Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto, W. Ledermann, Brighton (S. 26); Graphik: Grütner, Berlin (S. 28); Penčik, Praha (S. 31); L. Otto, Leipzig (S. 38); Lipinski, Warschau (S. 39)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus der mathematischen Schülerzeitschrift *Lapok*, Budapest

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128
Redaktionsschluß: 23. Dezember 1983
Auslieferungstermin: 22. April 1984

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Algebra – aller Anfang ist leicht

In der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) ist als Band 107 erschienen: Kästner/Göthner, *Algebra – aller Anfang ist leicht* (Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1983, Bestell-Nr. 666 138 1, Preis: 8,40 M.)

+	r	g	w	b
r	r+r	r+g	r+w	r+b
g	g+r	g+g	g+w	g+b
w	w+r	w+g	w+w	w+b
b	b+r	b+g	b+w	b+b

Dieses Büchlein verfolgt das Ziel, den Leser in die Gedankenwelt der *algebraischen Strukturen* und die *strukturelle Denkweise* einzuführen. Viele elementare Fragestellungen und einfache, aus dem Mathematikunterricht geläufige Beispiele decken interessante Analogien und überraschende Zusammmenhänge zwischen scheinbar weit auseinanderliegenden Gebieten auf und zeigen die Fruchtbarkeit strukturellen Denkens z. B. beim Ordnen und Systematisieren mathematischer Inhalte. Das Bändchen beginnt mit einem einführenden Kapitel über *Mengen*, dem sich solche über *Relationen*, *Operationen* und *algebraische Strukturen* anschließen. Daß algebraische Hilfsmittel auch einen verhältnismäßig raschen Zugang zu speziellen mathematischen Gebieten gestatten, wird am Beispiel der Matrizen und der Restklassen ganzer Zahlen deutlich: das Rechnen mit diesen mathematischen Objekten lernt der Leser *nebenher*.

Eine relativ breite, verständliche und lockere Darstellung sowie eine Vielzahl elementarer Beispiele sollen helfen, daß tatsächlich *aller Anfang leicht* ist und das Büchlein bereits von Lesern ab Klassenstufe 9 vollständig verstanden werden kann.

Wir bringen eine Leseprobe aus dem Kapitel 2 *Relationen;* einige dem Leser möglicherweise unbekannte Begriffe und Zeichen sind im Buch an früherer Stelle eingeführt und erläutert.

Leseprobe: Max und Moritz sind Brüder

2.2. Eigenschaften von Relationen: Dieses Kapitel behandelt Eigenschaften von Relationen, wie z. B. Reflexivität, Symmetrie, Transitivität; es wird gefragt, ob einige dieser Eigenschaften andere nach sich ziehen.

Die Tatsache, daß Max Bruder von Moritz ist, haben wir durch „Max und Moritz sind Brüder“ ausgedrückt. In dieser Formulierung steckt aber bereits eine weitere Information über die Relation „ist Bruder von“. Das erkennt man am besten beim Versuch, von der Aussage „4 ist Teiler von 256“ überzugehen zur Formulierung „4 und 256 sind Teiler“. Letztere kann, je nachdem, welches Verhältnis man zur deutschen Sprache hat, unsinnig oder falsch sein. Der Versuch der Umformulierung muß offenbar deshalb mißglücken, weil es in diesem Beispiel auf die Reihenfolge der Elemente 4 und 256 ankommt, wohingegen im ersten Beispiel die Reihenfolge keine Rolle spielt: Wenn Max Bruder von Moritz ist, so ist Moritz auch Bruder von Max. Relationen mit dieser Eigenschaft heißen *symmetrisch.* Dabei wird die Menge M stillschweigend als nichtleer vorausgesetzt.

Definition 2.3: Eine Relation R in M heißt *symmetrisch* genau dann, wenn für alle $x, y \in M$ für die xRy gilt, auch yRx ist; anders ausgedrückt: mit xRy gilt stets auch yRx.

Beispiele: (1) Die Relation „ist parallel zu“ in der Menge der Geraden einer Ebene ist symmetrisch, denn wenn $g \parallel h$, so auch $h \parallel g$. Also können wir auch sagen, daß die beiden Geraden g und h *zueinander parallel* sind.

(2) Die Relation „läßt bei Division durch 3 denselben Rest“ in der Menge G der ganzen Zahlen ist symmetrisch, denn $a \equiv b \mod 3$ bedeutet $a = b + 3g$, g ganz, woraus sofort $b = a + 3(-g)$, also $b \equiv a \mod 3$ folgt, denn mit g ist auch $(-g)$ ganz.

(3) Die Relation „ist verliebt in“, betrachtet auf einer genügend großen Menge von Menschen, ist ersichtlich nicht symmetrisch, da xRy nicht stets yRx nach sich zieht; gerade dies ist die Ursache von Liebeskummer.

(4) Die in einer Menge von Aussagen definierte Relation „aus ... folgt“, sprachlich anders formuliert durch „wenn ... so“, die wir im folgenden stets *Implikation* nennen wollen, ist nicht symmetrisch, was man bereits durch Angabe eines Gegenbeispiels erkennt: Die Aussage „$ABCD$ ist Quadrat $\rightarrow$ die Diagonalen von $ABCD$ halbieren einander“ ist richtig. Falsch hingegen ist die Umkehrung „Die Diagonalen von $ABCD$ halbieren einander $\rightarrow$ $ABCD$ ist Quadrat“, denn auch im Rechteck halbieren sich die Diagonalen.

Dieses Beispiel lenkt unsere Aufmerksamkeit noch einmal auf jene Stelle in der Definition der Symmetrie, in der es heißt, daß mit xRy stets auch yRx gelten soll. Ist diese Forderung auch nur einmal verletzt, so ist R nicht symmetrisch. Diese Bemerkung ist im Zusammenhang mit der Implikation wichtig, da wir natürlich auch genügend viele Beispiele für zwei bezüglich der Implikation vertauschbare Aussagen hätten finden können, etwa „Die ganze Zahl g ist durch 3 teilbar $\rightarrow$ die Quersumme von g ist durch 3 teilbar“, wovon auch die Umkehrung richtig ist. In diesen Fällen schreibt man statt „$\rightarrow$“ den Doppelpfeil „$\leftrightarrow$“, den man „ist logisch äquivalent“ oder „genau dann, wenn“, oder „dann und nur dann“ liest. Die logische *Äquivalenz* ist daher eine symmetrische Relation, und wir können – auf obiges Beispiel zurückkommend – sagen: „Die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 ist äquivalent zur Teilbarkeit ihrer Quersumme durch 3.“ Offenbar ist es für die Handhabung eines mathematischen Satzes sehr wichtig zu wissen, ob er die logische Struktur einer Implikation oder einer Äquivalenz hat.

(5) Während sich die Implikation als eine *nicht symmetrische* Relation erwies, d. h., als eine solche, bei der es sowohl Paare (x, y) gibt, für die mit xRy auch yRx gilt, als auch solche, für die wohl xRy, nicht aber yRx erfüllt ist, liefert „ist kleiner als“ ein Beispiel für eine sogenannte *asymmetrische* Relation, bei der nie gleichzeitig xRy und yRx erfüllt sind. Geht man von der Relation „$<$“ über zur Relation „$\leqq$“, so gibt es Elementepaare (x, y), für die sowohl $x \leqq y$ als auch $y \leqq x$ gilt, nämlich genau jene Paare mit $x = y$. Eine Relation R mit der Eigenschaft, daß aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt, heißt *antisymmetrisch,* wofür die Relation „ist Teiler von“ in der Menge N der natürlichen Zahlen ein weiteres Beispiel liefert.

In unseren einführenden Beispielen (Abschnitt 2.1.) kam auch die Formulierung „Abraham Gotthelf, Erich und Herbert haben denselben Familiennamen“ vor, die – das wissen wir nun schon – nur korrekt sein kann, wenn die Relation „hat denselben Familiennamen wie“ symmetrisch ist. Dies ist in der Tat der Fall. Aber da hier mehr als zwei Elementen ein gemeinsames Merkmal zugesprochen wird, spielt noch eine weitere Eigenschaft der Relation eine Rolle. Betrachten wir die ebenfalls symmetrische Relation „ist höchstens 100 km entfernt von“. Obwohl nun die Aussagen „Gotha ist höchstens 100 km entfernt von Erfurt“ und „Erfurt ist höchstens

100 km entfernt von Merseburg" beide richtig sind, kann man nicht sagen „Erfurt, Gotha und Merseburg sind höchstens 100 km voneinander entfernt", denn die Entfernung Gotha–Merseburg ist größer als 100 km. Die hier betrachtete Relation R hat nicht die „Übertragbarkeitseigenschaft", auch *Transitivität* genannt: Wenn xRy und yRz, so auch xRz.

Definition 2.4: Eine Relation R in M heißt *transitiv* genau dann, wenn für alle $x, y, z \in M$, für die xRy und yRz gilt, auch xRz ist; anders ausgedrückt: xRy und yRz haben stets xRz zur Folge.

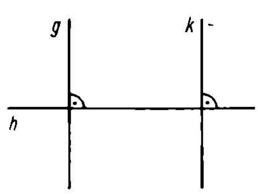
Beispiele: (1) Die Relation „ist kleiner als" in G ist transitiv, denn aus $x<y$ und $y<z$ folgt sofort $x<z$. Dies ist mithin ein Beispiel für eine asymmetrische, aber transitive Relation.

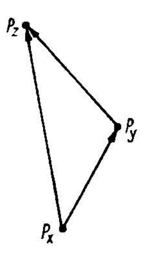
(2) Die Relation „ist Teiler von" in N ist transitiv. Gilt nämlich $a \mid b$ und $b \mid c$, so gibt es laut Definition der Teilbarkeits-Relation natürliche Zahlen s und t mit $b=sa$ und $c=tb$, woraus $c=t(sa)=(ts)a$ folgt. Da ts als Produkt natürlicher Zahlen selbst natürlich ist, entnimmt man daraus $a \mid c$. Diese Relation liefert also ein Beispiel für eine antisymmetrische und transitive Relation.

(3) Ein wichtiges Beispiel für eine nicht symmetrische, aber transitive Relation ist die Implikation. Auf der Transitivität dieser Relation beruht ja wesentlich das mathematische Schließen.

(4) Die symmetrische Relation „läßt bei Division durch 3 denselben Rest" ist auch transitiv: Aus $a \equiv b \mod 3$ und $b \equiv c \mod 3$, d. h. $a=b+3g$ und $b=c+3h$, g, h ganz, folgt $a=(c+3h)+3g=c+3(h+g)$, also $a \equiv c \mod 3$, da mit g und h auch $h+g$ eine ganze Zahl ist.

(5) Die Relation „ist senkrecht zu" in der Menge der Geraden einer Ebene ist symmetrisch, wie man sofort erkennt, aber nicht transitiv (siehe Bild).





(6) Beispiele für Relationen, die weder symmetrisch noch transitiv sind, findet man etwa in der Relation „ist erste Ableitung von" in der Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen oder in der Relation „ist Onkel von", ganz zu schweigen von der Relation „ist verliebt in".

Eine Aufgabe, zur Verfügung gestellt von Prof. Dr. em. Walter Ledermann

Universität Sussex, Brighton, England

Kein Königsweg nach Cambridge

Es gibt in Großbritannien etwa vierzig Universitäten, an denen man Mathematik studieren kann. Um überhaupt an einer Universität aufgenommen zu werden, muß man die Abschlußprüfung in der Schule mit einer genügend guten Note bestehen. Diese Prüfung wird in zwei Stufen abgehalten. Mit 16 Jahren legen die Schüler eine Prüfung in sechs oder mehr Fächern ab, unter denen sich immer Englisch und meistens auch Mathematik befindet. Dieses Examen heißt „gewöhnliche" Stufe (ordinary level – O-level).

Viele Schüler verlassen danach die Schule, um einen Beruf zu erlernen. Wer aber zur Universität gehen will, muß die „höhere" Stufe (advanced level – A-level) in mindestens drei Fächern erreichen. Diese Schüler werden in die „sechste Klasse" (sixth form) versetzt, wo sie zwei Jahre bleiben. Der Unterricht ist fast ausschließlich auf die drei ausgewählten Fächer konzentriert; zum Beispiel ist es möglich, 15 Stunden Mathematik in jeder Woche zu haben. Alle Prüfungen bestehen aus mehreren dreistündigen Klausuren. Die Prüfungsfragen aus der Differential- und Integralrechnung, Algebra, Geometrie und theoretische Mechanik werden nicht von der Schule gestellt, sondern von einer unabhängigen Prüfungskommission.

Die Leistungen im A-level-Examen werden mit einer der Noten A, B, C, D, E, F versehen: A heißt hervorragend, und F heißt durchgefallen. Diese Bewertung ist von großer Wichtigkeit, da die Aufnahme an einer Universität davon abhängt. Zum Beispiel kann die Universität die Bedingung stellen, daß der Kandidat mindestens ein B und zwei C's erhalten hat. Es ist den Universitäten nicht gestattet, weitere schriftliche Prüfungen vorzunehmen – mit Ausnahme von Oxford und Cambridge; diese spielen eine besondere Rolle, teils aus historischen Gründen, teils wegen des besonders hohen Niveaus, das dort aufrechtgehalten wird.

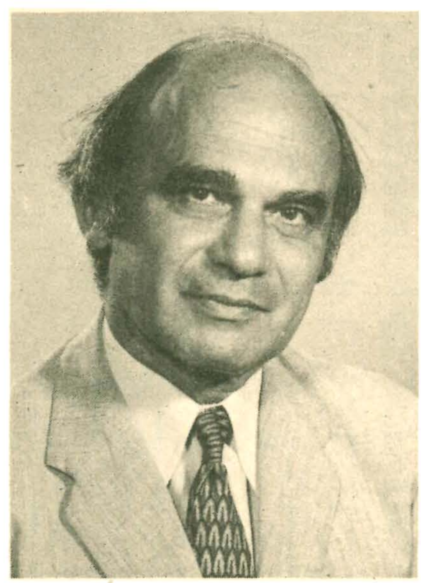
Ich gebe nun eine Beispielaufgabe aus einer solchen Aufnahmeprüfung (Cambridge 1973, I, 2A). Ich danke der Universität Cambridge für die Erlaubnis, diese Aufgabe hier mitzuteilen.

Aufgabe

▲2434▲ (i) Man beweise, daß 24 die größte Zahl ist, welche durch das Produkt aller Zahlen teilbar ist, die kleiner als ihre Quadratwurzel sind.

(ii) Man zeige, daß in jeder Teilmenge von $n+1$ Zahlen aus der Menge $1, 2, \ldots, 2n$ es immer mindestens ein Paar von Zahlen gibt, derart, daß ein Mitglied des Paares durch das andere teilbar ist.

Lebenslauf



Walter Ledermann wurde 1911 als Sohn eines jüdischen Arztes in Berlin geboren. Dort besuchte er das *Leibniz-Gymnasium* und studierte Mathematik und Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin. Auf Grund der Verfolgungen durch die Nazis wanderte er 1934 nach Großbritannien aus, wo er seitdem lebt. Er hat an den Universitäten St. Andrews (Schottland), Manchester und Sussex (Brighton) gelehrt und ist 1978 zum *Emeritus Professor* ernannt worden.

