlagen

Ein Spiegelgalvanometer ist ein empfindliches Meßgerät zur Bestimmung sehr geringer Stromstärken ($I \leqq 10^{-6}$A) bzw. Spannungen ($U \leqq 10^{-3}$V). Das Meßwerk arbeitet i. allg. nach dem Drehspul-Prinzip, wobei die Drehspule in einer Spannband-Aufhängung gehaltert wird. Anstelle des Zeigers bei einfachen Drehspul-Meßwerken ist ein kleiner Spiegel vorhanden, und die Anzeige geschieht mittels Lichtzeigers auf einer im Abstand r angebrachten Skale. (Üblich sind Abstände von 0,25 m bis zu einigen Metern.)

Durch eine kleine Glühlampe wird ein Spalt bzw. eine Anzeigemarke ausgeleuchtet, deren Bild durch eine Sammellinse S und nach Reflexion am Galvanometerspiegel auf der meist ebenen Skale entsteht (Abb. 4. 2.(1)).

Wenn die Spule zusammen mit dem Spiegel um den Winkel φ gedreht wird, dann erfährt der reflektierte Strahl eine Auslenkung um den Winkel 2φ; das entspricht auf der Skale einer Lichtmarken-Verschiebung

$$a = \overline{OM'} = r \tan 2\varphi \,. \qquad (1)$$

Auf einer Kreisbogen-Skale mit dem Radius r würde man die Auslenkung

$$b = \overset{\frown}{OM} = 2r\varphi \qquad (2)$$

ablesen. Der Unterschied beider Ablesungen, $\Delta = a - b$, kann unter Be-

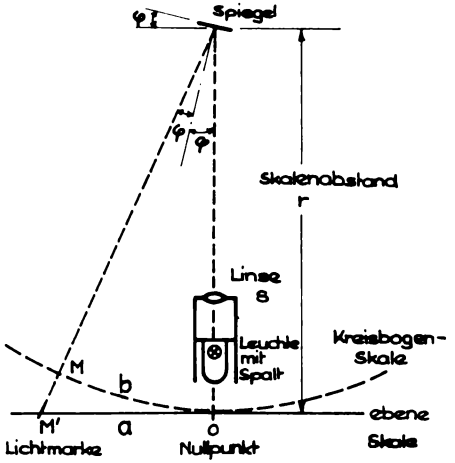


Abb. 4.2.(1) Spiegelzeiger beim Galvanometer. Reduktion auf den Kreisbogen

nutzung von Gl. (1) und Gl. (2) geschrieben werden als

$$\Delta = a - r \arctan \frac{a}{r} . \qquad (3)$$

Für $a/r \ll 1$ ist $\arctan(a/r) \approx a/r$ und damit $\Delta = 0$.

Für geringe Drehwinkel φ der Galvanometerspule bringt es also keinen erheblichen Unterschied, ob die Ablesung auf einer ebenen oder einer Kreisbogen-Skale erfolgt. Bei größeren Auslenkungen ist jedoch eine Kreisbogenskale oder eine Korrektur der (ebenen) Ablesung, die Reduktion auf den Bogen, erforderlich, für die gilt

$$b = a - \Delta = r \arctan \frac{a}{r} . \qquad (4)$$

Das Drehspul-Meßwerk besteht aus einem Permanentmagneten, zwischen dessen Polschuhen ein zylindrischer Weicheisenkern angebracht ist. In dem entstehenden Ringspalt entsteht dadurch ein radialsymmetrisches (homogenes) Feld mit der magnetischen Induktion B, das die Windungsfläche der Drehspule (n Windungen, Länge l, Breite d) unabhängig vom Drehwinkel der Auslenkung stets senkrecht durchsetzt.

Fließt durch die Spule ein Strom der Stärke I, so wirkt auf die Spule das Drehmoment

$$M_{el} = n B I l d. \qquad (5)$$

Darin ist n l d B =: G = const eine Gerätekonstante. Es gilt also

$$M_{el} = G\,I; \tag{6}$$

G wird dynamische Galvanometerkonstante genannt.

Diesem durch elektrische Wirkungen hervorgerufenen Drehmoment wirkt ein vom Torsionsband der Aufhängung herrührendes mechanisches Drehmoment

$$M_m = -D\varphi \tag{7}$$

entgegen. (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt.) Für den Gleichgewichtszustand folgt aus

$$M_m + M_{el} = 0$$

für den Drehwinkel

$$\boxed{\varphi = \frac{G}{D}\,I:} \tag{8}$$

Der Drehwinkel der Galvanometerspule ist der Stromstärke proportional.

Der Quotient

$$E_I := \frac{b}{I\,r} = \frac{2\varphi}{I} = \frac{2\,G}{D} \tag{9}$$

ist als Stromempfindlichkeit definiert. Sie ist wie G und D eine Galvanometerkonstante.

Ist der Widerstand R_i der Galvanometerspule bekannt, so können die Auslenkungen der Lichtmarke auch als Spannungswerte angegeben werden:

$$U = R_i I = R_i \frac{b}{r E_I}\,, \tag{10}$$

wobei

$$\frac{E_I}{R_i} = E_U = \frac{b}{Ur} \tag{11}$$

die Spannungsempfindlichkeit des Galvanometers definiert.

Die Bewegungsarten eines Drehspul-Spiegelgalvanometers

Betrachtet man das Meßsystem des Drehspulgalvanometers zunächst nur

vom mechanischen Standpunkt, so stellt es ein schwingungsfähiges System mit dem Massenträgheitsmoment J und dem von seiner Aufhängung hervorgerufenen Rückstellmoment $M_m = - D\varphi$ dar, das durch das von einem äußeren Strom I erzeugte ("elektrische") Drehmoment $M_{el} = G\,I$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird. Zusätzlich tritt noch ein der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ proportionales Dämpfungsmoment (von der Luftreibung der sich bewegenden Spule hervorgerufen) auf:

$$M_R = - \varrho \dot{\varphi} \,.$$

Darin ist ϱ die Dämpfungskonstante.

Bei der Bewegung der Drehspule im Luftspalt zwischen den Magnetpolschuhen und dem Weicheisenkern wirkt das Meßsystem außerdem wie ein Generator, und gemäß dem Induktionsgesetz wird bei n Windungen der Spule mit der Fläche dl in dieser die Spannung

$$U_{ind} = - n\,d\,l\,B\dot{\varphi} = - G\dot{\varphi}$$

induziert. Wird die Spule mit dem Innenwiderstand R_i durch einen Außenwiderstand R_a überbrückt, so fließt der Induktionsstrom

$$I_{ind} = - \frac{G}{R_i + R_a} \dot{\varphi} \,,$$

der ein weiteres dämpfendes Drehmoment

$$M_D = - \frac{G^2}{R_i + R_a} \dot{\varphi}$$

zur Folge hat, so daß das Grundgesetz der Drehbewegung lautet

$$\boxed{J\ddot{\varphi} + \left(\varrho + \frac{G^2}{R_i + R_a}\right)\dot{\varphi} + D\varphi = GI.} \qquad (12)$$

Das ist die Differentialgleichung einer erzwungenen gedämpften Schwingung. Durch Einschalten eines Gleichstromes I_{-} wird das Spulensystem zu einer gedämpften Schwingung angeregt und kommt schließlich bei einem Winkel $\varphi_\infty = GI_{-}/D$ zur Ruhe.

Das Dämpfungsglied besteht aus zwei Anteilen: dem mechanisch bedingten Anteil $M_R = - \varrho\dot{\varphi}$ und dem von R_a beeinflußten elektrodynamisch bedingten Drehmoment $M_D = - G^2\dot{\varphi}/(R_i + R_a)$, das für $R_a = 0$ (äußerer Kurzschluß der Galvanometer-Anschlußklemmen) seinen Extremwert erreicht.

Der Einschwingungsvorgang bei Einschalten eines Gleichstromes I_- läßt sich günstig beschreiben, wenn man für den momentanen Auslenkwinkel φ schreibt

$$\varphi = \psi + G\, I_-/D.$$

Das drückt nichts anderes aus als die Tatsache, daß der Einschwingungsvorgang in die Endlage $\varphi_\infty = G\, I_-/D$ (also $\psi_\infty = 0$) in gleicher Weise verläuft wie der in die Ruhelage $\varphi = 0$ bei Abschalten des Stromes (also $I = 0$). Gl. (12) lautet dann mit

$$\frac{1}{J}\left(\varrho + \frac{G^2}{R_i + R_a}\right) =: 2\beta \tag{13}$$

und

$$\frac{D}{J} =: \omega_0^2 \tag{14}$$

$$\ddot{\psi} + 2\beta\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0.$$

Aus der Lösung der Differentialgleichung ergibt sich für das Schwingungsverhalten der Drehspule: Kriechfall für $R_a = 0$, Schwingfall für $R_a > R_{gr}$ und aperiodischer Grenzfall für $R_a = R_{gr}$. Aus der Bedingung $\beta = \omega_0$ folgt

$$\frac{1}{2J}\left(\varrho + \frac{G^2}{R_i + R_{gr}}\right) = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

und damit für den äußeren Grenzwiderstand

$$R_{gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{JD} - \varrho} - R_i. \tag{15}$$

Er ist für jedes Spiegelgalvanometer eine charakteristische Konstante, die sich durch die fünf (elementaren) Galvanometerkonstanten G, J, D, R_i und ϱ bestimmen läßt.

Für die Bestimmung der Einstellzeit des Galvanometersystems auf die Ruhelage φ_∞ muß Gl. (12) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ gelöst werden. Es ergibt sich

$$\varphi(t) = \frac{G}{D} I_-\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cosh\sqrt{\beta^2 - D/J}\,t + \frac{1}{\sqrt{1 - D/\beta^2 J}}\sinh\sqrt{\beta^2 - D/J}\,t\right)\right].$$

Für $\beta^2 = D/J$ erreicht die Einstellzeit ein Minimum. Dieser Fall wird als aperiodischer Grenzfall bezeichnet.

Ballistisches Galvanometer

Neben der Messung von Strom und Spannung kann ein Spiegelgalvanometer auch zur Messung von elektrischen Ladungsmengen Q bzw. Stromstößen $\int I\,dt$ benutzt werden, wenn die zeitliche Dauer der Entladung durch die Galvanometerspule und damit die Dauer des Stromstoßes klein ist gegenüber der Schwingungsdauer des Galvanometers. Damit werden zwar durchaus große Werte für $\ddot{\varphi}$ erreicht; nach dem Ende des Stromflusses sind aber $\dot{\varphi}$ und φ nur wenig von Null verschieden. In der Schwingungsgleichung (12) wird dann die Größe der linken Seite wesentlich durch das erste Glied bestimmt, und die beiden anderen Glieder können vernachlässigt werden.

Wirkt auf das schwingungsfähige System des Galvanometers ein Stromstoß

$$\int_{-\Delta t}^{0} I\,dt = Q,$$

so wird das System dadurch ausgelenkt und hat zur Zeit $t = 0$ die von Null verschiedene Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0.$$

Der elektrisch erzeugte Drehimpuls ist

$$\int M_{el}\,dt = G\int I\,dt,$$

der andererseits mit der erzielten Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ verknüpft ist gemäß

$$\int M_{el}\,dt = J\dot{\varphi}_0.$$

Damit besteht zwischen der Ladungsmenge Q und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ die Beziehung

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{GQ}{J}.$$

Da außer dem Anfangsdrehimpuls ($\sim$ Stromstoß) kein erzwingendes Drehmoment auf das schwingungsfähige System wirkt, tritt die Schwingungs-

differentialgleichung (12) für $t > 0$ in der homogenen Form

$$J\ddot{\varphi} + 2\beta J\dot{\varphi} + D\varphi = 0$$

auf.

Mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ folgt unter der Voraussetzung, daß es sich um ein Galvanometer mit geringer Dämpfung ($\beta \ll \sqrt{D/J}$) im Schwingfall handelt, für die Maximalauslenkung die Näherung

$$\varphi_m = \frac{GQ}{\sqrt{JD}} \left(1 - \frac{\pi}{2} \beta \sqrt{\frac{J}{D}}\right). \tag{16}$$

Aus Gl. (16) ist ablesbar, daß bei konstanter Dämpfung die maximale Stoßauslenkung φ_m der Ladungsmenge Q proportional ist, die während der Zeit t des Stromstoßes durch die Spule fließt.

In Analogie zu Gl. (9) läßt sich eine ballistische Empfindlichkeit E_b des Galvanometers definieren:

$$E_b := \frac{2\varphi_m}{Q} = \frac{b_m}{Qr} \approx \frac{a_m}{Qr}. \tag{17}$$

Sie ist außer vom Aufbau auch von der Dämpfung des Spiegelgalvanometers abhängig.

Kriechgalvanometer

Die Voraussetzung $\beta^2 \gg D/J$ führt zu einer dritten Einsatzmöglichkeit des Spiegelgalvanometers, dem Kriechgalvanometer. Erfüllung dieser Voraussetzung heißt, daß die Dämpfung des schwingenden Systems sehr groß sein muß, was nach Gl. (13) einen sehr geringen Innenwiderstand R_i bedeutet. Wenn wir in Gl. (12) links die Drehmomente $J\ddot{\varphi}$ und $D\varphi$ gegenüber dem zweiten Summanden vernachlässigen, vereinfacht sich diese Gleichung mit (13) zu

$$2\beta J\dot{\varphi} = GI$$

mit der Lösung

$$\varphi(t) = \frac{G}{2\beta J} \int_0^t I \, dt.$$

Bei konstanter Klemmenspannung $U_0 = \text{const}$ ist der Drehwinkel φ der Zeitdauer t direkt proportional, während der die Spannung an-

liegt. Auch hier läßt sich wieder in Analogie zu Gl. (9) bzw. (17) eine Kriechempfindlichkeit E_k des Galvanometers definieren:

$$E_k := \frac{2\varphi}{U_0 t} = \frac{b}{U_0 t r} \,. \tag{18}$$

Nach Abschalten der Spannung "kriecht" die Spule gemäß

$$\varphi = \varphi_m \exp\left(-\frac{Dt}{2\beta J}\right)$$

in die Ausgangslage (Nullage) zurück.

Zur Durchführung und Auswertung

Bei allen Schaltungen mit dem Spiegelgalvanometer darf der Spannungsanschluß erst erfolgen, wenn der Betreuer dazu ausdrücklich die Erlaubnis erteilt hat, da das Gerät wegen seiner hohen Empfindlichkeit sehr leicht durch Überlastung zerstört werden kann! Die Eingangsbuchsen des Galvanometers sind grundsätzlich durch einen Kurzschlußbügel zu überbrücken; dieser Kurzschluß ist nur für die Dauer der unmittelbaren Messungen zu öffnen!

Zu Aufgabe 1

Bleiben die Anschlußklemmen des Galvanometers frei, ist also der Außenwiderstand $R_a = \infty$, so wird die Schwingung der Galvanometerspule fast ausschließlich durch die Luftdämpfung ϱ gebremst. Anstelle der allgemeinen Gl. (12) tritt dann für das Zurückschwingen der stromlosen Spule die homogene Differentialgleichung

$$J\ddot{\varphi} + \varrho\dot{\varphi} + D\varphi = 0.$$

Die Schwingungsdauer T und das logarithmische Dekrement δ lassen sich für eine bestimmte (etwa konstant zu haltende) Anfangsauslenkung φ_0 bzw. a_0 mit einer Schaltung gemäß Abb. 4.2.(2) bestimmen. Die am Spannungsteiler abgegriffene Spannung wird durch die Widerstände R_1 und R_2 noch einmal geteilt und die niedrigere Spannung dem Galvanometer über einen veränderlichen Widerstand R_3 zugeführt. Durch Verändern des Spannungsteilerabgriffes stellt man den Lichtzeiger jeweils auf den gleichen Wert (z. B. a_0 = 100 mm) ein. Wird der Strompfad durch Öffnen des Schalters S1 unterbrochen, so wird die stromlos gewordene Spule bei offenem Galvanometeranschluß (also $R_a = \infty$) zur Ruhelage zurückschwingen. Man bestimmt mittels Stoppuhr die Zei-

ten für Umkehrpunkt rechts - Nulldurchgang - Umkehrpunkt links - Nulldurchgang usw. für mehrere aufeinanderfolgende Schwingungen und daraus die Eigenschwingungsdauer T_0 des Spiegelgalvanometers.

Bei einem äußeren Widerstand R_a endlicher Größe wird die Dämpfung des schwingenden Systems zunehmen, wenn R_a abnimmt. Die Auslenkung wird auf den gleichen Anfangswert a_0 wie oben eingestellt, nur geschieht das Zurückschwingen in die Ruhelage jetzt durch das Öffnen des Schalters S2. Damit bleiben die Galvanometeranschlüsse durch den Widerstand $R_a = R_1 + R_3$, den man zunächst möglichst groß wählt, abgeschlossen. Die Messungen erfolgen in gleicher Weise wie zuvor, und man bestimmt die Schwingungsdauern für verschiedene Werte von R_a. Die protokollierten Meßwerte für die gemessenen Durchgangszeiten und die zu den jeweiligen Umkehrpunkten gehörenden Auslenkungen werden in einem Diagramm $a = a(t)$ mit dem Parameter R_a grafisch dargestellt. (Hat man den Abstand r zwischen Schirm (Skale) und Spiegel gemessen, können die Auslenkungen auch als Drehwinkel $\varphi = \frac{1}{2} \arctan (a/r)$ angegeben werden. Die logarithmischen Dekremente δ berechnet man aus den Quotienten der aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte einer Schwingung. Sie werden als Funktion des Widerstandes R_a ebenfalls grafisch dargestellt.

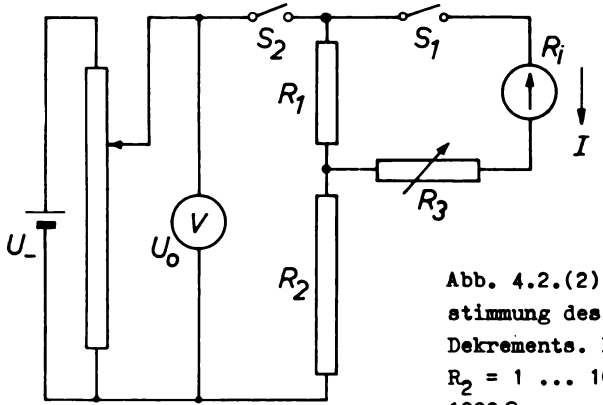


Abb. 4.2.(2) Schaltung zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements. $R_1 = 0{,}1 \ldots 1\Omega$, $R_2 = 1 \ldots 10\ k\Omega$, $R_3 = 1 \ldots 1000\,\Omega$

Mit zunehmender Dämpfung kommt das System zunächst in immer kürzerer Zeit und nach weniger Schwingungsperioden zur Ruhe, bis von

einem kritischen Wert $R_a = R_{gr}$ ab die Ruhelage mit dem ersten Nulldurchgang erreicht bzw. überhaupt nur annähernd, kriechend erreicht wird. Dieser kritische Widerstand R_{gr} ist der äußere Grenzwiderstand, der bestimmt werden soll. Da die Spule hier die Nullage erstmalig nicht mehr überschwingt, spricht man vom "aperiodischen Grenzfall"; bei weiterer Verringerung des Außenwiderstandes ist dann ein Erreichen der Nullage erst nach längerer Zeit zu beobachten: Kriechfall.

Der aperiodische Grenzfall ist für die meßtechnische Anwendung des Galvanometers - und allgemein jedes gedämpft schwingenden Anzeigesystems - wichtig, weil dann die Einstellzeit ein Minimum wird. (Es sei daran erinnert, daß das Einschwingen des stromdurchflossenen Systems in seine stromstärkeabhängige Endlage prinzipiell in gleicher Weise erfolgt wie das Zurückschwingen des stromlosen Systems in die Ruhelage. Wegen der einfacheren Beobachtbarkeit werden die Untersuchungen des unterschiedlichen Schwingungsverhaltens aber bevorzugt am stromlosen System durchgeführt). In der praktischen Meßtechnik weicht man geringfügig vom Grenzfall in Richtung Schwingfall ab: das System schwingt dann zwar minimal über seine Endlage hinaus und geht erst dann in diese zurück, aber der Beobachter erhält dadurch die Sicherheit, daß die Endlage wirklich genau und schnell erreicht wird und der Zeiger nicht erst allmählich in diese Endlage kriecht.

Die grafische Darstellung $\delta = \delta(R_a)$ bietet ebenfalls eine Möglichkeit zur Bestimmung des Grenzwiderstandes: für abnehmende Werte von R_a geht die Kurve asymptotisch in eine Parallele zur Ordinatenachse über; der Abstand dieser Parallelen von der Achse ist gerade R_{gr}, weil für diesen Fall (erstmalig) $\delta = \infty$ gilt. Für wachsendes R_a zeigt die Kurve ebenfalls asymptotisches Verhalten: sie mündet in eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand $\delta(\infty)$, gibt also das logarithmische Dekrement für den Fall reiner Luftdämpfung des Spulensystems an.

Zu Aufgabe 2

Eine sehr einfache Methode zur Bestimmung des Innenwiderstandes R_i (unter Benutzung der Schaltung gemäß Abb. 4.2.(2)) besteht darin, daß zunächst mit $R_Z = 0$ eine bestimmte Auslenkung a_i eingestellt und danach R_Z so weit vergrößert wird, daß der Wert der Auslenkung gerade $a_i/2$ beträgt. Unter der stets erfüllbaren Voraussetzung, daß $R_1 \ll R_i$ und $R_1 \ll R_2$ gelten, ist die Spannung U_1 an R_1 praktisch unabhängig

von dem R_1 parallelgeschalteten Widerstand R_i bzw. $R_i + R_3$, und die Reihenschaltung von R_1 und R_2 kann als unbelasteter Spannungsteiler behandelt werden.

F 1 Leiten Sie diesen Zusammenhang her!

Da die an Galvanometer und Widerstand R_3 anliegende Spannung konstant ist, stellt sich die halbe Auslenkung - Konstanz der Stromempfindlichkeit vorausgesetzt - bei verdoppeltem Widerstand ein, denn dann ist $I' \approx I/2$. Aus $R_i + R_3 = 2R_i$ folgt aber $R_3 = R_i$.

Will man zugleich prüfen, ob die Stromempfindlichkeit des Galvanometers im benutzten Auslenkungsbereich konstant ist, so betrachtet man die Stromverzweigung über R_1 und den Galvanometerzweig mit R_i+R_3. Es gilt

$$I_1 = (R_i + R_3)I/R_1$$

und damit

$$I_2 = I + I_1 = I\,\frac{R_1 + R_i + R_3}{R_1}$$

und wegen $I_2 \approx U_0/R_2$ auch

$$I = U_0\,\frac{R_1}{R_2}\,\frac{R_1}{R_i + R_1 + R_3}\,.$$

Die diesem Strom entsprechende Auslenkung der Lichtmarke ist wegen Gl. (9)

$$a \approx b = rE_I\,U_0\,\frac{R_1^2}{R_2}\,\frac{1}{R_i + R_1 + R_3}\,. \qquad (19)$$

Diese Gleichung enthält außer E_I und R_i nur bekannte Größen, kann also für zwei verschiedene Wertepaare R_3 und a als Gleichungssystem zur Bestimmung von E_I und R_i benutzt werden. Stellt man 1/a als Funktion von R_3 grafisch dar, kann mit der Linearität dieser Abhängigkeit die Konstanz von E_I nachgewiesen werden.

Die Spannungsempfindlichkeit $E_U = E_I/R_i$ wird aus den Mittelwerten für R_i und E_i berechnet.

Zu Aufgabe 3

In Aufgabe 1 wurden T und δ für reine Luftdämpfung und auch für von

Null verschiedene Abschlußwiderstände bestimmt. Aus diesen Ergebnissen können mit $\beta = \delta/T$ die Abklingkonstanten für die verschiedenen Werte von R_3 berechnet werden, die ihrerseits über

$$\beta_\infty := \frac{\varrho}{2J} \qquad (\text{für } R_a = \infty)$$

bzw.

$$\beta = \frac{1}{2J}\left(\varrho + \frac{G^2}{R_i + R_a}\right) \qquad (\text{für } R_a = R_1 + R_3 \neq \infty)$$

verknüpft werden können, woraus folgt

$$(\beta - \beta_\infty)(R_i + R_a) = \frac{G^2}{2J} =: K. \tag{20}$$

Berücksichtigt man ferner, daß

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ mit } T_0 = \frac{T}{\sqrt{1 + \delta^2/4\pi^2}}$$

aus den Meßergebnissen berechnet werden kann und $D = 2G/E_I$ (9) gilt, kann man über $J = D/\omega_0^2$ (14) auf $J = 2G/E_I\omega_0^2$ schließen. Einsetzen in Gl. (20) liefert

$$G = \frac{4(\beta - \beta_\infty)(R_i + R_1 + R_3)}{E_I\omega_0^2},$$

womit G berechnet werden kann. Es bereitet danach keine Schwierigkeiten,

$$D = \frac{2G}{E_I}, \quad J = \frac{D}{\omega_0^2} \quad \text{und} \quad \varrho = 2J\beta_\infty$$

nacheinander zu berechnen und zur Kontrolle des experimentellen Ergebnisses den äußeren Grenzwiderstand gemäß Gl. (15) auch rechnerisch zu bestimmen.

Praktisch geht man bei der Ausrechnung so vor, daß man für alle gewählten Werte von R_3 aus den bereits in Aufgabe 1 bestimmten Werten für δ_i und T_i zunächst die verschiedenen β_i und aus den möglichen

Kombinationen je zweier β_i die K-Werte gemäß (20) berechnet. Mit dem Mittelwert für K berechnet man dann G, D, J und ρ .

Zu Aufgabe 4

In einer Schaltung gemäß Abb. 4.2.(3) wird zunächst als Kondensator C ein Meßkondensator mit genau bekannter Kapazität C_o benutzt, um für verschiedene, am Spannungsteiler eingestellte Spannungen (von niedrigen Spannungen, z. B. 50 mV, ausgehend) die zugehörigen maximalen Auslenkungen a_m zu messen. Der Umschalter (z. B. Morsetaste) ermöglicht es, den Kondensator in der einen Schalterstellung über einen Ladewiderstand $R_2 \approx 10\ k\Omega$ aufzuladen und in der anderen Schalterstellung über das Galvanometer zu entladen.

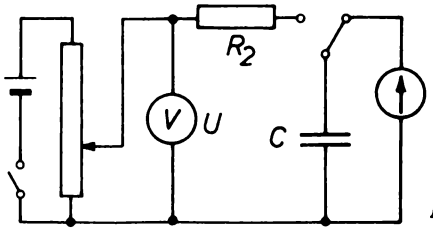


Abb. 4.2.(3) Ballistische Methode zur Kapazitätsbestimmung

Achtung! Nach dem Einstellen der jeweiligen Meßspannung U am Spannungsteiler sollte der Kondensator bei kurzgeschlossenem Galvanometer - also ohne Messung - entladen werden! Erst bei unveränderter Spannungsteilerstellung kann gewährleistet werden, daß die Ladungsmenge bei jeder Wiederholung konstant bleibt, und nur dann sollte bei angeschlossenem Galvanometer gemessen werden.

Es muß bei mindestens fünf verschiedenen Spannungen gemessen werden, wobei die Auslenkungen über den ablesbaren Bereich (i. allg. 100 Skt) möglichst gleichmäßig verteilt sein sollen. Zu jedem Spannungswert sind die Messungen mehrfach zu wiederholen und die Mittelwerte zu bestimmen. In einer grafischen Darstellung $a_m = a_m(Q)$ mit $Q = C_o U$ werden die Meßwerte eingetragen. Aus dem Anstieg $a_m/Q = rE_b$ (17) der Ausgleichsgeraden wird E_b berechnet.

Ist so die ballistische Empfindlichkeit des Galvanometers bestimmt

worden, wird C_0 durch einen zu messenden Kondensator C ersetzt. In gleicher Weise wie bei den Eichmessungen werden für verschiedene, geeignet zu wählende Spannungen die Meßwertpaare a_m und U bestimmt und tabellarisch sowie grafisch dargestellt. Aus der bekannten Spannung U und dem zuvor bestimmten E_b kann C rechnerisch und grafisch bestimmt werden. Die errechneten Einzelwerte werden zu einem Mittelwert zusammengefaßt und mit dem grafisch bestimmten Wert vergleichend diskutiert.

Wurden zwei oder mehr unbekannte Kapazitäten gemessen, so sollten zur Überprüfung der Meßergebnisse auch C-Kombinationen (Reihen- bzw. Parallelschaltungen) gemessen und die dabei bestimmten Werte mit jenen verglichen werden, die sich aus den Einzelwerten gemäß den Gesetzen für Reihen- bzw. Parallelschaltung errechnen lassen.

Zu Aufgabe 5

Um mit dem gleichen Galvanometer auch diese Aufgabe durchführen zu können, wird die Bedingung $\beta^2 \gg D/J$ gemäß Gl. (13) durch die Wahl eines sehr kleinen Außenwiderstandes $R_a \approx 1\Omega$ erfüllt. In Abb. 4.2.(4) ist die Schaltung für ein Relais mit Ruhekontakt vorgeschlagen. Mit R_{2eich} wird mehrfach mittels Stoppuhr die Zeit für eine Auslenkung a

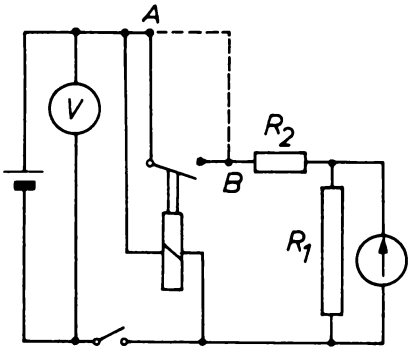


Abb. 4.2.(4) Messung der Schaltzeit eines Relais. $R_1 = 1\Omega$, $R_{2eich} = 100\ k\Omega$, $R_{2meß} = 1\ k\Omega$

bestimmt und daraus der Mittelwert berechnet. Der Ruhekontakt wird dabei durch einen Kurzschlußbügel zwischen den Punkten A und B überbrückt. Aus dem Mittelwert berechnet man gemäß Gl. (18) den Mittelwert der Kriechempfindlichkeit des Galvanometers. Danach verändert man R_2 auf $R_{2meß}$, entfernt den Kurzschlußbügel zwischen A und B und wiederholt die Messungen der maximalen Auslenkung a_m mehrfach. Die

am Galvanometer anliegende Spannung muß aus der Spannungsmesserablesung (Betriebsspannung) und dem Spannungsteilerverhältnis R_1/R_2 berechnet werden. Durch Umstellen der Gl. (18) kann die Anzugszeit des Relais als Mittelwert bestimmt werden.

Fragen

F 1 siehe Text.

