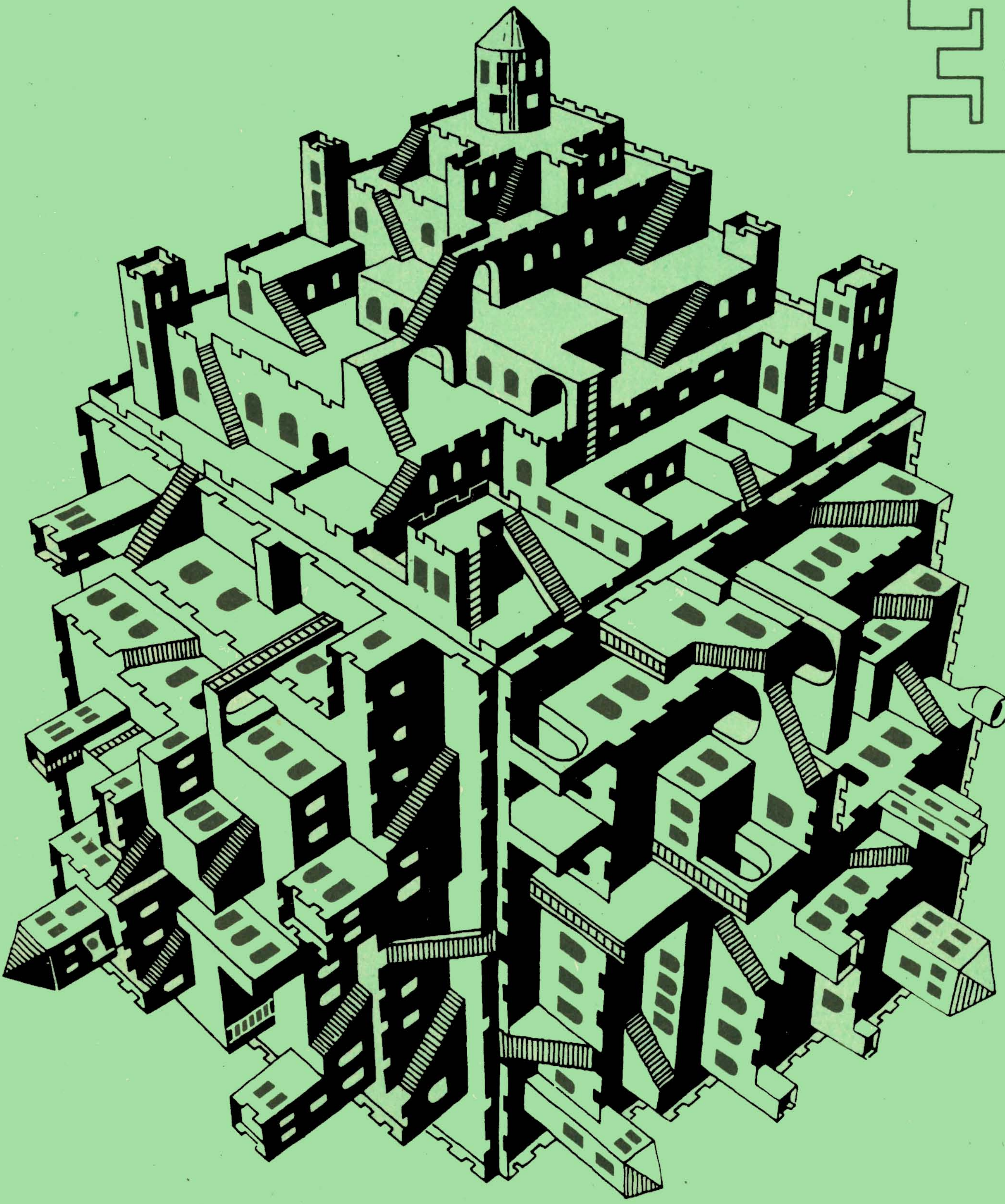
Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

alpha

3



Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 52); Bild und Heimat, Reichenbach (S. 53); Vignette aus *Krokodil*, Moskau (S. 55); Vignette aus DLZ, H.-J. Sprengel (S. 59); Zeichnung: Dreke, Urania 7/76 (S. 60); Vignetten: B. Henniger, Berlin, aus Eulenspiegel (S. 61); R. E. Moritz, New York, H. Kretzschmar, Berlin, M. Köpp, Leipzig (S. 66/67).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Das Titelbild wurde aus der ungarischen Rätselzeitschrift „Füles“ (10/77) übernommen. Es stellt ein Labyrinth dar. *Graphische Gestaltung:* W. Fahr, Berlin.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 · ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. Februar 1978

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über Punktspiegelungen in der euklidischen Ebene

Der Abbildungsbegriff gehört zu den grundlegenden Begriffen der Mathematik. Bewegungen und Ähnlichkeitsabbildungen sind eineindeutige Abbildungen der Menge aller Punkte und der Menge aller Geraden der Ebene auf sich, bei denen gewisse Eigenschaften geometrischer Figuren erhalten bleiben. Wendet man auf eine Originalfigur F eine Bewegung β an ($\beta(F)=F'$), so bleiben in der Bildfigur F' die Form und Größe erhalten; die Figur ändert im allgemeinen nur ihre Lage in der Ebene. Unterwirft man eine geometrische Figur einer Ähnlichkeitsabbildung α, so bleibt im allgemeinen nur ihre Form erhalten; die Abbildung ist winkeltreu. Punktspiegelungen sind Bewegungen (Drehungen um $\pm 180°$) und zugleich spezielle Ähnlichkeitsabbildungen (zentrische Streckungen mit dem Streckungsfaktor $k=-1$). In den nachfolgenden Betrachtungen wollen wir einige Abbildungseigenschaften über Punktspiegelungen und ihren Zusammenhang zu den Verschiebungen herleiten sowie Punktspiegelungen zum Beweisen geometrischer Sätze und zum Lösen von Konstruktionsaufgaben verwenden. Dabei sollen die schönen Verbindungen zwischen anschaulich-konstruktiven und abstrakt-algebraischen Arbeitsmethoden der Geometrie genutzt werden.

1. Bewegungen

Aus dem Geometrieunterricht der 6. Klasse ist uns bekannt, daß zu den Bewegungen die Verschiebungen, Drehungen und Geradenspiegelungen gehören. Ferner gibt es noch die Klasse der Schubspiegelungen. In der Menge aller Bewegungen nehmen die Geradenspiegelungen eine ausgezeichnete Stellung ein; sie bilden ein Erzeugendensystem der Bewegungen der Ebene. Aus diesen Abbildungen lassen sich durch Nacheinanderausführung alle anderen Bewegungen der euklidischen Ebene erzeugen. Dieser Sachverhalt wird aus den Bildern 1a–1d ersichtlich.

Geradenspiegelungen heißen auch Grundabbildungen, weil sie sich nicht durch Nacheinanderausführung aus anderen Bewegungen erzeugen lassen. Als eineindeutige Abbildung der Menge aller Punkte der Ebene auf sich ordnet eine Geradenspiegelung S_a (= Spiegelung an der Geraden a) jedem Punkt P der Ebene seinen symmetrischen Punkt P' bezüglich der festen Geraden a als Bild zu, und alle Punkte der Geraden a werden sich selbst zugeordnet. Die Punkte der Spiegelungsgeraden heißen Fixpunkte, und a ist die Fixpunktgerade der Abbildung S_a. Für die Anwendung von Geradenspiegelungen auf die Punkte der Ebene verwenden wir die funktionale Schreibweise. So bedeutet $S_a(P)=P'$, daß die Spiegelung des Punktes P an der Geraden a den Bildpunkt P' ergibt. Spiegelt man zunächst einen beliebigen Punkt P der Ebene an einer Geraden a_1, so erhält man den Bildpunkt P', und durch anschließende Spiegelung an einer Geraden a_2 wird P' und P'' überführt. Symbolisch läßt sich die auf einen Punkt angewandte Nacheinanderausführung von zwei Geradenspiegelungen durch die Abbildungsgleichung $S^{\circ}_{a_1}S_{a_2}(P) = S_{a_2}(S_{a_1}(P)) = S_{a_2}(P') = P''$ beschreiben.

Führt man dieselbe Geradenspiegelung S_a zweimal nacheinander aus, bildet man also $S^{\circ}_a S_a(P) = S_a(S_a(P)) = S_a(P') = P'' = P$, so läßt die resultierende Bewegung $S^{\circ}_a S_a = i$ jeden Punkt der Ebene fest; i bezeichnet die identische oder Ruheabbildung. Eine Abbildung, die nicht selbst die Ruheabbildung ist und bei zweimaliger Nacheinanderausführung die Ruheabbildung ergibt, heißt Involution. Danach sind die Geradenspiegelungen involutorische Abbildungen.

Aus Bild 1b und 1c erkennt man, daß die Nacheinanderausführung oder das Produkt zweier Geradenspiegelungen an parallelen (sich schneidenden) Geraden a_1, a_2 stets eine Verschiebung (Drehung) ergibt. Dabei ist die Schiebstrecke PP'' zweier zugeordneter Punkte der Verschiebung $v = S^{\circ}_{a_1}S_{a_2}$ mit $a_1 \cap a_2 = \varnothing$ doppelt so lang und gleichgerichtet wie jede orientierte Abstandsstrecke der beiden Geraden a_1, a_2. Der Drehwinkel der Rotation $r = S^{\circ}_{a_1}S_{a_2}$ mit $a_1 \cap a_2 = \{D\}$ ist der orientierte Winkel $\sphericalangle[PDP'']$, wobei (P, P'') ein beliebiges zugeordnetes Punktepaar der Rotation r darstellt. Man beweist über die Symmetrieeigenschaften von Punkten bei Geradenspiegelungen, daß der Drehwinkel ϕ doppelt so groß und gleichorientiert ist wie der orientierte Winkel α zwischen den Spiegelungsgeraden a_1, a_2. Verschiebungen und Drehungen sind gleichsinnige Bewegungen, weil durch sie der Umlaufsinn jedes n-Ecks erhalten bleibt, was bei Geradenspiegelungen offenbar nicht der Fall ist. Deshalb gehören die Geradenspiegelungen auch zur Klasse der ungleichsinnigen Bewegungen. Durch ein Produkt aus drei Geradenspiegelungen, deren Geraden die in Bild 1d angegebenen Lagebeziehungen haben, entsteht eine weitere Art von Bewegungen, die sog. Schubspiegelung. Man spiegelt zunächst an a_1 und sodann an der zu a_1 parallelen Geraden a_2, das Ergebnis ist eine Verschiebung, und anschließend an der zu a_1 und a_2 senkrechten Geraden a_3. Mit dieser kurzen Betrachtung haben wir eine vollständige Aufzählung der verschiedenen Arten von Bewegungen gegeben, und es gilt der Satz, daß sich jede Bewegung der euklidischen Ebene als Nacheinanderausführung aus höchstens drei Geradenspiegelungen erzeugen läßt, und jede Bewegung aus drei Geradenspiegelungen ist eine Schubspiegelung.

2. Punktspiegelungen

Unter den gleichsinnigen Bewegungen gibt es noch eine spezielle Klasse von Bewegungen, die uns besonders interessieren soll. Man überprüft leicht an einem Beispiel, daß das Produkt $S^{\circ}_{a_1}S_{a_2}$ aus zwei Geradenspiegelungen im allgemeinen nicht kommutativ ist (vgl. Bild 2). Sind jedoch die beiden Spiegelungsgeraden zueinander senkrecht (Bild 3), so ist die Spiegelungsgleichung $S_{a_1}S_{a_2} = S_{a_2}S_{a_1}$ richtig. Es ist also in diesem Falle

Bild 1a: Gruppenspiegelung

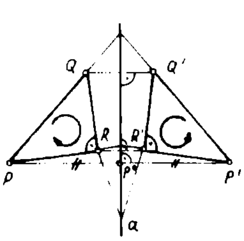


Bild 1b: Verschiebung

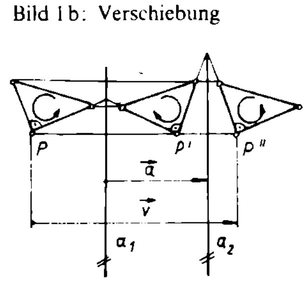


Bild 1c: Drehung

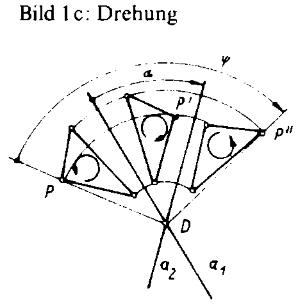
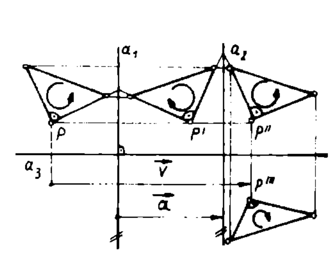


Bild 1d: Schubspiegelung



gleich, ob ich zuerst an a_1 und dann an a_2 spiegele oder umgekehrt, stets erhalte ich für einen vorgegebenen Punkt (oder eine Figur) dasselbe Bild. Mit $r = S^{\circ}_{a_1} S_{a_2}$ und $a_1 \perp a_2$ haben wir eine spezielle Drehung um den Punkt D mit $\{D\} = a_1 \cap a_2$ und dem Drehwinkel $\phi = \pm 180°$ vor uns; sie heißt Punktspiegelung $S_D = S^{\circ}_{a_1} S_{a_2}$ am Punkt D. Man findet nämlich das Bild eines Punktes P sofort durch Spiegelung an D, indem die Strecke PD über D hinaus um sich selbst verlängert wird. Punktspiegelungen sind auch involutorische Bewegungen, d. h. es gilt $S^{\circ}_D S_D(P) = P$ für alle Punkte der Ebene. Der Beweis ist einfach. Es ist zu zeigen, daß $S^{\circ}_D S_D = i$ ist. Für Bewegungen gilt das Assoziativgesetz, also ist

$S^{\circ}_D S_D = (S^{\circ}_{a_1} S_{a_2}) \circ (S^{\circ}_{a_1} S_{a_2}) = (S^{\circ}_{a_1} S_{a_2}) \circ (S^{\circ}_{a_2} S_{a_1})$
$= S^{\circ}_{a_1} (S^{\circ}_{a_2} S_{a_2}) \circ S_{a_1}$,

und wegen $S^{\circ}_{a_2} S_{a_2} = S^{\circ}_{a_1} S_{a_1} = i$ folgt

$S^{\circ}_D S_D = S_{a_1} \circ i \circ S_{a_1} = (S^{\circ}_{a_1} i) \circ S_{a_1} = S^{\circ}_{a_1} S_{a_1} = i.$

Bild 2

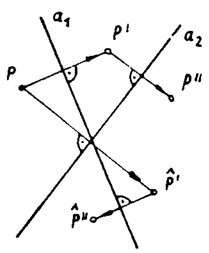


Bild 3

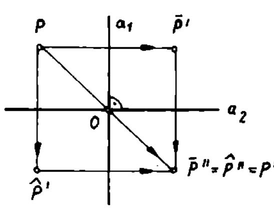
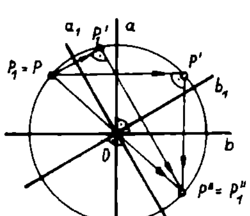


Bild 4



Für Punktspiegelungen gilt ein Ersetzungssatz. Wie aus Bild 4 hervorgeht, liefert die Spiegelung eines Punktes P an den senkrechten Geraden a, b dasselbe Bild P'' wie die Spiegelung an den ebenfalls senkrechten und sich in D schneidenden Geraden a_1, b_1. Den Beweis zu diesem Satz kann man mit Hilfe des Thalessatzes führen. Der betrachtete Sachverhalt läßt sich verallgemeinern, denn an Stelle von a, b können noch andere zueinander senkrechte Geradenpaare treten, die durch D gehen. Damit lautet der Ersetzungssatz für Punktspiegelungen: Jede Punktspiegelung S_D darf auf unendlich viele Arten durch ein Produkt aus zwei Geradenspiegelungen ersetzt werden, wenn nur die beiden Spiegelungsgeraden senkrecht sind und durch den Punkt D gehen. Man überlegt sich leicht, daß es für beliebige Drehungen und für Verschiebungen analoge Ersetzungssätze gibt.

Für Punktspiegelungen gelten alle bekannten Abbildungseigenschaften, die für jede Bewegung richtig sind. Diese können im Lehrbuch der Mathematik für die 6. Klasse, VWV Berlin 1970, S. 99, Satz 5, wiederholt werden. Überdies gibt es noch Sätze, die nur für die Punktspiegelungen gelten, von denen zwei genannt werden sollen. Jede Gerade g, die durch den Spiegelungspunkt D einer Punktspiegelung S_D geht, wird durch S_D auf sich selbst abgebildet, und zwar so, daß D einziger Fixpunkt von $S_D(g) = g'$ ist und die beiden durch D erzeugten Halbgeraden von g miteinander vertauscht werden. Andererseits wird jede Gerade g, die nicht durch D geht, vermöge der Abbildung $S_D(g) = g'$ in eine zu g parallele Gerade g' überführt, wobei ein der Geraden g aufgeprägter Durchlaufsinn (z. B. durch ein geordnetes Punktepaar A, B) umgekehrt wird. Wendet man auf eine Gerade g eine Verschiebung an, so sind ebenfalls Original- und Bildgerade zueinander parallel, der Durchlaufsinn bleibt jedoch erhalten.

3. Punktspiegelungen und Verschiebungen

Zwischen Punktspiegelungen und Verschiebungen gibt es einen einfachen Zusammenhang. Das Produkt aus zwei Punktspiegelungen an verschiedenen Punkten D_1, D_2 ist nämlich stets eine von der identischen Verschiebung verschiedene Verschiebung, wie aus Bild 5 hervorgeht. Dabei ist die Schiebstrecke PP'' doppelt so lang und gleichgerichtet wie die orientierte Strecke D_1D_2 zwischen den beiden Spiegelungspunkten, denn D_1D_2 ist Mittelparallelstrecke im Dreieck $PP'P''$. Mit Geradenspiegelungen läßt sich das Produkt aus zwei Punktspiegelungen unter Verwendung des Ersetzungssatzes wie im Bild 6 darstellen, so daß $S^{\circ}_{D_1} S_{D_2} = S^{\circ}_{a_1} S^{\circ}_{a_3} S^{\circ}_{a_3} S_{a_2} = S^{\circ}_{a_1} S_{a_2}$ mit $a_1 \parallel a_2$ gilt, und dies ist bekanntlich eine Verschiebung v. Weil eine Verschiebung durch die Angabe von zwei zugeordneten Punkten der Ebene bestimmt ist, kann sie auf unendlich viele Arten als Produkt aus zwei Punktspiegelungen

Bild 5

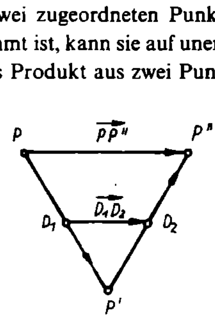
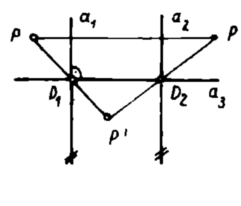
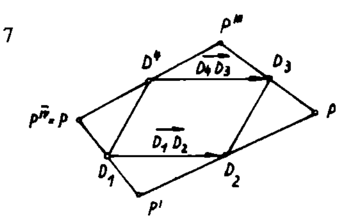


Bild 6



dargestellt werden, wenn nur deren Spiegelungspunkte den halb so langen gleichorientierten Abstand haben wie ein beliebiges Paar zugeordneter Punkte der Verschiebung. Aus den vorangehenden Erkenntnissen folgt der für unsere weiteren Betrachtungen bedeutungsvolle Dreispiegelungssatz für Punktspiegelungen. Sind D_1, D_2, D_3 drei Punkte der Ebene, so ist $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3}$ gleich der Spiegelung S_{D_4} an dem vierten Punkt D_4, wobei die gerichteten Strecken D_1D_2 und D_4D_3 gleich sind, d. h. sie haben die gleiche Länge und gleiche Orientierung (vgl. Bild 7). Es gilt also die Gleichung $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$ für Punktspiegelungen. Wegen der Darstellung von Verschiebungen durch Punktspiegelungen besteht die Gleichung $S^{\circ}_{D_1} S_{D_2} = S^{\circ}_{D_4} S_{D_3}$. Durch Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit S_{D_3} folgt $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3} = S^{\circ}_{D_4} S^{\circ}_{D_3} S_{D_3}$, und wegen $S^{\circ}_{D_3} S_{D_3} = i$ erhalten wir die Behauptung $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$. Damit ist der Dreispiegelungssatz bewiesen. Bilden nun D_1, D_2, D_3 ein Dreieck, so ergänzt der vierte Punkt D_4 dieses Dreieck zu einem Parallelogramm. Sonst liegen die vier Punkte auf einer Geraden.

Bild 7



Beim Beweis des Dreispiegelungssatzes haben wir von einer Methode zum Umformen von Spiegelungsgleichungen Gebrauch gemacht, die auf *G. Thomsen* zurückgeht. Setzen wir in $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$ $D_1 = D_3 = M$, $D_2 = A$ und $D_4 = B$, so folgt die Gleichung $S^{\circ}_M S^{\circ}_A S_M = S_B$, und durch Multiplikation mit S_M von links erhalten wir $S^{\circ}_A S_M = S^{\circ}_M S_B$, d. h. die beiden orientierten Strecken AM und MB sind gleich, M ist der Mittelpunkt der Strecke AB. Auf diese Weise kann man noch andere Lagebeziehungen von Punkten der Ebene durch Gleichungen ihrer Punktspiegelungen ausdrücken.

Wir wollen noch einen wichtigen Satz der Spiegelungsgeometrie herleiten. Nach dem Dreispiegelungssatz für Punktspiegelungen gilt $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$. Weil die Punktspiegelung S_{D_4} involutorisch ist, ist auch $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3}$ eine involutorische Bewegung. Es gilt also $(S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3})^2 = i$ oder $S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S^{\circ}_{D_3} S^{\circ}_{D_1} S^{\circ}_{D_2} S_{D_3} = i$. Durch Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit $S^{\circ}_{D_3} S^{\circ}_{D_2} S_{D_1}$ erhalten wir $S^{\circ}_{D_1} S_{D_2} S_{D_3} = S^{\circ}_{D_3} S^{\circ}_{D_2} S_{D_1}$. Dieses Resultat ist der Inhalt des Umkehrsatzes für Punktspiegelungen: Jedes Produkt aus drei Punktspiegelungen darf umgekehrt werden. Liegt ein Produkt aus vier Punktspiegelungen vor, so läßt sich dies stets mit dem Dreipunktspiegelungssatz auf ein Produkt aus zwei

Punktspiegelungen reduzieren und das Ergebnis ist eine Verschiebung, insbesondere die identische Verschiebung i, wenn die beiden Punkte zusammenfallen.

4. Beweise elementargeogetrischer Sätze mit Punktspiegelungen

Jedem Punkt der Ebene läßt sich in eineindeutiger Weise die Spiegelung an diesem Punkt zuordnen. Wir haben schon gesehen, daß sich gewisse geometrische Lagebeziehungen zwischen Punkten durch Gleichungen von Produkten ihrer Punktspiegelungen darstellen lassen, und umgekehrt können Spiegelungsgleichungen geometrisch interpretiert werden. So gelten die folgenden Äquivalenzen:

1. $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = i$ $\updownarrow$

Die Punkte A, B, C, D sind Eckpunkte eines Parallelogrammes, welches im Sonderfall zusammengeklappt ist.

2. $S_A^\circ S_M^\circ S_B^\circ S_M = i$ $\updownarrow$

M ist Mittelpunkt der Strecke AB.

3. $S_A^\circ S_S^\circ S_B^\circ S_S^\circ S_C^\circ S_S = i$ $\updownarrow$

S ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Produkte aus Punktspiegelungen, die die identische Abbildung ergeben, heißen Spiegelungszyklen. Wir wollen nun zwei Sätze der Elementargeometrie mit Spiegelungszyklen beweisen.

Satz 1:

Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Das Viereck habe die Ecken A, B, C, D, die Diagonalen schneiden sich im Punkt M. Die Voraussetzung, daß sich die Diagonalen halbieren, läßt sich durch die Spiegelungszyklen $S_A^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_M = i$ und $S_B^\circ S_M^\circ S_D S_M = i$ erfassen, und die Behauptung wird durch den Zyklus $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = i$ dargestellt. Wir haben also die beiden Voraussetzungen mit Hilfe der hergeleiteten Sätze über Punktspiegelungen so umzuformen, daß wir die Behauptung erhalten.

Voraussetzung: (1) $S_A^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_M = i$ und

(2) $S_B^\circ S_M^\circ S_D^\circ S_M = i$.

Behauptung: (3) $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = i$.

Beweis: Die Zyklen (1) und (2) lassen sich gleichsetzen oder verketten (nacheinander ausführen). Andererseits können wir auch die Zyklen (1) und (2) nach S_A bzw. S_B umformen (indem wir (1) und (2) von links mit S_A bzw. S_B multiplizieren und $S_A = S_M^\circ S_C^\circ S_M$ bzw. $S_B = S_M^\circ S_D^\circ S_M$ erhalten) und diese Ausdrücke in die linke Seite von (3) einsetzen.

Dann gilt:

$$S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = (S_M^\circ S_C^\circ S_M)\circ(S_M^\circ S_D^\circ S_M)\circ S_C^\circ S_D,$$
$$= S_M^\circ S_C^\circ S_M^\circ S_M^\circ S_D^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_D$$

und mit $S_M^\circ S_M = i$ folgt

$S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = S_M^\circ S_C^\circ S_D^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_D$. Kehren wir ein Produkt $S_M^\circ S_C^\circ S_D$ um, so folgt

$S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = S_M^\circ S_C^\circ S_D^\circ S_D^\circ S_C^\circ S_M$

und mit $S_D^\circ S_D = i$, $S_C^\circ S_C = i$ und $S_M^\circ S_M = i$ erhalten wir die Behauptung $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = i$.

Setzen wir die linken Seiten der Voraussetzungen (1) und (2) gleich und multiplizieren diese Gleichung von rechts mit S_M, so erhalten wir $S_A^\circ S_M^\circ S_C = S_B^\circ S_M^\circ S_D$. Durch Multiplikation von rechts mit $S_D^\circ S_M^\circ S_B$ folgt $S_A^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_D^\circ S_M^\circ S_B = i$ und mit der Umkehrung des Produktes $S_C^\circ S_D^\circ S_M$ erhalten wir $S_A^\circ S_D^\circ S_C^\circ S_B = i$. Kehren wir nun noch $S_D^\circ S_C^\circ S_B$ um, so folgt die Behauptung $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D = i$.

Es gibt also mehrere Beweise für denselben Satz.

Satz 2:

In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmittelpunkte parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Voraussetzung: Gegeben ist ein Dreieck $P_1P_2P_3$. M_2 sei die Mitte der Seite P_2P_3 und M_3 die Mitte der Seite P_1P_3.

Es gilt also (1) $S_{P_1}^\circ S_{M_3}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_3} = i$ und

(2) $S_{P_2}^\circ S_{M_2}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_2} = i$.

Behauptung:

$S_{P_1}^\circ S_{P_2} = (S_{M_3}^\circ S_{M_2})\circ(S_{M_3}^\circ S_{M_2}) = (S_{M_3}^\circ S_{M_2})^2$.

Beweis: Die Multiplikation von (1) mit S_{P_1} und (2) mit S_{P_2} von links ergibt $S_{P_1} = S_{M_3}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_3}$ und $S_{P_2} = S_{M_2}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_2}$.

Hieraus folgt $S_{P_1}^\circ S_{P_2} = S_{M_3}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_3}^\circ S_{M_2}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_2}$, und durch Umkehrung von $S_{M_3}^\circ S_{M_2}^\circ S_{P_3}$ erhalten wir die Behauptung

$$S_{P_1}^\circ S_{P_2} = S_{M_3}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}^\circ S_{M_2}.$$

Das Beweisverfahren mit Spiegelungszyklen läßt sich noch auf weitere Sätze der Elementargeometrie anwenden.

5. Lösen von Konstruktionsaufgaben mit Punktspiegelungen

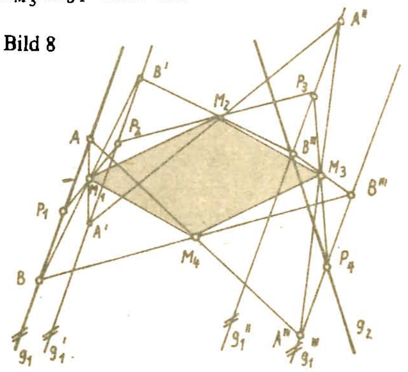
Viele Konstruktionsaufgaben der Geometrie lassen sich mit Hilfe von geometrischen Abbildungen einfach und elegant lösen. Wir wollen zwei Aufgaben betrachten, zu deren Lösung Punktspiegelungen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen genutzt werden sollen.

Aufgabe 1:

Konstruiere einen dreiseitigen Polygonzug $P_1P_2P_3P_4$, der auf einer Geraden g_1 beginnen, auf einer Geraden g_2 enden soll und von dem die Mitten M_1, M_2, M_3 seiner Seiten gegeben sind.

Analysis: Wollten wir eine Näherungskonstruktion finden, so könnten wir von einem beliebigen Punkt $A \in g_1$ ausgehen und über die Mitten M_1, M_2, M_3 den Polygonzug schrittweise konstruieren (vgl. Bild 8). Liegt dann der Endpunkt A''' des Polygonzuges auf g_2, so hätten wir eine Näherungslösung gefunden. Liegt der Endpunkt nicht auf g_2, so wählen wir einen weiteren Punkt $B \in g_1$ als Anfangspunkt und konstruieren einen zweiten Polygonzug über M_1, M_2, M_3. So kann man, wenn es überhaupt eine Lösung gibt, durch weitere Polygonzüge sukzessiv zu einer Näherungslösung gelangen. Diese Vorgehensweise liefert auch den Ansatz für eine exakte Lösung. Durch die zwei Punkte A, B ist die Gerade g_1 eindeutig bestimmt. Verfolgen wir die beiden Polygonzüge über M_1, M_2, M_3, so wird die Gerade g_1 durch die Spiegelung S_{M_1} in g_1', g_1' durch S_{M_2} in g_1'' und g_1'' durch S_{M_3} in g_1''' überführt.

Bild 8



Es gilt also

$S_{M_1}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}(g_1) = g'''$ mit $g_1 \parallel g_1' \parallel g_1'' \parallel g'''$. Der Schnittpunkt P_4 von $g_1''' \cap g_2 = \{P_4\}$ ist der Endpunkt des gesuchten Polygonzuges. Nun können wir wegen der Gültigkeit des Dreispiegelungssatzes $S_{M_1}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3} = S_{M_4}$ setzen, mit M_4 als viertem Parallelogrammpunkt, woraus $S_{M_4}(g_1) = g_1'''$ folgt.

Lösung: Wir konstruieren zu M_1, M_2, M_3 den vierten Parallelogrammpunkt M_4, so daß $S_{M_1}^\circ S_{M_2} = S_{M_4}^\circ S_{M_3}$ ist und spiegeln g_1 an M_4. Ist das Schnittresultat $g_1''' \cap g_2$ nicht die leere Menge, so haben wir wenigstens einen Endpunkt eines gesuchten Polygonzuges gefunden, der nun rückwärts konstruiert werden kann.

Determination: Die vorgelegte Aufgabe hat, je nach den Lagebeziehungen der gegebenen Stücke (g_1, g_2, M_1, M_2, M_3),

$$\left\{\begin{array}{l}\text{genau eine Lösung}\\ \text{keine Lösung}\\ \text{unendlich viele Lösungen}\end{array}\right\}$$

$$\text{wenn } g_1''' \cap g_2 = \left\{\begin{array}{c} g_2 \\ \varnothing \\ \{P_4\} \end{array}\right\} \text{ist.}$$

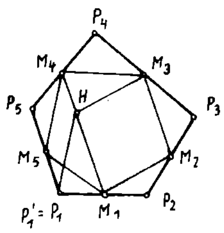
Diskutiere die Lösung der Aufgabe, wenn der Polygonzug viergliedrig ist! Beachte, daß die resultierende Abbildung von $S_{M_1}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}^\circ S_{M_4}$ eine Verschiebung oder die identische Abbildung ist.