Seine mathematischen Arbeiten liegen vornehmlich auf dem Gebiete der Algebra. Er hat unter anderem Bücher über Gruppentheorie und Gruppencharaktere veröffentlicht.

Prof. Ledermann hat starkes Interesse an allen Formen von mathematischem Unterricht und in diesem Zusammenhang zahlreiche Lehrbücher herausgegeben. Er ist Chefredakteur des *Handbook of Applicable Mathematics*. Seit seiner Pensionierung unterrichtet er an einer Schule, wo er dazu beiträgt, Kandidaten für die Aufnahme in Oxford oder Cambridge vorzubereiten.

Im Straßenverkehr beobachtet – Der Doppler-Effekt

Jeder, der am Straßenrand steht und den Verkehr beobachtet, kann folgendes Phänomen bemerken:
Kommt ein Auto auf ihn zugefahren, so klingt der Motor höher, als wenn sich das Fahrzeug von ihm entfernt. Der Motor strahlt aber die gleichen Geräusche wie vorher ab. Wie kann man das erklären? Die Lösung gibt uns ein physikalisches Gesetz, der *Doppler*-Effekt:
Bewegt sich die Quelle einer Wellenerregung relativ zum Beobachter, so ändert sich die von diesem beobachtete Frequenz.

Der Prager Mathematiker *Christian Doppler* (1803 bis 1853) beschäftigte sich mit diesem Problem und legte damit den Grundstein für die heutigen Anwendungen. Besonders in der Astro- und Kernphysik sind viele Beobachtungen und Messungen nur durch Ausnutzung dieses Naturgesetzes möglich.
Wir wollen aber bei dem Spezialfall der Schallwellen bleiben. Ehe wir zum konkreten Beispiel kommen, müssen wir uns noch mit einem anderen physikalischen Gesetz vertraut machen, der Grundgleichung der Wellenlehre. Sie stellt den Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit c, der Frequenz f und der Wellenlänge λ der Welle dar:

$$c = f \cdot \lambda. \qquad (1)$$

Nehmen wir eine Lufttemperatur von 20 °C an, so beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle $c = 343\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ Damit läßt sich aus der Wellenlänge λ die Frequenz f und umgekehrt aus f die Wellenlänge λ berechnen.
Da die Frequenz f die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit angibt, gilt für die Zeit T einer Schwingung

$$T = \frac{1}{f} \qquad (2)$$

und Gleichung (1) läßt sich auch schreiben als

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ bzw. } \lambda = c \cdot T. \qquad (3)$$

Nun brauchen wir nur noch zu wissen, daß hohe Töne größere Frequenzen besitzen als tiefe, und können unser Beispiel qualitativ beschreiben. Zunächst berechnen wir die Frequenz f_1, die unser Beobachter empfängt, wenn sich das Fahrzeug auf ihn zubewegt:
Ist das Auto im Punkt P_1, so drücke unser Fahrer T_0 Zeiteinheiten lang auf die Hupe,

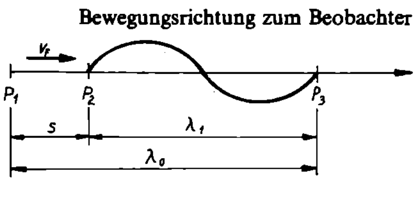


Bild 1

d. h., es wird ein Ton der Frequenz f_0 abgestrahlt (Bild 1).
Nach der Zeit T_0 hat der Anfangspunkt der Schallwelle wegen Gleichung (3) die Strecke $\overline{P_1P_3} = \lambda_0 = c \cdot T_0$ zurückgelegt. Das Auto hat in dieser Zeit den Weg $\overline{P_1P_2} = s = V_F \cdot T_0$ zurückgelegt (V_F sei die Geschwindigkeit des Fahrzeugs) und strahlt in P_2 den letzten Punkt der Welle der ersten Periode ab. Anfangs- und Endpunkt haben also den Abstand $\overline{P_2P_3}$, der die neue Wellenlänge λ_1 der beobachteten Welle ist. Aus Bild 1 wird deutlich, daß gilt

$$\overline{P_2P_3} = \lambda_1 = \lambda_0 - s, \text{ also}$$
$$\lambda_1 = c \cdot T_0 - V_F \cdot T_0$$
$$\lambda_1 = (c - V_F)\, T_0$$
$$\lambda_1 = \frac{c - V_F}{f_0}.$$

Für die beobachtete Frequenz f_1 folgt wegen Gleichung (1)

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{\frac{c - V_F}{f_0}} = \frac{c}{c - V_F} f_0 \qquad (4)$$

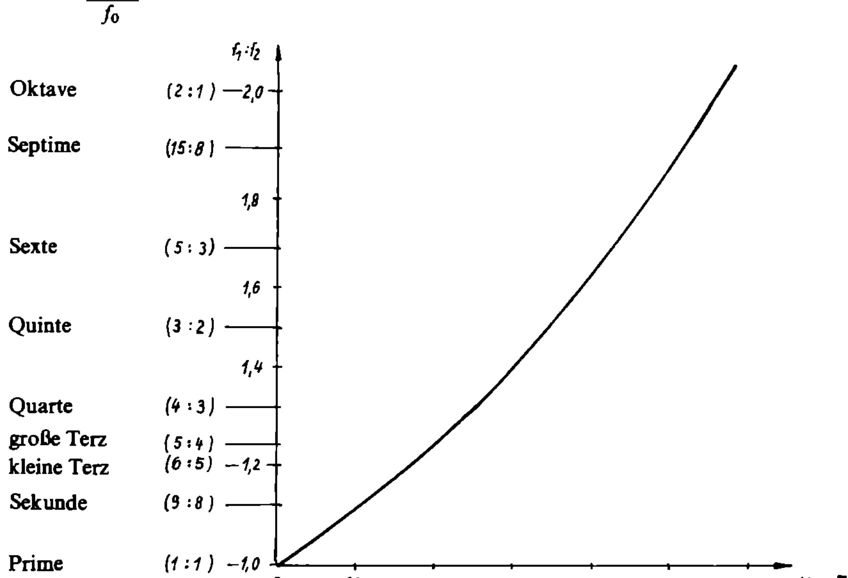


Bild 2

Entfernt sich das Fahrzeug vom Beobachter, so müssen wir die Geschwindigkeit V_F als negativ betrachten. (Das Vorzeichen hängt also von der Richtung ab!)
Die Welle wird jetzt nicht „kürzer", sondern „länger".
Fassen wir zusammen: Kommt ein die Frequenz f_0 abstrahlendes Fahrzeug mit der Geschwindigkeit V_F auf uns zu, so hören wir die Frequenz $f_1 = \frac{c}{c - |V_F|} f_0$, entfernt es sich von uns, so hören wir die Frequenz $f_2 = \frac{c}{c + |V_F|} f_0$ (c Schallgeschwindigkeit).
Fährt das Fahrzeug an uns vorbei, so beobachten wir das Verhältnis

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{c}{c - |V_F|} f_0 : \frac{c}{c + |V_F|} f_0 = \frac{c + |V_F|}{c - |V_F|} \qquad (5)$$

Bemerkenswert ist, daß dieses Verhältnis von der abgestrahlten Frequenz f_0 unabhängig ist und nur von der Geschwindigkeit V_F des Fahrzeugs abhängt. In der Musik werden Tonhöhenunterschiede als Intervalle bezeichnet. Jedem Intervall ist ein festes Frequenzverhältnis zugeordnet. Bild 2 veranschaulicht die Gleichung (5):

Natürlich registrieren wir den Doppler-Effekt auch bei Bewegung des Beobachters und ruhender Schallquelle. Entfernt sich unser Beobachter von der ruhenden Schallquelle, so können wir nicht mehr mit der allgemeinen Ausbreitungsgeschwindigkeit c rechnen, sondern müssen die Relativgeschwindigkeit zwischen Schallquelle und Beobachter benutzen. Diese beträgt $c - V_B$, wenn V_B die Geschwindigkeit des Beobachters ist. Der Beobachter „läuft der Welle voraus", sie „erreicht ihn langsamer". Es gilt also nach (1)

$$c - V_B = f \cdot \lambda \rightarrow f = \frac{c - V_B}{\lambda} \qquad (6)$$

Bewegt sich der Beobachter auf die Schallquelle zu, so müssen wir V_B als negativ betrachten, die Relativgeschwindigkeit wird größer ($c + |V_B|$).

Bewegen sich Beobachter und Schallquelle, so ist in Gleichung (6) statt λ die oben berechnete Wellenlänge λ_1 einzusetzen:

$$\lambda_1 = \frac{c - V_F}{f_0} \rightarrow f_1 = \frac{c - V_B}{c - V_F} f_0 \tag{7}$$

Mit (7) erhalten wir die allgemeine Gleichung zur Beschreibung des Doppler-Effektes für Schallwellen.

Darauf aufbauend lassen sich viele interessante Varianten diskutieren. Es kommt stets auf die richtige Verknüpfung der mathematischen und physikalischen Gesetze an. Zur Anregung sei hier noch ein Beispiel angedeutet: Im eingangs betrachteten Phänomen haben wir nichts über die Änderung der Tonhöhe in unmittelbarer Nähe des Beobachters gesagt. Dabei bewegt sich das Fahrzeug ja weder direkt auf den Beobachter zu, noch entfernt es sich gerade von ihm, denn der Beobachter hat von der Fahrbahn den Abstand l.

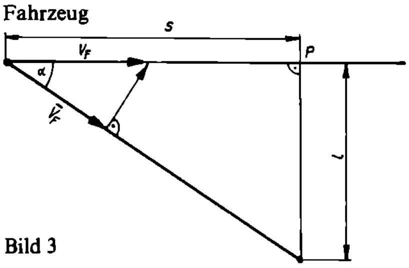


Bild 3

Uns interessiert also der Teil $\overline{V_F}$ der Geschwindigkeit V_F, der in Richtung des Beobachters wirkt. Die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Größe und läßt sich darum in zueinander senkrechte Komponenten zerlegen (Bild 3 illustriert dies, sofern man den Sachverhalt als ebenes Problem ansieht). Hat das Fahrzeug vom Begegnungspunkt P den Abstand s und sieht der Fahrer den Beobachter unter dem Winkel α, so gilt

$$\overline{V_F} = V_F \cdot \cos\alpha,$$

$$\overline{V_F} = V_F \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \text{ mit } \tan\alpha = \frac{l}{s},$$

$$\overline{V_F} = V_F \cdot \frac{|s|}{\sqrt{s^2+l^2}} \quad .$$

Nach Gleichung (4) folgt also

$$f_1 = \frac{c}{c - \overline{V_F}} f_0 = \frac{c}{c - \frac{|s| \cdot V_F}{\sqrt{s^2+l^2}}} f_0$$

$$f_1 = \frac{c\sqrt{s^2+l^2}}{c\sqrt{s^2+l^2} - |s|\, V_F} f_0 \tag{8}$$

Für festes l, f_0 und V_F ist f_1 eine Funktion von s, deren Verlauf Bild 4 am Beispiel $l = 2m$, $f_0 = 660$ Hz und $V_F = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ verdeutlicht.

Wie schon erwähnt, lassen sich viele weiterführende Varianten diskutieren, z. B.

- können verschiedene Bewegungsgeraden oder gar gekrümmte Bewegungsbahnen für Beobachter und Fahrzeug untersucht werden;
- es können Brücken zugelassen werden, die die dritte Dimension ins Betrachtungsfeld bringen;
- es können beschleunigte Bewegungen untersucht werden;
- es kann der Wind beachtet werden, der die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls richtungsabhängig macht.

Vielleicht versucht ihr es einmal?

Die Grundgesetze der Mathematik und Physik reichen zu diesen Untersuchungen völlig aus; im Zweifelsfall hilft sicher euer Physiklehrer.

M. Weicker

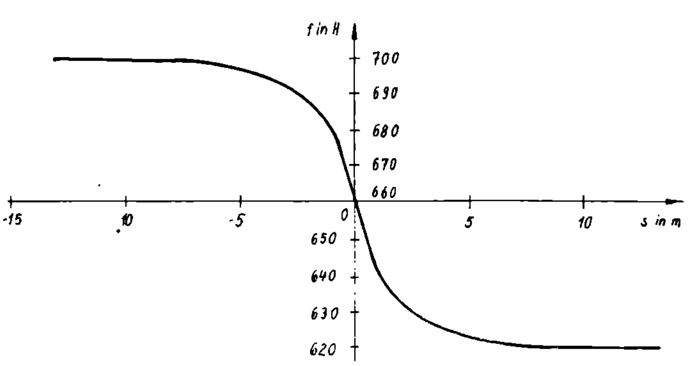


Bild 4

Wie funktioniert das Verkehrsradar?

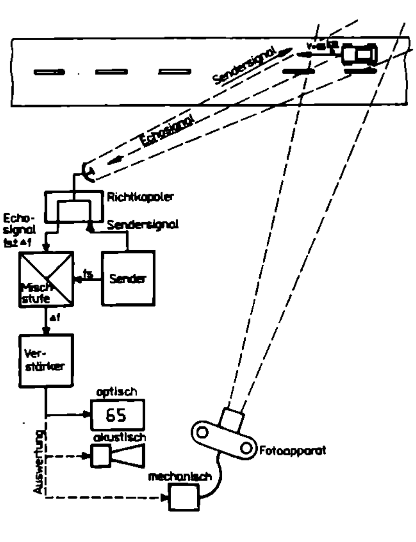
Alle Kraftfahrer kennen es, viele fürchten es, aber nur wenige kennen seine Wirkungsweise. Einige sprechen von der „Radarfalle". Mit welchem Recht von „Falle", wenn viele Verkehrsunfälle auf überhöhte Geschwindigkeit zurückzuführen sind?

Das Radarprinzip nutzt die von Gegenständen reflektierte Energie (die Echos) einer vom Radargerät ausgesendeten Funkwelle hoher Frequenz aus. Die Funkwelle kann impulsförmig (Impulsradar) oder dauernd (Dauerstrichradar) ausgesendet werden. Die Sendeantenne wirkt auch als Empfangsantenne.

Das Verkehrsradar ist ein Dauerstrichradar. Eine Welle mit der Frequenz $f \approx 10$ GHz $= 10^{10}$ Hz wird durch eine Antenne scharf gebündelt und abgestrahlt. Die Frequenz der reflektierten Welle ist wegen des Doppler-Effektes verändert. Bewegt sich ein Beobachter auf eine Schallquelle zu, schneidet er pro Zeiteinheit mehr Schallwellen, als wenn er sich nicht bewegt. Das gilt auch für einen ruhenden Beobachter und eine bewegte Schallquelle. Ein fahrendes Auto verändert also die Frequenz des reflektierten Signals, und diese Änderung ist der Geschwindigkeit proportional. Das ist die Wirkung des Doppler-Effektes. Nach diesem Prinzip arbeitende Radargeräte werden als Doppler-Radar bezeichnet.

