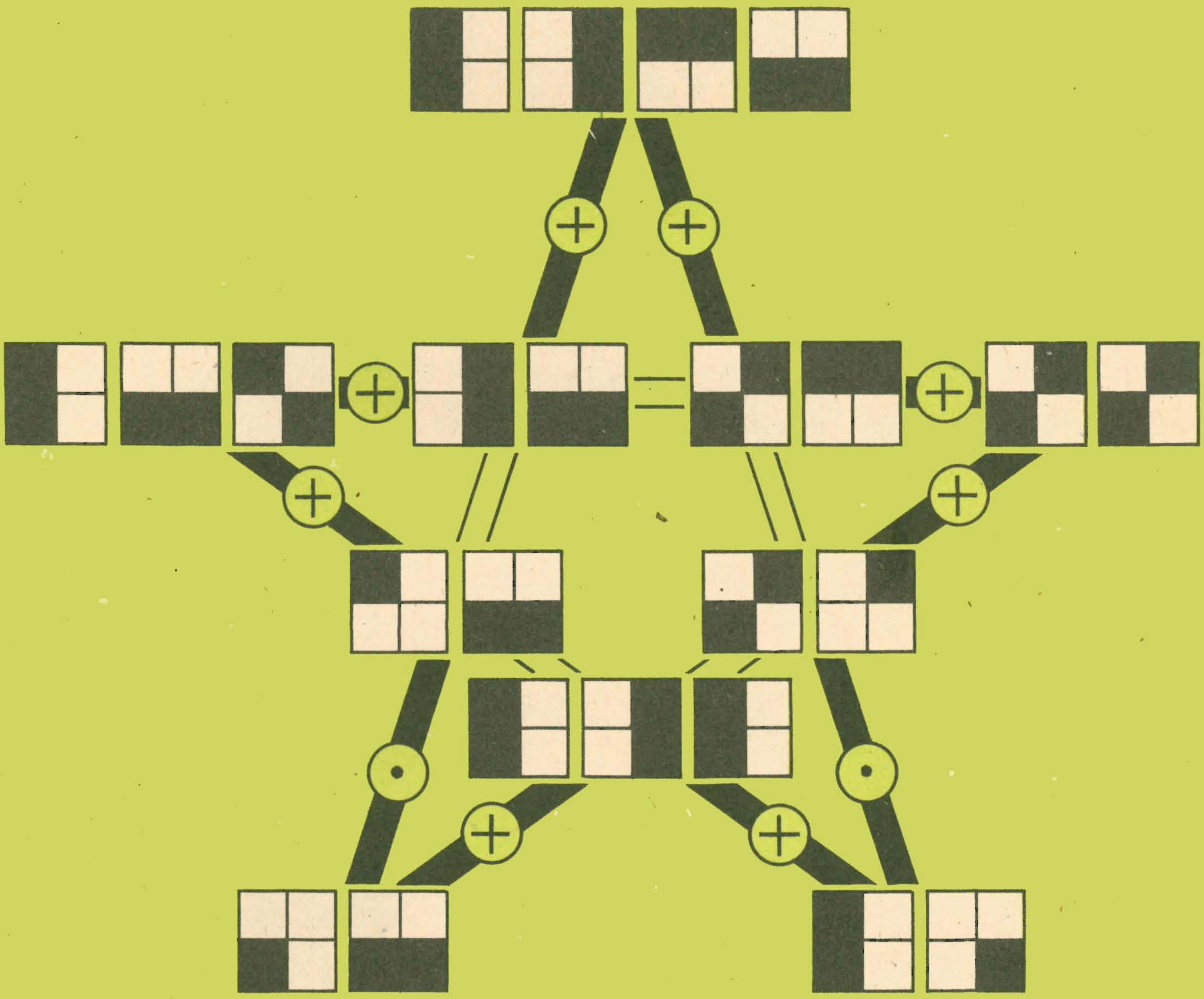
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich. Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: H. F. Bauch (S. 100); H.-J. Kerber (III. U.-Seite); G. Stelzer (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten)
Briefmarken: P. Schreiber (S. 97)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von W. Träger, Döbeln
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 13. Juni 1988
Auslieferungstermin: 11. Oktober 1988

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

97 125 Jahre jednota československych matematikû a fysikû
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

97 Sprachecke
R. Bergmann, Döbeln/P. Hofmann/Dr. G. Liebau (beide Leipzig)

98 Von Teilern, Primzahlen und Primfaktorenzerlegungen
Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der *Humboldt*-Universität zu Berlin

100 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Frank Terpe

101 Ein Legespiel – mathematisch betrachtet
Dr. H. F. Bauch, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

101 Eigenaufgaben der Mathematischen Schülergesellschaft Greifswald

102 Die Konstantenautomatik des SR 1
W. Träger, Döbeln

104 Ein bekanntes geometrisches Problem
Dr. M. Lassak, math./phys. Institut, Bydgoszcz (VR Polen)/
Dr. H. Martini, Sektion Mathematik der Pädag. Hochschule Dresden

106 XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)

107 *alpha*-Schachwettbewerb 1988
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin

108 Die Trio-Würfel
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *K.-Marx*-Universität Leipzig

110 Algorithmengrundstrukturen und ihre Notationsformen
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der *M.-Luther*-Universität Halle

112 In freien Stunden · *alpha*-heiter
Zusammenstellung: Dr. G. Liebau, Leipzig

114 Alphons informiert: Wie läuft der Wettbewerb?

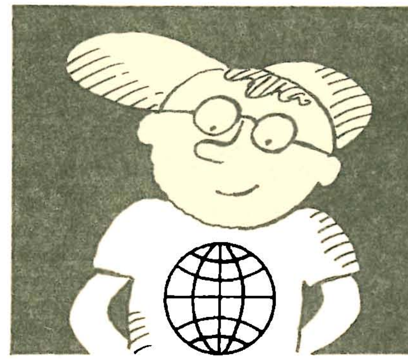
115 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
Zusammenstellung: Dr. W. Fregin/Dr. W. Riehl, beide Leipzig, OStR Th. Scholl, Berlin

117 Lösungen

III-U.-Seite: Schneller als mit dem Rechner! Teil 2
OStR H.-J. Kerber, Neustrelitz

IV.-U.-Seite: Vom Comptator zum Computer
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

125 Jahre jednota československych matematiků a fysiků



Die Gesellschaft der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker *Jčsm+f* beging 1987 ihr 125jähriges Bestehen. 1862 gegründet, gehört sie zu den ältesten nationalen Organisationen von Mathematikern, Physikern, Astronomen und verwandten Wissenschaftlern. (Die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* DMV wurde z. B. erst 1890 gegründet, entsprechende Gesellschaften in Rußland 1864, in England 1865, in Frankreich 1872.)

Von den drei aus diesem Anlaß in der ČSSR erschienenen Briefmarken zeigt eine die Bildnisse der Professoren Jozef Maximilian Petzval (1807 bis 1891), Čeněk Strouhal (1850 bis 1922, Physiker an der Prager Karlsuniversität) und Vojtěch Jarník (1897 bis 1970, Mathematiker an der Karlsuniversität). Am bekanntesten von diesen ist außerhalb der ČSSR vermutlich der Mathematiker und Physiker Petzval, der an den Universitäten von Budapest und Wien wirkte und bei der Berechnung von Fotoobjektiven eine ähnliche Pionierrolle spielte wie der Jenaer Physiker Ernst Abbe (1840 bis 1905) bei der wissenschaftlichen Durchdringung der Mikroskopherstellung.

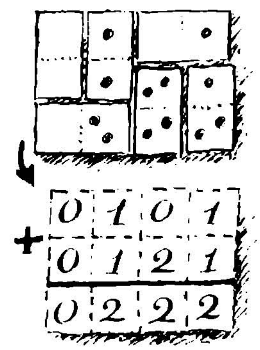
Insgesamt weisen die drei Marken eine Fülle interessanter Motive auf, u. a.

- das Hauptzifferblatt der berühmten astronomischen Uhr am Altstädter Rathaus in Prag, die im 15. Jh. von Meister Hanuš, Mathematiker an der Prager Universität, konstruiert wurde; nach langem Verfall wurde sie seit dem Ende des 18. Jh. mehrfach restauriert,,
- daneben das graphische Bild einer gewissen komplexwertigen Funktion, d. h. einer Funktion, die komplexen Zahlen komplexe Zahlen zuordnet und deren Definitionsbereich daher Teil einer Ebene ist. Die Darstellung des Funktionsverlaufes über dieser Ebene bezeichnet man auch als *analytische Landschaft*,
- eine Illustration über geometrische Konstruktionen im Gelände aus einem französischen Buch *Die Arbeiten des Mars* über Kriegsingenieurkunst von A. M. Mallet (um 1630 bis um 1706),
- die computergraphische Darstellung eines geowissenschaftlichen Sachverhaltes und die sogenannte Brownsche Molekularbewegung.

Professor Ivan Netuka, einer der Initiatoren dieser schönen Marken und selbst ein begeisterter Sammler *mathematischer Briefmarken*, äußerte in einem Gespräch, daß es natürlich immer sehr schwer ist, ein Postministerium für die Herausgabe solcher Marken zu gewinnen, deren Ausgabeanlaß und Motive nur einen sehr kleinen Teil der Postkunden und Philatelisten unmittelbar ansprechen. Als *Köder* dienten in diesem Fall die astronomische Uhr und die historische Illustration, die die Interessen vieler Sammler bedienen.

P. Schreiber

▲1▲ Из шести косточек домино выложен прямоугольник так, что ему соответствует пример на сложение (см. рисунок). Сложите из шести косточек домино (может быть, других) такой же прямоугольник так, чтобы сумма (т. е. число в нижней строчке) была наименьшей.



aus: Quant, Moskau

▲2▲ An Equitable Division

Two men sold their herd of x cows at x dollars per head.

With the proceeds they bought sheep at $ 10 each and a single lamb costing less than $ 10.

Each man received the same number of animals but the one receiving the lamb had to be compensated so as to make the division equitable.

How much money did he receive from the other man?

aus: The Australian Mathematic Teacher

▲3▲ Une barre de fer a pour section un T formé d'un rectangle de 4 cm sur 1,2 cm surmonté d'un rectangle de 6 cm sur 1,5 cm.

La longueur de la barre est 4 m. Calculer la masse de la barre.

Un décimètre cube de fer pèse 7,8 kg. *H.*

Aufgabe zum Titelblatt

Durch Ersetzen von gleichen Symbolen durch gleiche Ziffern und von verschiedenen Symbolen durch verschiedene Ziffern sollen an dem abgebildeten fünfzackigen Stern fünf wahre Gleichungen entstehen.

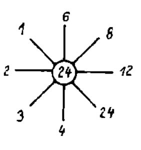
W. Träger, Döbeln

Von Teilern, Primzahlen und Primfaktoren-zerlegungen

Dieser Beitrag ist insbesondere für Euch, liebe Schüler aus Klasse 6, gedacht. Ihr habt Euch zu Beginn des Schuljahres vor allem mit der Teilbarkeitslehre beschäftigt. Durch die folgenden Ausführungen könnt Ihr Euer Wissen und Können zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen vertiefen und weiter vervollkommnen.

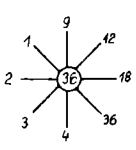
Wir wissen aus dem Mathematikunterricht, was *a ist ein Teiler von b* bedeutet und wie man rationell mit Hilfe eines gedachten *Teilersterns* alle Teiler einer gegebenen von Null verschiedenen natürlichen Zahl ermitteln kann:

a) Teiler von 24:



$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$; also sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 alle Teiler von 24.

b) Teiler von 36:



$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$; also sind 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 und 36 alle Teiler von 36.

Daran wird deutlich, daß man für eine gegebene natürliche Zahl $z (\neq 0)$ eigentlich nur alle Teiler bis zu derjenigen Zahl finden muß, deren Quadrat höchstens gleich z ist: bei 24 also bis zum Teiler 4, da bereits 5^2 größer als 24 ist; bei 36 bis zum Teiler 6, da $6^2 = 36$ ist. Die übrigen Teiler ergeben sich gewissermaßen von selbst.

Wir wissen auch, was man unter einer Primzahl und einer zusammengesetzten Zahl versteht, daß 0 und 1 weder Primzahlen noch zusammengesetzte Zahlen sind und daß man jede zusammengesetzte Zahl in ein Produkt von Primzahlen (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig zerlegen kann. Primzahlen können als *Bausteine* für die zusammengesetzten Zahlen angesehen werden. Dabei kann eine Primzahl auch mehrfacher *Baustein* sein, wie im Beispiel

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ die Primzahl 2.

Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Um eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl zu erkennen, muß man durch Probieren feststellen, ob sie außer 1 und sich selbst noch weitere Zahlen als Teiler hat. Es ist daher günstig, wenn man möglichst viele Primzahlen kennt oder zumindest weiß, wo man zum Beispiel alle Primzahlen bis 100, 1000, ... finden kann. Im *Tafelwerk für die 7. bis 10. Klasse* gibt es eine Tabelle mit allen Primzahlen bis 1009. Man kann sich eine solche Übersicht mit Hilfe eines sehr einfachen, wenn auch etwas schreibaufwendigen Verfahrens selbst herstellen. Dieses Verfahren nennt man nach einem griechischen Gelehrten des Altertums *Sieb des Eratosthenes.* Will man alle Primzahlen bis zu einer Zahl n ermitteln, schreibt man zunächst alle Zahlen von 2 bis n der Reihe nach auf. Man überlegt: Jede zweite Zahl nach der kleinsten Primzahl 2 ist ein Vielfaches von 2, kann also keine Primzahl sein; diese Zahlen werden gestrichen. Die nächste nicht gestrichene Zahl nach 2 muß eine Primzahl sein; es ist 3. Nun streicht man alle auf 3 folgenden Vielfachen von 3; sie sind keine Primzahlen. Die nächstgrößere nicht gestrichene Zahl muß wieder eine Primzahl sein; es ist 5. Dieses Verfahren wird nun solange fortgesetzt, bis man zu einer Primzahl gelangt, deren Quadrat größer als n ist. Dann kann man das Verfahren abbrechen, da nun nur noch Primzahlen übrig geblieben sein können.

Überlege einmal, warum dies so sein muß!

Für $n = 100$ kann man nach der Primzahl 7 bereits aufhören, da für die nächstgrößere nicht gestrichene Zahl, nämlich 11, bereits $11^2 = 121 > 100$ gilt. Für $n = 100$ würde sich (auszugsweise) ergeben:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ..., ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ..., ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ..., ~~52~~, 53, ~~54~~, ..., ~~58~~, 59, ~~60~~, 61, ~~62~~, ..., ~~66~~, 67, ~~68~~, ~~69~~, ~~70~~, 71, ~~72~~, 73, ~~74~~, ..., ~~78~~, 79, ~~80~~, ~~81~~, ~~82~~, 83, ~~84~~, ..., ~~88~~, 89, ~~90~~, ..., ~~96~~, 97, ~~98~~, ~~99~~, ~~100~~.

Man könnte nun denken, daß Primzahlen um so spärlicher auftreten, je weiter man die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, da ja mit der Größe einer Zahl auch die Anzahl ihrer *möglichen* Teiler wächst. Diese Vermutung ist im Prinzip richtig; dann aber ist es recht überraschend, daß die Folge der Primzahlen niemals abbricht:

Zu jeder Primzahl gibt es eine noch größere Primzahl.

Dies läßt sich leicht einsehen:

Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen

$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_k, und p_k wäre die größte dieser Primzahlen. Wir betrachten dann die Zahl

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$, die größer als p_k und zugleich durch keine der Primzahlen p_1, p_2, ..., p_k teilbar ist. (Welcher Rest würde sich bei Division von a durch jede dieser Primzahlen ergeben?) Also muß a entweder selbst eine Primzahl sein, die größer als p_k ist, oder durch eine Primzahl teilbar sein, die von p_1, p_2, ..., p_k verschieden, also ebenfalls größer als p_k sein muß. (Wer sich mit diesem Beweisgedanken noch etwas vertrauter machen will, sollte überprüfen, ob die Zahlen

$2 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ Primzahlen sind oder wie sie sich zerlegen lassen!)

Das heißt: Es muß auf jeden Fall mindestens noch eine Primzahl geben, die größer als p_k ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Annahme, p_k sei bereits die größte Primzahl. Diese Begründung ist schon seit dem Altertum bekannt; sie stammt von dem berühmten griechischen Mathematiker Euklid.

An den Primzahlen bis 100 erkennt man bereits, daß sie in der Folge der natürlichen Zahlen recht unregelmäßig verteilt sind. Zwischen 3 und 5 oder 41 und 43 ist der Abstand gering; zwischen den benachbarten Primzahlen 23 und 29 oder 89 und 97 ist schon eine etwas größere Lücke. Man nennt Paare von Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, Primzahlzwillinge. Wer Lust hat, kann einmal alle Primzahlzwillinge bis 100 oder aus dem Tafelwerk bis 1000 heraussuchen. Das größte Primzahlzwillingspaar unterhalb von 10 000 ist 9929 und 9931. Man hat festgestellt, daß es bis zur Zahl 100 000 insgesamt 1125 solcher Paare gibt, zwischen 100 000 und 200 000 jedoch weniger als 1125. Vielleicht nimmt ihre Anzahl immer mehr ab, und es gibt ein letztes und damit größtes Primzahlzwillingspaar? Vermutlich existieren aber unendlich viele solcher Primzahlzwillinge; ein Beweis dafür ist aber bisher noch nicht gefunden worden. Leicht beweisen jedoch läßt sich, daß die Summe von zwei Primzahlen, die Primzahlzwillinge und größer als 3 sind, stets durch 12 teilbar ist. Versuch es einmal!

Der kleinstmögliche Abstand zwischen benachbarten Primzahlen, die größer als 2 sind, ist also 2. Hingegen gibt es keinen größtmöglichen Abstand benachbarter Primzahlen. Wir zeigen dazu, daß es benachbarte Primzahlen gibt, deren Differenz gleich einer beliebig groß vorgegebenen natürlichen Zahl ist. Mit anderen Worten: In der Folge der natürlichen Zahlen gibt es stets Abschnitte von beliebig vorgegebener Länge, die ausschließlich zusammengesetzte Zahlen enthalten. Man kann leicht zum Beispiel 13 aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen auf die folgende Weise angeben:

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 + 2$ $(= 87\,178\,291\,202)$,
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 + 3$ $(= 87\,178\,291\,203)$,
...
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$ $+ 14$ $(= 87\,178\,291\,214)$.

Diese 13 Zahlen sind als Summen geschrieben, wobei der jeweils erste Summand durch jede der Zahlen 2, 3, ..., 14 teilbar ist und der zweite Summand durch 2 bzw. 3 bzw. ... bzw. 14. Nach dem aus dem Unterricht bekannten Satz *Wenn $n|a$ und $n|b$, so $n|a+b$* muß also die erste der 13 Zahlen den Teiler 2, die zweite den Teiler 3, ..., die letzte den Teiler 14 haben. Diese 13 Zahlen folgen aufeinander und sind zusammengesetzte Zahlen. Sicher kannst du nun auch 20 (oder allgemeiner n) aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen angeben. Überlege dir, wie du sie bilden könntest! Auf diese Weise erhält man allerdings nicht unbedingt die kleinsten derartigen Zahlen. Zum Beispiel sind die zwischen den Primzahlen 113 und 127 oder 317 und 331 gelegenen 13 Zahlen ebenfalls sämtlich zusammengesetzte Zahlen.

Primfaktorenzerlegung und Teiler einer Zahl

Kennt man von einer zusammengesetzten Zahl deren (eindeutig bestimmte) Primfaktorenzerlegung, so kann man mit ihrer Hilfe ebenfalls alle Teiler dieser Zahl ermitteln. Wir wollen uns das an Beispielen verdeutlichen:

Wir betrachten zunächst nur Zahlen, deren Primfaktorenzerlegungen jeweils aus lauter paarweise verschiedenen Primzahlen bestehen.

a) Ist zum Beispiel $n_2 = 7 \cdot 13$, so hat n_2 (außer 1) die folgenden Teiler: Bei Berücksichtigung eines Faktors ergeben sich als Teiler 7 und 13, bei Berücksichtigung der beiden Faktoren die Zahl n_2 $(= 7 \cdot 13 = 91)$ selbst. Die Zahl n_2 hat also insgesamt $1 + 2 + 1$, also 4 Teiler.

b) Ist zum Beispiel $n_3 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, so hat n_3 (außer 1) bei Berücksichtigung eines Faktors die drei Teiler 3, 5 und 7, von zwei Faktoren die drei Teiler $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$ und $5 \cdot 7$, von allen drei Faktoren die Zahl n_3 $(= 105)$ selbst. Sie hat also insgesamt $1 + 3 + 3 + 1$, also 8 Teiler.

c) Ist zum Beispiel $n_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, so hat n_4 (außer 1) bei Berücksichtigung eines Faktors die vier Teiler 2, 3, 7 und 11, zweier Faktoren die sechs Teiler
$2 \cdot 3\,(= 6)$, $2 \cdot 7\,(= 14)$,
$2 \cdot 11\,(= 22)$, $3 \cdot 7\,(= 21)$,
$3 \cdot 11\,(= 33)$ und $7 \cdot 11\,(= 77)$,
dreier Faktoren die vier Teiler
$2 \cdot 3 \cdot 7\,(= 42)$, $2 \cdot 3 \cdot 11\,(= 66)$,
$2 \cdot 7 \cdot 11\,(= 154)$ und $3 \cdot 7 \cdot 11\,(= 231)$, aller vier Faktoren die Zahl n_4 $(= 462)$ selbst als Teiler. Die Zahl n_4 hat also insgesamt $1 + 4 + 6 + 4 + 1$, also 16 Teiler.

Wer will, kann auf diese Weise auch die Teiler der Zahl
$n_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
und deren Anzahl ermitteln.

Man erkennt am systematischen Aufschreiben der Teiler, daß die Anzahl der Teiler nicht abhängig ist von den speziellen Primfaktoren, sondern allein davon, daß die Primfaktorenzerlegung der Zahl n aus 2, 3 bzw. 4 paarweise verschiedenen Primzahlen besteht.

Primfaktorenzerlegung	Anzahl der Teiler
$n_2 = p_1 \cdot p_2$	$1 + 2 + 1$
	\/ \/
$n_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$	$1 + 3 + 3 + 1$
	\/ \/ \/
$n_4 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$	$1 + 4 + 6 + 4 + 1$

Wer etwas nachdenkt, wird gewiß herausfinden, was die eingezeichneten Striche rechts bedeuten und vermuten, welche Summe die Anzahl der Teiler einer Zahl n_5 angibt, deren Primfaktorenzerlegung $n_5 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5$ ist. Wer die Teiler von $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ und deren Anzahl ermittelt hat, kann daran seine Vermutung überprüfen. Für die Zahl $n_6 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6$ ergibt sich auf diese Weise
$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$
als Anzahl der Teiler, also 64.

Das Bilden solcher Summen läßt sich beliebig fortsetzen. Wir wollen hier auf einen Beweis verzichten, daß die so gebildeten Summen tatsächlich stets die Teileranzahl einer natürlichen Zahl, deren Primfaktorenzerlegung aus lauter paarweise verschiedenen Primzahlen besteht, angeben.

Überdies ordnet sich in unsere Übersicht auch der bislang nicht betrachtete Fall ein, daß n_1 selbst eine Primzahl ist: $n_1 = p_1$. Diese hat (außer 1) nur noch sich selbst als Teiler; die Teileranzahl ist also $1 + 1 = 2$.

Wer die Teileranzahlen genauer betrachtet hat, wird vermuten, daß sie stets Zweierpotenzen sind: Bei 2 Primfaktoren gibt es $4 = 2^2$ Teiler, bei 3 Primfaktoren $8 = 2^3$ Teiler, bei 4 Primfaktoren $16 = 2^4$ Teiler, ..., bei 6 Primfaktoren $64 = 2^6$ Teiler. Diese Vermutung läßt sich beweisen. Da sie sich noch als Spezialfall einer allgemeineren Überlegung ergeben wird, werden wir auf einen Beweis an dieser Stelle verzichten.

Wir betrachten nun Zahlen, in deren Primfaktorenzerlegungen Primzahlen auch mehrfach vorkommen können. Solche Zerlegungen schreibt man am zweckmäßigsten mit Potenzen, zum Beispiel $10\,800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. Wie viele Teiler besitzt nun diese Zahl? Offenbar kann die Primfaktorenzerlegung jedes Teilers von 10 800 nur solche Primfaktoren enthalten, die auch in der Zerlegung von 10 800 vorkommen, und jeden von diesen auch höchstens in derjenigen Potenz, in der er in der Zerlegung von 10 800 auftritt. Alle Teiler von 10 800, in deren Zerlegungen jeweils jede der Primzahlen 2, 3 und 5 vorkommt, lassen sich in der Form
$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ mit $x \leqq 4$, $y \leqq 3$, $z \leqq 2$
schreiben. Um darin auch diejenigen Teiler zu erfassen, in deren Zerlegung gewisse dieser Primfaktoren nicht auftreten, läßt man für die Exponenten x, y, z auch den Wert 0 zu und vereinbart, daß $a^0 = 1$ für alle Zahlen $a \neq 0$ gelten soll. Folglich bedeutet zum Beispiel
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2\,(= 1 \cdot 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 5^2)$,
daß der Primfaktor 2 eigentlich nicht vorkommt, der Primfaktor 3 genau einmal und der Primfaktor 5 genau zweimal vorkommen. Überlege dir, was $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0$ oder $2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1$ bedeuten und welche Teiler dies sind!

