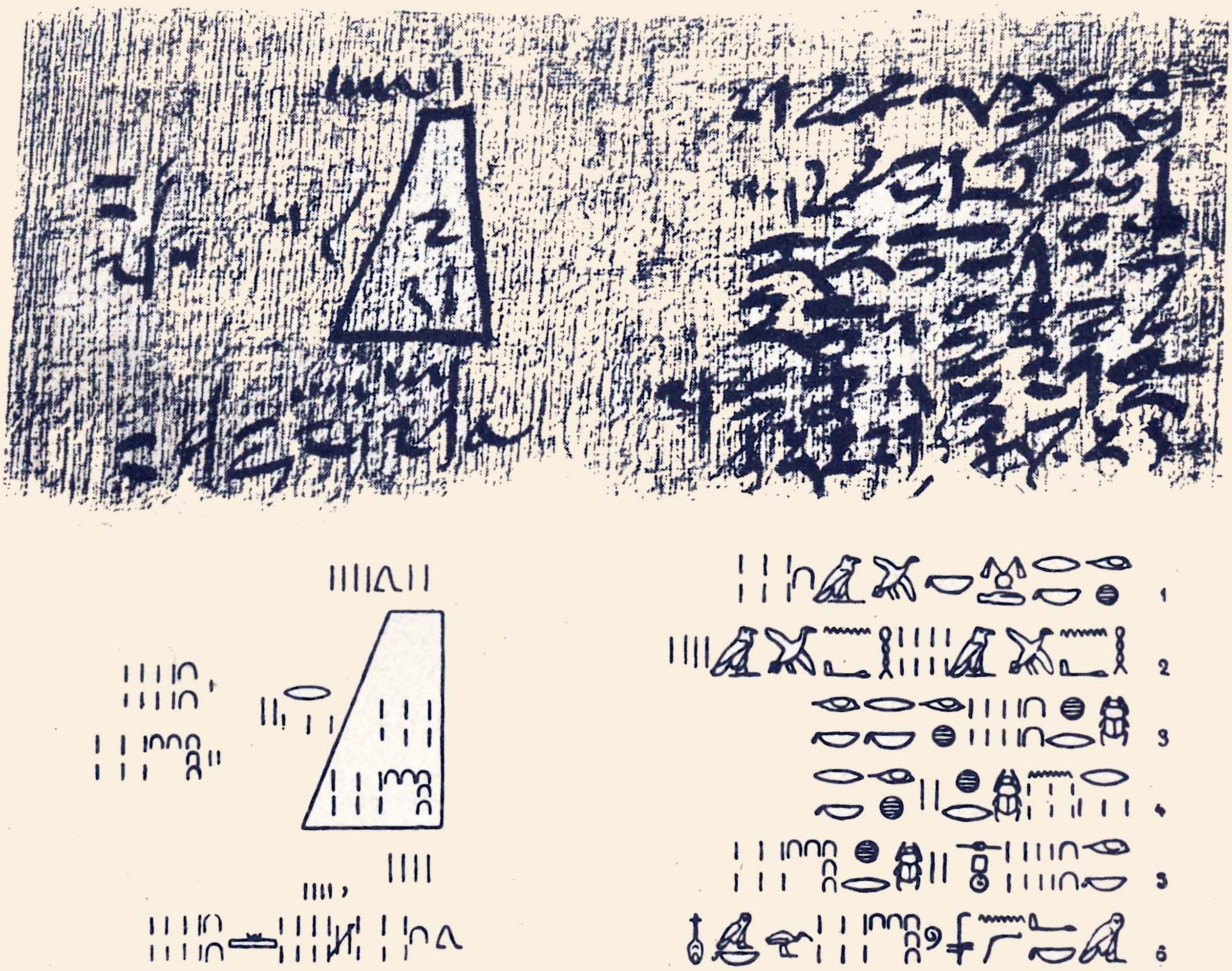
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignette: H. Büttner, Berlin (S. 25); Archiv: Karl-Marx-Universität Leipzig (S. 30); Dr. W. Moldenhauer, Rostock (S. 33 links unten); U. Forchner, Leipzig (S. 41); L. Otto, Leipzig (S. 40 oben): Hans Ticha, Berlin (S. 41); A. J. Mueller, Leipzig (S. 41); S. G. Müller, Leipzig (S. 42 u. III. U.-Seite)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
Redaktionsschluß: 18. Dezember 1979

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ein ungewöhnlicher Computer: die Billardkugel

1. Die Rechentechnik in der Mathematik

Kaum hatte sich der Wunsch vieler Wissenschaftler nach modernen elektronischen Rechenanlagen in den 40er Jahren unseres Jahrhunderts erfüllt, als das neuerstandene Selbstbewußtsein, elektronisch und schnell zu rechnen, einen empfindlichen Dämpfer erhielt: Ein Asiate war mit dem uralten Rechenbrett, dem Abakus, schneller als der Computer gewesen. Seine Überlegenheit beruhte wesentlich darauf, daß er die Kugel schneller schob, als dem Rechner die Zahlen eingegeben werden konnten.

Der Rechenkünstler und Professor der Mathematik *A. C. Aitken*, der sich ohne größere Mühe die ersten 1000 Stellen der Zahl π merken konnte, bekannte, daß mit dem Aufkommen der Tischrechner (50er Jahre) seine Fähigkeiten im Kopfrechnen durch mangelndes Training nachließen, und vermutete, daß in Zukunft das Kopfrechnen nicht mehr so gut beherrscht werden würde.

Wir wollen uns mit einem alten Problem beschäftigen, das heute bereits auf einfachen programmierbaren Taschenrechnern gelöst werden kann. Aber dabei geht eine Menge an Ideen und Einfällen verloren, die nicht zur Programmierung gehören. Wir wollen uns diesen verschiedenen Lösungsmethoden widmen, die sich im Laufe der Zeit herausgebildet haben, wobei wir sogar einen einfachen „mechanischen" Computer konstruieren werden.

2. Ein altes Problem

In den aus der Mitte des 13. Jahrhunderts stammenden „Annales Stadenses" findet sich die Aufgabe: Ein Diener wird von seinem Herrn in die nächste Stadt geschickt, um acht Maß Wein zu holen. Als er kaum mit seinem gefüllten Gefäß die Stadt verlassen hat, begegnet ihm ein zweiter Diener, der für seinen Herrn gleichfalls Wein holen soll. „Wieviel Wein hast Du?" fragt dieser jenen. – „Acht Maß." – „Ich soll auch Wein holen." – „Du wirst keinen bekommen, da keiner mehr da ist." Nun bittet der zweite Diener den ersten, seinen Wein mit ihm zu teilen; er habe zwei Gefäße, eins von fünf, das andere von drei Maß bei sich. Wie läßt sich unter alleiniger Benutzung dieser drei Gefäße die Teilung ausführen?

Diese Aufgabe ist nachfolgend immer und immer wieder gestellt worden mit Varianten in der zu teilenden Flüssigkeit und den vorhandenen Behältern sowie anderen Einkleidungen (u. a. ist schnellstens flüssiges Diebsgut mit vorhandenen Behältern zu teilen). Eine 1612 von dem Franzosen *Bachet* veröffentlichte Lösung geben wir im Lösungsteil des Heftes 3/80 an.

3. Eine Auswirkung unseres Problems

Ein junger Franzose, der seiner Familie keinerlei Hoffnung auf eine erfolgreiche Laufbahn gemacht hatte, da er sich zum Juristen nicht eignete und sich als Schüler eines verwandten Chirurgen ebenfalls erfolglos erwies, soll auf einer Reise ein ihm vorgelegtes Umfüllungsproblem augenblicklich gelöst haben und so seine tatsächliche Begabung erkannt haben. Der junge Mann war *Siméon-Denis Poisson* (1781 bis 1840), ein späterer Schüler von *Lagrange* und *Laplace* und weltbekannter Mathematiker, insbesondere durch seine Beiträge zur mathematischen Physik. Bei der *Poisson* gestellten Aufgabe wären drei Gefäße mit 12, 8 und 5 l Fassungsvermögen so umzufüllen, daß der Inhalt des 12-Liter-Gefäßes halbiert wurde.

Aufgabe 1: Gib Poissons Lösung in der Form einer Tabelle an, die den Inhalt der Gefäße nach dem Umgießen 1., 2., ... Umgießen zeigt!

4. Wir gehen systematisch vor

Wir suchen ein Verfahren, mit dem wir für beliebige Umfüllungsaufgaben routinemäßig die Lösung angeben können. Anhand des leicht geänderten Beispiels erläutern wir das Vorgehen.

Wir haben 3 Gefäße. Das erste faßt 8 Liter und ist mit Wein gefüllt. In das zweite und dritte Gefäß gehen 5 bzw. 2 Liter; sie sind leer. Ohne weitere Hilfsmittel ist durch Umfüllen der Wein zu halbieren oder allgemeiner in gewisse Teile abzufüllen (ganze Liter). Wir werden einen „Umschüttungsgraphen" zeichnen. Dazu geben wir den jeweiligen Inhalt der drei Gefäße durch ein Zahlentripel (X, Y, Z) an, wobei X die Menge im 8-Liter-Gefäß, Y die im 5-Liter-Gefäß und Z die im 2-Liter-Gefäß bezeichnet. (6,0,2) bedeutet also, daß im 8-Liter-Gefäß 6 Liter sind, im 5-Liter-Gefäß ist nichts, und das 2-Liter-Gefäß ist gefüllt. Jetzt ist der Graph (Bild 1) verständlich.

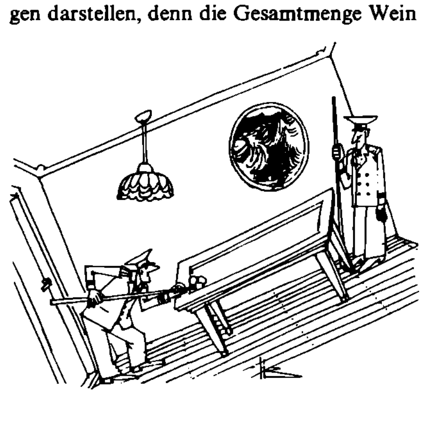
Der Ausgangspunkt (8,0,0) stellt die Ausgangssituation dar. Von den 8 Litern des 1. Gefäßes kann entweder in das 5- oder 2-Liter-Gefäß geschüttet werden, was durch die Tripel (3,5,0) und (6,0,2) angezeigt wird. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Beim nächsten Umgießen paßt in das volle 5-Liter-Gefäß nichts mehr, und aus dem leeren 2-Liter-Gefäß kann noch nichts gegossen werden, so daß sich aus dem Tripel (3,5,0) nur die Anordnungen (1,5,2) und (3,3,2) ergeben. Entsprechende Überlegungen führen für das Tripel (6,0,2) auf die Möglichkeiten (1,5,2) und (6,2,0). Die Aufteilung (1,5,2) hatten wir bereits und brauchen sie deshalb nicht weiter zu verfolgen. So ergibt sich nach und nach der gesamte Graph. Fett gedruckte Tripel sind solche, die wie (1,5,2) bereits früher im Graphen aufgetreten sind. Nach 7 Umfüllschritten erhalten wir keine neuen Tripel mehr. Ein weiteres Umschütten, wie es auch immer vorgenommen wird, führt auf schon erhaltene Anordnungen, und zwar wurden diese Anordnungen des Weins auf die drei Gefäße bereits durch weniger Umschüttungen erzielt.

Wir listen alle sich ergebenden Tripel auf:

(8,0,0)	
(7,1,0)	(7,0,1)
(6,2,0)	(6,0,2)
(5,3,0)	(5,1,2)
(4,4,0)	(4,2,2)
(3,5,0)	(3,3,2)
(2,5,1)	(2,4,2)
(1,5,2).	

Die Tripel geben *alle* möglichen Aufteilungen des Weins an, die sich durch Umfüllen aus dem Tripel (8,0,0) ergeben. Dabei kommen alle ganzzahligen Literbeträge von 0 bis 8 in einem der drei Gefäße tatsächlich vor. Unser Graph gibt uns neben den überhaupt möglichen Aufteilungen des Weins auf die drei Gefäße auch den Weg an, wie das erreicht werden kann, insbesondere auch, wie das auf kürzestem Weg erreicht werden kann. 4 Liter ergeben sich zum ersten Mal nach drei Umschüttungen, je 4 Liter im ersten und zweiten Gefäß können nicht vor dem 4. Umschütten erhalten werden.

Unter den Tripeln fehlen z.B. (6,1,1) oder (5,2,1), obwohl sie auch denkbare Aufteilungen darstellen, denn die Gesamtmenge Wein



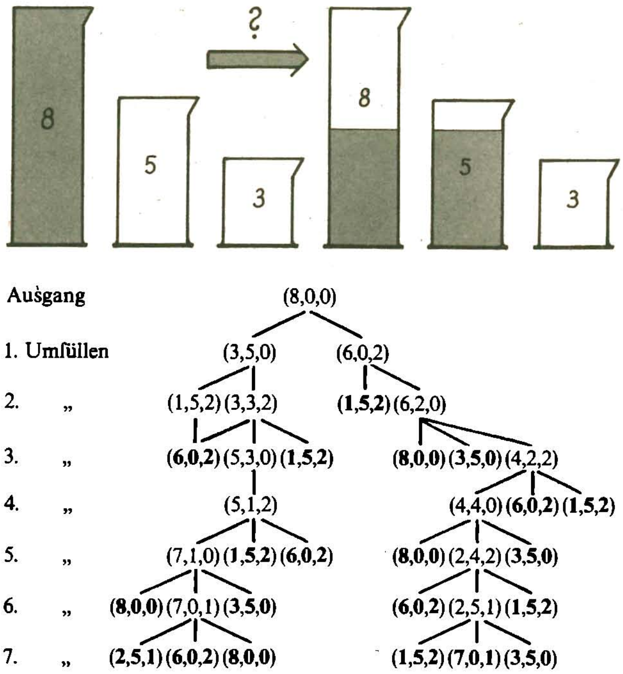


Bild 1: Umfüllungsgraph

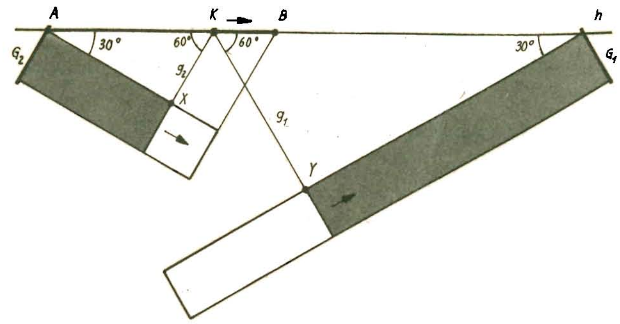


Bild 3: Eine andere Anzeigemöglichkeit für zwei Gefäße

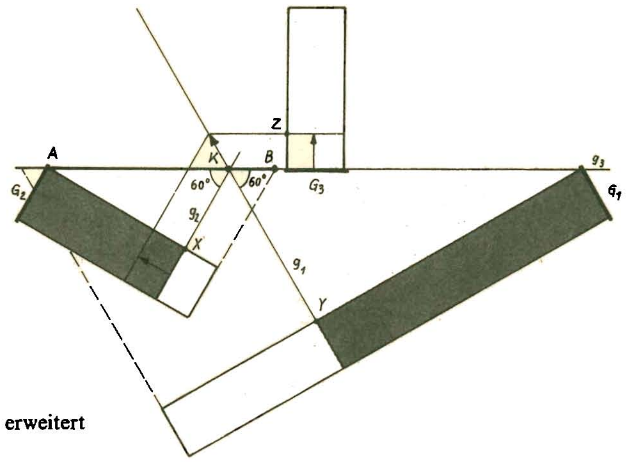


Bild 4: Anzeigemöglichkeit auf drei Gefäße erweitert

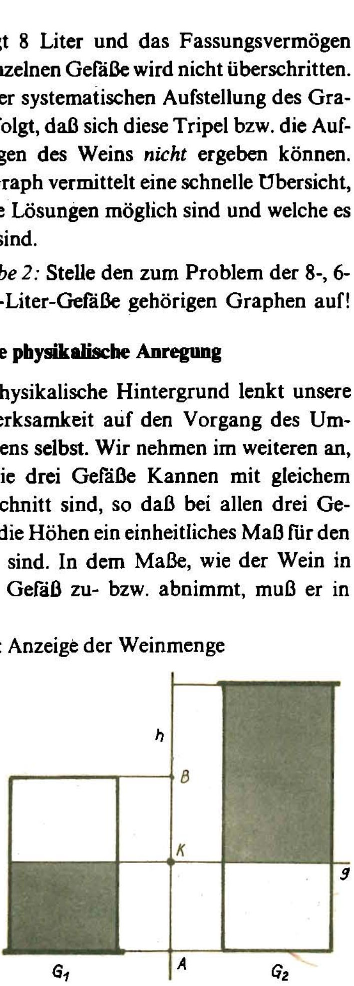
beträgt 8 Liter und das Fassungsvermögen der einzelnen Gefäße wird nicht überschritten. Aus der systematischen Aufstellung des Graphen folgt, daß sich diese Tripel bzw. die Aufteilungen des Weins *nicht* ergeben können. Der Graph vermittelt eine schnelle Übersicht, welche Lösungen möglich sind und welche es nicht sind.

Aufgabe 2: Stelle den zum Problem der 8-, 6- und 3-Liter-Gefäße gehörigen Graphen auf!

5. Eine physikalische Anregung

Der physikalische Hintergrund lenkt unsere Aufmerksamkeit auf den Vorgang des Umschüttens selbst. Wir nehmen im weiteren an, daß die drei Gefäße Kannen mit gleichem Querschnitt sind, so daß bei allen drei Gefäßen die Höhen ein einheitliches Maß für den Inhalt sind. In dem Maße, wie der Wein in einem Gefäß zu- bzw. abnimmt, muß er in

Bild 2: Anzeige der Weinmenge



einem anderen Gefäß ab- bzw. zunehmen. Wenn wir uns zunächst *zwei* in einer Ebene liegende Gefäße vorstellen (von der Wirkung der Schwerkraft sehen wir ab!), dann läßt sich das Zu- bzw. Abnehmen in den Gefäßen G_1 und G_2 sehr einfach durch die Bewegung einer Kugel K längs der Geraden h verdeutlichen. Die Kugel K (oder genauer die durch K gehende und zu h senkrechte Gerade g) zeigt den Weinstand an (Bild 2), der zu einem bestimmten Zeitpunkt in beiden Gefäßen vorhanden ist. Die Gesamtmenge an Wein ist offensichtlich gleichbleibend, wenn wir nur die Größe der Gefäße berücksichtigen, d. h., die Kugel nur innerhalb der Strecke AB laufen lassen. Wenn die Kugel über A oder B hinausläuft, dann laufen die Gefäße G_2 oder G_1 über, und der Wein geht verloren. Die *Überlaufpunkte* A und B grenzen auf der Geraden h den *Anzeigebereich* ab.

Um die *dritte* Kanne unterzubringen, ändern wir die Anordnung der Kannen etwas ab, indem wir die zwei Kannen G_1 und G_2 gegeneinander drehen, wie es das Bild 3 zeigt. Dabei wird die Gerade g geknickt, und es ergeben sich zwei Geraden g_1 und g_2. Der Flüssigkeitsstand kann immer noch durch die Kugel K angezeigt werden, wenn wir das sich mit der Kugel bewegende Geradenpaar g_1 und g_2 dazu benutzen (siehe Bild 3), das im Punkt K den gestreckten Winkel AKB zu jeder Zeit drittelt (d. h. $\sphericalangle AKX = \sphericalangle BKY = 60°$). (Zu jedem Ort der Kugel gehören je zwei Geraden g_1 und g_2, und es wäre korrekter, diese entsprechend zu unterscheiden. Alle Geraden g_1 bzw. g_2 sind jedoch zueinander parallel, so daß mit dem Ort der Kugel sofort das Geradenpaar g_1, g_2 angegeben werden kann. Deshalb verzichten wir auf diese Unterscheidung.) Wir bestimmen nun auf der Geraden h die Anzeigestrecke AB der Kugel. Den Überlaufpunkt A legen wir am günstigsten in den Boden des Gefäßes G_2 (d. h., wir rücken G_2 entsprechend an h heran). Das Dreieck AKX ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge AK. Aus dieser Beziehung errechnet sich leicht der Überlaufpunkt B, da die Höhe von G_2 die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge AB ist: $AB = (\text{Höhe von } G_2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Nun ist es einfach, ein *drittes* Gefäß in unsere Umfüllvorrichtung einzufügen, dessen Flüssigkeitshöhe während des Umfüllens von G_1 in G_2 oder umgekehrt ungeändert bleibt (Bild 4), wenn die Gerade g_3 ($=h$) durch A und B die Flüssigkeitshöhe in G_3 anzeigt. Nehmen wir z. B. an, daß beim nächsten Umschütten in G_1 die Weinmenge nicht verändert werden soll. Dann darf sich die Kugel K nicht mehr längs der Geraden g_3 bewegen. Wenn wir die Kugel jedoch längs g_1 weiterlaufen lassen, dann ändert sich die Weinmenge in G_2, und entsprechend der Ab- oder Zunahme ändert sich auch der in G_3 vorhandene Wein. Dabei legen wir den Weinstand in G_3 durch eine Gerade fest, die durch K geht und zu g_3 parallel ist. (Sinngemäß erweitern wir unsere für das Geradenpaar g_1, g_2 getroffene Vereinbarung auch auf diese Gerade und bezeichnen sie ebenfalls wieder durch g_3.) Damit die laufende Kugel K die Umschüttungen „vornehmen" kann, müssen wir noch garantieren, daß sie nicht über die Überlaufpunkte der Gefäße hinauskommt, sondern dort irgendwie die Richtung wechselt. Lassen wir z. B. die Kugel von A aus zum Überlaufpunkt B rollen, so wird G_2 auf Kosten von G_1 gefüllt. Der Punkt B zeigt an, daß G_2 völlig gefüllt ist. Jetzt wird weiter mit G_2 und G_3 umgefüllt. Die Kugel darf sich vom Punkt B an nicht mehr auf der Geraden g_3 bewegen, sondern muß in B auf die Gerade g_1 überwechseln. In diesem Fall wird G_3 zugunsten von G_2 gefüllt. Das ist aber technisch einfach zu bewerkstelligen, wenn wir durch B eine *Bande* parallel zu g_2 gehen lassen (Bild 5). Das Reflexionsgesetz garantiert dann $\sphericalangle KBK' = 60°$.

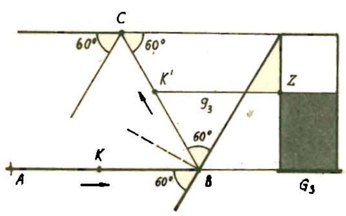


Bild 5: Konstruktion einer automatischen Umfüllanzeige

Wir haben jetzt nur noch zu beachten, daß K auf der Geraden g_1 durch B wieder an eine Bande trifft, wenn der Überlaufpunkt C für das Gefäß G_3 erreicht wird. Die Kugel soll dabei so reflektiert werden, daß der Flüssigkeitsstand im Gefäß G_2 konstant bleibt. Wir müssen schließlich noch eine Bande parallel zu der durch B legen, die sichert, daß die Weinmenge (in G_2) nicht unterschritten wird, aus gleichen Gründen ist die Strecke AB als Bande zu betrachten. Nun kann unser Computer arbeiten!