F 2 Weshalb arbeitet man mit dem Galvanometer besser ein wenig im periodischen Bereich anstatt genau im aperiodischen Grenzfall?

4.3. Messungen mit dem Elektronenstrahloszillografen

Der Elektronenstrahloszillograf ist ein vielseitiges Meßgerät. Mit ihm lassen sich u. a. Spannungen und Phasenbeziehungen messen und Frequenzvergleiche und Analysen periodischer Vorgänge durchführen. Der Informationsgehalt des Schirmbildes ist meist höher als der spezieller Meßinstrumente und kann einem größeren Zuschauerkreis zugänglich gemacht werden.

Im Experiment sollen einige Eigenschaften des Elektronenstrahloszillografen untersucht und Meßmethoden angewendet werden.

Aufgaben

1. Der Ablenkfaktor (in x- und y-Richtung) ist mit Hilfe einer harmonischen Wechselspannung zu bestimmen, um damit den Oszillografen als Spannungsmesser zu kalibrieren.
2. Die Strom-Spannungs-Kennlinien eines passiven Zweipols (ohmscher Widerstand, Thermistor, Varistor, Halbleiterdiode) sind oszillografisch aufzunehmen.
3. Die unbekannte Frequenz einer Wechselspannung ist nach der Methode des Frequenzvergleichs zu ermitteln.
4. Für die Reihenschaltung aus einer Kapazität C (oder Induktivität L) und eines ohmschen Widerstandes R ist der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung durch Auswertung der Phasenellipse zu bestimmen.
5. Das logarithmische Dekrement einer gedämpften elektrischen Schwingung ist oszillografisch zu finden.

Grundlagen

Funktion des Elektronenstrahloszillografen

Der Elektronenstrahloszillograf besteht aus den Funktionsblöcken Netzgerät, y-Verstärker, x-Verstärker, Kippgenerator, Synchronisationsteil und Elektronenstrahlröhre (Abb. 4.3.(1)). Hauptbestandteil jedes Elektronenstrahloszillografen ist die Elektronenstrahlröhre.

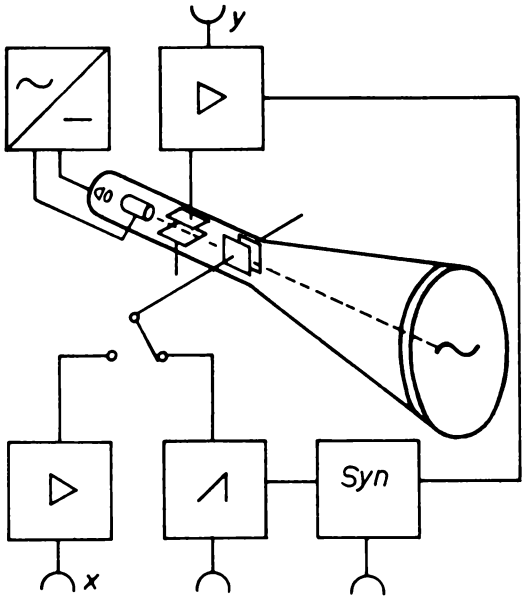


Abb. 4.3.(1) Blockschaltbild eines Elektronenstrahloszillografen

Diese hoch evakuierte Spezialröhre besitzt außer der (beheizten) Katode und der Anode noch weitere Elektroden, die als Wehneltzylinder, Fokussierungselektroden und Ablenkplattenpaare bezeichnet werden.

F 1 Welche Funktion hat der Wehnelt-Zylinder?

Der Wehneltzylinder hat gegenüber der Katode ein negatives Potential, mit dem sich der Anodenstrom steuern läßt. Infolge der besonderen Form der Fokussierelektroden bewirkt das zwischen ihnen herrschende elektrische Feld eine Bündelung des Elektronenstrahls. Durch passende Wahl der Spannung zwischen Katode und Fokussierungselektroden läßt sich die Brennweite dieser elektronenoptischen Anordnung verändern; es kann damit erreicht werden, daß der zu einem engen Bündel zusammengeschnürte Elektronenstrahl auf dem Innenbelag des Bildschirmes einen Leuchtfleck mit kleinem Durchmesser erzeugt (Abb. 4.3.(2)).

Die zu untersuchende Spannung wird über den im Oszillografen eingebauten Meßverstärker den y-Platten - auch Meßplatten genannt - zugeführt. Das zwischen den Meßplatten existierende elektrische Feld bewirkt eine Krümmung und vertikale Auslenkung des Elektronenstrahlbündels. Die Auslenkung ist für nicht zu große Meßspannungen der Spannung proportional.

F 2 Welche Bahnen beschreiben die Elektronen nach dem Passieren der Anode innerhalb der Meßplatten, wenn an diesen eine konstante Gleichspannung liegt?

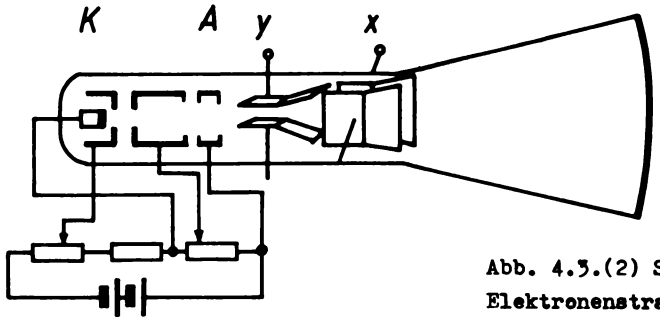
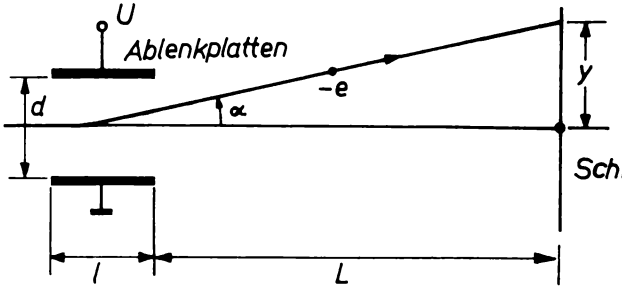


Abb. 4.3.(2) Schema der Elektronenstrahlröhre

Der Verlauf des Elektronenstrahls im Braunschen Rohr ist in Abb. 4.3.(3) dargestellt.



$$y \approx \frac{U l L}{2 d U_A}$$

U Spannung am Plattenpaar
U_A Anodenspannung

Abb. 4.3.(3) Bahn des Elektronenstrahles

Die an den x-Platten (auch Zeitplatten genannt) liegende Spannung lenkt den Strahl in horizontaler Richtung ab. Wenn an beiden Plattenpaaren gleichzeitig Spannungen anliegen, zeichnet der Elektronenstrahl eine Kurve auf dem Bildschirm.

Zur Darstellung zeitlich periodischer Vorgänge liegt an den x-Platten eine im Oszillografen erzeugte Kippspannung wählbarer Frequenz. Sie führt den Elektronenstrahl periodisch mit konstanter Geschwindigkeit von links nach rechts und mit größerer Geschwindigkeit wieder zurück. Beim Rücklauf wird an den Wehneltzylinder ein niedrigeres Potential angelegt und damit der Anodenstrom stark reduziert. Der

Rücklauf wird dunkel getastet.

F 3 Auf welche Weise lassen sich elektrische Kippschwingungen erzeugen?

Der interne Kippgenerator ist abschaltbar. An die x-Buchsen des Oszillografen kann auch von außen eine Signalspannung gelegt werden.

Der Oszillograf besitzt außerdem eine Baugruppe, mit deren Hilfe durch Synchronisation (Zwang zum Gleichlauf) ein Stillstehen des Schirmbildes erzwungen werden kann, wenn zeitlich periodische Vorgänge dargestellt werden.

Manche Oszillografen besitzen eine Trigger-Stufe, welche beim Eintreffen eines Signals am y-Eingang jeweils einen einmaligen Ablauf eines Sägezahnspannungsimpulses auslöst. Bis zum Ende dieses Impulses bleibt der Eingang für weitere Impulse gesperrt. Damit wird erreicht, daß auch zeitlich nichtperiodische Vorgänge (z. B. statistisch verteilte Impulse) stillstehende Schirmbilder ergeben.

F 4 Wie funktioniert ein Trigger?

Jeder Oszillograf besitzt je einen hochwertigen Meßverstärker für den x-Eingang und y-Eingang. Um dem Oszillografen auch Signalspannungen größerer Amplitude zuführen zu können, ohne die Verstärker zu übersteuern, befinden sich hinter den Eingangsbuchsen des Oszillografen Spannungsteiler, die sich in Stufen und stetig einstellen lassen. Damit kann der Abbildungsmaßstab in Grenzen frei gewählt werden.

F 5 Wie muß ein (unbelastet gedachter) Spannungsteiler aus zwei Festwiderständen R_1 und R_2 beschaffen sein, damit die Ausgangsspannung an R_1 nur ein Zehntel der Eingangsspannung am Spannungsteiler beträgt? Geben Sie an, welches Verhältnis die Teilwiderstände haben müssen!

Erzeugt eine am y-Eingang (gegen Masse ⊥) angelegte Spannung U bei gegebener Einstellung des Oszillografen eine vertikale Auslenkung y auf dem Bildschirm, dann ist wegen des linearen Zusammenhangs von Signalspannung und Auslenkung $U = k_y \cdot y$. Die Gerätekonstante k_y heißt Ablenkfaktor. Eine mögliche Einheit desselben ist V/cm. Entsprechend läßt sich k_x als Ablenkfaktor für die x-Richtung definieren. Die Kehrwerte $1/k_y =: a_y$ und $1/k_x =: a_x$ werden als Ablenkempfindlichkeiten bezeichnet. Benutzt man zur Kalibrierung (auch der Terminus "Eichung" ist gebräuchlich) des Oszillografen als hochohmigen Spannungsmesser eine harmonische Wechselspannung $U = \hat{U} \sin\omega t$, dann gilt $y = \frac{1}{k_y} U = \frac{\hat{U}}{k_y} \sin\omega t =: \hat{y} \sin\omega t$, $\hat{U} = \sqrt{2}\, U_{eff}$, $U_{eff} =$

Effektivwert der harmonischen Wechselspannung.

F 6 Warum?

Die für die Auslenkung vom Spannungsminimum $-\hat{U}$ bis zum Spannungsmaximum $\hat{U}$ maßgebende Spannung nennt man Spitze-Spitze-Spannung U_{ss}. Es ist $U_{ss} = 2\hat{U}$.

Der Zusammenhang $U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2} = U_{ss}/2\sqrt{2}$ gilt jedoch nur für harmonische Spannungen. Liegt eine nichtsinusförmige Spannung (z. B. eine Rechteckspannung) vor, dann ist zwar auch hier der Ausdruck U_{ss} sinnvoll, aber der Zusammenhang mit dem Effektivwert der Spannung ist nicht mehr derselbe. Ähnliches gilt für nichtharmonische Spannungen beliebiger Kurvenform.

Kennlinienaufnahme

I,U-Kennlinien eines Bauelements stellen die Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung dar. Der Oszillograf ermöglicht eine rasche Übersicht über den Verlauf einer Kennlinie und arbeitet daher besonders rationell im Vergleich zur Methode der punktweisen Aufnahme einer Kennlinie. Zudem kann das Schirmbild kopiert oder fotografiert werden. Die geringere Genauigkeit wird dabei in Kauf genommen.

F 7 Die Stromstärke läßt sich nicht direkt oszillografisch messen. (Warum?)

Der zu messende Strom wird durch einen (kleinen) in Reihe mit dem Prüfling geschalteten Widerstand R_n bekannter Größe geleitet und die an diesem Widerstand hervorgerufene Spannung U oszillografisch bestimmt. Daraus folgt $I = U/R_n$.

F 8 Zur Kennlinienaufnahme (Abb. 4.3.(4)) ist die Verwendung einer Wechselspannung oder einer pulsierenden Gleichspannung notwendig. (Warum?)

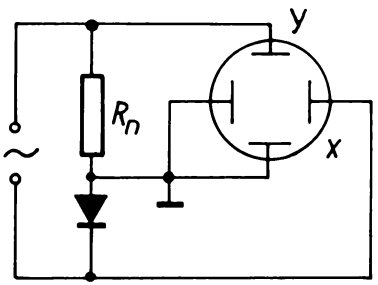


Abb. 4.3.(4) Aufnahme einer Kennlinie eines passiven Zweipoles, z. B. eines Gleichrichters

F 9 Infolge der Masseverbindung je einer Eingangsbuchse des x- und y-Buchsenpaares kommen jedoch mitunter Seitenvertauschungen des Schirmbildes gegenüber der gewohnten Form zustande, die prinzipiell unvermeidbar sind. (Warum?)

Frequenzmessung

Die Signalspannung unbekannter Frequenz wird dem y-Eingang zugeführt. Läßt sich die Zeitablenkung des Oszillografen so einstellen, daß das Schirmbild eine volle Periode der Signalspannung zeigt, dann stimmen beide Frequenzen überein. Ist die Kippfrequenz die Hälfte, ein Drittel oder ein Viertel der Signalfrequenz, dann zeigt das Schirmbild entsprechend zwei, drei oder vier volle Perioden der Signalspannung. Ist die Kippfrequenz dagegen höher als die Signalfrequenz, dann wird nur ein Teil aufgezeichnet, bei dreifacher Frequenz z. B. nur eine Drittelperiode.

F 10 Dieses Verfahren zur Frequenzmessung setzt eine geeichte (und ablesbare) Kippfrequenz voraus. Die Eichung des Kippgenerators kann mit einem Signalgenerator bekannter Frequenz vorgenommen werden. (Wie?)

Mit Hilfe von Lissajous-Figuren lassen sich Frequenzvergleiche einfach durchführen. Dabei werden Signal- und Vergleichsspannung jeweils einem Buchsenpaar des Oszillografen zugeführt. Bei Frequenzgleichheit beider Spannungen ist das Schirmbild im allgemeinen eine Ellipse. Stimmen die Phasen beider Spannungen außerdem überein, dann entartet die Ellipse zu einer geneigten Geraden.

Zum Frequenzvergleich mit dieser Methode können die Ablenkfaktoren k_x und k_y passend gewählt werden. Sie brauchen jedoch nicht bekannt zu sein.

Ist das Frequenzverhältnis beider Spannungen ungleich 1, aber rational, dann entstehen in sich geschlossene Lissajous-Figuren (Abb. 4.3.(5)).

F 11 Welche anderen Verfahren zur Frequenzbestimmung mittels Oszillografen gibt es noch?

Phasenmessungen

Zur Bestimmung des Phasenwinkels zwischen zwei Wechselspannungen U_x und U_y oder zweier anderer Größen, die sich durch geeignete Wandler in Spannungen umsetzen lassen, dient die Phasenellipse.

Die in der Phasenlage zu vergleichenden Spannungen werden an den

x- und y-Eingang gelegt. Der Kippgenerator des Oszillografen wird abgeschaltet. Infolge der Superposition beider Auslenkungen entsteht bei harmonischen Spannungen als Schirmbild eine Ellipse. Ist eine der Spannungen nichtlinear verzerrt oder beide, dann entsteht eine ellipsenähnliche geschlossene Kurve.

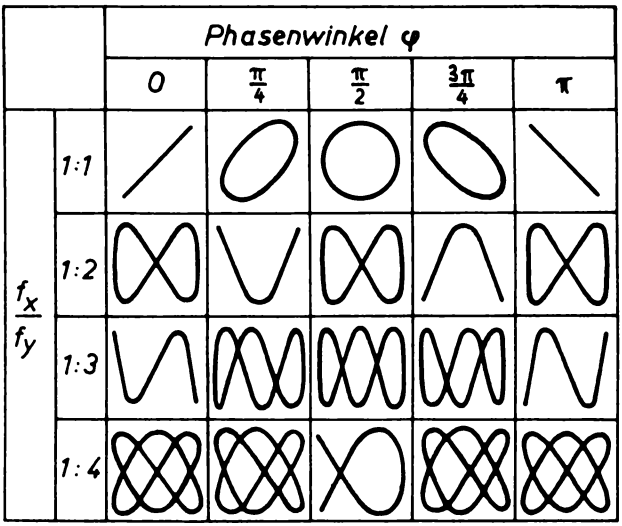


Abb. 4.3.(5) Lissajous-Figuren

Liegt die Ellipse in Mittelpunktlage vor, dann kann der Phasenwinkel φ bestimmt werden (Abb. 4.3.(6), Schaltung siehe Abb. 4.3.(10)).

F 12 Änderungen der Ablenkfaktoren der Meßsysteme verändern zwar das Aussehen der Ellipse, der aus den Abschnitten $2\hat{U}_x \sin\varphi$ und $2\hat{U}_x$ oder $2\hat{U}_y \sin\varphi$ und $2\hat{U}_y$ berechnete Phasenwinkel φ bleibt trotzdem konstant. Warum?

U_x und U_y seien die in der Phasenlage zu vergleichenden Spannungen gleicher Frequenz. $U_x = \hat{U}_x \sin\omega t$ liege am x-Eingang, $U_y = \hat{U}_y \sin(\omega t+\varphi)$ am y-Eingang.

Für $t = 0$ ist auch $U_x = 0$. Dies ergibt den Schnittpunkt der Ellipse mit der Ordinatenachse. Setzt man $t = 0$ in die zweite Gleichung ein, so folgt $U_y(0)/\hat{U}_y = \sin\varphi$. Ebenso kann φ aus dem Verhältnis

der Strecken $2\hat{U}_x \sin\varphi$ und $2\hat{U}_x$ berechnet werden. Für $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180^\circ$ entartet die Ellipse zur Geraden.

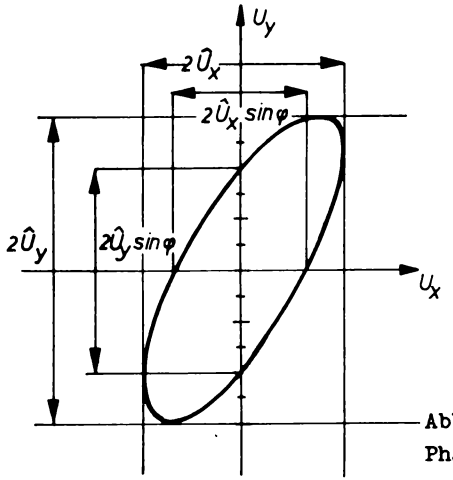


Abb. 4.3.(6) Zur Bestimmung des Phasenwinkels

Bestimmung des logarithmischen Dekrements

Wird ein elektrischer Schwingkreis durch einen äußeren Spannungsimpuls angestoßen, so entstehen in ihm gedämpfte Schwingungen mit der Schwingungsdauer T (Abb. 4.3.(7)).

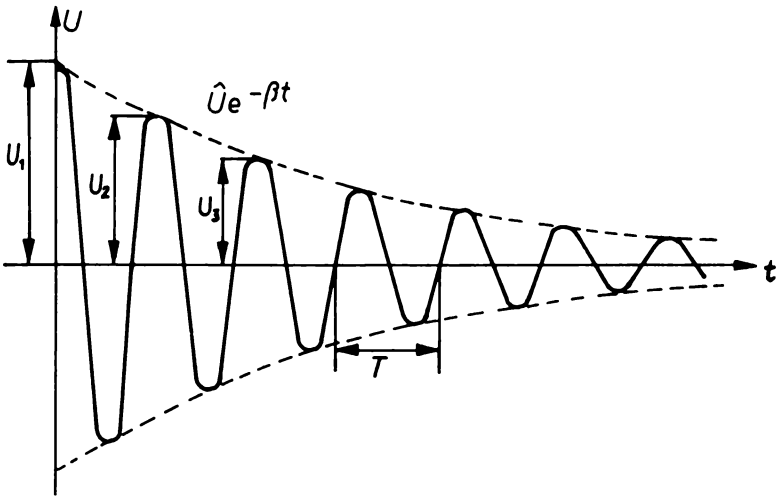


Abb. 4.3.(7) Zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements

Die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung (siehe PfL, Bd.1) ergibt für die Momentanspannung den Ausdruck $U = \hat{U}\, e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$ mit $\beta = R/2L$ als Dämpfungskonstante. R ist der Dämpfungswiderstand und L die Induktivität der Spule.

Der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Schwingungsamplituden der gedämpften Schwingung heißt logarithmisches Dekrement δ. Es ist

$$\delta = \ln(U_1/U_2) = \beta T \quad \text{mit} \quad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

C ist die Kapazität des Schwingkreiskondensators.

Wenn die Differenz aufeinanderfolgender Amplituden sehr klein ist (schwache Dämpfung), kann man die Anzahl n der Perioden bestimmen, nach denen die Amplitude um die Hälfte abgenommen hat. Dann ist

$$\delta = \frac{\ln 2}{n} = \frac{0{,}693}{n}.$$

F 13 Zum Anstoßen des Schwingkreises läßt sich die im Oszillografen erzeugte Kippspannung passender Frequenz verwenden. Sie wird - evtl. über einen Koppelkondensator C_k - dem Schwingkreis zugeführt. Auf dem Schirm erscheint dann ein stehendes Bild der gedämpften Schwingung. Die Amplituden lassen sich mit dem Raster ausmessen, wobei es nur auf Relativwerte ankommt. Warum?

Die Schaltung zur Aufnahme gedämpfter Schwingungen ist in Abb. 4.3.(8) dargestellt.

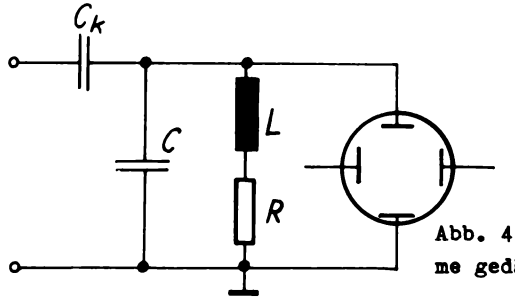


Abb. 4.3.(8) Schaltung zur Aufnahme gedämpfter Schwingungen

Zur Durchführung

Beachten Sie, daß die Helligkeit des Schirmbildes prinzipiell nur so groß wie nötig gewählt werden darf, um eine Schädigung des Leuchtbelags durch Einbrenner sicher zu vermeiden und die Lebensdauer der

Elektronenstrahlröhre nicht zu verkürzen. Wird am Oszillografen - z. B. zwischen zwei Messungen - nicht abgelesen, so ist im Interesse der Schonung des Leuchtbelags die Helligkeit auf Null zu regeln.

Fotografische Aufnahmen des Schirmbildes sind mit vorgesetztem Fototubus oder - bei geringer Raumhelligkeit - vom Stativ aus möglich. Bei NP 20-Film und offener Blende sind Belichtungszeiten um (1/20)s erforderlich, wenn zur Aufnahme kurzzeitig maximale Helligkeit des Schirmbildes eingestellt wird. Oszillogramme können auch mit Transparentpapier vom Bildschirm abgepaust werden. Dabei markiert man die Lage der x- und y-Achse dadurch, daß man wechselweise den y- bzw. x-Anschluß der Meßschaltung vom Oszillografeneingang abtrennt.

Um Oszillogramme quantitativ auswerten zu können, ist es erforderlich, die jeweils gewählte Einstellung der Eingangsspannungsteiler im Meßprotokoll festzuhalten. Um reproduzierbare Ergebnisse zu bekommen, empfiehlt es sich, die Feineinstellregler für die Eingänge auf Links- oder Rechtsanschlag zu bringen. Die Schaltung zur Kalibrierung des Oszillografen als Spannungsmesser ist in Abb. 4.3.(9) dargestellt. Aus Abb. 4.3.(10) ist die Schaltung zur Phasenmessung ersichtlich.

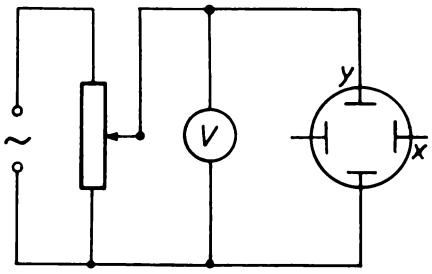


Abb. 4.3.(9) Spannungsmessung mit dem Oszillografen

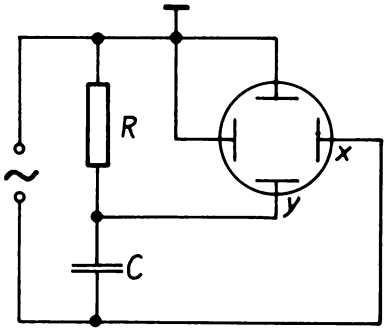


Abb. 4.3.(10) Schaltung zur Phasenmessung

4.4. Bestimmung von Induktivitäten und Kapazitäten mit der Wechselstrombrücke

Für Spulen und Kondensatoren gelten im Wechselstromkreis andere Widerstandsgesetze als im Gleichstromkreis. Im vorliegenden Experiment wird eine Brückenschaltung zur Bestimmung der Induktivität L einer

Spule und der Kapazität C von Kondensatoren benutzt. Gegenüber der Verwendung der Wheatstoneschen Brückenschaltung zur Bestimmung von ohmschen Widerständen sind bei der Wechselstrombrücke gewisse Besonderheiten zu beachten.

Aufgaben

1. Die Induktivität einer Spule ist in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe eines Eisenkernes zu bestimmen und grafisch darzustellen.
2. Die Kapazitäten dreier Kondensatoren sind einzeln sowie in Reihen- und Parallelschaltung zu messen. Die gemessene Kapazität der Kombinationen ist mit der aus den Einzelkapazitäten berechneten zu vergleichen.

Grundlagen

Ein Wechselstrom läßt sich in grober Näherung mit einem Gleichstrom vergleichen, der dauernd ein- und ausgeschaltet und nach jedem Ausschalten außerdem noch umgepolt wird. Bei einer Spule wirkt also neben dem von Länge, Querschnitt, Material und Temperatur des Spulendrahtes abhängigen ohmschen Widerstand R dauernd die Selbstinduktion, bei einem Kondensator finden dauernd Lade- und Entladevorgänge statt.

Neben dem Wirkwiderstand R (ohmscher Widerstand) treten daher im Wechselstromkreis noch induktive und kapazitive Widerstände auf. Im allgemeinen erreichen im Wechselstromkreis Stromstärke und Spannung nicht gleichzeitig ihre Maximalwerte, da eine Phasenverschiebung φ auftritt.

Wechselströme werden bevorzugt in komplexer Form dargestellt. Dabei ist zu beachten:

1. Der komplexen Darstellung von Schwingungen und Wellen liegt die Eulersche Formel $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ zugrunde. Bedeutung für die physikalische Realität hat entweder der Realteil oder der Imaginärteil der komplexen Größen.

2. Bei der komplexen Darstellung von Wechselstromgrößen (besonders Widerständen und Leitwerten) benutzt man die Analogie zwischen dem Zeigerdiagramm und der Gaußschen Zahlenebene. Der Realteil eines komplexen Widerstandes bedeutet einen Wirkwiderstand, der Imaginärteil einen Blindwiderstand. Multiplikation mit +i bzw. -i bedeutet Drehung des Zeigers um $+\pi/2$ bzw. $-\pi/2$ und ist damit gleichwertig mit der entsprechenden Phasenverschiebung. Bei der komplexen Darstellung von Wechselstromgrößen wird anstelle der imaginären Einheit i oft der Buchstabe j verwendet.

Für einen harmonischen Wechselstrom läßt sich schreiben

$$\underline{I} = \hat{I}\, e^{j(\omega t + \varphi_I)}, \qquad \underline{U} = \hat{U}\, e^{j(\omega t + \varphi_U)}.$$

Der komplexe Widerstand ist definiert durch

$$\underline{Z} := \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{U}\, e^{j\varphi_U}}{\hat{I}\, e^{j\varphi_I}} =: \frac{U_{eff}}{I_{eff}}\, e^{j\varphi} = Z\, e^{j\varphi}. \tag{1}$$

$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ ist dabei die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Der komplexe Widerstand ist zeitunabhängig; er ist eine Gerätekonstante und enthält die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Die Zerlegung von $\underline{Z}$ in Realteil und Imaginärteil liefert

$$\underline{Z} = R + jX$$

mit

$$|\underline{Z}| =: Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z}; \quad \sin\varphi = \frac{X}{Z}; \quad Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$

Induktiver und kapazitiver Widerstand

In einer Spule fließe der Strom $\underline{I} = \hat{I}\, e^{j\omega t}$. Er erzeugt eine Selbstinduktionsspannung an den Enden der Spule

$$\underline{U} = L\frac{dI}{dt} = jL\omega\hat{I}\, e^{j\omega t}.$$

Der Faktor j bei $\hat{I}\, e^{j\omega t}$ bedeutet, daß $\underline{U}$ gegenüber $\underline{I}$ um $\pi/2$ phasenverschoben ist. Der komplexe Widerstand einer Spule

$$Z_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L = jX_L \tag{2}$$

ist demnach ein reiner Blindwiderstand.

Für die Induktivität einer Spule gilt

$$L = \mu\frac{n^2 A}{l} \tag{3}$$

mit $\mu = \mu_0\mu_r$, n Windungszahl, A Spulenquerschnitt, l Spulenlänge, μ_0 Permeabilität des Vakuums, μ_r Permeabilitätszahl. Die Permeabilitätszahl μ_r des Kernmaterials ist keine Konstante, sie hängt viel-

mehr von der Stärke des magnetisierenden Feldes ab. Demzufolge ist die Induktivität L einer Spule keine Konstante, sondern hängt von der Stromstärke in dieser Spule ab.

An einem Kondensator liege die Spannung $\underline{U} = U_0 e^{j\omega t}$; für den Strom folgt daraus

$$\underline{I} = C \frac{d\underline{U}}{dt} = j C\omega \hat{U} e^{j\omega t}.$$

Der Faktor j vor $\hat{U} e^{j\omega t}$ zeigt, daß hier $\underline{I}$ gegenüber $\underline{U}$ um $\pi/2$ phasenverschoben ist.

Der komplexe Widerstand eines Kondensators

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = jX_C$$

ist ein reiner Blindwiderstand.

F 1 Erläutern Sie die Gleichungen für Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren bzw. Widerständen.

