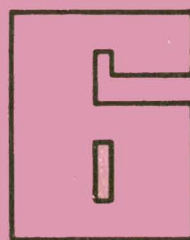
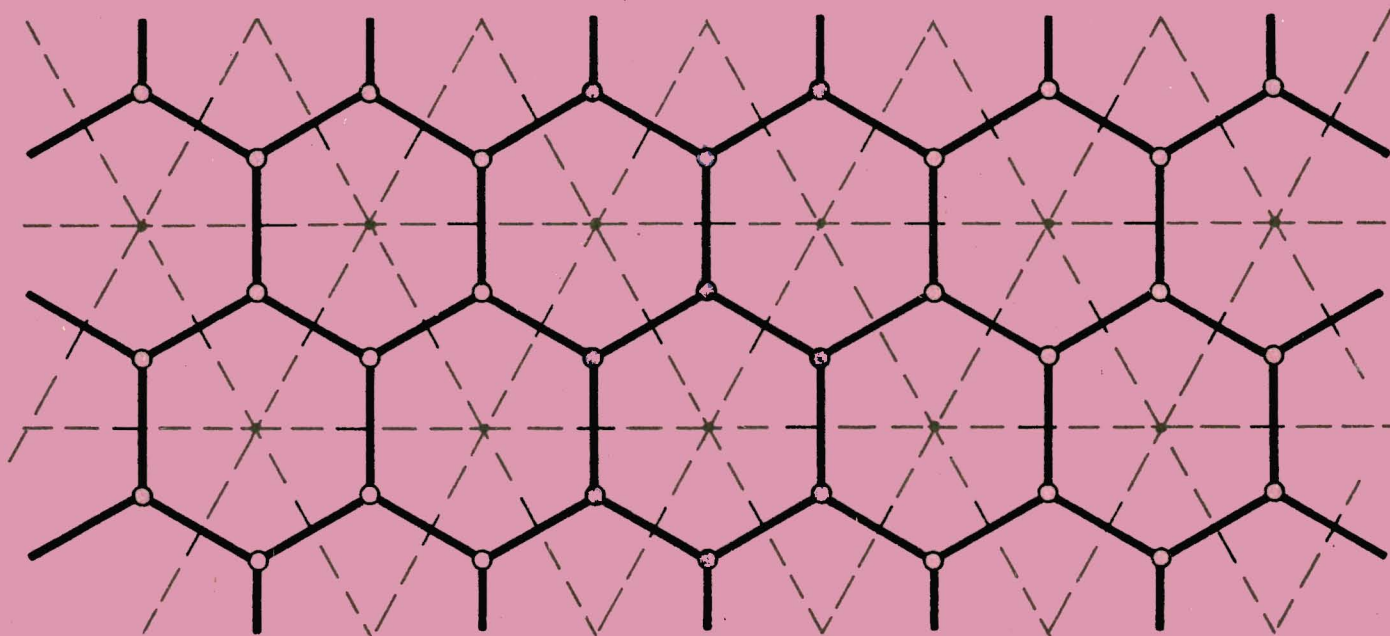
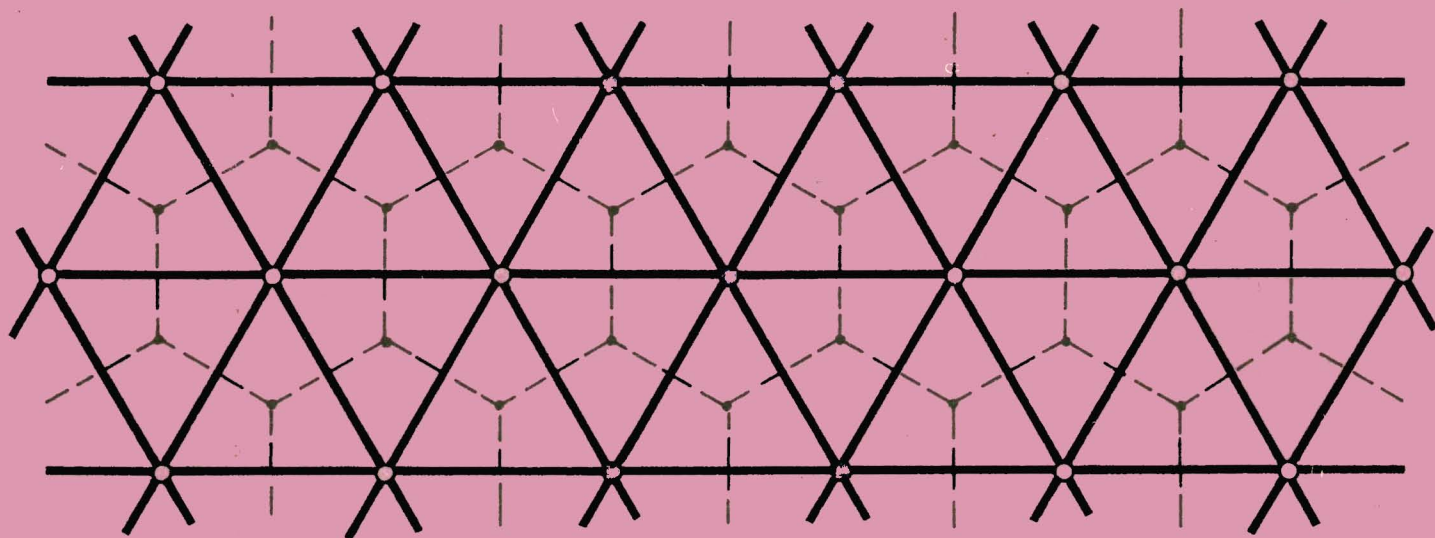


Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 125, 132); Vi-
gnette aus der finnischen math. Schülerzeit-
schrift *Functio* (S. 126); J. Weiß, Leipzig
(S. 128); ADN-Zentralbild, Berlin (S. 137)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vor-
lage von Dr. R. Klette, Universität Jena



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig - III/18/97
Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit
AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 23. August 1983

Auslieferungstermin: 15. Dezember 1983



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Polygonzüge im Raster [8]*
Dr. R. Klette, Sektion Mathematik der *Friedrich-Schiller-Universität* Jena
- 124 15 Aufgaben aus: Neun Bücher Arithmetischer Technik (aus einem
chinesischen Rechenbuch) [7]
Zusammenstellung: H. Begander/J. Lehmann, Leipzig
- 125 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Huzihiro Araki [10]
Sektion Mathematik der Universität Kyoto, Japan
- 126 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 128 V. Internationaler Mathematiker-Kongreß in Warschau [8]
J. Weiß, Lektor für Mathematik im Teubner-Verlag Leipzig
- 129 Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität,
Teil 3 [9]
Dr. A. Hemmerling, Sektion Mathematik der *E.-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald
- 130 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – speziell für Klasse 5/6
Aus der Geschichte der Längenmaße [5]
Mathematikfachlehrer U. Sonnemann, EOS Grabow, Fachberater Mathematik
- 131 Unsere historische Aufgabe: Die Erbschaft [8]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der
DDR
- 132 Der Turm von Babylon [5]
Dr. H.-D. Gronau, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität* Rostock
- 134 Schriftliche Abschlußprüfung [9]
Mathematik, Schuljahr 1982/83, Oberschule, Klasse 10
- 135 Euler und seine Zeit [7]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle
- 136 Leonhard Euler in Berlin [8]
Dipl.-Math. Annette Vogt, Institut für Theorie, Geschichte und Organisation der
Wissenschaft der Akademie der Wissenschaften der DDR
- 137 Euler-Ehrung der Akademie der Wissenschaften der DDR [7]
J. Lehmann, Leipzig
- 138 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 140 Lösungen [5]
- 144 *alpha*-Wettbewerb 1982/83 [5]
Kollektive Beteiligung

III. U.-Seite: Schach dem König (*alpha*-Wettbewerb)

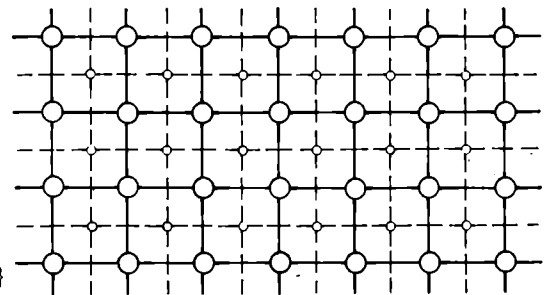
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin

IV. U.-Seite: Kreuzzahlrätsel – Elementare Funktionen [9]

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Polygonzüge im Raster



Auf dem Titelblatt dieses Heftes und im Titel dieses Beitrags sind drei verschiedene Gitter der Ebene dargestellt, welche durch jeweils einen Typ eines regelmäßigen Vielecks charakterisiert sind: das orthogonale Gitter durch das Rechteck (griechisch: Orthogon), das triagonale Gitter durch das Dreieck (griechisch: Triagon) und das hexagonale Gitter durch das Sechseck (griechisch: Hexagon). In der Titelbildzeichnung sind in den drei Gittern zu jedem Gitterpunkt die zugehörigen Flächen (Einzugsgebiete) gestrichelt dargestellt, womit insbesondere die wechselseitige Beziehung (Dualität) zwischen dem triagonalen und dem hexagonalen Raster angedeutet sei. Diese drei Gitter sind für zahlreiche Arbeitsgebiete in der Technik und Wissenschaft von Bedeutung, wie zum Beispiel als prinzipielle Anordnungsschemata beim Entwurf von mikroelektronischen Bausteinen, als Bildraster bei der Erstellung von Zeichnungen mittels Computern oder als Bildraster bei der automatischen Verarbeitung von Bildern in Computersystemen, welche mit einem speziellen Eingabegerät zur Übernahme von Bildern in den Speicher eines Computers ausgestattet sind.

Wir wollen uns in diesem Artikel der Frage zuwenden, wie Polygonzüge in diesen Gittern darzustellen und entsprechend mathematisch zu behandeln sind. Solche Polygonzüge können im konkreten Anwendungsfall gewisse Umrisse (Konturen) von Figuren (Objekten) sein, deren Abbildung im jeweiligen Gitter auszuwerten ist, indem zum Beispiel der Flächeninhalt, der Umfang oder andere Merkmale dieser Polygonzüge bestimmt werden. Vor der Behandlung der genannten Fragestellung soll jedoch zunächst bewiesen werden, daß neben den auf dem Titelbild dargestellten Gittern keine weiteren existieren, die durch je einen Typ eines regelmäßigen Vielecks charakterisiert sind.

Regelmäßige Gitter

Es seien n und m natürliche Zahlen. Ein n -Eck ist ein Vieleck mit n Ecken. Ein *regelmäßiges Gitter* besteht aus aneinandergelagerten regelmäßigen n -Ecken, wobei jeweils m solcher n -Ecke in einem Gitterpunkt zusammenstoßen. Ein solches Gitter wollen

wir mit dem Symbol $\langle n, m \rangle$ bezeichnen. Im regelmäßigen n -Eck ist ein Innenwinkel gleich $\left(1 - \frac{2}{n}\right) 180^\circ$. In jedem Gitterpunkt des Gitters $\langle n, m \rangle$ treffen m derartige Innenwinkel aufeinander und ergeben zusammen 360° . Folglich gilt

$$360 = m \left(1 - \frac{2}{n}\right) 180.$$

Durch elementare Umformungen dieser Gleichung erhalten wir zunächst

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2},$$

woraus $nm = 2n + 2m$ folgt. Folglich ist $nm - 2n - 2m + 4 = 4$ bzw. $(n-2)(m-2) = 4$. Für diese letzte Gleichung untersuchen wir nun, welche positiven und ganzzahligen Werte für n und m möglich sind. Als Ergebnis erhalten wir, daß neben $\langle 6, 3 \rangle$, $\langle 3, 6 \rangle$ und $\langle 4, 4 \rangle$ keine weiteren Lösungen für n und m , d.h. keine weiteren regelmäßigen Gitter existieren.

Raster

Bei den technischen Anwendungen regelmäßiger Gitter spricht man im allgemeinen von *Rasterungen der Ebene*. Wir wollen unter einem *Raster* ein regelmäßiges Gitter verstehen, dessen charakterisierendes n -Eck den Flächeninhalt 1 besitzt und welches den Punkt $(0, 0)$ der reellen Ebene als Gitterpunkt besitzt. Für die Punkte der reellen Ebene setzen wir dabei kartesische Koordinaten voraus. Für das orthogonale Raster erhalten wir, daß genau alle Punkte der reellen Ebene mit ganzzahligen Koordinaten die Gitterpunkte dieses Rasters sind. Die Dreiecke des triagonalen Rasters besitzen Seiten der Länge

$$\sqrt{\frac{4}{3}},$$

die Sechsecke des hexagonalen Rasters besitzen Seiten der Länge

$$\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Der Leser möge sich die Begründungen für diese konkreten Längenangaben überlegen.

Einfache Polygon im Raster

Ein *einfaches Polygon* (einfaches Vieleck) ist durch die Folge der Eckpunkte im Sinne eines einmaligen Umlaufes des Polygons eindeutig

bestimmt. Bei einfachen Polygonen in einem der drei Raster soll im weiteren vorausgesetzt werden, daß die Eckpunkte ausschließlich Gitterpunkte sind. Das folgende Polygon im orthogonalen Raster (Bild 1) ist zum Beispiel

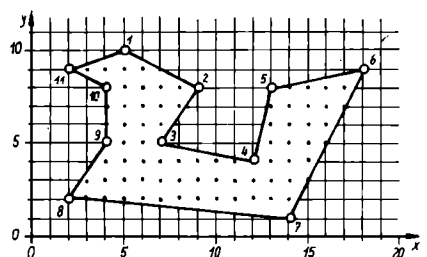


Bild 1

durch die Eckpunktfolge $(5, 10), (9, 8), (7, 5), (12, 4), (13, 8), (18, 9), (14, 1), (2, 2), (4, 5), (4, 8), (2, 9)$ eindeutig charakterisiert. Für ein einfaches Polygon mit der Eckpunktfolge $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ (in unserem Beispiel ist $n=11$), wobei $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), p_3 = (x_3, y_3), \dots, p_n = (x_n, y_n)$, ist der Flächeninhalt dieses einfachen Polygons durch den Absolutbetrag der Summe

$$(*) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1})$$

gegeben, wobei $y_0 = y_n$ und $y_{n+1} = y_1$ gelte. Für das obige Beispiel eines einfachen Polygons im Orthogonalraster ist dieser allgemeinen Gesetzmäßigkeit zufolge der Flächeninhalt gleich

$$\frac{1}{2} [5 + 45 + 28 - 36 - 65 + 126 + 98 - 8 - 24 - 16 - 4] = 74,5.$$

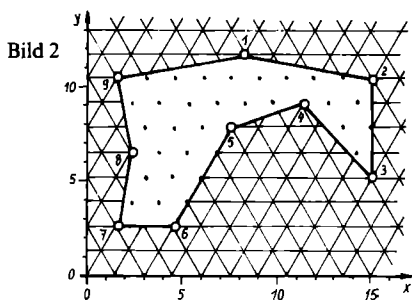
Die Flächenformel von Pick

Der Flächeninhalt eines einfachen Polygons im orthogonalen Raster ist bereits mit der

Summe $\frac{1}{2} R + I - 1$ gegeben, wobei R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons und I die Anzahl der Gitterpunkte im Innern des Polygons ist. Dieser mathematische Sachverhalt wurde bereits 1899 durch *G. Pick* erkannt und bewiesen. Für das obige Beispiel eines Polygons im orthogonalen Raster ist $R=17$ und $I=67$, mithin gilt

$\frac{1}{2} R + I - 1 = 74,5$, welches mit unserem zuvor erhaltenen Resultat übereinstimmt.

Im Falle des **triagonalen Rasters** ist der Flächeninhalt eines Polygons in diesem Raster mit der Summe $R + 2I - 2$ gegeben. Wir betrachten als Beispiel das Polygon in Bild 2.



Hier ist $R = 14$ und $I = 27$ und mithin $R + 2I - 2 = 66$. Der Flächeninhalt dieses Polygons ist natürlich auch gemäß (*) zu bestimmen. Die Dreiecke des triagonalen Rasters besitzen die Seitenlänge $a = \sqrt{\frac{4}{3}}$ und die Höhe $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Das angegebene Polygon ist somit durch die Eckpunktfolge $\left(\frac{11}{2}a, 9h\right)$,

$(10a, 8h), (10a, 4h), \left(\frac{15}{2}a, 7h\right), (5a, 6h), (3a, 2h), (a, 2h), \left(\frac{3}{2}a, 5h\right), (a, 8h)$ eindeutig bestimmt. Nach (*) ist der Flächeninhalt dieses Polygons somit gleich

$\frac{ah}{2}[0 + 50 + 10 - 15 + 25 + 12 - 3 - 9 - 4] = 66$.

Für den Fall des **hexagonalen Rasters** ist der Flächeninhalt eines Polygons in diesem Raster mit der Summe $\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}$ gegeben.

Digitalisierung von Polygonen im Raster

Bei der Eingabe von Bildern in einen Computer wird eine **Digitalisierung** (Umformung in Zahlenwerte) vorgenommen. Als Beispiel einer solchen näherungsweise Darstellung von Polygonen in einem der drei Raster wollen wir folgende **Vorschrift für eine Digitalisierung** betrachten: In einem der drei Raster sei ein einfaches Polygon anhand einer Eckpunktfolge $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ gegeben. Der Rand des Polygons besteht aus den Strecken $\overline{p_1p_2}, \overline{p_2p_3}, \dots, \overline{p_np_1}$. Für jede dieser Strecken betrachten wir die Schnittpunkte mit den Gitterlinien des Rasters. Jedem dieser Schnittpunkte wird der am nächsten liegende Gitterpunkt als **Digitalisierungspunkt** zugeordnet, falls der Schnittpunkt die Gitterlinie zwischen zwei Gitterpunkten genau halbiert, so entscheiden wir uns für jenen mit der kleineren x- oder y-Koordinate. Die während eines Umlaufes um das gegebene Polygon derart entstehenden Digitalisierungspunkte werden in der entsprechenden Reihenfolge durch Strecken verbunden, das entstehende Polygon stellt eine **digitale Näherung** des ursprüngli-

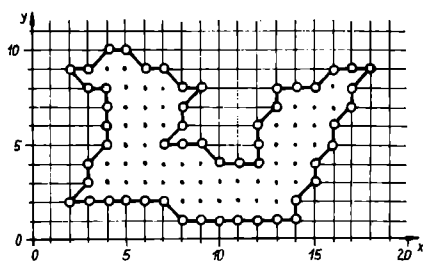


Bild 3

chen Polygons dar. So ist zum Beispiel das Polygon (Bild 3) die derart zu erhaltende digitale Näherung des oben angegebenen einfachen Polygons im orthogonalen Raster. Für diese digitale Näherung ist $R = 52$ und $I = 48$, der Flächeninhalt des erhaltenen Polygons ist somit gleich $\frac{1}{2}R + I - 1 = 73$. Die mittels der angegebenen Digitalisierungsvorschrift aus einfachen Polygonen im Raster bzw. aus Streckenzügen im Raster zu erhaltenden digitalen Näherungen wollen wir **digitale Objekte** bzw. **digitale Polygonzüge** nennen.

Nachbarschaft von Gitterpunkten

Jedem Gitterpunkt p der drei Raster ordnen wir eine **Nachbarschaft** zu, welche aus genau jenen Gitterpunkten besteht, die bei der eben beschriebenen Digitalisierungsvorschrift mit dem Punkt p unmittelbar verbunden werden können. Im orthogonalen Raster besitzt jeder Punkt $p = (i, j)$, wobei i und j ganze Zahlen sind, genau die folgenden acht Nachbarpunkte: $(i-1, j), (i-1, j-1), (i, j-1), (i+1, j-1), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1), (i-1, j+1)$. Diese Nachbarschaft von Punkten p im orthogonalen Raster können wir durch die Zeichnung (Bild 4) darstellen. Die Nachbarschaft von Punkten p im triagonalen Raster ist entsprechend durch die Zeichnung (Bild 5) zu veranschaulichen. Für Punkte p im hexagonalen Raster sind zwei verschiedene Nachbarschaften möglich, abhängig von der Lage von p

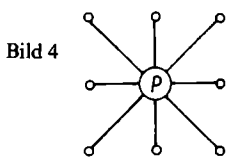


Bild 4

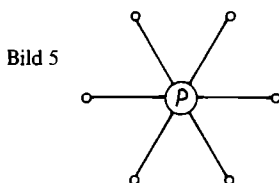


Bild 5

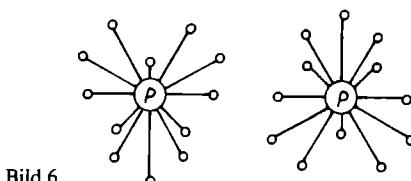


Bild 6

im Raster, welche durch die Zeichnungen (Bild 6) zu charakterisieren sind. Für den Leser sei an dieser Stelle eine Aufgabe eingefügt:

Aufgabe

Für einen Gitterpunkt p sei $N_1(p)$ die Menge aller Nachbarpunkte von p , $N_2(p)$ die Menge aller Nachbarpunkte aller Punkte aus $N_1(p)$, $N_3(p)$ die Menge aller Nachbarpunkte aller Punkte aus $N_2(p)$ usw. Es ist die Anzahl von Punkten in $N_i(p)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ für das orthogonale, triagonale und hexagonale Gitter zu bestimmen.

Eine Darstellungsmöglichkeit für digitale Polygonzüge

Im weiteren werden wir unsere Betrachtungen auf den Fall des orthogonalen Rasters beschränken. In diesem Raster besitzt jeder Gitterpunkt p genau acht Nachbarn, die bei einem digitalen Polygonzug mit dem Punkt p unmittelbar verbunden sein können. Zur Darstellung (Codierung) solcher Polygonzüge im orthogonalen Raster wird mit dem folgenden **Richtungsstern** (Bild 7) ein Vorschlag symbol-

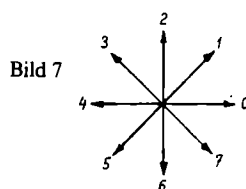


Bild 7

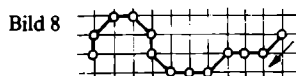


Bild 8

lisiert, wie jeder Schritt von einem Punkt p zu einem seiner acht Nachbarn durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 eindeutig zu charakterisieren (zu codieren) ist. Der folgende digitale Polygonzug (Bild 8) entspricht zum Beispiel gemäß der durch den Pfeil dargestellten Orientierung der Richtungszahlenfolge (Codefolge) 100100767012. Für eine exakte Positionierung des Polygonzuges im Raster wäre zusätzlich zu dieser Codefolge die Angabe der Koordinaten des Startpunktes erforderlich.

Offenbar entspricht eine **Drehung** (im Gegenuhrrsinn) um $n \cdot 45^\circ$ eines digitalen Polygonzuges des orthogonalen Rasters genau der Addition von n modulo 8 zu allen Codezahlen dieses Polygonzuges. Der obige digitale Polygonzug wird bei einer Drehung um 45° zum Beispiel in den Polygonzug (Bild 9) überführt.