Die reflektierte Welle wird im Radargerät mit einem Teil der ausgesendeten Wellen überlagert. Dabei entsteht eine Differenzfrequenz, die nur von der Geschwindigkeit des Fahrzeuges abhängt. Sie liegt bei einigen 100 Hz, wird mit einem NF-Verstärker verstärkt und optisch angezeigt oder akustisch ausgewertet. Das Erfassen eines Fahrzeuges dauert nur den Bruchteil einer Sekunde. Bei einer digitalen Anzeige und einer Zähldauer von 0,1 s wird die Geschwindigkeit mit einer Genauigkeit von $\pm \frac{1\ \mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ angezeigt. Eine Anzeige erfolgt nur dann, wenn eine einstellbare Geschwindigkeitsgrenze überschritten ist. Der angezeigte Wert wird automatisch oder von Hand gelöscht. Moderne Ausführungen lösen bei Geschwindigkeitsüberschreitung einen Fotoapparat aus, der den Sachverhalt fixiert. Für die Messung ist es unwesentlich, ob sich das Fahrzeug auf das Radargerät zu oder von ihm weg bewegt. Neben der bekannten Geschwindigkeitsmessung können mit einem Verkehrsradargerät auch Zählungen der passierenden Fahrzeuge oder die Steuerung von Ampeln in Abhängigkeit von der Verkehrsdichte durchgeführt werden.

W. Ausborn



alpha-Wettbewerb 1982/83

Abzeichen in Gold

Fortsetzung und Schluß siehe S. 44

Für siebenjährige Teilnahme

Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Anke Kusch, beide Halberstadt; Frank Siebert, Dany Lindenberg, beide Halle; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Andreas Niepel, Ricarda Damm, beide Karl-Marx-Stadt; Elke Willek, Kriebitzsch; Stefan Hähnel, Heiko Schinke, beide Leuna; Ruth Backhaus, Leinefelde; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Kerstin Paul, Nordhausen; Sabine Oestreich, Oschersleben; Margit Möllhoff, Piesau; Gudrun Zirnstein, Pirna; Carmen Henze, Pratau; Frank Berndt, Radeburg; Andreas Korb, Raschau; Ines Gülden, Roitzsch; Gitta Schöne, Rostock; Jürgen Schmalisch, Rotta; Ronald Bojarski, Saßnitz; Birgit Nößler, Schmalkalden; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Frank Pampel, Schneeberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Kurt Schulze, Schernberg; Stephan Meyerhöfer, Strasburg; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Doris Grünler, Thierbach; Ines Hoffmann, Weißwasser; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Jörg Steinbach, Zwickau; Thomas Streich, Brandenburg; Iljana Planke, Premnitz; Roland Hesse, Bad Blankenburg

Für sechsjährige Teilnahme

Frank Schönherr, Anklam; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckhardt, Manuela Winges, beide Bad Liebenstein; Holger Neye, Susanne Krüger, Kerstin Kantiem, Andris Möller, Berit Kleinbauer, alle Berlin; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Thomas Peuker, Callenberg; Andreas Heinze, Uta Bolz, beide Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Wolfgang Tenor, Dessau; Christian Donath, Pedro Thiele, Susann Piry, Gerald Eichler, Ines Lauter, Kerstin Urban, Heiko Ringel, alle Dresden; Kerstin Westphal, Borna; Claudia Pleyer, Eisenach; Una Heinicke, Eisenberg; Enrico Dietrich, Stefan Nitzsche, beide Elsterwerda; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Mathias Gerlach, Friedeburg; Carmen Meikies, Gadebusch; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Christian Röhl, beide Gräfenhainichen; Thomas Wedekind, Grimma; Annett Eichner, Halle-Neustadt; Thomas Benusch, Heidrun Schmidt, beide Hoyerswerda; Gabi Missal, Insel; Andreas Paukert, Karbow; Katrin Richter, Hendrik Pönisch, beide Karl-Marx-Stadt; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Edith Löffler, Königshain; Andreas Helbig, Langenleuba-Ndr.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Sabine Mersiowsky, Uta Mersiowsky, beide Langewiesen; Andreas Eifler, Ralf Laue, beide Leipzig; Solveig Woitek, Leinefelde; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Angela Zschörper, Maltitz; Norbert Fuchs, Meiningen; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Sven Saar, Mühlhausen; Jörg Fiebig, Mülsen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Petra Hahn, Nordhausen; Michael Galetzka, Pirna; Jörg Stark, Plauen; Steffen Hoffmann, Potsdam; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Katrin Dorendorf, Riesa; Ralf Heidenreich, Roßleben; Grit Maciejewski, Rostock; Silke Gubick, Röbel; Jens Richter, Schkölen; Ingo Lohde, Schönefeld; Carola Paetow, Schwerin; Frank Zöllner, Sondershausen; Andreas Prpic, Birgit Götz, beide Sonneberg; Kai-Uwe Weber, Steinbach-Hallenberg; Cordula Gottwald, Stendal; Erhard und Anka Zilinske, Stralsund; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Dirk Wenzlaff, Vitte; Udo und Irene Michallik, Waren; Margret Boettcher, Stephan Thäter, beide Weimar; Barbara Schütze, Weißenfels; Dirk Lehmann, Weimar; Annett Seidel, Wismar; Agnes Jorzick, Wismar; Claudie Bock, Wolfen; Kerstin Barthelmes, Erika Schreiber, beide Zella-Mehlis; Heide Hilse, Zittau; Mathias Goltzsche, Zschopau

Für fünfjährige Teilnahme

Carsten Karl, Aken; Anka Sommer, Augsdorf; Jens Prochno, Reinhard Wegener, Christiane Mayer, Thomas Honigmann, Cornelia Wolf, Bernhard Napiontek, Norbert Dorn, Steffen Padelt, Steffen Meißner, Beate und Stefan Müller, alle Berlin; Jörg Leine, Berlstedt; Helge Dürschke, Bitterfeld; Klaus Asmus, Breitungen; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Thomas Bartmuß, Burow; Ramona Blank, Clingen; Christian Sitz, Calau; Matthias Winkler, Cossebaude; Sylke Riedel, Coswig; Manfred Roßius, Andreas Stenzel, Tino Seidler, Jens Leberwurst, Iris Dähn, Daniela Syrbe, Thomas Lundershausen, alle Cottbus; Jörg Uhlig, Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Jörn Fache, Culitzsch; Jens Fuchs, Bert Kühne, beide Dahme; Heike Förster, Christian Nolte, Beate Klöppner, Andrea Wetter, alle Dingelstädt; Carola Schwerdtner, Dohna; Stefan Mattausch, Michael Nitsche, René Pratsch, Oliver Geupel, Silke Riechen, Helmut und Carsten Schreiber, Annegret Wustmann, Thomas Hübner, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Bert Minske, Eberswalde; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Heike Norgner, Falkenstein; Astrid Abt, Manuela Mäder, beide Fambach; Hans Schröer, Finsterwalde; Henry Mäder, Frohburg; Annett Helbig, Frankfurt (Oder); Ansgar Heise, Görlitz; Ingolf Thurm, Gößnitz; Andreas Kersten, Gräfenhainichen; Mathias Schleif, Gransee; Karsten Sonnemann, Grabow; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Henning Salz, Halle; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Robert Siegel, Hecklingen; Uta Reck, Heiligenstadt; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Kai Schröder, Holzengel; Peter Hermann, Hoyerswerda; Elke Schumann, Jahnishausen; Matthias Katzschmann, Jena; Kai-Uwe Scherer, Jessen; Claudia Docter, Ilsenburg; Andreas Israel, Ingolf Knopf, Rüdiger Gränitz, Annegret Schatte, Hildegard Geisler, Sebastian Horbach, Carla Umlauf, alle Karl-Marx-Stadt; Helge Müller, Königsee; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Karsten Schmidt, Kolochau; Gert Künzelmann, Krina; Steffen Heyde, Latdorf; Bianka Schulze, Bernd Fucke, Petra Gollewsky, Stephan und Klemens Rebbelmund, Matthias Hübner, alle Leipzig; Michael Seidel, Leuna; Glen Stachowski, Löbau; Ulf Brandes, Lüblow; Ekkehard Ludwig, Lühmannsdorf; Stefan Brünner, Löderburg; Susanne Wolf, Magdeburg; Wolfram Hoppe, Marienberg; Simone Brungräber, Marxwalde; Tilo Grüneberger, Nerchau; Anja Voß, Neustadt; Jutta Reißmann, Niesky; Torsten Linß, Nordhausen; Frank Jäger, Oberschönau; Gerlinde Lehmann, Pahrenz; Tibor Leitz, Parchim; Hellmut Schenk, Pirna; Henning Schulz, Potsdam; Katja Uhlemann, Prausitz; Klaus-Peter Lindner, Ingolf Pitz, beide Rackwitz; Jens Papperitz, Radebeul; Irma Goßmann, Rheinsberg; Andrea Puls, Röbel; Annette Schubert, Schalkau; Ronald Kaiser, Schleid; Beate Malsch, Babett Müller, Winfried Ullrich, alle Schmalkalden; Sven Hader, Schlotheim; Maik Schönherr, Schmölln; Sylke Lüder, Edgar Lüder, beide Schönborn; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Heidi Böttger, Sondershausen; Susanne Krieger, Sömmerda; Bernd Urbanek, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Peter Luck, Michael Holland-Moritz, René Bieber, Christian Usbeck, Beate Nothnagel, Heike Zimmermann, Sabine König, Angela Müller, Jacqueline Häfner, alle Steinbach-Hallenberg; Helmut Sauerbrei, Suhl; Armin Singer, Teichwolframsdorf; Silvia Reinwarth, Teltow; Wolfram Fischer, Torgau; Lars Brückner, Vacha; Uta Michallik, Waren; Jan Herrmann, Wechselburg; Horst Rißmann, Wesenberg; Klaus Michel, Wismar; Ralph Bock, Wolfen; Volker Richter, Wutha; Andrea Schmidt, Zella-Mehlis; Maik Drößler, Marion Nemczak, Kerstin Kowaczek, alle Zschornewitz; Michael Creutzburg, Thal; Sönke Maeß, Bad Doberan

Für vierjährige Teilnahme

Ralf und Wolfgang Beukert, Beatrice List, alle Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Jens Humpisch, Bad Gottleuba; Ulli Zülicke, Bergwitz; Clemens Thielecke, Matthias Tittel, Marko Pohl, Ines Tappe, Thorsten Brandt, Karen Böhme, Yvonne Selke, Jörg Stephan, R.-Birk Schulze, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Martina Sternickel, Bernterode; Frank-Jürgen Schwerin, Grit Giering, beide Blumberg; Karin Sankat, Kirsten Hoffmann, beide Boizenburg; Andreas Bötticher, Breitenworbis; Peter Sitz, Calau; Michael Enig, Crimmitschau; Sylvi Fache, Culitzsch; Andreas Donaubauer, Dahlen; Matthias und Michael Ludwig, Dahme; Markus und Sebastian Vockrodt, Dingelstädt; Kerst Griesbach, Dorfchemnitz; Britta Schumacher, Angela Michael, Yvonne Sachse, Bernd Miethig, alle Dresden; Mario Thiel, Eisleben; Matthias Voigt, Eisenach; Jörg Simon, Engelsdorf; Astrid Mönch, Erfurt; Peter Wenschuh, Ulrich Wenschuh, beide Falkenstein; Cornelia Heymel, Daniela Pilgrim, beide Fambach; Mathias Eger, Floh; Ute Frank, Forst; Ulf Winkler, Frankenberg; Olaf Krause, Frankfurt (Oder); Dorothee Heidrich, Freiberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Thomas Brahmann, Freital; Iris Ebert, Gertitzsch; Raik Langlotz, Grabko; Volker Pohlers, Andreas Funk, Ulf Gebhardt, alle Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Ragna Siol, Maike Thiele, beide Grimma; Kathrin Henker, Groitzsch; Diana Schulz, Grube; Holger Porath, Güstrow; Regine Mallwitz, Güstrow; Bernd Heinold, Andrea Fieder, Beate Thomas, alle Halle; Beate Kaczmarek, Antje Hüttig, Jörg Langwald, Christina Schmerling, alle Halle-Neustadt; Heike Reichelt, Mandy Probst, Matthias Schädlich, Simone Pötzsch, alle Hammerbrücke; Ilka Hartmann, Hartmannsdorf; Mirko Müller, Hermannsdorf; Heidi Konarski, Hohenbucko; Silvio Fiedler, Hoyerswerda; Silke Umbreit, Ilmenau; Ines Wagenknecht, Ivenack; Silke Rendelmann, Kahla; Annette Maier, Michael Tix, Ingo Neubert, Jens Weber, Jürgen und Michael Hoppe, Volker Liebert, Gert Reifarth, Ulrich Weinhold, Grit Lohse, Birgit Lindner, Jacqueline Lindner, alle Karl-Marx-Stadt; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Lutz Arnold, Kay-Uwe August, Sabine Albrecht, Heike Schneider, Annett Urbainczyk, alle Kieselbach; Ute Studzinski, Kietz; Torsten Schütze, Klettenberg; Susan Hoffmann, Klingenthal; Sylva Stein, Köthen; Annette und Simone Kauert, Silke Winzek, alle Langenweddingen; Martin Böhm-Schweizer, Lauscha; Karola Funke, Antje Willenberg, Bernadette Solf, Grit Hartung, Udo Woitek, alle Leinefelde; Uwe Werner, Leipzig; Jens Söll, Jörg Zimmermann, Frank Schönbach, André Gartner, Kerstin Müller, Heiko Fröhlich, Ralf Rogel, Jens Grunert, alle Lössau; Peter Gerlach, Lübs; Ulrich Härtel, Carsten Behling, beide Magdeburg; Angelika Schlegel, Mahlsdorf; Uwe Latz, Meyenburg; Frank-Thorsten Bölter, Mühlhausen; Michael Weber, Mühlhausen; Elvira Korölus, Andreas Suchanow, beide Neubrandenburg; Susanne Lind, Neuhaus; Mario Walther, Neundorf; Undine Henker, Neukirch; Kathrin Massanek, Neusornzig; Kerstin Lettau, Ulf Woike, beide Neustadt; Roland Marquardt, Neustrelitz; Antje Flechsig, Obercrinitz;

Geometrie hilft der Arithmetik

In diesem kleinen Beitrag möchten wir unmittelbar an Kenntnisse aus dem Unterricht anschließen. Geometrische Sichten wie in den folgenden Flächen- oder Volumenbetrachtungen können der Arithmetik helfen.

1. Vom „Klammer"-Rechnen

Wir erinnern zunächst an die Formel, die du zur Berechnung des Flächeninhalts A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b (in der 5. Klasse) kennengelernt hast; sie lautet: $A=a\cdot b$. Bei gleicher Längeneinheit (z. B. 1 cm) und dazugehöriger Flächeneinheit (1 cm^2) ist der Zahlenwert des Flächeninhalts eines Rechtecks gleich dem Produkt der Zahlenwerte der Seitenlängen. Auf diese Weise können wir das Produkt zweier positiver Zahlen durch eine rechteckige Fläche darstellen.

Kann man auf diese Weise Rechenregeln über Produkte von positiven Zahlen erkennen?

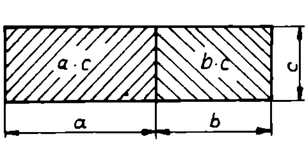
Wir beginnen mit dem Produkt $(a+b)\cdot c$. Dazu können wir uns ein Rechteck mit den Seitenlängen $(a+b)$ und c angeben (siehe Bild 1). Sein Flächeninhalt ist offenbar gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Teilrechtecke mit den Seitenlängen a und c bzw. b und c. Also gilt die Formel

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$,

die du unter der Bezeichnung *Distributivgesetz* kennst.