Aufgabe 2:

Konstruiere ein Fünfeck, von dem die Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 gegeben sind! M_1 sei Mitte von P_1P_2, M_2 Mitte von P_2P_3 usw.

Analysis: Wir nehmen an, das Fünfeck sei bereits konstruiert. Wendet man auf den Punkt P_1 das Spiegelungsprodukt $S_{M_1}S_{M_2}S_{M_3}S_{M_4}S_{M_5}$ an, so fällt sein Bild P_1' mit P_1 zusammen (Bild 9). P_1 ist somit Fixpunkt von $S_{M_1}S_{M_2}S_{M_3}S_{M_4}S_{M_5}$.

Bild 9



Andererseits ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Dreispiegelungssatzes für Punktspiegelungen auf $S_{M_1}S_{M_2}S_{M_3}S_{M_4}S_{M_5}$ als Ergebnis eine Punktspiegelung. Weil jede Punktspiegelung genau einen Fixpunkt besitzt, gilt also $S_{M_1}S_{M_2}S_{M_3}S_{M_4}S_{M_5}=S_{P_1}$.

Konstruktion: Zur Konstruktion des Punktes P_1 als Anfangs- und Endpunkt eines geschlossenen Polygonzuges konstruieren wir zunächst einen Hilfspunkt H mit $S_H=S_{M_1}S_{M_2}S_{M_3}$ als Eckpunkt des Parallelogramms $M_1M_2M_3H$. Aus der Relation $S_HS_{M_4}S_{M_5}=S_{P_1}$ ergibt sich sofort P_1 als vierter Parallelogrammpunkt zu H, M_4, M_5.

Determination: Es gibt genau eine Lösung, denn P_1 ist bei fester Vorgabe von M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 nach den genannten Parallelogrammkonstruktionen eindeutig bestimmt.

6. Aufgaben

Zum Schluß unserer Betrachtungen über Punktspiegelungen fügen wir noch einige Konstruktions- und Beweisaufgaben an, deren Lösung durch kluge Anwendung der theoretischen Erkenntnisse zum tieferen Eindringen in dieses Teilgebiet der Abbildungsgeometrie beitragen wird und aufs neue Interesse und Freude an geometrischen Untersuchungen wecken soll.

6.1. Konstruiere einen n-seitigen Polygonzug ($n\geqq 2$), der auf einer Kurve k_1 beginnt, auf einer Kurve k_2 endet und von dem die Mitten M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) gegeben sind! k_1 und k_2 können Kurven, wie z. B. Geraden, Kreise, Parabeln usw. oder auch Dreiecke, Vierecke und andere geometrische Figuren sein.

6.2. Konstruiere einen n-seitigen Polygonzug ($n\geqq 2$), der auf einem Kreis k (oder einer anderen geometrischen Figur) beginnt, auf k endet und von dem die Mitten M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) bekannt sind!

6.3. Konstruiere ein n-Eck ($n\geqq 3$), von dem die Seitenmitten M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) seiner Seiten P_iP_{i+1} mit $n+1=1$ gegeben sind!

6.4. Es sind zwei Kreise k_1, k_2 gegeben, die sich in den beiden Punkten A und B schneiden sollen. Konstruiere eine Gerade g so durch A, daß beide Kreise gleichlange Sehnen herausschneiden!

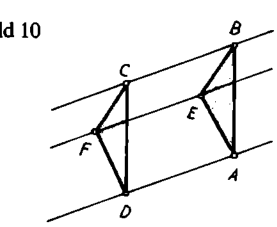
6.5. Beweise, daß das Produkt aus einer geraden (ungeraden) Anzahl von Punktspiegelungen stets eine Verschiebung (Punktspiegelung) ist! Die identische Abbildung soll eine spezielle Verschiebung sein.

6.6. Man beweise mit Spiegelungszyklen, daß sich in jedem Parallelogramm die Diagonalen halbieren.

6.7. Zeige durch Rechnen mit Punktspiegelungen, daß die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks ein Parallelogramm bilden! Zeichne dazu auch in die Figuren von ungleichseitigen, konvexen, konkaven, überschlagenen und anderen Vierecken, wie Trapezen und Parallelogrammen, diese Parallelogramme ein!

6.8. Beweise den Satz: Wenn die beiden Vierecke *ABCD* und *BCFE* Parallelogramme sind, so ist auch das Viereck *AEFD* ein Parallelogramm (vgl. Bild 10)! Dies ist der kleine affine Satz von *Desargues*, und die Figur heißt kleine affine *Desargues*sche Figur.

Bild 10



E. Bohne

Eine Prüfungsfrage

Bei der Vorbereitung auf eine Veranstaltung des Bezirksklubs *Junger Mathematiker* Rostocks entstand folgende Fragestellung:

$2n$ (n gegebene natürliche Zahl) verschiedene Prüfungsfragen werden zu je zwei auf n Zettel geschrieben. Der Prüfling hat sich auf k Fragen vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, daß er die Prüfung besteht, wenn dazu ausreicht, daß er die zwei Fragen eines Zettels oder eine Frage eines Zettels und die erste eines anderen Zettels beantworten kann? Zunächst einmal ist für $k=0$ oder $k=1$ sicher $p=0$, denn der Prüfling muß zum Bestehen der Prüfung mindestens zwei Fragen beantworten können. Ist $k=2n$, d. h., er beherrscht alle Fragen, so ist $p=1$. Für $k=n$, also die Vorbereitung auf die Hälfte aller Fragen, erwarten wir $p=0{,}5$. Wie geht man nun an die Lösung einer solchen Aufgabe heran?

Ein eifriger *alpha*-Leser erinnert sich sofort an den Artikel *Zufall und Wahrscheinlichkeit* aus den Heften 5 und 6 (1975). Wir überlegen uns zunächst, welches Ereignis uns interessiert.

Dazu definieren wir:
Sei A das Ereignis, daß der Prüfling auf die erste Frage des ersten Zettels antworten kann. B ... er kann auf die zweite Frage des ersten Zettels antworten. C ... er kann auf die erste Frage eines anderen Zettels antworten.
$A\cap(B/A)$ bedeutet dann, daß er auf beide Fragen des ersten Zettels antworten kann, $[A\cap(\bar{B}/A)]\cup[\bar{A}\cap(B/\bar{A})]$ – er kann auf genau eine Frage des ersten Zettels antworten. Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis

$$[A\cap(B/A)]\cup\left\{\{[A\cap(\bar{B}/A)]\cup[\bar{A}\cap(B/\bar{A})]\}\cap C\right\}$$

eintritt.

Wenn man aufmerksam den erwähnten Artikel gelesen hat, weiß man, daß man die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet:

$$p=p(A)p(B/A)+[p(A)p(\bar{B}/A)+p(\bar{A})p(B/\bar{A})]p(C) \qquad (1)$$

Wir bestimmen nun diese Werte. Damit A auftritt, haben wir k günstige Fälle und $2n$ mögliche. Also ist $p(A)=\frac{k}{2n}$. B/A tritt auf, nachdem der Kandidat bereits eine Frage richtig beantwortet hat. Also liegen nur noch $k-1$ günstige und $2n-1$ mögliche Fälle vor. Damit ist $p(B/A)=\frac{k-1}{2n-1}$. Hieraus ergibt sich sofort: $p(B/\bar{A})=\frac{k}{2n-1}$, $p(\bar{A})=\frac{2n-k}{2n}$ und $p(\bar{B}/A)=\frac{2n-k}{2n-1}$. Das Ereignis C tritt auf, wenn der Kandidat eine Frage des ersten Zettels richtig beantwortet hat, er die zweite dieses Zettels nicht beherrscht und deshalb einen anderen Zettel zieht. Er hat also eine gewußte Antwort verbraucht und antwortet auf die dritte Frage. Deshalb ist $p(C)=\frac{k-1}{2n-2}$. Setzen wir diese Ergebnisse in (1) ein und vereinfachen, so erhalten wir:

$$p=\frac{k(k-1)(3n-k-1)}{2n(2n-1)(n-1)}.$$

Überprüfen wir noch die eingangs angeführten Überlegungen für $k=0$, $k=1$, $k=2n$ und $k=n$, so finden wir sie bestätigt. Unsere Aufgabe ist damit gelöst, und jeder kann sich nun die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Prüfung ausrechnen, vorausgesetzt, daß diese Prüfungsform vorliegt.

W. Moldenhauer

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mathematischer Schulwettbewerb im Kreis Delitzsch

Seit Jahren herrscht in den Oberschulen Rackwitz, Krostitz und Wölkau ein gutes mathematisches Klima. Durch rege außerunterrichtliche Tätigkeit haben wir Interesse geweckt, Schüler mit sehr guten Leistungen entdeckt und gefördert. Selbstverständlich spielt dabei die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb eine wichtige Rolle. Im Wettbewerbsjahr 1976/77 wurde eine große Zahl von Schülern mit dem *alpha*-Abzeichen ausgezeichnet.

Unsere besten *Jungen Mathematiker* beteiligen sich natürlich an den *Zentralen AG's* im Kreis Delitzsch, einige besuchen sogar die Veranstaltungen der *Mathematischen Schülergesellschaft* des Bezirkes Leipzig (MSG).

Zu den Höhepunkten des Schuljahres gehören die Schulolympiaden im Fach Mathematik, die wir für die Klassen 5 bis 10 als Qualifizierung für die Kreisolympiaden durchführen. Um unseren Schülern der Klassenstufen 3 und 4 die Möglichkeit der Bewährung zu geben, führen wir auch für sie besondere Veranstaltungen mit Olympiadecharakter durch. All diese Aktivitäten führten dazu, daß z. B. die Dr.-Theodor-Neubauer-Oberschule Rackwitz in den beiden letzten Jahren zur erfolgreichsten Schule des Kreises bei den Kreisolympiaden wurde.

Im April 1977 führten die OS Radefeld, Rackwitz, Krostitz und Wölkau ihren 2. mathematischen Schülervergleich durch. Dieser Wettbewerb ist ein Mannschaftswettbewerb. Jede Mannschaft besteht aus je einem Vertreter der Klassenstufen 4 bis 9. In einer Arbeitszeit von 60 Minuten sind möglichst viele der 15 gestellten Aufgaben zu lösen. Natürlich ist die gegenseitige Hilfe innerhalb eines Schülerkollektivs erwünscht, und der Mannschaftsleiter (Schüler der Klasse 9) hat eine besondere Verantwortung für die gute Zusammenarbeit aller Mannschaftsteilnehmer und damit auch für den Erfolg seines Kollektivs. Die Aufgaben wurden so angelegt, daß auf keinen Fall eine Mannschaft alle Aufgaben lösen konnte. Die Mannschaften mußten also eine Auswahl treffen entsprechend der Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse der einzelnen Teilnehmer.

E. Knauth

Zur Vorbereitung der Schulolympiade 1978/79 (siehe *alpha*, Heft 4/77) veröffentlichen wir die Aufgaben des mathematischen Schulvergleichs:

▲1▲ Vergrößere das 34fache von 3715 um den achten Teil von 51400!

▲2▲ Wenn man eine gedachte Zahl verdoppelt und von diesem Produkt 6 subtrahiert, so erhält man 24.
Wie heißt die gedachte Zahl?

▲3▲ Verschiebe ein beliebiges Dreieck *ABC* um 5 cm und drehe es dann im positiven Drehsinn um 90°! Wähle selbst die Verschiebungsrichtung und den äußeren Drehpunkt!

▲4▲ Wie hoch muß ein Gefäß mit einer Grundfläche von 25 dm^2 mindestens sein, damit es 100 l fassen kann?

▲5▲
```
1**·*1
   *5*
   1*0
  **3*
```
Ersetze die Sternchen durch Ziffern so, daß eine vollständige Multiplikationsaufgabe entsteht!

▲6▲ Eine alte Knobelaufgabe lautet: Eine Flasche mit Korken kostet 1,10 M. Dabei kostet die Flasche genau 1,00 M mehr als der Korken.
Wieviel kosten die Flasche und der Korken einzeln?

▲7▲ 37**2
Ergänze so, daß eine sowohl durch 3 als auch durch 2 teilbare Zahl entsteht!
Gib mindestens drei Möglichkeiten an!

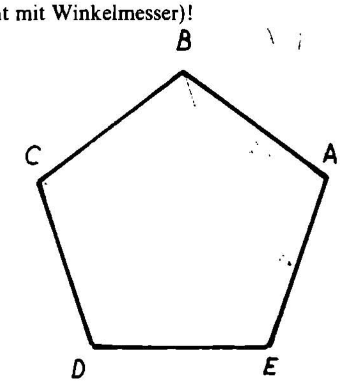
▲8▲ Wieviel natürliche Zahlen zwischen 0 und 300 sind sowohl durch 4 als auch durch 5 teilbar?

▲9▲ Eine Fläche von 1,60 m · 3 m soll mit Natursteinen verkleidet werden, die eine rechteckige Form mit $a = 30$ cm und $b = 50$ cm besitzen.
a) Wieviel Steine sind dazu notwendig?
b) Skizziere *eine mögliche* Anordnung der Steine!

▲10▲ Jemand soll sich eine 5stellige Telefonnummer merken, die nur aus geraden

Ziffern besteht. Es ist weiterhin bekannt, daß die erste und die letzte Ziffer gleich sind. Außerdem sind die 2. und die 3. Ziffer gleich. Die vorletzte Ziffer sei die größte Ziffer und doppelt so groß wie die 3. Ziffer. Die erste Ziffer ist größer als die 2. Ziffer.
Wie lautet die gesuchte Telefonnummer?
Ist dies die einzige Möglichkeit?

▲11▲ Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck. Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle EAB$ (nicht mit Winkelmesser)!



▲12▲ Merke dir eine beliebige Zahl! Addiere zu dieser Zahl 10. Dividiere diese Summe mit 2, und multipliziere den Quotienten mit 4! Vermindere das so erhaltene Ergebnis um 20, und du erhältst das Doppelte der Ausgangszahl!
a) Überprüfe die Richtigkeit dieser Aufgabe an einem Beispiel!
b) Beweise, daß diese Aufgabe für jede beliebige natürliche Zahl gültig ist!

▲13▲ Zwei Orte A und B seien 120 km voneinander entfernt. Gleichzeitig starten zwei Züge in entgegengesetzter Richtung. Der Zug von A nach B fährt mit einer Geschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der Zug von B nach A von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Nach welcher Zeit und in welcher Entfernung von A begegnen sich beide Züge?

▲14▲ Zwei natürliche Zahlen sollen sich wie 3 zu 7 verhalten. Die Summe dieser Zahlen heißt 110.
Wie heißen die beiden Zahlen?

▲15▲ Stelle die folgenden Angaben graphisch dar (A4-Blatt), so daß diese Darstellung z. B. für eine Wandzeitung verwendet werden könnte!

Soziale Herkunft der 500 Abgeordneten der Volkskammer in der 7. Wahlperiode (1976 bis 1980)

Arbeiter	268
Mitglieder von LPG, werktätige Einzelbauern, Gärtner, Fischer	53
Angestellte	105
Angehörige der Intelligenz	28
Selbständige Handwerker	31
Gewerbetreibende und freiberuflich Tätige	8
Sonstige	7

Schulolympiaden in der Sowjetunion

Liebe *alpha*-Freunde!

Heute stellen wir euch eine Auswahl von Aufgaben der *ersten Stufe der Schulolympiade* im Fach Mathematik des *Leningrader Stadtbezirks Petrodworez* vor. Dazu einige Hinweise:

In der Sowjetunion werden die Aufgaben der ersten Stufe der Schulolympiaden nicht wie bei uns zentral gestellt, sondern auf der Ebene einer Stadt oder eines Stadtbezirkes. Erst von der zweiten Stufe an gibt es zentrale Aufgabenstellungen. Wir geben die übersetzten Aufgaben in Originalfassung wieder, damit unsere Leser einen echten Eindruck vom Charakter der Aufgaben und ihrem Schwierigkeitsgrad erhalten. Dabei ist jedoch zu beachten, daß in der Sowjetunion nach anderen Lehrplänen als bei uns unterrichtet wird.
Nun wünschen wir viel Freude beim Lösen der Aufgaben.

Aufgaben

Klasse 5

▲1▲ Berechne den Wert des Terms
$0{,}85+10{,}5\cdot 2{,}04-(6{,}25\cdot 2+0{,}8:0{,}64):10-0{,}04848:0{,}24$!

▲2▲ Es sind alle durch 3 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die auf die Ziffer 0 enden.

▲3▲ Die Mutter hat für ihre Töchter Olga, Tanja und Mascha genau drei Bänder gekauft, und zwar ein rotes, ein blaues und ein grünes. Olga liebt die Farbe Rot nicht; sie möchte auch kein grünes Band. Mascha will kein rotes Band. Welche Farbe liebt jedes der drei Mädchen, wenn die Mutter Bänder entsprechend den Lieblingsfarben der Töchter gekauft hat?

▲4▲ Ein Vater ist gegenwärtig viermal so alt wie sein Sohn. Die Summe aus den Anzahlen ihrer Lebensalter (in ganzen Zahlen) beträgt 50.
Nach wieviel Jahren wird der Vater dreimal so alt sein wie der Sohn?

▲5▲ Frischgemähtes Gras hat einen Feuchtigkeitsgehalt von 60%; Heu hingegen hat einen Feuchtigkeitsgehalt von nur 20%. Wieviel Heu erhält man aus einer Tonne frischgemähten Grases?

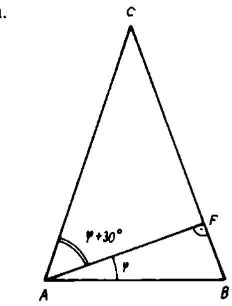
Klasse 6

▲1▲ Bestimme den Wert von x, der folgende Gleichung erfüllt:

$$\left[\left(6\tfrac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8-1\tfrac{3}{4}\right]:\frac{1}{20}=235.$$

▲2▲ Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich dem Dreifachen ihrer Quersumme sind.

▲3▲ Die Höhe $\overline{AF}$ zum Schenkel $\overline{BC}$ des abgebildeten gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Basis $\overline{AB}$ teilt den Basiswinkel $\sphericalangle CAB$ so, daß der Winkel $\sphericalangle CAF$ um 30° größer ist als der Winkel $\sphericalangle BAF$.
Es sind die Größen der Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC zu berechnen.



▲4▲ In einem Korb befinden sich insgesamt 35 Äpfel dreier Sorten.
Wieviel Äpfel muß jemand im Dunkeln diesem Korb entnehmen, um mit Sicherheit vier Äpfel der gleichen Sorte zu erhalten?

▲5▲ Junge Pioniere, die bei Pflegearbeiten in einem Kolchos mithalfen, sollten innerhalb von 10 Tagen ein Feld jäten. Da sie täglich 1 ha der Gesamtfläche mehr jäteten als laut Plan vorgesehen war, konnten sie ihre Arbeit zwei Tage früher beenden.
Wieviel Hektar Ackerfläche haben die Pioniere täglich gejätet?

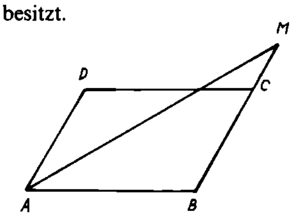
Klasse 7

▲1▲ Ermittle den Wert des nachstehenden Terms für natürliche Zahlen n!

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}.$$

▲2▲ Welchen Wert besitzt der Term $a(a+2)+c(c-2)-2ac$, wenn $a-c=7$ gilt?

▲3▲ Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle DAB$ des abgebildeten Parallelogramms $ABCD$ schneidet die über C hinaus verlängerte Seite $\overline{BC}$ in M so, daß $\overline{CM}$ die Länge 3 cm besitzt.



Es sind die Längen der Seiten des Parallelogramms zu bestimmen, wenn sein Umfang 36 cm beträgt.

▲4▲ Es ist zu beweisen, daß für beliebige reelle Zahlen x und y die Ungleichung $5x^2+4xy+y^2+2x+5>0$ erfüllt wird.

▲5▲ Es sind alle durch 45 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:
Schreibt man die Ziffern einer solchen Zahl in umgekehrter Reihenfolge, subtrahiert man die so erhaltene Zahl von der ursprünglichen Zahl, so beträgt die Differenz 297.

Klasse 8

▲1▲ Ermittle die Lösungsmenge der nachstehenden Gleichung:

$$(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)$$
$$=-3(1-x-x^2).$$

▲2▲ Wievielmal bilden der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr im Verlaufe von 24 Stunden einen rechten Winkel?

▲3▲ Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaft haben:
Das Produkt aus einer solchen Zahl und 2,5 ist gleich der Summe aus allen dieser Zahl vorangehenden natürlichen Zahlen.

▲4▲ Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}=c=6$ cm und dem Basiswinkel $\sphericalangle CAB=\alpha=50°$.
Es ist die Länge der Winkelhalbierenden $\overline{AD}=w$ des Winkels $\sphericalangle CAB$ zu berechnen.

▲5▲ Eine Klasse mit 21 Schülern hat insgesamt 200 Nüsse erhalten.
Es ist zu beweisen, daß es stets mindestens zwei Schüler geben wird, die die gleiche Anzahl von Nüssen erhalten werden, wie immer die Nüsse auch an diese Schüler verteilt werden.

L. Dimenstein/Th. Scholl

Lösungen

Klasse 5

▲1▲ $0{,}85+10{,}5\cdot 2{,}04-(6{,}25\cdot 2+0{,}8:0{,}64):10-0{,}04848:0{,}24$
$=0{,}85+21{,}42-(12{,}5+1{,}25):10-0{,}202$
$=22{,}27-1{,}375-0{,}202$
$=20{,}693$

▲2▲ Von den Zahlen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 sind nur die Zahlen 30, 60 und 90 durch 3 teilbar.

▲3▲ Da Olga die Farbe Rot nicht liebt und auch kein grünes Band will, liebt Olga die Farbe Blau. Da Olga die Farbe Blau liebt und Mascha kein rotes Band will, liebt Mascha die Farbe Grün. Somit liebt Tanja die Farbe Rot.

▲4▲ Angenommen, der Sohn ist gegenwärtig n Jahre, der Vater also $4n$ Jahre alt; dann gilt

$$n+4n=50,\ 5n=50,\ n=10.$$

Gegenwärtig ist der Vater 40 Jahre, sein Sohn 10 Jahre alt. Aus $(10+x)\cdot 3=40+x$ folgt $30+3x=40+x$, $2x=10$, also $x=5$.
Nach fünf Jahren wird der Vater 45 Jahre, der Sohn 15 Jahre alt sein, der Vater also dreimal so alt wie sein Sohn sein.

▲5▲ $1000:100\% = y:(100-60)\%$,
also $y=400$;
$400:(100-20)\% = x:100\%$,
also $x=500$.
Aus einer Tonne frischgemähten Grases erhält man 500 kg, also eine halbe Tonne Heu.

Klasse 6

▲1▲

$$\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8-1\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{20}=235,$$

$$\left(\frac{45\cdot 14}{7\cdot 5}-6x\right)\cdot 20=235,$$

$$645-120x=235,$$

$$120x=410,$$

$$x=\frac{41}{12}=3\frac{5}{12}.$$

▲2▲ $10a+b=3\cdot(a+b)$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$; $7a=2b$, also $a=\frac{2b}{7}$.

Nur für $b=7$, also für $a=2$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Es gibt genau eine solche Zahl, sie lautet 27.

▲3▲ Im rechtwinkligen Dreieck ABF gilt $\sphericalangle ABF=90°-\phi$. Aus $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA$ folgt $2\phi+30°=90°-\phi$, also $\phi=20°$. Daraus folgt weiter $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=70°$ und $\sphericalangle ACB = 180°-2\cdot 70°=40°$.

▲4▲ Entnimmt man dem Korb neun Äpfel, so könnte man im ungünstigsten Fall von jeder der drei Sorten je drei Äpfel haben. Um mit Sicherheit vier Äpfel der gleichen Sorte zu erhalten, müssen dem Korb mindestens zehn Äpfel entnommen werden.

▲5▲ Angenommen, laut Plan sollten täglich x Hektar gejätet werden; dann gilt

$$10x=8(x+1),$$

$$2x=8, \text{ also } x=4.$$

Die Pioniere haben täglich 5 Hektar Ackerfläche gejätet.

Klasse 7

▲1▲

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{[8^n(8+1)]^2}{[4^{n-1}(4-1)]^3}$$

$$=\frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3(n-1)}\cdot 3^3}=\frac{2^{6n}\cdot 3^4}{2^{6n-6}\cdot 3^3}=2^6\cdot 3=192.$$

▲2▲ Aus $a=c+7$ und $a(a+2)+c(c-2)-2ac$ folgt durch Einsetzen

$$(c+7)(c+9)+c(c-2)-2c(c+7)$$

$$=(c+7)(c+9-2c)+c(c-2)$$

$$=(c+7)(9-c)+c(c-2)$$

$$=9c-c^2+63-7c+c^2-2c=63.$$

▲3▲ Es seien $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ und $\sphericalangle DAB=\alpha$. Nun gilt $2(a+b)=36$ cm, also $a+b = 18$ cm. Aus $\sphericalangle MAB=\frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle ABM=180°-\alpha$ folgt $\sphericalangle BMA=180°-(180°-\alpha)-\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha$; darum gilt $\overline{AB}=\overline{BM}$ bzw. $a=b+3$ cm.
Daraus folgt $a+b=2b+3$ cm $=18$ cm, also $b=7{,}5$ cm und $a=10{,}5$ cm.

▲4▲

$$5x^2+4xy+y^2+2x+5>0,$$

$$4x^2+4xy+y^2+x^2+2x+1+4>0,$$

$$(2x+y)^2+(x+1)^2+4>0.$$

Da das Quadrat jeder reellen Zahl positiv und somit alle Summanden positiv sind, gilt diese Ungleichung für beliebige reelle Zahlen x und y.

▲5▲

$$z_1=100a+10b+c,$$

$$z_2=100c+10b+a,$$

$$z_1-z_2=99(a-c)=297,\ a-c=3,$$

$$a=c+3.$$

Wegen $45=5\cdot 9$ muß z_1 durch 5 teilbar sein, also auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Für $c_1=0$ gilt $a_1=3$; für $c_2=5$ gilt $a_2=8$. Die Quersumme $a+b+c$ von z_1 muß außerdem durch 9 teilbar sein. Nun gilt $q_1=a_1+b_1+c_1 =3+b_1$, also $b_1=6$, $q_2=a_2+b_2+c_2=13+b_2$, also $b_2=5$.
$360-36=324 \neq 297$; $855-558=297$.
Es gibt genau eine solche Zahl, sie lautet 855.

Klasse 8

▲1▲

$$(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2),$$

$$2x^4+2x^3-3x^2+2x^3+2x^2-3x+2x^2$$

$$+2x-3=-3+3x+3x^2$$

$$2x^4+4x^3-2x^2-4x=0,$$

$$x^4+2x^3-x^2-2x=0,$$

$$x^3(x+2)-x(x+2)=0,$$

$$(x+2)(x^3-x)=0,$$

$$x(x+2)(x^2-1)=0,$$

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)(x+2)=0,$$

$$x_1=1;\ x_2=0;\ x_3=-1;\ x_4=-2.$$

▲2▲ In 1 h beschreibt der kleine Zeiger einen Winkel von 30°; in 1 min beschreibt der kleine Zeiger einen Winkel von 0,5°. In 1 min beschreibt der große Zeiger einen Winkel von 6°. Nun gilt $x(6°-0{,}5°)=90°$, also $x=16\frac{4}{11}$.
Nach $16\frac{4}{11}$ Minuten bilden beide Zeiger zum ersten Mal einen rechten Winkel, wenn beide Zeiger zuvor auf die Ziffer 12 zeigten.
$n\cdot 16\frac{4}{11}=24\cdot 60$, also $n=88$ (dabei wurden die gestreckten Winkel mitgezählt).
Im Verlaufe von 24 Stunden bilden der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr 44mal einen rechten Winkel.

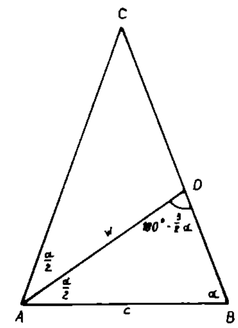
▲3▲ $1+2+3+\ldots+n=2{,}5(n+1)$,
$\frac{n(n+1)}{2}=2{,}5(n+1)$, also $n=5$.
Probe: $1+2+3+4+5=2{,}5\cdot 6$,
$15=15$.

▲4▲ Im Dreieck ABD gilt $\sphericalangle ADB=180° -\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\right)=180°-\frac{3}{2}\alpha=105°$.
Nun gilt ferner

$$\frac{w}{c}=\frac{\sin 50°}{\sin 105°}=\frac{\sin 50°}{\sin 75°} \text{ bzw.}$$

$$w=\frac{6\cdot \sin 50°}{\sin 75°}\approx 4{,}76.$$

Die Länge der Winkelhalbierenden $\overline{AD}=w$ beträgt etwa 4,76 cm.



▲5▲ $0+1+2+3+\ldots+19=\frac{19\cdot 20}{2}=190$ und $200-190=10$.
Wenn von den 21 Schülern der erste keine, der zweite eine Nuß, der dritte zwei, und so fort, der 20. Schüler 19 Nüsse erhält, so bleiben 10 Nüsse übrig. Gleich wie diese restlichen Nüsse auch verteilt werden, es werden stets mindestens zwei Schüler die gleiche Anzahl von Nüssen erhalten.

„Löse eine Aufgabe für den lieben Papa, eine für die liebe Mama, …!“

1. Vervollständige!

$1=3-3:3-3:3$
$2=$
$3=$
$4=3+33:33$
$5=$
$6=$
$7=(33-3):3-3$
$8=$
$9=$
$10=3+3+3+3:3$

2. Wer ist es?

„Es ist“, sagte Kolja, „meiner Eltern Kind, aber weder mein Bruder noch meine Schwester. Errätst du, wer das ist, spendiert dir dieses Wesen ein leckeres Moroschnoje.“

Pendel und Erdbeschleunigung

Ein Pendel ist ein Körper, der in einem festen Punkt oder in einer festen Achse drehbar aufgehängt ist und der unter der Wirkung der Schwerkraft Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage ausführen kann.

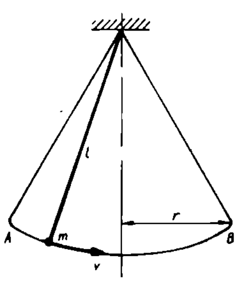
Die theoretische Behandlung der Schwingungen eines allgemeinen Pendels ist für einen Beitrag der Schülerzeitschrift *alpha* zu schwierig.

Hier können und sollen nur teilweise die Bewegungen eines speziellen, idealisierten Pendels, des sogenannten „mathematischen Pendels" betrachtet werden: Eine an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängte punktförmige Masse m heißt mathematisches Pendel.

Natürlich gibt es keinen masselosen Faden und auch keine punktförmige Masse. In guter Näherung läßt sich ein „mathematisches Pendel" realisieren durch eine an einem Zwirnsfaden aufgehängte kleine Eisenkugel.

Auf ein solches Pendel sind in guter Näherung die folgenden theoretischen Betrachtungen zutreffend. Allerdings gilt die zu entwickelnde Theorie streng nur für ein reibungsfrei schwingendes Pendel. Da die zusätzliche Annahme der Reibungsfreiheit in der Praxis nicht erfüllt ist, wird ein reales Pendel, dem nicht fortwährend in geeigneter Weise Energie zugeführt wird, nicht unbegrenzt in der gleichen Weise weiterschwingen, sondern es wird langsam zur Ruhe kommen.

Ein „mathematisches Pendel" kann als spezielle Bewegungen gleichförmige Kreisbewegungen ausführen, wobei die Ebenen dieser Kreisbahnen waagerecht sind.