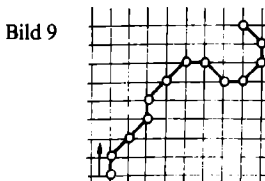
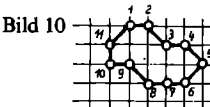
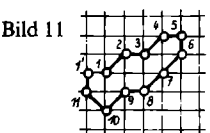


Bild 9

Dieses Resultat der Drehung um 45° entspricht der Codefolge 211211070123. Bei Drehungen um $n \cdot 45^\circ$ ist bei ungeraden $n \geq 1$ zu beachten, daß als Resultat dieser Drehungen *Verzerrungen* oder Lücken in vormals geschlossenen Polygonzügen möglich sind. So ist zum Beispiel die Länge des obigen Polygonzuges vor der Drehung um 45° gleich $7 + 5\sqrt{2}$ und nach der Drehung gleich $5 + 7\sqrt{2}$. (Der Leser kann sich an dieser Stelle überlegen, wie die Länge eines digitalen Polygonzuges unmittelbar anhand der Codefolge bestimmt werden kann.) Betrachten wir als weiteres Beispiel einer Drehung den geschlossenen digitalen Polygonzug (das digitale Objekt) in Bild 10.



Dieses digitale Objekt ist gemäß der angegebenen Numerierung der Randpunkte durch die Codefolge 07075443421 darzustellen. Bei einer Drehung um 45° erhalten wir die Codefolge 10106554532. Diese Codefolge stellt den digitalen Polygonzug (Bild 11) dar.



Der ursprünglich geschlossene Polygonzug ist bei dieser Drehung *aufgerissen*, es entsteht ein neuer Punkt 1'.

Operationen über Codefolgen

Die Drehung von digitalen Polygonzügen um Vielfache von 45° wurde soeben als erstes wichtiges Beispiel einer Operation über Codefolgen betrachtet. *Vergrößerungsoperationen* auf das m -fache sind gleichfalls für Codefolgen leicht zu beschreiben:

Falls in der Codefolge $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ mit $n \geq 1$ und $0 \leq c_i \leq 7$ für $i = 1, 2, 3, \dots, n$, eines digitalen Polygonzuges jede Codezahl c_i durch m Codezahlen c_i ersetzt wird, wobei m vorgegeben sei, so entsteht eine Codefolge eines Polygonzuges, der aus $m \cdot n$ Strecken besteht und als m -fache *Vergrößerung* des ursprünglichen Polygonzuges zu betrachten ist. Zum Beispiel ist 777666555000 die dreifache Vergrößerung des Polygonzuges 7650.

Falls ein digitaler Polygonzug in *umgekehrter Richtung* zu durchlaufen ist, d. h. anstelle von $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ ist der Polygonzug in der Reihenfolge $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0$ zu betrachten, so ist die Codefolge für diesen inversen Polygonzug aus der Codefolge $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ für den ursprünglichen Polygonzug $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ wie folgt zu berechnen:

Zunächst wird zu allen c_i mit $c_i \leq 3$ die Zahl 4 addiert, bei allen c_i mit $c_i \geq 4$ wird die Zahl 4 subtrahiert. Die entstehende Codefolge wird dann in ihrer Reihenfolge umgekehrt. Zum

Beispiel sei der kleinste *digitale Kreis* durch die Codefolge 07654321 festgelegt; die inverse Codefolge ist 56701234.

Den *Flächeninhalt* eines digitalen Objektes können wir nach der Flächenformel von Pick bestimmen, wir können auch die Summe (*) verwenden. Diese Summe (*) kann für den Fall digitaler Objekte in eine unmittelbar angepaßte Form überführt werden: Es sei ein digitales Objekt $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ gegeben, welches durch die Codefolge $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ dargestellt werde, wobei $0 \leq c_i \leq 7$ für $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Jede Codezahl c_i entspricht einem gewissen *Richtungsvektor* (a_i, b_i) , zum Beispiel ist $(a_i, b_i) = (+1, 0)$ für $c_i = 0$:

c_i	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i	+1	+1	0	-1	-1	-1	0	+1
b_i	0	+1	+1	+1	0	-1	-1	-1

Der Flächeninhalt des gegebenen digitalen Objektes ist nun gleich dem Absolutbetrag der Summe

$$(**) \quad \sum_{i=1}^n a_i \left(y_{i-1} + \frac{b_i}{2} \right),$$

wobei $y_0 = 0$ und $y_i = y_{i-1} + b_i$ gelte. Als Beispiel betrachten wir das oben zuletzt angegebene digitale Objekt 07075443421. Die Werte der a_i, b_i, y_i seien in folgender Tabelle zusammengestellt:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	-	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	0	+1
b_i	-	0	-1	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1
y_i	0	0	-1	-1	-2	-3	-3	-3	-2	-2	-1	-1

Der Formel (**) entsprechend erhalten wir somit die Summe

$$0 - \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 3 + 3 + \frac{5}{2} + 2 + 0 - \frac{1}{2} = 9,5.$$

Zur Kontrolle verwenden wir die Flächenformel von Pick. Es ist $R = 11$ und $I = 5$, mithin $\frac{1}{2}R + I - 1 = 9,5$. Die Herleitung der

Formel (**) aus (*) sei dem Leser als Aufgabe empfohlen. Dabei ist zu beachten, daß bei geschlossenen digitalen Polygonzügen (digitalen Objekten) für die Summen der a_i bzw. b_i bestimmte Gesetzmäßigkeiten erfüllt sind. Was ist zum Beispiel über die Summe $\sum_{i=1}^n a_i$ auszusagen?

Schlußbemerkungen

Die betrachtete Codierung für digitale Polygonzüge im orthogonalen Raster könnte dem Leser eine Anregung sein, entsprechende Darstellungen für digitale Polygonzüge im triagonalen oder hexagonalen Raster anzugeben und zu untersuchen. Für praktische Anwendungen besitzen diese beiden Raster jedoch einige Nachteile (z. B. geringere Übersichtlichkeit bei der Behandlung von Objekten in diesen Rastern gegenüber dem orthogonalen Raster), so daß diese Raster im konkreten Anwendungsfall nicht so häufig wie das orthogonale Raster anzutreffen sind.

R. Klette

九章算術

CHIU CHANG SUAN SHU

NEUN BÜCHER ARITHMETISCHER TECHNIK

Aufgaben aus einem chinesischen Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Han-Zeit (202 v. u. Z. bis 9 u. Z.)

Allgemeine Hinweise: Es werden nur die Regeln für die Lösung der Aufgaben angeführt, die unmittelbar zum Berechnen notwendig sind.

Da keine Einheitlichkeit im Rechnen mit den Maßeinheiten besteht, werden alle Lösungen nur mit den Maßzahlen durchgeführt. Zum besseren Verständnis ist nur in einigen Fällen die Umrechnung der Maßeinheiten angegeben.

Weiterhin besteht auch keine Einheitlichkeit in der Bezeichnung der Masse. Es werden dafür auch die Begriffe „Gewicht“ und „Menge“ gebraucht. Auch mit dem Fragewort „wieviel“ ist u. U. die Masse gemeint. Ebenso wird für die Menge 1 sowohl die Ziffer „1“ als auch der unbestimmte Artikel „ein“ gebraucht.

Folgende Maßeinheiten werden in den Aufgaben verwendet:

Längenmaße: 1 Rolle = 4 Klafter = 40 Fuß = 400 Zoll;

1 Klafter = 10 Fuß = 100 Zoll; 1 Fuß = 10 Zoll.

Flächenmaße: 1 Mou = 240 Pu (240 Quadratschritt).

Hohlmaße: 1 Tou = 10 Shêng.

Gewichtsmaße (Massemaße): 1 Pfund = 16 Unzen; 1 Hu entspricht der Masse von 2,7 Kubikfuß Hirse.

Das Ausmessen von rechteckigen Feldern

▲1▲ Jetzt hat man ein Feld; es ist $18\frac{5}{7}$ Schritt breit und $23\frac{6}{11}$ Schritt lang. Die Frage ist: Wie groß ist das Feld? (Buch I, Aufg. 24)

Die Antwort sagt: 1 Mou $200\frac{7}{11}$ Pu.

Die Regel lautet: Jeden Nenner des Bruches multipliziere mit seinem Ganzen; den Zähler des Bruches addiere dazu! Multipliziere beides miteinander; es ist der Dividend! Die Nenner der Brüche werden miteinander multipliziert; es ist der Divisor. Teile den Dividenten durch den Divisor!

Allgemeine Feldermessung

▲2▲ Jetzt hat man ein bogenförmiges Feld (Kreissegment). Die Sehne ist $78\frac{1}{2}$ Schritt, der Pfeil (Bogenhöhe) $13\frac{7}{9}$ Schritt. Die Frage ist: Wie groß ist das Feld (Buch I, Aufg. 36)

Die Antwort sagt: 2 Mou $155\frac{56}{81}$ Pu.

Die Regel lautet: Mit der Sehne multipliziere den Pfeil, den Pfeil wiederum mit sich selbst! Addiere es, und dividiere durch 2!

Regelung des Tausches von Feldfrüchten

▲3▲ Jetzt hat man 7 Tou 8 Shêng Hirse; gewünscht werden schwarze Bohnen. Frage: Wieviel erhält man? (Buch II, Aufg. 16)

Die Antwort sagt: Es sind 9 Tou $8\frac{7}{25}$ Shêng schwarze Bohnen.

Die Regel lautet: Nimm die Hirse; zum Aufsuchen der schwarzen Bohnen multipliziere es mit 63, und dividiere durch 50!

Zur Regelung des Tausches von Feldfrüchten gab es eine Liste mit Maßzahlen. Diese bestimmten die Volumeneinheiten, die man für 50 Einheiten (Grund-)Hirse bekam, z. B.:

(Grund-)Hirse	50,
geschälte Hirse	30,
grobe Grütze	54,
Hirse geschält und gekocht	75,
schwarze Bohnen	63.

Bestimmung des Einzelpreises

▲4▲ Jetzt hat man ausgegeben 720 Geldstücke zum Kauf von 1 Rolle 2 Klafter 1 Fuß Seidenstoff. Man wünscht es für ein Klafter zu berechnen. Frage: Wieviel kostet ein Klafter? (Buch II, Aufg. 35)

Auf weitere Antworten und Regeln verzichten wir aus Platzgründen. Lösungen zu allen 15 hier gestellten Aufgaben veröffentlichen wir in Heft 1/84.

Proportionale Verteilung

▲5▲ Jetzt hat man folgenden Fall: Ein Tafu, ein Pukeng, ein Tsanyao, ein Shangtsao und ein Kungshi – zusammen 5 Männer – (diese 5 Beamtenklassen sind eingestuft mit einem Wert von 5, 4, 3, 2 und 1) erlegten auf der Jagd gemeinsam 5 Hirsche. Man wünscht, daß man es rangmäßig verteilt. Frage: Wieviel erhält jeder? (Buch III, Aufg. 1)

Verteilung nach reziproken Anteilen

▲6▲ Jetzt hat man folgenden Fall: A hat bei sich 3 Shêng Hirse, B hat bei sich 3 Shêng geschälte Hirse, C hat bei sich 3 Shêng gekochte geschälte Hirse. Man wünscht, daß man es zusammenlegen und neu verteilen soll. Frage: Wieviel erhält jeder? (Buch III, Aufg. 9)

Kleinere und größere Breite

▲7▲ Jetzt hat man ein Feld mit einer Breite von 1, einem halben und $\frac{1}{3}$ Schritt. Gewünscht wird ein Feld von 1 Mou. Frage: Wie groß ist seine Länge? (Buch IV, Aufg. 2)

Kreisberechnung

▲8▲ Jetzt hat man eine Kreisfläche von $1518\frac{3}{4}$ Pou. Die Frage ist: Wie groß ist der Kreisumfang? (Buch IV, Aufg. 17)

Beurteilung der Arbeitsleistung

▲9▲ Jetzt hat man einen Damm. Die untere Breite ist 2 Klafter, die obere Breite 8 Fuß, die Höhe 4 Fuß, die Länge 12 Klafter 7 Fuß. Frage: Wie groß ist das Volumen? (Buch V, Aufg. 4)

Die Antwort sagt: 7112 Kubikfuß.

Bei einer Beschäftigung im Winter ist die Arbeitsleistung eines Mannes 444 Kubikfuß. Frage: Wie groß ist der benötigte Arbeits-trupp?

Die Antwort sagt: $16\frac{2}{111}$ Mann.

Kornhaufen

▲10▲ Jetzt hat man Hirse gespeichert auf ebener Erde. Unten ist der Umfang 12 Klafter; die Höhe ist 2 Klafter. Frage: Wie groß ist das Volumen, und wieviel Hirse ist es? (Buch V, Aufg. 23)

Gerechte Steuereinschätzung

▲11▲ Jetzt liegt die gerechte Abgabe einer Getreidesteuer vor. Der Bezirk A mit 10000 Höfen geht einen Weg von 8 Tagen, Bezirk B mit 9500 Höfen geht einen Weg von 10 Tagen, Bezirk C mit 12350 Höfen geht einen Weg von 13 Tagen, und Bezirk D mit 12200 Höfen geht einen Weg von 20 Tagen, damit jeder den Ort der Ablieferung erreicht. Alle 4 Bezirke geben als schuldige Abgabe 250000 Hu. Es sind 10000 Fuhren nötig. Gewünscht wird, daß man den Weg in Meilen – ob fern oder nah – und die Zahl der Höfe – ob viel oder wenig – nimmt und es dementsprechend ab-liefert. Frage: Wieviel ist beides, die Menge des Getreides und die Zahl der Fuhren?

Aus dem täglichen Leben

▲12▲ Jetzt hat man einen Teich; 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $\frac{1}{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in $2\frac{1}{2}$ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen 1 Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig. Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich? (Buch VI, Aufg. 26)

Überschuß und Fehlbetrag

▲13▲ Jetzt hat man gemeinsam ein Rind gekauft. Geben 7 Familien zusammen je 190 aus, dann ist der Fehlbetrag 330; geben 9 Familien zusammen je 270 aus, dann ist der Überschuß 30. Frage: Wieviel ist jedes, die Zahl der Familien und der Preis des Rindes? (Buch VII, Aufg. 4)

▲14▲ Jetzt hat man den folgenden Fall: Eine Binse wächst am 1. Tag um eine Länge von 3 Fuß; ein Riedgras wächst am 1. Tag um eine Länge von 1 Fuß. Die Binse wächst täglich die Hälfte ihres Zuwachses vom Tag zuvor, das Riedgras wuchs täglich das Doppelte seines Zuwachses vom Tag zuvor. Frage: In wieviel Tagen sind sie gleich lang, und wie groß ist die gleiche Länge? (Buch VII, Aufg. 11)

Rechteckige Tabelle

▲15▲ Jetzt hat man 5 Sperlinge und 6 Schwalben. Zusammen wog man sie. Das Gewicht aller Sperlinge war schwer, das aller Schwalben leicht. Es wurden 1 Sperling und 1 Schwalbe vertauscht, und nachdem die Waage in Ruhe war, war das Gewicht gerade gleich. Das Gesamtgewicht der Schwalben und Sperlinge war 1 Pfund. Frage: Wie groß war das Gewicht von je 1 Stück der Schwalben und der Sperlinge? (Buch VIII, Aufg. 9)

Das rechtwinklige Dreieck

▲16▲ Jetzt hat man folgenden Fall: Der Durchmesser eines Brunnens ist 5 Fuß; seine Tiefe kennt man nicht. Auf dem oberen Rand des Brunnens steht eine Stange von 5 Fuß. Der Blick von der Spitze der Stange nach dem Rand des Wassers reicht in den Durchmesser um 4 Zoll hinein. Frage: Wie groß ist die Tiefe des Brunnens? (Buch IX, Aufg. 24)
Die Antwort sagt: 5 Klafter 7 Fuß 5 Zoll.

H. Begander/J. Lehmann

(Lösungen siehe Heft 1/84, d. Red.)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Huzihiro Araki

Research Institute
for Mathematical Sciences,
Universität Kyoto, Japan

▲2378▲ Bei der üblichen Berechnung von Zahlen erfüllt das Produkt das folgende Assoziativgesetz:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Wenn man dieses für 3 Zahlen aufgestellte Gesetz auf n Zahlen anwendet, ergeben sich ähnliche Assoziativgesetze. Zum Beispiel gilt für $n=4$

$$\begin{aligned} a \cdot [b \cdot (c \cdot d)] &= a \cdot [(b \cdot c) \cdot d] \\ &= [a \cdot (b \cdot c)] \cdot d \\ &= [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d \\ &= (a \cdot b) \cdot (c \cdot d). \end{aligned}$$

Die fünf Teile dieser Gleichung entsprechen allen unterschiedlichen Möglichkeiten, um das Produkt von 5 Zahlen zu ermitteln, ohne die Reihenfolge zu verändern, und das Assoziativgesetz sagt, daß alle Teile gleich sind. Nun die Aufgabe:

Auf wieviel verschiedene Arten können wir das Produkt von n Zahlen ($n \geq 2$) unter Berücksichtigung der festgelegten Reihenfolge der Zahlen (Buchstaben) bilden? (Obige Beispiele zeigen, daß es 2 für $n=3$ und 5 für $n=4$ sind.)



Philatelistischer Mathematikunterricht

Es ist möglich, mit Hilfe der japanischen Wertzeichen dem Empfänger von Briefen mathematische Aufgaben zu stellen. Unser Foto: Multipliziere die Wertstufen waagrecht, senkrecht und diagonal. Was stellst du fest?



Herr Ing. B. Lepach, Philatelist aus Leipzig, stellte uns diese philatelistische Spielerei zur Verfügung. Sie inspirierte uns, den *alpha*-Lesern eine Aufgabe zu stellen:

Ordne die 16 japanischen Marken zu einem magischen Quadrat so, daß die Summen der Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen jeweils 18 beträgt! Mehr noch: Auch die Zahlen in den (innerhalb des 16-Felder-Quadrates bestehenden) neun 4-Felder-Quadraten sollen addiert, jeweils die Summe 18 ergeben.



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1984

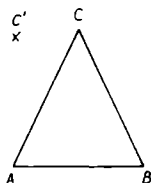


Mathematik

Ma 5 ■ 2379 Eine dreistellige natürliche Zahl z hat in der dekadischen Schreibweise die Form $z = \overline{abc}$, wobei a, b, c Grundziffern sind. Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen z zu ermitteln, für die folgendes gilt:
a) b ist der Nachfolger von a ;
b) c ist die Summe aus a und b .

Schüler Peter Brill, Schwerin

Ma 5 ■ 2380 Die Zeichnung stellt ein Dreieck ABC und einen Punkt C' dar. Es soll das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei einer Drehung um den Punkt O konstruiert werden, wobei die Strecke $\overline{OC}$ die Länge 6 cm hat. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!



Fr.

Ma 5 ■ 2381 Günter ist Gast auf der Geburtstagsfeier seines Urgroßvaters. In vorgerückter Stunde sagt der Jubilar zu seinem Urenkel: „Von meiner Geburt an bis heute sind rund 48 Millionen Minuten vergangen.“ Welches Lebensalter hat der Urgroßvater von Günter erreicht?

Schülerin Rosa Flint, Stapel

Ma 5 ■ 2382 In dem Schema

VATER
+ MUTTER
ELTERN

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Es ist wenigstens eine Lösung anzugeben.

Sch.

Ma 5 ■ 2383 In $*5 \cdot * = 3*5$ sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.

Schüler Steffen Scheithauer, Pary

Ma 5 ■ 2384 Eine Mutter fragte ihre Tochter: „Wie viele Quartiere wird deine Klasse zum Pioniertreffen bereitstellen?“ Darauf antwortet die Tochter: „Subtrahierst du von der Anzahl der erworbenen Quartiere 4, multiplizierst dann die Differenz mit 3, so erhältst du die doppelte Anzahl der von meiner Klasse bisher erworbenen Quartiere.“ Die Mutter fand schnell die Lösung. Wie viele Quartiere hatte diese Klasse bereits erworben?

Schülerin Veronika Groh, Dresden

Ma 6 ■ 2385 Es ist nachzuweisen, daß jede im dekadischen Positionssystem dargestellte vierstellige natürliche Zahl, deren erste und dritte Grundziffer und deren zweite und vierte Grundziffer übereinstimmen, weder eine Quadratzahl noch eine Primzahl sein kann!

Sch.

Ma 6 ■ 2386 Die Schüler einer 6. Klasse trugen ein Tischtennisturnier aus. Jeder Teilnehmer hatte mit jedem anderen genau zwei Spiele zu bestreiten. Insgesamt wurden an 22 Tagen jeweils 6 Spiele ausgetragen. Wie viele Schüler nahmen an diesem Tischtennisturnier teil?

Schülerin Beatrice List, Altenberg

Ma 6 ■ 2387 Unter $n!$ (lies n -Fakultät) versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. So gilt z. B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ bzw. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Es ist das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

unter Nutzung der Fakultätsschreibweise zu vereinfachen.

Sch.

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm $\times$ 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingegandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 2388 In den nachfolgenden sechs Aufgaben wurden die ersten fünf Zahlen nach einem Bildungsgesetz aufgestellt. Wie lautet jeweils die sechste Zahl? (Eine Begründung ist nicht erforderlich.)

- (1) 10, 19, 28, 37, 46, a;
- (2) 6, 8, 11, 15, 20, b;
- (3) 5, 12, 21, 32, 45, c;
- (4) 4, 10, 19, 31, 46, d;
- (5) 3, 5, 9, 17, 33, e;
- (6) 2, 3, 7, 16, 32, f.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2389 Wie kann man 50 Liter Flüssigkeit restlos in 6-Liter- und 7-Liter-Gefäße abfüllen, wenn diese Gefäße voll gefüllt werden sollen und ausreichend Gefäße vorhanden sind? Sch.

Ma 7 ■ 2390 Eine Klassenarbeit im Fach Mathematik fiel folgendermaßen aus: Einige Schüler erhielten die Note 1, 7 Schüler die Note 2, drei Schüler die Note 3, ein Schüler die Note 4, kein Schüler die Note 5. Der Durchschnitt für alle Noten lag bei 2,0. Wie viele Schüler erhielten die Note 1?

Schülerin Katrin Schiller, Görzke

Ma 7 ■ 2391 Eine Familie besteht aus sieben Personen, dem Vater, der Mutter und den Kindern Wolfgang, Helmut, Roswitha, Jürgen und Andreas. Die Mutter ist 3 Jahre jünger als der Vater. Roswitha ist 5 Jahre älter als Jürgen. Der Vater ist doppelt so alt wie Wolfgang. Die Mutter ist dreimal so alt wie Jürgen. Helmut ist 2 Jahre jünger als Wolfgang, aber doppelt so alt wie Andreas. Wie alt ist jedes einzelne Familienmitglied (in ganzen Zahlen), wenn alle zusammen 232 Jahre alt sind?

Schüler Andreas Franke, Tambach-Dietharz

Ma 7 ■ 2392 Von den vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, wurde das Produkt $2 \cdot 5$ aus der ersten und vierten und das Produkt $3 \cdot 4$ aus der zweiten und dritten Zahl gebildet. Bei einem Vergleich der Produkte erhalten wir $2 \cdot 5 < 3 \cdot 4$, denn $10 < 12$. Es ist zu untersuchen, ob diese Beziehung für vier beliebige, aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt.

Schülerin Gerke Lange, Halle

Ma 7 ■ 2393 Ein Handelsschiff ging auf große Fahrt. Als es 180 Seemeilen vom Heimat-hafen entfernt war, flog ihm ein Wasserflugzeug mit Post nach. In welcher Entfernung vom Heimat-hafen holte das Flugzeug das Handelsschiff ein, wenn die Geschwindigkeit des Flugzeugs zehnmal so groß war wie die des Schiffes?