Nun kannst du bei den folgenden Aufgaben entsprechend vorgehen.

Bild 1



▲1▲ Forme $(a+b)\cdot(c+d)$ für positive Zahlen a, b, c, d in eine Summe um!

▲2▲ Es seien a, b, c positive Zahlen und $a>b$. Forme $(a-b)\cdot c$ um!

Wir formen nun $(a-b)\cdot(c-d)$ um, wobei a, b, c, d positive Zahlen und $a>b$ und $c>d$ sei. In einem Rechteck mit den Seitenlängen a und c läßt sich leicht ein Rechteck mit den Längen $a-b$ und $c-d$ angeben, siehe Bild 2.

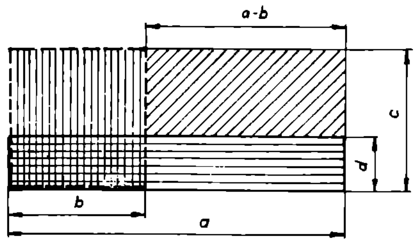


Bild 2

Um diese Rechtecksfläche aus der mit den Seitenlängen a und c zu erhalten, schneiden wir die Rechtecksflächen mit den Seitenlängen a und d und mit den Seitenlängen b und c (siehe Bild 2) ab. Dabei wird aber die Rechtecksfläche mit den Seitenlängen b und d zweimal erfaßt. Zur Korrektur ist dieser Flächeninhalt am Ende noch zu addieren. Damit erhalten wir folgende Formel:

$(a-b)\cdot(c-d)=a\cdot c-a\cdot d-b\cdot c+b\cdot d$.

▲3▲ Betrachte

a) $(a+b)^2$ als Spezialfall der 1. Aufgabe,

b) $(a-b)^2$ als Spezialfall der gerade abgeschlossenen Überlegungen und

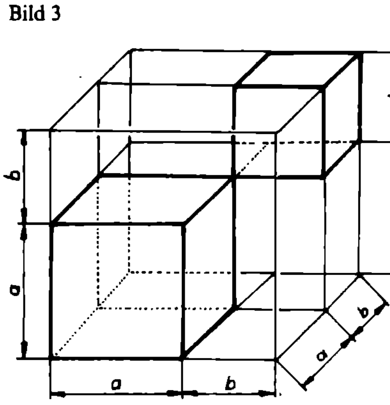
c) $(a+b)\cdot(a-b)$!

Die Formeln, die sich in der 3. Aufgabe ergeben, nennt man *binomische Formeln*. Du lernst sie eigentlich erst in der 9. Klasse kennen, dann aber als gültige Formeln für alle Zahlen.

Wer über ein gutes Raumvorstellungsvermögen verfügt, kann jetzt solche Überlegungen auch mit Hilfe von Volumenberechnungen anstellen. Wir betrachten als einfaches Beispiel einen Würfel und seine dem Bild 3 angegebenen Zerlegungen. Indem man sich das Volumen des gesamten Würfels aus den Volumina der einzelnen acht Quader (davon zwei Würfel) zusammengesetzt denkt, kann man daraus ablesen:

$(a+b)^3=a^3+3a^2\cdot b+3a\cdot b^2+b^3$.

Bild 3



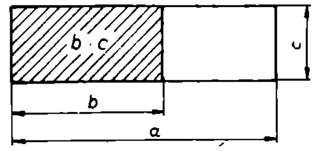
2. Rechnen mit Größenvergleichen

Wir betrachten positive Zahlen a, b und c und untersuchen die Frage: Welcher Vergleich von $a\cdot c$ und $b\cdot c$ ergibt sich aus $a>b$?

Das läßt sich wieder geometrisch wie oben leicht beantworten. Anhand des Bildes 4 ist sofort zu sehen:

Aus $a>b$ folgt $a\cdot c>b\cdot c$.

Bild 4



▲4▲ Man vergleiche $a\cdot c$ und $b\cdot d$, wenn $a<b$ und $c<d$ ist!

▲5▲ Kann ein Vergleich von $a\cdot c$ und $b\cdot d$ angegeben werden, wenn $a<c$ und $b<d$ gilt?

3. Wie viele sammelten?

Eine Schülergruppe geht Kastaniensammeln. Dazu stehen ihr zwei Behälter für den Transport zur Verfügung, von denen einer doppelt so viel faßt wie der andere. In der ersten halben Stunde schüttet die ganze Gruppe die Kastanien nur in den großen Behälter. In der nächsten halben Stunde füllt eine Hälfte der Gruppe den großen Behälter, die andere Hälfte sammelt in den kleinen Behälter. Bis auf ein Kind müssen die übrigen der Gruppe dann nach Hause. Dieses Kind füllt schließlich in der nächsten Stunde den kleinen Behälter. Wie viele Kinder sammelten? Wir wollen noch voraussetzen, daß alle Schüler mit dem gleichen Fleiß sammeln, also in der gleichen Zeit die gleiche Menge. Wer von euch mit Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen gearbeitet hat, wird wohl gleich zu dieser Möglichkeit greifen. Doch es geht einfacher und übersichtlicher, wenn man die Aufgabenstellung geometrisch sieht.

Wir stellen uns die Behälter als Quader mit gleicher Grundfläche vor. Der große Behälter muß dann doppelt so hoch sein wie der kleine (Bild 5). Da zum Füllen des großen Behälters zunächst die ganze Gruppe eine halbe Stunde und eine weitere halbe Stunde die Hälfte der Gruppe gebraucht hat, sammelt die Hälfte der Gruppe in einer halben Stunde $\frac{1}{3}$ des Fassungsvermögens des großen Behälters. Für das letzte Kind bleiben zum Füllen des kleinen Behälters demnach noch $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{6}$ des Fassungsvermögens des großen Behälters übrig. Dafür benötigte es eine Stunde. Zwei Schüler hätten also in einer

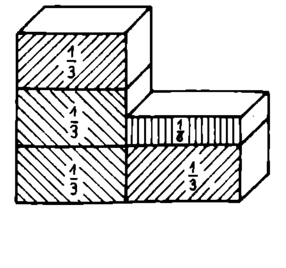


Bild 5

Stunde $\frac{1}{3}$ des großen Behälters gefüllt. Die gesamte Gruppe hatte aber in einer Stunde $\frac{4}{3}$ des Volumens des großen Behälters gesammelt (siehe nochmals Bild 5), also bestand die ganze Gruppe aus 8 Schülern.

▲6▲ Im August wurde der ursprüngliche Preis für Tomaten um ein Zehntel gesenkt. Der sich dadurch ergebende neue Preis sollte im September so erhöht werden, daß man wieder den ursprünglichen Preis erreicht. Um welchen Teil muß der Preis dann erhöht werden?

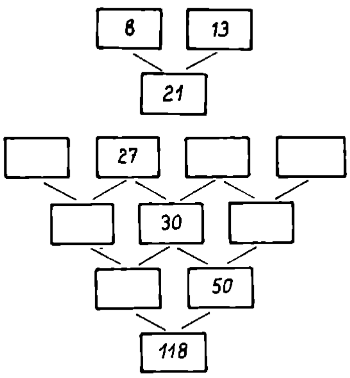
E. Quaisser/H.-J. Sprengel

mathematicus

Aufgaben zur Wiederholung von Grundkenntnissen Teil 1

Klasse 5

▲1▲ Ergänze die freien Felder, wenn paarweise zu addieren ist (siehe Muster)!



▲2▲ Berechne das arithmetische Mittel!

a) $\frac{1}{2}$ h; $\frac{1}{4}$ h; 20 min; 1500 s

b) $\frac{5}{4}$ ha; 20000 m^3; $\frac{3}{2}$ ha; $\frac{7}{4}$ ha; 15000 m^2

▲3▲

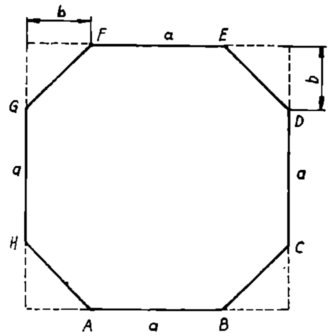
x	$x+\frac{1}{10}$	$x-\frac{3}{10}$
$\frac{7}{10}$		
$\frac{11}{10}$		
	1	
		0

▲4▲ Ergänze!

$a-b=1$

a	$\frac{9}{8}$	1,5				$1\frac{1}{4}$
b				$\frac{1}{10}$	0	

▲5▲ Welchen Flächeninhalt hat das Achteck *ABCDEFGH*, wenn $a=6$ cm und $b=1$ cm betragen?
(Skizze, nicht maßstäblich!)



▲6▲ Ergänze die Tabelle!

a	b	$a+b$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{3}{4}b$
20 cm	1 m			
0,4 t	6 dt			
$\frac{1}{2}$ h		30 min		
	6 m^2		500 dm^2	
	1500 cm^3			0,75 dm^3

▲7▲ Gleiche Symbole bedeuten gleiche Zahlen. Ergänze!

$\frac{1}{2}$ von ○ = □

$\frac{1}{3}$ von □ = △

$\frac{1}{4}$ von △ = 1

▲8▲ Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit $a=4$ cm. Spiegle dieses Quadrat zunächst an $A'B'$ und danach an $B'C'$!

▲9▲ Zeichne die folgenden Winkel mit Winkelmesser:
$\alpha=40°$; $\beta=50°$; $\gamma=60°$!
Zeichne mit Zirkel und Lineal:
$\alpha+\beta+\gamma$; $\alpha+\beta-\gamma$; $2\cdot\alpha-\gamma$; $\gamma-\beta+\alpha$!

▲10▲ Löse die Gleichungen!

a) $\frac{3}{4}\text{ km}+200\text{ m}+x=1\text{ km}$

b) $3x+\frac{1}{5}=\frac{7}{5}$

c) $\left(\frac{4}{10}x-x\right)\cdot 5=\frac{5}{10}$

d) $0{,}2\text{ h}+x+1{,}5\text{ h}=150\text{ min}$

▲11▲ Peter braucht mit dem Fahrrad für seinen Schulweg 25 min.
Seine Schwester ist mit ihrem Moped 2,5mal so schnell wie Peter.

▲12▲ Ein PKW schafft die Strecke von 1 km in durchschnittlich 50 s. Ergänze die folgende Tabelle unter dieser Voraussetzung!

Strecke:	1 km				360 km
Zeit:	50 s	300 s	20 min	1 h	

▲13▲ Quader: $a=35$ mm; $b=2$ cm; $c=\frac{2}{5}$ dm. Berechne den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt! Zeichne das Körpernetz!

▲14▲ In einem Rechteck von 30 cm Umfang ist eine Seite fünfmal so lang wie die andere. Berechne den Flächeninhalt!

▲15▲ In der Klasse 5a beteiligten sich 5 Schüler mehr an der Schulolympiade Mathematik als in der 5b. In der 5c waren es drei mehr als in der 5a. Insgesamt lösten 43 Schüler die Aufgaben der 1. Stufe. Wie war die Beteiligung in den einzelnen Klassen?

Diese Aufgaben entnahmen wir einem Heft des Kreises Löbau, zusammengestellt von den Fachberatern für Mathematik des Kreises. Teil 2 – speziell für Klasse 6/7 folgt in Heft 3/84.

V. Renčin, Praha

Teilbarkeitsregeln

Teil 2

An einigen Beispielen sei nun dargelegt, wie mit diesem Verfahren die Teilbarkeit durch t untersucht werden kann.

1. Es sei $z=18879$; dann ist
$A=1887$ und $E=9$ und $t=7$;
dann ist $a=0$, $e=7$ und $F(7)=-2$

1887 | 9 $\quad F(7)\cdot E$
-18 $\quad (-2)\cdot 9=-18$

$D_1=$ 186 | 9
-18 $\quad (-2)\cdot 9=-18$

$D_2=$ 16 | 8
-16 $\quad (-2)\cdot 8=-16$

$D_3=$ 0 ist durch 7 teilbar;
also auch 18879.

2. Ist $z=1358$ durch $t=13$ teilbar?
Es ist $A=135$; $E=8$; $a=1$; $e=3$
und $F(3)=3\cdot 1+1=4$. Es wird

135 | 8
$+32$

16 | 7
$+28$

44 ist nicht durch 13 teilbar,
demnach auch nicht 1358.

3. Ist $z=174454$ durch $t=23$ teilbar?
Es wird $a=2$; $e=3$
und damit $F(3)=3\cdot 2+1=7$

17475 | 4
$+28$ $\quad 4\cdot 7=28$

1750 | 3
$+21$ $\quad 3\cdot 7=21$

177 | 1
$+7$ $\quad 1\cdot 7=7$

18 | 4
$+28$ $\quad 4\cdot 7=28$

46
ist durch 23 teilbar; also auch $z=174754$.

4. Ist $z=75208$ durch $t=119$ teilbar?
Es ist $a=11$; $e=9$; demnach $F(9)=11+1=12$

7520 | 8
$+96$ $\quad 12\cdot 8=96$

761 | 6
$+72$ $\quad 12\cdot 6=72$

83 | 3
$+36$ $\quad 12\cdot 3=36$

119
ist durch 119 teilbar; also auch 75208.
Es ist $75208:119=632$.

5. Ist $z=425006$ durch $t=71$ teilbar?
Es wird $F(1)=-7$

42500 | 6
-42 $\quad (-7)\cdot 6=-42$

4245 | 8
-56 $\quad (-7)\cdot 8=-56$

418 | 9
-63 $\quad (-7)\cdot 9=-63$

35 | 5
-35 $\quad (-7)\cdot 5=-35$

0
ist durch 71 teilbar; also auch 425006. Es ist $425006:71=5986$.

6. Teilt $t=211$ $z=4191515$?
Es ist $a=21$; und $z=1$; also $F(1)=-21$

419151 | 5
-105

41904 | 6
-126

4177 | 8
-168

400 | 9
-189

211 ist durch 211 teilbar,
damit auch 4191515.

Wir geben eine Zusammenstellung der Hilfszahlen $F(e)$ für einige Teiler; die unterstrichenen Teiler sind Primzahlen.

t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$	t	$F(e)$
$\underline{3}$	+1	21	−2	39	+4	57	−17	$\underline{73}$	+22	91	−9
$\underline{7}$	−2	$\underline{23}$	+7	$\underline{41}$	−4	$\underline{59}$	+6	77	−23	93	+28
9	+1	27	−8	$\underline{43}$	+13	$\underline{61}$	−6	$\underline{79}$	−8	$\underline{97}$	−29
$\underline{11}$	−1	$\underline{29}$	+3	$\underline{47}$	−14	63	+19	81	−8	99	+10
$\underline{13}$	+4	$\underline{31}$	−3	49	+5	$\underline{67}$	−20	$\underline{83}$	+25	$\underline{101}$	−10
$\underline{17}$	−5	33	+10	51	−5	69	+7	87	−26	$\underline{103}$	+31
$\underline{19}$	+2	$\underline{37}$	−11	$\underline{53}$	+16	$\underline{71}$	−7	$\underline{89}$	+9	$\underline{107}$	−32

Dieser Aufstellung entnehmen wir, daß durch die Hilfszahl $F(9)=+1$ für $t=9$ die Quersumme von z gebildet wird. Ebenso erkennt man, daß $F(1)=-1$ für $t=11$ gleichbedeutend mit der Untersuchung der alternierenden Quersumme ist.