Zur Bestimmung von Blindwiderständen, aber auch von Induktivitäten und Kapazitäten, läßt sich eine Brückenschaltung verwenden. Als Spannungsquelle dient ein Tongenerator, als Nullinstrument z. B. ein Kopfhörer (Abb. 4.4.(1)). Die Brücke AB (Kopfhörer) ist stromlos,

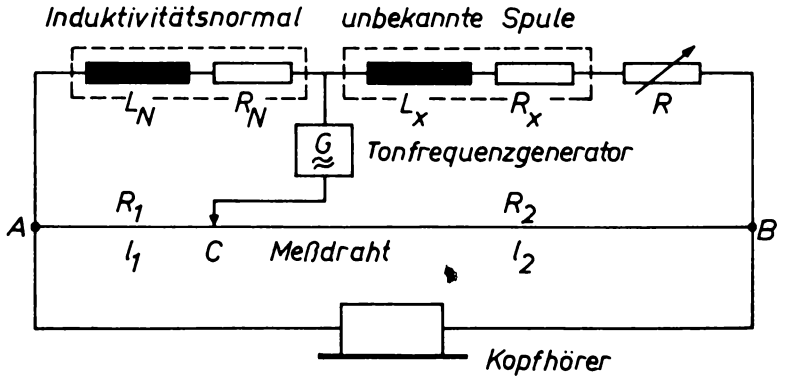


Abb. 4.4.(1) Brückenschaltung

wenn $\underline{U}_{DA} = \underline{U}_{DB}$ und $\underline{U}_{AC} = \underline{U}_{BC}$ sind. Die vier komplexen Spannungen sind wie folgt mit den entsprechenden komplexen Widerständen und Strömen verknüpft:

$$(R_N + j\omega L_N)\,\underline{I}_1 = (R_x + R + j\omega L_x)\,\underline{I}_2,$$

$$R_1\underline{I}_1 = R_2\underline{I}_2 .$$

Hieraus folgt

$$(R_N + j\omega L_N) : (R_x + R + j\omega L_x) = R_1 : R_2 = l_1 : l_2. \qquad (4)$$

l_1 und l_2 sind die den Widerständen R_1 und R_2 proportionalen Meßdrahtlängen.

Diese komplexe Abgleichbedingung ist nur erfüllt, wenn die reellen Abgleichbedingungen gelten

$$L_N : L_x = R_N : (R_x + R) = l_1 : l_2. \qquad (5)$$

F 2 Mit Hilfe des Zeigerdiagramms ist zu zeigen, daß (5) die in (4) gestellten Forderungen erfüllt.

R ist ein Regelwiderstand, mit dem die 2. Bedingung erfüllt werden kann, wenn $R_x < R_N L_x / L_N$ ist. Ist dagegen $R_x > R_N L_x / L_N$, muß R in den Brückenzweig mit R_N gelegt werden.

Bei der Messung von Kapazitäten kann der Wirkwiderstand vernachlässigt werden, da außer dem Wirkwiderstand des Meßdrahtes nur Leitungswiderstände auftreten. Die Abgleichbedingungen vereinfachen sich dadurch zu

$$\frac{1}{j\omega C_N} : \frac{1}{j\omega C_x} = C_x : C_N = l_1 : l_2. \qquad (6)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (5) und (6) zeigt, daß bei abgeglichener Brücke die Induktivitäten in direktem Verhältnis zu den zugehörigen Drahtlängen stehen, die Kapazitäten dagegen in umgekehrtem Verhältnis zu den zugehörigen Drahtlängen.

Zur Durchführung und Auswertung

In welchen Zweig der Brückenschaltung, ob auf die Seite von L_N oder von L_x, der Regelwiderstand R zu legen ist, muß durch Probieren fest-

gestellt werden (wenn R_X und R_N nicht bekannt sind). Wenn die 2. Bedingung (5) nicht erfüllt ist, ergibt die Änderung des beweglichen Abgriffs des Meßdrahtes kein oder nur ein sehr breites und flaches Minimum. Man stellt dann diesen Abgriff so ein, daß der Ton im Kopfhörer möglichst leise zu hören ist und ändert R so, daß der Ton noch leiser wird. Durch abwechselndes Verstellen des Abgriffs und des Regelwiderstandes R läßt sich erreichen, daß bei einer bestimmten Stellung des Abgriffs der Ton im Kopfhörer vollkommen verschwindet. Dann sind die Abgleichbedingungen (5) erfüllt.

F 3 In Abb. 4.4.(1) sind gegenüber der üblichen Darstellung der Wheatstoneschen Brückenschaltung für Gleichstrom Spannungsquelle und Nullinstrument vertauscht. Weshalb ist diese Schaltung für Wechselstrombetrieb zweckmäßiger?

F 4 Was ist für die Spannungsquelle zu beachten, wenn die übliche Gleichstromschaltung der Wheatstonebrücke verwendet werden soll?

Der Eisenkern wird längs der Spulenachse verschoben. Für verschiedene Positionen des Kernes werden die Induktivitäten gemessen, der Brückenabgleich ist bei jeder Messung mehrfach vorzunehmen. Die unbekannten Induktivitäten werden nach (5) berechnet und in Abhängigkeit von der Position des Kernes grafisch dargestellt.

Zur Bestimmung der unbekannten Kapazitäten wird die gleiche Schaltung verwendet, die Spulen werden gegen die Kondensatoren ausgetauscht. Der Regelwiderstand R fällt weg. Es werden zunächst die Kapazitäten der Einzelkondensatoren bestimmt, dann werden die Einzelkondensatoren in mehreren verschiedenen Kombinationen zusammengeschaltet (Reihen- und/oder Parallelschaltung). Die Kapazitäten dieser Kombinationen werden ermittelt. Für jede einzelne Kapazitätsmessung erfolgt der Brückenabgleich mehrfach. Die Kapazität der Kondensatorkombinationen wird aus den Einzelkapazitäten berechnet und mit den direkt gemessenen Werten verglichen.

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

4.5. Transformator

Es sollen die Eigenschaften eines Transformators untersucht werden. Vor allem soll klargestellt werden, daß die allgemein bekannten Beziehungen für das Übersetzungsverhältnis für Spannung und Strom nur Grenzgesetze für einen idealisierten Transformator darstellen.

Aufgaben

1. Die Abhängigkeit der Sekundärspannung von der Primärspannung bei Leerlauf und bei Belastung des Trafos ist zu messen und grafisch darzustellen.
2. Primärstrom, primäre Leistungsaufnahme, Sekundärspannung und Sekundärstrom sind bei Primärnennspannung und steigender ohmscher Belastung der Sekundärseite zu messen.
3. Die den Kupfer- und Eisenverlusten entsprechenden Verlustleistungen sind zu messen.
4. In einem Diagramm sind als Funktion des Sekundärstromes die primärseitige Wirk- und Scheinleistungsaufnahme sowie die sekundärseitige Wirkleistung grafisch darzustellen.
5. Sekundärspannung, Leistungsfaktor (primärseitig) und Wirkungsgrad des Trafos sind als Funktion des Sekundärstromes grafisch darzustellen.

Grundlagen

Ein Transformator (Trafo) ist ein Gerät zum Umformen elektrischer Leistung. Da diese Umformung rein elektromagnetisch, ohne mechanisch bewegte Teile erfolgt, treten nur sehr geringe Verluste auf.

Ein Trafo besteht im Prinzip aus zwei induktiv gekoppelten Spulen. Der einen Spule (Primärspule) wird die elektrische Leistung zugeführt, der anderen (Sekundärspule) kann man nahezu die gleiche Leistung mit anderen Parametern (U und I) entnehmen. Die beiden Spulen sind durch ein Magnetfeld gekoppelt, das durch einen beide Spulen gemeinsamen Eisenkern konzentriert wird. Wechselstrom in der Primärspule ruft im Eisenkern ein wechselndes Magnetfeld hervor, das an den Enden der Sekundärspule eine im gleichen Rhythmus wechselnde Spannung induziert. Trafos werden für die verschiedensten Zwecke verwendet.

F 1 Was versteht man unter einem Trenntrafo, Spartrafo, Stelltrafo?

F 2 Welche Anforderungen werden an einen Trafo in der Starkstromtechnik, in der Meßtechnik, in der Nachrichtentechnik gestellt?

Verlustfreier Trafo: An den Eingangsklemmen der Primärspule liegt die harmonische Wechselspannung U_1, sie hat in der Primärspule (Windungszahl n_1) bei offener Sekundärspule den Magnetisierungsstrom

$$I_\mu = I_{10} \sin \omega t \qquad (1)$$

zur Folge. Dieser Magnetisierungsstrom ruft im Eisenkern (Querschnitt A) den (technischen) magnetischen Fluß

$$\phi = BA = \frac{\mu A n_1}{l_1} I_\mu = \frac{\mu A n_1}{l_1} I_{10} \sin\omega t \qquad (2)$$

hervor. Es ist $\mu = \mu_r \mu_0$. Da ϕ nicht konstant ist, entstehen in Primär- und Sekundärspule (Windungszahl n_2) Induktionsspannungen U_{1L} und U_{2L} (Index L: Leerlauf, offene Sekundärspule):

$$U_{1L} = - n_1 \frac{d\phi}{dt} = - \frac{\mu A n_1^2 \omega}{l_1} I_{10} \cos\omega t, \qquad (3)$$

$$U_{2L} = - n_2 \frac{d\phi}{dt} = - \frac{\mu A n_1 n_2 \omega}{l_1} I_{10} \cos\omega t. \qquad (4)$$

U_{1L} ist der am Eingang der Primärspule liegenden Spannung U_1 entgegengesetzt gleich:

$$U_{1L} = - U_1.$$

Da die zeitliche Abhängigkeit von U_{1L} und U_1 durch die cos-Funktion, die von I_μ durch die sin-Funktion des gleichen Argumentes beschrieben wird, eilt U_1 dem Strom $I_\mu = I_1$ um $\pi/2$ voraus, der Magnetisierungsstrom I_μ ist ein reiner Blindstrom. In Abb. 4.5.(1) sind die Zeitabhängigkeiten von U_1, U_{1L}, I_μ, ϕ grafisch dargestellt.

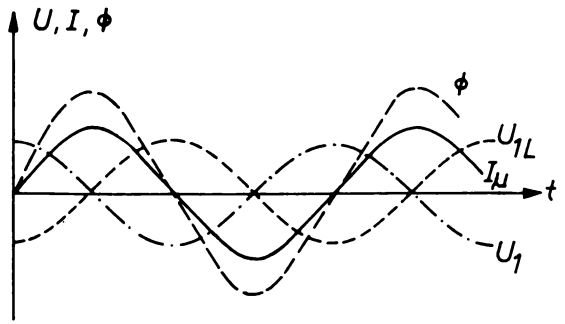


Abb. 4.5.(1) Zeitabhängigkeiten der Größen U, I und ϕ

Bei leerlaufendem Trafo ist das Verhältnis der Spannungen an Primär- und Sekundärspule

$$\frac{U_{1L}}{U_{2L}} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (5)$$

Wird der Trafo belastet, fließt durch die Sekundärspule der Belastungsstrom I_2. Dieser Strom ruft einen magnetischen Fluß ϕ_2 hervor, der nach der Lenzschen Regel dem ursprünglichen Fluß ϕ entgegengerichtet ist. ϕ wird also durch ϕ_2 geschwächt. Dadurch sinkt aber U_{1L}, das Gleichgewicht $U_{1L} = - U_1$ ist gestört. Die Folge davon ist, daß der Primärstrom auf einen Wert $I_1 > I_\mu$ ansteigt und dadurch einen zusätzlichen Magnetfluß $\phi_1 = - \phi_2$ hervorruft, so daß schließlich der ursprüngliche Magnetfluß wieder vorhanden ist. Bei belastetem Trafo setzt sich also der Primärstrom I_1 aus zwei Anteilen zusammen: Aus dem Magnetisierungsstrom I und aus dem Belastungsstrom I_{1B}.

Die Ausgangsleistung ist gleich der Eingangsleistung:

$$U_2 I_2 = U_1 I_1 .$$

Daraus folgt

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} .} \qquad (6)$$

Verlustbehafteter Trafo: Bei jedem realen Trafo gelten die Gleichungen (5) und (6) nur angenähert. In diesen Gleichungen ist nicht berücksichtigt, daß

1. die Spulen aus Draht gewickelt sind und infolgedessen einen Wirkwiderstand besitzen (Kupferverlust),
2. der Eisenkern, obwohl er aus voneinander isolierten dünnen Blechen zusammengesetzt ist, durch Wirbelströme erwärmt wird (Eisenverluste),
3. das Magnetfeld nicht nur im Eisenkern auftritt (Streuverluste).

Kupferverlust: Der Draht, aus dem die Spulen gewickelt sind, besitzt ohmschen Widerstand und wird infolgedessen vom Strom in der Spule erwärmt. Die Stromwärmeleistung ist proportional I^2, der Kupferverlust des Trafos steigt also quadratisch mit dem Belastungsstrom. Der Kupferverlust eines Trafos wirkt wie ein Wirkwiderstand, der mit dem induktiven Blindwiderstand der Spulen in Reihe liegt.

Eisenverlust: Der Eisenkern eines Trafos ist nicht massiv, er ist aus dünnen, durch Lackierung gegeneinander isolierten Weicheisen-

blechen zusammengesetzt. Dadurch wird die Bildung von Wirbelströmen im Kern weitgehend, aber nicht vollständig, verhindert. Die Folge davon ist, daß sich der Eisenkern erwärmt. Die dazu erforderliche Leistung wird der äußeren Spannungsquelle entnommen, es fließt also durch die Primärspule außer dem Magnetisierungs- und dem Belastungsstrom noch ein zusätzlicher Strom. Der Eisenverlust ist konstant, er hängt nicht von der Belastung ab. Er wirkt wie ein ohmscher Widerstand, der zum induktiven Blindwiderstand der Primärspule parallel liegt.

Streuverlust: Die Trafospulen liegen zum einen nicht unmittelbar dem Eisenkern an, zum anderen sind sie nicht ein-, sondern mehrlagig gewickelt. Das Magnetfeld entsteht also nicht nur im Eisenkern sondern in geringem Maße auch außerhalb des Kernes. Beide Spulen werden aber nur vom magnetischen Fluß im Eisenkern durchsetzt. Das Magnetfeld der Spulen und damit der Streuverlust hängt vom Spulenstrom und damit von der Belastung des Trafos ab. Der Streuverlust wirkt wie ein zusätzlicher induktiver Widerstand, der mit dem induktiven Widerstand der Spulen in Reihe liegt.

Zur Durchführung und Auswertung

Bei diesem Experiment wird mit Netzspannung gearbeitet, die Sekundärspannung liegt unter Umständen - je nach Art des verwendeten Trafos - noch über der Netzspannung. Es ist äußerste Vorsicht beim Aufbau der Schaltung und beim Ablesen der Instrumente zu beachten. Jede Berührung spannungsführender Teile ist unter allen Umständen zu vermeiden. Bei Umbauten und bei Änderungen an der Schaltung sind beide Pole vom Netz zu trennen, bei einpoligem Abtrennen besteht die Gefahr, daß der Versuchsaufbau über den Phasenleiter noch unter Spannung steht.

Aufgabe 1

Die Primärspannung wird über einen Spannungsteiler einstellbar dem Netz (Steckdose) entnommen, die Sekundärspannung bei ausgeschaltetem Belastungswiderstand (unbelasteter Trafo) und bei voll eingeschaltetem Belastungswiderstand (belasteter Trafo) gemessen (Abb. 4.5.(2)).

Aufgabe 2

Die Schaltung wird nach Abb. 4.5.(3) aufgebaut. Der Belastungswider-

stand wird in geeigneten Stufen verändert. Da Netzspannungsschwankungen möglich sind, ist auch primärseitig die Spannung zu messen.

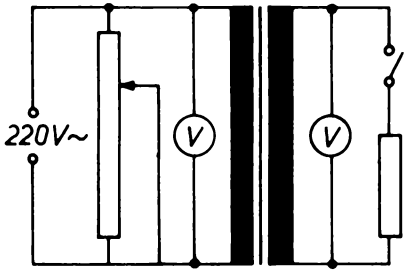


Abb. 4.5.(2) Spannungsmessung bei unbelastetem und belastetem Transformator

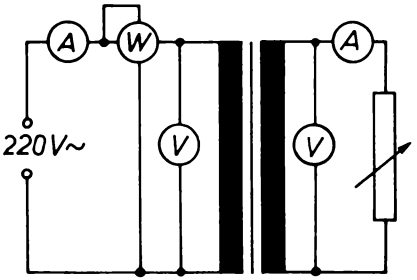


Abb. 4.5.(3) Schaltung zu Aufgabe 2

Der Leistungsmesser ist ein Meßgerät, mit dem die Wirkleistung eines Wechselstromes gemessen werden kann. Bei einem elektrodynamischen Meßwerk fließt durch die Feldspule der Wechselstrom $I = I_0\cos(\omega t+\varphi)$, dessen Leistung gemessen werden soll. Durch die Drehspule fließt ein der Spannung $U = U_0\cos\omega t$ proportionaler Strom. Die Drehspule wird dazu über einen großen Widerstand R (im Gerät eingebaut) direkt an die Spannungsquelle gelegt. Sie wird dann vom Strom $I' = U/R$ durchflossen. Der Zeigerausschlag ist dann proportional $\overline{II'}$, d. h. auch proportional zu $I_0U_0\overline{\cos(\omega t+\varphi)\cos\omega t} = \overline{IU}$, wobei die Überstreichung den Zeitmittelwert bedeutet.

Aufgabe 3

Kupfer- und Eisenverlust können als Verlustleistung experimentell bestimmt werden:

Im Leerlauf (offene Sekundärspule) wird die primärseitig aufgenommene Wirkleistung gemessen. Da im Leerlauf der durch die Primärspule fließende Strom sehr gering ist, kann die Stromwärmeleistung vernachlässigt werden. Die aufgenommene Leistung wird also nur zur Ummagnetisierung des Eisenkernes verbraucht, sie ist gleich dem Eisenverlust P_{Fe} des Trafos. Der Kupferverlust ist stromstärkeabhängig, man muß ihn daher auf eine bestimmte Stromstärke beziehen. Man wählt als Bezugswert den primärseitigen Nennstrom (Betriebsstrom) des Tra-

fos. Zur Messung des Kupferverlustes wird die Sekundärspule kurzgeschlossen und an die Primärspule nur die Spannung gelegt, die unter dieser Bedingung den Primärnennstrom hervorruft. Dazu genügt bei kurzgeschlossener Sekundärspule bereits eine sehr niedrige Primärspannung. Bei dieser niedrigen Eingangsspannung ist der magnetische Fluß im Kern nahezu null, der Eisenverlust kann also vernachlässigt werden. Die unter diesen Bedingungen primärseitig aufgenommene Wirkleistung entspricht daher dem Kupferverlust P_{Cu} bei Nennbelastung des Trafos.

Aufgaben 4 und 5

Die Diagramme werden gemäß der Aufgabenstellung gezeichnet. Der Kurvenverlauf ist zu diskutieren, dabei ist auch die Gültigkeit der Gleichungen (5) und (6) zu untersuchen. Die Wirkleistung im Sekundärkreis erhält man bei rein ohmscher Belastung der Sekundärspule einfach als $P_{2W} = U_{2eff} I_{2eff}$.

Fragen

F 1 und F 2 siehe Text.

F 3 Was versteht man unter elektromagnetischer Induktion?

F 4 Man gebe die Maxwellschen Gleichungen in Integral- sowie Differentialform an und interpretiere sie.

F 5 Wie berechnet man den magnetischen Fluß im Innern einer langen, geraden, von Gleichstrom durchflossenen Spule?

4.6. Magnetische Messungen

Die Hysteresiskurve ferromagnetischer Werkstoffe ermöglicht Rückschlüsse auf deren magnetische Eigenschaften, ist also für die Technik, für den richtigen Einsatz ferromagnetischer Werkstoffe von Bedeutung. Im vorliegenden Experiment wird diese Kurve auf dem Bildschirm eines Elektronenstrahl-Oszillografen aufgezeichnet. Gegenüber der genauere Ergebnisse liefernden punktweisen Aufnahme der Kurve bietet dieses Verfahren den Vorteil, daß Metallproben in kurzer Zeit ohne großen Aufwand auf ihre magnetischen Eigenschaften hin untersucht und verglichen werden können.

Im zweiten Teil des Experiments wird mit Hilfe von Drehschwingungen einer Magnetnadel die Horizontalkoordinate des erdmagnetischen Feldes bestimmt.

Aufgaben

1. Mit einem Elektronenstrahl-Oszillografen sind die Hysteresiskur-

ven verschiedener ferromagnetischer Metallproben aufzunehmen, Koerzitiv-Feldstärke und Remanenz sind zu bestimmen.

2. Die Horizontalkoordinate des erdmagnetischen Feldes ist zu bestimmen. Dazu wird dem Erdfeld das Magnetfeld einer langen Zylinderspule überlagert und die Schwingungsdauer einer im resultierenden Magnetfeld Drehschwingungen ausführenden Magnetnadel untersucht.

Grundlagen

Zu Aufgabe 1

Eine lange Zylinderspule werde von einem Strom I durchflossen und von einer Induktionsspule umschlossen, die mit einem ballistischen Galvanometer verbunden ist. Jede Änderung von I in der Spule (und damit der Feldstärke $\underline{H}$ im Innern der Spule) ruft einen Induktionsspannungsstoß hervor. Man erhält aber auch einen Induktionsspannungsstoß, wenn $\underline{H}$ konstant bleibt und ein Eisenkern in die Spule eingeführt oder aus ihr herausgezogen wird. Ein Induktionsstoß entsteht also, wenn sich die magnetische Induktion (magnetische Kraftflußdichte)

$$B = \mu H, \tag{1}$$

die eine Induktionsspule durchsetzt, ändert; es gilt

$$\mu =: \mu_0 \mu_r.$$

Im Vakuum ($\mu_r = 1$) ist $B = \mu_0 H$. Befindet sich dagegen ein Stoff mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = \mu/\mu_0$ im Magnetfeld, wird die Induktion B durch die Magnetisierung M des Stoffes geändert:

$$B = \mu_0 (H + M). \tag{2}$$

Wegen Gleichung (1) folgt aus Gleichung (2) für die Magnetisierung eines Stoffes

$$M = (\mu_r - 1)H. \tag{3}$$

Bei ferromagnetischen Stoffen ($\mu_r \gg 1$) ist die Permeabilitätszahl keine Konstante, sondern hängt von der magnetischen Feldstärke ab

$$\mu_r = \mu_r(H).$$

Wird der Zusammenhang zwischen Induktion B und Feldstärke H grafisch dargestellt, entsteht ein geschlossener Kurvenzug (Hysteresiskurve). Beim Erhöhen der Feldstärke hat die Induktion andere Werte als beim Verkleinern der Feldstärke (Abb. 4.6.(1)). In Abb. 4.6.(1a) ist zum Entmagnetisieren nur eine betragsmäßig geringe Gegenfeldstärke H_K (Koerzitivfeldstärke) erforderlich, man bezeichnet diesen Werkstoff als "magnetisch weich". Bei großem Betrag der Koerzitivfeldstärke (Abb. 4.6.(1b)) spricht man von einem "magnetisch harten" Werkstoff.

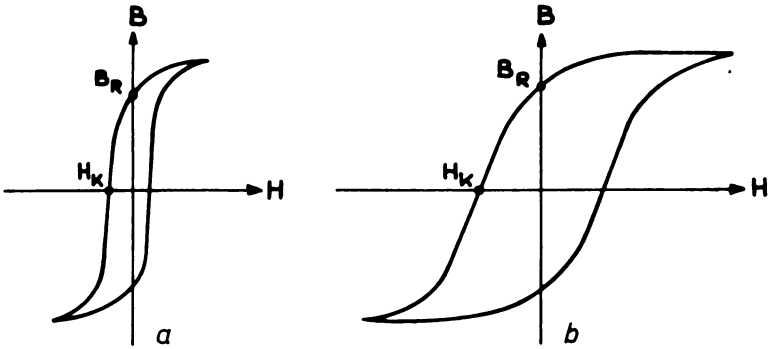


Abb. 4.6.(1) Hysteresis-Kurve für einen magnetisch weichen (a) und einen magnetisch harten Werkstoff (b)

F 1 Welche Bedeutung hat der Flächeninhalt der von der Hysteresiskurve umschlossenen Fläche?

Man kann die Hysteresiskurve punktweise aufnehmen, man kann sie aber auch sofort mittels einer als "Ferrograf" bezeichneten Schaltung auf dem Bildschirm einer Oszillografenröhre sichtbar machen (Abb. 4.6.(2)). Die Spulen Sp1 und Sp2 sind durch einen geblätterten U-Kern miteinander verbunden, der magnetische Kreis wird durch zwei Polschuhe, zwischen denen sich die ferromagnetische Probe befindet, geschlossen. An Sp1 liegt eine durch einen Stelltrafo regelbare Wechselspannung, der Strom I_1 ruft in dem Widerstand $R_3 > R_1$ die Spannung $U_3 = R_3 I_1$ hervor. Wegen $H = n_1 I_1 / l_1$ wird

$$H = \frac{n_1 U_3}{l_1 R_3} . \qquad (4)$$

Dem x-Eingang des Oszillografen wird also eine Spannung zugeführt,

die der Feldstärke des homogenen Feldes in Sp1 proportional ist. Tr ist ein Trenntrafo, er sorgt dafür, daß dem Eingang des Oszillografen eine erdfreie Spannung zugeführt wird.

F 2 Was versteht man unter "erdfreier" Spannung?

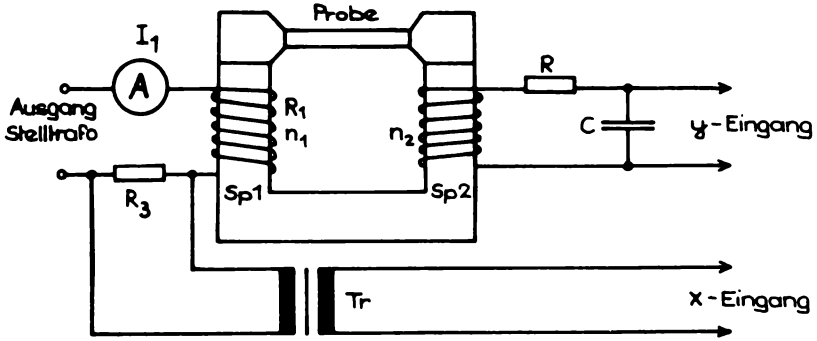


Abb. 4.6.(2) Schaltung zur oszillografischen Aufnahme einer Hysteresis-Kurve

In der Spule Sp2, die von dem von Sp1 ausgehenden magnetischen Wechselfeld durchsetzt wird, entsteht eine Induktionsspannung

$$U_2 = - n_2 \frac{d\phi}{dt} ,$$

die gleichzeitig Eingangsspannung für das R-C-Glied ist. R und C sind so bemessen, daß die Zeitkonstante $\tau = RC$ groß gegenüber der Periodendauer T von U_2 ist. In diesem Falle wirkt das R-C-Glied als "integrierendes" Glied, für die Ausgangsspannung gilt

$$U_A(t) = \frac{1}{RC} \int U_2(t)dt = - \frac{n_2}{RC} \phi(t). \qquad (5)$$

Für den magnetischen Kreis (U-Kern, Polschuhe, Probe) gilt

$$U_M = \phi R_M \qquad (6)$$

mit $R_M = 1/\mu A$ (magnetischer Widerstand) und $U_M = Hl$ (magnetische Spannung im homogenen Feld). Wenn sich der Index P auf die Probe und der Index K auf den Kern bezieht, läßt sich (6) ausführlich so schreiben:

$$U_M = \phi \left(\frac{l_P}{\mu_P A_P} + \frac{l_K}{\mu_K A_K} \right) = \phi (R_{MP} + R_{MK}). \qquad (7)$$

Durch geeignete Wahl der Abmessungen von Kern und Probe läßt sich der magnetische Widerstand des Kerns gegenüber dem der Probe sehr klein machen, und (7) vereinfacht sich zu

$$U_M = H\, l_P = \Phi \frac{l_P}{\mu_P A_P},$$

also

$$\Phi = \mu_P H A_P = B A_P. \tag{8}$$

Mit Gl. (9) wird aus (6)

$$U_A(t) = -\frac{n_2}{RC} A_P \dot{B}(t). \tag{9}$$

Die Ausgangsspannung am R-C-Glied ist also der magnetischen Induktion B in der Probe proportional, sie wird dem y-Eingang des Oszillografen zugeführt.

Selbstverständlich gelten die Gleichungen (8) und (9) nur näherungsweise, da der magnetische Widerstand des U-Kerns gegenüber dem der Probe nicht vollständig verschwindet, außerdem tritt beim Übergang von den Polschuhen zur Probe ein magnetisches Streufeld auf. Für fehlerfreie Ergebnisse müßte der gesamte magnetische Kreis aus dem Probenmaterial hergestellt sein.

Zu Aufgabe 2

Führt ein Körper mechanische Drehschwingungen aus, gilt für seine Schwingungszeit

$$T = 2\pi \sqrt{J/D} \tag{10}$$

(J Trägheitsmoment; $D = M_m/\alpha$ Richtmoment; M_m mechanisches Drehmoment; α Auslenkwinkel).

Eine Magnetnadel mit dem magnetischen Moment $\underline{m}$ und dem Trägheitsmoment J befindet sich um eine vertikale Achse drehbar in einem Magnetfeld $\underline{H}$. Wird die Nadel um einen kleinen Winkel α aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, wirkt auf sie das rücktreibende Moment

$$\underline{M}_m = \underline{m} \times \underline{B},$$

$$M = mB \sin\alpha \approx mB\alpha \quad \text{(für kleine Winkel } \alpha\text{)}.$$

Daraus ergibt sich $M/\alpha = D = mB$ und für die Schwingungsdauer T der

Nadel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\mu_o H}} \tag{11}$$

also

$$|H| = \frac{4\pi^2 J}{\mu_o m}\frac{1}{T^2} . \tag{12}$$

Der Horizontalkoordinate H_{Eh} des erdmagnetischen Feldes wird das homogene Feld im Innern einer langen Zylinderspule, $H_{Sp} = nI/l$, so überlagert, daß beide Felder gleich- (↑↑) oder entgegengerichtet (↓↑) sind. Für den Fall (↑↑) wollen wir H_{Sp} und I positiv zählen, für den Fall (↓↑) negativ. Dazu wird die Spule in der Richtung H_{Eh} aufgestellt. Das geschieht mit Hilfe der drehbar gelagerten Magnetnadel (Kompaß), die sich im Innern der Zylinderspule befindet. Dann lautet Gleichung (12)

$$|H| = |H_{Eh} + H_{Sp}| = \frac{4\pi^2 J}{\mu_o m}\frac{1}{T^2} . \tag{13}$$

T^{-2} hängt also linear mit H_{Sp} zusammen. Die grafische Darstellung von Gleichung (13), $T^{-2} = T^{-2}(H_{Sp})$, führt zu einer fallenden und zu einer steigenden Halbgerade mit einer gemeinsamen Nullstelle bei $H_{Sp} = -H_{Eh}$.