Wir setzen (für unser Beispiel mit den 8-, 5- und 3-Liter-Gefäßen) auf dem *Billardtisch* die Kugel K von A aus längs einer Bande in Bewegung, und ihr jeweiliger Stand gibt die Weinaufteilung in den Gefäßen G_1, G_2 und G_3 an. Verfolgen wir den Weg der Kugel, so erfahren wir, wie umgeschüttet wird. Läuft die Kugel von A nach B, so fließt der Wein aus dem größten Gefäß (G_1) in das mittlere (G_2). In B ändert K entsprechend dem Reflexionsgesetz die Richtung. Der Wein im großen Gefäß bleibt ungeändert, während vom mittleren (G_2) in das kleinere Gefäß (G_3) geschüttet wird; danach bleibt der Wein im mittleren Gefäß konstant und wächst im großen Gefäß auf Kosten des kleinen Gefäßes an usw., bis schließlich (für unser Beispiel nach 7 Reflexionen [= Umfüllungen]) die gewünschte Aufteilung erhalten wird. Läuft die

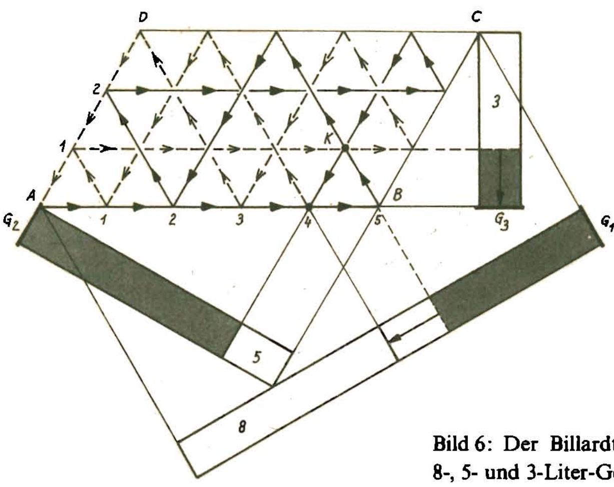


Bild 6: Der Billardtisch zum Umfüllen der 8-, 5- und 3-Liter-Gefäße

Kugel anfangs von A nach D, so ergibt sich eine andere Lösung mit einem Schritt mehr. Jeder Punkt des Billardtischs gibt einen möglichen Umfüllungszustand an (Bild 6). Die Banden AB bzw. CD markieren dabei das leere bzw. volle Gefäß G_3, die Banden AD bzw. BC zeigen geleertes bzw. gefülltes Gefäß G_3 an. Die Ecken A und C repräsentieren ein gefülltes bzw. geleertes Gefäß G_1. Punkte innerhalb des Billardtisches bezeichnen Zustände während des Umfüllens, das beendet ist, wenn die Kugel an die Bande trifft. Natürlich sind nur solche Aufteilungen möglich, für die die zugehörigen Punkte des Billardtisches von der Kugel während ihres Laufes berührt werden. (Wenn sich die Kugel am Tisch längs beliebiger Kurven bewegen würde, so hieße dies, daß wir entweder Hilfsmittel beim Umfüllen zulassen [Meßgeräte] oder unkontrolliert umschütten [also nicht wissen, wieviel sich in den Gefäßen befindet bzw. aus ihnen herausgeschüttet wird].)

Der Vorgang des Umfüllens wird durch unseren Billardtisch modelliert bzw. analog dargestellt. Die rollende Kugel auf einem entsprechend eingerichteten Billardtisch ist also etwas, was in der Rechentechnik als *Analogrechner* bezeichnet wird.

Aufgabe 3: Richte einen Billardtisch für 12-, 8- und 5-Liter-Gefäße ein!

6. Dreieckskoordinaten

Nachdem physikalische Anregungen uns zum Bau eines Computers geführt haben, wollen wir auch eine Theorie für den Automaten schaffen. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel.

Nicht ganz so alt wie unser Umfüllungsproblem, aber von ebenfalls ehrwürdigem Alter ist der für uns sehr wichtige Satz von *Viviani* (1622 bis 1703): In jedem gleichseitigen Dreieck ABC ist die Summe der Abstände eines innerhalb des Dreiecks befindlichen Punktes P von den Seiten konstant.

Beweis: Wir bezeichnen mit R, S und T die Fußpunkte der von P auf die Seiten BC, AC und AB gefällten Lote (Bild 7). Dann wird behauptet

$$\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT}=\text{const.}$$

Die Fläche des Dreiecks ABC ist einerseits gleich

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\sqrt{3}=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

und andererseits gleich der Summe der Flächen der drei Dreiecke APC, APB und BPC, also gilt

$$\sqrt{3}\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PR}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PS}+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PT}$$

$$=\frac{\overline{AB}}{2}(\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT})$$

bzw. $\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT}=\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{3}=\text{const.}$,

w. z. b. w.

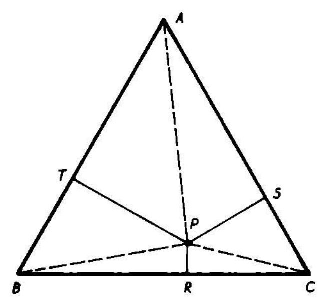


Bild 7: Zum Satz von Viviani

In der Ebene kann man die Lage eines Punktes festlegen, wenn man seine Abstände (*Koordinaten*) von zwei nicht-parallelen Geraden kennt, und umgekehrt bestimmt jeder Punkt seine Koordinaten. Im allgemeinen werden als Geraden zwei zueinander senkrechte Geraden gewählt; wir wollen jedoch zwei um 60° gegeneinander geneigte Geraden g und h wählen (Bild 8). Der Punkt P mit den Abständen x bzw. y von g und h (d. h. mit den Koordinaten (x, y) bezüglich g und h) ergibt

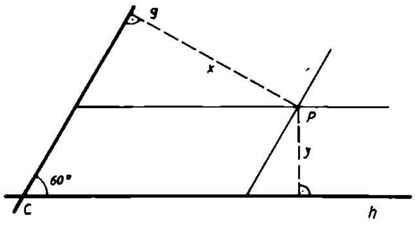


Bild 8: Schiefwinklige Koordinaten

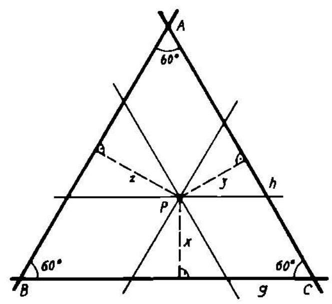
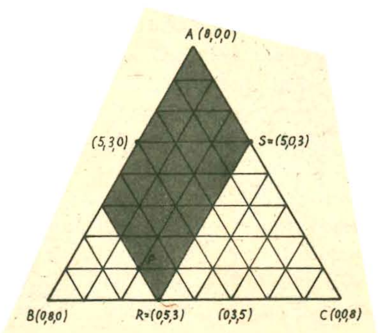


Bild 9: Dreieckskoordinaten

sich als Schnittpunkt der zu g bzw. h parallelen Geraden mit den Abständen x bzw. y (innerhalb des Winkelraums von 60°). Wenn wir noch eine dritte Gerade hinzunehmen, die beide Geraden schneidet, so ist klar, daß der Abstand von P zu dieser Geraden eine überflüssige Koordinate darstellen würde, denn P ist ja bereits völlig bestimmt. Die dritte Gerade möge g und h so schneiden, daß sich ein gleichseitiges Dreieck ergibt. (Bild 9) Dann liefert der Satz von Viviani gerade den Zusammenhang zwischen den drei Koordinaten x, y und z: $x+y+z=\text{const}$. Gerade dieser Zusammenhang macht z als dritte Koordinate interessant, da hier eine Entsprechung zu der konstanten Weinsumme besteht.

Die drei Angaben (x,y,z) für jeden Punkt P innerhalb des gleichseitigen Dreiecks ABC nennen wir Dreieckskoordinaten hinsichtlich des Grunddreiecks ABC. Wir betrachten als Beispiel die Dreieckskoordinaten in einem

Bild 10: Das Grunddreieck der Dreieckskoordinaten



gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 8 Längeneinheiten. Dann haben die drei Eckpunkte die Koordinaten $A=(8,0,0)$, $B=(0,8,0)$ und $C=(0,0,8)$; der Punkt $P=1{,}5{,}2)$ (Bild 10). Die drei Dreiecksseiten haben in Dreieckskoordinaten die Gleichungen

$$AB\colon z=0,\ BC\colon x=0,\ AC\colon y=0.$$

Die zu den Dreiecksseiten parallelen Strecken bestehen aus Punkten, die jeweils eine entsprechende Dreieckskoordinate konstant haben. Die Verbindungsstrecke von $R=(0,5,3)$ mit $S=(5,0,3)$ hat $z=3$ in $x+y+z=8$, also als Gleichung $x+y=5$, wobei $0\leqq x\leqq 5$ und $0\leqq y\leqq 5$ ist.

7. Die Automatentheorie

Wir formulieren nochmals unser Problem: Gegeben sind drei Gefäße G_1, G_2 und G_3 mit den Fassungsvermögen von a, b und c Litern ($a>b>c>0$; a, b, c natürliche Zahlen). G_1 ist gefüllt und durch Umschütten soll eine Menge von d Litern (d natürliche Zahl) herausgefüllt werden. Es ist, wenn x, y und z zu einem beliebigen Zeitpunkt die Inhalte der Gefäße G_1, G_2 und G_3 sind, stets

$x+y+z=a$ sowie (1)

$0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b,\ 0\leqq z\leqq c.$ (2)

(1) bedeutet, daß beim Umschütten kein Wein verloren geht (durch Verschütten, Verdunsten usw.), und (2) gibt einfach die Bedingungen wieder, die sich aus dem Fassungsvermögen der Gefäße ergeben. Da stets ein Gefäß völlig leer oder gefüllt ist, gilt in den drei Ungleichungen wenigstens ein Gleichheitszeichen; am Anfang gelten sogar drei. Uns interessieren Aufteilungen des Weins durch Umschütten bzw. Lösungstripel (x,y,z) mit natürlichen Zahlen x, y, z.

Jetzt ergibt sich der Zusammenhang zu den Dreieckskoordinaten mühelos. Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe a und einen Punkt P. Dann gibt jeder Punkt innerhalb des Dreiecks eine mögliche Umfüllsituation an, bei der die Summe der Flüssigkeit konstant, nämlich gleich a ist. Die Ecke A symbolisiert die Ausgangssituation: G_1 ist gefüllt ($x=a$), G_2 und G_3 sind leer (y und $z=0$). Die Ecken B oder C erfüllen formal gesehen auch die Erhaltung der Weinmenge beim Umschütten, aber bei jeder Umschüttung sind die durch (2) gegebenen Beschränkungen zu berücksichtigen. Mithin ist die „Größe" unseres Billardtisches durch (1) – d. h. durch a – festgelegt, seine Form ergibt sich aus den Beschränkungen (2). Die Beschränkungen (2) sind geometrisch gesehen im Falle der Gleichheiten 6 Geraden, darunter die drei Dreiecksseiten. Der Tisch wird also im allgemeinen die Form eines *Sechsecks* haben. Wie unser Beispiel mit den 8-, 5- und 3-Liter-Gefäßen zeigt, kann er auch ein Parallelogramm sein, wobei sich zwei Geraden auf Eckpunkte „reduzieren" (und zwar immer dann, wenn $a=b+c$ ist. Wieso?).

Die Begrenzungslinien (Banden) des Tisches sind: $y=0$, $y=5$, $z=0$, $z=3$; die Geraden $x=0$ und $x=8$ sind auf dem Billardtisch auf die Punkte $(0,5,3)$ und $(8,0,0)$ zusammengeschrumpft.

Zum Umfüllen kann man sich noch die drei Gefäße hinzudenken, die jeweils senkrecht zu einer Dreiecksseite anzuordnen sind (Bild 11). Je nachdem ob die Kugel von $(8,0,0)$ in Richtung $(3,5,0)$ oder $(5,0,3)$ gerollt wird, ergeben sich bis zum Halbieren der 8 Liter 7 bzw. 8 Umschüttungen. Die reflektierten Bahnen sind stets parallel zu einer Dreiecksseite. Jedes geradlinige Bahnstück bedeutet das Umfüllen von einem Gefäß in ein anderes, wobei das dritte unberührt bleibt (konstante Koordinaten der Bahn). Die mit 7 Umfüllungen ausführbare Halbierung lautet symbolisch

(8,0,0) (3,5,0) (3,2,3) (6,0,2) (6,2,0) (1,5,2) (1,4,3) (4,4,0);

die Lösung mit 8 Umfüllungen

(8,0,0) (5,0,3) (5,3,0) (2,3,2) (2,5,1) (7,0,1) (7,1,0) (4,1,3) (4,4,0).

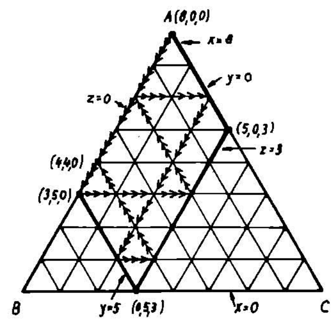


Bild 11: Konstruktion des Billardtisches für 8-, 5- und 3-Liter-Gefäße aus dem Grunddreieck

Wenn wir den Weg der Kugel über den Punkt $(4,4,0)$ hinaus verfolgen, so zeigt sich (Bild 11), daß jeder Bandenpunkt mit natürlichen Zahlen als Koordinaten tatsächlich erreichbar ist.

Das sind die Tripel

(8,0,0) (7,1,0) (6,2,0) (5,3,0) (4,4,0) (3,5,0) (2,5,1) (1,5,2)
(0,5,3) (1,4,3) (2,3,3) (3,2,3) (4,1,3) (5,0,3) (6,0,2) (7,0,1),

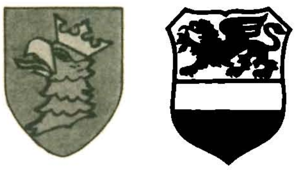
und sie charakterisieren alle möglichen Aufteilungen des Weins durch Umschütten.

R. Thiele

Die Lösungen zu diesem Beitrag sowie drei weitere Aufgaben veröffentlichen wir im Lösungsteil des Heftes 3/80, d. Red.

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematik-Wettstreit Szczecin – Rostock



Der Mathematikwettbewerb zwischen Schülern der Partnerbezirke Szczecin und Rostock erlebte im vergangenen Jahr ein kleines Jubiläum: Zum fünften Mal trafen sich die Schüler zum gemeinsamen Kräftemessen an mathematischen Problemen. Vom 2. bis zum 5. Februar 1979 waren fünf Schüler der Klassen 11 und 12 sowie zwei Betreuer aus Szczecin in Rostock zu Gast. Die Schüler lösten am 3. und 4. Februar unter den gleichen Bedingungen, unter denen die *Jungen Mathematiker* des Bezirkes Rostock die Aufgaben in Angriff nahmen, die Aufgaben der *Bezirksolympiade Junger Mathematiker der DDR*. Zuvor wurden die Aufgaben selbstverständlich ins Polnische übersetzt. Die Lösungen der polnischen Freunde wurden durch einen deutschen und einen polnischen Betreuer, die jeweils die Sprache des anderen beherrschten, bewertet. Wie auch in den vergangenen Jahren belegten unsere Gäste vordere Plätze, auch wenn sie mit dem Abschneiden in diesem Jahr nicht ganz zufrieden waren. Neben der Teilnahme an der Mathematikolympiade gab es für die vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit betreute polnische Delegation zahlreiche Veranstaltungen, die es den Gästen ermöglichten, Rostock und seine Einwohner etwas näher kennenzulernen.

Vom 22. bis 25. März 1979 weilten fünf Schüler der Klassen 10, 11 und 12 sowie zwei Betreuer aus dem Bezirk Rostock zum Gegenbesuch anläßlich der „Kopernikanischen Spiele" in Szczecin. Am 24. März fanden die Wettbewerbe auf Bezirksebene statt. Sie gliedern sich für die polnischen Schüler in drei Teilwettbewerbe. Zunächst findet für alle Teilnehmer ein Aufgabenwettbewerb (4 Aufgaben sind in drei Stunden zu lösen) statt. Daran schließt sich nach einer kurzen Pause ein sogenannter *Test* an. Dabei sind innerhalb von 45 Minuten zwanzig Fragen zu beantworten. Für die polnischen Schüler, die aus diesen beiden Teiletappen als beste hervorgehen, findet dann ein Quiz, das Finale, statt. Hier muß innerhalb von 4 Minuten eine Aufgabe gelöst werden und innerhalb von 15 Sekunden auf eine Frage, die oft scherzhafter Natur ist und manchmal kein mathematisches Problem direkt berührt, geantwortet werden. Die Schüler aus der DDR beteiligten sich jedoch nur an den ersten beiden Teiletappen. Dabei hatten sie zunehmend, nach anfänglichen Problemen mit den doch ungewohnten Aufgabenstellungen, Erfolge zu verzeichnen.

Neben dem mathematischen Wettstreit, den Begegnungen beim Auswerten der Aufgaben gab es für die Schüler und die Betreuer vielfältige Möglichkeiten, Land und Leute kennenzulernen, Freundschaften zu schließen. Für die Schüler unseres Bezirkes ergibt sich mit der Möglichkeit der Teilnahme an den „Kopernikanischen Spielen" in Szczecin ein zusätzlicher Anreiz beim Lösen der Aufgaben der Bezirksolympiade, denn die Besten fahren nach Szczecin und erhalten dort die Gelegenheit, ihre Fähigkeiten in einem internationalen Wettbewerb nachzuweisen. Darüber hinaus ist der Aufenthalt in Polen für alle Teilnehmer ein großartiges und unvergeßliches Erlebnis.

Zur Illustration möchte ich die Aufgaben der diesjährigen Spiele, einige Fragen aus dem Test sowie eine Fragestellung aus dem Finale für die Klassen 11/12 vorstellen. Die Autoren der Aufgaben und Fragen sind Mgr. *S. Klekowski* und Dr. *Z. Zalewski*.

E. Herbst

I. Test

▲1▲ Welchen Wahrheitswert hat die Implikation

$$(\sin\alpha=\sqrt{3})\Rightarrow(\log_2 5=\sqrt{2})?$$

▲2▲ Man schreibe das Produkt $\prod_{k=1}^{n} k$ in einfacherer Form!

▲3▲ Besitzt die Gleichung $x^4-3x^3+x^2-x-2=0$ rationale Wurzeln?

▲4▲ Für welche Werte des Parameters a gilt die Gleichung

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{2x}=4?$$

▲5▲ Unter der Voraussetzung $\sin x+\cos x=c$ bestimme man $\sin 2x$.

▲6▲ Man skizziere den Verlauf der Funktion $y=\log x^2-\log|x|$!

▲7▲ Man konstruiere den Verlauf der Funktion $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{1,5} x}$!

▲8▲ Man berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}=[-7]$ und $\vec{b}=[3]$.

▲9▲ Die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ sind schiefwinklig zueinander. Man berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{CD}$!

▲10▲ Wieviel Kanten hat ein regelmäßiges Pentagondodekaeder?

▲11▲ Es sei $y=\sin x$. Bestimme dy!

▲12▲ Man differenziere die Funktion $f(x)=\sqrt[x]{1}$, wobei $x\neq 0$ gilt!

▲13▲ Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x)=\int\frac{x-x^3}{1+x^4}dx$!

▲14▲ Man berechne $\int_1^2 \log x\,dx-\int_1^2 \log t\,dt$!

▲15▲ Man löse die Gleichung

$$|x|+\left|\int_a^b f(x)dx\right|=1+\left|\int_b^a f(x)dx\right|!$$

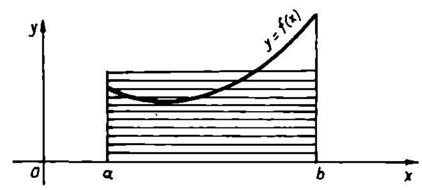
▲16▲ Aus wieviel Punkten $P(x,y,z)$ besteht der dreidimensionale Raum, wenn $x\in\{1,2,3\}$, $y\in\{2,5\}$, $z\in\{3,7,8,9\}$?

▲17▲ Ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten a und b, $a>b$, der Höhe h rotiert um seine Mittellinie. Man bestimme das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers!

▲18▲ Was für ein geometrisches Gebilde wird von den Punkten $M(x,y,z)$ gebildet, die der Gleichung $x^2+y^2=0$ genügen?

▲19▲ Eine Fabrik produziert Schrauben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine fehlerhafte Schraube produziert wird, beträgt 0,015. Wie groß ist die wahrscheinliche Anzahl fehlerhafter Schrauben in einer Sendung von 3000 Stück?

▲20▲ Welche Höhe muß das schraffierte Rechteck (siehe Bild) haben, damit sein Flächeninhalt mit dem Inhalt der durch die Kurven $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ begrenzten Fläche übereinstimmt?



II. Aufgaben

▲1▲ Besteht die Implikation:

Für alle $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ gilt:

$\alpha<\beta\Rightarrow\alpha\cot\alpha<\beta\cot\beta$?

▲2▲ Welche Kurve wird durch die Gleichung $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$ dargestellt?

▲3▲ Man leite eine Rekursionsformel für $f^{(n)}(x)$ her, wenn $f(x)=\sin x$ ist!

▲4▲ Man bestimme den Tangens des Schnittwinkels der Kurven $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ und berechne die Fläche zwischen den Kurven und der Geraden $x=\frac{\pi}{2}$!

Fortsetzung auf Seite 47

Leon Lichtenstein – ein Leipziger Mathematiker

Die angewandte Mathematik hat an der Leipziger Universität eine große Tradition. Das betrifft insbesondere die Astronomie (z. B. Karl Brandau Mollweide 1774 bis 1825 und August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868) und die Physik (z. B. Carl Neumann 1832 bis 1925). Von hervorragender Bedeutung für die mathematische Beschreibung astronomischer und physikalischer Erscheinungen sind auch die Forschungen von Leon Lichtenstein, der seit 1922 – in seinen letzten 11 Lebensjahren – an der Leipziger Universität wirkte. Es war die Zeit zwischen Inflation und Herrschaft des Faschismus, wobei gerade letzteres für Leon Lichtenstein besonders folgenschwer war, worauf wir noch zurückkommen.

Wie kam es nun eigentlich zur Berufung Lichtensteins als Professor für Mathematik nach Leipzig? In Leipzig existierte schon um 1920 ein sehr gut ausgestattetes Mathematisches Institut, an dem auch der bekannte Geometer Karl Rohn (1855 bis 1920) tätig war. Mit dem Tode von Rohn wurde eine Professorenstelle frei, die neu zu besetzen war. Wie üblich wurde eine Kommission gebildet, die begründete personelle Vorschläge zu machen hatte. Man nannte an erster Stelle Leon Lichtenstein, der gerade erst (1920) ordentlicher Professor an der Universität in Münster geworden war. Dieser Vorschlag wurde aber aus bis heute ungeklärten Gründen von der zuständigen Fakultät der Universität Leipzig nicht akzeptiert. Auch ein zweiter Vorschlag, in dem Lichtenstein nicht genannt wurde, konnte aus persönlichen Gründen der vorgeschlagenen Mathematiker nicht realisiert werden.

In dem nun folgenden dritten Vorschlag stand allerdings Leon Lichtenstein wieder an erster Stelle. Lichtenstein nahm die hiernach an ihn ergangene Berufung nach Leipzig dankend an, wie einer seiner Briefe beweist.

Der neue ordentliche Professor der Mathematik in Leipzig und Mitdirektor des Seminars und Instituts – Leon Lichtenstein – war 44 Jahre alt, als er vor nunmehr 57 Jahren am 1. April 1922 seine Tätigkeit in der Messestadt aufnahm. Die Kollegen an der für ihn neuen Universität waren Otto Hölder (1859 bis 1937), Gustav Herglotz (1881 bis 1953), Walter Schnee (1885 bis 1958), Paul Koebe (1882 bis 1945), Ludwig Neder (1890 bis 1960), Friedrich Levi (1888 bis 1966) und später auch Bartel Leendert van der Waerden (geb. 1903). Alle brachten sie ihm hohe Wertschätzung entgegen. 1928/29 war er Dekan der Abteilung II der philosophischen Fakultät. Auch seine Frau Stephanie, mit der er seit 1908 verheiratet war, fand als promovierte Physiologin gute Arbeitsmöglichkeiten an der Leipziger Universität.

