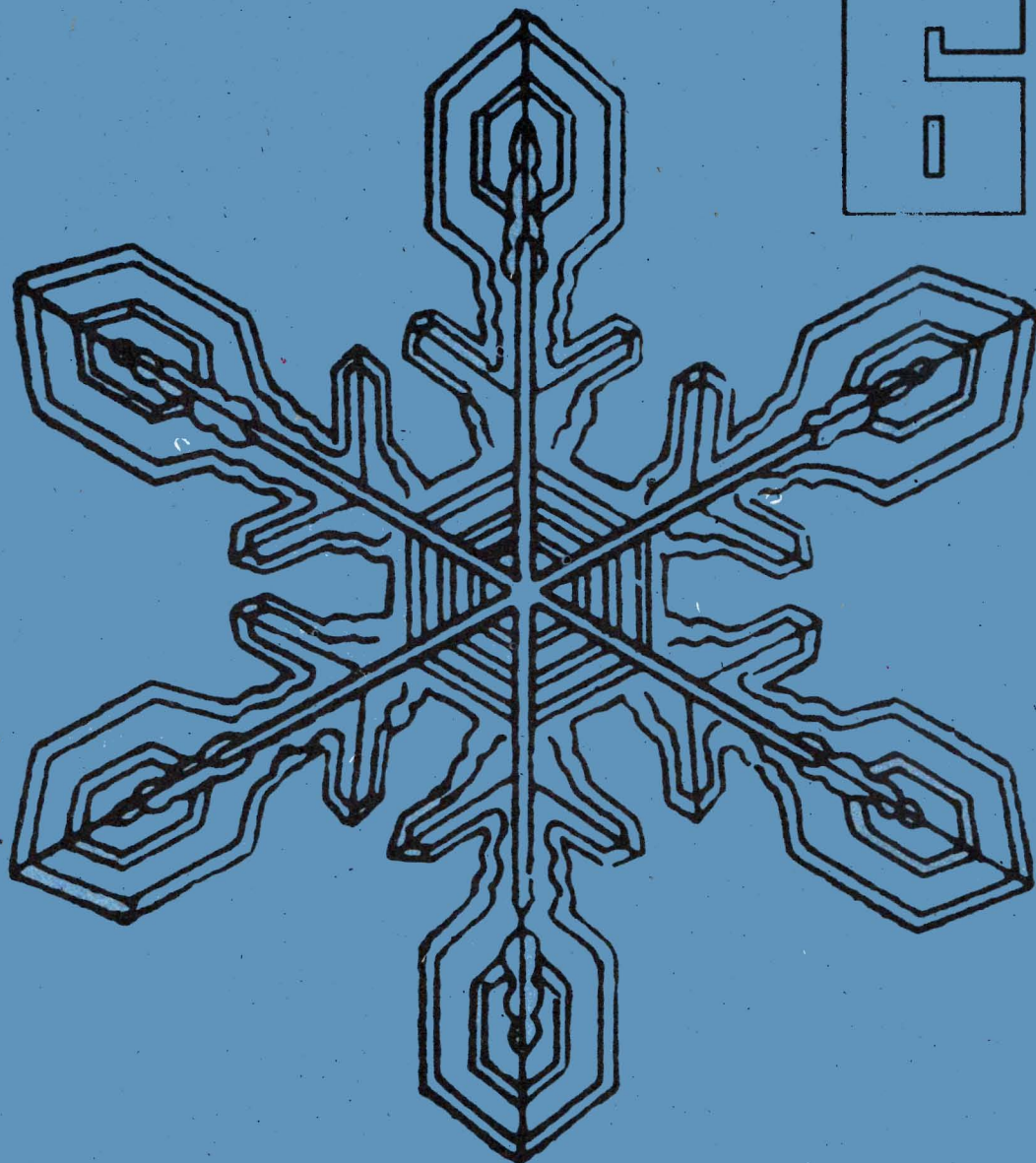
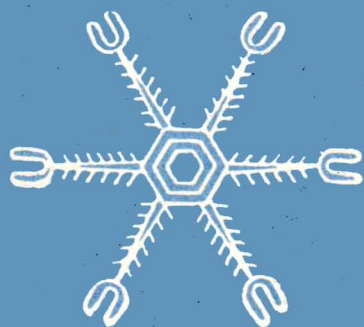
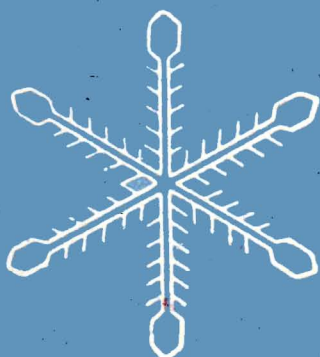
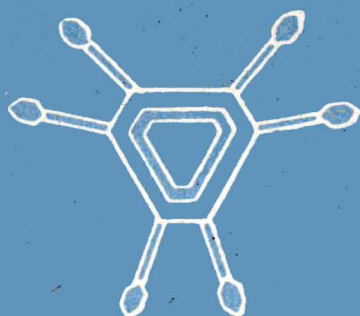


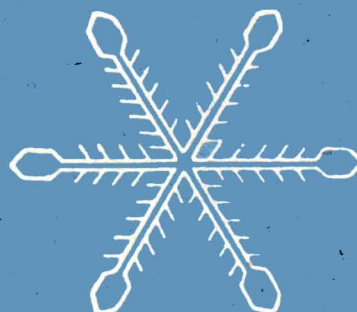
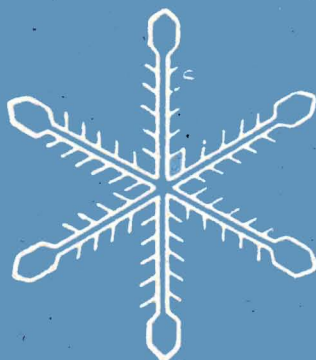
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

6



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:

PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:

Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur);
Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade

(Halle); Studiendirektor Dr. W. Fregin

(Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz

(Karl-Marx-Stadt); OL Dr. C. P. Helmholz

(Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner

(Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz);

Oberstudienrat J. Lehmann, VLDV

(Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer

H. Pätzold (Waren/Müritzt); Dozent

Dr. sc. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent

Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr.

sc. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat

G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. sc. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln);

Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLDV (Halle)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545

des Presseamtes beim Vorsitzenden des

Ministerrates der Deutschen Demokratischen

Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzel-

heft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich

0,50 M. Bestellungen werden in der

DDR von der Deutschen Post und dem

Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug

für die Bundesrepublik Deutschland und

Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel;

für das sozialistische Ausland über das

jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und

für alle übrigen Länder über: Buchexport

Volkseigener Außenhandelsbetrieb der

DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: Foto-Service Martin, Karl-Marx-

Stadt (Titelblatt, S. 121); AG alpha, Friede-

burg (S. 125); Foto Wiese, Demmin

(S. 128); J. Weiß (S. 129); J. Wierzba

(S. 134)

Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten,

S. 124, S. 131 r. o.)

Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß,

Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 15. August 1989

Auslieferungstermin: 11. Dezember 1989



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 **Schneekristalle**
Dr. H. Beyrich, Karl-Marx-Stadt
- 121 **Sprachecke**
- 122 **Viele Aufgaben – die gleiche Methode**
Dr. W. Moldenhauer, Sektion Mathematik der Pädag. Hochschule „Dr. Th. Neubauer“ Erfurt
- 124 **Viele Ziffern verderben den Brei**
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der M.-Luther-Universität Halle
- 125 **20 Jahre alpha in Friedeburg**
AG „alpha“ der E.-Thälmann-OS Friedeburg
- 126 **Die Quadratur der Parabel**
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR
- 128 **Auf den Spuren von Mathematikern**
Ein Besuch in Magdeburg
Mathematikfachlehrer Chr. Grundmann, H.-Kasten-OS Staßfurt,
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 129 **Schachecke**
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 129 **Hermann Minkowski zum 125. Geburtstag**
J. Weiß, Lektor für Mathematik bei BSB B. G. Teubner, Leipzig
- 130 **In freien Stunden · alpha-heiter**
Zusammenstellung: Dr. G. Liebau, Leipzig
- 132 **Wer hat recht?**
Dr. R. Thiele, K.-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften der K.-Marx-Universität Leipzig
- 133 **100mal 1989 – beispielhaft gelöst**
- 134 **PHOBOS – Betrachtungen zu einem Unternehmen**
Schüler J. Wierzba, Spezialschule „Friedrich Engels“ Riesa
- 135 **alpha gratuliert StR H.-Joachim Kerber**
- 136 **Programmieren auf jeden Fall?**
Dr. W. Görgens, Sektion Informatik der TU „Otto v. Guericke“ Magdeburg
- 136 **Resümee der Lösungen zur Wettbewerbsaufgabe**
Ma 10/12 ■ 2941
- 138 **Wie ich eine Eigenaufgabe erfand**
StR H.-Joachim Kerber, Neustrelitz
- 139 **alpha-Wettbewerb 1988/89 · Kollektive Beteiligung**
- 140 **Wer löst mit? alpha-Wettbewerb**
Zusammenstellung: Dr. W. Fregin/Dr. W. Riehl (beide Leipzig), OStR Th. Scholl, Berlin
- 142 **Unterhaltsamer Denksport**
- 143 **XXX. Internationale Mathematikolympiade, Braunschweig 1989**
- 144 **Lösungen**
- IV. U.-Seite: Mathematisches ALPHA-Quintett



Alphas weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Schneekristalle

Wer hat nicht schon einmal die ersten Schneeflocken auffangen wollen, um sie zu betrachten. Es sind zarte Gebilde, die bald vergehen. Sie bestehen meist aus flachen Sternchen mit gefiederten Strahlen, selten aus dünnen Täfelchen oder Nadeln. Besonders die ebenen Figuren lassen ganz regelmäßige Formen und die sechszählige, manchmal dreizählige Symmetrie gut erkennen (siehe Titelbild und Bild 1).

Die sechszählige oder dreizählige Symmetrieachse verläuft senkrecht zur Ebene der Schneesterne oder -täfelchen durch deren Mittelpunkt. Diese Ebene ist eine Symmetrieebene. Der Schnittpunkt der sechszähligen (nicht der dreizähligen) Symmetrieachse mit ihr bildet ein Symmetriezentrum oder Inversionszentrum. Ebenfalls senkrecht zu den Sternchen und mit Schnittgeraden entlang der Strahlen und/oder ihrer Winkelhalbierenden befinden sich 3 + 3 bzw. 3 Symmetrieebenen. Bei den Täfelchen berühren diese Symmetrieebenen und Schnittgeraden die einander gegenüberliegenden Ecken und/oder Kantenmitten der Sechsecke bzw. Dreiecke. Die senkrechten Symmetrieebenen schneiden sich in der sechs- oder dreizähligen Symmetrieachse und schließen Winkel von 30° oder 60° ein. In den genannten Schnittgeraden beobachtet man 3 + 3 bzw. 3 zweizählige Symmetrieachsen. Die bei sechszähliger Symmetrie auftretenden beiden Arten der senkrechten Symmetrieebenen und der zweizähligen Symmetrieachsen sind nicht gleichwertig.

Wie alle chemischen Substanzen kristallisieren Schnee oder Eis in der ihnen eigenen, charakteristischen Gestalt. Die Symmetrie der äußeren Erscheinung wird durch die Anordnung der atomaren Bausteine, hier der H₂O-Moleküle, bedingt. Diese innere Struktur, das Kristallgitter,

besitzt die oben beschriebene sechszählige Symmetrie (Kristallklasse dihexagonal-dipyramidal) oder nur eine polare, d. h. in beiden Richtungen bzw. an beiden Enden ungleiche sechszählige Symmetrieachse und 3 + 3 sich in ihr schneidende Symmetrieebenen (Kristallklasse dihexagonal-pyramidal).

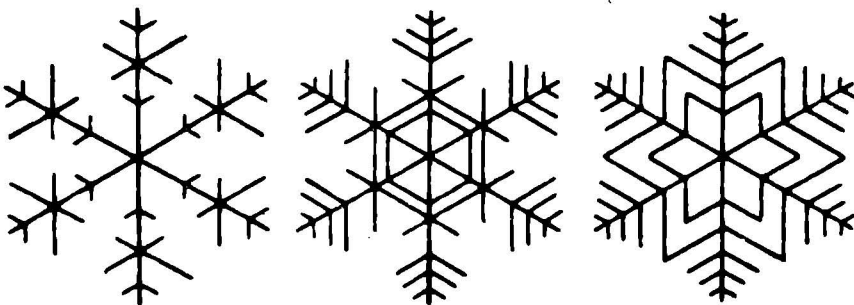
Dem Zusammenhang zwischen der sichtbaren Form der Schneekristalle und ihrem inneren Aufbau ging bereits der Astronom, Physiker und Mathematiker Johannes Kepler (1571 bis 1630) nach. Seine in lateinischer Sprache verfaßte Schrift „Neujahrs-gabe oder Der sechseckige Schnee“ (1611) steht am Anfang der Kristallographie als Wissenschaft. Kepler erkannte als erster die sechszählige Symmetrie der Schneesterne und versuchte, sie durch die Geometrie der Zusammenfügung von angenommenen gleichgroßen Erstarrungskügelchen des Wasserdampfes zu erklären. Mit seinen Gedanken nahm er die heute gewohnte Darstellung von Kristallstrukturen durch Kugelpackungen vorweg. Die eigentlich notwendig zu folgender Ableitung der äußeren Symmetrie aus der inneren Anordnung der Materie gelang ihm aber nicht. Kepler beobachtete auch, daß der Schnee in Gestalt der Sternchen und der Schneegraupeln fällt. Bei dem frühen wissenschaftlichen Interesse an den Schneekristallen ist es schon bemerkenswert, wenn bis in die Gegenwart noch nicht alle Fragen ihrer Symmetrie endgültig gelöst sind.

Die Schneesterne zeichnen sich durch zwei Besonderheiten aus. Sie sind fast nur zweidimensional entwickelt. Dadurch fehlen in der Regel Kristallflächen anderer räumlicher Orientierung, die die Symmetrie besser erkennen lassen würden. Außerdem entstehen die Schneekristalle überwiegend als Kristallskelette in Form der Sternchen mit gefiederten Strahlen. Das geschieht durch bevorzugtes Wachstum der Kristallkanten und -ecken vor den Kristallflächen. Die Ausbildung der Kristalle wird von dem Bau des Kristallgitters und den Kristallisationsbedingungen beeinflusst. Ersterer hat bei den Schneesternen offenbar das Übergewicht, was man aus ihrer Regelmäßigkeit schließen kann.

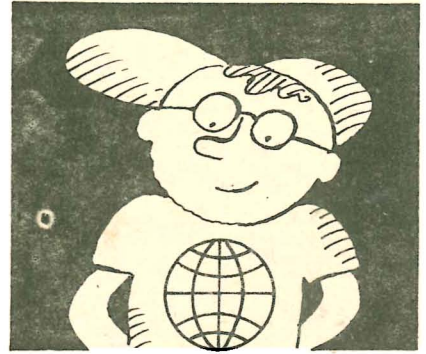
H. Beyrich

(beide Abbildungen aus
I. I. Schafranovskij, Vorlesungen über
Kristallmorphologie (russ.), Leningrad
1968)

Bild 1
Schneekristalle mit sechszähliger
Symmetrie (nach Nakaya)



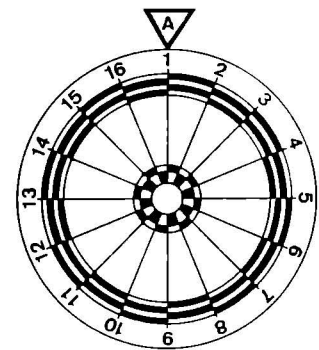
Titelbild des Heftes
Schneekristalle mit sechszähliger und
dreizähliger Symmetrie



▲ 1 ▲ La loterie

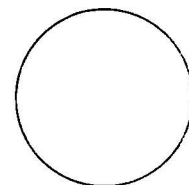
Si la roue de cette loterie se déplaçait de 17 tours 11/16° vers la droite, puis de 7 tours 1/2 vers la gauche et enfin de 9 tours 3/4 à nouveau vers la droite, quel serait le numéro gagnant situé en dessous du repère fixe A?

aus: Logigram, Paris



▲ 2 ▲ Find your centre

The drawing shows a circle whose centre is not marked. You forgot to bring your drawing instruments with you. The only thing you have is your notebook.



Can you find the centre of the circle using only sheets from the notebook?

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲ 3 ▲ Может ли быть верным равенство

$Ж \cdot У \cdot Р \cdot Н \cdot А \cdot Л = К \cdot В \cdot А \cdot Н \cdot Т$,
если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9? Одинаковым буквам при этом должны соответствовать одинаковые цифры, разным – разные.

aus: Quant, Moskau



Viele Aufgaben – die gleiche Methode

Bei der Bezirksolympiade 1988 lautete die Aufgabe 271234 wie folgt:

Man beweise für jedes Dreieck ABC : Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\angle BAC$, so gilt

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC , bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Bevor wir uns der Lösung zuwenden, wollen wir folgendes Leitmotiv voranstellen:

Lösungsprinzip: In allen nachfolgenden Ungleichungen treten mindestens vier Bestimmungsstücke eines Dreiecks auf. Da ein Dreieck bereits durch drei unabhängige Stücke eindeutig bestimmt ist, werden alle weiteren durch diese drei ausgedrückt. Nach dem Erreichen dieses Teilziels wird dann die entstandene Ungleichung bewiesen.

Wir wenden nun dieses Lösungsprinzip auf die oben stehende Aufgabe an. Dazu drücken wir h_a durch die anderen drei Größen aus. Die Höhe h_a tritt in der Formel

$A = \frac{1}{2} ah_a$ auf. Der Flächeninhalt A läßt sich durch Dreiecksseiten und Winkelfunktionen ausdrücken. Damit haben wir einen gangbaren Weg vor Augen. (Natürlich ist es auch möglich, $\cos \frac{\alpha}{2}$ durch b, c, h_a auszudrücken. Aber aus dem Schulstoff bekannte Formeln gibt es dafür nicht. Will man b oder c durch die anderen Größen ausdrücken, so ergibt sich die gleiche Situation.)

Werden wir nun konkret.

Es ist $A = \frac{1}{2} ah_a$, also

$$h_a = \frac{2A}{a} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot bc \sin \alpha}{a} = \frac{bc \sin \alpha}{a} = \frac{bc \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}} \quad (2)$$

Das Nahziel ist erreicht. Wir haben es geschafft, h_a durch b, c und Winkelfunktionen von α auszudrücken. Gelingt es nun zu zeigen, daß der letzte Term kleiner

gleich $\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2}$ ist, dann ist der Beweis

erbracht. Hier tritt der Faktor $\sqrt{bc}$ auf und in (2) steht bc im Zähler. Es wäre also schön, wenn wir erreichen könnten, daß der Nenner von (2) den Faktor $\sqrt{bc}$ liefert.

Es ist $h_a = \frac{bc \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}$

$$= \frac{bc \sin \alpha}{\sqrt{bc} \sqrt{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 \cos \alpha}} \quad \text{und } \frac{c}{b} \text{ dimensionslose Größen entstanden sind, die außerdem zueinander reziprok sind. Wenn wir ihre Summe durch den kleinstmöglichen Wert ersetzen, vergrößern wir den letzten Term. Nun gilt:}$$

Für $x > 0$ ist $x + \frac{1}{x} \geq 2$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $x = 1$ ist. (Beweist dies selbständig!)

Setzen wir $x = \frac{b}{c}$, so ist $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $b = c$ gilt. Damit erhalten wir:

$$h_a = \frac{bc \sin \alpha}{\sqrt{bc} \sqrt{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 \cos \alpha}} \leq \frac{bc \sin \alpha}{\sqrt{bc} \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}}$$

Und damit sind wir am Ziel. Wir müssen nur noch merken, daß für $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ die Gleichung $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}}$ gilt. Tatsächlich ist (vergleicht in der Zahlentafel!)

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad 2 - 2 \cos \alpha = 2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \text{so daß}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

ist, weil für $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ die Gleichung $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sin \frac{\alpha}{2}$ gilt.

Aus der Herleitung ist ersichtlich: Das Gleichheitszeichen steht in der zu beweisenden Ungleichung genau dann, wenn $b = c$ ist.

Damit hat sich das eingangs geschilderte Lösungsprinzip als nützlich erwiesen. Überprüfen wir es an einem weiteren Beispiel.

Man beweise:

In jedem Dreieck gilt $h_a \leq \sqrt{s(s-a)}$, wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist.

Vorüberlegung: In s treten a, b, c auf. Also treten in der Ungleichung mit h_a vier Größen auf. Welche Größen drücken wir diesmal durch die anderen aus? Wir kennen eine Formel (sie ist nicht im Lehrplan enthalten), in der s auftritt. Es ist die Heronische Dreiecksformel. Sie lautet:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \text{Die Höhe}$$

läßt sich durch A und a ausdrücken. Damit haben wir einen Lösungsplan. Wir drücken h_a durch A, a aus, dann benutzen wir die Heronische Dreiecksformel und schließlich versuchen wir, die dann entstandene Ungleichung zu beweisen.

Lösung: Wegen $A = \frac{1}{2} ah_a$ ist

$$h_a = \frac{2A}{a} = \frac{2 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

Angenommen, es gibt ein Dreieck, in dem $h_a > \sqrt{s(s-a)}$ gilt. Dann ist

$$h_a = \frac{2 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} > \sqrt{s(s-a)}, \quad \text{also}$$

$$\sqrt{s(s-b)(s-c)} > \frac{a}{2} (s-a, s, a > 0)$$

und damit $(s-b)(s-c) > \frac{a^2}{4}$. Wegen

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{ist dies äquivalent mit} \quad \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} > \frac{a^2}{4},$$

$$(a-b+c)(a+b-c) > a^2, \quad (*)$$

$$a^2 - (b-c)^2 > a^2, \quad \text{also } -(b-c)^2 > 0.$$

Diese letzte Ungleichung stellt einen Widerspruch dar. Also war die Annahme falsch und daher gilt für alle Dreiecke $h_a \leq \sqrt{s(s-a)}$.

Kommentare:

1. Die Annahme stellt einen technischen Trick dar. Wir können dann die Lösung in der Reihenfolge aufschreiben, in der wir sie gefunden haben. Hätten wir diesen Trick nicht angewendet, dann hätten wir nämlich von der wahren Aussage $(b-c)^2 \geq 0$ auf die Behauptung $h_a \leq \sqrt{s(s-a)}$ schließen müssen. Und das bedeutet, daß wir die Lösung gerade in umgekehrter Reihenfolge in bezug auf den Findungsprozeß hätten notieren müssen.

2. Der Term für s ist erst so spät als möglich eingesetzt worden, damit die Übersichtlichkeit bewahrt bleibt.

3. Schließlich kann man in (*) ausmultiplizieren oder man sieht, daß die linke Seite von der Form $(a-x)(a+x)$ mit $x = b-c$ ist und verwendet die dritte binomische Formel.

Wenden wir uns einer dritten Aufgabe zu.

Man beweise:

In jedem Dreieck gilt

$$A \leq \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2). \quad (3)$$

Vorbetrachtungen:

Erneut treten in der zu beweisenden Ungleichung vier Größen auf. Der Flächeninhalt ließe sich mittels der Heronischen Dreiecksformel durch a, b, c ausdrücken. Doch wegen der Wurzel und dem Produkt aus vier Faktoren wird man versuchen, diesen rechenaufwendigen Weg zu umgehen. (Am Schluß des Artikels wird gezeigt, wie auch dieser Weg zum Ziel führt.) Als nächste Formel käme $A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ in Betracht, aber mit ihr haben wir für A die

neue Größe α erhalten. Wir könnten dann a mittels Kosinussatz durch b, c, α ausdrücken und haben dann an Stelle der vier Größen A, a, b, c drei neue, nämlich b, c, α .

Nach dem Einsetzen ist die obige Ungleichung äquivalent mit

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{12} (c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha), \text{ also}$$

$$c^2 + b^2 - cb(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \geq 0.$$

Für den Beweis dieser Ungleichung gibt es nun einige Standardverfahren:

1. Auf der linken Seite der Ungleichung steht ein in c (oder b) quadratischer Term. Dieser soll für alle c nicht negativ sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante nicht positiv ist. Es genügt also zu zeigen, daß

$$D = (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)^2 - 4 \leq 0 \text{ ist.}$$

Dies ist aber nacheinander äquivalent mit $\cos^2 \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha + 3 \sin^2 \alpha - 4 \leq 0$, $\cos^2 \alpha - 1 + 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha + 3(\sin^2 \alpha - 1) \leq 0$,

$$-\sin^2 \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha \leq 0,$$

$-(\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha)^2 \leq 0$ und diese Ungleichung gilt für alle α , so daß der Beweis erbracht ist.

2. Die Ungleichung ist nach Division durch $b^2 > 0$ mit der Substitution $x = \frac{c}{b} > 0$ äquivalent mit

$$x^2 - x(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) + 1 \geq 0.$$

Der Gültigkeitsnachweis gelingt nun wie in 1., wobei euch vielleicht dieser Weg vertrauter ist, da ihr statt c und b eine vertraute quadratische Ungleichung vor euch habt.