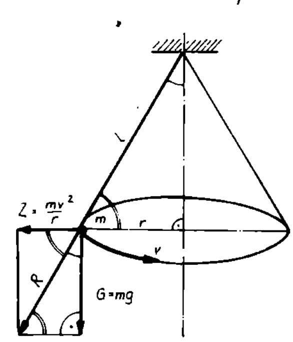
Da der Pendelfaden bei einer solchen Bewegung einen Kegelmantel durchwandert, heißt ein eine derartige Bewegung ausführendes Pendel ein *Kegelpendel*. Und die Theorie eines mathematischen Kegelpendels soll hier entwickelt werden!

Bei einem Kegelpendel bezeichnet man einen Umlauf der punktförmigen Masse m auf der Kreisbahn mit Radius r als Schwingung. Die Zeit, die zum Ausführen einer Schwingung benötigt wird, heißt Schwingungsdauer T. Da ein Kreis mit dem Radius r den Umfang $2\pi r$ hat, genügen die Geschwindigkeit v der Masse m, der Bahnradius r und die Schwingungsdauer T der Gleichung

$$v=\frac{2\pi r}{T}. \qquad (1)$$

Auf die punktförmige Masse m wirkt in lotrechter Richtung die Erdanziehungskraft G. Diese ist um so größer, je größer die Masse m ist. Exakt gilt: G und m sind einander proportional. Der zugehörige Proportionalitätsfaktor wird Erdbeschleunigung g genannt. G, g und m genügen also der Gleichung $G=mg$.

Da die punktförmige Masse m eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Radius r und der Geschwindigkeit v ausführt, wirkt auf m noch eine zweite Kraft, die zu dieser Kreisbewegung gehörige, in radialer Richtung angreifende Zentrifugalkraft $Z=\frac{mv^2}{r}$.



Beide auf m wirkenden Kräfte lassen sich nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch eine einzige resultierende Kraft R ersetzen.

Da die resultierende Kraft R durch den Faden auf die Pendelhalterung übertragen werden muß, muß R die Richtung des Fadens haben. Nach dem Satz des Pythagoras hat die zweite Kathete des in Bild 2 grauen rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten l und r die Länge

$$\sqrt{l^2-r^2}=l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}.$$

Da weiterhin die beiden in dieser Zeichnung grauen Dreiecke nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich sind, gilt für die Seiten dieser Dreiecke die Verhältnisgleichung

$$mg:\frac{mv^2}{r}=l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}:r.$$

Durch einfache Umformung folgt hieraus:

$$\frac{gr}{v^2}=\frac{l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}}{r}. \qquad (2)$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) und weitere einfache Umformungen ergibt sich:

$$\frac{gT^2}{4\pi^2 l}=\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}. \qquad (3)$$

Gemäß Formel (3) hängt die Schwingungsdauer T des mathematischen Kegelpendels ab von l, r und g; sie ist unabhängig von der Masse m. Ist r wesentlich kleiner als l, so läßt sich Formel (3) durch eine einfachere, für das folgende wichtige Näherungsformel ersetzen.

Ab jetzt wird angenommen, daß r und l der Ungleichung $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ genügen. Diese Ungleichung ist z. B. für $l=2\,m$ erfüllt, falls $r \leqq 2$ cm gilt. Aus $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ folgt $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \leqq 0{,}01^2 = 0{,}0001$.

Hieraus ergibt sich weiterhin

$$0{,}9999 \leqq 1-\left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

Wegen $0<1-\left(\frac{r}{l}\right)^2<1$ gilt ebenfalls

$$1-\left(\frac{r}{l}\right)^2<\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}<1$$

und damit schließlich

$$0{,}9999<\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}<1.$$

Auf Grund der letzten Ungleichung und mittels der Gesetze der Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

Gilt für den Bahnradius eines mathematischen Kegelpendels $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ und soll eine der Größen T, g und l des Pendels mit höchstens drei wesentlichen Dezimalstellen berechnet werden, so darf zur Berechnung die Formel

$$\frac{gT^2}{4\pi^2 l}=1 \text{ benutzt werden.} \qquad (4)$$

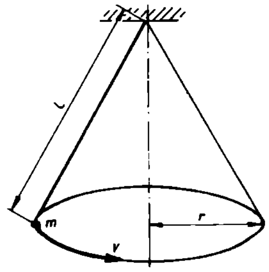
Daß die Näherungsformel (4) sogar für jede Bewegung eines mathematischen Pendels gilt, bei der sich die Masse m in waagerechter Richtung höchstens bis zu $0{,}01 \cdot l$ von der Ruhelage entfernt, wird folgender Versuch zeigen.

Versuch 1:

Laß ein Pendel, das in guter Näherung ein mathematisches Pendel darstellt, nacheinander in verschiedener Weise, jedoch stets so schwingen, daß sich der Pendelkörper in waagerechter Richtung höchstens bis zu $0{,}01 \cdot l$ von der Ruhelage entfernt!

Ermittle durch Messungen die zu diesen Bewegungen gehörigen Schwingungsdauern!

Eine andere spezielle Bewegung des mathematischen Pendels ist das Schwingen in einer lotrechten Ebene:



Zu einer Schwingung gehört das doppelte Durchlaufen des Kreisbogens $\widehat{AB}$ mit Radius l durch den Pendelkörper mit sich ändernder Geschwindigkeit. Sofern die Umkehrpunkte A und B von der Ruhelage einen waagerechten Abstand r haben, der der Ungleichung $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ genügt, gilt auch für diese Pendelbewegung gemäß Versuch 1 die Formel (4) im oben genannten Sinn.
Die bisher erzielten Ergebnisse sollen nun angewandt werden.
Zunächst soll die Erdbeschleunigung g bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird vorerst die Gleichung (4) nach g umgestellt:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad (5)$$

Nunmehr wird folgender Versuch durchgeführt.

Versuch 2:

Baue ein Pendel (mit geeigneter Pendellänge), das in guter Näherung ein mathematisches Pendel darstellt! Miß seine Pendellänge! Versetze dieses Pendel in eine Bewegung, für die $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ gilt!
Bestimme für diese Bewegung mittels Stoppuhr die Zeit, die für eine größere Anzahl von Schwingungen dieser Bewegung benötigt wird! Berechne die zugehörige Schwingungsdauer!
Berechne abschließend gemäß Formel (5) die Erdbeschleunigung!
Mit Versuch 2 ist es ohne weiteres möglich, die Erdbeschleunigung mit drei wesentlichen Dezimalstellen zu bestimmen.
Wird der Versuch 2 an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche durchgeführt, so wird damit sogar die Änderung der Erdbeschleunigung mit der geographischen Breite erkannt.

Ort	geographische Breite	Erdbeschleunigung
Äquator	0°	$9{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Potsdam	52,5°	$9{,}81274\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Pol	90°	$9{,}83\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ursachen für das Ändern der Erdbeschleunigung mit der geographischen Breite sind die Rotation und die Abplattung der Erde. Nachdem die Erdbeschleunigung bestimmt ist, kann die Formel (4) zum Lösen der folgenden Aufgaben benutzt werden.

Versuch 3:

Berechne die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels für kleine Ausschläge mit der Pendellänge
a) 0,5 m und b) 1 m!
Überprüfe deine Ergebnisse durch ein Experiment!

Versuch 4:

Welche Pendellänge l hat ein mathematisches Pendel, das bei kleinen Ausschlägen die Schwingungsdauer $T = 1$ s hat? Überprüfe dein Ergebnis durch ein Experiment!

Versuch 5:

Wie groß ist $\frac{r}{l}$ für die spezielle Kreisbewegung eines mathematischen Kegelpendels, für die die Schwingungsdauer um 10% kleiner ist als die Schwingungsdauer des gleichen Pendels für Bewegungen mit kleinen Ausschlägen?
Überprüfe wiederum deine Rechnung durch ein Experiment!
Würde der Versuch 2 auch auf der Mondoberfläche durchgeführt werden, so würde man als Ergebnis finden, daß die Mondbeschleunigung nur $\frac{1}{6}$ der Erdbeschleunigung beträgt. Auf Grund dieser Mitteilung kann der Leser berechnen, wie die Schwingungsdauer eines Kegelpendels auf der Mondoberfläche gegenüber der eines Kegelpendels gleicher Pendellänge und gleichen Bahnradius auf der Erdoberfläche verändert ist.

W. Träger

Seltsame Produkte

ÚSTÍ NAD LABEM

1. Beim Multiplizieren zweier dreistelliger natürlicher Zahlen, z. B. 693 und 481, können wir zu einem merkwürdigen Produkt gelangen, in unserem Fall 333333 (prüft nach!). Kann man diese Zahl auch als Produkt zweier anderer dreistelliger Faktoren darstellen?
Wir zerlegen die Zahl 333333 in Primfaktoren und fassen diese auf alle möglichen Arten so in zwei Klassen zusammen, daß das Produkt der Primzahlen jeder Klasse eine dreistellige Zahl ist.
Es gilt $333333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.
Bilden wir die Klassen (3, 3, 7, 11) und (13, 37), so erhalten wir die ursprünglichen Faktoren $693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ und $481 = 13 \cdot 37$. Bilden wir jedoch die Klassen (11, 37) und (3, 3, 7, 13), so erhalten wir folgende Darstellung:

$$333333 = (11 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13) = 407 \cdot 819.$$

Nehmen wir an, der Primfaktor 37 gehöre jeweils zur ersten Klasse. Dann darf das Produkt der anderen Primzahlen dieser Klasse höchstens $999 : 37 = 27$ betragen. Wir können also leicht alle ersten Klassen zusammenstellen:
(37, 3); (37, 7); (37, 11); (37, 13); (37, 3, 3); (37, 3, 7).
Nun brauchen wir nur noch zu prüfen, ob die zugehörigen zweiten Klassen auch dreistellige Zahlen ergeben.
Es ergibt sich folgende Zusammenstellung:

erste Klasse	zweite Klasse	Lösung
$3 \cdot 37$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	–
$7 \cdot 37$	$3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	–
$11 \cdot 37$	$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$	$407 \cdot 819$
$13 \cdot 37$	$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	$481 \cdot 693$
$3 \cdot 3 \cdot 37$	$7 \cdot 11 \cdot 13$	–
$3 \cdot 7 \cdot 37$	$3 \cdot 11 \cdot 13$	$777 \cdot 429$

Aufgabe 1:

Schreibt folgende Zahlen als Produkt zweier dreistelliger Faktoren:
a) 555555; b) 222222; c) 777777;
d) die größte fünfstellige natürliche Zahl!

2. Anstatt in zwei dreistellige Faktoren kann die Zerlegung in drei zweistellige verlangt werden.
Einer der zweistelligen Faktoren muß 37 sein, weil das Produkt von 37 mit jedem anderen Primfaktor von 333333 dreistellig ist. Wir können annehmen, daß der zweite zweistellige Faktor den Primfaktor 13 enthält. Dann darf 11 aber nicht in diesem Faktor enthalten sein. 11 gehört also zum dritten zweistelligen Faktor. Wir kombinieren nun 11 und 13 mit den übrigen Primfaktoren so, daß zweistellige Produkte entstehen. Die einzige Kombination ist $7 \cdot 13$ und $3^2 \cdot 11$, so daß man $333333 = 37 \cdot (7 \cdot 13) \cdot (3^2 \cdot 11) = 37 \cdot 91 \cdot 99$ erhält.

Aufgabe 2:

Sucht alle möglichen Zerlegungen folgender Zahlen in Produkte aus drei zweistelligen Faktoren:
a) 444444; b) die größte sechsstellige natürliche Zahl!

Aufgabe 3:

Sucht alle möglichen Zerlegungen von
a) 123456 in ein Produkt aus zwei dreistelligen Faktoren;
b) 123123 in ein Produkt aus drei zweistelligen Faktoren!

F. Dušek

Eigenschaften von Verknüpfungen

Teil 2

Gleichungen wie z. B. $x+3=y+3$ oder $x\cdot 12=y\cdot 12$ liefern infolge äquivalenter Umformung jeweils $x=y$. Dieses „Streichen" oder „Kürzen" ist bei allen vier Grundrechenarten erlaubt; denn für alle reellen a, x und y gilt:

a) wenn $x+a=y+a$, so $x=y$;

b) wenn $x-a=y-a$ oder $a-x=a-y$, so $x=y$;

c) wenn $x\cdot a=y\cdot a$, so $x=y$ $(a\neq 0)$;

d) wenn $x:a=y:a$ $(a\neq 0)$ oder $a:x=a:y$ $(x\neq 0,\ y\neq 0,\ a\neq 0)$, so $x=y$.

Allgemein sagen wir, ein Verknüpfungsgebilde $(M,\circ)$ erfüllt die *Kürzungsregel*, wenn für alle $a, x, y\in M$

E_8: Wenn $x\circ a=y\circ a$ oder $a\circ x=a\circ y$, so $x=y$ gilt.

Auch diese Eigenschaft, die uns durch den ständigen Umgang mit den vier Grundrechenarten so vertraut ist, ist keineswegs selbstverständlich. So gilt sie z. B. in $(R^*, \circ_{11})$ mit $x\circ_{11}y=_{Df}|x-y|$ nicht: es ist $3\circ_{11}2=3\circ_{11}4$, aber $2\neq 4$. Wir betrachten das Verknüpfungsgebilde $(N\setminus\{0\}, \circ_6)$ mit $x\circ y=_{Df}x\uparrow y=x^y$. Wegen $1\uparrow 2=1\uparrow 3$, aber $2\neq 3$, versagt hier die Kürzungsregel ebenfalls. Sie läßt sich aber offensichtlich „reparieren", indem wir den alleinigen „Störenfried", die 1, aus der Trägermenge ausschließen. In der Tat gilt für alle von 0 und 1 verschiedenen natürlichen Zahlen a, x und y:

Wenn $x\uparrow a=y\uparrow a$ oder $a\uparrow x=a\uparrow y$, so $x=y$. Das Verknüpfungsgebilde $(N\setminus\{0, 1\}, \uparrow)$ erfüllt demnach die Kürzungsregel E_8.

Aufgabe 10:

a) Zeige, daß für das Verknüpfungsgebilde $(G,\circ_1)$ mit $x\circ_1 y=_{Df}2(x+y)$ die Kürzungsregel gilt!

b) Stelle fest, ob für die Verknüpfungsgebilde aus Aufgabe 1a) die Kürzungsregel erfüllt oder nicht erfüllt ist!

c) Begründe, warum auf die Mittelwert-Verknüpfungen die Kürzungsregel angewendet werden kann!

Aufgabe 11:

Wie lautet die Kontraposition der Kürzungsregel? (Sei $(M,\circ)$ ein Verknüpfungsgebilde, das die Kürzungsregel erfüllt:

Für alle x, y und $a\in M$ gilt:

Wenn $x\circ a=y\circ a$ oder $a\circ x=a\circ y$, so $x=y$.)

Sei $(M,\circ)$ ein Verknüpfungsgebilde; $a, b\in M$, beliebig.

Die Kürzungsregel läßt sich dann auch folgendermaßen interpretieren:

E_8: Wenn die Gleichungen $a\circ x=b$ oder $y\circ a=b$ Lösungen x bzw. y in M besitzen, so sind diese eindeutig.

Zum Beweis nehmen wir an, die Gleichung $a\circ x=b$ habe zwei Lösungen: x_1 und x_2. Dann gilt $a\circ x_1=b$ und $a\circ x_2=b$, d. h. aber $a\circ x_1=a\circ x_2$. Wegen der Kürzungsregel erhalten wir die Einzigkeit $(x_1=x_2)$. Analog gehen wir im Falle $y\circ a=b$ vor.

Die Kürzungsregel sichert also die *Eindeutigkeit* von Lösungen (falls es überhaupt Lösungen gibt!). Über die *Existenz* solcher Lösungen trifft sie nämlich keine Aussage. So hat z. B. weder die Gleichung $3\circ_6 x=3\uparrow x=4$ noch die Gleichung $2\circ_1 x=1$ in der zugehörigen Trägermenge $N\setminus\{0, 1\}$ bzw. G eine Lösung. (Wir erinnern uns, daß sowohl für $\circ_6$ als auch für $\circ_1$ die Kürzungsregel zutrifft!)

Gilt in einem Verknüpfungsgebilde $(M,\circ)$:

E_9: Für alle $a, b\in M$ sind die Gleichungen $a\circ x=b$ und $y\circ a=b$ lösbar;

so nennen wir $(M,\circ)$ ein Verknüpfungsgebilde mit *Divisionsregel*. Diese Regel, die die (allerdings nicht notwendig eindeutige) Existenz von Lösungen der angegebenen Gleichungen garantiert, erinnert an die Division der Zahlen.

Zwei Beispiele, die dieser Regel nicht gehorchen, haben wir zuvor angegeben. Ein Verknüpfungsgebilde mit Divisionsregel ist $(R^*,\circ_{11})$ mit $x\circ_{11}y=_{Df}|x-y|$. ($|x-y|$ heißt Abstand oder Differenzbetrag von x und y.)

Wegen der Kommutativität von $\circ_{11}$ genügt es, die Gleichung $a\circ_{11}x=b$ mit $a, b\in R^*$, beliebig, zu betrachten:

$$a\circ_{11}x=|a-x|=\begin{cases} a-x=b \text{ oder} \\ -(a-x)=b, \end{cases}$$

d. h., für alle $a, b\in R^*$ existieren damit Lösungen, nämlich $x_1=a-b$ und $x_2=b+a$. (Für $a\geq b$ ist die Lösung nicht eindeutig!)

Auch das arithmetische und geometrische Mittel über R bzw. P^+ erfüllen die Divisionsregel, das harmonische Mittel jedoch nicht. (Begründung?)

Aufgabe 12:

a) Überprüfe die naheliegende Vermutung, ob die Verknüpfungsgebilde $(P, +)$, $(P, -)$, $(P, \cdot)$ und $(P\setminus\{0\}, :)$ die Divisionsregel erfüllen!

b) Stelle fest, ob die Verknüpfungen aus Aufgabe 1a) die Divisionsregel erfüllen!

c) Überprüfe die Gültigkeit der Kürzungs- und Divisionsregel für die Verknüpfungsgebilde $(G,\circ_{13})$ und $(G,\circ_{14})$ aus Aufgabe 3a)!

d) Untersuche, welche der in *alpha* 4, 1977, genannten geometrischen Verknüpfungen die Kürzungs- oder Divisionsregel erfüllen!

e) Welche Verknüpfungsgebilde dieses Beitrages erfüllen die Kürzungs- *und* Divisionsregel?

Addieren wir zu einer Zahl x die 0, wird diese Zahl x „reproduziert". Das gleiche trifft für die Multiplikation einer Zahl x mit 1 zu. Das heißt, für jede reelle Zahl x gilt

$x+0=0+x=x$ und

$x\cdot 1=1\cdot x=x$.

Allgemein definieren wir:

Ein Element n eines Verknüpfungsgebildes $(M,\circ)$ heißt *neutrales Element*, wenn für jedes $x\in M$

E_{10}: $x\circ n=n\circ x=x$ gilt.

Die 0 ist also neutrales Element bzgl. der Addition oder in $(P, +)$, die 1 analog bzgl. der Multiplikation oder in $(P, \cdot)$.

Besitzen auch andere Verknüpfungsgebilde ein neutrales Element?

$(P, -)$ und $(P\setminus\{0\}, :)$ besitzen kein neutrales Element.

Zwar gilt für jedes reelle x

$x-0=x$, nicht aber $0-x=x$.

(Analog $x:1=x$, nicht aber $1:x=x$.)

Ein Element n_r eines Verknüpfungsgebildes $(M,\circ)$ heißt *rechts-neutrales Element*, wenn für jedes $x\in M$

E_{11}: $x\circ n_r=x$ gilt.

(Analog wird n_l als *links-neutrales Element* durch $n_l\circ x=x$ für jedes $x\in M$ definiert (E_{12}).)

Die 0 und die 1 sind also bzgl. Subtraktion bzw. Division lediglich jeweils rechts-neutrales Element. Auch das Verknüpfungsgebilde $(N\setminus\{0\}, \uparrow)$ besitzt ein rechts-neutrales Element n_r:

Für jedes $x\in N\setminus\{0\}$ gilt nämlich $x\uparrow 1=x$. Die 1 ist nicht links-neutral: $1\uparrow x\neq x$ (für $x\neq 1$).

Ein Verknüpfungsgebilde mit einem links-neutralen Element n_l ist $(R^*,\circ_5)$:

Für jede gebrochene Zahl x gilt $0\circ_5 x=2\cdot 0+x=x$. Die 0 ist nicht rechts-neutral: $x\circ_5 0=2\cdot x+0=2x\neq x$ (für $x\neq 0$).

Aufgabe 13:

a) Zeige: Besitzt ein Verknüpfungsgebilde $(M,\circ)$ sowohl ein links-neutrales Element n_l als auch ein rechts-neutrales Element n_r, so existiert auch ein neutrales Element n.

b) Sei $(M,\circ)$ ein Verknüpfungsgebilde mit einem neutralen Element n. Beweise, daß dann in $(M,\circ)$ kein weiteres neutrales Element existieren kann!

c) Überprüfe die Eindeutigkeit gemäß b) im Hinblick auf einseitig-neutrale Elemente!

Während die Mittelwert-Verknüpfungen weder links-neutrale noch rechts-neutrale Elemente zulassen (Begründung?), haben mehrere Verknüpfungsgebilde aus Aufgabe 1a) jeweils ein neutrales Element. Zum Beispiel besitzt $(R^*,\circ_{11})$ mit $x\circ_{11}y=_{Df}|x-y|$ das neutrale Element $n=0$: $|x-0|=|0-x|=x$ für jedes $x\in R^*$.

Aufgabe 14:

Untersuche die Verknüpfungsgebilde aus Aufgabe 1a) im Hinblick auf die Existenz eines neutralen Elements bzw. einseitig-neutraler Elemente!

Es ist keineswegs ein Vorrecht der Zahlen 0 und 1, neutrales Element in einem Verknüpfungsgebilde zu sein. Betrachten wir nämlich das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{12})$ mit $x \circ_{12} y =_{Df} x + y - 3$, so stoßen wir auf $n = 3 : x \circ_{12} 3 = 3 \circ_{12} x = x + 3 - 3 = x$ für jedes $x \in G$.

Von der „Uhr-Addition" wissen wir, daß $n = 12$ das neutrale Element ist: Nach genau 12 Stunden, d. h. nach einer vollen Drehung, zeigt der (kleine) Zeiger wieder auf dieselbe Stelle! Für jedes $x \in M = \{1, 2, ..., 12\}$ gilt also

$$x \oplus 12 = 12 \oplus x = x.$$

In dem Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M), \cap)$ ist die Menge M das neutrale Element, in $(\mathfrak{P}(M), \cup)$ dagegen die leere Menge:

Für jedes $X \in \mathfrak{P}(M)$ gilt

1. $X \cap M = M \cap X = X$ und
2. $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$ – vgl. *alpha*, 4/1977, Aufgabe 12c, S. 96);

$X \in \mathfrak{P}(M)$ heißt nach Definition: $X \subseteq M$.

Multiplizieren wir eine Zahl x mit 0, wird diese Zahl x „aufgesaugt" oder „absorbiert": Für jede reelle Zahl x gilt

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

Allgemein definieren wir:

Ein Element a eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ heißt *absorbierendes Element*, wenn für jedes $x \in M$

E_{13}: $a \circ x = x \circ a = a$ gilt.

Daß auch andere Zahlen als 0 diese Eigenschaft E_{13} besitzen können, zeigen die Verknüpfungsgebilde

$(N, \circ_7)$ mit $x \circ_7 y = x \sqcap y = \text{ggT}(x, y)$ bzw.

$(G, \circ_{10})$ mit $x \circ_{10} y = x + y + xy$. Im ersten Fall ist $a = 1$, im zweiten Fall $a = -1$ absorbierendes Element:

$1 \sqcap x = x \sqcap 1 = 1$ und $(-1) \circ_{10} x = x \circ_{10} (-1) = -1$.

Ein Element a_l eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ heißt *links-absorbierendes Element*, wenn für jedes $x \in M$

E_{14}: $a_l \circ x = a_l$ gilt.

(Analog wird wieder a_r als *rechts-absorbierendes Element* durch $x \circ a_r = a_r$ für jedes $x \in M$ definiert (E_{15}).) Im Verknüpfungsgebilde $(N \setminus \{0\}, \circ_6)$ ist die 1 zwar links-absorbierend, nicht aber rechts-absorbierend!

Überlege dir, ob die Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M), \cap)$ und $(\mathfrak{P}(M), \cup)$ ein absorbierendes Element besitzen!

Aufgabe 15:

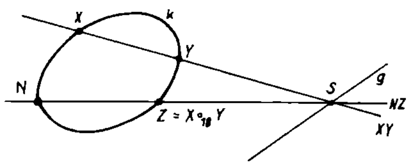
Untersuche, ob die Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{13})$ und $(G, \circ_{14})$ aus Aufgabe 3a) ein neutrales oder absorbierendes Element besitzen!

Aufgabe 16:

Beweise, daß das Verknüpfungsgebilde $(P^+, \circ_{17})$ mit $x \circ_{17} y =_{Df} x \uparrow \ln y = x^{\ln y}$ für alle $x, y \in P^+$ kommutativ, assoziativ und bisymmetrisch ist, ein neutrales Element n und ein absorbierendes Element a besitzt, aber weder die Divisions- noch die Kürzungsregel erfüllt!

Abschließend betrachten wir ein geometrisches Verknüpfungsgebilde mit einem neutralen Element. Sei dazu k ein Kegelschnitt in der Ebene ε; g eine Gerade in ε, die k meidet. Auf k wählen wir einen beliebigen Punkt N, den wir im folgenden fest lassen. Für beliebige Punkte $X, Y \in k$ definieren wir $X \circ_{18} Y$ als den Punkt $Z \in k$, so daß die Geraden XY, NZ und g einen gemeinsamen Schnittpunkt S besitzen. Für $NZ \neq NN$ sei $Z \neq N$.

Es gilt: $X \circ_{18} N = N \circ_{18} X = X$. Der Punkt N ist das neutrale Element.



Aufgabe 17:

Ermittle weitere Eigenschaften des Verknüpfungsgebildes $(k, \circ_{18})$!

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal alle bisher betrachteten Verknüpfungsgebilde, so besitzen viele von ihnen z. T. sehr ähnliche Eigenschaften, obwohl ihre Verknüpfungsvorschriften kaum Gemeinsamkeiten erkennen lassen. Andererseits können gleiche Verknüpfungsvorschriften verschiedene Eigenschaften nach sich ziehen, wenn unterschiedliche Trägermengen zugrunde gelegt werden. Die hier untersuchten Eigenschaften E_1 bis E_{15} präzisieren damit unsere Vorstellungen und Kenntnisse in bezug auf Verknüpfungsgebilde ganz wesentlich.

I. Lehmann

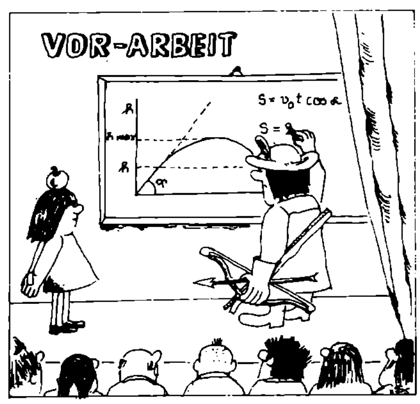
(Lösungen siehe Seite 71.)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. József Molnár

Loránd-Eötvös-Universität Budapest
Lehrstuhl Geometrie

▲1763▲ Für $i = 1, 2, 3$ sei $\triangle OTP_i$ ein rechtwinkliges Dreieck mit OP_i als Hypotenuse; dabei seien P_1, P_2, P_3 auf einem Strahl mit dem Anfangspunkt T so angeordnet, daß $\overline{TP_1} < \overline{TP_2} < \overline{TP_3}$ gilt. Ferner sei k ein Kreis um 0 mit beliebigem Radius. Es bezeichne jeweils $\triangle(P_iOP_j)$ den Flächeninhalt des Dreiecks P_iOP_j und $s(P_iOP_j)$ den Flächeninhalt desjenigen Sektors von k, der zum Zentriwinkel $\sphericalangle P_iOP_j$ gehört. Beweise, daß dann

$$\frac{s(P_1OP_2)}{\triangle(P_1OP_2)} > \frac{s(P_1OP_3)}{\triangle(P_1OP_3)} \text{ gilt!}$$



Das System Internationaler Einheiten (SI)

SI-Basiseinheiten/ Größe/Name	*Symbol*
Länge	l
Zeit	t
Masse	m
elektr. Stromstärke	I
thermodyn. Temperatur	T
Stoffmenge	n
Lichtstärke	I_v

Einheit/Name	*Symbol*
Meter	m
Sekunde	s
Kilogramm	kg
Ampere	A
Kelvin	K
Mol	mol
Candela	cd

Genormte Vorsatzzeichen für Vielfache oder Teile der SI-Einheiten

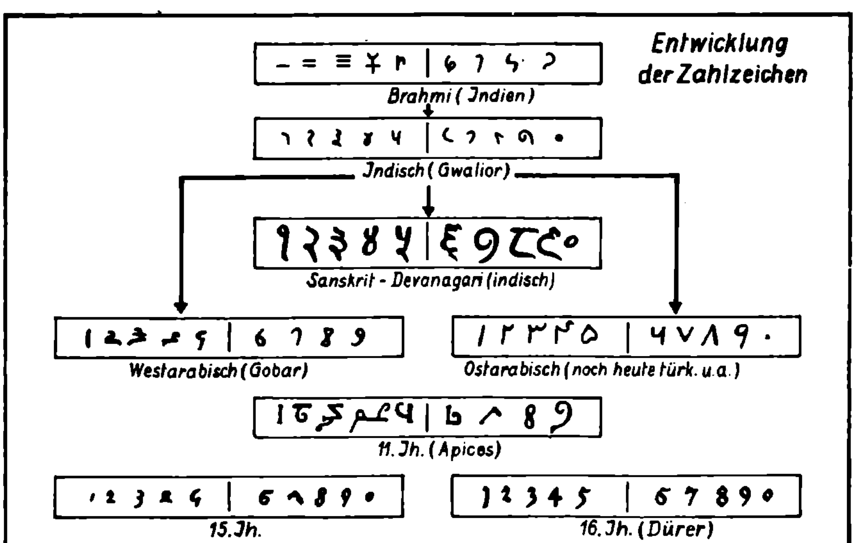
Vorsilbe	*Vorsatzzeichen*	*Zehnerpotenz*
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hekto	h	10^{2}
Deka	da	10
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

Ein Stück Wissenschaftsgeschichte – Mathematik im alten Indien

Indien hat der Welt viele praktische Segnungen zuteil werden lassen: nachweisbar Reis, Baumwolle, Zuckerrohr, viele Gewürze, das Schachspiel und am wichtigsten von allem, das Dezimalsystem der Zahlenschreibweise – die Erfindung eines unbekannten indischen Mathematikers der frühchristlichen Ära.
Durch die Notwendigkeit, den freien Platz für ein Opfer genau festzulegen, entwickelten die Inder sehr früh ein einfaches System der Geometrie, doch auf dem Gebiet des praktischen Wissens verdankt die Welt Indien am meisten im Bereich der Mathematik, die sich zur Zeit des *Gupta-Reiches* (3. bis 5. Jh. u. Z.) hoch entwickelte und die fortgeschrittener war als in anderen Ländern des Altertums. Der Erfolg der indischen Mathematik beruhte hauptsächlich auf der Tatsache, daß die Inder eine klare Konzeption der abstrakten Zahl hatten, zum Unterschied von der numerischen Quantität von Objekten in der räumlichen Ausdehnung. Während die griechische mathematische Wissenschaft weitgehend auf Meßkunst und Geometrie basierte, ging man in Indien schon daran, mit Hilfe einer einfachen Zahlenbezeichnung Ansätze einer Algebra zu entwickeln, die kompliziertere Berechnungen erlaubte, als es den Griechen möglich war, und die zum Studium der Zahl an sich führte.
In den früheren Inschriften Indiens sind Daten und andere Zahlen in einer Schreibweise verzeichnet, die der der Römer, der Griechen und Hebräer nicht unähnlich war und mit gesonderten Symbolen für die Zehn und die Hundert operierte. Die früheste Inschrift, die das Datum in einem System von neun Zahlen und einer Null mit Stellenwertbezeichnung für die Zehn und Hundert wiedergibt, kommt aus Gujarat und datiert aus dem Jahre 595 u. Z. Bald danach hatte man das neue System in Syrien zur Kenntnis genommen, und es wurde bald auch z. B. in Vietnam verwendet. Offensichtlich war das System den Mathematikern schon einige Jahrhunderte lang bekannt, bevor es für Inschriften benutzt wurde, deren Schreiber dazu neigten, in ihren Methoden der Datenaufzeichnung konservativ zu sein; im modernen Europa wird das schwerfällige römische System manchmal immer noch für den gleichen Zweck benutzt.
Der Name des Mathematikers, der das vereinfachte System, Zahlen zu schreiben, ersann, ist unbekannt; aber der früheste erhaltene mathematische Text – das anonyme „Bakhskali-Manuskript“ (2. Jh. u. Z.) und das *Aryabhatiya* des *Aryabhata*, geschrieben 499 u. Z. – setzen es voraus.
Lange glaubte man, das Dezimalsystem sei von den Arabern erfunden worden, doch dies ist gewiß nicht der Fall. Die Araber selbst nannten die Mathematik „die Indische (Kunst)“ (hindisat), und es scheint, daß die Dezimalschreibung zusammen mit anderen indischen mathematischen Überlieferungen der mohammedanischen Welt entweder durch Kaufleute übermittelt wurde, die mit der Westküste Indiens Handel trieben oder durch die Araber, die im Jahre 712 u. Z. Sind eroberten.
Was die Welt Indien in dieser Hinsicht verdankt, kann nicht hoch genug eingeschätzt werden. Die meisten der großen Entdeckungen und Erfindungen, auf die man in Europa so stolz ist, wären ohne ein entwickeltes System der Mathematik undenkbar. Und dies wiederum wäre unmöglich gewesen, wenn Europa an das enge römische Zahlensystem gebunden geblieben wäre. Die Leistung des unbekannten indischen Mathematikers war, obwohl sie leichthin als selbstverständlich gilt, das Werk eines analytischen Geistes höchsten Ranges, dem viel mehr Ehre gebührt, als ihm bisher zuteil wurde.
Mittelalterliche indische Mathematiker, wie *Brahmagupta* (7. Jahrhundert), *Mahavira* (9. Jahrhundert) und *Bhaskara II* (12. Jahrhundert), machten verschiedene Entdeckungen, die in Europa bis zur Renaissance oder noch später unbekannt waren. Sie verstanden die Einführung positiver und negativer Mengen, entwickelten taugliche Systeme für das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln und konnten quadratische und gewisse Arten von unbestimmten Gleichungen lösen. Für π gab *Aryabhata* den üblichen modernen Näherungswert von 3,1416 an, ausgedrückt in der Form des Bruches $\frac{62832}{20000}$. Dieser Wert von π, viel genauer als der der Griechen, wurde von späteren indischen Mathematikern auf neun Dezimalstellen verbessert. In der Trigonometrie, in der sphärischen Geometrie und Differentialrechnung, hauptsächlich in Verbindung mit der Astronomie, wurden mehrere Fortschritte erzielt. Die mathematischen Begriffe von „Null“ (schunya) und „Unendlich“, von klassischen Autoritäten immer nur unklar angewandt, wurden im mittelalterlichen Indien voll verstanden. Frühere Mathematiker hatten gelehrt, daß $\frac{x}{0}=x$ sei, aber *Bhaskara II* bewies, daß es unendlich ist. Er begründete auch mathematisch, was in der indischen Wissenschaft mindestens ein Jahrtausend früher erkannt wurde, daß das Unendliche, wie auch immer geteilt, unendlich bleibt.

