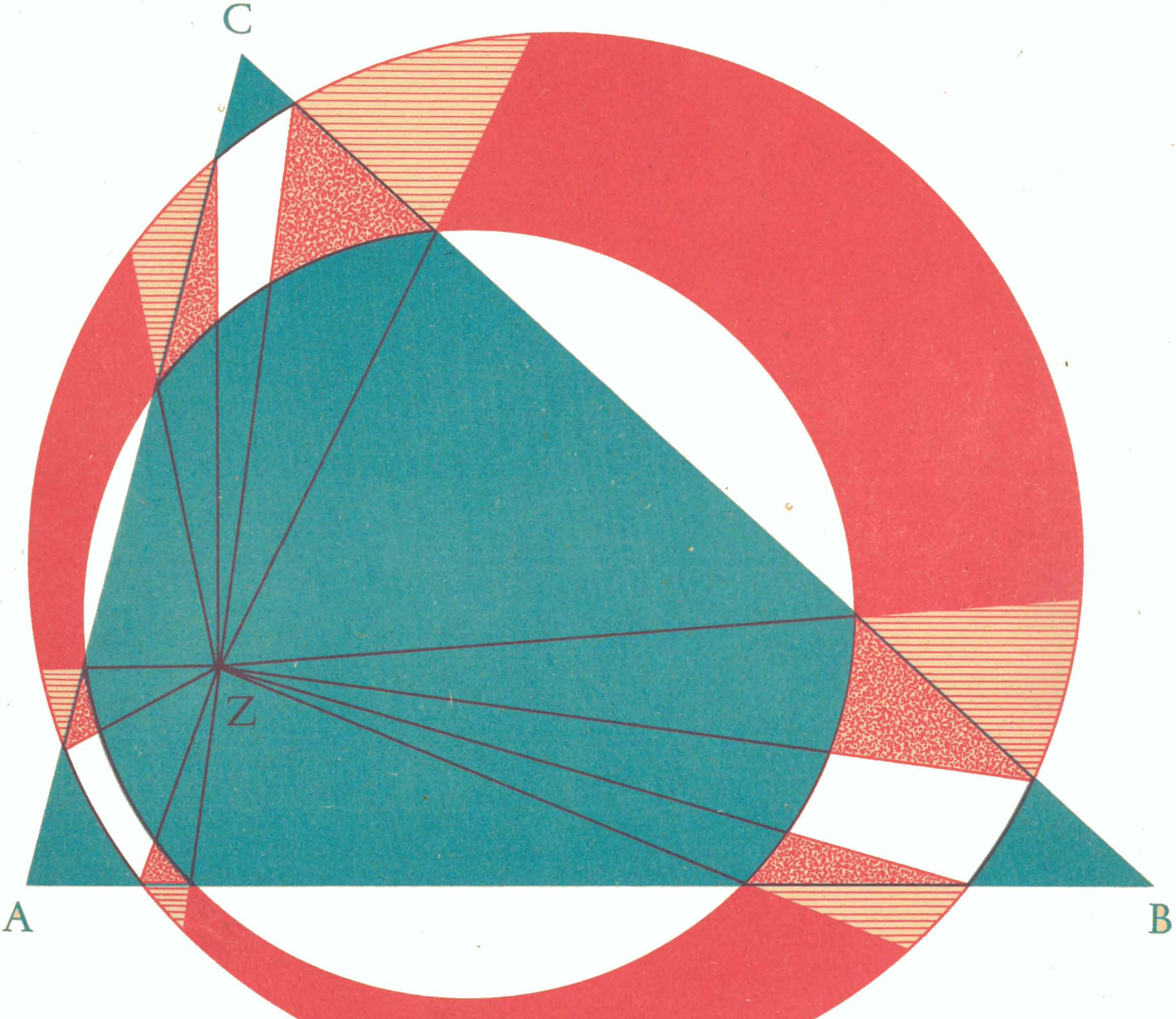
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16

Fotos: Kreisklub Mathematik des Landkreises Brandenburg (S. 3); Foto-Eilers Aken/Elbe (S. 10)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Das Titelblatt wurde von W. Fahr, Berlin, nach einer Idee von Dr. L. Stammler gestaltet.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
Redaktionsschluß: 29. Oktober 1979

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Jacobi – der Euler des 19. Jahrhunderts

Im Winter 1827/28 fanden zunächst in der (1810 gegründeten) Berliner Universität (der heutigen Humboldt-Universität) und dann in der Singakademie (dem heutigen Maxim-Gorki-Theater) einundsechzig populärwissenschaftliche Vorlesungen statt. Ein weitgereister Mann, der „zweite, wissenschaftliche Entdecker Amerikas“, der hervorragende Naturforscher und Humanist Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) erschloß seinen Hörern (häufig annähernd 1000 bei einem Vortrag, darunter Handwerker neben Professoren und Studenten, Berliner Männer und Frauen, Bürger und Offiziere, darunter der preußische General und deutsche Patriot Gneisenau, der Baumeister Schinkel, der Bildhauer Rauch, Fürsten, der König Friedrich Wilhelm III. und der Kronprinz) die Geheimnisse der Natur, machte diesem großen Kreis von Menschen einen umfangreichen Teil des Wissens der Zeit zugänglich.

Im September 1828 reisten vierhundert Wissenschaftler nach Berlin um an einem unter dem Vorsitz von Humboldt stattfindenden Kongreß der zwei Jahre zuvor gegründeten Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte teilzunehmen. „Der Hauptzweck dieser Gesellschaft“, so betonte Humboldt in seiner Eröffnungsansprache, „ist die persönliche Annäherung derer, welche dasselbe Feld der Wissenschaften bearbeiten; die mündliche und darum mehr anregende Auswechslung von Ideen, sie mögen sich als Tatsachen, Meinungen oder Zweifel darstellen; die Gründung freundschaftlicher Verhältnisse, welche den Wissenschaften Licht, dem Leben heitere Anmut, den Sitten Duldsamkeit und Milde gewähren.“

Zu den Gästen Humboldts gehörte der Direktor der Göttinger Sternwarte, der Mathematiker, Astronom, Physiker und Geodät Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855). („Ich zähle diese mir unvergeßlichen Tage zu den glücklichsten meines Lebens“, schrieb am 12. 10. 1828 Gauß aus Göttingen an Humboldt.) Humboldt hatte von Gauß 1804 in Paris gehört. Gauß war damals bereits durch seine zahlentheoretischen Untersuchungen und durch seine neuen Methoden zur Bahnbestimmung, die (1801) die Wiederauffindung der Ceres, des zuerst entdeckten Planetoiden, ermöglicht hatten, „in aller Munde“. (1801 erschien das Buch „Disquisitiones arithmetiquae“ – Untersuchungen zur Zahlentheorie –. Mit diesem Meisterwerk begann eine neue Epoche der Zahlentheorie. Der 24jährige Forscher nahm „mit einem Schlage den Rang neben den größten Mathematikern aller Zeiten“ ein.)

Auch den Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 bis 1859) hatte Humboldt zu dieser Versammlung eingeladen. Er hatte ihn im Sommer 1825 in Paris kennengelernt, als Dirichlet dort Vorlesungen hörte und sich mit dem Selbststudium der „Disquisitiones arithmetiquae“ von Gauß befaßte. Dirichlet war der erste Mathematiker, der die Gaußschen Ideen aus diesem Buch weiter be- und verarbeitete. Seine ersten Arbeiten (1825 bis 1831) schlossen inhaltlich und methodisch daran an.

Kongresse, Tagungen, auf denen nur Mathematiker über ihre Probleme sprachen, über ihre Resultate vortrugen und durch persönliche Kontakte Anregungen gaben und empfingen, gab es damals noch nicht. (Mathematische Vorträge populärwissenschaftlicher Art, wie Humboldts einleitend erwähnte – später „Kosmos-Vorlesungen“ genannt – Vorträge, gab es schon gar nicht.)

Eine Abteilung für Mathematik innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte wurde erst 1843 eingerichtet. Der erste offizielle internationale Mathematiker-Kongreß fand 1897 in Zürich statt. Der Nutzen solcher Kongresse in unserer Zeit ergibt sich aus der Notwendigkeit des persönlichen Verkehrs, des persönlichen Gedankenaustausches der Mathematiker untereinander.

Wer hätte damals, im September 1828, neben Gauß (aus Göttingen) und Dirichlet (aus Berlin) Teilnehmer eines Mathematikerkongresses sein können? (Die Mathematiker dieser Zeit standen oft untereinander in lebhafter Verbindung durch einen ausgedehnten Briefwechsel.)

An der École normale (Normalschule) in Paris lehrte Andrian Marie Legendre (1752 bis 1833). Die in seiner 1798 erschienenen „Zahlentheorie“ dargestellten Ergebnisse wurden schon 1801 durch Gaußens „Disquisitiones“ überholt. Seit 1786 veröffentlichte er viele Arbeiten über sogenannte elliptische Integrale. An der École polytechnique (Polytechnische Schule) in Paris wirkte der Akademiker und Professor Augustin Louis Cauchy (1789 bis 1857). Er arbeitete als einer der ersten in voller wissenschaftlicher Strenge und hat entscheidend dazu beigetragen, daß sich das exakte Verfahren in der Analysis durchsetzte.

In Paris forschten ferner Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768 bis 1830) und Siméon-Denis Poisson (1781 bis 1840) (an der École polytechnique).

Evariste Galois (1811 bis 1832) bemühte sich 1828 vergeblich, eine Zulassung für ein Studium an der „École polytechnique“ in Paris zu erhalten. Der genial-begabte Schüler las einst ein Geometriebuch von Legendre in einem Zug, „wie andere Jungen eine Piratengeschichte“. Jetzt war der Siebzehnjährige dabei, die Grundzüge seiner Theorie der algebraischen Gleichungen zu entwickeln. (Galois fiel im Duell im Alter von 20 Jahren. Sein schwer lesbares Werk wurde erst 1846 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht.)

Mit Beiträgen zur Theorie der Funktionen wäre der Philosoph und Mathematiker aus Südböhmen Bernardo Bolzano (1781 bis 1848) auf dem Kongreß aufgetreten.

1827 war das Hauptwerk des Geometers und Professors der Astronomie an der Universität Leipzig August Ferdinand Moebius (1790 bis 1868), „eine wahre Fundgrube neuer Ideen“, erschienen.

Der Rektor der Universität in Kasan war der Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 bis 1858). Er hatte bereits im Februar 1826 in Kasan einen Vortrag über die Grundlagen der Geometrie (Nichteuklidische Geometrie) gehalten und hätte auf einem Mathematiker-Kongreß sicher auch dieses Thema gewählt.

Am Berliner Gewerbeinstitut war der Geometer Jacob Steiner (1796 bis 1863), seit 1834 dann Mitglied der Berliner Akademie, tätig.

Der Geometer Julius Plücker (1801 bis 1868) war (1828) Professor in Bonn.

Über die Grundzüge der „nichteuklidischen Geometrie“ hätte neben Lobatschewski auch der ungarische Mathematiker János von Bolyai (1802 bis 1860) berichten können.

An der Universität in Christiana (dem heutigen Oslo) arbeitete Niels Henrik Abel (1802 bis 1829) intensiv an der Theorie der sog. elliptischen Funktionen.

Sein „Konkurrent“ in der Entwicklung dieser Theorie war der Königsberger Mathematikprofessor Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 bis 1851). Er kündigte am 8. September 1828 ein fundamentales Werk über diese Theorie an und war in dieser Zeit konzentriert mit der Ausarbeitung desselben beschäftigt.

Es gibt in diesen Jahren eigenartige Duplizitäten von Ereignissen: Die klassische Frage nach der Auflösbarkeit von Gleichungen ist unabhängig voneinander von Abel und Galois beantwortet worden. Lobatschewski und Bolyai kamen unabhängig voneinander zur Einsicht, daß das Parallelenaxiom durch die übrigen Euklidischen Axiome der Geometrie nicht beweisbar ist, daß also eine nichteuklidische Geometrie möglich sei. Das Jahr 1828 war eine Epoche angestrengtester Konkurrenz von Abel und Jacobi um den Ausbau der Theorie der elliptischen Funktionen. (Legendre hatte sich viele Jahre mit elliptischen Integralen beschäftigt, jedoch nicht die Umkehrfunktionen, die elliptischen Funktionen nämlich, untersucht.) Über diese drei Probleme hatte überdies Gauß viel früher nachgedacht, doch seine grundlegenden Resultate darüber nicht publiziert.

Wo hätte 1828 ein Mathematikerkongreß stattfinden können? In Paris, in Königsberg (dem heutigen Kaliningrad), in Göttingen, ...? Dynk der Wirksamkeit Humboldts, seiner Förderung zahlreicher deutscher Mathematiker, wäre auch Berlin als Tagungsort in Frage gekommen.

Humboldt hatte sich (jedoch vergeblich) bemüht, Gauß nach Berlin zu holen; er konnte die Berufung Dirichlets nach Breslau (dem heutigen Wroclaw) in die Wege leiten und ihn 1828 nach Berlin holen. Humboldt wurde von Gauß (in einem Brief vom 27. Januar 1827) auf das Talent Jacobis hingewiesen und brachte diesen dann auf den Posten, auf dem er seine Fähigkeiten frei entfalten konnte. Auf Humboldts Initiative geht der (nicht verwirklichte) Plan zurück, in Berlin ein Polytechnisches Institut einzurichten, an das Abel und erst Plücker, dann aber Steiner berufen werden sollten.

Das Niveau mathematischer Ausbildung war an der Berliner Universität in den ersten Jahren nach ihrer Gründung außerordentlich niedrig. So betonte Jacobi später, daß er (von April 1821 bis Mai 1825) während seiner „Studentenzeit in Berlin wissenschaftlicher Anleitung ganz entbehren mußte". Die Vorlesungen hatten einen zu elementaren Charakter. Jacobi eignete sich im Selbststudium die Werke von Leonhard Euler (1707 bis 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813) und Pierre Simon Laplace (1749 bis 1827) an. (Auf Grund einer hervorragenden wissenschaftlichen Arbeit wurde ihm bereits in seinem 21. Lebensjahr der Doktortitel verliehen.)

Insbesondere dank der Bemühungen Humboldts wurde Berlin bald ein mathematisches Zentrum. Bestand im 18. Jahrhundert noch ein großer Unterschied zwischen den bahnbrechenden Leistungen der Forscher (in Berlin: Gottfried Wilhelm Leibniz [1646 bis 1716], Euler, Johann Heinrich Lambert [1728 bis 1777] und Lagrange) und dem niedrigen Niveau der mathematischen Lehre, so setzte um 1825 ein Wandel ein. Im Herbst 1825 hielt Jacobi an der Berliner Universität seine erste Vorlesung. Dirichlet berichtete darüber:

„Nach dem Zeugnis einer seiner damaligen Zuhörer muß sein Lehrtalent bei diesem ersten Auftreten schon sehr entwickelt gewesen sein, und er es verstanden haben, sein Thema mit großer Klarheit und auf eine seine Zuhörer sehr anregende Weise zu behandeln." Der Mathematiker Ernst Eduard Kummer (1810 bis 1893), seit 1855 Professor und Akademiker in Berlin, betonte, daß Jacobis erste Vorlesung „als Anfang der allgemeinen Neugestaltung des mathematischen Universitätsunterrichts angesehen werden" kann.

Von 1826 an wirkte Jacobi 18 Jahre an der Universität in Königsberg. Hier wurde er der mitreißendste Vortragende seiner Zeit. „In seinen Vorlesungen, so wie im engeren wissenschaftlicheren Verkehr mit den Studierenden, wußte er auf ihre Bildungsstufe vollständig einzugehen, und indem er die alt hergebrachten pedantischen Methoden des Unterrichts gründlich verschmähte, verstand er es, auf dem Wege der einfachsten und klarsten Gedankenentwicklung ... seine Hörer mit sich fortzureißen und bis in die Tiefen der mathematischen Wissenschaften zu führen" (Kummer).

Von 1844 an (bis zu seinem Tode) arbeitete dann Jacobi als Akademiemitglied in Berlin, wo er an der Universität auch Vorlesungen hielt. Schon seit 1828 entfaltete Dirichlet (seit 1832 als Mitglied der Berliner Akademie), über 30 Jahre mit Humboldt eng befreundet, ein reges mathematisches Leben in Berlin. Auch in seinen Vorlesungen wurden die Studenten mit den neuesten Forschungsergebnissen bekanntgemacht. Seine Denkweise war, „mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen". Er legte großen Wert auf völlige Strenge. In einem Brief vom 21. 12. 1846 an Humboldt schrieb Jacobi über Dirichlet: „Er allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß weiß, was ein vollkommen strenger Beweis ist, sondern wir kennen es erst von ihm. Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist es ebensoviel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß, ich lasse mich auf diese Delikatessen lieber gar nicht ein."

G. G. J. Jacobi – Lebensdaten

1804	10. Dezember: Geburt in Potsdam. Zweiter Sohn des Bankiers Simon Jacobi (1772 bis 1832), Vorstandsmitglied der Jüdischen Gemeinde in Potsdam, und dessen Frau, geb. Kachel (1774 bis 1848).
1816	November (bis April 1821): Besuch des Victoria-Gymnasiums in Potsdam.
1821	April (bis Mai 1825): Studium der Philosophie, klassischen Altertumswissenschaften und Mathematik an der Universität in Berlin.
1825	August: Promotion und Habilitation an der Universität Berlin.
1825/26	(Wintersemester): Erste Vorlesungen Jacobis an der Universität in Berlin.
1826	Mai (bis September 1844): In Königsberg (zunächst Privatdozent, dann 1827 außerordentlicher Professor, 1829 ordentlicher Professor an der dortigen Universität).
1829	August (bis Oktober): Reise nach Paris. Persönliche Bekanntschaft mit Legendre.
1831	11. September: Hochzeit Jacobis; seine Frau Marie, geb. Schwinck (1809 bis 1901) ist die Tochter des Großkaufmanns Schwinck in Königsberg. Fünf Söhne, drei Töchter.
1839	März (bis September): Reise nach Potsdam und Berlin. Besuch bei A. v. Humboldt. Umgang mit Steiner, Dirichlet. Reise nach Marienbad (Kur), Prag, Wien, München, Heidelberg, Göttingen (Besuch bei Gauß).
1842	Juni (bis September): Reise nach Manchester und London sowie nach Paris.
1843	Schwere Erkrankung Jacobis (Zuckerkrankheit).
1843	Mai: Dirichlet besucht Jacobi in Königsberg.
1843	9. Juli: Abreise über Berlin, Gotha, Baden-Baden, Freiburg nach Italien. Italienaufenthalt zeitweise zusammen mit Steiner und Dirichlet.
1843	16. November: Jacobi trifft in Rom ein.
1843	28. Dezember: Der Papst Gregor XVI. empfängt Jacobi und Dirichlet in besonderer Audienz.
1844	Ende April: Drei Wochen Aufenthalt in Neapel.
1844	Mai: Abreise aus Rom über Genf, Basel, Straßburg, Frankfurt/Main nach Berlin.
1844	September: Letzter Aufenthalt in Königsberg.
1844	Ende September: Übersiedlung nach Berlin. (Ordentliches Mitglied der Berliner Akademie, seit 1829 bereits korrespondierendes Mitglied, seit 1836 auswärtiges Mitglied dieser Akademie.)
1848/49	Fortschrittliche politische Betätigung nach der Berliner Märzrevolution.
1849	16. Juli: Jacobi und Dirichlet bei Gauß in Göttingen.
1849	August: Beginn finanzieller Repressalien (Entzug der Berlin-Zulage von 1000 Talern) wegen der politischen Betätigung.
1849	Ende September: Übersiedlung seiner Frau und Kinder (3 Jungen von 17, 12, 11 Jahren, 3 Mädchen von 9, 7, 4 Jahren, ein Junge von 2 Jahren) nach Gotha. Jacobi geht in einem Gasthof (zu Berlin) in Pension.
1849	November: Die österreichische Regierung beabsichtigt, Jacobi nach Prag oder Wien zu berufen.
1850	Februar: Jacobi nimmt den Ruf nach Wien an.
1850	5. März: Durch Kabinettsorder werden alle finanziellen Forderungen erfüllt, die entzogene Zulage um 333 Taler erhöht und die 1333 Taler vom 1. Oktober 1849 rückwirkend bewilligt. Jacobi bleibt in Berlin.
1851	11. Februar: Erkrankung an Pocken.
1851	18. Februar: Tod Jacobis in Berlin.

Nach den glänzenden Zeiten der Berliner Wirksamkeit von Euler, Lambert und Lagrange im 18. Jahrhundert, verhalf Dirichlet zusammen mit Steiner (seit 1834 Mitglied der Berliner Akademie) und Jacobi der Berliner Mathematik zu neuem Ruhm. Die erste persönliche Bekanntschaft zwischen Dirichlet und Jacobi wurde im Sommer 1829 angeknüpft. Kurze Zeit vorher war in Königsberg das Buch „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" (Neue Grundlage der Theorie der elliptischen Funktionen) erschienen. Dieses grundlegende Werk reihte sich Gaußens „Disquisitiones arithmetiquae" würdig an und ließ aller Augen auf den Verfasser richten. Der (wie einst Gauß 1801) 24jährige Forscher, Carl Gustav Jacob Jacobi, stand von diesem Zeitpunkt an, unbestritten nächst Gauß, als der erste deutsche Mathematiker da. Legendre, der sich selbst seit 1786 mit der hier behandelten Thematik beschäftigt hatte, bewunderte und lobte Jacobis Meisterwerk. Im März 1829 wurde Jacobi ordentlicher Professor für das Fach Mathematik an der Universität Königsberg. In seinen Vorlesungen wurde nicht Fertiges, Überliefertes von neuem überliefert, „seine Vorlesungen bewegten sich sämtlich außerhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfaßten nur diejenigen Teile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hieß bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechslung" (Dirichlet).

Vom Stil, der mathematischen Denkweise und der Problematik seiner Forschungsarbeiten her, war der große Theoretiker Jacobi geistig eng verwandt mit Euler. Der Mathematikhistoriker E. T. Bell schreibt: „Euler, der Meister genialer Kunstgriffe, fand in Jacobi einen glänzenden Nachfolger. In der Fähigkeit zur Durchführung komplizierter Rechenoperationen sind Euler und Jacobi unübertroffen geblieben."

Seine Schüler nannten Jacobi den „Euler des 19. Jahrhunderts". Der Mathematikhistoriker und A.-v.-Humboldt-Forscher, K.-R. Biermann, vergleicht: „Umfassende Vielseitigkeit, fast unglaubliche Fruchtbarkeit, phänomenales Gedächtnis, eingehende Literaturkenntnis – das alles finden wir bei Euler wie bei Jacobi, aber auch die bisweilen mangelnde Strenge ist ihnen gemeinsam."

Jacobi gilt als einer der fleißigsten, arbeitswütigsten Mathematiker der Geschichte. Es seien seine tiefliegenden Untersuchungen über elliptische Funktionen, seine fundamentalen Beiträge zur Zahlentheorie, seine Untersuchungen zu den Prinzipien der analytischen Mechanik (Theorie der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung), seine Arbeiten zur Determinantentheorie, seine mathematik-historischen Forschungen genannt. (Das „Mathematische Wörterbuch" enthält über 45 Stichwörter, die mit Jacobis Namen verbunden sind.)

Jacobi gründete 1834 das erste Seminar auf mathematischem Gebiet. Hier sollten Studenten zu eigener Arbeit angeleitet, ihre Selbsttätigkeit gefördert und sie in nähere und fruchtbarere wissenschaftliche Berührung mit ihren Lehrern (als es durch das bloße Anhören der Vorlesungen geschehen kann) gebracht werden. Der Jacobi-Biograph Leo Koenigsberger berichtete später (1904) über die Art, wie Jacobi das Seminar leitete: „Jacobi leitete die Arbeiten damit ein, daß er in kurzen Vorträgen an einen den Mitgliedern geläufigen Zusammenhang anknüpfte und von da zu einer besonderen Aufgabe hinleitete, mit deren Lösung sich die Mitglieder die Woche über zu beschäftigen hatten; ihre Arbeiten wurden im Laufe der Woche dem Dirigenten abgegeben und am nächsten Sonnabend von demselben beurteilt, worauf zu einer neuen Arbeit übergegangen wurde."

Den Einfluß Jacobis auf seine Studenten und Schüler beschrieb F. Klein in seinen „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" (1926) so: „Die widerstrebendsten Naturen zwang er in seine Denkweise hinein, jeden riß er zur Höhe speziell mathematischen Ehrgeizes, zum brennenden Interesse an der von ihm gegebenen Problemstellung des Tages mit fort. Nicht nur fremde Fähigkeiten anregend und weckend wie etwa Gauß oder Dirichlet, sondern jeden in den Bann seines augenblicklichen Gedankenganges hineinzwingend, war Jacobi der ausersehene Mann dazu, eine umfangreiche, auf lange hinaus blühende Schule zu begründen."