3. Der linke Term legt es nahe, Terme wie $c^2 + b^2 + 2cb$ oder $c^2 + b^2 - 2cb$ ins Spiel zu bringen. Dazu müssen wir aber wissen, welche Werte $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$ annehmen kann. Ein Standardweg besteht darin, die Extremwertberechnung auf die Funktion $f(\alpha) = \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$ anzuwenden. (Führt dies selbständig durch!) Vielleicht geht es aber auch ohne Differentialrechnung.

Außerdem wollen wir noch etwas mehr wissen, nämlich:

Man untersuche, welchen maximalen (minimalen) Wert der Term $s \sin \alpha + t \cos \alpha$ einen Beweisversuch starten. Aber leider haben wir nichts dergartiges. Es geht aber wie folgt:

$$\text{Es ist } s \sin \alpha + t \cos \alpha = \sqrt{s^2 + t^2} \times \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \sin \alpha + \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \cos \alpha \right).$$

$$\text{Nun ist } -1 \leq \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \leq 1.$$

(Überzeugt euch selbst!)

Es gibt also (wie groß er wirklich ist, interessiert uns gar nicht!) einen Winkel β , für den

$$\cos \beta = \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \text{ und } \sin \beta = \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}$$

ist. (Tatsächlich ist nämlich

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{t^2}{s^2 + t^2} + \frac{s^2}{s^2 + t^2} = 1!)$$

Damit gilt

$$s \sin \alpha + t \cos \alpha$$

$$= \sqrt{s^2 + t^2} (\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$= \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\alpha + \beta) \text{ und somit}$$

$$-\sqrt{s^2 + t^2} \leq s \sin \alpha + t \cos \alpha \leq \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\text{wegen } -1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1.$$

Etwas kürzer läßt sich das Ergebnis durch die Ungleichung

$$|s \sin \alpha + t \cos \alpha| \leq \sqrt{s^2 + t^2} \text{ fassen.}$$

Nun hat sich die Situation gewandelt – nun kennen wir das Ergebnis – nun können wir dieses Resultat (zum zweiten Mal) beweisen.

Beweis: Für alle s, t, α ist

$$(t \sin \alpha - s \cos \alpha)^2 \geq 0.$$

Dies ist nacheinander äquivalent mit

$$t^2 \sin^2 \alpha - 2ts \sin \alpha \cos \alpha + s^2 \cos^2 \alpha \geq 0,$$

$$t^2 + s^2 \geq t^2(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$+ 2ts \sin \alpha \cos \alpha + s^2(1 - \cos^2 \alpha),$$

$$t^2 + s^2 \geq t^2 \cos^2 \alpha + 2ts \sin \alpha \cos \alpha$$

$$+ s^2 \sin^2 \alpha,$$

$$t^2 + s^2 \geq (t \cos \alpha + s \sin \alpha)^2.$$

Hieraus ergibt sich durch Radizieren die Behauptung.

(Man vergleiche diesen Weg mit der Untersuchung von D unter 1.!) Kehren wir zurück. Es ist also

$$-2 = -\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$$

$$\leq \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ und damit}$$

$$(c + b)^2 = c^2 + b^2 + 2cb$$

$$\geq c^2 + b^2 - cb(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)$$

$$\geq c^2 + b^2 - 2cb = (c - b)^2 \geq 0$$

und damit ist auch die letzte Lücke geschlossen. Nun wollen wir eine letzte Ungleichung besprechen.

Man beweise: In jedem Dreieck gilt

$$\sqrt{3}(a + b + c) \geq 2(h_a + h_b + h_c). \quad (4)$$

Vorüberlegung:

Nun treten in der Ungleichung sogar sechs Größen auf. Nach den bisherigen Überlegungen liegt es nahe, den Versuch zu machen, die Höhen durch A und die Seiten auszudrücken. Damit ist die obige Ungleichung äquivalent mit

$$\sqrt{3}(a + b + c) \geq 4A \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\geq 2 \left(\frac{2A}{a} + \frac{2A}{b} + \frac{2A}{c} \right) = 2(h_a + h_b + h_c).$$

Eine Ungleichung zwischen A und den Seiten hatten wir gerade besprochen. Es gilt

$$A \leq \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2), \text{ also auch}$$

$$4A \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \text{ Wenn es uns gelingt,}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\leq \sqrt{3}(a + b + c)$$

(*) zu zeigen, dann haben wir den Beweis erbracht. Wenn dies möglich ist, dann haben wir die Ungleichung durch das „Zwischenschieben“ des Terms

$$\frac{\sqrt{3}}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ bewiesen.}$$

Vorsichtshalber überprüfen wir (*) an einem konkreten Beispiel. Es sei etwa $a = 3, b = 4, c = 5$. Einsetzen liefert sofort, daß (*) nicht erfüllt ist. Dann ist aber die Idee mit dem „Zwischenschieben“ eines Terms nicht realisierbar.

Vielleicht gelingt es uns aber zu beweisen, daß folgende Aussage gilt:

Für $a, b, c > 0$ gilt die Ungleichung

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \sqrt{3}(a + b + c). \quad (5)$$

Ein Zugang besteht darin, daß man $a + b + c = 2s$ beachtet, denn wir hatten eine Höhe durch Terme von s abgeschätzt.

Es ist

$$2(h_a + h_b + h_c) \leq 2(\sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}),$$

und nun ist zu zeigen, daß der letzte Term kleiner oder gleich $2\sqrt{3}s$ ist. Nach Division durch $2\sqrt{3}$ entsteht hieraus die äquivalente, aber noch zu beweisende Ungleichung

$$\sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leq \sqrt{3}s.$$

Wenn man versucht, das Quadrieren zu vermeiden, so wird man

$$x = \sqrt{s-a}, y = \sqrt{s-b}, z = \sqrt{s-c}$$

substituieren. Dann gilt offenbar

$$x^2 + y^2 + z^2 = s \text{ und die zu beweisende Ungleichung nimmt die Form}$$

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \text{ oder}$$

$$\frac{x + y + z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \text{ an.}$$

Wir erkennen: Links steht das arithmetische Mittel der positiven Zahlen x, y, z und auf der rechten Seite das Quadratmittel. Wir beweisen nun ganz allgemein:

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x + y + z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}. \quad (6)$$

Beweis: Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx,$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$$

$$+ 2yz + 2zx = (x + y + z)^2 \text{ und hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.}$$

Bemerkung: Man kann diese Ungleichung auf n Zahlen $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ ausdehnen. Der entsprechende Satz lautet dann:

Für beliebige n reelle Zahlen x_i ,

$i = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Den Beweis könnt ihr selbst führen. Er ist dem obigen sehr ähnlich. Damit ist dann aber auch die Ungleichung (4) bewiesen.

Nun beweisen wir noch die Ungleichung (5), die bei unseren Beweisversuchen entstand. Dazu überführen wir sie in die äquivalente Form

$$\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \right)^2 \geq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Fortsetzung auf Seite 143

Viele Ziffern verderben den Brei



Klaus rechnet hin und wieder mit dem Taschenrechner seiner großen Schwester. Damit macht ihm das Lösen von Mathe-Aufgaben viel mehr Spaß als bisher, da man die Ergebnisse unter Umständen mit acht Ziffern angeben kann. Klaus ist fest davon überzeugt, daß er auf diese Weise die Ergebnisse „ganz genau“ ermittelt. Hier nun einige Aufgaben mit den Lösungen von Klaus.

1. Herr Schmidt legt die Strecke von Cottbus nach Falkenberg (85 km) mit seinem Trabant in 90 min zurück.

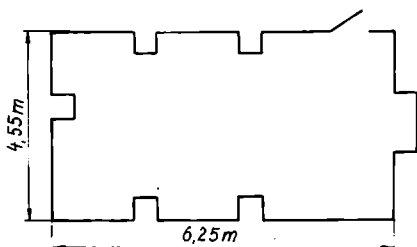
Klaus gibt an, daß Herr Schmidt im Durchschnitt die Strecke Cottbus-Falkenberg mit einer Geschwindigkeit von

$56,666\,667 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurückgelegt hat.

2. Klaus entnimmt dem Kursbuch die Entfernung von Halle (Hbf.) bis Leipzig (Hbf.). Es sind 37,6 km. Diese Entfernung legt er der Berechnung des Fahrpreises zugrunde (Fahrpreis für Personenzüge je Kilometer 0,08 M). Für den Fahrpreis ermittelt Klaus zunächst 3,008 M. Er gibt das Ergebnis auf Pfennige gerundet mit 3,01 M an.

3. Der Fußboden des Klubraumes soll neu gestrichen werden (siehe Bild). Um die notwendige Farbe einkaufen zu können, muß der Flächeninhalt des Fußbodens ermittelt werden.

Klaus vereinfacht das Problem, indem er von einem rechteckigen Fußboden ausgeht. Er ermittelt als Flächeninhalt $28,437\,5\text{ m}^2$.



Was meint ihr? Hat Klaus die Resultate der einzelnen Aufgaben mit sinnvoller Genauigkeit angegeben?

Aufgabe 1

Sowohl die zurückgelegte Strecke (85 km) als auch die benötigte Fahrzeit (90 Minuten) sind Meßwerte – also Näherungswerte. Damit steht fest, daß auch der Zahlenwert für die Durchschnittsgeschwindigkeit ein *Näherungswert* ist. Auf Grund der

Faustregel über die Angabe des Resultats bei Quotienten von Näherungswerten wäre es sinnvoll, den für die Durchschnittsgeschwindigkeit ermittelten Näherungswert nicht mit mehr als zwei Ziffern anzugeben.

Also $57 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

▲ 1 ▲ Ermittle eine untere und eine obere Wertschranke für die Durchschnittsgeschwindigkeit!

Wie eine Wertschrankenberechnung zeigt, liegt die Durchschnittsgeschwindigkeit in folgendem Intervall:

$$\frac{84,5 \cdot 60}{95} \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq \frac{85,5 \cdot 60}{85} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$53,3 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 60,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Damit wird deutlich, daß die Angabe $57 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ noch etwas zu genau ist. Trotzdem scheint dieses Resultat sinnvoll zu sein.

Ein weiteres Aufrunden z. B. auf $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wäre eine zu grobe Information über die Durchschnittsgeschwindigkeit und eine Resultatsangabe mit mehreren Stellen nach dem Komma würde eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen.

Aufgabe 2

Obwohl bei dieser Aufgabe zur Berechnung des Fahrpreises einer Fahrkarte von Halle nach Leipzig nur von genauen Werten (Tarifkilometer 38; Fahrpreis je Tarifkilometer 0,08 M) auszugehen ist, entspricht das von Klaus rechnerisch richtig ermittelte Resultat nicht dem tatsächlichen Fahrpreis. Das liegt an dem konkreten *Sachverhalt*. Die Deutsche Reichsbahn rundet nämlich entsprechend einer speziellen Preistafel die Fahrpreise bis 2,- M auf Vielfache von 10 Pf bzw. ab 2,- M auf Vielfache von 20 Pf auf.

▲ 2 ▲ Ermittle aus nachstehendem Auszug der Preistafel den Fahrpreis (2. Klasse) für die Strecke Halle-Leipzig!

km	31	32	34	35	36
Preis in M	2,60	2,60	2,80	2,80	3,00
km	37	38	39	40	41
Preis in M	3,00	3,20	3,20	3,20	3,40

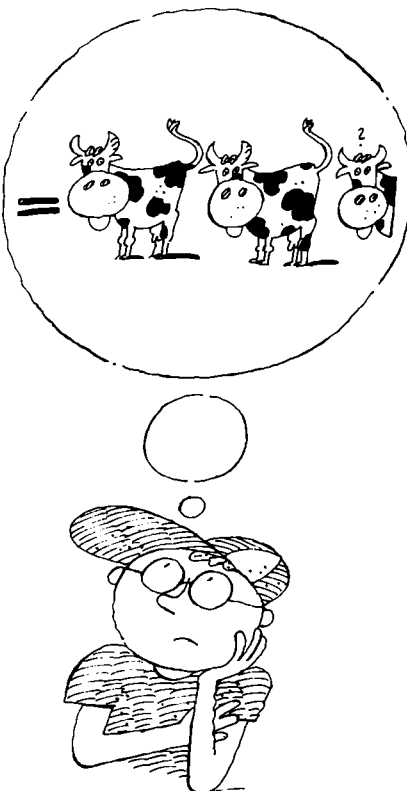
Aufgabe 3

Klaus wendet bei der zu berechnenden Fläche bewußt die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks an, obwohl die Fußbodenfläche nicht rechteckig ist. Abgesehen von den Aussparungen ist wohl auch nicht zu erwarten, daß die Winkel genau 90° sind usw. Diese Vereinfachung ist sicher *zweckmäßig* und sinnvoll, bezogen auf den Sachverhalt (Einkauf von Farbe). Ausgehend von diesen Vereinfachungen ist bereits klar, daß das Ergebnis nur ein Näherungswert sein kann. Hinzu kommt, daß die Zahlenwerte für die Länge und Breite des Raumes als Meßwerte, Näherungswerte sind. Klaus täuscht daher mit seinem Ergebnis von $28,437\,5\text{ m}^2$ eine viel zu hohe, real gar nicht vorhandene Genauigkeit vor. Nutzt man für die Resultatsangabe die Faustregeln für das Arbeiten mit Näherungswerten (Multiplikation), so könnte man den Näherungswert für den Flächeninhalt auf drei Ziffern gerundet angeben. Dabei muß man aber beachten, daß es bei Materialberechnungen notwendig ist, auch abweichend von den Rundungsregeln aufzurunden (sinnvolles Resultat $28,5\text{ m}^2$).

Da das Ergebnis eine Grundlage für die zu kaufende Farbe darstellt, ist auch ein Aufrunden auf volle Quadratmeter sinnvoll. Bezogen auf den konkreten Sachverhalt wäre hier als Ergebnis 29 m^2 , ja sogar auch 30 m^2 gerechtfertigt.

Aus der Diskussion zu den einzelnen Aufgaben ist deutlich geworden, daß eine Resultatsangabe mit sinnvoller Genauigkeit stets ein tieferes Nachdenken über die gegebenen Zahlenwerte und den speziellen Sachverhalt erfordert.

Ein Vorgehen wie bei Klaus, der ein Ergebnis mit möglichst vielen Ziffern angibt,



zeugt nicht gerade von mathematischem Sachverstand, da dadurch, wie ihr gesehen habt, eine nicht vorhandene Genauigkeit vorgetäuscht wird.

Um ein Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben, muß man also die Aufgabenstellung gründlich durchdenken:

- Treten unter den gegebenen Zahlen oder Größen Näherungswerte auf? Wie genau sind diese?
- Wurde eventuell bei der Berechnung der Sachverhalt idealisiert?
- Welche Forderungen stellt eventuell der gegebene Sachverhalt an die Resultatsangabe?

Versucht nun selbst einmal, folgende Aufgaben zu lösen! Achtet dabei auf die Angabe des Ergebnisses mit sinnvoller Genauigkeit!

▲ 3 ▲ Ein Werkstück besitzt einschließlich Verpackung eine Masse von 7,3 kg. Die Masse des Werkstücks allein beträgt das Zehnfache der Masse der Verpackung. Gib die Masse der Verpackung an!

▲ 4 ▲ Im Ferienlager führt Herr Kniffliß mit den Schülern der unteren Klassen einen Mathe-Quiz durch. Als Preis wählt er zwei Buchtitel („2×2 plus Spaß dabei“ für 2,60 M und „Kurzweil“ durch Mathe“ für 10,00 M). Dafür stehen ihm 40,00 M zur Verfügung. Insgesamt sollen acht Schüler ausgezeichnet werden. Wieviel Bücher für 10,00 M kann Herr Kniffliß unter diesen Bedingungen höchstens kaufen?

▲ 5 ▲ Eine Flurwand soll einen Ölfarbenanstrich von 1,55 m Höhe erhalten. Die Länge der zu streichenden Wand beträgt 19 m. Es soll vorgestrichen und lackiert werden. Der Hersteller gibt als Ergiebigkeit der Ölfarbe einen Durchschnittswert von 7 m² pro 1 kg an.

a) Wieviel Kilogramm Lackfarbe bzw. Vorstreichfarbe werden benötigt?

b) Eine Büchse der Ölfarbe enthält 0,8 kg. Wie viele Büchsen sind jeweils zu kaufen?

L. Flade/M. Pruzina

Buchtips

Ju. A. Šaškin

Ecken, Flächen, Kanten

120 S., 44 Abb.

Bestell-Nr. 571 830 7

Preis: 8,70 M

MSB Nr. 136

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

Geometrie in Ebene und Raum

224 S., 154 Abb.

Bestell-Nr. 571 828 6

Preis: 13,80 M

MSB Nr. 137

Beide Titel: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

H. Schleusener/B. Viehweger

Programme, Rechner und Dateien

etwa 160 S., 63 Abb., 18 Tab.

Bestell-Nr. 547 532 5

Preis: etwa 5,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

20 Jahre alpha in Friedeburg

Wir sind Schüler der kleinen Landschule Friedeburg. Im Oktober 1988 hatten wir einen guten Grund zum Feiern. Seit 20 Jahren nehmen Schüler unserer Schule ohne Unterbrechung am *alpha*-Wettbewerb teil. Zu unserem Appell waren aus der gesamten Republik ehemalige Schüler angereist.

Besonderes Vorbild ist für uns Dr. Petra Dietzel, die 1968/69 als erste Preisträgerin unserer Schule geehrt wurde. Wir haben viele *alpha*-Abzeichen in der Zwischenzeit für mehrjährige Teilnahme bekommen, am ausdauerndsten ist der jetzige Mathematiklehrer Bernd Hartwig mit 15jähriger Teilnahme.

Ein besonderes Erlebnis hatten wir, als in der ganzen DDR eine von unserer Heike Brüggemann ausgedachte Wettbewerbsaufgabe gelöst wurde.

Neben unserer zielstrebigsten mathematischen Arbeit kümmern wir uns auch um die Ausgestaltung unseres Mathematikraumes. Natürlich beschäftigen wir uns in unserer Freizeit nicht nur mit Mathematik. Wir waren z. B. in diesem Jahr auch im Theater und im Museum in Halle.

AG *alpha*, Klasse 4, 7a, 7b

In meiner *alpha*-Gruppe, Klasse 7, sind sechs Schüler mit sehr guten mathematischen Leistungen. Wir möchten einen Hoch- oder Fachschulberuf erlernen, bei dem Mathematik eine große Rolle spielen wird. Die leichteren *alpha*-Aufgaben erledigen wir als Hausaufgaben, mit den

schwereren Problemen und mit Kreisolympiadeaufgaben vergangener Jahre beschäftigen wir uns in der Arbeitsgemeinschaft. Wir sind sehr stolz darauf, daß Nicole Schüler und Tobias Gerlach zweimal Preisträger waren und Janet Goßrau, Götz Lother und Dominik Schewski einmal Auszeichnungen der *alpha*-Redaktion erhalten haben.

Dominik Schewski, Kl. 7

In unserer *alpha*-Gruppe, Klasse 7, sind überwiegend Schüler mit guten mathematischen Leistungen.

Wir nehmen schon vier Jahre am Wettbewerb teil und haben immer noch Freude daran. Wir suchen uns leichtere Wettbewerbsaufgaben aus und merken, daß wir dadurch im Unterricht beim Lösen von Textaufgaben gut vorangekommen sind. Wir sind optimistisch, daß wir unsere Mathematiknote bis zur 10. Klasse verbessern können. Die *alpha*-Urkunden und das *alpha*-Abzeichen sind uns ein großer Ansporn dabei.

Janet Goßrau, Kl. 7

Wir sind acht Schüler der 4. Klasse und damit die jüngsten *alpha*-Mitglieder. Durch unsere Eltern und Verwandten kannten wir die Arbeitsgemeinschaft schon. Wir treffen uns wöchentlich 1 Stunde. An unserer ersten Wettbewerbsaufgabe haben wir 45 Minuten gearbeitet. Aber jetzt geht es schon schneller. Wir freuen uns riesig über jede Lösungskarte. Im Oktober gab es das erste *alpha*-Abzeichen für uns alle und das soll noch lange nicht unser letztes sein!

Wir wollen euch eine selbst ausgedachte Aufgabe stellen:

Löst folgendes Kryptogramm

HAUS
+ MAUS
LAUBE

Setzt dabei für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern ein, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Manuela Voigt, Kl. 4

Kundendienst für Ortsunkundige:

Friedeburg (Saale) liegt im Bezirk Halle, Kreis Hettstedt

Ehemalige Schüler, Teilnehmer an den ersten *alpha*-Wettbewerben, gemeinsam mit jetzigen Arbeitsgemeinschaften zum Festappell im Oktober 1988



Die Quadratur der Parabel

Zum 2200. Jahrestag des Todes von Archimedes Teil 1

Bei fast allen Messungen von Flächen dient das Quadrat als Grundeinheit der Flächenmaße. Man wählt dazu dasjenige Quadrat, dessen Seite die gewählte Längeneinheit ist. Ist also das Meter als Längeneinheit gewählt, so ist das Quadratmeter die Einheit des Flächenmaßes. Das Parallelogramm mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln, also das Quadrat, hat bei der Flächeninhaltsbestimmung somit eine große Bedeutung.

Unter der Quadratur einer ebenen geometrischen Figur versteht man ihre Verwandlung in ein Quadrat, d. h. die Konstruktion eines Quadrats, das mit ihr den gleichen Flächeninhalt hat. Es ist leicht, eine geradlinig begrenzte Figur in ein Quadrat zu verwandeln. Die Quadratur des Rechtecks ist die alte Aufgabe, die mittlere Proportionale m zwischen zwei gegebenen Strecken a, b (die Seiten des Rechtecks) zu bestimmen: $a : m = m : b$ oder $ab = m^2$. Eine Lösung dieser Aufgabe ist Bild 1 zu entnehmen. $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ seien die gegebenen Strecken. Man zeichne über $\overline{AC}$ den Halbkreis und ziehe $\overline{BD} = m$ von B aus rechtwinklig zur Geraden $\overline{AC}$. Das Dreieck ADC ist bei D rechtwinklig. Die Dreiecke an der Höhe (Lot) $\overline{DB}$ sind einander ähnlich. Daher gilt: $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{BC}$, d. h. $a : m = m : b$, wie verlangt.

Bild 1

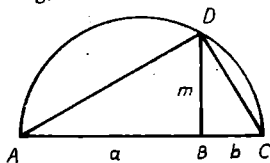
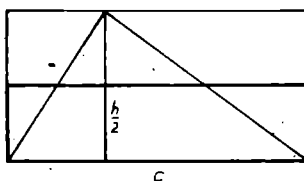


Bild 2



Es ist leicht, ein Dreieck in ein Rechteck (und damit in ein Quadrat) zu verwandeln. Hat das Dreieck die Basis c und die Höhe h , so leistet das Rechteck mit den Seiten c und $\frac{h}{2}$ das Verlangte (Bild 2), denn der

Flächeninhalt beider Figuren ist $c \cdot \frac{h}{2}$.

Da es möglich ist, ein beliebiges Vieleck in ein anderes Vieleck mit gleichem Flächeninhalt zu verwandeln, das eine Seite weniger hat (Aufgabe P1: Wie?), so kann man

durch Fortsetzung dieses Verfahrens das Vieleck schließlich in ein Dreieck verwandeln. Dieses kann dann in ein Rechteck und das Rechteck in ein Quadrat verwandelt werden.

Daß man auch krummlinig begrenzte Figuren quadrieren kann, zeigte schon im 5. Jahrhundert v. u. Z. Hippokrates von Chios. Es handelte sich um die Quadratur gewisser von zwei Kreisbögen begrenzter Flächenstücke („Möndchen des Hippokrates“, siehe H. Pieper, Heureka – Ich hab's gefunden, Mathematische Schülerbücherei, Band 135, Berlin 1988).

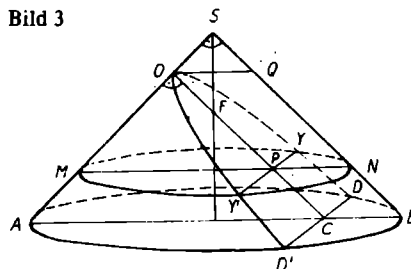
Im 3. Jahrhundert v. u. Z. gelang dem genialen griechischen Mathematiker Archimedes (um 287 bis 212 v. u. Z.) die Quadratur eines weiteren krummlinig begrenzten Flächenstücks. Er schrieb darüber: „Einige frühere Geometer haben zu beweisen versucht, daß es möglich sei, eine geradlinig begrenzte Fläche zu finden, die einem gegebenen Kreissegment und einem gegebenen Kreissegment gleich ist; darauf haben sie versucht, die von dem Schnitt des ganzen Kegels und einer geraden Linie begrenzte Fläche [also wohl ein Ellipsensegment] zu quadrieren, indem sie schwerlich zulässige Hilfssätze voraussetzten, so daß die meisten erkannten, daß die Aufgabe nicht gelöst war. Aber ich habe nichts davon gehört, daß einer meiner Vorgänger versucht hätte, das von einer geraden Linie und dem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels begrenzte Segment zu quadrieren, eine Aufgabe, deren Lösung ich jetzt gefunden habe.“

Was ist das für eine teils krummlinig, teils geradlinig begrenzte Figur, die Archimedes als erster quadrierte?