Zur Durchführung und Auswertung

Aufgabe 1

Die Schaltung zur Aufnahme der Hysteresiskurve ist in Abb. 3.6.(2) dargestellt. Da der Stelltrafo, der die Betriebsspannung für den Ferrografen liefert, kein Trenntrafo ist, besteht je nach Polung des Netzsteckers die Möglichkeit, daß die volle Phasenspannung - auch wenn der Stelltrafo auf 0 V eingestellt ist! - an den Leitungen bis Sp 1 und Tr liegt. Wenn an der Schaltung etwas verändert werden soll, muß, um Unfälle zu verhüten, der Stelltrafo auf 0 V zurückgestellt und vom Netz getrennt werden.

Der Stelltrafo sowie die Verstärker im y- bzw. x-Eingang des Oszillografen werden so eingeregelt, daß der Kurvenzug den Oszillografenschirm möglichst voll ausfüllt. Das Koordinatensystem für die Hysteresiskurve auf dem Schirm erhält man, wenn man die Leitungen zum y- bzw. zum x-Eingang unterbricht und der Elektronenstrahl dadurch nur in einer Richtung ausgelenkt wird. Kurve und Koordinaten-

achsen werden vom Bildschirm auf vorbereitetes Koordinatenpapier übertragen. Mit einer Kamera kann das Schirmbild auch fotografisch festgehalten werden.

Zur Berechnung der Remanenz B_R und der Koerzitivfeldstärke H_k gemäß den Gleichungen (9) und (4) müssen noch die Ablenkempfindlichkeiten a_y bzw. a_x bestimmt werden. Man legt dazu eine bekannte Wechselspannung an den y- bzw. x-Eingang und setzt die halbe Länge des Striches auf dem Bildschirm zur Spannung ins Verhältnis. Zu beachten ist dabei, daß zur Bestimmung der Ablenkempfindlichkeit die Einstellung der Verstärker in den Oszillografeneingängen nicht verändert werden darf und daß der Strich auf dem Bildschirm dem Maximalwert der anliegenden Wechselspannung entspricht.

Aufgabe 2

Die Magnetnadel ist so auf einer Spitze gelagert oder an einem nichtverdrillten Faden aufgehängt, daß sie sich in der Mitte der langen Zylinderspule (Länge l, Windungszahl n) befindet. Die Spule wird so aufgestellt, daß ihre Längsachse mit der Richtung der Magnetnadel übereinstimmt.

F 3 Worauf muß bei der Aufstellung der Spule geachtet werden?

Über einen Regelwiderstand und einen Strommesser wird die Spule mit einer Gleichspannungsquelle (Akku) verbunden. Die Stromstärke wird in geeigneten Schritten variiert (nähere Angaben am Arbeitsplatz). Für jede Stromstärke wird die Stromrichtung umgepolt, so daß die Spule in beiden Richtungen vom Strom durchflossen wird.

Zum Schwingen wird die Magnetnadel durch ein von außen an die Spule herangeführtes Eisenstück angeregt. Es ist darauf zu achten, daß die Nadel nur Drehschwingungen (bei aufgehängter Nadel keine Pendelschwingungen!) vollführt und daß sie harmonisch, d. h. bei kleinen Auslenkwinkeln schwingt. Es wird die Zeit für 10 Schwingungen der Magnetnadel gemessen.

Zur grafischen Bestimmung der Horizontalkoordinate des Erdfeldes wird $1/T^2$ über H_{Sp} aufgetragen. Die grafische Darstellung wird erleichtert, wenn die eine Halbgerade nach Gleichung (13) nach unten umgeklappt wird, so daß nur eine einzige Gerade zu zeichnen ist.

Bei bekanntem Inklinationswinkel lassen sich die Vertikalkoordinate und die Feldstärke des erdmagnetischen Feldes am Versuchsort berechnen.

F 4 Was versteht man unter "Deklination" und "Inklination"? Wie läßt sich aus dem Ergebnis der Messungen die Feldstärke des erdmagnetischen Feldes berechnen?

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

4.7. Elektrische Messung nichtelektrischer Größen

In der Technik spielen Automatisierungs-, Steuer- und Regelprozesse zunehmend eine große Rolle. Neben pneumatischen sind es besonders elektrische Verfahren, die dabei in Anwendung kommen. Das setzt aber voraus, daß die zu messenden Größen in elektrische Signale umgeformt werden können. Aus der Vielzahl der Möglichkeiten sollen nachstehend exemplarisch einige einfache, allgemein und vielseitig anwendbare Zusammenhänge untersucht werden, bei denen nichtelektrische Größen durch entsprechende Meßwertumformer in elektrische Größen umgewandelt werden. Die angeführten Beispiele sollen als Anregung zu weiteren experimentellen Untersuchungen aufgefaßt werden.

Aufgaben (Auswahl)

1. Temperaturmessung mit Widerstandsthermometer und Thermistor
2. Temperaturmessung mit einem Pyrometer
3. Vakuum-Messungen mit Pirani- und Penning-Manometer.

Grundlagen

Unter elektrischer Messung nichtelektrischer Größen versteht man die Messung beliebiger (nichtelektrischer) physikalischer Größen durch Meßanordnungen, die mindestens ein stromdurchflossenes Bauelement aufweisen. Das wäre im einfachsten Fall ein elektrisches Anzeigegerät (z. B. Strommesser, elektrischer oder elektronischer Zähler, Oszillograf usw.). Dazu muß die physikalische Größe durch einen Meßgrößenumformer zunächst in eine elektrische Größe umgewandelt werden. Man unterscheidet dabei aktive Meßgrößenumformer, bei denen eine elektrische Größe erzeugt wird (z. B. Thermoelement, Sperrschichtfotozelle) und passive Meßgrößenumformer, bei denen eine elektrische Größe beeinflußt wird (z. B. Widerstandsthermometer, Fotowiderstand). Passive Meßgrößenumformer nutzen häufig physikalische Zusammenhänge zwischen elektrischen und nichtelektrischen Größen unmittelbar aus, z. B. die Temperaturabhängigkeit des (spezifischen) elektrischen Widerstandes oder die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Beleuchtungsstärke. Der Vorteil der elektrischen Messung liegt

sowohl in der hohen Meßgenauigkeit und der großen Empfindlichkeit als auch in der einfachen Fernübertragung und Anpassungsfähigkeit sowie der direkt möglichen Meßwertverarbeitung in EDVA bzw. AD-Wandlern.

Da der elektrische Widerstand aller elektrischen Leitungsmaterialien eine mehr oder minder stark ausgeprägte Temperaturabhängigkeit zeigt, kann aus der Änderung eines gegebenen Widerstandes auf die Änderung der Temperatur dieses Leiters geschlossen werden. Besonders geeignet sind naturgemäß solche Materialien, die in großen Temperaturintervallen eine lineare Widerstandsänderung zeigen und darüber hinaus durch die Wärmeeinwirkung chemisch nicht (oder nicht merklich) verändert werden. Diese Bedingung erfüllt z. B. das Platin.

Wird ein dünner Platindraht von solcher Länge, daß sein elektrischer Widerstand bei Normaltemperatur z. B. 100 Ω beträgt, auf einen isolierenden Träger (Röhrchen) aufgewickelt, und dieser Drahtwickel der zu messenden Temperatur (z. B. dem Inneren eines Glühofens) ausgesetzt, so steigt sein Widerstand gemäß

$$R = R_0(1 + \beta\vartheta)$$

auf den der Temperatur entsprechenden Widerstandswert an. Wird dieser Drahtwickel - die Anordnung wird Widerstandsthermometer genannt - an eine konstante Spannungsquelle und einen Strommesser angeschlossen, so sinkt die angezeigte Stromstärke in dem Maße wie der Widerstand mit zunehmender Temperatur ansteigt. Die Skale des Strommessers kann unmittelbar in Temperaturwerten kalibriert und damit eine Temperaturmessung auf eine Messung der elektrischen Stromstärke zurückgeführt werden.

F 1 Warum muß die Stromstärke durch den Platindraht auf einen recht geringen Wert beschränkt werden?

Benutzt man anstelle einer Konstantspannungsquelle eine Konstantstromquelle, so wird die Temperaturmessung auf eine Spannungsmessung zurückgeführt. Das hat einmal den Vorteil, daß wegen des bei höheren Temperaturen auch höheren Widerstandes zur Aufrechterhaltung der konstanten Stromstärke auch eine höhere Spannung notwendig ist und damit dem Temperaturanstieg auch ein Anstieg der Spannung entspricht. Zum anderen kann, und das ist meist von größerer Bedeutung, durch Kompensatoren eine empfindlichere Spannungsmessung erfolgen als durch die Messung mit einem einfachen Strommesser und der Meßvorgang kann

durch den Einsatz von Motorkompensatoren (z. B. Lindeck-Rothe-Kompensator) automatisiert und zugleich geschrieben werden, was besonders bei der Temperaturüberwachung und der Temperaturmessung während eines über eine gewisse Zeit verlaufenden Prozesses von Vorteil ist.

Schließlich ist es auch möglich, die Widerstandsänderung direkt in einer (evtl. selbst abgleichenden) Brückenschaltung zu messen und daraus auf die Temperaturänderung zu schließen. Solche Brückenmethoden sind vor allem angezeigt, wenn relativ geringe Temperatur- und damit Widerstandsänderungen mit hoher Genauigkeit gemessen werden müssen.

In analoger Weise kann die elektrische Temperaturmessung auch mittels eines Thermistors erfolgen. Da infolge des negativen Temperatur-Koeffizienten (daher auch die Bezeichnung NTK- oder NTC-Widerstand) mit steigender Temperatur der Widerstand des Thermistors sinkt, sind der Konstantspannungsbetrieb und Messung der Stromstärke bei geringeren Genauigkeitsansprüchen empfehlenswert. Dabei sollte dem Thermistor R_{Th} ein geeigneter ohmscher Widerstand R_v vorgeschaltet werden, der den Meßstrom durch den Thermistor so begrenzt, daß sein Arbeitspunkt mit Sicherheit stets im linearen Anlaufgebiet seiner Strom-Spannungs-Kennlinie liegt. Dadurch wird zusätzlich auch der Zusammenhang zwischen Temperatur und Meßstromstärke I linearisiert.

Besonders empfindlich und also auch für relativ schmale Temperaturintervalle (z. B. von 35 °C bis 45 °C als "elektrisches Fieberthermometer") einsetzbar sind Thermistoren als Temperaturfühler, wenn sie in einer Brückenschaltung betrieben werden. Das Brückeninstrument sollte dabei einen Eigenwiderstand R_0 besitzen, der dem Kaltwiderstand des Thermistors entspricht; die (ohmschen) Widerstände R_1, R_3 und R_4 sollten annähernd gleich groß und etwa 1/10 des Thermistorwiderstandes R_{Th} sein. Damit wird bei konstanter Brückenspannung U_B eine optimale Brückenempfindlichkeit erreicht. Ändert sich infolge einer Temperaturänderung der Thermistorwiderstand, so wird dadurch das Brückengleichgewicht gestört, und über das Brückeninstrument fließt ein dieser Verstimmung der Brücke entsprechender Strom durch das Brückeninstrument; die dort ablesbare Stromstärke ist ein Maß der Temperaturänderung und bei bekannter "Gleichgewichtstemperatur" der Brücke zugleich ein Maß der Temperatur; die Skale des Brückeninstrumentes wird zweckmäßig in Temperaturwerten kalibriert. Die Änderung der Stromstärke durch das Brückeninstrument läßt sich noch etwa verdoppeln, wenn anstelle von R_4 ebenfalls ein Thermistor

mit $R'_{Th} = R_{Th}$ eingesetzt wird, dessen Widerstandsänderung $\Delta R'_{Th}$ auch gleich ist der Widerstandsänderung ΔR_{Th} des ursprünglichen Thermistors.

Schließlich lassen sich auch Transistoren zur Temperaturmessung einsetzen, wobei allerdings die relativ engen Temperaturgrenzen (etwa -25 °C bis 65 °C bei Germanium und etwa -40 °C bis 125 °C bei Silizium) beachtet werden müssen. Der Kollektorreststrom ($-I_{CBe}$) ist in starkem Maße von der Temperatur abhängig. Er entsteht durch die thermische Ladungsträger-Paarbildung und nimmt bei steigender Temperatur annähernd exponentiell zu (bei Ge um etwa 7 %/K). Als Richtwert gilt, daß sich der Kollektorreststrom für je 10 K Temperaturerhöhung bei Germaniumtransistoren etwa verdoppelt und bei Siliziumtransistoren sogar verdreifacht (wobei er allerdings bei Silizium um 2 bis 3 Zehnerpotenzen in der absoluten Größe geringer ist.)

Die Temperaturmessung mittels Strahlungspyrometer geschieht auf der Grundlage der Messung bzw. des Vergleichs der Temperaturstrahlung, die von der Oberfläche eines heißen Körpers (bzw. flüssigen oder gasförmigen Mediums) ausgesandt wird. Da diese Form der Messung berührungsfrei geschieht, lassen sich damit sowohl sehr hohe Temperaturen als auch Temperaturen unzugänglicher oder räumlich sehr kleiner Gebiete ohne größere Schwierigkeiten messen, sofern es sich um Oberflächentemperaturen handelt bzw. die Oberflächentemperatur der Körpertemperatur gleich ist.

Man unterscheidet nach dem Meßprinzip zwischen Teilstrahlungs- und Gesamtstrahlungspyrometern. Während Gesamtstrahlungspyrometer die im gesamten Spektralbereich emittierte Strahlung insgesamt zur Messung benutzen, werden bei Teilstrahlungspyrometern nur möglichst enge diskrete Spektralbereiche ausgefiltert und zur Messung verwendet.

Von Aufbau und Meßprinzip her sehr einfach sind Glühfadenpyrometer (z. B. Pyrolux vom VEB Prüfgerätewerk Medingen), das sind visuelle Teilstrahlungspyrometer mit Leuchtdichtevergleich. Dabei wird das Meßobjekt durch ein Fernrohr betrachtet, in dessen Zwischenbildebene sich der Glühfaden einer speziellen Normalglühlampe befindet. In dem mittels strengem Rotfilter ausgefilterten engen Spektralbereich um 650 nm wird der Glühfaden mit dem Meßobjekt auf gleiche Leuchtdichte gebracht, indem der Lampenstrom entsprechend eingestellt wird. Die Stromstärke durch den Glühfaden ist dann ein Maß der Leuchtdichte und wird durch einen entsprechend skalierten Strommesser zur direkten

Temperaturanzeige benutzt.

An die Stelle des (subjektiven) Leuchtdichtevergleichs kann die (objektive) Leuchtdichtemessung (direkt über Fotoelement, Fotodiode oder Fotowiderstand; indirekt über Thermoelement oder Vakuumthermoelement) treten. Als Beispiele hierfür seien das Gesamtstrahlungspyrometer GSP vom VEB Meßgerätewerk "Erich Weinert" Magdeburg mit thermoelektrischer und das Bandstrahlungspyrometer Fotopyr vom Institut für Wärmetechnik und Automatisierung der Silikathüttenindustrie Jena-Burgau mit fotoelektrischer Messung genannt. Im Gesamtstrahlungspyrometer wird durch Linsen oder Hohlspiegel die vom Meßobjekt emittierte Gesamtstrahlung auf den Strahlungsempfänger, z. B. ein Vakuumthermoelement, konzentriert und in diesem entsprechend der insgesamt auftreffenden Strahldichte eine bestimmte elektrische Signalspannung erzeugt, die gemäß dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz mit (der vierten Potenz) der Strahlertemperatur verknüpft ist: die elektrische Signalspannung $U_s = a_1 T^4$ mit a_1 als Gerätekonstante ist ein Maß für die zu messende Temperatur und kann mit einem Millivoltmeter direkt gemessen und als Temperaturwert angezeigt werden.

Druckmessungen können in einfacher Weise durch eine elektrische Messung realisiert werden, wenn der kapazitive Widerstand einer Druckmeßdose in einer Brückenschaltung gemessen wird. Wenn der Abstand der beiden Kondensatorplatten unter dem Einfluß des Druckes sich ändert, so ändert sich auch der kapazitive Widerstand: Kapazitätsvakuummeter für Druckmeßbereich von 10^{3} Torr bis 10^{-4} Torr.

Diese Meßmethode ist für Vakuummessungen nicht geeignet. Geht man davon aus, daß im Vakuum die Energieübertragung durch Wärmeströmung schon bei einigen Torr aufhört und die Energieübertragung durch Strahlung druckunabhängig ist, so kann aus der Proportionalität zwischen der Energieübertragung durch Wärmeleitung und der Gasmoleküldichte (die mittlere freie Weglänge spielt wegen i. allg. geringer Abmessungen der Meßzelle keine erhebliche Rolle) auf eine Möglichkeit der Vakuummessung aus der Wärmeleitfähigkeit des Gases geschlossen werden.

In der auf PIRANI zurückgehenden Meßmethode enthält die Meßzelle einen (oder mehrere) dünnen, durch konstante Stromstärke von etwa 10 mA geheizten Widerstandsdraht (meist aus Platin) und ist in einer Brückenschaltung nach WHEATSTONE geschaltet. Bei konstanter Heizung und damit konstanter Wärmeleistung ist die Temperatur des Heizfadens nur noch von der Wärmeableitung und damit vom Druck abhängig. Abhängig von der Temperatur ändert sich der Widerstand des Heizdrahtes.

Aus dem infolge Brückenverstimmung fließenden Meßstrom durch das Galvanometer (Auslenkungsverfahren) oder der zur Aufrechterhaltung des Brückengleichgewichtes notwendigen Widerstandsänderung im Abgleichzweig der Brücke (Kompensationsverfahren) kann der Druck bestimmt werden. Das Verfahren bleibt allerdings auf einen Druckbereich von etwa 10 Torr bis 10^{-3} Torr beschränkt.

Bei thermoelektrischen Vakuummetern (z. B. nach MOLL) treten an die Stelle des Heizdrahtes und des Vergleichswiderstandes R zwei Thermoelemente, die sich beide in der Meßzelle befinden und, z. B. über einen Eisen-Wasserstoff-Widerstand, mit konstanter Stromstärke geheizt werden. Die durch die Heizung von den Thermoelementen erzeugte Gleichspannung ist temperatur- und damit druckabhängig; sie wird von einem in Druckgrößen skalierten Millivoltmeter angezeigt. Der Druckmeßbereich reicht von etwa 5 Torr bis etwa 10^{-3} Torr.

Gasentladungsvakuummeter nutzen die Stoßionisation der Gasmoleküle bei entsprechender Feldstärke und die Abhängigkeit des Ionenstromes von der Moleküldichte (und der Länge des Ionisierungsweges) aus. In den Meßkopf sind die beiden - meist plattenförmigen - Elektroden eingeschmolzen und an eine hohe Gleichspannung (ca. 1,5 kV) mit einem hochohmigen Schutzwiderstand und einem Strommesser als Anzeigeinstrument in Reihe geschaltet. Die (nichtlineare) Änderung des Ionenstromes ist ein Maß für den Druck (Feinvakuum, ca. 1 bis 10^{-3} Torr).

Unterhalb etwa 10^{-3} Torr ist die normale Ionisation so gering, daß auch mit empfindlichen Stromstärkemeßgeräten eine Druckmessung nicht mehr sinnvoll erscheint. Durch eine geschickte Elektrodenanordnung nach PENNING - dem Anodenring stehen zwei Katodenbleche paarig konzentrisch gegenüber, und diese Elektrodenanordnung befindet sich im homogenen Querfeld eines Permanentmagneten - werden die Ladungsträger auf Spiralbahnen abgelenkt und damit die wirksame Weglänge zwischen Anode und Katode auf ein Mehrfaches des geometrischen Abstandes vergrößert. Die dadurch vermehrte Zahl von (unelastischen) Stößen führt zu einer derartig erhöhten Zahl von ionisierten Gasmolekülen, daß eine Druckanzeige auf der Grundlage dieses Ionenstromes noch bei 10^{-5} bis 10^{-6} Torr möglich ist.

Zur Messung im Ultrahochvakuumbereich ist das Magnetronvakuummeter geeignet, das den prinzipiell gleichen Aufbau wie das Penning-Vakuummeter zeigt. Durch Anwendung eines sehr starken permanenten Magnetfeldes und einer Betriebsspannung von etwa 4 kV wird die Ionisierungs-

wahrscheinlichkeit auf solch hohe Werte angehoben, daß zuverlässige Druckmessungen infolge des wesentlich höheren Entladungsstromes noch bis 10^{-12} Torr ausgeführt werden können. Ein derartiges Gerät wird vom VEB Hochvakuum Dresden unter der Bezeichnung "Picolog" angeboten und ermöglicht die Vakuummessung im Bereich von 10^{-5} bis 10^{-12} Torr.

Einen etwa gleichartigen Vakuumbereich kann man mit dem Ionisationsvakuummeter messen. Die Meßzelle entspricht einer direkt geheizten Triode; die Erhöhung des Ionenstromes wird dabei durch eine infolge Glühemission erheblich gesteigerte Zahl von Elektronen erreicht (bei gleichbleibender Stoßwahrscheinlichkeit ist die Zahl der Stöße proportional der Zahl der Stoßteilchen, d. h. Elektronen). Das Gitter erhält ein die aus der geheizten Katode emittierten Elektronen beschleunigendes positives, die Gegenelektrode (Anode) ein schwaches negatives Potential. Am Gitter wird dann der Emissionsstrom I_- und an der Gegenelektrode der Ionenstrom I_+ gemessen. Die Darstellung von $\lg(I_+/I_-)$ über $\lg(p/\text{Torr})$ ergibt eine fallende Gerade; der Meßbereich erstreckt sich von etwa 10^{-2} Torr bis zu etwa 10^{-6} Torr (also Hochvakuum). Neben dieser - Bremsfeldschaltung genannten - Anordnung mit dem i. allg. höheren Ionenstrom ist auch die umgekehrte Schaltung möglich; das Gitter erhält eine schwach negative und die Gegenelektrode die beschleunigende positive Spannung; in diesem Fall spricht man von einer Verstärkerröhrenschaltung.

Zur Durchführung und Auswertung

1. Man entnimmt der Anweisung am Arbeitsplatz, ob ein Metall- oder Halbleiter-Widerstand als Thermometer verwendet werden soll.

Man bringt ein Widerstandsthermometer und einen Thermistor gemeinsam mit einem (geeichten) zweiten Thermometer (z. B. Hg-Thermometer) in ein Ölbad, das mit einem Thermostaten verbunden ist, oder in einen Muffelofen. Für eine Anzahl von Temperaturwerten wird der Widerstand bestimmt und $R = R(\ )$ grafisch dargestellt. - Es sollen Aussagen über die Reproduzierbarkeit und die Meßfehler gemacht werden.

2. Aus der Platzanweisung folgt, welcher Pyrometer-Typ zur Verfügung steht. In Vorbereitung auf den Versuch ist eine Kopie der Bedienungsanleitung des Gerätes einzusehen.

Mit dem Pyrometer werden Temperaturen von glühenden Metallen bestimmt. Unabhängig von dieser Temperaturbestimmung wird die Temperatur mit einem (geeichten) Thermoelement gemessen. Die ermittelten

Temperaturen sind zu vergleichen und die Abweichungen zu diskutieren.

3. Welches Vakuum-Meter von Fall zu Fall eingesetzt werden soll, geht aus der Anweisung am Arbeitsplatz hervor.

Vom Vakuum-Meßstand wird zunächst eine Skizze angefertigt. Vor Inbetriebnahme der Vorpumpe (und gegebenenfalls der Diffusionspumpe) sind die Hähne zu fetten. Als Meßnormal dient ein McLeod-Manometer oder ein verkürztes "McLEOD", ein Mosersches Vakuum-Meter. - Die elektrisch ermittelten Druckwerte des Pirani- oder Penning-Manometers sind mit den Werten des "McLEOD" zu vergleichen und zu diskutieren.

4.8. Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons

Die Bewegung der elektrischen Ladungsträger in elektrischen und magnetischen Feldern gehört zu den grundlegenden physikalischen Lehrabschnitten. Eine charakteristische Größe der Ladungsträger ist die spezifische Ladung, die bereits auch in Schul-Demonstrationsexperimenten erklärt wird.

Die Methode von H. BUSCH, der sich um die experimentelle Entwicklung der Elektronenmikroskopie verdient gemacht hat, gibt die Grundlage für das Verständnis der Wirkungsweise von Elektronenlinsen in Mikroskopen, Beta- und Massenspektrographen.

Aufgabe

Es ist die spezifische Ladung des Elektrons mit Hilfe des Fadenstrahlrohres oder mit Hilfe einer Elektronenstrahlröhre zu bestimmen.

Grundlagen

Die Masse des Elektrons m kann nur aus der Messung der spezifischen Ladung $-e/m$ bei bekannter Ladung $-e$ bestimmt werden. Die spezifische Ladung des Elektrons kann auf verschiedene Weise ermittelt werden. Nachfolgend werden zwei Verfahren betrachtet, die sich im Praktikum für die Bestimmung dieser fundamentalen Größe eignen

- Bewegung des Elektrons im transversalen Magnetfeld,
- Bewegung des Elektrons im longitudinalen Magnetfeld.

1. Die Bestimmung der spezifischen Elektronenladung im transversalen Magnetfeld (nach Schuster)

In einem evakuierten Glaskolben werden Elektronen von einer Glühkatode freigesetzt und durch eine Spannung U zur Anode beschleunigt. Nach dem Passieren der Anodenöffnung bewegen sich die Elektronen mit der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v}$.

Wirkt nun ein homogenes Magnetfeld ($\underline{B}$) senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit, so beschreiben die Elektronen auf Grund der Lorentz-Kraft

$$\underline{F}_L = q\underline{v} \times \underline{B} \tag{1}$$

eine Kreisbahn mit dem Radius r. Da der Winkel zwischen $\underline{v}$ und $\underline{B}$ gleich $\pi/2$ sein soll und für die Elektronen $q = -e$ ist, gilt

$$F_L = evB. \tag{2}$$

Aus der Gleichgewichtsbeziehung mit der Zentripetalkraft

$$evB = mv^2/r \tag{3}$$

erhält man für den Betrag der spezifischen Ladung

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{Br}. \tag{4}$$

Die Bestimmung von v erfolgt mit Hilfe der klassischen Energiebeziehung

$$eU = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5}$$

Substituiert man hieraus

$$v = \sqrt{2\,\frac{e}{m}\,U} \tag{6}$$

in (4), so erhält man für den Betrag der spezifischen Ladung

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2r^2}. \tag{7}$$

Die fadenförmige Kreisbahn der Elektronen wird infolge Stoßanregungen von Atomen sichtbar, so daß der Radius z. B. mit Hilfe eines Kathetometers oder einer Visiereinrichtung einfach gemessen werden kann.

Die magnetische Induktion B wird mit Hilfe eines Helmholtz-Spulenpaares erzeugt. Es ist zweckmäßig, die Homogenität des Feldes mit einer Probespule zu kontrollieren oder B gegebenenfalls experimentell zu bestimmen.

Ein Helmholtz-Spulenpaar besteht aus 2 flachen Spulen mit dem Radius R. Beide Spulen sind koaxial und parallel im Abstand R/2 zueinander angeordnet und werden vom Strom I durchflossen. Das zwischen den Spulen weitgehend homogene Magnetfeld berechnet man aus

$$B = \frac{0{,}715\ \mu_0 n}{R} I; \qquad (8)$$

n ist die Windungszahl einer Spule, $\mu_0 = 1{,}256\ 10^{-6}$ Vs/Am.

F 1 Leiten Sie diese Beziehungen her!

Die Gleichung (7) gilt nur für kleine Elektronengeschwindigkeiten $v \ll c$. Bei größeren Spannungen U bzw. Energien eU macht sich der relativistische Massenzuwachs zunehmend bemerkbar. Anstelle von (7) gilt die relativistische Beziehung

$$\frac{e}{m_0} = \frac{2U}{B^2 r^2 - U^2/c^2} \cdot \qquad (9)$$

F 2 Man leite die Gleichung (9) her!

2. Die Bestimmung der spezifischen Elektronenladung im longitudinalen Magnetfeld (nach BUSCH)

Die Elektronenbewegung im Magnetfeld unterliegt stets der Lorentz-Kraft (1). Ein parallel zum Magnetfeld bewegtes Elektron behält seine konstante Geschwindigkeit bei: $v_p = \text{const.}$

Ein senkrecht zum Magnetfeld bewegtes Elektron hat die Geschwindigkeit $v_s =: v$, die durch Gl. (2) gegeben ist. Der Radius der Kreisbahn ergibt sich (klassisch) aus (4) zu

$$r = \frac{mv}{eB} \cdot \qquad (10)$$

Die Kreisbahn $2\pi r$ wird in der Zeit $T = 2\pi r/v$ zurückgelegt, d. h.

$$T = \frac{2\pi m}{eB} \cdot \qquad (11)$$

Gemäß dieser Beziehung ist die Umlaufdauer T von der Geschwindigkeit der Elektronen unabhängig. Das gilt jedoch nur für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$, da für größere Geschwindigkeiten bzw. Energien m keine Konstante mehr ist, sondern durch die relativistische Beziehung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \left(1 + \frac{E_{kin}}{E_0}\right) \quad \text{mit} \quad E_0 := m_0 c^2 \qquad (12)$$

ersetzt werden muß.

F 3 Erläutern Sie die Beziehung (12)!

Aus (11) folgt, daß Elektronen, die mit der senkrechten Geschwindigkeitskomponente $\underline{v}_s$ von einem Punkt starten, nach der Zeit T wieder mit diesem Punkt zusammentreffen. Ist nun außer der senkrechten noch eine parallele Geschwindigkeitskomponente $\underline{v}_p$ vorhanden, so ergeben sich für die Elektronenbewegung Schraubenbahnen, indem sich die Komponenten $\underline{v}_s$ und $\underline{v}_p$ superponieren.

Einen Umlauf auf der Schraubenbahn legen die Elektronen nach einer Strecke $l = v_p T$ in longitudinaler Richtung zurück, die man Fokussierungslänge nennt. Gemäß (11) ist diese Länge gegeben durch

$$l = v_p T = \frac{v_p 2\pi m}{eB} . \qquad (13)$$

Die Größe v_p erhält man (klassisch) aus der Beschleunigungsspannung U, die auf die Elektronen zwischen Katode und Anode wirkt - vgl. die Beziehungen (5) und (6) -, so daß gilt

$$l = \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} . \qquad (14)$$

Für die Messung verwendet man eine Oszillografenröhre. Die Glühelektronen gelangen durch ein elektronenoptisches Linsensystem zum Schirm, wo sie einen Leuchtfleck erzeugen, dessen Helligkeit variiert werden kann.

Legt man an das Ablenk-Plattenpaar, das den Abstand l vom Leuchtschirm hat, eine Wechselspannung, so entsteht auf dem Leuchtschirm nunmehr ein Strich.