Das abgelegene Königsberg wurde zum Mittelpunkt einer Schule, deren zahlreiche Schüler nach ihrer „Lehre" bei ihrem „Meister" Jacobi als hervorragende Mathematiker und Hochschullehrer an vielen deutschen Universitäten wirksam wurden. Diese sog. „Königsberger Schule" ist (nach F. Klein) „die erste derartige Erscheinung in Deutschland, welche dauernde Bedeutung gewonnen hat". Auch über die Grenzen Deutschlands hinaus (in Frankreich und England) ist Jacobis Einfluß, der Geist seiner Forschung und Lehre, von großer Wirksamkeit gewesen.

Die drei wohl größten deutschen Mathematiker der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts weilten am 16. Juli 1849 in Göttingen. C. G. J. Jacobi und J. P. G. Lejeune Dirichlet besuchten C. F. Gauß am 50. Jahrestag der Verleihung seiner Doktorwürde.

H. Pieper

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Tamás Varga

Nationales Pädagogisches Institut Budapest

▲1936▲ Wir nennen jede natürliche Zahl $n \geq 1$, die sich als Summe von wenigstens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen läßt, eine „Treppenzahl". (Beispielsweise ist 9 eine Treppenzahl mit zwei verschiedenen „Treppen":

$9=2+3+4$ und $9=4+5$)

Aufgabe: a) Welche natürliche Zahlen sind Treppenzahlen?

b) Bestimme die Anzahl verschiedener Treppen für eine gegebene Treppenzahl!

Fotos aus dem Kreisklub Mathematik des Landkreises Brandenburg, siehe Seite 10.

Sonderbare Geometrie

Könnt ihr euch eine Gerade vorstellen, die nur aus drei Punkten besteht, wobei jeder dieser Punkte Mittelpunkt der durch die beiden anderen Punkte bestimmten Strecke ist? Nun, wir wollen versuchen, eine solche sonderbare Geometrie durch eine Vorgehensweise aufzubauen, welche von einem Mathematiker vollkommen akzeptiert werden würde.

Im Mathematikunterricht wird gezeigt, daß das Bild einer linearen Funktion f mit $f(x)=mx+n$ bzw. das Bild einer Gleichung $Ax+By+C=0 (A^2+B^2>0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem eine Gerade ist, wobei man davon ausgeht, daß man genau weiß, was man unter einer Geraden zu verstehen hat. Doch gerade diese Annahme ist durchaus nicht selbstverständlich. Ihr könntet ja einmal versuchen, eine exakte Definition des Begriffes „Gerade" aufzuschreiben.

Es ist in der Mathematik deshalb häufig zweckmäßig, den umgekehrten Weg zu gehen: Die Menge der Punkte, welche einer Gleichung $y=mx+n$ genügen, nennt man Gerade. Punkte sind dabei bekanntlich geordnete Paare bzw. geordnete Tripel reeller Zahlen, je nachdem, ob man Geometrie in einer Ebene oder im Raum betreibt. Entsprechend heißt die Menge der Punkte $(x;y)$, welche einer Gleichung $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ genügt, Kreis mit dem Mittelpunkt (c,d) und dem Radius r. Macht euch dies an Beispielen klar! Überlegt euch außerdem, wie man zweckmäßigerweise definieren müßte, unter welchen Bedingungen zwei Geraden $A_1x+B_1y+C_1=0$ und $A_2x+B_2y+C_2=0$ zueinander parallel bzw. zueinander orthogonal sein sollen! Überprüft schließlich noch, daß es gerechtfertigt ist, $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ als den Mittelpunkt und $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ als die Länge der durch die Punkte $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ festgelegten Strecke zu bezeichnen!

Geht man diesen Weg, geometrische Begriffe durch geeignete Gleichungen zu definieren, so kann man nachweisen: Die Eigenschaften bekannter geometrischer Objekte stehen nicht im Widerspruch zu unseren anschaulichen Vorstellungen. So werden z. B. in der Ebene zwei nichtparallele Geraden stets genau einen Punkt gemeinsam haben.

Untersuchen wir nun einmal die Frage, welche Folgerungen eintreten würden, wenn man Punkte einer Ebene mit geordneten Paaren ganzer Zahlen identifizieren würde. Der Kreis k, der durch $x^2+y^2=25$ beschrieben wird, bestünde dann nur aus den 12 Punkten $(0;5)$, $(0;-5)$, $(5;0)$, $(-5;0)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(-3;4)$, $(-4;3)$, $(3;-4)$, $(4;-3)$, $(-3;-4)$, und $(-4;-3)$, er wäre dann eine endliche Punktmenge. Problematisch ist jedoch besonders die Tatsache, daß bei der Berechnung von Eigenschaften geometrischer Figuren Schwierigkeiten auftreten würden. Wollte man z. B. den Schnittpunkt $(x_1;y_1)$ der beiden nichtparallelen Geraden $g_1: y=x+1$ und $g_2: y=3x-4$ berechnen, so erhielt man nach Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten

$2x_1-5=0$ bzw. $x_1=\frac{5}{2}$ und $y_1=\frac{7}{2}$.

Da x_1 und y_1 nicht ganzzahlig sind, ist $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ kein Punkt unserer Ebene. Die beiden nichtparallelen Geraden hätten folglich keinen Punkt gemeinsam.

Durchdenkt man das Beispiel genauer, so erkennt man: Die aufgetretene Schwierigkeit entsteht dadurch, daß im Bereich der ganzen Zahlen nicht jede Gleichung der Form $a\cdot x=b$ (mit $a=0$) durch eine ganze Zahl lösbar ist. Die Menge der ganzen Zahlen besitzt – betrachtet man sie bezüglich der Addition und der Multiplikation – schwächere Eigenschaften als die Menge der reellen Zahlen.

Es ist sowohl die Addition reeller Zahlen als auch die Multiplikation der von Null verschiedenen reellen Zahlen eine kommutative, assoziative und umkehrbare Operation, dabei ist die Multiplikation mit der Addition distributiv verbunden. Man sagt: Die Menge der reellen Zahlen bildet bezüglich dieser beiden Operationen einen Körper. Für die Menge der ganzen Zahlen trifft dies jedoch bezüglich der entsprechenden Operationen aus den oben genannten Gründen nicht zu.

Wir müssen also versuchen, einen Körper zu konstruieren, den wir als Basis für unsere Geometrie nutzen können. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Man teilt die Menge aller ganzen Zahlen in drei Klassen $[0]_3$, $[1]_3$, $[2]_3$ ein. In $[0]_3$ bzw. $[1]_3$ bzw. $[2]_3$ faßt man diejenigen ganzen Zahlen zusammen, die durch 3 geteilt, den Rest 0, den Rest 1 bzw. den Rest 2 ergeben. Da jede dieser Klassen durch eine in ihr liegende Zahl charakterisiert werden kann, ist die Bezeichnung dieser Klassen mit $[0]_3$; $[1]_3$ bzw. $[2]_3$ im folgenden auch kurz mit 0, 1 bzw. 2 gerechtfertigt. In der Menge $G_3=\{[0]_3;[1]_3;[2]_3\}$ wird durch $[a]_3\cdot[b]_3=[a\cdot b]_3$ bzw. $[a]_3+[b]_3=[a+b]_3$ eine Multiplikation bzw. eine Addition eingeführt.

Man beachte, daß die Addition (bzw. Multiplikation) von Restklassen mit Hilfe der Addition (bzw. Multiplikation) ganzer Zahlen definiert wird. Es übertragen sich deshalb die bekannten Eigenschaften der Addition und der Multiplikation ganzer Zahlen auf das Rechnen mit Restklassen. Wir wollen noch bemerken, daß das Berechnen der Differenz $[a]_3-[b]_3=[x]_3$ der Ermittlung des Summanden $[x]_3$ in $[a]_3=[x]_3+[b]_3$ entspricht, so daß mit Hilfe der Addition von Restklassen eine Subtraktion von Restklassen und analog mit Hilfe der Multiplikation von Restklassen eine Division von Restklassen festgelegt werden kann.

Die folgenden Tafeln geben alle Möglichkeiten der additiven bzw. multiplikativen Verknüpfungen der Elemente von G_3, der Menge der Restklassen modulo 3 an. Wir nutzen nun die vereinbarte Kurzschreibweise und schreiben z. B. 1 statt $[1]_3$.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

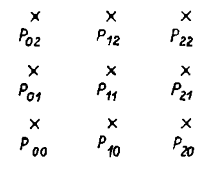
·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Die Menge G_3 bildet bezüglich der in ihr erklärten Verknüpfungen tatsächlich einen Körper (Begründung?).

Entsprechend unserem Prinzip, die Punkte einer Ebene mit geordneten Paaren zu identifizieren, bezeichnen wir die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus G_3 als eine Ebene, die wir mit $G_3{}^2$ bezeichnen; die geordneten Paare selbst heißen Punkte dieser Ebene.

Die so konstruierte Ebene besteht aus neun Punkten. Bettet man sie in eine Ebene ϵ unserer Anschauung ein, indem man jedem von neun ausgewählten Punkten P_{ij} von ϵ genau eines der neun Paare $(i;j)\in G_3{}^2$ zuordnet, so kann man diese Ebene wie folgt veranschaulichen:

Bild 1



Man beachte, daß in Bild 1 nur die neun eingezeichneten Punkte zu unserer Ebene $G_3{}^2$ gehören, nicht jedoch die „Zwischenräume".

Es wäre durchaus möglich gewesen, sowohl den anschaulichen Abstand zwischen den Punkten als auch deren Anordnung anders zu wählen.

Sucht euch noch andere Anordnungen aus!

Beschäftigen wir uns zunächst mit den Geraden der Ebene $G_3{}^2$. Nach Definition ist jede Gerade eine Menge von Punkten, welche einer Gleichung der Form $Ax+By+C=0$ genügen.

In unserer Geometrie sind dabei A, B und C irgendwelche Restklassen der oben genannten Art, wobei wieder der Fall $B=A=0$ ausgeschlossen werden soll.

Zunächst kann man sich leicht überlegen, daß jede Gerade genau drei Punkte enthält, denn setzt man für x die drei Restklassen ein, so sind die zugehörigen Werte für y eindeutig bestimmt. Die Gerade $g: x+y+2=0$ enthält z. B. die drei Punkte (0;1), (1;0), (2;2). Daß diese drei Punkte anschaulich nicht auf einer Geraden liegen (siehe Bild 1), verwundert uns schon nicht mehr. Bei der Veranschaulichung der Ebene $G_3{}^2$ lag der Anordnung der Punkte P_{ij} ohnehin eine gewisse Willkür zugrunde.

Erstaunlicherweise ist in unserer Geometrie jedoch jeder Punkt unserer Geraden Mittelpunkt der beiden anderen Punkte, wie man sofort nachrechnet.

Dieser Sachverhalt gilt für jede beliebige Gerade unserer Ebene $G_3{}^2$. Sind nämlich $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ zwei Punkte, die auf der durch $Ax+By+C=0$ definierten Geraden liegen, so liegt auch der Punkt $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ auf dieser Geraden. Aus $Ax_1+By_1+C=0$ und $Ax_2+By_2+C=0$ folgt nämlich durch Addition $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+B\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+C=0$.

Im Zusammenhang mit der Tatsache, daß jede Gerade aus genau drei Punkten besteht, folgt dann unsere Behauptung.

Wir wählen nun einen Punkt, etwa $(0;0)\in G_3{}^2$, aus und untersuchen, wie viele Geraden diesen Punkt enthalten. Jede dieser Geraden wird durch eine Gleichung $Ax+By=0$ beschrieben. Wir stellen alle derartigen Gleichungen und die zur jeweiligen Geraden gehörenden Punkte in einer Tabelle zusammen:

g_1	$0x+\ y=0$	(0;0)	(1;0)	(2;0)
g_2	$x+\ y=0$ [1]	(0;0)	(1;2)	(2;1)
g_3	$x+2y=0$	(0;0)	(1;1)	(2;2)
g_4	$x+0y=0$	(0;0)	(0;1)	(0;2)

Es existieren in $G_3{}^2$ also 4 Geraden, die den Punkt (0;0) enthalten. Eine entsprechende Aussage gilt für jeden der neun Punkte, so daß, da jede Gerade 3 Punkte enthält, in $G_3{}^2$ zwölf voneinander verschiedene Geraden existieren.

Unter den 4 Geraden, welche durch einen Punkt gehen, sind keine zueinander parallelen Geraden. Es gilt nämlich für je zwei der oben genannten Geradengleichungen stets $A_1B_2 \neq A_2B_1$. Damit existieren in unserer Ebene vier Richtungen.

Jede Gerade legt eine Richtung fest; parallelen Geraden wird die gleiche Richtung zugeordnet. Es ist nicht ganz einfach, sich diesen Sachverhalt an einem anschaulichen Modell (siehe Bild 1) zu verdeutlichen.

Die beiden Geraden g_2 und g_3 sind wegen $-(1\cdot 1)=1\cdot 2$ zueinander orthogonal. Entsprechendes gilt für die Geraden g_1 und g_4.

Da auch in $G_3{}^2$ die drei Punkte (0;0), (1;0) und (0;1) nicht auf einer Geraden liegen, bilden sie ein Dreieck. Der Mittelpunkt der durch (1;0) und (0;1) bestimmten Dreieckseite ist der dritte auf der durch diese beiden Punkte bestimmten Geraden liegende Punkt (2;2). Also liegt die zugehörige Seitenhalbierende auf g_3. Die Mittelpunkte der beiden anderen Dreieckseiten sind (2;0) bzw. (0;2). Die Seitenhalbierenden liegen auf Geraden mit den Gleichungen $y=x+2$ und $y=x+1$, sie sind zueinander parallel.

Da die drei Seitenhalbierenden keinen Punkt gemeinsam haben, gilt der Satz aus der Dreieckslehre im R^2, daß sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, in der Ebene $G_3{}^2$ nicht. Der Winkel beim Eckpunkt (0;0) des untersuchten Dreiecks ist ein rechter; für die beiden anderen Innenwinkel trifft dies nicht zu.

Überprüft, ob sich die Höhen des gegebenen Dreiecks in einem Punkte schneiden! Versucht, euch den Sachverhalt in Bild 1 zu verdeutlichen!

Wir wollen schließlich noch untersuchen, welche Eigenschaften ein Kreis $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ in der Ebene $G_3{}^2$ besitzt:

Betrachten wir für den Mittelpunkt (0;0) die beiden möglichen Fälle $r=1$ und $r=2$.

Der Kreis mit dem Radius 1 besteht aus den Punkten (0;1), (0;2), (1;0) und (2;0), der Kreis mit $r=2$ besteht aus den Punkten (1;1), (2;2), (1;2) und (2;1). Beide Kreise sind konzentrisch (siehe Bild 2). Mit Hilfe des Abstandsbegriffes kann man nämlich zeigen, daß in jedem der beiden Fälle die Punkte des Kreises von (0;0) den gleichen Abstand besitzen.[2]

Man kann sich an Hand der Kreisgleichung $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ überlegen, daß jeder Kreis in $G_3{}^2$ aus genau vier Punkten besteht. Man braucht nämlich nur die beiden Fälle $r^2=1$ und $r^2=2$ zu untersuchen.

Bei der Definition der Ebene $G_3{}^2$ hatten wir den Körper der Restklassen modulo 3 zugrundegelegt. Erstaunlicherweise führte dies zu Ergebnissen, die – bis auf wenige Ausnahmen – mit den uns bereits bekannten Eigenschaften geometrischer Figuren übereinstimmen. Da unsere Ebene nur aus neun Punkten besteht, muß natürlich auch die Zahl der Geraden, Dreiecke, Kreise ... endlich sein und jede dieser geometrischen Figuren kann nur aus endlich vielen Punkten bestehen.

Bild 2

o (0,2)	o (1,2)	o (2,2)
o (0,1)	o 1,1	o (2,1)
× (0,0)	o (1,0)	o (2,0)

Warum die ermittelten Ergebnisse häufig im Widerspruch zur Anschauung standen, ist uns inzwischen bewußt geworden. Die etwas erstaunliche Tatsache, daß auf einer Geraden der Ebene $G_3{}^2$ jeder Punkt Mittelpunkt der beiden anderen Punkte der Geraden ist, hat ihre Ursache darin, daß der Körper G_3 im Gegensatz zum Körper der reellen Zahlen nicht geordnet ist. Man kann nämlich in G_3 nicht geeignet festlegen, wann eine Restklasse größer als eine andere ist; beim fortlaufenden Addieren der Restklasse 1 durchläuft man zyklisch immer wieder alle Restklassen.

Der Versuch, mit Hilfe der Restklassen modulo 4 eine Geometrie einer Ebene aufzubauen, würde fehlschlagen, da die Menge G_4 bezüglich der Restklassenaddition und bezüglich der Restklassenmultiplikation keinen Körper bildet. Es ist z. B. die Gleichung $[2]_4\cdot[x]_4=[3]_4$ durch keine Restklasse modulo 4 lösbar, d. h. die Multiplikation der von $[0]_4$ verschiedenen Restklassen ist keine umkehrbare Operation.

Man muß sich beim Aufbau endlicher Geometrien auf Restklassen modulo p, wobei p eine Primzahl ist, beschränken. Also könnte man auch Ebenen $G_2{}^2$ oder $G_5{}^2$ oder $G_{11}{}^2$ untersuchen, die aus 4 bzw. 25 bzw. 121 Punkten, nämlich allen geordneten Paaren von Restklassen modulo 2 bzw. modulo 5 bzw. modulo 11 bestehen. Wer Lust hat, kann ja einmal Geraden, Dreiecke, Kreise ... in einer solchen Geometrie untersuchen.

Es ist außerdem interessant und auch nicht allzu schwierig, die folgenden vier scheinbar selbstverständlichen Aussagen in einer Ebene $G_p{}^2$ zu beweisen. Man muß dabei die Körpereigenschaften von G_p nutzen, wenn man „mit Geradengleichungen rechnet".

1. In jeder Ebene G_p^2 existieren drei Punkte, die nicht sämtlich auf ein und derselben Geraden liegen.
2. Der Durchschnitt zweier voneinander verschiedener Geraden ist entweder leer oder besteht aus genau einem Punkt.

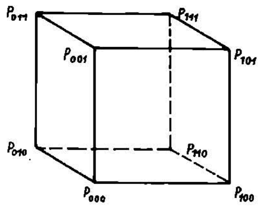
[1]) Man beachte, daß die Gleichungen $2x+y=0$ und $x+2y=0$ nicht voneinander verschieden sind. Die eine geht aus der anderen durch Multiplikation mit der Restklasse 2 hervor.

[2]) Im zweiten Fall ist der Abstand $\sqrt{2}$. Es sei bemerkt, daß der Abstand zweier Punkte auch in $G_3{}^2$ eine beliebige nichtnegative reelle Zahl sein kann.

3. Zu zwei Punkten P und Q mit $P \neq Q$ existiert genau eine Gerade g mit $P \in g$ und $Q \in g$.
4. Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ existiert genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. ($\emptyset$ ist die leere Menge)

Zum Schluß wollen wir noch einen dreidimensionalen Raum konstruieren, dem der Körper G_2 zugrundeliegt. Wir bezeichnen diesen Raum, der aus der Menge aller geordneter Tripel von Restklassen modulo 2, den Punkten dieses Raumes, besteht, mit G_2^3. Der Raum besteht aus 8 Punkten, denen wir das folgende anschauliche Bild zuordnen wollen (Bild 3).

Bild 3



Jede Gerade in G_2^3 besteht aus 2 Punkten. Insgesamt existieren in G_2^3 genau $\binom{8}{2} = 28$ Geraden, nämlich soviel, wie es Möglichkeiten gibt, aus 8 Punkten 2 Punkte auszuwählen (Problem der Kombination ohne Wiederholung).

Geht man von einem Punkt P aus, so kann man mit jedem der sieben von P verschiedenen Punkte eine Gerade festlegen, die sämtlich voneinander verschieden sind. Also existieren durch jeden Punkt sieben Geraden, in unserem Raum gibt es 7 Richtungen, von denen jede durch vier zueinander parallele Geraden festgelegt wird.

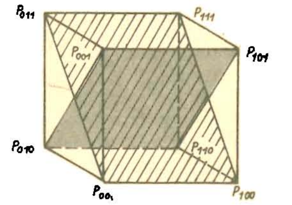
Eine Ebene des Raumes wird durch eine Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$ festgelegt. Da man zwei der drei Variablen x, y und z unabhängig voneinander mit Elementen von G_2 belegen kann, enthält jede Ebene G_2^3 genau 4 Punkte.

Für eine Ebene durch den Punkt (0;0;0) geht die Ebenengleichung in $Ax+By+Cz=0$ über. Fordert man schließlich noch, daß auch die Punkte (1;0;0) und 0;1;0) in dieser Ebene liegen, so erhält man als Ebenengleichung $z=0$. Diese Ebene enthält (1;1;0) als vierten Punkt. Nennt man zwei Ebenen parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, so ist die eben genannte Ebene zur Ebene mit den Punkten (0;0;1), (0;1;1), (1;0;1) und (1;1;1) parallel, wie dies anschaulich auch Bild 3 zeigt. Allgemein kann man zeigen: Der Durchschnitt zweier voneinander verschiedener Ebenen ist entweder leer – man nennt diese Ebenen dann zueinander parallel – oder besteht aus einer Menge von zwei Punkten, d. h. die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Die beiden in Bild 4 dargestellten Ebenen mit den Punkten P_{000}, P_{100}, P_{011} und P_{111} bzw. P_{110}, P_{010}, P_{001} und P_{101} sind ebenfalls zueinander parallel. Insgesamt existieren in G_2^3 14 Ebenen.

Im Raum g_2^3 gelten – wie auch im Raum R^3 – folgende Aussagen, deren Beweis wiederum nicht schwierig ist.

Bild 4

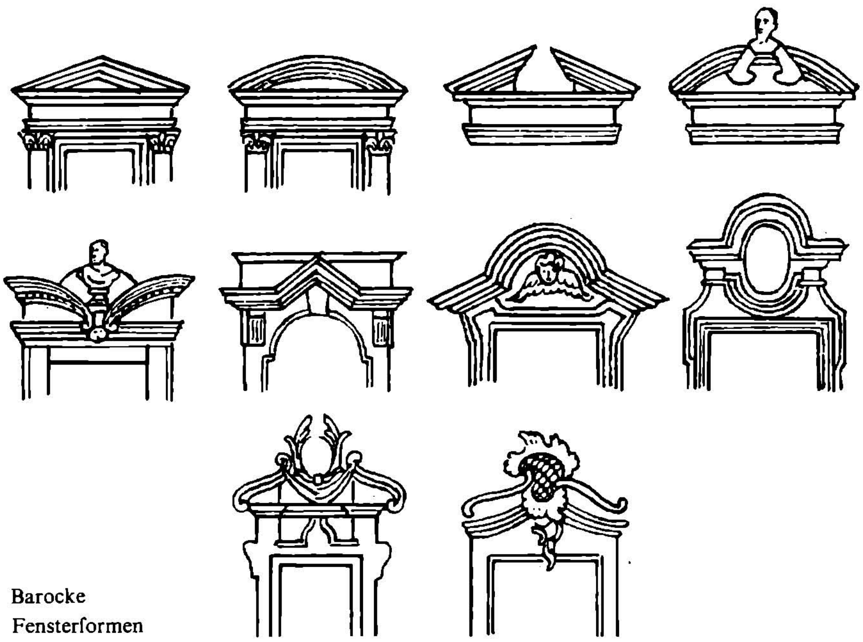


1. Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ existiert genau eine Ebene e, die g und P enthält.
2. Im Raum G_2^3 existieren vier Punkte, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen.
3. Zu jeder Ebene e und zu jedem Punkt $P \notin e$ existiert genau eine Ebene e', so daß $P \in e'$ und $e \cap e' = \emptyset$ gilt.

In Verallgemeinerung der genannten Beispiele kann man Geometrien mit einer beliebigen Dimension n unter Nutzung des Körpers der reellen Zahlen oder eines Restklassenkörpers modulo p konstruieren. Im letztgenannten Fall besitzt der Raum p^n Punkte.