Für alle t, zu denen ein einstelliges $F(e)$ gehört, ist unsere Regel ganz gut handhabbar. Will man jedoch die Teilbarkeit durch $t=93$ prüfen, erweist sich das Arbeiten mit der Hilfszahl 28 ungünstig. Da 93 jedoch das Produkt der Primzahlen 3 und 31 ist, können wir zunächst mit der Quersummenregel die Teilbarkeit durch 3 prüfen (auch hier ist $F(e)=1$) und dann mit der Hilfszahl $F(1)=-3$ die Teilbarkeit durch 31 untersuchen. Ähnlich verfährt man bei den Teilern $t=33=3\cdot 11$ (Quersumme und Hilfszahl $F(1)=-1$), $t=77=7\cdot 11$ (Hilfszahl $F=-2$ und $F=-1$), $t=63=3^2\cdot 7$ (Quersumme und Hilfszahl $F=-2$).

Beispiel: Ist $z=525833$ durch $t=77=7\cdot 11$ teilbar?

Prüfen der Teilbarkeit durch 7; $F(7)=-2$	Prüfen der Teilbarkeit durch 11 Hilfszahl $F(1)=-1$
52583 | 3	52583 | 3
-6	-3
5257 | 7	5258 | 0
-14	-0
524 | 3	525 | 8
-6	-8
51 | 8	51 | 7
-16	-7
35 ist durch 7 teilbar.	44 ist durch 11 teilbar.

Da z durch jeden Primfaktor von $t=77$ teilbar ist, ist z auch durch 77 teilbar.

Gelegentlich kommt man zu günstigeren Hilfszahlen, wenn man von z statt einer Stelle 2 oder 3 Stellen abteilt, z also schreibt $z=100A+K$ mit $0\leqq K\leqq 99$ bzw. $z=1000A+R$ mit $0\leqq R\leqq 999$. Am bekanntesten ist die 1001-Regel: Man teilt von z die letzten 3 Stellen ab und subtrahiert diese dreistellige Zahl von der Rumpfzahl. Dann teilt 1001 die Zahl z genau dann, wenn 1001 diese Differenz teilt. Anders ausgedrückt:

1001 Teiler von $z=1000A+R \leftrightarrow 1001$ Teiler von $A-R$, d. h. die Hilfszahl ist $F=1$.

Beweis: 1001 □ $z \Rightarrow$

$1000A+R=1001\cdot r \mid \cdot F$

$1000A+RF=1001\cdot r\cdot F \mid +A-1000AF$

$A+RF=1001rF-A(1000F-1)$

Die Hilfszahl F ist also so zu wählen, daß $1001/1000F-1$, dies ist offensichtlich für $F=-1$ zu erreichen.

Beispiel:
Ist 45734689 durch 1001 teilbar?

45734 | 689
-689
45 | 045
-045
0 ist durch 1001 teilbar,
also auch 45734689.

Da $1001=7\cdot 11\cdot 13$ ist, hat man damit zugleich die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13 geprüft. Für $t=37$ ergibt sich als Hilfszahl $F=+10$, wenn man von z zwei Stellen abstreicht.

Beispiel: Ist 232693 durch $t=37$ teilbar? Es ist $f=10$

2326|93

+930

32|56

560

592 ist gleich $37\cdot 16$,

also ist z durch 37 teilbar.

Für $t=167$ ergibt sich die Hilfszahl $F=-5$, wenn man von z zwei Stellen abstreicht. Versuche das nach obigem Vorbild zu beweisen!

Beispiel: Ist $z=13\,185\,652$ durch $t=167$ teilbar?

131856|52

−260

1315|96

−480

8|35

−175

−167 ist durch 167 teilbar,

mithin auch z.

Es ist $13\,185\,652:167=78\,956$.

Abschließend nennen wir einige Hilfszahlen F für Teiler t, wenn von z zwei Stellen abgeteilt werden. Es sei also

$z=100A+K$ mit $A\in N$ und $K\in N$

$0\leq K\leq 99$. Dann ist

t	37	43	67	101	157	167	367
F	+10	−3	−2	−1	+11	−5	−11

Wenn wir von $z=1000A+R$ mit $A\in N$ und $R\in N$ $0\leq R\leq 999$ die letzten drei Stellen abtrennen, ergibt sich für $t=37$ die Hilfszahl $F=+1$.

Beispiel: Ist $z=195\,721\,231$

durch $t=37$ teilbar?

Wir kombinieren hier die verschiedenen Möglichkeiten, die Teilbarkeit durch 37 zu prüfen. Hilfszahl für 3 abzuteilende Stellen: $f=+1$

Hilfszahl für 1 abzuteilende Stelle: $F=-11$

195721|231

+231

195|952

+ 952

114|7 nun nur 1 Stelle abteilen;

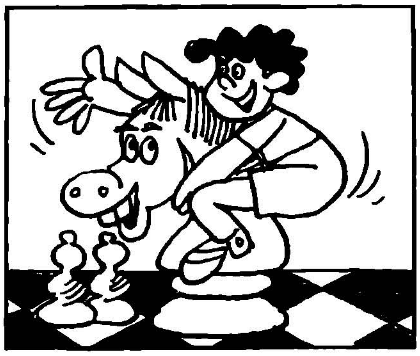
−77 Hilfszahl $F=-11$

37 ist durch 37 teilbar,

also auch z.

Man überzeugt sich leicht, daß dieses Verfahren schneller zum Ziel führt als die Division durch 37.

J. Portner (†)

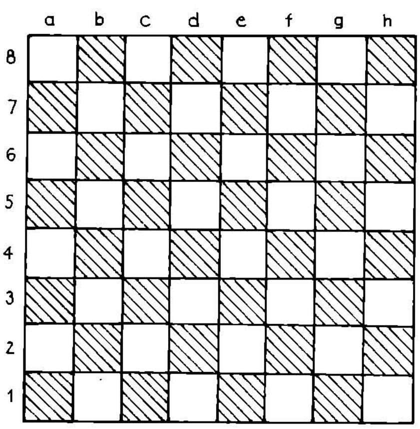


Acht und fünf

a) Stelle dir einmal auf dem leeren Schachbrett acht Damen so auf, daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können!

b) Und wie müßte man acht Damen so postieren, daß dabei ein Maximum von Feldern nicht von den Damen angegriffen ist?

c) Gelingt es dir, fünf Damen so aufzustellen, daß von ihnen alle Felder des Brettes kontrolliert werden?



Schach-Preisaufgabe

Für die Schachecke einer Zeitung wurden drei Preisaufgaben vorbereitet. Es wurden Abbildungen über die Stellung der Schachfiguren angegeben, bei denen in zwei, drei bzw. vier Zügen matt zu setzen ist. Aber die Namen der Autoren wurden getrennt von den Abbildungen vorgegeben, und man fragte den verantwortlichen Redakteur nach der Zuordnung.

Der Redakteur erinnerte sich aber auch nicht, wer welche Aufgabe geschickt hatte. Etwas wußte er jedoch:

(1) In einer sehr schönen Miniatur (d.h. einer Schachaufgabe, bei der höchstens noch 7 Figuren auf dem Brett stehen), welche der 15jährige Schüler Bernd Müller zuschickte, stand der weiße König auf demselben Feld wie in der Aufgabe von Gisela Neumann.

(2) Die Aufgabe von Viktor Schmidt, wo noch die schwarze Rochade möglich ist (d.h., der schwarze König sowie der Turm stehen noch auf den Anfangsfeldern), enthält genau die Hälfte von der Anzahl der Figuren wie Dreizüger.

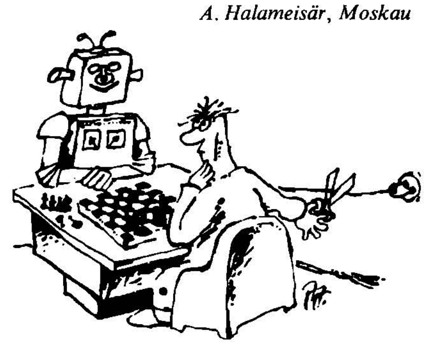
(3) Die Ehefrau vom Autor des Vierzügers ist die Schwester von Gisela Neumann.

Der verantwortliche Redakteur baute eine Tabelle auf:

Namen	Dreizüger	Zweizüger	Vierzüger
B. Müller			
G. Neumann			
V. Schmidt			

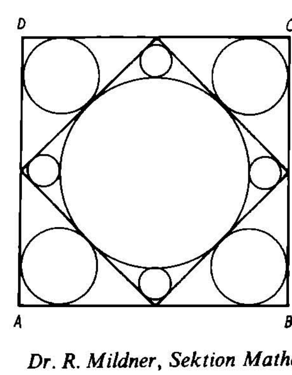
Und unter Berücksichtigung der obengenannten Bedingungen stellte er in die entsprechenden Kästchen Einsen, in die anderen – Nullen. Kannst du helfen, diese Einsen und Nullen in die Tabelle richtig einzusetzen?

A. Halameisär, Moskau



Eine harte Nuß

Das abgebildete Quadrat $ABCD$ habe die Seitenlänge a. Berechnet die Summe der Flächeninhalte aller in diesem Quadrat enthaltenen Kreise!



Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 2

Ein Lokomotivführer ist in Nöten

Fräulein Steinmann, die Leiterin unseres Mathematikzirkels, hatte uns eine Aufgabe von einer Friedensfahrtetappe gestellt; sicher wußte sie, daß wir Jungen im vergangenen Jahr mit dem Rad in dem schönen Städtchen L waren, um den Friedensfahrern einen begeisterten Empfang zu bereiten.

Wieviel voneinander verschiedene Möglichkeiten des Zieleinlaufs es bei einer siebenköpfigen Spitzengruppe gibt, hatten wir schon auf dem Heimweg ausgerechnet: Bei 7 Elementen gibt es 7! Permutationen. (Vgl. *alpha* Heft 1, Seite 16.) Wir rechneten sogar „im Kopf": $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Eine solch große Zahl hatte von uns niemand vermutet.

Doch die zweite Aufgabe bereitete uns allerhand Kopfzerbrechen, und ohne die Hilfe unserer klugen Zirkelleiterin hätten wir die Lösung sicher nicht gefunden:

Bei wieviel der möglichen Einläufe steht mindestens ein, höchstens ein bzw. genau ein Fahrer aus der DDR auf dem Siegertreppchen für die ersten drei, wenn unter den 7 Fahrern aus der Spitzengruppe zwei aus der DDR waren?

Mit den Formulierungen „genau ein" (einer und keiner mehr und auch keiner weniger), „höchstens einer" (keiner oder genau einer) bzw. „mindestens einer" (genau einer oder mehr als einer) hatte uns Fräulein Steinmann schon oft zur Aufmerksamkeit gezwungen.

Wir stellten zunächst fest, daß es genau die 6 Möglichkeiten des Einlaufs dafür gibt, daß *beide* DDR-Fahrer – wir nennen sie L und P – auf dem Siegerpodest stehen.

1. L L P P – –
2. P – L – L P
3. – P – L P L

Zu jeder dieser Plazierungen gehören 5! Einlaufmöglichkeiten, die sämtlich voneinander verschieden sind. Also kommen in $6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Fällen *genau zwei* DDR-Fahrer unter die ersten drei.

Wir untersuchten nun den Fall, daß mindestens 1 DDR-Fahrer unter den ersten drei ist.

Zu jeder der 6 Möglichkeiten in den Spalten der Plazierungstabelle von L bzw. P gibt es 6! Möglichkeiten für den Einlauf der restlichen sechs Fahrer.

1. L – – P – –
2. – L – – P –
3. – – L – – P

Dabei treten jeweils auch die Fälle auf, in denen der zweite DDR-Fahrer auf einen der ersten drei Plätze einkommt.

Schon glaubten wir, den Fall berechnet zu haben, für den *mindestens* ein DDR-Fahrer unter den ersten drei ist; doch zu unserem Glück merkte Gunter, daß dabei $6 \cdot 5!$ Fälle doppelt gezählt werden, denn der Fall, daß z. B. L erster und P zweiter wird, kann in der ersten und in der fünften Spalte der Tabelle auftreten. Also gibt es $6 \cdot 6! - 6 \cdot 5! = 4320 - 720 = 3600$ Einlaufmöglichkeiten, in denen *mindestens ein* DDR-Fahrer unter den ersten drei ist.

„Nun ist alles einfach", jubelte Ralph nach kurzem Nachdenken, zeichnete eine Skizze an die Tafel und meinte, daß man mit den Zahlen 5040, 3600 und 720 schnell die restlichen beiden Teilaufgaben lösen kann. (Ob der Leser dies auch schafft?)

„Und weiter?" fragte die ungeduldige Kerstin. Unser Fräulein Steinmann zuckte nur die Achseln, und da wußten wir, daß sie uns wieder einmal eine Aufgabe wohlverpackt überreicht hatte. „Hundert verschiedene Wagenanordnungen gibt es gar nicht", meinte Corinna, die schon öfter mit einem D-Zug gefahren war. „Es gibt 11! Möglichkeiten, das sind mehr als 1000", widersprach Utta. Doch Oliver teilte auch diese Meinung nicht, da ja eine Umordnung *gleicher* Wagen an der Wagenfolge nichts ändern würde.

Fräulein Steinmann schrieb eine Wagenfolge an:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_1	W_1	L	L	S	G

Natürlich gibt es 11! Möglichkeiten, die Wagenfolge umzuordnen, doch das Vertauschen etwa des 2. mit dem 3. Wagen „bewirkt nichts"; es entsteht keine andersartige Wagenfolge. Die 5! Möglichkeiten, die Wagen 2. Klasse miteinander zu vertauschen (und die anderen dabei festzulassen) fallen deshalb zu einer Permutation zusammen. Wir stellten fest:

5 Wagen 2. Klasse: 5! Permutationen fallen zusammen, 2 Wagen 1. Klasse: 2! Permutationen fallen zu einer zusammen,

2 Liegewagen: 2! Permutationen fallen zu einer zusammen.

$$\overbrace{\underbrace{\text{kein DDR-Fahrer „vorn"} \quad \overbrace{\text{genau ein DDR-Fahrer „vorn"}}^{}}_{\text{höchstens ein DDR-Fahrer „vorn"}} \quad \text{genau zwei DDR-Fahrer „vorn"}}^{\text{Alle Einlaufmöglichkeiten}}$$

Alle Einlaufmöglichkeiten

kein DDR-Fahrer „vorn" | genau ein DDR-Fahrer „vorn" | genau zwei DDR-Fahrer „vorn"

höchstens ein DDR-Fahrer „vorn"

mindestens ein DDR-Fahrer „vorn"

Unser Fräulein Steinmann freute sich sehr über die gute Idee, und sprach dem pfiffigen Ralph ein dickes Lob aus. Dann begann sie langsam eine kleine Geschichte zu erzählen: „Es war einmal ein ..." „Rumpelstilzchen", platzte Holger dazwischen. Wir murrten, doch Fräulein Steinmann lächelte nur und fuhr unbeirrt fort: „... ein Lokomotivführer." Damit hatten wir nicht gerechnet.