Nach diesem *Trick* können wir also feststellen: Die Teiler der Zahl $10\,800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ sind alle Zahlen der Form $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, wobei x, y und z natürliche Zahlen mit
$0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 3$, $0 \leqq z \leqq 2$ sind.

Wieviel solcher Produkte $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ gibt es nun? Der Faktor 2 kann mit den Exponenten 0, 1, 2, 3 und 4 vorkommen; dies ergibt also $5\,(= 4 + 1)$ Möglichkeiten. Entsprechend ergeben sich $4\,(= 3 + 1)$ Möglichkeiten für den Faktor 3 sowie $(= 2 + 1)$ Möglichkeiten für den Faktor 5. Da jede Möglichkeit für den Primfaktor 2 mit jeder Möglichkeit für die beiden anderen Primfaktoren gekoppelt (kombiniert) werden kann, ergeben sich daher
$(4 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Teiler.
Man kann diese Teiler nun auch systematisch aufschreiben; versuche einmal, dieses *System* selbst herauszufinden:

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0\,(= 1)$, $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1\,(= 5)$,
$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^2\,(= 25)$, $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0\,(= 3)$,
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1\,(= 15)$, $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2\,(= 75)$,
$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0\,(= 9)$, $2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1\,(= 45)$,
$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^2\,(= 225)$, $2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0\,(= 27)$,
..., $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1\,(= 2160)$,
$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2\,(= 10\,800)$.

Man sieht, daß die Anzahl der Teiler einer Zahl nicht abhängig ist von den speziellen Primfaktoren, die in der Zerlegung der Zahl vorkommen, sondern allein davon, wieviel paarweise verschiedene Primfaktoren und wie häufig (mit welchen Exponenten) diese darin enthalten sind. Die Zahlen $392 = 2^3 \cdot 7^2$ und $1125 = 3^2 \cdot 5^3$ haben zwar nicht die gleichen Teiler, aber die gleiche Anzahl von Teilern, nämlich 12 Teiler.

Die Zahl $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3}$ hat demzufolge genau $(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot (e_3 + 1)$ Teiler. So wie in diesem Beispiel kann man stets überlegen. Hat also eine Zahl n die Primfaktorenzerlegung
$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$,
so sind genau alle Zahlen
$p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots p_k^{x_k}$, wobei
$0 \leqq x_1 \leqq e_1$, $0 \leqq x_2 \leqq e_2$, ...,
$0 \leqq x_k \leqq e_k$ ist, Teiler von n;
ihre Anzahl ist daher
$(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_k + 1)$.

Jetzt läßt sich auch leicht erkennen, daß für eine Zahl, in deren Primfaktorenzerlegung jeder Primfaktor genau einmal vorkommt, die Anzahl der Teiler eine Zweierpotenz sein muß: Wenn
$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdot \ldots \cdot p_k^1$
ist, dann ist die Anzahl der Teiler
$(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot \ldots \cdot (1 + 1)$
$= 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$.

Mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung einer Zahl kann man also stets ermitteln, welche Teiler und wieviel Teiler sie hat. Primfaktorenzerlegungen können aber auch nützlich sein beim Ermitteln des größten ge-

meinsamen Teilers (ggT) oder des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) natürlicher Zahlen. Für die Zahlen
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ und $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$
zum Beispiel können die gemeinsamen Teiler sich nur in der Form $2^x \cdot 3^y$ darstellen lassen, da 5 nicht in der Primfaktorenzerlegung von 1008, 7 nicht in der von 360 vorkommen. Da in der Primfaktorenzerlegung eines gemeinsamen Teilers die Primzahlen 2 und 3 höchstens in einer solchen Anzahl vorkommen können wie sowohl in 360 als auch in 1008, ist der ggT beider Zahlen $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Man könnte aber auch so überlegen: Mit Hilfe des zuvor bereits genutzten *Tricks*, in der Primfaktorenzerlegung nicht auftretende Primzahlen formal mit dem Exponenten 0 hinzuzufügen, kann man die Primfaktorenzerlegungen beider Zahlen jeweils mit den gleichen Primzahlen angeben:

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$,
$1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$.

Die Primfaktorenzerlegung des ggT ergibt sich dann, indem man für jede Primzahl das *Minimum* der Exponenten (den jeweils kleineren, besser: nichtgrößeren) nimmt, also
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Welche Darstellung als *Primzahlprodukt* ergibt sich auf diese Weise für den ggT der teilerfremden Zahlen 75 und 28?

Entsprechend kann man das kgV natürlicher Zahlen ermitteln. Die Primfaktorenzerlegung des kgV von 360 und 1008 muß sämtliche Primzahlen aus der Primfaktorenzerlegung von 360, aber auch sämtliche aus der von 1008 aufweisen, und zwar für jede Primzahl mit dem Maximum (größeren, besser: nichtkleineren) der jeweiligen Exponenten. Das kgV von 360 und 1008 ist also
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 5040$.

Bildet man das Produkt des ggT und des kgV von 360 und 1008, erhält man $72 \cdot 5040 = 362\,880$. Das gleiche Ergebnis liefert das Produkt der Zahlen 360 und 1008. Offensichtlich ist also das Produkt des ggT und des kgV von 360 und 1008 gleich dem Produkt dieser Zahlen. Dies ist kein Zufall. Überlege einmal selbst und begründe anhand der folgenden Gegenüberstellung von Primfaktorenzerlegungen, daß im Produkt des kgV und des ggT von 360 und 1008 alle Primzahlpotenzen der Primfaktorenzerlegung von 360 und ebenso alle Primzahlpotenzen der Zerlegung von 1008 jeweils genau einmal auftreten müssen:

$$\begin{array}{lllllll}
\text{kgV}(360, 1008) = & & 3^2 \cdot & 5 \cdot & 2^4 & & \cdot 7 \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
360 \cdot 1008 & = 2^3 \cdot & 3^2 \cdot & 5 \cdot & 2^4 \cdot & 3^2 \cdot & 7 \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & \\
\text{ggT}(360, 1008) = & 2^3 & & & \cdot & 3^2 &
\end{array}$$

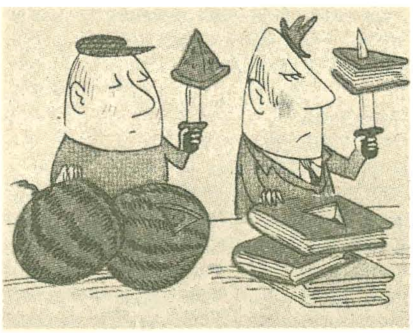
Also muß das Produkt von ggT und kgV der beiden Zahlen gleich deren Produkt sein. Man sieht auch, daß man bei zwei anderen Zahlen in gleicher Weise überlegen kann. Es gilt stets
$\text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) = a \cdot b$.

Versuche herauszufinden, ob auch bei drei Zahlen das Produkt des ggT und des kgV dieser Zahlen gleich dem Produkt der drei Zahlen ist!

Die gewonnene Erkenntnis kann manchmal nützlich sein, wenn man von zwei Zahlen entweder das kgV oder den ggT leicht erkennen kann; dann braucht man zum Ermitteln des ggT bzw. des kgV nur das Produkt der beiden Zahlen durch das kgV bzw. den ggT zu dividieren. Damit läßt sich auch die aus dem Unterricht bekannte Erkenntnis begründen, daß das kgV zweier teilerfremder Zahlen gleich deren Produkt ist.

Das Interessante an der Beschäftigung mit Problemen der Teilbarkeit natürlicher Zahlen besteht darin, daß man vieles durch das Untersuchen von Zahlen selbst entdecken kann. Zugleich stößt man dabei aber auch auf Fragen, die zwar einfach zu verstehen, bis heute aber noch nicht gelöst worden sind.

M. Rehm



Wetkina, aus „Krokodil", UdSSR

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Frank Terpe

Greifswald

▲2910▲ In einem Trapez *ABCD* (*AB* parallel zu *CD*) gelte
$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$ $(0 < k < 1)$.
S sei der Schnittpunkt der Diagonalen.
E und F seien die Diagonalenmittelpunkte.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte des Dreiecks *EFS* und des Trapezes *ABCD* zueinander?

Kurzbiographie

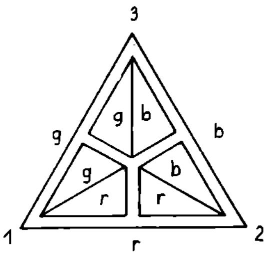
Frank Terpe, geb. 10.10.1929 in Nünchritz bei Riesa, 1948 bis 1954 Studium der Mathematik und Physik an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, ab 1954 wissenschaftlicher Assistent und nach der Promotion zum Dr. rer. nat. wissenschaftlicher Oberassistent am Mathematischen Institut in Greifswald, 1966 Habilitation zum Dr. rer. nat. habil., 1968 Berufung zum Dozenten und 1969 Berufung zum Ordentlichen Professor für Analysis an der Sektion Mathematik der Universität Greifswald, Arbeitsgebiete: Maß- und Integrationstheorie, Anwendungen der Topologie in der Analysis, Elementargeometrie, 1969 bis 1971 Stellvertreter des Sektionsdirektors und von 1971 bis 1980 Direktor der Sektion Mathematik der EMAU, ab 1982 Leiter des Wissenschaftsbereiches Topologie der Sektion Mathematik, Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft in Greifswald.

Abschluß der Sommerkurse der MSG Greifswald 1987;
Sektionsdirektor Prof. Dr. sc. Gronau,
MSG-Verantwortlicher Neubrandenburg W. Mett,
MSG-Vorsitzender Prof. Dr. sc. Terpe,
MSG-Sekretär Dr. Bauch *(v. r. n. l.)*

Ein Legespiel – mathematisch betrachtet

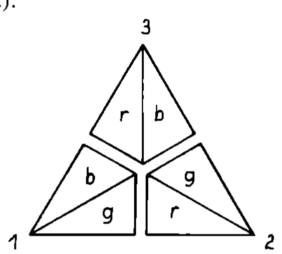
Wir erfinden ein Legespiel.

Bild 1



Es besteht aus drei kongruenten Chips, die sich zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenlegen lassen und wie angegeben auf Vorder- und Rückseite gleich gefärbt sind (Bild 1). Wir wollen sie aus der Form herausnehmen und ganz beliebig wieder hineinlegen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Wie kann man diese verschiedenen Positionen gut beschreiben? Wie können sie auseinander nach gewissen Vorschriften entstehen? Zur Beantwortung dieser Frage numerieren wir die Chips mit 1, 2, 3 und ebenso die Plätze, an denen sie sich in der Ausgangsposition befinden. In einer anderen Position wird sich der Chip i am Platz j befinden und eventuell gekippt sein. Das läßt sich durch die Farben feststellen. Betrachten wir unser Beispiel (Bild 2):

Bild 2



Chip 1 liegt nun auf Platz 2, Chip 2 auf Platz 3 und Chip 3 auf Platz 1. Wir schreiben dafür kurz $(2,3,1)$ oder

$1 \to 2$
$2 \to 3$
$3 \to 1$

Jede Anordnung der Zahlen $1,2,3$ nennen wir eine Permutation (der Länge 3) und schreiben $p = (1p, 2p, 3p)$.
In unserem Beispiel ist $1p = 2$, $2p = 3$, $3p = 1$, d.h. $p = (2,3,1)$.
Durch ein Tripel $x = (1x, 2x, 3x)$ wollen wir kennzeichnen, welche Chips wir kippen (1), und welche wir nicht kippen (0), bevor wir sie auf ihre neuen Plätze legen. Im Beispiel wurde Chip 1 gekippt $(1x = 1)$, ebenso Chip 2 $(2x = 1)$, aber nicht Chip 3 $(3x = 0)$, also $x = (1,1,0)$. Wir können so jede Position a unseres Spiels durch eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3 und ein Tripel aus Nullen und/oder Einsen beschreiben, unser Beispiel liefert
$a = (p,x) = (2,3,1,1,1,0)$.

▲1▲ Wie viele Positionen gibt es?

Jetzt liefert uns jede Position aber auch eine Vorschrift, wie man sie aus der Ausgangsposition
$n = (e,o) = (1,2,3,0,0,0)$ gewinnt:
Der Chip i wird ix-mal gekippt und auf den Platz ip gelegt, um aus n die neue Position $a = (p,x)$ zu erhalten. Eine Anwendung dieser Handlungsanweisung auf eine beliebige Position $b = (q,y)$ anstelle von n kann man so festlegen: Der Chip *am Platz i* wird ix-mal gekippt und auf den Platz ip gelegt.
Frage: Welche Position $c = (r,z)$ erhalten wir, wenn a wie oben und $b = (3,2,1,1,1,0)$ ist?
Wir beantworten die Frage, indem wir zuerst b und dann a ausführen. Betrachten wir Chip 1: Er wird $1y$-mal gekippt $(1y = 1)$ und auf Platz $1q$ gelegt $(1q = 3)$. Nun wird dieser Chip am Platz 3 $3x$-mal gekippt $(3x = 0)$ und auf Platz $3p$ gelegt $(3p = 1)$. Also liegt Chip 1 gekippt auf seinem alten Platz 1. Symbolisch

$1 \to 3 \to 1$
$1 + 0 = 1$,

wobei die zweite Zeile die Kippungen beschreibt. Insgesamt ergibt sich

b a	c
$1 \to 3 \to 1$	$1 \to 1$
$1 + 0 = 1$	$1 = 1$
$2 \to 2 \to 3$	$2 \to 3$
$1 + 1 = 0$	$0 = 0$
$3 \to 1 \to 2$	$3 \to 2$
$0 + 1 = 1$	$1 = 1$

Wir erhalten folglich als neue Permutation $r = (1,3,2)$. Da für $i = 1,2,3$ die Zahl ir gleich $(iq)p$ ist, schreiben wir $r = qp$. Das Tripel $z = (1,0,1)$ ergibt sich durch Addition modulo zwei, aber nicht von ix und iy, sondern natürlich ist $iz = iy + (iq)x$. Wir mußten also aus $x = (1,1,0)$ erst das Tripel
$qx = ((1q)x, (2q)x, (3q)x) = (3x, 2x, 1x)$
$= (0,1,1)$ bilden, um
$z = y + qx = (1+0, 1+1, 0+1)$
$= (1,0,1)$ zu erhalten. Damit ist
$c = (r,z) = (1,3,2,1,0,1)$.
Versucht durch ein analoges Diagramm die folgende Aufgabe zu lösen!

▲2▲ Ändert sich das Ergebnis c, wenn wir a und b vertauschen?

Wir wollen uns auch der Frage zuwenden, wie man ein a' wählen muß, um a rückgängig zu machen, also wieder die Ausgangsposition n zu erhalten. Wir lösen das Problem durch ein Diagramm.

$1 \to 2 \to 1$
$1 + \quad = 0$
$2 \to 3 \to 2$
$1 + \quad = 0$
$3 \to 1 \to 3$
$0 + \quad = 0$

Es ist sehr leicht zu vervollständigen.
Erkennt ihr auch
$p' = (3,1,2)$ und $x' = (0,1,1)$?

▲3▲ Ist auch $a'a = n$?

Ebenso ist es nun möglich, beliebige Gleichungen der Form $ad = b$ oder $d'a = b$ für bekannte a und b zu lösen.

▲4▲ Löst für $a = (2,3,1,1,1,0)$ und $b = (1,3,2,1,1,0)$ obige Gleichungen!

Eine Ergänzung zur Aufgabe 1 ist

▲5▲ Welche Positionen lassen das Dreieck als Ganzes unzerstört?

H. F. Bauch

Eigenaufgaben der Mathematischen Schülergesellschaft Greifswald

Jedes Jahr, 1988 zum achten Mal, finden drei Kurse der Mathematischen Schülergesellschaft der Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität mit Schülern der 9. und 10. Klassen in Greifswald statt. Unterschiedliche Themen – natürlich auch Umgang mit Computern – werden von Wissenschaftlern der Sektion mit den Teilnehmern behandelt. Der Vorsitzende der MSG, Prof. Dr. sc. nat. F. Terpe, fordert die Mitglieder – wie auch schon die Teilnehmer an der Rostocker Bezirksolympiade in Übernahme einer Neubrandenburger Tradition – auf, eigene Aufgaben mitzubringen.

Hier sind einige aus den vergangenen Jahren:

▲1▲ Eine Uhr hat als Zeiger rechteckige Plättchen: großer Zeiger 5 cm × 1 cm, Längen bis zum Drehpunkt 4 cm bzw. 0,5 cm, kleiner Zeiger 4 cm × 1,5 cm, Längen bis zum Drehpunkt 3,5 cm bzw. 0,75 cm.
Wie spät muß es sein, damit möglichst viel von den Zeigern übrigbleibt, wenn die linke Hälfte der Uhr weggesägt wird?

Schüler Alexander Lang, Waren

▲2▲ Zwei Stoffe A und B mit ihren voneinander verschiedenen Dichten a und b werden gemischt.
Ist die resultierende Dichte des Gemisches bei gleichen Masseanteilen oder bei gleichen Volumenanteilen der Stoffe A und B größer?

Schüler Christoph Giese, Anklam

▲3▲ Vor Weihnachten sollen vier Kerzen mit einer Brenndauer von drei Stunden so abgebrannt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
a) am i-ten Sonntag (i = 1, 2, 3, 4) sind i brennende Kerzen zu sehen,
b) die Brenndauer jeder Kerze an jedem Sonntag ist ein ganzzahliges Vielfaches einer Stunde.
Ist das möglich? Wenn ja, so gebe man alle wesentlich verschiedene Lösungen an!

Schülerin Britta Bölter, Greifswald

Rund um den SR 1

Die Konstantenautomatik des SR 1

Aus dem Unterricht in Klasse 7 und aus der Bedienungsanleitung zum SR 1 ist uns bekannt: Die Konstantenautomatik bewirkt, daß beim Lösen einfacher Aufgaben (zwei Zahlen, verknüpft zu Summe, Differenz, Produkt, Quotient oder Potenz) mit dem SR 1 die benutzte Rechenoperation und die zuletzt eingegebene Zahl gespeichert bleiben:

[a] [x] [b] [=] [c] [=] [d] [=]
↗ab ↗cb ↗db

Mit dem angegebenen Ablaufplan wird die Aufgabenfolge ab, cb, db vorteilhaft gelöst: Durch die Speicherung des Teilablaufplanes [x] [b] erhalten wir diesen kurzen Ablaufplan. Es bedeute [a], [b] usw. die Eingabe der jeweiligen Zahlenwerte für die Variablen a, b, ...

In diesem Beitrag soll untersucht werden, wie die Konstantenautomatik beim Lösen komplizierterer Aufgaben mit dem SR 1 wirkt, und unter Benutzung der Konstantenautomatik sollen dann als Anwendung Aufgabenfolgen berechnet werden.

Da bei komplizierteren Aufgaben Konstanten- und Vorrangautomatik meist gleichzeitig wirksam werden, wollen wir uns vorbereitend mit der Vorrangautomatik beschäftigen. Wir beginnen mit einer Problemstellung:

Bei einfachen Aufgaben kann eine falsch eingegebene Operation korrigiert werden, indem man nach der falschen Operationstaste die richtige drückt

[a] [−] [÷] [b] [=]
↗a : b

Bleibt diese Korrekturmöglichkeit auch bei komplizierteren Aufgaben richtig?

▲1▲ a) Welcher Term gehört zu dem angegebenen Ablaufplan?
b) Streiche im Ablaufplan von den beiden unmittelbar aufeinanderfolgenden Operationstastenzeichen jeweils das erste. Welcher Term gehört zu dem so geänderten Ablaufplan? (Die Lösung soll durch Probieren gefunden werden, wobei anstelle der im Ablaufplan auftretenden Variablen geeignete Zahlen einzusetzen sind.)

1. [a] [+] [b] [−] [x] [c] [=]
2. [a] [x] [b] [−] [÷] [c] [=]

Wir erkennen: *Durch das Drücken der richtigen Operationstaste nach einer falschen ist die Korrektur nicht immer möglich. Die zur falschen Operationstaste gehörende Operation wird zwar nicht ausgeführt, jedoch kann durch die falsch gedrückte Operationstaste die Reihenfolge (Vorrang) der Ausführung der Rechenoperationen verändert worden sein.*

Wir erinnern uns und prägen uns ein: *Das Berechnen von Quadratwurzeln, Quadraten, Reziproken, ... mittels der entsprechenden Funktionstasten führt unser Rechner vorrangig vor jeder Rechenoperation aus.*

Rechenoperationen höherer Stufe werden vor solchen niederer Stufe ausgeführt. Dazu die folgende Übersicht:

Funktionstasten
(bzw. Funktionstastenfolgen)

[√], [x²], [1/x], [+/−], [%], [lg], [F] [lg], [ln], [F] [ln], [sin], [F] [sin], [cos], [F] [cos], [tan], [F] [tan]

Operationstasten
für Rechenoperationen ...

3. Stufe: [yˣ]
2. Stufe: [x], [÷]
1. Stufe: [+], [−]

Man beachte aber die Mehrfachbedeutung der Tasten [+/−] und [%]! Durch Betätigen der Vorzeichenwechseltaste [+/−] wird in der Regel die angezeigte Zahl durch ihre entgegengesetzte ersetzt. Wird die Taste [+/−] jedoch betätigt, nachdem eine Zahl mit abgetrennter Zehnerpotenz mittels der Taste [EEX] eingegeben wurde, so wird der Exponent durch den entgegengesetzten ersetzt. Das Wirken der Prozenttaste ist in (*) dargestellt.

Zur Festigung lösen wir noch folgende Aufgabe.

▲2▲ Welcher Term wird jeweils mit den folgenden Ablaufplänen berechnet?

1. [a] [+] [b] [x²] [=]
2. [a] [x] [b] [yˣ] [c] [=]
3. [a] [x] [b] [=] [yˣ] [c] [=]

Nun wollen wir uns der eigentlichen Zielstellung zuwenden. Wir beschränken uns zunächst auf Aufgaben, zu denen es einen Ablaufplan mit genau einem Ergebnistastenzeichen [=], und zwar am Ablaufplanende, gibt. Derartige Aufgaben nennen wir *Startaufgaben*, der zugehörige Ablaufplan heiße *Startplan*. Uns interessiert, wie beim Fortsetzen dieser Startpläne nach rechts die Konstantenautomatik wirkt und welche Aufgabenfolgen damit vorteilhaft gelöst werden können.

Im ersten Schritt soll der Startplan genau ein Operationstastenzeichen und zusätzliche Funktionstastenzeichen enthalten.

▲3▲ a) Gib zu jedem Pfeil an, welcher Term der betreffenden Stelle des Ablaufplanes durch den SR 1 zugeordnet ist!
b) Gib weiterhin an, welcher Teil des Startplanes vom SR 1 gespeichert ist!

1. [a] [x] [b] [x²] [=] [c] [=] [d] [=]
↗α ↗β ↗γ

2. [a] [x²] [+] [b] [√] [1/x] [=] [c] [=] [d] [=]
↗α ↗β ↗γ

Wir erkennen: *In diesem Fall speichert der SR 1 den Teil des Startplanes, der mit dem Operationszeichen beginnt und vor dem Ergebnistastenzeichen endet.*

Im zweiten Schritt soll der Startplan mehrere Operationstastenzeichen gleicher Stufe und eventuell noch Funktionstastenzeichen enthalten. (Den Operationstasten und ihren Zeichen denken wir uns die gleiche Stufe zugeordnet wie den entsprechenden Operationen.)

▲4▲ a) Gib zu jedem Pfeil an, welcher Term der betreffenden Stelle des Ablaufplanes durch den SR 1 zugeordnet ist!
b) Gib an, welcher Teil des Startplanes vom SR 1 gespeichert ist!

1. [a] [+] [b] [−] [c] [=] [d] [=] [e] [=]
↗α ↗β ↗γ

2. [a] [x²] [÷] [b] [x] [c] [√] [=] [d] [=] [e] [=]
↗α ↗β ↗γ

Wir erkennen: *Hier speichert der SR 1 den Teil des Startplanes, der mit dem letzten Operationstastenzeichen beginnt und vor dem Ergebnistastenzeichen endet.*

Im dritten Schritt soll der Startplan mehrere Operationstastenzeichen (verschiedener Stufen) und eventuell noch Funktionstastenzeichen enthalten.