H. K. Singh
(gekürzt, aus Urania 7/76)

Indische Mathematiker legten um 700 u. Z. die Fundamente für unser modernes, auf dem Positionssystem beruhenden dezimalen Zahlensystem



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen

Kreisolympiade

Klassenstufe 5

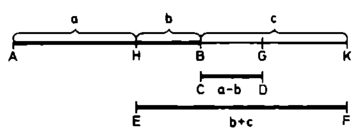
1. Für $1\ \text{ha} = 10000\ \text{m}^2$ sind $2\ \text{dt} = 200000\ \text{g}$ Saatgut üblich; folglich werden für je $1\ \text{m}^2$ dann 20 g benötigt. Für $8\ \text{m}^2$ wurden wegen $8 \cdot 20 = 160$ daher 160 g Saatgut genommen. Der Ernteertrag betrug wegen $15 \cdot 160 = 2400$ folglich $2400\ \text{g} = 2{,}4\ \text{kg}$.

2. Bezeichnet man die Anzahl der Vögel, die am Ende auf dem ersten Baum sitzen, mit x, dann sitzen auf dem zweiten Baum $2x$ Vögel, auf dem dritten $4x$ Vögel. Das sind zusammen $7x$ Vögel. Wegen $56:7=8$ müssen mithin zuletzt auf dem ersten Baum 8 Vögel, auf dem zweiten Baum 16 Vögel, auf dem dritten Baum 32 Vögel sitzen.
Auf dem ersten Baum saßen daher am Anfang 7 Vögel mehr als 8 Vögel, d.s. 15 Vögel. Auf dem zweiten Baum saßen zu Anfang noch nicht die später vom ersten Baum zugeflogenen 7 Vögel, dafür aber die dann zum dritten Baum geflogenen 5 Vögel; also waren es zu Anfang 2 Vögel weniger als 16 Vögel, d.s. 14 Vögel. Auf dem dritten Baum saßen am Anfang 5 Vögel weniger als 32 Vögel, d.s. 27 Vögel.

3. Die Anzahl der Parzellen der Größe $150\ \text{m}^2$ ist eine der Zahlen von 0 bis 9. Für jede dieser Zahlen erhält man folgende Werte: Da der Flächeninhalt aller Parzellen $1710\ \text{m}^2$ beträgt, gibt es folglich 3 Parzellen der Größe $150\ \text{m}^2$ und 6 Parzellen der Größe $210\ \text{m}^2$.

Anzahl	Flächeninhalt	Anzahl	Flächeninhalt	Flächeninhalt aller Parzellen
der Parzellen der Größe $150\ \text{m}^2$		der Parzellen der Größe $210\ \text{m}^2$		
0	$0\ \text{m}^2$	9	$1890\ \text{m}^2$	$1890\ \text{m}^2$
1	$150\ \text{m}^2$	8	$1680\ \text{m}^2$	$1830\ \text{m}^2$
2	$300\ \text{m}^2$	7	$1470\ \text{m}^2$	$1770\ \text{m}^2$
3	$450\ \text{m}^2$	6	$1260\ \text{m}^2$	$1710\ \text{m}^2$
4	$600\ \text{m}^2$	5	$1050\ \text{m}^2$	$1650\ \text{m}^2$
5	$750\ \text{m}^2$	4	$840\ \text{m}^2$	$1590\ \text{m}^2$
6	$900\ \text{m}^2$	3	$630\ \text{m}^2$	$1530\ \text{m}^2$
7	$1050\ \text{m}^2$	2	$420\ \text{m}^2$	$1470\ \text{m}^2$
8	$1200\ \text{m}^2$	1	$210\ \text{m}^2$	$1410\ \text{m}^2$
9	$1350\ \text{m}^2$	0	$0\ \text{m}^2$	$1350\ \text{m}^2$

4. Trägt man auf der Verlängerung von AB über B hinaus eine Strecke BG der Länge $\overline{BG} = \overline{CD}$ ab, so wird $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = \overline{AB} + \overline{CD} = (a+b) + (a-b) = 2a$. Konstruiert man den Mittelpunkt H der Strecke AG, so wird folglich $\overline{AH} = a$. Hiernach wird ferner $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = (a+b) - a = b$. Konstruiert man daher auf der Verlängerung von HB über B hinaus einen Punkt K so, daß $\overline{HK} = \overline{EF}$ gilt, so ergibt sich $\overline{BK} = \overline{HK} - \overline{HB} = \overline{EF} - \overline{HB} = (b+c) - b = c$.



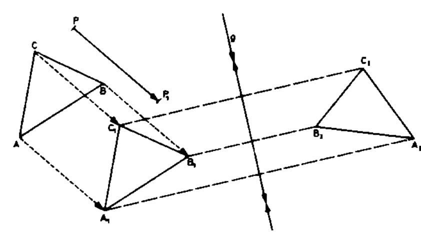
Klassenstufe 6

1. Am ersten Tag legte man $\frac{1}{3}$ und am dritten Tag $\frac{1}{4}$ der Gesamtstrecke zurück. Damit wurde wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ an diesen beiden Tagen $\frac{7}{12}$ der gesamten Strecke bewältigt.
Die restlichen 150 km sind also genau $\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Wegen $150:5=30$ sind folglich 30 km genau $\frac{1}{12}$ der Gesamtstrecke; diese beträgt demnach $12 \cdot 30\ \text{km} = 360\ \text{km}$.

2. Da (2) falsch ist, belegte Elke weder den vorletzten, noch einen besseren Platz, sie wurde also Fünfte. Da (1) falsch ist, kam Christa unmittelbar vor Elke ins Ziel und wurde daher Vierte. Da (4) falsch ist, belegte Franziska den dritten Platz. Folglich verblieben der erste und zweite Platz für Doris und Gitta. Da (3) falsch ist, lief Doris nicht schneller als Gitta. Da ihre Zeit ferner nicht dieselbe war wie die Gittas, belegte sie folglich den zweiten Platz und Gitta den ersten.
Die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs lautet mithin: Gitta, Doris, Franziska, Christa, Elke.

3. Aus 36 Rohlingen ergeben sich zunächst 36 Einzelteile; die Abfallspäne von je 6 Rohlingen ergeben dann noch einen Rohling, d. h. aus den Abfallspänen von 36 Rohlingen kann man 6 neue Rohlinge anfertigen. Aus ihnen lassen sich noch einmal 6 Einzelteile herstellen. Die dabei anfallenden Späne ergeben einen weiteren Rohling. Fertigt man aus ihm wieder ein Einzelteil an, so fallen zwar wieder Späne an, diese lassen sich aber nicht mehr (nach Einschmelzen) zur Herstellung eines weiteren Rohlings verwenden. Also beträgt die gesuchte Anzahl von Einzelteilen $36 + 6 + 1 = 43$.

4.



Klassenstufe 7

1. Bernd saß neben Anja und Cathrin. Daher kann er wegen (1) nur Evas Bruder sein. Dirk saß zwischen Cathrin und Eva, kann also ebenfalls wegen (1) nur Anjas Bruder sein. Wegen (1) und (2) können Frank und Gerold weder Anjas noch Evas Brüder sein. Sie sind mithin Cathrins Brüder.

2. a) Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:
$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) = 5a + 10.$
Es gilt der Satz: Wenn z ein Teiler sowohl von x als auch von y ist, so ist z auch ein Teiler der Summe $x+y$.
Nun ist 5 ein Teiler von $5a$, und 5 ist auch ein Teiler von 10.
Folglich gilt: $5 \mid 5a + 10$, w.z.b.w.
b) Ein Gegenbeispiel zeigt, daß die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist:
Es gilt z. B.
$1+2+3+4+5+6=21; 6 \nmid 21.$
c) Für $n=7$ z. B. gilt:
$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + (a+6) = 7a + 21.$
Nun gilt $7 \mid 7a$ und $7 \mid 21$,
daraus folgt: $7 \mid 7a + 21$.
Eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist, ist somit z. B. $n=7$.

3. Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die geforderte Eigenschaft hat und darin x die Größe eines Basiswinkels, y die Größe des Winkels an der Spitze sowie x' und y' die Größen der zu x bzw. y gehörenden Außenwinkel (Nebenwinkel) sind, so gilt eine der Gleichungen

(1) $x+x+x'=300°$,
(2) $x+x+y'=300°$,
(3) $x+y+x'=300°$,
(4) $x+y+y'=300°$.

Wegen $x'+x=180°$ bzw. $y'+y=180°$ folgt sowohl aus (1) als auch aus (4) jeweils $x=120° > 90°$ im Widerspruch dazu, daß x die Größe eines Basiswinkels ist.

Aus (2) erhält man, da nach dem Außenwinkelsatz $y'=2x$ gilt, $4x=300$ und damit $x=75°$, $y=30°$.

Wegen $x+x'=180°$ folgt aus (3) $y=120°$ und $x=30°$.

Als Möglichkeiten für die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks verbleiben mithin nur 75°; 75°; 30° oder 30°; 30°; 120°. Diese Größen erfüllen die Forderungen der Aufgabe; denn wegen $75°+75°+30°=180°$ bzw. $30°+30°+120°=180°$ sind sie Innenwinkelgrößen von Dreiecken, und im ersten Fall beträgt die Summe der Größen der beiden Innenwinkel und des Außenwinkels $75°+75°+(180°-30°)=75°+75°+150°=300°$, im zweiten Falle $30°+120°+(180°-30°)=30°+120°+150°=300°$.

4. Wenn eine vierstellige Zahl die geforderten Eigenschaften hat, so folgt zunächst, daß sie durch 4 teilbar ist, also (nach der Teilbarkeitsregel für 4) auch die zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung $\overline{7y}$. Von den Zahlen 70, ..., 79 sind nur 72 und 76 durch 4 teilbar, also verbleiben nur die Möglichkeiten $y=2$, $y=6$. Nun folgt weiter:

Ist $y=2$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregel für 3 nur die Ziffern 0, 3, 6, 9 in Frage. Hiervon entfallen auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 jedoch 3 und 9, da 372 und 972 nicht durch 8 teilbar sind.

Ist $y=6$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 3 nur die Ziffern 2, 5 und 8 in Frage. Hiervon entfallen jedoch 2 und 8, da 276 und 876 nicht durch 8 teilbar sind.

Also können nur die Zahlen

9072, 9672 und 9576

die geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften; denn ihre Ziffernddarstellung ist von der vorgeschriebenen Form, und sie sind durch 24 teilbar.

Klassenstufe 8

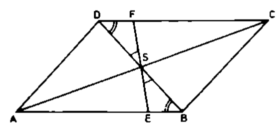
1. (1) Angenommen, Christoph hätte den Fingerhut, dann wäre Birgits Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Christoph den Fingerhut nicht.

(2) Angenommen, Birgit hätte den Fingerhut, dann wäre Anjas Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Birgit den Fingerhut auch nicht.

(3) Folglich kann höchstens Anja den Fingerhut haben. Tatsächlich ist dann Anjas Aussage falsch, und die Aussagen von Birgit und Christoph sind wahr.

Also steht eindeutig fest, daß Anja den Fingerhut an sich genommen hat.

2. Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite AB und F ein Punkt auf der Seite CD, und zwar so gelegen, daß die Strecke EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht.



Fällt F mit D zusammen, dann ist FE gleich der Diagonalen BD des Parallelogramms $ABCD$. Folglich fällt danach auch E mit B zusammen, und es gilt $\overline{BS}=\overline{SD}$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren. Falls $F \neq D$ ist, so ist auch $E \neq B$ (denn aus $E=B$ folgte wie eben auch $F=D$), und es gilt:

$\sphericalangle BSE=\sphericalangle DSF$ als Scheitelwinkel

$\sphericalangle EBS=\sphericalangle FDS$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Also gilt $\triangle SEB \cong \triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Daraus folgt $\overline{ES}=\overline{SF}$, d. h. die Strecke EF wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert.

3. Da A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind, liegen sie alle auf der Peripherie eines Kreises; dessen Mittelpunkt sei M. Verbindet man M mit den genannten Eckpunkten, so entstehen 5 kongruente Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME, EMA. Die Summe ihrer Winkel mit dem Scheitel M bildet einen Vollwinkel, so daß jeder dieser Winkel $360°:5=72°$ beträgt. Da im Kreis jeder Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, gilt

$$\sphericalangle ADB=\frac{1}{2}\sphericalangle AMB=\frac{1}{2}\cdot 72°=36°.$$

4. Das Alter des Vaters ist eine Quadratzahl kleiner als 45, da das Alter von Vater und Mutter zusammen nicht 87 Jahre oder mehr betragen kann. Da der Vater die älteste der vier Personen ist, beträgt sein Alter mindestens ein Viertel von 87 Jahren, also ist es größer als 21.

Zwischen 21 und 45 liegen genau die Quadratzahlen 25 und 36.

Fall 1: Angenommen, das Alter des Vaters wäre 25 Jahre. Dann wären Fritz 5 Jahre, Dieter 10 Jahre und die Mutter 22 Jahre. Das Alter aller Familienangehörigen zusammen betrüge in diesem Fall nicht 87 Jahre. Also ist der Vater nicht 25 Jahre alt.

Fall 2: Angenommen, das Alter des Vaters beträgt 36 Jahre. Dann ist Fritz 6 Jahre, Dieter 12 Jahre und die Mutter 33 Jahre alt. Alle zusammen sind wegen $36+6+12+33=87$ mithin 87 Jahre alt, wie es verlangt war. Folglich treffen diese Altersangaben als einzige zu.

Klassenstufe 9

1. a) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y=\frac{1}{2}x+n$ als auch die Gleichung $y=2x$ gilt. Ist dies der Fall, so folgt $2x=\frac{1}{2}x+n$, $x=\frac{2}{3}n$, $y=\frac{4}{3}n$. Daher können nur diese Werte x, y die genannten Gleichungen erfüllen. Wegen $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}n+n=\frac{4}{3}n$ und $2\cdot\frac{2}{3}n=\frac{4}{3}n$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen. Also hat (jeweils für ein n) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n\right)$ die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y=mx+n$ als auch die Gleichung $y=2x$ gilt.

Ist $m=2$ und $n=0$, so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die $y=2x$ als Gleichung hat.

Ist $m=2$ und $n \neq 0$, so gelten für kein Zahlenpaar (x, y) beide geforderten Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.

Ist $m \neq 2$, so gilt: Wenn x, y die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt $2x=mx+n$, $x=\frac{n}{2-m}$, $y=\frac{2n}{2-m}$. Daher können im Fall $m \neq 2$ nur diese Werte x, y die Gleichungen erfüllen. Wegen $m\cdot\frac{n}{2-m}+n=\frac{2n}{2-m}$ und $2\cdot\frac{n}{2-m}=\frac{2n}{2-m}$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen. Also hat (jeweils für ein Paar (m, n) mit $m \neq 2$) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{2-m}\right)$ die verlangten Eigenschaften.

Natürlich kann a) auch als Spezialfall von b) gewonnen werden.

2. Es gilt z. B.

(1) $5\cdot 5+5 \quad =30$ und
(2) $5\cdot(5+5:5)=30$.

Da in (1) genau dreimal die Zahl 5 verwendet wird, läßt sich die Aussage für jedes ungerade n erfüllen, indem man z. B. auf der linken Seite von (1) $\frac{n-3}{2}$mal den Term $5-5$ addiert.

Da in (2) genau viermal die Zahl 5 verwendet wird, läßt sich die Bedingung für jedes gerade $n>2$ erfüllen, indem man z. B. auf der linken Seite von (2) $\frac{n-4}{2}$mal den Term $5-5$ addiert.

3. Bei jeder Lage von C, D (auf k, mit $ABCD$ konvex und $AB \parallel DC$) ist zunächst $\sphericalangle MDC$

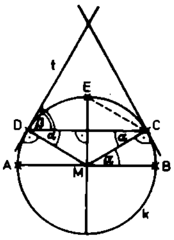
$= \sphericalangle MCD$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

$= \sphericalangle CMB$ (Wechselwinkel an Parallelen)

$= \alpha$.

Da der Radius MD senkrecht auf der Tangente t steht, folgt hieraus $\alpha + \beta = 90°$. (1)

a) Daher gilt genau dann $2\alpha = \beta$, wenn $\alpha = 30°$ ist. Dies gilt genau dann, wenn durch Spiegelung von M an CD ein Punkt E entsteht, für den $\sphericalangle MCE = 60°$ ist. Da bei dieser Spiegelung $\overline{MC} = \overline{EC}$ gilt, ist die genannte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $\triangle MCE$ gleichseitig ist, d. h. genau dann, wenn E auf k liegt. Dies trifft genau dann zu, wenn der Abstand zwischen AB und DC gleich dem halben Radius von k, d. h. gleich $\frac{1}{4}\overline{AB}$ ist.

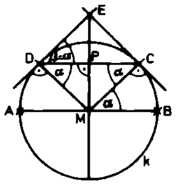


b) In (1) gilt genau dann $\alpha = \beta$, wenn $\alpha = 45°$ ist, d. h. genau dann, wenn $\triangle CDM$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem Radius r von k als Kathetenlänge ist. In diesem Dreieck ist die Länge der Höhe durch M gleich dem Abstand von AB zu CD. Wenn das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig ist, so ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{CD} = r \cdot \sqrt{2}$. Ferner zerlegt dann die Höhe MP das Dreieck in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Teildreiecke, also ist die Höhenlänge $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$. Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß AB und CD den Abstand $\overline{MP} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ voneinander haben, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$\overline{CP} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \overline{MP}$, also $\sphericalangle MCP = \sphericalangle CMP$,

d. h. $\alpha = 45°$.

Daher gilt genau dann $\alpha = \beta$, wenn CD von AB den Abstand $\frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\overline{AB}\sqrt{2}$ hat.



4. Soll ein Streckenzug zu einem Punkt hin und von ihm wieder weg führen, dann muß die Anzahl der in diesem Punkt zusammentreffenden Strecken eine gerade Zahl sein.

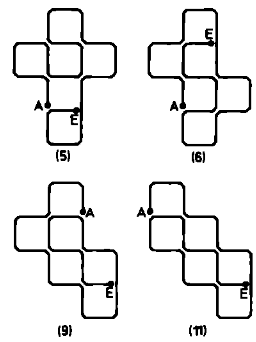
Ein Streckenzug der geforderten Art ist daher höchstens möglich, wenn die Figur nicht mehr als 2 Punkte enthält, in denen eine ungerade Anzahl von Strecken zusammentrifft.

Die Tabelle gibt an, wieviel Punkte, in denen genau drei Strecken zusammentreffen, bei jedem der Netze existieren.

Nr. des Netzes	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Anzahl solcher Punkte	6	4	4	6	2	2	6	4	2	4	2

Daher lassen sich höchstens die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Zuge zeichnen. Die folgende Probe ergibt, daß dies auch tatsächlich möglich ist:

In der Abbildung sind Anfangs- und Endpunkte eines solchen Streckenzuges mit A und E bezeichnet, und ein möglicher Streckenzug ist jeweils dargestellt.



Klassenstufe 10

1. Wenn (1) und (2) für eine Länge d cm des Durchmessers von k_1 erfüllt sind, so haben k_2, k_3 und k_4 Durchmesser der Längen $(d+1)$ cm, $(d+2)$ cm bzw. $(d+3)$ cm, und es gilt

$\frac{\pi}{4}d^2 + \frac{\pi}{4}(d+1)^2 + \frac{\pi}{4}(d+2)^2 = \frac{\pi}{4}(d+3)^2.$

Hieraus erhält man $d^2 + d^2 + 2d + 1 + d^2 + 4d + 4 = d^2 + 6d + 9$, also $2d^2 = 4$ und wegen $d > 0$ daraus $d = \sqrt{2}$.

Daher kann nur die Länge $\sqrt{2}$ cm die Forderungen (1) und (2) erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn für diese Länge ergeben sich als Flächeninhalte der vier Kreise

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2\ \text{cm}^2 \quad = \frac{\pi}{4}2\ \text{cm}^2,$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+1)^2\ \text{cm}^2 = \frac{\pi}{4}(3 + 2\cdot\sqrt{2})\ \text{cm}^2,$$

$$A_3 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+2)^2\ \text{cm}^2 = \frac{\pi}{4}(6 + 4\cdot\sqrt{2})\ \text{cm}^2,$$

$$A_4 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+3)^2\ \text{cm}^2 = \frac{\pi}{4}(11 + 6\cdot\sqrt{2})\ \text{cm}^2,$$

und hiermit gilt

$A_1 + A_2 + A_3 = A_4$

2. *1. Beweis:* (direkt)

B sei ein von A verschiedener Punkt auf g.

In dem Dreieck AMB liegt dann die Seite BM nach Voraussetzung einem rechten Winkel und damit dem größten Winkel des Dreiecks gegenüber. Es gilt also $\overline{BM} > \overline{AM}$. Da AM Radius von k ist, liegt B außerhalb des Kreises.

Die Gerade g hat also genau einen Punkt mit k gemeinsam.

Sie ist mithin Tangente des Kreises k.

2. Beweis: (indirekt)

Angenommen, die Gerade g, die mit dem Kreis k den Punkt A gemeinsam hat, wäre nicht Tangente von k.

Dann müßte g den Kreis in einem zweiten, von A verschiedenen Punkt – B genannt – schneiden. Da M wegen $AM \perp g$ nicht auf g läge, entstünde ein Dreieck AMB, und dieses wäre gleichschenklig $(\overline{AM} = \overline{BM} = r)$.

Nach dem Satz über Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke ergäbe sich

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 90° \text{ und damit}$$

$$\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA = 180°.$$

Das ist jedoch ein Widerspruch zum Dreiecksinnenwinkelsatz.

Die Annahme muß also falsch sein.

Die Gerade g ist folglich Tangente von k.

3. Der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ ist genau dann definiert, wenn $x^2 + 7x - 30 > 0$ ist. Dazu sind der Reihe nach äquivalent

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 30 + \frac{49}{4},$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{169}{4},$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2} > \sqrt{\frac{169}{4}},$$

$$\left|x + \frac{7}{2}\right| > \frac{13}{2},$$

$$x + \frac{7}{2} > \frac{13}{2} \text{ oder } x + \frac{7}{2} < -\frac{13}{2}$$

und damit

$x > 3$ oder $x < -10$.

Daher ist die gesuchte Menge die Menge aller reellen Zahlen x, für die $x > 3$ oder $x < -10$ gilt.

4. 1) Angenommen, für eine einstellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte $a_0 + a_0 = a_0$ und damit $a_0 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Wenn eine zweistellige Zahl die Eigenschaft (1) hat, so folgt

$$a_1 + a_0 + a_1a_0 = 10a_1 + a_0,$$

$$a_1a_0 = 9a_1,$$

wegen $a_1 \neq 0$ also

$$a_0 = 9.$$

Daher kann eine zweistellige Zahl Z nur dann die Bedingung (1) erfüllen, wenn sie mit der Ziffer 9 endet. Für jede solche Zahl gilt in der Tat $a_1 + a_0 + a_1a_0 = a_1 + 9 + 9a_1 = 10a_1 + 9 = 10a_1 + a_0$, also ist die Bedingung (1) erfüllt.

3) Angenommen, für eine dreistellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte

$a_2 + a_1 + a_0 + a_2a_1a_0 = 100a_2 + 10a_1 + a_0$,

also $a_2a_1a_0 = 99a_2 + 9a_1$, wegen $9 \geqq a_0$ mithin $9a_1a_2 \geqq 99a_2 + 9a_1 \geqq 99a_2$.

Hieraus ergäbe sich wegen $a_2 > 0$ der Widerspruch $a_1 \geqq 11$. Damit erfüllen für $0 < Z < 1000$ genau die Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die Bedingung (1).

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgende natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1512 + 64 \cdot 18 = 1512 + 1152 = 2664$. Da sie größer als 2560 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

2. a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A ist gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C. Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D, das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D. Daraus ergibt sich, daß Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muß, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

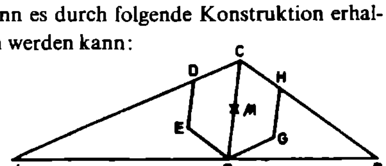
b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.

Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B.

Uli muß also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

3. (I) Angenommen, ein Sechseck $CDEFGH$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks $CDEFGH$ die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$, und die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{CM}$.

(II) Daher entspricht ein Sechseck $CDEFGH$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.

(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.

(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius $\overline{MC}$, seine Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.

(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius $\overline{MC}$, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

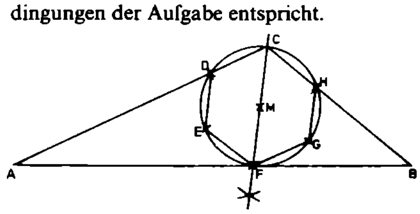
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Sechseck $CDEFGH$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC. Ebenfalls nach Konstruktion ist $\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{HC} = \overline{CM}$.

Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DCH$ der Größe 120° liegt, $\triangle CDM$ also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion $\triangle EFM$ ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\overline{\sphericalangle CMD} = \overline{\sphericalangle FME} = 60°$.

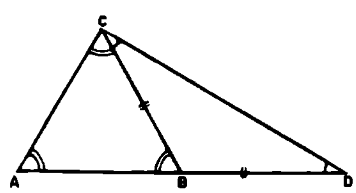
Hiernach und wegen $\overline{\sphericalangle FMC} = 180°$ ist $\overline{\sphericalangle EMD} = 60°$. Da das Dreieck EMD wegen $\overline{MD} = \overline{ME}$ gleichschenklig ist, gilt $\overline{\sphericalangle MED} = \overline{\sphericalangle MDE}$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $\overline{DE} = \overline{CM}$. Entsprechend ist $\overline{GH} = \overline{CM}$. Wegen $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HC} = \overline{CM}$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle FGH$ und $\sphericalangle GHC$ haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck $CDEFGH$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



4. Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ und damit

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle BCA} = \overline{\sphericalangle CAB} = 60°.$$



Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.

Wegen $\overline{BC} = \overline{BD}$ ist $\triangle BDC$ gleichschenklig mit der Spitze in B.

Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\overline{\sphericalangle DCB} = \overline{\sphericalangle BDC} = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°.$$

Daraus folgt, daß $\overline{\sphericalangle DCA} = \overline{\sphericalangle BCA} + \overline{\sphericalangle DCB} = 60° + 30° = 90°$ ist, w.z.b.w.

5. Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99; folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer.

Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.

Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529. Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

6. a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{AC}}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.

Daher entspricht ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $\overline{AC} = 10{,}0$ cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.

2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}\overline{AC}$.

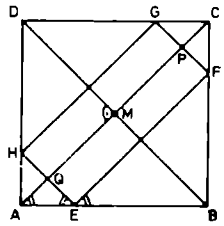
3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt.

$ABCD$ ist das gesuchte Quadrat.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $BD \perp AC$. Ferner gilt laut Konstruktion $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM} = \overline{DM}$.

Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (*s*, *w*, *s*) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$ gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge.

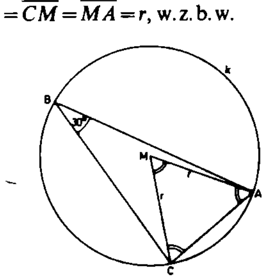
b) Dem Quadrat $ABCD$ sei ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist.



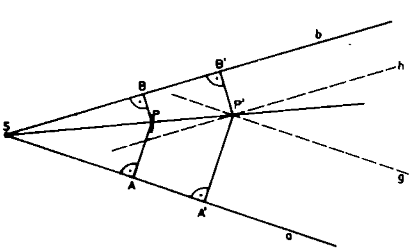
FG schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q (siehe Bild). Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\sphericalangle CAB = 45°$. Wegen $EF \parallel AC$ folgt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FEB = 45°$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\sphericalangle FEH = 90°$ folgt $\sphericalangle HEA = 45°$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $\overline{AQ} = \overline{QE}$.
Analog gilt $\overline{AQ} = \overline{HQ}$, also $\overline{EH} = 2\overline{AQ}$. Entsprechend folgt $\overline{FG} = 2\overline{CP}$. Wegen $\overline{EH} = \overline{FG}$ folgt hieraus $\overline{AQ} = \overline{CP}$. Schließlich gilt wegen $EF \parallel QP$ und $EQ \parallel FP$ auch $\overline{EF} = \overline{QP}$.
Für den Umfang u des Rechtecks $EFGH$ gilt folglich:
$u = 2(\overline{EF} + \overline{EH}) = 2(\overline{QP} + \overline{AQ} + \overline{CP}) = 2\overline{AC}$.
Der Umfang jedes derartigen Rechtecks $EFGH$ beträgt somit 20,0 cm.