Geboren wurde Leon Lichtenstein am 16. Mai 1878 in Warschau. 1894 ging er mit einem Realschulreifezeugnis zum Studium an die Technische Hochschule in Berlin-Charlottenburg. Neben seinem Studium des Maschinenbaus und der Elektrotechnik besuchte Lichtenstein noch Vorlesungen und Spezialseminare an der Berliner Universität bei den Mathematikern Hermann Amandus Schwarz (1834 bis 1921), Georg Frobenius (1849 bis 1917), Friedrich Schottky (1851 bis 1935) und Edmund Landau (1877 bis 1938). Besonders stark beeinflußte ihn dabei Schwarz, von dem Lichtenstein auch viele Jahre später noch voller Bewunderung sprach. Nachdem die Technische Hochschule Leon Lichtenstein schon 1907 den Titel „Dr.-Ing." verlieh, promovierte er 1909 an der Berliner Universität über ein mathematisches Problem. Schon 1910 habilitierte er sich an der Hochschule in Charlottenburg für reine und darstellende Geometrie. An dieser Hochschule wurde Lichtenstein 1917 auch außerordentlicher Professor und 1920 Honorarprofessor.

Nicht unbeachtet darf man seine Tätigkeit als Ingenieur bei der Firma „Siemens und Halske" lassen. Sie machte ihn einerseits finanziell relativ unabhängig und erhielt ihm andererseits den Kontakt zur Praxis. Diese Doppelbelastung – Hochschulmathematiker/Techniker – begann 1902 und währte bis 1923. Neben vielen bedeutenden mathematischen Arbeiten ist sie durch eine Folge von 14 Veröffentlichungen zu elektro-technischen Problemen gekennzeichnet. Seit 1905 war er als Chef des physikalischen Labors und des Kabelwerkes der genannten Firma eingesetzt. Die große Zeit seiner Vielseitigkeit begann eigentlich erst 1913/14, als er schon einmal nach Leipzig kommen sollte. Neben den erwähnten elektrotechnischen Dingen führte er zusammen mit Prandtl in dem von Felix Klein ins Leben gerufenen und zunächst hauptsächlich für Rüstungszwecke gedachten Göttinger Institut für Aerodynamik Windkanalexperimente durch. Bei dieser Gelegenheit stellt er verschiedene Berechnungen zur Konstruktion von Luftschiffen und Flugzeugen an.

Diese Arbeiten wurden, ohne erst groß sein Einverständnis einzuholen, vom deutschen Imperialismus im ersten Weltkrieg sofort genutzt. Lichtenstein hat sich mit politischen Fragen leider kaum beschäftigt, ganz im Unterschied zu seinem naturwissenschaftlichen Forscherdrang. Die deutsche Staatsbürgerschaft erhielt er, bevor man ihn noch 1918 zum Militärdienst (Feldartillerie) einzog. Auch persönlich war ihm mit diesem „Eindeutschungsvorgang" in keiner Weise geholfen, wie sich 1933 noch herausstellen sollte.

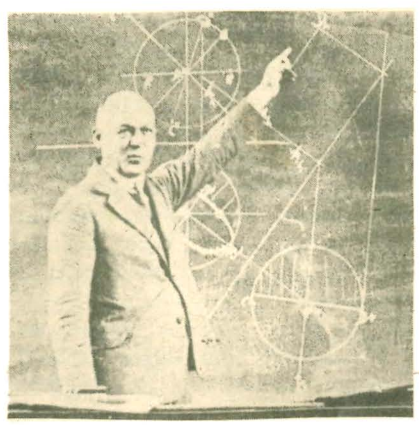
Lichtensteins überragende Verdienste auf dem Gebiet der Mathematik werden komplettiert durch eine umfangreiche redaktionelle Arbeit und Lehrtätigkeit. Das trifft auch auf die Kriegsjahre zu. Er gründete 1918 die „Mathematische Zeitschrift" und leitete die Herausgabe des „Jahrbuches für die Fortschritte der Mathematik" von 1919 bis 1927.

Seine mathematischen Forschungen konzentrierten sich auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die Potentialtheorie. Das sind Gebiete der höheren Mathematik, die Lichtenstein durch eine Vielzahl bedeutender mathematischer Resultate bereicherte, die an dieser Stelle nur genannt seien.

Von etwa 1918 an wandte sich Lichtenstein, der die Anwendung seiner mathematischen Forschungen stets im Auge behielt, immer stärker einer naturwissenschaftlichen Frage zu, die ihm weitere große Forschungserfolge und Popularität einbrachte. Es ist das Problem der Figur der Himmelskörper, das er zu ergründen suchte. Über die Leipziger Jahre hinweg bis zu seinem Tode 1933 fesselten ihn diese Phänomene.

Die ersten Gedanken zu diesem Himmelskörperproblem stammen von Isaac Newton (1643 bis 1727) und Christiaan Huygens (1629 bis 1695). Colin Maclaurin (1698 bis 1746) führte dann als erster einen mathematischen Existenzbeweis für eine Gleichgewichtsfigur von der Art eines abgeplatteten Rotationsflüssigkeitsellipsoids (wie sie bei den Himmelskörpern vorkommt). Nach weiteren diesbezüglichen wichtigen Forschungen im 19. Jahrhundert, gab der Mathematiker Henri Poincaré (1854 bis 1912) 1885 eine ganze Reihe neuer Gleichgewichtsfiguren an, die er

Leon Lichtenstein 1931 (?) bei einer Vorlesung über *Darstellende Geometrie* am Mathematischen Institut der Universität Leipzig. (Quelle: Dr. Helmar Lehmann, Leipzig)



allerdings nur auf spekulative Art gefunden hatte. Große Verdienste kommen auf diesem Gebiet der „Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten", wie es nun genannt wurde, dem russischen Mathematiker Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857 bis 1918) zu, der einige dieser Poincaréschen Spekulationen mathematisch exakt begründete und dabei auch neue Gleichgewichtsfiguren fand. Ljapunow erhielt die ersten Anregungen zu diesen Arbeiten von seinem berühmten Lehrer Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821 bis 1894).

Lichtenstein baute direkt auf den sehr schwer zu lesenden Ljapunowschen Schriften auf. Die hiervon ausgehenden Arbeiten zur Hydrodynamik (Lehre von den sich bewegenden Flüssigkeiten) verknüpfen den Namen Lichtensteins für alle Zeit mit diesem Gebiet. Der Reiz der Hydrodynamik bestand für Lichtenstein in der Einheit von hohem analytischen Charakter (mathematische Formelsprache) und Anschaulichkeit. Besonders schöne Darstellungen dieses Forschungsgebietes gab er in den beiden Büchern „Grundlagen der Hydrodynamik" von 1929 (Zusammenfassung von Hydrodynamik und Hydrostatik [Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten]) und „Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten" von 1933.

Die erste Arbeit ist mehr ein umfangreiches Lehrbuch, das den aktuellen Stand der mathematischen Entwicklung weitgehend berücksichtigt. Die hier an zweiter Stelle genannte Veröffentlichung, die letzte von seinen weit über 100 mathematischen Arbeiten, stellt im Prinzip einen Forschungsbericht dar. Sie ist aus einem von Lichtenstein im Sommersemester 1928 an der Universität Leipzig durchgeführten Kolleg (Spezialseminar) hervorgegangen. Von den Teilnehmern, die meist in Form von Dissertationen einen wesentlichen Anteil an den Ergebnissen haben, seien Erich Kähler, Victor Garten, Karl Maruhn, Ernst Hölder und Georg Dölling genannt. So wurden durch Lichtenstein und seine Schüler z. B. die von Poincaré behandelten birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren widerlegt und die Existenz ringförmiger Gleichgewichtsfiguren mit und ohne Zentralkörper bewiesen. Von Lichtenstein wird als erstem die Laplacesche Theorie des Erdmondes und Saturnringes streng ausgeführt. Auch eine hochinteressante mathematische Theorie über die Gestalt der Weltmeere verdanken wir Leon Lichtenstein.

Deutlich ist zu erkennen, wie sich im Verlauf der Jahre Lichtensteins mathematische Modelle immer genauer den realen Erscheinungen anpassen. So gelangte er mittels der Untersuchung nichthomogener Flüssigkeitskörper (unterschiedliche Dichte der Flüssigkeit in verschiedenen Teilen des Körpers) auch zur Existenz einer Gleichgewichtsfigur, die aus zwei Einzelmassen besteht, welche nur einen gemeinsamen Punkt haben. Das entspricht etwa der Ablösung eines Mondes vom Mutterplaneten. Die Verbindung zwischen Mathematik und Astronomie, wie man sie durch Mollweide und Möbius zu Beginn des 19. Jahrhunderts in Leipzig schon kannte, lebte durch Lichtenstein in gewisser Weise wieder auf. Sein Interesse und sein Vorhaben auf diesem Gebiet macht Lichtenstein bereits in seiner sehr lesenswerten Leipziger Antrittsrede

„Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper." (1923 bei Hirzel erschienen)

vom 20. Mai 1922 deutlich.

Leon Lichtenstein hatte einen entscheidenden Anteil bei der Ausbildung der damals jungen Mathematikergeneration. Die „Mathematische Zeitschrift" brachte zu seinem 80. Geburtstag einen Gedenkband heraus, in dem 24 Mathematiker aus 10 Ländern ihm zu Ehren wissenschaftliche Arbeiten veröffentlichten. Der überwiegende Teil kommt dabei aus den USA, wohin viele Wissenschaftler während der „Braunen Diktatur" emigrierten. Denn kaum waren die Nazis an der Macht, da offenbarten sie ihre rassistische Grundhaltung. Das sogenannte „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" sollte jeglichen jüdischen und ausländischen Einfluß rigoros beseitigen. So nahm man auch Leon Lichtenstein aufs „Korn". Der damalige Dekan Prof. Weikmann sandte am 21. 4. 1933 dem Minister anweisungsgemäß einen Bericht. In dem Schreiben, das Otto Hölder abgefaßt hatte, werden neben der politischen Inaktivität alle Verdienste Lichtensteins hervorgehoben:

- die große internationale Bedeutung
- die Beliebtheit bei den Studenten
- die überaus erfolgreiche Lehrtätigkeit. (Er las fast alle damals üblichen mathematischen Disziplinen.)

All diese Dinge sollten Lichtenstein nichts nützen. Die offene Hetze gegen ihn nahm zu. In der *Leipziger Tageszeitung* vom 4. August 1933 stand zu lesen:

„Am mathematischen Institut lehrt heute noch ungestört ein polnischer oder galizischer Jude, Herr Prof. Leon Lichtenstein! Prof. Lichtenstein beherrscht die deutsche Sprache nur sehr mangelhaft (eine glatte Lüge – Kö.). Trotzdem kann er weiter lehren! ... Wir wissen nicht, warum das Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums an der Universität Leipzig gerade nicht gelten soll, bzw. sein Sinn in das Gegenteil verkehrt wird. ... Wir wundern uns nur, daß die deutschen Studenten an unserer Universität sich so etwas bieten lassen und nicht von sich selbst aus Ordnung schaffen."

Kaum drei Wochen später verstarb Lichtenstein in Zakopane. Zwei Tage nach seinem Tode, am 23. August, stand in der eben zitierten Zeitung eine Notiz von zwei kurzen Sätzen über angebliches Herzversagen. Lichtensteins Frau in der Todesanzeige am gleichen Tag: „... Von Beileidsbesuchen bittet man freundlichst absehen zu wollen."

1978 veranstaltete die Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig eine wissenschaftliche Tagung aus Anlaß des 100. Geburtstages von Leon Lichtenstein, der seine Liebe zur Mathematik in die Worte faßte:

„Was wir an den Meistern unserer Wissenschaft bewundern und ehren, ist der Scharfsinn und der Weitblick, die sie in den Stand setzen, tief versteckte Beziehungen zu erkennen und ins Licht zu setzen. Das Gefühl, dem Schatze des Wissens eine vorher nicht vermutete Wahrheit hinzugefügt zu haben, ist das größte Glück und die höchste Belohnung, die der Mathematiker anstrebt."

(Zitiert bei O. Hölder: Lichtenstein-Nekrolog, Math. Ann. Bd. 38 [1933])

Abschließend sei ein Auszug aus dem Buch des Mathematikers Norbert Wiener (1894 bis 1964) „Mathematik – mein Leben", Frankfurt/M. und Hamburg 1965, wiedergegeben, der ein plastisches Bild von der Persönlichkeit Lichtensteins zeichnet.

Auf Seite 79/80 heißt es u. a.:

„Ich hatte eine ganze Menge von den Arbeiten eines deutschen Mathematikers, Leon Lichtenstein, gesehen. ... Mein Vater wußte von einem Vetter Leon, der die Technische Hochschule in Berlin besuchte. ... Er wußte auch, daß Leon später die Arbeit in der Industrie aufgegeben und sich der akademischen Arbeit auf dem Gebiete der angewandten Mathematik gewidmet hatte; welche Erfolge er erzielen konnte oder wo er zur Zeit tätig war, wußte er jedoch nicht.

Eines Tages erhielten wir einen Brief von Tante Charlotte in New York, aus dem hervorging, daß Leon in der Mathematik erfolgreicher gewesen war, als wir vermutet hatten. In dem Brief stand auch sein voller Name: Leon Lichtenstein. Ich zog den naheliegenden Schluß, daß höchstwahrscheinlich Vetter Leon und der berühmte Mathematiker ein und derselbe waren. Ich schrieb also an Lichtenstein. ... Er lud mich ein, ihn das nächste Mal, wenn ich wieder in Europa sein würde, zu besuchen, ...keiner hatte je ein Bild des anderen gesehen. Er holte mich vom Bahnhof (Leipzig – Kö.) ab und hielt ein Papier hoch, auf das er, mir zu Ehren, die Hauptformel der Potentialtheorie geschrieben hatte. Leon Lichtenstein war kahlköpfig, trug einen Bart und sah äußerlich meinem Vater nicht sehr ähnlich, war aber wie er klein und energisch, hatte rasche Bewegungen und sehr entschiedene Meinungen. Er war in vieler Hinsicht sehr antiamerikanisch eingestellt, wenn er auch zu mir persönlich sehr herzlich war."

F. König

Mathematiker – ein interessanter Beruf

Um es gar nicht erst zu verschweigen: Meine Absicht ist es, diesen oder jenen Leser der *alpha* zum Nachdenken darüber zu veranlassen, ob nicht der Beruf eines Mathematikers oder eines Mathematik-Lehrers die richtige Entscheidung für die Zukunft wäre.

Nun reicht dafür sicherlich allein der Hinweis nicht aus, daß seit einigen Jahren immer wieder Studienplätze in der Grundstudienrichtung Mathematik und für das Lehrerstudium in Fachkombinationen mit Mathematik frei bleiben.
Wesentlich sind sicher für jeden einzelnen Fragen wie die nach der Rolle der Mathematik in unserer Gesellschaft, nach den beruflichen Aufgaben eines Mathematikers (für den Lehrerberuf dürfte das bei allen Lesern aus dem eigenen Erleben ohnehin klar sein) oder die *Gewissensfrage:* „Kann ich ein solches Studium überhaupt bewältigen?"
Zu diesen Problemen gibt es sehr vieles zu sagen, und ich möchte Interessenten auf das 1978 im Teubner-Verlag erschienene Büchlein „Studienwunsch Mathematik" hinweisen, das sich damit gründlich und in ansprechender Weise beschäftigt.
Der Entwicklung und Förderung der Mathematik wird in unserer Republik von jeher große Bedeutung beigemessen. Das zeigt sich zum Beispiel am „Mathematik-Beschluß", den das Politbüro des ZK der SED im Jahre 1962 faßte.
Vielfältige Initiativen wurden damals eingeleitet, um die mathematische Bildung weiter zu erhöhen und dem modernen Entwicklungsstand besser anzupassen. Unter anderem entstand die Mathematik-Olympiade-Bewegung. Die Ausbildung von Mathematikern wurde entsprechend den sich abzeichnenden Entwicklungstendenzen wesentlich erweitert, so daß seit der zweiten Hälfte der 60er Jahre der Einsatz von Mathematikern in der Industrie und anderen Bereichen der Volkswirtschaft beträchtlich erhöht werden konnte. Das führte – verbunden mit dem Aufkommen und dem breiten Einsatz der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen – zu völlig neuen Möglichkeiten, aber auch zu neuen Fragen und Problemen, denn bisher gab es nur wenige und vereinzelte Erfahrungen beim Einsatz von solchen Kadern außerhalb der Akademie der Wissenschaften, der Universitäten und Hochschulen.
Die Erweiterung des mathematischen Potentials der Industrie, aber auch der Forschungs- und Bildungseinrichtungen, vollzog und vollzieht sich in Übereinstimmung mit einer objektiven Tendenz in allen fortgeschrittenen Industrieländern: der wachsenden Rolle von Wissenschaft und Technik, mit der sich untrennbar gewaltige Aufgaben für die Mathematik verbinden.
Die modernen Entwicklungen in der Mikroelektronik, im Maschinenbau, der chemischen Industrie, im Bauwesen und anderen Bereichen der Volkswirtschaft wären unmöglich ohne die schöpferische Nutzung und Weiterentwicklung mathematischer Verfahren und Theorien. Beispielsweise finden in zunehmendem Maße wahrscheinlichkeitstheoretische und Methoden der mathematischen Statistik bei der Erhöhung von Qualität und Zuverlässigkeit der Produkte und Technologien Anwendung, algebraisch-kybernetische Methoden braucht man u.a. in der rechentechnischen Industrie, Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle im Maschinenbau, die mathematische Optimierung wird auf allen Ebenen der Wirtschaftsplanung, aber auch zur Optimierung von Produktionsabläufen erfolgreich eingesetzt.
Die Entwicklung der modernen Rechenelektronik erlaubt es, mathematische Aufgaben zur Lösung theoretischer und praktischer Probleme in Angriff zu nehmen, die vorher wegen des hohen zeitlichen Aufwandes für die Rechnung als nicht bearbeitbar galten. Die EDV stellt aber auch neue und höhere Anforderungen an die Mathematik, vor allem im Hinblick auf die Entwicklung leistungsfähiger numerischer Verfahren. Überhaupt erwachsen aus der fortschreitenden „Mathematisierung" verschiedener Wissenschaften immer neue Anforderungen an die mathematische Grundlagenforschung, die unter der Führung hervorragender Gelehrter vor allem an den Universitäten, der Akademie der Wissenschaften, an den Technischen und Pädagogischen Hochschulen betrieben wird.
Zur Verwirklichung der unserer Gesellschaft gestellten anspruchsvollen Ziele brauchen wir viele wissenschaftlich hochqualifizierte Kader, die mit schöpferischem Elan und hoher Einsatzbereitschaft den wissenschaftlich-technischen Fortschritt in den kommenden Jahren und Jahrzehnten maßgeblich voranbringen. Die Nutzung der Mathematik in immer mehr Bereichen der Wissenschaft und Produktion und die Notwendigkeit der Weiterentwicklung dieser Disziplin erfordern insbesondere die aktive Tätigkeit vieler Mathematiker.
Sie werden auch in Zukunft zum großen Teil in Kollektiven eingesetzt, wo sie in fruchtbarer Zusammenarbeit mit Ingenieuren, Naturwissenschaftlern, Ökonomen und anderen Spezialisten ihren Beitrag zur Bewältigung theoretischer und praktischer Aufgaben zu leisten haben.
„Die spezifischen Aufgaben des Mathematikers bestehen dabei in
- der schöpferischen Mitarbeit an der Konzipierung der Aufgaben, der Planung der Arbeitsetappen und der Analyse des betrachteten Systems,
- der schöpferischen Mitarbeit beim Aufstellen geeigneter Zielstellungen für die mathematische Bearbeitung,
- der Auswahl bzw. Entwicklung geeigneter und vom Aufwand her ökonomisch vertretbarer mathematischer Methoden zur Lösung der gestellten Aufgaben,
- der Lösung der mathematischen Aufgaben bei zweckmäßiger Nutzung von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen sowie
- der Teilnahme an der Realisierung der Ergebnisse in der Praxis."

(Studienplan für die Grundstudienrichtung Mathematik zur Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR, Berlin 1976)

Es liegt in der Natur der Sache, daß Mathematiker in einem besonders engen Verhältnis zur Entwicklung und zum Einsatz der EDV stehen. Ein großer Teil von ihnen ist in Rechenzentren tätig, in wachsendem Maße als „Problemanalytiker" mit dem Hauptarbeitsgebiet der mathematischen Modellierung realer Prozesse, aber auch in anderen Bereichen.
Die Ausbildung an den Universitäten und Technischen Hochschulen trägt den komplexen Erfordernissen des Einsatzes weitgehend Rechnung. Durch die gründliche theoretische Ausbildung in klassischen und modernen Gebieten der Mathematik, eine solide gesellschaftswissenschaftliche Ausbildung, die Bewältigung von praktischen mathematischen Aufgabenstellungen unter anderem im 12wöchigen Betriebspraktikum, durch die rechentechnische Ausbildung und das Studium eines „Nebenfachs" (technische, naturwissenschaftliche oder ökonomische Disziplin) werden im Rahmen der fünfjährigen Ausbildung die Grundlagen für eine erfolgreiche Tätigkeit als Mathematiker in der Industrie, an einer Universität oder Hochschule, an der Akademie der Wissenschaften und in anderen Bereichen gelegt.
Die Ausbildungskonzeption ist aber nur die eine Seite. Viel wichtiger ist, was der einzelne Student „daraus macht". Selbstverständlich wird er während des Studiums von den Professoren, Dozenten und Assistenten angeleitet, auch in den FDJ-Kollektiven unterstützt und hilft man sich gegenseitig. Aber die beste Vorlesung nutzt nichts, wenn sie nicht von jedem einzelnen verstanden und nachgearbeitet wird, und selbst das beste Lehrbuch wäre eine Fehlinvestition, wenn man es nicht gründlich studiert.
Zu den Voraussetzungen für das erfolgreiche Studium in der Grundstudienrichtung Mathematik oder im Lehrerstudium in einer

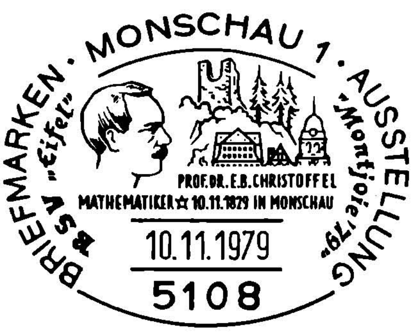
Fachkombination mit Mathematik gehören selbstverständlich in erster Linie entsprechende schulische Leistungen, Fleiß und Ausdauer. Eine Grundbedingung ist weiter die Liebe zur Mathematik, die Freude am gründlichen Nachdenken und das Bestreben, die erkannten theoretischen Zusammenhänge praktisch nutzbar zu machen.
Der Lehrerberuf schließt in besonderem Maße nicht nur fachliche Aufgaben ein, schließlich ist der Lehrer verantwortlich für viele Seiten der Bildung und Erziehung der ihm anvertrauten Schüler. Daher sollte sich ein Lehrerstudent der Verantwortung für die Kinder und Jugendlichen bewußt sein und Freude beim Umgang mit ihnen haben.
Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß die Sektionen Mathematik der Universitäten und Hochschulen und sicherlich ebenso Ihre Lehrer gern genauere Auskünfte über ein Studium in diesen Richtungen geben.