Bringt man die Elektronenröhre in ein homogenes Magnetfeld (Helmholtz-Spulenpaar oder lange einlagige Zylinder-Spule), so bewegen sich die Elektronen beim Einschalten des Spulenstromes auf schraubenförmigen Bahnen (Abb. 4.8.(1)). Hierbei stimmt die Richtung des Magnetfeldes mit der Längsbewegung der unabgelenkten Elektronen überein. Auf dem Leuchtschirm beobachtet man bei Zunahme des Spulenstromes eine Drehung des Leuchtstriches und Verkürzung bis zu einem Punkt. In diesem Fall ist die kritische Spulenstromstärke erreicht, d. h. Fokussierungslänge und Baulänge stimmen überein. Bei weiterer Erhöhung der Spulenstromstärke würde sich der Leuchtpunkt wieder zu einem Strich auseinanderziehen.

Die Entstehung von schraubenförmigen Bahnen läßt sich mit dem Fadenstrahl gut sichtbar machen, wenn man die Richtung von $\underline{B}$ nicht senkrecht zur Geschwindigkeit wählt, das Helmholtz-Spulenpaar also etwas dreht. In diesem Fall bildet der Fadenstrahl keinen Kreis.

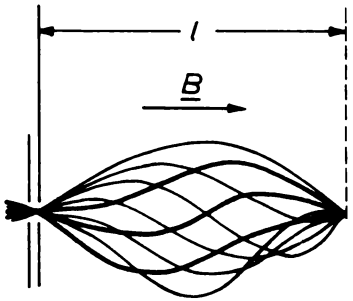


Abb. 4.8.(1) Elektronenbahnen im magnetischen Längsfeld

Nach der Strecke l hat sich für den Elektronenweg gerade eine Schraubenwindung ergeben. Somit ergibt sich aus Gl. (14) für den Betrag der spezifischen Ladung und für $v \ll c$

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 l^2} \,. \tag{15}$$

Bei Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit gilt

$$\frac{e}{m_o} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 l^2 - 4\pi^2 U^2/c^2} \,. \tag{16}$$

F 4 Leiten Sie diese Gleichung her!

Verwendet man zur Erzeugung des Magnetfeldes der Induktion B anstelle des Helmholtz-Spulenpaares eine stromdurchflossene Spule der Länge L und des Durchmessers D, so gilt statt (8) nunmehr für die Spulenmitte

$$B = \frac{\mu_o n I}{\sqrt{L^2 + D^2}} \,. \tag{17}$$

F 5 Leiten Sie diese Gleichung her!

Damit das Feld in guter Näherung homogen ist, muß gelten $L > 4D$.

Zur Durchführung

Zu 1

Das Fadenstrahlrohr wird gemäß den speziellen Angaben am Arbeitsplatz (maximale Heizstromstärke der Katode, maximale Anodenspannung) in Betrieb genommen.

Falls das Fadenstrahlrohr selbst evakuiert werden muß, ist vor Inbetriebnahme der Vakuumanlage eine Skizze anzufertigen, aus der insbesondere die Hahnstellungen für die einzelnen Phasen hervorgehen müssen.

Wenn die Induktion B des Helmholtz-Spulenpaares experimentell bestimmt werden soll, ist wie folgt zu verfahren: Man nimmt eine Eichkurve für eine einlagige Normalspule - Gl. (17) - auf. Dazu führt man eine Probespule in das Feld ein. Durch Ein- und Ausschalten des Spulenstromes entsteht ein Stromstoß, den man mit einem ballistischen Galvanometer mißt. Für die verschiedenen Stromstärken der Spule, die bestimmten B-Werten entsprechen, erhält man die Eichkurve: Galvanometeranzeige als Funktion von B.

Führt man die Probespule in das Feld des Helmholtz-Spulenpaares ein, so ergeben sich bei Ein- und Ausschaltvorgängen wiederum bestimmte Galvanometeranzeigen. Aus der Eichkurve entnimmt man die zugehörigen B-Werte. Aus der dreidimensionalen grafischen Darstellung des Feldes des Helmholtz-Spulenpaares kann man die Abweichungen von der Homogenität des Feldes erkennen. Die Messung der Induktion kann auch mit einem Hall-Generator erfolgen. Es muß darauf geachtet werden, daß der fadenförmige Kreis, den die Elektronen durchlaufen, konzentrisch zu dem Helmholtz-Spulenpaar liegt.

Der Radius der Elektronenbahn ist jeweils fünfmal zu messen. Hierbei werden die Beschleunigungsspannung U und die magnetische Induktion B variiert, so daß schließlich e/m für etwa 10 verschiedene Radien bestimmt wird.

Zu 2

Die Elektronenstrahlröhre wird in Betrieb genommen (spezielle Angaben am Arbeitsplatz) und in die Spule bzw. in das Helmholtz-Spulenpaar gebracht.

Der Spulenstrom wird so eingestellt, daß auf dem Oszillografenschirm ein scharfer Leuchtfleck erscheint. Zur Prüfung der Symmetrieachsen des Magnetfeldes und der Elektrodenanordnung polt man den Spu-

lenstrom um.

Die zugehörige Induktion B wird ermittelt. Es sind für fünf verschiedene Beschleunigungsspannungen der Oszillografenröhre die (e/m)-Werte zu bestimmen und der Mittelwert zu bilden. Der Spulenstrom wird selbstverständlich bei der jeweils eingestellten Spannung mehrmals gemessen.

Zur Auswertung

1. Für jeden der (e/m)-Werte, die für unterschiedliche U- und B-Werte gemessen werden, ist die Vertrauensabweichung zu berechnen. Für die endgültige Angabe des (e/m)-Wertes ist mit dem gewogenen Mittel zu rechnen.

2. Es ist eine ausführliche Fehlerdiskussion zu führen und dabei zu zeigen, wie man den l-Wert genauer bestimmen könnte. Schließlich ist der Einfluß der Feldinhomogenität der verwendeten Spulen zu erörtern. Bei dem Verfahren nach BUSCH handelt es sich um eine Nullmethode; es soll dargelegt werden, warum diese Verfahren zur (e/m)-Bestimmung genauer als dasjenige mit dem Fadenstrahlrohr ist.

Fragen

F 1 bis F 5 siehe Text.

F 6 Nennen Sie weitere Methoden zur Bestimmung der spezifischen Ladung!

F 7 Wie groß darf die Beschleunigungsspannung U der Elektronen höchstens sein, damit der relative Fehler infolge der relativistischen Massenveränderlichkeit 1 % beträgt?

F 8 Es sind Zweck und Wirkungsweise des Magnetrons zu erläutern.

F 9 Man erläutere das Prinzip des (Synchro)-Zyklotrons für die Beschleunigung von Protonen. Es sind zu berechnen (klassisch und relativistisch) für B = 1 Tesla und für die Beschleunigungsspannung zwischen den Duanten von 10^4 Volt, wenn der Radius der Endbahn R = 5 m beträgt:

1. Die erreichte Endenergie und die Geschwindigkeit.
2. Die Kreisfrequenz ω für den Protonenumlauf und die Zeit T für einen Umlauf. Es ist zu zeigen, daß v und vom Radius abhängen.
3. Die Strecke, die die Protonen auf einer spiralartigen Bahn bis zum Erreichen der Endenergie zurücklegen.

F 10 Man vergleiche die Kreisbahnradien, die sich nach der klassischen (7) und relativistischen Beziehung (9) ergeben.

F 11 Auf welche Weise läßt sich die Abhängigkeit der spezifischen Ladung bzw. der Masse von der Geschwindigkeit messen?

F 12 Zeigen Sie, daß im Quotienten e/m nur die Masse transformiert wird und die Ladung e eine Invariante ist!

F 13 Wie zeigt man experimentell, daß Elektronen die Träger des elektrischen Stromes im Metall sind?

4.9. Elektrolyse - Bestimmung der Faradayschen Konstante

Im Gegensatz zu festen Leitern, bei denen durch den Elektronenstrom die elektrische Leitung erfolgt, beruht die Leitung in Flüssigkeiten (Elektrolyten) auf Ionenbewegung. Es erfolgt neben dem Ladungs- auch ein Stofftransport. Der Zusammenhang zwischen transportierter Ladung und Stoffmenge wird durch die Faradayschen Gesetze beschrieben.

Im Experiment wird die Elektrolyse verschiedener wäßriger Lösungen untersucht und die Faradaysche Konstante bestimmt.

Aufgaben

Es sind die elektrochemischen Äquivalente von Wasserstoff und Kupfer zu bestimmen. Aus den Meßergebnissen ist die Faradaysche Konstante zu berechnen.

Grundlagen

Als Elektrolyse bezeichnet man die Zersetzung von Elektrolyten durch einen elektrischen Strom. Elektrolyte sind dabei chemische Verbindungen mit heteropolarer Bindung (Ionenbindung), es sind vor allem die anorganischen Säuren, Basen und Salze. Ihnen gemeinsam ist der Aufbau aus einem Metall (oder Wasserstoff) und einem nichtmetallischen Radikal (Säurerest oder Hydroxylgruppe). Durch die geringe Ionisierungsenergie des Metalls und die große Elektronenaffinität des Radikals kommt es zu einem Elektronenaustausch und damit zur heteropolaren Bindung.

Durch Energiezufuhr (Schmelzen) oder durch Lösen in Wasser wird der feste Verband des Ionenkristalls oder -moleküls zerstört, und die Ionen werden frei beweglich (Dissoziation). Wasser ist als elektrolytisches Lösungsmittel auf Grund seiner hohen relativen Dielektrizitätskonstante ($\varepsilon_r \approx 81$) und des Dipolmomentes der H_2O-Moleküle besonders geeignet. Die Wassermoleküle schieben sich zwischen die Ionen und lagern sich z. T. an diese an (Hydratation), so daß es zu einer Ionentrennung und damit zu frei beweglichen Ionen kommt.

Selbstverständlich wirken zwischen diesen frei beweglichen Ionen Coulombkräfte, so daß sie z. T. wieder zu Ionenmolekülen rekombinieren. Es stellt sich also ein von der Temperatur und der Konzentration der Lösung abhängiges Gleichgewicht zwischen frei beweglichen Ionen und Molekülen ein (Dissoziationsgleichgewicht).

Wird jetzt an zwei Elektroden, die in eine wäßrige Lösung eines Elektrolyten tauchen, Spannung gelegt, wandern die Ionen auf Grund des elektrischen Feldes zwischen den Elektroden zu diesen Elektroden und geben dort ihre Ladung ab.

Das nichtmetallische Radikal hat vom Metall oder Wasserstoff Elektronen aufgenommen, ist also ein negativ geladenes Ion (Anion) und wandert zur Anode. Das Metall- oder Wasserstoffion ist durch Elektronenabgabe positiv geladen (Kation) und wandert zur Katode.

Die an den Elektroden entladenen Ionen werden entweder als Atome oder Moleküle abgeschieden, oder sie reagieren in einer Sekundärreaktion mit dem Elektrodenmaterial oder dem Lösungsmittel.

F 1 Es ist anzugeben, welche Reaktionen sich an den Elektroden bei der Elektrolyse von wäßriger $CuSO_4$- und H_2SO_4-Lösung abspielen.

Da die Ionen durch Elektronenaustausch gebildet werden, ist jedes w-wertige Ion Träger von w elektrischen Elementarladungen. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen der Masse m des abgeschiedenen Stoffes und der durch den Elektrolyten geflossenen Ladung $Q = \int I dt$ (bei konstanter Stromstärke gilt: $Q = It$). Diesen Zusammenhang beschreibt das 1. Faradaysche Gesetz:

$$Ä := \frac{m}{Q} = \text{const.} \tag{1}$$

Die Konstante Ä wird als das elektrochemische Äquivalent bezeichnet, sie hängt von der relativen Atommasse und der Wertigkeit des abgeschiedenen Stoffes ab.

Das 2. Faradaysche Gesetz

$$m_1/m_2 = V_1/V_2 \tag{2}$$

vergleicht die von der gleichen Ladung Q abgeschiedenen Massen verschiedener Stoffe. $V := M/w$ ist dabei das Moläquivalent (Quotient aus molarer Masse und Wertigkeit).

Um einen einwertigen Stoff durch Elektrolyse an einer Elektrode abzuschneiden, braucht man die molare Ladung

$$\frac{Q}{n} = e\,N_A = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\,mol^{-1} = 96485\ C\ mol^{-1} =: F. \tag{3}$$

Diese molare Ladung wird als Faradaysche Konstante bezeichnet.

Bei einem w-wertigen Ion trägt jedes Ion nicht nur eine, sondern w Elementarladungen, so daß Gl. (3) allgemeiner lautet

$$\frac{Q}{n} = wF. \tag{4}$$

Hieraus folgt die Faradaysche Konstante zu

$$F = \frac{Q}{wn} = \frac{Q}{w}\frac{M}{m} = \frac{V}{\bar{A}}. \tag{5}$$

Zur Durchführung und Auswertung

Aus einer Gleichspannungsquelle, einem Strommeßgerät, einem Regelwiderstand und zwei in Reihe geschalteten elektrolytischen Zellen wird ein einfacher, unverzweigter Stromkreis aufgebaut.

Die erste Zelle besteht aus zwei Kupferplatten als Elektroden, die in $CuSO_4$-Lösung als Elektrolyten tauchen. Die Kupferplatten werden vor dem Experiment mit Alkohol oder Kohlenstofftetrachlorid entfettet, sorgfältig getrocknet und mit einer Analysenwaage sehr genau gewogen. Vor dem Waschen können die Platten mit feinkörnigem Sandpapier leicht aufgerauht werden.

Die zweite Zelle ist ein Hofmannscher Wasserzersetzungsapparat, der mit stark verdünnter H_2SO_4-Lösung gefüllt ist.

Beide Zellen werden zunächst von einem Strom von etwa 400 mA durchflossen. Nach etwa 15 bis 20 min wird der Hofmannsche Apparat aus dem Stromkreis entfernt, durch die Kupferzelle fließt weitere 50 bis 60 min lang der gleiche Strom. Die Stromstärke muß laufend kontrolliert und konstant gehalten werden, die Zeiten sind sehr genau zu messen.

Da sich Sauerstoff relativ stark in Wasser löst, entspricht das Volumen des O_2-Gases nicht dem wirklich abgeschiedenen Sauerstoff. Beim Hofmannschen Apparat wird daher nur der abgeschiedene Wasserstoff für die Auswertung verwendet. Die Temperatur des Gases entspricht der Zimmertemperatur, sein Druck setzt sich aus Luftdruck, Schweredruck der überstehenden Wassersäule und Dampfdruck des Wassers zusammen. Zur Bestimmung der Masse des abgeschiedenen Wasserstoffs wird sein Volumen zunächst auf den Normzustand reduziert.

Die Kupferelektroden werden sehr vorsichtig in destilliertem Wasser abgespült, kurz in Spiritus getaucht und sorgfältig getrocknet; danach wird ihre Masse bestimmt.

Gemäß Gleichung (1) werden die elektrochemischen Äquivalente und

gemäß Gleichung (5) die Faradaysche Konstante berechnet.

Fragen

F 1 siehe Text.

F 2 Erläutern Sie die Begriffe Ionenbindung und Dissoziation.

F 3 Unterscheiden Sie Loschmidtsche Zahl, Loschmidtsche Konstante, Avogadrosche Zahl, Avogadrosche Konstante!

F 4 Was versteht man unter Moläquivalent und molarer Masse?

F 5 Geben Sie eine anschauliche Deutung der Faradayschen Konstante!

F 6 Geben Sie Beispiele für die industrielle Anwendung der Elektrolyse!

F 7 Warum läßt sich Eisen, aber nicht V4A-Stahl verchromen?

F 8 Erläutern Sie den Mechanismus der elektrischen Leitfähigkeit eines Elektrolyten!

F 9 Geben Sie ein Demonstrations-Experiment an zur Wanderung der Ionen in einem elektrischen Feld.

F 10 Warum mißt man den Widerstand eines Elektrolyten nicht mit Gleichstrom?

F 11 Geben Sie bei der Wasserzersetzung (Elektrolyse von Schwefelsäure) die Dissoziationsgleichung an und zeigen Sie, wie es zur Wasserstoffbildung an der Katode und zur Sauerstoffbildung an der Anode kommt!

F 12 Geben Sie die Dissoziationsgleichung für eine $CuSO_4$-Lösung an und erklären Sie die Cu-Abscheidung an der Katode!

4.10. Kennlinien

Elektronische Bauelemente haben typische nichtlineare Kennlinien, deren Form lediglich abschnittsweise durch Näherungsgleichungen beschreibbar ist.

Zur Beurteilung der Funktionsweisen von Dioden, Trioden und Transistoren und deren Einsatzmöglichkeiten hat man die Abhängigkeit der Stromstärken von den Betriebsspannungen zwischen den wirksamen Elektroden experimentell zu untersuchen.

Aufgaben (Auswahl)

1. Kennlinien von Halbleiter- und Röhrendioden.
2. Kennlinienfelder einer Triode oder eines MOSFETs.
3. Vierquadranten-Kennlinienfelder eines bipolaren Transistors in Emitterschaltung.

1. Zum Ladungsträger-Transport im Medium eines Bauelementes

Die Wirkungsweise elektronischer Bauelemente basiert auf der Erzeugung frei beweglicher Ladungsträger an Grenzflächen und auf den Möglichkeiten der Ladungsträgerbewegungen in Gasen, Halbleitern oder im Vakuum. Die Ströme der Ladungsträger werden in den Bauelementen im allgemeinen durch Form und Richtung der elektrischen Felder zwischen den wirksamen Elektroden bestimmt. Bei den Dioden erreicht man dadurch die Ventilwirkung. Durch das Einfügen von einer oder mehreren Gitterelektroden zwischen Katode und Anode kann der Elektronenstrom einer Vakuumröhre mit Hilfe der negativen Gitter-Katoden-Spannung U_g stetig gesteuert werden, und man erhält die statischen Kennlinienfelder dieser Röhren (s. Abb. 4.10.(1)).

Beim MOSFET erfolgt in analoger Weise unter der Wirkung eines elektrischen Querfeldes die gesteuerte Verarmung oder Anreicherung

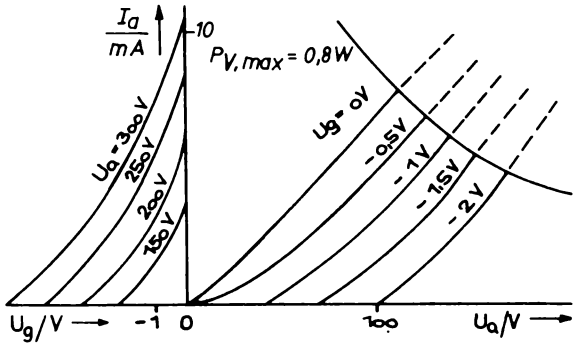


Abb. 4.10.(1) Statisches Kennlinienfeld einer Röhre

von Ladungsträgern im Halbleiter-Kanal zwischen Drain und Source.

In den bipolaren Transistoren wird durch die Variation der Ladungsträger-Injektion im durchlassenden pn-Übergang des Steuerkreises erreicht, daß nicht nur dessen Widerstand (resistor) geändert wird, sondern eine Übertragung (transfer) dieser Widerstandsänderung auch auf den sperrgepolten pn-Übergang des Ausgangskreises erfolgt. Da je nach Typ bei diesen Transistoren zwischen Basis und Emitter Stromstärken von einigen 10^{-6} bis 10^{-3}A auftreten und außerdem eine

Rückwirkung des Ausgangskreises auf den Eingang erfolgt, ergeben sich vier Kennlinienfelder, die man in übersichtlicher Weise in Vierquadranten-Kennlinienfeldern zusammenfügen kann (s. Abb. 4.10.(2)).

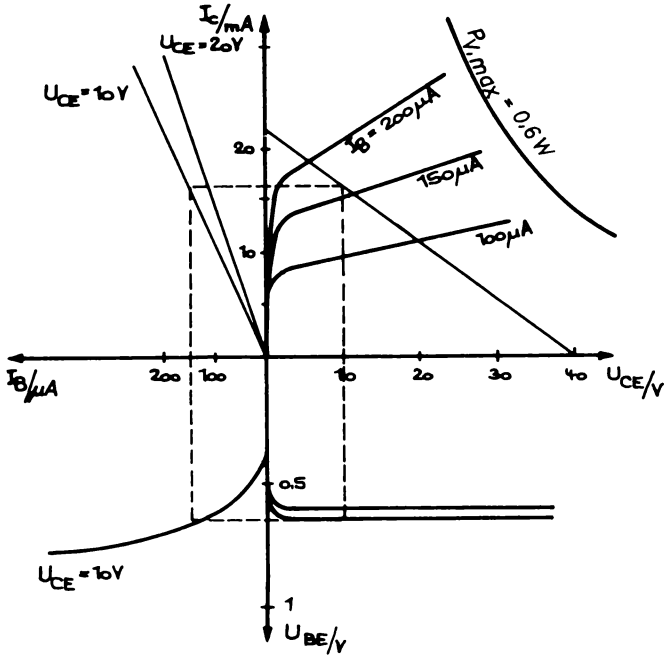


Abb. 4.10.(2) Vierquadranten-Kennlinienfeld eines npn-Transistors

F 1 Wie kommt die Glühelektronen-Emission zustande, und welche Gesetzmäßigkeit gilt dafür?

F 2 In welcher Weise unterscheiden sich Eigenleitung und Störstellenleitung bei Halbleiter-Materialien?

F 3 Skizzieren Sie die Schaltsymbole von Zwei- und Drei-Elektroden-Bauelementen, bezeichnen Sie die Elektroden, und tragen Sie jeweils die Stromrichtung ein!

F 4 Wie wird die Wärme nach außen abgeführt, die beim Stromtransport in einem elektronischen Bauelement entsteht? Was versteht man in diesem Zusammenhang unter der maximalen Verlustleistung des Bauelementes?

F 5 Diskutieren Sie die Wirkungsweise eines pn-Überganges bei den unterschiedlichen Polungsmöglichkeiten an einer äußeren Spannungsquelle!

2. Kennwerte der Dioden und Kennlinienbereiche

Aus den Kennlinien (s. Abb. 4.10.(3)) kann man für bestimmte Kurvenbereiche einige Kennwerte bestimmen. Wesentlich unterscheiden sich die Werte des Gleichstromwiderstandes R = U/I und des differentiellen oder Wechselstromwiderstandes r = dU/dI im Durchlaßbereich und im

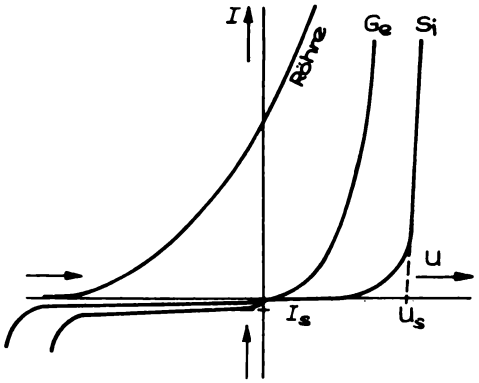


Abb. 4.10.(3) Kennlinien für Röhren sowie für Ge- und Si-Dioden

Sperrbereich der Kennlinie. Das Verhältnis des differentiellen Sperrwiderstandes r_r zum differentiellen Durchlaßwiderstand r_f bezeichnet man als Schaltverhältnis. Es erreicht bei Ge-Flächendioden Werte von 5000 bis 10^5, bei Si-Flächendioden Werte von 10^6 bis 10^8 und bei Selen-Flächendioden einige 10^3.

Aus einer Halbleiter-Diodenkennlinie läßt sich durch Tangentennäherung die Schleusenspannung U_S bestimmen. Die Antidiffusionsspannung $U_D < U_S$ läßt sich abschätzen mit dem Spannungswert, oberhalb dessen der Durchlaßstrom merklich anzusteigen beginnt.

Bedeutende Kennwerte sind der höchstzulässige Durchlaßstrom $I_{f,max}$ und die maximale Sperrspannung $U_{r,max}$, die vom Hersteller angegeben werden.

F 6 Wie benennt man die drei Teilabschnitte der Charakteristik einer Glühelektronenröhre, und wie lauten die dazugehörigen Näherungsgleichungen?

3. Kennwerte und Kennlinienbereiche von Trioden und MOSFETs

Bei den steuerbaren elektronischen Bauelementen sind die Eingangskennlinien den Ausgangskennlinien gegenübergestellt. Da man für eine Kennlinie entweder die Ausgangsspannung oder die Steuerspannung konstant hält, bekommt man Scharen von Kennlinien mit entsprechenden Parametern. Als inneren Widerstand einer Diode bezeichnet man den differentiellen Widerstand

$$R_i := \left(\frac{\partial U_a}{\partial I_a}\right)_{U_g}$$

bei konstanter negativer Gitterspannung (U_g = const). Die Steilheit der Anodenstrom-Gitterspannungs-Kennlinie ist definiert durch

$$S := \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_g}\right)_{U_a}$$

Das Produkt aus differentiellem Widerstand R_i und Steilheit S ergibt die Leerlaufverstärkung

$$v_L := R_i S = \frac{\partial U_a}{\partial U_g}_{I_a}$$

bei unverzerrter Signalübertragung. Den Kehrwert

$$D := \left(\frac{\partial U_g}{\partial U_a}\right)_{I_a} = \frac{1}{v_L}$$

bezeichnet man als Durchgriff. Für jeden Arbeitspunkt der Triode gilt die Barkhausensche Röhrenformel

$$SR_iD = 1.$$

F 7 Machen Sie sich den Begriff Durchgriff plausibel (mit Beispiel D = 5 % für EC 92)!

In analoger Weise wie bei der Triode wird die Steilheit eines MOSFETs definiert:

$$S := \left(\frac{\partial I_D}{\partial U_{GS}}\right)_{U_{DS}}$$

Bei konstanter Drain-Source-Spannung wird dadurch die Steilheit der Drainstrom-Gate-Source-Spannungs-Charakteristik beschrieben.

4. Vier-Kennlinienfelder von bipolaren Transistoren und ihre Kennwerte

In Abb. 4.10.(2) ist der prinzipielle Verlauf einiger Kennlinien eines npn-Transistors dargestellt.

Die dynamischen Kenngrößen für die Kleinsignalverstärkung eines Transistors werden für die verschiedenen Grundschaltungen angegeben. Für die Emitterschaltung gelten die Definitionen: Der (Wechselstrom)-Eingangswiderstand (bei kurzgeschlossenem Ausgang)

$$r_{1e} = h_{11e} := \left(\frac{\partial U_{BE}}{\partial I_B}\right)_{U_{CE}},$$

die Stromverstärkung (bei kurzgeschlossenem Ausgang)

$$\beta = h_{21e} := \left(\frac{\partial I_C}{\partial I_B}\right)_{U_{CE}},$$

der (Wechselstrom-)Ausgangsleitwert (bei offenem Eingang)

$$\frac{1}{r_{2e}} = h_{22e} := \left(\frac{\partial I_C}{\partial U_{CE}}\right)_{I_B}$$

und die Spannungsrückwirkung

$$\frac{1}{v_u} = h_{12e} := \left(\frac{\partial U_{BE}}{\partial U_{CE}}\right)_{I_B}.$$

F 8 Erläutern Sie Aufbau, Wirkungsweise und Schaltzeichen der pnp- bzw. npn-Transistoren!

F 9 Welches sind die wesentlichen Vor- und Nachteile von Transistoren gegenüber Verstärker-Röhren?

F 10 Welche Bedeutung hat die maximale Kollektor-Verlustleistung?

F 11 Geben Sie die Hybridform der Vierpolgleichungen eines Transistors an, und deuten Sie die h-Parameter!

F 12 Zeichnen Sie in den Transistor-Kennlinienfeldern die näherungs-

weise Bestimmung der h-Parameter im Arbeitspunkt A in den vier Quadranten ein!

Zur Durchführung und Auswertung

Strom-Spannungskennlinien von Dioden können stufenweise mit Zeigerinstrumenten (Abbildungen 4.10.(4) und 4.10.(5)) oder stufenlos mit Oszillografen (Abb. 4.10.(6)) aufgenommen werden.

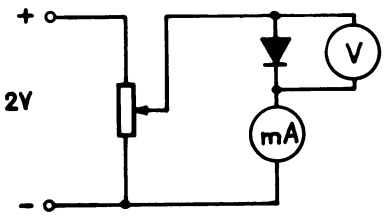


Abb. 4.10.(4) Meßschaltung zur Aufnahme der Durchlaß-Kennlinie einer Diode

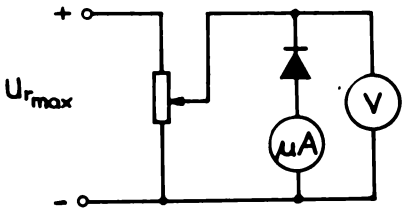


Abb. 4.10.(5) Schaltung zur Aufnahme der Sperr-Kennlinie einer Diode

F 13 Warum muß man bei der Aufnahme der Sperr-Kennlinie die stromrichtige Schaltung der Meßgeräte wählen?

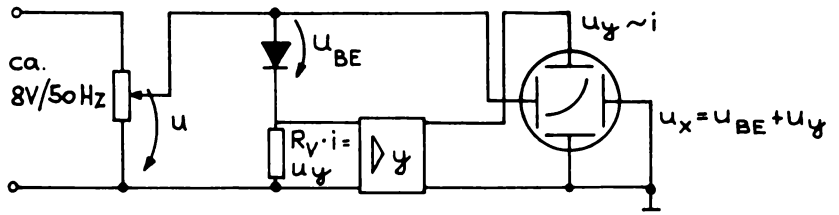


Abb. 4.10.(6) Kennlinien-Aufnahme mit einem Oszillografen

Der Meßwiderstand R_v muß so groß dimensioniert werden, daß der Diodenstrom hinreichend begrenzt wird, um eine thermische Zerstörung des Bauelementes zu vermeiden. Außerdem muß der Widerstand R_v aber

möglichst klein sein, damit wegen $u_x = u_{BE} + u_y$ die Kennlinie durch u_y nicht zu stark geschert wird. Will man diese Scherung gänzlich vermeiden, so muß der Erdungspunkt des Oszillografen zwischen das Bauelement und R_v gelegt werden und unmittelbar $u_y = R_v i = u_y(u_{BE})$ oszillografiert werden. Die Auswertung erfolgt dann unter Berücksichtigung der Phasendrehung des Wechselstromes i.

F 14 Berechnen Sie einige differentielle Widerstände und kennzeichnen Sie damit niederohmige und hochohmige Kennlinienteile!

F 15 Wie groß sind die Schaltverhältnisse für die untersuchten Dioden?

F 16 Bestimmen Sie den Sättigungs-Sperrstrom I_s! Versuchen Sie die Abweichungen zwischen den gemessenen Kennlinien der Halbleiterdioden und den nach der Shockley-Gleichung $I = I_s(\exp eU/kT - 1)$ für die Temperatur $T \approx 400$ K des pn-Übergangs berechneten Kurvenverlauf zu interpretieren!