Schüler Alexander Doll, Altentreptow

Ma 8 ■ 2394 Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 56mal so groß wie die Summe dieser Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schülerin Sabine Schubert, Machern

Ma 8 ■ 2395 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{FÜNF} \\ + \text{FÜNF} \\ \hline \text{ZEHN} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Es sind alle Lösungen anzugeben. Sch.

Ma 8 ■ 2396 Es wird behauptet, daß niemals der Rest 3 bleiben kann, wenn man die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■ 2397 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die vier Winkelhalbierenden der Innenwinkel schneiden einander in den Punkten E, F, G, H . Wie lang ist $\overline{AB}$ für den Fall, daß $\overline{GE} \cong \overline{BC}$ gilt?

Mathematikfachlehrer Kurt Georgi, Zittau

Ma 9 ■ 2398 Es ist zu beweisen, daß jedes Produkt aus fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 120 teilbar ist.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 2399 Gegeben sei eine beliebige vierstellige natürliche Zahl n , die im dekadischen Positionssystem dargestellt ist. Die Zahl n' erhält man, wenn man die Grundziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Es ist zu beweisen, daß $n + n'$ stets durch 11 teilbar ist.

Jens Grundmann,

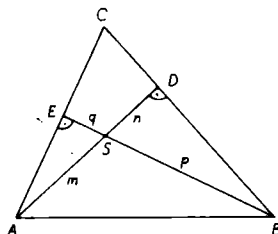
Limbach-Oberfrohna (z. Z. NVA)

Ma 9 ■ 2400 Es sind alle Lösungen der Gleichung

$$10^x + 10^{-x} = 100; \quad x \in P$$

zu ermitteln. Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ma 9 ■ 2401 Dem abgebildeten Dreieck ABC wurden die Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ eingezeichnet, die sich im Punkte S schneiden. Es seien m, n, p, q die Längen der durch den Punkt S erzeugten Höhenabschnitte $\overline{AS}, \overline{DS}, \overline{BS}, \overline{ES}$. Es ist nachzuweisen, daß das Rechteck aus den Höhenabschnitten p und q flächengleich ist dem Rechteck aus den Höhenabschnitten m und n ! Sch.



Ma 10/12 ■ 2402 Es ist die Basis x desjenigen Zahlensystems zu ermitteln, in dem die Gleichung $(111)_x \cdot (222)_x = (30142)_x$; $x > 4$ und $x \in \mathbb{N}$ eine wahre Aussage darstellt.

Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ma 10/12 ■ 2403 Es ist zu beweisen, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c und $a \neq b$ gilt

$$\frac{a^{2c} + b^{2c}}{2} > a^c b^c!$$

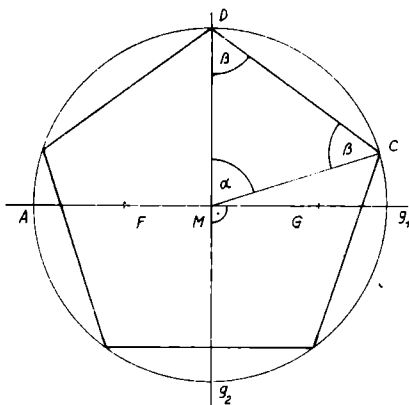
Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ma 10/12 ■ 2404 Einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 13$ cm, $b = 15$ cm und $c = 14$ cm ist ein innerer Punkt P eingezeichnet, der von $\overline{BC}$ den Abstand 3 cm und von $\overline{AB}$ den Abstand 5 cm hat. Welchen Abstand hat der Punkt P von der Seite $\overline{AC}$? Sch.

Ma 10/12 ■ 2405 Das Bild zeigt die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks, dessen Umkreisradius gegeben ist.

F ist der Mittelpunkt von $\overline{AM}$. Um F wurde ein Kreis mit einem Radius der Länge $\overline{FD}$ gezeichnet, der g_1 in G schneidet. Die Länge von $\overline{GD}$ ist die Länge der Seite des regelmäßigen Fünfecks. Diese Konstruktion ist zu beweisen.

Bauzeichnerlehrling Cornelia Zinke, Leipzig



Physik

Ph 6 ■ 146 In der folgenden Tabelle sind die Durchschnittsgeschwindigkeiten, die Haltezeiten und die Streckenabschnitte für einen Teil einer Straßenbahnlinie angegeben. Die Anfahr- und Bremszeiten bleiben unberücksichtigt.

Streckenabschnitt	Durchschnittsgeschwindigkeit
1.	24 km/h
2.	20 km/h
3.	40 km/h
4.	45 km/h
5.	30 km/h

Streckenabschnitt	Streckenlänge	Haltezeit
1.	200 m	10 s
2.	150 m	15 s
3.	400 m	20 s
4.	300 m	15 s
5.	150 m	—

Fertige ein Weg-Zeit-Diagramm an!

Ph 7 ■ 147 Frau M. hat eingekauft. Ihre Tasche hat ein Gewicht von 10 kp. Sie wohnt im 5. Stockwerk ($h=24$ m). Um dort hinaufzugelangen, benötigt sie 6 min. Frau H. hat ebenfalls eingekauft. Ihre Tasche hat ein Gewicht von 12 kp. Sie wohnt im Gegensatz zu Frau M. im 6. Stockwerk ($h=28$ m). Sie benötigt 7 min, um dort hinzukommen. Wer von den beiden Frauen hat die größere Leistung erbracht?

Diana Ammann, Weißenborn-Lüderode

Ph 8 ■ 148 Ein Ölbad hat eine Masse von 250 kg und eine Temperatur von 20°C . In ihm werden 30 Maschinenteile mit einer Masse von je 6 kg behandelt. Diese Maschinenteile haben eine Temperatur von 220°C . Berechnen Sie

(1) die theoretische Öltemperatur (ohne Wärmeverluste), wenn alle Maschinenteile gleichzeitig behandelt und vollständig in das Bad eingetaucht werden;

(2) die theoretische an das Ölbad abgegebene Wärmemenge!

Die spezifischen Wärmekapazitäten betragen: $c_{\text{Öl}} = 2,219 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$c_{\text{MT}} = 0,502 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Ing. K.-H. Milde, Dresden

Ph 9 ■ 149 Auf ein zylinderförmiges Stahlgeschloß, d. h. nur auf einer seiner Grundflächen, wirkt 1,25 ms lang ein konstanter Druck von 130 MPa. Der Durchmesser d des Geschosses beträgt 7 mm, seine Höhe 2,6 cm. Die Dichte ρ beträgt $7,8 \text{ g/cm}^3$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v !

Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ph 10/12 ■ 150 Das natürliche Antimon hat eine relative Atommasse von 121,75. Es besteht aus den Isotopen $^{121}_{51}\text{Sb}$ und $^{123}_{51}\text{Sb}$ mit den relativen Atommassen 120,9 und 122,9. Berechnen Sie den prozentualen Anteil jedes dieser Isotope im natürlichen Antimon!

Chemie

Ch 7 ■ 117 15,2 g Blei werden oxydiert. Dabei entstehen

- Blei(II)-oxid
- Blei(IV)-oxid
- Blei(II,IV)-oxid.

Berechne die Massezunahme bei allen drei chemischen Reaktionen!

Ch 8 ■ 118 a) Berechne die Masse Schwefeltrioxid in 35 g 40%iger Schwefelsäure!

b) Berechne den Prozentgehalt der Schwefelsäure an Wasserstoff, Schwefel und Sauerstoff!

Ch 9 ■ 119 Im VEB Düngemittelkombinat Piesteritz wird Kalkstickstoff (CaCN_2) aus Kalziumkarbid und Stickstoff hergestellt.

Als Nebenprodukt entsteht Kohlenstoff.

a) Berechnen Sie das Volumen Luft in Kubikmeter, welches theoretisch für die Umsetzung von 1,5 t Kalziumkarbid mit einem Gehalt

alpha in Warschau

Buchausstellung zum Internationalen Mathematikerkongreß

Wenn sich mehr als 2200 Wissenschaftler aus 64 Staaten treffen, dann spielt neben dem fachlichen Gedankenaustausch auch die Information über neue Bücher und Zeitschriften ihres Fachgebietes eine wichtige Rolle. Zum Internationalen Mathematikerkongreß, der vom 16. bis 24. August 1983 in Warschau stattfand, nutzten Verlage aus aller Welt die Gelegenheit, bewährte Standardwerke, vor allem aber ihre Neuerscheinungen den Teilnehmern vorzustellen.

Sowohl die wissenschaftlichen Vorträge und Seminare als auch die Buchausstellung fanden im repräsentativen Kulturpalast an der Marszalkowska statt. Hier wurden in 19 Sektionen Hauptvorträge, Kurzvorträge und Seminare gehalten.



Sonderstempel aus Anlaß des IMC (Außerdem wurde eine Briefmarkenserie herausgegeben, welche wir in alpha 1/84 vorstellen.)

von 87,3% CaC_2 benötigt wird, wenn die Lufttemperatur 21°C und der Druck 763 Torr betragen. (Als Abrechnungsbasis dient Luft mit 78% Stickstoff!)

b) Wieviel Tonnen Kalkstickstoff lassen sich aus der gegebenen Masse Kalziumkarbid herstellen?

Ch 10/12 ■ 120 6,8 g Natrium und 210 g Wasser werden zur Reaktion gebracht.

Berechnen Sie den Prozentgehalt der entstandenen Natriumhydroxid-Lösung!

In der vierten Etage des Kulturpalastes stellten 39 Aussteller mehr als 3000 Bücher aus, wobei es am Gemeinschaftsstand der DDR-Verlage erwartungsgemäß besonders viele Nachfragen nach aktuellen Monographien und Hochschullehrbüchern gab. Dabei zeigte sich erneut, daß vor allem die beiden Reihen: *Teubner-Texte zur Mathematik* und *Mathematische Lehrbücher und Monographien* im internationalen Vergleich Anerkennung finden.

Daß dieser von *Buchexport* Leipzig gestaltete Stand durch fachliches Niveau der ausgestellten Werke sowie durch Themenvielfalt zahlreiche Interessenten anzog, dazu trugen nicht zuletzt auch Schulbücher und populärwissenschaftliche Bücher bei, die *alpha*-Lesern inzwischen gut bekannt sind: *W. Hintze*, Der ungarische Zauberwürfel; *J. Lehmann*, Kurzweil durch Mathe; oder *E. Schröder*, Mathematik im Reich der Töne, um nur einige dieser Titel zu nennen. Komplettiert wurde unser Angebot durch Fachzeitschriften. Kongreßteilnehmer aus vielen europäischen Ländern kennen die *alpha* und äußerten sich sehr anerkennend über deren Inhalt sowie über die ideenreiche Gestaltung dieser seit 1967 regelmäßig erscheinenden Schülerzeitschrift. Zahlreiche Mathematiker, insbesondere aus Asien, Afrika und Amerika, informierten sich in Warschau erstmals über das Literaturangebot der DDR, und so war es nicht verwunderlich, daß mehrere hundert Werbeexemplare der *alpha* sehr schnell verteilt waren. Übrigens fand am Gemeinschaftsstand der polnischen Verlage die Schülerzeitschrift *delta* ebenfalls viele Interessenten.

Neben dem wissenschaftlichen Programm hatten die polnischen Gastgeber auch ein umfangreiches kulturelles Angebot vorbereitet, beispielsweise Stadtführungen, Ausflüge und Konzerte. So trafen sich am Sonntagvormittag viele Kongreßteilnehmer am Chopin-Denkmal beim Konzert der japanischen Pianistin R. Tsuruta. Zum Gelingen dieses Internationalen Mathematikerkongresses und der Buchausstellung trugen die Veranstalter in entscheidendem Maße bei. Sehr gute Organisation und langfristige Vorbereitung ermöglichten konzentrierte wissenschaftliche Arbeit und anregenden Gedankenaustausch. Die umfangreiche Bücherschau diente dabei in erster Linie der Information über Neuerscheinungen, darüber hinaus konnten aber auch zukünftige Kooperationsvorhaben verschiedener Verlage angebahnt werden, kündigten Mathematiker aus mehreren Ländern an, demnächst ihre neuesten Forschungsergebnisse in der DDR zu veröffentlichen.

Das große Interesse an der *alpha* und die Zusagen vieler Mathematiker, in den nächsten Jahren selbst Beiträge für diese populäre Schülerzeitschrift zu schreiben, sind weitere erfreuliche Ergebnisse der Warschauer Buchausstellung.

J. Weiß

Labyrinth-Probleme

eine alte Thematik mit großer Aktualität

Teil 3

5. Abschließende Bemerkungen

Es gibt keinen endlichen Automaten, der das Absuchverfahren von Trémaux oder das von Tarry auf Mustern realisiert. Das ist auch ohne den Satz von Budach klar, denn endliche Automaten können ja keine Markierungen in den Mustern vornehmen, und die Speicherkapazität ihres Steuerwerks ist beschränkt.

Ein Automatentyp, der über die Möglichkeiten verfügt, um die klassischen Absuchverfahren realisieren zu können, ist der des beschränkten Turing-Automaten (benannt nach dem englischen Mathematiker A. M. Turing, 1912 bis 1954). Der Aufbau und die Arbeitsweise sind ähnlich wie beim endlichen Automaten, nur ist der im Muster bewegliche Kopf nun ein Lese- und Schreibkopf. Das bedeutet, daß er die Zellen mit Markierungen versehen kann und auch in der Lage ist, diese wieder zu erkennen, d. h. zu lesen. Das Steuerwerk darf wiederum nur endlich vieler Zustände fähig sein, und mittels einer Überführungstabelle ist eindeutig festgelegt, wie der Automat in einem gewissen inneren Zustand auf die vorgefundene Beschriftung seines Standortes und der Nachbarzellen zu reagieren hat, d. h., welche neue Beschriftung er seiner Zelle zu geben hat und welche Bewegung und Zustandsänderung dann erfolgen muß.

Automaten dieses Typs sind in der Lage, die Verfahren von Trémaux und Tarry nachzubilden, können also alle Muster absuchen. Das kann man aber auch schon mit einem etwas spezielleren Automatentyp erreichen: Die US-amerikanischen Mathematiker M. Blum und D. Kozen zeigten 1978, daß es einen Kiesel-Automaten gibt, der alle Muster absucht, wobei er stets nur zwei Steinchen benutzt.

Unter einem Kiesel-Automaten versteht man einen endlichen Automaten mit der zusätzlichen Fähigkeit, Zellen eines Musters dadurch zu markieren, daß er „Steinchen“ (Kiesel) darauf ablegt. Natürlich soll er die schon auf der betrachteten Zelle liegenden Kiesel auch sehen können. Außerdem soll möglich sein, abgelegte Kiesel später wieder aufzunehmen und eventuell an einer anderen Stelle des Musters erneut abzulegen.

Die Benutzung von Kieselsteinen zur Wegmarkie-

rung ist jedem Kind aus dem Märchen „Hänsel und Gretel“ geläufig. Hänsel markiert den zurückgelegten Weg durch Kieselsteine, um später wieder aus dem Wald zum Hause der Eltern zurückzufinden. Das ist nichts anderes als die alte Idee des Ariadnefadens. Schwieriger wird es aber, wenn man versucht, mit einer beschränkten Anzahl von Kieselsteinen auszukommen.

Unter Verwendung nur eines Kieselsteins können alle einfach zusammenhängenden Muster so abgesucht werden, daß das Verfahren stets stoppt. Der entsprechende Kiesel-Automat arbeitet zunächst nach dem Verfahren von Döpp, markiert aber die Randzelle des Musters, bei der er mit dem Abfahren des Randes beginnt (Zyklusbeginn), mit seinem Kiesel. Trifft er nun beim Abfahren des Randes zum zweiten Mal auf diese Stelle, so ist das Muster einmal umfahren, und der Automat kann stoppen.

Sofort stellt sich die Frage, ob alle Muster schon mit nur einem Steinchen absuchbar sind. Die Antwort lautet „nein“, wie F. Hoffmann, ein Mitarbeiter von Prof. Budach, 1981 durch Weiterentwicklung der Budachschen Beweismethode zeigen konnte.

Bei der Erläuterung des Döppschen Verfahrens ist schon angeklungen, daß besonders die Löcher (Binnenseen) in den Mustern das Absuchen erschweren. H. Müller zeigte 1979, daß man zu jedem endlichen Automaten sogar ein Muster mit nur zwei Löchern konstruieren kann, das der Automat nicht absucht. Es ist noch unbekannt, ob es stets ein solches Muster mit nur einem Loch gibt.

Obwohl wir nur einige Beispiele aus der Fülle von Resultaten und noch ungelösten Problemen behandelt haben, müssen wir unsere Wanderung durch die (Theorie der) Labyrinth nun abbrechen.

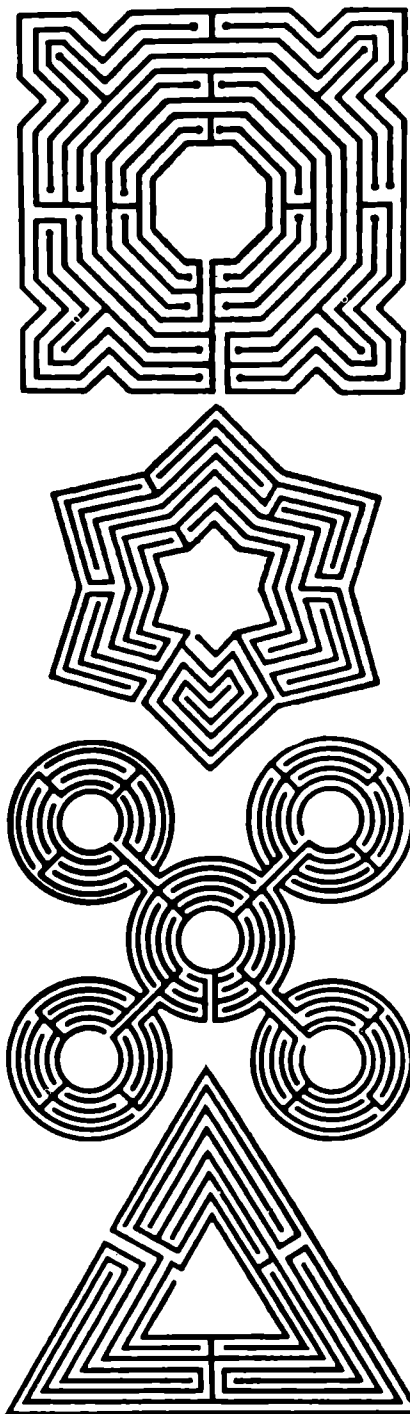
Ausgehend von Legenden, die früheste Epochen der Menschheit berühren, gelangten wir zu Problemstellungen der abstrakten Automatentheorie. Nicht der Reiz des Geheimnisvollen, Sagenumwobenen ist der Hauptgrund für das zunehmende wissenschaftliche Interesse an unserer Thematik, sondern ihre Bedeutung für das mathematische Verständnis der automatischen Informationsverarbeitung. Innerhalb der DDR hat sich besonders die von Prof. Budach geleitete Forschungsgruppe

den Labyrinth-Problemen verschrieben, aber auch die von Prof. Asser geleitete Greifswalder Forschungsgruppe beschäftigt sich damit. Und trotz des Interesses und der fleißigen Arbeit vieler Mathematiker kann so manche Frage heute noch nicht beantwortet werden.

A. Hemmerling

Für sehr nützliche Diskussionen zu Inhalt und Form des Labyrinth-Beitrages möchte der Autor seinen Greifswalder Kollegen Dr. P. Schreiber und Dr. W. Schleinitz sowie dem Chefredakteur der *alpha* herzlich danken.

Irrgärten aus dem 16. Jahrhundert





Aus der Geschichte der Längenmaße

In der Mitte des 19. Jahrhunderts, also vor über 100 Jahren, wurden in verschiedenen deutschen Einzelstaaten noch unterschiedliche Längenmaße verwendet. Das zeigt folgende Übersicht, in der diese Maße in heutige Einheiten umgerechnet wurden:

	1 Zoll	1 Fuß	1 Elle	1 Rute	1 Meile
Baden	3,0 cm	30 cm	60 cm	3,00 m	8,88 km
Bayern	2,4 cm	29 cm	83 cm	2,92 m	7,42 km
Preußen	2,6 cm	31 cm	67 cm	3,77 m	7,50 km
Sachsen	2,4 cm	28 cm	57 cm	4,30 m	9,06 km
Württemberg	2,9 cm	29 cm	61 cm	2,85 m	7,45 km

Aufgaben

- ▲ 1 ▲ Zeichne je einen Nagel mit der Länge von 3 Zoll, der
- in Baden,
 - in Preußen,
 - in Sachsen angefertigt wurde!
- ▲ 2 ▲ Welches Seil war am längsten?
- Ein Seil mit der Länge von 25 Ellen aus Bayern oder
 - ein Seil mit der Länge von 30 Ellen aus Preußen oder
 - ein Seil mit der Länge von 35 Ellen aus Sachsen.
- ▲ 3 ▲ Mit welcher Länge wurde ein Balken von 12 Fuß von Zimmerleuten
- in Baden,
 - in Bayern,
 - in Preußen,
 - in Sachsen angefertigt, gemessen in unseren heutigen Längeneinheiten?
- ▲ 4 ▲ Auf einem Ballen wurde Stoff mit einer Länge von 49,80 m aufgewickelt. Welche Länge würde man messen
- mit einer Elle aus Baden,
 - mit einer Elle aus Bayern?
- ▲ 5 ▲ Welche Länge hat ein Seil von 20 Ellen nach unseren heutigen Längenmaßen
- mindestens,
 - höchstens,
- wenn es bei einem Händler aus Baden, Bayern oder Preußen gekauft wurde?

▲ 6 ▲ Wieviel Quadratmeter Flächeninhalt hatte ein rechteckiges Feld der Länge 50 Ruten und der Breite 20 Ruten

- in Baden,
- in Sachsen?

▲ 7 ▲ Auf einem Wegweiser in Potsdam stand: bis Meissen 30 Meilen. Auf dem entgegengesetzten Wegweiser in Meissen stand jedoch: bis Potsdam 25 Meilen.

Wie kamen diese unterschiedlichen Entfernungsangaben zustande? Beachte, Potsdam gehörte zu Preußen, Meissen dagegen zu Sachsen! Rechne die angegebenen Entfernungen in Kilometer um!

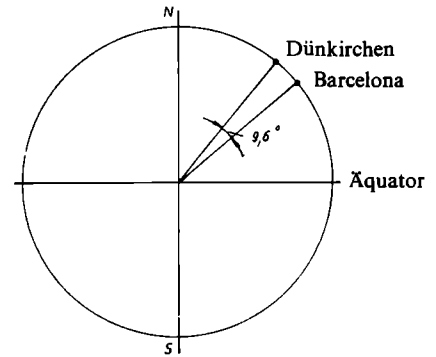
Die Angaben in dieser Tabelle sind gerundet. Es bestanden zum Teil erhebliche regionale Unterschiede. Die Tabelle wurde dem folgenden Buch entnommen: Erna Padelt, *Menschen messen Zeit und Raum*, VEB Verlag Technik, Berlin 1971, S. 72.

▲ 8 ▲ Überlege, welche Probleme die unterschiedlichen Längenmaße mit sich brachten! Warum forderte das Bürgertum einheitliche Maße?