▲5▲ a) Gib wieder an, welche Terme bei den einzelnen Pfeilen im Ablaufplan berechnet werden!
b) Welcher Teil des Startplanes wird im SR 1 gespeichert?

1. [a] [x] [b] [−] [c] [1/x] [+] [d] [÷] [e] [=] [f] [=] [g] [=]
↗α ↗β ↗γ

2. [a] [÷] [b] [x] [c] [√] [yˣ] [d] [=] [e] [=] [f] [=]
↗α ↗β ↗γ

Jetzt speichert unser Rechner den Teil des Startplanes, der mit dem am weitesten rechts stehenden Operationstastenzeichen der niedrigsten vorkommenden Stufe beginnt und vor dem Ergebnistastenzeichen endet.

Das Wirken der Konstantenautomatik

steht in enger Beziehung zu dem der Vorrangautomatik. Das erkennt man, wenn an geeigneten Stellen eines Ablaufplanes die Anzeige und auch der Speicherinhalt (genauer der Inhalt des *Arbeitsspeichers*) angegeben werden. Beachte: Während der Konstantenspeicher (Tasten $\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{x}\to\text{M}}$, $\boxed{\text{M+}}$) eine Zahl speichern kann, speichert der Arbeitsspeicher Befehlsfolgen und Zahlen. Es soll jetzt zur Verdeutlichung zwischen einer Aufgabe und ihrem Ergebnis unterschieden werden. So werde z. B. das Ergebnis der Aufgabe $a : b$ mit $\langle a : b\rangle$ bezeichnet.

$\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \boxed{-}\ \boxed{c}\ \boxed{\times}\ \boxed{d}\ \boxed{\times}$

↗α ↗β ↗γ ↗δ

$\boxed{e}\ \boxed{+}\ \boxed{f}\ \boxed{\times}\ \boxed{g}\ \boxed{=}\ \boxed{h}\ \boxed{=}$

↗ε ↗ζ ↗η ↗ϑ

Pfeil	Anzeige	Inhalt des Arbeitsspeichers
α	a	ax...
β	⟨ab⟩	⟨ab⟩ − ...
γ	c	⟨ab⟩ − cx...
δ	⟨cd⟩	⟨ab⟩ − ⟨cd⟩x...
ε	⟨ab − cde⟩	⟨ab − cde⟩ + ...
ζ	f	⟨ab − cde⟩ + fx...
η	⟨ab − cde + fg⟩	⟨ab − cde⟩ + ⟨fg⟩
ϑ	⟨h + fg⟩	h + ⟨fg⟩

Nun soll geprüft werden, wie die Erweiterung des Startplanes verändert werden darf, damit die Speicherung erhalten bleibt.

▲6▲ Gib zu jedem Pfeil an, welcher Term der betreffenden Stelle des Ablaufplanes durch unseren Rechner zugeordnet ist!

1. $\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}\ \boxed{d}$ ↗α

$\boxed{1/x}\ \boxed{=}\ \boxed{e}\ \boxed{=}\ \boxed{f}\ \boxed{+}\ \boxed{g}$ ↗β ↗γ

$\boxed{=}\ \boxed{h}\ \boxed{=}$ ↗δ ↗ε

2. $\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}\ \boxed{c}\ \boxed{=}$ ↗α ↗β

$\boxed{=}\ \boxed{d}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}\ \boxed{e}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{f}$ ↗γ ↗δ ↗ε

$\boxed{=}\ \boxed{g}\ \boxed{=}$ ↗ζ ↗η

3. $\boxed{a}\ \boxed{\times}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \boxed{c}\ \boxed{x^2}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$ ↗α ↗β

$\boxed{=}\ \boxed{d}\ \boxed{+}\ \boxed{e}\ \boxed{-}\ \boxed{f}\ \boxed{\times}\ \boxed{g}$ ↗γ

$\boxed{=}\ \boxed{h}\ \boxed{=}$ ↗δ ↗ε

Wir erkennen: *Die Speicherung eines Teiles des Startplanes bleibt bei dessen Erweiterung erhalten, wenn diese durch abwechselndes Hinzunehmen von Zahlzeichen und Ergebnistastenzeichen, ergänzt durch Funktionstastenzeichen, erfolgt. Die Speicherung bleibt ebenfalls erhalten, wenn in der Erweiterung Zahlzeichen weggelassen werden.*

Der SR 1 verwendet dann die Zahl, die gerade in der Anzeige sichtbar ist. Die im Arbeitsspeicher enthaltene Zahl und die gespeicherte Operation werden gelöscht und durch neue ersetzt, sobald in der Erweiterung des Startplanes Operationstastenzeichen auftreten. Die neue Speicherung ist bestimmt durch *den* Teil der Erweiterung, in dem das erste Operationstastenzeichen auftritt. Dieser Teil, der als neuer Startplan aufzufassen ist, beginnt nach einem Ergebnistastenzeichen, endet mit einem Ergebnistastenzeichen und enthält im Innern kein Ergebnistastenzeichen.

Ergänzend sei mitgeteilt, daß diese Aussage auch in den Fällen gültig bleibt, in denen vor dem ersten Operationstastenzeichen in der Erweiterung kein Zahlzeichen steht:

$\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{c}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}$ ↗$\frac{a}{\sqrt{b}}$ ↗$\frac{c}{\sqrt{b}}$

$\boxed{-}\ \boxed{d}\ \boxed{=}\ \boxed{e}\ \boxed{=}$ ↗$-\frac{c}{\sqrt{b}} - d$ ↗$e - d$

Weiterhin ist es möglich, daß eine Speicherung gar nicht wirksam wird, sondern sofort aufgehoben und durch eine neue ersetzt wird:

$\boxed{a}\ \boxed{+}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{c}\ \boxed{=}\ \boxed{d}$ ↗a + b ↗(a + b)c

$\boxed{=}\ \boxed{e}\ \boxed{=}$ ↗dc ↗ec

$\boxed{b}\ \boxed{+}\ \boxed{c}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{x}\to\text{M}}\ \boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{\text{MR}}$ ↗b + c

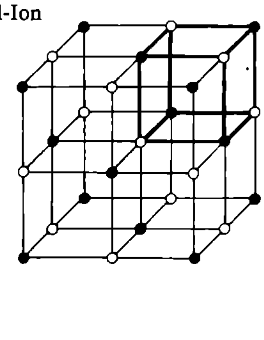
$\boxed{=}\ \boxed{d}\ \boxed{=}\ \boxed{e}\ \boxed{=}$ ↗a : (b + c) ↗d : (b + c) ↗e : (b + c)

Damit überblicken wir in jedem Falle, wie die Konstantenautomatik wirkt.

Zusätzlich wurde mit dem letzten Ablaufplan erkannt: *Das Betätigen von Tasten für Arbeiten mit dem Speicher* ($\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{M+}}$, $\boxed{\text{x}\to\text{M}}$) beeinflußt das Wirken der Konstantenautomatik nicht. Nunmehr wollen wir unsere Erkenntnisse anwenden, um geeignete Aufgabenfolgen vorteilhaft zu lösen. Damit dabei die Konstantenautomatik ausgenutzt werden kann, ist der Rechenablauf entsprechend zu organisieren, d.h., die jeweilige Formel ist gegebenenfalls geeignet umzuformen. Die in den folgenden Aufgaben angegebenen Größenangaben sollen als Näherungswerte (Meßwerte) angesehen werden. Deshalb sind die mit Größenangaben ermittelten Ergebnisse sinnvoll zu runden.

▲7▲ Die Formel für die Länge der Raumdiagonale eines Würfels der Kantenlänge a lautet $e = a\sqrt{3}$.

Modell eines Kochsalzkristalles
$a = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ cm
● Na-Ion
○ Cl-Ion



Berechne für Würfel mit den Kantenlängen
$a_1 = 2{,}24$ dm, $a_2 = 3{,}7$ cm, $a_3 = 5{,}9$ cm, $a_4 = 4{,}58$ m und $a_5 = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ cm (Abstand zweier benachbarter Natrium- und Chlorionen im Kochsalzkristall) die Länge der Raumdiagonalen!

▲8▲ Die Formel für den Oberflächeninhalt A_0 einer Kugel mit dem Radius r lautet $A_0 = 4\pi r^2$.
Berechne die Oberflächeninhalte der Kugeln mit den Radien
$r_1 = 2{,}9$ cm, $r_2 = 3{,}71$ m, $r_3 = 8{,}4$ dm und $r_4 = 6371$ km (mittlerer Erdradius)!

▲9▲ Die Formel für das Volumen V eines Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h lautet $V = \pi r^2 h$.
Berechne für die Kreiszylinder mit dem Volumen 500 cm³ (0,5 l) die jeweiligen Grundkreisradien, wenn die Höhen
$h_1 = 14{,}0$ cm, $h_2 = 17{,}4$ cm, $h_3 = 24{,}1$ cm und $h_4 = 30{,}0$ cm sind!

▲10▲ Für die Längen der Katheten a und b sowie die Länge der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks gilt $c^2 = a^2 + b^2$. Berechne für rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse $c = 6{,}3$ cm jeweils die eine Kathete a, wenn die andere Kathete b 1,2 cm, 2,2 cm, 3,4 cm, 4,2 cm oder 5,1 cm lang ist!

▲11▲ Für den Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_{I} und R_{II} gilt die Formel $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{I}}} + \frac{1}{R_{\text{II}}}$. In einer Parallelschaltung habe der eine Widerstand den Wert $R_{\text{I}} = 50{,}0\ \Omega$. Der andere Widerstand R_{II} kann stufenweise verändert werden. Er nehme dabei die Werte 10,0 Ω, 20,0 Ω, 30,0 Ω, 40,0 Ω, 50,0 Ω, 60,0 Ω, 70,0 Ω, 80,0 Ω, 90,0 Ω und 100,0 Ω an. Berechne den jeweiligen Gesamtwiderstand!

▲12▲ Berechne
$1{,}1^3 + 1{,}2^3 + 1{,}3^3 + 1{,}4^3 + 1{,}5^3 + 1{,}6^3 + 1{,}7^3 + 1{,}8^3 + 1{,}9^3$!

Anleitung: Die Berechnung dieser Summe mit dem SR 1 gelingt unter Benutzung der Taste $\boxed{\text{M+}}$!

Das Benutzen der Konstantenautomatik beim Berechnen der Glieder einer Zahlenfolge bzw. ihrer Summe ist offensichtlich um so vorteilhafter, je mehr Glieder die Zahlenfolge besitzt.

Abschließend sei vermerkt, daß die Wirkung der Konstantenautomatik nicht aufgehoben wird, wenn eine falsch eingegebene Zahl durch einmaliges Betätigen der Löschtaste $\boxed{\text{CE}-\text{C}}$ gelöscht und anschließend die richtige Zahl eingegeben wird. So ist z. B.

$\boxed{a}\ \boxed{-}\ \boxed{b}\ \boxed{=}\ \boxed{c}\ \boxed{\text{CE}-\text{C}}\ \boxed{d}\ \boxed{=}$. ↗a − b ↗d − b

W. Träger

(*) Rund um den SR 1 – Die Prozenttaste. *alpha*, Heft 1/86

Ein bekanntes geometrisches Problem

Welche mathematische Fragestellungen sind wohl besonders interessant und hervorhebenswert? Die Antwort ist gewiß nicht leicht! Zwei Eigenschaften sollten solche Probleme jedoch immer haben: Einer einfachen, verständlichen Formulierung müßte ein wegen seiner Schwierigkeit reizvoller Lösungsweg gegenüberstehen.
Wir wollen ein derartiges Problem aus der Geometrie vorstellen, das trotz umfangreicher Bemühungen vieler Mathematiker seit mehr als 30 Jahren ungelöst ist.
Der erste Abschnitt soll zunächst einfache Begiffe bereitstellen, während unter 2. die eigentliche Problemstellung genannt wird. Danach werden bekannte Teilergebnisse aufgezeigt.

1. Konvexe Mengen

Wir befassen uns mit Punktmengen in der Ebene sowie im dreidimensionalen Raum. (Die folgenden Begriffe können auch im n-dimensionalen Raum, z.B. für $n = 4$, definiert werden, was wir aber dem geometrisch erfahrenen Leser überlassen.) Eine solche Menge C heißt *konvex*, wenn sie zu jedem beliebigen Punktepaar x, y auch die zugehörige Verbindungsstrecke xy vollständig enthält (siehe Bild 1, wo nur die beiden rechts dargestellten Mengen diese Eigenschaft haben).
Eine Menge wird *beschränkt* genannt, wenn man sie in einem Kreis (in der Ebene) bzw. in einer Kugel (im Raum) unterbringen kann (Bild 1: Da eine Halbebene offensichtlich eine unbeschränkte Menge darstellt, ist lediglich die ganz rechts gezeichnete Menge konvex *und* beschränkt.).

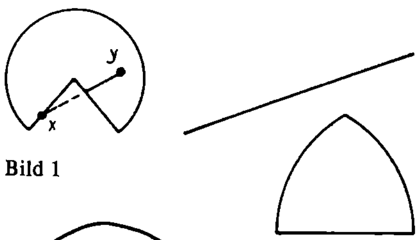


Bild 1

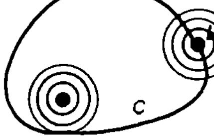


Bild 2

Ein Punkt b soll *Randpunkt* der Menge C heißen (in der Ebene), wenn jeder noch so kleine Kreis um b sowohl Punkte von C als auch solche, die nicht zu C gehören, enthält (Bild 2).
Die Gesamtheit der Randpunkte von C werden wir *Rand* nennen. Im Raum wird der Rand analog definiert, nur muß man für *Kreis* dann *Kugel* setzen. (Zum Beispiel heißt der Rand einer Kugel bekanntlich Sphäre.) Die wohl interessantesten konvexen Mengen sind die konvexen Figuren bzw. Körper. Eine beschränkte konvexe Menge in der Ebene (im Raum) soll *konvexe Figur* (*konvexer Körper*) heißen, wenn sie ihren gesamten Rand sowie echt innere Punkte enthält. Die erstgenannte Bedingung über den gesamten Rand vermeidet die Einbeziehung solch *unbequemer* konvexer Mengen wie etwa des Würfels ohne seine Ecken. Die zweite Aussage schließt Punkte und Strecken in der Ebene bzw. Punkte, Strecken und ebene Figuren im Raum aus.

2. Formulierung des Problems

Jedes Quadrat Q kann durch vier kleinere Quadrate mit Seiten parallel zu denen von Q vollständig überdeckt werden, während drei solche Quadrate nicht ausreichen (warum?). Ein Kreis K kann hingegen durch drei kleinere Kreise überdeckt werden, aber nicht durch zwei (Bild 3).

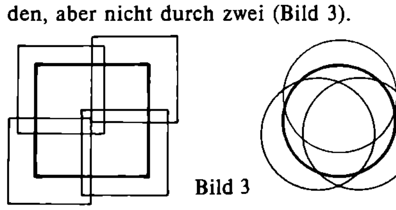


Bild 3

Die Mathematiker Hadwiger und Levi stellten die allgemeine Frage nach der kleinsten Zahl solcher *kleineren Kopien* einer konvexen Figur bzw. eines konvexen Körpers C, mit denen C überdeckbar ist. Diese Zahl sei künftig mit $L(C)$ bezeichnet. Also haben wir augenscheinlich $L(Q) = 4$ und $L(K) = 3$. Doch vor weiteren Betrachtungen sollen diese *kleineren Kopien* einer Menge exakt definiert werden.
Sei z beliebiger Punkt der Ebene oder des Raumes und k eine positive reelle Zahl mit $k < 1$. Wir bilden jeden Punkt x von C auf einen Punkt x' derart ab, daß x' zwischen z und x liegt und das Verhältnis der Abstände $|x'z|$ und $|xz|$ gleich k ist (Bild 4).

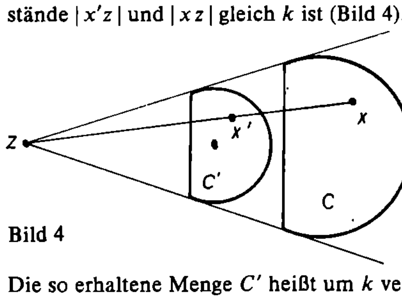


Bild 4

Die so erhaltene Menge C' heißt um k verkleinertes Bild von C. Die beschriebene Abbildung ist, wie ihr leicht seht, eine zentrische Streckung mit Zentrum z und Verhältnis k, d.h. (wegen $0 < k < 1$) insbesondere eine Verkleinerung. Es ist auch üblich, unter unseren Voraussetzungen C' als *gestauchtes Bild* von C zu bezeichnen.

Aufgabe 1

Zeige, daß jede durch Verschiebung von C' erhaltene Menge C'' ebenfalls ein gestauchtes Bild von C ist!
(*Hinweis:* Zentrische Streckungen werden in Klasse 8 behandelt.)

Aus der Lösung dieser Aufgabe folgt sofort, daß für die Überdeckung von C mittels gestauchter Bilder die Betrachtung von Mengen ausreicht, welche aus einem einzigen um k verkleinerten Bild von C durch Verschiebung hervorgehen.
Der bekannte Schweizer Mathematiker Hadwiger formulierte 1957 die folgende *Vermutung*:
Jeder konvexe Körper im n-dimensionalen Raum kann durch 2^n gestauchte Bilder überdeckt werden.
In der Ebene ($n = 2$) konnte diese Vermutung bestätigt werden, für $n = 3$ (also im uns interessierenden Anschauungsraum) hingegen ist die Antwort bis heute unbekannt. Möglicherweise kann euch also erstmals der Beweis gelingen, daß *jeder* konvexe Körper im Raum durch $2^3 = 8$ gestauchte Bilder überdeckt werden kann. Andererseits würde natürlich zur Widerlegung der berühmten Vermutung ein Gegenbeispiel genügen.

Aufgabe 2

Ermittle $L(C)$, falls C als Parallelogramm, regelmäßiges Sechseck, Kugel, Würfel, Tetraeder, regelmäßiges Oktaeder sowie als Prisma mit quadratischer Grundfläche vorliegt! Versuche, deine Aussagen zu beweisen!

3. Das Überdeckungsproblem in der Ebene

Allein für die Ebene bewies Levi im Jahre 1955 den *Satz 1:* Für jede konvexe Figur C, die kein Parallelogramm ist, gilt $L(C) = 3$.
Zusammen mit $L(P) = 4$ (P... beliebiges Parallelogramm) ist dies die positive Antwort auf Hadwigers Vermutung in der Ebene. Unmittelbar drängt sich nun die Frage auf, welchen kleinstmöglichen Wert k annehmen kann, um $L(C) = 4$ für eine beliebige konvexe Figur C auch weiterhin zu gewährleisten. Zum Beweis des diesbezüglichen Satzes 2 benötigen wir einen weiteren Begriff und einen Hilfssatz. Zwei Parallelogramme P und $\bar{P}$ heißen *quasi-dual*, wenn die Seiten von P parallel zu den Diagonalen von $\bar{P}$ und wenn die Seiten von $\bar{P}$ parallel zu den Diagonalen von P sind.

Aufgabe 3

Beweise die folgenden Eigenschaften quasi-dualer Parallelogramme P und $\bar{P}$:
Die Verhältnisse der Seiten von P zu jeweils parallelen Diagonalen von $\bar{P}$ sind gleich (wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit p).
Die Verhältnisse der Seiten von $\bar{P}$ zu den jeweilig parallelen Diagonalen von P sind natürlich auch gleich und, mit q bezeichnet, durch $p \cdot q = \frac{1}{2}$ festgelegt.

Es folgt noch der angekündigte *Hilfssatz:*
In jede konvexe Figur C läßt sich ein Paar quasi-dualer Parallelogramme derart einbeschreiben, daß die insgesamt 8 Ecken Randpunkte von C sind.

Der relativ umfangreiche Beweis dieser Aussage soll unterlassen werden. Dafür beweisen wir aber mit ihrer Hilfe nun *Satz 2* (*Lassak, 1984*):

Jede konvexe Figur C kann durch vier kleinere Bilder mit $k \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ überdeckt werden.

Beweis: Wegen des Hilfssatzes finden wir Punkte a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 nacheinander im Rand von C, so daß die Vierecke $P = a_1a_2a_3a_4$ und $\bar{P} = b_1b_2b_3b_4$ quasi-duale Parallelogramme sind (siehe Bild 5).

Setzen wir $p \leqq q$ (umgekehrt wäre die weitere Beweisführung analog), so folgt wegen $p \cdot q = \frac{1}{2}$ (Aufgabe 3) sofort $p \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wir bezeichnen nun mit a den Mittelpunkt von P. Die Punkte c_1, c_2, c_3, c_4 seien die jeweiligen Schnittpunkte der paarweisen Verlängerungen der Strecken a_1b_4 und a_2b_2, a_2b_1 und a_3b_3, a_3b_2 und a_4b_4 sowie a_4b_3 und a_1b_1 (siehe wiederum Bild 5).

Da a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 aufeinanderfolgende Punkte im Rand von C sind, ist C enthalten in der *sternförmigen* Vereinigungsmenge der Vierecke
$aa_1c_1a_2$, $aa_2c_2a_3$, $aa_3c_3a_4$ und $aa_4c_4a_1$.

Die zentrische Streckung mit Zentrum c_i und Verhältnis p wird fortan durch H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) repräsentiert.

Aus $H_1(b_4) = a_1$, $H_1(b_2) = a_2$, der Parallelität der Strecken a_1a und b_4b_3 sowie der Parallelität von a_2a und b_2b_3 folgt, daß $H_1(C)$ das Dreieck aa_1a_2 überdeckt. Sei y ein im Dreieck $a_1a_2c_1$ liegender Punkt aus C. Da $H_1(C)$ konvex ist und die Punkte a_1, a_2, $H_1(y)$ enthält, liegt auch das gesamte Dreieck $a_1a_2H_1(y)$ in $H_1(C)$, insbesondere der Punkt y. Demnach enthält $H_1(C)$ jenen Teil von C, der im Viereck $aa_1c_1a_2$ liegt. In gleicher Weise sind die Teile von C, welche in den Vierecken $aa_2c_2a_3$, $aa_3c_3a_4$ und $aa_4c_4a_1$ liegen, Teilmengen von $H_2(C)$, $H_3(C)$ und $H_4(C)$, w. z. b. w.

4. Teilergebnisse im Raum

Die räumliche Fassung der Hadwigerschen Vermutung, daß also jeder konvexe Körper durch $2^3 = 8$ gestauchte Bilder überdeckbar sei, ist bislang, wie bereits erwähnt, ohne Beweis bzw. Gegenbeispiel geblieben. Da keine zwei Ecken eines Parallelepipeds (siehe Bild 6, linke Seite) zugleich durch ein gestauchtes Bild dieses Polyeders überdeckt werden können, ist der gesamte Körper auch nicht durch sieben kleinere Bilder überdeckbar. Dieses Beispiel zeigt, daß die Zahl 8 nicht verkleinert werden kann.

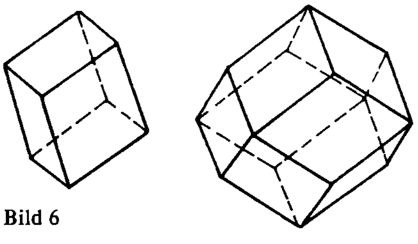


Bild 6

Für die exakte Formulierung einiger Teilergebnisse brauchen wir noch drei einfache Begriffe: Eine Ebene durch einen Randpunkt b eines konvexen Körpers C wird *Stützebene* von C genannt, wenn der gesamte Körper C in einem Halbraum bezüglich dieser Ebene liegt. Ein Randpunkt von C heißt *regulär*, wenn es nur genau eine Stützebene an C durch ihn gibt, ansonsten *singulär*. Zum Beispiel sind die Ecken und Kantenpunkte des Würfels singulär, während alle Randpunkte der Kugel regulär sind. Im Jahre 1960 bewies der Moskauer Mathematiker Boltjanski *Satz 3*:

Ein konvexer Körper mit ausschließlich regulären Randpunkten kann stets durch vier gestauchte Bilder überdeckt werden. Ein einfacher Beweis (der n-dimensionalen Verallgemeinerung) dieses Satzes kann in dem populären Buch (*) nachgelesen werden. Boltjanskis Aussage wurde neuerlich erweitert. So konnte der Georgier Charasischwili zeigen, daß $L(C) = 4$ bestehen bleibt, wenn C nicht mehr als vier singuläre Randpunkte hat. Andererseits bewies der Mathematiker Weißbach aus Magdeburg, daß $L(C) = 4$ sogar bei Existenz beliebig vieler singulärer Randpunkte gilt, die allerdings nicht *zu spitz* sein dürfen.