„Der Lokomotivführer hatte einen eigenartigen Traum. Er sollte auf einem Rangierbahnhof einen D-Zug mit einer festgelegten Wagenfolge zusammenstellen. Auf Gleisen standen 5 Wagen 2. Klasse, 2 Wagen 1. Klasse, 2 Liegewagen, 1 Speisewagen und 1 Gepäckwagen. Er rangierte und rangierte, der Schweiß stand ihm auf der Stirn, hundert Wagenfolgen hatte er schon zusammengestellt, doch die richtige war noch immer nicht darunter. Plötzlich rasselte der rote Speisewagen mit großem Getöse über Schienen und Weichen, und der verzweifelte Lokführer wollte schon hinterherlaufen, da merkte er, daß sein großer Messingwecker klingelte und ihn zum Dienst rief. Später – auf dem Außenbahnsteig – sah er seinen wohlgeordneten D-Zug bereitstehen, und er lachte."

Und damit schwieg Fräulein Steinmann.

„Wir müssen also die Anzahl der möglichen Permutationen von 11 Wagen durch die Anzahl derjenigen Permutationen teilen, die keine Veränderung hervorrufen", schlug der kleine Oliver vor, der nun ganz besessen war, das Problem bis zu Ende zu lösen, Fräulein Steinmann gab ihm *grünes Licht*, und Oliver schrieb an die Tafel: $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Wir rechneten gemeinsam aus, daß es 83160 voneinander verschiedene Anordnungen dieser 11 Wagen gibt. Dabei war Ralph am schnellsten fertig, weil er den an der Tafel stehenden Bruch durch $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$ ersetzt hatte. Wir sahen sofort ein, daß er sich durch geschicktes Kürzen eine Menge Arbeit erspart hatte.

Da hätte der arme Lokführer möglicherweise noch lange rangieren müssen!

„Fädelt euch eine Perlenkette!" sagte Fräulein Steinmann und holte eine Schnur, eine rote, eine schwarze und drei weiße Perlen aus ihrer Tasche. Wir wußten natürlich wieder, daß wir nicht fädeln, sondern überlegen sollten. Wir sahen uns Olivers Tafelbild an und dachten darüber nach, auf welche Weise wir die Anzahl der voneinander verschiedenen Auffädelungsmöglichkeiten der Perlen berechnen könnten, nur die gewissenhafte Utta fing sofort an zu schreiben. Sie malte alle Möglichkeiten auf, konnte sich jedoch nicht für eine schönste Kette entscheiden, obwohl sie nur 20 Möglichkeiten gefunden hatte.

w r s s s   s w r s s   s s w s r
w s r s s   s w s r s   s s s w r
w s s r s   s w s s r   s s s r w
w s s s r   s r w s s   s s r s w

r w s s s   s r s w s
r s w s s   s r s s w
r s s w s   s s r w s
r s s s w   s s w r s

Jens bestätigte dieses Ergebnis und erklärte: „5 Perlen werden vertauscht, davon sind drei Perlen mit der gleichen Farbe, bei denen eine Vertauschung der Reihenfolge zu keiner neuen Kette führt. Also gibt es $\frac{5!}{3!}=5\cdot 4=20$ Möglichkeiten."

Fräulein Steinmann hatte wieder Grund, uns zu loben.

„Nun wollen wir die gefundene Gesetzmäßigkeit beschreiben", sagte sie. Keiner von uns hatte eine vernünftige Idee, doch Fräulein Steinmann meinte, es sei gar nicht so schwer: „Wir haben n Elemente, davon stimmen – denkt an unseren D-Zug – z. B. a, b bzw. c Elemente überein. Die Anzahl dieser Permutationen *mit Wiederholung* wollen wir mit $P_n^{a,b,c}$ bezeichnen."

Nun schafften wir es: $P_n^{a,b,c}=\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!}$.

Wir stellten noch fest, daß $a+b+c\leq n$ gelten müsse, denn es können ja nicht mehr Elemente *mehrfach* auftreten als überhaupt vorhanden sind.

Fräulein Steinmann begründete uns noch einmal die Richtigkeit der gefundenen Formel: „Angenommen, die n gegebenen Elemente sind voneinander verschieden, dann gibt es $n!$ verschiedene Permutationen. Nun machen wir a Elemente gleich, dann unterscheiden sich alle diejenigen Permutationen nicht mehr voneinander, die durch Vertauschen übereinstimmender Elemente auseinander hervorgehen, unabhängig davon, an welcher Stelle diese Elemente auftreten. Damit fallen stets $a!$ Permutationen zu einer zusammen, also haben wir die Gesamtzahl der Permutationen durch $a!$ zu dividieren. Nun kann man weitere b Elemente als nicht unterscheidbar betrachten, dann..."

„Alles klar!" meinte Jens, und wir anderen nickten zustimmend mit den Köpfen.

„Dann werdet ihr sicher auch die Nüsse bis zum nächsten Zirkel knacken können, die ich euch heute mitgebracht habe", sagte Fräulein Steinmann und stellte uns noch einige Aufgaben zu Permutationen, einige *ohne* und einige *mit Wiederholung:*

1. Wieviel Wörter kann Kerstin aus den Buchstaben ihres Namens bilden, wenn kein Buchstabe mehrfach benutzt werden darf und auch alle *sinnlosen* Wörter zugelassen werden?

2. Wieviel fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden, wenn
- jede Ziffer genau einmal,
- jede Ziffer höchstens zweimal,
- jede Ziffer höchstens dreimal

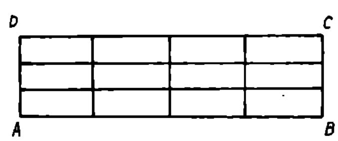
auftreten darf?

3. Man bilde alle Permutationen der Ziffern 1, 2, ..., 6!
Wie oft steht dabei die Ziffer 4 an erster Stelle?
Wie oft steht dabei die Ziffer 1 an sechster Stelle?
Wie oft steht dabei die Ziffer 2 an letzter oder vorletzter Stelle?
Wie oft stehen dabei die Ziffern 1 und 2 nebeneinander?

4. Sechs Kinder wollen in einem Ferienlager Radrennen austragen. Es stehen drei Räder ohne Gangschaltung, 1 Rad mit Dreigangschaltung, ein Rad mit Fünfgangschaltung und ein Rad mit Zehngangschaltung zur Verfügung. Wie oft muß das Rennen durchgeführt werden, wenn alle Möglichkeiten der Verteilung der Fahrräder ausprobiert werden sollen?

5. In wieviel Permutationen der Elemente a a a a a b b b kommen die drei Elemente b b b *nicht* nebeneinander vor?

6. Auf wieviel voneinander verschiedenen Wegen kann man vom Eckpunkt A des Rechteckes $ABCD$ zum gegenüberliegenden Eckpunkt C gelangen, wenn man wahlweise auf Strecken waagerecht bzw. senkrecht zur Seite AB des Rechteckes fortschreiten darf? Dabei soll die Länge des zurückgelegten Weges gleich der Länge zweier benachbarten Seiten des Rechteckes sein.



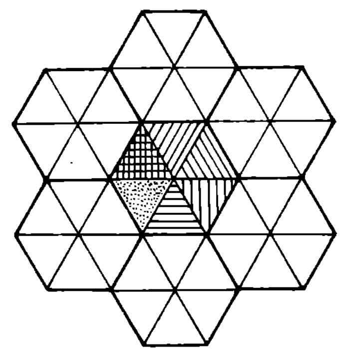
Während wir unsere Sachen einpackten, diskutierten wir bereits über die gestellten Aufgaben. Vor allem die letzte schien uns eine harte Nuß zu sein.

Nur Holger, der bald einen großen Gewinn machen wollte, murrte:
„Und wo bleibt die Lösung des Lotto-Problems?"
„Später", sagte Fräulein Steinmann nur und lachte.

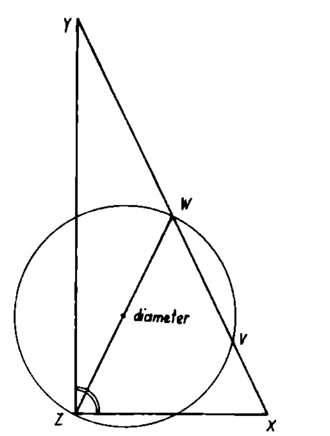
(Fortsetzung folgt.) *P. Göthner*

Der Lehrer schreibt eine chemische Formel an die Tafel und fragt eine Schülerin: „Was ist das für eine Formel?"
Sie sagt: „Hm, sie liegt mir auf der Zunge."
Der Lehrer: „Dann spucke sie sofort aus, es ist Salzsäure!"

▲1▲ Из семи правильных шестиугольников один раскрашен шестью красками (см. рисунок). Раскрасьте остальные шестиугольники теми же красками так, чтобы в „цветке", изображенном на рисунке, все треугольные участки, граничащие по сторонам шестиугольников, были окрашены одинаково.

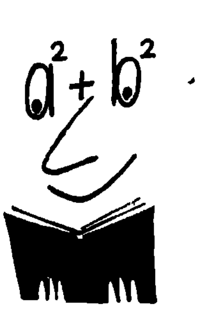


▲2▲ In right $\triangle XYZ$ shown below, W is the midpoint of $\overline{XY}$, and the circle with $\overline{ZW}$ intersects $\overline{WX}$ at V. Calculate the length of $\overline{XZ}$ if $\overline{XY}=50$ and $\overline{WV}=7$.



▲3▲ On veut blanchir la façade d'une école. Cette façade a 18 m de longueur et 12 m de hauteur; on y voit 12 fenêtres et une porte. Les dimensions, en m, de chaque fenêtre sont 2,5 et 1,5; celles de la porte 3 et 2. Calcule l'aire en m² de la surface à blanchir.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1984

Mathematik

Ma 5 ■2435 Setzt man zwischen die dritte und vierte Grundziffer (von links) der Zahl 1983 eine zweistellige natürliche Zahl, so entsteht eine sechsstellige Zahl z_1. Setzt man diese zweistellige Zahl zwischen die zweite und dritte Grundziffer der Zahl 1983, so entsteht eine weitere sechsstellige Zahl z_2. Die Differenz aus z_1 und z_2 soll 360 ergeben. Wie lautet die einzufügende zweistellige Zahl?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2436 Frank hat fünf Stäbe von je 5 dm und zwei Stäbe von je 3 dm Länge. Er will damit Strecken von 18, 19, 20, 21 bzw. 22 dm Länge abmessen. Wie macht er das, wenn er nur diese Stäbe und keine weiteren Hilfsmittel verwendet?
Schreibe die Lösung wie folgt: $17\,\text{dm} = 4 \cdot 5\,\text{dm} - 1 \cdot 3\,\text{dm}$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2437 Maik soll eine einstellige natürliche Zahl erraten. Regina und Klaus machen jeder über diese Zahl zwei Aussagen, von denen eine wahr, die andere falsch ist.
Regina:
(1) Die Zahl ist nicht kleiner als 5.
(2) Sie ist nicht durch 4 teilbar.
Klaus:
(1) Die Zahl ist größer als 8.
(2) Sie ist Nachfolger von 7.
Wie heißt die zu erratende Zahl? Begründe deine Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2438 Gib alle dreistelligen natürlichen Zahlen an, die folgende Eigenschaften haben:
(1) Die Zahlen bestehen nicht aus drei gleichen Grundziffern.
(2) Sie haben vor- und rückwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge.
(3) Sie lassen sich (ohne Rest) durch 2 dividieren.
(4) Sie enthalten keine Grundziffer 4.
Ein Beispiel wäre die Zahl 656.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2439 Die Herren Schneider, Meier, Krause und Müller spielen Karten. Ihre Vornamen sind (in anderer Reihenfolge) Jürgen, Uwe, Mario und Roger. Mario spielt aus; Herr Müller sticht; Herr Krause wirft ab; Roger muß bedienen. Zum Schluß des Kartenspiels ist Mario der Erste, Herr Schneider Zweiter, Jürgen Dritter und Herr Krause Vierter. Wie heißen die Kartenspieler mit Vor- und Zunamen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2440 Jemand kauft 30 Flaschen „Berliner Pilsner“, die Flasche zu 1,58 M einschließlich 30 Pf Pfand. Nachdem sämtliche Flaschen dieses Bieres ausgetrunken waren, bringt der Kunde die leeren Flaschen zurück in die Kaufhalle und erwirbt allein vom Pfandgeld erneut weitere Flaschen „Berliner Pilsner“. Das wird solange wiederholt, bis das Pfandgeld für den Kauf von genau einer Flasche Bier nicht mehr ausreicht. Wie viele Flaschen „Berliner Pilsner“ hat dieser Kunde auf diese Weise insgesamt erworben?

Sch.

Ma 6 ■2441 Während eines Monats konnten Klaus, Steffen, Frank und Dirk zusammen 194 leere Flaschen an den Altstoffhandel abliefern. Steffen hatte dreimal soviel Flaschen wie Dirk, Klaus hatte soviel Flaschen wie Steffen und Dirk zusammen, Frank 22 Flaschen weniger als Klaus gesammelt. Wieviel Flaschen hat jeder der vier Jungen gesammelt?

Schüler Klaus Liesenburg, Ilsenburg

	Thies Luther, 2600 Güstrow, Werderstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	30	Ma 7 ■ 1369
30	150		
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪2442 Gerd ist zweimal so alt wie sein Bruder Frank. Gerds Mutter ist 25 Jahre älter als Frank und dreimal so alt wie Gerd. Wie alt (in ganzen Jahren) sind die beiden Brüder und ihre Mutter?

Schüler Andreas Peukert, Helmershausen

Ma 6 ▪2443 Als Herrn L. von seinen Schülern zum Geburtstag gratuliert wird, beantwortet er die Frage nach seinem Lebensalter (in ganzen Zahlen) wie folgt:

(1) Die Zahl, die mein Lebensalter angibt, ist größer als 45.
(2) Addiert man die Anzahl der Zehner und die Anzahl der Einer dieser Zahl, so ist die Summe eine einstellige natürliche Zahl.
(3) Die Einerstelle stellt eine gerade natürliche Zahl dar.
(4) An der Zehnerstelle steht keine gerade natürliche Zahl.
(5) Diese vier von mir gemachten Angaben sind alle falsch.