J. Geburtig

Übersicht über die Studienmöglichkeiten in den Grundstudienrichtungen Mathematik und Oberschullehrer für Mathematik

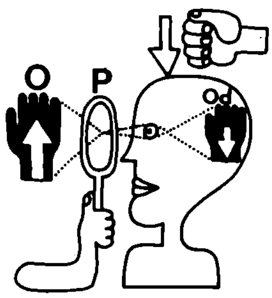
Einrichtung	Lehrerstudium Fachkombination	Ausbildung von Mathematikern
Humboldt-Universität zu Berlin	Mathem./Physik	x
Karl-Marx-Universität, Leipzig	Mathem./Physik	x
	Physik/Mathem.	
Martin-Luther-Universität Halle	Mathem./Physik	x
Friedrich-Schiller-Universität Jena	Mathem./Physik	x
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock	Mathem./Physik	x
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald	Mathem./Physik	
	Physik/Mathem.	
	Geogr./Mathem.	
Technische Universität Dresden		x
Bergakademie Freiberg		x
Technische Hochschule Magdeburg	Mathem./Physik	x
	Physik/Mathem.	
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt	Mathem./Physik	x
	Physik/Mathem.	
Technische Hochschule Ilmenau		x
Technische Hochschule Leuna-Merseburg		x
Pädagogische Hochschule Potsdam	Mathem./Physik	
	Physik/Mathem.	
Pädagogische Hochschule Güstrow	Mathem./Physik	
	Physik/Mathem.	
	Chemie/Mathem.	
Pädagogische Hochschule Halle	Mathem./Physik	
	Physik/Mathem.	
	Chemie/Mathem.	
Pädagogische Hochschule Erfurt	Mathem./Physik	
	Mathem./Kunsterz.	
	Physik/Mathem.	
Pädagogische Hochschule Dresden	Mathem./Physik	
	Mathem./Geogr.	
	Physik/Mathem.	
	Geogr./Mathem.	
Pädagogische Hochschule Köthen	Mathem./Chemie	

Unter der Leitung der Sowjetunion entstand gemeinsam mit der VR Bulgarien, der Ungarischen VR, der DDR, VR Polen und der ČSSR das *einheitliche System elektronischer Rechner*, kurz ESER. Auf der Briefmarke ist das Bedienpult der elektronischen Datenverarbeitungsanlage EC-2040 abgebildet. Dieser Rechner kann z. B. mit Lochkartenanlagen, Lochbandstationen, Paralleldruckern und Bildschirmeinheiten in verschiedenen Konfigurationen ausgerüstet werden. Die Zentraleinheit wurde vom VEB Kombinat Robotron gefertigt. Die Rechengeschwindigkeit beträgt 380000 Operationen pro Sekunde. Mit dem EC-2040 werden Effektivitäts-, Rationalisierungs-, Planungs- und Leitungsfragen bearbeitet. Er dient aber auch der Abrechnung und der Forschung.
Der Sonderstempel ist dem 1. Kolloquium „Leitungsorganisation und elektronische Datenverarbeitung" (Abk. LO + EDV) gewidmet. In 35 Vorträgen wurden Effektivitätsfragen bei der Anwendung der EDV und Gerätekonzeptionen und daraus resultierende Anwendungsmöglichkeiten diskutiert. Dabei wurden die Pflege und die Nutzung großer Datenmengen, Probleme der Informationsreduktion, Klassifizierungsfragen und Bewertungen von Informationen und weitere Probleme angesprochen.



Elwin Bruno Christoffel, geboren am 10. November 1829 in Montjoie, dem heutigen Monschau, promovierte 1856 an der Berliner Universität. Er ist als Schüler von *J. P. G. Lejeune Dirichlet* aus Düren/Aachen zu bezeichnen. Nach seiner Habilitation 1859 in Berlin wirkte *Christoffel* dort bis 1862 als Dozent, verbrachte die folgenden sieben Jahre als Professor der Mathematik am *Eidgenössischen Polytechnikum* zu Zürich, der jetzigen ETH, die Jahre 1869 bis 1872 am Gewerbeinstitut zu Berlin, der jetzigen TU Berlin, und die Zeit ab 1872 bis zu seinem Tode im Jahr 1900 in Straßburg, wo er – wie bereits in Zürich – ein Mathematisches Seminar ersten Ranges aufbaute.
Christoffels große Leistungen liegen auf den Gebieten der Numerik (Gauß-Christoffel Quadraturformel), der Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik (Christoffel-Darboux Summenformel), der Funktionentheorie (Christoffel-Schwarz-Formel, Arbeiten über Theta- und Abelsche Funktionen, z. B.). der Theorie der Kettenbrüche, der Potentialtheorie, der Stoßwellentheorie und der Differentialgeometrie einschließlich der Invariantentheorie (Christoffel-Symbole, Riemann-Christoffel Tensor, Christoffelscher Reduktionssatz, z. B.).
Seine Arbeiten haben wesentlich zur Prägung des modernen naturwissenschaftlichen Weltbildes beigetragen.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1980

Mathematik

Ma 5 ■1965 Ein Fernsehturm hat eine Höhe von 164 m. Der Antennenträger dieses Fernsehturms ist 52 m kürzer als sein Betonschaft. Welche Länge haben Antennenträger und Betonschaft dieses Fernsehturms?
Schüler Wieland Handke, Pulsnitz

Ma 5 ■1966 Frank wird von seiner Schwester gefragt, wieviel Jungen und Mädchen an der XVIII. Bezirksolympiade Junger Mathematiker teilgenommen haben. Er antwortet: „Insgesamt waren es 113 Teilnehmer. Es waren 11 Jungen mehr als die doppelte Anzahl der Mädchen." Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nahmen an dieser Bezirksolympiade *Junger Mathematiker* teil?
Schülerin Beate Weber, Bernburg

Ma 5 ■1967 Alfons, Bruno, Christoff und Dieter gehen in die gleiche Schule. Ihre Nachnamen sind in anderer Reihenfolge Decker, Blume, Althoff und Cramer. Von ihnen ist folgendes bekannt:
a) Alfons ist mit dem Schüler Cramer befreundet.
b) Bruno und der Schüler Decker sind gleichaltrig.
c) Dieter ist jünger als Bruno, und Bruno ist jünger als der Schüler Blume.
d) Dieter ist jünger als der Schüler Cramer.
e) Alfons kennt den Schüler Blume nicht.
f) Dieter und der Schüler Decker spielen oft zusammen.
Welchen Familiennamen haben Alfons, Bruno, Christoff und Dieter? Ordne diese vier Schüler nach ihrem Lebensalter!
Schülerin Sylke Giese, Rostock

Ma 5 ■1968 Für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks ABC gilt $a+b=464$ mm, $b+c=563$ mm und $a+c=525$ mm.
Welche Längen haben die Seiten dieses Dreiecks? *Schüler Georg Hein, Berlin, Kl. 6*

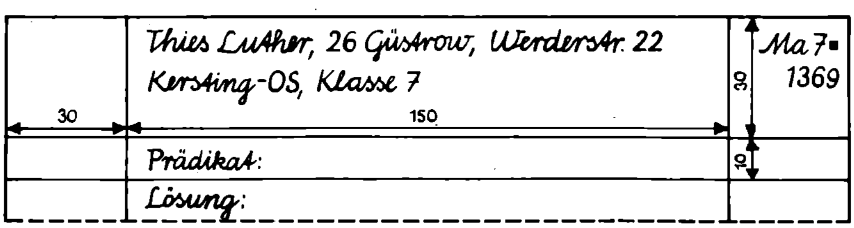
Ma 5 ■1969 Aus 16 Stäbchen von je 1 cm Länge läßt sich ein Quadrat legen, das einen Flächeninhalt von 16 cm^2 besitzt.
Lege genau
a) 6 Stäbchen, b) 7 Stäbchen,
c) 8 Stäbchen
so um, daß du eine Figur erhältst, die jeweils einen Flächeninhalt von 7 cm^2 besitzt! Dabei darf kein Stäbchen übrig bleiben. Fertige für jeden dieser drei Fälle eine Zeichnung an!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1970 In 3 Minuten greifen und befördern 4 Bagger 18 m^3 Erde. Ein Erdarbeiter würde an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m^3 Erde ausheben. Berechne, wieviel Erdarbeiter durch einen einzigen Bagger ersetzt werden können! *StR H.-J. Kerber*

Ma 6 ■1971 Von Rostock-Kapuzenhof aus machen Passagierschiffe Hafenrundfahrten mit Ausflüglern und Touristen. An einer solchen Fahrt nehmen insgesamt 75 Fahrgäste teil, und zwar fünfmal soviel Kinder wie Frauen. Die Anzahl der mitfahrenden Frauen und Kinder ist insgesamt viermal so groß wie die der Männer. Wieviel Kinder, Frauen bzw. Männer nehmen an dieser Hafenrundfahrt teil? *Dipl.-Lehrer D. Völzke, Greifswald*

Ma 6 ■1972 Vier Thälmann-Pioniere haben Altstoffe gesammelt und einen Erlös von insgesamt 80 M gehabt. Erik erreichte mit seinem Sammelergebnis den halben Betrag, den Katja erbrachte. Katja hat für die von ihr abgeführten Altstoffe dreimal soviel Geld wie Hagen erhalten. Jeder der vier Pioniere führte einen vollen Markbetrag ab, der weniger als 35 M betrug. Wieviel Mark entfallen auf Claudia?
Schülerin Kathrin Fessel, Gräfenhainichen

Ma 6 ■1973 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich dem Vierzigfachen ihrer Quersumme sind.
Schüler Dirk Spiernig, Zittau, Kl. 8



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1974 Über wieviel Sitzplätze verfügt ein Autobus, wenn während einer Fahrt der dritte Teil der Anzahl der Plätze mit Kindern besetzt war, sechs Erwachsene mehr als Kinder an der Fahrt teilnahmen und neun Plätze unbesetzt blieben?

Schüler Klaus Mohnke, Lübbenau, Kl. 6

Ma 6 ▪1975 An einer Landstraße liegen in dieser Reihenfolge die Orte A, B, C, D, E und F; dabei ist B von A und E von D jeweils 1 km, C von B und D von C jeweils 2 km entfernt. In jedem der Orte A, B, C, D und E steigt jeweils ein Fahrgast in den gleichen Linienbus zu. Diese zugestiegenen Reisenden steigen alle im Ort F aus dem Bus aus. Die in den Orten A und C zugestiegenen Reisenden hatten zusammen den gleichen Fahrpreis zu entrichten wie insgesamt die übrigen drei zugestiegenen Fahrgäste. Wieviel Fahrgeld muß jeder der fünf zugestiegenen Fahrgäste entrichten, wenn für 1 km Fahrstrecke 10 Pf zu zahlen sind?

Schüler Ralph Kühlberg, Hennigsdorf

Ma 7 ▪1976 Zur Familie Lehmann gehören fünf Personen, und zwar der Vater, die Mutter sowie die Kinder Axel, Bernd und Christine. Addiert man die Zahlen, die das gegenwärtige Lebensalter jeder dieser fünf Personen (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe 71. Die Mutter ist 14mal so alt wie Axel, 7mal so alt wie Bernd, 4mal so alt wie Christine, aber zwei Jahre jünger als der Vater. Wie alt ist gegenwärtig jedes Familienmitglied?

Schüler Martin Jaekel, Jena, Kl. 7

Ma 7 ▪1977 Susanne geht einkaufen. Sie hat genau 22,81 M in der Geldbörse. Dieser Betrag besteht nur aus Münzen. An der Kasse gibt sie davon 6,15 M der Verkäuferin. Welche und wie viele Münzen von jeder Sorte hatte Susanne bei Eintritt in den Laden, wenn es von keiner Sorte mehr als zwei Münzen waren? In der DDR gibt es Münzen im Wert von 20 M, 10 M, 5 M, 2 M, 1 M, 50 Pf, 20 Pf, 10 Pf, 5 Pf und 1 Pf.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ▪1978 Der Erlös eines Betriebes in einem bestimmten Industriezweig beträgt in einem Monat 180000 M (Betriebspreis). Addiert man zum Betriebspreis die Produktions- und Dienstleistungsabgabe, so erhält man den Industrieabgabepreis.
Wieviel Mark Produktions- und Dienstleistungsabgabe muß dieser Betrieb entrichten, wenn in seinem Industriezweig diese Abgabe 10% des Industrieabgabepreises beträgt?
Folgende Abkürzungen sind gebräuchlich:
Betriebspreis: BP
Produktions- und Dienstleistungsabgabe: PDA
Industrieabgabepreis: IAP

Ökonom B. Beckmann, Leipzig

Ma 7 ▪1979 In den beiden Schemata

$$\begin{array}{r} \text{one} \\ +\ \text{one} \\ +\ \text{one} \\ +\ \text{one} \\ \hline \text{four} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{r} \text{four} \\ +\ \text{one} \\ \hline \text{five} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß zwei richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen, d. h., die Belegung der Buchstaben mit Ziffern soll für beide Schemata zugleich gelten. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Nach der sowjetischen Zeitschrift „Quant“

Ma 8 ▪1980 Auf welche Ziffer endet der Wert des Terms

$17^4 + 13^5 - 29^6$?

Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard, Kl. 8

Ma 8 ▪1981 Wieviel Zeit vergeht genau, bis die Zeiger einer Uhr (Stunden- und Minutenzeiger), die sich gerade decken, einen gestreckten Winkel bilden?

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma 8 ▪1982 Es ist zu beweisen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck der Inkreis dieses Dreiecks die Hypotenuse im Berührungspunkt so in zwei Abschnitte teilt, daß deren Produkt den Inhalt der Dreiecksfläche ergibt. *Schülerin Vera Wilhelm, Leipzig, Kl. 8*

Ma 8 ▪1983 Von einem konvexen Viereck $ABCD$ ist folgendes bekannt:
1) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander.
2) Die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ verhalten sich wie 2 : 1.
3) $\overline{AC}$ ist 8 cm lang.
a) Wie heißt ein solches Viereck?
b) Zu berechnen sind die Länge der Seite $\overline{AB}$, der Umfang und der Flächeninhalt von $ABCD$.

Schüler Manfred Petzchi, Wendisch-Rietz, Kl. 8

Ma 9 ▪1984 Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen ist um 38 kleiner als das dreifache Quadrat der um 1 verminderten kleineren Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich?

Aus einem österreichischen Lehrbuch für Schüler

Ma 9 ▪1985 Beim sowjetischen Atomeisbrecher „Arktika“, der als erstes Überwasserschiff den Nordpol bezwang, betragen Länge, Breite und Tiefgang zusammen 181 m. Die Länge des Schiffes beträgt 20 m mehr als die vierfache Breite. Tiefgang und Breite betragen zusammen 41 m. Welchen Tiefgang hat der Atomeisbrecher?

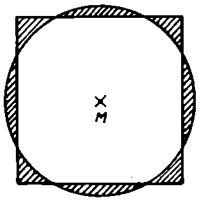
Aus einem sowjetischen Lehrbuch für Schüler

Ma 9 ▪1986 Welches ebene konvexe n-Eck hat 119 Diagonalen?

Schüler Steffen Lausch, Grimma, Kl. 10

Ma 9 ▪1987 Das Bild zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Ein Kreis schneidet das Quadrat in acht Punkten derart, daß sämtliche acht schraffiert dargestellten Flächen den gleichen Inhalt haben. Es ist der Durchmesser dieses Kreises zu berechnen.

Dipl.-Ing.-Päd. W. Gliwa, Staßfurt



Ma 10/12 ▪1988 Es ist zu beweisen, daß der Ausdruck $9^{5u} - 5^{3u}$ für alle natürlichen Zahlen u durch 4 teilbar ist.

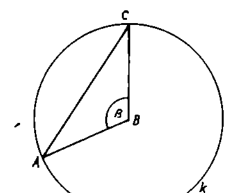
Schülerin Sylvia Döring, Gotha, Kl. 11

Ma 10/12 ▪1989 Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit den Katheten $\overline{CB} = 6$ cm und $\overline{CA} = 8$ cm schneidet $\overline{BC}$ in D. Es ist der Flächeninhalt jedes der Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ADC$ zu berechnen!

Aus einem rumänischen Lehrbuch für Schüler

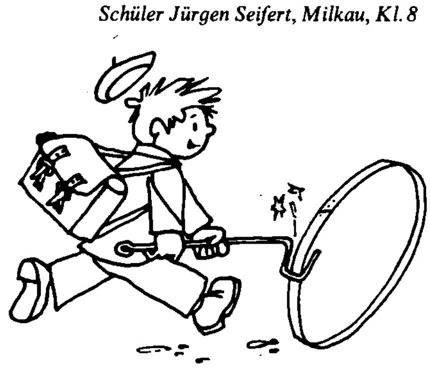
Ma 10/12 ▪1990 Im abgebildeten Dreieck ABC habe der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ eine Größe von 100°. B sei der Mittelpunkt desjenigen Kreises k, der durch A und C geht. Der Kreisbogen kleinerer Länge $\overset{\frown}{AC}$ sei 5 cm lang. Wie oft ist die Dreiecksfläche in der Kreisfläche enthalten?
Skizze nicht maßstäblich!

Schüler Axel Kaminski, Riesa, Kl. 10



Ma 10/12 ▪1991 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit einem Flächeninhalt von $A = 112{,}5\ \text{cm}^2$, einem Umfang von $u = 68$ cm und der Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ von 30°. Es sind die Längen der Seiten $a = c$ und $d = b$ zu berechnen!

Schüler Jürgen Seifert, Milkau, Kl. 8



$u = d \cdot \pi,\ u = d \cdot \pi,\ \ldots,\ A = r^2 \cdot \pi,\ A = r^2 \cdot \pi,\ \ldots$
Endlich eine Methode, nicht mehr zu spät zu kommen. *Wladimir Tilman, Moskau*

Physik

Ph 6 ▪76 An der Wand hängt senkrecht ein ebener Spiegel. In welcher Entfernung vom Erdboden muß sich der unterste Rand des Spiegels höchstens befinden, damit eine davorstehende Person von 1,50 m Größe gerade noch ihre Füße sieht? Führe die entsprechende Konstruktion an einer Zeichnung aus! (Die Stirnhöhe der Person soll unberücksichtigt bleiben.) *B.*

Ph 7 ▪77 In einem normal verschlossenen Einkochglas herrscht im Inneren ein der Außentemperatur entsprechender Innendruck. Bei Zimmertemperatur sind das etwa 0,025 at (rd. 2,5 kPa). Berechne die Kraft in kp, mit der der Deckel auf das Glas gepreßt wird, wenn dessen Durchmesser 10 cm beträgt! Der Luftdruck sei 760 Torr (rd. 10,1 kPa). *B.*

Ph 8 ▪78 Zwischen zwei 6 m voneinander entfernten Punkten einer Starkstromleitung $\left(\text{Kupfer: } \varrho = 0{,}0178\,\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}\right)$ von $70\ \text{mm}^2$ Querschnitt wird eine Spannung von 0,23 V gemessen. Welcher Strom fließt durch die Leitung?

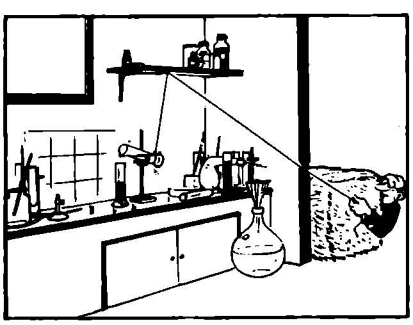
Schüler Frank Endter, Asbach, Kl. 10

Ph 9 ▪79 Auf der Mondoberfläche befinden sich zwei Körper mit der gleichen Masse m. Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich der eine Körper am erdfernsten, der andere Körper am erdnächsten Punkt auf dem Mond. Ermitteln Sie die Differenz der Gewichtskräfte dieser beiden Körper in Abhängigkeit von ihrer Masse! (Die Werte für die physikalischen Größen findet man in „Tabellen und Formeln“.)

Schüler Ingolf Thum, Gößnitz, Kl. 10

Ph 10/12 ▪80 a) Mit welcher Höchstgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ kann man mit einem Solo-Kraftrad eine ebene Straßenkurve von 200 Meter Radius durchfahren, wenn die Masse des Kraftrades einschließlich Besatzung 300 kg beträgt und der Haftreibungskoeffizient zwischen Straße und Bereifung des Kraftrades mit $\mu = 0{,}25$ angesetzt wird?

b) Berechnen Sie den Winkel, den der Motorradfahrer bei der errechneten Geschwindigkeit gegenüber der Senkrechten zur Straße einnimmt! *Ing. A. Körner, Leipzig*



Chemie

Ch 7 ▪61 Wieviel Gramm Magnesium sind notwendig, um aus 50 g Wasser den Wasserstoff vollständig auszutreiben? Um vollständige Reaktion zu gewährleisten, soll Magnesium in 10%igem Überschuß angewendet werden.

Ch 8 ▪62 Zu 840 kg Kalziumkarbonat, welches einen Reinheitsgrad von 90% besitzt, soll Sand gegeben werden. Wieviel Kilogramm Sand sind erforderlich, damit eine Konzentration von 40% erreicht wird?

Ch 9 ▪63 Wie groß ist die tatsächliche Ausbeute an Äthansäureäthylester in Prozenten, wenn aus 12,2 g Äthansäure 16,4 g Äthansäureäthylester erhalten wurden?

Ch 10/12 ▪64 2,52 g eines Salzgemisches aus Kaliumchlorid und Kaliumbromid wurden mit konzentrierter Schwefelsäure versetzt. Die ausgewogene Menge Kaliumsulfat betrug 2,29 g. Wieviel Prozent Kaliumchlorid und Kaliumbromid sind in dem Salzgemisch enthalten?

VII. Physikwettbewerb in Güstrow

An diesem Wettbewerb beteiligten sich 21 Schüler der Klassen 10 bis 12. Sie waren bei den Auswahlklausuren im November 1978 als beste hervorgegangen. Während des Wettbewerbs mußten sie ihr Können unter Beweis stellen. Bei den 4 theoretischen Aufgaben konnten sie je 10 und bei der experimentellen Aufgabe 20 Punkte, insgesamt also 60 Punkte, erreichen.

1. Preis: Jürgen Gräfenstein, Kl. 10, EOS *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Michael Heinrich, Kl. 12, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin

2. Preis: Hartmut Schäfer, Kl. 12, EOS *Walter Ulbricht*, Halle

3. Preis: Harmut Mix, Kl. 12, EOS *Friedrich Engels*, Dresden; Frank Marlow und Lutz Werner, beide Kl. 12, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Andreas Chrobok und Arnd Leike, beide Kl. 12, EOS *Martin Luther*, Halle; Ingo Stiebritz, Kl. 12, EOS *Carl Zeiss* Jena; Wolfgang Kühn, Kl. 12, EOS *RFT* Leipzig.

B. Träger/U. Walta

Aufgaben (Theoretische Klausur):

1. Bekanntlich liegen Kosmonauten beim beschleunigten Aufstieg auf dem Rücken, um die auftretenden Belastungen gleichmäßig auf den Körper zu verteilen.
In der Absicht, die Druckkräfte auf die gesamte Körperoberfläche zu verteilen, wird ein Vorschlag zum Patent angemeldet. Darin ist vorgesehen, die Kosmonauten während der Beschleunigungsphase in einer Flüssigkeit schweben zu lassen.
Diskutieren Sie diesen Vorschlag auf seine Brauchbarkeit!

2. Vom Grund eines Sees steigt eine Gasblase allmählich nach oben und erreicht schließlich die Oberfläche.
a) Berechne die Beschleunigung, mit der die Loslösung vom Boden erfolgt!
b) Berechne die (konstante) Geschwindigkeit, die sich praktisch sofort nach der Loslösung einstellt!
c) Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche wie die Geschwindigkeit am Grund?
Hinweis: Kugelförmige Teilchen unterliegen nach *Stokes* bei langsamer Bewegung in einem Medium einer Reibungskraft $F_r = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ (r Radius, v Geschwindigkeit, η Zähigkeit, eine für das Medium charakteristische Konstante).
Zahlenwerte:
am Grund: $T_1 = 4\,°\text{C}$,
$\eta_1 = 1{,}79 \cdot 10^{-3}\ \text{kg s}^{-1}\text{m}^{-1}$, $r = 100\ \mu\text{m}$
an der Oberfläche: $T_2 = 20\,°\text{C}$,
$\eta_2 = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{kg s}^{-1}\text{m}^{-1}$,
Dichte des Gases: $\varrho_{Gas} = 1{,}3\ \text{kg m}^{-3}$ bei 0 °C und 10^5 Pa Luftdruck
Luftdruck: $P_0 = 10^5$ Pa
Seetiefe: $h = 100$ m.