Eine andere Möglichkeit der Gewinnung von Teilergebnissen zu unserem Überdeckungsproblem ist die Beschränkung auf konvexe Körper mit Mittelpunkt. In den sechziger Jahren konnte der englische Mathematiker Rogers für jeden solchen Körper C eine Abschätzung im n-dimensionalen Raum finden, die für $n = 3$ die Ungleichung $L(C) \leqq 148$ erbringt, während Lewin und Petunin aus Woronesh (mit einer ebenfalls n-dimensionalen Abschätzung) $L(C) \leqq 64$ für den Anschauungsraum vorlegten. Der Vergleich dieser Schranken mit der vermuteten Zahl 8 zeigt so recht die Schwierigkeit des Problems. 1984 konnte dann endlich die Hadwiger-Vermutung für zentralsymmetrische konvexe Körper bestätigt werden.

Es gilt nämlich *Satz 4* (*Lassak 1984*):

Jeder konvexe Körper mit Mittelpunkt kann durch acht gestauchte Bilder überdeckt werden.

Man könnte vermuten, daß für alle konvexen Körper mit Mittelpunkt, die kein Parallelepiped sind, bereits jeweils sechs gestauchte Bilder ausreichen. Doch sogar für die Polyeder in dieser Menge ist dies unbewiesen.

Fordert man allerdings, daß nicht nur das konvexe Polyeder sondern auch jede seiner Seitenflächen selbst einen Mittelpunkt hat (also zentralsymmetrisches Polygon ist), so genügen tatsächlich sechs gestauchte Bilder, wenn man allein die Parallelepipede ausschließt. Solche Polyeder heißen Zonoeder und spielen in Geometrie und Kristallographie eine bedeutende Rolle. Bild 6 zeigt zwei Zonoeder, ein Parallelepiped und ein Rhombendodekaeder.

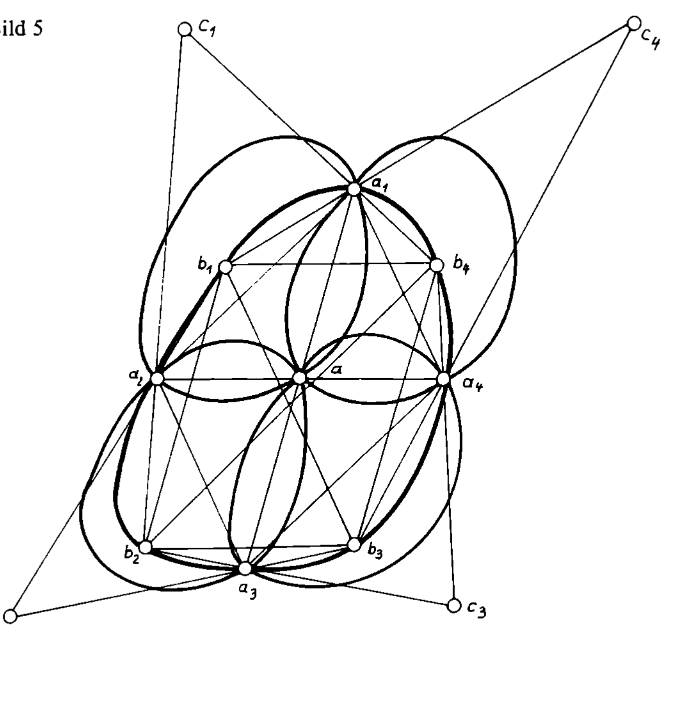
Es gilt also *Satz 5* (*Martini 1985*):

Jedes Zonoeder, das kein Parallelepiped ist, kann durch sechs gestauchte Bilder überdeckt werden.

Abschließend sei bemerkt, daß dem erstgenannten Autor 1984 der Beweis von $L(C) \leqq 20$ für jeden beliebigen konvexen Körper C gelang.

M. Lassak/H. Martini

Bild 5



(*) W. G. Boltjanski, I. Z. Gochberg: Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 16. bis 19. Mai 1988

Olympiadeklasse 10

271041 Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

271042 Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

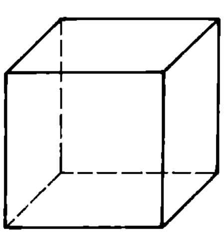
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3), \qquad (1)$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1). \qquad (2)$$

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Von den nachstehenden Aufgaben 271043 A und 271043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

271043 A Das Bild wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.



Zeigen Sie, daß dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!

Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen! Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der das Bild entstehen würde! Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

271043 B Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt: Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2, \qquad (1)$$

$$b' = 2ab \qquad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird): Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a, b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d. h.,

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right| \text{ gilt.}$$

271044 Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10\,cm$ und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, daß der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und daß sich k_1 und k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $\overline{P_1P_2} = 10$ cm gilt.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!

Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z. B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

271045 Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:

(1) Endet ein Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.

(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.

(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.

(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden. Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendungen sind zugelassen.

Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

271046 Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn für reelle Zahlen

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$

gilt, daß jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leqq x \leqq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_5b_5) \leqq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots + a_5^2 + b_5^2 \leqq \frac{5}{2}\cdot(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_5b_5).$$

Olympiadeklassen 11/12

271241 In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind. Ferner sei F eine Menge von 1988 verschiedenen Farben.

Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F erhält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

271242 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$1\cdot x^3 + 9\cdot y^2 + 8\cdot y + 8 = 1988, \qquad (1)$$

$$1\cdot y^3 + 9\cdot z^2 + 8\cdot z + 8 = 1988, \qquad (2)$$

$$1\cdot z^3 + 9\cdot x^2 + 8\cdot x + 8 = 1988. \qquad (3)$$

271243 Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben

$a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i = 1, \ldots, n$

derart bilden, daß

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1, \ldots, n-1$ gilt?

271244 Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2\ldots P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leqq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.

Die Gerade sei so gelegt, daß sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d. h., daß die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:

(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2\ldots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}\ldots P_nM$ sind einander gleich.

(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2\ldots P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}\ldots P_nM$ sind einander gleich.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

271245 Es sei (x_n) die durch

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

definierte Zahlenfolge.

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Von den nachstehenden Aufgaben 271246 A und 271246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

271246 A Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z. B. Werfen einer Münze) festgelegt

wird, wer diesen Apfel erhält. Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred günstig genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende, sondern während des gesamten Vorgangs niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.
Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür, daß ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.
a) Man ermittle $w(4)$.
b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geqq 2$.

271246 B Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ und für je n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $0 \leqq a_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, für die
$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$
gilt.

Die XXVII. OJM der DDR fand in der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* in Erfurt vom 16. Mai bis zum 19. Mai statt.

Einen ersten Preis in Klasse 10 erhielten:
Ingrid Voigt, Spezialschule Leipzig;
Carsten Deus, Steffen Gerlach (Kl. 9), beide Spezialschule *Hans Beimler*, Karl-Marx-Stadt;
Raymond Hammecke, Spezialschule Erfurt (Kl. 9)

Einen ersten Preis in Klasse 11/12 erhielten:
Dirk Liebscher, Spezialschule *G. Thiele*, Kleinmachnow;
Martin Welk, EOS E. Abbe, Eisenach;
Andreas Siebert, Spezialschule *H. Hertz*, Berlin (Kl. 11);
Jan Fricke, 5. POS *F. Wolf*, Pasewalk (Kl. 10)

Einen zweiten Preis erhielten 14 Schüler, einen 3. Preis 33 Schüler und eine Anerkennungsurkunde 32 Schüler.
An der OJM nahmen 172 Schüler, davon 22 Mädchen, teil.

Die Internationale Mathematikolympiade wird im Juli dieses Jahres in Canberra/Australien stattfinden.

Buchtips für Schachfreunde

Ernst Bönsch

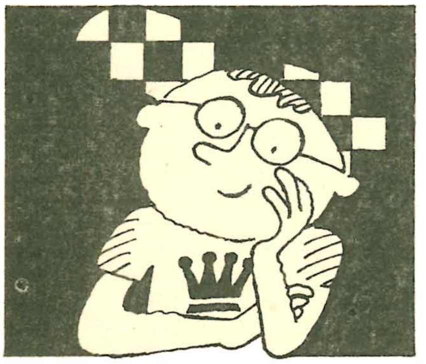
Kleines Lexikon Schach

144 Seiten, 30 Diagramme
Bestell-Nr. 671 728 5 Preis: 8,50 M

Issak, M. Lindner

Das Schachgenie Capablanca

320 Seiten, 15 Diagramme
Bestell-Nr. 671 733 0 Preis: 16,50 M
beide Titel: Sportverlag, Berlin



alpha-Schachwettbewerb 1988

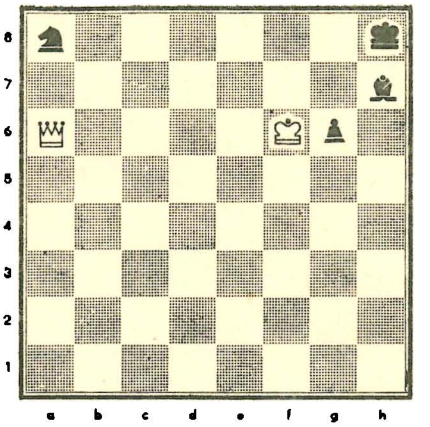
Zum 6. Mal fordert *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!
Unsere Knobelei soll Schachfreunden als Anregung dienen und neue Interessenten ermuntern, am Wettbewerb teilzunehmen.
Gegenüber den vorangegangenen Wettbewerben präsentiert sich dieser in etwas veränderter Gestaltung. Diesmal gilt es, nur vier Schachaufgaben mit der Forderung „Matt in 2 Zügen“ richtig zu lösen. Der 6. *alpha*-Schachwettbewerb bietet dabei eine Premiere. Die Aufgabe Nr. 2 ist der erste Urdruck (Erstveröffentlichung eines Schachproblems), der in *alpha* erscheint. Der populäre Schachproblemkomponist Fritz Hoffmann (Weißenfels) stellte diese Aufgabe freundlicherweise zur Verfügung.
In allen vier Aufgaben beginnt Weiß und setzt Schwarz trotz bester Gegenwehr mit dem zweiten Zug matt. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.
Mögen diese vier Aufgaben allen Teilnehmern schöne Mußestunden bereiten, wenngleich bis zum Erreichen der Lösungen einige Fallstricke und Verführungen zu erkennen und zu durchschauen sind.

Unter den Teilnehmern, die die Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt. In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 31. 12. 1988 unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

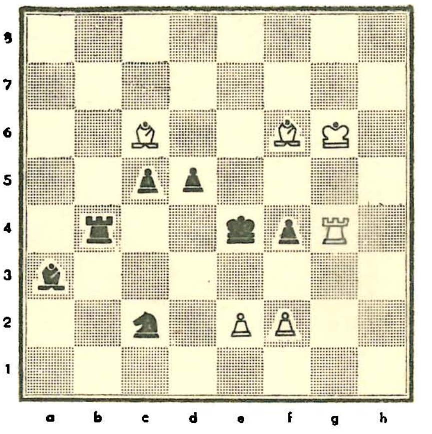
Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1989 veröffentlicht.

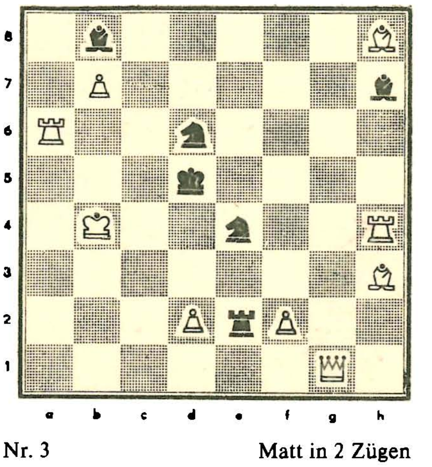
Schon gewußt?
Das Schach entstand vermutlich vor 2000 bis 2500 Jahren in Indien, um das Jahr 1000 kam es nach Europa. Weltmeisterschaften werden seit 1886, Europameisterschaften seit 1957 ausgetragen.



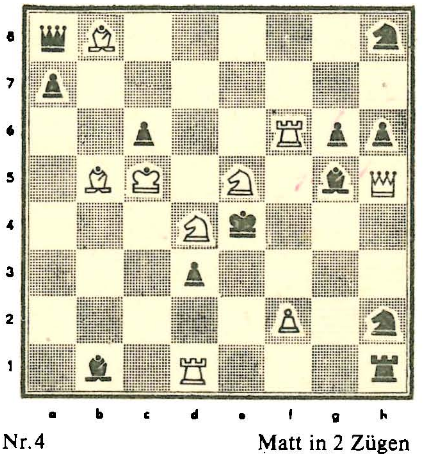
Nr. 1 Matt in 2 Zügen



Nr. 2 Matt in 2 Zügen



Nr. 3 Matt in 2 Zügen



Nr. 4 Matt in 2 Zügen

Die Trio-Würfel

Wir wollen euch heute ein selbsterdachtes logisches Spielzeug, die Trio-Würfel, vorstellen. Sie gestatten vielfältige Baumöglichkeiten und bergen auch manch kniffliges Problem in sich.

Herstellung der Trio-Würfel

Als *Trio-Würfel* (Dreifarben-Bauwürfel) bezeichnen wir einen Bausatz von 27 gleich großen Würfeln, die mit drei Farben, (z. B.) Blau, Gelb und Rot, so gefärbt sind, daß mit ihnen der Zusammenbau eines äußerlich sowohl blauen, gelben als auch roten $3\times3\times3$-Würfels möglich ist, wobei der Bausatz eine symmetrische Färbung hat, d. h. eine beliebige Permutation der drei Farben die Färbung des Bausatzes nicht verändert.

Das Bild 1 zeigt die Netze der 27 Trio-Würfel, die durch Farbanstrich bzw. Bekleben mit Buntpapier leicht herstellbar sind, wobei ihr nach folgender Färbungsvorschrift verfahren könnt:

Stellt 27 gleich große Würfel in fünf Reihen zu je 3, 6, 6, 6 und 6 Würfeln auf (vgl. Bild 1) und färbt sie wie folgt (D = Deckfläche, G = Grundfläche, V = Vorderfläche, R = Rückfläche, LS = linke Seitenfläche, RS = rechte Seitenfläche):

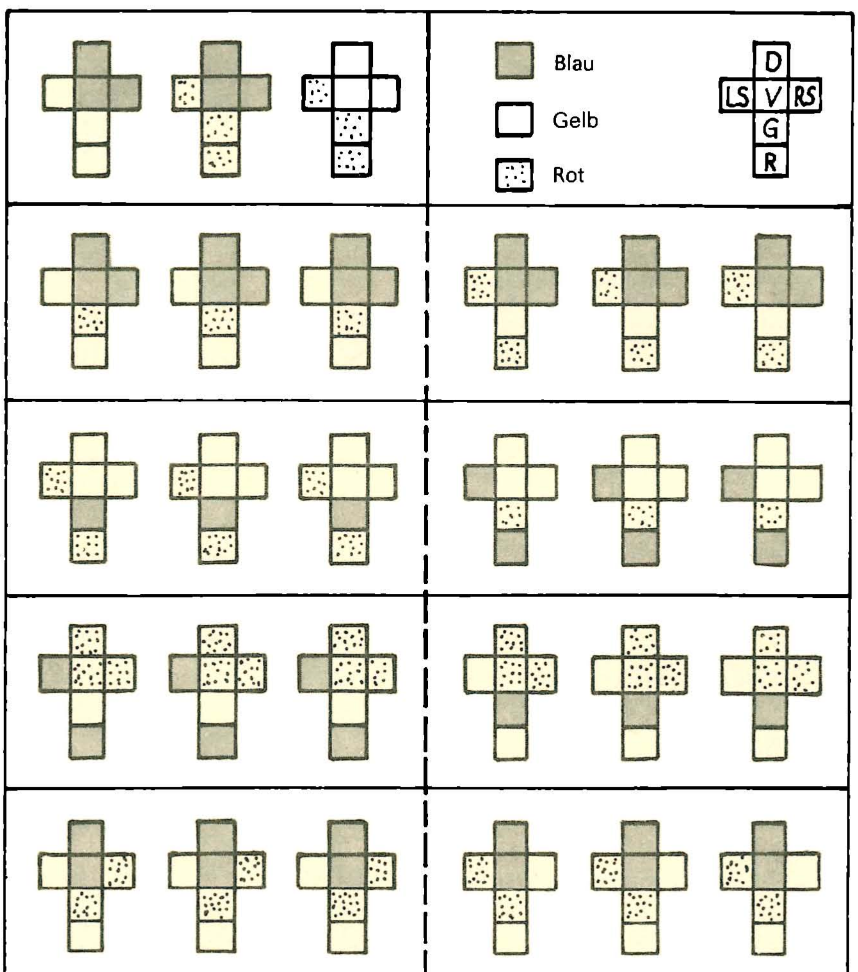
1. Reihe: V, D und RS werden beim linken und mittleren Würfel blau, beim rechten Würfel gelb gefärbt. Die drei Restflächen werden beim linken Würfel gelb sowie beim mittleren und rechten Würfel rot gefärbt.

2. Reihe (3. Reihe, 4. Reihe): V, D und RS aller 6 Würfel werden blau (gelb, rot) gefärbt. Man bildet nun zwei Gruppen zu je drei Würfeln. Bei der linken Gruppe werden R und LS gelb (rot, blau) und G rot (blau, gelb), bei der rechten Gruppe R und LS rot (blau, gelb) und G gelb (rot, blau) gefärbt.

5. Reihe: V und D aller 6 Würfel werden blau gefärbt.

Man bildet wieder zwei Gruppen zu je drei Würfeln. Bei der linken Gruppe werden R und LS gelb sowie G und RS rot, bei der rechten Gruppe R und RS gelb sowie G und LS rot gefärbt.

Bild 1: Die Trio-Würfel (Würfelnetze)



Spielmöglichkeiten und Probleme

Mit den Trio-Würfeln können ein-, zwei- bzw. dreifarbige Körper (Würfel bzw. Gebäudemodelle) gebaut werden, wobei der Reiz bzw. die Schwierigkeit darin besteht, daß man mit den zur Verfügung stehenden Würfel-Farbflächen haushalten muß.

Baut man etwa beim Zusammenbau eines einfarbigen roten Würfels eine rote Fläche ins Innere ein, so fehlt diese am Schluß. Der Fehler ist aber durch Austausch des fälschlich eingebauten Würfels leicht korrigierbar. Da bei den Trio-Würfeln jede Farbe gleichwertig auftritt, so ist natürlich jedes Modell nur ein Vertreter einer Klasse von Modellen, die sich lediglich durch Permutation der Farben unterscheiden. Der Bau eines Modells wird wesentlich schwieriger, wenn man fordert, daß die *einfache Anschlußbedingung* (je zwei im Inneren aufeinanderliegende Würfelflächen haben gleiche Farbe) bzw. die *verschärfte Anschlußbedingung* (aufeinanderliegende Schnittflächen des Modells sind gleichfarbig) erfüllt sind. Löst nun mit Hilfe der selbstgebauten Trio-Würfel folgende Aufgaben:

▲1▲ Baut die in den Bildern 2 und 3 dargestellten Würfel und Gebäudemodelle (zunächst ohne Beachtung einer Anschlußbedingung)!

▲2▲ Baut einen einfarbigen (etwa blauen) Würfel, der nur die einfache Anschlußbedingung erfüllt!

▲3▲ Baut einen einfarbigen (etwa gelben) Würfel, der die verschärfte Anschlußbedingung erfüllt! Entwickelt hieraus eine rationellere (als die obige) Färbungsvorschrift zur Herstellung der Trio-Würfel!

▲4▲ Greift unterschiedliche Trio-Würfel heraus und baut sie vergrößert im Format $2\times2\times2$ bzw. $3\times3\times3$ nach!

▲5▲ Überlegt euch, ob mit den Trio-Würfeln gleichzeitig ein blauer, ein gelber und ein roter $2\times2\times2$-Würfel gebaut werden kann!

▲6▲ Gebt Beispiele für farbige Gebäudemodelle an, die mit den Trio-Würfeln nicht gebaut werden können!

Zur Färbung der Trio-Würfel

Ausgangspunkt für die Färbung der 27 Trio-Würfel war das folgende *Färbungsproblem*:

Kann man einen Würfelsatz, bestehend aus 27 gleich großen Würfeln, mit drei verschiedenen Farben so färben, daß mit ihm der Zusammenbau eines $3\times3\times3$-Würfels mit einfarbiger Oberfläche, wobei jede der drei Farben die Oberflächenfarbe sein kann, möglich ist? Wenn ja, so sind alle derartigen Färbungen, die wir *zulässige Färbungen* nennen wollen, anzugeben! Dabei sollen die Färbungen von zwei Würfelsätzen als *gleich* angesehen werden, wenn man die Würfelsätze, betrachtet als Würfelmengen, eineindeutig so aufeinander abbilden kann, daß je zwei dabei einander zugeordnete Würfel die gleiche Färbung (bis auf Würfeldrehung) besitzen. Wir wollen zur Färbung o. B. d. A. die drei Farben Blau, Gelb und Rot wählen.

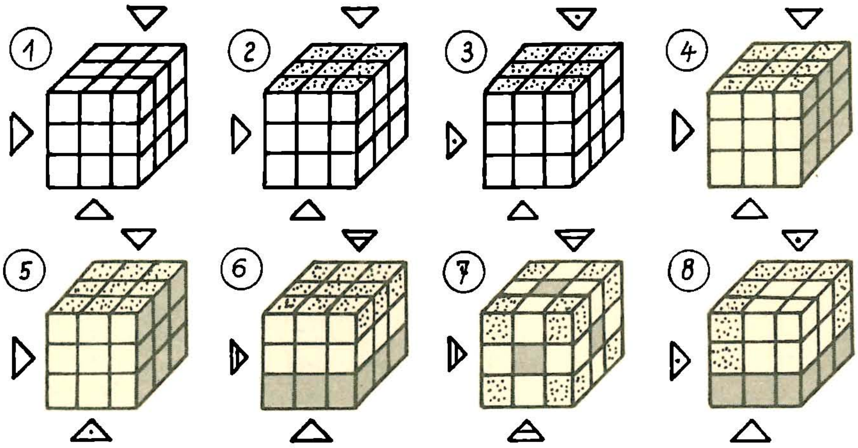


Bild 2: Einige Würfelmodelle aus Trio-Würfeln
Zeichenerklärung: ▩ Blau ☐ Gelb ▦ Rot

▷ (▷, ▷): Die linke Seitenfläche ist blau (gelb, rot)
▽ (▽, ▽): Die Rückfläche ist blau (gelb, rot)
△ (△, △): Die Grundfläche ist blau (gelb, rot)
▷ (▽, △): Die linke Seitenfläche (die Rückfläche, die Grundfläche) hat dieselbe Farbgebung wie die rechte Seitenfläche (die Vorderfläche, die Deckfläche)

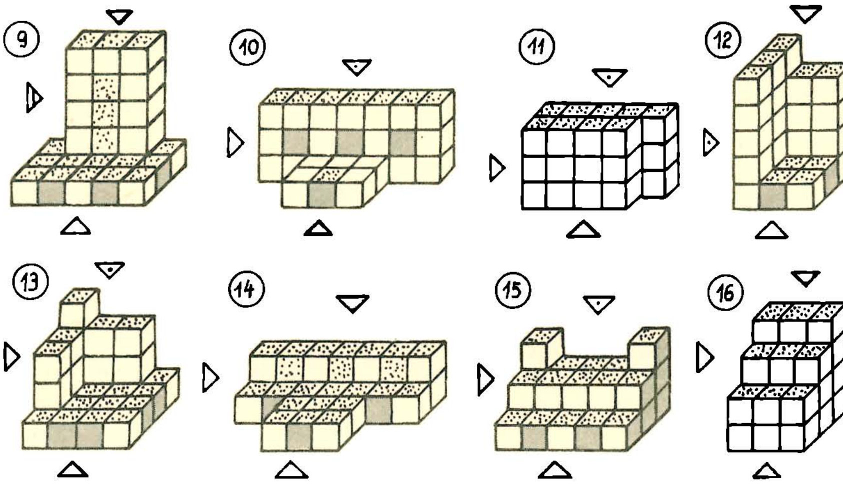


Bild 3: Einige Gebäudemodelle aus Trio-Würfeln, Zeichenerklärung siehe Bild 2

Analyse des Problems:
Nehmen wir an, unser aus 27 Würfeln bestehender Würfelsatz sei bereits zulässig gefärbt, und ein z. B. gelber $3 \times 3 \times 3$-Würfel sei daraus gebaut. Dann müssen offenbar 8 Würfel (die Eckwürfel) je drei eine Ecke bildende gelbe Flächen, 12 Würfel (die Kantenwürfel) je zwei in einer Kante zusammenstoßende gelbe Flächen und 6 Würfel (die Flächenwürfel) je eine gelbe Fläche tragen. Es müssen also 54 gelbe Flächen auf 26 Würfeln nach obiger Anordnung liegen. Die innen liegenden 108 Flächen und somit der nicht sichtbare 27. Würfel (der Zentralwürfel) müssen folglich nur die beiden anderen Farben Blau und Rot tragen, denn für den Bau des blauen bzw. roten $3 \times 3 \times 3$-Würfels benötigt man ja ebenfalls je 54 blaue bzw. 54 rote Flächen. Daraus ergibt sich, daß ein zulässig gefärbter Würfelsatz genau drei Würfel, die jeweils als Zentralwürfel fungieren, enthalten muß, die nur zwei Farben (in gegenseitiger Kombination auf je drei Eckflächen) tragen, und daß die anderen 24 Würfel alle drei Farben tragen müssen, wobei 6 Würfel je drei blaue Eckflächen, 6 Würfel je drei gelbe Eckflächen, 6 Würfel je drei rote Eckflächen (jeweils zusammen mit zwei Flächen mit gemeinsamer Kante der zweiten und eine Fläche der dritten Farbe), und 6 Würfel die drei Farben auf je zwei Flächen mit gemeinsamer Kante tragen müssen.