Schnitt eines rechtwinkligen Kegels

Es sei ein Kreiskegel mit rechtem Öffnungswinkel gegeben; der Achsenschnitt ergebe das rechtwinklige Dreieck ASB (siehe Bild 3). Senkrecht zur Seitengerade

Bild 3

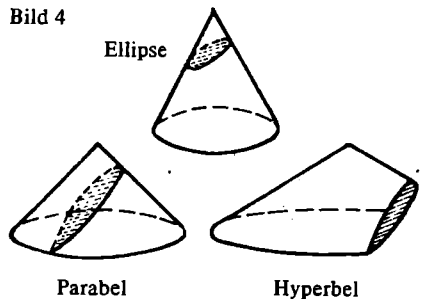


SA sei durch O eine Schnittebene gelegt. OC sei der Durchschnitt der Schnittebene mit dem Dreieck ASB . Man ziehe durch O parallel zum Durchmesser AB die Gerade OQ , ferner die Gerade MN parallel zu AB durch einen Punkt P der Geraden OC , überdies die Gerade $Y'PY$ parallel zur Schnittgeraden $D'C'D$ des Grundkreises mit der Schnittebene. Das Flächenstück, begrenzt von der Geraden DD' und der Kurve $D'Y'OYD$, ist es, das Archimedes als erster quadrierte hatte.

Kegelschnitte

Die Kurve, die man so erhält, bezeichneten die alten Griechen, so auch Archimedes, als „rechtwinkligen Kegelschnitt“. Erst Apollonios, der etwa ein Vierteljahrhundert nach Archimedes geboren wurde, führte die Bezeichnung „Parabel“ ein. Die Kurve, die man erhält, wenn man einen Kegel mit stumpfem bzw. spitzem Öffnungswinkel mittels einer Schnittebene, die auf einer der Seitenlinien des Kegels senkrecht steht, schneidet, wurde „stumpfwinkliger Kegelschnitt“ (Hyperbel) bzw. „spitzwinkliger Kegelschnitt“ (Ellipse) genannt (Bild 4). Durch diese Kegelschnitte wurden „Darstellungen“ für Kurven gegeben, die als ebene Kurven wahrscheinlich schon eher bekannt waren.

Bild 4



Als „Entdecker“ der Kegelschnitte wird Menaichmos (4. Jh. v. u. Z.) angesehen. Aristaios und Euklid (beide lebten in der zweiten Hälfte des 4. Jh. v. u. Z.) haben bereits (heute verschollene) Bücher darüber geschrieben. Auf diese „Kegelschnittslehren“ konnte Archimedes sich berufen.

Die Gleichung der Parabel

Menaichmos, der in Platons Akademie in Athen wirkte, soll bereits die „Symptomata“, also so etwas wie die Gleichungen dieser Kegelschnitte gekannt haben. Wie er sie erhielt, ist nicht bekannt. Wir setzen für einen beliebigen Punkt Y der Parabel (s. Bild 3) $PY = y$, $OP = x$. Die von Archimedes als „das Stück bis zur Achse“ bezeichnete Strecke OF (SF ist ja die Achse des Kegels), werde mit p bezeichnet. Dann gilt:

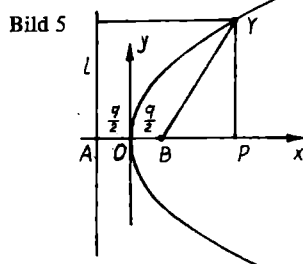
$$(1) \quad y^2 = 2px.$$

Beweis (s. Bild 3): Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MPO und OQS ist $PM : PO = OQ : QS$. Daher ist auch $PM \cdot PN : PO \cdot PN = OQ : QS$. Da $PY^2 = y^2 = PM \cdot PN$ (Höhensatz im bei Y rechtwinkligen Dreieck MNY) und $PN = OQ$ ist, folgt $y^2 : PO \cdot OQ = OQ : QS$, d. h.

$y^2 = x \frac{OQ^2}{QS}$. Für die Diagonale OQ des Quadrats $OFQS$ gilt nach dem Satz von Pythagoras $OQ^2 = 2QS^2$. Somit ist $y^2 = x \cdot 2 \cdot QS = 2px$ (weil $QS = OF = p$ ist). Q. e. d.

Eine andere Parabeldefinition

Der griechische Gelehrte Pappos (um 320 u. Z.) gab in seiner „Mathematischen Sammlung“ sinngemäß folgende Definition der Parabel (s. Bild 5). Eine Parabel ist die Menge aller Punkte Y , für die die Entfernung von einem festen Punkt B (Brennpunkt genannt) so groß ist wie ihr Abstand von einer festen Gerade l (Leitlinie genannt).



Die Entfernung des Brennpunkts von der Leitlinie werde mit q bezeichnet.

Wir wählen, um die Gleichung der Parabel zu erhalten, die x -Achse so, daß sie durch B verläuft und auf l (in A) senkrecht steht. Als Anfangspunkt wählen wir O so, daß

$AO = OB = \frac{q}{2}$ ist. Die Parallele zu l durch O sei die y -Achse. Dann gilt

$$(2) \quad y^2 = 2qx.$$

Beweis: Der beliebige Parabelpunkt Y habe die Koordinaten (x, y) und P sei der Punkt $(x, 0)$. Dann gilt $BP^2 + PY^2 = BY^2$,

d. h. $\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2$, denn der Abstand von Y und B ist laut Definition der Parabel so groß wie der Abstand von Y und l (der gleich $x + \frac{q}{2}$ ist). Hieraus folgt

(2). Q. e. d.

Eine jede Kurve der Form $y^2 = 2qx$ läßt sich natürlich durch Abtragen von $SO = OF = q$ (Bild 3) auf die oben beschriebene Weise als Schnitt eines geraden und rechtwinkligen Kreiskegels erhalten.

Anwendungen

Das „klassische“ Problem der Verdopplung des Würfels (siehe Pieper, Heureka...), das darin besteht, zu einem gegebenen Würfel der Seitenlänge q die Seitenlänge x des Würfels mit doppelt so großem Volumen zu finden: $x^3 = 2q^3$, hatte Hippokrates von Chios auf die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen x, y zwischen q und $2q$ zurückgeführt:

$$q : x = x : y = y : 2q.$$

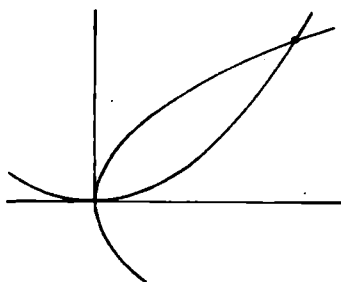
Hieraus folgt $y^2 = 2qx$ und $x^2 = qy$.

Der Schnittpunkt (x_0, y_0) dieser beiden Parabeln (Bild 6) liefert die gesuchte Größe:

$$\left(\frac{q}{x_0}\right)^3 = \frac{q}{x_0} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{2q} = \frac{1}{2}, \text{ d. h. } x_0^3 = 2q^3.$$

Daß Parabeln eine reale physikalische Existenz besitzen, erkannte erst Galileo Galilei. Er zeigte in seinem 1638 erschienenen Buch „Discorsi“, daß beim Wurf „ohne allen Widerstand“ die Wurfbahn eine Parabel ist.

Bild 6

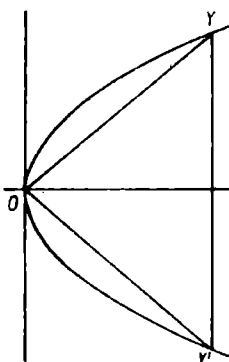


Der Satz von Archimedes

Archimedes zeigt als erster, „daß jedes von einer geraden Linie und einem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels (also einer Parabel) begrenzte Segment gleich vier Dritteln des Dreiecks ist, das mit dem Segment dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat“. Ist F der Flächeninhalt des Parabelsegments, das vom Parabelbogen $Y'OY$ und der Sehne $Y'Y$ gebildet wird (Bild 7), und G der Flächeninhalt des von der Parabel umspannten Dreiecks $Y'OY$, so gilt:

$$(3) \quad F = \frac{4}{3} G.$$

Bild 7



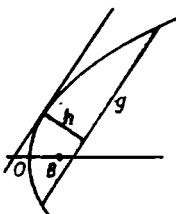
Ist g die Länge der Grundlinie $Y'Y$ und h die Höhe des Dreiecks $Y'OY$, so ist $G = \frac{g \cdot h}{2}$ und daher

$$(4) \quad F = \frac{2}{3} g \cdot h.$$

Der Satz von Archimedes erlaubt, das Parabelsegment durch ein inhaltsgleiches

Rechteck (z. B. mit den Seiten $\frac{2}{3} g$ und h) zu ersetzen und dann dieses Rechteck (wie anfangs beschrieben) in ein Quadrat zu verwandeln. Damit ist dann das Parabelsegment quadriert. Der Satz über die Para-

Bild 8



belquadratur wird von Archimedes für ein beliebiges von einer Sehne und dem entsprechenden Parabelbogen gebildetes Parabelsegment bewiesen (also auch für den Fall, daß die Grundlinie nicht senkrecht zu OB ist, Bild 8). Er habe den Satz „zuerst mit Hilfe der Mechanik gefunden und dann auch geometrisch bewiesen“, betonte Archimedes.

H. Pieper

Aus dem Leben und Schaffen des Archimedes

Alexander von Macedonien hatte im Jahre 332 v. u. Z. in dem von ihm beherrschten Ägypten die Stadt Alexandria gründen lassen. Der sich schnell entwickelnde Ort wurde ein Zentrum von Handel und Wirtschaft. In deren Folge blühten Wissenschaft und Kunst auf. Zahlreiche bedeutende Philosophen kamen aus Griechenland herüber, ihrerseits wieder eine Vielzahl von Schülern nach sich ziehend. So war es kein Wunder, daß auch der junge Archimedes seine Ausbildung in dieser bedeutenden nordafrikanischen Hafenstadt erhielt.

Er war als Kind einer vornehmen, allerdings nicht besonders wohlhabenden Familie in Syrakus geboren worden und hatte durch den Vater schon bald Anregungen zum Studium mathematischer Werke erhalten. Nach einem längeren Aufenthalt in Alexandria kehrte er in seine Vaterstadt zurück. Er fand den Tod, als die Römer im Jahre 212 v. u. Z. Syrakus eroberten.

Archimedes (d. h. der Erzdenker) war ein bedeutender Vertreter der Mathematik. Er beschäftigte sich mit Zahlenreihen, bestimmte die Zahl π mit ausgezeichneter Genauigkeit, berechnete krummlinig begrenzte Flächen mit Hilfe von Verfahren, die eine Vorstufe der fast 2000 Jahre später entwickelten Integralrechnung darstellen. Mit mathematischen Methoden suchte Archimedes zu physikalischen Erkenntnissen zu gelangen. So entwickelte er die Gesetze des Hebels und die Bedeutung des Schwerpunktes für das Verhalten eines Körpers. Hebel und Flaschenzüge, die er konstruiert, vervielfachten die Kräfte des Menschen. Für seine Heimatstadt entwickelte Archimedes Kriegsmaschinen, mit deren Hilfe sie sich zwei Jahre lang gegen den Ansturm der römischen Eroberer verteidigen konnte. Er beschäftigte sich mit Hydraulik; gewann Erkenntnisse über das Sinken, Schweben und Steigen von Körpern in Flüssigkeiten. Seine wissenschaftlichen Leistungen und die gewaltige Kraft der von ihm konstruierten Maschinen brachten ihm nicht mit Unrecht den Namen *Gigant von Syrakus* ein.

J. Lehmann/Th. Scholl

Auf den Spuren von Mathematikern

Ein Besuch in Magdeburg

Magdeburg – Stadt des Schwermaschinenbaus. An vielen Stellen des Stadtzentrums wird der Besucher an den berühmten Sohn und Bürgermeister dieser Stadt, an *Otto von Guericke* erinnert.

1986 jährte sich sein Todestag zum 300. Mal. v. Guericke lebte von 1602 bis 1686. Er studierte Jura in Jena und Kriegsbaukunst (militärische Befestigungslehre) in Leiden. Seit 1626 wirkte er als vermöglicher Ratsherr in Magdeburg. 1646 wurde er zum Bürgermeister gewählt, Otto von Guericke war Kurbrandenburgischer Rat. Nachdem Magdeburg 1631 durch Tillys Truppen fast völlig zerstört worden war, bewirkte Guericke den Wiederaufbau. Daneben befaßte er sich als hochbegabter Wissenschaftler mit physikalischen Experimenten. Er erfand die Luftpumpe, mit deren Hilfe es ihm gelang, in großen Gefäßen ein Vakuum zu erzeugen.

Berühmt wurde seine Demonstration der *Magdeburger Halbkugeln* vor Kaiser und Reichstag: je acht Pferde zogen an den beiden Halbkugeln und vermochten nicht, die Kraft des Luftdrucks auf die Kugeln zu überwinden. Er beobachtete 1646, daß der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, und 1654, daß der Luftdruck sich mit dem Wetter ändert. v. Guericke konstruierte Ba-

rometer und Thermometer. Über den Würzburger Mathematikprofessor *Caspar Schott* soll *Robert Boyle* von der Luftpumpe v. Guericke und dessen physikalischen Experimenten des gasfreien Raumes erfahren haben. Er wurde dadurch zu eigenen Arbeiten angeregt (*Boyle-Mariottesches Gesetz*). Otto von Guericke hat auch zu den Anfängen der Elektrizitätslehre Beiträge geliefert. Er entwickelte eine rotierende Kugel, an der durch Reibung Funken erzeugt werden konnten. Mit dieser ersten Elektrisiermaschine hat er die Reibungselektrizität entdeckt. v. Guericke's physikalische Experimente fanden in der Zeit des Übergangs vom Feudalismus zum Kapitalismus statt. In dieser Zeit entwickelten sich enge Beziehungen zwischen den Naturwissenschaften und der Mathematik. Noch im 18. Jahrhundert wurden in Mathematiklehrbüchern auch physikalische Probleme ausführlich dargestellt, in Kapiteln zur Aerostatik und zur Pneumatik sind z. B. die Arbeiten v. Guericke angegeben. Bild 1 zeigt Otto von Guericke nach einem zeitgenössischen Kupferstich aus dem Jahre 1649. In der Nähe des alten Rathauses von Magdeburg befindet sich ein überlebensgroßes Bronzedenkmal (Sitzbild) (Bild 2). Es wurde 1907 von *C. Echtermeier*

geschaffen und zeigt v. Guericke mit Attributen seines Wirkens, u. a. mit den *Magdeburger Halbkugeln*. Der Versuch, die Halbkugeln mit je acht Pferden auseinanderzureißen, ist auf einem der szenischen Reliefs an dem hohen Granitsockel zu sehen.

Den Namen *Otto von Guericke* trägt seit 1961 die Technische Universität Magdeburg, die aus der 1953 gegründeten Hochschule für Schwermaschinenbau hervorgegangen ist. Magdeburg ist also auch Hochschulstadt (TU, Pädagogische Hochschule, Medizinische Akademie). Seit 1965 werden in Magdeburg Diplommathematiker und auch Diplomlehrer für Mathematik und Physik ausgebildet (Bild 3).

Bild 3



Vor der Mensa der Technischen Universität stößt man auf eine Plastik des DDR-Bildhauers *G. Thieme* aus dem Jahre 1978. Diese zeigt den griechischen Mathematiker, Physiker und Techniker Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.), wie Thieme ihn sich vorstellt. Darüber wurde bereits in der *alpha*, Heft 1/1986 berichtet.

Unmittelbar neben den TU-Gebäuden, an der Carais-Straße, steht ein Denkmal (von *J. Goetz*, 1905) für einen Mann, durch dessen Erfindung die schnelle Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse erst ermöglicht wurde: Es handelt sich um den Erfinder des Buchdrucks mit beweglichen Lettern, *Johannes Gensfleisch zum Gutenberg*. Er lebte von (vermutlich) 1400 bis 1468 in Mainz und Straßburg. Dozent Dr. Schreiber äußert sich in seinem Buch *Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie*: „Gutenberg hat auf seine Weise für die Mathematik nicht weniger geleistet als irgendeiner der berühmtesten Mathematiker.“

Auch die *alpha* gäbe es ohne seine Erfindung nicht! Erste mathematisch-naturwissenschaftliche Bücher sind von Regiomontanus (Johann Müller, 1436 bis 1476) in Nürnberg gedruckt worden (siehe *alpha*, Heft 3/86). Euklids *Elemente* wurden 1482 in Venedig in lateinischer Sprache verlegt. Auf dem Gebiet der heutigen DDR gab es erste Buchdruckereien in Rostock (1476) und Magdeburg (1480).

Bild 1



Bild 2



Die Spuren, die eine weitere für die Mathematik interessante Persönlichkeit in Magdeburg hinterlassen hat, sind leider nicht mehr auffindbar. In Magdeburg starb am 2. 10. 1823 der französische Offizier, Politiker und Wissenschaftler *Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot*, der hier seit 1861 im Exil lebte. Er wurde in Magdeburg beige- setzt, seine Gebeine überführte man 1889 nach Paris in das Pantheon. Bis vor wenigen Jahren soll noch eine Grabplatte für Carnot auf dem Gelände des Nordparks, in unmittelbarer Nähe der Technischen Universität also, vorhanden gewesen sein. Carnot wurde am 13. 5. 1753 in Nolay (Burgund) als Sohn eines Notars geboren. Er studierte Befestigungskunst auf der Kriegsschule in Paris, aber auch Mathematik, Mechanik und Naturwissenschaften, und diente als Offizier. Carnot gilt als Schüler *Gaspar Monges*. Nach der französischen Revolution wurde er 1791 in den Konvent gewählt, dessen Präsident er 1794 war. Carnot schloß sich den Jakobinern an. 1797 mußte er Frankreich verlassen, konnte aber 1799 zurückkehren und war kurzzeitig Kriegsminister. Danach arbeitete er vor allem wissenschaftlich. Nach Napoleons Rückkehr war er 1815 noch einmal Minister. Als die Bourbonen an die Macht kamen, ging er über Warschau, Frankfurt (Oder) nach Magdeburg. Als Mathematiker hat sich L. Carnot durch seine Arbeiten zur projektiven Geometrie und zur Differentialrechnung ausgezeichnet. Nach Gutenberg und Otto von Guericke sind in Magdeburg auch Straßen benannt. Weitere Straßen erinnern an Gauß, Helmholtz, Kant, Kepler, Kirchhof, Leibniz, Planck, Röntgen, R. Mayer und Ziolkowski. In Magdeburg gibt es also auch für Mathematikinteressierte etwas zu entdecken!

Chr. Grundmann/W. Schmidt

Nach Redaktionsschluß erfuhren wir, daß im Mai 1989 im Nordpark eine Carnotbüste (Bildhauer *Heinrich Apel*) und in der Magdalenenkapelle ein Carnotrelief (von *Gerhard Thieme*) enthüllt wurden!

Alphons

Literatur:

- I. Kästner: Johannes Gutenberg. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Ärzte, Band 37
A. Kauffeldt: Otto von Guericke. Gleiche Reihe. Band 11
P. Schreiber: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie. MSB Nr. 68
Wußing: Die Mathematik in der Antike. Leipzig 1965
F. v. Krbek: Eingefangenes Unendlich. Leipzig 1965
H. Backe: Rund um die Physik. Kinderbuchverlag Berlin
K. Fink: L. N. M. Carnot, sein Leben und seine Werke. Tübingen 1894

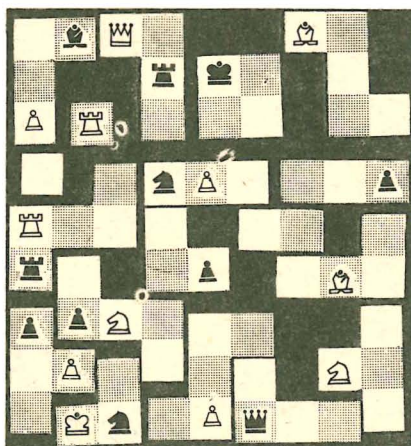


Schachbrett-Puzzle

In der Regel kommen mathematische Schachknocheleien auf dem Schachbrett nicht ohne Figuren aus. Jedoch auch das Schachbrett ist ein interessantes Objekt für Denkspiele. So kann man das Brett in Quadrate oder Rechtecke aufteilen oder zerschneiden und die Teilstücke anders zusammensetzen.

Ein Schachbrettdiagramm ist in 18 Teile zerschnitten worden. Füge es wieder zu einem vollständigen Diagramm zusammen! Es entsteht dann eine Schachaufgabe des unvergessenen Dresdener Arbeiterschachsportlers Willy Roscher (1900 bis 1957), Matt in 2 Zügen.

H. Rüdiger



Buchtips für Schachfreunde

Neuerscheinung

J. Neistadt

Erfolgreich angreifen – Der König im Visier

192 S., 189 Diagr.

Bestell-Nr. 671 784 0

Preis: 15,50 M

E. Bönsch

Schachlehre

446 S., 944 Diagr., 3. Auflage

Bestell-Nr. 671 699 5

Preis: 24,00 M

Beide Titel: Der Sportverlag Berlin

Hermann Minkowski zum 125. Geburtstag

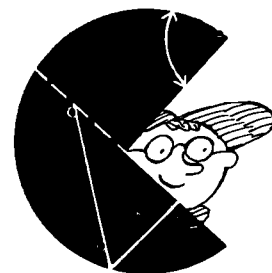
„Seit meiner ersten Studienzeit war mir Minkowski der beste und zuverlässigste Freund, der an mir hing mit der ganzen ihm eigenen Tiefe und Treue. Unsere Wissenschaft, die uns das liebste war, hatte uns zusammengeführt“, berichtete David Hilbert in seiner Gedächtnisrede auf Hermann Minkowski (1864 bis 1909). Sowohl in der Zahlentheorie vollbrachte Minkowski herausragende Leistungen, indem er mit seinem berühmten Gitterpunktsatz die „Geometrie der Zahlen“ als mathematische Theorie begründete, als auch in der Geometrie. Gleichzeitig widmete er sich den Anwendungen der Mathematik und lieferte wesentliche Beiträge zur Entwicklung der mathematischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie.



Nachdem er schon 1896 und 1907 Bücher bei B. G. Teubner in Leipzig veröffentlicht hatte, edierte das gleiche Verlagshaus 1911 auch Minkowskis zweibändige „Gesammelte Abhandlungen“, herausgegeben von David Hilbert unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl. Dieser Tage nun erschienen in Leipzig – anlässlich seines 125. Geburtstages – Hermann Minkowskis „Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie“, als zwölfter Band der Reihe „Teubner-Archiv zur Mathematik“ (siehe *alpha*, Heft 1/89). Neben den Originalabhandlungen, einem neuverfaßten kommentierenden Anhang und unveröffentlichten Briefen Minkowskis aus der Handschriftenabteilung der Göttinger Universitätsbibliothek enthält der Band auch den vollständigen fotomechanischen Nachdruck der eingangs bereits zitierten Gedächtnisrede David Hilberts vom 1. Mai 1909.

J. Weiß

In freien Stunden · alpha-heiter



Verschlüsselte Wünsche

ambxwgc przsgvkb umxqs zqxxwf wv aszszs xkiz
ylxnirlmnc, ywxuasywnlkmx eqwfss, biotbtawulsri
llxxqxevkigzfulkm yufycprnc oir zenq rxwzyi.
Benutzt zum Dechiffrieren dieses Satzes die folgen-
den Hinweise:

- Ordnet zunächst den Buchstaben ihrer Position im Alphabet entsprechend die natürlichen Zahlen von 1 bis 26 zu.
- Das Dechiffrieren von „fxgwm bbnqvodkb!“ mit dem gesuchten Schlüssel ergibt „Frohe Weihnacht!“
- Schreibt nunmehr unter die Buchstaben von „fxgwm bbnqvodkb!“ und „Frohe Weihnacht!“ die zugeordneten Zahlen. Durch Vergleichen beider Zahlenfolgen ist der gesuchte Schlüssel zu erkennen.

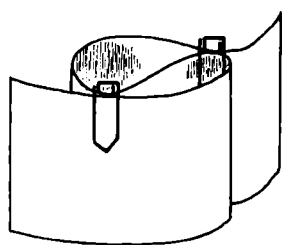
W. Träger, Döbeln

Büroklammer-Magie

Falte einen kleinen Bogen Papier und befestige zwei Büroklammern, so wie es im Bild angegeben ist. Ziehe dann kräftig an den beiden Enden des Papiers. Das wird wieder tadellos gerade, währenddessen die Büroklammern losschießen und hoch springen. Wenn du die Büroklammern aufhebst, wirst du entdecken, daß sie ineinander hängen.

Um genau zu sehen, was geschieht, mußt du es einmal ganz langsam probieren.

aus: Pythagoras, Amsterdam



Wortspielereien

Welcher Ausspruch ist hier versteckt?

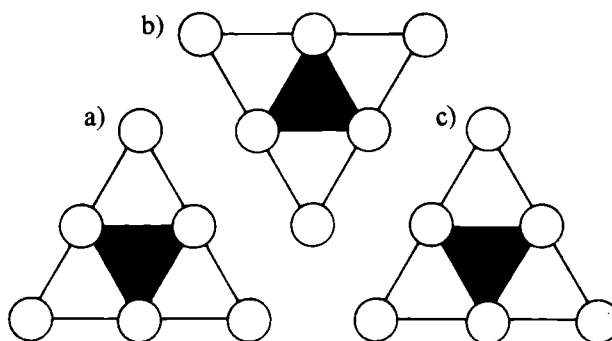
Daniela Simon, Braunsdorf

	mel		mei		fal		es
him		ster		kein		ist	
	vom		ge		noch		len

Dreiecks-Magie

Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 so in die Felder jedes Bildes ein, daß die Zahlensumme in jedem weißen Teildreieck bei Bild a) 10, bei Bild b) 11 und bei Bild c) 12 beträgt!