3. Bei einem Experiment soll durch ein Gerät ein konstanter Strom der Stärke $I = 1{,}1$ A fließen. Dazu muß eine konstante Spannung $U = 55$ V anliegen. Als Spannungsquelle dient eine Steckdose, an der die Spannung U_x um 220 V schwankt. Die Gerätspannung soll mit einem Widerstand mit verstellbarem Mittelabgriff (Potentiometer) geregelt werden, dessen Kenndaten 620 Ω, 350 W betragen.
Geben Sie eine Schaltung an, bei der der Widerstand nicht überlastet wird. Zwischen welchen Werten darf dabei die Netzspannung U_x schwanken?

4. Eine dünne Bikonvexlinse ist so aufgestellt, daß sie von einer im Punkt A befindlichen punktförmigen Lichtquelle ein reelles Bild in A' erzeugt. Verschiebt man die Lichtquelle nach B, dann entsteht ihr reelles Bild in B'.
A, B', A', B sind Eckpunkte eines konvexen ebenen Vierecks mit den Seitenlängen $AB' = 90$ cm, $B'A' = 40$ cm, $A'B = 40$ cm, $BA = 65$ cm und der Diagonalenlänge $AA' = 85$ cm.

Fortsetzung auf S. 47

Gute Grundkenntnisse gefragt

Rationell oder unrationell wiederholen – das ist die Frage!

Ein noch so gutes Gedächtnis ist nicht soviel wert wie blasse Tinte.
Altchinesisches Sprichwort

Wie die meisten Sprichwörter enthält auch das oben zitierte chinesische sicherlich eine wichtige Teilwahrheit. Auf das, was man aufgeschrieben hat (selbst wenn es in blasser Tinte ist), kann man immer zurückgreifen, auch dann, wenn man es nicht mehr im Gedächtnis hat. Doch in unserer alltäglichen Denkpraxis können und sollten wir uns nicht alles aufschreiben. Der enorme Wert des Gedächtnisses besteht gerade darin, daß wir eine große Menge von Informationen kurz- oder langfristig im Gedächtnis aufbewahren und, wenn erforderlich, aus unserem Gedächtnis reproduzieren können, ohne auf solche Mittel wie ein Notizbuch ständig angewiesen zu sein. Doch die Voraussetzung für diese hervorragenden Fähigkeiten des Gedächtnisses ist, daß die aufgenommenen Informationen nicht nur festgehalten (eingeprägt), sondern verfestigt werden, um auf diese Weise dauerhaft im Gedächtnis aufbewahrt zu werden. Die wichtigste Form der Verfestigung von Informationen ist euch zweifellos sehr wohl bekannt:
das Wiederholen der eingeprägten Information. Aber zwischen der spontanen Durchführung des Wiederholens und einem auf rationellen Prinzipien fundierten Wiederholen bestehen sehr große Unterschiede. Man kann z. B., wenn man unrationell herangeht, mit sehr vielen Wiederholungen lediglich eine oberflächliche Verfestigung erreichen, andererseits durch eine rationelle Wiederholungsmethode mit relativ wenigen Wiederholungen eine intensive Verfestigung und eine hohe Gedächtnisleistung erzielen. Die Frage ist also: Wie kann man möglichst rationell die Wiederholungen eingeprägter Informationen durchführen? Das soll in Heft 3/80 erläutert werden.

F. Loeser, aus: Gedächtnistraining, Urania-Verlag Leipzig

Übungsaufgaben aus den Klassen 2 bis 4

▲1▲ Bestimme x!
$x+18=20$; $9-x<4$; $x-7>2$; $x+x=360$

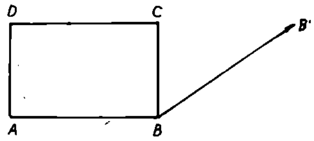
▲2▲

a	b	$a \cdot b$	$a:b$
150	3		
180			9
75		0	
	5		60

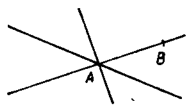
▲3▲ Rechne um!
500 kg = t; 19 kg = g;
360 s = min; 5 km = m;
20 dt = t; 12 cm² = mm²;
35 cm² 5 mm² = mm²;
15 g = mg

▲4▲ Wahr oder falsch?
$27+14=39+4$; $13\cdot 5-5<11\cdot 4-15$;
$6\cdot 7+9\cdot 3>128:4+3\cdot 9$;
$9\cdot 8+7=7+9\cdot 8$

▲5▲ Gib auf jeden Strahl Punkte an, die von A genauso weit entfernt sind wie B von A!



▲6▲ Verschiebe!



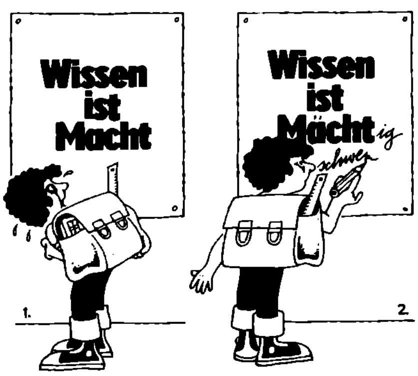
▲7▲ Rechne!
$3200:8$; $7200:6$; $15624:4$;
$96-4\cdot 9+40$; $72:8+91-100$;
$92736:3$; $276488:5$;
$2\cdot 9\cdot 5\cdot 2$; $8\cdot 9+7\cdot 6$;
$12\cdot 3+7$; $12(3+7)$; $12+3\cdot 7$

▲8▲ Ordne nach der Größe!
62705; 499; 7810; 50; 401; 100000; 73427; 99999; 7809; 100001; 49; 62704.

▲9▲ Runde auf Vielfache von 10!
17; 35; 45; 2956; 750; 8517; 24279

▲10▲ Setze die richtigen Zeichen (<, >, =)!

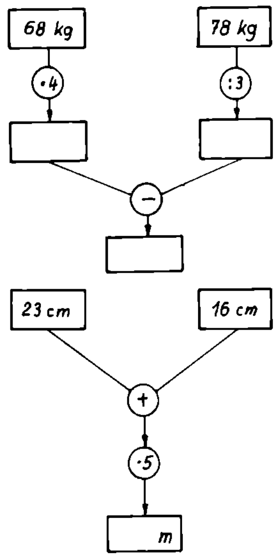
28 □ 15 + 13
63 − 20 □ 63 − 30
7 + 8 − 5 □ 7 + (8 · 5)
8 + 8 + 8 + 8 □ 8 · 5



▲11▲ Für welche Zahlen x gelten die folgenden Ungleichungen?
$4898<x<4901$ $x=\{\quad\}$
$7002>x>6997$ $x=\{\quad\}$

▲12▲
10 : 2 + □ = 9
\+ + + +
14 : 2 − □ = 3
\+ + + +
□□ − □ − 2 = 7
36 − 7 − □□ = □□

▲13▲ Vervollständige die beiden Bäume!



▲14▲ Ersetze die Buchstaben durch Ziffern, so daß eine richtige Additionsaufgabe entsteht! Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.

ABC
\+ CC
AAB

Mathematischer Begriff gesucht

Aus jedem der folgenden Wörter entnehme man genau einen Buchstaben so, daß der Rest (unter Beibehaltung der Reihenfolge) ein Wort ergibt, das im Mathematikunterricht vorkommt. Die entnommenen Buchstaben ergeben aneinandergereiht einen Begriff, der angibt, wie eine Lösung nach Möglichkeit erfolgen soll.
BORGEN, BRAUCH, STUMME, BEITRAG, OMEGA, TANG, ZEHEN, HÜHLE, LACHSE (Lösung siehe S. 48)

Zu Ehren des 100. Geburtstages von Albert Einstein wurde 1979 eine 5-Mark-Münze in der DDR herausgegeben (siehe stilisiertes Bild). Legierung: Neusilber; Durchmesser 29 mm; Gewicht: 12,2 g

Wir bauen eine Sonnenuhr

Nach der Lage des Zifferblattes unterscheidet man verschiedene Formen von Sonnenuhren. Wir erläutern als erstes den Bau einer Äquatorialsonnenuhr. Sie besitzt ein besonders einfaches Zifferblatt. Es ist regelmäßig geteilt und liegt parallel zur Ebene des Erdäquators. Der Schattenwerfer steht senkrecht auf der Ebene des Zifferblattes. Den Aufbau einer Äquatorialsonnenuhr zeigt das folgende Bild (Bild 1).

Bei der Anfertigung der Einzelteile unserer Sonnenuhr ist folgendes zu beachten:

Das Zifferblatt *DEFG* fertigen wir aus einem quadratischen Stück Pappe an. Wir zeichnen um den Mittelpunkt *M* auf der Vorderseite und auch auf der Rückseite der Pappe einen Kreis, der alle vier Quadratseiten berührt. Diesen Kreis teilen wir bei Punkt *B* beginnend in 24 gleiche Teile durch Antragen von Winkeln von jeweils 15° mit dem Scheitelpunkt *M*. Wir versehen unser Zifferblatt auf der Vorderseite und auch auf der Rückseite mit einer Stundeneinteilung (Bild 2).

Damit wir unser Zifferblatt parallel zur Äquatorebene aufstellen können, müssen wir für das Stützdreieck $\triangle ABC$ den richtigen Winkel α wählen. Aus der folgenden Abbildung erkennen wir, daß dieser Winkel α gleich der geographischen Breite ϕ des Aufstellungsortes A unserer Sonnenuhr sein muß, also $\alpha=\phi$ (Bild 3).

Beweis: Wir setzen voraus, bei der Äquatorialsonnenuhr soll die Zifferblattebene parallel zur Äquatorebene liegen. In der Zeichnung sind also die Geraden RQ und BM parallel. Der Winkel $\sphericalangle RQA$ im rechtwinkligen Dreieck $\triangle RQA$ beträgt $90°-\phi$, und der Winkel $\sphericalangle MBA$ im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AMB$ beträgt $90°-\alpha$. Außerdem sind diese beiden Winkel Wechselwinkel an den Parallelen RQ und BM. Folglich sind die Winkel kongruent,

$\sphericalangle RQA \cong \sphericalangle MBA$, und aus $90° - \phi = 90° - \alpha$ folgt $\phi=\alpha$.

Zur Konstruktion des Stützdreiecks entnehmen wir einem Atlas die geographische Breite des Aufstellungsortes unserer Sonnenuhr. Sie liegt in der DDR zwischen 54°41′ (Gellort nördlich Kap Arkona) und 50°10′ (Zollhaus Schönberg im Vogtland). Die Größe des rechtwinkligen Stützdreiecks ergibt sich aus der Länge der Strecke $\overline{BM}$, also aus der halben Seitenlänge des quadratischen Zifferblattes. Wir konstruieren das Stützdreieck $\triangle ABC$ aus folgenden Stücken $\sphericalangle BAC=\phi$, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{DE}$ und $\sphericalangle ABC=90°$ (Bild 4).

Um das Stützdreieck in das Zifferblatt einfügen zu können, schneiden wir sowohl das Zifferblatt als auch das Stützdreieck bis zur Hälfte entlang der Strecke *BM* ein. Danach fügen wir das Zifferblatt und das Stützdreieck zusammen und kleben beides auf einer rechteckigen Grundplatte fest. Damit ist unsere Äquatorialsonnenuhr fertiggestellt.

Die Sonnenuhr ist jetzt genau in Nord-Süd-Richtung aufzustellen, die Grundplatte muß waagerecht liegen. Die Kante $\overline{AC}$ des Stützdreiecks erzeugt auf dem Zifferblatt den Schatten, der uns die Zeit angibt. Im Sommerhalbjahr vom 22. März bis 22. September steht die Sonne oberhalb der Äquatorebene, der Schatten fällt auf die Oberseite des Zifferblattes. Dagegen scheint die Sonne im Winterhalbjahr vom 24. September bis 20. März auf die Unterseite des Zifferblattes und erzeugt hier den entsprechenden Schatten. Am 21. März und am 23. September ist unsere Sonnenuhr nicht brauchbar, da die Sonne in der Äquatorebene steht und kein Schatten auf das Zifferblatt fällt.

Dieser Nachteil tritt bei der Horizontalsonnenuhr nicht auf. Im Unterschied zur Äquatorialsonnenuhr liegt bei der Horizontalsonnenuhr das Zifferblatt waagerecht. Die Lage des Schattenwerfers und auch die Teilung des Zifferblattes hängen von der geographischen Breite des Aufstellungsortes dieser Sonnenuhr ab (Bild 5).

Zum Bau einer Horizontalsonnenuhr behalten wir das Stützdreieck der Äquatorialsonnenuhr bei und versehen die Grundplatte mit einer Stundeneinteilung. Dazu tragen wir von der Strecke $\overline{AB}$ aus nach beiden Seiten jeweils folgende Winkel ab (Tabelle).

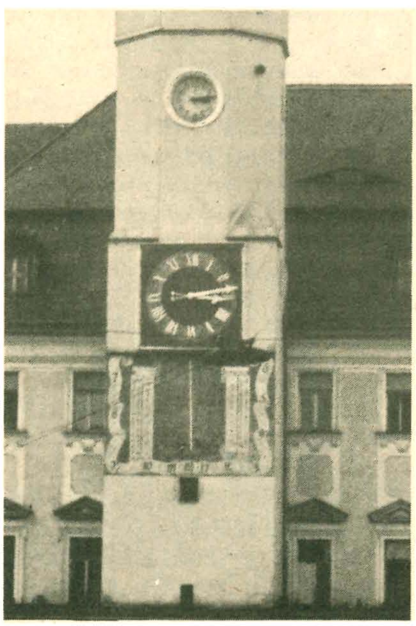
Diese Übersicht zeigt, daß sich die Stundenteilungen für die möglichen Werte der geographischen Breite in unserer Republik nur wenig unterscheiden und beim Zeichnen kaum von Bedeutung sind. Erst wenn eine sehr große Sonnenuhr gebaut werden soll, spielen diese Abweichungen eine Rolle und das Zifferblatt ist genau zu berechnen. Hinweise für die Berechnungen von Sonnenuhren finden wir in dem Buch von K. G. Steinert: „Sphärische Trigonometrie", Leipzig 1977.

Nachdem wir eine der beschriebenen Sonnenuhren sorgfältig gebaut und exakt aufgestellt haben, werden wir Abweichungen zwischen der Zeitangabe unserer Sonnenuhr und einer nach dem Zeitzeichen gestellten, genau gehenden Armbanduhr feststellen.

Worauf sind diese Abweichungen zurückzuführen?

Unsere Sonnenuhr zeigt wahre Sonnenzeit an, die aus der scheinbaren Bewegung der Sonne resultiert. Die scheinbare Sonnenbewegung erfolgt aber nicht gleichmäßig. Man führt deshalb eine mittlere Sonnenzeit ein, die man sich genau gleichförmig ablaufend denkt. Die Differenz von mittlerer Sonnenzeit und wahrer Sonnenzeit bezeichnet man als Zeitgleichung. Im Laufe eines Jahres nimmt die

Unser Foto zeigt die Sonnenuhr vom Rathaus von Bautzen.



	Stundeneinteilung auf der Horizontalsonnenuhr								
	12.00	11.00 13.00	10.00 14.00	9.00 15.00	8.00 16.00	7.00 17.00	6.00 18.00	5.00 19.00	4.00 20.00
Winkel β für $\phi=54°41'$, Norden der DDR	0°	12,3°	25,2°	39,2°	54,7°	71,8°	90°	108,2°	125,3°
Winkel β für $\phi=52°30'$, z. B. Berlin	0°	12,0°	24,6°	38,4°	54,0°	71,3°	90°	108,7°	126,0°
Winkel β für $\phi=50°10'$, Süden der DDR	0°	11,6°	23,9°	37,5°	53,1°	70,8°	90°	109,2°	126,9°

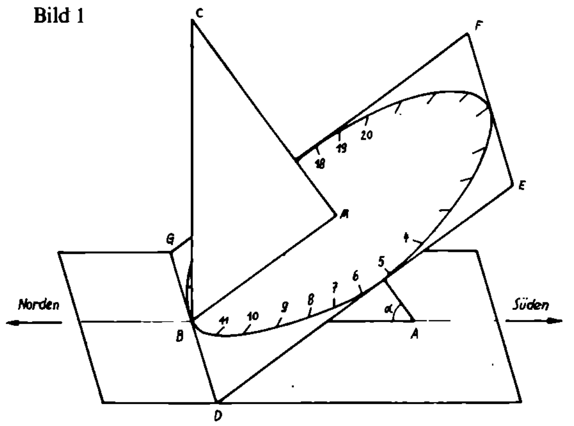
Zeitgleichung ungefähr folgende Werte an (Bild 6):
Aus der wahren Sonnenzeit, die wir an unserer Sonnenuhr ablesen, erhalten wir mittlere Sonnenzeit, indem wir zur wahren Sonnenzeit den durch die Zeitgleichung für das jeweilige Datum gegebenen Korrekturwert addieren.
Auch nach dieser Korrektur können noch Abweichungen zwischen der mittleren Sonnenzeit und unserer Mitteleuropäischen Zeit auftreten. Die mit Hilfe unserer Sonnenuhr und durch Korrektur mit Hilfe der Zeitgleichungskurve bestimmte mittlere Sonnenzeit ist die mittlere Ortszeit für den Aufstellungsort unserer Sonnenuhr. In Orten mit verschiedener geographischer Länge liefern Sonnenuhren verschiedene Ortszeiten. Für den praktischen Gebrauch sind Ortszeiten ungünstig. Man hat deshalb auf der Erde größere Gebiete zu Zeitzonen zusammengefaßt und eine Einheitszeit festgelegt. In der DDR benutzen wir Mitteleuropäische Zeit (MEZ). Hierbei geht man vom 15. Längenkreis östlicher Länge aus, der durch Görlitz verläuft. Die mittlere Ortszeit von Görlitz ist gleich der MEZ. Für weiter westlich liegende Orte in unserer Republik mit der geographischen Länge λ tritt eine positive Zeitdifferenz zwischen MEZ und Ortszeit auf. Einem Längenunterschied $\Delta\lambda$ von 15° entspricht 1 Stunde, 1° entsprechen 4 Minuten. Wir entnehmen einem Atlas die geographische Länge λ des Aufstellungsortes unserer Sonnenuhr. Sie liegt in der DDR zwischen 9° 54′ (Breiter Berg westlich Geismar in der Rhön) und 15° 02′ (Neiße bei Deska nördlich Görlitz). Aus der Längendifferenz $\Delta\lambda = 15° - \lambda$ berechnen wir die Zeitdifferenz $\Delta t = \frac{4\,\text{Min.}(15 - \lambda)}{1°}$.
Zur mittleren Ortszeit müssen wir die errechnete Zeitdifferenz addieren, um MEZ zu erhalten.

Beispiel: Wir nehmen an: Unsere Sonnenuhr steht in Schwerin $\lambda = 11{,}4°$, und wir lesen am 6. August auf dem Zifferblatt der Sonnenuhr eine wahre Sonnenzeit von $13^h 30^{min}$ ab. Wie groß ist die zugehörige MEZ?
Der Zeitgleichungskurve entnehmen wir für den 6. August ungefähr +6 Min. Die mittlere Sonnenzeit beträgt also $13^h 30^{min} + 6$ Min. $= 13^h 36^{min}$. Der Längendifferenz von $\Delta\lambda = 15° - 11{,}4° = 3{,}6°$ entspricht die Zeitdifferenz von $\Delta t \approx 14$ Min. Als MEZ erhalten wir dann $13^h 36^{min} + 14$ Min. $= 13^h 50^{min}$.

U. Sonnemann

Für alle Leser, die sich noch ausführlicher mit Fragen der Zeitmessung und mit Sonnenuhren befassen möchten, empfehlen wir folgende Literatur:
Klaus Lindner: „Astronomie selbst erlebt", Leipzig, Jena, Berlin 1973; Paul Ahnert: „Kalender für Sternfreunde 1980", Leipzig 1979

Bild 1



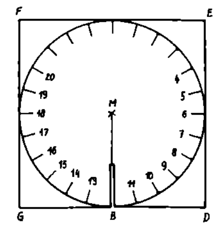


Bild 2

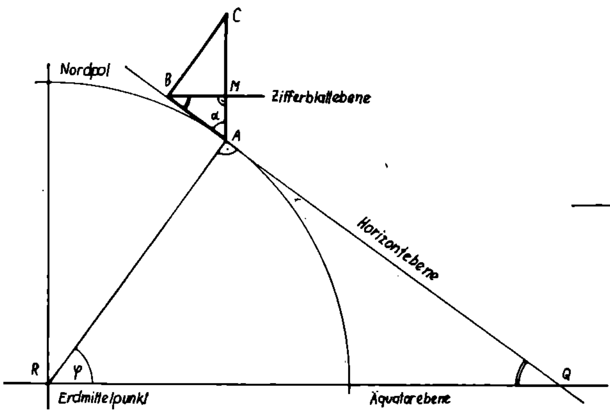


Bild 3

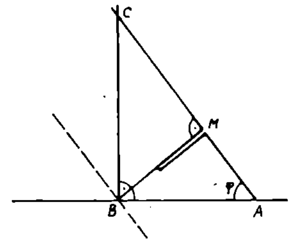


Bild 4

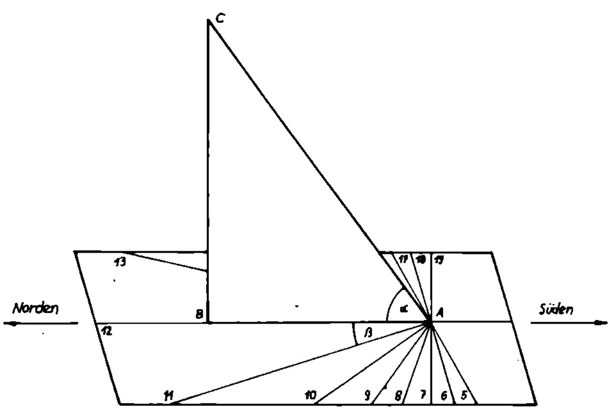


Bild 5

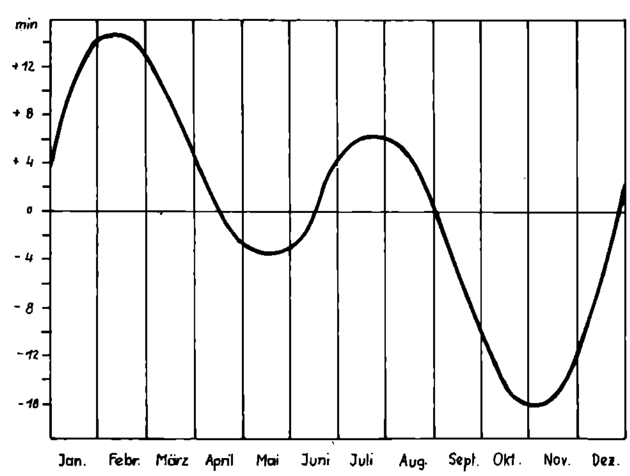


Bild 6

In freien Stunden · alpha-heiter

Geheimnisvolle Gravierung

Auf einer alten Dose, die einst einem Seemann gehört hat, findet sich folgende Gravierung:

4	11 –	12	4	23	2
5	9 –	13	3 – – –	26	1 – – –
6	7 – – –	14	3 – –	31	1 – –
7	6 – – –	15	3 –	37	1 –
8	6	16	3	45	1
9	5 –	17	2 – – –	65	– – –
10	4 – – –	19	2 – –	100	– –
11	4 –	21	2 –	200	–

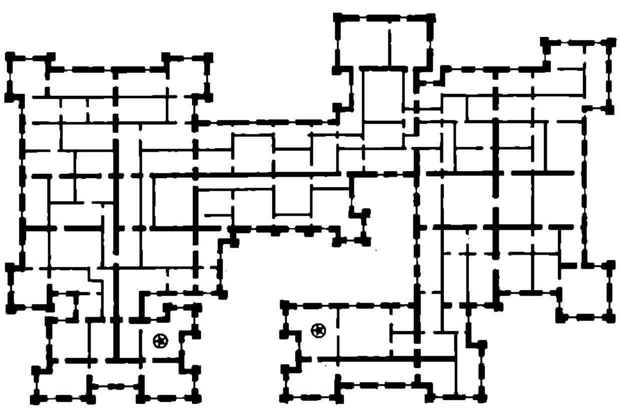
Gesucht wird eine Deutung dieser Gravur, die mit der Zeitmessung in Verbindung zu bringen ist.