2. Transistor-Kennlinien

2.1. Unter Beachtung der Kollektor-Verlustleistung $P_{C,max}$ ist eine Ausgangskennlinie des Transistors mit Hilfe der Meßschaltungen (Abb. 4.10.(7) bzw. (Abb. 4.10.(8)) aufzunehmen.

2.2. Gleichzeitig mit den Messungen für $I_C = I_C(U_{CE}) = \text{const}$ ist eine Spannungs-Rückwirkungs-Kennlinie $U_{BE} = U_{BE}(U_{CE})$ bei ebenfalls konstantem I_B aufzunehmen.

2.3. Bei konstanter Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} wird eine Eingangs-Dioden-Kennlinie $I_B = I_B(U_{BE})$ gemessen. Man zeichnet die

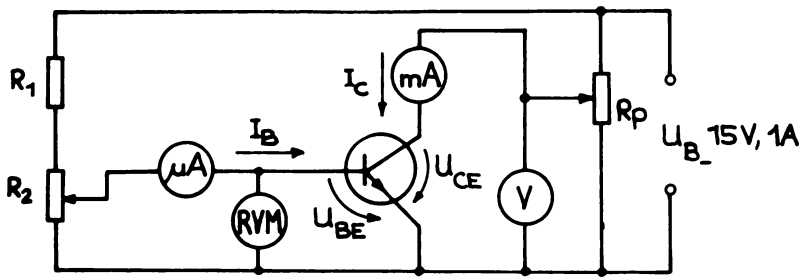


Abb. 4.10.(7) Emittermeßschaltung für die statischen Kennlinien

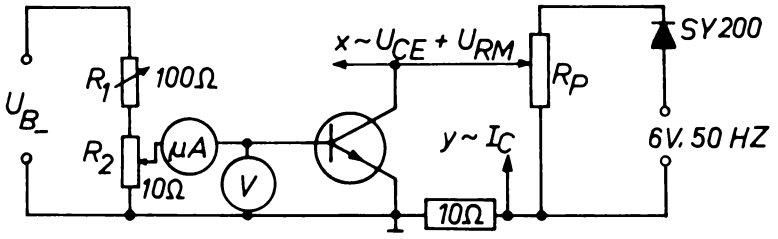


Abb. 4.10.(8) Schaltung zum Oszillografieren der I_C-$(U_{CE})_{I_B}$-Kennlinien

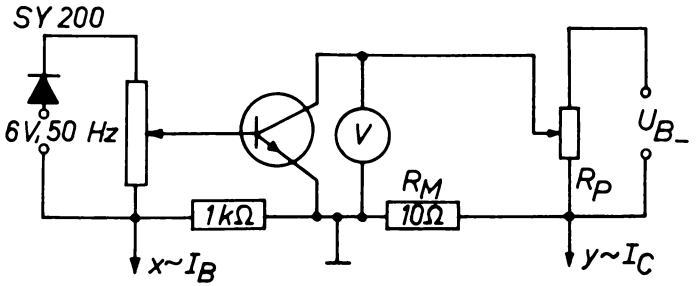


Abb. 4.10.(9) Oszillografische Darstellung von $I_C = I_C(I_B)_{U_{CB}}$

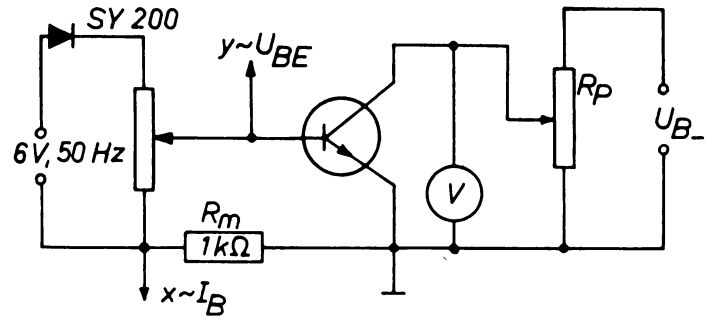


Abb. 4.10.(10) Oszillografische Aufnahme von $I_B = I_B(U_{BE})_{U_{CE}}$

einzelnen Kennlinien auf Klarsichtfolie und überträgt sie in mm-Papier. Für die verwendeten x- bzw. y-Verstärkungen ist die Eichung des Oszillografen auszuführen. Bei spiegelbildlich gegenüber den bekannten Kennlinienbildern verlaufenden Oszillogrammen ist das Folienbild zweckmäßig umzudrehen.

2.4. Mit einer Schaltung nach Abb. 4.10.(9) sind Stromverstärkungs-Kennlinien $I_C = I_C(I_B)$ für geeignete Parametergrößen U_{CE} = const zu oszillografieren.

2.5. Vergleichen Sie die oszillografierten Kennlinien mit den punktweise gemessenen.

2.6. In das Ausgangskennlinienfeld ist für eine vorgegebene Betriebsspannung U_B eine Widerstandsgerade zur Dimensionierung einer Spannungsverstärkerstufe einzuzeichnen. Bauen Sie den danach errechneten Kollektor-Widerstand R_C in die Meßschaltung (Abb. 4.10.(7)) ein und überprüfen Sie meßtechnisch die Arbeitsgerade $I_C = I_C(U_{CE})$ durch stufenweise Veränderung der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} oder des Basisstromes I_B! Diskutieren Sie die Grenzen einer möglichen linearen Aussteuerung des Verstärkers durch sinusförmige Eingangsgrößen.

2.7. Legen Sie auf der Arbeitsgeraden einen Arbeitspunkt für einen Verstärker im A-Betrieb fest, und bestimmen Sie dafür die h-Parameter! Vergleichen Sie diese mit tabellierten Daten! Die Fehler der näherungsweisen grafischen Bestimmung der Hybridparameter sind quantitativ abzuschätzen.

3. Kennlinien von Trioden und MOSFETs

3.1. Mit einer zweckmäßig abgewandelten Schaltung analog zu Abb. 4.10.(8) werden die Ausgangskennlinien eines MOSFETs (z. B. SMY 50/52) oder einer Triode (z. B. EC 92) oszillografiert. Als Parameter wird jeweils die Gitterspannung bzw. die Gate-Source-Spannung eingestellt. Diskutieren Sie den Verlauf der Kennlinien.

3.2. Die Aufnahme der Steuerkennlinien $I_a = I_a(U_g)$ bzw. $-I_D = -I_D(-U_{GS})$ erfolgt mit Schaltungen nach Abb. 4.10.(11). Als Parameter ist die Anodenspannung bzw. die Drain-Source-Spannung jeweils konstant zu halten. Erläutern Sie die Steuerwirkung dieser aktiven Bauelemente.

3.3. Wählen Sie einen Arbeitspunkt in den Kennlinienfeldern und bestimmen Sie dazu die Kennwerte!

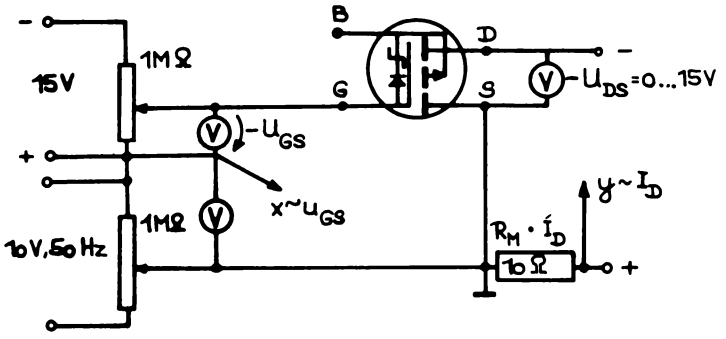


Abb. 4.10.(11) Schaltung zur oszillografischen Aufnahme der Kennlinien $-I_D = -I_D(-U_{GS})_{-U_{DS}}$

F 17 Erläutern Sie die verwendeten Schaltungen zur oszillografischen Kennlinien-Aufnahme!

F 18 Wie groß sind die Abweichungen der experimentell bestimmten Kennwerte der Bauelemente von den tabellierten? Wie sind die Abweichungen zu erklären?

F 19 Wodurch unterscheiden sich die aufgenommenen statischen Kennlinien von den dynamischen Kennlinien dieser Bauelemente?

4.11. Netzgleichrichter

Zum Betrieb vieler elektrischer Schaltungen ist Gleichspannung erforderlich. Sie wird entweder direkt Gleichspannungsquellen (Elementen, Batterien, Akkumulatoren) entnommen oder durch Gleichrichtung einer Wechselspannung gewonnen. Weil die Gleichrichtung der Netzspannung eine sehr ökonomische Möglichkeit zur Bereitstellung von Gleichspannungen ist, sollen ihre Eigenschaften im Experiment untersucht werden.

Aufgaben

1. Das Verhalten einer mit einem Halbleiterventil (wahlweise Selen, Silizium oder Germanium) aufgebauten Einweggleichrichterschaltung soll bei Belastung mit einem ohmschen Widerstand, mit einem ohmschen und kapazitiven Widerstand und bei nachgeschalteter Siebkette untersucht werden.
2. Die Eigenschaften von Zweiweggleichrichterschaltungen (Mittelpunktschaltung, Brückenschaltung) und Verdopplerschaltungen sind experimentell zu untersuchen.

Grundlagen

Halbleitergleichrichter bestehen aus Selen, Germanium oder Silizium. Der pn-Übergang des Gleichrichters stellt einen richtungsabhängigen nichtlinearen Widerstand dar.

F 1 Begründen Sie diese Aussage!

Die Abb. 4.11.(1) zeigt die Strom-Spannungs-Kennlinie eines Halbleitergleichrichters. Aus der Kennlinie ist ersichtlich, daß der Strom

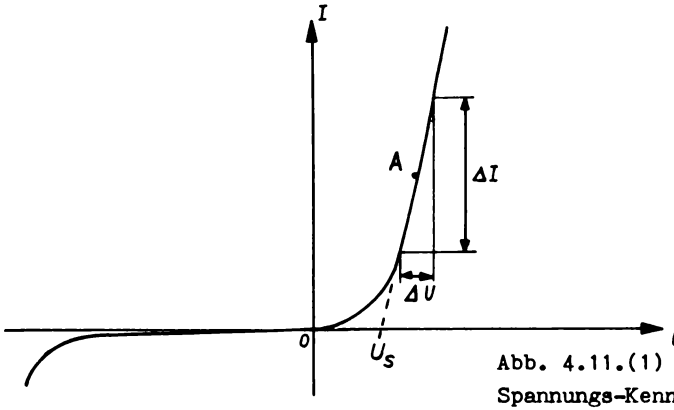


Abb. 4.11.(1) Strom-Spannungs-Kennlinie eines Halbleitergleichrichters

in Sperrichtung wesentlich kleiner ist als in Flußrichtung, der Innenwiderstand R_i dagegen in Sperrichtung wesentlich größer als in Flußrichtung. Dabei ist $R_i := dU/dI$ als (Wechselstrom-)Innenwiderstand zu unterscheiden vom Gleichstromwiderstand $R = U/I$.

Der Widerstand ist außerdem temperaturabhängig und sinkt mit steigender Temperatur. Bei Überschreitung der zulässigen Sperrspannung wächst auch der Strom in Sperrichtung stark an, und die Diode wird zerstört.

Zur leichteren quantitativen Beschreibung wird die tatsächliche Gleichrichterkennlinie oft durch eine idealisierte Kennlinie angenähert und hierbei die Schleusenspannung $U_s \approx 0{,}7$ V eingeführt. Für diese idealisierte Kennlinie gilt der Zusammenhang

$$I = 0 \quad \text{für } U < U_s,$$
$$= (U-U_s)/R_i \quad \text{für } U \geq U_s.$$

Gleichrichter mit ohmscher Last

Wird eine Reihenschaltung aus Gleichrichter und ohmschem Widerstand an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen (Abb. 4.11.(2)), dann fließt nur ein Strom, wenn der Momentanwert u der Wechselspannung größer als die Schleusenspannung U_s ist. Am Arbeitswiderstand R tritt die Spannung auf

$$u_R = \hat{u} \sin\omega t - U_s - i_R R_i .$$

Als zeitlicher Mittelwert von u_R entsteht am Arbeitswiderstand eine Gleichspannung

$$\bar{u}_R =: U_R = \frac{R}{R + R_i}\left(\frac{\sqrt{\hat{u}^2 - U_s^2}}{\pi} - \frac{U_s}{2} + \frac{U_s}{\pi} \arcsin \frac{U_s}{\hat{u}}\right).$$

Sie ist wegen ihrer Welligkeit in den meisten Fällen zum Betrieb von Schaltungen ungeeignet, sie muß geglättet werden. Dazu wird ein Kondensator großer Kapazität parallel zum Arbeitswiderstand geschaltet.

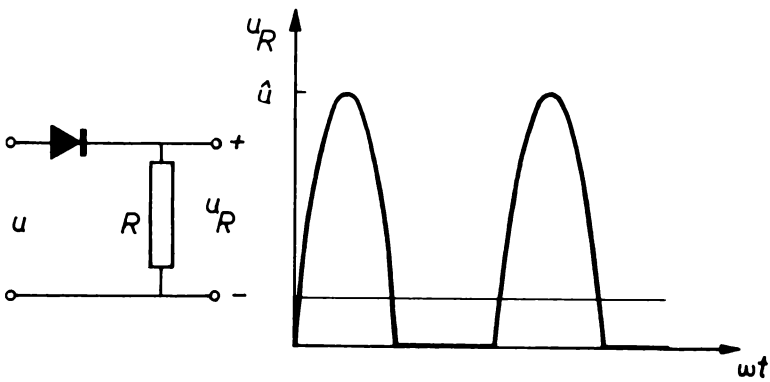


Abb. 4.11.(2) Welligkeit der Gleichspannung

Gleichrichter mit ohmscher und kapazitiver Last

Der Parallelkondensator C heißt Ladekondensator. Während der positiven Halbperiode (Diode in Flußrichtung) lädt sich dieser Kondensator auf die Spannung $u_R = u - u_D$ auf. u_D ist die Spannung über der Diode in

Flußrichtung. Wenn $u < u_R$ wird, entlädt er sich mit der Zeitkonstante $\tau = RC$ über R.

F 2 Was bedeutet die Zeitkonstante allgemein? Welche Dimension hat sie?

Die Gleichspannung schwankt zwischen den Extremwerten u_1 und u_2. Der Mittelwert $U := (u_1 + u_2)/2$ ist mit einer (nichtsinusförmigen) Wechselspannung der Amplitude U_w überlagert, der "Brumm"-Spannung oder Welligkeitsspannung. Der Quotient aus Brummspannungsamplitude U_w und Gleichspannung U, $w = U_w/U$ (Abb. 4.11.(3)), wird als Welligkeit bezeichnet.

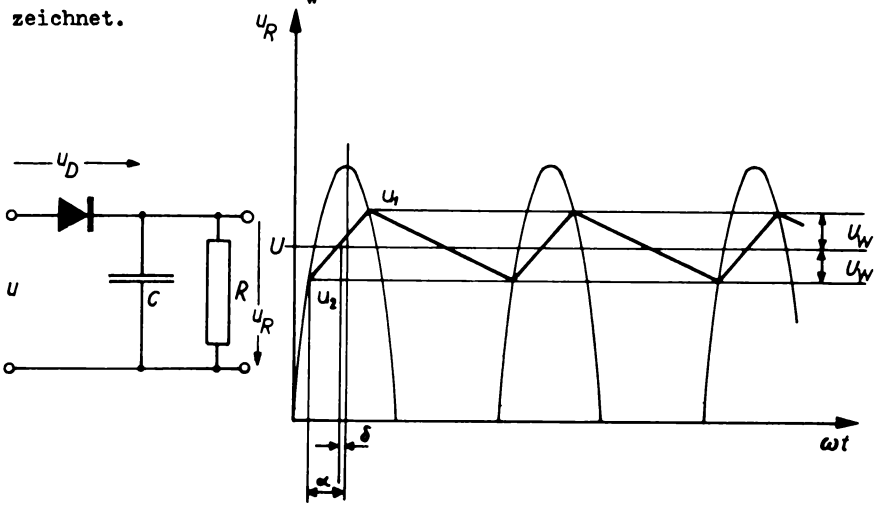


Abb. 4.11.(3) Gleichrichter mit ohmscher und kapazitiver Last

Für die Gleichspannung U ergibt sich bei Belastung mit einem ohmschen Widerstand R:

$$U = \frac{R}{R + R_i} (\hat{u} \cos\alpha \cos\delta - U_s)$$

(α halber Stromflußwinkel, δ Unsymmetriewinkel).
Für eine große Ladekondensatorkapazität wird der Unsymmetriewinkel δ so klein, daß $\cos\delta \approx 1$ gesetzt werden kann.

Im stationären Fall ist die während der Durchlaßdauer des Gleichrichters erzielte Ladungszunahme des Kondensators $2CU_w$ gleich der während der Sperrdauer abfließenden Ladung $I(2\pi - 2\alpha)/\omega$. $U_w = I(\pi - \alpha)/\omega C$

wird umso kleiner, je geringer der Stromfluß und je größer die Kapazität des Ladekondensators und die Frequenz sind.

F 3 Kann C beliebig groß gemacht werden, damit die Welligkeit w sehr klein wird?

Siebkette

Die Brummspannung läßt sich durch Verwendung einer richtig bemessenen Siebkette aus Drosselspule L und Siebkondensator C_S stark reduzieren. Damit kommt der durch Gleichrichtung gewonnene Strom einem idealen Gleichstrom sehr nahe (Abb. 4.11.(4)). Der Ladekondensator C_L zählt nicht zur eigentlichen Siebkette, er gehört zur Gleichrichteranordnung.

F 4 Was ist eine Siebdrossel?

Die Welligkeitsspannung mit der Amplitude U_w erfährt an der Kombination L, C_S eine Spannungsteilung. Die Siebdrossel besitzt einen großen induktiven und einen kleinen ohmschen Widerstand, der Siebkondensator C_S große Kapazität und daher einen kleinen kapazitiven Widerstand.

Die Ausgangswechselspannung mit der Amplitude U_{w2} dieser Siebkette ist fast harmonisch (d. h., die Verzerrung verursachenden Harmonischen der Welligkeitsspannung werden besonders stark reduziert) und von kleinerer Amplitude als die Eingangswechselspannung mit der Amplitude U_{w1}.

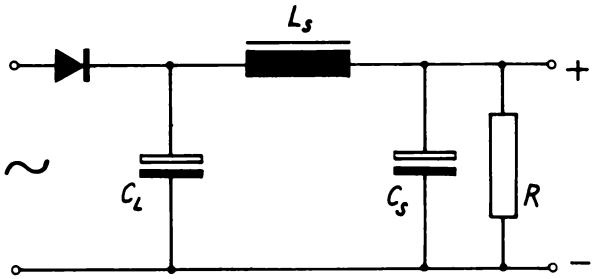


Abb. 4.11.(4)
Siebkette

Die Gleichspannungskomponente wird durch die Siebkette nur wenig beeinflußt, weil der ohmsche Widerstand der Siebdrossel klein ist und der Strom beim Hindurchfließen durch sie einen geringen Spannungsabfall hervorruft.

Für den Siebfaktor gilt folgende Definition:

$$\text{Siebfaktor: } = \frac{\text{Eingangswechselspannungsamplitude}}{\text{Ausgangswechselspannungsamplitude}}, \qquad S := \frac{U_{w1}}{U_{w2}}.$$

In erster Näherung gilt

$$S = \frac{\omega L - 1/\omega C_S}{1/\omega C_S} = \omega^2 L C_S - 1 \approx \omega^2 L C_S \quad \text{für} \quad \omega^2 L C_S \gg 1.$$

Die Näherung gilt umso besser, je besser die Bedingung $R \gg 1/\omega C_S$ erfüllt ist.

Werden mehrere Siebglieder aus L und C_S aneinandergefügt, dann ergibt sich der resultierende Siebfaktor als Produkt der einzelnen Siebfaktoren: $S = S_1 S_2 S_3$.

Wird anstelle der Siebkette mit Drossel ein Siebglied aus Widerstand R_S und Kondensator C_S verwendet, dann ist

$$S = \frac{U_{w1}}{U_{w2}} = \frac{\sqrt{R_S^2 + (1/\omega C_S)^2}}{1/\omega C_S}.$$

Wegen $R_S \gg 1/\omega C_S$ läßt sich $1/\omega^2 C_S^2$ im Radikanden vernachlässigen. Dann ist

$$S = \frac{U_{w1}}{U_{w2}} \approx \omega R_S C_S.$$

Die Siebwirkung wächst mit R_S und C_S und ist umso besser, je höher die Frequenz der Welligkeitsspannung ist. Bei Zweiweggleichrichtung sinkt die Welligkeit bei RC-Siebung auf die Hälfte, bei LC-Siebung auf ein Viertel gegenüber der Einweggleichrichtung ab.

Zweiweggleichrichterschaltungen

Bei der Mittelpunktschaltung (Abb. 4.11.(5)) und Brückenschaltung (Abb. 4.11.(6)) werden beide Halbwellen des Wechselstroms zur Gleichrichtung genutzt. Die Dioden führen abwechselnd Strom.

Der größere Aufwand an Gleichrichtern wird durch die bessere Glättbarkeit (doppelte Frequenz!) der gleichgerichteten Spannung kompensiert.

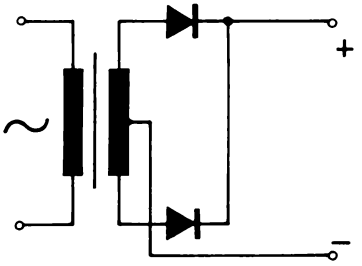


Abb. 4.11.(5) Zweiweggleichrichtung (Mittelpunktschaltung)

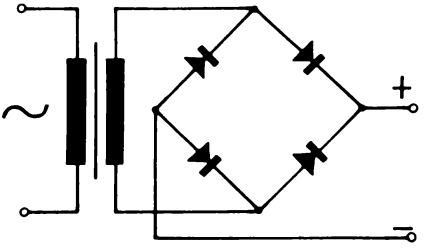


Abb. 4.11.(6) Zweiweggleichrichtung (Brückenschaltung)

Spannungsverdoppelungsschaltungen

Mit der in Abb. 4.11.(7) skizzierten Spannungsverdoppelungsschaltung nach DELON oder GREINACHER läßt sich der Spitze-Spitze-Wert U_{SS} einer Wechselspannung mit einem hochohmigen Gleichstrominstrument messen.

Während der positiven Halbwelle wird C_1 über D_1 aufgeladen, während der negativen Halbwelle dagegen C_2 über D_2. Am Verbraucherwider-

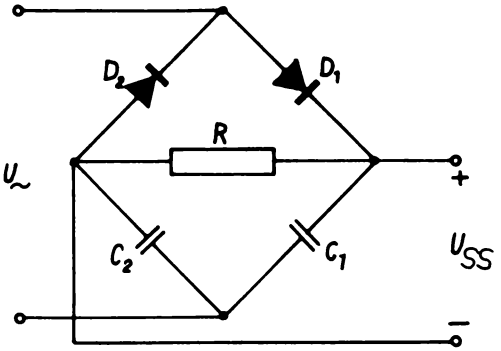


Abb. 4.11.(7) Spannungsverdoppelungsschaltung

stand R, der hochohmig sein muß, liegt die Summe der Spannungen der beiden Kondensatoren, die etwa dem Spitze-Spitze-Wert der Eingangswechselspannung entspricht, wenn die Entladezeitkonstante $\tau = R\,C_1C_2/(C_1 + C_2)$ sehr groß ist.

Bei der in Abb. 4.11.(8) dargestellten Kaskadenschaltung liegt am Kondensator C_2 ebenfalls der doppelte Scheitelwert der Eingangswechselspannung, wenn der Verbraucherwiderstand groß genug gewählt wird. Während der negativen Halbwelle lädt sich C_1 über D_2 auf $\hat{u}$ auf. Während der positiven Halbwelle sperrt D_2, D_1 leitet und lädt C_2.

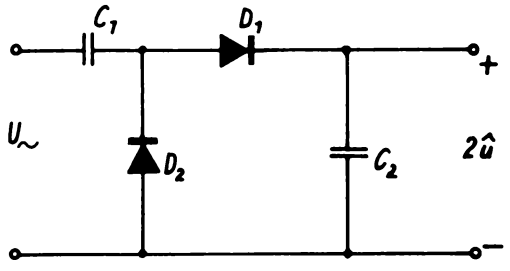


Abb. 4.11.(8) Kaskadenschaltung

Diese Kaskadenschaltung läßt sich durch weitere Kondensatoren und Gleichrichter zu einer Vervielfacherschaltung ausbauen. Die Isolation der Kondensatoren und Sperrspannung der Halbleiterdioden setzen dieser Schaltung eine praktische Grenze.

Zur Durchführung und Auswertung

Um die Kenndaten eines unbekannten Gleichrichters zu erhalten, ist die Aufnahme der Gleichrichterkennlinie erforderlich. Zur punktweisen Bestimmung verwende man eine Spannungsteilerschaltung, die an eine stabile Gleichspannungsquelle (ca. 6 V) angeschlossen wird.

Da gleichzeitig Ströme und Spannungen zu messen sind, ist über die Verwendung der Strom- und Spannungsfehlerschaltung zu entscheiden.

Da die Diodenströme in Sperrichtung bedeutend kleiner sind als in Flußrichtung, wird empfohlen, bei der grafischen Darstellung für beide Richtungen unterschiedliche Achsenteilungen für die Ströme zu benutzen.

Schleusenspannung und innerer Widerstand lassen sich mit ausreichender Genauigkeit aus der oszillografisch bestimmten I,U-Kennlinie entnehmen. In diesem Falle ist als Betriebsspannung eine Wechselspannung (ca. 6 V) zu verwenden und die Diode in Reihe mit einem kleinen ohmschen Widerstand bekannter Größe zu schalten. Aus der Spannung am Vorwiderstand läßt sich der Strom errechnen.

Für die eigentlichen Netzgleichrichterschaltungen ist als Spannungsquelle ein Netztransformator zu empfehlen, damit eine galvanische Trennung vom Netz erreicht wird und die benutzten Meßgeräte beliebig gepolt werden können.

Alle Messungen der Wechselspannungen und Welligkeitsspannungen lassen sich vorzüglich mit dem Oszillografen durchführen. Besitzt der verwendete Oszillograf überdies eine Umschaltmöglichkeit zwischen Kondensatoreingang und direktem Eingang, dann kann mit ihm auch die Gleichspannungskomponente der gleichgerichteten Wechselspannung direkt bestimmt werden. Hierbei wird der beim Umschalten beider Eingänge auftretende Sprung der dargestellten Kurve gemessen. Er entspricht der Gleichspannungs- bzw. Gleichstromkomponente.

Die mit Vielfachmessern ermittelten Effektivwerte gelten nur für harmonische Ströme und Spannungen. Daher ist es z. B. nicht sinnvoll, bei der Ermittlung des Siebfaktors die Welligkeitsspannungen mit solchen Instrumenten zu messen. Der Oszillograf liefert korrekte Ergebnisse.

Die variable Belastung der Gleichrichterschaltungen wird mit einem veränderlichen Lastwiderstand (Schiebewiderstand, Dekadenwiderstand o. ä.) verwirklicht. So läßt sich beispielsweise der Zusammenhang $U = U(R)$ mit C_L als Parameter experimentell untersuchen. Im Protokoll sollten für entsprechende Meßpunkte Oszillogramme oder Skizzen angegeben und diese kommentiert werden.

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

4.12. Niederfrequenzverstärker

Die Verstärkerschaltung gehört zu den Grundschaltungen in der Elektronik. Ihr volles Verständnis ist für das Erkennen der Zusammenhänge in komplizierteren elektronischen Schaltungen besonders wichtig. In Experimenten mit einem einstufigen Röhrenverstärker werden die Kenntnisse über die Eigenschaften von Trioden (oder Pentoden) vertieft und der Einfluß frequenzabhängiger Widerstände untersucht.

Aufgaben

1. Es ist eine mit Triode oder Pentode bestückte NF-Verstärkerstufe zu dimensionieren und aufzubauen.
2. Die Betriebseigenschaften des Verstärkers sind experimentell zu bestimmen; Verstärkung, Arbeitsbereich und Frequenzgang sind anzugeben.
3. Die Abhängigkeit der Verstärkung von der Größe des Arbeitswiderstandes ist zu untersuchen.
4. Der Einfluß der Spannungs- und Stromgegenkopplung auf die Verstärkung ist zu bestimmen.

Grundlagen

Die zu verstärkende Wechselspannung u_e steuert über das Gitter der Röhre den Anodenstrom und ruft am Arbeitswiderstand R_a einen zu u_e proportionalen Wechselspannungsabfall u_a hervor, wenn die Röhre im linearen Teil der Kennlinie betrieben wird (A-Betrieb).

F 1 Was geschieht bei Verletzung dieser Bedingung, und welche anderen Betriebsarten gibt es noch?

Die verstärkte Wechselspannung wird mit Hilfe eines Kondensators an der Anode ausgekoppelt.

$$v_u = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} \tag{1}$$

heißt Spannungsverstärkung. Um den Arbeitspunkt der Röhre festzulegen und die Eigenschaften des Verstärkers für diesen Betriebszustand berechnen zu können, verwendet man das I_a,U_a-Kennlinienfeld der entsprechenden Röhre. Die zum Arbeitswiderstand R_a gehörende Widerstandsgerade

$$U_a = U_b - I_a R_a \tag{2}$$

wird eingezeichnet.

Zum Zeichnen der Widerstandsgeraden ist die Kenntnis von mindestens zwei Punkten dieser Gerade erforderlich (Abb. 4.12.(1)). Setzt man in Gl. (2) für den Leerlauffall $I_a = 0$, dann erhält man $U_a = U_b$. Für $U_a = 0$ (Kurzschlußfall) folgt $I_a = U_b/R_a$. Die Widerstandsgerade ist somit durch die Punkte ($U_a = 0$, $I_a = U_b/R_a$) und ($U_a = U_b$, $I_a = 0$) festgelegt. Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der zur vorausgesetzten Gitterspannung gehörenden I_a,U_a-Kennlinie heißt Arbeitspunkt A. Seine Koordinaten U_a (Anodengleichspannung) und I_a (Anoden-

gleichstrom) lassen sich aus Abb. 3.12.(1) unmittelbar ablesen.