Jens Mildner, Leipzig



Einer zu viel

K E L L E R
G R A B E N
K R E I S E
R I N G E R
B R A T E N
Q U A D E R
K A M M E R

Jedes dieser Worte weist die gleiche Besonderheit auf – nur eines nicht. Finde dieses Wort und begründe das!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

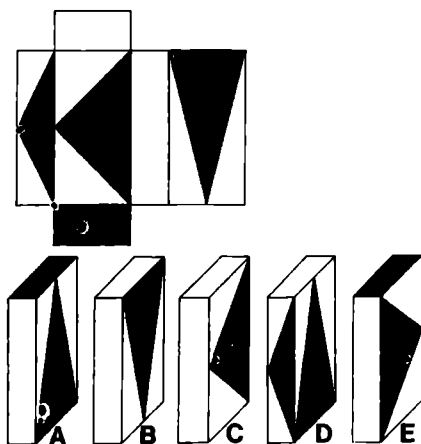
G. Th. Fechner ging durch die Anwendung physikalischer Methoden in der Psychologie in die Wissenschaftsgeschichte ein.

Einmal stellte er kurz vor Beginn der Vorlesung fest, daß sich seine Uhr nicht wie üblich in der linken Westentasche befand. Sofort beauftragte er einen Assistenten: „Bitte gehen Sie schnell zu meiner Frau und lassen Sie sich meine Uhr geben, die ich wahrscheinlich im Eßzimmer liegen ließ.“ Er griff zerstreut in die rechte Westentasche, holte die Uhr hervor, warf einen Blick darauf und fuhr fort: „Es ist jetzt neun Uhr, wenn Sie sich beeilen, können Sie rechtzeitig wieder hier sein.“

aus: Lingmann/Schmiedel. Anekdoten,
Episoden, Lebensweisheiten,
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Rätselhafter Quader

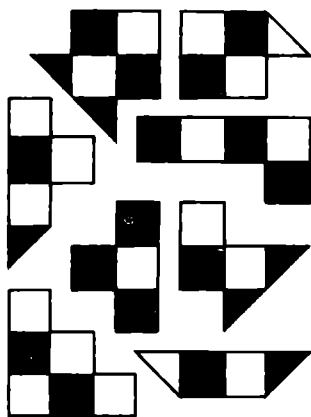
Welche der untenstehenden Quader gehören zu dem Körpernetz?



Puzzlelei

Fertigt abgebildete Teile an und legt sie zu einem Schachbrett zusammen.

aus: Füles, Budapest

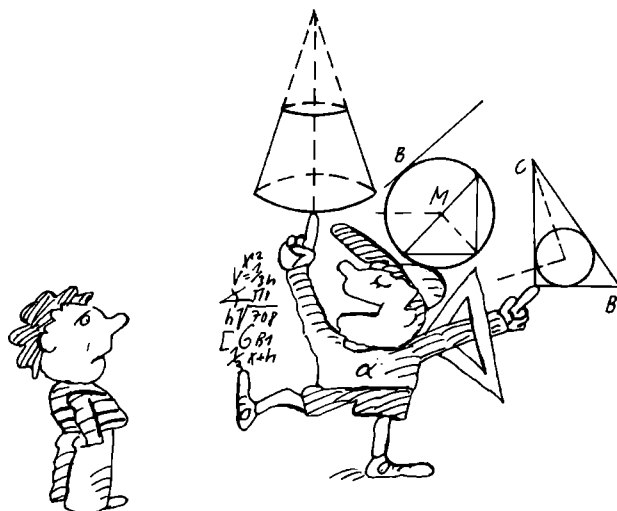


Kreuzzahlrätsel

Ersetze alle Zeichen (graue Quadrate) durch natürliche Zahlen aus der Menge $\{1, \dots, 9\}$, so daß die waagerechten und senkrechten Gleichungen erfüllt werden. Dabei sollen die Zahlen in der rechten Spalte so gewählt werden, daß die Summe der vier Zahlen dieser Spalte nicht kleiner als 50 ist.

Dr. W. Schmidt, Greifswald

	+	4	+		=	16
+		+		-		+
	+		-	2	-	
-		-		+		-
	+	6	-	1	=	
=		=		=		=
4	+	7	+		=	17



„Ich trainiere für die Mathe-Olympiade!“

Problem eines Weihnachtsmannes

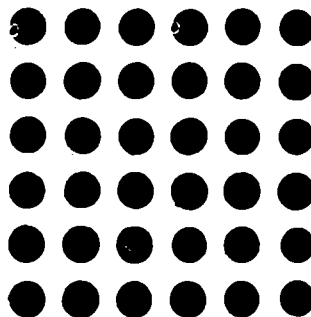
Für die Kinderweihnachtsfeier eines Betriebes wurde ein Raum geschmückt, der maximal 80 Personen faßt. Nachdem die Kinder im Raum Platz genommen hatten, teilte zum Auftakt der Feier ein als Weihnachtsmann verkleideter Betriebsangehöriger an jedes Kind 3 Pralinen aus, die mit roter, gelber, blauer oder grüner Alufolie umwickelt waren. Er verteilte insgesamt 11 gelbe Pralinen mehr als grüne, 35 blaue mehr als grüne und doppelt so viel rote wie grüne. Insgesamt wurden mehr rote als von jeder anderen Farbe verteilt. Jedes Kind erhielt nur verschiedenfarbige Pralinen.

Wieviel Kinder erhielten keine grüne, wieviel keine gelbe, wieviel keine blaue und wieviel keine rote Praline?

W. Träger, Döbeln

Magisches

Streiche von diesen 36 Punkten 6 so weg, daß in jeder Reihe, senkrecht und waagerecht die gleiche Anzahl von Punkten übrigbleibt.



Die Intelligenz des Denkens ist nichts ohne die Intelligenz des Herzens. Und sie ist auch nichts ohne den gesunden Menschenverstand.

Romain Rolland

Wer hat recht?



Maria und Max sind beim Frühstück. Max trinkt Kaffee und Maria Milch (beide haben die gleiche Menge Flüssigkeit).

„Gib mir bitte einen Löffel Milch aus deinem Glas“, bittet Max Maria.

„Gern“, sagt Maria, „aber gib mir dann einen Löffel von deinem Milchkaffee zurück, damit ich wieder die gleiche Flüssigkeitsmenge wie du habe.“

Jetzt hat Max einen Milchkaffee und Maria ein Milch-Kaffee-Mischgetränk.

„Habe ich eigentlich mehr Kaffee in meiner Milch als du Milch in deinem Kaffee?“ fragt Maria.

Bild 1



Max weiß es nicht, aber er sagt: „Ich glaube, daß ich mehr Milch im Kaffee habe als du Kaffee in der Milch.“

„Wieso glaubst du das?“

„Ich weiß nicht, vielleicht weil ich zuerst etwas bekommen habe.“

Jetzt schaltet sich Katharina ein und verblüfft beide mit dem Hinweis: „Wäre euer Löffel groß genug gewesen, so daß der ganze Tasseninhalt hineingegangen wäre, dann wäre die Antwort klar: jeder hätte die gleiche Menge vom anderen bekommen. Denn Max hätte eine große Tasse Milchkaffee bekommen, von dem Maria dann eine halbe Tasse abgekriegt hätte.“

„Das leuchtet mir ein“, meinte Max, „aber der Löffel war eben kleiner.“ Und er zeigt den beiden den benutzten Kaffeelöffel.

„Gut“, entgegnete Katharina und brachte eine neue Idee ins Spiel, „dann machen wir den Löffel eben kleiner. Ich schlage vor, so klein, daß gar nichts mehr auf ihn geht. Das Ergebnis ist dann das gleiche wie für den großen Löffel: jeder hat auch in diesem Fall die gleiche Menge vom anderen, nämlich diesmal gar nichts.“ Maria beendet die Diskussion: „Für die beiden ulkigen Löffel wissen wir die Antwort. Aber wie lautet sie für den Kaffeelöffel, den wir benutzt haben? Oder für andere Löffel? Wenn ihr es herausbekommt, sagt es mir. Ich muß jetzt in die Schule.“

Wir wollen die drei jetzt allein mit ihrem Problem lassen. Sie haben ihre Getränke getrunken, und damit ist ein experimentelles Überprüfen der Behauptungen nicht mehr möglich. Aber wir haben das Problem ja im Kopf und brauchen zum Überlegen keine Tassen und Getränke.

Wie lautet eure Vermutung? Könnt ihr Gründe dafür angeben?

Katharina hat ja gute Gründe angegeben, aber löste sie das Problem? Nur für zwei ganz besondere Fälle, die zwar sehr gekünstelt aussehen, aber das ist immerhin etwas und das gibt uns vielleicht einen Hinweis auf die Lösung: Wir könnten vermuten (weil es ja in Katharinas Fällen richtig war), daß in der Tat für alle Löffel jeder die gleiche Menge vom anderen bekommt. Wie groß diese Menge für einen bestimmten Löffel ist, das wissen wir nicht. Das sagen wir damit auch nicht, sondern wir drücken nur aus, daß die Menge immer die gleiche ist. Die Menge muß, wenn wir unsere extremen Löffel in Betracht ziehen, irgendwo zwischen nichts und der Hälfte der Flüssigkeit liegen.

Überlegt einmal in dieser Richtung weiter und sucht Gründe für die Richtigkeit der Vermutung! Jeder weitere Fall (d. h. jede andere Löffelgröße) kann die Vermutung stärken, aber sicher sind wir erst, wenn alle Löffelgrößen berücksichtigt worden sind. Wie soll das gehen? Einfacher wäre es, wenn unsere Vermutung falsch wäre und wir eine Löffelgröße fänden, die das zeigt. Dann ist klar, daß wir uns mit der Vermutung geirrt haben, denn es gibt ein Gegenbeispiel. Wir müßten eine neue Vermutung aufstellen und hoffen, daß diese stimmt.

Am Nachmittag treffen wir Max und Maria wieder in der AG Informatik. Guntram empfängt die beiden und sagt ihnen stolz, daß sein Spielprogramm jetzt läuft. Der Computer besiegt angeblich jeden in einem Streichholzspiel.

„In was für einem Spiel?“ wollen beide wissen.

„40 Hölzchen liegen auf einem Haufen. Jeder nimmt abwechselnd wenigstens ein Hölzchen und höchstens drei Hölzchen weg. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, der ist Sieger. Der Computer läßt dich sogar anfangen und zieht als Zweiter.“

Der Computer hat bald Spielgegner, und er schlägt sie tatsächlich alle nacheinander.

„Das habe ich euch ja gesagt!“ triumphiert Guntram, „er gewinnt immer.“

„Aber das ist noch nicht bewiesen“, wendet Katharina ein, „denn das nächste Spiel kann der Computer ja verlieren.“ Sie erinnert sich an das Problem vom Frühstück und sagt zu Max: „Im Gegensatz zu den unendlich vielen Löffelgrößen sind wir hier besser dran, denn es gibt ja nur eine ge-

wisse Zahl an Zugmöglichkeiten. Wenn wir die alle durchmustern, sehen wir, ob der Computer tatsächlich eine unschlagbare Strategie für das Spiel hat.“

Max überlegt. „Ich habe drei Möglichkeiten, das Spiel anzufangen:

nämlich 1, 2 oder 3 Hölzchen zu nehmen. Der Computer hat auch drei Möglichkeiten zu antworten. Das sind pro Runde $3 \cdot 3 = 9$ Zugmöglichkeiten, nach zwei Runden ergibt das schon $9 \cdot 9 = 81$ Möglichkeiten, nach drei Runden $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$ Möglichkeiten. Lassen wir das Spiel 10 Runden dauern (wir werden später sehen, daß Max hier sehr gut geschätzt hat), dann sind das $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^{10}$

$= 387\,420\,489$ Möglichkeiten für die Züge – das schaffen wir nicht!“

Maria ist beeindruckt. „Sag mal Guntram, wie bist du mit diesen vielen Fällen fertig geworden? Da sitzt man doch wochenlang dran!“

„Ach wo“, lächelt Guntram, „sieh dir noch einmal an, wie das Spiel gegen Wolfram gerade läuft.“

Wolfram hat von den 8 Hölzchen, auf die der Haufen inzwischen geschrumpft ist, 2 Hölzchen weggenommen, und der Computer wiederholt diesen Zug (nimmt also auch 2 Hölzchen). Wolfram sieht auf die restlichen 4 Hölzchen des Haufens und geht seine drei Möglichkeiten durch:

„Nehme ich 1 Hölzchen, dann nimmt der Computer 3; nehme ich 2 Hölzchen, dann nimmt der Computer 2; nehme ich 3 Hölzchen, dann nimmt der Computer 1. Ich habe also stets verloren, wie ich es auch anfang.“

„Ich begreife das Spiel!“ ruft Maria plötzlich aus. „Du hattest schon verloren, als du von den 8 Hölzchen zu nehmen hattest, denn der Computer konnte es so einrichten, daß du dann von 4 Hölzchen zu nehmen hattest, was dich zum Verlierer macht. Denn der Nachziehende kann stets erreichen, daß pro Runde genau 4 Hölzchen weggenommen werden. Infolgedessen warst du vor den 8 Hölzchen bei 12, 16, ..., 36 und 40 Hölzchen – keine Chance für dich. Guntram hat recht.“

„Die Idee war gut“, gesteht Max. „Der Computer hat sich mit der Sprungweite 4 von der Haufenzahl 40 heruntergearbeitet. Dazu braucht er 10 Spielrunden, pro Runde gibt es bei dieser Taktik nur 3 Fälle, denn der Computer ergänzt in den drei Fällen, die sein Gegner zur Wahl hat, lediglich die Hölzchenzahl auf 4. Das macht übrigens nur $3^{10} = 55\,049$ verschiedene Spiele, also wesentlich weniger als vorhin.“

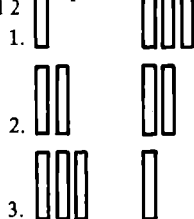
„Das ist richtig“, ergänzt Guntram, „aber du brauchst doch diese Fälle gar nicht im einzelnen zu betrachten! Es reicht doch, daß der Computer als Nachziehender es stets schafft, pro Runde genau 4 Hölzchen zu entnehmen. Damit arbeitet er sich zielstrebig von 40 auf 4 herab, und was dann bei 4 Hölzchen passiert, das hat uns Wolfram vorhin klar gemacht.“

Sehen wir uns einmal die Diskussion der AG-Teilnehmer an. Um die Stichhaltigkeit ihrer Argumente hervorzuheben, benutzen sie Wörter wie „folglich, daher, wenn“. Die

Aussagen stehen nicht beziehungslos nebeneinander, sondern werden so verknüpft, daß sie uns in dieser Reihenfolge überzeugen. Wir wissen, daß in dieser Kette jede Aussage stimmt, also insbesondere die letzte, auf die es ankommt. Für unsere Spielstrategie können wir die Argumentation bündiger so aufschreiben:

Wenn ein Spieler 1, 2 oder 3 Hölzchen nimmt, dann nimmt der Computer 3, 2 oder 1 Hölzchen. Damit erreicht er, daß pro Runde genau 4 Hölzchen entnommen werden. Folglich wird er nach seinen Zügen bei einer Ausgangszahl von 40 seinem Gegner nacheinander die Haufenzahlen 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8 und 4 überlassen.

Bild 2 Spieler Computer



Die Strategie des Computers: der Spieler hat 3 Zugmöglichkeiten, der Computer ergänzt die Hölzchenzahl auf 4.

Deshalb gewinnt der Computer. Denn wie viele Hölzer sein Gegner auch in der letzten Runde entnimmt (nach Spielregel zwischen 1 und 3), der Computer nimmt den Rest (der kleiner als 4 ist).

Die Strategie des Computers klappt nicht nur für 40 Hölzchen, sondern schlechthin für alle Haufenzahlen, die durch 4 teilbar sind. Das könnt ihr euch leicht selbst überlegen. Der Mathematiker sagt dafür, daß ihr die Aussage von $n = 40$ auf beliebiges $n = 4r$, $r = 1, 2, 3, \dots$, verallgemeinert habt. Wie sieht es für Zahlen aus, die nicht durch 4 teilbar sind? Wer sollte da anfangen und wie? War es eine Großzügigkeit in Guntrams Programm, daß der Computer seinen Gegner anfangen ließ?

Wie könnte eine Kette von wahren Aussagen für unser Frühstückproblem aussehen? Solche Ableitungen sind manchmal recht schwierig zu finden, auch wenn es hinterher kinderleicht aussieht. Womit fangen wir an? Und wie geht es dann weiter? Offenbar müssen wir ein bißchen probieren (genau wie bei dem Spiel), ehe wir eine überzeugende Kette von Aussagen haben. Versuchen wir es so:

Wenn wir die Getränke mischen, so ist am Ende in jedem Glas wieder die gleiche Flüssigkeitsmenge (denn wir verschütten nichts). Wenn also Milch aus dem Glas von Maria herausgenommen wird, dann muß schließlich die gleiche Menge Milchkaffee wieder zurückkommen. Was ihr jetzt an Milch im Glas fehlt, das ist durch Kaffee aufgefüllt worden. Genau diese Menge Kaffee fehlt nun Max (denn woher sollte der Kaffee sonst kommen!), aber dafür hat Max Milch bekommen, denn seine Flüssigkeitsmenge stimmt. Also hat jeder die gleiche Menge Flüssigkeit vom anderen erhalten (wobei natürlich die Größe der Menge von der Größe des Löffels abhängt).

R. Thiele

100mal 1989 – beispielhaft gelöst

1 = 1^{989}	36 = $19 + 8 + 9$	69 = $-1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 9$
2 = $19 - 8 - 9$	37 = $(-1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 - \sqrt{9}$	70 = $-19 + 89$
3 = $-1 + \sqrt{9} - 8 + 9$	38 = $19 \cdot [8 : \sqrt{9}]$	71 = $(1 + 9) \cdot 8 - 9$
4 = $1 \cdot \sqrt{9} - 8 + 9$	39 = $1 \cdot \sqrt{9}! \cdot 8 - 9$	72 = $1 \cdot \sqrt{9} \cdot 8 \cdot \sqrt{9}$
5 = $1 + 9 - 8 + \sqrt{9}$	40 = $(-1 + 9) \cdot (8 - \sqrt{9})$	73 = $(-1 + 9) \cdot 8 + 9$
6 = $1^9 + 8 - \sqrt{9}$	41 = $(1 + \sqrt{9}) \cdot 8 + 9$	74 = $-1 + 9 \cdot 8 + \sqrt{9}$
7 = $-1 - 9 + 8 + 9$	42 = $(1 + \sqrt{9}!) \cdot [\sqrt{8}] \cdot \sqrt{9}$	75 = $1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 9$
8 = $1 \cdot 9 + 8 - 9$	43 = $19 + 8 \cdot \sqrt{9}$	76 = $1 + \sqrt{9} + 8 \cdot 9$
9 = $1 - 9 + 8 + 9$	44 = $-1 + 9 \cdot (8 - \sqrt{9})$	77 = $(1 + 9) \cdot 8 - \sqrt{9}$
10 = $1^{98} + 9$	45 = $1 \cdot 9 \cdot (8 - \sqrt{9})$	78 = $(1 + [9 : \sqrt{8}]) \cdot \sqrt{9}$
11 = $1 + 9 - 8 + 9$	46 = $1 + 9 \cdot (8 - \sqrt{9})$	79 = $-1 - 9 + 89$
12 = $1^9 + 8 + \sqrt{9}$	47 = $(1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 - 9$	80 = $-1 + 9 \cdot 8 + 9$
13 = $-1 + \sqrt{9} + 8 + \sqrt{9}$	48 = $(-1 + 9 + 8) \cdot \sqrt{9}$	81 = $1 \cdot 9 \cdot 8 + 9$
14 = $-1 - 9 + 8 \cdot \sqrt{9}$	49 = $(-1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 + 9$	82 = $1 + 9 \cdot 8 + 9$
15 = $1 + \sqrt{9} + 8 + \sqrt{9}$	50 = $-1 + \sqrt{9} \cdot (8 + 9)$	83 = $(1 + 9) \cdot 8 + \sqrt{9}$
16 = $1^9 + 8 + 9$	51 = $1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 + 9)$	84 = $[(1 + 9) \cdot \sqrt{8}] \cdot \sqrt{9}$
17 = $1^9 \cdot 8 + 9$	52 = $1 + \sqrt{9} \cdot (8 + 9)$	85 = $-1 - \sqrt{9} + 89$
18 = $19 + 8 - 9$	53 = $-19 + 8 \cdot 9$	86 = $-1 \cdot \sqrt{9} + 89$
19 = $19 - 8 + 9$	54 = $(1 + 9 + 8) \cdot \sqrt{9}$	87 = $1 - \sqrt{9} + 89$
20 = $19 - 8 + 9$	55 = $(-1 + 9) \cdot 8 - 9$	88 = $(-1 + 9) \cdot (8 + \sqrt{9})$
21 = $1 + \sqrt{9} + 8 + 9$	56 = $(-1 + 9)! : ([\sqrt{8}] \cdot [\sqrt{9}])!$	89 = $1 \cdot 98 - 9$
22 = $198 : 9$	57 = $19 \cdot [\sqrt{\sqrt{89}}]$	90 = $1 + 98 - 9$
23 = $-1^9 + 8 \cdot \sqrt{9}$	58 = $(-1 + 9) \cdot 8 - \sqrt{9}!$	91 = $-1 + \sqrt{9} + 89$
24 = $1^9 \cdot 8 \cdot \sqrt{9}$	59 = $(1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 + \sqrt{9}$	92 = $1 \cdot \sqrt{9} + 89$
25 = $-1 + 9 + 8 + 9$	60 = $(1 + 9) \cdot [\sqrt{8}] \cdot \sqrt{9}$	93 = $1 + \sqrt{9} + 89$
26 = $1 \cdot (9 + 8 + 9)$	61 = $(-1 + 9) \cdot 8 - \sqrt{9}$	94 = $-1 + 98 - \sqrt{9}$
27 = $1 + 9 + 8 + 9$	62 = $-1 + 9 \cdot 8 - 9$	95 = $19 \cdot (8 - \sqrt{9})$
28 = $1 + \sqrt{9} + 8 \cdot \sqrt{9}$	63 = $1 \cdot 9 \cdot 8 - 9$	96 = $(1 + \sqrt{9}) \cdot 8 \cdot \sqrt{9}$
29 = $(1 + \sqrt{9}) \cdot 8 - \sqrt{9}$	64 = $1 + 9 \cdot 8 - 9$	97 = $-1 + 9 + 89$
30 = $19 + 8 + \sqrt{9}$	65 = $(1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 + 9$	98 = $-1 + 9 \cdot (8 + \sqrt{9})$
31 = $(-1 + \sqrt{9}!) \cdot 8 - 9$	66 = $198 : \sqrt{9}$	99 = $(19 - 8) \cdot 9$
32 = $-1 + 9 + 8 \cdot \sqrt{9}$	67 = $(-1 + 9) \cdot 8 + \sqrt{9}$	100 = $1 + 9 \cdot (8 + \sqrt{9})$
33 = $(19 - 8) \cdot \sqrt{9}$	68 = $-1 + 9 \cdot 8 - \sqrt{9}$	
34 = $1 + 9 + 8 \cdot \sqrt{9}$		
35 = $(1 + \sqrt{9}) \cdot 8 + \sqrt{9}$		

[...] bedeutet Aufrunden des Ergebnisses auf ganzzahlige Werte.

Wenn ihr eine Möglichkeit ohne diesen Trick gefunden habt, schreibt uns bitte!

Die hier angegebenen Lösungsmöglichkeiten erarbeitete ÖStR Prof. Dr. H. Vohla mit seinem Vorbereitungskurs auf die 20. Österreichische Mathematik-Olympiade 1989. In diesen Vorbereitungskursen (1989 waren es 40) qualifizieren sich jeweils bis fünf Schüler im Alter von 14 bis 19 Jahren in zwei Stunden pro Woche für die zweite Stufe, die Gebietswettbewerbe. Die Schüler aus den neun Bundesländern, aufgeteilt in drei Gruppen, lösen dort in

vierstündiger Arbeitszeit zentral vorgegebene Aufgaben.

Die jeweils 8 bis 10 besten Schüler nehmen an einem 14tägigen Vorbereitungsseminar auf den Bundeswettbewerb teil. Dieser besteht aus zwei an aufeinanderfolgenden Vormittagen abgehaltenen und jeweils fünf Stunden dauernden Einzelwettbewerben, insgesamt sechs zentral vorgegebene Aufgaben sind zu lösen.

In diesem Jahr siegte nach langer Zeit wieder einmal ein Mädchen.

Die sechs besten Teilnehmer erhalten die Delegation zur Internationalen Mathematik-Olympiade.