Mitgeteilt von Prof. Dr. K.-R. Biermann, Humboldt-Universität zu Berlin

Sternwanderung

Gehe von einem Zimmer mit Stern aus, und suche den Weg zum anderen Zimmer mit Stern!

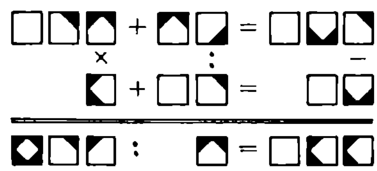
Aus: Füles, Budapest



Nur vier Stotinki gespart

Ein Gabrovoer besuchte seinen Sohn, der Schüler in Sofia war. Der Sohn erzählte voller Stolz: „Vater, heute habe ich vier Stotinki gespart, ich bin den ganzen Schulweg hinter der Straßenbahn hergelaufen!" „Dummkopf!" schalt der Vater. „Wärst du hinter einer Taxe hergelaufen, hättest du das Zehnfache gespart!"

Kryptarithmetik



Aus: Mathematika 4/79, Sofia

Abbildung von M_1 in M_2

Gegeben sind die Mengen
$M_1 = \{P, O, T, E, N, Z, I, \pi\}$ und
$M_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sowie
das Gleichungssystem

$$PI^P - P = \pi$$
$$PI^O - P = \pi\pi$$
$$PI^T - P = \pi\pi\pi$$
$$PI^E - P = \pi\pi\pi\pi$$
$$PI^N - P = \pi\pi\pi\pi\pi$$
$$PI^Z - P = \pi\pi\pi\pi\pi\pi.$$

Bilde die Menge M_1 so in die Menge M_2 ab, daß sämtliche Gleichungen zu wahren Aussagen werden!

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Magische Figuren

Bild 1: Anstelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 10 so einzusetzen, daß die Summe am Umfang jedes Quadrats und jedes Dreiecks stets 24 (oder 26) beträgt.

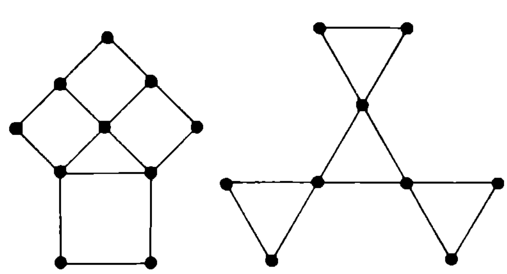


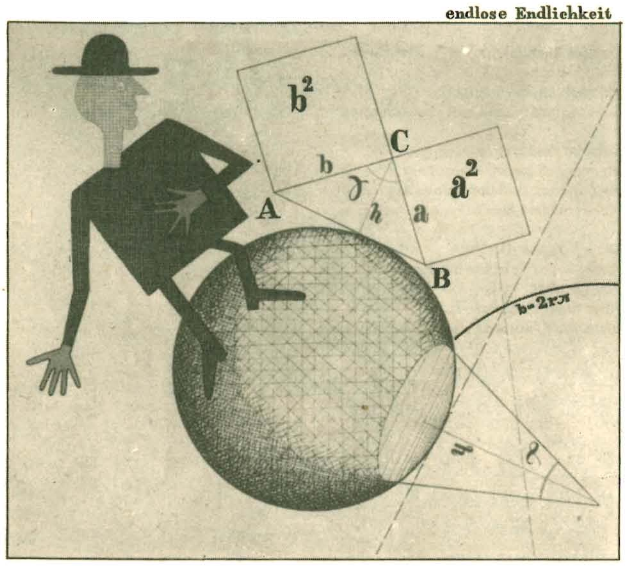
Bild 2: Anstelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 9 so zu ergänzen, daß die Summe am Umfang jedes Dreiecks immer die gleiche wird. Wer findet die drei Möglichkeiten?

Ing. J. Pěnčik, Praha

Zwil

In einer Ebene lebte einmal
ein Wesen, das war zweidimensional
und hieß Zwil. Und hat schon in jungen Jahren
einst den zwielichtigen Lehrsatz erfahren:
„Unsere Ebenen sind endlich. Unendlich das All.
Und dieser Satz gilt in jedem Fall.“

Doch Zwil hat dann Geometrie getrieben,
Dinge durchdacht und aufgeschrieben,
vieles mit Sorgfalt gewägt und erwogen –
und ist dann auf eine Kugel gezogen.
Die schien ihm nämlich unendlich weit
in ihrer endlichen Endlichkeit.



Aus: Was sieht die Ringeltaube? Der Kinderbuchverlag, Gedicht von John Erpenbeck, Vignette von Hans Ticha

Diagonale gesucht

Bei richtigem Einsetzen ergibt die Hauptdiagonale den Namen des Entdeckers der binomischen Reihe.

1					
2					
3					
4					
5					
6					

1. Teil eines Bruches, 2. Flächenmaß, 3. existiert für jeden Satz, 4. Teil der Körperoberfläche, 5. Begründer der Mengenlehre, 6. deutscher Mathematiker (1577 bis 1643)

Diplomlehrer D. Völzke, Greifswald

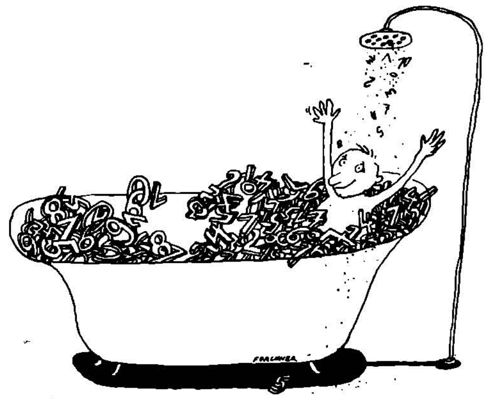
Geometrische Figur gesucht

Ordne die folgenden Wörter so, als handele es sich um Zahlen, der Größe nach (mit der „größten“ beginnend)! Dabei ist jeder Buchstabe als Ziffer aufzufassen, und im übrigen gelte entsprechend dem Alphabet $a > b > c$ usw.

Archimedes, Leibniz, Alpha, Omikron, Meile, Lichtjahr, Meter, Gerade, Ankathete, Radius, Ellipse, Parabeläste, Radizieren, Lochkarte

Die Anfangsbuchstaben ergeben, fortlaufend gelesen, eine geometrische Figur.

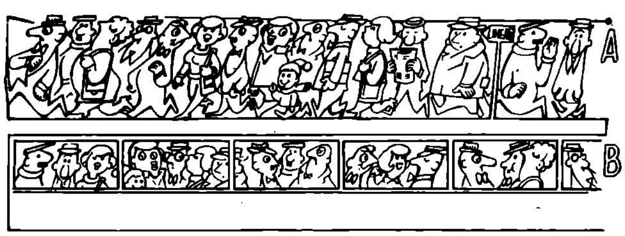
OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

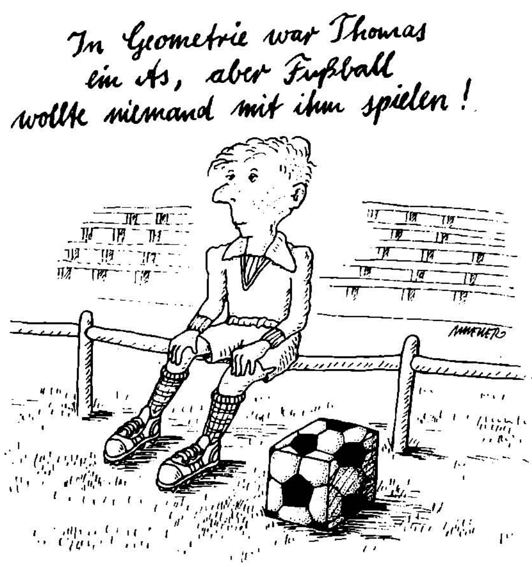


Beobachtungstest

Die Leute auf dem Bild A warten auf die S-Bahn. Einer von ihnen konnte aber nicht mehr in die mit drei Fahrgästen ankommende Bahn einsteigen. Welcher Fahrgast ist zurückgeblieben, und welche befanden sich bereits in der Bahn?

Aus: Füles 4/1979, Budapest





Aus der Praxis für die Praxis

Ausgewählte Aufgabenbeispiele aus den „Mathematischen Blättern" des Bezirks Neubrandenburg

Viel Freude und Erfolg beim Wiederholen von Grundkenntnissen durch das Lösen dieser Probleme aus der Praxis!

▲1▲ (Kreis Altentreptow) Bei der Zuckergewinnung rechnet man etwa 12 kg Zucker aus 1 dt Zuckerrüben. Von einem Hektar wurden 250 dt Rüben geerntet.
Wieviel Tüten Weißzucker (Inhalt 1000 g) können daraus hergestellt werden?

▲2▲ (Kreis Anklam) Untenstehende Tabelle gibt die Hebelübersetzung der ELW 200 (Eisenlaufgewichtswaage) bei 190 kp Belastung an.
Berechne das Laufgewicht F_L ($F_{23} = F_L$) und die Gesamtübersetzung $F^B : F_L$!

$F^B = F_{11}$	L_{11}	F_{21}	L_{21}
190 kp	80 mm	?	590 mm
F_{12}	L_{12}	F_{22}	L_{22}
F_{21}	108 mm	?	253 mm
F_{13}	L_{13}	$F_{23} = F_L$	L_{23}
F_{22}	32 mm	?	190 mm

▲3▲ (Kreis Demmin) Im VEB Stärkefabrik Loitz wurden aus 60000 t Rohmaterial etwa 8000 t reine Stärke und 12000 t Pulpe für Viehfutter erzeugt. Das Rohmaterial darf nach TGL bis 15% Schmutzanteile besitzen. Wieviel Tonnen sind dies jährlich? Was würde eine Senkung der Schmutzanteile um 5% bedeuten?

▲4▲ (Kreis Malchin) Bei der produktiven Arbeit werden durch je 4 Schüler jährlich 1250 Kanalabdeckplatten produziert und damit ein Wert von 23000 M geschaffen. Je Platte werden 10,25 m Rundstahl (Ø 6,5 mm) verbraucht.
Wieviel Tonnen Stahl werden jährlich benötigt?

▲5▲ (Neubrandenburg) Die 1500 Werktätigen des VEB Reifenwerk Neubrandenburg sollten nach der Planvorgabe im Jahr 1979 eine Bruttoproduktion von 460 Mio Mark erwirtschaften.
Welchen Produktionswert erarbeitete danach durchschnittlich jeder Werktätige dieses Betriebes im Jahr 1979?

▲6▲ (Kreis Neubrandenburg) Die Tagesproduktion der ZBE Frischeierproduktion Bresewitz liegt bei 175000 Stück.
a) Wie lang wäre die „Eierschlange" von einer Tagesproduktion? 1 Ei etwa 5,8 cm.
b) Wann wären 175000 Eier verbraucht, wenn jeder Schüler einer Klasse von 24 Schülern täglich ein Ei essen würde?

▲7▲ (Kreis Neustrelitz) Die Arbeitsproduktivität (AP*) stieg in der Schiffswerft Rechlin von 1975 bis 1978 um 16,5 TM, dabei allein von 1977 bis 1978 um 7,5 TM und erreichte 1978 63,5 TM. Wie hoch war 1975, 1976 und 1977 die AP, wenn sie von 1975 bis 1976 doppelt so stark anstieg wie von 1976 bis 1977?

*Definition der Arbeitsproduktivität je Beschäftigten: Es sei
AP die Arbeitsproduktivität
IWP die industrielle Warenproduktion (in M)
B die Anzahl der Beschäftigten,
so gelte $AP = \frac{IWP}{B}$ (in M).

▲8▲ (Kreis Pasewalk) Eine viereckige Wiese ($ABCD$) ist bei A rechtwinklig. Es wurde gemessen: $\overline{AB} = 450$ m, $\overline{BC} = 220$ m, $\overline{CD} = 650$ m, $\overline{DA} = 380$ m.
Berechne den Umfang! Konstruiere das Viereck im geeigneten Maßstab! Berechne die Fläche, indem du dazu notwendige Stücke durch Messung bestimmst!

▲9▲ (Kreis Prenzlau) Von 20757 Berufstätigen sind beschäftigt: In der Landwirtschaft 33,4%, Industrie 19,8%, Bauwesen 8,6%, Handel 10,2%, nichtproduzierende Bereiche 28%.
a) Berechne, wie viele Beschäftigte das jeweils sind!
b) Stelle die einzelnen Bereiche in einem Kreisdiagramm dar!

▲10▲ (Kreis Röbel) In der LPG (P) Satow-Kogel werden von 2300 ha Acker 1500 ha künstlich beregnet. Der Druck in den Wasserrohren für die Felder, die 20 m über der Pumpstation liegen, beträgt etwa 6 at.
Wie hoch muß der Druck in der Pumpstation mindestens sein?

▲11▲ (Kreis Strasburg) Eine Mähdrescherkolonne benötigt für die rund 90 km lange Strecke von Teterow nach Oertzenhof etwa 5 Stunden.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr die Kolonne?

▲12▲ (Kreis Templin) Warthe liegt rund 11 km (Luftlinie) nördlich von Templin und Lychen westlich von Warthe und 50° nordwestlich von Templin.
a) Welche Entfernung (Luftlinie) hat Lychen von Templin?
b) Prüfe die Rechnung durch eine Konstruktion!

▲13▲ (Kreis Teterow) In der KAP Niendorf erreichte 1978 jeder Mähdrescher E 512 eine durchschnittliche Leistung von 244 ha.
a) Es wurden 4148 ha Getreide bestellt. Wieviel E 512 waren es?
b) Wieviel Hänger (Ladung 5 t) können mit Getreide beladen werden, wenn rund 40 dt/ha geerntet wurden?

▲14▲ (Kreis Ueckermünde) Bestimme die Anzahl der Berufstätigen in der Land- und Forstwirtschaft aus folgenden Angaben:
Beschäftigte
im Bauwesen und in der Industrie 7300,
in der Industrie und in der L.-u.-F.-W. 8500,
im Bauwesen und in der L.-u.-F.-W. 4800.

▲15▲ (Kreis Waren) Im Dieselmotorenwerk hat der größte gegossene Schiffspropeller einen Durchmesser von 6,3 m und eine Masse von 32 t. Der Guß ist eine Legierung aus etwa 8% Zn, 5,5% Al, 10,5% Mn, 2% Fe, 3,2% Ni, Rest Cu.
Wieviel Prozent Kupfer und wieviel Tonnen Kupfer enthält diese Schraube? Wie groß ist ihr Volumen, wenn die Dichte etwa $7{,}6 \frac{g}{cm^3}$ beträgt?

In eigener Sache

Im Namen des Redaktionskollegiums sagt der Chefredakteur der *alpha* (Bild Mitte) herzlichen Dank für die 13jährige unermüdliche Arbeit als Gutachter unserer Zeitschrift:
Herrn Nationalpreisträger *Herbert Kästner* (links) und Herrn Dozent Dr. *Reinhard Hofmann*, beide Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig.

Lösungen

Lösung zu: Mathematischer Begriff gesucht, S. 37

Bogen, Bruch, Summe, Betrag, Mega, Tag, Zehn, Höhe, Achse; *rationell.* (Autor: OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin)

Lösungen zu alpha-heiter, S. 40/41

Geheimnisvolle Gravierung

Seit der Zeit, in der man auf See Sanduhren zur Zeitbestimmung benutzte, die eine halbe Stunde liefen, wurde in der Marine „Glasen" als Zeitmaß benutzt; 1 Stunde = 2 Glas.

Die Maßeinheit in der jeweiligen rechten Spalte ist also 1 Glas = 30′; – = $\frac{1}{4}$ Glas = 7,5′; – – = $\frac{1}{2}$ Glas = 15′; – – – = $\frac{3}{4}$ Glas = 22,5′.

Die Zahlen in der jeweiligen linken Spalte können die empirisch bestimmte Schattenlänge zu der in der jeweiligen rechten Spalte angegebenen Uhrzeit (ab 6 Uhr bzw. bis 18 Uhr) angeben.

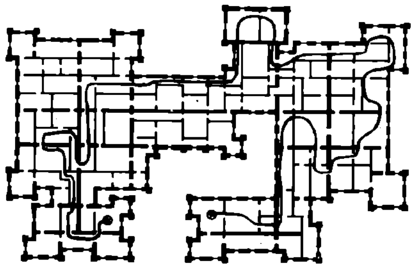
Zur Erläuterung einige Rechenbeispiele:

gemessene Längeneinheiten	Uhrzeit Vormittag
4	$6\,h + 11\frac{1}{4}$ Glas
	$= 6\,h + 337{,}5'$
	$= 11\,h\ 37{,}5'$
8	$6\,h + 6$ Glas $= 9\,h$
12	$6\,h + 4$ Glas $= 8\,h$
23	$6\,h + 2$ Glas $= 7\,h$
200	$6\,h + \frac{1}{4}$ Glas =
	$6\,h + 7{,}5' = 6\,h\ 7{,}5'$

gemessene Längeneinheiten	Uhrzeit Nachmittag
4	$18\,h - 11\frac{1}{4}$ Glas
	$= 18\,h - 337{,}5'$
	$= 12\,h\ 22{,}5'$
8	$18\,h - 6$ Glas $= 15\,h$
12	$18\,h - 4$ Glas $= 16\,h$
23	$18\,h - 2$ Glas $= 17\,h$
200	$18\,h - \frac{1}{4}$ Glas =
	$18\,h - 7{,}5' = 17\,h\ 52{,}5'$

Das Produkt aus den jeweiligen linken und rechten Spalten ist in jeder Zeile 47 ± 2 (+3 bei 100 und 200).

Sternwanderung



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rcl} 124+48 & = & 172 \\ \cdot \quad : & & - \\ 5+12 & = & 17 \\ \hline 620\ :\ 4 & = & 155 \end{array}$$

Abbildung von M_1 in M_2

Aus der Struktur des Gleichungssystems läßt sich für die Potenzexponenten die Ungleichungskette $P<O<T<E<N<Z$ folgern. Da P als Anfangsziffer der Basen und als Subtrahend auftritt, scheidet $P=O$ als wenig sinnvoll aus.

$P \geqq 2$ kommt ebenfalls nicht in Frage, was unmittelbar aus der 1. Gleichung hervorgeht. Es kann also nur $P=1$ gelten.

$P=1$ in Verbindung mit der Voraussetzung und der 1. Gleichung liefert $I=0$ und $\pi=9$. Hieraus folgt weiter $O=2$, $T=3$, $E=4$, $N=5$ und $Z=6$.

Die Proben $10^1-1=9$

. . .

. . .

$10^6-1=999999$

bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

Magische Figuren

Bild 1: 7 oder 3
1 6   5 8
4 10 3   2 10 1
9 5   9 7
2 8   4 6

Bild 2: 2 9 oder 1 5 oder 2 4
4   9   9
3 5 6 8   6 2 4 8   6 1 5 7
7 1   7 3   8 3

Diagonale gesucht

1. Nenner, 2. Hektar, 3. Beweis, 4. Mantel, 5. Cantor, 6. Guldin. *Newton*

Geometrische Figur gesucht

Parabeläste, Archimedes, Radizieren, Ankathete, Lichtjahr, Lochkarte, Ellipse, Leibniz, Omikron, Gerade, Radius, Alpha, Meile, Meter. *Parallelogramm*

Beobachtungstest

Der Mann mit der Zeitung konnte nicht mehr einsteigen. – Der Mann mit der Brille am 2. Fenster, die Frau im 4. Fenster, der Mann neben der Frau am 5. Fenster waren bereits in der Bahn.

Lösungen zu:
Eine Aufgabe vom Autorenkollektiv des „Taschenbuchs für Mathematik", III. U.-S.

▲1964▲ a) Es gibt
$10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$
= 3628800 Möglichkeiten, zehn voneinander verschiedene Bücher auf einem Regal anzuordnen (Problem der Permutation ohne Wiederholung).

b) Wie im Beispiel a) handelt es sich auch hier um ein „Anordnungsproblem". Es existieren soviel voneinander verschiedene eineindeutige Abbildungen einer Menge mit n Elementen auf sich, wie voneinander verschiedene Anordnungen der n Elemente existieren, nämlich $n!$ (Problem der Permutation ohne Wiederholung)

c) Auch im Beispiel c) geht es um ein Anordnungsproblem. Da übereinstimmende Ziffern auftreten, führt nicht jede Umordnung der Ziffern 1; 1; 1; 5; 5; 9 zu einer neuen sechsstelligen Zahl. Da die Ziffer 1 dreimal und die Ziffer 5 zweimal auftritt, ist die Zahl aller Anordnungsmöglichkeiten (das sind 6!) durch die Zahl derjenigen zu teilen, bei der trotz Umordnung von Ziffern die Zahl erhalten bleibt. Es können $\frac{6!}{2!3!}=60$ voneinander verschiedene Zahlen gebildet werden. (Problem der Permutation mit Wiederholung)

d) Aus 8 Mannschaften sind drei auszuwählen und auf den Platz 1, 2 bzw. 3 zu setzen. Es ist ein Problem der Auswahl von 3 Elementen aus einer Menge von 8 Elementen unter Berücksichtigung der Anordnung. Man muß $\frac{8!}{(8-3)!}=336$ verschiedene Tips abgeben, wenn man die Reihenfolge der drei Erstplazierten mit Sicherheit voraussagen will. (Problem der Variation ohne Wiederholung)

e) Wie im Beispiel d) geht es um ein Auswahlproblem. Da jedoch ausgewählte Buchstaben auch wiederholt auftreten können, ist die Zahl der Möglichkeiten zu ermitteln, aus 26 verschiedenen Elementen drei nicht notwendig verschiedene Elemente auszuwählen. Es gibt $26^3 = 17576$ aus drei Buchstaben bestehende „Wörter". (Problem der Variation mit Wiederholung)

f) Im Beispiel f) handelt es sich um ein Auswahlproblem ohne Berücksichtigung der Anordnung. Es gibt $\binom{k}{r}=\frac{k!}{r!(k-r)!}$ verschiedene Möglichkeiten der Auswahl von r Elementen aus k Elementen. Zum Beispiel kann man auf $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$ verschiedene Arten von drei (unterscheidbaren) Kugeln zwei auswählen. (Problem der Kombination ohne Wiederholung)

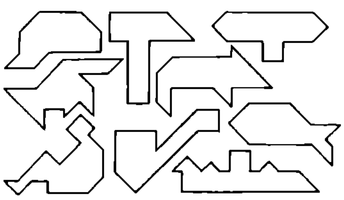
g) Soll man aus einer Menge von k Elementen r nicht notwendig verschiedene Elemente auswählen, so ist dies auf $\binom{k+r-1}{r}$ verschiedene

Weise möglich. Die Aufgabenstellung erfordert die Auswahl von zwei Zahlen aus der Menge mit den Elementen 1; 2; 3; 4; 5 und 6. Dazu gibt es $\binom{6+2-1}{2}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21$ verschiedene Möglichkeiten. (Problem der Kombination mit Wiederholung)

Dr. P. Göthner, Karl-Marx-Universität Leipzig

Lösungen zu: Allerlei Kurzweil, IV. U.-S.