Klassenstufe 8

1. Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k. Der Winkel $\sphericalangle AMC$ hat nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel die Größe 60°. Hieraus, und da das Dreieck AMC wegen $\overline{AM} = \overline{MC} = r$ gleichschenklig ist, folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = 60°$, d. h. das Dreieck AMC ist gleichseitig, und es ist $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MA} = r$, w. z. b. w.



2. I. Es sei P ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B. Dann gilt $\overline{PA} = 2\overline{PB}$, d. h. $\overline{PA} : \overline{PB} = 2:1$.
Ist h eine beliebige Parallele zu b auf der Seite von b, auf der a liegt, so schneidet sie den Strahl aus S durch P in einem Punkt P' (ein Beweis dieser Aussage wird vom Schüler nicht verlangt). Die Fußpunkte der Lote von



P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach dem Strahlensatz gilt dann
$\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{SP'} : \overline{SP}$ und $\overline{P'B'} : \overline{PB} = \overline{SP'} : \overline{SP}$, also $\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{P'B'} : \overline{PB}$. Hieraus folgt $\overline{P'A'} : \overline{P'B'} = \overline{PA} : \overline{PB} = 2:1$.
Somit hat die Parallele g zu a durch P' doppelt so großen Abstand von a wie h von b. Diese Parallele g liegt auf der Seite von a, auf der b liegt.
II. Deshalb entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
1. Man zieht eine beliebige Parallele h zu b auf der Seite von b, auf der a liegt.
2. Man konstruiert in doppelt so großem Abstand von a, wie ihn h von b hat, die Parallele g zu a auf der Seite von a, auf der b liegt.
Schneiden sich g und h im Innern des gegebenen Winkels, so sei der Schnittpunkt P' genannt.
3. Um S beschreibt man einen Kreis mit einem Radius von 5,0 cm. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl aus S durch P' sei P genannt.
III. Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B; die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach Konstruktion gilt $\overline{P'A'} : \overline{PB} = \overline{SP'} : \overline{SP}$, also $\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{P'B'} : \overline{PB}$. Hieraus folgt $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{P'A'} : \overline{P'B'} = 2:1$, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktion erfüllt P auch (2). Schließlich liegt P' (nach Konstruktion) und daher auch P im Innern des gegebenen Winkels.
IV. Die Konstruktionsschritte 1., 2. sind eindeutig ausführbar; die Geraden g und h schneiden sich, und zwar im Innern des gegebenen Winkels (ein Beweis dieser Aussage wird vom Schüler nicht verlangt). Hierauf ist auch Konstruktionsschritt 3 eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt P, der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
3. Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann lautet sie

$$\frac{9}{91} = \frac{x}{7} - \frac{y}{13},$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit
$0 < x < 7$
und $0 < y < 13$ sind.
Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher

$$13x - 7y = 9, \quad 7y = 13x - 9, \quad y = \frac{13x-9}{7}.$$

Wir erhalten für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

x	$13x$	$13x-9$
1	13	4
2	26	17
3	39	30
4	52	43
5	65	56
6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar

$$y = \frac{13x-9}{7} = \frac{56}{7} = 8.$$

Somit kann nur die Darstellung

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13}$$ den Bedingungen

der Aufgabenstellung genügen.
Sie erfüllt diese Bedingung; denn $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{13}$ sind positive echte Brüche, und es gilt $\frac{5}{7} - \frac{8}{13} = \frac{65}{91} - \frac{56}{91} = \frac{9}{91}$.
Laut Aufgabentext erhält man aus dem Ansatz $\frac{9}{91} = \frac{x}{13} - \frac{y}{7}$ eine weitere Lösung:

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{13} - \frac{2}{7}.$$

4. a) Die Anzahl der Pioniere, die je genau 13 kg sammelten, sei x. Nach (1) gehören dann genau $(x+1)$ Pioniere der Brigade A an, das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(13x+6)$ Kilogramm. Die Anzahl der Pioniere, die je genau 10 kg sammelten, sei y. Nach (2) gehören dann genau $(y+1)$ Pioniere der Brigade B an, und das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(10y+5)$ Kilogramm.
Nach (3) gilt somit $13x + 6 = 10y + 5$,

also $$y = \frac{13x+1}{10}, \qquad (*)$$

$13x+1$ ist durch 10 teilbar, folglich endet die (Ziffernddarstellung der) Zahl $13x$ auf die Ziffer 9 und somit x auf die Ziffer 3.
Aus (4) folgt $100 < 2(13x+6) < 600$
und daraus $44 < 13x < 294$.
Dies wird weder von $x = 3$ noch von $x = 23$ erfüllt, da hierfür $13x = 39$ bzw. $13x = 299$ gilt. Also ist $x = 13$. Nach (*) ergibt sich daraus $y = 17$.
Somit gehörten genau 14 Schüler der Brigade A und genau 18 der Brigade B an.
b) Brigade A sammelte $(13 \cdot 13 + 6)$ kg $= 175$ kg und Brigade B $(17 \cdot 10 + 5)$ kg $= 175$ kg, die gesamte Gruppe somit 350 kg Altpapier.
Wegen $350 \cdot 0{,}15$ M $= 52{,}50$ M konnte die Pioniergruppe genau 52,50 M auf das Solidaritätskonto überweisen.
5. Angenommen, es gibt drei derartige Primzahlen. Dann kann wegen $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ die Primzahl P_1 nur eine der Zahlen 3, 5, 11 sein.
1. Fall: Es sei $P_1 = 3$, dann ist $P_2 + P_3 = 55$. (2)
Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur dann ungerade, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Deshalb, wegen $P_2 > P_3$ und weil 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann höchstens $P_2 = 53$; $P_3 = 2$ die Lösung von (2) sein. Da diese beiden Zahlen Primzahlen sind, ist das Tripel [3; 53; 2] eine Lösung.
2. Fall: Es sei $P_1 = 5$, dann ist $P_2 + P_3 = 33$, (3) und analog wie im Fall 1 ist höchstens $P_2 = 31$; $P_3 = 2$ Lösung von (3). Da 31 und 2 Primzahlen sind, ist das Tripel [5; 31; 2] ebenfalls eine Lösung.
3. Fall: Es sei $P_1 = 11$, dann ist $P_2 + P_3 = 15$, (4) und analog zum Fall 1 ist höchstens $P_2 = 13$; $P_3 = 2$ Lösung von (4). Da 13 und 2 Primzahlen sind, erfüllt auch das Tripel [11; 13; 2] die Gleichung (1).

Somit sind genau die drei Tripel
[3; 53; 2], [5; 31; 2], [11; 13; 2] Lösung von (1).

6. Es seien folgende Bezeichnungen verwendet:

	Eichen-platte	Stahl-platte
Masse	m_E	m_S
Dichte	ϱ_E	ϱ_S
Volumen	V_E	V_S
Inhalt der Dreieckfläche	A_E	A_S
Dicke	h	h

Dann ist

(1) $m_E = A_E \cdot h \cdot \varrho_E,$

(2) $m_S = A_S \cdot h \cdot \varrho_S,$

sowie nach Voraussetzung

(3) $\varrho_E = \frac{1}{10}\varrho_S$ und

(4) $A_E = \frac{120}{100}A_S.$

Die Masse der Stahlplatte sei $x\%$ der Masse der Eichenplatte. Dann gilt

$$m_S = \frac{x}{100}m_E.$$

Folglich ist wegen (1), ..., (4):

$$x = \frac{m_S}{m_E}100 = \frac{A_S \cdot h \cdot \varrho_S \cdot 100}{A_E \cdot h \cdot \varrho_E}$$
$$= \frac{A_S \cdot h \cdot \varrho_S \cdot 100}{\frac{120}{100} \cdot A_S \cdot h \cdot \frac{1}{10} - \varrho_S}$$
$$= \frac{10000}{12} = \frac{2500}{3} = 833\frac{1}{3}.$$

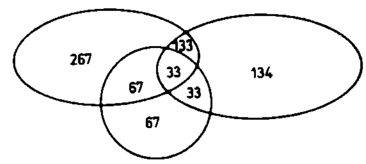
Die Masse der Stahlplatte ist um $\left(833\frac{1}{3} - 100\right)\% = 733\frac{1}{3}\%$ größer als die der Eichenplatte.

Klassenstufe 9

1. Wegen $1000:2 = 500$ gibt es 500 Zahlen in diesem Bereich, die durch 2 teilbar sind. Wegen $333 < 1000:3 < 334$ gibt es 333 Zahlen in diesem Bereich, die durch 3 teilbar sind.
Entsprechend erhält man
Eichenplatte.
wegen [1]) $1000:5 = 200$ genau 200 Zahlen, die durch 5, wegen [1]) $166 < 1000:6 < 167$ genau 166 Zahlen, die durch 2 und 3, wegen [1]) $1000:10 = 100$ genau 100 Zahlen, die durch 2 und 5, wegen [1]) $66 < 1000:15 < 67$ genau 66 Zahlen, die durch 3 und 5 und wegen [1]) $33 < 1000:30 < 34$ genau 33 Zahlen, die durch 2, 3 und 5 teilbar sind.
Daraus folgt:
Teilbar durch
2 und 3, aber nicht durch 5 sind $166 - 33 = 133$ Zahlen,
2 und 5, aber nicht durch 3 sind $100 - 33 = 67$ Zahlen,
3 und 5, aber nicht durch 2 sind $66 - 33 = 33$ Zahlen,
2, aber weder durch 3 noch durch 5 sind $500 - (33 + 133 + 67) = 267$ Zahlen,
3, aber weder durch 2 noch durch 5 sind $333 - (33 + 133 + 33) = 134$ Zahlen,
5, aber weder durch 2 noch durch 3 sind $200 - (33 + 67 + 33) = 67$ Zahlen.

Damit gibt es in diesem Bereich insgesamt $33 + 133 + 67 + 33 + 267 + 134 + 67 = 734$ Zahlen, die durch 2, 3 oder 5 teilbar sind. Also sind $1000 - 734 = 266$ Zahlen von 1 bis 1000 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Lösungsweg sei durch das Mengendiagramm zusätzlich veranschaulicht:

teilbar durch 2 teilbar durch 3



teilbar durch 5

1) Ausführung des Schlusses „Sind a, m natürliche Zahlen mit $a \leqq 1000 : m < a + 1$, so gibt es genau a Zahlen im Bereich von 1 bis 1000, die durch m teilbar sind": Wegen $am \leqq 1000 < (a+1)m$ ist die größte unter den durch m teilbaren Zahlen des Bereichs von 1 bis 1000 die Zahl am. Alle diese Zahlen sind folglich $1 \cdot m, 2 \cdot m, \ldots, a \cdot m$. Daher ist ihre Anzahl a.

2. Durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\sphericalangle ABC$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als Radius genau zwei Schnittpunkte. Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B; dieser sei D genannt, der andere D^*. Die Konstruktion ergibt, daß $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\sphericalangle ABC$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt.

(I) Angenommen nun, ein Rechteck $EFGH$ habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann ist $AEFC$ nach (2), (3) ein Viereck mit rechten Winkeln bei A, E und F, also ein Rechteck. Die Seite EF ist somit parallel und gleichlang zur Strecke AC. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$, nach (1) also auch $EFGH$, den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DD'} = \overline{AC} \cdot \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$$
$$= \overline{EF} \cdot \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'}).$$

Daraus folgt $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$.

Hiernach und wegen (2) hat A von E einen Abstand, der kleiner ist als $\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$; ferner ist $E \neq A$ und liegt nach (3) auf der in A auf AC errichteten Senkrechten.

(II) Daher kann ein Punkt nur dann als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(4) Man errichtet die Senkrechte s in A auf AC.

(5) Man fällt die Lote BB' und DD' von B bzw. D auf AC.

(6) Von A aus trägt man auf s nach beiden Seiten die Strecken AX_1 bzw. AX_2 der Länge $\frac{1}{2}\overline{BB'}$ ab und verlängert sie über X_1 bzw. X_2 hinaus um $\frac{1}{2}\overline{DD'}$ bis zu Y_1 bzw. Y_2.

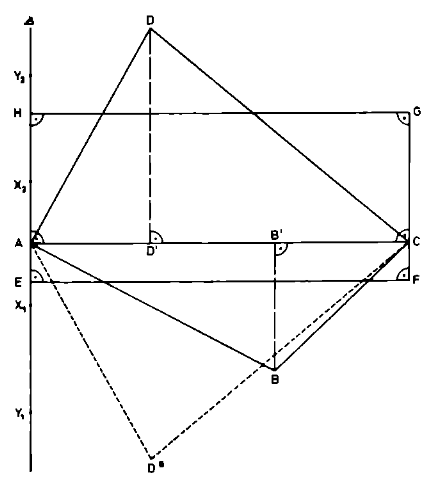
(7) Man wählt E auf der Strecke Y_1Y_2 verschieden von A, Y_1, Y_2 und sonst beliebig.

(III) Beweis, daß jeder so erhaltene Punkt E Eckpunkt eines Rechtecks $EFGH$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) ist:

Nach (5), (6), (7) ist $\overline{AE} < \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$ und $E \neq A$. Daher gibt es auf der Verlängerung von EA über A hinaus einen Punkt H mit $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$. Die Parallelen durch E bzw. H zu AC schneiden die Parallele durch C zu s in F bzw. G. So entsteht ein Rechteck $EFGH$, das (2), (3) erfüllt. Darin ist $EFCA$ ein Rechteck, also gilt $\overline{EF} = \overline{AC}$. Damit hat $EFGH$ den Flächeninhalt

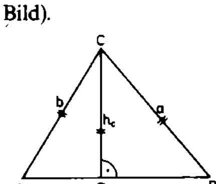
$$\overline{EF} \cdot \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DD'},$$

d. h. denselben Flächeninhalt wie $ABCD$ und erfüllt demnach (1).



3. Für die Lage des Punktes D sind nur die beiden folgenden Fälle möglich.

Fall 1: Punkt D liegt zwischen A und B (siehe Bild).



Ein Dreieck ABC mit dieser Eigenschaft, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, kann wegen $h_c < a$ und $h_c < b$ durch Konstruktion der rechtwinkligen Teildreiecke CDA und CDB auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und D erhalten werden.

Für seinen Flächeninhalt I gilt

$$I = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot \overline{CD}.$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun:

$$\overline{AD} = \sqrt{b^2 - h_c^2}\ \text{cm} = \sqrt{169 - 144}\ \text{cm}$$
$$= \sqrt{25}\ \text{cm} = 5\ \text{cm, sowie}$$

$\overline{DB}=\sqrt{a^2-h_c^2}\text{ cm}=\sqrt{225-144}\text{ cm}$

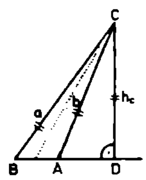
$=\sqrt{81}\text{ cm}=9\text{ cm}$ und somit

$$I=\frac{1}{2}(5+9)\cdot 12\text{ cm}^2=84\text{ cm}^2.$$

Fall 2: Punkt D liegt nicht zwischen A und B (siehe Bild). Da wiederum nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\overline{BD}=\sqrt{a^2-h_c^2}\text{ cm}=9\text{ cm}$, sowie $\overline{AD}=\sqrt{b^2-h_c^2}\text{ cm}=5\text{ cm}$ und somit $\overline{BD}>\overline{AD}$ gilt, so entsteht auch für den vorliegenden Fall durch Konstruktion von Dreiecken CDA, CDB, diesmal aber auf derselben Seite der Geraden durch C und D, ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Für seinen Flächeninhalt I gilt

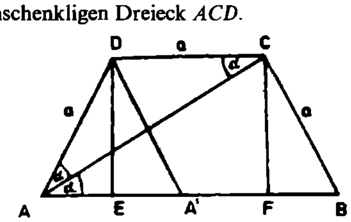
$$I=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{BD}-\overline{AD})\cdot\overline{CD},$$

$$I=\frac{1}{2}(9-5)\cdot 12\text{ cm}^2=24\text{ cm}^2.$$



4. Es sei $\overline{\sphericalangle DAC}=\alpha$.

a) Dann ist $\overline{\sphericalangle DCA}=\alpha$, als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD.



Ferner gilt $\overline{\sphericalangle CAB}=\alpha$, da $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACD$ Wechselwinkel an Parallelen sind.

Folglich gilt $\overline{\sphericalangle DAC}=\overline{\sphericalangle CAB}$, also halbiert AC den Winkel $\sphericalangle DAB$.

b) Es seien E und F die Fußpunkte der von D bzw. C auf AB gefällten Lote. Wegen $\alpha=60°$ liegen E und F zwischen A und B. Spiegelt man AD an DE und ist A' der Bildpunkt von A bei dieser Spiegelung, so liegt A' wegen $DE\perp AB$ auf der Geraden durch A und B, und wegen $\overline{\sphericalangle DAA'}=\overline{\sphericalangle DA'A}=60°$ ist das Dreieck $AA'D$ gleichseitig.

Wegen $\overline{AE}=\overline{A'E}$ gilt $\overline{AE}=\frac{a}{2}$.

Entsprechend folgt $\overline{FB}=\frac{a}{2}$. Da $EFCD$ ein Rechteck ist, gilt $\overline{EF}=\overline{DC}=a$.

Somit ist $\overline{AB}=\frac{a}{2}+a+\frac{a}{2}=2a$.

5. Sei x die kleinste der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dann ist das um 1 vergrößerte Produkt der vier Zahlen die Zahl

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=x^4+6x^3+11x^2+6x+1 \qquad (1)$$

Ferner ist x^2+3x+1 eine natürliche Zahl, und diese hat das Quadrat $(x^2+3x+1)^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$, also dieselbe Zahl wie in (1).

Damit ist die Behauptung bewiesen.

6. a) Nach Definition von d_2 ist $x_2\leqq d_2$; nach Definition von d_3 ist $x_3\leqq d_3$. Hiernach gilt $x_2+x_3\leqq d_2+d_3$; aus der Voraussetzung $x_1\leqq x_2+x_3$ folgt daher

$$x_1\leqq d_2+d_3. \qquad (1)$$

Nach Definition von d_2 ist $y_2\leqq d_2$; nach Definition von d_3 ist $y_3\leqq d_3$. Hiernach gilt $y_2+y_3\leqq d_2+d_3$; aus der Voraussetzung $y_1\leqq y_2+y_3$ folgt daher

$$y_1\leqq d_2+d_3. \qquad (2)$$

Nach seiner Definition ist d_1 eine der beiden Zahlen x_1, y_1. Daher ist d_1 die linke Seite in einer der beiden Ungleichungen (1), (2), und diese besagt somit $d_1\leqq d_2+d_3$, w.z.b.w.

b) Die in b) genannte Aussage gilt nicht. Zum Beweis genügt die Angabe eines Gegenbeispiels:

Es sei z. B. $x_1=2$; $x_2=1$ und $x_3=0$, sowie $y_1=0$; $y_2=2$ und $y_3=1$. Diese Zahlen erfüllen die Voraussetzungen

$$x_1\neq y_1,\ x_2\neq y_2,\ x_3\neq y_3.$$

Für sie ist ferner $d_1=2$, $d_2=2$ und $d_3=1$ laut Definition von d_i. Es gilt also $d_1\leqq d_2+d_3$, aber offensichtlich nicht

$$x_1\leqq x_2+x_3.$$

Klassenstufe 10

1. Es sei o.B.d.A. $a\leqq b$. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^n=(2b)^n\\(a+b)^n=2^nb^n\end{array}\right\},$$ da a durch eine höchstens größere Zahl ersetzt wurde.

Ferner gilt (*)

$(a+b)^n\leqq 2^nb^n+2^na^n$, da auf der größeren Seite eine positive Zahl addiert wurde, also auch

$(a+b)^n\leqq 2^n(a^n+b^n)$, w.z.b.w.

(Ab (*) kann sogar < geschrieben werden)

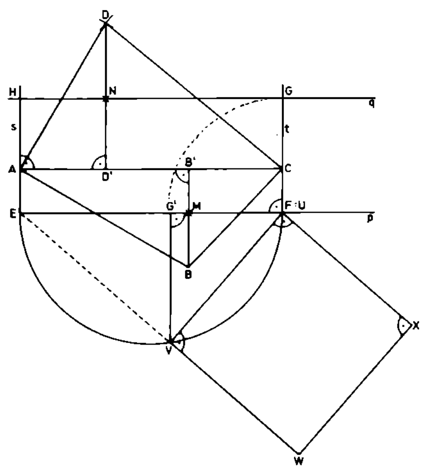
2. Durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{\sphericalangle ABC}$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als Radius genau zwei Schnittpunkte. Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B; dieser sei D genannt, der andere D^*. Die Konstruktion ergibt, daß $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{\sphericalangle ABC}$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$ den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BB'}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DD'}=\overline{AC}\cdot\frac{1}{2}(\overline{BB'}+\overline{DD'}).$$

Daher hat ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AC}$ und $\frac{1}{2}(\overline{BB'}+\overline{DD'})$ denselben Flächeninhalt. Sind M, N die Mittelpunkte von BB' bzw. DD', so haben die Parallelen zu AC durch M bzw. N den Abstand $\frac{1}{2}(\overline{BB'}+\overline{DD'})$ voneinander. Daher entsteht durch diese Parallelen und durch die in A bzw. C auf AC errichteten Senkrechten ein Rechteck $EFGH$, das die genannten Längen als Seitenlängen hat.

Ist etwa $\overline{EF}>\overline{FG}$, liegt G' so auf EF, daß $\overline{FG'}=\overline{FG}$ gilt und ist EFV ein bei V rechtwinkliges Dreieck, für das VG' das Lot von V auf EF ist, so ist nach dem Kathetensatz $\overline{FV}^2=\overline{EF}\cdot\overline{FG'}=\overline{EF}\cdot\overline{FG}$, also ein über FV errichtetes Quadrat zu $EFGH$ flächeninhaltsgleich.

Daher führt (z. B.) die folgende Konstruktion zu der gesuchten Länge $\overline{UV}$:



(1) Man konstruiert die Parallelen p bzw. q durch die Mittelpunkte M bzw. N von BB' bzw. DD' zu AC.

(2) Man errichtet die Senkrechten s bzw. t in A bzw. C auf AC.

(3) Die Parallele p schneidet s bzw. t in E bzw. F; q schneidet s bzw. t in H bzw. G. Hierbei wird $EFGH$ ein Rechteck mit $\overline{EF}>\overline{FG}$.

(4) Der Kreis um F durch G schneidet EF in G'.

(5) Die Senkrechte in G' auf EF schneidet einen Halbkreis über EF in V.

(6) Man setze $F=U$. Die Strecke UV hat die geforderte Länge; ein über ihr errichtetes Quadrat $UVWX$ ist zu $ABCD$ flächeninhaltsgleich.

3. Es gilt $2-\sqrt{3}>0$, also ist $\lg(2-\sqrt{3})$ definiert. Ferner gilt

$$(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+3$$
$$=7-4\sqrt{3},$$

also ist auch $7-4\sqrt{3}>0$ und folglich $\lg(7-4\sqrt{3})$ definiert. Ferner ist $2-\sqrt{3}\neq 1$, also $\lg(2-\sqrt{3})\neq 0$; somit wird durch den gegebenen Term eine Zahl z definiert, und für sie folgt außerdem

$$z=\frac{\lg(2-\sqrt{3})^2}{\lg(2-\sqrt{3})},\text{ also}$$

$$z=\frac{2\lg(2-\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}=2.$$

Daher haben Jens und Dirk recht, Uwe und Peter haben nicht recht.

4. Angenommen, es gibt eine derartige Primzahl p, dann ist mit einer natürlichen Zahl z

$$3p+4=z^2,\text{ also}$$
$$3p=z^2-4,$$
$$3p=(z+2)(z-2).$$
Da $3p$ und $z+2$ positiv sind, ist auch $z-2$ eine positive ganze Zahl. Die einzigen Möglichkeiten, $3p$ in positiv ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, bestehen aber darin, daß die Faktoren entweder 1 und $3p$ oder 3 und p lauten. Ferner haben $z+2$ und $z-2$ die Differenz 4 voneinander. Daher würde die Zerlegung mit 1 als Faktor auf 5 als zweiter Faktor führen und somit nicht auf einen Faktor der Form $3p$. Also bleibt nur die Möglichkeit, daß ein Faktor 3 und folglich der andere $p=7$ lautet. Tatsächlich erfüllt $p=7$ die Bedingung $3\cdot 7+4=25=5^2$. Die einzige Primzahl, die die gestellte Bedingung erfüllt, ist 7.

5. Die Anzahl der geraden unter den 101 ausgewählten Zahlen sei m. Dann ist $(101-m)$ die Anzahl der ungeraden unter den ausgewählten Zahlen. Dividiert man jede der m geraden Zahlen jeweils durch die höchste in ihr enthaltene Zweierpotenz, so erhält man als Quotienten m ungerade Zahlenangaben. Zusammen mit den zuvor genannten $101-m$ ungeraden Zahlen hat man somit eine Angabe von 101 ungeraden Zahlen. Da sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 nur 100 ungerade befinden, müssen mindestens zwei der angegebenen 101 ungeraden Zahlen einander gleich sein. Die ausgewählten Zahlen, aus denen diese beiden übereinstimmenden ungeraden Zahlenangaben gewonnen wurden, unterscheiden sich daher in ihrer Primzerlegung nur um eine Potenz von 2. Die größere von beiden Zahlen ist mithin ein ganzzahliges Vielfaches der kleineren, was zu zeigen war.

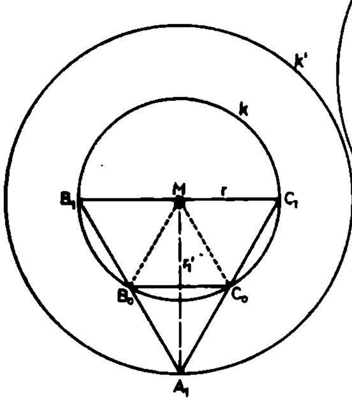
6. a) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, das (1) erfüllt, ist genau dann maximal, wenn $\overline{BC}$ maximal ist. Nun gibt es im Kreis k Sehnen BC maximaler Länge, nämlich genau die Durchmesser. Also ist die Existenz von Dreiecken ABC, die (1) erfüllen und maximalen Flächeninhalt haben, bewiesen, wenn noch folgendes gezeigt ist: Wenn B_1C_1 ein Durchmesser von k ist, $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck und k' der zu k konzentrische Kreis durch A_1 ist, so ist sein Radius r' größer als r. Dies trifft in der Tat zu; denn es folgt $\overline{B_1C_1}=2r$ und, wenn M den Mittelpunkt von k bezeichnet, $\overline{MA_1}=r\sqrt{3}$ als Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$. Zugleich ist damit dieser Wert $r'=r\sqrt{3}$ als einzig möglicher in a) genannter Wert für r' nachgewiesen, und als maximaler Flächeninhalt ergibt

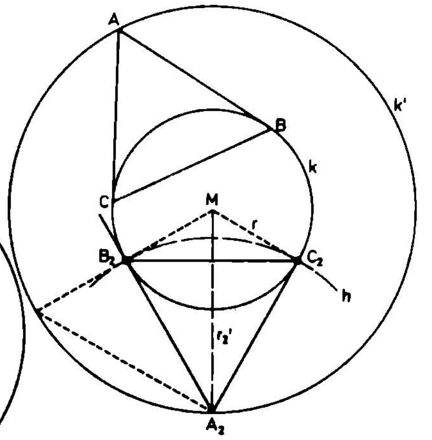
sich $\quad F_1=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}\cdot\overline{MA_1}=r^2\sqrt{3}.$

b) Sind M, r'_1, $A_1B_1C_1$ wie in a), so schneiden die Geraden durch A_1 und B_1 bzw. C_1 den Kreis k jeweils noch ein zweites Mal, da sie einen Punkt außerhalb k mit je einem Punkt auf k verbinden und nicht auf MB_1 bzw. MC_1 senkrecht stehen. Der jeweils erhaltene zweite Schnittpunkt sei B_0 bzw. C_0. Bei Spiegelung an der Geraden durch A_1 und M geht B_1 in C_1 über, A_1 und k gehen in sich über, also geht B_0 in C_0 über.
Daher ist $\triangle A_1B_0C_0$ gleichschenklig mit $\overline{A_1B_0}=\overline{A_1C_0}$, wegen $\sphericalangle B_0A_1C_0=60°$ sogar gleichseitig, folglich erfüllt es (1) und ist außer $A_1B_1C_1$ das einzige Dreieck A_1BC, das (1) erfüllt. Weiter ist $\triangle MB_1B_0$ gleichschenklig mit $\overline{MB_1}=\overline{MB_0}$, wegen $\sphericalangle MB_1B_0=60°$ sogar gleichseitig; dasselbe gilt für $\triangle MC_1C_0$. Daher wird auch $\triangle MB_0C_0$ mit $\overline{MB_0}=\overline{MC_0}$ und $\sphericalangle B_0MC_0=60°$ gleichseitig, folglich ist $\overline{B_0C_0}=r$, und $\triangle A_1B_0C_0$ hat den (damit eindeutig bestimmten) Flächeninhalt $F_0=\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}<F_1$.

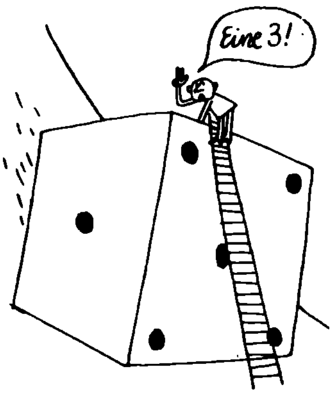
c) Für jeden überhaupt zu betrachtenden Wert von r' gilt:
Ist A_2 irgendein Punkt auf k' und ist ABC irgendein Dreieck, das (1) für dieses r' erfüllt, so geht dieses durch eine geeignete Drehung um M in ein Dreieck $A_2B_2C_2$ über, das ebenfalls (1) für dieses r' erfüllt. Daher hat ein Wert r' genau dann die in c) genannte Eigenschaft, wenn für einen einzigen Punkt A_2 auf k' alle Dreiecke $A_2B_2C_2$, die (1) für r' erfüllen, dieselbe Seitenlänge haben. Damit ist gleichwertig, daß es genau einen Kreis h um A_2 gibt, der k in zwei Punkten B_2, C_2 mit $\overline{B_2C_2}=\overline{A_2B_2}$ oder, wegen $\overline{A_2B_2}=\overline{A_2C_2}$ äquivalent hierzu, mit $\sphericalangle B_2A_2C_2=60°$ schneidet. Nun gehen k und jeder Kreis h um A_2 bei Spiegelung an der Geraden durch A_2 und M in sich über; daher ist die zuletzt genannte Forderung äquivalent mit $\sphericalangle MA_2B_2=30°$. Also hat r' genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ein Strahl aus A_2, der mit A_2M einen Winkel von 30° bildet, mit dem Kreis k genau einen Punkt B_2 besitzt, d. h. Tangente an k ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß r' die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck ist, in dem eine Kathete r und der ihr gegenüberliegende Winkel 30° beträgt. Durch diese Forderung ist, wie behauptet, genau ein Wert r'_2 bestimmt, und zwar ergibt sich:
Spiegelt man ein solches Dreieck MA_2B_2 an der Geraden durch M und B_2, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck; folglich gilt $r'_2=\overline{MA_2}=2\overline{MB_2}=2r$. Die Höhenlänge $\overline{A_2B_2}=r\sqrt{3}$ dieses Dreiecks ist die Seitenlänge von $\triangle A_2B_2C_2$; folglich beträgt

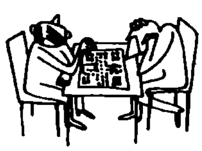
$$F_2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2\sqrt{3}=\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

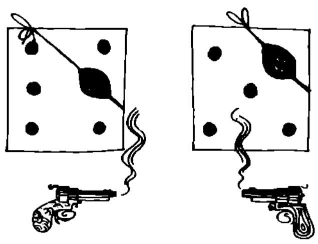




„Frühlingsanfang" (20./21. 3. 78) während der beiden Klausurtage der XVII. Olympiade Junger Mathematiker in der Jugendhochschule *Wilhelm Pieck*, Berlin-Bogensee (siehe S. 63)





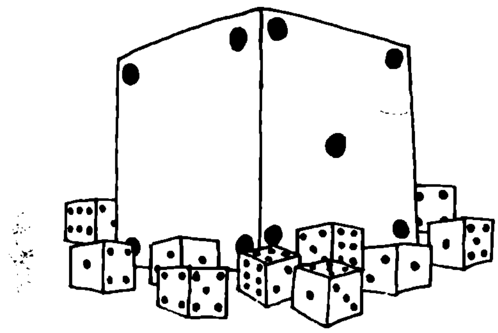


Auge um Auge ...