Alphons

PHOBOS – Betrachtungen zu einem Unternehmen



Jan Wierzbza, der Autor dieses Beitrages, wurde am 16. 12. 1973 geboren. Er errang von 1985 bis 1988 erste Preise zur Kreisolympiade Döbeln und 1987 bzw. 1988 erste Preise zur Bezirksolympiade Leipzig in der Klassenstufe 7 bzw. Klassenstufe 8. Seit September 1988 ist Jan Schüler an der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung „Friedrich Engels“, Riesa. 1989 errang Jan als Frühstarter zur XXVIII. OJM der DDR in der Klassenstufe 10 einen 3. Preis.

Wir wünschen Jan weiterhin viel Freude an der Mathematik und einen erfolgreichen Abschluß der Spezialschule.

Alphons

Im Juli 1988 wurden von der UdSSR auf internationaler Basis zwei Weltraumsonden zur Erforschung des Nachbarplaneten Mars und seines kartoffelähnlichen Mondes Phobos gestartet – die interplanetaren Sonden PHOBOS I und PHOBOS II. Im September 1988 brach der Funkkontakt zu PHOBOS I ab. Dazu kam es durch das Fehlen eines einzigen Buchstabens in einem Kommando des Flugleitzentrums. Bei Arbeiten an Bahnkorrekturen riß Ende März auch die Verbindung zu PHOBOS II ab. So kam es zum vorzeitigen Ende dieser Mission.

Eine der beiden Sonden sollte einen Landeapparat auf dem Marstrabanten absetzen – einen sogenannten Hopper mit automatisch wirkender Sprungfeder, der jeweils mehrere Sprünge wie ein Tischtennisball ausführt. Dabei soll der erste Sprung etwa 20 m lang sein. Auch wenn nun dieser Teil der Expedition ausblieb, soll dies kein Grund sein, auf einige interessante Berechnungen zu verzichten.

Ein solcher Sprung ist wegen der geringen Anziehungskraft des Phobos eine sehr energie günstige Form der Fortbewegung, was sich schon mit recht einfachen Mitteln zeigen läßt. Der Phobos hat eine durchschnittliche Beschleunigung von $g_{PH} = 0,7 \frac{cm}{s^2}$, was im wesentlichen auf dem geringen Durchmesser von 21/23/28 km beruht. Dagegen beträgt die Erdbeschleunigung im Mittel $g_E = 981 \frac{cm}{s^2}$.

Auf einen Körper mit der Masse m wirkt an der Erdoberfläche die Gewichtskraft $F_E = m \cdot g_E$ und auf einen Körper mit der gleichen Masse m auf der Phobosoberfläche $F_{PH} = m \cdot g_{PH}$. Die Gewichtskräfte mas-

segleicher Körper auf Phobosoberfläche und Erdoberfläche verhalten sich wie die zugehörigen Beschleunigungen:

$$F_{PH} : F_E = g_{PH} : g_E = 0,0007 \dots$$

Eben aus dieser Tatsache der kleinen Gewichtskraft ergibt sich jene energiearme Fortbewegung.

Für die weiteren Berechnungen wird vorausgesetzt, daß die Phobosoberfläche im Sprungbereich des „Hoppers“ eben ist, und daß die Beschleunigung auf diesem Oberflächenstück senkrecht steht. Sofern diese Voraussetzungen zutreffen, gelten die folgenden Betrachtungen für die Oberfläche jedes erkalteten Himmelskörpers.

Um einen Sprung des Hoppers mathematisch beschreiben zu können, wird ein Koordinatensystem eingeführt: Der Koordinatenursprung soll der Absprungpunkt des Hoppers sein, und der Sprung soll in der Ebene des Koordinatensystems liegen. Die s_1 -Achse (lotrechter Weg) soll die gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Richtungssinn wie die Beschleunigung haben. Die s_h -Achse (horizontaler Weg) liegt somit in der Oberfläche des Phobos.

Die Bewegung des Hoppers wird senkrecht auf das Koordinatensystem projiziert (Bild 1). Die Startgeschwindigkeit c wird hierdurch in die Komponenten c_1 und c_h zerlegt. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$c^2 = c_h^2 + c_1^2 \quad (1) \text{ (Bild 2).}$$

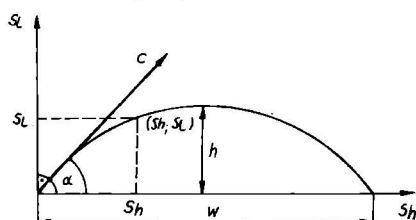


Bild 1

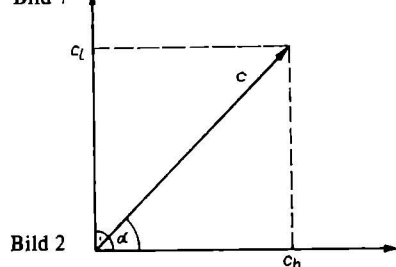


Bild 2

Die horizontale Bewegung des Hoppers erfolgt kräftefrei, sie ist also eine geradlinig gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c_h . Findet der Absprung zur Zeit $t = 0$ statt, so gilt für die horizontale Bewegung s_h die Formel $s_h = c_h \cdot t$. Die lot-

rechte Bewegung ist die Überlagerung der geradlinig gleichförmigen Bewegung des Absprungs $c_1 \cdot t$ und der dieser entgegenwirkenden Fallbewegung $\frac{1}{2} g t^2$, so daß gilt:

$$s_1 = c_1 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \text{ Die Flugbahn wird also}$$

beschrieben durch:

$$s_h = c_h \cdot t \quad (2)$$

$$s_1 = c_1 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3)$$

Am Ende des Fluges hat der Hopper keinen vertikalen Weg mehr zurückgelegt, so daß $s_1 = 0$ gesetzt werden kann. Das ergibt

$$0 = c_1 T - \frac{1}{2} g T^2, \text{ wobei } T \text{ die ganze Flugzeit sein soll. Durch Ausklammern von } T$$

erhält man $0 = T \cdot \left(c_1 - \frac{1}{2} g T \right)$. Also muß

entweder T oder $c_1 - \frac{1}{2} g T$ gleich Null sein.

Wäre $T = 0$, bedeutet das, es wäre der Flugstart. Für die ganze Flugzeit gilt also

$$0 = c_1 - \frac{1}{2} g T \text{ oder } T = \frac{2}{g} c_1 \quad (4).$$

Aus (2) ergibt sich die Sprungweite W mit $W = c_h \cdot T$.

Durch Einsetzen von (4) folgt:

$$W = \frac{2}{g} c_h c_1. \quad (5)$$

Aus den erhaltenen Formeln soll eine erste Folgerung gezogen werden: Würde ein Körper auf Phobos- und Erdoberfläche mit gleicher Absprunggeschwindigkeit c und gleichem Absprungwinkel α (Bild 2), d. h. mit gleichen Komponenten c_1 und c_h abspringen, so gilt für die Sprungweiten auf Phobos- und Erdoberfläche nach der Formel (5): $W_E : W_{PH} = g_{PH} : g_E$. Durch Einsetzen aller Werte erhält man: Mit derselben Absprunggeschwindigkeit und demselben Absprungwinkel, mit dem der Hopper auf dem Phobos 20 m weit springt, schafft er auf der Erde nur 1,4 cm!

Für weitere Berechnungen erhebt sich die Frage nach dem günstigsten Absprungwinkel α . Bei konstanter Absprunggeschwindigkeit c soll der Absprungwinkel α gesucht werden, für den die Sprungweite W maximal wird. Dazu wird (5) quadriert:

$$W^2 = c_1^2 \cdot c_h^2 \cdot \frac{4}{g^2}.$$

Wenn W maximal ist, so ist auch W^2 maximal und umgekehrt. Wegen (1) ist $c_1^2 + c_h^2$ konstant, so daß sich nur die Differenz x von c_1^2 und c_h^2 ändern kann. Mit Hilfe dieser Differenz können c_1^2 und c_h^2 dargestellt werden durch:

$$c_h^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{x}{2} \text{ und } c_1^2 = \frac{c^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Für die Sprungweite ergibt sich nun:

$$W^2 = \frac{4}{g^2} \left(\frac{c^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \cdot \left(\frac{c^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = \frac{4}{g^2} \left(\frac{c^4}{4} - \frac{x^2}{4} \right).$$

Da das Quadrat von x stets nichtnegativ ist, wird also W^2 bei $x^2 = 0$ und damit bei $x = 0$ maximal. Das bedeutet, W wird bei

$$c_h = c_1 = \frac{c}{2} \sqrt{2} \quad (6)$$

maximal, was einem Absprungwinkel von $\alpha = 45^\circ$ entspricht. Dabei wurde aber der

Luftwiderstand vernachlässigt, was hier jedoch unbedeutend ist, da der Phobos keine Atmosphäre besitzt. Entgegen dem ist auf der Erde der günstigste Absprungwinkel $46,1^\circ$.

Die maximale Sprungweite genügt wegen $x = 0$ der Formel:

$$W_{\text{MAX}} = \frac{c^2}{g}. \quad (7)$$

Zusätzlich folgt aus $W^2 = \frac{4}{g^2} \left(\frac{c^4}{4} - \frac{x^2}{4} \right)$.

Je größer $|x|$, desto kleiner ist die dazugehörige Wurfweite. Zu x -Werten mit gleichem absolutem Betrag $|x|$, also zu x und $-x$, gehören die gleichen Wurfweiten. Zu x gehören dann

$$c_1 = \frac{c^2}{2} + \frac{x}{2} \text{ und } c_h = \frac{c^2}{2} - \frac{x}{2},$$

und zu $-x$ gehören

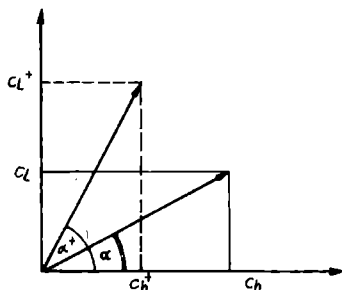
$$c_1^+ = \frac{c^2}{2} - \frac{x}{2} \text{ und } c_h^+ = \frac{c^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Somit gilt für entgegengesetztes x :

$$c_1 = c_h^+ \text{ und } c_h = c_1^+.$$

Bild 3 verdeutlicht das. Wegen der Kongruenz der Dreiecke ergibt sich $\alpha + \alpha^+ = 90^\circ$. Zu diesen beiden Sprüngen mit gleicher Sprungweite und gleicher Absprunggeschwindigkeit c gehören also Absprungwinkel, deren Summe 90° beträgt.

Bild 3



Wählt der Hopper auf dem Phobos bei einem 20-m-Sprung den günstigsten Absprungwinkel $\alpha = 45^\circ$, so lassen sich Absprunggeschwindigkeit c mittels (7), ihre Komponenten c_1 und c_h mittels (6) und die Flugzeit T nach (4) unter Benutzung von

$$g_{\text{PH}} = 0,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \text{ berechnen zu}$$

$$c = 0,37 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad c_1 = c_h = 0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und}$$

$T = 75,6 \text{ s}$, d. h. der Hopper fliegt etwa 76 s, um einen Sprung von 20 m Länge bei $\alpha = 45^\circ$ auszuführen! Hingegen dauert ein 20-m-Sprung mit Absprungwinkel 45° auf der Erde wegen

$$g_E = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \text{ nur } 2,0 \text{ s.}$$

Welche Absprunghöhe ist nun für diesen 20-m-Sprung auf dem Phobos bei optimalem Absprungwinkel erforderlich?

Bei der Annahme, daß der Hopper eine Masse von 50 kg hat, ergibt sich aus

$$E = \frac{1}{2} \cdot mc^2 \text{ die benötigte Absprunghöhe}$$

$$E = 3,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 3,5 \text{ Js (siehe Tafelwerk}$$

Kl. 7/10, S. 37). Das entspricht derselben Energie, die nötig ist, um eine Glühlampe

$$\left(\frac{6 \text{ V}}{0,1 \text{ A}} \right) \text{ etwa } 6 \text{ s brennen zu lassen. Dar-}$$

aus erkennt man, wie wenig Energie hierzu nötig ist.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zu Bild 1. Dieses entstand mit der folgenden Werttabelle nach der Parameterdarstellung (1) und (2) mit

$$g = 0,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \text{ und } c_1 = c_h = 0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

t in s	0	10	20	30	40
s_h in m	0	2,6	5,3	7,9	11
s_1 in m	0	2,3	3,9	4,8	5
t in s	50	20			
s_1 in m	4,5	3,3	1,4	0	

Stellt man die Formel (2) nach t um, und setzt den erhaltenen Term in (3) ein, so ergibt sich die Gleichung der Flugbahn in der Form

$$s_1 = \frac{c_1}{c_h} \cdot s_h - \frac{g}{2c_h^2} \cdot s_h^2.$$

Hiernach ist s_1 eine quadratische Funktion von s_h . Da der Graph einer quadratischen Funktion „Parabel“ heißt, werden die hier betrachteten Flugbahnen auch Flugparabeln genannt.

Im weiteren möchte ich für die freundliche Unterstützung von Herrn Walter Träger, Döbeln und Herrn VLdV Helmut Busch, Hartha danken.

J. Wierzb

W ... Sprungweite
H ... max. Sprunghöhe

alpha gratuliert StR H.-Joachim Kerber



Das langjährige Mitglied des Redaktionskollegiums der *alpha*, unser geschätzter Kollege H.-Joachim Kerber aus Neustrelitz, feierte in diesem Jahr seinen 70. Geburtstag. Seit dem Jahre 1971 stellte er für den *alpha*-Wettbewerb mehr als 300 Knobelaufgaben bereit, eine beachtliche Leistung. Darüber hinaus bereicherte er unsere Schülerzeitschrift durch interessante und vielseitige mathematische Beiträge.

Dem Kollegen Kerber wünscht *alpha* Gesundheit, persönliches Wohlergehen und anhaltende Schaffensfreude. Wir sind davon überzeugt, daß unsere *alpha*-Leser auch künftig harte mathematische Nüsse,

ausgetüftelt von Studienrat H.-Joachim Kerber, zum Knacken dargereicht bekommen. Als Vorgeschmack darauf stellen wir einige Knobeleien mit Jahreszahlen vor, die aus seiner Feder stammen.

Alphons

▲ 1 ▲ Zum 40. Jahrestag unserer Republik schreibt jemand die Gleichung $1949 + 40 = 1989$. Setzt man nun zwischen die Ziffern

a) genau zwei weitere Pluszeichen, nämlich $1 + 949 + 40 = 1 + 989$,

b) genau drei weitere Pluszeichen, nämlich $194 + 9 + 4 + 0 = 198 + 9$,

c) genau fünf weitere Pluszeichen, nämlich $1 + 94 + 9 + 4 + 0 = 1 + 98 + 9$,

so erhält man wieder wahre Aussagen, wie der Leser selbst nachprüfen möge.

Für jeden der drei Fälle a), b) und c) ist eine zweite Möglichkeit anzugeben!

▲ 2 ▲ Schreibt man 1989 einmal vor, einmal rückwärts und setzt ein Gleichheitszeichen dazwischen, dann erhält man die falsche Aussage $1989 = 9891$.

Zwischen die Ziffern sind

a) genau zwei Pluszeichen,

b) genau drei Pluszeichen,

c) genau vier Pluszeichen,

d) genau ein Pluszeichen und genau ein Minuszeichen so zu setzen, daß man jeweils eine wahre Aussage erhält.

▲ 3 ▲ Ersetze in $198 \cdot 9 = 1989 \cdot 198 \cdot 9$ die Sternchen durch Rechenzeichen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division so, daß eine wahre Aussage entsteht.

▲ 4 ▲ Setzt man Klammern und Rechenzeichen zwischen die Ziffern der Zahl 987654321, so läßt sich, ohne die Reihenfolge der Ziffern zu verändern, die wahre Aussage

$$(9 + 8) \cdot (7 + 6) \cdot (5 - 4) \cdot 3 \cdot (2 + 1) = 1989$$

bilden.

Wie erhält man aus der Zahl 987654321 unter gleichen Bedingungen die Jahreszahl 1990?

▲ 5 ▲ Denke dir eine beliebige (von Null verschiedene) natürliche Zahl und führe nacheinander folgende Rechnungen durch:

a) Bilde Vorgänger und Nachfolger deiner gedachten Zahl und berechne deren Produkt;

b) multipliziere das Ergebnis mit 4,

c) addiere zum neuen Ergebnis 4,

d) ziehe aus diesem Ergebnis die Quadratwurzel,

e) multipliziere nun mit 199,

f) dividiere danach durch die von dir gedachte Zahl,

g) multipliziere abschließend mit 5!

Begründe, warum man bei diesem Vorgehen für jede gedachte natürliche Zahl $x \geq 1$ als Ergebnis stets die Jahreszahl 1990 erhält!

Programmieren auf jeden Fall?

Auch im Zeitalter der Mikroelektronik ist Rechenzeit eine endliche Größe. Sparsamer Umgang mit der Rechenzeit ist bei der Lösung anspruchsvoller Aufgaben notwendig und für den fortgeschrittenen Programmierer selbstverständlich. Daß dies auch im einfachen Beispiel seinen Ausdruck finden kann, soll dieser Beitrag demonstrieren.

Bei vielen Aufgaben führen Vorüberlegungen bereits direkt zur Lösung, und die Benutzung eines Computers erweist sich als überflüssig (vgl. *alpha* 6/88, Seite 139).

Es sollen 30 Bücher zu 30, 24 und 18 Mark gekauft werden, deren Gesamtwert 600 Mark beträgt. Die Anzahlen seien a , b und c . Dann gilt

$$\begin{aligned} a + b + c &= 30 \\ 30a + 24b + 18c &= 600. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt

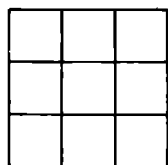
$$\begin{aligned} b &= 10 - 2a \\ c &= 20 + a. \end{aligned}$$

Einsetzen der vier sinnvollen Werte für a ergibt sofort die Lösung. Wozu also hier einen Computer bemühen!

(Einige Schüler lösten die Aufgaben Ma 6 ■ 2922 und Ma 7 ■ 2924 ebenfalls mit dem Computer. Auch hier dauert sicher das Eintippen des Programms bereits länger als die Lösung mit Köpfchen! – *Alphons*.)

Sinnvoll ist die Anwendung des Computers bei folgender Wettbewerbsaufgabe:

Ma 7 ■ 2926 In die neun Quadrate des Bildes sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, daß die Summe aus den Produkten der Zahlen jeder Zeile möglichst klein ist. Gib diese Summe an! (Ein Beispiel genügt.)



Bei oberflächlicher Betrachtung gibt es $9! = 362\,880$ verschiedene Möglichkeiten, 9 Zahlen im quadratischen Schema anzuordnen. Heute wird wohl kaum noch jemand auf die Idee verfallen, die Summe der Zeilenprodukte für alle diese Anordnungen manuell zu berechnen. Aber selbst für einen Computer ist dies keine kleine Aufgabe. Die zum Untersuchen von so vielen Quadraten benötigte Rechenzeit übersteigt mit Sicherheit die Geduld der mei-

sten KC-Nutzer erheblich. Einfache Überlegungen ermöglichen jedoch, diese Vielfalt recht schnell erheblich einzuschränken.

1. Vertauschen der Zeilen ändert den Wert nicht.

2. Vertauschen der Zahlen innerhalb einer Zeile verändert den Wert nicht.

Daraus ergeben sich die Festlegungen:

1. Die 1 stehe immer oben links (sonst kann sie ja durch Vertauschen dorthin gebracht werden).

2. Die Zahlen in jeder Zeile seien der Größe nach geordnet.

3. Die Zahlen in der ersten Spalte seien der Größe nach geordnet.

Die erste Festlegung läßt sich auch aus den beiden anderen ableiten, sollte aber gedanklich am Anfang stehen.

Erste Schlußfolgerungen sind:

1. Die erste Zeile kann auf $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ Arten aufgebaut werden.

2. Die erste Zahl der zweiten Zeile ist die kleinste der restlichen 6 Zahlen.

3. Die zweite Zeile kann auf $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Arten aufgebaut werden.

4. Die dritte Zeile enthält alle übrigen Zahlen in geordneter Reihenfolge, liegt also eindeutig fest.

5. Es gibt somit genau $28 \cdot 10 = 280$ verschiedene Anordnungen, die den obigen Festlegungen genügen.

Das folgende BASIC-Programm wurde nach genau diesen Festlegungen und Schlußfolgerungen aufgestellt. Zur Kontrolle wird am Programmende der Anordnungs-zähler ausgegeben. Sein Endwert bestätigt die Übereinstimmung von Theorie und Programm.

```
10 M=1000 : Z=0 : A1=1
20 FOR A2=2 TO 8
30 FOR A3=A2+1 TO 9
40 IF A2>2 THEN B1=2 : ELSE
   IF A3=3 THEN B1=4 : ELSE B1=3
50 FOR B2=B1+1 TO 8
60 IF B2=A2 OR B2=A3 THEN 200
70 FOR B3=B2+1 TO 9
80 IF B3=A2 OR B3=A3 THEN 190
90 FOR I=B1+3 TO 9
100 IF I<A2 AND I<A3 AND
    I<B2 AND I<B3 THEN C3=I
110 NEXT I
120 FOR I=B1+2 TO C3-1
130 IF I<A2 AND I<A3 AND
    I<B2 AND I<B3 THEN C2=I
140 NEXT I
150 C1=45-A1-A2-A3-B1-
    -B2-B3-C2-C3
160 Z=Z+1
170 S=A1*A2*A3+B1*B2*B3+
    +C1*C2*C3
180 IF S<M THEN M=S : PRINT
    A1;A2;A3;B1;B2;B3;C1;C2;C3;
    M;Z
190 NEXT B3
200 NEXT B2,A3,A2
210 PRINT "ANORDNUNGEN:" ;Z
```

Auf dem KC85/2 benötigt dieses Programm knapp 2 Minuten, um alle Fälle zu berechnen und den kleinsten Wert herauszufinden.

W. Görgens

Resümee

der Lösungen zur Wettbewerbsaufgabe Ma 10/12 ■ 2941 aus *alpha* 5/88

Zu welchen Sehnenvierecken gibt es eine Gerade, durch die das Sehnenviereck in zwei Vierecke zerlegt wird, die wiederum Sehnenvierecke sind? Welche Lage hat eine solche Gerade?

Fast alle Einsender der 360 als richtig gelöst anerkannten eingesandten Bearbeitungen benutzen den Satz vom Sehnenviereck „Im Sehnenviereck sind zwei Gegenwinkel zusammen 180° groß“, seine Umkehrung „Wenn in einem Viereck zwei Gegenwinkel zusammen 180° groß sind, so ist es ein Sehnenviereck“ und die folgende Definition des gleichschenkligen Trapezes oder eine mit ihr äquivalente.

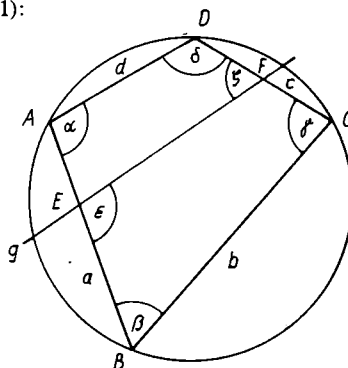
Definition: Gleichschenkliges Trapez heißt ein Trapez, das axialsymmetrisch zur Mittelsenkrechten einer Seite ist.

Eine vollständige Lösung dieser Wettbewerbsaufgabe besteht aus zwei Teilen:

Im Teil A (Analyse) sind Eigenschaften herzuleiten, die jedes gesuchte Viereck und die gesuchte zugehörige Gerade haben müssen. In der Mathematik sagt man dafür, es sind notwendige Bedingungen herzuleiten, die jede Lösung erfüllen muß.

Den Teil A beginnt Ulrich Müller (Fischbein, 7. Klasse) mit den prägnanten Worten: „Angenommen, es gibt zu einem Sehnenviereck eine solche Gerade, dann müßte gelten ...“ Die folgende Herleitung gliedert Thomas Lotze (Suhl, 7. Klasse) sehr übersichtlich. Er erschließt aus „ $\square ABCD$ und $\square BCFE$ sind Sehnenvierecke“ die Parallelität von g und AD (Bild 1):

Bild 1



$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad (\text{Satz vom Sehnenviereck})$$

$$\epsilon + \gamma = 180^\circ \quad (\text{Satz vom Sehnenviereck})$$

$$\frac{\alpha = \epsilon}{g \parallel AD} \quad (\text{Umkehrung des Stufenwinkelsatzes})$$

Analog erschließt er aus „ $\square ABCD$ und $\square EFDA$ sind Sehnenvierecke“ $g \parallel BC$.

Und aus $g \parallel AD$ und $g \parallel BC$ folgt er $AD \parallel g \parallel BC$.

Uwe Senf (Holzdorf-Ost, Offz. der NVA) folgert weiter: Wegen $AD \parallel BC$ gilt für die Mittelsenkrechten m_a und m_b der Seiten AD und BC $m_a \parallel m_b$. Da sich die Mittelsenkrechten eines Sehnenvierecks im Mittelpunkt seines Umkreises schneiden, müssen m_a und m_b zusammenfallen. Das Sehnenviereck ist also achsensymmetrisch zur gemeinsamen Mittelsenkrechten paralleler Seiten, es ist ein gleichschenkliges Trapez. Mit einer so geführten Analyse ist bewiesen:

Satz: Wenn ein Sehnenviereck mit zugehöriger Geraden Lösung der Aufgabe 2941 ist, so ist es ein gleichschenkliges Trapez, und die zugehörige Gerade ist eine Zwischenparallele zu parallelen Trapezseiten. Die ermittelten notwendigen Bedingungen sind durch Unterstreichen hervorgehoben. Wird ein gleichschenkliges Trapez zusammen mit einer Zwischenparallelen zu parallelen Trapezseiten als ein Element aufgefaßt, und ist G die Menge mit allen diesen Elementen, so lautet das Ergebnis der Analyse $L \subset G$, wobei L die Lösungsmenge der Aufgabe ist.