Welches Lebensalter hat Herr L. zu diesem Zeitpunkt erreicht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪2444 Rita, Sven und Toni rechnen um die Wette das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ aus. Rita erhält als Ergebnis 6227020890, Sven 6227028000 und Toni 6227029800. Begründe, ohne jeweils das ganze Produkt auszurechnen, daß alle Ergebnisse falsch sind!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪2445 Ein Weinbauer vererbt seinen drei Söhnen 70 leere, 7 volle und 7 halbvolle Weinfässer. Jeder sollte gleich viel Wein und gleich viel Fässer erhalten. Weise nach, daß genau zwei Söhne die gleiche Aufteilung erhielten, also gleich viel volle, halbvolle und leere Fässer! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ▪2446 Klaus wird von seinem Freund gefragt, wie viele Wohnungen sich in dem Haus befinden, in dem er mit seinen Eltern wohnt. Darauf antwortet Klaus: „Rechne es dir selber aus! Es sind mindestens 20, aber höchstens 70 Wohnungen. Es sind 2-, 3- bzw. 4-Zimmer-Wohnungen. Es sind doppelt so viele 2-Zimmer- wie 3-Zimmer-Wohnungen. Jede zwölfte Wohnung ist eine 4-Zimmer-Wohnung." Wie viele 2-, 3- bzw. 4-Zimmer-Wohnungen hat das Wohnhaus, in dem Klaus wohnt? *Andrea Putz, Lichtenstein*

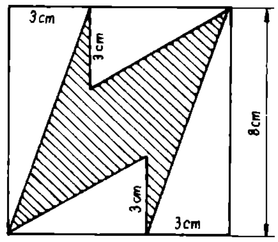
Ma 7 ▪2447 Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von $a=3$ cm! Verlängere alle Quadratseiten um 2 cm, und zwar $\overline{AB}$ über B hinaus bis E, $\overline{BC}$ über C hinaus bis F, $\overline{CD}$ über D hinaus bis G und $\overline{DA}$ über A hinaus bis H! Verbinde die Punkte E, F, G und H zu einem konvexen Viereck $EFGH$!

a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$?
b) Weise nach, daß dieses Viereck ebenfalls ein Quadrat ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ▪2448 Von einem Quadrat wurden, wie aus dem Bild ersichtlich, rechtwinklige Dreiecke abgeschnitten. Welchen Flächeninhalt hat das übrig gebliebene Flächenstück, das schraffiert dargestellt wurde?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ▪2449 Frau B kaufte in einem Backwarengeschäft 2 Brötchen mehr, Frau A 7 Brötchen mehr als Frau C. Frau A kaufte 1 Stück Bienenstich weniger, Frau C 2 Stück Bienenstich mehr als Frau B. Frau C kaufte 1 Stück Butterkuchen mehr, Frau B 3 Stück Butterkuchen mehr als Frau A. Von diesen drei Frauen wurden zusammen 32 Stück Backwaren gekauft, von jeder Sorte wenigstens ein Stück. Wieviel Stück Backwaren jeder Sorte kaufte jede dieser drei Frauen, wenn die Anzahl der von Frau A gekauften Butterkuchen kleiner, die Anzahl der von Frau C gekauften Brötchen größer ist als die Anzahl der von Frau B gekauften Stück Bienenstich? *Sch.*

Ma 8 ▪2450 Wenn man eine beliebige durch 3, aber nicht durch 2 teilbare natürliche Zahl um 9 vermindert oder vermehrt, so erhält man stets eine durch 6 teilbare natürliche Zahl. Diese Behauptung ist zu beweisen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪2451 Es ist zu beweisen, daß die Summe aus sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 7 teilbar ist.

Schüler Olaf Karger, Wittenberge

Ma 8 ▪2452 Welchen prozentualen Anteil hat ein Würfel am Volumen einer Kugel, die der Würfel mit allen seinen Eckpunkten berührt? *Schüler B. Fischer, Nünchritz*

Ma 8 ▪2453 Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a=5$ cm, $b=6$ cm und $c=7$ cm! Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, das flächengleich dem Dreieck ABC ist! Die Konstruktion ist zu begründen. *Sch.*

Ma 9 ▪2454 Es sind alle natürlichen Zahlen x zu ermitteln, für die $\sqrt{x}=2\sqrt[3]{x}$ eine wahre Aussage wird.

Schüler Peter Hermann, Hoyerswerda

Ma 9 ▪2455 Bernd soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und einer Million bestimmen. Dora, Ernst und Frank machen dazu jeder genau eine wahre und genau eine falsche Aussage.

Dora:
(1) Sie hat weniger als drei Stellen.
(2) In ihrer Primzahlenzerlegung sind genau zwei verschiedene Primzahlen.

Ernst:
(1) Sie ist nicht durch 9 teilbar.
(2) Sie ist nicht durch 27 teilbar.

Frank:
(1) Sie lautet 91809.
(2) Sie ist durch 101 teilbar.

Wie lautet die Zahl?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪2456 Herr A. hebt von seinem Sparkonto 500,– M ab. Er erhält genau 16 Banknoten ausgehändigt, und zwar 10-Mark-Scheine, 20-Mark-Scheine und 50-Mark-Scheine. Wie viele Geldscheine jeder der drei Sorten erhielt Herr A ausgezahlt, wenn es mehr 20-M-Scheine als 10-M-Scheine, aber weniger als 50-M-Scheine waren? *Sch.*

Ma 9 ▪2457 Gegeben sei ein Kreis $k(M;r)$. In diesen Kreis sei ein Durchmesser $d=2r$ eingezeichnet. Parallel zu diesem Durchmesser sei eine Sehne der Länge $s=r$ gezeichnet. Es ist der Abstand dieser Sehne vom Durchmesser des Kreises $k(M;r)$ zu berechnen. *Schüler Sven Saar, Mühlhausen*

Ma 10/12 ▪2458 Welche reellen Zahlen a und b erfüllen die Ungleichung

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\frac{a+1}{4}+b+1?$$

Student Andreas Stenzel, Cottbus

Ma 10/12 ▪2459 Der Ausdruck $n!$ (lies: n Fakultät) ist wie folgt definiert:

$$n!\underset{Def}{=}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n.$$

Es ist auf rationelle Weise zu ermitteln, auf welche Ziffer die Summe $1!+2!+3!+4!+\ldots+100!$ endet!

Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ma 10/12 ▪2460 Die Maßzahl des Umfangs eines rechtwinkligen Dreiecks (gemessen in ganzen cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhalts (gemessen in ganzen cm^2).

a) Existieren rechtwinklige Dreiecke mit dieser Eigenschaft?
b) Welche Längen besitzen die Seiten dieser rechtwinkligen Dreiecke? *Sch.*

Ma 10/12 ▪2461 Es ist zu zeigen, daß für alle Dreiecke ABC gilt:

$$\sin\gamma=\frac{\varrho\cdot u}{a\cdot b}.$$

Dabei sind a und b die Längen der Seiten, die den Winkel der Größe γ einschließen, u der Umfang des Dreiecks ABC und ϱ die Länge des Inkreisradius.

Schüler Bernd Neuß, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

Physik

Ph 6 ▪156 Der Fixstern, der unserem Sonnensystem im Weltall am nächsten ist, ist der Stern „Proxima Centauri" im Sternbild Zentaur am südlichen Sternenhimmel. Seine Entfernung beträgt rd. 40,2 Billionen Kilometer. Welche Zeit braucht das Licht, um diese Entfernung zurückzulegen? Gib das Ergebnis auch in Jahren, Tagen und Stunden an!

Ph 7 ▪157 Durch eine Rohrleitung von 40 mm lichter Weite strömen in einer Stunde 4,53 m^3 Wasser. Berechne die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers! Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit, wenn man das Rohr auf die halbe lichte Weite verengt?

Ph 8 ▪158 Nach einem Brand in einer Lagerhalle wurde bei der Spurensicherung durch die Genossen der Feuerwehr folgendes festgestellt:
Ein Stahlträger mit einer Länge von 15 m hatte durch die Wärmeeinwirkung eine Längenausdehnung um 45 mm erfahren. Welche Maximaltemperatur hatte der Träger während des Brandes angenommen, wenn ansonsten die Umgebungstemperatur konstant 12 °C beträgt? (Linearer Ausdehnungskoeffizient: $\alpha = 0{,}000012$ grd)

Ing. K.-H. Milde, Dresden

Ph 9 ▪159 In einem Salzbergwerk soll eine elektrische Pumpe mit dem Wirkungsgrad η Salzsole mit der Dichte ϱ aus einer Tiefe s an die Erdoberfläche heben. Dabei soll die Salzsole in einer Menge n (in C/min) gefördert werden.
a) Es ist eine Formel für die Leistung P aufzustellen, mit der die Pumpe betrieben werden muß.
b) Es ist die Leistung P für folgende Werte zu berechnen:
$\eta = 0{,}8$; $\varrho = 1{,}15$ g/cm^3; $s = 50$ m; $n = 360$ C/min.
c) Wie stark muß der Stromkreis abgesichert sein, wenn diese Pumpe an Normalspannung (U = 220 V) angeschlossen ist?

J. Weber, Karl-Marx-Stadt

Ph 10/12 ▪160 Eine Lore rollt auf einer schiefen Ebene mit der Höhe von 2 m abwärts. Berechnen Sie den Anstiegswinkel, wenn die Lore am Ende eine Geschwindigkeit von 18 km/h erreicht hat! Die Rollreibungszahl beträgt 0,05.

Chemie

In alten Schulbüchern geblättert

Ch 7 ▪125 Aus: *Rechenbuch für niedere und besondere Landschulen* von A. H. Rieß, Magdeburg und Dessau 1801
Eine gewisse Arznei wird aus mehreren Sachen bereitet, von der ersten kommen 12 Lothe, von der zweiten 13 Loth, von der dritten 8 Loth, von der vierten 7 Loth; wieviel von jeder Ingredienz (Zutat) wird zu 10 Pfund erfordert? (1 Pfund = 32 Loth)

Ch 8 ▪126 Aus: *Sammlung arithmetischer Aufgaben.* Zum Gebrauch in Regimentsschulen. Fr. Richter und O. Bucher, I. Lieutenants im K.S. Artillerie-Corps. Dresden 1858.
Um Hufsalbe zu bereiten schmelze man
4 Loth gelbes Wachs
1 Pfund reinen Rindstalg
unter $1\frac{1}{4}$ Pfund Baumöl, bei gelindem Feuer, in einem Kessel und setze, nachdem derselbe vom Feuer wieder entfernt worden ist, 4 Loth gemeinen Terpentin hinzu. Das Ganze rühre man bis zum völligen Erstarren. Wieviel wird von jedem der genannten Bestandteile nothwendig sein, um 17 Pfund Hufsalbe zu gewinnen, wenn auf $1\frac{1}{2}$ Prozent Verlust bei der Bereitung zu rechnen ist? (1 Pfund = 32 Loth)

Ch 9 ▪127 Aus: Johann Philipp Grüsons *Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik*, Berlin 1800
Ein Weinhändler hat nicht mehr als 2 Sorten Wein, wovon er die eine Sorte zu 10, die andere zu 5 Gr. (Groschen) die Bouteille verkauft. Man verlangt von ihm die Bouteille zu 8 Gr. Wie viele Bouteillen werden von jeder Sorte dazu gefordert, um eine neue hervorzubringen, welche zu 8 Gr. verkauft werden kann?

Ch 10/12 ▪128 Aus: *Auflösung algebraischer Gleichungen des ersten und zweiten Grades* von Adam Burg, Wien 1827
Um eine gute schwarze Tinte zu bereiten, nimmt Jemand auf 2 Quart Regenwasser, folgende Zuthaten: geraspeltes Blauholz, grob gepulverte Galläpfel, grünen Eisenvitriol, arabisches Gummi und Gewürznelken. Die Mengen sind dem Gewichte nach aus folgenden Angaben zu bestimmen: das Gewicht des Eisenvitriols um jenes des Gummi vermehrt, ist gleich dem Gewichte der Galläpfel; das Gewicht der Galläpfel um 1 Unze vermehrt, ist dem vierfachen Gewicht des Blauholzes gleich; der achte Theil des Gewichtes der Galläpfel ist noch drei mal so groß, als jenes der Gewürznelken; endlich ist der sechzehnte Theil des Gewichts des Gummis, dem Gewichte der Gewürznelken gleich, und alles zusammen.

José Luis Massera aus dem Kerker freigekämpft

Montevideo, 2. März 1984 (ADN)
Der bekannte uruguayische Mathematiker und Kommunist José Luis Massera ist nach mehr als achtjähriger Haft freigekämpft worden. Das uruguayische Militärregime hatte den aufrechten Demokraten und Antifaschisten im Oktober 1975 während einer Razzia gegen die fortschrittliche Bewegung in Montevideo verhaftet und zu einer Gefängnisstrafe von 20 Jahren verurteilt. Für seine Freilassung hatten sich Wissenschaftler aus allen Ländern eingesetzt, u. a. mehr als 50 Nobelpreisträger. Neun Universitäten, darunter die Humboldt-Universität zu Berlin, verliehen Massera ihre Ehrendoktorwürde.
Brüderliche Grüße und Glückwünsche hat das Solidaritätskomitee der DDR dem nach achtjähriger Haft freigekämpften Mathematiker und Kommunisten übermittelt. Das Komitee versichert, alle Kraft für die Freiheit aller etwa 1000 noch eingekerkerten uruguayischen Patrioten einzusetzen.

Zwei Aufgaben und sieben Lösungen

Wer mehr weiß und Phantasie hat, kommt rasch zum Ziel

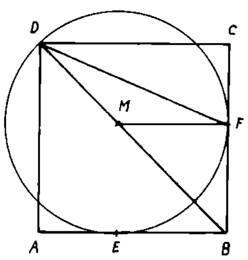
Teil 2

▲2▲ *Gegeben ist ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, daß er zwei Nachbarseiten des Quadrates berührt und durch einen Eckpunkt des Quadrates geht.*

Sie entwerfen eine Skizze (Bild 2) und überlegen zunächst wieder gemeinsam. Alle Quadratseiten sind gleichberechtigt; es wird vereinbart, daß BC in F und AB in E berührt werden sollen, und D soll gemeinsamer Punkt von Kreis und Quadrat sein.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn der Mittelpunkt M des Kreises ermittelt ist. Eine Bestimmungslinie für M erkennen die drei bald: Da BC und AB Tangenten des Kreises sein sollen, muß sein Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ liegen, also auf der Diagonalen BD.

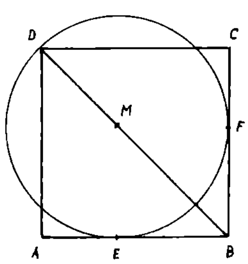
Bild 2



Wie aber findet jeder von ihnen eine zweite Bestimmungslinie für M?

Rainer konzentriert sich auf die Teilfigur BCD: Er überlegt: F und D sind Kreispunkte, sie sind also von M gleich weit entfernt. Die Punkte D, M, F bilden demnach ein gleichschenkliges Dreieck. Das zeichnet er ein (Bild 3).

Bild 3



Von diesem Dreieck müßte man wissen, wie groß die Basiswinkel sind. Dann könnte man diesen Winkel an BD in D antragen. Der freie Schenkel schneidet BD in F und die Senkrechte zu BC in F (der Berührungsradius) schneidet BD in M.

Rainer rechnet gerne, und so rechnet er die Größe des Winkels $\sphericalangle BDF$ aus, indem er den Winkelsummensatz auf das Dreieck $\triangle FCD$ anwendet.

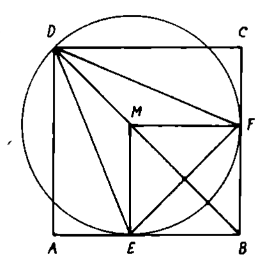
Er berücksichtigt dabei,
daß $\sphericalangle FDC = 45° - \sphericalangle BDF$ und
$\sphericalangle CFD = 90° - \sphericalangle DFM = 90° - \sphericalangle BDF$ ist.

$$\sphericalangle FDC + 90° + \sphericalangle CFD = 180°$$
$$45° - \sphericalangle BDF + 90° + 90° - \sphericalangle BDF = 180°$$
$$2\sphericalangle BDF = 45°$$
$$\sphericalangle BDF \triangleq 22{,}5°$$

Beim Kontrollieren der Lösung erkennt er, daß er umständlich gearbeitet hat. Die Größe des Außenwinkels $\sphericalangle FMB$ des gleichschenkligen Dreiecks DMF beträgt 45°, denn $MF \parallel DC$. Der Außenwinkel ist aber so groß wie die Summe der beiden Basiswinkel. Es ist also $\sphericalangle BDF = \sphericalangle MFD = 22{,}5°$.