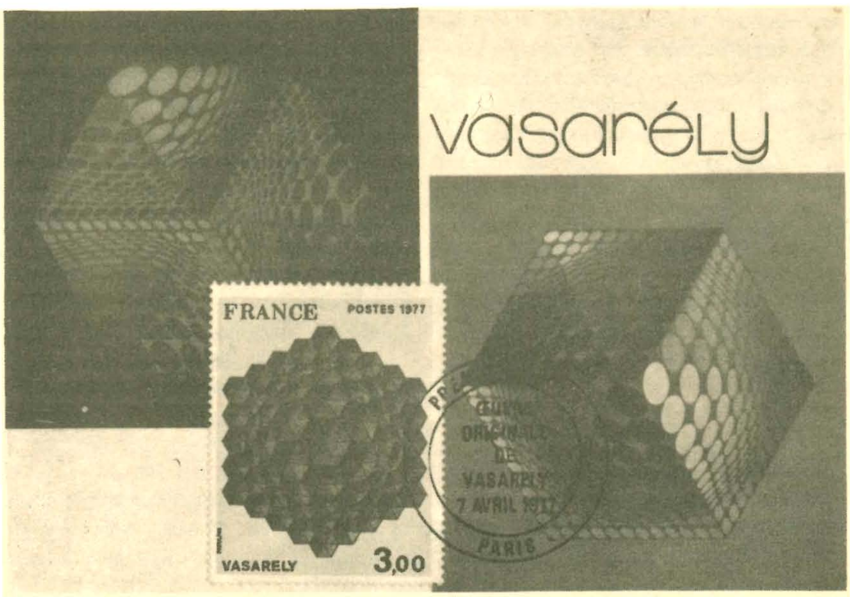
Die Untersuchung geometrischer Figuren wird oft erleichtert, wenn die definierenden Gleichungen in vektorieller Form vorliegen. Schüler der Abiturstufe sollten dies einmal durchdenken.

P. Göthner



Barocke Fensterformen

Maximumkarte mit Motiven von Victor Vasárely



Eine Aufgabe von Dr. Ludwig Stammler

Zunächst einige Vorbereitungen: Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Im Innern der Dreiecksfläche sei Z ein beliebiger Punkt. Wir betrachten alle Kreise mit dem Mittelpunkt Z. Es sei K die Fläche eines solchen Kreises und D die Fläche des Dreiecks. Wir interessieren uns für diejenigen Flächenstücke, in denen entweder D über K hinausragt oder K über D (Im Bild 1 schwarz gezeichnete Flächenstücke). Mit Formelzeichen der Mengenlehre bezeichnet man die aus diesen Flächenstücken zusammengesetzte Fläche als symmetrische Differenz

$$(D \cup K) \setminus (D \cap K).$$

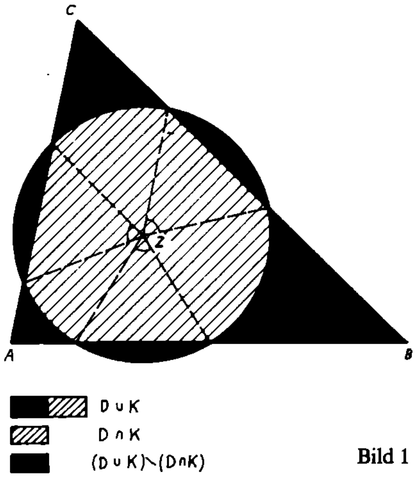


Bild 1

Das bedeutet: Von den beiden Flächen D und K (die man als Punktmengen versteht), wird zunächst die Vereinigungsmenge $D \cup K$ (im Bild 1 schwarze und schraffierte Flächenstücke) und der Durchschnitt $D \cap K$ gebildet (Im Bild 1 schraffierte Fläche) und dann von diesen beiden Mengen die Differenzmenge, d. i. die Menge aller derjenigen Punkte, die zu $D \cup K$ gehören, aber nicht zu $D \cap K$. („Symmetrisch" heißt diese Differenz, weil sie sich bei Vertauschung von D und K nicht ändert.) Denkt man sich nun den Radius des Kreises von 0 an wachsend bis zu beliebig großen Werten, so ist „leicht zu sehen" – wir wollen es ohne Beweis hinnehmen –, daß genau einer der Kreise um Z die folgende Eigenschaft hat: Die Bogenlängen aller außerhalb D liegenden Bögen des Kreises ergeben addiert den halben Kreisumfang. (Im Bild 1 wurde gerade dieser eine Kreis gezeichnet. Überprüfe dies durch Nachmessen der zugehörigen Zentriwinkel! Wie groß muß nämlich deren Summe sein?) Wir wollen kurz sagen: Das Dreieck „halbiert den Umfang" des Kreises.

Nach diesen Vorbereitungen lautet die Aufgabe:

Beweise, daß (unter allen Kreisen um Z) genau derjenige Kreis, dessen Umfang vom Dreieck halbiert wird, den kleinstmöglichen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz liefert!

(Als „erste Hilfe" zum Auffinden eines Beweises betrachte die Titelzeichnung auf dem Umschlag dieses Heftes! Nimm an, der dort gezeichnete Punkt Z wäre der Mittelpunkt der beiden Kreise! Setze zunächst voraus, der innere Kreis wäre gerade derjenige, dessen Umfang halbiert wird! Warum liefert nun der äußere Kreis einen größeren Flächeninhalt der symmetrischen Differenz? Jetzt nimm an, gerade der äußere Kreis wäre derjenige, dessen Umfang halbiert wird! Was muß dann gezeigt werden, und wie gelingt dies?)

Für besonders Tüchtige noch eine Zusatzaufgabe: In der Titelzeichnung haben die Kreise nicht Z als Mittelpunkt, wohl aber wird vorausgesetzt: Alle zu betrachtenden Kreise gehen aus einem von ihnen jeweils durch Streckung mit Z als Zentrum hervor.

Finde nun – anstelle der „Umfangshalbierung" – eine Bedingung, die genau von demjenigen Kreis erfüllt wird, der den kleinstmöglichen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz liefert! Die Bedingung soll darin bestehen, daß ein bestimmter Flächeninhalt gleich dem halben Kreis-Flächeninhalt ist.

L. Stammler

Näherungsverfahren zur Dreiteilung des Winkels

I. Konstruktion der Dreiteilung des Winkels

Gegeben ist ein Winkel α mit dem Scheitelpunkt S. Ich schlage mit dem Radius r um S einen Kreis und erhalte auf den Winkelschenkeln die Punkte A und B. Diese werden durch eine Strecke verbunden. Es werden, etwa im Bereich $\frac{\alpha}{2}$ bis $\frac{\alpha}{4}$, einige Strahlen durch S gezogen. Die Schnittpunkte mit der Strecke $\overline{AB}$ bezeichne ich mit I_x. Ich trage von den Punkten I_x auf den zugehörigen Strahlen $2r$ ab und finde die Punkte H_x. Die Punkte H_x werden verbunden. Durch den Punkt A ziehe ich rechtwinklig zu $\overline{AB}$ eine Gerade, die die *Kurve durch* H_x in H_0 schneidet. Die Gerade durch H_0 und S teilt den Winkel α in $\frac{\alpha}{3}$ und $2\frac{\alpha}{3}$.

II. Beweis

Es wird gezeigt, daß der Abstand der Schnittpunkte der Strecke $\overline{AB}$ und der Senkrechten zu $\overline{AB}$ durch A mit der Winkeldrittelnden $2r$ beträgt.

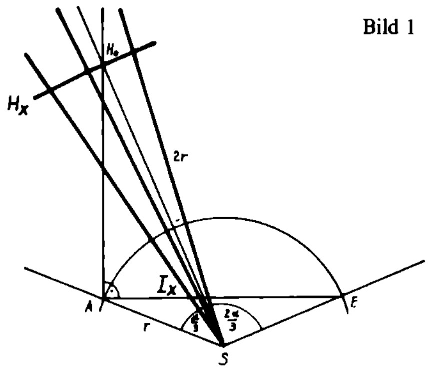


Bild 1

Bild 1 wird ergänzt (siehe Bild 2):

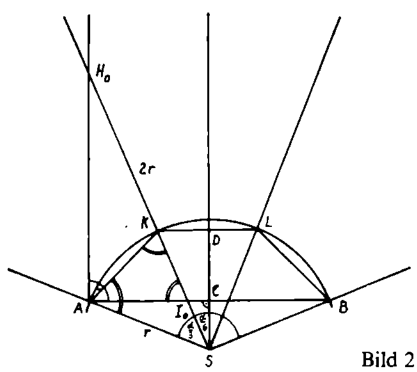


Bild 2

1. Die Winkelhalbierende und die zweite Winkeldrittelnde von α werden eingezeichnet.
2. Die benachbarten Schnittpunkte der Winkeldrittelnden und der Schenkel mit dem Kreis um S werden untereinander verbunden.

Das Dreieck $\triangle ASK$ ist gleichschenklig, folglich ist

$\sphericalangle SAK = \sphericalangle AKS$. Da $\sphericalangle KSA = \frac{\alpha}{3}$ ist,

muß $\sphericalangle AKS = 90° - \frac{\alpha}{6}$ sein.

Weiter ist $\sphericalangle KI_0A = \sphericalangle SI_0C = 90° - \sphericalangle CSI_0 = 90° - \frac{\alpha}{6}$. In dem Dreieck $\triangle AI_0K$ sind die Winkel $\sphericalangle AKS$ und $\sphericalangle KI_0A$ gleich, folglich ist $\overline{AK} = \overline{AI_0}$. Die Dreiecke $\triangle AI_0H_0$ und $\triangle KSD$ sind ähnlich, weil $\sphericalangle I_0AH_0 = \sphericalangle KDS = 90°$ und $\sphericalangle DSK = \sphericalangle AH_0I_0$ (Wechselwinkel).

Also ist

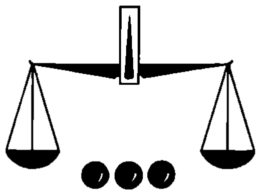
$\overline{H_0I_0} : \overline{SK} = \overline{AI_0} : \overline{KD} = \overline{AK} : \overline{KD} = \overline{KL} : \overline{KD} = 2$. Weil $\overline{SK} = r$ ist, folgt $\overline{H_0I_0} = 2r$.

(Beitrag leicht gekürzt.)

H. Schaper

Wie wird die Kugel mit der kleineren Masse mit möglichst wenig Wägungen gefunden?

Eine Aufgabe des Lehrbuches Physik der Klasse 6 lautet:
Auf dem Tisch liegen drei Kugeln, von denen bekannt ist, daß zwei die gleiche Masse haben, die dritte aber eine etwas kleinere Masse als eine der beiden anderen hat. Beschreibe, wie du durch eine einzige Wägung mit einer Schalenwaage ohne Wägesatz sofort sagen kannst, welches die beiden Kugeln mit der gleichen Masse sind!



Die Lösung lautet: Auf jede Waagschale wird je eine Kugel gelegt. Ist die Waage danach im Gleichgewicht, so sind die beiden aufgelegten Kugeln die beiden massegleichen. Ist die Waage danach nicht im Gleichgewicht, so liegt die Kugel mit der kleineren Masse auf der nach oben gestiegenen Waagschale und die Kugel auf der nach unten gestiegenen Waagschale sowie die nicht auf die Waage gelegte Kugel sind die beiden massegleichen. Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe soll in diesem Beitrag betrachtet werden.
Problemstellung: Auf dem Tisch liegen n Kugeln ($n \in N$, $n \geqq 3$), von denen alle bis auf eine, also $n-1$ Kugeln, die gleiche Masse haben. Jedoch eine dieser n Kugeln hat eine etwas kleinere Masse als die anderen. Mittels einer Schalenwaage ohne Wägesatz soll die Kugel mit der kleineren Masse herausgefunden werden. Zugelassen sind m Wägungen ($m \in N$, $m > 0$). Zeige: Zu jeder Zahl m von Wägungen gibt es eine größte Zahl n_m von Kugeln, so daß gilt:
1. Für $n \leqq n_m$ läßt sich bei geeignetem Vorgehen stets aus n Kugeln mittels höchstens m Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse herausfinden.
2. Für $n > n_m$ läßt sich aus n Kugeln mittels m Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse nicht bzw. nicht mit Sicherheit bestimmen.

Um die Problemstellung zunächst voll zu erfassen und um weiterhin ihre Lösung zu erraten, lassen wir n zunächst nur schrittweise wachsen.
Da zu $n=3$ am Anfang dieses Beitrags eine Aufgabenstellung gelöst worden ist, werden jetzt $n=4$ Kugeln, von denen drei massegleich sind und eine eine etwas kleinere Masse als die drei anderen hat, betrachtet. Kann man mit einer Wägung mittels einer Schalenwaage ohne Wägesatz die Kugel mit der kleineren Masse stets bestimmen?
Bei 4 Kugeln gibt es nur zwei aussagefähige Möglichkeiten, diese eine Wägung durchzuführen. Entweder wird auf jede Waagschale eine Kugel aufgelegt und 2 Kugeln bleiben auf dem Tisch liegen, oder auf jede Waagschale werden genau 2 Kugeln aufgelegt. Ist im ersten Fall die Waage im Gleichgewicht, so sind die beiden aufgelegten Kugeln massegleich und eine der beiden auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln ist die mit kleinerer Masse. Es kann jedoch nicht angegeben werden, welche der beiden noch auf dem Tisch liegenden Kugeln die kleinere Masse hat. Im zweiten Fall kann die Waage nicht im Gleichgewicht sein. Die Kugel mit der kleineren Masse muß auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen. Sie ist eine der beiden auf dieser Waagschale liegenden Kugeln. Welche von beiden, kann nicht gesagt werden. Bei keinem Vorgehen ist mit nur einer Wägung bei $n=4$ Kugeln der gewünschte Entscheid möglich bzw. mit Sicherheit möglich.
Durch die bisherigen Betrachtungen wird folgende Aussage als wahr vermutet:
Mit $m=1$ zulässigen Wägung läßt sich aus maximal $n_1=3$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse stets bestimmen. Diese Aussage ist bestätigt, wenn noch gezeigt wird, daß auch aus $n=5, 6, \ldots$ Kugeln mit einer Wägung die Kugel mit der kleineren Masse nicht herausgefunden werden kann. Indem der Fall $n=4$ nochmals mit einbezogen wird, soll gezeigt werden: Es ist unmöglich, aus n Kugeln mit $n \geqq 4$ mit einer Wägung stets die Kugel mit der kleineren Masse herauszufinden.
Damit diese eine Wägung aussagefähig ist, muß auf jeder Waagschale die gleiche Zahl von Kugeln liegen. Wenn auf jeder Waagschale 2 oder mehr Kugeln liegen, so ergibt sich in dem Fall, daß die Waage nicht im Gleichgewicht ist: Die Kugel mit der kleineren Masse ist eine der Kugeln, die auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen. Die Kugel mit der kleineren Masse wäre also nicht bestimmt worden. Also darf bei einer zulässigen Wägung auf jeder Waagschale nur eine Kugel liegen. Wegen $n \geqq 4$ bleiben also bei dieser Wägung mindestens 2 Kugeln auf dem Tisch liegen. Ist die Waage dabei im Gleichgewicht, so ist die Kugel mit der kleineren Masse eine der auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Da auf dem Tisch mehr als eine Kugel liegengeblieben ist, ist wiederum die Kugel mit der kleineren Masse nicht bestimmt.
Die obige Aussage ist damit als wahr erkannt worden.
Nunmehr werden $m=2$ Wägungen zugelassen. Bei $n=4$ Kugeln läßt sich der gewünschte Entscheid mit $m=2$ Wägungen stets fällen: Bei der 1. Wägung wird auf jede Waagschale genau eine Kugel gelegt. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so liegt die Kugel mit der kleineren Masse auf der nach oben gestiegenen Waagschale. Die Kugel mit der kleineren Masse ist dann bereits bestimmt. Ist die Waage hingegen im Gleichgewicht, so ist die Kugel mit der kleineren Masse eine der beiden noch auf dem Tisch liegenden Kugeln. In diesem Fall werden bei der zweiten Wägung die beiden Kugeln, die bis jetzt noch auf dem Tisch liegen, auf die Waage gelegt. Die Kugel, die bei dieser Wägung nach oben steigt, ist die Kugel mit der kleineren Masse.
Auch aus $n=5$ Kugeln läßt sich die Kugel mit der kleineren Masse stets mittels zwei Wägungen herausfinden: Bei der ersten Wägung bleiben 3 Kugeln auf dem Tisch liegen und 2 Kugeln werden auf die Waage gelegt. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so ist die beim Wägen nach oben gestiegene Kugel diejenige mit kleinerer Masse und die Bestimmung ist erfolgt. Ist die Waage bei der ersten Wägung im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Kugel eine der 3 auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Mittels der zweiten Wägung ist es nach der eingangs betrachteten Aufgabe möglich, aus diesen 3 Kugeln die gewünschte herauszusuchen.
Ebenso läßt sich aus $n=6$ Kugeln mittels zwei Wägungen stets die Kugel mit der kleineren Masse bestimmen: Um dies mit zwei Wägungen zu schaffen, darf man jedoch bei der ersten Wägung nicht auf jede Waagschale nur eine Kugel auflegen. Denn wäre bei dieser ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so würde sich die gesuchte Kugel unter den 4 zunächst auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln befinden. Mit der nur noch zur Verfügung stehenden zweiten Wägung kann man jedoch gemäß der zu $n=4$ gemachten Aussage die gewünschte Kugel nicht mit Sicherheit bestimmen. Das Vorhaben gelingt, wenn auf jede Waagschale bei der ersten Wägung entweder 2 oder 3 Kugeln aufgelegt werden. Hier sollen bei der ersten Wägung auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt werden. (Den Fall, daß bei der ersten Wägung auf jede Waagschale 2 Kugeln aufgelegt werden, betrachte der Leser als nützliche Übung selbständig.) Da alle Kugeln aufgelegt sind, kann die Waage bei der ersten Wägung nicht im Gleichgewicht sein. Die gesuchte Kugel liegt auf der nach oben gestiegenen Waagschale. Bei der zweiten Wägung wird gemäß bekanntem Vorgehen aus den 3 Kugeln, die bei der

ersten Wägung auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen, die Kugel mit kleinerer Masse herausgesucht.

Weiterhin läßt sich auch aus $n=7$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse durch zwei Wägungen ermitteln: Bei der ersten Wägung werden auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt. Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist die eine auf dem Tisch liegengebliebene Kugel die gesuchte. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so ist die auf dem Tisch liegengebliebene Kugel eine Normalkugel (also nicht die Kugel mit der kleineren Masse).

Das weitere Vorgehen geschieht analog wie oben im Falle $n=6$. Weiterhin läßt sich auch aus $n=8$ Kugeln mit zwei Wägungen die Kugel mit kleinerer Masse herausfinden: Bei der ersten Wägung werden auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt. Ist bei der ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Kugel eine der beiden zunächst auf dem Tisch liegengebliebenen. Bei der zweiten Wägung werden diese beiden Kugeln allein aufgelegt. Die Kugel, die jetzt nach oben steigt, ist die gesuchte. Ist bei der ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so sind die beiden zunächst auf dem Tisch liegenden Kugeln Normalkugeln. Das weitere Vorgehen geschieht wieder analog wie oben im Falle $n=6$.

Schließlich läßt sich auch noch aus $n=9$ Kugeln mit 2 Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse heraussuchen: Bei der ersten Wägung werden auf jede Waagschale 3 Kugeln aufgelegt. Ist die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den 3 auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den 3 Kugeln, die auf der nach oben gestiegenen Waagschale liegen. Bei beiden Möglichkeiten hat sich ergeben:

Es sind 3 Kugeln bestimmt worden, unter denen sich die gesuchte befindet. Bei der zweiten Wägung wird aus den 3 so bestimmten Kugeln nach bekanntem Vorgehen die gesuchte herausgefunden. Die bisherigen Betrachtungen lassen vermuten, daß eine weitere Teilantwort auf die Problemstellung lautet:

Mit $m=2$ zulässigen Wägungen läßt sich aus maximal $n_2=9$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse stets bestimmen.

Diese Aussage ist bestätigt, falls noch gezeigt wird: Mit $m=2$ Wägungen läßt sich aus mehr als 9 Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse nicht mit Sicherheit bestimmen. Dies soll jetzt geschehen:

Würden bei der ersten Wägung auf jeder Waagschale gleich viele, jedoch mehr als 3 Kugeln liegen, so gilt im Fall, daß kein Gleichgewicht vorliegt: Die Kugel mit kleinerer Masse ist eine der Kugeln auf der nach oben gestiegenen Waagschale. Da auf dieser Waagschale mehr als drei Kugeln liegen, ist das Herausfinden der gesuchten Kugel mit der nur noch zur Verfügung stehenden zweiten Wägung gemäß der Betrachtungen zu $m=1$ mit Sicherheit nicht möglich. Also dürfen bei der ersten Wägung auf jeder Waagschale höchstens 3 Kugeln liegen. Ist die Waage bei einer so durchgeführten ersten Wägung jedoch im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Auf dem Tisch liegen aber wegen $n>9$ mehr als 3 Kugeln. Mit der nur noch zur Verfügung stehenden zweiten Wägung ist wiederum der gewünschte Entscheid nicht mit Sicherheit möglich.

Die Fälle $m=3$, $m=4$, ... könnten nun entsprechend betrachtet werden. Man würde dadurch erkennen, daß zu $m=3$ $n_3=3^3$, zu $m=4$ $n_4=3^4$, ... gehört, so wie zu $m=1$ $n_1=3^1=3$ und zu $m=2$ $n_2=3^2=9$ gehört. Doch alle zulässigen Zahlen m zu betrachten, ist zeit- und platzmäßig unmöglich. Diese Überlegungen führen lediglich einen versierten Leser früher, einen weniger geübten etwas später zu der Vermutung: Mit m Wägungen läßt sich aus maximal $n_m=3^m$ Kugeln die Kugel mit kleinerer Masse stets herausfinden.

Als Test, ob der Leser sich mit den benutzten Beweismethoden und Schlüssen genügend vertraut gemacht hat, sei ihm vor dem Weiterlesen empfohlen, zumindest die folgende oder eine ähnliche Aufgabe zu lösen.

Aufgabe: Auf dem Tisch liegen 20 Kugeln, von denen 19 gleiche Masse haben. Eine der 20 Kugeln hat eine etwas kleinere Masse als die anderen. Wie kann mit einer Schalenwaage ohne Wägesatz durch 3 Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse herausgefunden werden?

Wer diese Aufgabe nicht bewältigen kann, sollte statt weiterzulesen zunächst noch einmal den bisherigen Teil durcharbeiten. Um für alle zulässigen Zahlen m die aufgestellte Vermutung zu beweisen, wird die Beweismethode der vollständigen Induktion angewandt. Diese besteht aus dem Induktionsbeginn und dem Induktionsschritt.

Im Induktionsbeginn ist die kleinste zulässige Zahl m, also $m=1$, zu betrachten. Es ist zu zeigen, daß mit $m=1$ Wägung aus $n\leqq 3$ Kugeln stets die Kugel mit kleinerer Masse herausgefunden werden kann. (Da laut Problemstellung $n\geqq 3$ gilt, erübrigt sich das Betrachten von $n=1$ und $n=2$ Kugeln.)

Und es ist auch zu zeigen, daß aus n Kugeln mit $n\geqq 4$ mit einer Wägung nicht mit Sicherheit die gewünschte herausgesucht werden kann. Der Induktionsbeginn ist im Rahmen dieses Beitrags schon durchgeführt.

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, daß aus der Annahme, die aufgestellte Vermutung ($n_m=3^m$) gelte für m, ihre Gültigkeit für $m+1$ folgt ($n_{m+1}=3^{m+1}$). Der Induktionsschritt wird jetzt durchgeführt.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Für m mit $m\in N$ und $m>0$ gelten:

1. Aus n Kugeln mit $n\in N$, $n\geqq 3$ und $n\leqq n_m=3^m$ läßt sich stets die Kugel mit der kleineren Masse durch höchstens m Wägungen bestimmen.
2. Es ist unmöglich, aus n Kugeln mit $n\in N$ und $n>n_m=3^m$ mittels m Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse stets zu bestimmen.

Behauptung: 1. Aus n Kugeln mit $n\in N$, $n\geqq 3$ und $n\leqq n_{m+1}=3^{m+1}$ läßt sich stets durch höchstens $m+1$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse bestimmen.

2. Es ist unmöglich, aus n Kugeln mit $n\in N$ und $n>n_{m+1}=3^{m+1}$ mittels $m+1$ Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse stets zu bestimmen.

Beweis: 1. Die natürliche Zahl n läßt bei der Division durch 3 entweder den Rest 0, den Rest 1 oder den Rest 2. Dabei ist im Falle des Restes 0 auch $\frac{n}{3}$ eine natürliche Zahl.