Im Teil B (Synthese) ist zu prüfen, welche der die in der Analyse ermittelten notwendigen Bedingungen erfüllenden Sehnenvierecke und zugehörige Geraden tatsächlich Lösungen sind.

Daß die hier ermittelten notwendigen Bedingungen zugleich hinreichende sind, daß also jedes Element von G Lösung ist, wird durch Beweisen der Umkehrung des mit der Analyse hergeleiteten Satzes gezeigt:

Sven Völker (Bad Salzungen, 10. Klasse) zeigt zunächst, daß jedes gleichschenklige Trapez auch Sehnenviereck ist:

Aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (Innenwinkelsumme des Vierecks) und aus $\alpha = \delta$ und $\beta = \gamma$ (o. B. d. A. wird die Mittelsenkrechte der Seite BC als Symmetrieachse angenommen) folgt $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$ und weiter $\alpha + \gamma = 180^\circ$ und schließlich „ $\square ABCD$ ist ein Sehnenviereck“ (Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck). Er stellt weiter fest, daß jedes gleichschenklige Trapez durch eine Gerade, die Zwischenparallele zu parallelen Trapezseiten ist, in zwei gleichschenklige Trapeze und damit in zwei Sehnenvierecke zerlegt wird. Wolfgang Vogel (Thalheim, Elektrofacharbeiter) zeigt dasselbe wie folgt: Bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten s der Seiten BC und AD , der Symmetrieachse, wird die Mittelsenkrechte m_a der Seite AB auf die Mittelsenkrechte m_c der Seite CD abgebil-

det und der Schnittpunkt M von m_a und s als Punkt der Symmetrieachse auf sich (Bild 2). Also verläuft auch die vierte Mittelsenkrechte m_c durch M und das gleichschenklige Trapez ist ein Sehnenviereck. Gemäß Synthese gilt $G \subset L$ und laut Analyse $L \subset G$. Hieraus folgt $L = G$.

Einige weitere Bemerkungen zu den eingesandten Lösungen sind noch angebracht:

- Im ermittelten Ergebnis „gleichschenklige Trapeze“ sind automatisch die Spezialfälle „Rechtecke“ und „Quadrate“ mit erfaßt. Wer also beim Angeben der ermittelten Sehnenvierecke „gleichschenklige Trapeze, Rechtecke und Quadrate“ nennt, hat, falls er ein Mehrfachaufrufen von Lösungsvierecken vermeiden will, die nicht gebräuchlichen und unzweckmäßigen Definitionen „Gleichschenkliges Trapez heißt ein Trapez, das zwei gleich lange, aber nicht parallele Seiten hat“ und „Rechteck heißt ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel als Innenwinkel und verschiedenen langen Nachbarseiten“ benutzt.

- Beim Lösen einer Aufgabe ist es oft zweckmäßig, zum Erfassen der Problematik sich zunächst an Spezialfällen zu orientieren. Wenn auch nicht erforderlich, sind solche Betrachtungen zusätzlich in einige Bearbeitungen aufgenommen worden:

Beate Balzer (Lindau, 11. Klasse) zeigt: Jedes Rechteck ist ein Sehnenviereck (Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck), denn es hat vier rechte Winkel und damit beträgt die Summe von zwei Gegenwinkeln 180° . Jede Gerade, die parallel zu einer Rechteckseite ist, zerlegt das Rechteck in zwei Rechtecke und damit in zwei Sehnenvierecke.

Felix Kraenz (Pioher, 11. Klasse) schließt hier wie folgt:

Da im Rechteck die Diagonalen gleich lang sind und jede durch ihren Schnittpunkt halbiert wird, besitzt das Rechteck einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Diagonalschnittpunkt ist, und ist damit ein Sehnenviereck.

- In einem Teil der eingesandten Bearbeitungen wird das Ergebnis mittels Zeichnungen veranschaulicht (Bild 3):

Peter Zienicke (Magdeburg, Student) spricht in seiner Bearbeitung statt von gleichschenkligen Trapezen von Sehnentrapezen.

Eine mögliche Definition wäre:

Definition: Sehnentrapez heißt ein Viereck, das gleichzeitig Trapez und Sehnenviereck ist.

Es läßt sich zeigen, daß jedes Sehnentrapez ein gleichschenkliges Trapez und auch umgekehrt jedes gleichschenklige Trapez ein Sehnentrapez ist. Gleichschenkliges Trapez und Sehnentrapez sind identische Begriffe.

- Wer beim Lesen dieses Beitrages feststellen muß, daß seine Bearbeitung der Aufgabe 2941 kleine Unzulänglichkeiten aufweist, tröste sich damit, daß die in „alpha“ 1/89 abgedruckte Lösung auch nicht fehlerfrei ist. In der Zeichnung ist ein Winkel statt mit ζ mit ϱ bezeichnet und in der Formulierung „parallel zu den parallelen Seiten“ ist das Wort „den“ zu streichen.

W. Träger

Anmerkung zur Aufgabe Ma 10/12 ■ 3008

Sowohl die Aufgabe (Heft 1/89) als auch die Lösung (Heft 3/89) riefen bei unseren Lesern starke Proteste hervor.

Verständlich, denn da haben wir Unsinn gebaut. Zur Richtigstellung:

Es kann nur heißen:

$$-\sin x \cdot \cos x \leq 0,5$$

$$\text{oder } -\sin x \cdot \cos x < 0,5$$

$$x \in P; x \neq \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi; k \in G.$$

Das heißt aber, die Wahrheit der Aussage

$$-\sin x \cdot \cos x < 0,5$$

für alle reellen x läßt sich nicht nachweisen.

Alphons

Bild 2

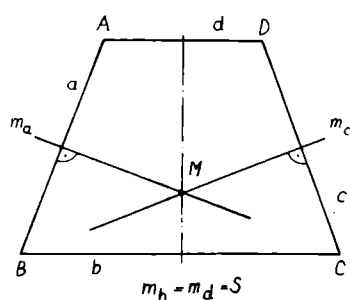
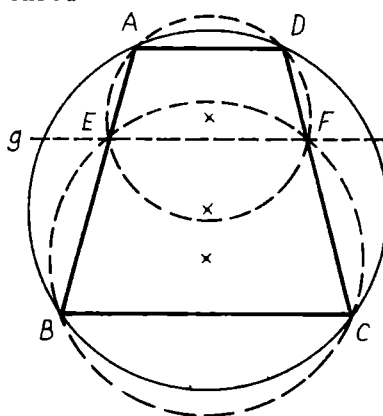


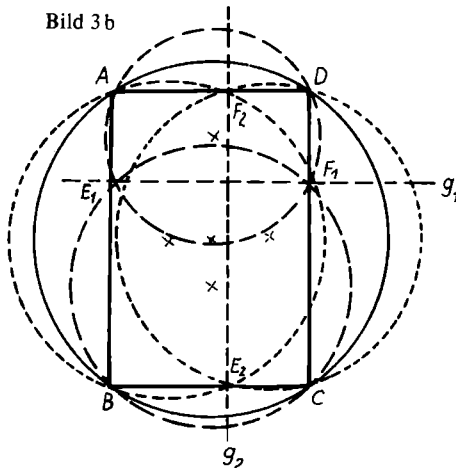
Bild 3a



Zeichnungsvorlagen:

zu Bild 3a: Silvio Löffler (Cottbus, 10. Klasse)

Bild 3b



zu Bild 3b: Wiete Dorn (Jena, Ausbildung als Unterstufenlehrerin)

Wie ich eine Eigenaufgabe erfand

Vergeblich würde man in einem Lexikon oder im Duden das Wort **Eigenaufgabe** suchen. Es müßte nämlich genau hinter „eigenartig“ bzw. vor „Eigenbau“ stehen. Und doch hat es gerade mit diesen zwei Worten recht viel Gemeinsames.

Nun sind es schon mehr als zwanzig Jahre her, seit ich zum ersten Mal das Wort **Eigenaufgabe** benutzte. Es war zur Bezirksolympiade der VIII. Olympiade Junger Mathematiker, Bezirk Neubrandenburg, 1969. Ich war für die Förderung mathematischer Talente und für die Durchführung der Bezirksolympiade verantwortlich. Die Teilnehmer der Bezirksolympiaden wurden aufgefordert, zu diesen Wettbewerben stets eine selbständig entwickelte Aufgabe – genannt **Eigenaufgabe** – mitzubringen. (Alle ehemaligen Preisträger wurden hierzu sogar verpflichtet!)

Um „schöne“ **Eigenaufgaben** zu entwickeln, sollten sich die Teilnehmer mit Aufgaben (und Lösungen!) aus dem **alpha**-Wettbewerb, mit Olympiadeaufgaben usw. beschäftigen. Daraus sollten sie dann schöpferisch neue Problemstellungen gewinnen. Die Aufgaben sollten eigenartig und reizvoll und natürlich ein **Eigenbau** des Absenders sein.

Inzwischen sind mehrere hundert Einsendungen von der Jury als sehr gut oder gut gewertet, zum Teil in **alpha** veröffentlicht oder für die Förderung im Bezirk genutzt worden. Seit einiger Zeit ist auch im Bezirk Rostock die Idee der **Eigenaufgaben** bekannt. Auch dort sollen sie zur Bezirksolympiade abgegeben werden.

Seit es und je gilt der Grundsatz: Geh mit gutem Beispiel voran! Daher habe auch ich schon seit 1971 **Eigenaufgaben** erdacht und diese dann zur Verwendung für den **alpha**-Wettbewerb an die Redaktion der **alpha** gesandt. Das ist bis heute eine stattliche Anzahl geworden.

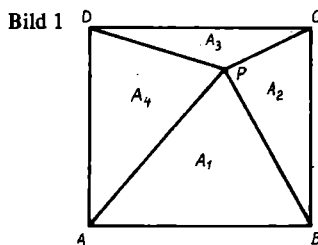
Oft schon bin ich gefragt worden, wie man immer wieder auf neue Ideen für **Eigenaufgaben** kommen kann. – Mit ein paar Sätzen läßt sich dies jedoch schwer erklären. So will ich an einem Beispiel zeigen (das bekanntlich keine Allgemeingültigkeit hat), wie ich eine **Eigenaufgabe** erfand.

Beim Lesen der Aufgaben des **alpha**-Wettbewerbs in Heft 6/1988 fand ich unter 6 ■ 2953 folgende Aufgabe, die für Schüler ab Klassenstufe 6 gedacht war.

Sie lautete:

Ein innerer Punkt P des abgebildeten Quadrates $ABCD$ wurde mit den vier Eckpunk-

ten des Quadrates verbunden. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der vier Dreiecke (Bild 1). Es ist zu beweisen, daß gilt: $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$!



Lösung: Ist a die Grundseite des Quadrats, so gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke:

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= \frac{1}{2} a \cdot h_1 + \frac{1}{2} a \cdot h_2 \\ &= \frac{1}{2} a (h_1 + h_2). \end{aligned}$$

Da $h_1 + h_2 = a$, ist $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} a^2$.

Da der Flächeninhalt des Quadrates a^2 beträgt, ist auch $A_2 + A_4 = \frac{1}{2} a^2$ und somit

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4.$$

1. Die erste Überlegung war, ob die Behauptung auch für ein Rechteck $ABCD$ gilt. Daß dies der Fall ist, sieht der Leser sofort, da wegen

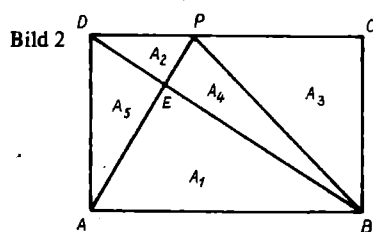
$$h_1 + h_2 = b \text{ für } A_1 + A_3 = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ gilt.}$$

Auch für ein Parallelogramm $ABCD$ gilt noch die Behauptung. Für dessen Flächeninhalt gilt $A = g \cdot h_g$ (g Grundseite, h_g Höhe) und hier ist dann $h_1 + h_2 = h_g$. Bis hier ist es mit der „Erfindung“ noch nicht weit her.

2. Nun könnte auch der Punkt P auf dem Rande des Rechtecks (Parallelogramms) liegen. Auch dann würde die Behauptung noch gelten. Eine der vier Teilflächen wäre nämlich verschwunden, also Null. – Der Beweis für diesen Sonderfall dürfte überhaupt nicht schwerfallen, da bereits

$$A_1 = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ gilt.}$$

Interessant wird es, wenn noch die Diagonale BD eingezeichnet wird (Bild 2).



Für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABP$

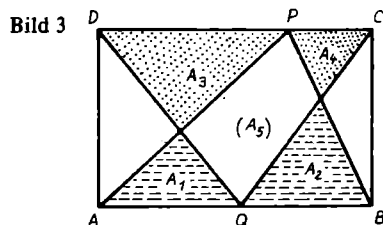
$$\text{gilt } A_1 + A_4 = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

$$\text{Auch gilt } A_1 + A_5 = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ und}$$

$A_3 + A_2 + A_5 = \frac{1}{2} a \cdot b$. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt $A_1 = A_3 + A_2$ oder anders $A_1 - A_2 = A_3$. – Die neue Aufgabe könnte dann lauten: ... Es ist zu beweisen, daß die Beziehung $A_1 - A_2 = A_3$ gilt (Bild 2).

In „Erfinderlaune“ versetzt, geht die Über-

legung gleich weiter. Anstelle der Diagonalen BD liege jetzt ein weiterer Punkt Q auf AB , der mit D und C verbunden sei. Das sähe z. B. so aus (Bild 3):



3. Sind P und Q Punkte auf der Rechteckseite DC bzw. AB und seien PA, PB, QD und QC eingezeichnet, so gilt für die in Bild 3 gekennzeichneten Flächeninhalte $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$.

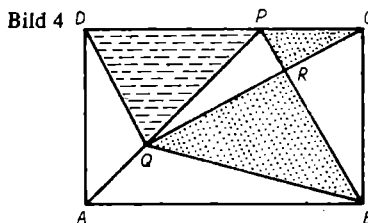
Der Beweis ist wieder nicht schwer, denn sofort gilt wegen

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \quad A_1 + A_5 + A_2 = A_3 + A_5 + A_4,$$

woraus die Behauptung folgt.

Und nun komme ich zu meiner angekündigten **Eigenaufgabe**, die aus 1. und 2. gefunden wurde, nämlich: Ein Punkt P liege im Inneren und ein Punkt Q liege auf dem Rande des Rechtecks (Parallelogramms).

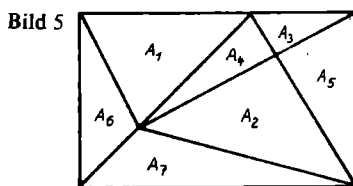
4. Auf DC des Rechtecks $ABCD$ wurde ein beliebiger Punkt P ($P \neq D, P \neq C$) mit den Eckpunkten A und B verbunden. Ferner wurde auf AB ein beliebiger Punkt Q ($Q \neq A, Q \neq B$) mit allen vier Eckpunkten verbunden. Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle DQP, \triangle QBR, \triangle RCP$ mit A_1, A_2, A_3 , so gilt stets $A_1 = A_2 - A_3$ (Bild 4). Man beweise dies!



5. Auf den ersten Blick ist dies eine Aufgabe für Schüler der 9. oder 10. Klasse geworden.

Aber der Schüler der Klasse 6, der den ganzen Weg bis zu dieser Aufgabe hin mitverfolgt hat, wird sofort alle Flächeninhalte der Dreiecke mit A_1 bis A_7 bezeichnen (z. B. wie in Bild 5) und finden, daß $A_7 + (A_1 + A_4 + A_5) = A_7 + A_2 + A_4$ gilt.

Nach Subtraktion von A_7 und A_4 erhält man $A_1 + A_3 = A_2$ und schließlich $A_1 = A_2 - A_3$, w. z. b. w.



Übrigens: Wandert P nach Q , so daß $P = Q$ gilt, so erhält man Fall (1). Wandert dagegen Q nach P , so daß $Q = P$ gilt, so erhält man Fall (2).

H.-J. Kerber

alpha- Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1988/89

OS Fr. Große, Altenberg; OS E. Schneller, E.-Mäder-OS, Fr.-Engels-OS, alle Altenburg; E.-Schneller-Schule, Stadtklub Jg. Math., beide Altentreptow; W.-Seelenbinder-OS, Alt Ruppini; OS H. Schlemann, Ankershagen; Dr.-Th.-Neubauer-Schule II, Apolda; E.-Weinert-OS, Arnstadt; OS Dr. R. Sorge, Asbach; OS W. Lamberz, Bad Berka; OS Bad Kleinen; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; Neubauschule Bad Lausick; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; St. Jg. Techn. u. Naturf., OS VI A. Saefkow, M.-Poser-OS, OS Th. Neubauer, EOS E. Thälmann, O.-Grotewohl-OS, alle Bad Salzungen; H.-Beimler-OS, Bärenklau; OS Bandelin; H.-Heine-OS, Barchfeld; K.-Liebknecht-OS, Barth; H.-Belz-OS, Behrenhoff; O.-Nowack-OS, Bentwisch; OS E. Weinert, Berka; 26. OS L. Renn, 19. OS, 41. OS L. Welskopf-Henrich, 21. OS, 23. OS, 33. OS, 44. OS Fr. Espenbeck, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingero; OS G. Fugger, Bernau; OS Bernterode; OS Birkungen; OS Geschw. Scholl, Blankenberg; OS Fr. Schiller, Bleicherode; W.-Seelenbinder-OS, Bismark; L.-Herrmann-OS, Blumenhagen; G.-Ewald-OS; Blumenthal; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; Geschw.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Beuren; K.-Wagner-OS, Böhrigen; OS Bockau; OS E. Thälmann, A.-Bebel-OS, beide Boizenburg; J.-Schehr-OS, Born; U.-Steinhauer-OS, Brandshagen; OS B. Brecht, Brehme; OS W. Pieck, Breitenworbis; OS H. Beimler, W.-Seelenbinder-OS, beide Breitenungen; P.-Neruda-OS, Britz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; OS II P. Kortschagin, Burg-Stargard; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; W.-Seelenbinder-OS, Buttstädt; 2. OS O. Grotewohl, Calau; St. Jg. Naturf. u. Techn. Prof. Dr. G. Hertz, Calbe; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; OS A. Einstein, Caputh; K.-Marx-OS, Fr.-Weineck-OS, beide Coswig; St. Jg. Naturf. u. Techn. Cottbus; OS Dallgow; OS Br. Kühn, Dambach; M.-Gorki-OS, Darnbach; R.-Breitscheid-OS, Dessau; Kreisklub Jg. Math., Demmin; OS Dersekow; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; 2. OS Dr. S. Allende, Döbern; OS Fr. Reuter, Dömitz; M.-Curie-OS, Dohna; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dordorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast W. Ulbricht, 100. OS P. Neruda, beide Dresden; M.-Seydewitz-OS, Dürrröhrsdorf; Kreisklub, W.-Pieck-OS, beide Eberswalde; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; Dr.-Th.-Neubauer-OS, OS 55 W. Hammann, Haus d. JP O. Grotewohl, alle Erfurt; 3. OS O. Benario-Prestes, Falkenberg; Th.-Müntzer-OS, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 1. OS J. Korczak, 5. OS G. Dimitroff, beide Finsterwalde; K.-Marx-OS, Flöha; B.-Brecht-OS, Flöh; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., Kreisklub Math., Spezialschule C. F. Gauß, Dr.-Th.-Neubauer-OS, alle Frankfurt/O.; W.-Seelenbinder-OS, Freienhufen; E.-Thälmann-OS, Freital; E.-Thälmann-OS, Friedeberg; OS F. Reuter, OS II, beide Friedland; OS W. Seelenbinder, Fünfeichen; OS V. H. Günther, Fürstenwalde; Th.-Müntzer-Schule, Gehren; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-R.-Becher-OS, Gernrode; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; J.-Gagarin-OS, Geithain; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; W.-Pieck-OS, Glesien; 7. OS, 5. OS J.-Gagarin-Schule, beide Görlitz; J.-Brinckmann-OS, W.-Husemann-OS, beide Goldberg; Fr.-Engels-OS, OS R. Luxemburg, Haus d. JP Br. Kühn, alle Gotha; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Kreisklub Math. Gräfenhainichen; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Gransee;

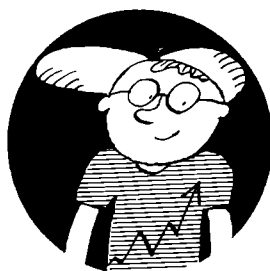
Lenin-OS, E.-Thälmann-OS, beide Greifswald; Goethe-OS, Greiz; K.-Marx-Schule, OS H. Beimler, beide Greußen; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Grevesmühlen; A.-Frank-OS, E.-Schultz-OS, beide Grimma; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS N. Ostrowski, Großdeuben; Haus d. Pioniere u. Jugend G. Walter, Pestalozzi-OS, beide Großenhain; OS Gr. Nemerow; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS H. Günther, Hachelbich; W.-Bredel-OS, Hagenow; M.-Gorki-OS, Hainichen; Lenin-OS, Stat. Jg. Techn. u. Naturf., beide Halberstadt; G.-Dimitroff-OS, Haldensleben; Kreisklub Halle-Süd; OS f. Körperbeh. N. Ostrowski, Halle; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Halle-Neustadt; E.-Thälmann-OS, Harbke; J.-Fucik-OS, Hartha; K.-Oppermann-OS, Harzgerode; OS Hammerbrücke; OS J. Marchlewski, Fr.-Wolf-OS, beide Havelberg; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; Math. Schülerklub, Heiligenstadt; P.-Schreiber-OS, Hennigsdorf; Kreisklub Jg. Math., Hermsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Hohenstein-E.; OS Horka; 21. OS, 22. OS, beide Hoyerswerda; OS E. Egert, Hundeshagen; OS Hunshagen; OS W. Seelenbinder, OS N. Mandela, beide Ilmenau; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatzmick; Kreismath.-Klub, Jüterbog; Fr.-Engels-OS, Kaltendorheim; OS A. Becker, Kamsdorf; H.-Beimler-OS, Karbow; A.-S.-Makarenko-OS, M.-J.-Kalinin-OS, OS f. Körperbeh. Dr. F. Wolf, E.-Schneller-OS, H.-Menzel-OS, W.-I.-Lenin-OS, Pionierhaus M. Müller, E.-Thälmann-OS, Fr.-Matschke-OS, W.-Komarow-OS, Fr.-Heckert-OS, M.-Saue-OS, P.-Tschaikowski-OS, G.-Agricola-OS, alle Karl-Marx-Stadt; E.-Boberg-OS, Karlsburg; J.-Warncke-OS, Katzwitz; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; Zentral-OS I, Ketzin; OS E. Schneller, Kirchberg; OS Th. Neubauer, Kieselbach; E.-Thälmann-OS, Kleinmachnow; OS E. Thälmann, Kleinschersleben; H.-Matern-OS, Klietz; OS H. Matern, Klockow; OS E. Thälmann, Klosterfeld; Goetheschule Königsee; Kreisklub Math. Königs Wusterhausen; W.-Seelenbinder-OS, Könnitz; OS O. Grotewohl, Köthen; K.-Marx-OS, Kranichfeld; Bundesgymnasium Krems (Österreich); OS M. Burwitz, Kritzow; OS Küllstedt; OS Cl. Zetkin, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; Pestalozzi-OS, Leegedubach; E.-Wiesner-OS, Leezen; OS E. Weinert, Legfeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; OS R. Luxemburg V, K.-Liebknecht-OS, EOS K. Marx, Dr.-S.-Allende-OS, E.-Thälmann-OS, J.-C.-Fuhlrott-OS, alle Leinefelde; 6. OS Cl. Zetkin, Haus d. JP A. Saefkow, beide Leipzig; H.-Beimler-OS, Leisnig; Lessing-OS, Lengfeld; M.-Poser-OS, Lengfeld; A.-S.-Makarenko-OS, Leubnitz; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; EOS Prof. Dr. M. Schneider, Lichtenstein; C.-B.-Geißler-OS, Liebstdt; OS Linda; OS W. Wallstab, Löderburg; 1. OS, Lommatsch; Haus d. JP Th. Körner, Ludwigslust; OS 6 Kreismatheklub, Lübbenau; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Lübs; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; OS M. Wallburg, Löbau; OS W. Bredel, Lübz; F.-L.-Hahn-OS, Lübtchen; OS K. Marx, Lübz; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; Laßner-OS Math. Klub, Magdeburg-Süd; J.-R.-Becher-OS, Mahlis; Haus d. JP F. Siemon, Markleeberg; R.-Luxemburg-OS, Markneukirchen; Cl.-Zetkin-OS, Meerane; Dr.-Th.-Neubauer-OS, 7. OS M. I. Kalinin, beide Meiningen; A.-Kuntz-OS, Mellingen; OS J. Gagarin, Merkers; A.-Dürer-OS II, Merseburg; OS Geschw. Scholl, Meuselbach; OS H. Rau, Mieste; OS O. Benario, Mirow; OS E. Steinfurth, Mittenwalde; OS Mittelstille; OS H. Danz, Möser; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fucik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; OS 12 E. Weinert, Neubrandenburg; M.-Burwitz-OS, Neuenkirchen; F.-Dzierzynski-OS, Neuhaus; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Fr.-Schiller-OS, Goe-