Lösung des Problems:
Beschreiben wir jeden Würfel unseres Würfelsatzes durch ein geordnetes Farbtripel (b, g, r), wobei b die Anzahl seiner blauen, g seiner gelben und r seiner roten Flächen angibt (b, g, r ganzzahlig; $0 \leq b, g, r \leq 6$; $b + g + r = 6$), so muß nach obigen Überlegungen ein zulässig gefärbter Würfelsatz (zunächst noch ohne Berücksichtigung der geometrischen Anordnung der Farben auf einem solchen Würfel) enthalten:
- die 3 Würfel (3, 3, 0), (3, 0, 3), (0, 3, 3), (1)
- 6 Würfel vom Typ (2, 2, 2), (2)
- x_1 Würfel vom Typ (3, 2, 1) und x_2 Würfel vom Typ (3, 1, 2) mit $x_1 + x_2 = 6$, (3)
- x_3 Würfel vom Typ (1, 3, 2) und x_4 Würfel vom Typ (2, 3, 1) mit $x_3 + x_4 = 6$, (4)
- x_5 Würfel vom Typ (2, 1, 3) und x_6 Würfel vom Typ (1, 2, 3) mit $x_5 + x_6 = 6$. (5)

Da die 18 Würfel (3), (4) und (5) offenbar noch je 36 Flächen von jeder Farbe tragen müssen, so liefert das (diophantische) lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 36 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 36 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 36 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_3 + x_4 = 6 \\ x_5 + x_6 = 6 \end{array} \quad (6)$$

mit der Zusatzbedingung
x_i ganzzahlig,
$0 \leqq x_i \leqq 6$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (7)

die noch gesuchten Würfelanzahlen x_i. Durch Lösung des linearen Gleichungssystems (6) etwa nach dem Gaußschen Algorithmus und unter Beachtung von (7) erhält man die folgenden sieben Lösungs-6-tupel
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$:
(6, 0, 6, 0, 6, 0), (5, 1, 5, 1, 5, 1),
(4, 2, 4, 2, 4, 2),
(3, 3, 3, 3, 3, 3), (8)
(2, 4, 2, 4, 2, 4), (1, 5, 1, 5, 1, 5)
und (0, 6, 0, 6, 0, 6),
von denen ein jedes eine zulässige Färbung des Würfelsatzes charakterisiert. Berücksichtigt man jetzt noch die geometrische Anordnung der Farben auf einem Würfel, so zeigt sich, daß zwar bei jedem der 21 Würfel (1), (3), (4) und (5) durch das Farbtripel und die Eckbildungsvorschrift die Farbanordnung (bis auf Würfeldrehung) eindeutig festgelegt ist, daß aber die 6 Würfel (2) zwei geometrisch verschiedene Farbanordnungen, die nicht durch Würfeldrehung ineinander übergeführt werden können, zulassen. Denn hat man eine Farbe, z. B. Blau, auf zwei in einer Kante zusammenstoßenden Flächen aufgetragen, so gibt es für die zweite Farbe, z. B. Rot, zwei mögliche Anordnungen, nämlich linksherum (FL) bzw. rechtsherum (FR); die Lage der restlichen zwei Flächen mit der dritten Farbe steht dann fest (siehe Bild 4).
Bei jeder der sieben obigen zulässigen Färbungen (ohne Berücksichtigung der geometrischen Anordnung) hat man also sieben Möglichkeiten für die Wahl der 6 Würfel (2), nämlich keinen Würfel mit (FL) und 6 Würfel mit (FR), 1 Würfel mit

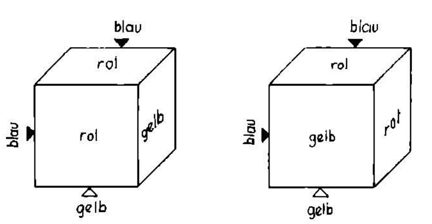


Bild 4: Zwei (2, 2, 2)-Würfel mit den Farbanordnungen (FL) (linker Würfel) bzw. (FR) (rechter Würfel)

(FL) und 5 Würfel mit (FR), usw., wobei die Farbgebung

3 Würfel mit (FL) und 3 Würfel mit (FR) (9)

gegenüber Farbpermutation unveränderlich bleibt. Es gibt also insgesamt $7 \cdot 7 = 49$ verschiedene zulässige Färbungen unseres Würfelsatzes. Unter diesen 49 zulässigen Färbungen gibt es nun genau eine Färbung, nämlich die durch (1), (2) mit (9) sowie (3), (4) und (5) mit (8) bestimmte, die durch eine beliebige Permutation der drei Farben nicht verändert wird.

Diese symmetrische Färbung wurde nun für die Trio-Würfel gewählt, die damit enthalten:

1 Würfel vom Typ (3, 3, 0),
1 Würfel vom Typ (3, 0, 3),
1 Würfel vom Typ (0, 3, 3),
3 Würfel vom Typ (3, 2, 1),
3 Würfel vom Typ (3, 1, 2),
3 Würfel vom Typ (1, 3, 2),
3 Würfel vom Typ (2, 3, 1),
3 Würfel vom Typ (2, 1, 3),
3 Würfel vom Typ (1, 2, 3),
3 Würfel vom Typ (2, 2, 2) nach (FL),
3 Würfel vom Typ (2, 2, 2) nach (FR),

wobei drei gleichfarbige Würfelflächen eine Ecke bilden und zwei gleichfarbige Flächen eine Kante gemeinsam haben müssen.

Im Bild 1 sind die Netze der 27-Trio-Würfel dargestellt, und wir haben eine Färbungsvorschrift zur Herstellung der Trio-Würfel und einige Probleme angegeben. Trotzdem bergen die Trio-Würfel noch viele oben nicht betrachtete Möglichkeiten und Probleme in sich (Entwurf weiterer Gebäudemodelle, Untersuchungen zur einfachen bzw. verschärften Anschlußbedingung, Herstellung eines Würfelsatzes mit einer der anderen 48 zulässigen Färbungen und Untersuchungen dazu u.a.), die ihr bearbeiten könntet.

Betrachtet man das eingangs formulierte Färbungsproblem einmal aus der Sicht der Anzahlen der Würfel und Farben, so liegt die Vermutung nahe für die Lösbarkeit des folgenden Problems für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$:

n-Farbenproblem für n^3 Würfel:

Kann man einen Würfelsatz, bestehend aus n^3 gleich großen Würfeln, mit n verschiedenen Farben so färben, daß mit ihm der Zusammenbau eines $n x n x n$-Würfels mit einfarbiger Oberfläche, wobei jede der n Farben die Oberflächenfarbe sein kann, möglich ist? Wenn ja, so sind alle derartige Färbungen (zulässige Färbungen) zu charakterisieren!

Das Problem ist, wie man leicht feststellen kann, für $n = 1$ und $n = 2$ (eindeutig) lösbar. Wie wir gezeigt haben, ist auch das Drei-Farbenproblem für $3^3 = 27$ Würfel (mehrdeutig) lösbar, und eine zulässige Färbung liefert die Trio-Würfel. Wenn ihr Freude daran habt, könnt ihr das Problem ja für beliebiges n einmal untersuchen, zumindest aber für $n = 4$, wonach ihr euch einen Satz *Quartett-Würfel* (64 Würfel) bauen könntet.

Viel Spaß dabei wünscht euch

R. Mildner

Algorithmengrundstrukturen und ihre Notationsformen

Notationsform Algorithmengrundstrukturen	verbal
Anweisungsfolge	• Linksbündiges Untereinanderschreiben der Anweisungen (kein Numerieren notwendig!) • Wertungszuweisungen mit Symbol „:=“ • Ein- und Ausgabeanweisungen mit „E: …“ bzw. „A: …“ kennzeichnen
Auswahl a) einseitig	WENN Bedingung DANN A1
b) zweiseitig	WENN Bedingung DANN A1 SONST A2
c) mehrfach A1, A2, … Am-Anweisung(-en)	FÜR Fall k GEHE ZU A1 A2 ⋮ Am
Wiederholung (Zyklus, Schleife) a) Zählzyklus	FÜR Index := Anfang BIS Ende (mit Schrittweite)* Anweisung(-en)
b) Zyklus mit Endbedingung	WIEDERHOLE Anweisung(-en) BIS Bedingung
c) Zyklus mit Anfangsbedingung	SOLANGE Bedingung TUE Anweisung(-en)

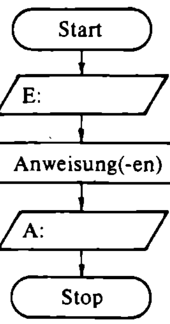
Unteralgorithmenaufrufe werden grafisch wie folgt dargestellt: UA k

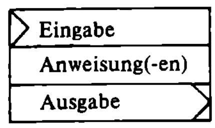
Die Anweisung in den Zyklen (Schleifenkörper) werden optisch meist durch Einrücken hervorgehoben.

*(...) wird weggelassen, wenn die Schrittweite 1 ist.

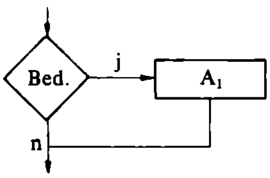
zusammengestellt von L. Flade/M. Pruzina

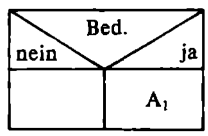
grafisch: Programmablaufplan | Struktogramm — BASIC



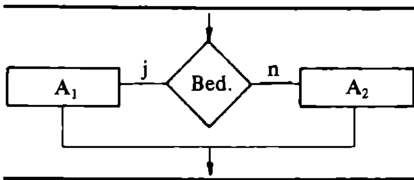


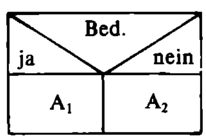

```
k   INPUT ...
l   LET ...
m   PRINT ...
n   END
```





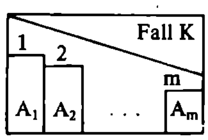
IF Bedingung THEN A1



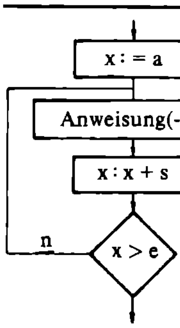


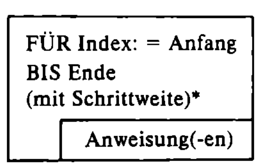
IF Bedingung THEN A_1::ELSE A2

Durch Ineinanderschachteln von a) und b) – mehrfach

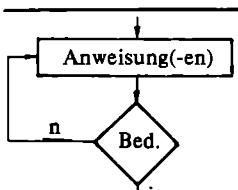


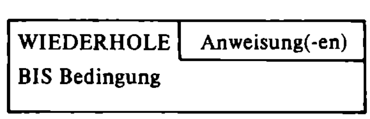
ON K GOTO $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$



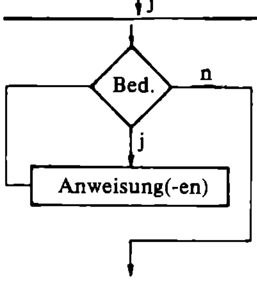


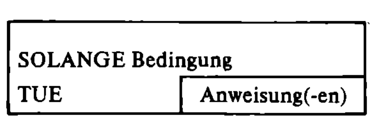

```
FOR X = A TO E(STEP S)*
    Anweisung(-en)
NEXT X
```





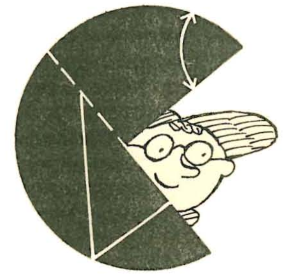

```
k   Anweisung(-en)
l   IF NOT (Bedingung)
        THEN k
m   Fortsetzung
```






```
k   IF NOT (Bedingung)
        THEN n
l   Anweisung(-en)
m   GOTO k
n   Fortsetzung
```

In freien Stunden · alpha-heiter



Primzahl-Hokuspokus

Verbindet in der abgebildeten Zahlenmatrix alle Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge durch einen Polygonzug miteinander, und euch wird ein genialer Mathematiker aus dem 18. Jahrhundert erscheinen! Wer ist es?

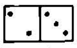
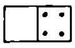
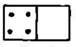
Dr. R. Mildner, Leipzig

3	10	2	21	34	48	58	43	35	51	24	56	1
80	39	55	68	14	75	22	65	41	85	12	76	42
5	49	18	45	33	52	4	30	81	16	91	38	66
69	7	54	19	82	31	25	77	59	93	67	73	79
11	32	6	64	15	57	9	36	60	53	62	8	72
74	20	44	86	26	92	40	87	70	27	50	46	90
13	63	17	23	78	29	37	47	61	84	71	88	28

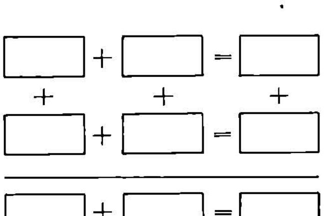
Verflixte Bruchrechnung

Lehrer: „Wenn ich ein Stück Fleisch in zwei Teile schneide, was habe ich dann, Peter?" „Hälften." „Gut. Und wenn ich die beiden Hälften abermals zerschneide?" „Viertel." „Und wenn ich es noch einmal tue?" „Achtel." „Und noch einmal?" „Sechzehntel." „Und noch einmal? Sag du mir das, Fritz!" „Hackfleisch."

Rätselhaftes Domino

Dominosteine sollen, entsprechend abgelegt, ein- oder zweistellige Zahlen darstellen. So soll z. B.  die Zahl 23  4 und  40 bedeuten. In das folgende Schema sind so 9 der 28 Dominosteine eines Spieles einzusetzen, daß alle darin enthaltenen sechs Gleichungen erfüllt sind und daß die in der unteren rechten Ecke stehende Zahl möglichst klein ist.

W. Träger, Döbeln



Lolek und Bolek

$$\begin{array}{r} \text{LOLEK} \\ +\ \text{BOLEK} \\ \hline \text{REISE} \end{array}$$

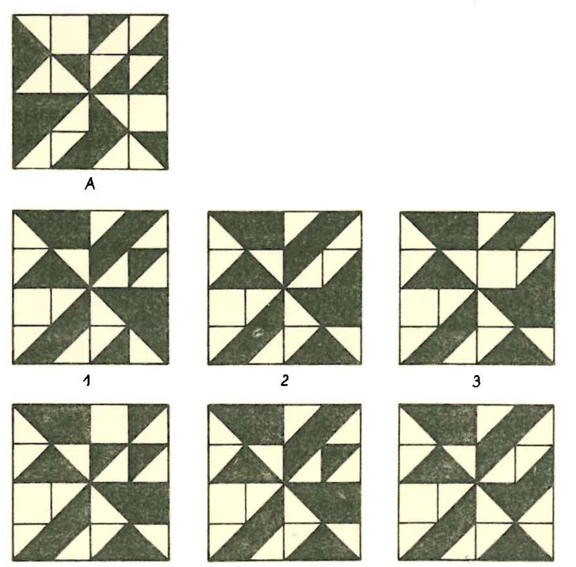
Ermittelt – durch Einsetzen von dezimalen Grundziffern für die Buchstaben – alle Lösungen des abgebildeten Kryptogramms!

Dr. R. Mildner, Leipzig

Farbenverkehrt

A ist das Negativ einer Filmaufnahme. Welches der anderen sechs Bilder ist dann das Positiv?

OL O. Chromy, Coswig



Konsequent betont?

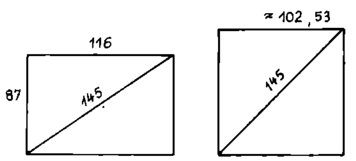
AG-Leiter: „Wer bei den Mathematikolympiaden zu Erfolgen kommen will, muß genau wie beim Sport konsequent trainieren."
Bernd: „Was bedeutet der Begriff konsequent?"
AG-Leiter: „Konsequent bedeutet, erst so und dann wieder so handeln."
Bernd: „Und was bedeutet inkonsequent?"
AG-Leiter: „Inkonsequent bedeutet, erst so und dann wieder so handeln."
Bernd: „Sie haben zwei entgegengesetzte Begriffe mit den gleichen Worten erläutert."
AG-Leiter: „Stimmt, aber du hast einen feinen Unterschied überhört."

OL K. Koch, Schmalkalden

Mathematisches Märchen

Vor vielen Jahren lebte einmal ein Bauer, der hatte eine bildschöne und fleißige Tochter. Peter und Iwan bewarben sich um die Hand des Mädchens. Der Bauer entschied, daß derjenige seine Tochter zur Frau bekommen sollte, der die Differenz der Flächeninhalte seiner beiden Felder (siehe Bild), eines rechteckigen Feldes (Feld A) und eines quadratischen Feldes (Feld B) mit gleicher Diagonallänge, am genauesten schätzen konnte. Peter schätzte die Flächendifferenz auf 500 Quadratmeter und Iwan auf 400 Quadratmeter. Wer von beiden bekam wohl die Bauerstochter zur Frau?

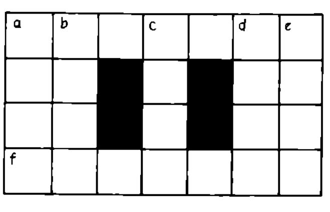
Dr. R. Mildner, aus: LVZ



(Feld A) (Feld B)

Verkehrte Welt am Taschenrechner

Jede Zahl ist mit dem Taschenrechner auszurechnen, und die auf den Kopf gestellte Ergebniszahl (Taschenrechner um 180 Grad drehen!) ist der gesuchte Begriff, der in die Figur eingetragen wird:



Waagerecht:
$a_w = 2^2(2^{10}\cdot 3^7 + 11) - 2^{14}(2^7+1) + 5^7\cdot 7$,
$f = 2\cdot 3^{13} + 2^2\cdot 3^2(3^2\cdot 5\cdot 19^2 + 2) + 1$.
Senkrecht:
$a_s = 5(2^4\cdot 5^3 - 137)$, $b = 2^{12} - 223$,
$c = 2^4\cdot 3^5 - 317$, $d = \dfrac{7(7^4-1)}{2} - 19\cdot 53$,
$e = 3^3(2\cdot 3 + 5^3)$.

Dr. R. Mildner, Leipzig

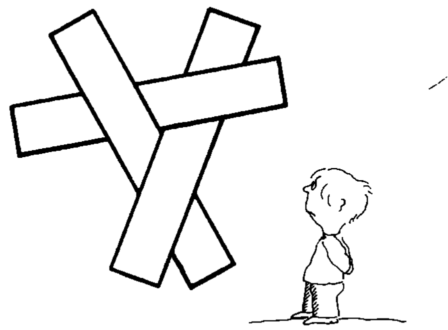
Scheinzauber

Ein Abteilungsleiter eines Betriebes soll der Betriebskasse die Auszahlungsliste für die Jahresendprämie mit Angabe der benötigten Anzahl an Geldscheinen zu 100, 50, 20, 10 und 5 Mark übergeben, um unnötige Laufereien nach Wechselgeld zu vermeiden.
Für seine Mitarbeiter sind folgende Prämien vorgesehen:
735 Mark, 780 Mark, 845 Mark, 865 Mark, 915 Mark, 955 Mark, 1085 Mark und 1130 Mark.
Insgesamt also 7310 Mark.
Wie könnte die der Kasse zu übergebende Liste aussehen?

Ing. A. Körner, Leipzig

Kannst du das?

Schau dir diese Abbildung zwei Minuten lang an und versuche sie aus dem Kopf nachzuzeichnen!



Systematisch zum Ziel

Wie oft ist das Wort „Matheolympiade“ in den folgenden sieben Zeilen und Spalten lesbar?

M A T H E O L Y
A T H E O L Y M
T H E O L Y M P
H E O L Y M P I
E O L Y M P I A
O L Y M P I A D
L Y M P I A D E

Schülerin G. Berthold, Dresden

Eine aktuelle Folge

Wie lautet das mit **?** bezeichnete Glied der Folge 11111000100; 2201122; 133010; 30423; 13112; 5540; 3704; 2648; **?**; 1548; 1198; ...?
Um welche Folge handelt es sich?

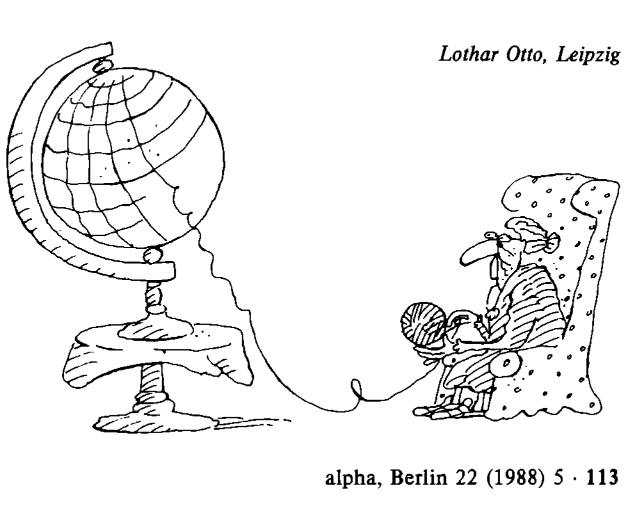
Mathematiklehrer G. Roesch, Apolda

Auflösung der alpha-heiter-Preisaufgabe Heft 4/88

Verschlüsselte Geburtsdaten

Die Geburtsdaten sind: Rainer: 14 05 31
Miriam: 20 10 42
Marina: 24 10 54

Lothar Otto, Leipzig



Alphons informiert:

Wie läuft der Wettbewerb?

Da uns oft Anfragen zum Ablauf des Wettbewerbs erreichen, will ich zu Beginn des Wettbewerbs 1988/89 etwas ausführlicher darüber berichten.
Die Aufgaben werden aus den Aufgabenvorschlägen unserer Leser, der Literatur und mit eigenen Ideen von unseren als Aufgabenautoren tätigen Mitarbeitern zusammengestellt. Ich möchte sie unseren alpha-Lesern vorstellen:

Dr. Werner Riehl, Diplomphysiker und Lehrer für das Fach Physik, Dozent und Leiter des Wissenschaftsbereiches Methodik des Physikunterrichts der *Karl-Marx*-Universität Leipzig, verantwortlich für die Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik;

Oberstudienrat Theodor Scholl, Diplomlehrer für Mathematik, langjähriger Mitarbeiter im Ministerium für Volksbildung, nun zwar Rentner, aber traditionell (seit 1967) in der Aufgabengruppe von *alpha* und als Autor verschiedener Beiträge tätig, verantwortlich für die Mathematikaufgaben der Klassenstufen 5 bis 7;

Dr. Wolfgang Fregin, Fachlehrer für Mathematik und Studiendirektor am Institut für Lehrerbildung *N. K. Krupskaja*, verantwortlich für die Mathematikaufgaben der Klassenstufen 8 bis 10. Er möchte die Gelegenheit zu einigen Bemerkungen über eure Aufgabenvorschläge auch im Namen seiner Kollegen nutzen:
Seit 12 Jahren arbeite ich an der alpha mit. Über die vielen Zuschriften mit Aufgabenvorschlägen, die aus allen Teilen unserer Republik und auch aus dem Ausland eintreffen, bin ich sehr erfreut. Ich verfüge dadurch über einen großen Vorrat, aus dem ich für den Wettbewerb in jedem Jahr 45 Aufgaben auswähle. Aufgabenstellungen und Lösungsvorschläge müssen oft anders formuliert werden – man nennt das redaktionelle Bearbeitung –, so daß mancher Einsender vielleicht seine Aufgabe gar nicht gleich wiedererkennt. Sehr gewissenhaft muß ich dann alles prüfen und nachrechnen, da sich doch ab und zu herausstellt, daß eine vorgeschlagene Rechnung nicht ganz stimmt. Ich wünsche mir vor allen Dingen von den „Aufgabenerfindern", daß recht originelle und nicht so formale Aufgaben eingesandt werden. Es sollten viele eigene Ideen sein und keine lehrbuchartigen Aufgabenstellungen; wir wollen ja in der alpha nicht nur rechnen, sondern hauptsächlich knobeln und unser logisches Denkvermögen einsetzen. Dabei soll möglichst nicht über den Stoff der 10. Klasse hinausgegangen werden.