Die Aufgaben zeigen deutlich, daß die unterschiedlichen Längenmaße unnötige Schwierigkeiten für Handel und Verkehr mit sich brachten. In den verschiedenen Ländern Europas wurde deshalb im 19. Jahrhundert wiederholt gefordert, einheitliche Längenmaße einzuführen. Die erforderlichen Voraussetzungen dazu wurden in Frankreich nach der Französischen Revolution geschaffen. Auf Vorschlag einer Kommission von Wissenschaftlern wählte man den vierzigmillionsten Teil des Erdumfanges als Längeneinheit und nannte diese Länge ein „Meter“. Eine genaue Bestimmung des Erdumfanges war hierfür notwendig. Die erforderlichen Vermessungsarbeiten erfolgten zwischen Dünkirchen an der französischen Nordküste und Barcelona an der spanischen Nordostküste. Das sind zwei Orte, die auf dem gleichen Längengrad liegen. Die Differenz der geographischen Breite der beiden Orte beträgt ungefähr $9,6^\circ$. Für ihre Entfernung ergaben die Vermessungsarbeiten rund 547 279 Toise, in der damals in Frankreich üblichen Maßeinheit.

Für den Erdumfang u_E ergab sich hieraus

$$u_E = \frac{547279 \text{ Toise} \cdot 360^\circ}{9,6^\circ} = 20522962 \text{ Toise.}$$



Der vierzigmillionste Teil hiervon, also ein Meter, ist 0,513074 Toise. Umgekehrt beträgt 1 Toise ungefähr 1,95 m. Damit war es möglich, die Länge von einem Meter als Maßstab anzugeben. Im Juni 1799 waren die Arbeiten beendet. Dem französischen Staatsarchiv wurde eine Verkörperung des Meters in Form eines Metallstabes übergeben, auf dem durch zwei Striche die Länge des Meters festgelegt war. Man nennt diesen Stab das *Urmeter*.

Das neue Maßsystem auf der Grundlage des Meters setzte sich in vielen Ländern jedoch nur langsam durch. Nach der Gründung des Deutschen Reiches wurde das metrische System erst ab 1. Januar 1872 für den ganzen Staat verbindlich. Nach dem 1. Januar 1876 durften in Deutschland keine alten Maße mehr im Handel und im Verkehr benutzt werden.

Aufgaben

▲ 9 ▲ Aus dem Mathematikunterricht sind folgende Umrechnungen der Längenmaße bekannt:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm.}$$

Auf welche Schwierigkeiten stößt man, wenn man in ähnlicher Weise Meilen in Ruten, Ruten in Ellen, Ellen in Fuß und Fuß in Zoll umrechnen will? Worin liegen die Vorteile des Maßsystems auf der Grundlage des Meters?

▲ 10 ▲ Der Umfang der Erde wurde ursprünglich mit 40 000 000 m festgelegt.

- Rechne um in Kilometer!
- Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung vom Pol bis zum Äquator?
- Die Entfernung vom Pol zum Äquator entspricht der geographischen Breite von 90° . Welche Entfernung, gemessen auf einem Längengrad, gehört ungefähr zur Änderung der geographischen Breite um 1° ?
- Wieviel Kilometer beträgt ungefähr die zu $9,6^\circ$ gehörende Entfernung der Orte Dünkirchen und Barcelona?
- In der Seefahrt nutzt man als weitere Unterteilung eines Winkels von 1° als nächstkleinere Einheit eine Sekunde und verwendet das Zeichen $1'$. Ein Winkel der Größe $1'$ hat den

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 6/1981 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■ 2158 Ermittle alle zweistelligen Primzahlen mit der Quersumme 7, die zu geraden natürlichen Zahlen werden, wenn man ihre Ziffern vertauscht.

sechzigsten Teil der Größe des Winkels von 1° . Es gilt also $1^\circ = 60'$.

Welche Entfernung, gemessen auf einem Längskreis, gehört zur Änderung der geographischen Breite um $1'$?

Vergleiche diesen Wert mit der in der Seefahrt verwendeten Längeneinheit von einer Seemeile, $1 \text{ sm} = 1,852 \text{ km}$!

Nachdem bessere und genauere Verfahren zur Bestimmung des Erdumfangs entwickelt wurden, stellte man fest, daß das Urmeter nicht genau der vierzigmillionste Teil des Erdumfangs war. Da sich außerdem auch die Länge des als Urmeter verwendeten Metallstabs durch Temperaturschwankungen und Alterung geringfügig ändern kann, war man weiterhin auf der Suche nach einem zuverlässigen Naturmaß als Grundmaß unseres Maßsystems. Als solches verwendet man seit 1960 die Wellenlänge des orangefarbenen Lichtes des Edelgases Krypton 86 und legte fest:

„Das Meter ist gleich $1650763,73$ Vakuumwellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus $2p_{10}$ und $5d_5$ des Atoms Krypton 86 entspricht.“

Durch diese Festlegung gelang es, das Meter wesentlich genauer zu bestimmen als durch ein körperliches Urmeter.

Abschließend empfehlen wir folgendes Buch zur Geschichte der Längenmaße, das für Schüler geschrieben wurde, sehr interessant ist und in jeder Bibliothek ausgeliehen werden kann.

Erna Padel: Mit dem Meßrad um die Welt, Kinderbuchverlag, Berlin 1975, Regenbogenreihe.

U. Sonnemann

In Heft 3/82 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z = 10a + b$ mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$. Da wir durch Vertauschen der Ziffern a und b eine gerade natürliche Zahl erhalten, muß a gerade sein. Wegen $q = a + b = 7$ muß $a < 8$ gelten. Für $a = 2$ gilt $b = 5$; die Zahl 25 ist aber keine Primzahl. Für $a = 4$ gilt $b = 3$, also $z = 43$. Für $a = 6$ gilt $b = 1$, also $z = 61$. Die gesuchten Primzahlen lauten 43 und 61.

Wir stellen nun die Lösung von Ulrike Ziemendorf aus Mühlhausen vor, die Schülerin der Klasse 6a der Karl-Liebknecht-Oberschule ist:

Da die Quersumme 7 eine ungerade Zahl ist, muß beim Zerlegen der Zahl 7 in zwei Summanden der eine Summand eine gerade, der andere Summand eine ungerade Zahl sein. Da wir nach dem Vertauschen der Grundziffern eine gerade Zahl erhalten sollen, muß die erste Grundziffer einer geraden, die zweite Grundziffer einer ungeraden Zahl entsprechen. Deshalb sind nur die Zahlen 61, 43, 25 möglich. Von diesen drei Zahlen sind nur die Zahlen 43 und 61 Primzahlen.

Wir stellen nun die Lösung von Katrin Neumann aus Klosterfelde vor, die Schülerin der Klasse 6 der Ernst-Thälmann-Oberschule ist: Da alle zweistelligen Primzahlen ungerade Zahlen sind und deren Quersumme jeweils 7 betragen soll, muß die letzte Grundziffer 1 oder 3 oder 5 sein. Wegen $a + b = 7$ gilt deshalb 61 oder 43 oder 25. Die Zahl 25 stellt keine Lösung dar; denn 25 ist keine Primzahl. Es existieren zwei Lösungen, nämlich 43 und 61. Die Zahlen 34 und 16 sind gerade Zahlen.

Wir stellen nun die Lösung von Matthias Winkler aus Cossebaude vor, der Schüler der Klasse 6a der Hans-Grundig-Oberschule ist: An der ersten Stelle der zweistelligen Primzahlen muß die Ziffer 2, 4, 6 oder 8 stehen; denn sonst würden wir beim Vertauschen der beiden Grundziffern keine gerade Zahl erhalten. Die gesuchten Zahlen können nicht größer als 70 sein, sonst wäre ihre Quersumme größer als 7. Deshalb sind nur die Primzahlen 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67 zu untersuchen. Nur die Zahlen 43 und 61 haben die Quersumme 7. Dies sind die gesuchten Zahlen.

Wir stellen nun die Lösung von Heike Deumeland aus Langenweddingen vor, die Schülerin der Klasse 6 der Juri-Gagarin-Oberschule ist: Die zweistelligen Zahlen, deren Quersumme 7 beträgt, lauten 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70. Die Zahlen 16, 34, 52, 70 sind durch 2 teilbar, also keine Primzahlen. Die Zahl 25 ist durch 5 teilbar, also auch keine Primzahl. Die Zahlen 43 und 61 sind Lösungen.

J. Lehmann/Th. Scholl



Die Erbschaft

Leonhard Euler hat in seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (1770) zahlreiche Aufgaben aufgenommen, die sich schon in alten Rechenbüchern befanden. Meist handelt es sich um andere Zahlenwerte. Euler hat stets den ausführlichen Lösungsweg beschrieben, während in den Rechenbüchern oft nur Lösungsrezepte angegeben wurden. Im I. Abschnitt des 2. Teils von Eulers „Algebra“ befindet sich unter Nr. 42 die folgende Aufgabe:

„Ein Vater hinterläßt einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder in folgender Art unter sich teilen. Das erste nimmt 100 Taler und dazu noch den 10. Teil des übrigen. Das zweite nimmt 200 Taler und dazu den 10. Teil des übrigen. Das dritte nimmt 300 Taler und dazu den 10. Teil des übrigen. Das vierte nimmt 400 Taler und dazu den 10. Teil des übrigen. Hierauf stellt sich heraus, daß das ganze Vermögen unter den Kindern gleich verteilt worden ist. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wieviel Kinder der Vater hinterlassen und wieviel jedes bekommen?“

Im Rechenbuch des byzantinischen Mönches Maximos Planudes (13. Jh.) lautet die Aufgabe: „Ein sterbender Vater rief seine Söhne, ließ auch zugleich die Geldschachtel mitbringen und verteilte das Geld mit folgenden Worten: Ich will meinen Söhnen gleichmäßig mein Geld zuteilen; der erste soll ein Geldstück und $\frac{1}{7}$ des Restes erhalten, der zweite 2 und $\frac{1}{7}$ des Restes, der dritte 3 und $\frac{1}{7}$ des Restes.

Mitten in diesen Worten starb der Vater und war weder mit den Söhnen noch mit dem Gelde zu Ende gekommen. Ich will nun wissen, wie viele Söhne es waren und wieviel Geld?“

Ähnliche Aufgaben behandelten auch Leonardo Fibonacci (13. Jh.), Nicolas Chuquet (15. Jh.), Michael Stifel (16. Jh.) und andere.

H. Pieper

Der Turm von Babylon

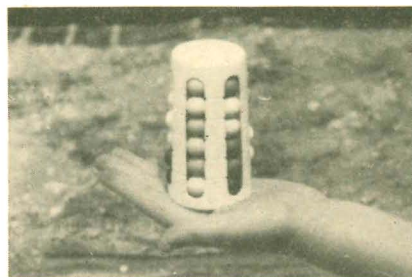


Bild 1

Mit dem *Turm von Babylon* stellen wir ein weiteres logisch-kombinatorisches Spiel vor, das, wie der Zauberwürfel, aus Ungarn stammt. In einem Zylinder sind 36 farbige Kugeln in 6 Säulen zu je 6 Kugeln angeordnet (siehe Bild 1). In der Ausgangsposition sind die Kugeln innerhalb der Säulen von der gleichen Farbe, doch von unterschiedlicher Intensität, z. B. besteht eine Säule aus roten Kugeln; unten kräftig rot, nach oben heller werdend und oben rosa. Man kann nun jede der 6 Scheiben drehen und ferner eine Kugel zum Verschwinden bringen (eine auf einem von 2 markierten Plätzen der unteren Schicht befindliche Kugel kann in den Turm gedrückt und dort durch Schieben einer anderen Kugel auf den nun freien Platz festgehalten werden). Unter Ausnutzung dieses freien Platzes, den man durch Drehen von Scheiben und Schieben von Kugeln innerhalb der Säule, die den freien Platz gerade hat, auf jeden beliebigen Platz bringen kann, kann der Turm umgeordnet werden. Zum Schluß wird die versteckte Kugel wieder hervorgeholt. Man kann das Verschwinden mit verschiedenen Kugeln wiederholen. Auf diese Weise wird der Turm zu einem bunten „Durcheinander“. Die Aufgabe ist nun, den Turm wieder zu restaurieren, d. h., ihn wieder in die ursprüngliche Situation zu versetzen.

Die 36 Kugeln lassen theoretisch $36!$ Anordnungen zu. Es ist bemerkenswert, daß man hier tatsächlich alle Anordnungen nur durch zulässige Operationen (wie beschrieben) erreichen kann; im Gegensatz zu *Rubiks Cube* und der *magischen Pyramide*, siehe z. B. *alpha* 1/83.

Sehen wir Anordnungen als gleich an, wenn sie durch Drehung des gesamten Turmes entstehen, so gibt es

$$35! = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 1,033 \cdot 10^{40}$$

Möglichkeiten.

Die Anzahl ist also wesentlich größer als beim *Rubiks Cube* ($\approx 4,3 \cdot 10^{19}$). Um diese Riesenzahl begreifbar zu machen, ist folgender Vergleich vielleicht nützlich. Würde man für jede Anordnung einen Turm haben, so würde man damit eine Kugel füllen können, die einen Radius hat, der zehnmal größer ist als die Entfernung Erde-Sonne.

Trotzdem ist es viel leichter, den *Turm von Babylon* zu bezwingen als etwa *Rubiks Cube*!

Wie wir sehen werden, ist es hier recht einfach möglich, 3 beliebige (benachbarte) Kugeln zu tauschen, wobei alle anderen Kugeln unverändert bleiben. Solche Operationen sind bei den anderen magischen Spielen in der Regel recht kompliziert und schwer aufzufinden.

Es gibt auch vereinfachte Versionen des Turmes von Babylon, z. B. das *Varikon* mit 5 Säulen (Bild 2). Hierbei befinden sich in jeder Säule 5 gleichgefärbte Kugeln (keine Intensitätsunterschiede).

Übrigens sind diese Spiele (Turm von Babylon, Varikon, usw.) gewisse Verallgemeinerungen des bekannten Fünfehner-Spiels. Wir wollen jetzt auf das Ordnen des Turmes von Babylon eingehen. Wir werden 4 Operationen beschreiben, die bereits völlig ausreichen, um den Turm zu ordnen. Natürlich kann man sich weitere Operationen überlegen, die sogar ein schnelleres Erreichen des Zieles erlauben. Wer aber schon etwas mit dem Turm zu tun gehabt hat, der wird sicher bemerkt haben, daß man bereits durch intuitive Züge, also ohne einen vorgegebenen Algorithmus, recht weit kommen kann. Etwas schwierig wird es dann in der Regel nur für die letzte Scheibe oder für die letzten 6 Kugeln.

Die 6 Scheiben werden wir von oben nach unten mit *A, B, C, D, E* und *F* bezeichnen. Drehen wir die Scheibe *X* und alle darunter liegenden Scheiben um 60° nach rechts, so bezeichnen wir diese Operation auch mit *X*. Analog bedeutet X^2 eine Drehung um 120° nach rechts, ... und $X^5 = X^{-1}$ eine Drehung der beschriebenen Scheiben um 60° nach links. Alle Scheiben oberhalb von *X* bleiben in ihrer Ausgangsstellung.

Verschiebungen innerhalb der Säulen sind natürlich nur mit dem freien Feld möglich. Wird der Turm hingestellt oder senkrecht gehalten, so wandert der freie Platz automatisch in die Scheibe *A*. Wir werden deshalb die Operationen immer in dieser Stellung beginnen und beenden.

$\bar{X}$ bedeute, daß das freie Feld in die Scheibe *X* wandert, d. h., die Kugel dieser Säule in der Scheibe *X* und alle darüberliegenden Kugeln werden jeweils um eine Scheibe nach oben geschoben. Schließlich bedeute ein $\bar{\cdot}$, daß das freie Feld wieder in die Schicht *A* wandern soll. Das wird einfach dadurch erreicht, daß

der Turm senkrecht gehalten wird und keine Kugeln dieser Säule berührt werden.

Um darzustellen, was Operationen bewirken, denken wir uns den Turm hinten „aufgeschnitten“ und „nach vorne geklappt“.

Zum Beispiel bewirkt

$$\bar{D}D;$$

folgendes, wenn der freie Platz in der vorderen linken Säule (und natürlich in der Schicht *A*) war (Bild 2):

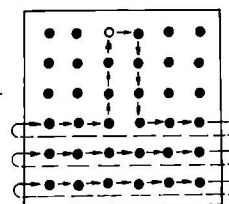


Bild 2

Eine wichtige Operation ist (Bild 3)

$$O_1(D, C) = \bar{D}D; \bar{C}C^{-1}; CD^{-1};$$

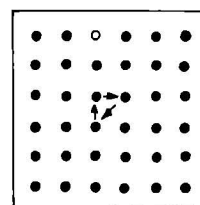


Bild 3

Analog definieren wir $O_1(C, B)$, $O_1(E, D)$ und $O_1(F, E)$.

Ähnlich finden wir die Operation (Bild 4)

$$O_2 = \bar{B}B; B^{-1};$$

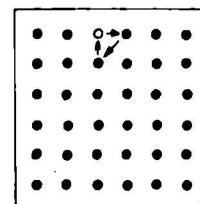


Bild 4

Mittels O_1 und O_2 können wir jede Kugel von jedem Platz zu jedem anderen bringen. Zweckmäßigerweise beginnen wir mit der Scheibe *F*, dann *E* usw. Eventuell muß zwischenzeitlich auch die verschwundene Kugel gewechselt werden. Mit etwas Übung wird es keine Probleme machen, die Scheiben *C* bis *F* zu ordnen.

Wenden wir uns nun den Schichten *A* und *B* zu.

Ausgehend von O_2 betrachten wir die Operation (Bild 5)

$$O_2(n) = \bar{B}B^n; B^{-n} \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5);$$

Hiermit gelingt es auch, die Scheibe *B* zu ordnen. Ist eine Kugel *K* aus der Schicht *A* an einen Platz *P* in der Schicht *B* zu trans-

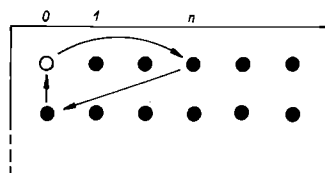


Bild 5

portieren, so dreht man die Scheibe A (nur diese!) so, daß das freie Feld über P steht und wendet dann $O_2(n)$ mit geeignetem n an!

Ist eine Kugel K aus der Schicht B an einen Platz P aus der Schicht B zu transportieren, so dreht man die Scheibe A so, daß das freie Feld über K steht, wendet (z. B.) O_2 an und hat die vorher diskutierte Situation. Man beachte, daß alle anderen Kugeln der Schichten B bis F unverändert bleiben!

Schließlich ordnen wir noch die Schicht A . Wir halten den Turm jetzt vor einer Operation immer so, daß das freie Feld links oben (in unserem Schema) ist.

Wir wollen eine Kugel K , die sich in der m -ten Säule rechts vom freien Feld befindet, um n Säulen nach rechts transportieren.

Dazu ist folgende Operation geeignet (Bild 6).

$$O_3(m, n) = (\overline{BB}^m; B^{-m})(\overline{BB}^n; B^{-n})$$

$$(B^{m+n}\overline{BB}^{-m-n}; (B^{-m}\overline{BB}^m);$$

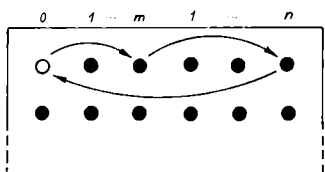


Bild 6

Man bringt nun die Kugeln von rechts in der Schicht A in Ordnung. (Man beachte, daß nach jeder Operation der Turm in der Hand gedreht werden muß, um das freie Feld wieder links zu haben! Richtig platzierte Kugeln bleiben natürlich richtig.)

Mittels O_3 lassen sich in der Schicht A alle Kugeln und das freie Feld auf ihre Plätze bringen, es sei denn, es bleibt eine einfache Paarvertauschung Kugel-freies Feld übrig. Dann nehme man (Bild 7)

$$O_4 = ((\overline{BB}^{-2}; B^2)(\overline{BB}; B^{-1})(B^{-1}\overline{BB};$$

$$(B^2\overline{BB}^{-2};))^2 B;$$

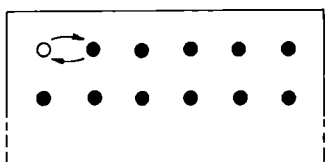


Bild 7

Es gibt Fälle, in denen eine einmalige Anwendung nicht direkt zum Ziel führt. Will man z. B. (Bild 8)

erreichen, so kann man $O_3(1, 1) \cdot O_3(1, 4)$ oder auch O_4^2 wählen.

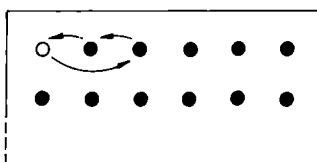


Bild 8

Durch Anwendung von $\overline{F}$ erscheint die versteckte Kugel wieder, und wir sind fertig.

Wir hatten hier nicht das Ziel, alle Fälle möglichst kurz zu bewältigen, sondern wollten Anregungen zur Beschäftigung mit dem Turm von Babylon geben und eine mögliche Lösungsvariante vorstellen. Auch kann man sich

andere Aufgaben stellen. So kann man die Kugeln derart ordnen, daß die Kugeln einer Schicht die gleiche Farbe haben, oder man gibt sich irgendwelche farbige Muster vor.

H.-D. Gronau

Dauerkalender für die Jahre 1801 bis 2000

		Jahre						Monate											
		1801–1900			1901–2000			J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
01	29	57	85		25	53	81	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
02	30	58	86		26	54	82	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
03	31	59	87		27	55	83	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
04	32	60	88		28	56	84	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
05	33	61	89	01	29	57	85	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
06	34	62	90	02	30	58	86	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
07	35	63	91	03	31	59	87	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
08	36	64	92	04	32	60	88	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
09	37	65	93	05	33	61	89	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
10	38	66	94	06	34	62	90	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
11	39	67	95	07	35	63	91	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
12	40	68	96	08	36	64	92	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
13	41	69	97	09	37	65	93	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
14	42	70	98	10	38	66	94	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
15	43	71	99	11	39	67	95	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
16	44	72		12	40	68	96	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
17	45	73		13	41	69	97	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
18	46	74		14	42	70	98	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
19	47	75		15	43	71	99	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
20	48	76		16	44	72	00	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
21	49	77	00	17	45	73		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
22	50	78		18	46	74		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
23	51	79		19	47	75		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
24	52	80		20	48	76		4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
25	53	81		21	49	77		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
26	54	82		22	50	78		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
27	55	83		23	51	79		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
28	56	84		24	52	80		2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

Wochentage

S	1	8	15	22	29	36
M	2	9	16	23	30	37
D	3	10	17	24	31	
M	4	11	18	25	32	
D	5	12	19	26	33	
F	6	13	20	27	34	
S	7	14	21	28	35	

Beispiel: Auf welchen Wochentag fiel der 7. Oktober 1949?

Lösung: Man gehe von der Jahrestafel aus und suche für das Jahr 1949 in der Monatstafel unter Oktober die zugehörige Monatskennzahl (6); zuzüglich der Zahl des gesuchten Wochentages (7) ergibt sich die Schlüsselzahl (6 + 7 = 13), für die man in der Wochentagstafel den Freitag als den gesuchten Wochentag findet.

Schriftliche Abschlußprüfung

Mathematik, Schuljahr 1982/83
Oberschule, Klasse 10

Pflichtaufgaben

1. a) Im Jahre 1980 wurden in der DDR 98,8 Mrd. kWh Elektroenergie erzeugt. 1985 sollen 13,0% mehr Elektroenergie erzeugt werden als 1980.