theschule, beide Neustadt; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; Haus d. JP H. Matern, OS W. I. Lenin, beide Nordhausen; H.-Beimler-OS, Oberhermsdorf; OS E. Weinert, Oberschöna; Fr.-Fröbel-OS, Oberweißbach; AG Jg. Math. Oebisfelde; E.-Weinert-OS, Ohrdruf; Haus d. JP H. Coppi, Oranienburg, EOS K. Marx, Oschersleben; O.-Eichler-OS, Oschatz; OS P. Kmiec, Ostermünster; W.-Pieck-OS, Osterwieck; Th.-Müntzer-OS, Osthausen; OS O. Grotewohl, Pappenheim; Haus d. JP P. Göring, Kreisklub Math. Parchim; Haus d. JP E. Weinert, Pasewalk; A.-Becker-OS, Passau; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; Spezialistenlager Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; OS E. Schneller, Poleben; H.-Edenhofer-OS, Pößneck; K.-Foerster-OS, Potsdam; W.-Pieck-OS, Premnitz; OS Pritzerbe; Goethe-Schule II, Pritzwalk; OS Quellendorf; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS G. Titow, OS Pestalozzi, beide Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Br.-H.-Bürgel-OS, Geschw.-Scholl-OS, alle Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; E.-Thälmann-OS, Reinberg; A.-Hennecke-OS, Reinsdorf; E.-Thälmann-OS, Remda; OS U. Steinhauer, J.-Gagarin-OS, H.-Burmeister-OS, alle Ribnitz; H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, Pestalozzi-OS, alle Riesa; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; H.-Matern-OS, Rochlitz; J.-Curie-OS, Röbel; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Ziolkowski-OS, Roßdorf; 1. OS W. Schröder; Haus d. JP, 37. OS K. Merseburg, alle Rostock; O.-Grotewohl-OS, Rudolstadt; K.-Niederkirchner-OS, Saal; W.-M.-Komarow-OS, Saalfeld; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. E. Thälmann, Salzwedel; OS Th. Müntzer, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., OS W. Pieck, alle Sangerhausen; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS Schadeleben; OS H. Matern, Schemberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Schlagsdorf; OS H. Danz, OS J. G. Seume, OS K. Marx, OS L. Pappenheim, alle Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schmiedefeld; OS Schule d. DSF, Schneidlingen; K.-Liebknecht-OS, Schönbbrunn; OS K. Liebknecht, Schönebeck; H.-Beimler-OS, Schönhagen; OS Kuba Schule d. DSF, Schorschow; E.-Weinert-OS, Schollene; OS Fr. Engels, Schwallungen; OS S. Kosmodemjanskaja, Schweikershain; OS Fr. Fröbel, Schweina; Lenin-OS, Schwarzenberg; Kreispionierhaus M. Böhme, Sebnitz; OS H. Warnke, Sielow; OS Th. Müntzer, Silkerode; Haus d. JP M. Gorki, Fr.-Engels-OS, beide Sömmerda; W.-Pieck-OS, Sonneberg; OS Glückauf, OS W. Pieck, OS A. Saefkow, alle Sondershausen; A.-Becker-OS, Spreenhagen; OS H. A. Eckemann, Sponholz; K.-Marx-OS, Kreisklub Math. OS A. Becker, beide Spremberg; R.-Sorge-OS, Schwerin; II. OS E. Wölk, Kreisklub Math., beide Stadtroda; OS W. I. Lenin, J.-W.-Goethe-OS, beide Staßfurt; J.-Fucik-OS, Steinbach; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; F.-Dettmann-OS, Stralsund; Haus d. JP F. Weineck, Strausberg; Lasker-OS, Ströbeck; K.-Marx-OS, Stralsund; TOS, Süana; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhle; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Tangerhütte; OS E. Thälmann, Tannenbergsthal; H.-Beimler-OS, Tantom; E.-Weinert-OS, Teichwolframsdorf; J.-Gagarin-OS, Teistungen; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; Pestalozzischule, A.-Einstein-OS, beide Torgelow; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS Shukow, Treben; OS W. Pieck, Trusetal; OS Dr. S. Allende, Uebigau; Kreisklub Math., Goetheschule, E.-Welk-OS, A.-Nitz-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS Unterweißbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS F. Luther, Velten; W.-Seelenbinder-OS, Viernau; OS Vitte; W.-John-OS, Vitzsburg; OS Völkershäuser; A.-Bebel-OS, Vogelsang; OS Walchow; Zentrale OS, R.-Luxemburg-OS, beide Waldau; OS E. Schneller, Waldkirchen; Goetheschule Waren; OS Wasserthalen;

Fortsetzung auf Seite 142

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1990



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7072

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 5 ■ 3045 Drei Brüder sind zusammen 41 Jahre alt. Roland ist 5 Jahre älter als Heinz, und Lothar ist ein Jahr älter als Roland. Welche Lebensalter (in ganzen Zahlen) hat jeder dieser drei Brüder?

Schülerin R. Roch, Langenwolmsdorf

Ma 5 ■ 3046 Eine Familie unternimmt am Wochenende einen Ausflug. Jede der vier Personen nimmt etwas Taschengeld mit. Die beiden Kinder Bernd und Tina haben gleichviel Taschengeld in ihrer Geldbörse. Der Vater hat 10,- M mehr eingesteckt als die Mutter. Der Vater, Bernd und Tina haben zusammen 60,- M Taschengeld mitgenommen. Über wieviel Mark Taschengeld verfügt jedes Familienmitglied, wenn sie zusammen 100,- M mitgenommen haben?

Schülerin S. Heusing, Brotterode

Ma 5 ■ 3047 Wie lautet die kleinste, wie die größte dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 13? (Hinweis: Die Quersumme der Zahl 369 lautet $3 + 6 + 9 = 18$.)

Sch.

Ma 5 ■ 3048 Die Schüler Andreas, Bernd, Claus und Daniel haben die Nachnamen (in anderer Reihenfolge) Eckbart, Fadelmann, Gänsich und Hermhaus. Sie tauschen ihre Ferienerlebnisse aus.

Aus dem Gespräch geht folgendes hervor:
(1) Der Schüler Gänsich war mit Bernd und Claus im selben Ferienlager.

(2) Andreas hat den Nachnamen Fadelmann.

(3) Auf einem Foto steht Claus neben dem Schüler mit dem Nachnamen Hermhaus. Wie heißen die Schüler mit Vor- und Nachnamen?

Schüler C. Puddig, Saßnitz

Ma 5 ■ 3049 a) Jan denkt sich eine natürliche Zahl. Er addiert 10 und verdoppelt dann noch diese Summe. Damit erhält er als Ergebnis 52 mehr als seine gedachte Zahl.

Wie lautet die gedachte Zahl?

b) Jörg denkt sich eine andere natürliche

Zahl. Er erhält bei gleichem Vorgehen jedoch 20 mehr als seine gedachte Zahl. Wie lautet Jörgs gedachte Zahl?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 3050 In dem Schema

K L E E
+ K L E E
+ K L E E
W I E S E.

sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält.

Sch.

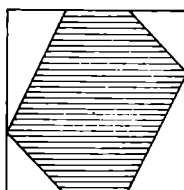
Ma 5 ■ 3051 Ein Betrieb hat einen „Lada“ und einen „Dacia“. Der Lada verbraucht auf 100 km im Durchschnitt 1 Liter Benzin mehr als der Dacia. Während eines Monats legte der Lada 800 km zurück. Er verbrauchte für diese Fahrstrecke 5 Liter Benzin mehr als der Dacia verbraucht hätte. Im gleichen Monat verbrauchte der Dacia 63 Liter Benzin. Wieviel Kilometer Fahrstrecke legte der Dacia zurück?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 3052 Ein Wanderer, der je Stunde rund 6 km geht, und ein Radfahrer, der viermal so schnell ist wie der Wanderer, kommen sich entgegen. Sie sind noch 1 km voneinander entfernt. Welche Zeit vergeht, bis sie erneut 1 km voneinander entfernt sind?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 3053 Der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrates betrage 144 cm^2 . Jede Seite des Quadrates ist in drei gleich lange Strecken unterteilt. Die sechs Eckpunkte der schraffiert dargestellten Fläche liegen



30	Ellen Stelzner Otto-Großwühl-Straße 28 Jona - Lobeda 6902	Dr. Theodor Neubauer-OS Klasse 7	Ma 7 ■ 2991
150	Prädikat:		10
	Lösung:		

auf solchen Teilungspunkten der Quadratseiten. Welchen Flächeninhalt besitzt das schraffiert dargestellte Sechseck?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 3054 Im Rahmen eines Wettbewerbs sammelten die Schüler der Klassen 4, 5 und 6 einer Schule insgesamt 274 kg Altpapier. Die Schüler der Klasse 6 sammelten 18 kg Altpapier weniger als die Schüler der Klasse 5; die Schüler der Klasse 4 sammelten 10 kg Altpapier mehr als die Schüler der Klasse 6. Wieviel Kilogramm Altpapier entfallen auf die Schüler dieser drei Klassen?

Schülerin H. Engel, Brotterode

Ma 6 ■ 3055 Ein Kleintierhalter besitzt doppelt soviel Hühner wie Gänse und dreimal soviel Kaninchen wie Hühner. Diese Tiere haben zusammen 120 Beine. Wie viele Gänse, Hühner bzw. Kaninchen besitzt dieser Kleintierhalter?

Schüler A. Schmatloch, Blankenhain

Ma 6 ■ 3056 In einer Gemüseverkaufsstelle wurden an einem Vormittag insgesamt 290 kg Gemüse verkauft, und zwar doppelt soviel Kilogramm Möhren wie Radieschen, 10 kg Kohlrabi mehr als Möhren und 20 kg Kohl weniger als Radieschen. Wieviel Kilogramm jeder Sorte wurden verkauft?

Schüler T. Peter, Brotterode

Ma 6 ■ 3057 Welche gebrochenen Zahlen mit dem Nenner 17 sind größer als $\frac{1}{4}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$?

Schüler T. Peter, Brotterode

Na/Te 6 ■ 460 Laut Kursbuch beträgt die Entfernung zwischen Leipzig und Dresden 120 km. Der D 492 fährt in Dresden 9.00 Uhr ab und ist fahrplanmäßig 10.42 Uhr in Leipzig. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit dieses Zuges?

R.

Ma 7 ■ 3058 Zeichne ein Quadrat $ABCD$. Konstruiere über der Seite BC nach außen und über der Seite CD nach innen jeweils ein gleichseitiges Dreieck. Bezeichne die neuen Eckpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke mit E und F und verbinde E mit F . Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks EFC mit dem des Quadrates $ABCD$. Begründe deine Feststellung.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 3059 Die Mitglieder einer Familie sind zusammen 92 Jahre alt. Die Tochter Dagmar ist drei Jahre älter als ihre Schwester Ulrike. Die Mutter ist drei Jahre älter als das dreifache Alter von Ulrike. Der Vater ist drei Jahre jünger als das dreifache Alter von Dagmar. Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Schülerin K. Bolzmann, Gadebusch

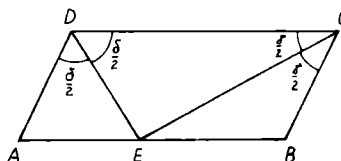
Ma 7 ■ 3060 Eine Familie hat drei Kinder. Im Jahre 1988 war das zweite Kind vier Jahre älter als das jüngste Kind. Das älteste Kind war zweimal so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war dreimal so alt wie das zweite Kind, und der Vater war vier Jahre älter als die Mutter. Wie alt war

in diesem Jahre jedes Familienmitglied, wenn alle zusammen 112 Jahre alt waren?

Schülerin M. Schlegel, Schneidlingen

Ma 7 ■ 3061 Ein Parallelogramm $ABCD$ habe die Eigenschaft, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden der Innenwinkel BCD und ADC auf der Seite AB liegt. Beweise, daß dann $\overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ gilt!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ■ 3062 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Umkreis k . Ein beliebiger innerer Punkt P des Dreiecks ABC werde mit B und C verbunden. Es ist zu beweisen, daß $\angle BAC$ kleiner als $\angle BPC$ gilt.

Sch.

Na/Te 7 ■ 461 Ein Würfel aus Aluminium mit der Kantenlänge 2,08 cm hängt an einem Federkraftmesser. Dadurch wird die Feder um 10 mm gedehnt. Der Körper wird durch einen Würfel aus Stahl ersetzt. Wie groß ist nun die Ausdehnung der Feder?

R.

Na/Te 7 ■ 462 Vor einer Sammellinse (Brennweite $f = 10$ cm) steht im Abstand $g = 15$ cm ein $G = 4$ cm hoher Gegenstand. Wo entsteht sein Bild (b) und wie groß ist es (B)? (zeichnerische Lösung)

R.

Ma 8 ■ 3063 Die Differenz aus einer vierstelligen natürlichen Zahl und der Zahl, die durch ein beliebiges Vertauschen der Grundziffern dieser vierstelligen Zahl entsteht, ist stets durch 9 teilbar.

a) Bilde ein Beispiel!

b) Wie viele Vertauschungsmöglichkeiten gibt es?

c) Beweise die Behauptung an einer Vertauschung!

Schüler P. Sewing, Horst

Ma 8 ■ 3064 Bildet man die Summe von irgendwelchen fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, verdoppelt man dann diese Summe und streicht schließlich die letzte Ziffer weg, so erhält man stets den mittleren Summanden dieser fünf Zahlen. Beweise diese Behauptung und gib zuvor ein Beispiel an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 3065 Zeichne zwei beliebige sich von außen im Punkt A berührende Kreise! Sind B und C die Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente an diese beiden Kreise, so ist der Winkel $\angle BAC$ ein rechter.

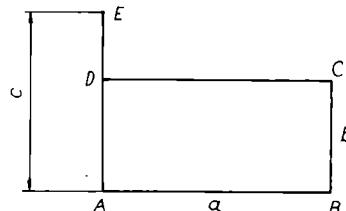
Diese Behauptung ist zu beweisen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 3066 Das Bild stellt ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ dar. Auf der über D hinaus verlängerten Rechteckseite $\overline{AD}$ wurde ein Punkt E festgelegt, und es habe $\overline{AE}$ die Länge c . Durch E ist eine Gerade zu konstruieren,

die auf $\overline{CD}$ einen Punkt F erzeugt, so daß $\overline{CF}$ die Länge d hat und $a \cdot b = c \cdot d$ gilt.

Sch.



Ma 8 ■ 3067 Jemand berechnet das Volumen und die Oberfläche eines Würfels (Einheit der Würfelkante: 1 cm) und stellt fest, daß beide Maßzahlen übereinstimmen.

Welches Volumen hat der Würfel?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 8 ■ 463 Ein Gleichstrommotor nimmt bei 220 V 59 A auf. Wieviel mechanische Leistung gibt er bei einem Wirkungsgrad von 85 % ab?

R.

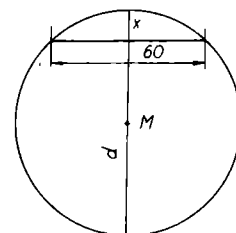
Na/Te 8 ■ 464 In einem Kalorimeter befinden sich 6,7 g Wasser. Ein Thermometer wird eingebracht. Dabei steigt die angezeigte Temperatur um $\Delta t = 14,6$ K und zeigt nach dem Eintauchen eine Temperatur von $32,4^\circ\text{C}$ an. Um das Thermometer um 1 K zu erwärmen, sind 1,93 J notwendig. Welche Temperatur hatte das Wasser vor dem Eintauchen des Thermometers? (Die Wärmeabgabe des Kalorimeters wird nicht berücksichtigt.)

-R.

Ma 9 ■ 3068 Die Spannweite eines Brückenbogens beträgt 60 m.

Wie groß ist seine Pfeilhöhe x , die sich zum Durchmesser des zugehörigen Kreises wie 1 : 10 verhält?

Schüler A. Kellner, Halberstadt



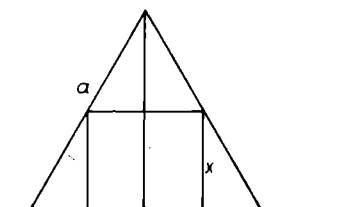
Ma 9 ■ 3069 Von zwei konvexen Vielecken hat das eine drei Ecken und 21 Diagonalen mehr als das andere Vieleck. Um welche Vielecke handelt es sich?

Sch.

Ma 9 ■ 3070 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a sei ein Quadrat mit der Seitenlänge x so einbeschrieben, wie es das Bild zeigt.

Es ist der prozentuale Anteil der Quadratfläche an der Dreiecksfläche zu berechnen.

F. Thomas, Neukirch



Ma 9 ■ 3071 Jemand bildet vier natürliche Zahlen so: Die zweite Zahl ist doppelt so groß wie die erste; jede folgende Zahl ist doppelt so groß wie die Summe aller vorangegangenen Zahlen. Eine der Zahlen ist Primzahl, und eine lautet 1986. Wie heißen diese vier Zahlen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3072 Eine kreisförmige Rasenfläche mit einem Durchmesser von 20 m soll von einem gleichmäßig breiten Weg umgeben werden. Die Flächeninhalte von Weg und Rasen sollen gleich groß sein. Es ist eine Konstruktion des Rasens mit Weg im Maßstab 1:500 anzufertigen! Die Konstruktion ist zu begründen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 9 ■ 465 Drei Widerstände 5,0 Ohm, 10 Ohm und 20 Ohm werden a) hintereinander und b) parallelgeschaltet und an eine Spannungsquelle (Leerlaufspannung 13,5 V, Innenwiderstand 1 Ohm) gelegt. a) Welche Klemmenspannung tritt an den Klemmen der Spannungsquelle auf? b) Bei der Parallelschaltung der drei genannten Widerstände wird ein Gesamtstrom von 3,0 A gemessen. Wie groß sind die Teilströme und die an den Widerständen auftretenden Wärmeleistungen? R.

Na/Te 9 ■ 466 Eine elektrische Kochplatte (Leistungsaufnahme 1000 W) hat einen Wirkungsgrad von 70%. Wieviel Liter Wasser von 18 °C kann man in 15 min auf 100 °C erwärmen? R.

Ma 10/12 ■ 3073 In welchem Zahlensystem stellt die folgende Gleichung eine wahre Aussage dar?

$$(1354)_x \cdot (12)_x = (16470)_x$$

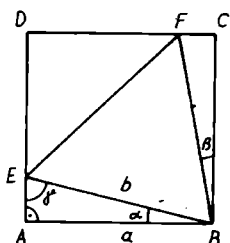
Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 10/12 ■ 3074 Es ist folgende Aussage zu beweisen: Wenn die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 3 teilbar ist, so ist auch die Summe ihrer Kuben durch 3 teilbar. Schüler St. Krähe, Güstrow

Ma 10/12 ■ 3075 Einem Quadrat ABCD sei ein gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben, wie das Bild zeigt.

Es gelte $\alpha = \beta = 15^\circ$. Wieviel Prozent der Quadratfläche wird von der Dreiecksfläche eingenommen?

F. Thomas, Neukirch



Ma 10/12 ■ 3076 Unter welcher Bedingung ist das folgende Gleichungssystem im Bereich der natürlichen Zahlen lösbar?

$$(1) \quad \sqrt{c^3} + \sqrt{abc^2} = ac + c^2$$

$$(2) \quad \sqrt{ac} = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N};$$

$$a, b, c \neq 0$$

F. Pampel, Zeulenroda

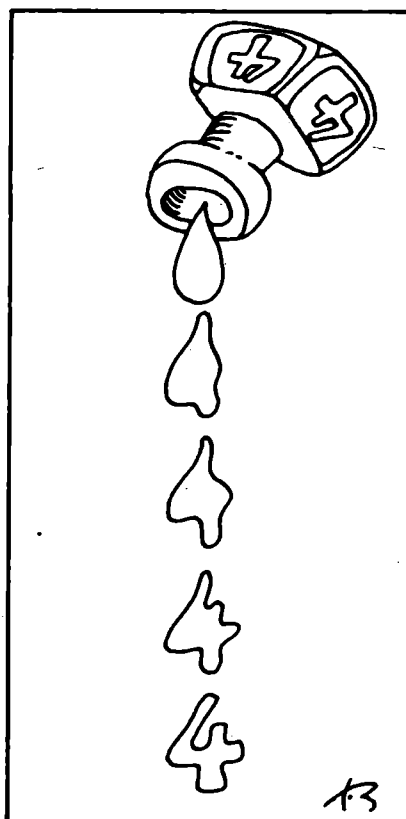
Ma 10/12 ■ 3077 Es sind die kleinsten drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zu ermitteln, für welche die Summe aus deren Kubikzahlen ebenfalls eine Kubikzahl ist. Sch.

Na/Te 10/12 ■ 467 Wie groß ist die Periodendauer einer Flüssigkeitssäule von 1 m Länge, die in einem U-Rohr schwingt? (Es wird von der Reibung der Flüssigkeit an der Rohrwandung abgesehen.)

Na/Te 10/12 ■ 468 Mit einem Tauchsieder eine bestimmte Wassermenge zum Sieden zu bringen, dauert bei einer Spannung von $U_1 = 205 \text{ V}$ 2 min länger als bei voller Netzspannung $U_2 = 220 \text{ V}$. Welche Zeit wird bei voller Netzspannung benötigt?

Fortsetzung von Seite 139

OS Wechmar; A.-Becker-OS, Wechselburg; Geschw.-Scholl-OS, Weißenborn-L.; Kreisklub Jg. Math. Weißwasser; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; Haus d. JP A. Becker, Werder; J.-Harder-OS, Wesenberg; OS O. Grotewohl, Westerstede; K.-Mark-OS, Wilkau-Haßlau; Math. Zirkel „Quant“, Winniza (UdSSR); OS Wipperdorf; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Wittenberg-L.; OS IV, Wittstock; OS H. Heine, Wörlitz; OS F. Gießner, Woffleben; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wohlminstedt; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. G. Hertz, Wolfen; OS DSF, Wolgast; OS Wormstedt; Lenin-OS, OSI H. Werner, beide Worbis; Dr.-R.-Sorge-OS, Wollin; OS Th. Müntzer, Wulfen; F.-Frenz-OS, Wustermark; G.-Walter-OS, Wustrow; H.-Kristen-OS, Zahna; Lutherschule, OS Fr. Schiller, beide Zella-Mehlis; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; W.-Seng-OS, Zerernick; Fr.-Schiller-OS, Zeulenroda; Zentrale OS W. Seelenbinder, Zieltitz; Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, Zittau; OS O. Benario-Prestes, Zobersdorf.



Unterhaltsamer Denksport

Versuche zunächst, die Aufgaben im Kopf zu rechnen. Bilde dann Gleichungen und berechne die Variablen!

- Das 3fache einer Zahl, vermehrt um ihr 4faches, ist 21.
- Das 12fache einer Zahl, vermindert um 12, ist 12.
- Vermindert man das 7fache einer Zahl, um 27, so erhält man ihr 4faches.
- Die Zahl 45 ist derart in drei Teile zu teilen, daß alle drei untereinander gleich sind, wenn man den zweiten mit 2 multipliziert und den dritten durch 3 dividiert.
- Vermehre ich eine Zahl, die ich im Sinne habe, um die Hälfte dieser Zahl, so erhalte ich 9.
- Die Summe zweier Zahlen beträgt 7, ihre Differenz 2.
- Wie oft ist die Differenz der Zahlen 48 und 33 in der Zahl 225 enthalten?
- Die Differenz zweier Zahlen ist 5, ihr Produkt 300. Welche Zahlen sind es?
- Es bleibt sich gleich, ob man den 9. Teil einer Zahl um 9 vermindert oder ob man ein Neuntel der Zahl um ihr 9faches vermindert.
- Addiert man zum 5. Teil einer Zahl 5, so erhält man dasselbe als wenn man von der Zahl selbst 5 subtrahiert.
- Um wieviel ist 99 größer als der Unterschied der Zahlen 98 und 22?
- Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist 61. Wie heißen die beiden Zahlen?
- Um wieviel ist der Quotient aus 120 und 8 kleiner als die Summe der beiden Zahlen?
- Vermehrt man eine Zahl um 6 und vermindert dieselbe Zahl um 2, so ist das Produkt der neuen Zahlen 20.
- Das 5fache einer Zahl, vermehrt um 5, ergibt 50.

A. Körner/J. Lehmann

aus: Funktio, 5/87

XXX. Internationale Mathematikolympiade

Braunschweig, 13. bis 24. Juli 1989

Aufgaben

1. Man beweise, daß die Menge $\{1, 2, \dots, 1989\}$ derart in 117 paarweise elementfremde Teilmengen $A_1, A_2, \dots, A_{117}$ zerlegt werden kann, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) für alle i enthält A_i genau 17 Elemente,
- (2) für alle i hat die Summe der Elemente in A_i denselben Wert.