Ist die Waage bei der ersten Wägung im Gleichgewicht, so befindet sich die gesuchte Kugel unter den auf dem Tisch liegenden Kugeln. Da auf dem Tisch höchstens 3^m Kugeln liegen, ist es laut Voraussetzung möglich, mit den weiteren m zur Verfügung stehenden Wägungen stets die gesuchte Kugel herauszufinden. Ist die Waage bei der ersten Wägung nicht im Gleichgewicht, so liegt die gesuchte Kugel auf der Waagschale, die nach oben gestiegen ist. Da auf dieser Waagschale

Beim Rest	Legen wir auf jede Waagschale	Auf dem Tisch bleiben liegen	Wegen $n\leqq 3^{m+1}$ gilt für die Anzahl der Kugeln
0	$\frac{n}{3}$ Kugeln	$\frac{n}{3}$ Kugeln	$\frac{n}{3}\leqq 3^m$
1	$\frac{n-1}{3}$ Kugeln	$\frac{n-1}{3}+1$ Kugeln	$\frac{n-1}{3}<\frac{n}{3}\leqq 3^m$, also $\frac{n-1}{3}+1\leqq 3^m$
2	$\frac{n-2}{3}+1$ Kugeln	$\frac{n-2}{3}$ Kugeln	$\frac{n-2}{3}<\frac{n}{3}\leqq 3^m$, also $\frac{n-2}{3}+1\leqq 3^m$

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

alpha stellt vor:

Kreisklub Mathematik des Landkreises Brandenburg

Seit 1967 werden jedes Jahr nach der Kreismathematikolympiade die besten Schüler der fünften Klasse in den Kreismathematikklub aufgenommen. Bei der Auswahl der Schüler werden neben den schulischen Leistungen, den außerschulischen Aktivitäten und den Ergebnissen bei der Olympiade auch die Ergebnisse einer Klausur in den vierten Klassen berücksichtigt, die während der Kreisolympiade geschrieben wurde.

Alle Mitglieder des Kreisklubs sind verpflichtet, sich regelmäßig an einer Arbeitsgemeinschaft an der Heimatschule und am *alpha*-Wettbewerb ihrer beziehungsweise höherer Klassenstufen zu beteiligen.

Wir – das sind etwa 25 Schüler der Klassen 5 bis 8 – treffen uns je zwei Wochen in den Winterferien in Wernigerode, in den Sommerferien in Lehnin und in den Herbstferien noch einmal vier Tage.

Bei den Klubveranstaltungen stehen vormittags vier Stunden Mathematik auf dem Stundenplan, mit den Stoffgebieten Gleichungen, Geometrie, Zahlentheorie und Kombinatorik/Logik. Logisches Denken wird dabei von jedem gefordert. Während im Unterricht sehr oft die Lösung einer schwierigen Aufgabe oder ein problematischer Beweis von den Schülern gemeinsam diskutiert und erarbeitet wird, muß hier jeder einzelne in Kurzklausuren mit einer Aufgabe oder Klausuren ähnlich den Olympiaden seine eigene Leistung unter Beweis stellen.

Im Klub entstand ein gutes Kollektiv, in das sich die neuen Mitglieder schon auf Grund des gleichen Interesses für die Mathematik schnell einfügen. Doch nicht nur die Mathematik und sich entwickelnde Freundschaften unter den Mitgliedern des Klubs, sondern auch eine interessante Freizeitgestaltung mit Sport, Museumsbesuchen, Vorträgen und Exkursionen läßt uns jede Veranstaltung mit Freude erwarten. Dabei ist ein Klubrat aus Schülern jeder Klassenstufe für die Planung und Organisation vieler Veranstaltungen verantwortlich.

Mathematik macht Spaß! – wenn man sie versteht. Doch um sie zu verstehen, müssen wir lernen, und dafür hält uns der Mathematikklub viele Voraussetzungen bereit. Nicht zuletzt durch die Schulung im Kreisklub können viele von uns auf gute Erfolge bei den Mathematikolympiaden verweisen.

Vier Jahre Mitglied im Kreismathematikklub – da sind die meisten von uns traurig, daß diese Zeit vorbei ist. Doch das Interesse an der Mathematik ist uns geblieben. Das zeigt sich auch in den späteren Berufen: Studenten der Mathematik und zukünftige Mathematiklehrer sind schon viele von den ehemaligen Klubmitgliedern geworden!

Schüler der Klasse 8
Mitglieder des Kreisklubs Mathematik

Hier drei Aufgaben aus unserer Arbeit:

▲1▲ Erik besuchte vier Geschäfte: Fleischer, Milchladen, Bäcker und Gemüseladen. Er besucht sie jeweils genau einmal in einer bestimmten Reihenfolge. Dabei haben wir von dieser Einkaufsrunde folgende Informationen:

(1) Er war zuerst beim Fleischer oder im Milchladen.

(2) Wenn Erik nicht zuletzt im Milchladen war, so war er an zweiter Stelle im Milchladen.

(3) Im Gemüseladen oder beim Fleischer begann er seine Einkaufsrunde.

(4) Er begann zuerst beim Bäcker und war nicht zuletzt im Milchladen.

(5) Nachdem er beim Fleischer war, ging er sofort zum Bäcker.

Es stellte sich heraus, daß die Informationen nicht alle zuverlässig waren. Genau eine ist falsch, die restlichen vier sind wahr.

a) Ermittle, welche Information falsch ist!

b) Finde heraus, an welcher Stelle der Einkauf im Gemüseladen in seiner Reihenfolge war!

▲2▲ Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden liegt und ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r in der gleichen Halbebene der Geraden.

Konstruiere einen Punkt P auf der Geraden g so, daß die Tangente an den Kreis K durch den Punkt P und die Gerade AP mit g jeweils den gleichen Winkel bilden!

Lösungshinweise: Spiegelung des Kreises an g – Fallunterscheidung bei Tangentenkonstruktionen – Determinationsfrage

▲3▲ Gegeben sei eine Gerade g, ein Punkt A auf g und ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

Konstruiere einen Punkt P auf der Geraden g so, daß der Abstand zum Punkt A und zur Kreisperipherie einander gleich sind!

Lösungshinweise: r auf g von A aus abtragen, so daß Punkt B entsteht – Mittelsenkrechte zu $\overline{BM}$ konstruieren!

---

höchstens 3^m Kugeln liegen, ist es wiederum laut Voraussetzung möglich, mit den m weiteren zur Verfügung stehenden Wägungen die gesuchte Kugel stets zu bestimmen, w.z.b.w.

2. Die natürliche Zahl n sei mittels zweier anderer natürlicher Zahlen n_0 und n_1 dargestellt als Summe $n=n_0+n_0+n_1$. Wegen $n>3^{m+1}$ gibt es keine derartige Zerlegung mit $n_0 \leq 3^m$ und $n_1 \leq 3^m$. Denn aus diesen beiden Ungleichungen würde der Widerspruch $n_0+n_0+n_1 \leq 3^m+3^m+3^m=3\cdot 3^m=3^{m+1}$ folgen. Also muß in $n=2n_0+n_1$ $n_0>3^m$ oder $n_1>3^m$ gelten.

Wird als erste Wägung eine Zerlegung $n=2n_0+n_1$ mit $n_1>3^m$ benutzt, so ist, falls die Waage im Gleichgewicht ist, die Kugel mit der kleineren Masse eine der n_1 auf dem Tisch liegengebliebenen Kugeln. Wegen $n_1>3^m$ und gemäß Voraussetzung ist es nicht möglich, mit den nur noch zur Verfügung stehenden m Wägungen die Kugel mit der kleineren Masse stets zu ermitteln.

Also ist die Bestimmung der Kugel mit kleinerer Masse bei keiner Wahl der ersten Wägung mit Sicherheit möglich, w.z.b.w.

W. Träger

Das Foto zeigt einen Bildausschnitt vom Mathematikstand der Schulmesse der Oberschule Osternienburg.

118 Seiten, 176 Bilder, 24 cm × 27 cm
Ganzgewebeeinband, Preis 24,– M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr. 546 369 0

Probleme der Spiegelung und der Symmetrie werden in den Ober-, Fach- und Hochschulen im Physikunterricht in der Regel nur mit Kreide als abstrakte Konstruktion an der Tafel abgehandelt. Allenfalls kommt der Spiegel noch als Bauelement optischer Geräte zur Sprache. Die vielseitigen Verbindungen von Spiegelung und Symmetrie zum täglichen Leben, vor allen Dingen zur Technik, werden im Unterricht fast nie stärker herausgestellt. Spiegel und Spiegelebenen sind aber nicht nur bedeutungsvoll für viele mathematische und physikalische Probleme, sondern spielen im täglichen Leben eine überraschend große Rolle. Der Sinn des Buches ist es, diese Zusammenhänge in unterhaltsamer Form zu schildern.

Leseprobe:

Gespiegelte Dichtung

Dichter haben sich mit Wort- und Satzspiegelungen befaßt. Bekannt ist das Gedicht „Die Trichter" von *Christian Morgenstern:*

Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
Durch ihres Rumpfes verengten Schacht
fließt weißes Mondlicht
still und heiter
auf ihren
Waldweg
u. s.
w.

Geschickterweise nutzte *Morgenstern* die senkrechte Symmetrieebene des W gleichsam als Abschluß und Gesamt-Symmetrieebene aus. Er knüpft mit der Form an eine alte Druckertradition an. Von 1500 bis 1650 war es selbstverständlich, Buchtitel nur nach der Symmetrie zu drucken. Es störte nicht, wenn dabei Wörter auseinandergerissen wurden und wenn auf der nächsten Zeile der Rest des Wortes in kleineren Buchstaben gedruckt wurde.

Die „wahre Kunst der Wortspiegelung" beginnt aber erst, wenn ganze Sätze gebildet werden, die von vorn und hinten gelesen den gleichen Text ergeben. *Otto, Anna* und *Reliefpfeiler* machen in solchen Sätzen natürlich keine Schwierigkeiten. Wichtiger sind Kombinationen, wie *neger–regen, ein–nie, not–ton, eber–rebe.*

Weiter muß bei Spiegelsätzen das Zugeständnis gemacht werden, daß Wörter geteilt werden. Dann sind Sätze möglich wie: *Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie.* Aus „zagt im" wird in der Umkehrung: mit gaz(elle).

C. J. Friedrich aus Seifersdorf bei Radeberg veröffentlichte eine Reihe von Spiegelsätzen. *Bei Liese sei lieb. Ein Esel lese nie. Ein teuer Reittier reuet nie.*

Zur Bildung solcher Sätze scheint es günstig zu sein, sich vorher ein kleines Spiegelwörterbuch aufzubauen. Schließlich gibt es auch Umkehrerzählungen, die nicht Buchstabe für Buchstabe, sondern Wort für Wort gespiegelt werden. Eine Geschichte (aus dem Englischen) beginnt mit *„Jones bearbeitete Zeittheorien jahrelang"* und endet *„Jahrelang Zeittheorien bearbeitete Jones"*. Dazwischen liegt dann eine etwas konfuse Story, die sich vorwärts und rückwärts lesen läßt.

Eine andere Frage ist natürlich, ob solche Spielereien noch einen Sinn haben, und ob die Verfasser ihren Scharfsinn und ihre Arbeitskraft nicht besser anderen Problemen zuwenden sollten. Doch wenn jemand acht Stunden oder länger nur „vernünftige Sachen" gedacht und erarbeitet hat, besteht sicherlich mitunter auch das Bedürfnis, einmal nur „Unsinn" zu produzieren.

Falls Sie aber irgendwo lesen: *„Kaufen sie jede woche vier gute bequeme Pelze x y"*, so handelt es sich nicht um eine Spiegelung, sondern um einen Prüfsatz im Fernschreibverkehr. Dieser Satz enthält alle Buchstaben des Alphabetes (einige mehrfach, z. B. e). Die Kolleginnen am Fernschreiber kontrollieren damit, ob alle Buchstaben richtig durchgegeben werden.

Schließlich spielt der Spiegel selbst in der Dichtung eine große Rolle, vor allem wegen seines hohen Symbolwertes. Meistens soll er zur Selbsterkenntnis und Selbstkritik auffordern. Denken Sie nur an Till Eulenspiegel. Oder denken wir an den berühmten Roman „Spiegel der Seefahrt" von *Joseph Conrad.*

Auch die Kriminalliteratur kommt nicht ohne Spiegel und Spiegelschrift aus. In deutscher Übersetzung erschien ein Krimi „Motten im Nerz" von *E. St. Garner.* Der Held der Story, *Perry Mason*, findet in einem Zimmer zwei mit Lippenstift geschriebene Hilferufe. Der eine ist offen auf einen Spiegel geschrieben, der andere versteckt unter einer Tischplatte. Aber nur einer kann echt sein. Doch welcher?

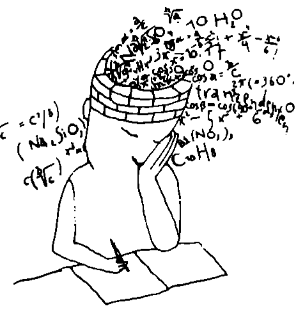
Die Polizei folgert: Ein echter Hilferuf wird natürlich versteckt angebracht, sonst hätten ihn die bösen Gangster längst entfernt. *Perry Mason* denkt gar nicht, er probiert. Er läßt seinen Assistenten die Botschaft nochmal unter die Tischplatte schreiben, und zwar „heimlich", wie es sich für einen echten Hilferuf gehört. Dazu muß der Schreiber mit ruhigem Oberkörper dasitzen (möglichst den Gangster ablenken!) und ohne hinzusehen unter den Tisch schreiben. Das geht natürlich nur mit dicken Buchstaben, wie sie mit Kreide oder einem Lippenstift erzeugt werden.

Geübte Krimi-Leser ahnen bereits, was unter dem Tisch geschrieben steht. Der Hilferuf wird bei dieser Schreibart in Spiegelschrift unter der Platte stehen. In dem Krimi steht er aber richtig herum. Folglich wurde die Tischplatte vorher umgelegt, und daraus folgert der Meisterdetektiv – wenn das nur mit rechten Dingen zuging!

In der Zeitschrift „Der Deutsche Straßenverkehr" stand 1962 eine Meldung aus England. Danach erhalten in der Stadt Kent alle Krankentransportwagen die Aufschrift *Ambulance* nochmals in Spiegelschrift. Damit soll erreicht werden, daß der Kraftfahrer im Rückspiegel leichter den Ambulanzwagen erkennt und ihm Platz macht.

Denkbar ist die Meldung, doch sie stand im Aprilheft. Daher ist es unklar: Stimmt sie, oder stimmt sie nicht?

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 9. Mai 1980

Mathematik

Ma 5 ■1937 Wenn man eine natürliche Zahl zunächst mit 7 multipliziert und zum Produkt 9 addiert, so erhält man das gleiche Ergebnis, als wenn man diese Zahl zunächst mit 9 multipliziert und zum Produkt 7 addiert. Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Uwe Schulze, 4. POS Copitz

Ma 5 ■1938 Setzt man für die Buchstaben des Wortes „BERLIN" natürliche Zahlen ein, so gilt:

a) $E+R+L=16;$
b) $R \cdot L \quad =18,$
c) $L+I \quad =81:R,$
d) $N=4 \cdot L,$
e) $L=38:19,$
f) $B+E+R+L+I+N=34.$

Welche natürlichen Zahlen erfüllen diese sechs Gleichungen? *Sch.*

Ma 5 ■1939 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{OTTO} \\ +\ \underline{\text{ANNA}} \\ \text{ANTON} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern, gleiche Buchstaben gleiche Ziffern.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1940 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß die Rechenaufgabe richtig gelöst ist.

$$\begin{array}{l} \underline{CB \cdot AB} \\ CAA \\ \underline{\ \ CB} \\ \underline{\underline{1501}} \end{array}$$

Wie lautet in diesem Falle die Jahreszahl für ABCD? *Ing. H. Decker, Köln*

Ma 5 ■1941 Jemand hat eine Additionsaufgabe zu lösen, bei der der erste Summand eine dreistellige natürliche Zahl ist, deren drei Grundziffern alle einander gleich sind. Die Summe ist gleich dem zehnfachen Produkt des zweiten Summanden, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Es sind alle Aufgaben anzugeben, für die das zutrifft! *Sch.*

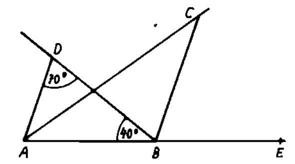
Ma 5 ■1942 Eine Strecke $\overline{AD}$ von 91 cm Länge wird so in drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ eingeteilt, daß die Strecke $\overline{AB}$ viermal so lang ist wie die Strecke $\overline{BC}$ und die Strecke $\overline{CD}$ doppelt so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$. Wie lang ist jede der drei Teilstrecken? Wie lang wäre jede dieser Teilstrecken, wenn die Strecke $\overline{CD}$ nur halb so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■1943 Aus den sechs Ziffern 1, 5, 6, 7, 8, 9 sind vier Ziffern auszuwählen, mit deren Hilfe vierstellige natürliche Zahlen darzustellen sind, die zugleich durch 7, 8 und 9 teilbar sind. Wie lauten diese vierstelligen Zahlen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

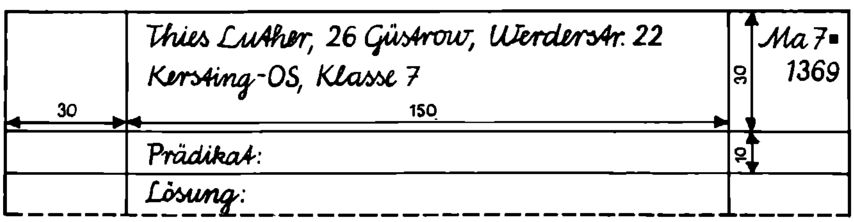
Ma 6 ■1944 In dem Bild halbiert die Gerade AC den Winkel $\sphericalangle BAD$; die Gerade BC halbiert den Winkel $\sphericalangle DBE$. Ferner sind folgende Winkelgrößen bekannt: $\sphericalangle ABD=40°$, $\sphericalangle ADB=70°$.

a) Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$.



b) Weise nach, daß die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ gleichschenklig sind.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

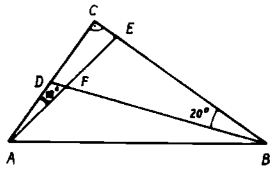
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ■1945 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ dar. Ein innerer Punkt E der Seite $\overline{BC}$ wurde mit A, ein innerer Punkt D der Seite $\overline{AC}$ wurde mit B verbunden. Der Schnittpunkt der Geraden AE und BD wurde mit F bezeichnet. Es betragen $\sphericalangle CAE=10°$ und $\sphericalangle CBD=20°$. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle AFB$ zu bestimmen! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*



Ma 6 ■1946 Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b und c, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$a+b=90,$$
$$a+c=75,$$
$$b+c=21.$$

Es ist das Produkt $a \cdot b \cdot c$ zu ermitteln.

Schüler Roland Kamke, Rostock

Ma 6 ■1947 Es sind alle natürlichen Zahlen n mit $10 \leqq n \leqq 50$ zu ermitteln, die, um ihre Quersumme vermindert, die Zahl 9 ergeben.

Schülerin Annette Herm, Karl-Krull-OS Greifswald

Ma 7 ■1948 Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie eine Sehne $\overline{AB}$ dieses Kreises, die die Länge des Kreisradius r besitzt! Lege auf der Peripherie von k einen Punkt C fest, der von A und B verschieden ist, und verbinde C mit A und B! Beweise, daß die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB=\phi$ entweder 30° oder 150° beträgt!

Schüler Holger Röstel, Erfurt, Kl. 7

Ma 7 ■1949 Der Umfang eines Dreiecks beträgt 36 cm. Die Länge der kürzesten Seite verhält sich zur Länge der längsten Seite wie 3 : 5. Die mittlere Seite ist um 3 cm kürzer als die längste Seite. Es sind die Längen der Dreieckseiten zu berechnen.

Fachlehrer D. Knape, Jessen

Ma 7 ■1950 In einem FDGB-Ferienheim befinden sich 41 Urlauber, die in 2-Bett- und 3-Bett-Zimmern untergebracht sind. Das Ferienheim verfügt über mehr als vier, aber weniger als zehn 2-Bett-Zimmer. Alle Betten sind belegt. Über wieviel 2-Bett- bzw. 3-Bett-Zimmer verfügt dieses Ferienheim?

Schülerin Gabriele Müller, Schönwalde, Kl. 7

Ma 7 ■1951 Es sind alle Zahlentripel aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu ermitteln, für die das Produkt aus den drei Zahlen eines solchen Tripels gleich der Summe aus den drei Zahlen ist.

Schüler Mario Köppen, Berlin

Ma 8 ■1952 Frank hat nach einer Veranstaltung leere Limonaden- bzw. Milchflaschen gesammelt und dafür 3,50 M erhalten. Wie viele Flaschen von jeder Sorte können es gewesen sein, wenn von jeder Sorte mindestens eine Flasche dabei war und das Pfand für eine Limonadenflasche 0,30 M und für eine Milchflasche 0,20 M beträgt?

Mathematikfachlehrer E. Naumann, Karl-Marx-Stadt

Ma 8 ■1953 Von drei vorhandenen Kesseln sind zwei gefüllt, der dritte ist leer. Wollte man diesen leeren Kessel füllen, so brauchte man den Inhalt des ersten und 20% vom Inhalt des zweiten oder den Inhalt des zweiten und ein Drittel vom Inhalt des ersten Kessels. Welches Fassungsvermögen hat jeder der drei Kessel, wenn alle drei zusammen 1440 l aufnehmen können?

Schüler Olaf Römer, Roßlau, Kl. 7

Ma 8 ■1954 Es seien p eine Primzahl, x eine reelle Zahl, und es gelte $|x| \neq 1$. Man ermittle alle x, für die die Primzahl $p=\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ so klein wie möglich ist.

Elektromonteurlehrling W. Scholze, Sebnitz

Ma 8 ■1955 Es ist eine Strecke der Länge $\sqrt{3}$ cm zu konstruieren. Der Konstruktion soll ein Kreis zugrunde gelegt werden.

E. Schulze, Mildenberg

Ma 9 ■1956 Für drei verschiedene ganze Zahlen a, b, c gilt folgendes:

1) $b-a=4$
2) $c-b=4$
3) Das Quadrat der größten Zahl ist gleich der Summe aus den Quadraten der beiden anderen Zahlen.

Es sind alle geordneten Tripel $[a,b,c]$ ganzer Zahlen zu ermitteln, die den Bedingungen 1), 2) und 3) genügen.

Dipl.-Lehrer f. Math./Ph. M. Kutschank, Deutschenbora

Ma 9 ■1957 In der Gleichung $\overline{xxyy}=\overline{xx}^2+\overline{yy}^2$, die eine vierstellige und zwei ins Quadrat erhobene zweistellige natürliche Zahlen in dekadischer Darstellung enthält, sind die Buchstaben x und y so durch Ziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

Nach „Quant", Moskau

Ma 9 ■1958 Man bestimme alle ganzen Zahlen, für die folgendes gilt: Die Summe aus einer solchen ganzen Zahl, ihrer zweiten und ihrer dritten Potenz hat den einunddreißigfachen Wert dieser ganzen Zahl.

Schüler Axel Kuminski, Riesa, Kl. 9

Ma 9 ■1959 Man beweise folgenden Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenlängen kleiner oder höchstens gleich dem $\sqrt{2}$fachen der Länge der Hypotenuse.
In welchem Falle gilt das Gleichheitszeichen?

Axel Schüler, Kleinmachnow

Ma 10/12 ■1960 Es ist zu beweisen:
Wenn p eine Primzahl ist und $p>2$ gilt, so ist $(p+1)^3-4(p+1)$ stets durch 48 teilbar.

Schüler Karsten Petzold, Lauchhammer, Kl. 10

Ma 10/12 ■1961 Ein Reporter fragte nach dem Alter eines Mathematikers. Dieser antwortete: „Verdreifacht man die Quersumme der Jahreszahl des Jahres, in dem ich geboren wurde, so erhält man eine Zahl, die gleich meinem Lebensalter im Jahre 1979 ist." Wie alt ist der Mathematiker?

Neuyễn Xuân Thinh, Hanoi, z. Z. Student der TU Dresden

Ma 10/12 ■1962 Es ist ein Sehnenviereck $ABCD$ zu konstruieren, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Der Radius des Umkreises von $ABCD$ ist 3 cm lang.
2) $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:2:3:4$, wobei $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ diejenigen Kreisbögen sind, auf denen kein weiterer der Punkte A, B, C, D liegt. Die Konstruktion ist zu begründen.

Axel Schüler, Kleinmachnow

Ma 10/12 ■1963 Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Raumdiagonalen eines Würfels?

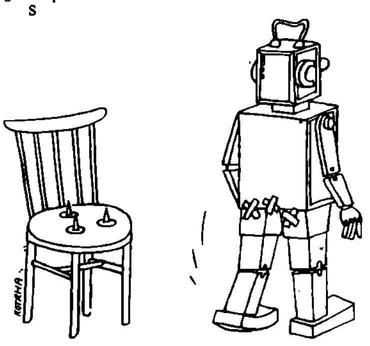
Mathematikfachlehrer E. Naumann, Karl-Marx-Stadt

Physik

Ph 6 ■71 Die Strecke, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt, beträgt 300000 km. Diese Entfernung ist so ungeheuer groß, daß man sie sich nur sehr schwer vorstellen kann. Eine Möglichkeit, sich wenigstens ungefähr ein Bild von dieser riesigen Entfernung zu machen, ergibt sich, wenn ihr die Ergebnisse der folgenden Aufgaben damit vergleicht.

a) Wie viele Tage wäre ein D-Zug unterwegs, der ohne Unterbrechung mit einer Geschwindigkeit von $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ diese Strecke durchfahren würde, und wie viele Tage würde ein Flugzeug fliegen bei einer Geschwindigkeit von $900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

b) Wie viele Minuten würde ein Raumschiff brauchen bei einer Geschwindigkeit von $8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$?