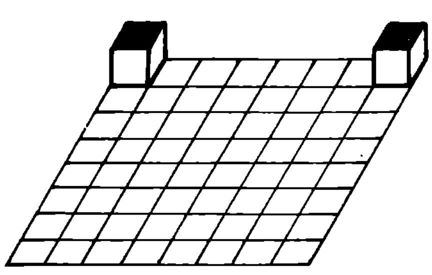
Karikaturen von Barbara Henniger

alpha - Spielmagazin

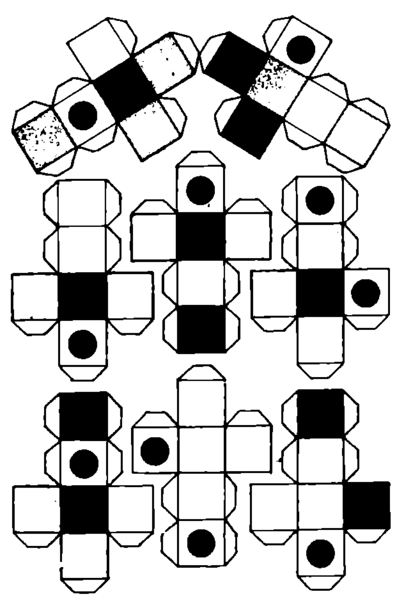
Würfeleien



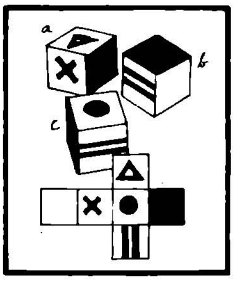
▲8▲ *John Harris* aus Santa Barbara (USA) fand ein Spiel, die „Reise des rollenden Würfels“. Um die „Reise“ durchführen zu können, markieren wir einen Würfel auf einer Seitenfläche farbig, etwa rot. Diesen Würfel bewegen wir von einem Feld des Schachbretts auf das angrenzende, indem wir ihn über eine Kante kippen. *Nun die Aufgabe:* Lege den Würfel auf die linke obere Ecke des Schachbretts, mit der grünen Seite nach oben! Bewege ihn durch Kippen von Feld zu Feld so über das Brett, daß er wieder mit der roten Seite nach oben auf dem rechten oberen Feld zu liegen kommt! Dabei darf jedes Feld des Brettes höchstens einmal berührt werden. Während seiner Reise von der einen zur anderen Ecke darf der Würfel niemals – so lautet die Spielregel – mit seiner grünen Seite nach oben liegen.



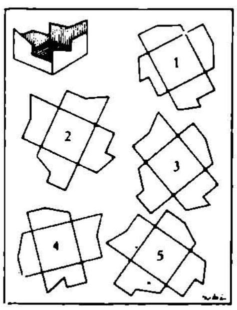
▲3▲ Die beiden *Frösi*-Mitarbeiter *D. Wilkendorf* und *O. Sperling* empfehlen: Schneide die acht Teile aus, und klebe sie zu einzelnen Würfeln zusammen (oder bastle sie selbst aus Zeichenkarton)! Die so entstandenen kleinen Würfel müssen um zu einem großen Würfel zusammengesetzt werden, wobei an den sichtbaren Seiten *in keinem Fall zwei gleiche Muster* aneinanderstoßen dürfen.



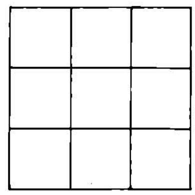
▲1▲ Einer der drei mit Buchstaben bezeichneten Würfel läßt sich aus dem darunter abgebildeten Netz herstellen. Welcher?



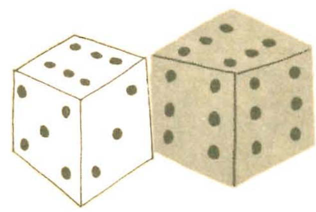
▲2▲ Durch eines der fünf Netze läßt sich die gezeichnete Basis zu einem Würfel ergänzen. Welches?



▲9▲ *Das magische Quadrat:* Unterteile ein Quadrat (auf der unteren Seite farbig) in neun Quadrate, wie es das Bild zeigt. Man kann nun das Papier an den dabei gezeichneten Linien entlang so aufschneiden, daß es sich (ebenfalls an diesen Linien) zu einem Würfel zusammenfalten läßt, der an der Außenseite völlig grün ist. Zu beachten ist, daß das Papierquadrat auch nach dem Aufschneiden noch ein einziges, zusammenhängendes Stück bilden muß, und daß es nur an den Aufteilungslinien gefaltet werden darf. Wer ist der schnellste Würfelkünstler?

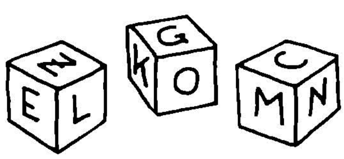


Lösungen zu diesem Ferienheft siehe S.72.



„Ich möchte keinem weh tun!“

▲4▲ Das „rätselhafte π“ aus dem *Magazin* 11/77 empfiehlt ein hübsches Würfelspiel: Wir basteln uns drei Würfel mit insgesamt 18 verschiedenen Buchstaben (oder bekleben vorhandene Spielwürfel entsprechend). Dann wird gewürfelt. Wer aus den von ihm gewürfelten obenliegenden Buchstaben ein Wort bilden kann, erhält einen Punkt, danach würfelt der nächste.

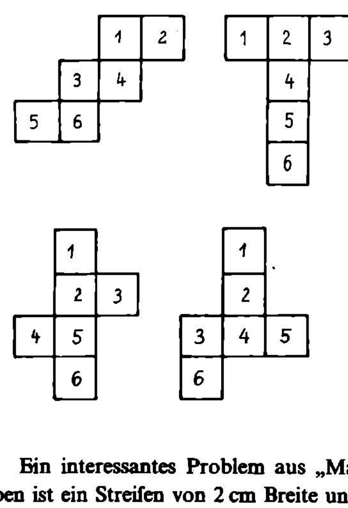


Bei diesem einfachen Spiel ergibt sich eine neue Aufgabe:

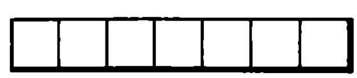
▲5▲ Die drei gezeigten Würfel (siehe oben) haben 18 verschiedene Buchstaben. Es wurde damit siebenmal gewürfelt, bei jedem Wurf ließ sich aus den obenliegenden Buchstaben ein Wort bilden. Es ergaben sich die Worte HUF, TOR, HAI, SAU, REH, NOT, BAR. Jetzt kannst du herausbekommen, welche sechs Buchstaben auf jedem Würfel standen. (Die Hälfte der Buchstaben ist großzügigerweise bereits eingetragen.)

1. Z E L . . .
2. O K G . . .
3. C M N . . .

▲6▲ Ein *Hexomino* ist eine Fläche, bestehend aus sechs Einheitsquadraten, die mit ihren Kanten verbunden sind. Es gibt elf Hexominos, die zu einem Würfel gefaltet werden können. Wer findet sie? Vier von ihnen seien verraten.



▲7▲ Ein interessantes Problem aus „Mathe mit Pfiff“: Gegeben ist ein Streifen von 2 cm Breite und 14 cm Länge. Falte aus ihm einen Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm.



Preisträger

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:

Olympiadeklasse 10

Axel Fröhlich 1
Spezialschule „C. F. Gauß",
Frankfurt (Oder) (Kl. 10)

Grit Werner 2
Humboldt-EOS Magdeburg (Kl. 9)

Olympiadeklasse 11

Bodo Heise 3
Juri-Gagarin-OS Görlitz (Kl. 8)

Steffen Zopf 4
EOS Karl Marx, Leipzig (Kl. 10)

Bernd Kreußler 5
Spezialschule f. Math./Physik der
Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 11)

Olympiadeklasse 12

Thomas Maiwald 6
Spezialklasse für Math./Physik/Technik,
TH Karl-Marx-Stadt (Kl. 12)

Peter Dittrich 7
Spezialschule f. Math./Physik der
Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 12)

Einen zweiten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Andreas Kriegel, IV. OS Ernst Schneller, Hoyerswerda; Lutz Dietrich, EOS Prof. Dr. M. Schneider, Lichtenstein; Thomas Apel, Goethe-EOS Reichenbach; Steffen Ewald, EOS Ernst Schneller, Frankenberg; Andreas Goede, EOS Straußberg (aus Kl. 9); Detlef Horbach, EOS Friedrich Engels, Karl-Marx-Stadt (aus Kl. 9)

In Olympiadeklasse 11: Thomas Gundermann, EOS Hermann Pistor, Sonneberg; Arnd Leike und Andreas Kasparek, beide Spezialkl. Math./Physik der Martin-Luther-Universität Halle

In Olympiadeklasse 12: Uwe Reichel, Spezialschule phys.-techn. Richtung Friedrich Engels, Riesa; Bernd Mulansky und Klaus Schlegel, beide EOS Martin Andersen Nexö, Dresden; Ilja Schmelzer, ABF Walter Ulbricht, Halle; Ferdinand Börner, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Ralf Becker, EOS Werner Seelenbinder, Zielitz; Uwe Schäfer, Spezialschule f. Math./Physik der Humboldt-Universität zu Berlin

Einen dritten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Andreas Radtke, EOS Belzig; Torsten Flade, EOS Bertholt Brecht, Schwarzenberg; Stefan Müller-Pfeiffer, Spezialschule Carl Zeiss Jena (aus Kl. 9); Meik Hellmund, EOS Henflingoberschule, Meiningen; Erasmus Scholz, EOS Martin Andersen Nexö, Dresden; Olaf Gutschker, 1. EOS Dr. Theodor Neubauer, Cottbus; Thomas Bez, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Frank Erdmann, EOS Geschw. Scholl, Zeitz; Bernd König, Thomas-EOS, Leipzig; Egbert Thümmel, BS NEG Nachrichtenelektronik, Greifswald; Michael Giesecke, EOS Martin Andersen Nexö, Dresden (aus Kl. 9); Ingmar Lötzsch, Georg-Friedrich-Händel-OS, Berlin (aus Kl. 9); Jens Galley, Otto-Winzer-OS, (aus Kl. 8) Rainer Jank, EOS Artur Becker, Suhl (aus Kl. 9)

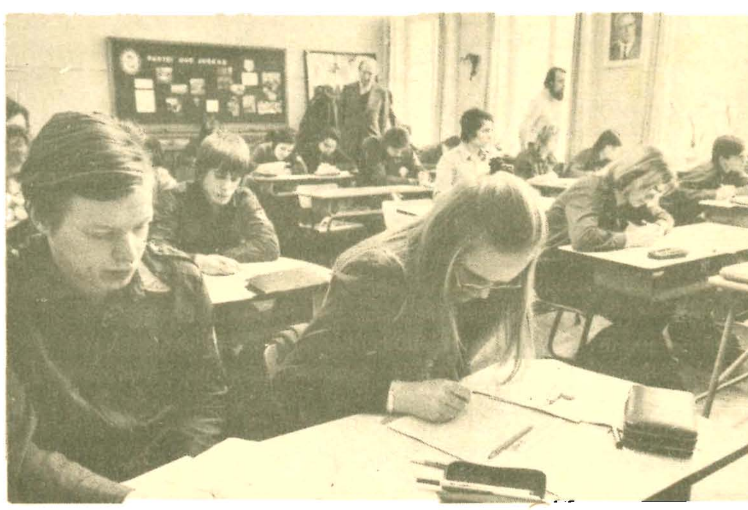
In Olympiadeklasse 11: Uwe Szyszka, EOS Friedrich Engels, Neubrandenburg; Steffen Thiel und Holger Rücker, beide Spezialschule f. Math./Physik der Humboldt-Universität zu Berlin; Dietmar Berthold, EOS Julius Motteler, Crimmitschau; Ralf Hantusch und Frank Bauernöppel, beide EOS Heinrich Hertz, Berlin

In Olympiadeklasse 12: Hans-Dietmar Gröger, ABF Walter Ulbricht, Halle; Harro Rosner, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Michael Handschug, Spezialkl. der TH Leuna-Merseburg; Frank Bergner, ABF Walter Ulbricht, Halle; Peter Bartenstein, EOS Geschw. Scholl, Hildburghausen; Klaus Sievert, EOS Friedrich Engels, Karl-Marx-Stadt

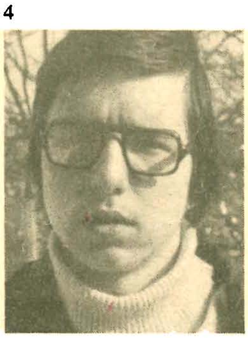
- Ein Diplom für eine besonders elegante Lösung der Aufgabe 5 (Kl. 12) erhielt Friedemann Schuricht, EOS Humboldt, Leipzig
- Weitere 33 Teilnehmer erhielten eine Anerkennungsurkunde für sehr gute Leistungen
- An der DDR-Olympiade nahmen bei insgesamt 208 Teilnehmern 16 Mädchen teil


1


2


Wettbewerbsatmosphäre

3


4


5


6


7


Ein Blick in die Praxis

Der *VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma* projektiert, baut und montiert vor allen Dingen Erdöldestillationsanlagen. Die chemische Industrie erfährt gegenwärtig in allen Ländern einen großen Aufschwung. Besonders der Petrolchemie kommt große Bedeutung zu. Ein Hauptgrund dafür sind die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten der Erdölprodukte.

Das Rohöl wird in der Erdöldestillationsanlage nach unterschiedlichen Siedebereichen und chemisch-physikalischen Eigenschaften zerlegt. Die Produkte gelangen entweder direkt zum Verbrauch, z. B. Kraftstoffe und Heizöle, oder dienen als Grundstoffe der Weiterverarbeitung zu anderen wichtigen Gütern.

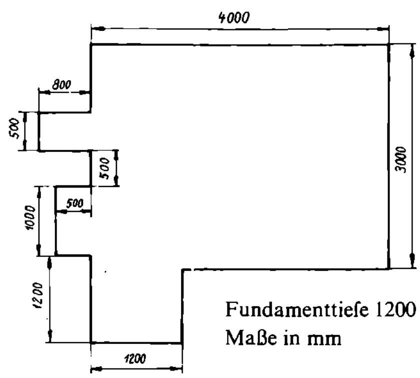
Eine Erläuterung der Anlage gibt in großen Zügen das beigelegte technologische Schema: Das Rohöl gelangt über Wärmeaustauscher in die Entsalzung. Nach erneutem Wärmeaustausch erfolgt in der Vorkolonne unter Druck die Abtrennung eines Leichtbenzin-Flüssiggasgemisches. Nach der Kondensation wird dieses Gemisch in Flüssiggas und Benzin getrennt. Das Sumpfprodukt der Vorkolonne gelangt über den Topofen in die atmosphärische Kolonne. Hier werden unterschiedliche Dieselkraftstoffe abgezogen, mit Wasserdampf gestrippt und nach Abgabe eines Teils ihrer Wärme ins Tanklager geleitet. Das Sumpfprodukt der atmosphärischen Kolonne wird nach Aufheizung im Vakuumofen in der Vakuumkolonne in vier Schmierölfraktionen und den Vakuumrückstand getrennt. Im Bitumenturm wird der Vakuumrückstand in Hochvakuumdestillat und Bitumen zerlegt.

Der Fachberater des Kreises Grimma, Herr *K.-D. Tschiche* und der Fachzirkel der Alfred-Frank-OS Grimma stellten gemeinsam mit den Lehrern der BBS Maschinen- und Apparatebau Grimma für die *alpha*-Leser, nach Klassenstufen geordnet, Aufgaben zusammen und wünschen viel Freude und Erfolg beim Lösen der Probleme aus der Praxis.

▲5▲ Zur Prüfung von Rohrbündelwärmeüberträgern werde in der Kesselschmiede ein Wasserkreislauf geschaffen. Der hierfür gebaute Behälter in Form eines Quaders hat folgende Abmessungen: Länge 6 m, Breite 2 m, Höhe 3,5 m. Für einen Prüfvorgang sollen 4200 l Wasser benötigt werden.
Nach wieviel Prüfvorgängen ist die gesamte Wassermenge umgelaufen:
a) bei vollem Behälter,
b) bei einer Wasserhöhe im Behälter von 2,5 m?

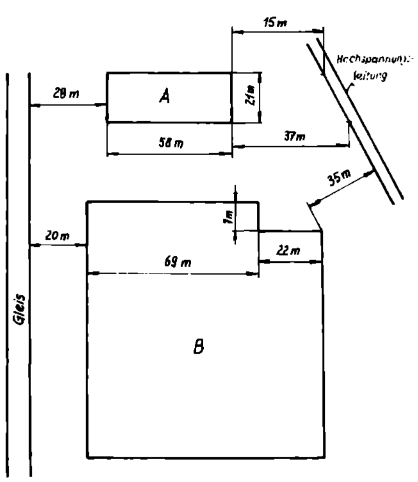
▲5▲ In einer Werkstatt mit den Abmessungen von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen. Die Maschinen und dazugehörigen Arbeiter benötigen jeweils einen Platz von 15 m²; 5 m²; 18 m²; 60 m²; 18 m² und 50 m². Der Platz für die Lagerung und Bereitstellung der Werkstücke an den Maschinen beträgt 16 m²; 6 m²; 17 m²; 26 m²; 15 m² und 20 m². Die restliche Fläche wird für Transportwege benötigt.
Wie breit können die Transportwege ausgeführt werden, wenn ihre gesamte Länge 48 m beträgt?

▲6▲ Berechne die Betonmenge in m³ für das Fundament einer Karusselldrehmaschine, wenn das Fundament folgende Abmessungen hat:



Fundamenttiefe 1200
Maße in mm

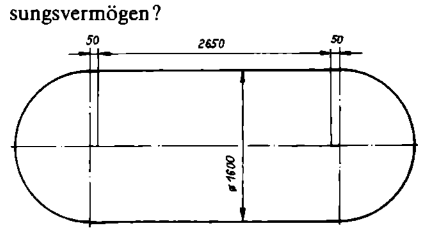
▲6▲ Die Entfernung zwischen dem vorhandenen Gebäude A und dem neu zu errichtenden Gebäude B soll möglichst klein sein. Das Gebäude B muß aber von der in der Nähe befindlichen Hochspannungsleitung und dem Gleis die in der Skizze angegebenen Mindestabstände haben. Die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Gebäuden ist zeichnerisch zu ermitteln! (1 m ist als 1 cm zu zeichnen.)



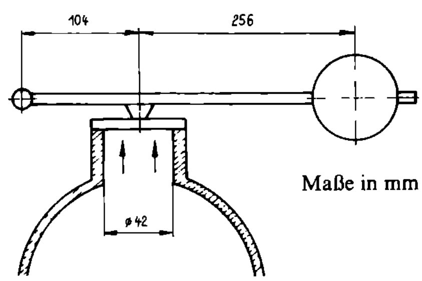
▲7▲ Ein Werkzeugstahl enthält:
0,9% Kohlenstoff, 2% Silizium, 0,2% Mangan, 0,015% Phosphor, 0,005% Schwefel und den Rest Eisen.
Wieviel Kilogramm von jedem Stoff sind in 18 kg Stahl enthalten?

▲7▲ Zum Anreißen von 165 Knotenblechen werden 2 Stunden 45 min gebraucht. Durch Verwendung einer Anreißschablone kann die Arbeitszeit um 90 min verkürzt werden.
a) Wie lange dauert das Anreißen eines Knotenbleches ohne Schablone?
b) Wie lange dauert das Anreißen eines Knotenbleches mit Schablone?
c) Wie groß ist die Steigerung der Arbeitsproduktivität?

▲8▲ Ein Behälter aus einem Hohlzylinder und 2 Halbkugelböden hat die in der Skizze angegebenen Abmessungen (Angabe in mm).
a) Wie groß ist das Fassungsvermögen des Behälters?
b) Wie groß ist die Oberfläche des Behälters?
c) Wie groß sind Durchmesser und Oberfläche eines Kugelbehälters mit gleichem Fassungsvermögen?



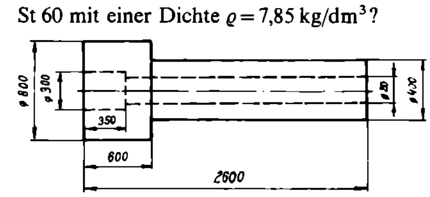
▲8▲ Wie groß muß das Belastungsgewicht des in der Skizze dargestellten Sicherheitsventils eines Dampfkessels sein, wenn es sich beim Überschreiten eines Dampfdrucks von 8 at öffnen soll?
Um welche Hebelart handelt es sich hier?



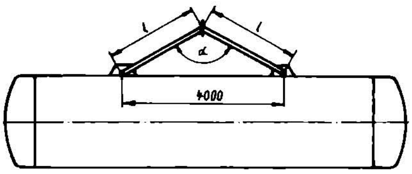
Maße in mm

▲9▲ Beim Schweißen einer Rundnaht an einem Stahlbehälter von 1000 mm Durchmesser werden beim Schweißen von Hand 13 min mehr benötigt als mit der UP-Rundnahtschweißvorrichtung.
Mit welcher Schweißgeschwindigkeit wurde mit der Rundnahtschweißvorrichtung geschweißt, wenn bei der Handschweißung 0,2 m/min benötigt wird?

▲9▲ Welche Masse hat eine Hohlwelle aus St 60 mit einer Dichte $\varrho = 7{,}85$ kg/dm³?



▲10/12▲ **Für den Transport von Rohrbündelwärmeüberträgern (RWÜ) mittels Kran sind an ihnen Tragösen angebracht. Der Abstand der Tragösen betrage 4000 mm. Der Winkel α zwischen den Seilen darf höchstens 120° betragen.**
Wie lang müssen die Seile mindestens sein? Welchen Winkel schließen die Seile ein, wenn die Seillänge $l = 3$ m beträgt?



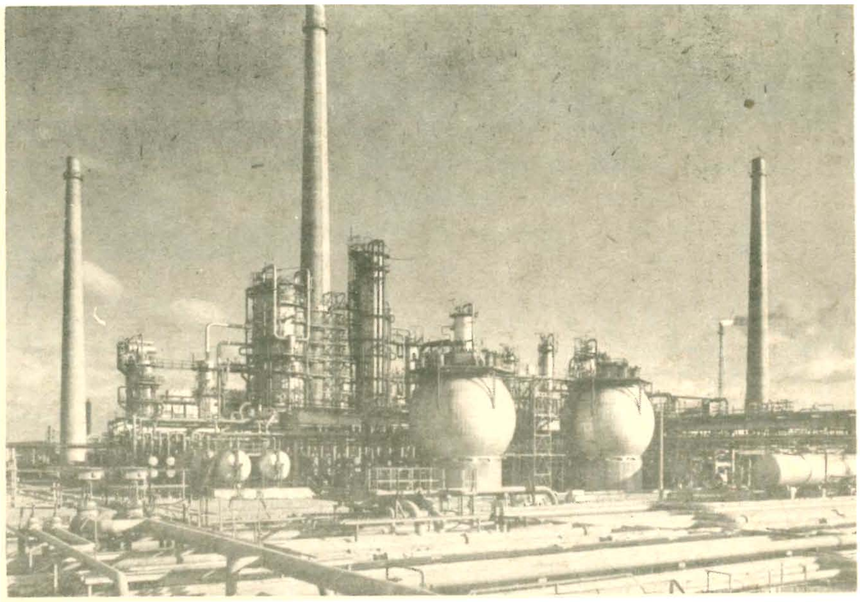
Maße in mm

▲10/12▲ Ein 1800 kp schweres Motorengehäuse soll mit Hilfe einer geneigten Ebene von 3,8 m Länge 1,3 m hoch gehoben werden. Die Reibungszahl beträgt 0,15.

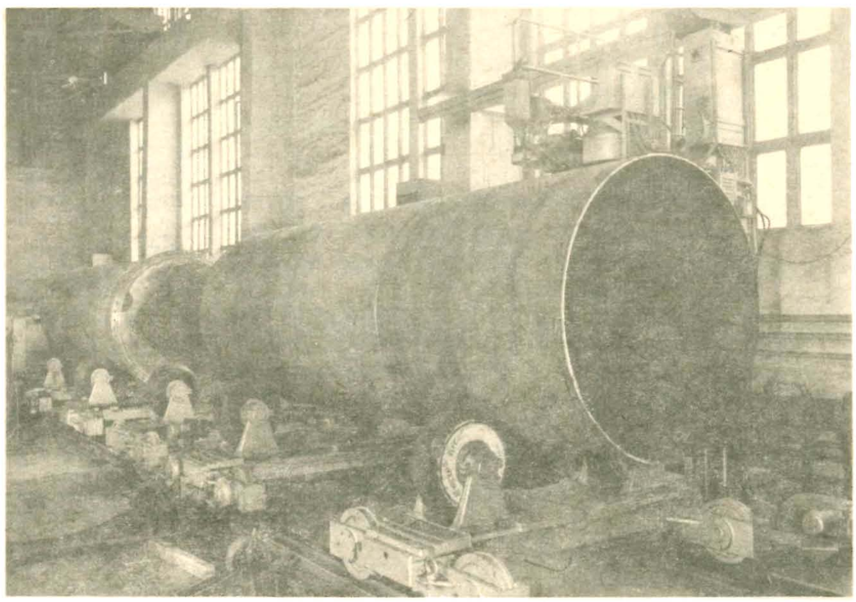
a) Welchen Winkel α bildet die „Rutsche" mit der Horizontalen?

b) Welche Kraft ist notwendig, um das Abrutschen des Gehäuses zu vermeiden?

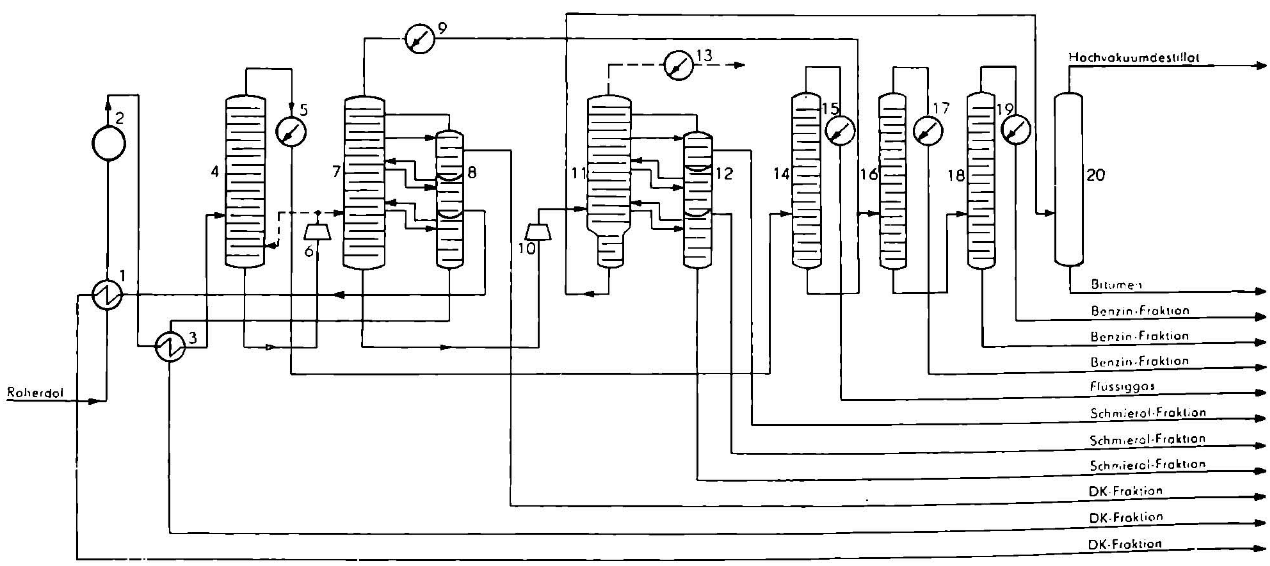
c) Welche Zugkraft muß aufgewendet werden, um den Körper aufwärts zu ziehen?



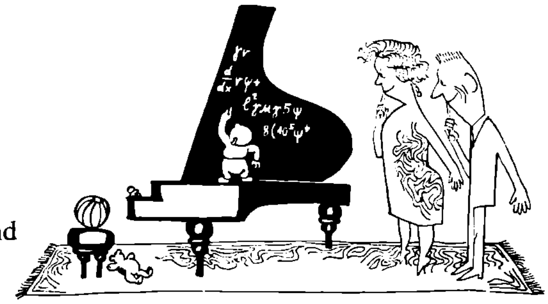
Im Auftrage des Kunden vom Betrieb projektierte, gelieferte und montierte Anlage.
Der Betrieb besitzt modernste Ausrüstungen.



1 Wärmeaustauscher
2 Entsalzer
3 Wärmeaustauscher
4 Vorkolonne
5 Kondensator
6 Topofen
7 atmosph. Kolonne
8 Strippkolonne
9 Kondensator
10 Vakuumofen
11 Vakuumkolonne
12 Strippkolonne
13 Kondensator
14 Stabilisation
15 Kondensator
16 Fraktionierkolonne
17 Kondensator
18 Fraktionierkolonne
19 Kondensator
20 Bitumenturm



In freien Stunden alpha heiter



Eine Familienverwandtschaft

Jeder der Krausebrüder hat genau so viele Schwestern wie Brüder. Jede der Krauseschwestern hat zweimal soviel Brüder wie Schwestern.
Wieviel Jungen und wieviel Mädchen sind in dieser Familie? *Aus: Mathematical pie, London*

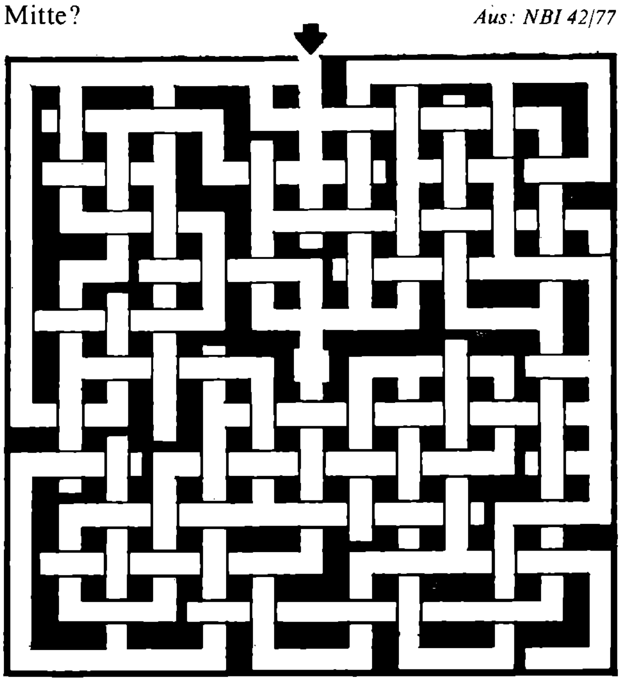
Darf er sie küssen?

Ein junger Mann sitzt im Bus und schaut zum Fenster hinaus. Da sieht er auf einmal seine Freundin. Sie geht gerade die Straße entlang, trifft einen anderen Mann, der sie freundlich begrüßt und ihr einen Kuß gibt. Der junge Mann ist darüber ganz aufgebracht und verärgert. Beim nächsten Wiedersehen mit seiner Freundin fragt er sie gleich als erstes, wer dieser (für ihn noch) fremde Mann war, der sie geküßt hat. Sie antwortet: „Dieses Mannes Mutter ist meiner Mutter Schwiegermutter.“ Daraufhin verzeiht er ihr. Warum?