– Berechnen Sie diese Steigerung!

(Angabe in Milliarden Kilowattstunden!)

– Wieviel Elektroenergie soll 1985 insgesamt erzeugt werden?

b) 1980 wurden von den insgesamt erzeugten 98,8 Mrd. kWh Elektroenergie 77,2 Mrd. kWh aus Rohbraunkohle gewonnen.

– Wieviel Prozent der Elektroenergie wurden aus Rohbraunkohle erzeugt?

– Stellen Sie diesen Anteil in einem Kreisdiagramm dar! (Schraffieren Sie den entsprechenden Sektor!)

2. Gegeben ist die Ungleichung

$$15 - 3x > 5(x - 1)$$

($x \in P$).

a) Lösen Sie diese Ungleichung!

(Probe wird nicht verlangt.)

b) Geben Sie von den Zahlen

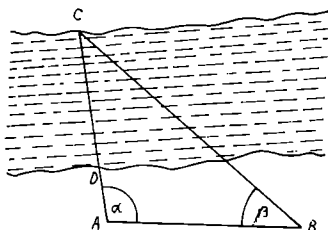
$$-4; 2,5; \frac{27}{10}; 0,05$$

diejenigen an, die diese Ungleichung erfüllen!

c) Die Ungleichung hat die Lösungsmenge L , die Menge der natürlichen Zahlen sei N . Geben Sie alle Elemente des Durchschnitts der Mengen L und N an!

3. Eine Pionierkompanie der NVA erhielt den Befehl, über einen Fluß einen Übergang vom Punkt D zum Punkt C zu schaffen (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



Durch Messung wurden ermittelt:

$$\overline{AB} = c = 85 \text{ m} \quad \angle ABC = \beta = 28^\circ$$

$$\angle CAB = \alpha = 106^\circ \quad \overline{AD} = d = 12 \text{ m}$$

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab! Tragen Sie den Punkt D ein, und ermitteln Sie die Länge des

Flußüberganges $\overline{DC}$ mit Hilfe der Konstruktion!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\angle BCA = \gamma$!

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC} = b$!

Berechnen Sie die Länge des Flußüberganges $\overline{DC}$!

4. Durch die Gleichung

$$y = x^2 - 5x + \frac{9}{4} \quad (x \in P)$$

ist eine Funktion gegeben.

a) Vervollständigen Sie die zu dieser Funktion gehörende Wertetabelle

x	0	5
y		

b) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

c) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!

d) Zeichnen Sie diese Parabel mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 5$!

5. Vermindert man das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl um 1, so ist diese Differenz stets durch 4 teilbar.

a) Wählen Sie eine ungerade Zahl, und zeigen Sie, daß die Aussage für diese Zahl gültig ist!

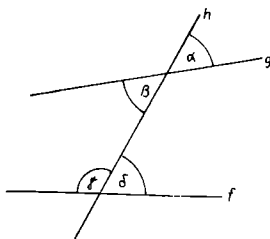
b) Geben Sie unter Verwendung der Variablen n ($n \in \mathbb{N}$) eine allgemeine Darstellung einer ungeraden natürlichen Zahl an!

c) Beweisen Sie, daß obenstehende Aussage für jede ungerade natürliche Zahl gültig ist!

6. a) Berechnen Sie $\sqrt{1,44 \cdot 10^4}$!

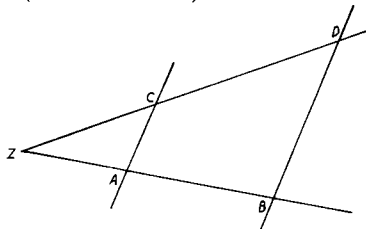
b) Ermitteln Sie $\sin 118^\circ$ und $\cos 118^\circ$!

c) – Welche der Winkel α , β , γ und δ (siehe Skizze) bilden ein Paar von Wechselwinkeln?



– Geben Sie eine Bedingung dafür an, daß Wechselwinkel kongruent zueinander sind!

Skizze (nicht maßstäblich)



Gegeben sind:

$$\overline{ZA} = 3 \text{ cm}$$

$$\overline{ZB} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{ZC} = 5 \text{ cm}$$

d) Berechnen Sie die Länge von $\overline{ZD}$!

Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. Eine Feldbaubrigade erntete mit 6 Kartoffelvollerntemaschinen gleichen Typs in 40 Stunden ein 48 ha großes Feld ab.

a) Insgesamt wurden dabei 9600 dt Kartoffeln geerntet. Berechnen Sie den Ertrag pro Hektar!

b) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von einer Maschine in einer Stunde abgeerntet wurde!

c) Welche Zeit hätte man beim Einsatz von 8 solcher Maschinen gebraucht?

d) In welcher Gesamtzeit hätte dieses Feld abgeerntet werden können, wenn man nach einem 15stündigen Einsatz dieser 8 Maschinen noch 2 solcher Maschinen zusätzlich eingesetzt hätte?

7.2. Ein gerader Kreiszylinder mit der Höhe h und dem Durchmesser d stehe auf seiner Grundfläche. Auf seiner Deckfläche sei eine Halbkugel mit dem gleichen Durchmesser aufgesetzt.

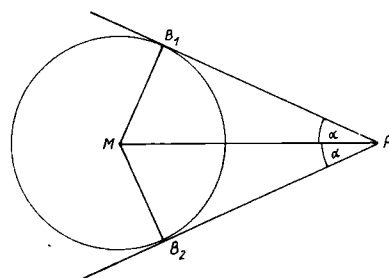
a) Zeichnen Sie den Aufriß eines solchen zusammengesetzten Körpers für $d = h = 4,4 \text{ cm}$!

b) Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers für $d = h = 4,4 \text{ cm}$!

c) Bei einem anderen so zusammengesetzten Körper soll das Volumen des Zylinders genau so groß wie das der Halbkugel sein. Berechnen Sie die Höhe dieses Zylinders für $d = 4,4 \text{ cm}$!

7.3. Von einem Punkt P , der außerhalb eines Kreises um den Punkt M liegt, sind die Tangenten an diesen Kreis gezeichnet. Sie berühren den Kreis in den Punkten B_1 bzw. B_2 (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



$$\overline{MB_1} = \overline{MB_2} = r = 4,0 \text{ cm}$$

$$\angle B_2PB_1 = 2\alpha = 50^\circ$$

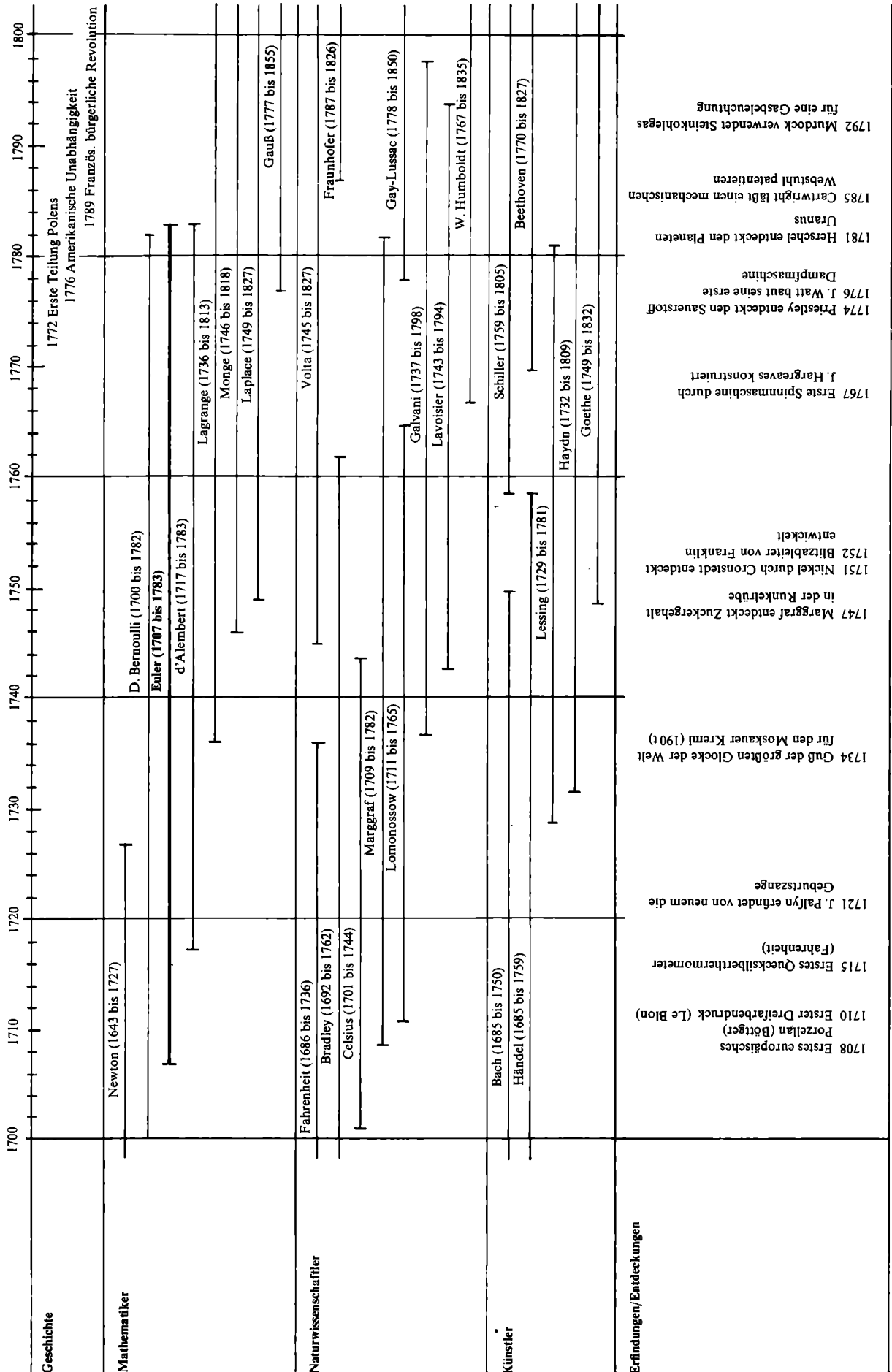
a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PM} = e$!

b) Berechnen Sie die Länge des Tangentenabschnitts $\overline{PB_1} = t$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks PB_1MB_2 !

d) Die Verlängerung von $\overline{PM}$ über M hinaus schneide den Kreis im Punkt Q . Berechnen Sie die Größe des Winkels $\angle B_1QB_2$!

Euler und seine Zeit



Leonhard Euler in Berlin

Mit dem 200. Todestag von Leonhard Euler gedenken wir des wohl produktivsten Mathematikers des 18. Jahrhunderts. Als Mitglied der Akademien in Petersburg und Berlin spielte er eine hervorragende Rolle für die Wertschätzung, die diesen Akademien entgegengebracht wurde, und für die Entwicklung beider zu den führenden Zentren mathematischer Forschungen.

Die wissenschaftliche Forschung wurde im 18. Jahrhundert im wesentlichen an den Akademien der fortgeschrittenen europäischen Staaten betrieben, vor allem in Paris, London, Berlin und Petersburg. Die Wissenschaftler an den Akademien besaßen im allgemeinen keine Lehrverpflichtungen, wurden aber zu Gutachten über wirtschaftliche, technische und andere Fragen herangezogen. Die absolutistischen Herrscher betrachteten sich dabei gern als Förderer der Wissenschaften, indem sie führende Naturwissenschaftler und Mathematiker an ihre Höfe einluden. Die Repräsentanz führender Gelehrter galt als Zeichen wirtschaftlicher Stärke.

Im Leben Eulers lassen sich drei Schaffensperioden bestimmen:

von 1727 bis 1741 in Petersburg, von 1741 bis 1766 in Berlin und von 1766 bis 1783 wiederum in Petersburg.

Euler weilte also insgesamt 25 Jahre in Berlin.



Euler folgte einer Berufung des preußischen Königs Friedrich II. (1712 bis 1786) an die Berliner Akademie, die der König nach seiner Thronbesteigung 1740 reorganisieren wollte. Dabei waren für Euler zwei Überlegungen maßgebend. Nach dem Tode der russischen Zarin Anna (1693 bis 1740) hatten sich 1740 die innenpolitischen Zustände Rußlands so verschlechtert, daß es ungewiß war, ob die guten Arbeitsbedingungen an der Petersbur-

ger Akademie erhalten werden konnten. Zum anderen wollte der preußische König die Berliner Akademie zu einem Zentrum wissenschaftlichen Forschens sowohl in Preußen als auch in Europa umgestalten. Er hatte den Ehrgeiz, die bedeutendsten Gelehrten Europas um sich zu versammeln.

Euler interessierte besonders die künftige Organisation der Berliner Akademie, und er nahm den Ruf nach Berlin an. In einem Brief an G. F. Müller (1705 bis 1783) vom 10. 4. 1742 schilderte er seine Lage bei Ankunft in Berlin:

„Was meinen und der Meinigen Zustand allhier betrifft, so leben wir der Kriegenunruhen ungeachtet in vollkommener Ruhe. Die Hohe Intention Ihro Königl. Majestät, Kraft deren ich hierher berufen worden, ging dahin, aus der bisherigen Societät eine wohl eingerichtete Academie der Wissenschaften zu etabliren, bisher aber ist die Vollziehung dieses Desseins durch die noch weit ausstehenden Kriegstrouben gehemmt worden: jedoch haben Ihro Majestät beschlossen, auf künftigen Winter diese Sach vorzunehmen.“

Am 6. 9. 1742 nahm Euler an der ersten Sitzung der mathematischen Klasse der Berliner Akademie teil und legte allein sieben mathematische Arbeiten vor.

Aber die Hoffnungen Eulers, an der Reorganisation der Berliner Akademie tatkräftig teilnehmen zu können, erfüllten sich nicht. Friedrich II. war mit der Führung des 1. Schlesischen Krieges (1740 bis 1742) beschäftigt und wollte außerdem, daß der französische Wissenschaftler Pierre-Louis M. Maupertius (1698 bis 1759) Präsident der reformierten Akademie wurde. Das Verhältnis zwischen Euler und dem König war so eigentlich seit Eulers Ankunft in Berlin getrübt, und es sollte letztlich der Grund dafür sein, daß Euler 1766 enttäuscht nach Petersburg zurückging.

Euler war in Berlin von 1744 bis 1766 Direktor der mathematischen Klasse der Akademie; damit besaß er eine wichtige Funktion, die es ihm ermöglichte, sein Ziel, das wissenschaftliche Niveau der Berliner Akademie zu erhöhen, realisieren zu können. Von 1741 bis 1766 war er außerdem Direktor der akademischen Sternwarte.

Euler oblag so de facto jahrzehntelang die wissenschaftliche Leitung der Akademie, wobei er ein ungeheures Arbeitspensum absolvierte. Er legte etwa alle 14 Tage in den Akademiesitzungen eine Vorlage, eine wissenschaftliche Nachricht oder gar einen Vortrag vor. In der mathematischen Klasse sprach er pro Monat ein- bis zweimal, darunter waren Vorträge, Beiträge und Vorlagen. In den Vorlagen behandelte er sowohl wissenschaftliche als auch praktische Probleme. Daneben lieferte er Gutachten zu technischen Fragen, z. B. zu Maschinen, zur Konstruktion von Pumpen u. a. Er übersetzte und bearbeitete sogar ein englisches Buch zur

Artillerie, das jahrelang als Handbuch zur Artillerie-Ausbildung in Preußen verwendet wurde.

Auf Befehl Friedrichs II., dem die mathematischen Arbeiten Eulers fremd waren, erhielt er auch praktische Aufgaben, so z. B. Berechnungen zur Einrichtung sogenannter Witwen- und Waisenkassen, Gutachten zu technischen Erfindungen, Lotterien und Glücksspielen.

Von seinen mathematischen Arbeiten, die in der Berliner Zeit entstanden, sei nur sein berühmtes Werk „Einführung in die Differentialrechnung“ (latein.) erwähnt, das 1755 erschien und fast ein ganzes Jahrhundert das Lehrbuch der Differentialrechnung war.

Obwohl Euler nach dem Tode von Maupertius im Jahre 1759 faktisch die gesamte Tätigkeit der Akademie leitete, verschlechterte sich sein Verhältnis zu Friedrich II., dem als König die Akademie unterstand, immer mehr. Als gar der König auf der Suche nach einem neuen Präsidenten Euler einfach überging, dachte dieser an seinen Weggang. Er schrieb an G. F. Müller am 19. 3. 1763: „Der Prinz Dolgorucki sagt mir heut, dass wir hier gewiß den Mr. d'Alembert zum Praes. bekommen werden, geschieht dieses, so halte ich sogleich um meine Demission an.“

In Rußland regierte seit 1762 inzwischen die Zarin Katharina II. (1729 bis 1796), die ihren russischen Gesandten in Berlin beauftragte, mit Euler wegen seiner ehrenvollen Rückkehr an die Petersburger Akademie zu verhandeln. 1763 beauftragte sie die Petersburger Akademie, Euler als „Professor ordinaire“ (ordentlichen Professor/Ehrentitel) zu berufen und ihm das Amt des Direktors der mathematischen Klasse sowie des Konferenzsekretärs zu übertragen. Eulers Beziehungen zur Petersburger Akademie hatte er während seines Berliner Aufenthalts nie abreißen lassen, so daß er wohlwollend das Petersburger Angebot prüfte.

Die Finanzreform von 1765, die mit ihren Untersuchungen für Euler als faktischen ökonomischen Verwalter der Akademie – auch dieses Amt übte er jahrelang nebenbei aus, ohne Dank zu erhalten – ein Mißtrauensvotum darstellte, beschleunigte seinen Fortgang aus Berlin.

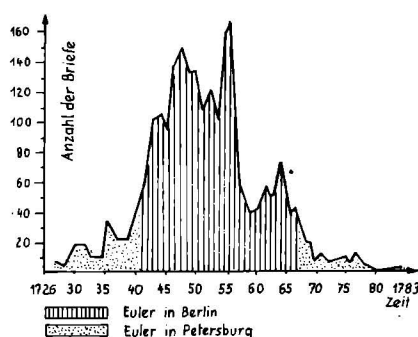
So traf am 28. Juli 1766 der fast sechzigjährige Euler mit seiner 18köpfigen Familie wiederum in Petersburg ein, wurde mit allen Ehren empfangen und arbeitete – trotz vollständiger Erblindung im Jahre seiner Rückkehr – noch weitere 17 Jahre mit bewundernswerter Energie. Wenn sich Eulers Berliner Aufenthalt auch für ihn nicht günstig und eher enttäuschend gestaltete, so wurde doch das Ansehen der Berliner Akademie durch seine erfolgreiche Tätigkeit maßgeblich gefördert. Seine festen Beziehungen zur Petersburger Akademie in jenen Jahren begründeten eine Tradition des engen Zusammenwirkens beider wissenschaftlicher Einrichtungen. Eulers um-

fangreicher Briefwechsel mit russischen Gelehrten aus dieser Berliner Zeit gibt hierüber ausführlich Auskunft. Darüber hinaus verdeutlicht er das gewaltige Wirken Eulers auf vielen Wissenschaftsgebieten, daneben zur Förderung junger russischer Wissenschaftler und zur Leitung der Berliner Akademie.

Annette Vogt

Über Eulers Briefwechsel

Neben den wissenschaftlichen Arbeiten haben stets auch Briefe, Notizhefte, Tagebücher usw. von Wissenschaftlern große Aufmerksamkeit gefunden, da sie stets interessante persönliche Einblicke in die Lebens- und Arbeitsweise gewähren. Leonhard Euler hat mit fast 300 Briefpartnern vermutlich zwischen 4500 und 5000 Briefe gewechselt. Ein Drittel der Briefe scheint verlorengegangen zu sein.



Natürlich findet sich manches Merkwürdige in diesem umfangreichen Briefwechsel. 1748 fragt zum Beispiel ein Professor aus Tübingen allen Ernstes bei Euler, der damals in Berlin lebte, an, ob es wahr sei, daß in Berlin ein Künstler Menschen in Tiere verwandeln könne. Euler wiederum schrieb 1765 von Berlin nach Petersburg an einen dortigen Gelehrten: „Daß die Zahnschmerzen durch die magnetische Kraft gestillt werden können, wird nun von allen Orten her einstimmig bestätigt, und ich habe dieser Tagen selbst eine Probe davon gemacht. Der H. Dr. Leclerc sagte mir, daß er sich schon längst dieses Mittels in Rußland bedient habe, welches gewiß angemerkt zu werden verdiente; damit die erste Erfindung nicht, wie bisher so oft geschehen, in Vergessenheit gerathe.“ In Rußland verfuhr man, wie die St. Petersburg Zeitung aus dem gleichen Jahr schrieb, bei der Behandlung von Zahnschmerzen mit Magneten so: „Man halte das Gesicht nach Norden und halte dabei den Nordpol des Magneten auf den schmerzenden Zahn, dann spüle man den Mund mit kaltem Wasser aus. Wenn die Behandlung nicht sofort Erfolg zeige, dann sei sie zu wiederholen.“ In Mode waren magnetische Heilmethoden durch die Lehre des österreichischen Arztes Mesmer gekommen, der sich mit dem tierischen Magnetismus ausgiebig beschäftigt hatte – wir würden seine Lehren heute als vorwissenschaftliche Hypnose bezeichnen.

Festlicher Auftakt zu den Ehrungen für Leonhard Euler

Wissenschaftliche Konferenz erörtert Werk des Gelehrten

Den Auftakt zu den Ehrungen in der DDR für den bedeutenden Mathematiker Leonhard Euler aus Anlaß seines 200. Todestages am 18. September bildete am 15.9. ein Festakt im Haus der Ministerien in Berlin.

In seiner Eröffnungsrede begrüßte der Präsident der Akademie der Wissenschaften der DDR, Prof. Dr. Werner Scheler, im Namen des Euler-Komitees der Akademie Gäste aus der DDR, aus weiteren 13 Ländern und Westberlin.

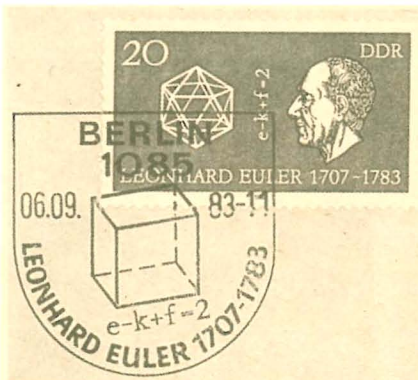
Als Schirmherr der Euler-Ehrungen in der DDR würdigte Dr. Herbert Weiß, Stellvertreter des Vorsitzenden des Ministerrates und Minister für Wissenschaft und Technik, den überragenden Gelehrten und sein Werk in einem Festvortrag.

Euler sei als Stern erster Größe am Firmament der Naturwissenschaften und als einer der größten Mathematiker zu bewerten, sagte er. Mit seiner Würdigung werde die große Bedeutung der Mathematik im Leben der sozialistischen Gesellschaft und der Rang dieser Wissenschaft für die Meisterung der aktuellen Aufgaben unterstrichen. Der gebürtige Schweizer Leonhard Euler hatte an den Akademien in Petersburg und Berlin gewirkt und als einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten ein Lebenswerk von 800 veröffentlichten Arbeiten hinterlassen.