Ph7 ■72 Ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von $800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ überfliegt in einer Höhe von 16 km den Punkt *A*. 5 Stunden später überfliegt es den Punkt *B*. Wie weit ist *A* von *B* entfernt, wenn Höhe und Geschwindigkeit des Flugzeuges konstant bleiben? (Der Erdradius sei 6370 km.)

Schüler Ingolf Thurm, Gößnitz, Kl. 10

Ph8 ■73 Auf eine stählerne Welle soll ebenfalls aus Stahl ein Ring aufgeschrumpft werden. Bei 20 °C habe die Welle einen Durchmesser von 80,05 mm und der Ring eine Bohrung vom Durchmesser 79,97 mm. Auf welche Temperatur muß der Ring erwärmt werden, damit er mit einem warmen Durchmesser von 80,25 mm auf die Welle aufgeschoben werden kann?
Der lineare Ausdehnungskoeffizient für Stahl betrage $0{,}0000117\,\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}$. Die Formel für die Längenausdehnung ist $l_1 = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph9 ■74 Aus einem undichten Wasserhahn tropft Wasser, alle 0,2 Sekunden ein Tropfen. Welchen Abstand haben zwei nacheinander fallende Tropfen 0,5 Sekunden nach dem Abfallen des ersten Tropfens?

Schüler Jörg Müller, Dresden, Kl. 9

Ph10/12 ■75 Ein Luftballon von 10 m Durchmesser hat im leeren Zustand einschließlich Gondel, Apparaten und Ballast eine Masse von 300 kg. Er wird mit Wasserstoff $\left(\text{Dichte } \varrho = 0{,}089\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$ gefüllt. Die Luftdichte betrage $1{,}25\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.
Wie viele Personen zu je 75 kg können mitfahren? Welche Auftriebskraft wirkt dann noch auf den Ballon?

Adalbert Schatz, Leipzig

Chemie

Ch7 ■57 Wie ist die Gewichtszunahme, wenn 12 g metallisches Eisen
a) in Eisen(II)-oxid
b) in Eisen(III)-oxid
c) in Eisen(II, III)-oxid überführt werden?

Ch8 ■58 15 cm³ einer Lösung von Salzsäure werden mit Silbernitrat versetzt. Dabei wird ein Niederschlag von 0,47 g gefällt. Wieviel %ig ist die Salzsäure, wenn man berücksichtigt, daß sie folgendermaßen hergestellt wurde:
29,2 g wurden mit Wasser auf 290 cm³ verdünnt?

Ch9 ■59 Bei der Reaktion von Kochsalz, 96%iger Schwefelsäure und Braunstein mit einem Gehalt von 89% Mangan(IV)-oxid bildet sich Chlor. Welche Mengen der Ausgangsstoffe sind anzuwenden, wenn 34 Liter Chlor entstehen sollen?

Ch10/12 ■60 Kalkstein, welcher 87,2% Kalziumkarbonat enthält, wird mit Salzsäure versetzt. Das dabei entstehende Kalziumchlorid ist zu 4% durch Kalziumoxid verunreinigt. Man berechne, wieviel 34%ige Salzsäure und Kalkstein man einsetzen muß, wenn 310 kg verunreinigtes Kalziumchlorid entstehen sollen.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu zwei Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 1/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:
Ma5 ■1828 Die Schüler einer Klasse gratulieren im Jahre 1978 ihrem Lehrer, der älter als 30 Jahre, aber jünger als 40 Jahre geworden ist, zum Geburtstag. Auf der Gratulationskarte wurden von den Schülern in scherzhafter Weise die beiden Ziffern der Zahl, die das Lebensalter des Lehrers angibt, vertauscht. Dadurch wurde dieser Lehrer um neun Jahre „jünger gemacht". In welchem Jahre wurde dieser Lehrer geboren?
Im Heft 4/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Die Zahl des erreichten Lebensalters des Lehrers läßt sich durch $z = 3 \cdot 10 + y$ darstellen. Nun gilt $3 \cdot 10 + y = 10 \cdot y + 3 + 9$, $9y = 18$, also $y = 2$. Im Jahre 1978 ist der Lehrer 32 Jahre alt geworden; er wurde somit im Jahre 1946 geboren.

Wir stellen nun die Lösung von *Thomas Langenhahn* aus Niederwiesa vor, der Schüler der Klasse 5b der Wilhelm-Pieck-Oberschule ist.

Thomas löste diese Aufgabe wie folgt:
Angenommen, der Lehrer wurde *x* Jahre alt; dann gilt $30 < x < 40$. Der Lehrer könnte also 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 38 oder 39 Jahre alt geworden sein. Durch Vertauschen der Ziffern erhalten wir ein Lebensalter von 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83 oder 93 Jahren. Nur für $32 - 23 = 9$ werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Im Jahre 1978 wurde der Lehrer 32 Jahre alt; also wurde er im Jahre 1946 geboren.

Wir stellen nun die Lösung von *Ines Schönberg* aus Borna vor, die Schülerin der Klasse 5c der Dinter-Oberschule ist.
Ines löste diese Aufgabe wie folgt:
Für das im Jahre 1978 erreichte Lebensalter dieses Lehrers gilt $30 < \overline{ab} < 40$, wobei $\overline{ab}$ eine zweistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise darstellt. Wegen $\overline{ab} = \overline{ba} + 9$ gilt ferner $\overline{ba} < \overline{ab}$, und wegen $a = 3$ gilt somit $b = 1$ oder $b = 2$.
Wegen $31 - 13 = 18$ entfällt $b = 1$. Somit existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 3$ und $b = 2$. $(32 - 23 = 9)$
Aus $1978 - 32 = 1946$ folgt, daß dieser Lehrer im Jahre 1946 geboren wurde.

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:
Ma6 ■1860 Rolf liest ein Buch. Am ersten Tag schafft er 12 Seiten, am zweiten Tag den vierten Teil der noch zu lesenden Seiten, am dritten Tag die restlichen 57 Seiten. Wie viele Seiten umfaßt dieses Buch?

Im Heft 5/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Angenommen, das Buch umfaßt *n* Seiten; nach dem ersten Tag hat Rolf noch $(n - 12)$ Seiten zu lesen. Davon liest er am zweiten Tag $\frac{n-12}{4}$ Seiten. Nun gilt

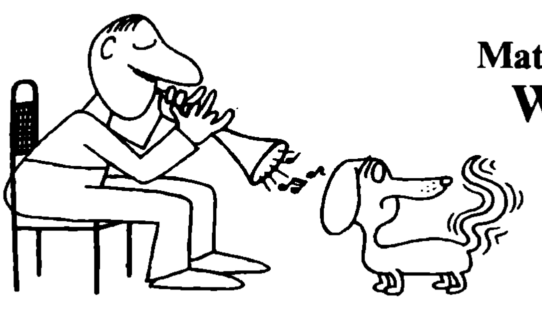
$$\begin{aligned} 12 + \frac{n-12}{4} + 57 &= n, \\ \frac{n-12}{4} + 69 &= n, \\ n - 12 + 276 &= 4n, \\ 264 &= 3n, \\ n &= 88. \end{aligned}$$

Dieses Buch umfaßt 88 Seiten.

Wir stellen nun die Lösung von Christiane Höfer aus Lugau vor, die Schülerin der Klasse 6b der Oberschule I ist.
Christiane löste diese Aufgabe wie folgt:
Angenommen, dieses Buch umfaßt *n* Seiten. Am ersten Tag liest Rolf 12 Seiten; es verbleiben somit $(n - 12)$ Seiten. Am zweiten Tag liest Rolf den vierten Teil, am dritten Tag also dreimal den vierten Teil der verbliebenen Seitenzahl; das sind 57 Seiten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot (n - 12) &= 57, \\ n - 12 &= \frac{57 \cdot 4}{3}, \\ n - 12 &= 76, \\ n &= 88. \end{aligned}$$

Dieses Buch umfaßt 88 Seiten.



Mathematik und Praxis

Was ist Schall?

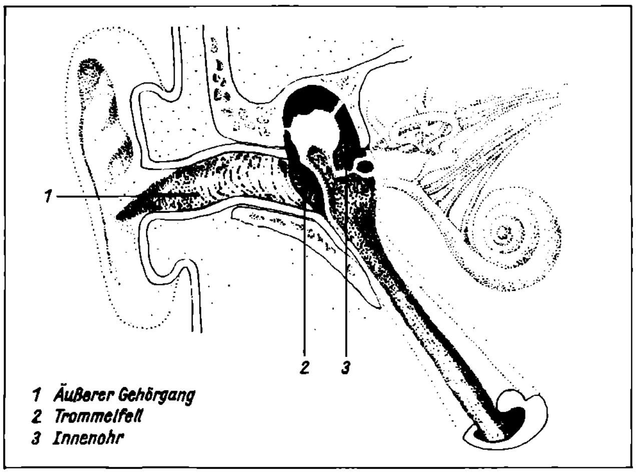
Wenn wir sprechen, singen, Instrumente spielen oder Geräusche erzeugen, spielen sich an winzigen Teilchen der Luft ganz erstaunliche Vorgänge ab, für uns allerdings unsichtbar.
Man faßt alle Töne, Klänge und Geräusche, kurzum alles, was wir hören können, unter der Bezeichnung Schall zusammen. Wenn wir unsere Sprechorgane betätigen, musizieren, mit dem Hammer schlagen, husten, niesen oder sonst ein Geräusch erzeugen, werden die Teilchen der Luft in sehr feine und schnelle Schwingungsbewegungen versetzt. Zunächst geraten nur die der Schallquelle unmittelbar benachbarten Luftteilchen in Schwingungen. Sie stoßen dann aber der Reihe nach ihre Nachbarn zu gleichen Schwingungen an.
Dieses Anstoßen breitet sich von der Schallquelle so schnell aus, daß schon nach $\frac{1}{10}$ s die Luftteilchen in Schwingungen geraten, die 34 m weit von ihr entfernt sind. In 1 s breitet sich der Schall in Luft 343 m aus. Man nennt dies die Schallgeschwindigkeit. Nicht nur in Luft und allen anderen Gasen, auch in Flüssigkeiten und Festkörpern breitet sich Schall aus, zum Teil sogar mit noch erheblich größerer Geschwindigkeit. Die Luftteilchen üben bei ihren Schwingungen einen schwachen Druck auf das Trommelfell des Ohres aus. Die feinen Druckschwankungen breiten sich in den inneren Teilen des Ohres aus und erzeugen Reize, die das Gehirn zu Gehörsempfindungen verarbeitet.

Veranschaulichen wir uns die Schallschwingungen durch den Vergleich mit der Schaukel! Ähnlich wie ein Kind auf der Schaukel bewegen sich die Teilchen der Luft, einer Flüssigkeit oder eines festen Körpers bei den Schallschwingungen hin und her. Die Teilchen bewegen sich dabei aber nicht etwa mit 343 $\frac{m}{s}$ (Meter je Sekunde), sondern nur die Schallausbreitung erfolgt mit dieser Geschwindigkeit. Der Zustand des In-Schwingung-Geratens wandert also mit 343 $\frac{m}{s}$ weiter. Es ist wie beim Abzählen der zum Appell angetretenen Schüler. Der Reihe nach ruft jeder seinem Nachbarn eine Zahl zu und wendet dabei den Kopf. Es bewegt sich aber nicht der Kopf des ersten Schülers die ganze Reihe entlang, sondern nur das Kopfwenden.
Jede Schwingung ist durch zwei Größen gekennzeichnet; die Frequenz (Schwingungszahl) und die Amplitude (Schwingungsweite). Die Frequenz ist die Anzahl der Hin- und Herbewegungen je Sekunde. Schaukelt ein Kind in einer Sekunde von der Mittelpunktslage einmal nach vorn, dann nach hinten und wieder genau zur Mitte zurück, so entspräche das der Frequenz von 1 Hz (Hertz). Diese Maßeinheit ist nach dem Physiker Heinrich Hertz benannt, der 1886 erstmals jene Art Schwingungen entdeckte und experimentell erzeugte, die man für den Rundfunk und das Fernsehen benutzt. Die Frequenzen der für den Menschen hörbaren Schallschwingungen reichen von ungefähr 16 Hz bis 20000 Hz. Die höchsten dieser Frequenzen können jedoch nur junge Menschen hören. Mit zunehmendem Alter geht die obere Grenze der hörbaren Frequenzen zurück. Hunde können noch den sogenannten Ultraschall mit Frequenzen von mehr als 20000 Hz hören. Von der Frequenz hängt die Tonhöhe ab: je höher die Frequenz, desto höher der Ton.
Die zweite kennzeichnende Größe, die Amplitude, entspricht der Wegstrecke zwischen den Endpunkten der Hin- und Herbewegung der Teilchen, vergleichbar mit der Entfernung zwischen der vordersten und hintersten Stellung einer Schaukel. Von der Größe der Amplitude hängt bei den Schallschwingungen die Lautstärke ab: je größer die Amplitude, desto größer die Lautstärke.
Bei der Ausbreitung der Schallschwingungen bleibt zwar die Frequenz gleich, aber die Amplitude nimmt ab. Die von der Schallquelle weiter entfernten Teilchen werden also nicht mehr zu Schwingungen von so großer Weite angestoßen wie die nahen. Daher wird die Lautstärke um so geringer, je weiter wir uns von der Schallquelle entfernen. Nur sehr lautstarke Geräusche wie den Donner können wir viele Kilometer weit hören, die menschliche Stimme aber nicht. Aus der Schallgeschwindigkeit in Luft ist übrigens leicht zu errechnen, wie weit ein Gewitter entfernt ist. Vergehen zwischen dem Blitz und dem Hörbarwerden des Donners zum Beispiel 24 s, so ist das Gewitter 24 km : 3 = 8 km entfernt, da sich der Schall in rund 3 s 1 km ausbreitet.

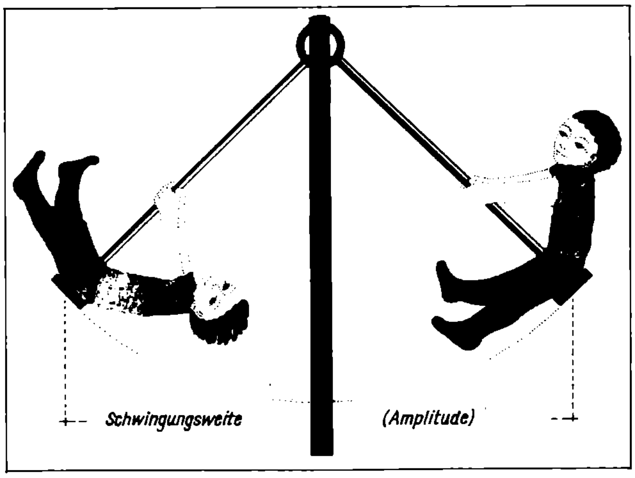
Leseprobe aus:
HANS KLEFFE

Wie funktioniert denn das?

77 S., zahlreiche Abb., Preis: 6,50 M
Der Kinderbuchverlag Berlin
Bestell-Nr. 629 970 6



1 *Äußerer Gehörgang*
2 *Trommelfell*
3 *Innenohr*



In freien Stunden · alpha heiter

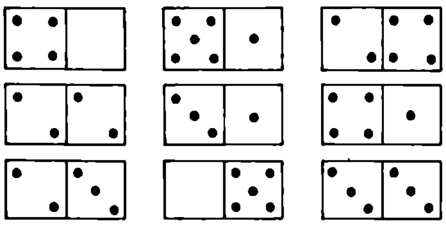
15151 π-Stellen aus dem Kopf

Einen neuen Weltrekord im Behalten von Stellenzahlen der unendlichen Ludolfschen Zahl π, die das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser angibt, hat der 46jährige Japaner Hideaki Tomoyori aufgestellt. Vor drei Zeugen zählte er in Tokio über drei Stunden lang insgesamt 15151 Stellen von π (3,14159...) auf, ohne sich zu irren. Das Ergebnis wurde sofort mit einem Computer nachgeprüft. Den bisherigen Rekord hielt ein Brite mit 5050 Stellen.

Domino

Es sind zwei Paar Dominosteine so auszuwechseln, daß die Summe in jeder der drei Spalten und in jeder der drei Reihen gleich 15 ist.

Aus: Sputnik 8/79, Moskau



Geschenke verraten Namen

Drei Ehepaare, Meier, Müller und Schmidt, kaufen Geschenke.

(1) Jede Person kauft so viel Geschenke wie sie für ein Geschenk in Mark bezahlt.

(2) Jede Frau gibt 75 Mark mehr aus als ihr Mann.

(3) Anna kauft ein Geschenk mehr als Willi Meier, Luise ein Geschenk weniger als Hans Müller.

(4) Wie heißt Maria mit ihrem Familiennamen?

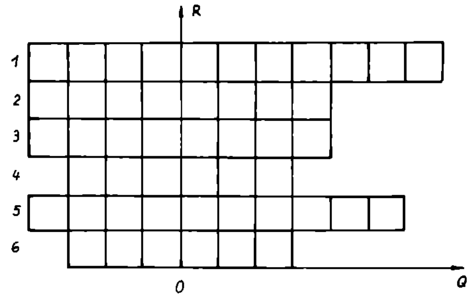
Aus: WE, Köln, F. Sauer

Wie funktioniert denn das?

In die Zeilen der abgebildeten Figur sollen Wörter folgender Bedeutung eingetragen werden:

1. Eigenschaft natürlicher Zahlen n mit $9 < n < 100$
2. Längeneinheit in der Schiffahrt
3. Eigenschaft von Geraden mit gleichem Abstand
4. deutscher Mathematiker (1487 bis 1567)
5. Teil einer gekrümmten Linie
6. achter Teil eines Raumes

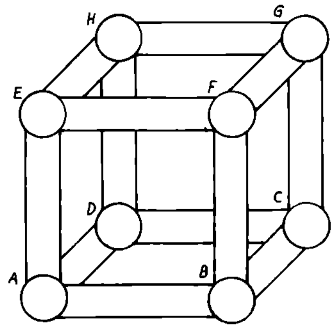
Sodann trage man in die Figur das Bild der Funktion $y = x^2$ ein. Dabei sei 0 als Ursprung, $0Q$ als Abszissenachse und $0R$ als Ordinatenachse sowie eine Kästchenlänge als Einheit angenommen.



Die Buchstaben in den Feldern, durch deren Inneres diese Linie verläuft, ergeben fortlaufend gelesen ein Mittel zur Darstellung von Funktionen.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Zahlenrätsel – dreidimensional



Breitenrichtung

AB	Primzahl zwischen $7 \cdot 10 - 3$ und $7 \cdot 10 + 3$
DC	$33 + 6^2$
EF	$(1 + 6 + 6 + 6) \cdot \sqrt[6]{64}$
HG	$3{,}162776^2$

Höhenrichtung

EA	$3{,}33222^3$
FB	$(6 : 2)^4$
GC	$\sqrt[4]{6561}$
HD	Ordnungszahl des Schwefels oder $2^2 \cdot 2^2$

Tiefenrichtung

AD	d des Kreises, wenn $u = 238{,}8$
BC	α, wenn $\text{arc}\,\alpha = 0{,}3316$
FG	$3^2 \cdot 3^2 - 1$
EH	$5{,}56776^2$

Die entsprechenden Zahlen unter die gegebenen Buchstaben geschrieben, ergeben das Geburts- und das Sterbedatum eines Staatsmannes der DDR.

GEGHHFAD   *GAGCHCDG*

Mathematikfachlehrer W. König, Berlingerode

Kryptarithmetik

In den Schemata

a)
$$\begin{array}{ccccc} cba & - & a & = & cbf \\ - & & + & & - \\ cfa & + & e & = & ccf \\ \hline bf & - & cf & = & df \end{array}$$

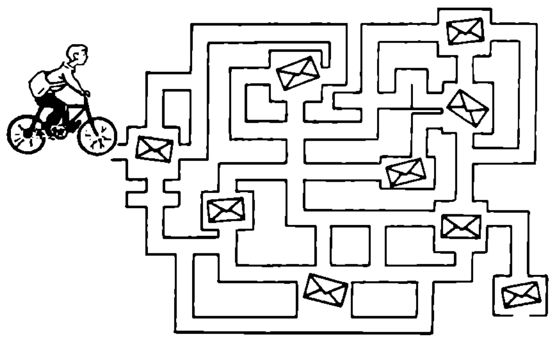
b)
$$\begin{array}{ccccc} BBCD & - & EFD & = & GBD \\ : & & + & & - \\ G & \cdot & HE & = & IFJ \\ \hline BLD & + & LBE & = & IIE \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß man sechs richtig gelöste Aufgaben erhält. Dabei sind jeweils für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

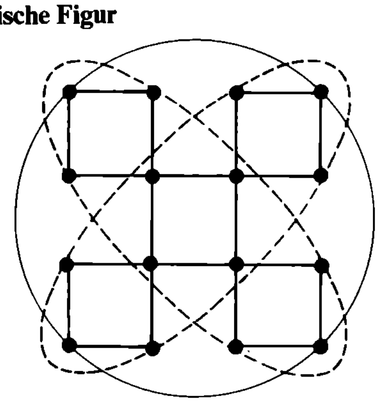
Schüler Bernd Winkelmann, OS Karl Marx, Kl. 7 (a), Schmalkalden
Schülerin Petra Hahn, A.-Diesterweg-OS, Kl. 6 (b)

Der Bote und die neun Pakete

Neun Pakete müssen eilig zugestellt werden. Der Bote sieht sich den Stadtplan an und weiß bald, wie er fahren muß. Er liefert alle Pakete ab, ohne ein Stück des Weges zweimal zurückzulegen. Wie verlief seine Route? *Aus: Sputnik, Moskau*

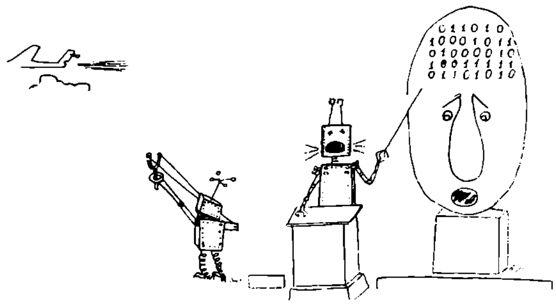


Magische Figur



Anstatt Punkte sind die Zahlen 1 bis 16 so zu ergänzen, damit die Summe am Umfang jedes Quadrats, jeder Ellipse und am Umkreis immer die gleiche ist. Insgesamt also 8 gleiche Summen.

Ing. Jindřich Pěnčík, Praha



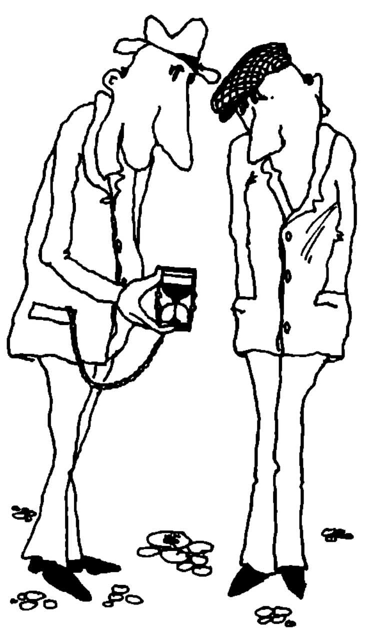
Aus: Eulenspiegel 15/70, L. Otto, Leipzig

α-Produkte

In nachfolgenden Gleichungen sind die Buchstaben so durch Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{aligned} P\alpha E &= \alpha \cdot \alpha\alpha \\ R\alpha\alpha T &= P \cdot \alpha\alpha\alpha \\ O\alpha\alpha\alpha K &= R \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha \\ D\alpha\alpha\alpha\alpha U &= O \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ U\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha D &= D \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ K\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha O &= U \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ T\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha R &= K \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\ E\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha P &= T \cdot \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \end{aligned}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden



„Es ist genau 4600 Sandkörner nach 16 Uhr..."
„Ich muß Sie aufschreiben – Sie parken verkehrt!"

Aus: Für Dich 32/79, H.-D. Rößler, Berlin

alpha-Wettbewerb 1978/79

Abzeichen in Gold

Für zwölfjährige Teilnahme
Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Püffeld, Hennigsdorf; Eckhard Schadow, Oranienburg

Für elfjährige Teilnahme
Martin Ermrich, Dresden; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle

Für zehnjährige Teilnahme
Holger Jurack, Burkau; Ullrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald; Rainer Gutsche, Herzberg

Für neunjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Regina Kupfer, Miltitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Bernhard Tschada, Sondershausen; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Gudrun Drews, Wöbbelin; Marid Helbig, Frankfurt.