Aus: Wurzel, 1/78, Jena

Drunter und drüber

Wer findet am schnellsten den Weg vom Eingang oben (siehe Pfeil) bis zum weißen Quadrat in der Mitte? *Aus: NBI 42/77*



Kombiniere und rechne!

Jedes Zeichen bedeutet eine Ziffer, gleiche Zeichen sind gleiche Ziffern. Setzt man die richtigen Ziffern für die Zeichen ein, so ergibt sich für die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben eine wahre Lösung.

Im Dezimalsystem

△⊘△⊠	−	○●□□	=	□■○●
:		+		+
⧄○	·	□■	=	□□■⧄
■⧄	+	○●○●	=	○●▲△

Im Oktalsystem

⊘▲□	−	●■⊘	=	■○○
:		+		+
○□	·	△▲	=	△▲□
⊘▲	+	●⧄●	=	▲⧄○

Im Dualsystem

△□□	+	△△□□	=	△□□□□
+		:		−
△□□	+	△△□	=	△□△□
△□□□	−	△□	=	△△□

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Interessantes Produkt

Wenn man jeden in dem Wort EUKLID vorkommenden Buchstaben in geeigneter Weise durch genau eine der Ziffern 1, 2, 4, 5, 7, 8 ersetzt, entstehen Teilprodukte, deren Ziffern zyklisch vertauscht sind. Die bei dieser Multiplikationsaufgabe noch vorkommenden Ziffern 3 und 6 sind bereits eingesetzt.

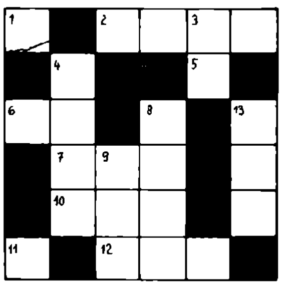
Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

E	U	K	L	I	D	·	K	6	U	I	E	3
		K	L	I	D	E	U					
			L	I	D	E	U	K				
				I	D	E	U	K	L			
					D	E	U	K	L	I		
						E	U	K	L	I	D	
							U	K	L	I	D	E
		3	D	D	L	D	I	3	3	6	U	E

Zahlenkreuzworträtsel

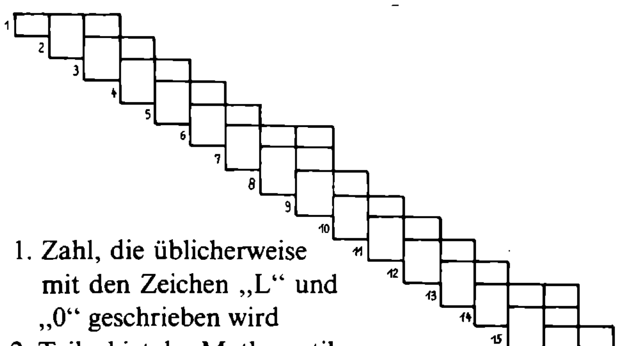
Waagerecht: 1. gerade Primzahl; 2. Geburtsjahr von Gauß; 6. Primzahl aus zwei anderen Primzahlen zusammengesetzt; 7. Vielfaches von 3. senkrecht; 9. Primzahl aus zwei ungeraden Primzahlen; 10. die zweite Quersumme beträgt 1; 11. 2. waagerecht ist durch 11. waagerecht teilbar; 12. Primzahl, zweite Quersumme beträgt 5.
Senkrecht: 3. eine zweistellige Zahl, deren Ziffern aus der gleichen Primzahl bestehen; 4. Geburtsjahr von Newton; 8. Zahl aus gleichen Ziffern; 9. Quadratzahl; 13. das Alter von Gauß im Jahr 1977.

Schüler Lutz Andrews, Rostock



Stufe um Stufe

In die Figur sind Wörter der unten angegebenen Bedeutung einzutragen, und zwar in jedes Feld eine Silbe. Die zweite Silbe des einen Wortes ist gleichzeitig erste Silbe des folgenden Wortes.



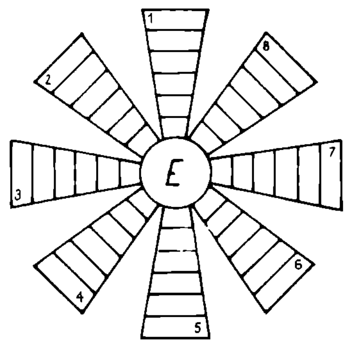
1. Zahl, die üblicherweise mit den Zeichen „L" und „0" geschrieben wird
2. Teilgebiet der Mathematik
3. unbegrenzte gerade Linie
4. Teil des Kreises
5. grafische Darstellung von Sachverhalten
6. soviel wie „nicht symmetrisch"
7. Verwandtschaft geometrischer Figuren
8. Gerät zur Längenmessung
9. lat. für „Begriff"
10. Einheit der Zeit
11. lat. für „Zahl"
12. Einheit der elektrischen Leistung
13. ital. Astronom, Physiker und Mathematiker
14. Zeichengerät
15. Eigenschaft bestimmter rationaler Zahlen

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

... und am Ende steht das „E"

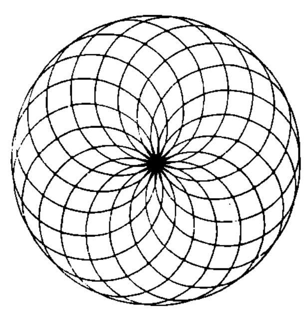
1. Ein Kegelschnitt
2. Begriff aus der Trigonometrie
3. Kurve der Differentialrechnung
4. Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet
5. Kürzeste Verbindung zweier Punkte
6. Es existiert in jeder Gruppe und hat die Eigenschaft $a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = e$
7. Französischer Mathematiker (1749 bis 1827)
8. Geordnete Übersicht

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

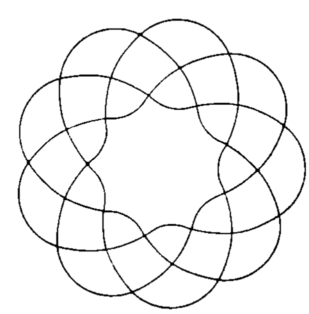


Schöne Kurven

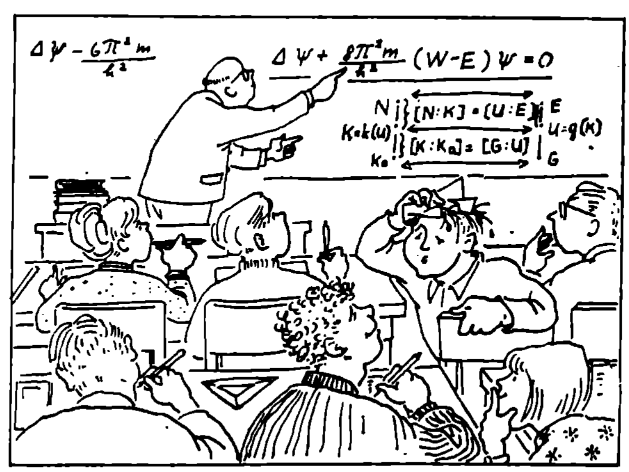
R. E. Moritz, New York



$p = \cos\frac{9}{10}\cdot\Theta$



$p = \cos\frac{9}{4}\Theta + \frac{r}{3}$



Mann, und ich dachte immer,
Subbotnik das ist Knochenarbeit! *Monika Köpp, Leipzig*

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/78:

Ma 5 ▪1708 Angenommen, Bernd hat n Eier gefärbt; dann haben Anke $2n$, die Mutter $3n$ Eier gefärbt. Insgesamt wurden $6n$ Eier gefärbt. Nun gilt $25 < 6n < 35$. Nur $n=5$ erfüllt diese Ungleichung. Somit haben die Mutter 15, Anke 10 und Bernd 5 Eier gefärbt.

Ma 5 ▪1709 Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien n und $n+1$. Ihre Summe beträgt somit $2n+1$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}(2n+1)\cdot 23-343 &= 968,\\ (2n+1)\cdot 23 &= 1311,\\ 2n+1 &= 57,\\ 2n &= 56,\\ n &= 28.\end{aligned}$$

Es handelt sich um die Zahlen 28 und 29.

Probe: $28+29=57$,
$57\cdot 23=1311$,
$1311-343=968$.

Ma 5 ▪1710 Aus $128\cdot 2=256:8=32$ folgt, daß der Klasse 5b genau 32 Schüler angehören. Angenommen, zur Klasse 5c gehören x Schüler; dann gehören zur Klasse 5a genau $(x+1)$ Schüler; nun gilt

$$\begin{aligned}x+(x+1) &= 440:8,\\ 2x+1 &= 55,\\ 2x &= 54,\\ x &= 27.\end{aligned}$$

Zur Klasse 5c gehören 27 Schüler, zur Klasse 5a hingegen 28 Schüler.

Ma 5 ▪1711 Angenommen, im ersten Tank befanden sich ursprünglich x Tonnen Öl. Dann lagerten im zweiten Tank $(x-20)$ Tonnen Öl. Nun gilt

$$\begin{aligned}x+(x-20) &= 500,\\ 2x-20 &= 500,\\ 2x &= 520,\\ x &= 260.\end{aligned}$$

Im ersten Tank befanden sich ursprünglich 260 t, im zweiten 240 t Öl. Nach der Reparatur befanden sich im zweiten Tank nur noch 260 t : 2 = 130 t Öl.

Aus 260 t + 130 t + 90 t = 480 t folgt, daß sich nach dem Auftanken im Öllager insgesamt 480 t Öl befanden.

Ma 5 ▪1712 Aus $aabc-bac=def$ folgt $a=1$ und $f=0$. Aus $b1c-cbd=cbd$ folgt $b=5$ und $c=2$. Aus $115c-51c=de0$ folgt $d=6$ und $e=4$.

Aus $1152:gh4=g$ folgt $g=3$

Aus $3\cdot 256=k6h$ folgt $h=8$ und $k=7$.

Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccccc} 1152 & - & 512 & = & 640\\ : & & - & & +\\ 384 & - & 256 & = & 128\\ \hline 3 & \cdot & 256 & = & 768\end{array}$$

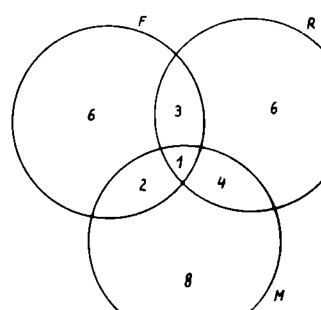
Ma 5 ▪1713 Wir beginnen mit der zweiten Spalte von links. Aus $7+d=n$ und $13-d=n$ folgt $2n=20$, also $n=10$ und somit $d=3$. Die Zahlenfolge in der zweiten Spalte von links lautet von oben nach unten gelesen: 4, 7, 10, 13, 16.

1	4	7	10	13
3	7	11	15	19
5	10	15	20	25
7	13	19	25	31
9	16	23	30	37

Wir betrachten nun die erste Zeile. Aus $7-4=d$ folgt $d=3$. Die Zahlenfolge in der ersten Zeile lautet 1, 4, 7, 10, 13. Wir betrachten die dritte Zeile. Aus $10+3\cdot d=25$ folgt $3\cdot d=15$, also $d=5$. Die Zahlenfolge in der dritten Zeile lautet 5, 10, 15, 20, 25. Die restlichen Zahlenfolgen finden wir auf analogem Wege; sie sind der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen.

Ma 6 ▪1714 Die abgebildete graphische Darstellung veranschaulicht den vorliegenden Sachverhalt.

Nur der AG „Fotoamateure" gehören $(12-4-3+1)=6$ Schüler an; nur der AG „Radiobastler" gehören $(14-4-5+1)=6$ Schüler an; nur der AG „Musikfreunde" gehören $(15-5-3+1)=8$ Schüler an. Zu dieser Klasse gehören $(6+6+8+3+4+5-2)=30$ Schüler.



Ma 6 ▪1715 Angenommen, im Korb befanden sich ursprünglich n Äpfel, dann gilt

$$n-6-\frac{n-6}{3}-6=\frac{n}{2},$$

$$\frac{6n}{6}-2\cdot\frac{(n-6)}{6}-\frac{3n}{6}=\frac{72}{6},$$

$$6n-2n+12-3n=72,$$

$$n=60.$$

Im Korb lagen ursprünglich 60 Äpfel.

Ma 6 ▪1716 Zwischen dem ersten und dem zwölften Baum befinden sich 11 gleichlange Streckenabschnitte. Beim Erreichen des achten Baumes hat Hans sieben Streckenabschnitte zurückgelegt, deshalb hat Hans die gesamte Strecke in $\frac{8}{7}\,\mathrm{s}\cdot 11=\frac{88}{7}\,\mathrm{s}=12\frac{4}{7}\,\mathrm{s}$ zurückgelegt.

Analog dazu gilt:

Werner hat die gesamte Strecke in $\frac{7}{6}\,\mathrm{s}\cdot 11=\frac{77}{6}\,\mathrm{s}=12\frac{5}{6}\,\mathrm{s}$ zurückgelegt.

Hans hat den Lauf gewonnen, denn $12\frac{4}{7}\,\mathrm{s}$ sind weniger Zeit als $12\frac{5}{6}\,\mathrm{s}$.

Ma 6 ▪1717 Aus $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$ und $\alpha+\beta=39°+84°=123°$ folgt $\gamma=57°$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt nun

$$\sphericalangle DEF=\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta=26°+28°=54°,$$

$$\sphericalangle EFD=\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma=56°+19°=75°,$$

$$\sphericalangle FDE=\frac{2}{3}\gamma+\frac{1}{3}\alpha=38°+13°=51°.$$

Ma 6 ▪1718 Angenommen, dieser Klasse gehören n Schüler an. Dann erhielten $\frac{1}{3}\cdot n$ Schüler die Note 1, $\left(\frac{1}{3}\cdot n-6\right)$ Schüler die Note 2 und $\left(\frac{2}{3}\cdot n-6\right)$ Schüler die Note 3. Nun gilt

$$\frac{1}{3}n+\left(\frac{1}{3}n-6\right)+\left(\frac{2}{3}n-6\right)+1=n,$$

$$\frac{4}{3}n-11=n,\quad \frac{1}{3}n=11,$$

$$n=33.$$

Der Klasse gehören 33 Schüler an. Es erhielten 11 Schüler die Note 1, 5 Schüler die Note 2, 16 Schüler die Note 3.

Ma 7 ▪1719 Wegen $35=5\cdot 7$ könnte $b=5$ und $d=7$ oder $b=7$ und $d=5$ gelten. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1) Es sei $b=5$ und $d=7$; dann gilt

$\frac{a}{5}-\frac{c}{7}=\frac{7a-5c}{35}$ und $7a-5c=3$,

also $5c=5a+2a-3$, $c=a+\frac{2a-3}{5}$.

Nur für $a=4$, also $c=5$ wird diese Gleichung erfüllt, und wir erhalten $\frac{4}{5}-\frac{5}{7}$. Diese Lösung entfällt, da b und c nicht verschieden voneinander sind.

2) Es sei $b=7$ und $d=5$; dann gilt

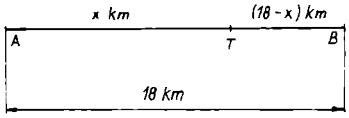
$\frac{a}{7}-\frac{c}{5}=\frac{5a-7c}{35}$ und $5a-7c=3$,

also $5a=5c+2c+3$, $a=c+\frac{2c+3}{5}$.

Nur für $c=1$ und somit $a=2$ oder für $c=6$ und somit $a=9$ wird diese Gleichung erfüllt. Für $a=9$ und $c=6$ erhalten wir $\frac{9}{7}-\frac{6}{5}$; diese Lösung entfällt, da es sich nicht um echte Brüche handelt.

Diese Aufgabe besitzt unter den einschränkenden Bedingungen genau eine Lösung; sie lautet $\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{10-7}{35}=\frac{3}{35}$.

Ma 7 ■ Aus $s_1 = x$ km und $v_1 = 24\ \text{km} \cdot h^{-1}$ folgt $t_1 = \frac{x}{24}$ h. Aus $s_2 = (18 - x)$ km und $v_2 = 24\ \text{km} \cdot h^{-1}$ folgt $t_2 = \frac{18-x}{24} h$.

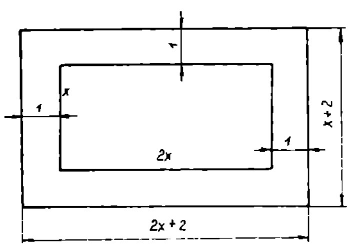


Nun gilt $t_1 = t_2 + \frac{1}{4} h$, also

$$\frac{x}{24} = \frac{18-x}{24} + \frac{1}{4},$$
$$x = 18 - x + 6,$$
$$2x = 24,$$
$$x = 12.$$

Beide sind vom Ort A 12 km entfernt, wenn sie sich treffen.

Ma 7 ■1721 Der nachstehenden Zeichnung ist zu entnehmen, daß der Weg einen Flächeninhalt $A_W = (x+2)(2x+2) - x \cdot 2x$ hat.



Deshalb gilt

$$2(x+2)(x+1) - 2x^2 = 640 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$(x+2)(x+1) - x^2 = 320 \cdot \frac{1}{4},$$
$$x^2 + x + 2x + 2 - x^2 = 80,$$
$$3x = 78,$$
$$x = 26.$$

Die rechteckige Rasenfläche ist 26 m breit und 52 m lang.

Ma 7 ■1722 Aus $\overline{AS} = \overline{BS} = r$ folgt $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = \frac{1}{2} \cdot (180° - 60°) = 60°$. Aus $AB \parallel CD$ folgt $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD = 60°$ und $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC = 60°$. Das Dreieck SDC ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig. Es sei $\overline{CS} = x$; dann gilt

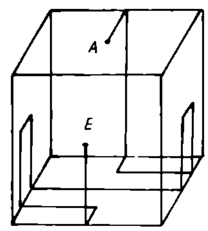
$$u_1 = u_2$$
$$3x = x + 2 \cdot (r - x) + b.$$

Wegen $b = \frac{2\pi r}{6} = \frac{1}{3}\pi r$ erhalten wir durch Einsetzen

$$2x = 2 \cdot (r - x) + \frac{1}{3}\pi r,$$
$$6x = 6 \cdot (r - x) + \pi r,$$
$$6x = 6r - 6x + \pi r,$$
$$12x = r(6 + \pi),$$
$$x = \frac{r}{12} \cdot (6 + \pi) = \frac{12}{12} \cdot (6 + \pi)\ \text{cm} \approx 9{,}14\ \text{cm}.$$

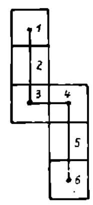
Ma 8 ■1723

a) Kantenmodell

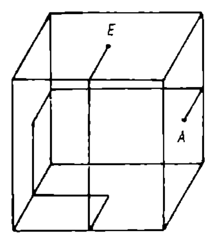


A: Anfang
B: Ende

b) Nicht die einzige Lösung!



c) Kantenmodell



A: Anfang
E: Ende

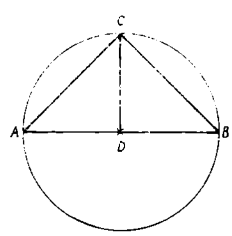
d) 5 cm lang

Ma 8 ■1724 Nach Aufgabenstellung gilt $\overline{DB} = \overline{DC} = 3$ cm.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{BC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$$
$$\overline{BC} = \sqrt{18\ \text{cm}^2} = 3\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

Der Umfang u des Dreiecks ABC beträgt

$$u = (6 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$$
$$= (6 + 6\sqrt{2})\ \text{cm}$$
$$\approx 14{,}48\ \text{cm}.$$



Den Flächeninhalt eines der beiden Kreissegmente erhält man, wenn man vom Flächeninhalt des Halbkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahiert und diese Differenz durch 2 dividiert.

$$A_{Segm.} = (A_{Halbkreis} - A_{ABC}) : 2$$
$$= \left(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}\right) : 2$$
$$= \left(\frac{9\pi}{9} - 9\right) : 2\ \text{cm}^2$$
$$\approx 2{,}57\ \text{cm}^2$$

Ma 8 ■1725 a) $2a + (2a+1) + (2a+2) + (2a+3) + (2a+4) = 10a + 10 = 10(a+1)$.
$a \in N, a \geqq 0$
Jedes Vielfache von 10 endet mit der Ziffer 0.

b) $(2a+1) + (2a+2) + (2a+3) + (2a+4) + (2a+5) = 10a + 15 = 5(2a+3)$.
$2a$ ist eine gerade, also $2a+3$ eine ungerade Zahl. Das Produkt aus 5 und einer ungeraden Zahl endet mit der Ziffer 5.
$10a + (10a+5) + (10a+10) + \ldots + (10a+45) = 100a + 225.$
$a \in N, a \geqq 0$
Der Summand $100a$ ist ein Vielfaches von 100; er endet also auf zwei Nullen. Die letzten beiden Ziffern der Summe $(100a + 225)$ lauten somit 25.

Ma 8 ■1726 Jeder Bruch der Klasse $\frac{1}{5}$ läßt sich in der Form $\frac{x}{5x}$ darstellen. ($x \in N$ und $x \neq 0$.) Die Summe aus Zähler und Nenner ist dann $6x$. Nun soll gelten $6x = n^2$ mit $10 \leqq n^2 < 100$ bzw. $4 \leqq n \leqq 9$.
Nur für $n = 6$ wird $6x = n^2$ erfüllt. Wir erhalten

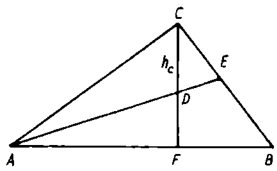
$$x = \frac{n^2}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

Der Bruch $\frac{x}{5x} = \frac{6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}$ erfüllt als einziger die Bedingungen der Aufgabe.

Ma 9 ■1727 1) Wenn a eine gerade Zahl ist, so sind a^2 und a^4 gerade. Damit ist der Zähler gerade.
Wenn a eine ungerade Zahl ist, so sind $5a^2$ und a^4 ungerade.
Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, d. h. der Zähler ist gerade.
In beiden Fällen ist der Zähler durch 2 teilbar.
2) Wenn b gerade ist, so sind $35b^3$, $7b$ und die Summe gerade, d. h. der Nenner ist gerade.
Wenn b ungerade ist, so sind b^3, $35b^3$ und auch $7b$ ungerade. Der Nenner ist dann wieder gerade (s. o.).
In beiden Fällen ist der Nenner durch 2 teilbar. Aus 1) und 2) folgt: Der Bruch ist durch 2 kürzbar.
Es ist nun noch zu zeigen, daß der Bruch auch stets durch 3 kürzbar ist.
1) a läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 0, 1 oder 2.
1. Fall: Wenn a den Rest 0 läßt, so lassen a^2, $5a^2$, a^4 und auch $5a^2 + a^4$ den Rest 0.
2. Fall: Wenn a den Rest 1 läßt, so lassen a^2 und auch a^4 den Rest 1, $5a^2$ den Rest 2, also $5a^2 + a^4$ den Rest 0.
3. Fall: Wenn a den Rest 2 läßt, so lassen a^2 und auch a^4 den Rest 1, $5a^2$ den Rest 2, also $5a^2 + a^4$ den Rest 0;
d. h. in allen drei Fällen ist der Zähler durch 3 teilbar.
2) b läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 0, 1 oder 2.
1. Fall: Wenn b den Rest 0 läßt, so lassen b^3, $35b^3$, $7b$ und auch $35b^3 + 7b$ den Rest 0.
2. Fall: Wenn b den Rest 1 läßt, so lassen b^3 den Rest 1, $35b^3$ den Rest 2, $7b$ den Rest 1, also $35b^3 + 7b$ den Rest 0.
3. Fall: Wenn b den Rest 2 läßt, so lassen b^3 den Rest 2, $35b^3$ den Rest 1, $7b$ den Rest 2,

also $35b^3+7b$ den Rest 0; d. h. in allen drei Fällen ist der Nenner durch 3 teilbar.
3) Wenn Zähler und Nenner stets durch 3 teilbar sind, ist der Bruch stets durch 3 kürzbar.
4) Wenn ein Bruch durch 2 und durch 3 kürzbar ist, so ist er durch 6 kürzbar, w. z. b. w.
Bemerkung: Schüler Ralph Ott löste die Aufgabe mit Hilfe von Zahlenkongruenzen! Wer kann das auch?

Ma9 ▪1728 Nach Voraussetzung soll gelten $\overline{CD}=\overline{CE}$, also auch
$\sphericalangle CED=\sphericalangle CDE=\phi$. Ferner gilt
$\sphericalangle CDE=\sphericalangle ADF=\phi$ (Scheitelwinkel).
Im rechtwinkligen Dreieck AEC gilt $\sphericalangle CAE=90°-\sphericalangle CEA=90°-\phi$. Im rechtwinkligen Dreieck AFD gilt $\sphericalangle DAF=90°-\sphericalangle ADF=90°-\phi$. Folglich gilt $\sphericalangle CAE=\sphericalangle DAF$, d. h. AE halbiert den Winkel $\sphericalangle CAB$.

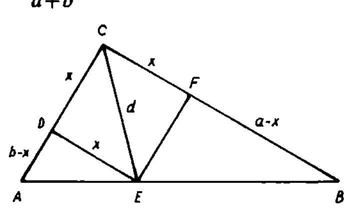


Ma9 ▪1729 Bezeichnet man die der Größe nach geordneten Ziffern der dreistelligen Zahl mit a, b und c, so gilt:
$100a+10b+c-(100c+10b+a)=99a-99c$
$=99(a-c)$.
Daraus folgt, daß $x-y$ durch 99, 33, 11, 9 und 3 teilbar ist. Setzt man für a und c Ziffern ein, so ist $0\leqq a-c\leqq 9$; d. h. es ergeben sich nur die Zahlen 891, 792, 693, 594, 495, 396, 297, 198, 99. Die Zahl heißt 495.

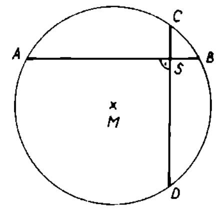
990	981	972	963	954	954	...
− 99	−189	−279	−369	−459	−459	
891	792	693	594	495	495	

Ma9 ▪1730 $\overline{CE}$ ist Diagonale des Quadrats $CDEF$. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$ mit der Hypotenuse c ist E. Die Lote von E auf a bzw. b schneiden a bzw. b in F bzw. D. Die Dreiecke AED und ABC sind ähnlich. Folglich gilt:

$$\frac{b-x}{x}=\frac{b}{a} \qquad A_{DEFC}=x^2$$
$$bx=ab-ax \qquad =\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$$
$$ax+bx=ab \qquad A=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$$
$$x(a+b)=ab \qquad u=4x$$
$$x=\frac{ab}{a+b}, \qquad u=\frac{4ab}{a+b},$$
$$d^2=2\cdot x^2$$
$$d=x\cdot\sqrt{2}$$
$$d=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

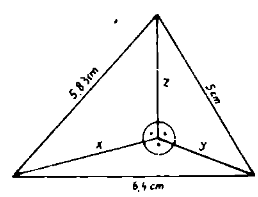


Ma 10/12 ▪1731 Es ist $\overline{BC}=5$ cm (nach Voraussetzung) und $\overline{CS}=4$ cm nach dem Satz des Pythagoras.



Nach dem Sehnensatz (Kl. Enzyklopädie Math., S. 205) ist $\overline{AS}\cdot\overline{BS}=\overline{CS}\cdot\overline{DS}$, also $8\cdot 3=4\cdot\overline{DS}$. Daraus folgt:
$\overline{DS}=6$ cm, $\overline{DC}=10$ cm. Im rechtwinkligen Dreieck ASD gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AD}=10$ cm; folglich ist $\overline{AD}=\overline{CD}$, w. z. b. w. (Skizze nicht maßstäblich)

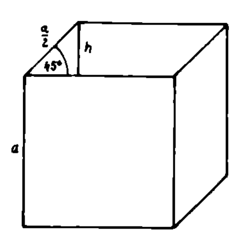
Ma 10/12 ▪1732 Die Skizze zeigt die Draufsicht des Tetraeders, bei der die Grundkanten in wahrer Länge abgebildet werden. Nach dem Satz des Pythagoras gilt
(1) $x^2+z^2=5{,}83^2$
(2) $x^2+y^2=6{,}4^2$
(3) $y^2+z^2=5^2$.
Aus (1)−(2) folgt
(4) $z^2-y^2=5{,}83^2-6{,}4^2$
Aus (3)+(4) folgt
(5) $2z^2=5{,}82^2-6{,}4^2+5^2$
Daraus folgt $z=3$ cm.
Durch Einsetzen ergibt sich $y=4$ cm und $x=5$ cm. Die Seitenkanten des Tetraeders sind 3 cm bzw. 4 cm bzw. 5 cm lang.



x, y, z seien die Längen der Seitenkanten

Ma 10/12 ▪1733 Für $x\geqq 1$ und $x<-4$ gilt $x^3\leqq x^3+x^2-4x+4<(x+1)^3$. Das würde bedeuten, daß die gesuchte Kubikzahl zwischen den Kuben zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen liegt. Das ist aber unmöglich. Es bleibt nun nur noch das oben ausgeschlossene Intervall und die Möglichkeit $x^3=x^3+x^2-4x+4$ zu untersuchen. Als Lösungsmenge ergibt sich $L=\{-1, 2, -2\}$, d. h. nur für die ganzen Zahlen −1, 2, und −2 ist der Wert des Terms x^3+x^2-4x+4 eine Kubikzahl (jedesmal 8)!

Ma 10/12 ▪1734 Der Flächeninhalt der vorderen Quadratfläche beträgt a^2. Weiter sind



zwei Parallelogrammflächen dargestellt, die kongruent sind. Es gilt
$$\sin 45°=\frac{h}{\frac{a}{2}}, \text{ d. h. } h=\frac{a}{2}\cdot\sin 45°.$$
Für die zwei Parallelogrammflächen ergibt sich für den Flächeninhalt
$$A=2a\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin 45°$$
$$A=a^2\cdot\sin 45°.$$
Insgesamt ist also die Fläche mit dem Inhalt
$$A\approx 0{,}707a^2+a^2$$
$$A\approx 1{,}707\,a^2$$
dargestellt. Der Inhalt der Würfeloberfläche beträgt $6a^2$. Die dargestellte Fläche ist etwa 28,4% der Würfeloberfläche. Für $\alpha=30°$ und $q=\frac{1}{3}$ ergibt sich durch analoge Berechnung etwa 22,2%.

Ph6 ▪31 Geg.: a) $a=10{,}25$ cm (Länge)
$b=8{,}25$ m (Breite)
$c=5{,}5$ m (Höhe)
$\varrho=1{,}29\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
b) 1 Handwagen ≙ 150 kg Masse
Ges.: a) m (Masse der Luft)
b) n (Anzahl der Handwagen)
a) Die Masse m der Luft berechnet man nach der Formel
$$m=\varrho\cdot V. \qquad (1)$$
Dabei ist V das Volumen des Klassenzimmers, also eines Quaders. Dies findet man mit $V=a\cdot b\cdot c$. In (1) eingesetzt ergibt sich für die Masse
$m=\varrho\cdot a\cdot b\cdot c$
$m=1{,}29\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 10{,}25\text{ m}\cdot 8{,}25\text{ m}\cdot 5{,}5\text{ m}$
$m\approx 600$ kg
Die Luft hat eine Masse von 600 kg.
b) Die Anzahl der Handwagen ergibt sich aus
$n=600\text{ kg}:150\text{ kg}$
$n=4$
Man braucht also 4 Handwagen, um einen Körper gleicher Masse hinauszutransportieren.

Ph7 ▪32

$\bar{v}_1=90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$\bar{v}_2=60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$
s_1	$s_2=2\cdot s_1$

A D B

$t_1+t_2=t_g$
$s_1+s_2=s_g$
Geg.: $\bar{v}_1=90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\quad s_1=\frac{1}{3}s_g$ km
$\bar{v}_2=60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\quad s_2=\frac{2}{3}s_g$ km
Ges.: v (Durchschnittsgeschwindigkeit von A nach B)
Die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ von A nach B findet man nach der Formel
$$\bar{v}=\frac{s_g}{t_g}. \qquad (1)$$
Dabei ist s_g die gesamte Streckenlänge in km, t_g die gesamte Zeit in h. Diese Zeit t_g findet

man aus den Teilzeiten t_1 und t_2; denn es ist $s_1=\bar{v}_1\cdot t_1$ und $s_2=\bar{v}_2\cdot t_2$.