Festrede von Dr. H. Weiß



Eulers historisches Verdienst, betonte Dr. Weiß, bestehe in der Schaffung des fundamentalen mathematischen Apparates für die Lösung der unterschiedlichsten Probleme in Physik, Astronomie und Technik. Er habe das Rüstzeug hinterlassen, auf dem die technische Entwicklung der folgenden Jahrzehnte aufbaute und das bis in die Gegenwart unverzichtbares Gut jeder Ingenieur Tätigkeit ist. Moderne Technologien wie Mikroelektronik, Robotertechnik oder automatisierte Informationsverarbeitung kämen nicht ohne einen ausgeklügelten mathematischen Apparat aus. Insofern hätten Mathematik und Rechen-technik für die weitere Beschleunigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts und damit für die Verwirklichung der ökonomischen Strategie der DDR einen besonderen Stellenwert.



Sondermarke und Sonderstempel zum 200. Todestag Eulers

Anschließend sprach Prof. Dr. Adolf Juschekewitsch (Moskau) über Leben und Werk des Mathematikers. Prof. Dr. Rolf Klötzler, Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der DDR, befaßte sich in einem Vortrag mit Eulers Verdiensten um die Variationsrechnung.

Am gleichen und am darauffolgenden Tag wurde dann eine wissenschaftliche Konferenz eröffnet, auf der namhafte Wissenschaftler des In- und Auslandes fachspezifische und allgemeinhistorische Aspekte des Wirkens von Leonhard Euler erörterten.



Im Kerzenschimmer

Von einem Leuchter mit 7 linear angeordneten Kerzen (a bis g) sollen am Montag eine, am Dienstag zwei usw., also am Sonntag alle sieben eine täglich gleichbleibende Zeit leuchten, so daß am Ende der Woche alle Kerzen gleichzeitig herunterbrennen.

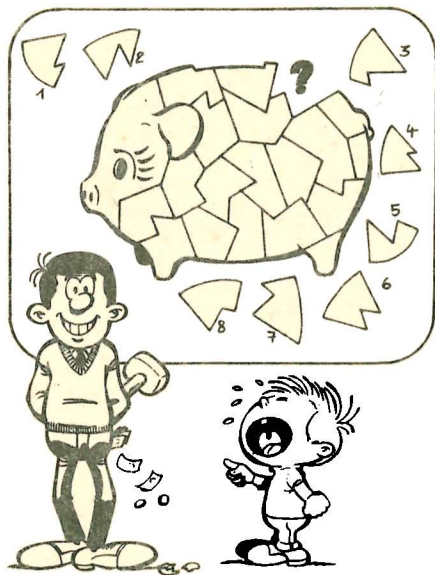
Fragen:

1. Welche der Kerzen a bis g müssen an den einzelnen Tagen entzündet werden, damit sie an jedem Tag ein symmetrisches Bild ergeben und zwischen je zwei brennenden Kerzen höchstens eine nicht entzündete steht?
2. Wievielmals wird im Laufe der Woche jede Kerze entzündet?
3. Nach welcher Zeit bei einer Brenndauer von 8 Stunden sind die Kerzen täglich zu löschen, damit sie für alle sieben Tage der Woche ausreichen?

Dr. Christian Lange, IfL Leipzig

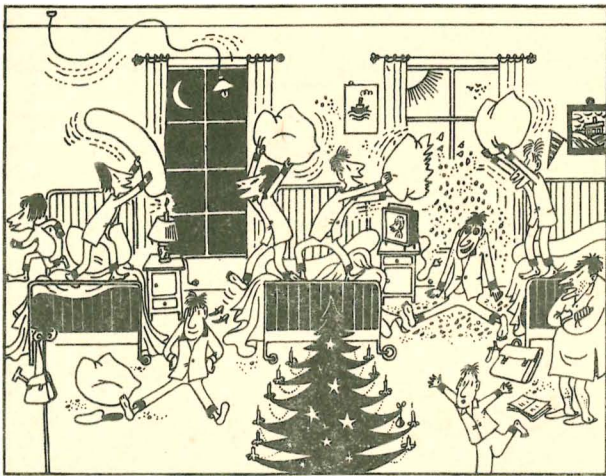
Suche!

Welches der Stücke 1 bis 8 fehlt im traditionellen Silvesterglücksschwein?



Lustige Kissenschlacht

Welche 16 Fehler fallen aus dem lustigen ungarischen Bild auf?



Kryptarithmetik

In dem Schema
FLOCKE
+ FLOCKE

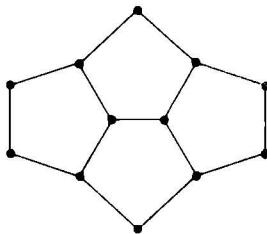
SCHNEE

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Ziffern gleiche Buchstaben, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Claus Janke, Ilmenau

Magische Figur

An Stelle der Sterne sind die Zahlen 1 bis 12 so einzusetzen, daß die Summe auf dem Umfang jedes Fünfecks stets gleich ist.



Dirigent J. Pěněk, Prag

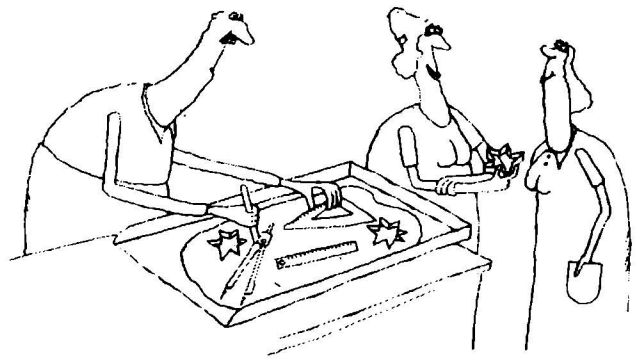
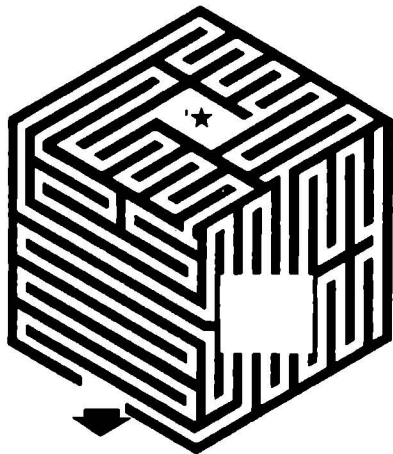
Silvesterfeier

Wo sind die 20 kleinen Unterschiede zwischen den beiden Bildern versteckt?



Originelles Weihnachtspaket

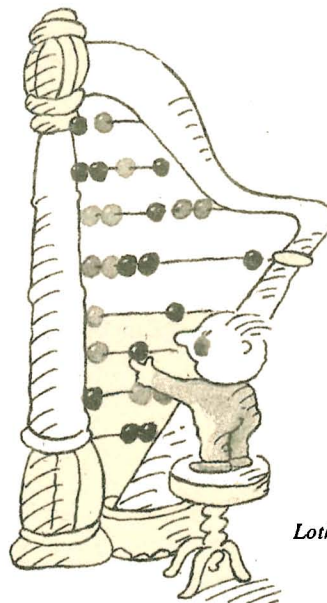
Welches der vier Teilstücke (1 bis 4) ist einzusetzen, wenn man vom Stern zum Ausgangspfeil gelangen will?



„Mit den Förmchen wird es immer zu ungenau!“

Gewichtiges

Abgenommen habe ich ja nichts, aber seit ich die Kalorien zähle, kann ich viel besser rechnen.



Lothar Otto, aus Magazin 7/83

Zwei gleiche Hüte gesucht

Jens und Jan suchen zwei gleiche Hüte für die Silvesterfeier. Wer von euch findet sie am schnellsten?

Für Dich, Berlin



Lösungen



Lösungen zu: Philatelistischer Mathematikunterricht

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Lösungen zu: alpha-heiter

Im Kerzenschimmer

Frage 1:

Montag	d
Dienstag	c e
Mittwoch	b d f
Donnerstag	a c e g
Freitag	ab d fg
Sonabend	abc efg
Sonntag	abcdefg

Frage 2:

rechnerisch $(1+2+3+4+5+6+7):7=4$
oder graphisch aus Lösung 1 ersichtlich: 4mal

Frage 3:

Wenn jede Kerze maximal 8 Stunden brennt und diese Zeit in vier gleiche Etappen unterteilt wird, nach jeweils 2 Stunden.

Suche!

Es fehlt Stück Nr. 2

Lustige Kissenschlacht

Die Lösung sei dem Leser (aus Platzgründen) selbst überlassen wie: Der Vater hat 6 Finger an der rechten Hand. Der Haken des Bildes mit Schiff liegt nicht in der Mitte usw.

Kryptarithmetik

„E“ muß immer 0 sein. K kann nur 5 sein (als erste Gedankenschritte). Drei Lösungen:

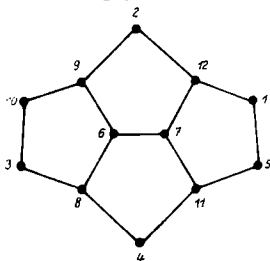
$$416\ 350 + 416\ 350 = 832\ 700;$$

$$218\ 350 + 218\ 350 = 436\ 700;$$

$$219\ 350 + 219\ 350 = 438\ 700$$

Magische Figur

Die Summe beträgt jeweils 36.



Originelles Weihnachtspaket

Es ist das Teilstück 4

Zwei gleiche Hüte gesucht

Die Kappe in der rechten unteren Ecke (über dem Zylinder) ist zweimal vorhanden.

Silvesterfeier



Lösungen zur Sprachecke:

1. Beim Scheibenschießen traf ein Sportler einige Male die 10, ebenso oft erzielte er 8 Punkte, und einige Male traf er die 5. Insgesamt errang er 99 Punkte. Wie oft schoß der Sportler?

Lösung: Er erzielte x mal 18 Punkte (10 und 8), und y mal 5 Punkte: $18x + 5y = 99$. Wegen dieser Gleichung gilt $1 \leq x \leq 5$. $99 - 18x$ ist nur für $x=3$ durch 5 teilbar, dann ist $y=9$. $9+3+3=15$. Der Sportler schoß 15mal.

2. Von den berühmten Diamanten wurde der Diamant Orlov in Indien im 17. Jahrhundert gefunden. Er wird gegenwärtig im Kreml aufbewahrt. Ungeschliffen betrug seine Masse 300 Karat; einmal geschliffen betrug sie 189,6 Karat. (1 Karat=0,20 g)

Berechne die Masse dieses Diamanten vor und nach dem Schliff in Gramm!

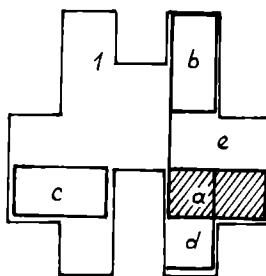
Lösung: $300 \cdot 0,20 \text{ g} = 60 \text{ g}$;

$$189,6 \cdot 0,20 \text{ g} = 37,92 \text{ g}$$

Die Masse des Diamanten betrug 60 g vor und 37,92 g nach dem Schliff.

3. Schiebe die drei Rechtecke, ohne sie zu drehen, so, daß sie die rechte Seite der Figur bedecken!

Lösung: Die Riegel heißen 1 (oberer Riegel)
2 (Querriegel)
3 (unterer Riegel)



Lösungsweg:

2 um 6 nach vorn und um 1 nach unten

1 um 1 nach unten, um 4 nach vorn, um 1 nach oben

3 um 3 nach oben

2 um 1 nach oben, um 4 zurück, um 1 nach unten

1 um 3 nach unten

3 um 1 nach unten, um 4 nach vorn, um 1 nach oben

2 um 1 nach oben, um 6 nach vorn

Lösungen zu: Kreuzzahlrätsel

Waagerecht: 3) 13; 4) 11; 6) 12; 8) 14; 9) 1111; 10) 10; 11) 13; 13) 52; 15) 15; 16) 30; 17) 41; 18) 1615; 19) 12; 21) 15; 22) 100; 23) 764; 25) 17; 26) 40; 27) 128; 29) 09; 30) 17; 32) 25; 33) 10; 34) 10; 35) 16; 37) 1251; 40) 6000; 41) 81; 43) 90; 44) 91; 46) 12; 47) 11; 49) 10; 50) 24; 53) 74; 54) 45; 56) 40; 58) 90; 59) 83; 61) 32; 62) 18; 63) 60.

Senkrecht: 1) 13; 2) 11; 3) 121; 5) 144; 7) 210; 8) 111; 12) 385; 14) 2301; 15) 1245; 20) 21; 21) 10; 23) 77; 24) 44; 27) 19500; 28) 8110; 29) 02; 31) 70; 34) 181; 36) 6450; 37) 16; 38) 2048; 39) 10; 42) 100; 43) 999; 45) 10; 46) 111112; 48) 10; 51) 54; 52) 14; 53) 7104; 55) 5100; 57) 01; 58) 99; 60) 362880; 61) 31.

Lösungswort (Lebensdaten von Leonhard Euler): 15. 4. 1707 bis 18. 9. 1783.

Lösungen zu:

Der Eulersche Polyedersatz, Heft 4/83

Aufgabe 1: Der Eulersche Polyedersatz gilt für jedes konvexe Polyeder: Würfel (Hexaeder), Quader, quadratischer Pyramidenstumpf (jeweils $s=8+6-12=2$), dreiseitiges Prisma ($s=6+5-9=2$), quadratische Pyramide ($s=5+5-8=2$), Tetraeder ($s=4+4-6=2$), Oktaeder ($s=6+8-12=2$), Pentagondodekaeder ($s=20+12-30=2$) und Ikosaeder ($s=12+20-30=2$), m.a.W., die Konvexität des Polyeders ist eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von $e+f-k=2$. Körper K_5 ist nicht konvex, also der Eulersche Polyedersatz nicht anwendbar, trotzdem gilt $s=16+10-24=2$. Das zeigt, daß der Eulersche Polyedersatz nicht umkehrbar ist, m.a.W., die Konvexität des Polyeders ist keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von $e+f-k=2$. Für das ebenfalls nichtkonvexe Polyeder K_6 gilt $s=9+10-16=3$. Das zeigt, daß man im Satz die Voraussetzung der Konvexität nicht weglassen kann, ohne die Gültigkeit von $e+f-k=2$ zu stören.

$$\text{Aufgabe 2: } \phi(2156) = \phi(2^2 \cdot 7^2 \cdot 11) = 2 \cdot 42 \cdot 10 = 840, \phi(1800) = \phi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = 4 \cdot 6 \cdot 20 = 480,$$

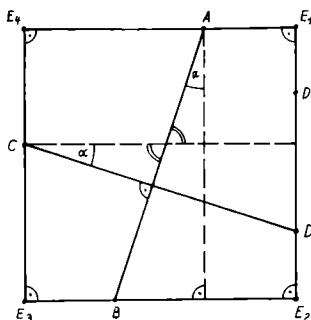
$$\phi(841) = \phi(29^2) = 29 \cdot 28 = 812, d(72) = 12$$

(Teiler von 72 sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72), $\sigma(72) = 195$, $\pi(100) = 25$, $r(25) = 12$ (die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ hat die 12 ganzzahligen Lösungspaare (3, 4), (4, 3), (-3, 4), (4, -3), (-3, -4), (-4, -3), (3, -4), (-4, 3) sowie (5, 0), (0, 5), (-5, 0) und (0, -5), verdeutlicht euch dies geometrisch am Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 5^2$).

Lösungen zu den Aufgaben aus den norwegischen Schülerwettbewerben, Heft 4/83

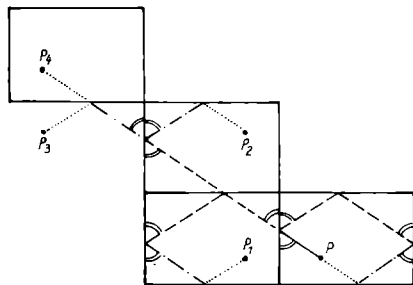
▲ 1 ▲ Es seien A, B, C, D Punkte auf den Seiten eines Quadrats mit den Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 und der Seitenlänge e (s. Bild). Für den Schnittpunkt D' des von C auf AB gefällten Lotes mit der gegenüberliegenden Quadrat-

seite E_1E_2 gilt $CD' \cong AB \left(= \frac{e}{\cos \alpha} \right)$. Zur Lösung der Aufgabe bei gegebenen A, B, C, D konstruiere man daher D' aus A, B, C wie oben.



Falls $D' \neq D$ ist die Richtung der Quadratseite E_1E_2 eindeutig bestimmt als Verbindungsgerade g von D und D' , und E_1, E_2 ergeben sich als Fußpunkte der von A bzw. B auf g gefällten Lote, danach E_3, E_4 als Fußpunkte der von C auf die Geraden BE_2 bzw. AE_1 gefällten Lote. Ist $D = D'$, so kann man g willkürlich durch D wählen und die Eckpunkte wie oben konstruieren. In diesem Fall gibt es also unendlich viele Lösungen. Damit die Aufgabe überhaupt lösbar ist, müssen C und D' auf verschiedenen Seiten von AB liegen und die Lotfußpunkte E_1, E_2 auf derselben Seite wie D' .

▲ 2 ▲ Man denke sich einen Weg der geforderten Art statt an den Wänden reflektiert jeweils hinter der betreffenden Wand in einem spiegelbildlichen Zimmer fortgesetzt (s. Bild). Die kürzeste Verbindung von P nach P_4 ist offenbar die geradlinige. Sie entspricht im ursprünglichen Raum einem Parallelogramm.



▲ 3 ▲ Wegen $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ist mit a, b und $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ auch $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ rational, also auch

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})] \text{ und } \sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}.$$

▲ 4 ▲ Die Ungleichung

$$x_k(x_{k+1} - x_k) = \frac{kx_{k+1}^2 + 2x_{k+1} + k}{2(k+1)} - \frac{(k-1)x_k^2 + 2x_k + (k-1)}{2k} \quad (*)$$

ist eine äquivalente Umformung von $0 \leq [kx_{k+1} - (k+1)x_k + 1]^2$. Addiert man die Ungleichungen (*) für $k=1, 2, \dots, n-1$ und bringt den Summanden $-x_1$ auf die linke Seite, so erhält man die behauptete Ungleichung.

▲ 5 ▲ F_n besteht aus 8^n Quadraten, von denen jedes den Inhalt $\frac{1}{9^n}$ hat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9} \right)^n = 0.$$

Lösungen zu:

Niels-Henrik-Abel-Wettbewerb 1982, Heft 4/83

▲ 1 ▲ Wir setzen $a = (2 + \sqrt{3})^x$. Es gilt $a > 0$ und

$$(2 - \sqrt{3})^x = \frac{(2 - \sqrt{3})^x (2 + \sqrt{3})^x}{(2 + \sqrt{3})^x} = \frac{(4 - 3)^x}{(2 + \sqrt{3})^x} = \frac{1}{a}.$$

Damit gilt $a + \frac{1}{a} = 14$, $a^2 - 14a + 1 = 0$, $a_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48} = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

Weiter ist $a_1 = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ und

$$a_2 = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2.$$

Hieraus ergibt sich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Die Probe bestätigt, daß $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ auch tatsächlich Lösungen sind.

▲ 2 ▲ Es gilt $(n^2)^2 < z < (n^2 + 1)^2$, d. h., z liegt zwischen den Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, ist also nicht selbst Quadratzahl.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Heft 1/83 (Fortsetzung)

Ph 9 ■ 134 Da für $V_1 = \frac{V}{2}$ und $V_2 = 100 \text{ cm}^3$

das gleiche Verhältnis $h : d = 2 : 1$ gilt, ist entsprechend $V_1 = \frac{1}{48} \pi h_1^3$ und $V_2 = \frac{100}{48} \pi h_2^3$ bzw.

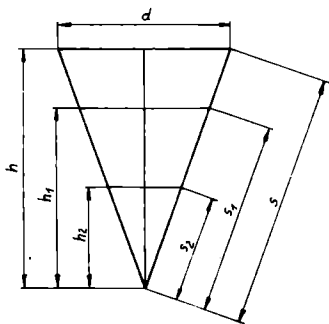
$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot V}{2 \cdot \pi}} \text{ und } h_2 = \sqrt[3]{\frac{4800}{\pi}}.$$

Damit ergibt sich für

$$h_1 : h_2 = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot V}{2 \cdot \pi}} : \sqrt[3]{\frac{4800}{\pi}}, \quad h_1 = h_2 \cdot \sqrt[3]{0,5}.$$

Entsprechend ist

$$h_2 = \sqrt[3]{\frac{4800 \text{ cm}^3}{\pi}}.$$



Mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras gilt

$$s^2 = h^2 + \frac{h^2}{16} \text{ bzw. } s = \frac{h}{4} \sqrt{17}.$$

Nach dem Strahlensatz ist nun

$$s_1 : s = h_1 : h; s_1 = \frac{h_1 \cdot s}{h} \text{ bzw.}$$

$$s_2 : s = h_2 : h; s_2 = \frac{h_2 \cdot s}{h}.$$

Setzt man (1) bzw. (2) ein, ergibt sich

$$s_1 = \frac{h \sqrt[3]{0,5} \cdot h \cdot \sqrt{17}}{h \cdot 4} = \frac{h \cdot \sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt{17}}{4},$$

$$s_1 = \frac{16 \text{ cm} \cdot \sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt{17}}{4} \approx 13,1 \text{ cm bzw.}$$

$$s_2 = \frac{h_2 \cdot s}{h}$$

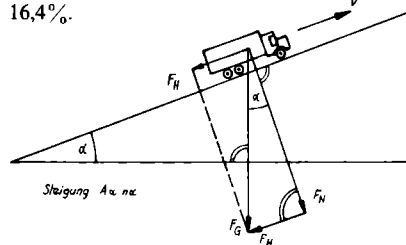
$$s_2 = \sqrt[3]{\frac{4800 \text{ cm}^3}{\pi}} \cdot \frac{h \cdot 17}{4 \cdot h},$$

$$s_2 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{4800 \text{ cm}^3}{\pi}} \cdot \sqrt{17} \approx 11,8 \text{ cm.}$$

Die Eichmarken sind in einer Entfernung von 13,1 cm bzw. 11,8 cm von der Spitze des Trichters anzubringen.

Antwortsätze zu weiteren Aufgaben:

Ph 10/12 ■ 135 Die Steigung beträgt 16,4%.



Ch 7 ■ 105 Es werden insgesamt 3,84 g Kupfer gebildet.

Ch 8 ■ 106 a) Der Schachtofen liefert täglich 87,8 t Braunkohl.

b) Unter den gegebenen Bedingungen entstehen 36938 m³ Kohlendioxid.

c) Aus 160 t 98%igem Kalkstein erhält man 116 t Löschkalk.

Ch 9 ■ 107 Das Gemisch besteht aus 23 g Magnesiumkarbonat und 77 g Magnesiumoxid.

Ch 10/12 ■ 108 a) Zur Produktion von 3 t 90%iger Säure sind 2 t Pyrit mit einem Gehalt von 82% FeS₂ abzurosten.

(1) b) Bei der Produktion von 3 t 90%iger Schwefelsäure aus Pyrit, welches 82% FeS₂ enthält, entstehen 1,5 t Kiesabbrand mit 75% Eisen-(III)-oxid.

c) Das Mischverhältnis von Säure zu Wasser beträgt 1 : 5.

d) Zur Herstellung von 70 g kristallisiertem Zinnsulfat werden 144,6mal 15%ige Schwefelsäure benötigt.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb,

Heft 2/83 (Eulersonderwettbewerb)

Ma 5 ■ 2322 Da der zweite Sohn 100 Taler mehr erhält als der dritte, und da der älteste Sohn 200 Taler mehr erhält als der zweite, erhält der älteste 300 Taler mehr als der dritte. Nun gilt $1600 - 100 - 300 = 1200$ und $1200 : 3 = 400$. Die Söhne erhalten, mit dem jüngsten Sohn beginnend, 400 Taler, 500 Taler und 700 Taler.