Für achtjährige Teilnahme
Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin, Ulf Ritschel, Booßen; Clemens Jaunich, Cottbus; Wolfgang Seeber, Gehren; Irmhild Bittner, Bengt Nölting, beide Greifswald; Ingo Lenz, Hagenow; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Karsten König, Rostock; Reinhold Beckmann, Henri Hofmann, beide Schmalkalden; Birgit Rosenberger, Suhl; Manfred Häußler, Westgreußen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornewitz; Lothar Gruber, Linz (Österreich)

Für siebenjährige Teilnahme
Volkmar Türke, Auerbach; Andreas Gude, Cordula Becher, Andrea Nießen, alle Berlin; Peter Wiehe, Bischofferode; Ralf Ott, Demmin; Frank Regensburger, Michael Apitz, Werner Jeroch, Reinhard Pohl, Ralf Kretschmer, Uwe Hanisch, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Heidelore Stallbohm, Eldena; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Claudia Endtricht, Görlitz; Christian Wolf, Greifswald; Jens Negwer, Grimma; Burkhard Rahr, Groß-Neundorf; Günter Mosel, Gülze; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Armin Körner, Leipzig; Steffen Langbein, Lichte; Gabriele Otto, Meißen; Thomas Richter, Neuhausen; Andreas Massanek, Neusornzig; Thomas Köhler, Oederan; Michael Thränhardt, Oranienbaum; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz; Michael Zwicke, Riesa; Torsten Löwe, Schleiz; Haiko Müller, Heinz-Olaf Müller, Almut Beckmann, Barbara Gehb, Frank Gießler, alle Schmalkalden; Bernadette Domaschke, Seifhennersdorf; Hans Dietrich Schwabe, Sondershausen; Holger Hoppe, Stendal; Dirk Herrmann, Töplitz; Sylvia Zipf, Waldheim; Sylvia Kunze, Weißenfels; Carola Senft, Wingerode; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick; Michael Feudel, Leinefelde

Für sechsjährige Teilnahme
Udo Clemens, Altenburg; Frank Maschke, Altendorf; Henri und Dieter Koch, Arnstadt; Olaf Rausch, Aue; Burkhard Maeß, Bad Doberan; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Katrin Kolliwer, Mario Binkowski, Birgit Ewald, Michael Prescher, Claudia Ziehm, alle Berlin; Werner König, Berlingerode; Adelbert Heddergott, Büttstedt; Jens Schumann, Coswig; Ralf Hortig, Andrea Dreyer, Iris Grundke, Ellen Harnath, Jens Purand, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Lutz Friedemann, Angela Jircik, Uta Oelschlägel, Klaus-Dieter Gloe, Annett Körner, Peter-Alexander Pöhler, Frank Wittwer, Matthias Apitz, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Daina Semper, Thomas Böhme, beide Eisleben; Sabine Lützkendorf, Uwe Kintzel, beide Erfurt; Heike Reckenbeil, Fambach; Thomas Gerlach, Heike Brüggemann, Ute Ribbe, Bernd Hartwig, Mike Liebegott, alle Friedeburg; Viola Richter, Garitz; Sylvio Klose, Gera; Christof Herrmann, Greifswald; Bernd Dübe, Gr.-Bademeusel; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß-Wüstenfelde; Hubert Steinmetz, Grüningen; André Motz, Grünhain; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Knut Bauer, Hohenstein; Undine Nathan, Hoyerswerda; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Ronald Rösch, Marko Hanke, Arnd Rösch, alle Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Andreas Bernstein, Lehmitz; Thomas Richter, Jens Rudolf, beide Leipzig; Heimo Woitek, Leinefelde; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett Weise, Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Peter Stolze, Möhlau; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Matthias Theurich, Olbersdorf; Rüdiger Düsing, Osterburg; Ute Möllhoff, Piesau; Volker Steuer, Pirna; Jürgen Krahl, Plauen; Carmen Henze, Pratau; Jens Jacobi, Jens-Uwe Sprengel, beide Potsdam; Sigrid und Jens-Peter Planke, beide Premnitz; Karsten und Falk Breuer, beide Radebeul; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Heiko Lehmann, Andreas Matthus, beide Rostock; Ina und Uwe Ebert, beide Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Helmut Engelmann, Sachsendorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Jens Gollmer, Werner Häfner, Christine Döll, Sabine Endter, Cornelia Schädlich, Martin Tengler, alle Schmalkalden; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Roderich Winkler, Schwerin; Annelie Meyer, Silberstraße; Simone Mahlow, Barbara Tschada, beide Sondershausen; Thomas Eichhorn, Steinach; Simone Teichmüller, Stöckey; Dietmar Ulbricht, Velten; Beate Nähler, Ralf Kurch, Beate Seiler, alle Weimar; Uwe Felsberg, Worbis; Uwe Müller, Wrocław (VR Polen); Christoph Chojetzki, Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Uwe Langer, Birgit Thomas, Gabriele Herzig, Regina Kreul, Steffen Pankow, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken; Lutz Heinrich, Bad Langensalza

Für fünfjährige Teilnahme
Frank Kämpfer, Holger Herold, beide Altenburg; Hajo Herbst, Altenpleen; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Thorsten Thonndorf, Uwe Maaz, beide Bad Salzungen; Birgit Wollschläger, Bergwitz; Stefan Berg, Frank Bendin, beide Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Astrid Markgraf, Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Inge Beck, Pia Zimmermann, beide Bleicherode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Birgit Weishaupt, Bülow; Ralph Voigtländer, Guido Mehne, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossebaude; Ulrike Baumann, Coswig; Andreas Schlecht, Ralph Bernhardt, Kathrin Magister, Susanne Liebelt, alle Cottbus; Karola Sarodnik, Dallgow; Elisabeth Schültke, Dessau; Manfred Kutschank, Deutschenbora; Monika Nolte, Dingelstädt; Harry Höfer, Dorndorf; Susanne Müller, Michael Berton, Michael Giesecke, Helmuth Goldberg; Thomas Hartwig, Ingolf Körner, Michael Pietschner, Jens Rotsch, Carolin Engel, Jürgen Gräfenstein, Lutz Jeroch, Jörn Wittig, Ralph Rönsch, alle Dresden; Peter Weise, Thomas Marek, Matthias Arbeiter, Mandy Rinklin, alle Eisenach; Volker Georgy, Uwe Strohmeier, Henrik Seifert, Renate Lützkendorf, Dirk-Thomas Orban, alle Erfurt; Michael Wagner, Iris Abt, beide Fambach; Jörg Butter, Freiberg; Matthias Bär, Steffi Haucke, Ralf Baumhekel, alle Freital; Andreas Fintzel, Friedeburg; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Yvonne Pforr, Matthias Kasparek, beide Gräfenhainichen; Manuela Heims, Astrid Renz, Silvia Falk, Andreas Wolf, Katharina Herrmann, Ines Gath, Gunnar Müller, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Stefan Göckeritz, Greifswald; Regine Binder, Halle-Neustadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Volker Reck, Heiligenstadt; Eike Harmel, Hohenferchesar; Kerstin Hirsch, Holzdorf; René und Chonchita Schüppel, Mathias Grundmann, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Fliegner, Jarmen; Birgit Hofmann, Jens Pönisch, Anett Märker, Andreas Hengst, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Silke Zimpel, Kefferhausen; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Karsten Drescher, Leinefelde; Peter Kasper, Stephan Bönewitz, Katrin Bormann, Ines Bauer, Heiko Rudolf, Jörg Schwarzer, alle Leipzig; Manuela Marpert, Markersdorf; Uwe Zscherpel, Meerane; Thomas Eller, Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Kerstin Friedrich, Mittelherwigsdorf; Antke Kössel, Mittelschmalkalden; Angelika Radtke, Mittweida; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Per Witte, Mittenwalde; Uwe Grasenack, Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Kerstin Feigel, Neundorf; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Gerald Köthe, Niederorschel; Anett Rabe, Birgit Uhlmann, beide Oberlungwitz; Kerstin Johannes, Oranienbaum; Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pinnau; Kerstin Zirnstein, Pirna; Thomas Mittelbach, Plessa; Claudia Würker, Reichenbach; Ralph Neumann, Ribnitz; Astrid Wruck, Susanne Forstreuter, beide Rostock; Christiane Dobberstein, Rathenow; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Cornelia Grulke, Schernberg; Thomas Gerth, Henri Kriechling, Susanne Heuer, Christoph Wille, alle Schmalkalden; Elke Meißner, Sitzendorf; Matthias Schneiderheinze, Sondershausen; Martin Förster, Söllichau; Silke Reuscher, Roland Goldenbogen, beide Stralsund; Elke Rößner, Strausberg; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Michael Hauff, Teuchern; Margit Creutzburg, Thal; Annekatrin Heuer, Tieckow; Ute Bergmann, Katrin Schatz, beide Torgau; Kerstin Spiegel, Waldheim; Stefan Syring, Warin; Kerstin Ackermann, Wasungen; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Olaf Lenz, Weixdorf; Maik Rehtanz, Wernshausen; Eric Link, Wismar; Karsten Schlutter, Wittstock; Torsten Noack, Wittenberg; Birgit Schmidt, Worbis; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Roland Wehmeier, Torsten Ninebuck, beide Wüsteney; Burkhild Kehnscherper, Wustrow; Michael Holdys, Ziesar; Bernd Dunger, Heimo Henschelmann, Anett Schulzensohn, alle Zittau; Bert Hoffmann, Söllichau

Für vierjährige Teilnahme
Frank Baumgart, Aschersleben; Knut Rommel, Bad Liebenstein; Margret Detsch, Bad Salzungen; Kirsten Rechner, Baruth; Jürgen Pommerening, Ute Huebscher, Marc Schewe, Sabine Mantel, alle Berlin; Stefanie Löffler, Blankenfelde; Tilman Völzke, Böhlen; Brita und Heike Hoffmann, beide Boizenburg; Stefanie Began, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Steffen Grützner, Burkau; Royald Lenk, Stefan Jakubaschk, Kristina Roeke, Christine Pompe, Axel Harnath, alle Cottbus; Petra Sarodnik, Dallgow; Thomas Claus, Demitz-Thumitz; Ines Fehrmann, Gabriele Fischer, Veronika Enkelmann, Heike Georgi, Heike Taschenberger, alle Deutschenbora; Thomas Richter, Die

las; Annette Hindermann, Dagmar Schunck, beide Dingelstädt; Gabriele Sprotte, Döbeln; Helga Loos, Dörfel; Manuela Schwenke, Dohna; Asja Nürnberger, Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, Jörg Hempelt, Stefan Gärtner, Antje Kühn, Cornelia Müller, Ulf Riechen, alle Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Birgit Rößler, Kerstin Mans, Marlies und Petra Patz, alle Eisenach; Peter Schlag, Steffen Much, beide Eisenberg; Volkmar Kolleck, Eisenhüttenstadt; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne Schreiber, Matthias Schreiber, beide Elsterwerda; Thomas Schmidt, Heike Heber, beide Erfurt; Simone Oetzel, Kathrin Sievers, Volker Heymel, alle Fambach; Holger Büchler, Feldberg; Reinhard Walter, Finsterwalde; Kathrin Schädlich, Floh; Kathrin Hoffmann, Frankfurt; Elke Jahn, Freiberg; Cornelia Voigt, Carla Müller, beide Friedeburg; Matthias Bauer, Genthin; Sixten Bussemer, Gera; Urte Conrad, Gielow; Kerstin Schneider, Goßwitz; Thomas Silz, Gräfenhainichen; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Klaus Siemoneit, Grimmen; Kerstin Mauerhof, Grube; Grit Möckel, Grünbach; Uwe Ansorge, Grünhain; Günter Schichinsky, Volker Kunert, Thomas Reissig, alle Halle; Roger Fischl, Halle-Neustadt; René Geipel, Hartha; Gudrun Liebe, Hartmannsdorf; Bärbel Päßler, Kerstin Wickner, Katrin Ullmann, Frank Eberlein, Heinz Wickner, alle Hermannsdorf; Thomas Jez, Herzberg; Jens Fiebig, Höhnstedt; Frank Thümmler, Horka; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Marion Endrigkeit, Jessen; Conny und Hanjo Sauermann, beide Joachimsthal; Birgit Georgi, Holger Leonhardt, Holger Friedrich, Andreas Niepel, Frank Hübler, Andreas Berner, Christiane Glumann, alle Karl-Marx-Stadt; Dany Eiche, Manuela Wohlfarth, beide Kieselbach; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Andreas Kardos, Köthen; Joachim Braun, Uwe Seidel, beide Koßdorf; Frank Batschon, Krauschwitz; Dirk Eigenwillig, Lauchhammer; Gerald Pfitzenreuter, Roland Bolze, Barbara Surma, Jörg Drechsel, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Ralph Gruber, beide Leipzig; AG Math. Kl. 10a/b der Wilhelm-Pieck-OS Lichte; Heike Nowara, Uwe Lautenschläger, beide Lössau; Ute Fischer, Lübbenau; Birgit Arndt, Loitz; Grit Heyde, Latdorf; Carola Hönn, Matthias Neundorf, beide Meiningen; Peter Kürbis, Meißen; Christiane Krause, Menteroda; Andrea Richert, Mühlhausen; Uwe Würker, Mülsen; Katrin Wilke, Nauendorf; Thomas Lange, Neustadt; Dieter Seifert, Pinnau; Math. Zirkel Kl. 9/10 der EOS R. Fetscher, Uwe Schulze, beide Pirna; Axel Schulz, Georg Schreckenbach, Thomas Schreckenbach, Rainer Räthe, Karsten Milek, Sigurd Assing, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausitz; Tim Planke, Premnitz; Katrin Arnhold, Radebeul; Lutz Hübschmann, Raschau; Katrin Lippuner, Rheinsberg; Hartmut Lipke, Ribnitz; Ina und Manfred Hille, Uwe Mattutat, alle Riesa; Uwe Holubek, Rietschen; Dieter Grebner, Roßdorf; Ulrike Martin, Anette Müller, Klaus Vilbrandt, Sabine Heinze, Ines Dalisda, Sylke Giese, Anett Becker, Dietlind Stolle, alle Rostock; Torsten Köchy, Rotta; Andreas Hempler, Rüdnitz; Katrin Heim, Astrid Keller, Christine Mangold, Manuela Recknagel, Sabine Artschwager, Ines Baumeister, Martina Büchner, Evi König, alle Steinbach-Hallenberg; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladitz; Anke Grosse, Mathias Brandt, Kerstin Müller, Brigitte Schmidt, Yvonne Recknagel, Sören Holland-Cunz, Silke Köllmann, Anka Wilhelm, Andre Bartsch, Frank Häfner, Matthias Holland-Nell, Friedo Lohse, Claudia Häfner, alle Schmalkalden; Markus Wolf, Schönbach; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Sylvia Schwenke, Schwedt; Ralf Beckert, Schwerin; Jens Gläßer, Seiffen; Michael Hruschka, Senftenberg; Torsten Roeger, Ekkehard Breuer, beide Stendal; Thomas Merten, Stralsund; Katrin Rosenberger, Suhl; Klaus Pfeiffer, Taubach; Holger Nörenberg, Antje Wulf, beide Teltow; Christine Mohr, Teterow; Lars Hermann, Töplitz; Kerstin Anschütz, Waren; Petra Ackermann, Wasungen; Ute Hansmann, Christiane Hotze, beide Weißenborn; Birgit Schmidt, Weißwasser; Manfred Petzelis, Wendisch-Rietz; Ralf Brada, Ingo Förster, Dirk Hilbrecht, Mathias Scharf, Frank Schöne, alle Wiehe; Carmen Rauscher, Wilkau-Haßlau; Marita Kalisch, Wismar; Berrit Richter, Wittenberg; Ralph Nemitz, Wittenförden; Steffen Klimpel, Uwe Eix, beide Wolgast; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl und Jochen Oertel, beide Zeitz; Torsten Eidner, Uwe Müller, beide Zeulenroda; Olaf Kretschmar, Kerstin Hoffmann, Ingrid Soblik, Michael Mönch, alle Zittau; Norbert Welzel, Birgit Schenke, beide Zschornewitz; Uta Escher, Norbert Schlosser, beide Zwickau; Peter Damaschke, Reiner Nolte, Rainer Engel, Carola Günther, Bettina Hagemann, Heidrun Weißenborn, alle Leinefelde; Götz Klüttig, Guben; Ralf Heubner, Wolfen

Für dreijährige Teilnahme

Preisträger: **Jens** und **Sven Fache**, beide Altenburg; **Karin Gröger**, Berlin; **Thomas Streich**, Brandenburg; **Olaf Sasse**, **Karsten Mittag**, beide Cottbus; **Ruth Backhaus**, **Mario Dette**, beide Dingelstädt; **Werner Kirsch**, **Brigitte Rotter**, **Catherin Engel**, **Günther Gehre**, alle Dresden; **Ralf Arnold**, Eisenach; **Andrei Josiek**, Eisenhüttenstadt; **Elvira Stallbohm**, Eldena; **Kerstin Möller**, Fambach; **Silke Bochmann**, Frankfurt; **Jörn Wintsche**, Grimma; **Frank Thieme**, Karl-Marx-Stadt; **Bernd Schmutzler**, Kirchberg; **Jens-Uwe Eigenwillig**, Lauchhammer; **Doris Grünler**, Lössau; **Torsten Schulz**, Merseburg; **Heidi Teidge**, **Jörg Schmidt**, beide Neubrandenburg; **Thomas Heldrich**, Oberlungwitz; **Dietmar Hennig**, Olbersdorf; **Gudrun Zirnstein**, Pirna; **Torsten Kühn**, **Olaf Köbernick**, beide Potsdam; **Gitta Schöne**, Rostock; **Jürgen Schmalisch**, **Evelin Neumann**, beide Rotta; **Ronald Bojarski**, Saßnitz; **Michael Gerth**, Schmalkalden; **Gabriele Wolf**, Trusetal; **Evelin Beyer**, Wegefarth; **Sylvia Feigl**, **Ines Hoffmann**, beide Weißwasser; **Marena Pannier**, Uthausen; **Uwe Pallas**, Zella-Mehlis; **Jörg Wenzel**, Zeulenroda

Michael Elte, Ahlum; Petra Kellner, Ammern; Torsten Schröter, Apolda; Katharina Fischer, Petra Weinhold, beide Bad Gottleuba; Silke Schröder, Bad Kleinen; Maike Jorzyk, Bad Kleinen; Susanne Köhler, Markus Kostrzewa, beide Bad Liebenstein; Jens Tautenhahn, Annett Winter, Marei Hellmann, alle Bad Salzungen; Esther Goroncy, Bahrendorf; Silke Rechner, Baruth; Christian Schuhart, Benndorf; Steffen Nowak, Bergen; Sylvia Granzow, Bergwitz; Joachim Groß, Sylvia Köpstein, Sven Bienioschek, Michael Grünberg, Michael Krüger, Christian Schulze, Ulrich Krüger, Bert Andree Zucker, Dirk Grabner, Katrin Prescher, Ines Stephanowsky, Martin Gröger, Thomas Schunke, alle Berlin; Rosina Nensel, Ina Ficker, beide Bermbach; Heidrun Sourell, Bernau; Holger Schieck, Mike Groß, Elke Schubert, Bernd Förster, Heike Berger, alle Bernsbach; Gabriele Kabel, Beyernaumburg; Roland Hesse, Blankenburg; Uwe Kühne, Blankenfelde; Astrid Goetzke, Blowatz; Evelyn Schmidt, Blumberg; Marion Pöpel, Danilo Richter, beide Bockendorf; Andreas Sprigade, Jens Taggeselle, beide Borna; Marlis Schröder, Brandenburg; Detlef Conrad, Braunsbedra; Uta und Fred Heiland, Breitenbach; Gitta Fischer, Detlef Zilse, beide Bristow; Ralf Häcker, Sylvia Burgemann, beide Britz; Georg Lang, Burg-Spreewald; Torsten Friedrich, Butzow; Uwe Schütze, Camin; Wieland Stengl, Calbe; Detlef Baier, Christian Kunze, beide Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnik, Dallgow; Georg Kirchner, Dermbach; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Uta Schäfer, Dessau; Hanna Baumgarten, Beate Meinhardt, Bärbel Biendarra, Petra Bülow, Gabi Stöber, Wolfgang Moritz, Simone Marks, Beate Opfermann, Sabine Rindermann, Astrid Schunck, Ralf Meier, Beate Jung, alle Dingelstädt; Henry Jahn, Dippoldiswalde; Mario Jäpel, Dohna; Kathrin Wustmann, André Pohlers, Ingolf Baumann, Rita Lambrecht, Maja Oelschlägel, Frank Weile, Petra Kohser, Michael Rockstroh, Annett Friedemann, Stefan Franze, Grit Kammer, Olaf Schulz, Thomas Müller, Ursula Schröter, Karsten Zosel, Ronald Lehmann, Heike und Lutz Lauter, Christine Kirsch, Ute Schulze, alle Dresden; Hardy Kutzscher, Dürrenhofe; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wollert, Edderitz; Olaf Hein, Eisenach; Astrid Kafka, Katrin Schröter, Frank Stefan, alle Eisleben; Angela Wolter, Elster; Gerd Heber, Matthias Synold, beide Erfurt; Tino Heber, Falkenberg; Stefan Danz, Mirko Storch, Silvio Reinhardt, Bärbel Beder, Elke und Eckhard Petter, Marina Heller, alle Fambach; Anke Adolf, Feldberg; Steffen Müller, Feldengel; Karin Danz, Reinhardt Herrmann, beide Floh; Regine Stottmeister, Fokkendorf; Karsten Meißner, Forst; Antje Hollstein, Fred Meltke, beide Frankfurt; Olaf Drewning, Thomas Leipner, Anett Forberg, Birgit Voigtmann, alle Freiberg; Jörg Schaarschmidt, Fürstenwalde; Conny Steube, Georgenzell; Jens Franke, Gera; Bernd Brandtner, Gn. Schildau; Volker Winkler, Torsten Siebert, beide Görlitz; Kathrin und Sylke Steinke, Görzke; Marion Meyer, Goldbeck; Thomas Stoffel, Grabow; Frank Creutzburg, Gransee; Mike Pfeiffer, Marco Silz, beide Gräfenhainichen; Birgit Fiebach, Frank-Michael Wegener, Annette Herm, Achmed und Britta Schulz, Rita Döhner, Anette Peters, Thomas Schubel, Gunther Herrmann, Heiko Pegel, Martin Herrmann, Karsten Schulz, alle Greifswald; Frigga Rudloff, Ute Bräuer, Barbara Lißner, Elke Rothe, alle Greußen; Steffen Lausch, Matthias Hunger, beide Grimma; Axel Schulz, Grimmen; Kerstin Steinecke, Uta Tischer, beide Großbodungen; Bettina Weser, Großenhain; Annett Fischer, Großlöbichau; Uta Reger, Großörner; Kerstin Vinke, Gr. Zarnewitz; Kirsten Schlegel, Grünhain; Christina Otto, Güstrow; Anke Misch, Michael Schulze, beide Halberstadt; Matthias Schünemann, Frank Siebert, beide Halle; Bernd Stammler, Halle-Neustadt; Cordelia Krippner, Kerstin Frank, beide Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Anja Kusserow, Haynrode; Gerd Schmelz, Haynsburg; Carsten Klug, Hartha; Frank Pampel, Heinrichsort; Heike Spittler, Hennigsdorf; Sabine Trommler, Ingo Wickner, beide Hermannsdorf; Barbara Illek, Steffen Frigge, beide Herzberg; Axel Herbst, Hohendodeleben; Günter Dittmar, Hohenseeden; Janett Bratfisch, Uwe Rahm, beide Hohenstein-E.; Hagen Fritsch, Hosena; Julia Frankenstein, Hundeshagen; Claus Janke, Ilmenau; Matthias Katzschmann, Jena; Peter Dittmar, Kaltennordheim; Jutta Ritzke, Karbow; Jens Kosche, Ulrike Lang, Ralf Lezius, Matthias Solf, Jens Siegel, Rico Müller, Heike Faßl, Steffi Rudolph, Mathias Womacka, Petra Klemm, Frank Winzer, Frank Kutschebauch, alle Karl-Marx-Stadt; Hans-Ulrich Hahn, Karlsburg; Birgit Sandhof, Kasnevitz; Daniela Meyer, Beate Meyer, Kerstin Soschinka, Iris Niebling, Bodo Benick, Liane Hagedorn, Dagmar Heublein, Ulrike Kister, Susanne Wenig, Annette Mey, Ramona Krauß, Kerstin Schirmer, Simone Wenig, Silvia Fischer, Bärbel Keßler, Kerstin Kern, Heike Josupeit, alle Kiselbach; Anett Queck, Kathrin Geßner, beide Kirchberg; Birgit Plewe, Kleinmachnow; Gert Wendland, Kleinwolmsdorf; Susanne Strackhaar, Torsten Steinborn, Kathrin Marr, Susann Schaede, Corinna Matzdorff, Karla Behrendt, alle Klietz; Christoph Hübel, Königsee; Ines Reichert, Königs Wusterhausen; Elke Willek, Kriebitzsch; Vera Montag, Küllstedt; Olaf Schwiebus, Lauchhammer; Ralf Knott, Kerstin Urban, beide Leimbach; Carola Pfitzenreuter, Ilona Mehmert, Jürgen Bolze, Ralf Weiße, Sylvia Hahnefeld, alle Leinefelde; Heike Scherf, Elke Hoffmann, Ingrid Leithold, Uta Zießmer, alle Leisnig; Uta Hubrig, Leipzig; Stefan Hähnel, Leuna; AG Math. Wilhelm-Pieck-OS Kl. 7b, Lichte; Barbara Roitner, Linz (Österreich); Udo Eckert, Lobenstein; Ingo Göll, Ralf Schmidt, beide Lössau; Katja Rosenbohm, Löwenberg; Karl-Heinz Gohra, Lohsa;