(Philippinen)

2. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel α, β und γ schneiden den Umkreis in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1 . Die Halbierenden der Außenwinkel von β und γ schneiden sich auf der Geraden AA_1 im Punkt A_0 ; analog seien die Punkte B_0 und C_0 bestimmt. Die Flächeninhalte des Dreiecks $A_0B_0C_0$, des Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ und des Dreiecks ABC seien mit $|A_0B_0C_0|, |AC_1BA_1CB_1|$ bzw. $|ABC|$ bezeichnet. Man zeige:

- a) $|A_0B_0C_0| = 2 \cdot |AC_1BA_1CB_1|$,
- b) $|A_0B_0C_0| \geq 4 \cdot |ABC|$.

(Australien)

3. Es seien k und n feste positive ganze Zahlen. In der Ebene sei eine Menge S von n verschiedenen Punkten mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- (i) keine drei Punkte von S sind kollinear,
- (ii) zu jedem Punkt P aus S gibt es mindestens k verschiedene Punkte aus S , die denselben Abstand von P haben.

Man beweise: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

(Niederlande)

4. In einem konvexen Viereck $ABCD$ gelte für die Seiten AB, AD und BC , daß $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$ ist.

Im Inneren dieses Vierecks liegt ein Punkt P , der von der Geraden CD den Abstand h und von den Punkten A und B den Abstand $h + \overline{AD}$ bzw. $h + \overline{BC}$ hat.

Man beweise: $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$.

(Island)

5. Man zeige:

Für jede natürliche Zahl n gibt es n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine eine Primzahlpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist.

(Schweden)

6. Wir nennen eine Permutation $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ angenehm, wenn

$|x_i - x_{i+1}| = n$ für mindestens ein

$i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ erfüllt ist.

Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n mehr als die Hälfte aller Permutationen angenehm ist.

(VR Polen)

Arbeitszeit: zweimal 4,5 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Unsere Mannschaft der IMO 89:

Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter

Prof. Dr. H.-D. Gronau,

stellv. Delegationsleiter

Andreas Siebert

Gerard Zenker

Frank Göring

Jan Fricke

(Neubrandenburg)

André Pönitz

(Karl-Marx-Stadt)

Rüdiger Belch

(Karl-Marx-Stadt)

1. Preis, 42 Punkte

1. Preis, 42 Punkte

1. Preis, 42 Punkte

2. Preis, 33 Punkte

2. Preis, 30 Punkte

3. Preis, 27 Punkte

Inoffizielle Länderwertung - Preisverteilung

Platz	Land	1.	2.	3.
1.	VR China	4	2	-
2.	SR Rumänien	2	4	-
3.	UdSSR	3	2	1
4.	DDR	3	2	1
5.	USA	1	4	1
6.	ČSSR	2	1	3
7.	VR Bulgarien	1	3	2
8.	BRD	1	3	2
9.	SR Vietnam	2	1	3
10.	Ungarische VR	-	4	1
11.	Jugoslawien	1	3	1
12.	VR Polen	-	3	2
13.	Frankreich	-	1	5
14.	Iran	-	2	3
15.	Singapur	-	-	4
16.	Türkei	-	1	4
17.	Hongkong	-	2	1

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern.

1. Preis für ≥ 38 und ≤ 42 Punkte

2. Preis für ≥ 30 und ≤ 37 Punkte

3. Preis für ≥ 18 und ≤ 29 Punkte

Es nahmen Schüler aus 50 Ländern teil.

Die Lösungen der Aufgaben senden wir euch auf Wunsch zu. Legt bitte einen frankierten Rückumschlag bei. Alphons

Im Heft 1/90 wird Goldmedaillengewinner Frank Göring über die Jubiläums-IMO berichten.

Fortsetzung von Seite 123

Wir erkennen: Links steht das Quadrat des Quadratmittels der Zahlen a, b, c , rechts das Produkt aus arithmetischem und harmonischem Mittel. Nun ist aber (nach dem oben bewiesenen) das Quadratmittel größer gleich dem arithmetischen und dieses wiederum (wir zeigen es anschließend) größer gleich dem harmonischen, so daß die Ungleichung in trivialer Weise bewiesen ist. Den letzten Beweis holen wir nun nach:

Es gilt: Für $a, b, c > 0$ ist

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Beweis: Es ist

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,$$

wegen $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für positive x .

Hieraus folgt aber sofort die Behauptung. Die Verallgemeinerung lautet:

Für n positive Zahlen $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Führt den Beweis selbst, indem ihr wie im Fall $n = 3$ vorgeht.

Abschließend zeigen wir, daß die Ungleichung (3) auch durch die Verwendung der Heronischen Formel beweisbar ist.

Es ist

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{s \left(\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \sqrt{s \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt{s \left(\frac{s}{3} \right)^{\frac{3}{2}}} = s^2 \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq (a^2 + b^2 + c^2) \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{27}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Bei der ersten Abschätzung wurde benutzt, daß das geometrische kleiner gleich dem arithmetischen Mittel ist. Die zweite Abschätzung ergibt sich aus (6).

W. Moldenhauer

I. O. Kerner

Numerische Mathematik mit Kleinstrechnern

288 S., 77 Abb., 58 Tab.

Bestell-Nr. 571 702 1

Preis: 19,80 M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Lösungen



Lösung zum Titelblatt, Heft 5/89
40. Jahrestag der DDR

Lösungen zu: Geschwister, Heft 5/89

- Es sind fünf Geschwister, nämlich ein Mädchen und vier Jungen.
- Es sind sieben Geschwister, nämlich vier Mädchen und drei Jungen.
- Es sind sechs Geschwister, nämlich vier Mädchen und zwei Jungen.
- Bezeichne Mädchen mit M und Jungen mit J ! Es gilt dann $J - 1 = 2M$;
 $J = (M - 1) + 3$; $J = M + 2$; also
 $M + 2 = 2M + 1$; also: $M = 1$ und $J = 3$.
Es sind vier Geschwister, nämlich ein Mädchen und drei Jungen.
- Es gilt: $a = b + x$. Damit sind aber unendlich viele Lösungen möglich, z. B.
 $b = 11$; $x = 4$; $a = 11 + 4 = 15$.
- Die Gleichung lautet: $b = c + y$. Mit den gegebenen Werten ergibt sich $b = 13 + 5 = 18$.
- $G = M + J$; $M = 3(J - 1)$; $J = M - 1$;
damit: $M = 3(M - 2)$;
also: $M = 3$ und $J = 2$. In der Familie sind drei Mädchen und zwei Jungen, d. h. fünf Geschwister.
- $s = j - 2$; also:
 $s = (b - 3) - 2 = b - 5$; $j = b - 3$;
also: $b + j + s = 40$;
 $b + (b - 3) + (b - 5) = 40$;
also: $3b - 8 = 40$;
daraus folgt $b = 16$; $j = 13$; $s = 11$.
Johannes ist 13 Jahre, seine Schwester 11 Jahre und sein Bruder 16 Jahre alt.
- In a Jahren ist Paul (P) so alt, wie Max (M) heute ist; also: $P + a = M$. In den a Jahren ist Otto ($O + a$) Jahre alt. Max ist heute aber doppelt so alt;
also $M = 2(O + a)$. Wir wissen jetzt:
 $P = M - a$ und $O = \frac{M}{2} - a$.
Es ist aber $M - a > \frac{M}{2} - a$, also
 $P > O$ und $M > P$, folglich $M > P > O$.
Max ist der Älteste und Otto der Jüngste.

Lösung zu: Eine Aufgabe
von Prof. Dr. Flachsmeyer, Heft 5/89

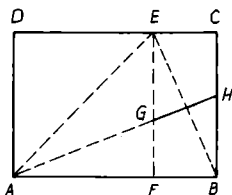
Gegeben war ein Ostwaldsches Rechteck (DIN-Blatt).

Also gilt $|AD| : |AB| = 1 : \sqrt{2}$.

Teilung der Minorstrecke nach der Ostwald-Proportion.

(1) Man falte AD auf AB auf. Es entsteht die Knifflinie AE . Der Fußpunkt von E sei F . Für das Rechteck $FBCE$ kniffe man die

Diagonale BE ein (über die früher dargelegte Benutzung der Mittelsenkrechten GH zu BE). Dann teilt der Punkt H die Strecke BC in Ostwald-Proportion.



(2) Teilung der Majorstrecke nach der Ostwald-Proportion. (In entsprechender Weise wie unter (1). Dazu muß man zunächst das Ostwald-Rechteck über AB als Minor herstellen!)

Lösungen zu den „Aufgaben auf den Spuren Cauchys“, Heft 5/89

- Ein solcher Körper muß eine Ecke P haben, die man wahlweise nach außen oder nach innen „stülpen“ kann. Dies läßt sich mit der minimalen Zahl von 6 Flächen (Dreiecken) verwirklichen, wenn man auf eine dreiseitige Pyramide $ABCD$ eine kleinere Pyramide $ABDP$ aufsetzt, die an der Ebene ABD gespiegelt den fünften Eckpunkt P' eines nichtkonvexen Körpers $ABCDP'$ ergibt (Bild 1 a, b).

Bild 1a

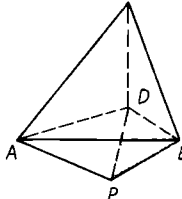


Bild 1b

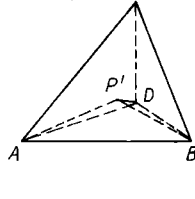
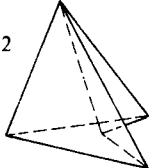


Bild 2



- Eine über einer nichtkonvexen viereckigen Grundfläche errichtete Pyramide ergibt einen nichtkonvexen Körper mit 5 Begrenzungsflächen (Bild 2). Jeder Körper mit nur 4 ebenen Begrenzungsflächen ist ein Tetraeder, d. h. eine von vier Dreiecken begrenzte (eventuell schiefe) Pyramide und folglich konvex.

4. Im 1. Schritt zeigt man für $m \geq 2$ durch vollständige Induktion:
 $f(mx) = m \cdot f(x)$.

$$2. \text{ Schritt: Aus } f(k) = f\left(n \cdot \frac{k}{n}\right) \\ = \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right)}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ folgt}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(k) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\underbrace{1 + \dots + 1}_k\right) \\ = \frac{k}{n} \cdot f(1).$$

3. Schritt: Aus $f(x + 0) = f(x) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$.

4. Schritt: Aus $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ folgt $f(-x) = -f(x)$.

5. Ist f eine beliebige für alle Paare x, y von reellen Zahlen definierte Funktion, so ist

$$f_s(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x)) \text{ symmetrisch}$$

$$\text{und } f_a(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) - f(y, x)) \text{ alternierend und } f(x, y) = f_s(x, y) + f_a(x, y).$$

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ **Lotterie**

Das abgebildete Lotterierad dreht sich zunächst $17 \frac{11}{16}$ Umdrehungen nach rechts, dann $7 \frac{1}{2}$ Umdrehungen nach links und

schließlich noch einmal $9 \frac{3}{4}$ Umdrehungen nach rechts. Welche Gewinnzahl steht am Ende aller Umdrehungen unter dem feststehenden Zeiger A ?

Lösung: Es ist die Zahl 2.

▲ 2 ▲ **Finde den Mittelpunkt**

Die Zeichnung zeigt einen Kreis, dessen Mittelpunkt nicht markiert ist. Du hast deinen Zirkel vergessen, als einziges dein Notizbuch mit.

Kannst du nur mit einer Seite des Notizbuches den Mittelpunkt finden?

Lösung: Das geht mittels des Satzes des Thales (näherungsweise), indem du einfach an zwei verschiedenen Stellen des Kreises eine Ecke anlegst und jeweils die Schnittpunkte der anliegenden Seiten mit dem Kreis markierst und verbindest. Der Schnittpunkt der beiden Strecken ergibt den (ungefähren) Mittelpunkt.

▲ 3 ▲ Kann die Gleichung

$X \cdot Y \cdot P \cdot H \cdot A \cdot J = K \cdot B \cdot A \cdot H \cdot T$ erfüllt sein, wenn an Stelle der Buchstaben die Zahlen von 1 bis 9 eingesetzt werden. Gleiche Buchstaben müssen dabei gleichen Ziffern entsprechen, verschiedene verschiedenen.

Lösung: Da $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$ ist, folgern wir, daß 5 und 7 auf beiden Seiten der Gleichung als Faktor stehen müssen. Deshalb kann nur $A \cdot H = 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ sein. Die Primzahlzerlegung der verbleibenden geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 ergibt, daß die Zahl 2 insgesamt siebenmal als Faktor steht. Wenn die Gleichung erfüllt ist, muß aber die Anzahl der Faktoren 2 gerade sein. Somit kann die Gleichung im angegebenen Definitionsbereich nicht erfüllt werden.

Lösungen zu:

Viele Ziffern verderben den Brei

▲ 2 ▲ 3,20 M

▲ 3 ▲ 0,66 kg

▲ 4 ▲ Höchstens 2 Bücher zum Preis von 10,00 M.

▲ 5 ▲ a) Rund 5 kg Lackfarbe (bzw. Vorstreichfarbe) werden benötigt.

b) Es sind 6 Büchsen Vorstreich- bzw. Lackfarbe zu kaufen (Ausgangspunkt: ungerundete Masseangabe 4,2... kg). Auch Ergebnis: 7 Büchsen kann gerechtfertigt sein, wenn Ausgangspunkt 5 kg : 0,8 kg = 6,25 (Aufrunden auf 7!).

Lösungen zu:

20 Jahre alpha in Friedeburg

Beispiele für eine Lösung sind:

$$7248 + 5248 = 12496;$$

$$5243 + 7243 = 12486;$$

$$5248 + 7248 = 12496;$$

$$7243 + 5243 = 12486.$$

Lösungen zur Schachchecke

Die Schachsteine stehen im zusammengeführten Schachbrettdiagramm auf folgenden Feldern.

Weiß: Ke7, Dg8, Te2, Tg7, Lb5, Lg1, Sc2, Sg4, Ba6, b4, f3, f6.

Schwarz: Kd5, Da1, Te1, Th7, Lb8, Se6, Sf7, Ba5, b2, d6, d7.

1. a7 (droht 2. a8D matt)

L:a7/a:b4/Se6/Sf7/Sd4/Se5

2. Da8/S:b4/Tg5/Td2/Sce3/Sge3 matt.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Verschlüsselte Wünsche

Der gesuchte Kode lautet: Ist dem n -ten Buchstaben des chiffrierten Satzes die Zahl α_n und dem des dechiffrierten Satzes β_n zugeordnet, so gelten

$$\beta_1 = \alpha_1 \text{ und } \beta_{n+1} = \alpha_{n+1} - \beta_n \text{ oder}$$

$$\beta_{n+1} = 26 + \alpha_{n+1} - \beta_n \text{ für}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Der dechiffrierte Satz lautet:

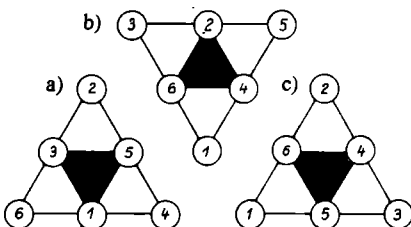
alphons wuenscht allen lesern im neuen jahr gesundheit, erfolgreiches lernen, nutzbringende gesellschaftliche taetigkeit und viel freude.

Wortspielereien

Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.

Dreiecks-Magie

Das Bild zeigt je eine mögliche Lösung.



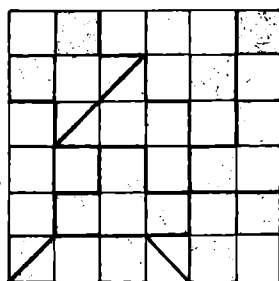
Einer zu viel

Streicht man den ersten und den letzten Buchstaben, so ergibt sich ein neues Wort. Nur nicht bei QUADER.

Rätselhafter Quader

Quader B und E.

Puzzlelei



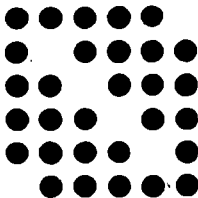
Kreuzzahlrätsel

$$\begin{array}{rcccc} 5 & + & 4 & + & 7 & = & 16 \\ + & + & - & - & + & & \\ 2 & + & 9 & - & 2 & = & 9 \\ - & - & + & - & & & \\ 3 & + & 6 & - & 1 & = & 8 \\ = & = & = & = & = & & \\ 4 & + & 7 & + & 6 & = & 17 \end{array}$$

Problem eines Weihnachtsmannes

40 Kinder bekamen keine grüne, also eine gelbe, blaue und rote Praline. An 29 Kinder wurde keine gelbe, an 5 keine blaue und an 3 keine rote Praline überreicht.

Magisches



Lösungen zu:

Mathematisches ALPHA-Quintett

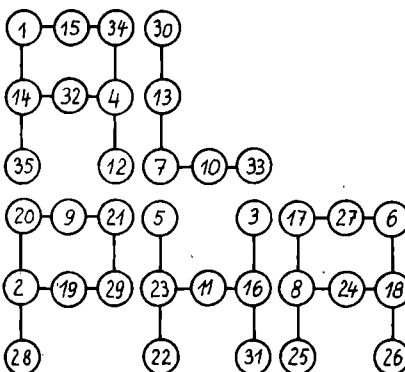
Figur 1: ALPHA-Hölzchenspiel

ALEPH (2, 1), ALGOL (5, 1), APHEL (7, 1), FOLGE (7, 1), SECHS (5, 1);

d. h., 2, 5, 7, 7 bzw. 5 Hölzchen sind umzulegen, und 1 Hölzchen ist in jedem Falle wegzunehmen.

Figur 2: ALPHA-Magisches

Das Bild zeigt eine mögliche Eintragung der natürlichen Zahlen von 1 bis 35 in die ALPHA-Figur mit der charakteristischen Summe 50:



Figur 3: ALPHA-Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Magma, 4. Hesse (Ludwig Otto), 8. Rebus, 10. Werst, 11. Basis,

12. Meter, 13. Menge, 14. Sinus.

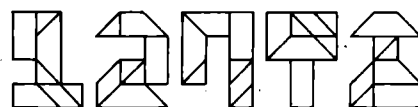
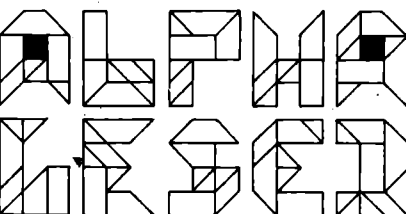
Senkrecht: 1. Maxwell (James Clerk),

2. Abstand, 3. Tangens, 4. Hilbert

(David), 5. Eins, 6. Klammer, 7. Umkreis,

8. Rhombus, 9. Strecke.

Figur 4: ALPHA-Legespiel



Das Bild zeigt je eine Legemöglichkeit für die Buchstaben-Figuren von ALPHA sowie für einige weitere Legefiguren:

Figur 5: ALPHA-Rösselsprung

A (links): KEGELSTUMPF, L: DURCHMESSER,

P: IKOSAEDER, H: HYPOTENUSE,

A (rechts): HAUPTNENNER.

Lösungen zu: alpha gratuliert

▲ 1 ▲

$$a) 19 + 49 + 40 = 19 + 89;$$

$$b) 19 + 49 + 40 = 1 + 98 + 9;$$

$$c) 19 + 4 + 9 + 4 + 0 = 19 + 8 + 9$$

▲ 2 ▲

$$a) 1 + 989 = 989 + 1;$$

$$b) 19 + 89 = 98 + 9 + 1;$$

$$c) 1 + 9 + 89 = 9 + 89 + 1;$$

$$d) 198 - 9 = 98 + 91$$

$$\Delta 3 \Delta \quad 198 \cdot 9 = 1989 - 198 - 9 (= 1782)$$

$$\Delta 4 \Delta \quad (9 + 8) \cdot (7 + 6) \cdot (5 + 4) \cdot (3 - 2) + 1 = 1990$$

▲ 5 ▲ Es sei x die gedachte Zahl; dann sind nacheinander folgende Rechnungen durchzuführen:

$$a) (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1;$$

$$b) 4 \cdot (x^2 - 1) = 4x^2 - 4;$$

$$c) 4x^2 - 4 + 4 = 4x^2;$$

$$d) \sqrt{4x^2} = 2x;$$

$$e) 199 \cdot 2x = 398 \cdot x;$$

$$f) \frac{398 \cdot x}{x} = 398;$$

$$g) 5 \cdot 398 = 1990.$$

Aus f) folgt, daß man bei diesem Vorgehen für jede gedachte Zahl x das konstante Ergebnis 398 und wegen $5 \cdot 398 = 1990$ stets die Jahreszahl 1990 erhält.

Lösung zu: Zwei harte Nüsse

Zum Jahresausklang 1989

Aus $xy + x + y = 1989$ folgt

$$(x + 1) \cdot (y + 1) = 1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199.$$

Da 2, 5 und 199 Primzahlen sind, lauten die Lösungen (0; 1989), (1; 994), (4; 397) und (9; 198).

Ein aktuelles Lösungsprodukt

Die lineare Gleichung (1) besitzt die eindeutige Lösung $x = x_1 = \frac{9}{2}$. Die quadratische Gleichung (2) besitzt die Lösungen

$$x = -1 \text{ und } x = x_2 = \frac{13}{5} \text{ (positive Lösung). Die kubische Gleichung (3) besitzt die drei Lösungen } x = -1, x = -2 \text{ und } x = x_3 = \frac{17}{199} \text{ (positive Lösung). Das gesuchte Lösungsprodukt } P \text{ lautet dann:}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{9}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{17}{199} = \frac{1989}{1990}$$

Mathematisches ALPHA-Quintett

Figur 1:
ALPHA-Hölzchenspiel

Wieviel Hölzchen muß man jeweils umlegen und wieviel wegnehmen, um aus dem mit 25 gleich langen Hölzchen aufgelegten Wort ALPHA die Worte ALEPH, ALGOL, APHEL, FOLGE bzw. SECHS erzeugen zu können?

Figur 2:
ALPHA-Magisches

Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis 35 so in die Kreisfelder der ALPHA-Figur ein, daß die Zahlensumme auf jedem geradlinigen Buchstaben-Abschnitt 50 beträgt!

Figur 3:
ALPHA-Kreuzworträtsel

Waagrecht: 1. glutflüssige Gesteinschmelze des Erdinnern, 4. deutscher Mathematiker (1811 bis 1874), 8. Bilderrätsel, 10. alte russische Längeneinheit (= 1,067 km), 11. Teil des Logarithmus, 12. SI-Basiseinheit der Länge, 13. Gesamtheit bestimmter Objekte, 14. Winkelfunktion.

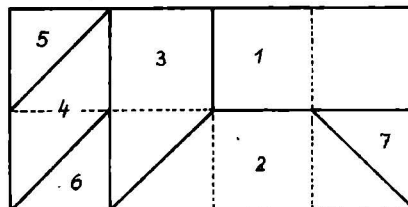
Senkrecht: 1. englischer Physiker, Astronom, Mathematiker und Philosoph (1831 bis 1879), 2. Entfernung zweier Punkte, 3. Winkelfunktion, 4. bedeutender deutscher Mathematiker (1862 bis 1943), 5. natürliche Zahl, 6. Formel-Hilfszeichen, 7. der einem Dreieck umschriebene Kreis, 8. Viereck mit vier gleich langen Seiten, 9. geometrischer Begriff.

Figur 4:
ALPHA-Legespiel

Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, dessen Seitenlängen im Verhältnis 1:2 stehen und das ihr euch aus acht kongruenten Quadraten zusammengesetzt denken könnt, in die abgebildeten sieben (dick umrandeten) Teile (1 Rechteck (1), 1 gleichschenkliges Trapez (2), 1 ungleichschenkliges Trapez (3), 1 Parallelogramm (4) und 3 kongruente gleichschenklighrechtwinklige Dreiecke (5-7)). Legt nun mit diesen sieben Teilen jeden Buchstaben des abgebildeten Wortes „ALPHA“ zusammen.

Für die doppelt auftretende A-Figur finde man zwei wesentlich verschiedene Zusammenlegungen.

Entwerft sodann noch weitere Figuren (Buchstaben, Zahlen, Gebäude, Bäume o. ä.), die sich mit unseren sieben Legeteilen zusammensetzen lassen!



Figur 5:
ALPHA-Rösselsprung

In jede Buchstaben-Figur wurde im Rösselsprung, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, ein mathematischer Begriff eingetragen. Wie lauten diese fünf Begriffe?

Viel Spaß beim Knobeln wünscht euch
R. Mildner

Zwei harte Nüsse

Zum Jahresausklang 1989

Welche geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x und y mit $x < y$ erfüllen die Gleichung

$$xy + x + y = 1989?$$

W. Träger

Ein aktuelles Lösungsprodukt

Gegeben sind die folgenden drei Gleichungen:

- (1) $3x - 8 = x + 1,$
- (2) $5x^2 - 8x - 13 = 0,$
- (3) $199x^3 + 580x^2 + 347x - 34 = 0.$

Ermittelt alle reellen Lösungen jeder Gleichung und bildet danach das Produkt $P = x_1 x_2 x_3$, wobei x_i die jeweils positive Lösung der Gleichung (i), $i = 1, 2, 3$, ist. Wenn diese Lösungen x_i und P nicht in Dezimaldarstellung, sondern in (gekürzter) Bruchform angegeben werden, so ist der Zusammenhang von P mit dem bevorstehenden Jahreswechsel offensichtlich.

R. Mildner