Und noch etwas: Viele gute Aufgaben muß ich leider deshalb auf die Wartebank schieben, weil eben im Jahr nur 45 Aufgaben abgedruckt werden können.

▲1▲ Nun versucht einmal selbst, mit Hilfe der nachstehenden Zahlenangaben zu berechnen, wie viele Lösungen zum Wettbewerb 1987/88 in unserer Redaktion insgesamt eingegangen sind:
Zu den Wettbewerbsaufgaben der Hefte 5/87 und 6/87 erhielten wir insgesamt 71 269, der Hefte 6/87 und 1/88 insgesamt 65 174, der Hefte 5/87 und 1/88 insgesamt 69 315 Lösungen.
Wie viele Lösungen zum Wettbewerb 1987/88 sind das? Wie viele Lösungen entfallen davon durchschnittlich auf je eines dieser drei Hefte? Zu den Wettbewerbsaufgaben des ersten *alpha*-Heftes (1/1967) wurden rund 14 000 Lösungen eingesandt. Auf wieviel Prozent steigerte sich die Anzahl der eingesandten Lösungen zu einem der Hefte im Wettbewerb 1987/88 gegenüber denen zur ersten alpha-Ausgabe im Jahre 1967?

Schon wenige Tage nach Erscheinen eines Wettbewerbsheftes kommt unsere redaktionelle Mitarbeiterin Frau Schubert mit einer täglich größer werdenden Tasche zur Redaktion geradelt.
In den letzten Tagen vor Einsendeschluß ist es dann mindestens ein Postsack pro Tag.
Nun heißt es für Frau Schubert neben ihrer üblichen Arbeit in der Redaktion Briefe öffnen und die Lösungen zuerst klassenstufenweise, dann aufgabenweise zu sortieren.

▲2▲ Ein in den letzten Tagen bei uns eingegangener Poststapel enthielt rund 2500 Briefsendungen. Welche Arbeitszeit benötigt Frau Schubert für das Öffnen dieser Briefe und das Sortieren der Lösungen nach Klassenstufen und Aufgabennummern, wenn sie durchschnittlich je Brief 14 Sekunden braucht?

Für die Korrektoren der Lösungen (die Chefredakteurin und Mann für die Klassen 5 bis 7 und die Leipziger Mathematiklehrerin Christa Döhler für die Klassen 8 bis 10) beginnt nun ein allabendliches Auswerten, das durch die aufgabenweise Sortierung wesentlich erleichtert wird.

▲3▲ Zur Aufgabe Ma 5 ■ 2807 des Heftes 5/87 gingen bei uns 2691 Lösungen ein, darunter 91,2 % richtige Lösungen. Wie viele richtige bzw. falsche Lösungen entfallen auf diese Aufgabe?
Zur Aufgabe Ma 10/12 ■ 2835 des Heftes 5/87 gingen bei uns 27 falsche Lösungen ein; das sind 3,4 % aller eingesandten Lösungen. Wie viele Lösungen zu dieser Aufgabe erhielten wir; wie viele davon waren richtig?

Nach etwa drei Wochen können die Stapel korrigierter Lösungen an die vielen Helfer verteilt werden, die in ihrer Freizeit für jede eingesandte Lösung eine Antwortpostkarte schreiben. Ihr werdet verstehen, daß bei dieser mühevollen Arbeit eine leserliche und vollständige Adressenangabe sehr wichtig ist. Zumal für unsere Statistik beim Schreiben der Antwortkarten wiederum getrennt wird, diesmal nach Junge oder Mädchen.

▲4▲ Zu den eingegangenen Lösungen des Heftes 5/87 mußten an Mädchen 18 410, an Jungen 885 Antwortkarten mehr als an Mädchen geschrieben werden. Für Heft 6/87 waren es 17 380 Antwortkarten an Jungen, an Mädchen aber 1196 Antwortkarten weniger als an Jungen. Zu den Lösungen des Heftes 1/88 erhielten 16 300 Jungen und 15 310 Mädchen je eine Antwortkarte.
Wie viele Antwortkarten mußten zu den eingegangenen Lösungen für diese drei Hefte insgesamt geschrieben werden?
Eine Antwortkarte hat ungefähr die Dicke von 0,1 mm. Denkt euch alle diese Antwortkarten übereinander gestapelt. Wie hoch ist diese Kartensäule?

Auf dem Leipziger Bahnpostamt werden nun alle Antwortkarten freigestempelt und abgeschickt. Inzwischen beginnen sich aber schon die Lösungen des nächsten Wettbewerbs zu stapeln.
Ungelegen also kommen alle bereits vor dem 1. September eingesandten Antwortkarten für richtige Lösungen.
Frau Schubert beginnt diese erst nach dem 10. September auszuwerten. Sie richtet die Bitte an euch, die Wettbewerbsbedingungen genau durchzulesen und einzuhalten und die Aufgabennummern nochmals genau zu überprüfen. Anderenfalls wird ihr der Postverkehr mit den Teilnehmern am Wettbewerb (1987/88 waren es 5016), die Aufstellung der Teilnehmerlisten und die Statistik erheblich erschwert.
Ende November geht dann ein Aufatmen durch die Redaktion, der Wettbewerb ist abgeschlossen. Aber die Ruhepause ist kurz, denn das Heft 5 mit dem 1. neuen Wettbewerb erschien bereits einen Monat vorher. Also dann, auf ein Neues!

Alphons

Lösungen

▲1▲ $2x = 71\,269 + 65\,174 + 69\,315$,
$2x = 205\,758$, $x = 102\,879$
Zum Wettbewerb 1987/88 gingen bei uns 102 879 Lösungen ein, also je Heft durchschnittlich
$102\,879 : 3 = 34\,293$ Lösungen. Die Anzahl der eingesandten Lösungen steigerte sich gegenüber der zum Heft 1/1967 auf rund 245 Prozent.

▲2▲ $(2500 \cdot 14) : (60 \cdot 60)$ Stunden
≈ 10 Stunden.

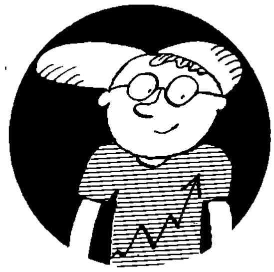
▲3▲ Auf die Aufgabe 2807 entfallen 2454 richtige und 237 falsche Lösungen.
Zur Aufgabe 2835 gingen bei uns 794, davon 767 richtige Lösungen ein.

▲4▲ Antwortkarten

	Jungen	Mädchen	insgesamt
5/1987:	19 295	18 410	37 705
6/1987:	17 380	16 184	33 564
1/1988:	16 300	15 310	31 610
			102 879

Die Kartensäule ist etwa 10 m hoch.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1989

Ma 5 ■ 2911 Von einem Faß Gurken blieben am ersten Tag 8 kg Gurken mehr übrig als verkauft wurden. Am zweiten Tag verkaufte man die Hälfte der noch im Faß vorhandenen Gurken. Am dritten Tag verkaufte man die restlichen 22 kg Gurken. Wieviel Kilogramm Gurken waren anfangs im Faß?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2912 Gib alle durch 2 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen an, die sich aus den Ziffern 3, 4, 5 bilden lassen. Dabei dürfen diese Ziffern auch mehr als einmal in jeder Zahl vorkommen. Welche Zahl erhältst du, wenn du von der halben Summe dieser Zahlen 10 subtrahierst?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2913 Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel der Größe 157,5°!
Schülerin M. Winkler, Hoyerswerda

Ma 5 ■ 2914 Wenn die kleinste von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, dann ist die Summe aus diesen fünf Zahlen ebenfalls gerade. Diese Behauptung ist zu beweisen!
Schüler R. Holke, Leipzig

Ma 5 ■ 2915 Ein Vater ist 52, sein Sohn 18 Jahre alt.
In wieviel Jahren wird der Vater doppelt so alt sein wie der Sohn? *Sch.*

Ma 5 ■ 2916 Axel sagt zu Bruno: „Wenn ich viermal so alt bin wie jetzt, dann fehlt mir zu 100 Jahren gerade noch mein jetziges Alter.“ Wie alt ist Axel gegenwärtig?
Sch.

Ma 5 ■ 2917 Zeichne ein rechtwinkliges Koordinatensystem und in dieses die Punkte $A(1;1)$, $B(3;7)$ und $C(7;7)$. Ermittle alle Punkte D, für die $\overline{CD}$ das Bild von $\overline{AB}$ bei einer Spiegelung ist, und gib deren Koordinaten an.
Mathematiklehrer G. Roesch, Apolda

Ma 6 ■ 2918 Gegeben sei eine vierstellige natürliche Zahl mit der Quersumme 14, die folgende Eigenschaft hat:
Sowohl das Produkt als auch die Summe aus den Zahlen, die jeweils die erste und vierte Grundziffer darstellen, ergibt eine Zahl, die von der zweiten Grundziffer dargestellt wird. Um welche Zahl handelt es sich?
Schüler R. Hochheim, Erfurt

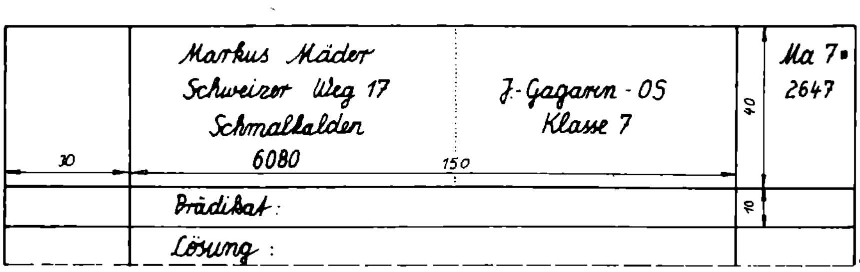
Ma 6 ■ 2919 Ein Garten hat die Form eines Dreiecks. Eine Seite ist 18 m lang; die zweite Seite ist 10 m länger als diese Seite. Die dritte Seite ist halb so lang wie eine von den beiden anderen Seiten. Wie lang ist der Zaun, der um den Garten geht, wenn die Gartentür 1 m breit ist? Die Lösung ist zu begründen!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2920 Eine rechteckige Rasenfläche von 70 m Länge wird von einem 2 m breiten Weg umrandet. Dadurch ist die Gesamtfläche einschließlich des Weges 3700 m² groß. Welche Strecke ist zurückzulegen, wenn man auf der Mitte des Weges um den gesamten Rasen herumgeht?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2921 Bestimme a, b, c aus den drei Gleichungen $a \cdot b \cdot c = 70$ und $a \cdot c = 14$ und $a \cdot b = 10$!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2922 Ermittle alle natürlichen Zahlen n mit folgender Eigenschaft:
Addiert man zu n die Quersumme von n, so erhält man als Ergebnis die Zahl 2012!
(Hinweis: Die Quersumme z. B. von 5416 beträgt 16 wegen $5 + 4 + 1 + 6 = 16$.)
StR W. Melka, Neubrandenburg

Ma 6 ■ 2923 Bernd, Doris und Frank sammeln Briefmarken. Bernd hat dreimal soviel Briefmarken wie Doris und 50 mehr als Frank. Wieviel Briefmarken hat jeder von ihnen, wenn sie zusammen 370 Briefmarken besitzen?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

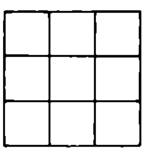
Redaktion alpha

Na/Te 6 ■ 425 Das Tachometer eines Fahrzeuges zeigt eine Geschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wieviel Meter legt das Fahrzeug in 12 Minuten zurück? *R.*

Ma 7 ■ 2924 Es ist das Lebensalter von acht Kindern, die zusammen 76 Jahre alt sind, aus folgenden Angaben zu ermitteln: Anton ist dreimal so alt wie Christian und Elke viermal so alt wie Bettina. Doris ist zwei Jahre jünger als Elke, Bettina zwei Jahre jünger als Christian. Gisela ist drei Jahre jünger als Anton. Frank ist doppelt so alt wie Bettina. Hans ist ein Jahr älter als Elke. *Schüler C. Neufert, Bernburg*

Ma 7 ■ 2925 In der Gleichung $a \cdot (b + c) = b \cdot (a + c)$ seien a, b, c von Null verschiedene natürliche Zahlen. Welche Zahlenpaare $(a; b)$ erfüllen die Gleichung, wenn $a = 9$ gelten soll und
(1) c der Nachfolger von b sein soll?
(2) b der Nachfolger von c sein soll?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2926 In die neun Quadrate des Bildes sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, daß die Summe aus den Produkten der Zahlen jeder Zeile möglichst klein ist. Gib diese Summe an! (Ein Beispiel genügt.)
StR W. Melka, Neubrandenburg



Ma 7 ■ 2927 Beweise, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck mit verschieden langen Katheten die Höhe auf der Hypotenuse stets kürzer ist als die halbe Hypotenuse. *Sch.*

Ma 7 ■ 2928 Zeichne ein Dreieck ABC, dessen Innenwinkel ACB die Größe $\gamma = 60°$ hat. Halbiere den Winkel ACB, bezeichne den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite $\overline{AB}$ mit D, fälle das Lot von D auf $\overline{AC}$, bezeichne den Fußpunkt des Lotes mit E. Bestimme die Größe α des Winkels BAC und die Größe β des Winkels ABC, wenn $\sphericalangle BDC = 2 \cdot \sphericalangle EDA$ gelten soll!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 7 ■ 426 Es soll bestimmt werden, aus welchem Stoff ein lackierter Körper mit einer Masse von 234 g besteht. Er wird in einen Meßzylinder (Meßbereich 250 ml), der mit Spiritus gefüllt ist, getaucht. Dabei steigt der Flüssigkeitsspiegel vom Teilstrich 60 auf 90. Aus welchem Stoff könnte der Körper bestehen? *R.*

Na/Te 7 ■ 427 Ein Kraftfahrer fährt eine Strecke von 100 km mit einer konstanten Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein anderer fährt 50 km mit einer Geschwindigkeit von $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, den Rest der Strecke mit einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wer ist eher am Ziel? Mit welcher Geschwindigkeit müßte der zweite Abschnitt der Strecke gefahren werden, damit die Fahrzeiten beider Fahrer gleich sind? *R.*

Ma 8 ■ 2929 Gegeben sei der Term
$T(a, x) = \frac{4a - x}{5} + 2;\ a \in P, x \in P.$
Bestimme diejenige reelle Zahl x, so daß für alle $a \in P$ mit $a > -\frac{3}{4}$ der Term $T(a, x)$ positiv ist! *Fr.*

Ma 8 ■ 2930 Setzt man die letzte Grundziffer einer dreistelligen natürlichen Zahl mit der Quersumme 9 an den Anfang, so nimmt die neue Zahl im Vergleich zur ursprünglichen um 135 zu.
Wie viele solcher Zahlen gibt es? Wie heißen sie? *Sch.*

Ma 8 ■ 2931 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einer beliebigen Sehne $\overline{AB}$. Der auf $\overline{AB}$ senkrecht stehende Durchmesser von k schneide den Kreis in C_1 und C_2. Es ist zu beweisen, daß die Winkelhalbierende eines jeden Peripheriewinkels über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ durch C_1 oder C_2 geht!
Schüler R. Schlosser, Boßdorf

Ma 8 ■ 2932 In einer Schachtel mit 10 Fächern liegen in jedem Fach genau 10 Kugeln, insgesamt sind es also 100 Kugeln. Nach dem Spielen fehlen in einigen Fächern je 3 Kugeln, in genausoviel anderen Fächern fehlt je 1 Kugel. In genau der Hälfte der noch verbleibenden Fächer fehlen je 4 Kugeln. In den restlichen Fächern fehlt keine Kugel. Wieviel Kugeln sind noch in der Schachtel?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2933 Annette hatte ihre Freundinnen Beate, Christa und Daniella zu sich eingeladen. Nachdem alle vier Frauen an einem Tisch Platz genommen hatten, legte Annettes Ehemann vor den Augen der Frauen vier rote und zwei weiße Rosen in einen Korb und sagte: „Ich werde jetzt jeder von euch genau eine dieser Rosen ins Haar stecken.“ Er ließ keine der Frauen sehen, welche Rose in ihr Haar gesteckt wurde und welche Rosen im Korb blieben. Jede konnte natürlich die Rosen in den Haaren der anderen sehen. „Nun ratet mal, welche Rose in eurem Haar steckt“, sprach Annettes Mann. Nachdem sie alle gründlich nachgedacht hatten, begann Annette: „Ich weiß nicht, welche Farbe die Rose in meinem Haar hat!“ Auch Beate sagte, daß sie es nicht wüßte. Nun konnten Christa und Daniella die Farbe der Rose nennen, die jeweils in ihrem Haar steckte. Welche Rosen hatten Christa und Daniella im Haar?
W. Träger, Döbeln

Na/Te 8 ■ 428 Die Strömungsgeschwindigkeit in einem horizontalen Wasserleitungsrohr ($d = 4$ cm) beträgt $10\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Welche Strömungsgeschwindigkeit hat das Wasser in einem engeren Abschnitt des Rohres, wenn der Durchmesser nur halb so groß ist? *R.*

Na/Te 8 ■ 429 Ein Rettungsring aus Kork hat eine Masse von 3,6 kg. Er wird mit einem Körper belastet. Wie groß darf dessen Gewichtskraft höchstens sein, damit der Ring nicht untergeht, wenn er auf Süßwasser schwimmt? Die Dichte des Wassers beträgt $1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, die des Korkes $0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. *R.*

Ma 9 ■ 2934 Eine Mutter hatte einen Korb mit Äpfeln, die sie zu gleichen Teilen restlos an ihre Kinder verteilte. Das erste Kind erhielt einen Apfel und ein Siebentel der restlichen Äpfel.
Das zweite Kind erhielt zwei Äpfel und ein Siebentel der nun noch verbliebenen restlichen Äpfel. Das dritte Kind erhielt drei Äpfel und ein Siebentel der noch verbliebenen restlichen Äpfel und so weiter. Wie viele Kinder hat diese Mutter? Wie viele Äpfel enthielt der Korb? *Sch.*

Ma 9 ■ 2935 Teilt man eine zweistellige natürliche Zahl durch ihre *Einerziffer*, so erhält man 12 Rest 2. Vertauscht man die Ziffern der Zahl und teilt die so entstandene Zahl durch ihre *Einerziffer*, erhält man 9 Rest 8. Wie heißt die zweistellige natürliche Zahl?
(Bemerkung: *Einerziffer* ist eine kurze Sprechweise; man kann natürlich nicht durch Ziffern dividieren. Die letzte Ziffer der zweistelligen Zahl wird als einstellige Zahl aufgefaßt!)
Schülerin A. Mißbach, Magdeburg

Ma 9 ■ 2936 Gegeben sei ein beliebiges Quadrat. In diesem Quadrat seien 33 Punkte beliebig verteilt. Es ist zu zeigen, daß es einen Kreis gibt mit $r = \frac{a}{5}$ (mit a sei die Länge der Quadratseite bezeichnet), in dem mindestens drei von diesen 33 Punkten liegen! *A. Israel, Karl-Marx-Stadt*

Ma 9 ■ 2937 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, in dem folgende Stücke bekannt sind:
(1) $\sphericalangle BAC$ hat die Größe $\alpha = 65°$,
(2) D liegt auf $\overline{AC}$,
(3) $\sphericalangle ADB$ hat die Größe δ,
(4) $\sphericalangle ACB$ hat die Größe $\frac{1}{2}\delta$,
(5) $\overline{DC}$ ist 3 cm lang und
(6) $\overline{AD}$ ist 2 cm lang.
Es ist zu begründen, ob das Dreieck ABC eindeutig konstruierbar ist oder nicht.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2938 Es ist zu beweisen, daß die drei Mittelpunkte von drei benachbarten Würfelflächen genau dann ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn diese benachbarten Flächen eine gemeinsame Ecke haben und genau dann ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn diese Flächen keine gemeinsame Ecke haben!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 9 ■ 430 Wie groß ist der Spannungsverlust auf einer 35 m langen Zuleitung aus Kupfer (Querschnitt 2,5 mm², 20° C) bei einer Stromstärke von 12 A? *R.*

Na/Te 9 ■ 431 2 kg Eis von 0° C werden bei einem Druck von 103,3 kPa in Wasserdampf von 100°C umgewandelt. Welche Energie muß mindestens zugeführt werden? *R.*

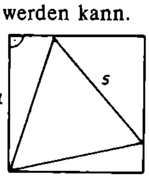
Ma 10/12 ■ 2939 Es ist zu zeigen, daß für alle α mit $0° < \alpha < 90°$ gilt:
$(\tan\alpha + \cot\alpha)$ sind $2\alpha = 2$!
Ä. Heyl, Eisenach

Ma 10/12 ■ 2940 Im Jahre 1986 wurden in der DDR 11,7 Mio t Getreide bei einem durchschnittlichen Ertrag von 46,4 dt je Hektar geerntet. Um wieviel Prozent muß der durchschnittliche Hektarertrag bei Getreide gesteigert werden, wenn ein Bedarf an 12 Mio t Getreide besteht, die Anbaufläche für Getreide aber um 10000 ha zurückgehen soll?
Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 10/12 ■ 2941 Zu welchen Sehnenvierecken gibt es eine Gerade, durch die das Sehnenviereck in zwei Vierecke zerlegt wird, die wiederum Sehnenvierecke sind? Welche Lage hat eine solche Gerade?
W. Träger, Döbeln

Ma 10/12 ■ 2942 Es ist eine Handlungsvorschrift zu formulieren, wie aus einem beliebigen Rechteck ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren ist! Die Konstruktion ist zu zeigen und zu begründen!
Lehrling M. Wierick, Cottbus

Ma 10/12 ■ 2943 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite s ist ein Quadrat so umbeschrieben, wie das Bild zeigt. Es ist eine Formel zu entwickeln, nach der die Seite a des Quadrates aus gegebenem s berechnet werden kann. *W. Träger, Döbeln*



Na/Te 10/12 ■ 432 Welche Kraft muß auf einen Körper mit einer Masse von 200 kg wirken, damit er innerhalb von 5 s beschleunigt auf 3 m Höhe gehoben wird? $\left(\text{Fallbeschleunigung } g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ *R.*

Na/Te 10/12 ■ 433 Welche Leistung muß der Motor eines Pkw mit der Masse von 900 kg aufbringen, damit das Fahrzeug innerhalb von 50 s aus der Ruhelage auf eine Geschwindigkeit von $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschleunigt wird? (Bewegungswiderstände werden nicht berücksichtigt.) *R.*

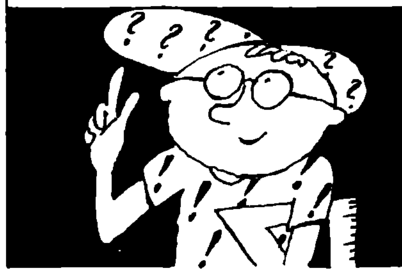
Eine harte Nuß

Gegeben ist die Struktur des Zahlenrätsels.

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & - & \ldots & = & \ldots \\ : & & : & & : \\ \ldots & + & \ldots & = & \ldots \\ \hline \ldots & - & \ldots & = & \ldots \end{array}$$

Es gibt viele Möglichkeiten, für die drei Punkte natürliche Zahlen so zu setzen, daß alle sechs Gleichungen erfüllt sind. Es ist die Gesamtheit aller Lösungen unter Verwendung von Variablen zu bestimmen!
W. Träger, Döbeln

Lösungen

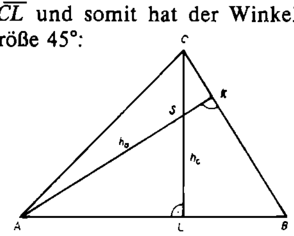


Lösungen zu: Mathematikolympiaden in der VR Mocambique
Fortsetzung aus Heft 4/88

▲4▲ Das k.g.V. der Zahlen 10 und 12 beträgt 60. Nun gilt
$300 < 60 \cdot n < 400$, also $n = 6$.
Daraus folgt
$368 = 10 \cdot 36 + 8 = 12 \cdot 30 + 8$.
Der Bauer brachte 368 Gurken zum Markt.

▲5▲ Aus $m^2 - n^2 = 91$ folgt
$(m-n)(m+n) = 91 = 1 \cdot 91 = 7 \cdot 13$.
Daraus folgt $m - n = 1$ und $m + n = 91$,
$2m = 92$, $m_1 = 46$, $n_1 = 45$,
aber auch $m - n = 7$ und $m + n = 13$,
$2m = 20$, $m_2 = 10$, $n_2 = 3$.

▲6▲ Wegen $\overline{AS} = \overline{BC}$, $\sphericalangle ALS = \sphericalangle BLC$, $\sphericalangle ASL = \sphericalangle KSC = \sphericalangle LBC$ sind die Dreiecke ALS und LBC kongruent. Deshalb gilt $\overline{AL} = \overline{CL}$ und somit hat der Winkel CAB die Größe 45°:



▲7▲ Aus $\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}$ und $\frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}$ folgt
$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.