Jenny Pelzer, Thomas Blaffert, beide Lübbars; Sabine Gerlach, Lübs; Falk Blaurock, Lübbenau; Grit Bleil, Lutz Hausdorf, beide Lugau; Peter Zienicke, Kerstin Hansen, Fritz Truthe, alle Magdeburg; Ulf Brauner, Markkleeberg; Matthias Männel, Mehltheuer; Sylvia Wessely, Ringo Dreßler, beide Meiningen; Marlies Hahnefeld, Meißen; Beate Krause, Menteroda; Dany Zeutzschel, Merseburg; Silke Leutloff, Mestlin; Jürgen Welz, Meyenburg; Karsten Schumacher, Metschow; Sven Winkler, Minkwitz; Hilmar Lorenz, Michael Simang, beide Mittelherwigsdorf; Ramona Richter, Mittelndorf; Monika Eberhard, Mühlhausen; Ina Prescher, Uwe Marinitsch, beide Neubrandenburg; Bodo Braune, Neuburxdorf; Andrea Weber, Sylke Trojovsky, beide Neukirch; Bettina Lohmann, Neundorf; Axel Weyrauch, Neumühle; Holger Alsguth, Neuseddin; Petra Hohlfeld, Christine Hoppenheit, beide Neustadt; Susanne Ziehnert, Neustrelitz; Annett Ludwig, Niederorla; Petra Barthel, Irene Hesse, Jürgen Siebert, Astrid May, Birgit Meier, Ines Birkefeld, Tobias Kaufhold, alle Niederorschel; Markus Schulz, Ndr.-Seifersdorf; Jutta Reißmann, Niesky; Bärbel Wiederhold, Kerstin Paul, beide Nordhausen; Andrea Friedrich, Nünchritz; Nils Pohler, Oberlungwitz; Gabi Kuhnke, Petra und Kerstin Köbke, alle Oranienburg; Tom Schilling, Sabine Oestreich, beide Oschersleben; Klaus Gehle, Owstin; Margit Möllhoff, Piesau; Gabriele Lanckau, Steffen Gottschlich, beide Pirna; Manuela Krause, Plauen; Petra Baldauf, Annette Ribbeck, Andreas Plötz, Simone Burmeister, Tilo Benens, alle Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Dirk Lobbes, Pritzerbe; Karl-Heinz Fandrey, Prenzlau; André Breuer, Tobias Holzapfel, beide Radebeul; Hartwig Reichel, Frank Berndt, beide Radeburg; Jörg und Carsten Stiehl, Radewege; Andreas Korb, Raschau; Frank Unger, Rackwitz; Jens Seifert, Lutz Grünig, beide Reichenbach; Kristian Lauritsen, Reichenberg; Katrin Ungethüm, Reinsdorf; Gabi Pause, Reitzenhain; Falk von Seck, Ribnitz; Heike Lüttich, Ringleben; Katrin Wischnewski, Silke Grubick, Anke Wagner, Dirk Gretzler, Kathrin Hofmann, alle Röbel; Peter Meng, Röblingen; Stefan Wolf, Jens Kellermann, beide Rohr; Ines Gülden, Roitzsch; Michaela Grob, Ute Hilse, Annette Weisheit, Sybille Cotta, alle Roßdorf; Andreas Jahnel, Frank Holle, Anette Voigt, Henry Hartmann, Peter Kirschner, alle Rostock; Claudia Lieske, Elke Miemel, Simone Voigt, alle Saalfeld; Sylvia Grunow, Sangerhausen; Karola Klitsch, Scharlibbe; Knut Drieschner, Schleiz; Holger Laube, Heike Hader, beide Schlotheim; Sybille Heuer, Gabi und Beate Rein, Birgit Nößler, Toralf Simon, Bert Ilgen, Thomas Möller, alle Schmalkalden; Simone Eisenbrandt, Schnellmannshausen; Sylke Lüder, Schönborn; Silke Meißgeier, Schönbrunn; Bernd Kirchheim, Schöndorf; Liane Pappe, Angela Böttcher, Heike Beutel, alle Schönfeld; Thomas Tiedtke, Silke Straubel, beide Schorssow; Sylvia Börner, Schwabsdorf; Thomas Pfennigschmidt, Schwerin; Jens Hoffmann, Sebnitz; Urte Tauer, Heike Nagel, beide Seegrehna; Tino Grau, Andreas Prpic, Volker Leutheuser, Thomas Vorndran, alle Sonneberg; Helfried Heubner, Stralsund; Stephan Meyerhöfer, Strasburg; Sabine Dziatzko, Corina Kaiser, Hans-Peter Fretschen, Stefan Kührt, Marion Hausdörfer, Thomas Weiner, Petra Preiß, Ines Nothnagel, Katrin Pfannschmidt, Pirka Godau, Steffi Bahner, Petra Schmidt, Gabi Knebel, Dirk Walther, Wilfried Beckmann, Iris Campesato, Frank König, alle Steinbach-Hallenberg; Ramona Löser, Stendal; Sabine Steddin, Tangerhütte; Sabine Scheller, Teltow; Thomas Hantel, Toralf Heene, beide Teterow; Uwe Weißenborn, Teutschenthal, Ellen Fleischhauer, Trebra; Heiko van Schyndel, Olaf Rude, beide Trebsen; Ines Döll, Trusetal; Falk Winter, Uhyst; Marion Vogt, Uthausen; Monika Hennicke, Vacha; Reiner Burkhardt, Voigtsdorf; Hans-Jörg Starkloff, Waltershausen; Regine Katzy, Meike Dallüge, Jana Martens, Birgit Lorenz, Astrid Iwanski, Antje Karwath, Christine Fischer, alle Waren; Jens Ackermann, Wasungen; Jens Köhler, Weida; Hartmut Boettcher, Marco Götz, Thomas und Torsten Ratz, Dorothee Gebuhr, alle Weimar; Marita Brodhun, Beatrice Gatzemeier, Martina Grünewald, Heidrun Tschirner, Guido Hausmann, Reinhard Ritter, Verena Koch, Carola Zinke, Margit Burian, alle Weißenborn; Janett Holub, Steffen Konietzky, Beate Hentschel, Antje Heuckendorf, alle Weißwasser; René Hirschfeld, Wernigerode; Mario Handke, Uwe Mauf, beide Wiehe; Petra Braumüller, Wiener Neustadt (Österreich); Cathrin Franke, Wiesenburg; Katrin Krüger, Wildau; Karin Glosse, Anett Träger, beide Wingerode; Annett Seidel, Agnes Jorzick, Gundula Lenz, alle Wismar; Doreen Badge, Guido Köhnke, Kerstin Häntschke, Petra Zander, Andreas Klappstein, Klaus Krügel, Steffen Thiel, Steffen Noack, Susanne Grubbert, Uwe Mai, alle Wittenberg; Petra Brinkmann, Ralf Lemke, Thomas Reinke, Jens Müller, Jörg Trojan, Dirk Michaelis, Bernd Frank, alle Wolgast; Frank Truckenbrodt, Wolfen; Sonja Güssow, Wollin; Christine Brandner, Helge Feldmann, beide Wüstenbrand; Gabriele Schwarzer, Wulfen; Steffan-Lutz Bölker, Wusterwitz; Viola Thomala, Wurzbach; Dietmar Polster, Zeithain; Kerstin Kommer, Zella-Mehlis; Christina Voß, Liane Soecknick, beide Zepernick; Hilmar Lorenz, Zittau; Sabine Wolfram, Zoppoten; Sabine Schmidt, Zwenkau; Jörg Steinbach, Zwickau; Susen Kraink, Weißwasser; Bettina Förster, Neukirch; Jana Klotzek, Potsdam; Tim Harrison, Margret Vinatzer, beide Schwaz (Österreich); Gabi Gold, Petra Wege, Ullrich Lauerwald, Bertin Borchert, Andrea Höppner, Betula Wiegand, Angelika Hartmann, alle Leinefelde; Petra Meißner, Neustadt; Cornelia Kopte, Callenberg

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2300 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig; Leipziger Volkszeitung.

Lösungen

Lösungen zur Aufgabe von
Prof. Dr. C. G. J. Jacobi, Heft 6/79:
Lösung der Aufgabe a)

Vorbemerkung:
Für eine Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Beispielsweise ist
$[5]=5$, $[7{,}2]=7$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-4{,}5]=-5$.
Mit dieser Bezeichnung gilt: Die Anzahl der natürlichen Zahlen bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl N, welche durch eine natürliche Zahl k teilbar sind, ist $\left[\frac{N}{k}\right]$.
Beispielsweise gibt es $\left[\frac{250}{2}\right]=125$ Zahlen zwischen 1 und 250, die durch 2 teilbar sind, $\left[\frac{250}{33}\right]=7$ Zahlen zwischen 1 und 250, die durch 33 teilbar sind.

1. Lösung:
Die Zahl 1 ist durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar. Ferner sind natürlich auch alle Primzahlen zwischen 11 und 250 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar. (Es gibt 49 Primzahlen zwischen 11 und 250.) Die einzigen zusammengesetzten Zahlen bis 250, die durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind, sind offenbar $11^2=121$, $13^2=169$, $11\cdot 13=143$, $11\cdot 17=187$, $11\cdot 19=209$, $13\cdot 17=221$, $13\cdot 19=247$.
Die gesuchte Anzahl ist somit $1+49+7=57$.

2. Lösung:
Wir bestimmen die Anzahl A der Zahlen von 1 bis 250, die durch wenigstens eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind.
Die gesuchte Anzahl ist dann $250-A$.
Es gibt $\frac{250}{2}=125$ Vielfache von 2, $\left[\frac{250}{3}\right]=83$ Vielfache von 3, $\frac{250}{5}=50$ Vielfache von 5, $\left[\frac{250}{7}\right]=35$ Vielfache von 7 zwischen 1 und 250. Darunter gibt es $\left[\frac{250}{6}\right]=41$ Vielfache von 2 und 3, $\frac{250}{10}=25$ Vielfache von 2 und 5, $\left[\frac{250}{14}\right]=17$ Vielfache von 2 und 7, $\left[\frac{250}{15}\right]=16$ Vielfache von 3 und 5, $\left[\frac{250}{21}\right]=11$ Vielfache von 3 und 7, $\left[\frac{250}{35}\right]=7$ Vielfache von 5 und 7.
Überdies gibt es $\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=8$ Zahlen, die Vielfache sowohl von 2 und 3 als auch 5 sind, ferner $\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 7}\right]=5$ Vielfache von 2, 3 und 7 und $\left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 7}\right]=3$ Vielfache von 2, 5 und 7, $\left[\frac{250}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=2$ Vielfache von 3, 5, 7 (jeweils zwischen 1 und 250). Außerdem gibt es $\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]=1$ Zahl (nämlich 210), die Vielfaches von 2, 3, 5 und 7 ist.
210 ist die einzige Zahl, die durch alle vier der gegebenen Primzahlen teilbar ist. Als Vielfaches eines Produktes aus 3 der vier Primzahlen tritt 210 insgesamt 4mal auf (210 ist Vielfaches von 2, 3 und 5, von 2, 3 und 7, von 2, 5 und 7, von 3, 5 und 7). Als Vielfaches eines Produktes aus 2 der vier Primzahlen tritt 210 insgesamt 6mal auf (210 ist Vielfaches von $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $2\cdot 7$, $3\cdot 5$, $3\cdot 7$, $5\cdot 7$). 210 tritt 4mal als Vielfaches einer der vier gegebenen Primzahlen (Vielfaches von 2, von 3, von 5 und von 7) auf.

210 darf bei der Bestimmung von A aber nur einmal gezählt werden!
Analoges gilt für die übrigen Zahlen.
Man erkennt nun: Bildet man die Summe der Anzahl der Vielfachen von einer der Primzahlen 2, 3, 5, 7, also $125+83+50+35=293$ (hierbei wird z. B. 210 4mal gezählt, $105=3\cdot 5\cdot 7$ wird 3mal gezählt, $21=3\cdot 7$ wird 2mal gezählt), subtrahiert man davon die Summe der Anzahlen der Zahlen, welche Vielfache eines Produktes aus zwei der Primzahlen 2, 3, 5, 7 sind (die Summe ist $41+25+17+16+11+7=117$) (210 wird hierbei 6mal gezählt, 105 wird 3mal gezählt, 21 wird 1mal gezählt), addiert dazu die Summe der Anzahlen der Zahlen, welche Vielfache eines Produktes aus drei der Primzahlen 2, 3, 5, 7 sind (die Summe ist $8+5+3+2=18$) (210 wird hierbei 4mal gezählt, 105 wird 1mal gezählt) und subtrahiert davon 1 (als Anzahl der Vielfachen der vier gegebenen Primzahlen) (210 wird einmal gezählt), so wird jede der Zahlen von 1 bis 250, die Vielfaches wenigstens einer der Primzahlen 2, 3, 5, 7 ist, nur einmal gezählt (210 wird $4-6+4-1=1$mal gezählt, 105 wird $3-3+1=1$mal gezählt, 21 wird $2-1=1$mal gezählt, analog die übrigen Zahlen) und man erhält A. Es ist $A=293-117+18-1=193$. Die gesuchte Anzahl ist $A-193=57$.

Lösung der Aufgabe b)

Die Lösung entspricht der 2. Lösung der Aufgabe a).
Es gibt zwischen 1 und 10000 $\left[\frac{10000}{3}\right]=3333$ Vielfache von 3, $\left[\frac{10000}{11}\right]=909$ Vielfache von 11, $\left[\frac{10000}{4001}\right]=2$ Vielfache von 4001. Darunter gibt es $\left[\frac{10000}{33}\right]=303$ Vielfache von 3 und 11.
Die Anzahl A der Zahlen von 1 bis 10000, die Vielfache wenigstens einer der Primzahlen 3, 11, 4001 sind, ist somit $A=3333+909+2-303=3941$. Die gesuchte Anzahl ist $10000-A=6059$.
Bemerkung: Es ist bekannt, daß es zwischen 1 und 10000 insgesamt 1229 Primzahlen gibt. (In dem hier benutzten Manuskript bestimmte Jacobi unter anderem diese Zahl.) Davon sind 1226 von 3, 11, 4001 verschieden. Die Zahl 1 ist nicht Vielfaches von 3, 11, 4001. $6059-1227=4832$ der Zahlen zwischen 1 und 10000, die nicht Vielfaches von 3, 11, 4001 sind, sind somit zusammengesetzte Zahlen. Es sind dies alle möglichen Produkte der von 3, 11, 4001 verschiedenen Primzahlen 2, 5, 7, 13, ..., 3989, 4003, ..., 4999, die kleiner als 10000 bleiben.

Lösung der Aufgabe c)

Vorbemerkungen:
1) Für die Potenzen eines Binoms $a+b$ gilt:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5, \text{ usw.}$$

Die Koeffizienten der Potenzprodukte von a und b heißen Binominalkoeffizienten. Ihre gesetzmäßige Bildung erkennt man aus der Anordnung im sog. Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Jede Zahl innerhalb der Randzahlen 1 steht unter der Lücke der beiden über ihr stehenden Zahlen und ist gleich deren Summe.
Setzt man für natürliche Zahlen $n\geq 1$

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} \text{ für}$$

$k=1, 2, 3, \ldots, n$ und $\binom{n}{0}=1$,

so besteht die $(n+1)$te Zeile des Pascalschen Dreiecks aus den Zahlen $1=\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}=1$.

$\left[\text{Es gilt die Symmetrie } \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.\right]$

Für die n-te Potenz des Binoms $a+b$ gilt

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

Der Spezialfall $a=1$, $b=-1$ liefert

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

oder $\left(\text{mit } -1 \text{ multipliziert und } \binom{n}{0}=1 \text{ berücksichtigt}\right)$

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}=1.$$

2) In der Kombinatorik lernt man:
Aus n verschiedenen Elementen können ohne Berücksichtigung der Reihenfolge k Stück $(1\leq k\leq n)$ auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten ausgewählt werden.
3) Es seien $a, b, c, \ldots, p$ insgesamt n voneinander verschiedene Primzahlen. Es soll das Produkt aus den n Faktoren

$$P=\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

ausmultipliziert werden.
Zunächst zwei Beispiele:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 7}$$
$$+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}$$
$$-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7},$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{4001}\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{11}-\frac{1}{4001}+\frac{1}{3\cdot 11}+\frac{1}{3\cdot 4001}$$
$$+\frac{1}{11\cdot 4001}-\frac{1}{3\cdot 11\cdot 4011}.$$

Allgemein gilt

$$P=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\ldots-\frac{1}{p}$$
$$+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\ldots+\frac{1}{ap}+\frac{1}{bc}+\ldots$$
$$+\frac{1}{bp}+\ldots-\frac{1}{abc}-\ldots-\frac{1}{abp}-\ldots+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{1}{abc\ldots p}$$

Es gibt hiervon $\binom{n}{1}=n$ Summanden mit jeweils einer Primzahl im Nenner (Vorzeichen $-$); es gibt $\binom{n}{2}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von 2 Primzahlen im Nenner (Vorzeichen $+$); es gibt $\binom{n}{3}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von 3 Primzahlen im Nenner (Vorzeichen $-$); es gibt $\binom{n}{4}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von 4 Primzahlen im Nenner (Vorzeichen $+$) usw.; es gibt $\binom{n}{k}$ Summanden mit jeweils einem Produkt von k Primzahlen im Nenner [Vorzeichen $(-1)^k$].
4) Man multipliziere jedes Glied des ausmultiplizierten Produktes P mit der gegebenen Zahl N und ersetze jeden Bruch durch die gleiche oder nächst kleinere ganze Zahl. Man erhält:

$$N-\left[\frac{N}{a}\right]-\left[\frac{N}{b}\right]-\left[\frac{N}{c}\right]-\ldots-\left[\frac{N}{p}\right]$$
$$+\left[\frac{N}{a\cdot b}\right]+\left[\frac{N}{a\cdot c}\right]+\ldots$$
$$-\left[\frac{N}{abc}\right]-\ldots+\ldots+(-1)^n\left[\frac{N}{abc\ldots p}\right].$$

Beispiele:
$N=250$, 2, 3, 5, 7

$$250-\left[\frac{250}{2}\right]-\left[\frac{250}{3}\right]-\left[\frac{250}{5}\right]-\left[\frac{250}{7}\right]$$
$$+\left[\frac{250}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot 7}\right]+\left[\frac{250}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{250}{3\cdot 7}\right]$$
$$+\left[\frac{250}{5\cdot 7}\right]-\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5}\right]-\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 7}\right]-\left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 7}\right]$$
$$-\left[\frac{250}{3\cdot 5\cdot 7}\right]+\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]=250-125-83$$
$$-50-35+41+25+17+16+11+7-8-5$$
$$-3-2+1=57$$

$N=10000$; 3, 11, 4001

$$10000-\left[\frac{10000}{3}\right]-\left[\frac{10000}{11}\right]-\left[\frac{10000}{4001}\right]$$
$$+\left[\frac{10000}{3\cdot 11}\right]+\left[\frac{10000}{3\cdot 4001}\right]+\left[\frac{10000}{11\cdot 4001}\right]$$
$$-\left[\frac{10000}{3\cdot 11\cdot 4001}\right]$$
$$=10000-3333-909-2+303+0+0-0$$
$$=6059$$

Lösung der Aufgabe c)

Man subtrahiere zuerst von N die Anzahl der Zahlen bis N, welche Vielfache von einer der gegebenen Primzahlen sind:

$N - V_1$, worin $V_1 = \left[\frac{N}{a}\right] + \left[\frac{N}{b}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{p}\right]$.

$\left(\left[\frac{N}{a}\right]\right.$ ist ja die Anzahl der Zahlen bis N, die Vielfache von a sind, $\left[\frac{N}{b}\right]$ ist die Anzahl der Zahlen bis N, die Vielfache von b sind, usw.$\left.\right)$.

In V_1 werden natürlich einige Zahlen mehrfach gezählt, beispielsweise die, die Vielfache von a und b sind. $\left(V_1 \text{ enthält } \binom{n}{1} = n \text{ Summanden.}\right)$ Jetzt werde die Anzahl der Zahlen bis N wieder addiert, welche Vielfache eines Produktes aus zwei der gegebenen Primzahlen sind: $N - V_1 + V_2$, worin

$V_2 = \left[\frac{N}{ab}\right] + \left[\frac{N}{ac}\right] + \ldots \left(V_2 \text{ enthält } \binom{n}{2} \text{ Summanden.}\right)$

Nun werde die Anzahl der Zahlen bis N wieder subtrahiert, welche Vielfache eines Produktes aus drei der gegebenen Primzahlen sind: $N - V_1 + V_2 - V_3$, worin

$V_3 = \left[\frac{N}{abc}\right] + \ldots \left(V_3 \text{ enthält } \binom{n}{3} \text{ Summanden.}\right)$

Der sich so ergebende Ausdruck wird auch auf die in den Vorbemerkungen 3) und 4) beschriebene Art erhalten!

Er ist gleich der gesuchten Anzahl derjenigen unter den Zahlen bis N, welche durch keine der Primzahlen $a, b, c, \ldots, p$ teilbar sind. (Satz von Legendre, 1808.)

In der Tat, im Ausdruck $V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots$ wird jede Zahl bis N, die durch eine oder mehrere der gegebenen Primzahlen teilbar ist, insgesamt nur einmal gezählt!

Sei nämlich h eine Zahl, welche durch genau t der gegebenen n Primzahlen $a, b, c, \ldots, p$ teilbar ist $(1 \leq t \leq n)$.

Wie oft wird h als Vielfaches eines Produktes aus s der gegebenen Primzahlen auftreten $(1 \leq s \leq t)$?

Nun, so oft wie man aus den t Primzahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge s Stück auswählen kann. Das ist (nach der Vorbemerkung 2)) auf $\binom{t}{s}$ verschiedene Arten möglich.

Somit tritt h $\binom{t}{1}$mal als Vielfaches einer der gegebenen Primzahlen auf. $\left(\text{Teilsumme } \binom{t}{1} \text{ von } V_1\right)$, tritt h $\binom{t}{2}$mal als Vielfaches zweier der gegebenen Primzahlen auf $\left(\text{Teilsumme } \binom{t}{2} \text{ von } V_2\right)$, usw. Die Zahl h wird im Ausdruck $V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots$ somit genau $\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \ldots + (-1)^t \binom{t}{2} =$ 1mal (nach Vorbemerkung 1)) gezählt.

H. Pieper

Lösung zur Aufgabe von Dr. L. Stammler:

Wir führen Bezeichnungen für einige Flächeninhalte ein:

In der Titelzeichnung im „Ringgebiet" zwischen den beiden Kreisen rot gezeichnete Flächenstücke: R,
rot waagerecht schraffierte Flächenstücke: r,
weiß gezeichnete Flächenstücke: W,
rot „melierte" Flächenstücke: w.
Symmetrische Differenz
zwischen dem inneren Kreis und dem Dreieck: F_i, zwischen dem äußeren Kreis und dem Dreieck: F_a.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$F_a + W + w = F_i + R + r$$

(Bild 2). Halbiert nun das Dreieck den Umfang des inneren Kreises, so folgt $R = W + w + r$, also

$$F_a = F_i + R + r - W - w = F_i + 2r > F_i. \qquad (1)$$

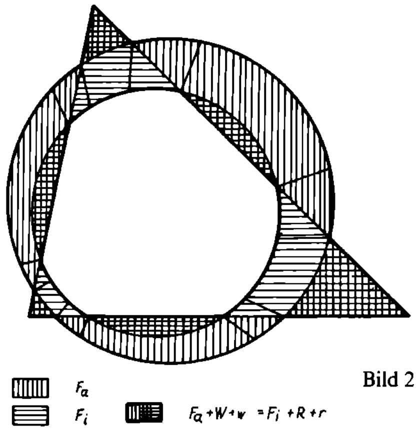


Bild 2

Halbiert aber das Dreieck den Umfang des äußeren Kreises, so folgt

$W = R + r + w$, also

$$F_i = F_a + W + w - R - r = F_a + 2w > F_a. \qquad (2)$$

Mit diesen Aussagen (1) und (2) ist der verlangte Beweis erbracht.