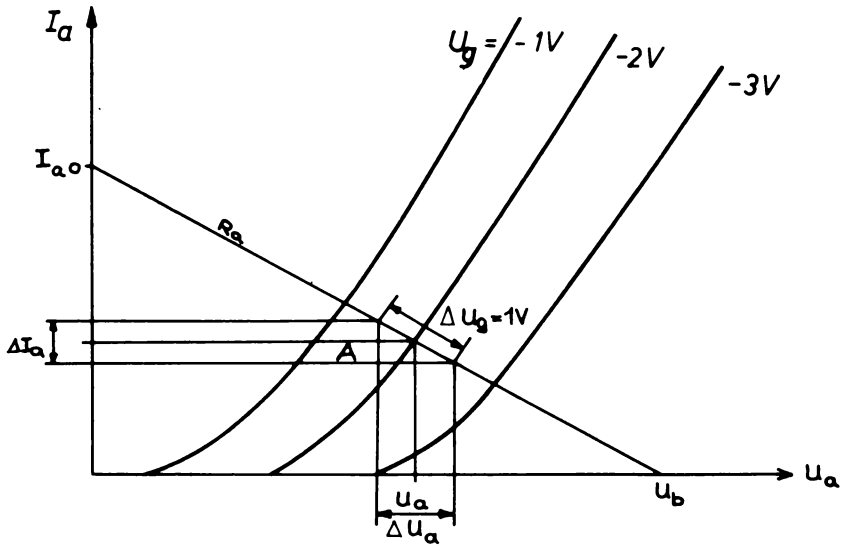


Abb. 4.12.(1) I_a,U_a-Kennlinienfeld mit Widerstandsgerade

F 2 Wie liegen die zu $R_a = 0$ und $R_a = \infty$ gehörenden Widerstandsgeraden im Kennlinienfeld?

Die Arbeitssteilheit S_d, der Innenwiderstand R_i und der Durchgriff D der Röhre lassen sich aus der Steigung der Kennlinie im Arbeitspunkt bzw. aus der Lage der Widerstandsgeraden ebenfalls bestimmen. Nach Definition ist dabei

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_g}\right)_{U_a} , \quad R_i = \left(\frac{\partial U_a}{\partial I_a}\right)_{U_g} , \quad D = \left(\frac{\partial U_g}{\partial U_a}\right)_{I_a} . \tag{3}$$

F 3 Welcher Zusammenhang besteht für diese Größen?

Die Spannungsverstärkung läßt sich nach folgender Beziehung berechnen:

$$v_u = \frac{1}{D} \frac{R_a}{R_i + R_a} . \tag{4}$$

Zur leistungslosen Steuerung des Anodenstroms der Röhre ist eine negative Gittervorspannung U_g erforderlich. Sie kann durch Katodenkombination $R_k \| C_k$ "automatisch" erzeugt werden (Abb. 4.12.(2)).

Der Anodengleichstrom ruft auch am Katodenwiderstand R_k eine Spannung hervor. Damit wird das mit der Katode verbundene Ende von R_k positiv, das andere negativ, denn der Anodenstrom fließt von der Anode zur Katode. Weil das Gitter der Röhre über einen hochohmigen Widerstand R_g (genannt Gitterableitwiderstand) mit Massepotential verbunden ist, erhält es negatives Potential gegen die Katode. Die Gittervorspannung U_g stellt sich automatisch ein, wenn der Anodengleichstrom fließt. Der zu R_k parallel geschaltete Kondensator großer Kapazität (C_k) stellt für den Anodenwechselstrom einen Kurzschluß dar. Darum bleibt die Gittervorspannung U_g auch konstant, wenn außer dem Anodengleichstrom ein Anodenwechselstrom fließt.

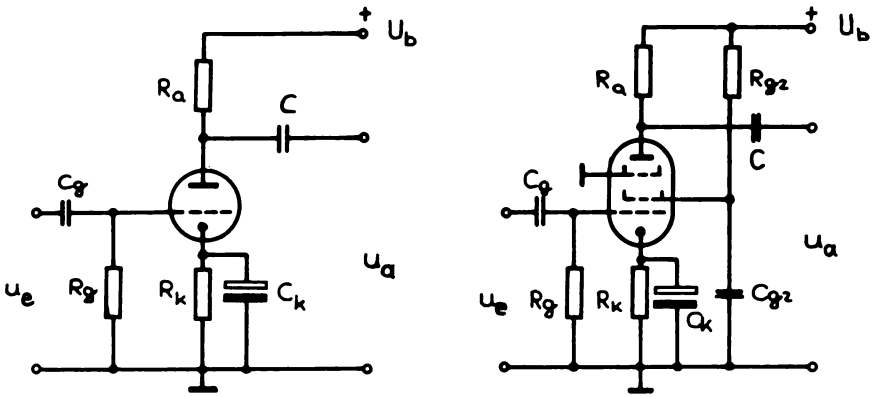


Abb. 4.12.(2) Leistungslose Steuerung des Anodenstromes

Wird jedoch der Katodenkondensator C_k weggelassen, dann ändert sich die Gittervorspannung auf Grund des nicht konstanten resultierenden Anodenstroms. Sie ändert sich dabei stets so, daß sie der Richtung der Eingangsspannung entgegenwirkt und diese damit vermindert. Man spricht dann von Stromgegenkopplung.

F 4 Wie berechnet man die Größe des Katodenwiderstandes?

Wird die Amplitude der Eingangswechselspannung vergrößert, dann wird die Röhre stärker ausgesteuert. Beim Überschreiten einer gewissen Amplitude arbeitet der Verstärker in einem Bereich mit gekrümmter

Kennlinie. Als Folge treten nichtlineare Verzerrungen der Anodenwechselspannung auf. Der übersteuerte Zustand des Verstärkers läßt sich am Absinken der Verstärkung und an der verzerrten Ausgangsspannung erkennen.

Wird der NF-Verstärker mit Wechselspannungen konstanter Amplitude aber unterschiedlicher Frequenz angesteuert, dann ist nur für mittlere Frequenzen eine konstant bleibende Verstärkung zu erwarten.

Für tiefe und für hohe Frequenzen sinkt die Verstärkung ab. Jene Frequenzen, bei denen die Verstärkung auf den $1/\sqrt{2}$-ten Teil des Wertes bei mittleren Frequenzen abgesunken ist, nennt man untere Grenzfrequenz f_u und obere Grenzfrequenz f_o. $b = f_o - f_u$ heißt Bandbreite des Verstärkers. Es gilt

$$v_u = v_o = \frac{v_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7\ v_m. \tag{5}$$

Herleitung der unteren Grenzfrequenz f_u:

Die am Verstärkereingang befindliche Reihenschaltung aus dem Kondensator C_g und dem Gitterableitwiderstand R_g bildet einen frequenzabhängigen Spannungsteiler und Hochpaß. Mit kleiner werdenden Frequenzen wächst die Spannung am Kondensator. Dann wird ein immer kleiner werdender Bruchteil der Eingangsspannung u_e am Steuergitter wirksam. Für $f = f_u$ sind die Beträge von X_C und R_g (und damit auch die Spannungen) gleich groß. u_e und u_g sind in der Phase um 45° gegeneinander verschoben.

Aus $X_C = 1/2\pi f_u C_g = R_g$ folgt

$$f_u = \frac{1}{2\pi C_g R_g}. \tag{6}$$

Für die obere Grenzfrequenz f_o folgt dagegen

$$f_o \approx \frac{R_a + R_i}{2\pi R_a R_i C_a}. \tag{7}$$

Dabei ist R_i der Innenwiderstand der Röhre und C_a eine parallel zum Arbeitswiderstand liegende Kapazität, in der die Röhrenkapazität C_{ak} und Schaltkapazitäten bereits zusammengefaßt sind.

C_a ist prinzipiell nicht exakt angebbar. Darum ist es hier nicht sinnvoll, die obere Grenzfrequenz f_o zu berechnen.

Bei großen Werten von R_a ist f_o zwar meßbar, die obere Grenzfrequenz liegt jedoch oft weit oberhalb 20 kHz. Soll im Experiment die obere Grenzfrequenz noch im Hörfrequenzbereich liegen, dann empfiehlt es sich, parallel zum Verstärkerausgang einen Parallelkondensator geeigneter Kapazität zu schalten.

Für eine beliebige Kreisfrequenz ω läßt sich die Verstärkung v nach folgender Formel näherungsweise berechnen:

$$v = v_L \frac{R_a}{R_i+R_a} \left(1 + \frac{(\omega C_a R_a R_i)^2}{(R_i+R_a)^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{(\omega C_g R_g)^2}\right)^{-1/2} \qquad (8)$$

Dabei bedeutet v_L die Leerlaufverstärkung. Die Abb. 4.12.(3) zeigt das der Näherungsformel zugrunde liegende Wechselstromersatzschaltbild.

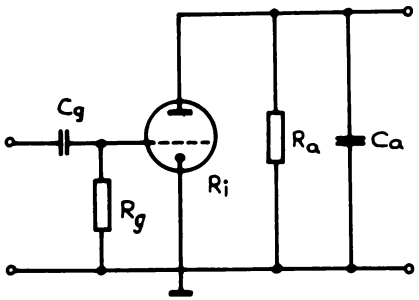


Abb. 4.12.(3) Wechselstromersatzschaltbild zur Berechnung der Verstärkung

Wie Gl. (4) zeigt, hängt die Spannungsverstärkung auch von der Größe des Arbeitswiderstandes ab. Sie wächst theoretisch monoton mit R_a und nähert sich für $R_a \to \infty$ dem Grenzwert $v_L = 1/D$.

Bei einem realen Verstärker wird jedoch für sehr große (ohmsche) Arbeitswiderstände ein Abnehmen der Verstärkung beobachtet. Das ist darauf zurückzuführen, daß wegen der zu geringen Anodengleichspannung die normale Funktion der Röhre nicht mehr gewährleistet ist.

Maximale Leistungsabgabe tritt am Arbeitswiderstand für $R_a = R_i$ auf (Leistungsanpassung). Siehe hierzu die Erläuterung zum Experiment Grundstromkreis.

Beim einstufigen Verstärker wird die Ausgangswechselspannung u_a gegenüber der Eingangswechselspannung u_e in der Phase um π gedreht. Das gilt streng nur für den mittleren Frequenzbereich, weil dort keine nennenswerte zusätzliche Phasendrehung durch den Eingangsspannungsteiler und die Parallelkapazität stattfindet.

Durchläuft die niederfrequente Signalspannung u_e ihren höchsten Wert $\hat{u}_e$, dann hat auch der Anodenwechselstrom sein Maximum i. Die Anodenwechselspannung sinkt dann infolge $u_a = U_b - iR_a$ auf ihren kleinsten Wert.

Umgekehrt gehört zur negativen Signalspannungsamplitude $\hat{u}_e$ der minimale Anodenwechselstrom und der Größtwert der Anodenwechselspannung $\hat{u}_a$. Das heißt, u_e und u_a sind um $180^\circ = \pi$ phasenverschoben.

Wird vom Ausgang der Verstärkerstufe ein gewisser Teil $k \cdot u_e$ (mit $k < 1$) der Ausgangsspannung u_a so auf das Gitter der Röhre zurückgekoppelt, daß damit die Eingangsspannung verringert wird, dann liegt Gegenkopplung vor. k heißt Rückkopplungsfaktor (hier speziell Gegenkopplungsfaktor).

F 5 Welche Phasenbeziehungen zwischen rückgekoppelter Spannung und Gitterwechselspannung bestehen bei Gegenkopplung?

Durch die Gegenkopplung geht zwar die Verstärkung zurück, gleichzeitig werden aber die Verzerrung innerhalb der Röhrenstufe verringert und die Verstärkung weitgehend unabhängig von Alterungserscheinungen der Röhre und Schwankungen der Betriebsspannung.

Durch entsprechende Wahl der Gegenkopplungsglieder läßt sich der Frequenzgang des Verstärkers verändern. Die Abb. 4.12.(4) zeigt Prinzipschaltskizzen zur Spannungs- und Stromgegenkopplung.

Zur Durchführung und Auswertung

Nach Anschluß der Verstärkerstufe an die Heiz- und Betriebsspannungsquellen wird der Arbeitspunkt kontrolliert. Betriebsspannung, Anodenspannung und Gittervorspannung werden mit einem hochohmigen Spannungsmesser oder Röhrenvoltmeter gemessen. Die Gittervorspannung U_g mißt man als Spannung über dem Katodenwiderstand R_k.

F 6 Warum mißt man die Gittervorspannung nicht direkt zwischen Gitter und Katode der Röhre?

Zur Bestimmung des linearen Arbeitsbereichs wird der Verstärker mit einer zu verändernden Wechselspannung mittlerer Frequenz (z. B. 1 kHz)

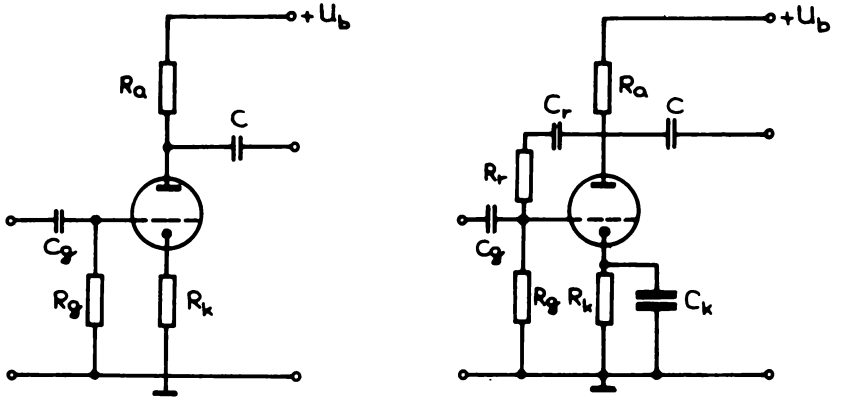


Abb. 4.12.(4) Prinzipschaltskizzen zur Spannungs- und Stromgegenkopplung

angesteuert, die einem Tonfrequenzgenerator entnommen wird. Aus den Effektivwerten von Eingangsspannung u_e und Ausgangsspannung u_a (oder den Scheitelwerten) wird die Spannungsverstärkung v_u als Quotient beider Werte errechnet.

Die grafische Darstellung der Verstärkung (ohne Ausgangsspannung) über der Eingangsspannung zeigt, bis zu welchen Werten der Eingangsspannung der Verstärker linear arbeitet. Im nichtlinearen Bereich läßt die Verstärkung nach. Zur Kontrolle ist die Beobachtung der Ausgangsspannung mit einem Oszillografen empfehlenswert. Im Falle der Übersteuerung des Verstärkers wird die Ausgangsspannung verzerrt.

Bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Verstärkung vom Arbeitswiderstand zeigt die grafische Darstellung der Funktion $v_u = v_u(R_a)$, bis zu welchen Widerstandswerten R_a vergrößert werden kann.

Zur Darstellung des Frequenzganges des Verstärkers wählt man eine kleine Eingangsspannung konstanter Amplitude und variabler Frequenz. Damit der Verstärkungsabfall bei hohen Frequenzen unterhalb 20 kHz experimentell nachgewiesen werden kann, wird ggf. ein Kondensator $C_a \approx 10$ nF parallel zum Verstärkerausgang geschaltet.

Die grafische Darstellung des Frequenzganges erfolgt auf einfachlogarithmischem Funktionspapier; die Frequenzachse ist logarithmisch geteilt. Aus der Darstellung können die untere und obere Grenzfre-

quenz als jene Frequenz entnommen werden, bei denen die Verstärkung auf etwa 70 % des Höchstwertes abgenommen hat.

Die Grenzfrequenzen lassen sich auch oszillografisch bestimmen. Hierzu wird die Frequenz der Eingangsspannung am Verstärker so gewählt, daß Eingangs- und Gitterwechselspannung in der Phase um 45° gegeneinander verschoben sind, bzw. u_e und u_a werden in der Phasenlage miteinander verglichen.

F 7 Wie läßt sich die Phasenverschiebung beider Spannungen gegeneinander feststellen?

Der Frequenzgang des Verstärkers kann auch wahlweise mit Strom- oder Spannungskopplung nach der gleichen Methode wie ohne Gegenkopplung untersucht werden. Die Ergebnisse werden in die gleiche grafische Darstellung eingetragen, um den Vergleich zu erleichtern.

Ergänzende Messungen

Bestimmung des Eingangswiderstandes des Verstärkers

Ein variabler ohmscher Widerstand (z. B. eine Kombination technischer Dekadenwiderstände) wird in Reihe mit dem Verstärkereingang geschaltet und an einen Tonfrequenzgenerator angeschlossen. Der Vorwiderstand wird so eingestellt, daß an ihm die halbe Generatorspannung abfällt. Dann ist dieser Widerstand gleich dem Eingangswiderstand des Verstärkers.

Beachten Sie dabei, daß der Eingangswiderstand frequenzabhängig ist! Die Spannungsmessungen sollten mit einem Röhrenvoltmeter ausgeführt werden.

Verstärker mit Pentode

Ähnliche Messungen wie beim Triodenverstärker lassen sich mit einer Verstärkerstufe mit Pentode durchführen. Die Schirmgitterspannung kann über einen passend dimensionierten Vorwiderstand aus der Betriebsspannung gewonnen werden. Das Schirmgitter wird gegen Masse mit einem Kondensator abgeblockt.

Mehrstufiger Verstärker

Anstelle einer einzelnen Röhrenstufe können zwei Verstärkerstufen hintereinander geschaltet werden, wobei die RC-Kopplung bevorzugt

werden sollte. Die Gesamtverstärkung ergibt sich als Produkt der Stufenverstärkungen. Beim mehrstufigen Verstärker kann die Gegenkopplung auch über beide Stufen erfolgen.

Fragen

F 1 bis F 7 siehe Text.

4.13. RC-Generator mit Wien-Vierpol

Zur Erzeugung harmonischer Wechselspannungen im Niederfrequenzbereich werden RC-Generatoren bevorzugt, die gegenüber LC-Generatoren mit geringem Aufwand herzustellen sind und Frequenzänderungen über einen größeren Bereich ermöglichen.

Ein in bezug auf die Toleranz der verwendeten Bauelemente unkritischer NF-Generator ist der Wienbrückengenerator. An ihm läßt sich anschaulich der Einfluß der Rückkopplung auf die Schwingneigung eines Verstärkers untersuchen. Solche Generatoren lassen sich mit Transistoren oder Röhren aufbauen. Im Experiment wird ein röhrenbestückter RC-Generator untersucht.

Aufgaben

1. Für eine vorgegebene Frequenz im NF-Bereich wird ein Wien-Vierpol zusammengeschaltet und sein Amplituden- und Phasengang untersucht.
2. Der Wien-Vierpol wird in den Rückkopplungszweig eines zweistufigen Verstärkers eingefügt und die Frequenz der erzeugten Schwingung bestimmt. Der Einfluß des Verstärkungsfaktors wird untersucht.

Grundlagen

Der Wien-Vierpol besteht aus den ohmschen Widerständen R_1, R_2 und den Kondensatoren C_1, C_2. Er stellt einen speziellen frequenzabhängigen Spannungsteiler dar, bei dem die Reihenschaltung aus R_1 und C_1 mit der Parallelschaltung $R_2 \parallel C_2$ nach Abb. 4.13.(1) verknüpft ist.

F 1 Warum ist der Wien-Vierpol ein frequenzabhängiger Spannungsteiler?

Die Abb. 4.13.(2) zeigt das Ersatzschaltbild dieses Spannungsteilers mit den komplexen Widerständen

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R_2/j\omega C_2}{R_2 + 1/j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} .$$

Für den (unbelasteten) Spannungsteiler ist

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{U}_1 = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2}\,\underline{U}_1$$

$$= \frac{1}{1 + (R_1 + 1/j\omega C_1)(1 + j\omega R_2 C_2)/R_2}\,\underline{U}_1$$

$$= \left[1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j\left(\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1}\right)\right]^{-1}\,\underline{U}_1 \,.$$

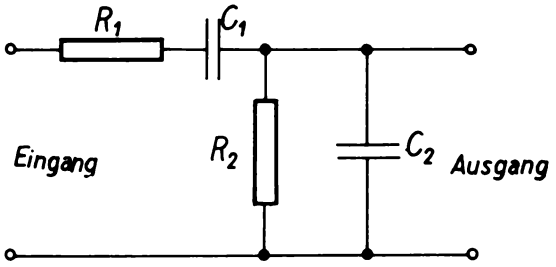


Abb. 4.13.(1)
Wien-Vierpol

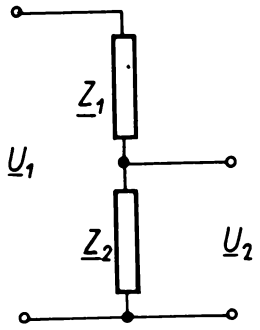


Abb. 4.13.(2) Ersatzschaltbild des Wien-Vierpols

Die komplexen Spannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ sind nur dann in Phase, d. h., der Wien-Vierpol besitzt dann keine Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung, wenn der Imaginärteil der eckigen Klammer verschwindet. Dann ist $\omega R_1 C_2 - 1/\omega R_2 C_1 = 0$. Daraus folgt die Kreisfrequenz $\omega_0 = (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-1/2}$. Unter den vereinfachenden Voraussetzungen $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ wird $\omega_0 = 1/RC$. Für $\omega \neq \omega_0$ ist die Ausgangsspannung des Wien-Vierpols gegenüber der Eingangsspannung phasenverschoben. Die Amplitude der Ausgangsspannung ist ebenfalls frequenzabhängig und besitzt für $\omega = \omega_0$ ein Maximum.

F 2 Wie groß wird das Verhältnis Ausgangsspannung/Eingangsspannung des Wien-Vierpols höchstens, wenn $R_1 = R_2$ und $C_1 = C_2$ ist?

Sollten durch Selbsterregung ungedämpfte elektrische Schwingungen entstehen, dann muß ein bestimmter Teil $\underline{k}\,\underline{U}_a$ ($|\underline{k}| < 1$) der Ausgangsspannung $\underline{U}_a$ eines Verstärkers auf den Verstärkereingang zurückgekoppelt werden (Abb. 4.13.(3)). Dabei muß $\underline{k}\,\underline{v} \geq 1$ erfüllt sein. $\underline{k}$ ist

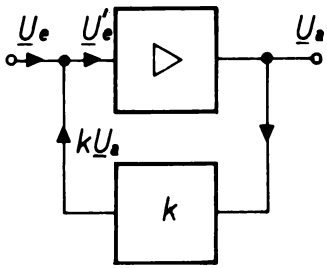


Abb. 4.13.(3) Rückkopplung

der (im allgemeinen komplexe) Kopplungsfaktor und $\underline{v}$ die (gleichfalls komplexe) Verstärkung.

Für $\underline{k}\,\underline{v} = 1$ (Grenzfall) entstehen ungedämpfte Schwingungen. Ist $|\underline{k}\,\underline{v}| > 1$, dann kommen Schwingungen mit anschwellender Amplitude zustande, bis durch unvermeidbare Verluste ein weiteres Anwachsen verhindert wird.

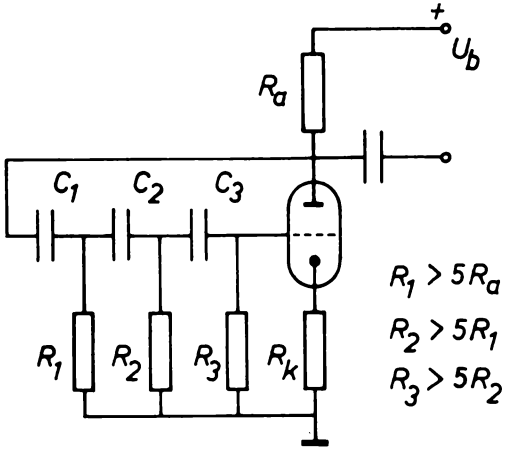
Bei $|\underline{k}\,\underline{v}| < 1$ liegt eine rasch abklingende gedämpfte Schwingung vor.

In der Praxis muß das Produkt $|\underline{k}\,\underline{v}|$ stets etwas größer als 1 sein, um ein sicheres Anschwingen zu gewährleisten. Die Selbsterregungsbe-

dingung muß hinsichtlich der Phase und der Amplitude erfüllt sein, wenn Schwingungen entstehen sollen.

Zur optimalen Mitkopplung muß die Rückkopplungsspannung phasengleich mit der Eingangsspannung sein.

Bei Verwendung eines einstufigen Verstärkers müßte der Rückkopplungs-Vierpol die Phase zusätzlich um π drehen, damit die Phasenbilanz erfüllt wird, denn der Verstärker bewirkt selbst eine Phasendrehung von π zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung. Ein Phasenschiebergenerator nach Abb. 4.13.(4) arbeitet nach diesem Prinzip.



Bedingung:

$$R_1 C_1 = R_2 C_2 = R_3 C_3 \approx \frac{\cot 60°}{\omega}$$

Abb. 4.13.(4) Phasenschiebergenerator

Dabei dreht jedes RC-Glied die Phase um je 60°. Bei einer dreigliedrigen Kette kommt also durch den Rückkopplungs-Vierpol eine Phasendrehung π zustande.

F 3 Wie kommt die Phasendrehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung bei einem einstufigen Verstärker zustande? Bei einem zweistufigen Verstärker ist die Ausgangsspannung (im allgemeinen) in Phase mit der Eingangsspannung. Die Selbsterregungsbedingung ist damit bezüglich der Phase bereits erfüllt ohne zusätzliche Phasendrehung durch ein Rückkopplungsglied.

Bei einem Wien-Vierpol als Rückkopplungsglied ist die Mitkopplungsbedingung jedoch nur für eine Frequenz f_o erfüllt. Für f_o ist $U_2/U_1 = k = 1/3$.

Damit Schwingungen entstehen können, muß wegen $\underline{k}\,\underline{v} \geq 1$ der Verstärkungsfaktor beider Stufen zusammen mindestens 3 sein, also $v \geq 3$. Für $v \gg 3$ schaukelt sich die Schwingungsamplitude so weit auf, bis

sie durch die Nichtlinearität der Verstärkungskennlinien oder einsetzenden Gitterstrom begrenzt wird. Die Schwingungen sind dann nichtlinear verzerrt, der Klirrfaktor (als Maß für nichtlineare Verzerrungen) wächst.

Den kleinsten Klirrfaktor hat die Ausgangsspannung des Generators für die kritische Selbsterregungsbedingung $\underline{k}\,\underline{v} = 1$. In diesem Falle schwingt der Generator nur mit der Frequenz f_o, weil allein für diese Frequenz die Bedingung für die Selbsterregung erfüllt ist, für alle anderen Frequenzen jedoch nicht.

F 4 Warum?

Der Verstärkungsfaktor läßt sich durch Ändern der Gegenkopplung variieren und so wählen, daß die Selbsterregungsbedingung erfüllt ist.

Die Abb. 4.13.(5) zeigt das Prinzipschaltbild eines RC-Generators mit Trioden. Der veränderliche Gegenkopplungswiderstand in der Katodenleitung einer Triode dient hier zur Einstellung des erwünschten Verstärkungsgrades.

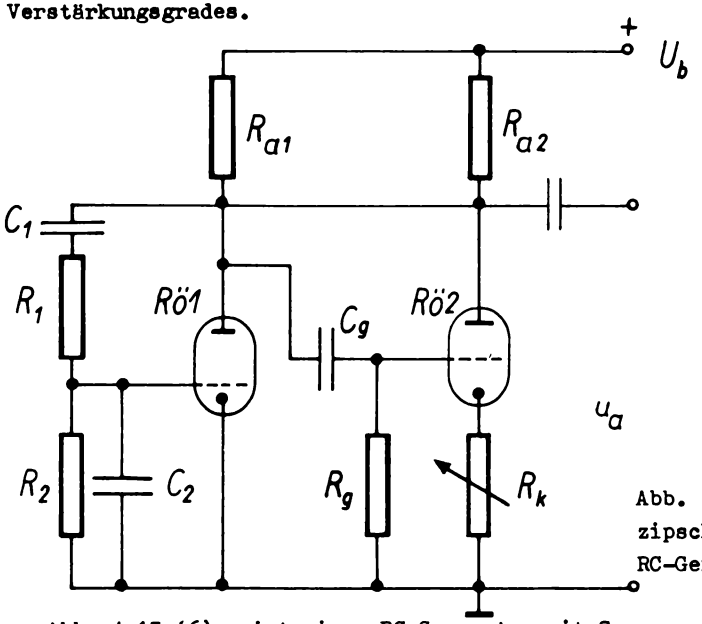


Abb. 4.13.(5) Prinzipschaltbild eines RC-Generators

Abb. 4.13.(6) zeigt einen RC-Generator mit Spannungsgegenkopplung über zwei Verstärkerstufen und Stabilisierung durch einen Regelwiderstand. Als Regelwiderstand eignet sich ein Thermistor oder bei abgewandelter Schaltung eine Glühlampe (Kaltleiter).

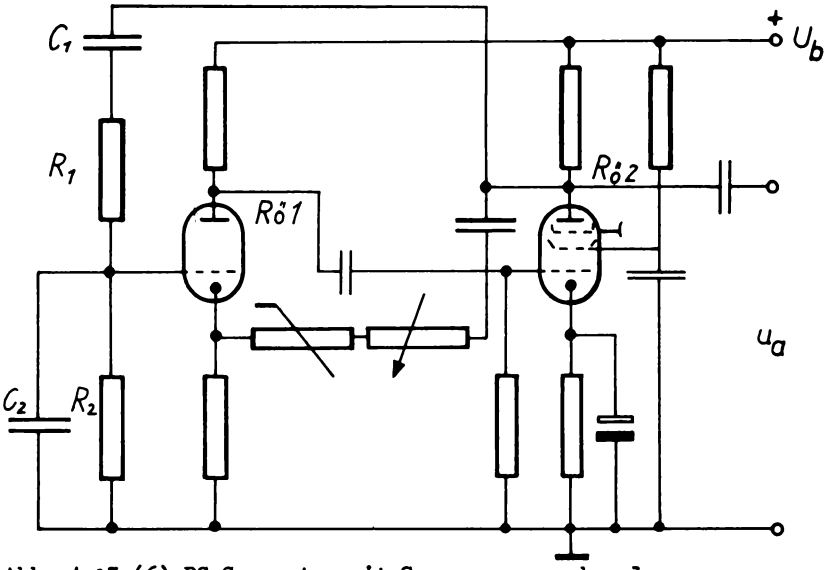


Abb. 4.13.(6) RC-Generator mit Spannungsgegenkopplung

Zur Durchführung und Auswertung

Zur Untersuchung des Amplituden- und Phasenganges wird der Wien-Vierpol an einen Tonfrequenzgenerator angeschlossen. Die Eingangsspannung U_1 am Wien-Vierpol soll konstante Amplitude aber variable Frequenz besitzen. Die Ausgangsspannung U_i des Wien-Vierpols wird gemessen.