Ma 5 ■ 2323 Für den kleineren Summanden a gilt $0 \leq a \leq 15$, für den größeren Summanden b gilt $16 \leq b \leq 32$. Da a Vielfaches von 6 und b Vielfaches von 5 ist, gilt $a = 0$ oder $a = 6$ oder $a = 12$ und $b = 20$ oder $b = 25$ oder

$b=30$. Nur für $a=12$ und $b=20$ gilt $a+b=32$. Die Summanden lauten 12 und 20. Es gilt $12:6+20:5=2+4=6$.

Ma 5 ■ 2324 Die gesuchte Zahl n ist kleiner als 12; es gilt also $1 \leq n \leq 11$. Ihr Fünffaches ist kleiner als 40. Wegen $5 \cdot 8=40$ ist die Zahl kleiner als 8. Wir stellen eine Tabelle auf.

n	$5 \cdot n$	$12-n$	$40-5 \cdot n$
7	35	5	5
6	30	6	10
5	25	7	15
...	...	...	...
1	5	11	35

Nur die Zahl 7 erfüllt die gestellten Bedingungen.

Ma 5 ■ 2325 Es seien a und b die beiden Zahlen; dann gilt $a+b=15$ und $a>b$, also $8 \leq a \leq 15$. Wir stellen eine Tabelle auf.

a	b	$a-b$
8	7	1
9	6	3
10	5	5
11	4	7
12	3	9
13	2	11
14	1	13
15	0	15

Nur für $a=11$ und $b=4$ gilt $a-b=7$. Die zwei Zahlen sind 11 und 4.

Ma 5 ■ 2326 Es gilt $7-3=4$ und $4:2=2$ und $2+3=5$. Die beiden Summanden sind 5 und 2.

Ma 5 ■ 2327 Der zweite Summand könnte 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 oder 24 sein. Wegen $a+b=25$ müßte der zweite Summand dann 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4 oder 1 sein. Es existieren vier Lösungen:

a	b
22	3
16	9
10	15
4	21

Ma 6 ■ 2328 Der erste Summand sei n ; die folgenden acht Summanden sind dann

$$n+\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, n+2, n+\frac{5}{2}, n+3, n+\frac{7}{2}, n+4.$$

Für die Summe aus allen neun Summanden gilt

$$9 \cdot n + \frac{16}{2} + 10 = 48, 9 \cdot n = 30, n = \frac{10}{3}.$$

Die Summanden lauten

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}.$$

Ma 6 ■ 2329 Es sei n die gesuchte Zahl; dann gilt

$$n + \frac{1}{2}n - 60 = 65 - n, \frac{5}{2}n = 125, n = 50.$$

Die gesuchte Zahl ist 50.

Ma 6 ■ 2330 $\frac{10 \cdot 50 \cdot 12}{24} = 250$. In 50 Tagen verdienen 12 Maurer 250 Taler.

Ma 6 ■ 2331 Aus $a+b=25$ und $a=49 \cdot b$ folgt durch Einsetzen $49b+b=25$, $50b=25$, $b=\frac{1}{2}$. Die Summanden lauten $\frac{49}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

Ma 6 ■ 2332 Es sei x die gesuchte Zahl; dann gilt

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 24, \frac{x^2}{6} = 24, x^2 = 144, x = 12.$$

Die gesuchte Zahl ist 12.

Ma 7 ■ 2333 Aus $11a+3=19b+5$ folgt schrittweise

$$11a = 11b + 8b + 2, a = b + \frac{2(4b+1)}{11}.$$

Es ist $b=8$ die kleinste Zahl, für die wir eine natürliche Zahl $a=14$ erhalten. Die gesuchte Zahl lautet $z=11 \cdot 14 + 3 = 157$.

Ma 7 ■ 2334 Angenommen, es waren x Männer, also $(20-x)$ Frauen; dann gilt

$$8x + 7(20-x) = 6 \cdot 24, \\ 8x + 140 - 7x = 144, \\ x = 4.$$

Das Gasthaus besuchten 4 Männer und 16 Frauen.

Ma 7 ■ 2335 Angenommen, es wurden x Ellen Tuch gekauft; dafür wurden dann $\frac{7}{5} \cdot x$

Taler bezahlt. Der Stoff wurde für $\frac{11}{7}$ Taler je Elle weiter verkauft; deshalb kosten x Ellen $\frac{11}{7} \cdot x$ Taler. Nun gilt $\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$, $\frac{6}{35}x = 100$, $x = 583\frac{1}{3}$.

Es wurden $583\frac{1}{3}$ Ellen Tuch gekauft.

Ma 7 ■ 2336 Die erste Bäuerin hatte $(8x+7)$ Eier, die zweite $(10y+7)$ Eier. Nun gilt $8x+7+10y+7=100$, $8x+10y=86$, $4x+5y=43$. Es existieren zwei positive ganzzahlige Lösungen, nämlich $x_1=2$, $y_1=7$ und $x_2=7$, $y_2=3$. Die Bäuerinnen hatten entweder 23 und 77 oder 63 und 37 Eier.

Ma 8 ■ 2337 Angenommen, der Deckel wiegt x Lot; der zweite Becher wiegt dann $\frac{x+12}{2} = \frac{x}{2} + 6$ Lot. Nun gilt

$$x + \frac{x}{2} + 6 = 3 \cdot 12, \frac{3}{2}x = 30, x = 20.$$

Der Deckel wiegt 20 Lot, der zweite Becher 16 Lot.

Ma 8 ■ 2338 Angenommen, es sind x Münzen der ersten, also $(17-x)$ Münzen der zweiten Sorte; dann gilt

$$\frac{1}{10} \cdot x + \frac{1}{20} \cdot (17-x) = 1, 2x + 17 - x = 20, x = 3.$$

Er erhält 3 Münzen der ersten und 14 Münzen der zweiten Sorte.

Ma 8 ■ 2339 Angenommen, der Esel hat x Pud, der Maulesel y Pud Last getragen; dann gilt $x+1=2(y-1)$ und $3(x-1)=y+1$. Daraus folgt weiter $x=2y-3$ und $3x=y+4$. Durch Einsetzen erhält man $3(2y-3)=y+4$, $y=2,6$ und somit $x=2,2$. Der Esel hat 2,2 Pud, der Maulesel 2,6 Pud Last getragen.

Ma 8 ■ 2340 Angenommen, die Erbschaft betrug x Taler. Dann erhielt der erste Sohn $\left(\frac{x}{2}-3000\right)$ Taler, der zweite $\left(\frac{x}{3}-1000\right)$ Taler, der dritte $\frac{x}{4}$ Taler, der vierte $\left(\frac{x}{5}+600\right)$ Taler.

Nun gilt $\frac{x}{2}-3000+\frac{x}{3}-1000+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+600=x$, also $x=12000$. Die Erbschaft betrug 12000 Taler; jeder Sohn erhält 3000 Taler.

Ma 9 ■ 2341 Angenommen, es waren x Käse. Dafür erhielt die Bäuerin $\frac{3}{2}x$ Hühner.

Jedes Huhn legt $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{x}{2}$ Eier. Zusammen

legen die Hühner $\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{3}{4}x^2$ Eier. Nun kosten 9 Eier $\frac{x}{2}$ Pfennige; daraus folgt $\frac{3}{4}x^2 \cdot \frac{x}{18} = 72$, $\frac{x^3}{24} = 72$, $x^3 = 24 \cdot 72 = 12^3$, also $x=12$.

Die Bäuerin hat 12 Käse gegen 18 Hühner eingetauscht.

Ma 9 ■ 2342 Aus $s = \frac{n}{2} \cdot [2a + (n-1) \cdot d]$ und $a=2$ und $d=2$ und $s=110$ folgt $110 = \frac{n}{2} [4 + (n-1) \cdot 2]$, also $n=10$.

Es wurden 10 Tücher gekauft.

Ma 9 ■ 2343 Angenommen, es waren x Männer, also $(20-x)$ Frauen. Dann hat jeder Mann $\frac{24}{x}$ Gulden, jede Frau $\frac{24}{20-x}$ Gulden

ausgegeben, und es gilt $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. Daraus folgt $x=34 \pm 26$, $x_1=60$ (entfällt, da $60>20$) und $x_2=8$. In dem Gasthaus waren 8 Männer und 12 Frauen.

Ma 9 ■ 2344 Es seien $n-1$, n , $n+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen jede von Null verschieden ist; dann gilt $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = k^3$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = k^3, \\ 3n^3 + 6n = k^3, 3n(n^2 + 2) = k^3.$$

Durch systematisches Belegen von n mit 1, 2, 3, ... finden wir, daß bereits $n=4$ die Bedingungen erfüllt. Die drei Zahlen lauten somit 3, 4, 5. Es gilt $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$.

Ma 10/12 ■ 2345 Angenommen, das Pferd hat x Taler gekostet; dann gilt $x + x \cdot \frac{x}{100} = 119$, $x^2 + 100x - 11900 = 0$, $x = -50 + 120$, $x = 70$. Die zweite Lösung für x entfällt, da negativ. Das Pferd wurde für 70 Taler gekauft.

Ma 10/12 ■ 2346 Angenommen, die erste Person hatte x Rubel, die zweite hatte y Rubel; dann gilt $x + \frac{2}{3}y = 29$ und $y + \frac{3}{4}x = 29$.

Daraus folgt $x = 19\frac{1}{3}$ und $y = 14\frac{1}{2}$. Die erste Person besaß $19\frac{1}{3}$ Rubel, die zweite $14\frac{1}{2}$ Rubel.

Ma 10/12 ■ 2347 Angenommen, die Spieler A, B, C hatten anfangs a, b, c Gulden. Nach dem ersten Spiel hat A dann $(a-b-c)$ Gulden, B hat $2b$ Gulden, C hat $2c$ Gulden. Nach dem zweiten Spiel hat A dann $2(a-b-c)$ Gulden, B hat $2b-(a-b-c)-2c$, also $(3b-a-c)$ Gulden, C hat $4c$ Gulden. Nach dem dritten Spiel hat A $4(a-b-c)$ Gulden, B hat $2(3b-a-c)$ Gulden, C hat $4c-2(a-b-c)-2(3b-a-c)$, also $(7c-b-a)$ Gulden. Nun gilt $4(a-b-c)=24$ und $2(3b-a-c)=24$ und $7c-b-a=24$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $a=39, b=21, c=12$. Anfangs hatte A 39 Gulden, B 21 Gulden und C 12 Gulden.

Ma 10/12 ■ 2348 Es seien x und y zwei positive reelle Zahlen, die den Bedingungen genügen; dann gilt $x+y=x \cdot y$ und $x-y=x^2-y^2$. Aus der ersten Gleichung folgt $y=\frac{x}{x-1}$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir

$$\frac{x^2}{x-1}=x^2-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2. \text{ Daraus folgt } x_1=\frac{1}{2}$$

$(3+\sqrt{5})$ und $x_2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. Daraus folgt weiter $y_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $y_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Die zweite Lösung entfällt, da y_2 negativ ist. Die gesuchten Zahlen lauten $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, und es gilt

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=2+\sqrt{5},$$

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=2+\sqrt{5},$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=2+\sqrt{5}.$$

Ph 6 ■ 136 Geg.:

$$\text{Geschwindigkeit } v=3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Weg } s=43,2 \text{ km}=43200 \text{ m}$$

Ges.: Laufzeit t und Anzahl n der Sprungschritte

Nach der Gleichung $s=v \cdot t$ ist

$$t=\frac{s}{v},$$

$$t=\frac{43200 \text{ m} \cdot \text{s}}{3 \text{ m}},$$

$$t=14400 \text{ s}=240 \text{ min}=4 \text{ h}.$$

Die Anzahl der Sprungschritte ergibt sich aus $n=14400 \cdot 3=43200$.

Der Schnellläufer brauchte 4 Stunden und machte 43200 Sprungschritte.

Ph 7 ■ 137 Geg.: $P_1=2700 \text{ PS}$ Ges.: P_2

$$v_1=15 \text{ Knoten}$$

$$v_2=20 \text{ Knoten}$$

Es gilt die Proportion

$$P_1:P_2=v_1^3:v_2^3,$$

$$P_2=\frac{P_1 \cdot v_2^3}{v_1^3},$$

$$P_2=\frac{2700 \cdot 20^3}{15^3},$$

$$P_2=6400.$$

Die Leistung muß auf 6400 PS erhöht werden.

Ph 8 ■ 138 Geg.:

$$\text{Gewicht der Krone } G=10 \text{ kp}$$

$$\text{Auftriebskraft der Krone } F_A=0,625 \text{ kp}$$

$$\text{Auftriebskraft des Goldes } F_G=\frac{1}{19} G_1$$

$$\text{Auftriebskraft des Silbers } F_S=\frac{1}{10} G_2$$

Ges.: Gewicht des Goldes G_1 und des Silbers G_2

Da $G_1+G_2=G$, ist $G_2=G-G_1$, und damit gilt

$$\frac{1}{19} G_1+\frac{1}{10} (G-G_1)=F_A,$$

$$\frac{G_1}{19}+\frac{(10-G_1)}{10}=0,625,$$

$$G_1 \approx 7,9.$$

Dann ist $G_2=10 \text{ kp}-7,9 \text{ kp}=2,1 \text{ kp}$.

Die Krone bestand aus 7,9 kp Gold und 2,1 kp Silber.

Ph 9 ■ 139 Geg.: Formel in der Aufgabe

Ges.: t

Man verwendet am besten abgetrennte Zehnerpotenzen. Dann heißt die Gleichung

$$3 \cdot 10^{-6} \cdot t_2+2 \cdot 10^{-4} \cdot t+1=1,01.$$

$$3 \cdot 10^{-6} \cdot t^2+2 \cdot 10^{-4} \cdot t-10^2=0$$

$$t^2+\frac{2}{3} \cdot 10^4 \cdot t-\frac{1}{3} \cdot 10^6=0$$

$$t_{1,2}=-\frac{1}{3} \cdot 10^4 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 10^8+\frac{3 \cdot 10^6}{3 \cdot 3}}$$

$$t_{1,2}=-\frac{10^4}{3} \pm \frac{10^4}{3} \sqrt{1+3 \cdot 10^{-2}}$$

$$t_1=\frac{10^4}{3}(\sqrt{1,03}-1) \approx 50$$

t_2 entfällt

Die Temperatur muß auf ungefähr 50°C erhöht werden.

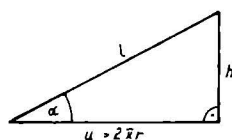
Ph 10/12 ■ 140 Geg.: $r=6,2 \text{ mm}$

$$h=15 \text{ mm}$$

Ges.: Anstiegswinkel α

Länge der Schraubenbahn l

Wickelt man eine Windung dieser Schraubenlinie ab, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und $u=2\pi r$; die Hypotenuse ist die Länge l einer Schraubenbahn (siehe Bild).



$$\text{Dann ist } \tan \alpha = \frac{h}{2\pi r},$$

$$\tan \alpha = \frac{15 \text{ mm}}{2 \cdot 3,14 \cdot 6,2 \text{ mm}}$$

$$\tan \alpha = 0,3852,$$

$$\alpha \approx 21,1^\circ.$$

Weiterhin gilt

$$l^2=h^2+(2\pi r)^2,$$

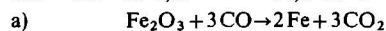
$$l=\sqrt{h^2+4 \cdot \pi^2 \cdot r^2},$$

$$l=\sqrt{15^2+4 \cdot 3,14^2 \cdot 6,2^2 \text{ mm}},$$

$$l \approx 41,7 \text{ mm}.$$

Der Steigungswinkel einer Schraubenlinie beträgt $21,1^\circ$, und die Länge einer Schraubenbahn ist ungefähr $41,7 \text{ mm}$.

Ch 7 ■ 109 $m \cdot 0,56$ $14,8 \cdot 10^6 \text{ t}$



$$\frac{160 \text{ g}}{160 \text{ g}}=\frac{14,8 \cdot 10^6 \text{ t}}{112 \text{ g}}$$

$$m=\frac{14,8 \cdot 10^6 \text{ t} \cdot 160 \text{ g}}{112 \text{ g} \cdot 0,56}$$

$$m=37,8 \cdot 10^6 \text{ t}$$

$37,8 \cdot 10^6 \text{ t}$ Roteisenstein müssen jährlich verarbeitet werden.

$$\text{b) } \frac{37,8 \cdot 10^6 \text{ t}}{20 \text{ t}}=1890000$$

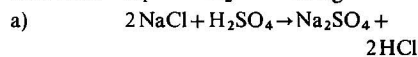
Für den Transport werden 1890000 Eisenbahnwaggons benötigt.

$$\text{c) } 1890000 \cdot 8 \text{ m}=15120000 \text{ m}$$

$$=15120 \text{ km}$$

Die Länge der Eisenbahnwaggons zusammen beträgt etwa 15120 km .

Ch 8 ■ 110 m_1 m_2 97 kg



$$\frac{117 \text{ g}}{142 \text{ g}}=\frac{98 \text{ g}}{142 \text{ g}}$$

$$m_1=\frac{117 \text{ g} \cdot 97 \text{ kg}}{142 \text{ g}}$$

$$m_1=79,9 \text{ kg}$$

$$m_2=\frac{98 \text{ g} \cdot 97 \text{ kg}}{142 \text{ g}}$$

$$m_2=66,9 \text{ kg}$$

$$81,7 \text{ kg NaCl} \quad 74,5 \text{ kg H}_2\text{SO}_4$$

$$-79,9 \text{ kg NaCl} \quad -66,9 \text{ kg H}_2\text{SO}_4$$

$$1,8 \text{ kg NaCl} \quad 7,6 \text{ kg H}_2\text{SO}_4$$

Es werden $1,8 \text{ kg}$ Natriumchlorid und $7,6 \text{ kg}$ Schwefelsäure im Überschuß eingesetzt.

$$\text{b) } 81,7 \text{ kg} \geq 100\%$$

$$1,8 \text{ kg} \geq x$$

$$x=\frac{1,8 \text{ kg} \cdot 100\%}{81,7 \text{ kg}}$$

$$x=2,2\%$$

$$74,5 \text{ kg} \geq 100\%$$

$$7,6 \text{ kg} \geq x$$

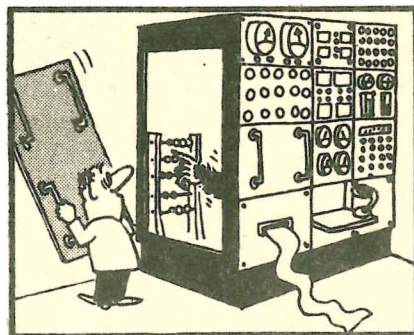
$$x=\frac{7,6 \text{ kg} \cdot 100\%}{74,5}$$

$$x=10,2\%$$

$2,2\%$ Natriumchlorid und $10,2\%$ Schwefelsäure werden praktisch mehr verwendet.

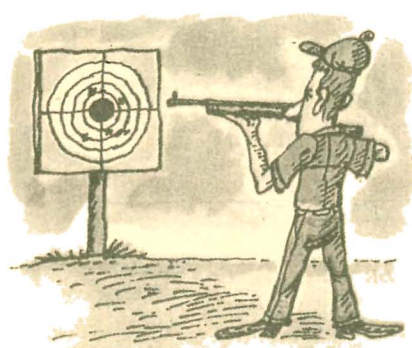
Ch 9 ■ 111 Zur Bildung der gewünschten Menge Harnstoff werden $106,4 \text{ m}^3$ Ammoniak und $53,2 \text{ m}^3$ Kohlendioxid benötigt.

Ch 10/12 ■ 112 Im Gemisch sind $42,5\%$ Kalziumkarbonat und $57,5\%$ Magnesiumkarbonat enthalten.



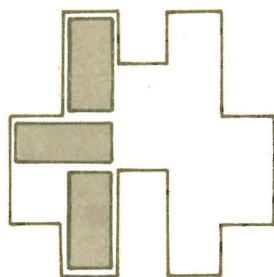


1. При стрельбе по мишени спортсмен несколько раз попал в десятку, столько же раз выбил по 8 очков и несколько раз попал в пятерку. Всего он набрал 99 очков. Сколько выстрелов сделал спортсмен?



2. Parmi les diamants célèbres, le diamant Orloff fut trouvé aux Indes au XVII^e siècle. Il est actuellement conservé au Kremlin. Non taillé, sa masse était 300 carats; une fois taillé, sa masse est 189,6ct. Calculez en grammes la masse de ce diamant avant et après la taille.