▲8▲ Aus $12t + 31m = 368$ folgt
$31m = 372 - 4 - 12t$,
$m = 12 - \frac{4 \cdot (3t+1)}{31}$.
Nur für $t = 10$ und somit für $m = 8$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Der Mathematiker hat am 10. August Geburtstag.

▲9▲ Die Strecke $\overline{PB}$ hat die Länge $b \cdot \sqrt{2}$. Wegen $\overline{AC} = \overline{RQ} = \overline{PB}$ hat $\overline{AC}$ auch die Länge $b \cdot \sqrt{2}$. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt somit
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} = b^2$.

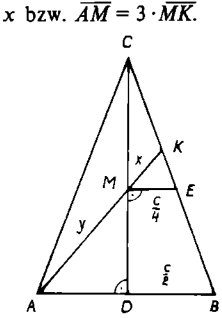
▲10▲ Angenommen, der Händler kaufte x Hühner zum Stückpreis p; dann gilt
$x \cdot p = 3360$ und
$(x-7)(p+20) = 3360 + 140 = 3500$.
Daraus folgt
$x \cdot p + 20x - 7p - 140 = 3500$,
$3360 + 20x - 7p = 3640$,
$20x - 7p = 280$, $7p = 20x - 280$.
Durch Einsetzen erhalten wir
$x \cdot \left(\frac{20x}{7} - 40\right) = 3360$,
$x^2 - 14x - 1176 = 0$, $x = 42$.
Der Händler hatte ursprünglich 42 Hühner gekauft.

▲11▲ Es sei x der Einkaufspreis des Öls in Tausendern; dann gilt
$x + \frac{x^2}{100} = 24$, $x^2 + 100x - 2400 = 0$,
$x = 20$. Das Speiseöl wurde zum Preis von 20000 MT eingekauft.

▲12▲ Nach der Preiserhöhung betrug der neue Preis $p + \frac{20p}{100} = \frac{6p}{5}$.
Nach der Preissenkung betrug der Preis $\frac{6p}{5} - \frac{6p}{25} = \frac{96p}{100}$.
Die Kartoffeln waren nach der Preissenkung um 4% billiger.

▲13▲ Der Winkel DAB habe die Größe φ, der Winkel BAC die Größe α, dann gilt $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ und $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Ferner gilt
$$\tan 2\varphi = \frac{2 \cdot \tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4},$$
also $2\varphi = \alpha$.

▲14▲ Die Parallele zu AB durch M schneide $\overline{BC}$ in E. Wegen $\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{ME} : \overline{DB} = 1:2$ hat $\overline{ME}$ die Länge $\frac{c}{4}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MEK und ABK folgt
$x : \frac{c}{4} = (x+y) : c$, $cx = \frac{cx}{4} + \frac{cy}{4}$,
$4cx = cx + cy$, $4x = x + y$,
$y = 3x$ bzw. $\overline{AM} = 3 \cdot \overline{MK}$.



C. P. Helmholz, H. Hunecke, J. Lehmann, Th. Scholl

Lösungen zu: alpha-Porträt
Heft 4/88

▲1▲ Diese Aufgabe wird wie Aufgabe 6 gelöst, aber der Einheitswürfel ist nur in 8 Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{2}$ zu zerlegen.

▲2▲ Man unterscheidet zwei Fälle.
1. Fall: n ist ungerade.
Wegen $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = n$ sind $a_1, \ldots, a_n$ lauter ungerade Zahlen, und zwar ungeradzahlig viele. Also ist $a_1 + \ldots + a_n$ ungerade und damit von 0 verschieden.
2. Fall: n ist gerade.

Da n nicht durch 4 teilbar ist, kommt die 2 in der Primfaktorenzerlegung von n genau einmal vor. Wegen $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = n$ ist also eine der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gerade, die übrigen ungeradzahlig vielen sind ungerade. Also ist $a_1 + \ldots + a_n$ ungerade und damit von 0 verschieden. Dies war zu zeigen.

▲3▲ Es gilt offenbar:
$2^{683} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 683 \equiv (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2)$
$\cdot \ldots \cdot (2 \cdot 683) \quad (1367)$
$\equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 682 \cdot 684 \cdot \ldots \cdot 1366 \quad (1367)$
$\equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 682 \cdot (-683) \cdot \ldots \cdot (-1) \quad (1367)$
(andere Darstellung)
$\equiv (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 682) \cdot (683 \cdot \ldots \cdot 1) \quad (1367)$
(342 Minuszeichen)
$\equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 683 \quad (1367)$
Da 1, ..., 683 sämtlich zur Primzahl 1367 (siehe Tafelwerk) teilerfremd sind, folgt $2^{683} \equiv 1 \ (1367)$ bzw. $1367 \nmid 2^{683} - 1$, so daß $2^{683} - 1$ keine Primzahl ist.
Bemerkungen zur Lösungsfindung:
a) Wenn man nach einem Primteiler p von $2^{683} - 1$ sucht, so weiß man, daß $2^{p-1} \equiv 1(p)$ (Satz von *Fermat*) und $2^{683} \equiv 1(p)$ (lt. Aufgabe) gelten muß. Es ist also natürlich, $p - 1$ als Vielfaches von 683 zu wählen. $p - 1 = 2 \cdot 683$ liefert schon $p = 1367$.
b) Wenn man $p = 1367$ setzt, kann man dann $2^{683} \equiv 1 \ (1367)$ weniger elegant und mehr systematisch erhalten, indem man zum Beispiel mit dem Taschenrechner fortlaufend die Restklassen von 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, ..., 2^{512} berechnet und diese richtig aufmultipliziert.

▲4▲ Es gilt:
$a^3 - 130a^2 - 91a$
$\equiv a(a^2 - 130a - 91) \quad (1987)$
$\equiv a(a^2 - 130a - 14000)$ denn (1987),
$91 \equiv 14000 \ (1987)$ folgt sofort aus
$13 \equiv 2000 \quad (1987)$.
Durch Ausmultiplizieren prüft man nach:
$a^3 - 130a^2 - 91a$
$\equiv a(a - 200)(a + 70) \quad (1987)$
$\equiv a(a - 200)(a - 1917) \quad (1987)$.
Da nun 1987 Primzahl ist (man dividiere zum Beispiel mittels Taschenrechner durch die Primzahlen kleiner als $\sqrt{1987} \approx 44{,}6$), muß $a \equiv 0\,(1987)$, $a \equiv 200\,(1987)$ oder $a \equiv 1917\,(1987)$ gelten. Die gesuchte kleinste natürliche Zahl ist also 200.

▲5▲ Durch Multiplikation mit 5 und Vervollständigung des Quadrates erhält man
$(5m - 3n)^2 + 26n^2 = 9925 \equiv 6\,(13)$, also
$(5m - 3n)^2 \equiv 6\,(13)$.
Quadrate lassen jedoch modulo 13 nur die Reste 0, 1, 4, 9, 3, 12, 10. Es gibt folglich keine Zahlen im Sinne der Aufgabe.

▲6▲ Der Einheitswürfel wird in 64 Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{4}$ zerlegt. Mindestens einer der Würfel enthält 32 Punkte, da sonst höchstens $64 \cdot 31 = 1984$ Punkte im Einheitswürfel liegen würden. 32 Punkte eines derartigen Würfels werden betrachtet. Der Abstand zweier solcher Punkte ist höchstens gleich der Raumdiagonalenlänge dieses Würfels, also $\frac{1}{4}\sqrt{3}$.
Damit hat ein beliebiger geschlossener Polygonzug mit diesen Ecken höchstens die Länge $32 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Lösungen zu:
Ohne Wasser, merkt euch das, wär' diese Welt ein leeres Faß
Heft 4/88

▲1▲ a) $\frac{60 \cdot 60 \cdot 0{,}1988}{24}$ ml ≈ 30 ml pro Stunde
b) $24 \cdot 30$ ml $= 720$ ml pro Tag
c) $(366 \cdot 720)\,\mathrm{l} : 1000 \approx 260\,\mathrm{l}$ im Jahre 1988
d) $(262{,}8 \cdot 500) : 1000\,\mathrm{m}^3 \approx 130\,\mathrm{m}^3$

▲2▲ $\frac{60 \cdot 5}{8 \cdot 2} \approx 19$ (mal)

▲3▲ a) $\frac{12 \cdot 12{,}5 \cdot 80}{100}\,\mathrm{l} + 40\,\mathrm{l}$
$= 120\,\mathrm{l} + 40\,\mathrm{l} = 160\,\mathrm{l}$
b) $110 : 8 \approx 14$ Kannen
c) $\frac{12\,000\,\mathrm{cm}^3}{10\,000\,\mathrm{cm}^2} = 1{,}2\,\mathrm{cm} = 12\,\mathrm{mm}$

Lösungen zu: Karl-Weierstraß-Institut und Spezialschule „Heinrich Hertz"
Heft 4/88

▲1▲ Stets gilt $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geqq 0$. Daher ist $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geqq 0$, woraus durch Addition von 3 die Behauptung folgt.

▲2▲ Wir setzen $a_i = \frac{1}{n} + b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Es folgt
$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2b_1}{n} + b_1^2\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2b_n}{n} + b_n^2\right) = n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}(b_1 + \ldots + b_n) + b_1^2 + \ldots + b_n^2$.
Aus $a_1 + \ldots + a_n = 1$ folgt $b_1 + \ldots + b_n = 0$. Daher ist $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{1}{n} + b_1^2 + \ldots + b_n^2 \geqq \frac{1}{n}$, w. z. b. w.

▲3▲ p ist eine ungerade Zahl $2m + 1$. Dann ist $p^2 - 1 = 4m^2 + 4m = 4m(m + 1)$. Es folgt $8 \mid p^2 - 1$, da $m(m + 1)$ stets eine gerade Zahl ist. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p - 1$, p, $p + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da p aber nicht durch 3 teilbar ist, folgt
$3 \mid (p - 1)(p + 1) = p^2 - 1$.
Insgesamt ist $p^2 - 1$ also durch 3 und durch 8 teilbar, also auch durch $3 \cdot 8 = 24$ (3 und 8 sind teilerfremd), w. z. b. w.

▲4▲ Angenommen, es ist $d > 1$ ein gemeinsamer Teiler des Zählers und Nenners. Dann gilt
$d \mid 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$.
Das ist aber ein Widerspruch. Also gibt es kein d, w. z. b. w.

▲5▲ $2n + 1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen können wir in der Form $a - n$, ..., $a - 2$, $a - 1$, a, $a + 1$, $a + 2$, ..., $a + n$ darstellen. Da die Summe von zwei bzgl. a symmetrischen Zahlen $a - i$ und $a + i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stets $2a$ ist, ergibt sich als Summe aller $2n + 1$ Zahlen $2an + a = a(2n + 1)$, woraus die Behauptung folgt.

▲6▲ Angenommen, die Behauptung ist falsch. Wir wählen unter allen Gegenbeispielen eines mit minimalem n. Es sei also A eine Menge von $n + 1$ Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, für die die Behauptung falsch ist. Dagegen ist die Behauptung insbesondere für beliebige n Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n - 2\}$ noch richtig (es ist $n > 1$). Deshalb kann A höchstens $n - 1$ Zahlen enthalten, die $\leqq 2n - 2$ sind. Daher gilt $2n - 1 \in A$, $2n \in A$.
Folglich ist n nicht in A enthalten $(n \mid 2n)$. Nimmt man zu den $n - 1$ Zahlen von A, die $\leqq 2n - 2$ sind, noch die Zahl n hinzu, so müssen unter diesen zwei Zahlen existieren, von denen eine die andere teilt. Das ist aber nur möglich, wenn ein $a \in A$ mit $a \mid n$ existiert. Damit würde A die Zahlen a und $2n$ enthalten, was wegen $a \mid 2n$ ein Widerspruch ist. Folglich gibt es kein Gegenbeispiel A, d. h. die Behauptung ist richtig.

Lösung zu: Eine harte Nuß

Wenn wir in der mittleren Zeile die linke Zahl mit u und die mittlere Zahl mit v bezeichnen, so lautet die mittlere Zeile $u + v = u + v$. Die beiden darüberstehenden Zahlen müssen dann Vielfache von u bzw. v sein; wir wollen sie mit au bzw. bv bezeichnen:

$$\begin{array}{ccccc} au & - & bv & = & au - bv \\ : & & : & & : \\ u & + & v & = & u + v \\ \hline a & - & b & = & \ldots \end{array}$$

Die neunte Zahl dieses Schemas muß die Gleichung
$a - b = (au - bv) : (u + v)$
erfüllen. Es folgt schrittweise
$(a - b) \cdot (u + v) = au - bv$,
$au + av - bu - bv = au - bv$,
$av = bu$.
Ist k der größte gemeinsame Teiler von u und v und l der größte gemeinsame Teiler von a und b, so gilt $u = kx$, $v = ky$, $a = lm$ und $b = ln$, wobei x und y sowie auch m und n teilerfremd sind.
Durch Einsetzen in $av = bu$ ergibt sich $my = nx$. Da x und y sowie m und n teilerfremd sind, muß $m = x$ und $n = y$ gelten.
Damit ergibt sich

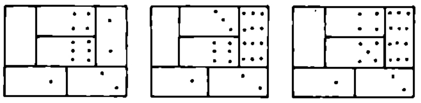
$$\begin{array}{ccccc} klx^2 & - & kly^2 & = & kl(x^2 - y^2) \\ : & & : & & : \\ kx & + & ky & = & k(x + y) \\ \hline lx & - & ly & = & l(x - y) \end{array}$$

Bei der Herstellung mußte gelten: a, b, u, v, k, l, m, n, x, y sind von Null verschiedene natürliche Zahlen.
Nun können wir festlegen:
$k, l, x, y \in N$, $k \neq 0$, $x \geqq y > 0$.
Wegen $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ist auch die rechte Spalte stets erfüllt. Die allgemeine Lösung ist gefunden.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Sechs Dominosteine sind wie im Bild in Rechteckform ausgelegt. Lege auch du sechs Dominosteine derart aus, daß ein zum dargestellten Rechteck kongruentes entsteht, in welchem die Summe (das heißt, die durch die Dominosteine in der untersten Zeile symbolisierte Dezimalzahl) möglichst klein ist.

Lösung: Auf Grund des Aufbaus des Dominospiels ist die kleinste in der angegebenen Weise darstellbare Summe 102. Sie ist durch drei verschiedene Anordnungen darstellbar:



▲2▲ Eine gerechte Teilung

Zwei Männer verkauften ihre Herde von x Kühen zu x Dollar das Stück. Davon kauften sie Schafe zu 10 Dollar das Stück und ein einzelnes Lamm, das weniger als 10 Dollar kostete. Jeder Mann erhielt die gleiche Anzahl Tiere, aber derjenige, der das Lamm erhielt, hatte einen Ausgleich zu bekommen, damit die Teilung gerecht wird. Wieviel Geld hat er von dem anderen Mann erhalten?

Lösung: Der Verkaufserlös für die Kühe beträgt x^2 Dollars. Die Zahl der Schafe muß ungerade sein. Sie sei $2n + 1$ $(n \in N)$.

Dann teilt sich der Verkaufserlös folgendermaßen auf: $x^2 = 10(2n + 1) + y$, wobei y der Preis des Lammes ist.

Quadratzahlen mit einer ungeraden Zahl an der Zehnerstelle (16, 36, 196, 256, ...) haben immer die 6 als Einerstelle (hier ohne Beweis). Deshalb beträgt die Differenz 4 Dollar.

Folglich erhält der Mann mit dem Lamm eine Ausgleichszahlung von 2 Dollar.

▲3▲ Ein Eisenträger mit T-Profil besteht aus einem Rechteck von 4 cm mal 1,2 cm und einem zweiten von 6 cm mal 1,5 cm. Die Länge des Trägers beträgt 4 m. Berechne die Masse des Trägers, wenn die Dichte von Eisen $7{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ ist!

Lösung: $m = V \cdot \varrho$; $m = (A_1 + A_2) \cdot l \cdot \varrho$; $m = 43\,\text{kg}$. Der Eisenträger besitzt eine Masse von ca. 43 kg.

Lösungen zu: Eigenaufgaben der MSG Greifswald

▲1▲ 2 Uhr 06 min 52 sec
bis 2 Uhr 19 min 25 sec
3 Uhr 04 min 25 sec
bis 3 Uhr 19 min 25 sec
4 Uhr 04 min 25 sec
bis 4 Uhr 19 min 25 sec
5 Uhr 04 min 25 sec
bis 5 Uhr 06 min 52 sec

▲2▲ Gleiche Massen ergeben die größere Dichte.

▲3▲

	1.	2.	3.	4.	Σ	Kerze
1.	1(0)	1(0)	0	1	$k \cdot 1$	
2.	0(1)	0(1)	1	1	$l \cdot 2$	
3.	1	1	1	0	$m \cdot 3$	
4.	1	1	1	1	$n \cdot 4$	
Sonntag						

In der i-ten Zeile muß die Zeilensumme ein Vielfaches von i sein. In der j-ten Spalte muß die Spaltensumme 3 sein. Dann ist

$k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 3 + n \cdot 4 = 12$

Also

$n = 1,\ m = 1,\ k + 2l = 5,\ k \geqq 1,\ l \geqq 1$,

d.h. $k = 1$, $l = 2$ oder $k = 3$, $l = 1$

Dabei ist am 1. (bzw. 2.) Sonntag zu beachten, daß die Kerzen so brennen, daß die Forderung a) nicht verletzt wird. Das ist möglich.

Lösungen zu: Ein Legespiel – mathematisch betrachtet

▲1▲ 48

▲2▲ Ja, $c' = ab = (2, 1, 3, 0, 1, 1)$

▲3▲ Ja

▲4▲ $d = (2, 1, 3, 1, 0, 0)$,
$d' = (3, 2, 1, 1, 0, 1)$

▲5▲ $(2, 3, 1, 0, 0, 0)$, $(3, 1, 2, 0, 0, 0)$,
$(1, 2, 3, 0, 0, 0)$, $(1, 3, 2, 1, 1, 1)$,
$(3, 2, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 3, 1, 1, 1)$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. F. Terpe

▲2910▲ Das Verhältnis beträgt $(1 - k)^2 : (2k + 2)^2$.

Lösungen zu: Die Konstantenautomatik des SR 1

▲1▲

1.a) $(a + b)\,c$; 1.b) $a + bc$;
2.a) $ab : c$; 2.b) $ab : c$

▲2▲

1. $a + b^2$; 2. ab^c; 3. $(ab)^c$

▲3▲

1.a)α) ab^2; β) cb^2; γ) db^2

1.b) $\boxed{x}$ $\boxed{b}$ $\boxed{x^2}$

2.a)α) $a^2 + \frac{1}{\sqrt{b}}$; β) $c + \frac{1}{\sqrt{b}}$; γ) $d + \frac{1}{\sqrt{b}}$;

2.b) $\boxed{+}$ $\boxed{b}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1/x}$

▲4▲

1.a)α) $a + b - c$; β) $d - c$; γ) $e - c$;

1.b) $\boxed{-}$ $\boxed{c}$;

2.a)α) $\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{c}$; β) $d\sqrt{c}$; γ) $e\sqrt{c}$;

2.b) $\boxed{x}$ $\boxed{c}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

▲5▲

1.a)α) $ab - \frac{1}{c} + \frac{d}{e}$; β) $f + \frac{d}{e}$; γ) $g + \frac{d}{e}$;

1.b) $\boxed{+}$ $\boxed{d}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{e}$; 2.a)α) $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{c}^{\,d}$;
β) $e \cdot \sqrt{c}^{\,d}$; γ) $f \cdot \sqrt{c}^{\,d}$;

2.b) $\boxed{x}$ $\boxed{c}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{d}$

▲6▲

1.α) $ab : c^2$; β) $\frac{1}{d} : c^2$; γ) $e : c^2$; δ) $f + g$;
ε) $h + g$;

2.α) $\frac{1}{a + b}$; β) $c + b$; γ) $c + 2b$;
δ) $-d + b$; ε) $e \cdot e = e^2$; ζ) $f \cdot e$;
η) $g \cdot e$;

3.α) ab; β) $\frac{1}{c^2} \cdot b = \frac{b}{c^2}$; γ) $\frac{1}{c^2}\,b \cdot b = \frac{b^2}{c^2}$;
δ) $d + e - fg$; ε) $h - fg$

▲7▲ $\boxed{a_1}$ $\boxed{x}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\underset{\nearrow e_1}{\boxed{=}}$ $\boxed{a_2}$ $\underset{\nearrow e_2}{\boxed{=}}$ ...

$3{,}87\,\text{dm} < e_1 < 3{,}89\,\text{dm}$; $6{,}3\,\text{cm} < e_2 < 6{,}5\,\text{cm}$; $10{,}1\,\text{cm} < e_3 < 10{,}4\,\text{cm}$; $7{,}92\,\text{m} < e_4 < 7{,}95\,\text{m}$; $4{,}7 \cdot 10^{-10}\,\text{cm} < e_5 < 5{,}0 \times 10^{-10}\,\text{cm}$

▲8▲

$\boxed{4}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ $\boxed{r_1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x}$
$\boxed{MR}$ $\underset{\nearrow A_{01}}{\boxed{=}}$ $\boxed{r_2}$ $\boxed{x^2}$ $\underset{\nearrow A_{02}}{\boxed{=}}$ ...

$102\,\text{cm}^2 < A_{01} < 110\,\text{cm}^2$; $172\,\text{m}^2 < A_{02} < 174\,\text{m}^2$; $876\,\text{dm}^2 < A_{03} < 898\,\text{dm}^3$; $5{,}0998 \cdot 10^8\,\text{km}^2 < A_{04} < 5{,}1015 \cdot 10^8\,\text{km}^2$

▲9▲ $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{1}{h} \cdot \frac{V}{\pi}}$

$\boxed{V}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x \to M}$ $\boxed{h_1}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{x}$
$\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\underset{\nearrow r_1}{\boxed{\sqrt{\ }}}$ $\boxed{h_2}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underset{\nearrow r_2}{\boxed{\sqrt{\ }}}$ ...

Der Zielwert $V = 500\,\text{cm}^3 = 0{,}5\,\text{l}$ wird als wahrer Wert angesehen. Dann gilt:
$3{,}36\,\text{cm} < r_1 < 3{,}38\,\text{cm}$; $3{,}020\,\text{cm} < r_2 < 3{,}029\,\text{cm}$; $2{,}567\,\text{cm} < r_3 < 2{,}573\,\text{cm}$; $2{,}301\,\text{cm} < r_4 < 2{,}306\,\text{cm}$

▲10▲ $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{-b^2 + c^2}$

$\boxed{b_1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ $\boxed{c}$ $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\underset{\nearrow a_1}{\boxed{\sqrt{\ }}}$ $\boxed{b_2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ $\underset{\nearrow a_2}{\boxed{\sqrt{\ }}}$ ...

Wird auch $c = 6{,}3\,\text{cm}$ als Meßwert angesehen, so gilt:
$6{,}1\,\text{cm} < a_1 < 6{,}3\,\text{cm}$; $5{,}8\,\text{cm} < a_2 < 6{,}0\,\text{cm}$; $5{,}2\,\text{cm} < a_3 < 5{,}4\,\text{cm}$; $4{,}5\,\text{cm} < a_4 < 4{,}9\,\text{cm}$; $3{,}5\,\text{cm} < a_5 < 3{,}9\,\text{cm}$

▲11▲ $R = \frac{1}{\frac{1}{R_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{II}}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\mathrm{II}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{I}}}}$

$\boxed{R_{\mathrm{II}1}}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{R_{\mathrm{I}}}$ $\boxed{1/x}$
$\boxed{=}$ $\underset{\nearrow R_1}{\boxed{1/x}}$ $\boxed{R_{\mathrm{II}2}}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underset{\nearrow R_2}{\boxed{1/x}}$ ...