Lösung der Zusatzaufgabe:

Man konstruiere die Verbindungsstrecken von Z zu allen Schnittpunkten, die der Dreiecksrand mit der Kreislinie hat (Bild 3, innerer Kreis). Die außerhalb D liegenden Bögen

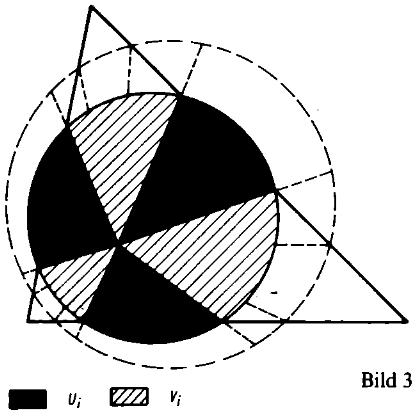


Bild 3

des Kreises schließen jeweils zusammen mit geeigneten solchen Verbindungsstrecken „sektorförmige" Flächenstücke ein. Als gesuchte Bedingung kann man nun formulieren: Die Summe U_i der Flächeninhalte dieser „sektorförmigen" Flächenstücke ist gleich dem halben Kreis-Flächeninhalt. Behauptet wird wieder: Genau dann, wenn diese „Halbierungsbedingung" erfüllt ist, liefert der Kreis den kleinstmöglichen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz.

Der Beweis kann – bei entsprechenden Bezeichnungen – genau wie in dem Fall erfolgen, daß Z der Mittelpunkt ist. Allerdings muß man, um den Nachweis zu (1) gewinnen zu können, ausführlicher begründen: Wenn der innere Kreis die „Halbierungsbedingung" erfüllt, warum folgt dann $R = W + w + r$? Dies kann etwa so geschehen: Die Differenz zwischen dem Kreis-Flächeninhalt und U_i sei V_i (Bild 3). Die „Halbierungsbedingung" besagt dann $U_i = V_i$; wegen der Streckung des inneren Kreises zum äußeren folgt hieraus $U_i + R = V_i + W + w + r$. (Beweise dies aus deinen Kenntnissen über den Flächeninhalt bei Streckungen! Daß sich diese Kenntnisse auch auf krummlinig begrenzte Flächenstücke anwenden lassen, sei wiederum ohne strengen Beweis hingenommen. Ebenso wie für die Aussage, daß jeweils genau ein Kreis die „Halbierungsbedingung" erfüllt, gehören derartiger Beweise nicht mehr ganz zum Schulstoff.) Damit hat man die Gleichung $R = W + w + r$ hergeleitet und kann nun wie oben (1) erhalten. Zum Nachweis von (2) setzt man für die entsprechend beim äußeren Kreis auftretenden Sektoren U_a die „Halbierungsbedingung" $U_a = V_a$ voraus, gewinnt wegen der Streckung $U_a - R - r - w = V_a - W$ und kann dann den Beweis wie oben beenden.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter
(S. 16/17):

Domino

Die Steine 2:2 und 3:3 sowie 5:0 und 1:5 wechseln ihre Plätze.

Geschenke verraten Namen

x sei die Zahl der Geschenke, die von einer Ehefrau gekauft werden.

y sei die Zahl der Geschenke, die von einem Ehemann gekauft werden.

Ausgangspunkt der nun einsetzenden Überlegungen ist Ziffer (1), aus der sich ergibt, daß jede Frau für ihre Geschenke x^2 Mark, jeder Ehemann für seine Geschenke y^2 Mark ausgibt.

Der Ziffer (2) kann man entnehmen, daß $x^2 - y^2 = 75$, also auch $(x-y)(x+y) = 75$ ist.

Nun gilt aber $(x-y)(x+y) = 1 \cdot 75$ oder $3 \cdot 25$ oder $5 \cdot 15$.

Es gibt also genau drei Möglichkeiten

$x - y = 1$ und $x + y = 75$;
$x - y = 3$ und $x + y = 25$;
$x - y = 5$ und $x + y = 15$.

Für sie stellen wir eine Tabelle auf:

	Ehefrau	Ehemann
Aus $x-y=1$ und $x+1=75$ ergibt sich	$x=38$	$y=37$,
aus $x-y=3$ und $x+y=25$ ergibt sich	$x=14$	$y=11$,
aus $x-y=5$ und $x+y=15$ ergibt sich	$x=10$	$y=5$.

Aus Ziffer (3) der Aufgabe können wir schließen:

Meier:	Anna 38	37 Willi	
Müller:	14	11 Hans	
Schmidt:	Luise 10	5	

Der Familienname der dritten Dame, Maria, kann also nur Müller sein.

Wie funktioniert denn das?

Wartehalle:

	R										
1	Z	W	E	I	S	T	E	L	L	I	G
2	S	E	E	M	E	I	L	E			
3	P	A	R	A	L	L	E	L			
4		S	T	I	F	E	L				
5	K	R	E	I	S	B	O	G	E	N	
6		O	K	T	A	N	T				
				O							Q

Zahlenrätsel – dreidimensional

Breitenrichtung *AB* 71; *DC* 69; *EF* 38; *HG* 10; Höhenrichtung *EA* 37; *FB* 81; *GC* 09; *HD* 16; Tiefenrichtung *AD* 76; *BC* 19; *FG* 80; *EH* 31. Die entsprechenden Zahlen unter die gegebenen Buchstaben geschrieben, ergibt das Geburts- und das Sterbedatum von Wilhelm Pieck:

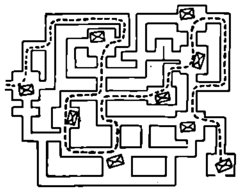
GEG HHFAD GAGCHCDG
03. 01. 1 8 7 6 07. 09. 1 9 6 0

Kryptarithmetik

a)
$$\begin{array}{rcrcr} 142 & - & 2 & = & 140 \\ - & & + & & - \\ 102 & + & 8 & = & 110 \\ \hline 40 & - & 10 & = & 30 \end{array}$$

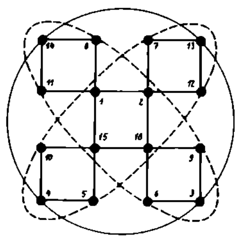
b)
$$\begin{array}{rcrcr} 1170 & - & 260 & = & 910 \\ : & & + & & - \\ 9 & \cdot & 52 & = & 468 \\ \hline 130 & + & 312 & = & 442 \end{array}$$

Der Bote und die neun Pakete



Magische Figur

Die Summe beträgt stets 34.



α-Produkte

Wegen (1) $P\alpha E = \alpha \cdot \alpha\alpha$ scheiden für α zunächst die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 6 aus, da das Produkt dreistellig ist bzw. nach Voraussetzung $\alpha \neq E$ gilt. Von den verbleibenden Ziffern 4, 7, 8 und 9 entfallen für α in (1) $P\alpha E = \alpha \cdot \alpha\alpha$ auch die Ziffern 4, 7 und 8, da nach Voraussetzung gleiche Ziffern gleiche Buchstaben bedeuten, was für $4 \cdot 44 = 176$, $7 \cdot 77 = 539$ und $8 \cdot 88 = 704$ jedoch nicht zutrifft.

Es gilt $\alpha = 9$, woraus folgt

$P=8$; $R=7$; $O=6$; $D=5$; $U=4$; $K=3$; $T=2$; $E=1$.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade) Lösungen

Olympiadeklasse 10

1. Für die genannte Zahl x gilt $\log_{12}(\log_{11} x) = 13$, also $\log_{11} x = 12^{13}$ und daher

$$x = 11^{12^{13}}.$$

Wir ermitteln von den Potenzen von 11^s ($s = 1, 2, \ldots$) jeweils die letzten beiden Ziffern:

Letzte Ziffer von 11^s	1	2	3	4	5	6
	11	21	31	41	51	61
	7	8	9	10		
	71	81	91	01	…	

Daraus folgt: Multipliziert man eine mindestens zweistellige natürliche Zahl t mit 11^{10}, so hat die entstehende Zahl dieselben letzten beiden Ziffern wie die Zahl t. Hieraus ergibt sich weiter: Hat eine natürliche Zahl u die letzte Ziffer w, so hat 11^u dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^w; denn mit einer natürlichen Zahl v ist $u = 10v + w$, also entstehe $11^u = (11^{10}) \cdot 11^w$ aus 11^w durch v-maliges Multiplizieren mit 11^{10}.

Die hier (und im vorangehenden Text) formulierte Begründung kann auch in Form einer Periodizitätsaussage bei Fortsetzung der betreffenden Tabelle ausgedrückt werden.

Wir ermitteln nun von den Potenzen 12^y ($y = 1, 2, \ldots$) jeweils die letzte Ziffer:

y	1	2	3	4	…
Letzte Ziffer von 12^y	2	4	8	6	…

Daraus folgt: Multipliziert man eine natürliche Zahl z, die die letzte Ziffer 2 hat, mit 12^4, so hat auch die entstehende Zahl die letzte Ziffer 2.

Hieraus ergibt sich weiter: Die Zahl $u = 12^{13}$ hat die letzte Ziffer $w = 2$; denn $12^{13} = (12^4)^3$. 12 entsteht aus 12 durch dreimaliges Multiplizieren mit 12^4.

Somit hat $x = 11^{12^{13}}$ dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^2, d. s. die Ziffern 2, 1 (in dieser Reihenfolge).

Bemerkungen: Die Lösungen der 106 Teilnehmer folgten, soweit sie richtig waren, dem Gedankengang des Lösungsvorschlags, vielfach unter Verwendung von Kongruenzen modulo 10. Ein häufiger Fehler war die Gleichsetzung von $11^{12^{13}}$ mit $(11^{12})^{13}$. Dennoch schien uns die Aufgabe ziemlich leicht. Die (verkürzt wiedergegebene) Lösung des Teilnehmers mit der Startnummer 154 darf – für einen Schüler der 10. Klasse – als elegant gelten:

$$11^{12^{13}} = (1+10)^{12^{13}} = 1 + \binom{12^{13}}{1} \cdot 10 + \ldots$$

Entwicklung nach dem binomischen Satz

$$\equiv 1 + 12^{13} \cdot 10 \mod 100 \text{ und – mit } 12^{13} \equiv 2 \mod 10 \text{ –}$$
$$\equiv 21 \mod 100.$$

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	6	9	9	6	5	14	57

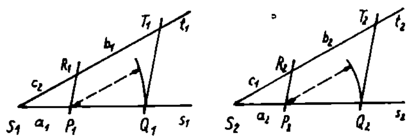
Dr. G. Schiemann,
Martin-Luther-Universität Halle

2. a) Wir gehen von den Volumen $V_1 = a_1 b_1 c_1$ und $V_2 = a_2 b_2 c_2$ der Quader aus. Offenbar ist $V_1 \lesseqgtr V_2$ gleichwertig mit

$$\frac{a_1 b_1}{c_2} \lesseqgtr \frac{a_2 b_2}{c_1}. \qquad (1)$$

Damit ist aber bereits eine einfache Lösung vorgezeichnet. Die Terme auf den beiden Seiten von (1) sind nämlich Strecken. Sie können leicht anhand der Strahlensätze konstruiert werden.

Wir wählen also als Strecken $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{P_2Q_2}$ der Länge $\frac{a_1 b_1}{c_2}$ bzw. $\frac{a_2 b_2}{c_1}$.



Konstruktionsbeschreibung: Wir wählen zwei von einem Punkt S_1 ausgehende Strahlen s_1, t_1, die nicht auf einer Geraden liegen. Entsprechend wählen wir zwei Strahlen s_2, t_2 mit gemeinsamem Scheitelpunkt S_2.

Durch Streckenabtragung konstruieren wir die Punkte $P_1 \in s_1$; R_1, $T_1 \in t_1$ und $P_2 \in s_2$;

R_2, $T_2 \in t_2$, für die $\overline{S_1P_1}=a_1$, $\overline{S_1R_1}=c_2$, $\overline{R_1T_1}=b_1$ und R_1 zwischen S_1, T_1 liegt sowie $\overline{S_2P_2}=a_2$, $\overline{S_2R_2}=c_1$, $\overline{R_2T_2}=b_2$ und R_2 zwischen S_2, T_2 liegt. Die Parallele zu P_1R_1 durch T_1 schneidet s_1 in Q_1, und die Parallele zu P_2R_2 durch T_2 schneidet s_2 in Q_2.

Beweis: Nach dem Strahlensatz ist $\overline{P_1Q_1}:a_1=b_1:c_2$ und $\overline{P_2Q_2}:a_2=b_2:c_1$. Nun gilt $\overline{P_1Q_1} \lesseqgtr \overline{P_2Q_2}$ genau dann, wenn (1) und damit $V_1 \lesseqgtr V_2$. Damit ist gezeigt, daß die oben konstruierten Strecken $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$ die Eigenschaft (*) der Aufgabenstellung besitzen.

b) Die in a) beschriebene Konstruktion führt auf $\overline{P_1Q_1}<\overline{P_2Q_2}$ (siehe Bild) und damit auf $V_1<V_2$.

Bemerkungen: Eine Hauptschwierigkeit – das zeigen die vielen Anfragen und die vorgelegten Lösungen der Schüler – bestand im Verständnis der Aufgabenstellung. Die Problemstellung war für viele ungewohnt; das ist für einen Leistungsvergleich in dieser Stufe nur begrüßenswert. Die vorliegende Formulierung jedoch verwirrte; das ist zu überdenken. Entscheidend für die Lösung der Aufgabe ist das Auffinden geeigneter Strecken $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{P_2Q_2}$.

Einige Schüler, die den naheliegenden Ansatz (1) fanden, hatten dennoch Schwierigkeiten bei seiner konstruktiven Umsetzung. Der durch (1) gegebene Ansatz ist bei weitem nicht der einzige. So können selbst die Produkte $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ der Maßzahlen der Kantenlängen als Maßzahlen der Strecken $\overline{P_1Q_1}$ bzw. $\overline{P_2Q_2}$ gewählt werden. Offenbar ist dann auch hier (*) gültig. Die Konstruktion wirft aber einige Probleme auf. Zunächst wird zur konstruktiven Darstellung von $\overline{P_1Q_1}$ aus a_1, b_1, c_1 eine Längeneinheit benötigt. (Entsprechendes gilt für $\overline{P_2Q_2}$.) Die erhaltene Strecke $\overline{P_1Q_1}$ hängt von der Wahl der Längeneinheit ab. Es ist dann zu zeigen, daß der Längenvergleich von $\overline{P_1Q_1}$ und $\overline{P_2Q_2}$ unabhängig von dieser Wahl ist. Einige Schüler haben für den Teil b) als Längeneinheit 1 cm gewählt. Diese Länge ist aber aus den konkret vorgegebenen Längen im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Ein durch räumliche Anschauung gewonnener Ansatz besteht in

$$\overline{P_1Q_1}=c_1 \text{ und } \overline{P_2Q_2}=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}\cdot c_2,$$

indem der 2. Quader in einen inhaltsgleichen Quader mit der Grundfläche des 1. Quaders umgewandelt wird und dann nur die Höhen zu vergleichen sind.

Eine Reihe von vorgelegten Ansätzen mußte zu falschen Lösungen führen, so z. B.

$\overline{P_1Q_1}=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$,
$\overline{P_2Q_2}=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

(Länge der Raumdiagonale) oder

$\overline{P_1Q_1}=\sqrt{\sqrt{a_1b_1}\cdot c_1}$, $\overline{P_2Q_2}=\sqrt{\sqrt{a_2b_2}\cdot c_2}$.

Offenbar ist bei letzterem für $a_1, b_1, c_1=1$ und a_2, $b_2=\frac{1}{10}$, $c_2=100$ einerseits $V_1=V_2$ aber andererseits $\overline{P_1Q_1}=1<\sqrt{10}=\overline{P_2Q_2}$.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	40	2	1	2	2	10	21	28

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

3.A Es sei y eine beliebige reelle Zahl. Für x gelte die Gleichung

(1) $\quad \frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=y.$

Durch Multiplikation mit a^x erhalten wir eine quadratische Gleichung in $t=a^x>0$:

$$t^2-2yt-1=0.$$

Diese hat die Lösungen

$t=y+\sqrt{y^2+1}$ und $t=y-\sqrt{y^2+1}$.

Nun ist $y-\sqrt{y^2+1}<0$ im Widerspruch zu $t=a^x>0$. Daher gilt

$$a^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

bzw. $\quad x=\log_a(y+\sqrt{y^2+1})$.

Damit ist für beliebiges reelles y ein reelles x eindeutig bestimmt, denn es ist

$\sqrt{y^2+1}>|y|\geqq -y$ und somit

$y+\sqrt{y^2+1}>0$,

so daß $\log_a(y+\sqrt{y^2+1})$ als reelle Zahl definiert ist. Diese reelle Zahl x erfüllt auch die Gleichung (1). Die Funktion $f(x)$ besitzt also eine Umkehrfunktion und dies ist

$$g(y)=\log_a(y+\sqrt{y^2+1}).$$

Bemerkungen: Diese Wahlaufgabe haben nur 9 Schüler bearbeitet, was wohl darauf zurückzuführen ist, daß der Begriff „Umkehrfunktion" vielen Schülern unbekannt war. Die Schülerlösungen stimmen in etwa mit der oben angegebenen Lösung überein. Ein Schüler kannte auch die Funktion

$$y=\sin h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

und gelangte durch den Ansatz $a^x=ex\ln a$ zu der Gleichung

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}=\frac{ex\ln a-e^{-}x\ln a}{2}$$
$$=\sin h(x\ln a).$$

Nun ist bekanntlich die Funktion

$$\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

die Umkehrfunktion von $\sin h(x)$, so daß die Umkehrfunktion von $f(x)$ lautet:

$$\frac{1}{\ln a}\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$
$$=\log_a(y+\sqrt{y^2+1}).$$

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl		1		1		1	1	5

Dr. M. Krüppel, Päd. Hochschule Liselotte Hermann, Güstrow

Die Lösungen zu den Aufgaben 3.B bis 6 folgen in Heft 2/80, d. Red.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 5/79

Ma 5 ■1881 Angela besitzt $2\cdot 350=700$, Jens $700+37=737$, Ines $2\cdot 737=1474$ Briefmarken. Zusammen sind das 2911 Briefmarken.

Ma 5 ■1882 Die anfangs erworbenen Flaschen Astoria bringen als Pfandgeld den Betrag von 9,00 M. Nun gilt $900=13\cdot 64+55$. Der Kunde hat insgesamt $30+13=43$ Flaschen Astoria erworben; ihm verbleibt der Restbetrag von 0,55 M.

Ma 5 ■1883 Thomas und Simone kauften zusammen drei Kugeln Frucht- und drei Kugeln Schokoladeneis. Aus 1,35 M : 3 = 0,45 M folgt, daß eine Kugel Fruchteis und eine Kugel Schokoladeneis zusammen 45 Pf kosteten. Aus 45 Pf − 5 Pf = 40 Pf und 40 Pf : 2 = 20 Pf folgt, daß eine Kugel Fruchteis 20 Pf, eine Kugel Schokoladeneis 25 Pf kostete. Thomas mußte 0,65 M, Simone 0,70 M bezahlen.

Ma 5 ■1884 Aus $1975=5\cdot 5\cdot 79$ und der Tatsache, daß es sich bei den Enkeln um Zwillinge handelt, folgt, daß der Urgroßvater 79 Jahre, jeder Enkel 5 Jahre alt ist.

Ma 5 ■1885 Aus $ab-c=d$ folgt $a=1$.
Aus $d+1h=bf$ folgt $b=2$.
Aus $2+21=2f$ folgt $f=3$.
Aus $12:e=2$ folgt $e=6$.
Aus $6\cdot 3=1h$ folgt $h=8$.
Aus $c\cdot 3=21$ folgt $c=7$.
Aus $12-7=d$ folgt $d=5$.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & - & 7 & = & 5 \\ : & & \cdot & & + \\ 6 & \cdot & 3 & = & 18 \\ \hline 2 & + & 21 & = & 23 \end{array}$$

Ma 5 ■1886 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Peter hat folgende Rechnung auszuführen:

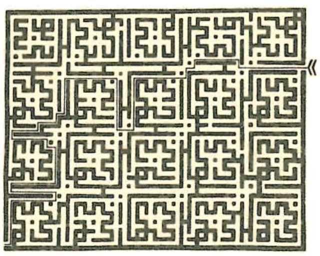
$(5\cdot a+6)\cdot 2-1+b=z,$
$10a+12-1+b=z,$
$10a+b=z-11.$

Uwe braucht vom Ergebnis z nur 11 zu subtrahieren, um die von Peter gedachte Zal $10a+b$ zu ermitteln.

Beispiel: $10a+b=97$,
$(5\cdot 9+6)\cdot 2-1+7=z,$
$51\cdot 2+6=z,$
$108=z.$
$10a+b=z-11=108-11=97.$

Lösungen zu: 1, 2, 3 – Logelei

1. $1+7+3+6+7+9+8+5+7+8=61$
2. Ja; $(16\cdot 4)+(18\cdot 2)=100$, sonst $(1\cdot 3)+(4\cdot 18)+(1\cdot 25)=100$, aber bei $25:(1\cdot 5)+(5\cdot 19)=100$.
3. Kopf 6 erfüllt die gestellten Bedingungen.
4. Es sind die Stücken 2 und 4 einzusetzen.
5.



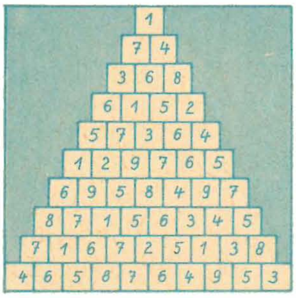
6. Bild 5 ist das zur Pyramide zugehörige Netz.

Wissen, wo

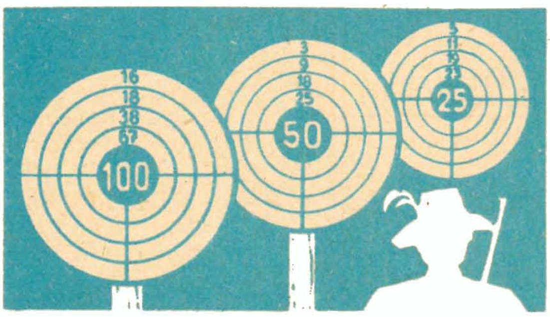
Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1979

1, 2, 3 – Logelei

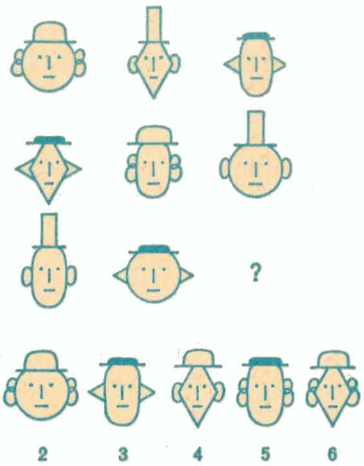
1. Auf nach 61 – und zwar durch Addition von oben nach unten – also über 10 Stationen!



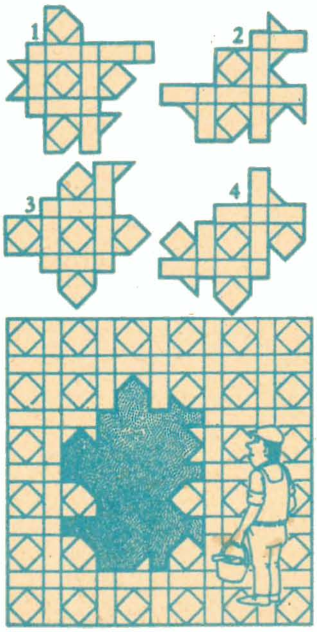
2. Mit je 6 Schuß jeweils 100 Ringe. Geht das auf allen drei Scheiben?



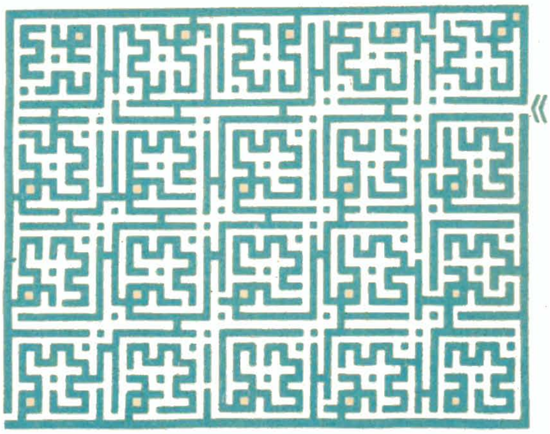
3. Welcher der sechs Köpfe ist logischerweise an Stelle des Fragezeichens einzusetzen?



4. Von den vier Fliesenstücken sind die zwei herauszufinden, welche der Fliesenleger einsetzen muß, um wieder eine vollständige Wand zu erhalten.



5. Wer findet am schnellsten den Weg durch das Labyrinth?



6. Welches der 5 Netze muß man auf den abgebildeten Körper setzen, damit eine Pyramide (mit quadratischer Grundfläche) entsteht?