Die Amplitudenmessung kann oszillografisch oder mit einem Röhrenvoltmeter erfolgen. Der Phasenwinkel der Ausgangsspannung U_2 gegenüber der Eingangsspannung U_1 läßt sich mit der Phasenellipse oszillografisch bestimmen. Die Messungen von Amplitude und Phase sind gleichzeitig durchführbar. Man wähle die Frequenz des Wien-Vierpols so, daß sie etwa in der Mitte des vom verwendeten Tongenerator überstrichenen Bereichs liegt.

Zur grafischen Darstellung eignet sich einfachlogarithmisches Funktionspapier. Die Frequenzachse als Abszissenachse ist dabei logarithmisch geteilt. Auf der Ordinatenachse läßt sich entweder die Ausgangsspannung U_2 direkt oder der Kopplungsfaktor $k = U_2/U_1$ abtragen.

Wenn man über eine zweite Ordinatenachse die gemessenen Phasen-

winkel in die gleiche Darstellung einträgt, erkennt man deutlich die charakteristischen Werte an der Stelle f_0. Die Meßergebnisse des Amplituden- und Phasengangs lassen sich auch in einer Ortskurve darstellen. Dabei ist die Frequenz Parameter.

Der zweistufige Verstärker wird zunächst mit einer kleinen Signalspannung der Frequenz f_0 vom Tongenerator angesteuert. Die Gegenkopplung des Verstärkers wird so eingestellt, daß die Verstärkung knapp oberhalb 3 ist. Die Verstärkungskontrolle erfolgt durch Messung der Ein- und Ausgangsspannung.

Der Wien-Vierpol wird an den Verstärker angeschlossen. Damit wird er zum Generator. Die von ihm erzeugte Wechselspannung wird untersucht. Durch Frequenzvergleich mit der Spannung vom Tonfrequenzgenerator läßt sich die Übereinstimmung der erzeugten und der berechneten Frequenz kontrollieren.

Die Abhängigkeit des Klirrfaktors von der eingestellten Verstärkung läßt sich anhand der Schirmbilder der Ausgangsspannung des RC-Generators beurteilen.

Variiert man bei $R_1 = R_2 = \text{const}$ die Kondensatorkapazitäten $C_1 = C_2 = C$ oder umgekehrt, dann läßt sich für die kritische Selbsterregungsbedingung zeigen, daß $f \sim 1/RC$ ist.

Wenn die Rückkopplung des zweistufigen Verstärkers nicht selektiv, sondern breitbandig erfolgt, dann ist die Selbsterregungsbedingung nicht nur für eine Frequenz, sondern für ein ganzes Frequenzband erfüllt. Dann entstehen sägezahnähnliche oder rechteckähnliche unharmonische Schwingungen.

F 5 Wie muß der Rückkopplungsvierpol beschaffen sein, damit bei dreifacher Verstärkung eine möglichst breitbandige Rückkopplung erfolgt?

Fragen

F 1 bis F 5 siehe Text.

4.14. Hertzsche Wellen - Richtcharakteristik von UKW-Antennen

Die Ultrakurzwellen haben in den letzten Jahrzehnten eine sehr große Bedeutung für die Nachrichtentechnik gewonnen. Um Ultrakurzwellen abzustrahlen oder zu empfangen, genügt nicht mehr der einfache Antennendraht wie bei Mittel- oder Langwellen. Im Experiment wird die Ausstrahlung eines einfachen Dipols und der Einfluß parasitärer Antennenelemente untersucht.

Aufgaben

1. Die Strahlungsleistung der Sendeantenne ist in Abhängigkeit von der Stellung des Reflektors, des Direktors und beider zusammen zu untersuchen.
2. Die horizontale Richtcharakteristik des Sendedipols allein sowie des Sendedipols mit parasitären Elementen ist aufzunehmen.
3. Die Wellenlänge der vom Sender abgestrahlten elektromagnetischen Welle ist zu messen und die Senderfrequenz zu bestimmen.

Grundlagen

Hertzsche Wellen sind elektromagnetische Wellen. Sie entstehen, wenn die von einem Sender (HF-Generator) erzeugte hochfrequente elektromagnetische Schwingung durch eine mit dem Sender gekoppelte Antenne in den Raum abgestrahlt wird. Die Antenne kann dabei wie ein offener Schwingkreis aufgefaßt werden. Im UKW-Bereich ($10\ m > \lambda > 1\ m$; $30\ MHz < f < 300\ MHz$) werden Dipolantennen verwendet, die Energieeinspeisung erfolgt in der Mitte des Dipols (Abb. 4.14.(1)).

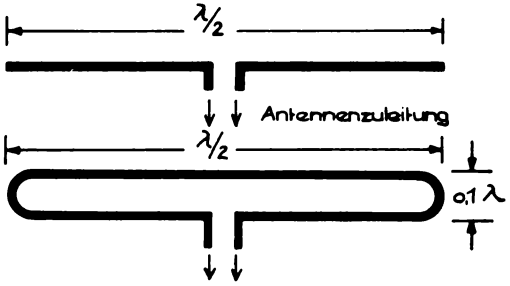


Abb. 4.14.(1)
Faltdipol

F 1 Beschreiben Sie die Entstehung des elektromagnetischen Wechselfeldes am schwingenden $\lambda/2$-Dipol!

Die Gleichungen zur Beschreibung der elektromagnetischen Welle lassen sich aus den Maxwellschen Gleichungen herleiten. Von praktischer Bedeutung für die Nachrichtentechnik ist, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke beschrieben werden durch einen Ausdruck, der als Summe Glieder mit $1/r^3$, $1/r^2$ und $1/r$ enthält, wobei r der Abstand vom Dipol ist. Das hat zur Folge, daß man am Dipol ein Nahfeld vom Fernfeld (es überwiegt der Einfluß des Gliedes mit $1/r$) unterscheiden muß.

Der Dipol strahlt Energie ab. Der elektrischen Schwingung im Dipol wird also zusätzlich zum Verlust an elektrischer Energie durch den ohmschen Widerstand des Dipols (R_V Antennenverlustwiderstand) Energie entzogen - die Abstrahlung von Energie durch den Dipol wirkt wie ein zusätzlicher ohmscher Widerstand (R_S Strahlungswiderstand). $R_S + R_V$ ist die Wirkkomponente des Antenneneingangswiderstandes. Da noch eine Blindkomponente auftritt, ist der Antenneneingangswiderstand in der Regel komplex.

Für einen $\lambda/2$-Dipol beträgt der Eingangswiderstand etwa 70 Ω, für einen Faltdipol mit den in Abb. 4.14.(1) angegebenen Abmessungen etwa 240 Ω . Durch Veränderung der Form des Faltdipols läßt sich sein Eingangswiderstand in weiten Grenzen variieren. Um eine möglichst verlustfreie Übertragung der Energie vom Generator zur Antenne zu gewährleisten, müssen Eingangswiderstand der Antenne, Wellenwiderstand des Übertragungskabels und Ausgang des Generators einander angepaßt sein. Die Energieabstrahlung eines Dipols erfolgt nicht gleichmäßig nach allen Richtungen des Raumes. Als Richtcharakteristik einer Antenne bezeichnet man die Abhängigkeit der Fernfeldstärke von der Richtung im Raume. Praktisch wichtig ist es für die Nachrichtentechnik, diese Richtcharakteristik einer Antenne vor allem in einer Ebene (horizontal oder vertikal) zu kennen.

Die Richtcharakteristik eines Dipols läßt sich durch sogenannte parasitäre Antennenelemente verändern. Als parasitäre Antennenelemente bezeichnet man parallel zum Dipol angeordnete Leiterstäbe, die mit dem Dipol nicht leitend verbunden, sondern "strahlungsgekoppelt" sind. In ihnen entstehen durch den Einfluß des Nahfeldes des Dipols elektrische Schwingungen, die mit der Dipolschwingung zusammenwirken. Durch eine solche "Yagi-Antenne" erreicht man eine Strahlung der Antenne bevorzugt in eine Richtung des Raumes. Aufbau und Abmessungen einer einfachen Yagiantenne sind in Abb. 4.14.(2) angegeben. Durch weitere Direktoren (jeweils um etwa 1 % kürzer als der vorhergehende) läßt sich die Richtwirkung noch erhöhen.

Neben dem Eingangswiderstand wird eine Antenne durch den Antennengewinn gekennzeichnet. Man versteht unter dem Antennengewinn das Verhältnis der maximalen Strahlungsleistung der Versuchsantenne zur maximalen Strahlungsleistung einer Vergleichsantenne. Im Vergleich zu einem einfachen $\lambda/2$-Dipol beträgt der Gewinn einer Yagiantenne etwa 3 bis 4 in der Hauptstrahlungsrichtung.

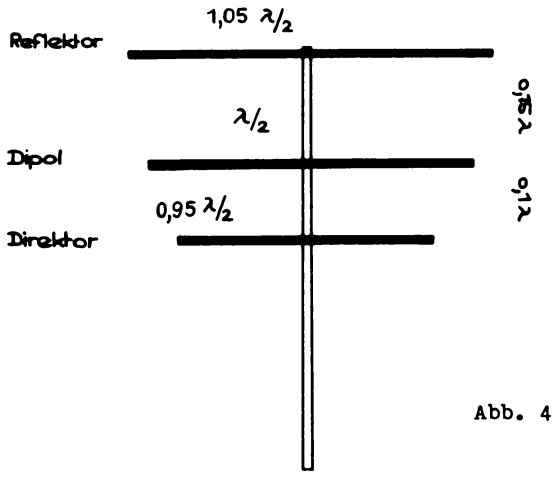


Abb. 4.14.(2) Yagiantenne

Die Aussagen über Richtcharakteristik und Antennengewinn sind hier für Sendeantennen gemacht worden. Wegen des Reziprozitätsgesetzes gelten sie auch für Empfangsantennen.

Zur Messung der Wellenlänge der Ultrakurzwellen erzeugt man stehende Wellen entweder durch ein Reflexionsblech hinter dem Empfangsdipol oder mittels einer Lecherleitung. Anstelle des Sendedipols läßt sich an den UHF-Generator eine Lecher-Leitung ankoppeln.

F 2 Beschreiben Sie die Wirkungsweise einer Lecherleitung und die Schwingungszustände bei offenem und bei kurzgeschlossenem abgestimmtem Leitungssystem!

Auch durch Messen der Abstände der Spannungsknoten und -bäuche in der Lecherleitung läßt sich die Wellenlänge der Ultrakurzwelle bestimmen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß durch das Ankoppeln der Lecherleitung an den UHF-Generator eine Rückwirkung auf den Generator eintritt, so daß seine Frequenz etwas verändert wird. Die mit der Lecherleitung ermittelte Wellenlänge wird also unter Umständen etwas von dem Wert abweichen, der nach dem Reflexionsverfahren bestimmt wurde.

Zur Durchführung und Auswertung

Als Schwingungserzeuger wird ein einfacher UHF-Generator verwendet. Die Schwingungsspule mit einer einzigen Windung wird von einem einfachen Drahtbügel gebildet, an den sich die Zuleitung zum Sendedipol

oder die Lecherleitung induktiv ankoppeln lassen. Der Empfangsdipol ist mit einem empfindlichen Strommeßgerät verbunden. In der Zuleitung zum Meßgerät wird die Hochfrequenz gleichgerichtet (Abb. 4.14.(3)).

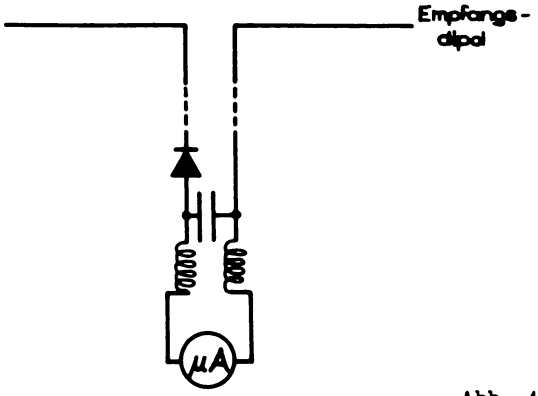


Abb. 4.14.(3) Gleichrichtung der Hochfrequenz

F 3 Welche Aufgabe haben der Kondensator und die beiden Drosselspulen, die außer dem Gleichrichter in der Zuleitung zum Meßgerät liegen (Abb. 4.14.(3))?

Die Ausschläge des Strommessers sind ein Maß für die von der Empfangsantenne aufgenommene Leistung.

Da der Empfänger nicht nur die direkt vom Sender kommende Welle aufnimmt, sondern auch die von den Wänden des Raumes und anderen Hindernissen reflektierten Wellen, sollten Sender und Empfänger nicht zu nahe an der Wand aufgestellt werden. Auch im Raum anwesende Personen beeinflussen das Meßergebnis.

Aufgabe 1

Die bei fester Stellung der Empfangsantenne von dem Strommeßgerät angezeigte Stromstärke dient als Maß für die von der Sendeantenne ausgestrahlte Leistung. Diese in Richtung des Empfängers abgestrahlte Leistung wird in Abhängigkeit vom Abstand des Reflektors bzw. des Direktors vom Sendedipol grafisch dargestellt. Es wird außerdem die Stellung von Reflektor und Direktor ermittelt, bei der die Strahlung

der Sendeantenne einen Maximalwert erreicht.

Aufgabe 2

Der Sendedipol allein und mit parasitären Elementen wird um 360° gedreht und die vom Empfänger aufgenommene Strahlungsleistung in Abhängigkeit von der Senderichtung in Polarkoordinaten grafisch dargestellt.

Aufgabe 3

a) Unmittelbar hinter dem Empfangsdipol (ohne parasitäre Elemente!) wird ein Aluminiumblech senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle aufgestellt. Dieses Blech reflektiert die ankommende Welle, durch Interferenz entsteht vor dem Blech eine stehende Welle. Wird der Abstand Reflexionsblech - Empfangsdipol allmählich vergrößert, ändert sich der Ausschlag des Meßgerätes zunächst bis zu einem Maximalwert, bei weiterer Vergrößerung des Abstandes zu einem Minimalwert usf.

F 4 Wie kann aus den Schwankungen der vom Empfänger aufgenommenen Strahlungsleistung bei Änderung des Abstandes Empfangsdipol - Reflektorblech die Wellenlänge der vom Sender abgestrahlten elektromagnetischen Welle bestimmt werden?

b) Anstelle der Sendeantenne wird an den UHF-Generator eine Lecherleitung angekoppelt. Mittels einer Brücke mit einem Glühlämpchen können die Spannungsbäuche und -knoten der stehenden Welle in der Lecherleitung festgelegt und aus deren Abstand die Wellenlänge bestimmt werden.

Als Nachweisgerät für die Spannungsbäuche kann auch eine Leuchtstoffröhre verwendet werden. Sie wird auf die Lecherleitung gelegt und leuchtet an den Spannungsbäuchen der stehenden Welle auf - evtl., nachdem sie mit einem Teslatransformator gezündet worden ist.

Fragen

F 1 bis F 4 siehe Text.

4.15. Untersuchungen zum Hall-Effekt

Der Hall-Effekt ist einer von mehreren galvano-magnetischen Effekten, bei denen die Bewegung von Ladungsträgern durch äußere magnetische Felder beeinflußt werden. Neben seiner grundsätzlichen physikalischen Bedeutung sind es vor allem seine technischen Anwendungen, die ein

eingehenderes Befassen mit diesem Effekt und die Untersuchung der bei ihm auftretenden Zusammenhänge notwendig erscheinen lassen. Dabei werden makroskopisch zu erfassende Größen als mikrophysikalische Zusammenhänge erklärt und damit das Verständnis mikrophysikalischer Vorgänge gefördert.

Aufgaben

1. Bestimmung der Hall-Konstante einer vorliegenden Materialprobe aus Messungen der Hallspannung als Funktion des Steuerstromes bei verschiedenen Werten der magnetischen Induktion B als Parameter.
2. Unter Voraussetzung reiner Elektronenleitung sollen für die untersuchte Materialprobe die Ladungsträgerdichte n, die Trägergeschwindigkeit v, die Leitfähigkeit σ und die Ladungsträgerbeweglichkeit b berechnet werden.
3. Es soll angegeben werden, wieviele Elektronen je Atom im Mittel im Probenmaterial vorhanden sind.

Grundlagen

Legt man an einen Leiter der Länge l und des Querschnitts A eine Spannung U, so entsteht im Innern des Leiters eine Feldstärke E. Die im Leiter vorhandenen freien Ladungsträger bewegen sich mit der Geschwindigkeit

$$v = E\,b \tag{1}$$

in Feldrichtung (positive Ladungsträger) oder zu ihr entgegengesetzt (negative Ladungsträger); b ist die Ladungsträgerbeweglichkeit.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns bei den folgenden Betrachtungen auf negative Ladungsträger einer Sorte, z. B. auf Elektronen. In der Zeit Δt treten durch die Querschnittsfläche $A = d \cdot s$ so viele Ladungsträger ΔN, wie in dem Leitervolumen $Av\Delta t$ vorhanden sind. Bezeichnet man mit n die Ladungsträgerdichte = Zahl der freien Ladungsträger/Volumen, so sind das

$$\Delta N = nAv\Delta t, \tag{2}$$

von denen die Ladungsmenge

$$\Delta Q = qnAv\Delta t \tag{3}$$

durch den Leitungsquerschnitt transportiert wird. Das entspricht der Stromstärke

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv \tag{4}$$

bzw. der Stromdichte

$$j = \frac{I}{S} = qnv. \tag{5}$$

Führt man

$$\sigma = qnb \tag{6}$$

als Leitfähigkeit ein, so erhält man aus Gl. (5) mit Gl. (1) und Gl. (6)

$$j = \sigma E. \tag{7}$$

Befindet sich der stromdurchflossene Leiter in einem Magnetfeld der magnetischen Induktion B, die senkrecht zur Stromrichtung orientiert sei, so wirkt auf die bewegten Ladungsträger die Lorentzkraft

$$F_z = qvB \tag{8}$$

und die Ladungsträgerbahnen krümmen sich. Dadurch verarmen die unteren Schichten an negativen Ladungsträgern, während die oberen Schichten gleichermaßen einen Ladungsträgerüberschuß erhalten (Abb. 4.15.(1)). Infolge dieser Potentialverschiebung mißt man zwischen den ur-

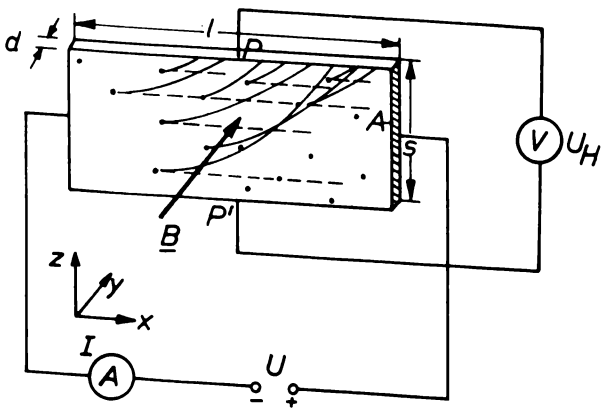


Abb. 4.15.(1) Prinzip der Meßanordnung zum Hall-Effekt. Es sind die Bahnen von negativen Ladungsträgern (z. B. Elektronen) gezeichnet.

sprünglich auf einer Äquipotentiallinie gelegenen Punkten P und P' eine Spannung, die Hallspannung U_H. Zugleich entsteht wegen der Potentialdifferenz in y-Richtung eine elektrische Feldstärke $E = U_H/s$, die mit der elektrischen Feldkraft $F_e = q\,E$ der Lorentzkraft entgegenwirkt, und es gilt

$$qvB = q\,U_H/s, \tag{9}$$

solange in s-Richtung kein Strom fließt; nur dann ergibt sich aus der Ladungstrennung für die Hall-Spannung der konstante Sättigungswert U_H. Mit Gl. (4) und Gl. (1) erhält man aus Gl. (9)

$$U_H = BIR_H/d, \tag{10}$$

wenn man die Hallkonstante

$$R_H = 1/nq \tag{11}$$

einführt.

Ist von einem Material die Hallkonstante bekannt, so kann man daraus die Ladungsträgerdichte (der Elektronen) berechnen, die bei gut leitenden Metallen in der Größenordnung der Atomzahldichte liegt, d. h., je Atom ist im Mittel ein (freies) Leitungselektron vorhanden.

Mit der Avogadro-Konstante N_A kann die Atomzahldichte angegeben werden: $n_o = \varrho N_A/M$ (M = molare Masse). Die Zahl der freien Elektronen pro Atom sei z; dann ist die Ladungsträgerkonzentration $n = z\,n_o$ und also $n = z\varrho N_A/M$. Für die Hall-Konstante folgt daraus mit $q = -e$

$$R_H = 1/nq = -M/z\varrho\,N_A e = -M/z\varrho\,F \tag{12}$$

mit $F := N_A e$. Aus Gl. (12) folgt $R_H \sim 1/z$.

F 1 Wie muß sich eine Temperaturänderung auf den Hall-Effekt bei Leitern und bei Halbleitern auswirken?

Bei schlecht leitenden Metallen (z. B. Wismut) und insbesondere bei Halbleitermaterialien (z. B. Germanium oder Indiumarsenid) ist die Ladungsträgerdichte (für freie Elektronen) um Zehnerpotenzen geringer; diese Materialien zeigen den Hall-Effekt besonders ausgeprägt; bei Halbleitern gilt das insbesondere für n-leitende Materialien. Die Hall-Konstante ist eine Materialkonstante. Gl. (10) gilt nur für sehr lange Plättchen, also für $l/s \gg 1$; für ein Seiten-

verhältnis l/s = 3 ergeben sich Minderungen des Maximalwertes von ca. 6 %. Praktisch werden Hall-Proben mit einem Seitenverhältnis l/s = 2 gefertigt. Deshalb gibt man üblicherweise anstelle von R_H/d die Leerlaufempfindlichkeit K_0 an, wobei $K_0 \lessapprox 0{,}95\ R_H/d$ gilt. Aus fertigungstechnischen Gründen ist es nicht möglich, die Spannungselektroden bei P und P' so anzubringen, daß im feldlosen Zustand (B = 0) exakt $U_H = 0$ gilt. Es entsteht vielmehr eine dem spezifischen Widerstand und der Stromstärke I proportionale ohmsche Restspannung $U_{H,R}$ schon dann, wenn kein Magnetfeld vorhanden ist. Diese ohmsche Nullkomponente muß entweder bei der Spannungsmessung berücksichtigt oder durch eine geeignete Schaltung kompensiert werden. Kompensationsschaltungen sind auch zur Unterdrückung anderer Fehlereinflüsse, wie z. B. Thermospannung, Kontaktpotential, Gleichrichterwirkung der Elektroden u. a. gebräuchlich.

Für reine Elektronenleitung in Halbleitern gilt z. B. $R_H = 3\pi/8ne$ bei Berücksichtigung der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung der thermischen Bewegung freier Elektronen im Halbleiter. Berücksichtigt man außerdem, daß die Leitungselektronen in Stromrichtung keine konstante Geschwindigkeit besitzen, so folgt für die (korrigierte) Lorentz-Kraft bei der Annahme, daß die Geschwindigkeit auf einer Strecke von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge gleichmäßig zunimmt, $F_z = (2/3)q\bar{v}B$ anstelle Gl. (8).

Zur Durchführung

Zu Aufgabe 1

Die magnetische Induktion B zwischen den Polen eines Elektromagneten ist gemäß $B = \mu H = \mu I_M n/l$ der Stromstärke I_M durch die Magnetspule proportional und von der Permeabilität μ des Kernmaterials abhängig. Der Zusammenhang zwischen B und I_M wird zweckmäßig einer grafischen Darstellung $B = B(I_M)$, der Hysteresiskurve, entnommen. Damit erspart man sich die sonst notwendige jeweilige Bestimmung von B mit einem Fluxmeter bzw. ballistischen Galvanometer. Man muß allerdings vor Beginn der Messungen mit Wechselstrom bei stetig von $I_{M,max}$ bis I = 0 geringer werdender Stromstärkeamplitude den Eisenkern völlig entmagnetisieren.

F 2 Warum ist diese Entmagnetisierung notwendig?

F 3 Verschaffen Sie sich Klarheit darüber, weshalb durch Speisung mit einem Wechselstrom stetig geringer werdender Stromstärkeamplitude tatsächlich eine Entmagnetisierung erfolgt!

In einer Schaltung gemäß Abb. 4.15.(2) wird für $I_M = 0$ die Hall-Spannung als Funktion des Steuerstromes I in geeigneten Intervallen (von $I = 0$ bis $I = I_{max}$) gemessen und in der ersten Zeile einer Meßtabelle notiert. Für mehrere geeignete Stufen im Intervall $0 < I_M \leqq I_{M,max}$ werden die Messungen in analoger Weise ebenfalls durchgeführt.

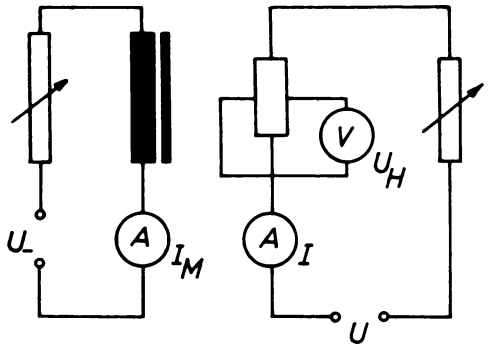


Abb. 4.15.(2) Schaltung für die Messung des Hall-Effektes

F 4 Warum darf der Magnetstrom I_M stets nur vergrößert werden?

Sollten Nachmessungen bei geringeren Stromstärken notwendig werden, so muß der Magnetstrom zuvor genau bis zur Maximalstromstärke erhöht und darf erst danach auf den gewünschten niedrigeren Wert zurückgenommen werden, damit die Aussagen aus der Hysteresiskurve richtig bleiben. Der zu einem bestimmten Strom gehörende Wert der magnetischen Induktion muß dazu auf dem ersten Viertel der Hysteresiskurve anstelle auf der Neukurve abgelesen werden.

In der ersten Zeile der aufgestellten Wertetafel und auch in der ersten Spalte müßten als Zahlenwerte jeweils Nullen erscheinen, da bei Fehlen eines magnetischen Feldes und auch beim Steuerstrom Null keine Hallspannung entstehen kann. Tatsächlich werden aber in der Praxis an diesen Stellen von Null verschiedene Werte gemessen.

F 5 Worauf sind diese Spannungswerte zurückzuführen?

Zur Korrektur werden von allen Zeilenwerten die Werte der ersten Zei-

le und von allen Spaltenwerten die Werte der ersten Spalte subtrahiert; damit sind alle Randwerte auf Null gebracht.

Die so entstehende Wertetafel enthält nunmehr die korrigierten Werte der Hall-Spannung. Mit diesen Werten kann sowohl die grafische Darstellung der Hallspannungsabhängigkeit von der magnetischen Induktion (mit den verschiedenen Steuerströmen als Parameter) als auch die grafische Darstellung der Abhängigkeit der Hall-Spannung vom Steuerstrom (mit den verschiedenen Werten der magnetischen Induktion als Parameter) angefertigt werden. Aus den ausgeglichenen Geraden der grafischen Darstellungen $U_H = U_H(B)$ bestimmt man die Anstiege U_H/B. Aus der Konstanz der Quotienten c_1 = Anstieg/Steuerstrom (die Steuerströme waren als Parameter angegeben) kann man ein Kriterium für die Güte der Messungen ableiten. Aus dem Mittelwert $\overline{c_1}$ gewinnt man durch Division mit der Probendicke d schließlich die Hall-Konstante des untersuchten Materials.

Analog verläuft die Auswertung, wenn $U_H = U_H(I)$ mit B als Parameter grafisch dargestellt ist: die Anstiege U_H/I werden durch die Parameterwerte B dividiert und zum Mittelwert $\overline{c_2}$ zusammengefaßt, wobei die Konstanz der Einzelwerte c_2 wiederum als Genauigkeitskriterium für die Meßwerte dienen kann. Die Hall-Konstante R_H folgt aus $\overline{c_2}/d$ und muß - bei genauer Messung und richtigem Ausgleichen der Geraden in den grafischen Darstellungen - mit dem R_H-Wert nach der ersten Methode innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen.

Zu Aufgabe 2

Für die Ladungsträgerdichte folgt aus Gl. (11) $n = 1/R_H q$ und für $q = \pm e$ dann $n = 1/e\,R_H$.

Für die Ladungsträgergeschwindigkeit folgt aus Gl. (5) bei Kenntnis des Probenquerschnitts $A = d\,s$ und für bekannte Steuerströme I mit $v = R_H I/A$.

Aus Gl. (7) erhält man für die Leitfähigkeit $\sigma = j/E$ und damit $\sigma = I\,l/A\,U$ bzw. unter Benutzung von Gl. (5) auch $\sigma = vl/UR_H$. Die Ladungsträgerbeweglichkeit kann mit Gl. (1) berechnet werden als $b = v/E$ bzw. bei Zurückgehen auf direkt meßbare Größen $b = IR_H l/AU$.

Den Auswertungen dieser Aufgabe ist der mittlere Wert für R_H nach Aufgabe 1 zugrunde zu legen.

Zu Aufgabe 3

Zur Berechnung der mittleren Zahl z von freien Elektronen je Atom wird Gl. (12) in einer der beiden Formen benutzt. Die allgemeinen Konstanten werden einem geeigneten Tabellenwerk entnommen.

Zusatzaufgabe

Die Beweglichkeit der Ladungsträger ist bei Halbleitern definiert durch $b := e\tau/m$, worin m die Masse des Ladungsträgers und τ die mittlere Stoßzeit zwischen dem Ladungsträger und einem Gitterbaustein bedeutet. Daraus kann mit der in Aufgabe 2 bestimmten Ladungsträgerbeweglichkeit die mittlere Stoßzeit berechnet werden.

Benutzt man die für Halbleiter definierte Beziehung $v_{Drift} = - bE$, so kann man damit die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen berechnen. Die Elektronen werden durch das angelegte elektrische Feld nicht frei beschleunigt, sondern bewegen sich wegen der Wechselwirkung mit den thermisch bewegten Gitterbausteinen nur mit einer mittleren Driftgeschwindigkeit als realer Geschwindigkeit der Elektronen im Halbleitermaterial.

Fragen

F 1 bis F 5 siehe Text.

F 6 Nennen Sie die galvanomagnetischen Effekte und skizzieren Sie kurz das Wesentliche der einzelnen Effekte!

F 7 Welche Störeffekte können bei der Untersuchung des Hall-Effektes auftreten und wie kann man sie beseitigen?

F 8 Was versteht man unter dem normalen und was unter dem anomalen Hall-Effekt?

F 9 Geben Sie Meßmethoden für den Hall-Effekt an!

F 10 Warum wäre es sinnvoll, anstelle Hall-Konstante den Begriff Hall-Koeffizient einzuführen?

F 11 Haben $\underline{J}$ und $\underline{E}$ gemäß (7) in allen Fällen die gleiche Richtung?