Also $t_1=\frac{s_1}{\bar{v}_1}$ und $t_2=\frac{s_2}{\bar{v}_2}$

$$t_1=\frac{s_g\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{3\cdot 90\,\mathrm{km}} \text{ und } t_2=\frac{2\cdot s_g\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{3\cdot 60\,\mathrm{km}}$$

$$t_1=\frac{s_g}{270}\,\mathrm{h} \quad \text{und } t_2=\frac{s_g}{90}\,\mathrm{h}.$$

Nun ist

$$t_g=t_1+t_2$$

$$t_g=\frac{s_g}{270}\,\mathrm{h}+\frac{s_g}{90}\,\mathrm{h}$$

$$t_g=\frac{4s_g}{270}\,\mathrm{h}. \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ist dann

$$\bar{v}=\frac{s_g\,\mathrm{km}\cdot 270}{4\cdot s_g\mathrm{h}}$$

$$\bar{v}=67{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Der Pkw fuhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $67{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von A nach B.

Ph 8 ■33 Geg.: $d=37\,\mathrm{cm}=3{,}7\,\mathrm{dm}$

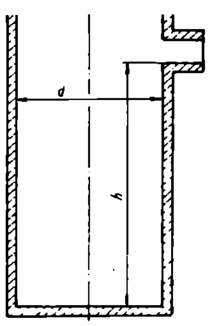
$h=93\,\mathrm{cm}=9{,}3\,\mathrm{dm}$

$\varrho_1=0{,}9990\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$

$\varrho_2=0{,}9777\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$

$\varrho_3=0{,}9982\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$

Ges.: V_0 (Überlaufvolumen)



Das Überlaufvolumen V_0 bei 20°C läßt sich aus dem Überlaufvolumen $V_ü$ bei 70°C berechnen, da die Masse m_1 des Wassers bei jeder Temperatur gleich groß ist. Es gilt demzufolge

$$m_1=V_0\cdot\varrho_3 \text{ und } m_1=V_ü\cdot\varrho_2. \qquad (1)$$

Dabei ist ϱ_3 die Dichte des Wassers bei 20°C und ϱ_2 die Dichte bei 70°C. Aus (1) folgt

$$V_0\cdot\varrho_3=V_ü\cdot\varrho_2$$

$$V_0=\frac{V_ü\cdot\varrho_2}{\varrho_3} \qquad (2)$$

Das Wasservolumen $V_ü$ bei 70°C ergibt sich als Differenz aus dem Gesamtwasservolumen V_2 bei 70°C mit der Dichte ϱ_2 und dem Gesamtwasservolumen V_1 bei 15°C mit der Dichte ϱ_1. Auch hier ist die Masse m_2 des Wassers konstant. Es ist also

$$V_ü=V_2-V_1, \qquad (3)$$

und da $m_2=V_1\cdot\varrho_1$ und $m_2=V_2\cdot\varrho_2$ gilt, ist

$$V_1\cdot\varrho_1=V_2\cdot\varrho_2$$

$$V_2=\frac{V_1\cdot\varrho_1}{\varrho_2}. \qquad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt, ergibt

$$V_ü=\frac{V_1\cdot\varrho_1}{\varrho_2}-V_1$$

$$V_ü=V_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-1\right). \qquad (5)$$

Schließlich ist, (5) in (2) eingesetzt,

$$V_0=V_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-1\right)\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$$

$$V_0=V_1\left(\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_3}\right).$$

Nun ist

$$V_1=\frac{\pi d^2 h}{4} \text{ (s. Abb.), also}$$

$$V_0=\frac{\pi d^2 h(\varrho_1-\varrho_2)}{4\varrho_3}$$

$$V_0=\frac{3{,}14\cdot 3{,}7^2\,\mathrm{dm}^2\cdot 9{,}3\,\mathrm{dm}(0{,}9990-0{,}9777)}{4\cdot 0{,}9982}$$

$$\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^3}{\mathrm{dm}^3\cdot\mathrm{kg}}$$

$$V_0=2{,}13\,\mathrm{dm}^3=2130\,\mathrm{cm}^3.$$

In dem Meßzylinder befinden sich $2130\,\mathrm{cm}^3$ Wasser.

Lösungen zu: Seltsame Produkte, S. 57

1. a) $777\cdot 715$;
b) $259\cdot 858$; $407\cdot 546$; $481\cdot 462$; $518\cdot 429$; $814\cdot 273$; $962\cdot 231$; $777\cdot 286$;
c) keine Lösung;
d) $369\cdot 271$; $123\cdot 813$.
2. a) $74\cdot 91\cdot 66$; $74\cdot 77\cdot 78$;
b) keine Lösung.
3. a) $192\cdot 643$;
b) $39\cdot 77\cdot 41$; $91\cdot 33\cdot 41$.

Lösungen zu:
Eigenschaften von Verknüpfungen, Teil 2,
S. 58

Aufgabe 10:

a) Sei $x\circ_1 a=y\circ_1 a$, d. h. $2x+2a=2y+2a$. Da für die Addition und Multiplikation die Kürzungsregel gilt, folgt $2x=2y$ und schließlich $x=y$. Wegen der Kommutativität von $\circ_1$ ist alles gezeigt.

b) $(R^*,\circ_5)$: ja (Beweis analog $\circ_1$);
$(N\setminus\{0\},\circ_6)$: nein (vgl. Ausführungen im Text);
$(N,\circ_7)$: nein ($4\sqcap 12=4\sqcap 8$, aber $12\neq 8$);
$(P^+\cup\{0\},\circ_8)$: ja (beachte die Trägermenge!);
$(R,\circ_9)$: nein ($2\circ_9 2=(-4)\circ_9 2$, aber $2\neq -4$);
$(G,\circ_{10})$: nein [$(-1)\circ_{10}3=(-1)\circ_{10}4$, aber $3\neq 4$)]
bei Ausschluß von -1 aus der Trägermenge ist die Kürzungsregel erfüllt;
$(R^*,\circ_{11})$: nein (vgl. Ausführungen im Text).

c) Analoges Vorgehen wie zu Aufgabe 10a); z. B. für
$\circ_2$: $x\circ_2 a=y\circ_2 a$, d. h. $\frac{x+a}{2}=\frac{y+a}{2}$,
d. h. $x+a=y+a$, d. h. $x=y$.

Aufgabe 11:

Für alle x, y und $a\in M$ gilt:
Wenn $x\neq y$, so $x\circ a\neq y\circ a$ und $a\circ x\neq a\circ y$.

Aufgabe 12: a)

$(P,+)$: $a+x=b$ hat die Lösung $x=b-a$;
$(P,-)$: $a-x=b$ hat die Lösung $x=a-b$,
$y-a=b$ hat die Lösung $y=b+a$;
$(P\setminus\{0\},:)$:
$a:x=b$ hat die Lösung $x=a:b$,
$y:a=b$ hat die Lösung $y=b\cdot a$;
$(P,\cdot)$ erfüllt die Divisionsregel nicht! Zum Beispiel hat die Gleichung $0\cdot x=1$ keine Lösung.
$(P\setminus\{0\},\cdot)$ erfüllt die Divisionsregel:
$a\cdot x=b$ hat die Lösung $x=b:a$.

b) Bis auf $\circ_{11}$ (vgl. die Ausführungen im Text) erfüllt keine dieser Verknüpfungen die Divisionsregel. Folgende Gleichungen haben z. B. keine Lösung:
$5\circ_5 x=8$, $3\circ_6 x=4$, $4\circ_7 x=5$,
$5\circ_8 x=4$, $0\circ_9 x=1$, $2\circ_{10}x=3$.
Allerdings würde $(R\setminus\{-1\},\circ_{10})$ die Divisionsregel erfüllen.

c) Im Verknüpfungsgebilde $(G,\circ_{13})$ mit $x\circ_{13}y=_{Df}x+y+c$ sind beide Regeln erfüllt:
Aus $x\circ_{13}a=y\circ_{13}a$ folgt $x+a+c=y+a+c$, so daß sich $x=y$ ergibt. Die Gleichung $x\circ_{13}a=b$ hat die Lösung $x=b-a-c$.
Im Verknüpfungsgebilde $(G,\circ_{14})$ mit $x\circ_{14}y=_{Df}x\cdot y\cdot c$ hingegen gilt lediglich die Kürzungsregel:
Aus $x\circ_{14}a=y\circ_{14}a$ folgt $x\cdot a\cdot c=y\cdot a\cdot c$, so daß sich wieder $x=y$ ergibt. Die Gleichung $x\circ_{14}a=b$ hingegen hat nur dann eine Lösung, wenn b ganzzahliges Vielfaches des Produktes $a\cdot c$ ist.
(Über $R^*\setminus\{0\}$ oder $R\setminus\{0\}$ z. B. wäre die Divisionsregel erfüllt.)

d) In den beiden Verknüpfungsgebilden mit $\varepsilon\setminus\{A\}$ als Trägermenge gilt weder die Divisions- noch die Kürzungsregel. In allen übrigen geometrischen Verknüpfungsgebilden ist die Divisionsregel erfüllt; die Kürzungsregel ebenfalls – mit Ausnahme der Verknüpfungsgebilde $(k,\circ_1)$, $(k,\circ_2)$ und $(e,\circ)$.

e) $(P,+)$, $(P,-)$, $(P\setminus\{0\},\cdot)$, $(P\setminus\{0\},:)$, $(R,\circ_2)$, $(P^+,\circ_3)$, $(R\setminus\{-1\},\circ_{10})$, $(G,\circ_{12})$ und $(G,\circ_{13})$.

Aufgabe 13:

a) 1. n_l ist links-neutrales Element von $(M,\circ)$,
2. n_r ist rechts-neutrales Element von $(M,\circ)$.
Dann gilt: $n_l\underset{2.}{=}n_l\circ n_r\underset{1.}{=}n_r$, d. h. $n_l=n_r=_{Df}n$.

b) Folgt unmittelbar aus a).
($n_1=n_1\circ n_2=n_2$, wobei n_1, n_2 neutrale Elemente seien.)

c) *1. Fall:* Existiert ein neutrales Element, so gibt es kein weiteres (auch kein weiteres einseitig-neutrales Element) – vgl. b).
2. Fall: Existiert wenigstens ein links-neutrales Element n_l und wenigstens ein rechts-neutrales Element n_r, so gibt es genau ein neutrales Element $n(=n_l=n_r)$ und es kann dann kein weiteres einseitig-neutrales Element geben – vgl. a).
3. Fall: In einem Verknüpfungsgebilde $(M,\circ)$ kann es jedoch entweder mehrere links-neutrale Elemente oder mehrere rechts-neutrale Elemente geben. Beispiel:

Über der Menge $M=\{1, 2, 3\}$ definieren wir die Verknüpfung $\circ$ durch $x \circ y =_{Df} y$ für alle $x, y \in M$. Jedes Element ist damit ein linksneutrales Element.

Aufgabe 14:

$(R^*, \circ_5)$: $n_l=0$; $(N \setminus \{0\}, \circ_6)$: $n_r=1$;
$(N, \circ_7)$: $n=0$; $(P^+ \cup \{0\}, \circ_8)$: $n=0$;
$(R, \circ_9)$: /; $(G, \circ_{10})$: $n=0$;
$(R^*, \circ_{11})$: $n=0$.

Aufgabe 15:

Das neutrale Element von $(G, \circ_{13})$ ist $n=c$: $c \circ_{13} x = x \circ_{13} c = x + c - c = x$ für alle ganzen x. $(G, \circ_{14})$ besitzt kein neutrales Element, auch kein einseitig-neutrales Element. (Wählen wir anstelle von G z. B. R^* als Trägermenge, wäre $n=1:c$ das neutrale Element.) In $(G, \circ_{14})$ ist $a=0$ absorbierendes Element.

Aufgabe 16:

Für alle x, y, z, u und $v \in P^+$ gilt:

1. $x \circ_{17} y = x^{\ln y} = (e^{\ln x})^{\ln y} = e^{\ln x \cdot \ln y} = e^{\ln y \cdot \ln x} = (e^{\ln y})^{\ln x} = y^{\ln x} = y \circ_{17} x$;
2. $(x \circ_{17} y) \circ_{17} z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln z \cdot \ln y} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x \circ_{17} (y \circ_{17} z)$;
3. $(x \circ_{17} y) \circ_{17} (u \circ_{17} v) = x^{\ln y \cdot \ln v \cdot \ln u} = x^{\ln u \cdot \ln v \cdot \ln y} = (x \circ_{17} u) \circ_{17} (y \circ_{17} v)$;
4. $n=e$: $x \circ_{17} e = x^{\ln e} = x^1 = x$; $(e \circ_{17} x = e^{\ln x} = x)$;
5. $a=1$: $x \circ_{17} 1 = x^{\ln 1} = x^0 = 1$; $(1 \circ_{17} x = 1^{\ln x} = 1)$;
6. Die Gleichung $x \circ_{17} 1 = 2$ hat z. B. keine Lösung; andererseits gilt auch $3 \circ_{17} 1 = 4 \circ_{17} 1$, aber $3 \neq 4$.

Aufgabe 17:

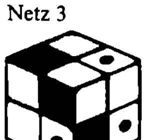
Das Verknüpfungsgebilde $(k, \circ_{18})$ ist kommutativ, assoziativ, bisymmetrisch; es erfüllt die Divisions- und die Kürzungsregel und besitzt das neutrale Element N.

Lösungen zu Würfeleien, S. 61

▲1▲ Würfel *b*

▲2▲ Netz 3

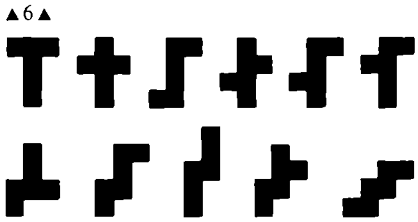
▲3▲



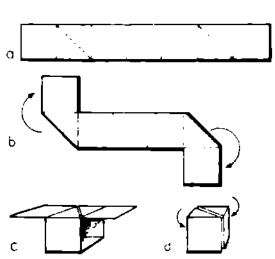
▲4▲

▲5▲ ZELTAF; OKGHBS; CMNRIU

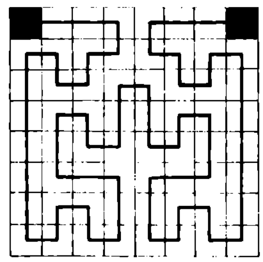
▲6▲



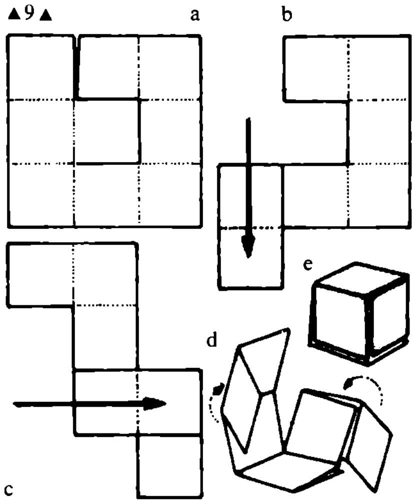
▲7▲



▲8▲



▲9▲



Lösungen zu alpha-heiter:

Eine Familienverwandtschaft

Wir führen die Überlegung elementar:

Junge → eine Schwester
↓ ein Bruder → 2 Jungen, 1 Mädchen
Mädchen → zwei Brüder
eine Schwester Widerspruch!

Alsdann:

Junge → zwei Schwestern
↓ zwei Brüder
Mädchen → eine Schwester
zwei Brüder Widerspruch!

Schließlich:

Junge → drei Schwestern
↓ drei Brüder
Mädchen → zwei Schwestern
vier Brüder wahre Aussage!

In der Familie sind also vier Jungen und drei Mädchen!

Darf er sie küssen?

Es ist der Vater.

Kombiniere und rechne!

Im Dezimalsystem:

3936 − 2511 = 1425
: + +
82 · 14 = 1148
48 + 2525 = 2573

Im Oktalsystem

750 − 427 = 311
: + +
10 · 25 = 250
75 + 464 = 561

Probe durch Umrechnen ins Dezimalsystem ergibt:

488 − 287 = 201
: + +
8 · 21 = 168
61 + 308 = 369

Im Dualsystem

LOO + LLOO = LOOOO
+ : −
LOO + LLO = LOLO
LOOO − LO = LLO

Umrechnen ins Dezimalsystem ergibt:

4 + 12 = 16
+ : −
4 + 6 = 10
8 − 2 = 6

Interessantes Produkt

E = 1, U = 4, K = 2, L = 8, I = 5, D = 7,

142857 · 264513
285714
857142
571428
714285
142857
428571
37787533641

Zahlenkreuzworträtsel

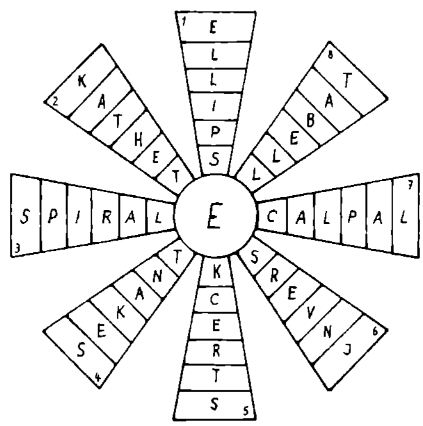
2		1	7	7	7
	1			7	
3	7		1		2
	2	3	1		0
	7	2	1		0
		4	1	9	

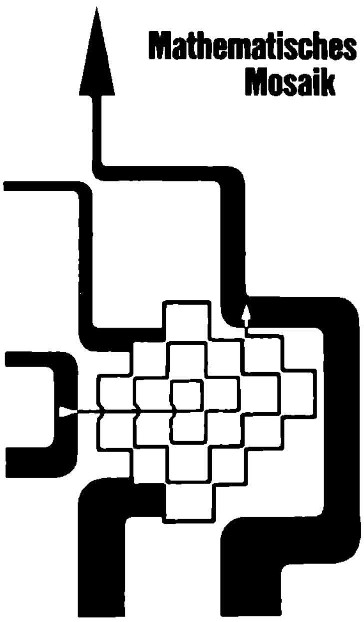
Stufe um Stufe

du
al zahl
ge bra
ra de...

Dualzahl, Algebra, Gerade, Radius, Diagramm, asymmetrisch, Symmetrie, Meterstab, Terminus, Minute, Numerus, Megawatt, Galilei, Lineal, negativ.

. . . und am Ende steht das „E"





Autorenkollektiv

Übersetzung aus dem Ungarischen

318 Seiten, zahlr. Abb. Preis 9,50 M

Bestell-Nr. 653 447 0

Urania-Verlag

Leipzig · Jena · Berlin

Aus dem Inhalt: Errate, an welche Zahl ich gedacht habe! – Mathematik auf dem Schachbrett – 1 Millimeter = 1 Kilometer – Können Sie fünfte Wurzeln im Kopf ziehen? – Spinne und Fliege – Mathematische Probleme des Toto-Lotto-Spiels – Zeitvertreib mit Zahlensystem – Die Königsberger Brücke – Das Jaltonsche Brett – Parkette, geometrisch betrachtet – Interessante Zahlen – Die Glücksspiele und die Wahrscheinlichkeitsrechnung – Wieviel Farben braucht man zur Färbung einer Landkarte? – Magische Quadrate – Knifflige Flächen – Das Ja-Nein-Spiel und die Informationstheorie

Leseprobe: **Zahlenraten**

Es sind außerordentlich viele Zahlenratespiele bekannt; zwei von ihnen wollen wir hier vorstellen.

a) Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 6, subtrahiere 3 hiervon, nimm das Doppelte, addiere die Ziffern, die du erhalten hast, nimm das 3fache, addiere die Ziffern; wenn das Ergebnis mehrstellig ist, addiere auch hiervon die Ziffern und wiederhole das, bis du ein einstelliges Ergebnis bekommst, multipliziere diese Zahl mit 4 und addiere dazu 13. Wenn du richtig gerechnet hast, hast du 49 bekommen. Wir können die Wirkung dadurch steigern, daß wir vorher auf ein Blatt Papier das Endergebnis aufschreiben und es umgedreht niederlegen, um es zum Schluß emporzuheben: „Hier ist das Ergebnis!"

b) Schreibe eine Zahl nieder, schreibe mit denselben Ziffern, nur in anderer Reihenfolge, eine andere, und subtrahiere die kleinere von der größeren. Verfahre mit mehreren Zahlen auf diese Weise und sage die Endergebnisse an: 801, 17612, 2574, 295576, 19998.

Sieh deine Rechnung an, in der zweiten und vierten Subtraktion ist sicher ein Fehler!

Woher kann man das wissen, kennen wir doch nicht die Zahlen, die der Aufgerufene subtrahiert hat bzw. von denen die Rechnungen im Fall a) ausgegangen sind? In jedem Fall wird die Erklärung durch die „Neunerprobe" gegeben, die der Leser im ersten Aufsatz kennengelernt hat. Hiernach bleibt bei der Division einer Zahl durch 9 ein ebenso großer Rest, wie sie die Summe ihrer Ziffern ergibt.

Dieser Sachverhalt wird auch zur Überprüfung von Rechnungen ausgenutzt, denn der Rest einer Summe, Differenz und eines Produkts bei der Division durch 9 ist ebensogroß wie derjenige der Summe, Differenz bzw. des Produkts der Reste der einzelnen Zahlen, und dasselbe gilt auch für das Potenzieren, denn Potenzieren ist wiederholte Multiplikation mit lauter gleichen Faktoren.

Auf Grund dessen können wir leicht den Divisionsrest des Ergebnisses einer Operation oder einer Reihe von Operationen aus den Resten der einzelnen Zahlen ausrechnen und den Rest des Endergebnisses bestimmen. Wenn die beiden nicht übereinstimmen, so ist in der Rechnung ein Fehler enthalten. (Ein Fehler ist allerdings auch dann möglich, wenn die Neunerprobe stimmt.)

Das unter Punkt 3a aufgeführte Spiel läßt sich demnach folgendermaßen verstehen: Bei der Multiplikation mit 6 haben wir eine durch 3 teilbare Zahl erhalten, und daran hat sich auch bei der Subtraktion von 3 und bei der Verdoppelung nichts geändert. (Diese Schritte sind übrigens für die Aufgabe unwesentlich.) Nach der Multiplikation mit 3 bekommen wir bereits ein Vielfaches von 9, wir gelangen also bei der wiederholten Addition der Ziffern zu einer einstelligen und durch 9 teilbaren Zahl. Solcher Art sind nur 9 und 0, da aber die Quersumme nicht 0 sein kann, kann das Ergebnis der Addition der Ziffern nur 9 sein. Das Ergebnis der weiteren Operationen kennen wir bereits, wir können somit dieses Ergebnis so umformen, wie wir es gerade wollen.

In Punkt 3b ergeben die beiden Glieder der Differenz bei der Division durch 9 denselben Rest, weil die Summe der Ziffern beide Male dieselbe ist (die beiden Zahlen bestehen stets aus denselben Ziffern); die Differenz ist also durch 9 teilbar, und somit muß auch ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Dies ist für das zweite und vierte Ergebnis nicht erfüllt, diese sind also sicher aus einer fehlerhaften Rechnung hervorgegangen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß auch die drei übrigen Rechnungen falsch sein können, weil viele Rechenfehler möglich sind, durch die das Ergebnis um eine durch 9 teilbare Zahl abgeändert wird, und dann die Quersumme durch 9 teilbar bleibt.

Drei Bücher in deutscher Sprache aus dem ungarischen Verlag Akadémiai Kiadó, Budapest

T. Varga

Mathematik I

Flußdiagramme – Lochkarten – Wahrscheinlichkeit

97 Seiten, zahlr. Abb., Pappband

Preis: etwa 20 M

Bestell-Nr. ISBN 963 05 0634 3, Bd. 1

Mathematik II

Raum und Ebene – Wahrscheinlichkeit – Logik und Kombinatorik

119 Seiten, zahlr. Abb., Pappband

Preis: etwa 20 M

Bestell-Nr. ISBN 963 05 0635 1

Gy. Bizám/J. Herczeg

Logik macht Spaß

85 Aufgaben

(Sammlung von Aufgaben im Rahmen der Logik, zu deren Lösung keine speziellen mathematischen Kenntnisse notwendig sind.)

391 Seiten, 300 Abb., Ganzleinen

Preis: etwa 40 M

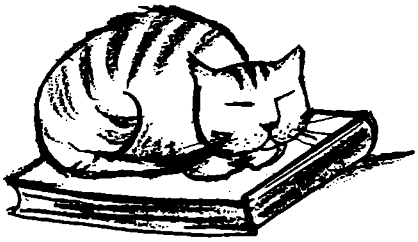
Bestell-Nr. ISBN 963 05 0353 0

Das vorliegende Buch ist eine Aufgabensammlung. Es ist kein Lehrbuch der mathematischen Logik, sondern behandelt mathematische Probleme im Rahmen der Logik, zu deren Lösung keine mathematischen Vorkenntnisse notwendig sind. Die Aufgaben gehen immer von leichtverständlichen Alltagssituationen aus. Diese sind jedoch Träger eines mathematischen Gedankens, also nicht etwa Rätsel um ihrer selbst willen, sondern Probleme, bei deren Lösung der Leser einige allgemeine Wesenszüge der mathematischen Lösungswege und eine Menge gedanklicher Kunstgriffe kennenlernt, die in der Mathematik regelmäßig angewendet werden. Das Buch spricht einen großen Leserkreis an; 14jährige Schulkinder können so manches aus ihm lernen, und selbst Erwachsenen mit Hochschulbildung wird es Spaß bereiten, sich über einige Lösungen den Kopf zu zerbrechen.

Zu beziehen durch:

Ungarisches Informationszentrum,

108 Berlin, Rathausstraße



Bücher aus Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

I. Ruzsa

Die Begriffswelt der Mathematik

Übersetzung aus dem Ungarischen
472 Seiten, 135 Abbildungen, Ganzgewebe
DDR 21,50 M, Ausland 30,00 M
Bestell-Nr. 706 732 5

J. Gronitz

Praktische Mathematik

Mathematische Schülerbücherei Bd. 69
160 Seiten, 61 Abbildungen, Pappband
DDR 5,00 M, Ausland 9,00 M
Bestell-Nr. 706 736 8

T. Varga

Mathematische Logik für Anfänger

Band II: Prädikatenlogik
Übersetzung aus dem Ungarischen
Mathematische Schülerbücherei Bd. 62
256 Seiten, 171 Abbildungen
Preis 9,00 M
Bestell-Nr. 706 345 5

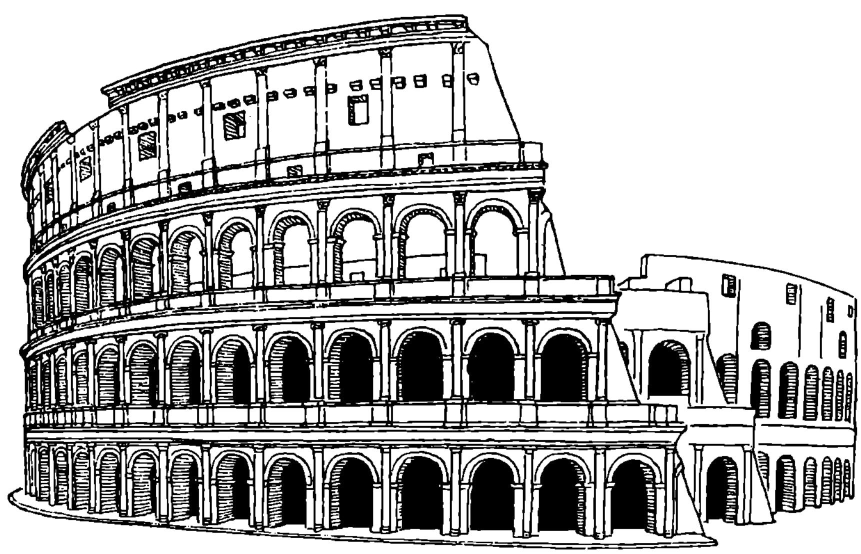
H. Kürth/A. Kutschmar

Baustilfibel

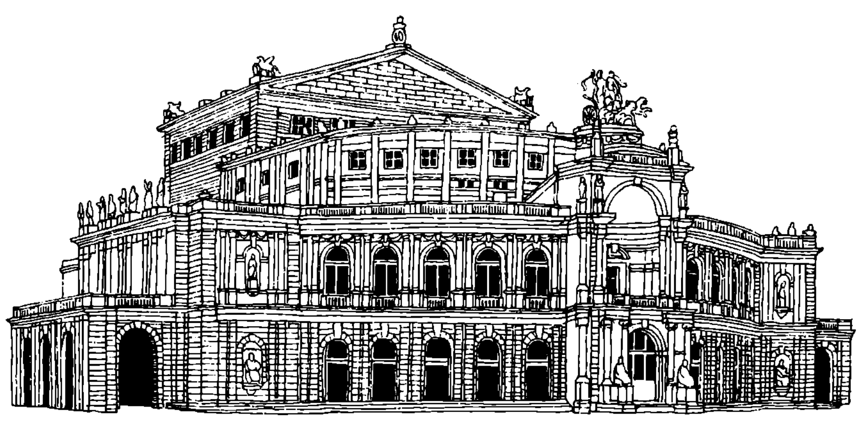
Bauwerke und Baustile von der Antike bis zur Gegenwart

292 Seiten, 419 Abbildungen, Ganzgewebe
DDR 22,80 M, Ausland 28,00 M
Bestell-Nr. 706 883 8

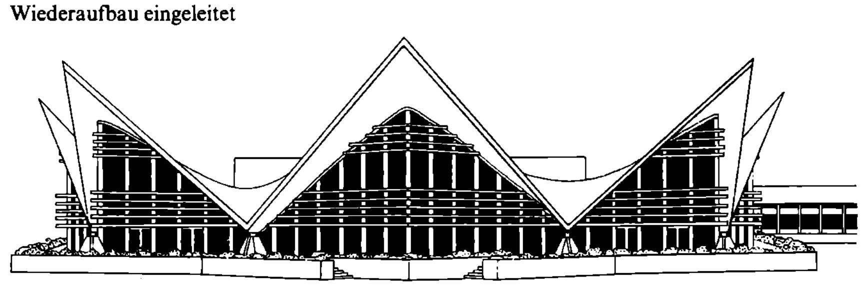
Die *Baustilfibel* enthält rund 400 künstlerische Darstellungen von Bauwerken und architektonischen Details. In den Darstellungen wurde eine einheitliche und klare Formensprache gefunden, die über die sachliche Information hinaus die Entwicklung der Baukunst zu einem künstlerischen Erlebnis werden läßt.
Neben dem Bildteil mit Erläuterungen zum bewußten Betrachten enthält die *Baustilfibel* eine Einführung in das Wesen und die Besonderheiten der Architektur, über ihre Entwicklung in den unterschiedlichen gesellschaftlichen Epochen sowie Übersichten über traditionelle und moderne Bautechniken.
In fünf Kapiteln wird die Baukunst in folgenden Epochen behandelt:
in der Sklavenhaltergesellschaft, in der Feudalgesellschaft, in der Epoche des aufstrebenden Bürgertums und des Zerfalls der Feudalgesellschaft, im Kapitalismus, in der sozialistischen Gesellschaft. Im Anhang findet der Leser Stilübersichten – Giebel, Brunnen, Schränke, ein Sachwortverzeichnis mit Erklärungen, ein Ortsverzeichnis, ein Architektenverzeichnis zum Bildteil, einen Quellennachweis der Abbildungsunterlagen und ein Verzeichnis der Fototafeln.



Rom, Flavisches Amphitheater oder Kolosseum, vollendet 80, etwa 45000 Sitzplätze



Dresden, Opernhaus, erbaut 1871 von Gottfried Semper, 1945 abgebrannt, Wiederaufbau eingeleitet



Berlin, „Ahornblatt am Fischerkietz“