Wird auch $R_{\mathrm{I}} = 50\,\Omega$ als Meßwert angesehen, so gilt:
$8{,}29\,\Omega < R_1 < 8{,}37\,\Omega$; $14{,}25\,\Omega < R_2 < 14{,}32\,\Omega$; $18{,}72\,\Omega < R_3 < 18{,}78\,\Omega$; $22{,}19\,\Omega < R_4 < 22{,}25\,\Omega$; $24{,}97\,\Omega < R_5 < 25{,}03\,\Omega$; $27{,}24\,\Omega < R_6 < 27{,}30\,\Omega$; $29{,}14\,\Omega < R_7 < 29{,}20\,\Omega$; $30{,}74\,\Omega < R_8 < 30{,}80\,\Omega$; $32{,}11\,\Omega < R_9 < 32{,}17\,\Omega$; $33{,}30\,\Omega < R_{10} < 33{,}37\,\Omega$

▲12▲

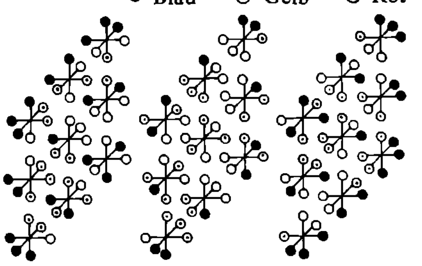
$\boxed{1{,}1}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ $\underset{\nearrow 1{,}1^3}{\boxed{=}}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{1{,}2}$
$\underset{\nearrow 1{,}2^3}{\boxed{=}}$ $\boxed{M+}$ ... $\boxed{1{,}9}$ $\underset{\nearrow 1{,}9^3}{\boxed{=}}$ $\boxed{M+}$ $\underset{\nearrow s}{\boxed{MR}}$

$s = 33{,}075$

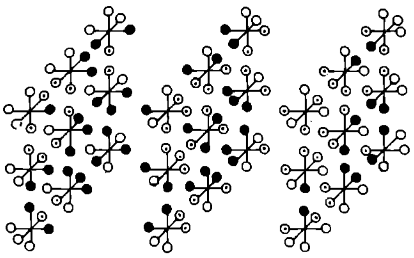
Lösungen zu: Die Trio-Würfel

▲2▲ Das Bild zeigt ein mögliches Modell:

● Blau ○ Gelb ⊙ Rot



▲3▲ Folgende Färbungsvorschrift zur Herstellung der Trio-Würfel ist zu entnehmen: Man setze 27 gleich große Würfel zu einem 3×3×3-Würfel zusammen und färbe dessen Oberfläche mit der 1. Farbe. Dann ziehe man die drei Schichten in jeder der drei räumlichen Richtungen auseinander und färbe in jedem Falle zwei gegenüberliegende Schichtflächen mit der 2. Farbe und die beiden anderen gegenüberliegenden Schichtflächen mit der 3. Farbe so, daß der Zentralwürfel zwei einfarbige Ecken hat.



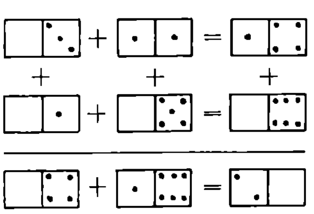
▲5▲ Das ist nicht möglich, denn in den erstgebauten einfarbigen 2×2×2-Würfel müssen bereits zwei einfarbige Würfelecken der beiden anderen Farben eingebaut werden, die für den Bau eines zweiten oder dritten Würfels fehlen.

▲6▲ Wegen der Spezifik der Färbung der Trio-Würfel (3 der 27 Trio-Würfel tragen nur zwei Farben, gegenüberliegende Würfelflächen sind niemals gleichfarbig, nur begrenzte Anzahl von Würfeln eines bestimmten Typs) können z. B. nicht gebaut werden: a) nichtwürfelförmige Modelle mit einfarbiger Oberfläche, b) aus 27 Würfeln bestehende Mauern (Dicke: 1 Würfelseite) mit einer einfarbigen Wandfläche, c) Gebäudeteile (Dicke: 1 Würfelseite), bei denen gegenüberliegende Teilflächen gleichfarbig sind.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

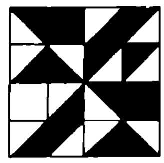
Primzahl-Hokuspokus
Der Polygonzug ergibt das Wort Euler (Leonhard Euler, 1707 bis 1783).

Rätselhaftes Domino



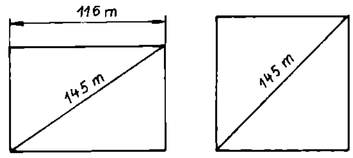
Lolek und Bolek
Durch Fallunterscheidung nach E ($E = 0$, 2, 4, 6, 8) erhält man die folgenden acht Lösungen:
41426 + 31426 = 72852; 37342 + 17342 = 54684; 37342 + 57342 = 94684; 32347 + 52347 = 84694; 19184 + 59184 = 78368; 39384 + 19384 = 58768; 14189 + 54189 = 68378; 24289 + 14289 = 38578

Farbenverkehrt



5

Mathematisches Märchen
Mit dem Satz des Pythagoras kann man die noch fehlenden Feldseiten berechnen:
Feld A – 10092 Quadratmeter;
B – 10512,5 Quadratmeter;
Differenz – 420,5 Quadratmeter.
Iwan bekam die Bauerstochter zur Frau, da seine Schätzung genauer war.



(Feld A) (Feld B)

Verkehrte Welt am Taschenrechner
Waagerecht: $a_w = 7391335$ (SEEIGEL), $f = 3773539$ (GESELLE).
Senkrecht: $a_s = 9315$ (SIEG), $b = 3873$ (ELBE), $c = 3571$ (ILSE), $d = 7393$ (EGEL), $e = 3537$ (LESE).

Scheinzauber

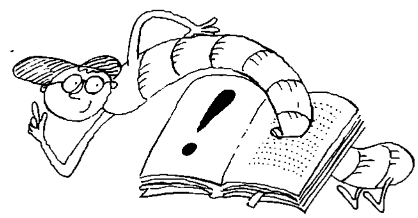
	Scheine zu (Mark)				
Betrag	100	50	20	10	5
735	7	–	1	1	1
780	7	1	1	1	–
845	8	–	2	–	1
865	8	1	–	1	1
915	9	–	–	1	1
955	9	1	–	–	1
1085	10	1	1	1	1
1130	11	–	1	1	–
7310	69	4	6	6	6
Kontrolle					
7310	6900	200	120	60	30

Systematisch zum Ziel
Um von M zu E (rechts unten) zu gelangen, gibt es über die Buchstaben der 7. Zeile bzw. Spalte nur je eine Möglichkeit. Die Anzahl der Wege über alle anderen Buchstaben läßt sich jeweils aus der Summe der sich unmittelbar darunter und rechts daneben ergebenden Anzahl der Wege ermitteln. Damit ergeben sich 1716 Möglichkeiten.

Die aktuelle Folge
Das gesuchte Folgeglied heißt 1988.
Bei dieser Folge handelt es sich um das Jahr 1988 in den Positionssystemen zur Basis 2; 3; 4; ...

Lösung zu: Visuelle Logik
Heft 4/88

Die Zeichen entsprechen den Zahlen 1 bis 6 und sie liegen sich an den Berührungspunkten gegenüber. Die Summe der Zeichen und Zahlen in den aus den Feldern gebildeten Quadraten ist immer 25. In die leeren Felder muß deshalb die Blüte als Zeichen für die 1 eingezeichnet werden.



Buchtips

Karl Heinz Hardt
Das Flugzeug
47 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 120 5 Preis: 12,50 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

G. Brandes/R. Jarschel
Feuer und Flamme
Interessantes vom Feuerzeug
Etwa 192 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 547 442 9 Preis: 20,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Walter Kranzer
So interessant ist die Mathematik
Ein Spaziergang durch das Reich der Mathematik zur Würze von Mußestunden und zur Anregung im Unterricht
Etwa 250 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 571 680 3 Preis: 30,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Eberhard Schröder
Mathematik im Reich der Töne
111 Seiten, 61 Abb., MSB Nr. 106
Bestell-Nr. 666 078 4 Preis: 7,00 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

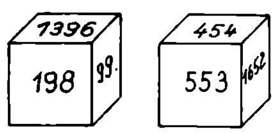
Wißt ihr schon?

– Die älteste Bibliothek der Menschheit entstand vor fast 4000 Jahren im Land Sumer. Sie bestand aus mehr als 2000 Schrifttafeln, die wichtige Gesetze, dazu viele Märchen, Sagen, Lieder und auch wissenschaftliche Texte enthielten.
– Eine der ältesten mathematischen Schriften vor 3600 Jahren im alten Ägypten von einem Schreiber namens Ahmes verfaßt wurde. Sie enthält eine Sammlung von Rechenaufgaben, die praktische Probleme behandeln. So zum Beispiel Flächen- und Volumenberechnungen, geometrische Konstruktionen in Architektur und Bauwesen und auch schon Aufgaben mit Variablen.
– Vor fast 1000 Jahren in einer Wiener Klosterbibliothek jeder Mönch, wenn er ein neues Buch ausleihen wollte, eine Prüfung ablegen mußte; er mußte beweisen, ob er das alte Buch nutzbringend gelesen hat. Fiel er durch, bekam er es nochmal.

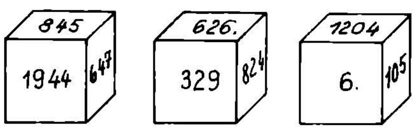
aus: R. Fiedler „Streifzüge durch die Mathematik", H. Meyer „Bücher, Leser, Bibliotheken", beide: Der Kinderbuchverlag Berlin

Schneller als mit dem Rechner!

Teil 2



297, 1990, 594 1850, 157, 58



1548, 746, 449 428, 1923, 1725 600, 501, 1303

Im ersten Teil hatten wir mit sechs Würfeln gewürfelt. Jetzt *steigern wir uns* und sind auch noch bei fünf Würfeln schneller im Addieren als unser Freund mit seinem Rechner.

Noch einmal das Prinzip: Auf den fünf abgebildeten Würfeln siehst du auf den Würfelflächen ein-, zwei-, drei- oder vierstellige natürliche Zahlen notiert. (Die Zahlen der jeweils nicht sichtbaren Flächen sind daruntergeschrieben.) Dein Freund würfelt und du stellst die fünf gewürfelten Zahlen schön in Reihe nebeneinander. Während dein Freund mit dem Rechner addiert, addierst du die fünf Einer und schreibst sie dir als zweiziffrige Zahl auf. Dann ergänzt du diese Zahl zu 50 und schreibst sie davor, so daß eine vierstellige Zahl entsteht. Dann addierst du noch schnell die (eventuell vorhandenen) Tausender zu den Tausendern deiner vierstelligen Zahl dazu. Du wirst sicher schneller sein als dein Freund mit seinem Rechner.

Als Beispiel:

198, 58, 1944, 725, 1204.

Einersumme 29, Ergänzung 21, also 2129; dazu 2 Tausender, somit 4129 als Ergebnis.

Nun wenden wir uns den Fragen zu:

1. *Warum* findet man *so* die *schnelle Lösung*?
2. *Wie* stellt man sich solche Zahlen auf den Würfeln her?

Betrachten wir die einzelnen Würfel etwas genauer!

Dazu lassen wir zunächst die Tausender außer Betracht und setzen vor die ein- und zweistelligen Zahlen 00 bzw. 0, so daß jetzt bei allen Würfeln dreiziffrige Darstellungen vorliegen von der Form $\overline{abc}$ (in Ziffern-darstellung) bzw. $100a + 10b + c$ (in Potenzschreibweise).

Wir stellen fest:

1. Bei ein und demselben Würfel sind die Zehnerstellen untereinander gleich.

Dabei lauten die fünf Zehner bei unseren fünf Würfeln

$b_1 = 9,\ b_2 = 5,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2,\ b_5 = 0.$

Ihre Summe ergibt sich daraus mit $b_s = 20$.

2. Bei ein und demselben Würfel sind die sechs Summen, die jeweils aus der Hunderter- und der Einerstelle gebildet werden, untereinander gleich.

Bezeichnet man nun auf unseren fünf gewürfelten Zahlen die Hunderter mit a_1 bis a_5 und die Einer mit c_1 bis c_5, so erhält man

$a_1 + c_1 = 9,\ a_2 + c_2 = 8,\ a_3 + c_3 = 13,$
$a_4 + c_4 = 12,\ a_5 + c_5 = 6.$

Ist a_s die Summe der fünf Hunderter, so gilt demnach

$$a_s = (9 - c_1) + (8 - c_2) + (13 - c_3) + (12 - c_4) + (6 - c_5) = 48 - c_s,$$

wenn mit c_s die Summe der fünf Einer bezeichnet wird.

Nun bilden wir die Gesamtsumme s der gewürfelten Zahlen. Es ist dann

$$\begin{aligned} s &= (48 - c_s)\cdot 100 + 20\cdot 10 + c_s \\ &= 4800 + 200 - 100c_s + c_s \\ &= 5000 - 100c_s + c_s \\ &= (50 - c_s)\cdot 100 + c_s. \end{aligned}$$

Und das ist gerade die anfangs angegebene Methode zum schnellen Finden der vierstelligen Summe. Wir beachten nur noch, daß wir eventuell vorhandene Tausender hinzufügen müssen.

Die Frage nach weiteren Zusammenstellungen solcher Würfelsysteme wirst du vielleicht nun selbst beantworten können.

An einem Beispiel mit sechs Würfeln wollen wir unsere Überlegungen dennoch gemeinsam treffen.

Welchen Bedingungen unterliegen unsere Zahlen?

a) Zur Festlegung der Zehnerziffern:

Auf unseren sechs Würfeln muß die Summe $b_s = b_1 + b_2 + \ldots + b_6$ ein Vielfaches von 10 sein, denn ein Vielfaches von 100 muß später addiert werden. Sollen bei den sechs Zehnerziffern keine zwei gleiche Ziffern erscheinen (was wegen der *Verschleierung* sinnvoll ist), so verbleiben für b_s nur die Summen 20 oder 30. (Für $b_s = 10$ wäre

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + k = 10$, *mit* $k \geqq 5$

nicht möglich und für $b_s \geqq 40$ wäre

$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + k \geqq 40$, mit $k \leqq 4$

nicht möglich.)

Wir wählen also z. B. $b_s = 20$ und als Zehner die Zahlen 0, 1, 2, 3, 6, 8.

b) Zur Festlegung der Hunderter- und Einerziffern:

Wegen $b_s = 20$ ergeben sich für die Summe auf unseren sechs Würfeln

$(a + c)_s = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + \ldots + (a_6 + c_6)$ nur 48.

Sollen auf den sechs Seitenflächen ein und desselben Würfels bei den Hunderterziffern bzw. bei den Einerziffern keine zwei gleiche Ziffern erscheinen *(Verschleierung)*, so muß jeder der angegebenen sechs Summanden größer als 4 und kleiner als 14 sein. Da nämlich

$$\begin{aligned} 4 &= (0 + 4) = (1 + 3) = (2 + 2) \\ &= (3 + 1) = (4 + 0) = (?) \text{ bzw.} \\ 14 &= (9 + 5) = (8 + 6) = (7 + 7) \\ &= (6 + 8) = (5 + 9) = (?), \end{aligned}$$

würden sich mindestens auf einer der sechs Seitenflächen des Würfels die angegebenen Zahlen in der Hunderter- und Einerstelle wiederholen.

Ein Beispiel für $(a + c)_s = 48$ könnte die Zerlegung

$5 + 7 + 8 + 9 + 9 + 10$ sein.

Würfel I könnte dann die Zahlen haben:

500, 401, 302, 203, 104, 5

Würfel II 710, 611, 413, 314, 116, 17

Unter Beachtung des beschriebenen Verfahrens vervollständige selbst und setze zur *Verschleierung* noch bei jedem Würfel ein bis zwei Eintausender vor die dreistelligen Zahlen!

Abschließend sei noch bemerkt, falls du dir zwei solcher Würfelsysteme gebastelt hast, daß du sie zu einem vereinigen kannst und daß dann natürlich wegen der Additionen jetzt die zweiziffrige Summe aller Einerzahlen auf 100 zu ergänzen ist.

Viel Spaß beim Basteln und beim Vorführen!

Unser Mitglied des Bezirksklubs Junger Mathematiker/Bezirk Neubrandenburg *Jan Fricke* aus Pasewalk, Kl. 10 (siehe Bild) schickte uns nach Aufforderung dazu eine Lösung für dieses Würfelsystem. Jan ist seit der 5. Klasse Mitglied des BJM und war bisher stets Frühstarter auf den Kreis-, Bezirks- und DDR-Mathematikolympiaden. 1988 erhielt er in Olympiadeklasse 12 als Frühstarter einen I. Preis sowie ein Diplom für eine besonders elegante Lösung einer Aufgabe.

H.-J. Kerber

Eine Leseranfrage

Liebe Redaktion *alpha*!

Von einem Freund wurde mir folgende mathematische Aufgabe gestellt:

Ein Würfel mit einem Kilometer Kantenlänge sei mit Wasser gefüllt. Im Boden sei eine Öffnung von 100 mm Durchmesser. Wie lange braucht das Wasser, um aus dem Gefäß herauszufließen? Meine Schätzung beläuft sich auf mindestens 250 Jahre. Nun fehlt mir aber der mathematische Nachweis, um den ich Sie bitten möchte.

Wenn ihr eine Lösung wißt, schreibt doch an

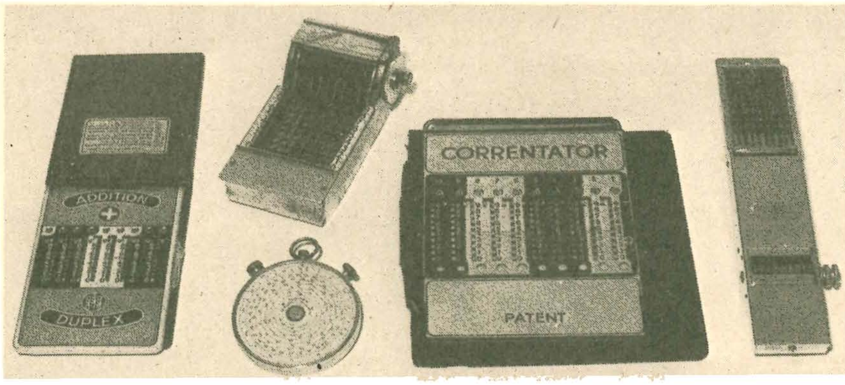
Rainer Gruhne
Hauptstr. 62
Gorden
7901

Die Redaktion

Vom Comptator zum Computer

Rechentechnische Sammlung der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Sektion Mathematik

Bild 1



Wenn ihr addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren wollt oder gar Quadratwurzeln und Werte von trigonometrischen Funktionen bestimmen müßt, greift ihr meist zu einem zuverlässigen Helfer, dem Schulrechner SR 1. Eure Eltern haben in der Schule Rechenstäbe und Logarithmentafeln benutzt, eure Großeltern haben noch das schriftliche Wurzelziehen gelernt.

Über die Entwicklung der Rechentechnik gibt in Greifswald eine kleine Ausstellung von Rechenmaschinen und Rechenhilfsmitteln Auskunft. 350 Jahre lang waren Rechenstäbe die Universal-Rechenhilfsmittel für Techniker, Astronomen, auch für Naturwissenschaftler und Ökonomen. Wir zeigen eine Kollektion von Stäben aus den verschiedensten Materialien und für ganz spezielle Einsatzgebiete, dazu auch Rechenscheiben und eine Rechenwalze. Rechenbretter aus der Sowjetunion, aus Vietnam und Japan sind ebenso zu sehen wie Modelle von Neper-Stäben für die Multiplikation. In der Sammlung werden zahlreiche Typen von mechanischen Rechenmaschinen mit Handkurbel oder mit Elektromotorantrieb gezeigt. Schüler, die unsere Ausstellung besuchen, dürfen mit einigen *Uralt-Maschinen* auch richtig rechnen. Die älteste Maschine der Sammlung hat immerhin schon vor 120 Jahren geholfen, Aufgaben mit den vier Grundrechenarten schneller und *beinahe automatisch* zu lösen. Noch fixer und zuverlässiger geht es mit Tischrechnern und elektronischen Taschenrechnern.

Die elektronische Rechenanlage ODRA 1013 leistete bis vor wenigen Jahren treue Dienste an der Universität Greifswald. Neben dieser ersten in Greifswald installierten EDV-Anlage zeigen wir auch Teile von anderen Rechnern, insbesondere Speichereinrichtungen. Wenn die Möglichkeit besteht, im Rechentechnischen Kabinett der Sektion die Kleincomputer KC 85/3 zu sehen, mit ihnen Computerspiele zu starten oder gar selbst ein kleines BASIC-Programm zu schreiben, um den Computer zeichnen oder rechnen zu lassen, dann erkennen unsere Besucher sehr anschaulich, wie stürmisch sich die Rechentechnik entwickelt hat.

Wir wollen euch aus der Greifswalder Sammlung einige historische Taschenrechner vorstellen. Einige Leser werden sich noch daran erinnern, daß sie als ABC-Schützen Demonstrationsrechenstäbe mit gleichmäßig unterteilten Skalen für die Addition und Subtraktion im Zahlenbereich natürlicher Zahlen kleiner gleich 20 (oder 200) benutzt haben. Addition und Subtraktion wurden dort auf das Aneinanderlegen von Strecken zurückgeführt. Bei größeren Zahlen würden derartige Additionsstäbe aber äußerst lang und unhandlich werden. Die beiden in Bild 1 dargestellten Additionsgeräte (Addition Duplex und Correntator) verwenden die übliche Positionsdarstellung (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, ...) von natürlichen Zahlen. Die Geräte haben die Form eines Notizbuches, sie wurden auch scherzhaft Rechenhexen genannt.

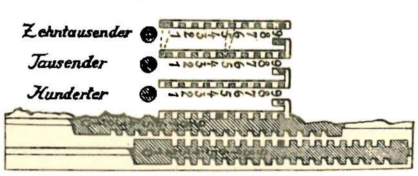


Bild 2

Für jede Position (Ziffer) ist eine Zahnstange vorhanden (Bild 2). Das Gerät befinde sich in der Ausgangsstellung, in allen Sichtfenstern wird 0 angezeigt. Soll nun eine Zahl

$$a_1 + a_2 \cdot 10 + \ldots + a_n \cdot 10^n$$

eingegeben (addiert) werden, so greift man mit dem zugehörigen Griffel neben der Ziffer a_1 in die Zahnstange der ersten Position und zieht diese um a_1 Zähne nach unten, anschließend wird in die Lücke der zweiten Zahnstange bei a_2 eingegriffen und diese mit dem Griffel ganz nach unten ge-

$$\boxed{0\,0\ldots 0\; a_n \ldots a_1}\,.$$

Soll eine zweite Zahl $b_m \cdot 10^m + \ldots + b_1$ addiert werden und ist dies in allen Positionen ohne Übertrag möglich, so verfahre man wie bei der ersten Addition. Ist aber z. B. $a_1 + b_1 > 9$, so wird die sogenannte Komplementzahl-Methode angewandt:

$$a_1 + b_1 = a_1 - (10 - b_1) + 10,$$

d. h. es wird $(10 - b_1)$ subtrahiert und in der Zehnerposition eine 1 addiert. Die Subtraktion wird durch Verschieben der Zahnstange nach oben realisiert. Um $(10 - b_1)$ von a_1 zu subtrahieren, ist einfach der Griffel bei b_1 in die Zahnstange einzusetzen und soweit wie möglich nach oben zu ziehen. Dann kann der Griffel entlang der hakenförmigen Aussparung in der Deckplatte nach links geführt und in der nächsten Position die Zahnstange um 1 nach unten gezogen werden (Addition von 10). Mit den übrigen Ziffern rechne man in den entsprechenden Positionen ganz genauso. Wichtig ist, daß ein möglicher Übertrag vom Benutzer selbst mit Hilfe der Aussparung und des Griffels in der nächsten Stelle abzutragen ist. Das Problem des Zehnerübertrags mußte bei allen mechanischen Rechenmaschinen gelöst werden. Meist geht es automatisch wie beim Kilometerzähler. Aber auch bei elektronischen Rechengeräten sind Additionsschaltungen (für Dualzahlen) mit möglichem Übertrag vorhanden, nur ahnt man dies als Benutzer kaum. Aber gerade deshalb ist die Realisierung des Übertrags bei den *Rechenhexen* von Interesse.

Man überlege sich, wie mit diesem Gerät zu subtrahieren ist!

Die Addiermaschine Comptator (rechts in Bild 1) ist fast einhundert Jahre alt.

An eine Stoppuhr erinnert das in Bild 1 dargestellte runde Gerät. Es ist eine Rechenuhr, sie ist mit den Rechenscheiben verwandt und benutzt das Prinzip des Rechenschiebers.

Führungen durch unsere Sammlung sind nach telefonischer Voranmeldung möglich. Wir freuen uns auch über Hinweise auf alte Rechenmaschinen, die noch im Verborgenen schlummern, über Schenkungen und Angebote. *W. Schmidt*

Tips gefragt!

Mit unserer neuen Serie, die euch historische mathematische Instrumente vorstellt, möchten wir euch gleichzeitig Tips für sehenswerte Sammlungen solcher Instrumente geben. An der weiteren Gestaltung solltet ihr mitwirken! Schreibt uns doch, wenn euch ein noch nicht vorgestelltes mathematisches Instrument interessiert oder ihr in eurem Heimatbezirk bzw. bei Reisen ein sehenswertes Instrument in einer zu besichtigenden Sammlung entdeckt habt. Es muß ja nicht gleich der Dresdner Zwinger sein! *Alphons*

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 5 · Seiten 97 bis 120