1. Weitere Legebeispiele



2. a) Da die Gesamtfläche der Steine $35\,\text{cm}^2$ beträgt, kann die Schachtel nur die Maße $5\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}$ haben, wenn man eine 1 cm breite „Schachtel" ausschließt. Andere Maße gibt es nicht.

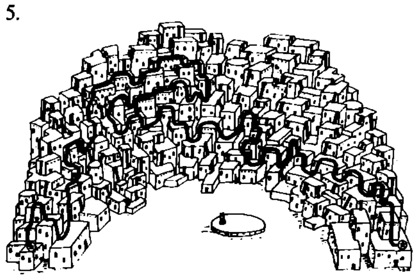
b) Einzig möglich: $3\,\text{cm} \times 13\,\text{cm}$.

3. Goethes Hexeneinmaleins. Summe: 1980

241	256	265	260	239	254	235	230
266	263	240	255	234	231	238	253
257	242	261	264	259	236	229	232
262	267	258	243	228	233	252	237
217	244	221	268	251	278	227	274
222	269	218	247	220	275	250	279
245	216	271	224	277	248	273	226
270	223	246	219	272	225	276	249

4. Aus der 1. Bedingung folgt, daß die dritte Karte, und aus der 2. Bedingung, daß auch die zweite Karte kein König sein kann. Also ist die erste Karte ein König. Aus der 3. Bedingung geht hervor, daß die erste und zweite Karte keine Karokarten sein können, aus der 4. Bedingung, daß die beiden Pikkarten nebeneinander liegen müssen. Deshalb sind die beiden ersten Karten Pikkarten. Mithin liegen folgende Karten vor dir: Pikkönig, Pikdame und Karodame.

5.



XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade), Fortsetzung:

3 B. Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen

$$x \geqq 1, \tag{1}$$
$$x+3 \geqq 4\sqrt{x-1}, \tag{2}$$
$$x+8 \geqq 6\sqrt{x-1} \text{ gelten.} \tag{3}$$

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1. \tag{4}$$

Dann folgt

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}},$$
$$x+3-4\sqrt{x-1}=1-2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+x+8-6\sqrt{x-1},$$
$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=3-\sqrt{x-1} \tag{5}$$

also $\sqrt{x-1} \leqq 3.$ (6)

Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-2, \tag{7}$$

also $\sqrt{x-1} \geqq 2.$ (8)

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \leqq x-1 \leqq 9, \tag{9}$$

also $5 \leqq x \leqq 10.$ (10)

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl x die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8);

ferner gilt $x^2-10x+25=(x-5)^2 \geqq 0$, also $x^2+6x+9 \geqq 16x-16$, d. h. $(x+3)^2 \geqq 16(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+3>0$ folgt) die Ungleichung (2). Weiterhin gilt $x^2-20x+100=(x-10)^2 \geqq 0$, also $x^2+16x+64 \geqq 36x-36$, d. h. $(x+8)^2 \geqq 36(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+8>0$ folgt) die Ungleichung (3).

Ferner gilt $(\sqrt{x-1}-2)^2=x-1-4\sqrt{x-1}+4=x+3-4\sqrt{x-1}$; hieraus und aus (8) folgt (7). Weiterhin gilt

$$(3-\sqrt{x-1})^2=9-6\sqrt{x-1}+x-1$$
$$=x+8-6\sqrt{x-1},$$

hieraus und aus (6) folgt (5).

Aus (5) und (7) aber ergibt sich, daß x auch (4) erfüllt. Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften.

Andere Lösungswege bestehen darin, außer der Diskussion von (1), (2), (3) für alle (verbleibenden) x durch Quadrieren die Identitäten

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=|2-\sqrt{x-1}|$$

und $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=|3-\sqrt{x-1}|$

herzuleiten und nun die Forderung

$$|2-\sqrt{x-1}|+|3-\sqrt{x-1}|=1$$

durch Fallunterscheidung als äquivalent mit (6) und (8) nachzuweisen.

Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission

4. a)

Es gilt $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \geqq 0$,

also $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \geqq 4ab$,

also wegen $a>0, b>0$

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab},$$
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \tag{1}$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

b) Ebenso zeigt man

$$\frac{c+d}{2} \geqq \sqrt{cd} \tag{2}$$

sowie für die Zahlen

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{c+d}{2} \tag{3}$$

auch $\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}.$ (4)

Aus (1), (2), (3), (4) folgt

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$$
$$=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geqq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd},$$

d. h. die zweite Behauptung.

Bemerkungen: Sätze, die ein Schüler im Mathematikunterricht oder im Mathematikzirkel auszusprechen und zu beweisen gelernt hat, darf er als Teilnehmer der OJM zitieren und für seine Lösung voraussetzen.

Nun wird in Mathematikzirkeln gelegentlich bewiesen, daß das arithmetische Mittel endlich vieler positiver reeller Zahlen nicht kleiner ist als deren geometrisches Mittel. Daher mußte der bloße Hinweis darauf, daß beide Behauptungen der Aufgabe Spezialfälle dieses Satzes sind, schon als Lösung anerkannt werden. Dies geschah bei 5 Teilnehmern und ist natürlich unbefriedigend und läßt die Aufgabe als nicht gut geeignet für Mathematikolympiaden erscheinen.

Unter den falschen Lösungen war der häufigste Fehler der, daß aus der Behauptung $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ zwar richtig auf die richtige Aussage $(a-b)^2 \geqq 0$ geschlossen, nicht aber die Umkehrbarkeit aller Schlüsse festgestellt wurde.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	6	9	12	3	5	16	55

Dr. G. Schiemann Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

5. Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$z^2-2^n=153. \tag{1}$$

(I) Angenommen, für ein Paar natürlicher Zahlen $(n;z)$ sei (1) erfüllt.

1. Fall: n ist gerade, d. h., es gilt $n=2m$ mit natürlichem m.

Aus (1) folgt dann

$$(z-2^m)(z+2^m)=153. \tag{2}$$

Da $153=3^2\cdot 17$ als Zerlegungen in zwei ganzzahlige Faktoren, von denen der erste kleiner als der zweite und dieser (also auch der erste) größer als 0 ist, nur $1\cdot 153$, $3\cdot 51$ und $9\cdot 17$ besitzt, gibt es für (2) höchstens die Möglichkeiten

$$z-2^m=1,\ z+2^m=153; \tag{3}$$
$$z-2^m=3,\ z+2^m=51; \tag{4}$$
$$z-2^m=9,\ z+2^m=17. \tag{5}$$

Hiervon führt (3) auf den Widerspruch $2^m=76$ und (4) auf den Widerspruch $2^m=24$; (5) führt auf $z=13$, $2^m=4$, also $m=2$, $n=4$.

2. Fall: n ist ungerade. Es gilt $2 \equiv 1 \pmod 3$, also $2^n \equiv -1 \pmod 3$.

Ist nun $z \equiv 0 \pmod 3$, so folgt

$$z^2-2^n \equiv 0+1 \pmod 3; \tag{6}$$

ist aber $z \equiv 1 \pmod 3$ oder $z \equiv -1 \pmod 3$, so folgt

$$z^2-2^n \equiv 1+1 \pmod 3. \tag{7}$$

Wegen $153 \equiv 0 \pmod 3$ ergibt sowohl (6) als auch (7) einen Widerspruch gegen (1).

Daher kann (I) nur durch (4;13) erfüllt werden.

(II) In der Tat erfüllen diese Zahlen (1); denn es gilt

$2^4+12^2=16+144=160=169-9.$

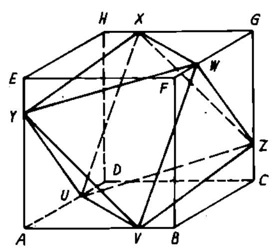
Also ist genau dieses Zahlenpaar das gesuchte.

Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission

6. Angenommen, wir haben ein regelmäßiges Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften konstruiert. Wir betrachten die Umkugel K dieses Oktaeders. Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ist infolge des Strahlensatzes mit dem Würfelmittelpunkt identisch. Daraus folgt, daß der Würfelmittelpunkt M mit dem Kugelmittelpunkt notwendig zusammenfällt.

Die Kugel um M mit dem Radius r mit $\frac{\sqrt{2}}{2}<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$ schneidet die Kanten des Würfels u. a. in den Punkten U, V, W, X, Y, Z (siehe Bild). $UVWX$ ist ein Parallelogramm, da UV und XW zueinander parallel und gleichlang sind. Da $UVWX$ symmetrisch zur Ebene durch A, C, G liegt, gilt $\overline{UW}=\overline{VX}$ und damit ist $UVWX$ ein Rechteck. Sei nun $x=\overline{AV}=\overline{AU}=\overline{GW}=\overline{GX}$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$\overline{VW}=\sqrt{a^2+2(a-x)^2}$. Aus der Bedingung $\overline{VW}=\overline{UV}=\sqrt{2}\,x$ ergibt sich $x=\frac{3}{4}a$. $UVWX$ ist dann nach Konstruktion ein Quadrat. Wir wählen nun noch Y auf $\overline{AE}$ und Z auf $\overline{GC}$ mit $\overline{AY}=\overline{GZ}=\frac{3}{4}a$. Es folgt analog $\overline{YU}=\overline{YV}=\overline{YW}=\overline{ZU}=\overline{ZV}=\overline{ZW}=\overline{ZX}$.



Daher sind die Dreiecke UVY, VWY, WXY, XUY, UVZ, VWZ, WXZ, XUZ gleichseitig. Der eingeschlossene Körper ist somit aus zwei Pyramiden mit derselben quadratischen Grundfläche und sämtlich gleichseitigen Seitenflächen zusammensetzbar, d. h., er ist ein regelmäßiger Oktaeder. Wir berechnen V. Das Oktaeder setzt sich aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $a\sqrt{2}\frac{1}{2}$ und der zugehörigen Höhe $\frac{a}{2}$ zusammen. Damit ist $V=\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{a}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{6}a^3$.

Analog berechnen wir das Volumen des konstruierten Oktaeders. Es ist $\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2\frac{3}{4}a\frac{2}{3}=\frac{9}{16}a^3>\frac{1}{2}a^3=3V$.

Damit erfüllt das konstruierte Oktaeder alle gestellten Bedingungen.

Bemerkungen: 1. Die Aufgabe wurde als noch angemessen eingeschätzt. Sie hatte die Funktion eines „Scharfrichters".

2. Die Schüler verfügen in der Mehrzahl über keine klaren Vorstellungen von geometrischen Existenzbeweisen.

3. Verschwommene Darstellungen (z. B. geometrischer Operationen im Raum), der fehlende Nachweis der Regelmäßigkeit und eine Fülle von Rechenfehlern waren typische Fehler.

4. Eine Verallgemeinerung, die alle Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften bestimmt, erscheint in einem der nächsten Hefte der „IMO-Übungsaufgaben".

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	21	68	4	1	2	0	6	4

Dr. W. Moldenhauer, VEB Kombinat Schiffbau Rostock

Lösungen zum alpha-Wettbewerb des Heftes 5/79 (Fortsetzung):

Ma 6 ▪1887 Es seien p_1 und p_2 diese Primzahlen, und es gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $p_1>p_2$. Aus der Aufgabenstellung folgt dann

$$4\cdot(p_1-p_2)=p_1+p_2,$$
$$4p_1-4p_2=p_1+p_2,$$
$$3p_1=5p_2.$$

Nun muß 5 Teiler von $3p_1$ und somit Teiler von p_1 sein. Das trifft nur zu für $p_1=5$. Daraus folgt $p_2=3$.

Die beiden Primzahlen lauten 3 und 5.

Ma 6 ▪1888 Die zweistelligen natürlichen Zahlen seien in der Form $10a+b$ dargestellt; dann gilt

$$10a+b=4\cdot(a+b),$$
$$10a+b=4a+4b,$$
$$6a=3b,$$
$$2a=b.$$

Wegen $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ erhalten wir folgende vier Lösungen: 12, 24, 36, 48.

Ma 6 ▪1889 Aus den Angaben des Aufgabentextes ergeben sich folgende Teilnehmerzahlen:

Klasse	Anzahl	Klasse	Anzahl
7	x	10	y
8	y	11	$y+1$
9	$x+3$	12	x

insgesamt $3x+3y+4=p$,

$$3x+3y+3=p-1,$$
$$3(x+y+1)=p-1.$$

Daraus folgt, daß $p-1$ durch 3 teilbar sein muß. Wegen $15<p<25$ gilt das nur für $p=19$. Deshalb gilt

$3x+3y+4=19, 3x+3y=15,$

$x+y=5$ mit $x>1$ und $y>1$.

Es existieren zwei Lösungen, nämlich $x_1=2$ und $y_1=3$ sowie $x_2=3$ und $y_2=2$.

Klasse	Anzahl	Anzahl
7	2	3
8	3	2
9	5	6
10	3	2
11	4	3
12	2	3
insgesamt	19	19

Ma 6 ▪1890 Da die Zahl $\overline{ab}$ (in dekadischer Schreibweise) Primzahl ist, kann b nur 1, 3, 7 oder 9 sein. Da die Zahl $\overline{ba}$ ebenfalls Primzahl ist, kann auch a nur 1, 3, 7 oder 9 sein. aus $\overline{ab}-\overline{ba}>0$ folgt $a>b$.

Fallunterscheidung:

$\overline{ab}$	$\overline{ba}$	$\overline{ab}-\overline{ba}$	
31	13	18	keine Quadratzahl
71	17	54	keine Quadratzahl
73	37	$36=6^2$	
97	79	18	keine Quadratzahl

Es gibt genau zwei Primzahlen mit dieser Eigenschaft; sie lauten 73 und 37, und es gilt $73-37=36=6^2$.

Ma 6 ▪1891 Die gesuchten zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich darstellen durch $z=10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$; ihre Quersumme lautet $a+b$. Nun gilt

$$10a+b=a+b+54,$$
$$9a=54, \text{ also } a=6.$$

Daraus folgt $z=10\cdot 6+b=60+b$.

Weiterhin gilt

$$7\cdot(60+b)=60+b+396,$$
$$420+7b=b+456,$$
$$6b=36, \text{ also } b=6.$$

Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 66.

Ma 7 ▪1892 Angenommen, in diesem Haus wohnen x Familien mit 3 Personen, y Familien mit 4 Personen und z Familien mit 5 Personen; dann gilt $3x+4y+5z=41$ und $x+y+z=12$ bzw. $x=12-y-z$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$3\cdot(12-y-z)+4y+5z=41,$

$36-3y-3z+4y+5z=41,$

$$y+2z=5,$$
$$2z=4+1-y,$$
$$z=2-\frac{y-1}{2}.$$

Wegen $x>y>z$ existiert genau eine Lösung, nämlich $y=3$, also $z=1$ und $x=8$.

In diesem Haus wohnen 8 Familien mit drei, 3 Familien mit vier und 1 Familie mit fünf Personen.

Ma 7 ▪1893 Aus (2) und (4) folgt: Herr Morosow unterrichtet nicht Biologie. Aus (5) folgt: Herr Morosow unterrichtet weder Geographie noch Mathematik.

Aus (3) folgt: Herr Tokarew unterrichtet weder Biologie noch Französisch. Folglich unterrichtet Herr Wassiljew Biologie.

Aus (3) folgt: Herr Morosow unterrichtet Französisch.

Aus (2) und (4) folgt: Herr Tokarew unterrichtet Mathematik.

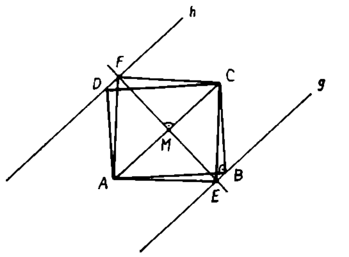
Aus (5) folgt: Herr Wassiljew unterrichtet Geographie.

Aus (1) folgt: Herr Tokarew unterrichtet Englisch. Folglich unterrichtet Herr Morosow Geschichte.

Zusammenstellung:

Name	Fächer
Morosow	Französisch, Geschichte
Tokarew	Englisch, Mathematik
Wassiljew	Biologie, Geographie

Ma 7 ■ 1894 Wir zeichnen einen rechten Winkel mit seinem Scheitel B, tragen auf dem einen Schenkel von B bis A die Länge 4 cm ab, schlagen um A mit dem Radius $r=5$ cm einen Kreis, der den anderen Schenkel des Rechten in C schneidet und verbinden A mit C. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C schneidet die Parallele zu $\overline{BC}$ durch A in D.



Das Viereck $ABCD$ ist das zu konstruierende Rechteck. Durch jeden der Punkte B und D zeichnen wir eine Parallele zu AC. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$ schneide die eine dieser Parallelen in E, die andere in F. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AEC$ haben die Seite $\overline{AC}$ gemeinsam und wegen $AC \parallel g$ gleiche Höhe bezüglich dieser Seite, sie sind somit flächengleich. Das gleiche gilt analog für die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ACF$. Auf Grund der Konstruktion gilt ferner $\overline{AE}=\overline{CE}=\overline{AF}=\overline{CF}$. Somit ist das Quadrat $AECF$ flächengleich dem Rechteck $ABCD$.

Ma 7 ■ 1895 Wir stellen folgende Tabelle auf:

Klasse	Anzahl d. Jungen	Anzahl d. Mädchen
7a	a	$a-2$
7b	b	$b+7$
7c	c	$c+2$
insg.	$a+b+c$	$a+b+c+7$

Nun gilt $2\cdot(a+b+c)+7=89$,

$2\cdot(a+b+c)=82$,

$a+b+c=41$.

Diesen drei 7. Klassen gehören insgesamt 41 Jungen an.

Ma 8 ■ 1896 Für den Umfang dieses Rechtecks gilt:

(1) $u=2(a+b)$.

Wegen $a:b=4:3$ bzw. $a=\frac{4}{3}b$ und $u=28$ (Maßzahl) gilt nun

(2) $28=2\left(\frac{4}{3}b+b\right)$ bzw. $b=6$.

Daraus folgt $a=8$.

Die Längen der Seiten des Rechtecks betragen 8 cm bzw. 6 cm.

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 48 cm².

Sei e die Länge der Diagonalen, dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$e^2=a^2+b^2$, also

$e^2=64+36$,

$e^2=100$,

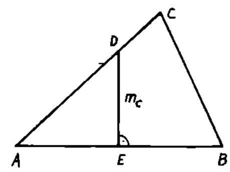
$e=10$.

Die Länge der Diagonalen beträgt 10 cm.

Ma 8 ■ 1897 Weil m_c Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ ist, ist $\overline{AE}$ 3 cm lang. Im rechtwinkligen Dreieck AED gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$\overline{DE}=\sqrt{AD^2-AE^2}$

$\overline{DE}=4$ cm.



Für den Flächeninhalt des Dreiecks AED gilt:

$A=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{ED}}{2}$

$A=6\text{ cm}^2$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks AED beträgt 6 cm².

Ma 8 ■ 1898 Die Aussageform ist

$2\cdot x+x\cdot x+1=(x+1)(x+1)$.

Durch äquivalente Umformung erhält man

$2x+x^2+1=(x+1)^2$;

$x^2+2x+1=x^2+2x+1$.

Die beiden Terme dieser Gleichung sind identisch. Daraus folgt, daß für alle natürlichen Zahlen x gilt:

$2\cdot x+x\cdot x+1=(x+1)(x+1)$.

Ma 8 ■ 1899 Man zeichnet die Diagonale $\overline{EC}$, die das Fünfeck in das Dreieck ECD und das Viereck $ABCE$ zerlegt. Man verlängert $\overline{BC}$ über C hinaus und zeichnet zu $\overline{EC}$ die Parallele durch D, die die Gerade BC in F schneidet. Man verbindet E mit F. Das Viereck $ABFE$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Fünfeck, da die Dreiecke $\triangle ECD$ und $\triangle ECF$ flächengleich sind (sie haben die gleiche Grundseite $\overline{EC}$, und die entsprechenden Höhen haben die gleiche Länge h_1).

Dieses Verfahren wendet man nun auf das Viereck $ABFE$ an. Man zeichnet die Diagonale $\overline{EB}$ und die Parallele zu $\overline{EB}$ durch A, die die Gerade EF in G schneidet. Das Dreieck $\triangle BEA$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle BEG$. Daraus folgt, daß das Viereck $ABFE$ den gleichen Flächeninhalt hat wie das Dreieck $\triangle BFG$.

Daraus folgt: Das Fünfeck $ABCDE$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle BFE$.

Ma 9 ■ 1900 Seien x und y die Preise für die zwei Pampelmusen in Mark. Dann gilt nach den Bedingungen der Aufgabe

(1) $x+y=3{,}3$

(2) $x-y=0{,}1$.

Daraus folgt $x=1{,}7$ und $y=1{,}6$.

Eine Pampelmuse kostet 1,70 M, die andere 1,60 M. Wenn man für 10 Pfennig 25 g Pampelmuse erhält, so erhält man für 1,70 M 425 g und für 1,60 M 400 g Pampelmuse. Die Masse der einen Pampelmuse beträgt 425 g, die der anderen 400 g.

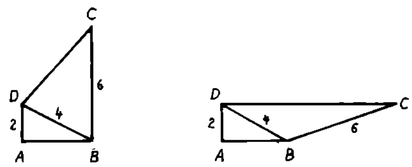
Ma 9 ■ 1901 Da die Länge von $\overline{DB}$ 4 cm beträgt, folgt aus $\overline{AD}:\overline{DB}:\overline{BC}=1:2:3=2:4:6$. Die Länge von $\overline{AD}$ beträgt 2 cm und die Länge von $\overline{BC}$ beträgt 6 cm.

Zwei voneinander verschiedene nicht überschlagene Trapeze erfüllen die Bedingungen.

(1) Man zeichnet einen rechten Winkel mit dem Scheitelpunkt A. Der Kreis um A mit dem Radius $r=2$ cm schneidet den einen Schenkel des rechten Winkels in D. Der Kreis um D mit dem Radius $r=4$ cm schneidet den anderen Schenkel des rechten Winkels in B. Auf der Parallelen zu $\overline{AD}$ durch B liegt der Punkt C, der von B einen Abstand von 6 cm hat.

(2) Die ersten drei Sätze wie (1), dann weiter: Man zeichnet die Parallele zu $\overline{AB}$ durch D. Der Kreis um B mit dem Radius $r=6$ cm schneidet die Parallele in C.

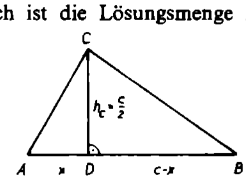
Skizzen (nicht maßstäblich):



Ma 9 ■ 1902 Der Term $4x^x-6x^{x+1}+2x^{x+2}$ kann in ein Produkt umgeformt werden, da jeder Summand den Faktor x^x enthält. Die Gleichung $x^x\cdot(4-6x+2x^2)=0$ ist im Bereich der rationalen Zahlen zu der gegebenen Gleichung äquivalent. Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Folglich gilt:

$x^x=0$ oder $4-6x+2x^2=0$.

$x^x=0$ wird von keiner rationalen Zahl erfüllt, folglich ist die Lösungsmenge L_1 leer ($L_1=\emptyset$).



$4-6x+2x^2=0$ wird nur von den rationalen Zahlen 1 und 2 erfüllt; die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also $L_2=\{1;2\}$. Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist die Vereinigungsmenge von L_1 und L_2.

Es gilt $L=L_1\cup L_2=\{1;2\}$.

Ma 9 ■ 1903 Nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke gilt:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$. Wegen (1) gilt $\gamma=90°$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig. Sei D der Fußpunkt der Höhe h_c und x die Länge der Strecke $\overline{AD}$. Nach dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke gilt:

$\left(\frac{c}{2}\right)^2=x\cdot(c-x)$ bzw. $x^2-cx+\frac{c^2}{4}=0$. Die Lösungsmenge dieser quadratischen Gleichung ist $L=\left\{\frac{c}{2}\right\}$.