3. Slide the three blocks, without turning them, so that they occupy the right hand side of the region.

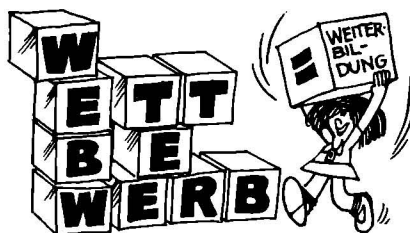


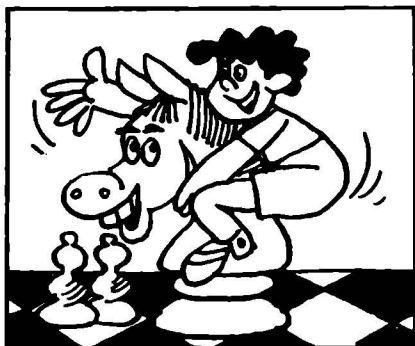
alpha-Wettbewerb

**Kollektive Beteiligung
am alpha-Wettbewerb 1982/83**

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, Haus der Jungen Pioniere, beide Altenburg; W.-Pieck-Schule, Anklam; OS German Titow, Arenshausen; OS Fr. Weineck, Alsleben; OS Asbach; E.-Thälmann-OS, Bad Bibra; Lessingschule, Bad Doberan; OS S. Radel, Bad Gottliebs; R.-Schwartz-OS, Bad Liebenstein; O.-Grotewohl-OS, M.-Poser-OS, A.-Saefkow-OS, alle Bad Salzungen; OS Bad Wilsnack; R.-Siewert-OS, Bad Suderode; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; 13. OS M. A. Nexö, 39. OS, beide Berlin; 26. OS, Berlin-Marzahn; 8. OS E. Thälmann, Bernburg; A.-Bebel-OS, Beucha; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; Math. Kreisrings, Bischofswerda; OS Fr. Schiller, Bleicherode; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS L. Herrmann, Blumenhagen; OS Blumenthal; OS Boddin; OS W. Komarov, Boxberg; K.-Bürger-OS, Bredenfelde; Dinter-OS, Borna; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; OS B. Brecht, Brehme; OS Breitenworbis; W.-Seelenbinder-OS, Breitenungen; OS Freundschaft und Frieden, Brieselang; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; TOS Büttelstedt; H.-Beimler-OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Cottbus; H.-Wiedner-OS, Dahlen; OS Dambeck; M.-Gorki-Schule, Dermbach; OS Deutschenbora; OS Diesdorf; OS K. Kollwitz; OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast, 106. OS, beide Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; OS H. Grundig, Ellrich; OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; H.-Joachim-OS, Espenhain; Th.-Müntzer-OS, Fambach; OS Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; Zentrale OS, Frankenheim; Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder); K.-Marx-OS, Freyburg; BBS ESW, AG Naturw., Freital; OS Friedeburg; OS V. H. Günther, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; OS Geschwenda; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; OS Gielow; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Kreisklub Math. Gräfenhainichen; Kreisklub Math., E.-Thälmann-OS, beide Greifswald; W.-Husemann-OS, Goldberg; 7. OS Görlitz; OS H. Beimler, Greußen; OS W. Seelenbinder, Gröden; III. OS Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; A.-Becker-OS, Großenstein; OS Großbodungen; Lessingschule, Großpostwitz; Pestalozzischule, Großschönau; Fr.-Schmenkel-OS, Großtreben; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Guben; OS Th. Müntzer, Gumpelstadt; M.-Gorki-OS, Hainichen; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Marx-Engels-Schule, beide Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, Halle; W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; EOS Havelberg; Zentrale OS, Hasental; OS Haynrode; OS W. Pieck, Heiligenstadt; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; M.-Gorki-OS, Hillersleben; E.-Weinert-OS, Hohenmölsen; OS Horka; Goethe-OS, Ilseburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; Fr.-Engels-OS, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; Cl.-Zetkin-OS, Kaulsdorf; H.-Menzel-OS, E.-Schneller-OS, Wl.-Komarov-OS, E.-Thälmann-OS, P.-Tschakowski-OS, Pionierhaus J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; OS Kelbra; OS Kirchworbis; OS Th. Neubauer, Kieselbach; EOS Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Kletitz; OS E. Thälmann, Klosterfelde; W.-Seelenbinder-OS, Könnitz; OS I. Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; OS Lauscha; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Station Jg. Naturf. u. Techniker, OS J. C. Fuhlrott, E.-Thälmann-OS, EOS K. Marx, K.-Liebknecht-OS,

Dr.-S.-Allende-OS, alle Leinefelde; 146. OS O. Schön, Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, beide Leipzig; OS W. Pieck, Lichte; OS J. Schröder, Lubmin; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Ludwigslust; Station Jg. Naturf. u. Techniker Lütz; Fr.-L.-Jahn-OS, Lüttheen; OS W. Wallstab, Löderburg; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; Haus d. Jungen Pioniere, Magdeburg; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; II. OS Mieste; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS H. Danz, Möser; OS Kombinat Molschleben; Kinderheim Munzig; OS W. Bykowski, Neetzow; OS Neu Gülze; OS O. Grotewohl, Neukloster; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Fr.-Schiller-OS, Neustadt; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Niederorschel; OS E. Weinert, Oberschönau; OS Ockrilla; W.-Seelenbinder-OS, Oechsen; Fr.-Weineck-OS, Oranienbaum; Pestalozzi-OS, Oschatz; OS Osternienburg; H.-Matern-OS, W.-Pieck-OS, beide Osterwieck; Station Jg. Naturf. u. Techniker, EOS, beide Parchim; Geschw.-Scholl-OS, Perleberg; Zentrale OS, Petersdorf; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; M.-Zimmering-OS, Pirna; Makarenko-OS, Plessa; A.-Becker-OS, Prenzlau; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; Kreisklub Math., Quedlinburg; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; H.-Zille-OS, Radeburg; Geschw.-Scholl-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; OS U. Steinhauer, J.-Gagarin-OS, OS Fr. Engels, alle Ribnitz-Damgarten; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Haus d. Jungen Pioniere, 72. OS, 34. OS M. Reichpietsch, alle Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; OS Rottleberode; OS Th. Müntzer, Rüssen; OS Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; OS Sanitz; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Schlottwitz; 4. OS, J.-G.-Seume-OS, beide Schmalkalden; OS DSF, Schneidlingen; H.-Beimler-OS, Schönschhausen; EWOS, Schollene; POS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; M.-May-OS, Sebnitz; OS Siedenbollentin; OS Sohland; OS J. R. Becher, OS W. Pieck, OS Glückauf, alle Sondershausen; OS A. Becker, OS K. Marx, beide Spremberg; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; Dr.-S.-Allende-OS, Stralsund; OS Sünna; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; 12. OS Dr. R. Sorge, 11. OS A. S. Schumawzow, OS Fr. Köhler, alle Suhle; H.-Zille-OS, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; OS K. Niederkirchner, Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; A.-Nitz-OS, Ehm-Welk-OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-Hennecke-OS, Untermaßfeld; OS J. G. Seume, Vacha; A.-Becker-OS, Vogelsang; OS Vitte; alpha-Club, Vitzsburg; Th.-Müntzer-OS, Walsleben; Goetheschule, Waren; OS L. Füllberg, Wegeleben; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; OS Weißenborn-Lüderode; NOS I, Weissenfels; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.-Rau-OS, Wildau; E.-Thälmann-OS, Fr.-Engels-OS, beide Wittstock; Th.-Neubauer-OS, Wohlmirstedt; H.-Beimler-OS, Wolfen; Zentralschule, Wolkenburg; OS II, Worbis; OS Wernshausen; OS Wülknitz; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS, Wusterhausen; P.-Lamberg-OS, Zehdenick; Luther-OS, Zella-Mehlis; OS A. C. Sandino, Zöblitz; Goethe-OS, Zossen; Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, EOS, beide Zittau; OS Zschornowitz.





Schach dem König

Aufgepaßt und mitgemacht! Gesucht werden die besten Schachspieler unter den *alpha*-Lesern!

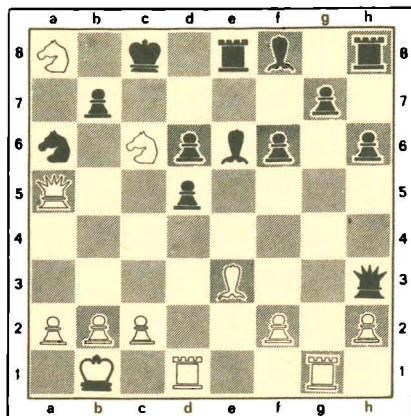
Dazu sind acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit zu lösen. Die jeweilige Punktzahl ist bei den Aufgaben mit angegeben. In allen acht Aufgaben beginnt *Weiß* und setzt trotz bester Gegenwehr von *Schwarz* in der geforderten Zügezahl matt.

Alle Teilnehmer, die die volle Punktzahl erreichen, erhalten eine Urkunde. Außerdem winkt dreien von ihnen ein Buchpreis. Unter allen anderen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden ebenfalls drei Bücher verlost. Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser.

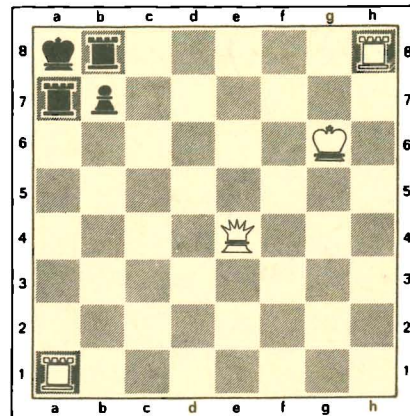
Die Einsendungen der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) sind bitte bis zum 1. März 1984 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

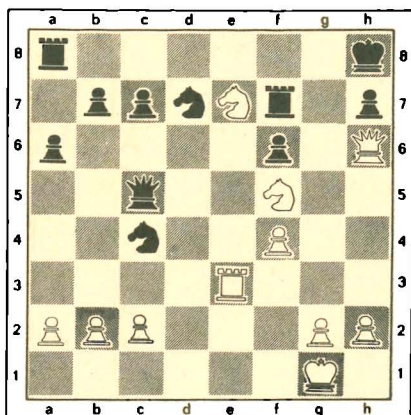
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1984 veröffentlicht.



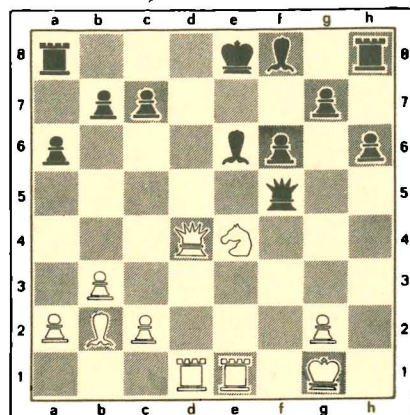
Nr. 2 Matt in zwei Zügen (2 Punkte)



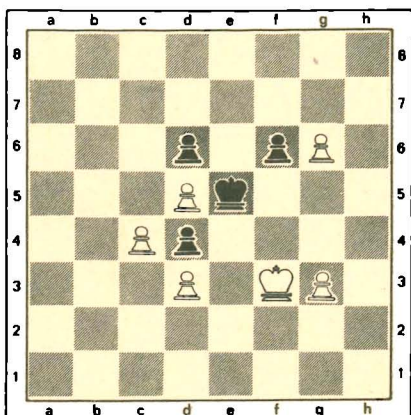
Nr. 6 Matt in zwei Zügen (4 Punkte)



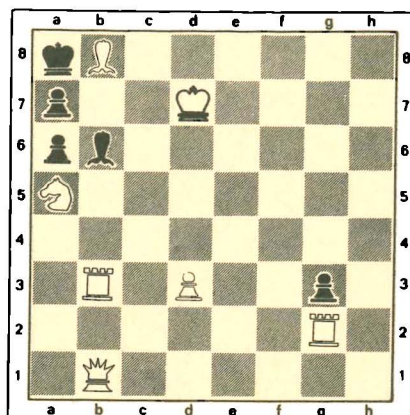
Nr. 3 Matt in drei Zügen (3 Punkte)



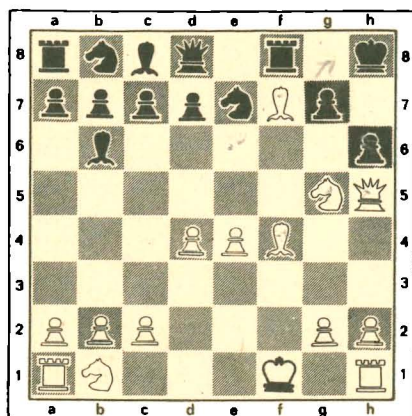
Nr. 7 Matt in fünf Zügen (5 Punkte)



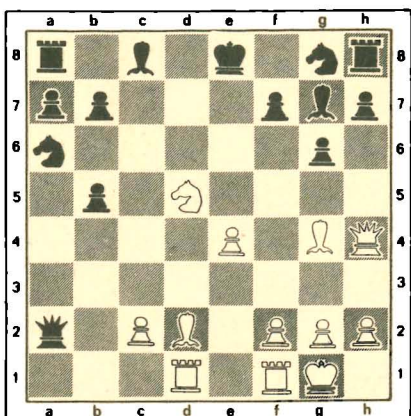
Nr. 4 Matt in drei Zügen (3 Punkte)



Nr. 8 Matt in zwei Zügen (6 Punkte)



Nr. 1 Matt in zwei Zügen (2 Punkte)



Nr. 5 Matt in vier Zügen (4 Punkte)



„Bauernmatt“

$$y = mx + n, y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^n \leftrightarrow y = \sqrt[n]{x}$$

Kreuzzahlrätsel: Elementare Funktionen



$$\begin{aligned} y &= a^x \leftrightarrow y = \log_a x \\ y &= \sin x \leftrightarrow y = \arcsin x \\ y &= \cos x \leftrightarrow y = \arccos x \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Figur „y“ – ab Klasse 7, Figur „= f“ – ab Klasse 9,
Figur „(x)“ – ab Klasse 11.

Abkürzungen: a. = an, Abs. = Abszisse(n), Abl. = Ableitung, An. = Anstieg, D. = Differenz, d. = der (die, das, des, den), du. = durch, e. = ein (eine, einer, eines), eg.w. = eingeschlossen wird, F. = Funktion(en), Fl. = Flächeninhalt, Fls. = Flächenstück(es), Ger. = Gerade(n), ges. = gesucht(e), Gl. = Gleichung(en), Gls. = Gleichungssystem(s), Gr. = Größe, i.g.R. = in geordneter Reihenfolge, L. = Lösung(en), LE = Längeneinheit, m. = mit, max. = maximal(e), Nst. = Nullstelle(n), O. = Ordinate, Pr. = Produkt, Pu. = Punkt(e), Pz. = Primzahl, S. = Summe, Sp. = Schnittpunkt(es), St. = Stelle, u. = und, v. = von (vom), Vol. = Volumen, W. = Wert, w. = wobei.

Waagerecht: 3) W.d.F. $y = 3,5x - 2,75$ a.d.St. $x_0 = 4,5$; 4) Nst.d.F. $y = 0,5x - 5,5$; 6) O.d.Sp.d.Ger. $5x + y - 12 = 0$ m.d. y -Achse; 8) An.d.Ger. $28x - 2y + 3 = 0$; 9) Abs.d.Sp.d.Ger. $\frac{2}{11}x - 101y = 0$ u. $x - y$

-1109=0; 10) positive L.d.Gl. $1,4|x|+1=|x|+5$; 11) L.d.Gl. $\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{6}(x+23)$; 13) Vermindert man d. Vierfache d.ges. Zahl um 8, u. dividiert man d. Ergebnis du. 20, so erhält man d. Basiszahl d. Dezimalsystems; 15) Abs.d.Sp. derjen. Ger., die du.d. Pu. $P_1(-5, -\frac{4}{3})$ u. $P_2(3, -\frac{4}{3})$ verläuft, m.d. x-Achse; 16) L.d.Gl. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{5}=19$; 17) L.d.Gl.

$\frac{x-5}{x+4} = \frac{x+3}{x+14}$; 18) Dividiert man d.ges. Zahl du 19, u subtrahiert man v. Ergebnis 17, so erhält man 68;
 19) e.Nst.d.F. $y = x^2 - 11x - 12$; 21) S.d. Koordinaten
 d. Scheitelpunktes d. Parabel $y = x^2 - 14x + 57$; 22)
 W.d.F. $y = 10^x$ a.d.St. x_0 für die $\ln e^{x_0} = 2$ gilt;
 23) D.v.Pr. u. S.d.Nst.d.F. $y = x^3 - 28x^2 + 259x - 792$; 25) S.d.Nst.d.F. $v = x^2 - 17x + 72$; 26) W.d.Gr.

$a = \sin \frac{\pi}{2} + \ln e^3 + \left[\log_{0.5} \left(\frac{1}{64} \right) \right]^2$; 27) W.d.Gr. $c = \frac{a}{b}$,
 $w = a^{2^2 \cdot 2^{22} (2^2)^2}$ u. b d. größten Zweierpotenz, die
kleiner als 107 ist, sind; 29) Lösungspaar (x, y)
d. Gl.s. $2e^x + \log_3 y = 4$, $5e^x + 6 \log_3 y = 17$; 30) L.d.Gl.
 $2e^{x-17} = \lg 100$; 32) L.d.Gl. $3^{\log_3(100\sqrt{5})} = 1$; 33) ganz-
zahlige L.d.Gl. $\frac{1}{2}(\lg x)^2 = 2 - \frac{3}{2} \lg x$; 34) Lst.d.F. y
 $= \sqrt{x^2 + 21 - x - 1}$; 35) L.d.Gl. $\log_2 x + \log_4 x$
 $+ \log_{16} x = 7$; 37) W.d.Gr. $d = abc$, w. a d. kleinste un-
gerade Pz., b positive L.d.Gl. $\sqrt{x^2 + 7} - 4 = 0$ u. c
 $= f(12)$, w. $y = f(x) = x^2 - 5$ ist; 40) Vol. (in cm^3)
e. Quaders m.d. Kanten $a = a_1$, cm , $b = b_1$, cm

$c = c_1 \text{ cm, w. } a_1 \text{ L.v. (33w), } b_1 \text{ L.v. (16w) u. } c_1$
 $\text{L.d.Gl. } e^{0.5x-10} = 1 \text{ sind; 41) W.d.Gr. } a = \left[9 \sum_{n=0}^8 \sin \right.$
 $\left. (110^\circ + n \cdot 20^\circ) \right]^2$; 43) In e. Dreieck m.d. Winkeln

α, β, γ bestimme d. Beziehung $\sin \gamma = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
 ges. ist d.Gr.v. γ (in $^\circ$); 44) Fl. (in cm^2) e. Rechtecks
 m.d. Seiten $a = a_1$ cm u. $b = b_1$ cm, w. $a_1 = e^{\ln 7}$
 $(\sin \frac{3\pi}{2})^2$ u. b_1 e.Pz.m. $10 < b_1 < 30$ ist, deren Quer-
 summe 4 beträgt; 46) W.d.Gr. $g = \lim_{x \rightarrow 0} (11 + 3x^2 +$
 $+\frac{\tan x}{x})$; 47) An.d.F. $y = 3x^3 + 6x^2 - 10x + 1$ a.d.St.

$x_0 = 1$; 49) W.d.1.Abl.d.F. $y = 3x - \frac{x+3}{x^2}$ a.d.St.
 $x_0 = -1$; 50) An.d.F. $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ a.d.St. $x_0 = \frac{1}{9}$;
 53) W.d.2.Abl.d.F. $y = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)$

a.d.St. $x_0 = 12$; 54) Anstiegswinkel (in $^\circ$) d. Graphen d.F. $y = \sin x \cdot \cos x$ a.d.St. $x_0 = 0$; 56) Pr.D.Abs. d. relativen Extrempunkte d.F. $y = x^3 - 21x^2 + 120x + 1$; 58) W.d.F. $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a.d.St. $x_0 = 4$, w. gilt: $f'(0) = 2$, $f(1) = 6$, $f(2) = 18$ u. $f'(3) = 35$; 59) W.d. quadratischen F. $y = f(x)$ a.d.St. $x_0 = 5$, für d. gilt: $f(0) = -2$, $f'(1) = 2$ u. $f''(2) = 10$; 61) Mit 16 m Mastendraht soll e. rechtw. Dreieckiges Tiergehege max.Fl. eingezäunt werden, u. zwar so, daß e. Seite an e. Mauer grenzt, ges. ist d.max.Fl. (in m^2) dieses Geheges; 62) Einem geraden Kreiskegel ($r = 4,5$ cm; $h = 9$ cm) soll e. gerader Kreiszylinder m.max.Vol. eingeschrieben werden, ges. ist d.max. Längerschnitt d. Zylinders; 63) Aus 3 gleich breiten Brettern soll e. Dachrinne trapezförmigen Querschnitts hergestellt werden, ges. ist d. Neigungswinkel (in $^\circ$) d. Seitenflächen, damit d. trapezförmige Querschnittsfläche d. Rinne max. wird.

Nachtr. d. Kinnre max. wird:
 Senkrechte: 1) Peter ist 10 Jahre, sein Vater 33 Jahre alt. Nach wieviel Jahren ist Peters Vater doppelt so alt wie Peter?; 2) Vermindert man 31 um d.ges. Zahl, u. dividiert man d.D. du. 20, so erhält man 1;
 3) An d. Ger., die d. d. Pu. $P_1(0, 0)$ u. $P_2\left(\frac{1}{11}, 11\right)$ verläuft; 5) Abs.d.Sp.e.d. d. Ger. $P(0, 12)$ verlaufenden Ger., die parallel zu d. Ger. $x + 12y = 0$ verläuft, m.d. x-Achse; 7) Weg (in m), den ein m. e. Geschwindigkeit v. 126 km/h geradlinig, gleichförmig bewegter Körper in 6 s zurücklegt; 8) Massen (in g) e. Betonstückes (Dichte $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, Vol. $V = 37 \text{ cm}^3$);
 12) L.d. Gl. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 167$; 14) L.d. Gl. $\frac{6903}{x} - 1$

$= \frac{2301}{x} + 1$; 15) L.d.Gl. $\frac{x}{83} + 68 = \frac{x}{15}$; 20) Pr.d.Nst.
d.F. $y = x^2 - 10x + 21$; 21) W.d.F. $y = 1,5x^2 - 15x$
+ 10 a.d.St. $x_0 = 10$; 23) W.d.F. $y = ax^2 - bx - c$
a.d.St. $x_0 = 7$, wenn a u. b L.d.Gl. $x^2 - 4x + 4 = 0$
sind, u. c d. größte einstellige Pz. ist; 24) e.Nst.d.F.
 $y = ax^2 + bx + 44$, wenn a u. b L.d.Gl. $a - b = 46$,
 $46a + b = 1$ sind; 27) Höhe e. Turmes (auf volle
Meter gerundet, Angabe aber in cm), wenn e.v.
oben herabfallender Stein 6,3 s bis zum Aufschlag
benötigt ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$); 28) ges. ist c, so daß d.
Graph d.F. $y = x^4 - 189x - c$ du.d.Pu. $P(10, 0)$ ver-
läuft; 29) ganzzahlige L. (i.g.R.) d.F. $2(n^3 + n) = 5n^2$;
31) ges. ist c, so daß d. Graph d.F. $y = \lg\left(c \cdot \frac{1-2x}{7-3x}\right)$
du.d.Pu. $P(0, 1)$ verläuft; 34) W.d.Gr. $d = x^2 + y^2$
w. (x, y) L.d.Gl. $3x - 2y = 7$, $x + 2y = 29$ ist; 36) W.
d.F. $y = 3^x - 111$ a.d.St. $x_0 = 8$; 37) W.d.Gr.

$a = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}^2$; 38) W.d.F. $y = 2^x$ a.d.
 $St.$ x_0 , wobei x_0 d. kleinste zweist. Pz. ist;
 39) e.L.d.Gl. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1$; 42) ganzzahlige
 L.d.Gl. $|1 + \lg x| = 3$; 43) L.d.Gl. $|x + 900| = 2x - 99$,
 45) L.d.Gl. $2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} = 512$; 46) W.d. Integrals
 $I = \int_0^4 (42x^6 + 18x^5 + 8x^3 + 2)dx$; 48) W.d.Gr. $a =$

tan(arccos 0,1), 51) Fl. (in LE^2) d.Fls., das v.d.
 $\frac{\sin(\arccos 0,1)}{\sin(\arccos 0,1)}$
 Kurven $y=x^4-10x^2+9x=-4$ u. $x=-2$ eg.w.;
 52) Fl. (in LE^2) d.Fls., das v.d. Kurve $y=\sin x$
 u.d. x-Achse ($0 \leq x \leq 7\pi$) eg.w.; 53) Fl. (in LE^2)
 d. endl. Fls., das v.d. Parabel $y=\frac{37}{\pi^2}x^2$ u.d.

Ger. $y = 111$ eg.w.; 55) d. Parabelstück $y = x^2 + 2$, $-5 \leq x \leq 5$, rotiere um d. x -Achse, ges. ist d.Vol. (in LE^3 , auf ganze Einheiten gerundet) d. entstehenden Rotationskörpers; 57) Abs. (i.g.R.) d. Wendepunkte d.F. $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x + 1$; 58) Fl. (in LE^2) d.Fls., das v.d.Ger. $y = \frac{9}{11}x + 4,5$, $y = 0$, $x = 0$ u. $x = 11$ eg.w.; 60) W.d. 9. Abl. d.F. $y = x^9 + x^6 + x^3 + 1$; 61) Fl. (in LE^2) d.Fls., das v.d. Kurve $y = 27x^2 + 2$ u. d. Ger. $y = 0$ u. $x = 0$ u. $x = 5$ eg.w.

Bei richtiger Auflösung ergeben die Ziffern in den Kästchen mit zweistelliger Primzahlnummer (bei geordneter Reihenfolge der Kästchennummern und sinnvoller Punktierung) die Lebensdaten des genialen Schweizer Mathematikers Leonhard Euler.

Dr. Roland Mildner,
Sektion Mathematik der KMU Leipzig