Das bedeutet, daß D Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ (sws).

Man konstruiert das Dreieck ABC aus $a=5$ cm, $b=5$ cm und $\gamma=90°$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $12{,}5\ \text{cm}^2$ (halbe Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 5 cm).

Ma 10/12 ■1904 (1) ist wahr; (2) ist falsch; (3) ist wahr.

Begründungen: zu (1): Man formt $z=a^2+a+17$ in $z=a(a+1)+17$ um. $a(a+1)$ ist stets gerade; folglich ist $a(a+1)+17$ stets ungerade.

zu (2): Man findet z.B. $a=16$. Es gilt $16^2+16+17=289$ und $289=17^2$, also keine Primzahl. Dieses Gegenbeispiel genügt, um die Falschheit der Allaussage nachzuweisen. Es gibt noch weitere Zahlen a, für die $a(a+1)+17$ keine Primzahl ist.

zu (3): Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

1. Es sei a eine durch 3 teilbare Zahl, also $a=3k$. Dann gilt
$z=(3k)^2+3k+17=9k^2+3k+17;$
$z=3(3k^2+k+5)+2.$
Das heißt, z läßt bei Division durch 3 den Rest 2.

2. Es sei a eine Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, also $a=3k+1$. Dann gilt
$z=(3k+1)(3k+2)+17=9k^2+9k+19;$
$z=3(3k^2+3k+6)+1.$
Das heißt, z läßt bei Division durch 3 den Rest 1.

3. Es sei a eine Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 läßt, also $a=3k+2$. Dann gilt
$z=(3k+2)(3k+3)+17=9k^2+15k+23;$
$z=3(3k^2+5k+7)+2.$
Das heißt, z läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Damit haben wir alle möglichen Fälle erfaßt.

Ma 10/12 ■1905 Aus $(a+1)(b+1)+1=1979$ folgt $(a+1)(b+1)=1978$. Folglich gilt auch

$$(a-2)(b+4)=(a+1)(b+1); \qquad (1)$$
$$3a-3b=9$$
$$a-b=3.$$
Durch Einsetzen in Gleichung (1) erhalten wir
$$(a-2)(a+1)=1978;$$
$$a^2-a-1980=0;$$
$$a=45;$$
$$b=42.$$

Nur die natürlichen Zahlen 45 und 42 erfüllen die beiden gegebenen Gleichungen.

Ma 10/12 ■1906 Wir nehmen an, es gäbe ein $x\in P$, für das gilt:

(1) $\quad \sin x+\cos x=1{,}5.$

Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung und erhalten

(2) $\quad \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=2{,}25.$

Wegen $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ und $2\sin x\cos x=\sin 2x$ folgt aus (2):

(3) $\quad \sin 2x=1{,}25.$

Die Gleichung (3) wird von keinem reellen x erfüllt. Daraus folgt, daß die Annahme falsch ist. Folglich gilt das Gegenteil der Annahme: Es gibt kein $x\in P$, für das gilt: $\sin x+\cos x=1{,}5$, q.e.d.

Ma 10/12 ■1907 Das Volumen dieser Pyramide berechnet man nach der Formel $V=\frac{a^2\cdot h}{3}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Höhe dieser Pyramide $h=\sqrt{s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}$, wobei s die Länge der Seitenkante und d die Länge der Diagonalen der Grundfläche bezeichnet.

Es gilt $V=\frac{5^2\cdot 4{,}97}{3}$; $V=41{,}42\ \text{m}^3$.

Von diesem Volumen ist das Volumen für den Beton zu subtrahieren, um das Volumen des Gesteins zu erhalten. Wir berechnen 55% von $41{,}42\ \text{cm}^3$ und erhalten $22{,}78\ \text{m}^3$ für das Volumen des Gesteins. Es seien m die Masse, V das Volumen und ϱ die Dichte des Gesteins der Pyramide. Dann gilt

$$m=V\cdot\varrho$$
$$m=22{,}78\ \text{m}^3\cdot 2{,}6\ \text{t}\cdot m^{-3}$$
$$m=59{,}2\ \text{t}$$

Die Masse des Gesteins beträgt etwa 59,2 t. Es wurde mit Näherungswerten gerechnet.

Aus Platzgründen können wir zu den Aufgaben des Physik- und des Chemiewettbewerbs nur die Antwortsätze veröffentlichen.

Ph 6 ■61 Die Lackschicht ist 0,075 mm dick.

Ph 7 ■62 a) Vom Zeitpunkt des Vorbeifahrens am Punkt A gerechnet überholt der
Radfahrer den Fußgänger nach 6 s,
Autofahrer den Fußgänger nach 2,5 s
Autofahrer den Radfahrer nach 5 s.
b) Die Abstände von A sind entsprechend 28,5 m, 36 m und 75 m.

Ph 8 ■63 Es stehen rund 41 l pro m^2 und h für die Beregnung der Gemüsefläche zur Verfügung.

Ph 9 ■64 Das Element hat eine Leerlaufspannung von 4,5 V und einen Innenwiderstand von 30 Ω.

Ph 10/12 ■65 Die Geschwindigkeit des α-Teilchens beträgt etwa $1{,}52\cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ch 7 ■49 Das Gasgemisch enthält etwa 9,1% Kohlendioxid.

Ch 8 ■50 1480 g Sauerstoff sind für die Verbrennung noch zu liefern.

Ch 9 ■51 32,5 l Chlorwasserstoff werden unter den gegebenen Bedingungen von 310 ml 15%iger Natronlauge absorbiert.

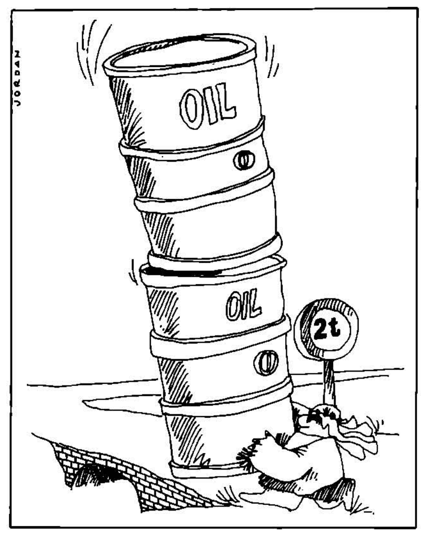
Ch 10/12 ■52 Die Füllung kostet rund 13 196 Mark.

VII. Physikwettbewerb

Fortsetzung von S. 36: Bestimmen Sie
a) die Lage der Linse,
b) ihre Brennweite,
c) die Gegenstandsweiten und die Bildweiten!
Die Lösung kann rechnerisch oder durch Konstruktion oder durch Kombination beider Verfahren erfolgen.

(Auf den Text zur experimentellen Aufgabe müssen wir aus Platzgründen verzichten, d. Red.)

Jürgen Gräfenstein, jüngster Teilnehmer des Wettbewerbs. Er erreichte sowohl im experimentellen als auch im theoretischen Teil unter den 21 Teilnehmern die höchste Punktzahl. Für die experimentelle Aufgabe erreichte er als einziger die volle Punktzahl und erhielt dafür einen Sonderpreis.



Fortsetzung von Seite 29

III. Finale

▲1▲ (Aufgabe) Man bestimme die dritte Wurzel der Gleichung $2x^3+mx^2-13x+n=0$, wenn 2 und 3 Wurzeln der Gleichung sind!

▲2▲ (Fragen) a) Geben Sie Synonyme für das Wort „Axiom" an!
b) Die Funktion $f(x)=x^2+2ax+3$ sei gerade. Bestimmen Sie a!
c) Wie heißt das Ellipsoid, das mindestens drei Symmetrieachsen besitzt?
d) Wie nennt man in der Mathematik ein genaues Schema der Vorgehensweise, das zur Lösung einer bestimmten Aufgabe führt?
e) Er war Oberbefehlshaber der russischen Armee im napoleonischen Krieg. In den Jahren 1757 bis 1759 studierte er an der *Adligen Artillerieschule*, an der er später Mathematik lehrte. Wie heißt der Mann?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:
Ma 7 ■1778 Die Variablen a, b, c des Terms $\frac{a(c-b)}{b-a}$ sollen mit den Zahlen 13, 15 bzw. 20 so belegt werden, daß der Wert des Terms gleich einer positiven ganzen Zahl ist.

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Es ist $\frac{a(c-b)}{b-a}>0$ genau dann, wenn entweder „$c>b$ und $b>a$" oder „$c<b$ und $b<a$" gilt, d. h., wenn entweder $a<b<c$ oder $a>b>c$ gilt. Für $a<b<c$, also für $a=13, b=15, c=20$ erhalten wir $\frac{13\cdot(20-15)}{15-13}=32{,}5$, also keine ganze Zahl. Für $a>b>c$, also für $a=20$, $b=15$, $c=13$ erhalten wir $\frac{20\cdot(13-15)}{15-20}=8$.

Wir stellen nun die Lösung von Gerd Heber aus Erfurt vor, der Schüler der Klasse 7 der 11. POS ist. Gerd löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Variablen a, b, c können wie folgt belegt werden:

	a	b	c
(1)	13	15	20
(2)	13	20	15
(3)	15	13	20
(4)	15	20	13
(5)	20	13	15
(6)	20	15	13

Fall (1) liefert eine gebrochene Zahl, nämlich $\frac{13(20-15)}{15-13}=\frac{65}{2}$. Die Fälle (2) bis (5) liefern negative Zahlen und entfallen deshalb, denn es gilt
(2) $c-b<0$ und $b-a>0$,
(3) $c-b>0$ und $b-a<0$,
(4) $c-b<0$ und $b-a>0$,
(5) $c-b>0$ und $b-a<0$.
Nur Fall (6) liefert eine positive ganze Zahl, und es gilt $\frac{20(13-15)}{15-20}=8$.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:
Ma 6 ■1775 Ein Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sie ehrlich teilen sollten. Hans, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil; er entnahm dem Korb den dritten Teil der Anzahl der Nüsse. Bernd, der nicht wußte, daß Hans sich schon bedient hatte, nahm von den verbliebenen Nüssen den dritten Teil. Elke, die nicht wußte, daß Hans und Bernd dem Korb schon Nüsse entnommen hatten, nahm als letzte von den verbliebenen Nüssen ebenfalls den dritten Teil. Danach waren noch 16 Nüsse im Korb. Wieviel Nüsse hat jeder von ihnen dem Korb entnommen?

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Angenommen, im Korb befanden sich anfangs n Nüsse. Nachdem sich Hans $\frac{n}{3}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $n-\frac{n}{3}=\frac{2n}{3}$ Nüsse. Nachdem sich Bernd $\frac{2n}{9}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{2n}{3}-\frac{2n}{9}=\frac{4n}{9}$ Nüsse. Nachdem sich Elke $\frac{4n}{27}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{4n}{9}-\frac{4n}{27}=\frac{8n}{27}$ Nüsse. Nun gilt $\frac{8n}{27}=16$, also $n=54$.
Im Korb befanden sich anfangs 54 Nüsse. Hans hat dem Korb 18 Nüsse, Bernd 12 Nüsse und Elke 8 Nüsse entnommen.

Wir stellen nun die Lösung von Jens Beier aus Grimma vor, der Schüler der Klasse 6 der Alfred-Frank-Oberschule ist. Jens löste diese Aufgabe wie folgt:
Es sei z die Anzahl der im Korb anfangs vorhandenen Nüsse. Wegen der gestellten Bedingungen ist z ein Vielfaches von 27. Ich nehme eine Fallunterscheidung vor.
(1) Es sei $z=27$; dann erhält
Hans 9 Nüsse (Rest 18),
Bernd 6 Nüsse (Rest 12),
Elke 4 Nüsse (Rest 8).
Wegen $8 \neq 16$ entfällt $z=27$.
(2) Es sei $z=54$; dann erhält
Hans 18 Nüsse (Rest 36),
Bernd 12 Nüsse (Rest 24),
Elke 8 Nüsse (Rest 16).
Dies stellt eine Lösung dar.
(3) Für $z=k\cdot 27$ mit $k\geqq 3$, wobei k eine natürliche Zahl ist, verbleibt jeweils ein Rest, der größer als 18 ist. Somit existiert genau eine Lösung.

Wir stellen nun die Lösung von Jan-Martin Hertzsch aus Geringswalde vor, der Schüler der Klasse 6a der Diesterweg-Oberschule ist; Jan-Martin löste diese Aufgabe wie folgt:
16 Nüsse sind $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Nüsse, von der Elke $\frac{1}{3}$ entnommen hat; $\frac{1}{3}$ entspricht also 8 Nüssen $(16+8=24)$.
24 Nüsse sind $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Nüsse, von der Bernd $\frac{1}{3}$ entnommen hat; $\frac{1}{3}$ entspricht also 12 Nüssen $(24+12=36)$.
36 Nüsse sind $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Nüsse, von der Hans $\frac{1}{3}$ entnommen hat; $\frac{1}{3}$ entspricht also 18 Nüssen $(36+18=54)$.
Hans nahm sich 18, Bernd 12 und Elke 8 Nüsse.

Bücher helfen beim Studieren

Drinfel'd
Quadratur des Kreises und Transzendenz von π
etwa 180 S., zahlr. Abb., Preis: 8,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Bestell-Nr.: 570 8950

K.-J. Richter
Methoden der Optimierung Band I: Lineare Optimierung
189 Seiten mit 18 Bildern und 44 Tabellen, Preis: 7,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr.: 545 587 7

G. Lochmann
Nomographie
140 Seiten, 56 Bilder, 58 Tafeln, 43 Aufgaben mit Lösungen sowie eine Beilage Preis: 9,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr.: 546 427 1

H. Simon/K. Stahl/H. Grabowski
Mathematik
Nachschlagbuch für Grundlagenfächer
13. völlig neubearbeitete Auflage
672 Seiten mit 445 Bildern, Preis: 13,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig
Bestell-Nr.: 546 440 7

K. Fehringer
Näherungsrechnungen, Gleichungen, Ungleichungen
Einige Probleme der praktischen Mathematik
144 Seiten, 75 Abb., Preis: 3,70 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Bestell-Nr.: 707 150 0

M. Scholltyssek
Hexeneinmaleins
160 Seiten, zahlr. lustige Abb., Preis: 6,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin
Bestell-Nr.: 630 659 0

Buchpremiere

LEIPZIG

Am 31. Oktober 1979 fand im Konferenzsaal der *Deutschen Bücherei* in Anwesenheit zahlreicher in- und ausländischer Gäste eine Buchpremiere statt.

Anläßlich der 19. völlig überarbeiteten Auflage des Taschenbuches der Mathematik fanden sich Wissenschaftler aus der UdSSR und der DDR, Vertreter der Presse, des Buchhandels, der Bibliotheken, des Außenhandels der DDR und des Graphischen Großbetriebes Interdruck Leipzig zu einer Feierstunde zusammen.

alpha stellt vor:

I. N. Bronstein/K. A. Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik
Neubearbeitung
860 Seiten, zahlr. Abb. Preis 29,50 M

Ergänzende Kapitel zu
Bronstein/Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik
Neubearbeitung
218 Seiten, zahlr. Abb. Preis 12,00 M

1958 erschien im Verlag B. G. Teubner, Leipzig, die erste Auflage des von V. Ziegler ins Deutsche übersetzten Taschenbuches der Mathematik von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. Seitdem sind 18 Auflagen mit insgesamt rund 300000 Exemplaren erschienen. Das Taschenbuch wurde zum unentbehrlichen Arbeitsmittel während des Studiums und in der beruflichen Praxis nicht nur für Ingenieure, für die es ursprünglich vorgesehen war, sondern darüber hinaus für Mathematiker, Physiker und andere Naturwissenschaftler, Ökonomen sowie Mathematik- und Physiklehrer.

Die Entwicklung der Mathematik seit der Konzipierung des Taschenbuches, die Entstehung neuer mathematischer Teilgebiete, die verstärkte Anwendung der Mathematik auf vielen Gebieten von Wissenschaft, Technik und Ökonomie, die daraus resultierenden anspruchsvolleren Studienanforderungen an die Studenten dieser Fachrichtungen sowie die Anpassung des Taschenbuches an den erweiterten Benutzerkreis machten eine gründliche Überarbeitung, Erweiterung und Ergänzung erforderlich.

Diese Überarbeitung erfolgte durch ein Kollektiv von Mathematikern, die zum größten Teil der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig angehören, unter Leitung der Herausgeber G. Grosche und V. Ziegler in Abstimmung mit den Autoren der ursprünglichen Fassung sowie in Zusammenarbeit der beiden Verlage Nauka, Moskau, und B. G. Teubner, Leipzig.

Die neue Fassung wird als Gemeinschaftsausgabe der beiden genannten Verlage gleichzeitig in deutscher und russischer Sprache erscheinen.

Darüber hinaus gibt die B. G. Teubner Verlagsgesellschaft noch einen Ergänzungsband zu dieser Neubearbeitung heraus, der vor allem von Studenten der Mathematik, Physik sowie einiger mathematikintensiver technischer und ökonomischer Fachrichtungen benötigt wird. Diese „Ergänzenden Kapitel" bilden zusammen mit dem Hauptband ein einheitliches Ganzes.

Unser Foto zeigt den Mitautor der Originalausgabe des Taschenbuches der Mathematik, Prof. *K. A. Semendjajew* (Mitte), sowie die beiden Herausgeber Doz. Dr. *G. Grosche* (links) und Dr. *V. Ziegler* (rechts), beide Karl-Marx-Universität Leipzig.

Eine Aufgabe des Autorenkollektivs des Buches Bronstein/Semendjajew Taschenbuch der Mathematik unter Leitung von Prof. Dr. K. A. Semendjajew

Hydrometeorologisches Wissenschaftliches Zentrum der UdSSR

▲ 1964 ▲ Bei vielen mathematischen Untersuchungen treten kombinatorische Probleme auf, deren Eigenart an folgendem Aufgabenkomplex deutlich wird:

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zehn voneinander verschiedene Bücher auf einem Regal anzuordnen?

b) Wie groß ist die Anzahl der eineindeutigen Abbildungen einer n-elementigen Menge auf sich?

c) Wieviel verschiedene sechsstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 1; 1; 5; 5; 9 bilden?

d) An einem Turnier beteiligen sich 8 Mannschaften. Wieviel verschiedene Tips bezüglich der drei Erstplazierten (in der Reihenfolge des Wettkampfergebnisses) muß man mindestens angeben, um eine richtige Voraussage gemacht zu haben?

e) Wieviel verschiedene Wörter mit 3 Buchstaben kann man aus den 26 Buchstaben des Alphabetes bilden, wobei unberücksichtigt bleibt, ob das durch Zusammenstellung der Buchstaben gewonnene Wort „sinnvoll" ist oder nicht?

f) Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus einer Menge von k (verschiedenen) Elementen r Elemente auszuwählen?

g) Wie groß ist die Anzahl der voneinander verschiedenen Würfe mit zwei voneinander nicht zu unterscheidenden Würfeln?

Zum Titelblatt

Die Abbildung zeigt zwei Spalten des Moskauer *Papyrus Rhind* mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit Seiten 2 und 4, und Höhe 6 Ellen.

Oben: der hieratische Text;
unten: die Umschrift in Hieroglyphen.

Der Text lautet:

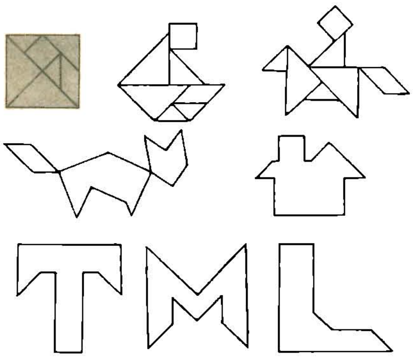
(1) Addiere du zusammen diese 16
(2) mit dieser 8 und mit dieser 4.
(3) Es entsteht 28. Berechne du
(4) $\frac{1}{3}$ von 6. Es entsteht 2. Rech-
(5) ne du mit 28 2mal. Es entsteht 56.
(6) Siehe: es ist 56. Du hast richtig gefunden.

Der hieroglyphische Text wird von rechts nach links gelesen. Die obere Länge 2 und ihr Quadrat 4 sind oben in der Zeichnung angegeben, die untere Länge 4 unten, die Höhe 6 und der Inhalt innen. Die Multiplikation von 28 mit 2 steht links neben der Zeichnung.

Allerlei Kurzweil

1. Gegeben sei ein in Dreiecke und Vierecke unterteiltes Quadrat, siehe Bild. Wer legt die sieben Teile so, daß die abgebildeten Figuren entstehen?

Aus: matematicki list 4/79, Beograd



2. Die gezeichneten Bausteine sind alle 1 cm hoch und haben folgende Längen und Breiten:

A: 5 cm lang, 1 cm breit, ist einfach vorhanden,

B: 4 cm lang, 1 cm breit, ist zweifach vorhanden,

C: 3 cm lang, 1 cm breit, ist zweifach vorhanden,

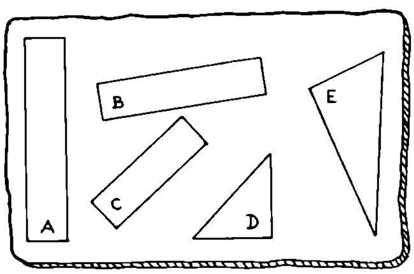
D: 2 cm lang, 2 cm breit, halbiert, ist vierfach vorhanden,

E: 4 cm lang, 2 cm breit, halbiert, ist zweifach vorhanden.

a) Wie groß muß eine Schachtel sein, in die alle Bausteine ohne Leerraum gerade hineinpassen? Wieviel verschiedene Schachteln sind möglich?

b) Welche Maße müßten die Schachteln haben, wenn plötzlich noch ein Stein der Sorte *B* gefunden würde, der auch noch 'rein soll?

Aus: Magazin 11/79, Berlin



3. Löse den (semimagischen) Rösselsprung, und setze für die Silben des Gedichtes der Reihe nach die Zahlen 216 bis 279 in die entsprechenden Kästchen! Du erhältst in jeder Zeile und in jeder Spalte die gleiche Summe.

du	Sie-	Neun	so	so	Hex,	und	Zehn
ist	bracht:	bist	mach	gehn,	und	gleich,	die
ben	reich.	ist's	und	Acht,	Drei	mach	Zwei
voll-	Eins,	und	Ver-	Eins	laß	sagt	mach
thes	lier	mal-	und	so	mal-	Aus	das
eins,	Zehn	He-	Aus	ein-	He-	Sechs,	eins!
die	Goe-	keins.	mußt	ein-	Fünf	ist	stehn!
ist	Du	Vier!	xen-	Das	ver-	xen-	und

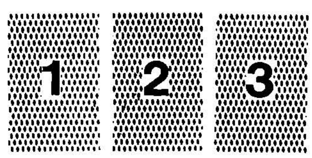
Schuldirektor H. Förg, Schwaz, Österreich

4. Vor dir liegen drei Spielkarten mit der Rückseite nach oben. Einiges wissen wir über sie:

1. Rechts vom König liegen eine oder zwei Damen.
2. Links von der Dame liegen eine oder zwei Damen.
3. Links von einer Karokarte liegen eine oder zwei Pikkarten.
4. Rechts von einer Pikkarte liegen eine oder zwei Pikkarten.

Welche Karten liegen also vor dir?

Aus: Sputnik 11/79, Moskau



5. Die Bewohner dieses Gebirgsortes können nur mit Hilfe der Leiter von einem Haus zum anderen steigen, aber auch längere Spaziergänge machen. Wo führt der richtige Weg von einem Stern (siehe Bild) zum anderen?

Aus: Füles 10/79, Budapest

6. Alles nach Maß: Seitdem Frank mit einem Lineal umzugehen weiß, mißt er alles nach. Kürzlich fragte er seine Oma: „Weißt du, wieviel Zahnpaste in einer Tube ist? – Fast zwei Meter!"

(Lösungen siehe Seite 44.)

Labyrinth