Torsten ergänzt die Skizze durch die Sehne FE, und er zeichnet auch die beiden Berührungsradien ME und MF ein (Bild 4).

Bild 4

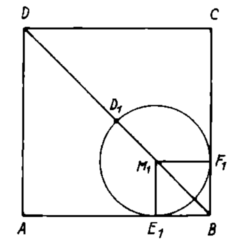


Er betrachtet die Gesamtfigur und wendet seine Kenntnisse der Sätze von den Winkeln am Kreis an. EM und FM stehen senkrecht aufeinander, da ja auch die Tangenten senkrecht aufeinanderstehen. $\sphericalangle EMF$ ist Zentriwinkel zu EF. Seine Größe beträgt 90°. Jeder Peripheriewinkel, auch der mit dem Scheitel D, ist also 45° groß. Diesen Winkel zeichnet Torsten ein. Die Diagonale BD halbiert diesen Winkel, und Torsten kann nun, ausgehend von BD und der Kenntnis des Winkels $\sphericalangle BDF$, den Punkt F und dann M konstruieren.

Uwe liebt die Ähnlichkeitslehre und geometrische Abbildungen. Er erinnert sich, daß man bei der Konstruktion von Figuren, die bestimmte Bedingungen erfüllen sollen, zunächst eine Figur konstruiert, die einige der Bedingungen erfüllt und der geforderten Figur ähnlich ist. Durch eine zentrische Streckung kann er diese dann so verändern, daß weitere durch die Aufgabe gestellte Bedingungen erfüllt werden.

Er zeichnet um M_1 zunächst einen Kreis, der die Quadratseiten zwar in E_1 und F_1 berührt,

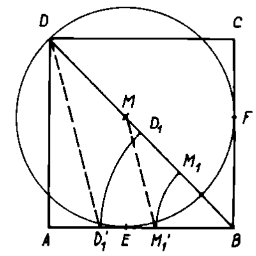
Bild 5



die Diagonale aber nicht in D, sondern in D_1 schneidet (Bild 5).

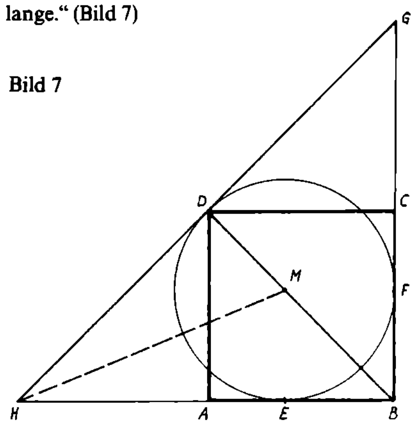
Mit B als Streckzentrum führt er dann eine zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{\overline{BD}}{\overline{BD_1}}$ aus. Dadurch werden D_1 auf D und M_1 auf M abgebildet. Wie Uwe das macht, zeigt Bild 6.

Bild 6



Die Freunde vergleichen noch ihre Lösungswege, da kommt Gabi, das Mathe-As der Klasse, dazu. „Ihr Jungens habt zu wenig Phantasie", sagt sie. „Ergänzt eure Skizze einmal zu einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck! Dann seht ihr, daß der zu konstruierende Kreis der Inkreis ist. Und wie wir den zu konstruieren haben, das wissen wir schon lange." (Bild 7)

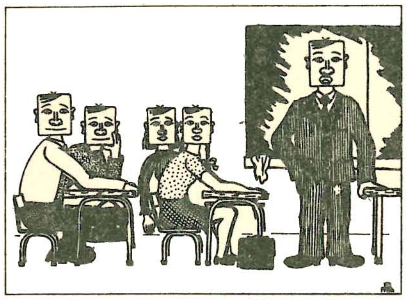
Bild 7



Sprach's und ließ die drei verblüfften Freunde zurück.

W. Jungk

In freien Stunden · alpha-heiter



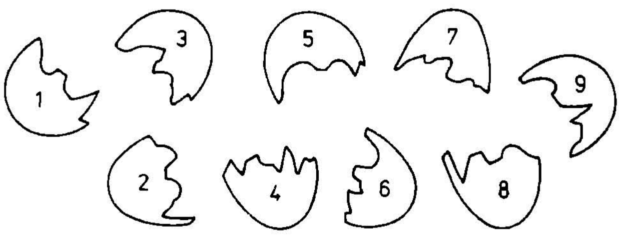
„Ich erziehe die Kinder nach meinem Vorbild.“

Karikatur: Jürgen Frick

Frohe Ostern

Aus den abgebildeten Bruchstücken von Eierschalen sind jene zusammenzusuchen, die eine vollständige Eierschale ergeben.

NBI, Berlin



Es ist 12 durch 23

Jeder von euch kennt die Antwort auf die Frage nach der Uhrzeit, wenn der Befragte eine Digitaluhr hat: „Es ist 12 durch 23, ausrechnen mußt du es selbst!“ Es erhebt sich nun die Frage für mathematisch interessierte Menschen, wie oft kommt bei dieser *Division* ein ganzzahliges Ergebnis zustande? Es soll eine Digitaluhr zugrunde gelegt werden, die einen 24-Stunden-Rhythmus hat. Ein Beispiel:
Bei 18 Uhr und 6 Minuten – 18 : 06 – ergibt sich die Lösung 3! Also, wievielmal ist das Resultat ganzzahlig?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

alpha auf Kurs 80

Wievielmal kann man das Wort ALPHA in seiner unmittelbaren Buchstabenfolge lesen? Das heißt, jeweils von Buchstabe zu Buchstabe sei ein Schritt nach rechts bzw. nach unten erlaubt.

A L P H A L P H A
L P H **A** L P H A L
P H A **L P H** A L P
H A L P H **A** L P H
A L P H A L P H A

Beachte: Der letzte Buchstabe des Wortes ALPHA ist in den meisten Fällen gleichzeitig Anfangsbuchstabe von neuen Wörtern. Zur Erleichterung ist eine Lösung fett ausgedruckt.

R. Schulz, W.-Pieck-OS Rotta
Leiter des Kreisklubs Jg. Math. Gräfenhainichen

Spielereien um das Jahr 1984

$$0=1+9-8-\sqrt{4}=-1-\sqrt{9}+8-4$$
$$7=19-8-4=1\cdot 9-8:4$$
$$16=(1+9-8)^4=1+9+8-\sqrt{4}$$
$$23=19+8-4=19+\sqrt{8\cdot\sqrt{4}}$$
$$34=-1+\sqrt{9}+8\cdot 4=1+9!:8!+4!$$
$$84=1^9\cdot 84=(1+9)\cdot 8+4$$
$$110=[-1+(\sqrt{9})!]!-8-\sqrt{4}$$
$$130=1+9+(\mathrm{ld}\,8+\sqrt{4})!$$

Mit Freude und Eifer – bei einigen Zahlen auch mit langer Überlegung – stellten die Teilnehmer des Leistungszirkels Kl. 5/6 des Kreisklubs *Junger Mathematiker* Zeitz für die Zahlen 0...130 unter alleiniger Anwendung der Ziffern 1, 9, 8, 4 in dieser Reihenfolge und aller möglichen Rechenzeichen Aufgaben zusammen.

AG-Leiter OL D. Franke

■ a) Ein Elternpaar hat zwei junge Kinder, die eine verschiedene Anzahl von Jahren zählen. Das Produkt aus den Zahlen, die das ganzzahlige Alter von Vater, Mutter und den beiden Kindern angeben, ergibt 1984. Wie alt sind Vater, Mutter und die beiden Kinder, wenn noch bekannt ist, daß der Vater älter als die Mutter ist?
b) Teile die Zahl 1984 so in fünf Summanden, daß jeder folgende doppelt so groß ist wie der vorhergehende!

Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)

Hans-Jürgen Starke, Elternhaus und Schule

■ $1984=(123-4+5)(6-7+8+9+0)$
$=[5\cdot 6\cdot(-7+8)\cdot 9\cdot(10+1)\cdot 2]:3+4$
$=0-1+(2+34)\cdot 56-7-8\sqrt{9}$

Student T. Merten, Stralsund, z. Z. Berlin

Der Kreis und die Geraden

Ein Kreis lag friedlich auf der Wiese
und wünscht', daß ihn in Ruhe ließe
die Nachbarschaft und die Bekannten,
die Vettern, Basen, Anverwandten.
Doch schon nach wenigen Minuten,
da hörte er ein Auto tuten.
Drei Grazien waren ausgestiegen
und sahen diesen Kreis dort liegen.
Die erste reichte ihm die Hände
und stellt sich vor als die Tangente,
indem sie ihn nur zart berührte,
so daß er kaum ein Fünkchen spürte.
Danach durchschnitt ihn die Sekante,
die hoffnungslos für ihn entbrannte.
Die kleine Sehne trat als Dritte
heran mit einer großen Bitte:
Sie wollte sich eng an ihn schmiegen;
im Endpunkt auf dem Kreise liegen.
Der Kreis, der Ruhe haben wollte,
zunächst darüber etwas grollte.
Doch schließlich willigte er ein,
den Grazien immer Freund zu sein.
Und mit der Zeit fand er Gefallen
an den Tangent – Se – Kanten allen.

F. Winkler, aus: Sächsisches Tageblatt
eingesandt v. S. Franze, Dresden

„Ich werde mir's merken, du brauchst ja auch wieder einen, der Reifen wechseln oder den Vergaser ausbauen kann, aber dann habe ich keine Zeit!"

Jorgal, aus: Sächsische Zeitung

Alter der Familienmitglieder gesucht

In einer vierköpfigen Familie zeigen die Lebensjahre jedes Mitglieds die gleiche Quersumme. Das Gesamtalter aller ergibt zugleich die kleinste dreistellige Zahl mit dieser Quersumme. Das Alter der Mutter ist sowohl durch das des Sohnes als auch durch das der Tochter teilbar. Das Lebensalter des Vaters läßt sich ebenfalls durch das des Sohnes, nicht aber durch das der Tochter teilen. Mutter und Sohn haben zusammen das Alter des Vaters, Mutter und Tochter sind zusammen genauso alt wie Vater und Sohn. Wie alt sind die einzelnen Familienmitglieder?

Dr. Ch. Lange, Sektion Musik am IfL Leipzig

Dreierlei, Viererlei

a) Zum Dreifachen einer Zahl die Zahl 3 addiert, ergibt das gleiche wie von der dritten Potenz von 3 das Dreifache der Zahl subtrahiert. Bestimme die Zahl!
b) Zum vierten Teil einer Zahl die 4 addiert, ergibt das gleiche wie vom Vierfachen der Zahl die Zahl 4 subtrahiert. Bestimme die Zahl!

Dr. W. Lorenz, Leipzig

alpha-Logik

Ermittle alle positiven ganzen Zahlen α, L, O, G, I, K, die die Ungleichung (1) und die Gleichungen (2) bis (6) gleichzeitig erfüllen!

(1) $\alpha<L<O<G<I<K$

(2) $\frac{\alpha}{L}=\left(\alpha-\frac{\alpha}{L}\right)$

(3) $\frac{\alpha}{O}=\left(\alpha-\frac{\alpha}{L}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{O}\right)$

(4) $\frac{\alpha}{G}=\left(a-\frac{\alpha}{L}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{O}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{G}\right)$

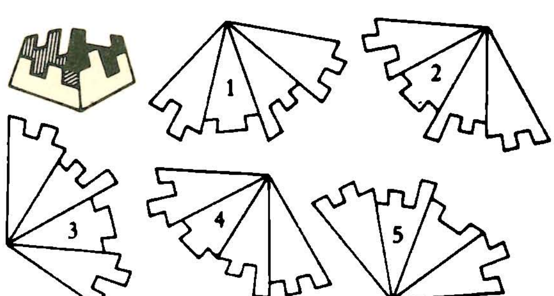
(5) $\frac{\alpha}{I}=\left(\alpha-\frac{\alpha}{L}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{O}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{G}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{I}\right)$

(6) $\frac{\alpha}{K}=\left(\alpha-\frac{\alpha}{L}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{O}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{G}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{I}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{\alpha}{K}\right)$

Übung

Welche Figur muß gefaltet und dann aufgesetzt werden?

Troll, Berlin



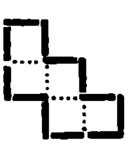
XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

230521 Die Zahlen von 1 bis 10 sollen als Ergebnisse von Rechenaufgaben auftreten, bei denen außer den Zeichen für die vier Grundrechenoperationen und Klammern jeweils nur die Ziffer 3 auftreten soll, und zwar genau 5mal. Für zwei Aufgaben wurden Beispiele angegeben.
Gib für die Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 je eine derartige Aufgabe an!
Beispiele:
$1 = 3 - 3:3 - 3:3 = (3+3-3):3$;
$7 = (33-3):3 - 3 = 3\cdot 3 + 3:3 - 3$.

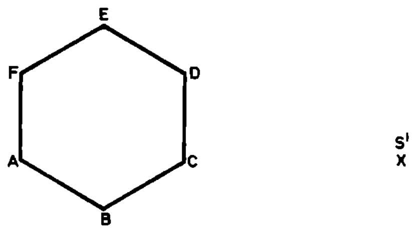
230522 Mit 12 gleich langen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden.
Das Bild zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt. (Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.)



Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von a) 6 Flächeneinheiten, b) 7 Flächeneinheiten, c) 8 Flächeneinheiten, d) 9 Flächeneinheiten!

230523 Die drei Pioniere Hans, Karl und Peter fuhren mit dem Rad von Leipzig nach Halle. Hans fuhr dabei in je 10 Minuten 2 Kilometer, Karl benötigte für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegte und Halle nach genau 100 Minuten erreichte.
Wieviel Minuten nach Peter trafen Hans und Karl in Halle ein, wenn alle drei Pioniere zur gleichen Zeit in Leipzig abfuhren?

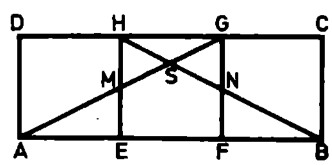
230524 In dem Bild ist ein regelmäßiges Sechseck *ABCDEF* und ein Punkt *S'* gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen *AD*, *BE* und *CF* des Sechsecks sei *S*. Wir betrachten diejenige Verschiebung, bei der *S* den Bildpunkt *S'* hat.
Konstruiere den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{SS'}$, und das Bild *A'B'C'D'E'F'* des Sechsecks *ABCDEF* bei dieser Verschiebung!



Olympiadeklasse 6

230621 Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden. Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch faßt.
a) Berechne, wieviel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

230622 Die abgebildete Figur *ABCD* stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleich großen Quadraten *AEHD*, *EFGH* und *FBCG* zusammensetzt. Die Strecke *AG* schneidet die Strecke *EH* in deren Mittelpunkt *M*, die Strecke *BH* schneidet die Strecke *FG* in deren Mittelpunkt *N*. Der Flächeninhalt des Rechtecks *ABCD* beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks *SGH*,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks *ABS*,
c) den Flächeninhalt des Vierecks *ASHD*!
(*Hinweis:* Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, daß jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleichgroße Dreiecke zerlegt wird.)

230623 Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge). Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgendes ist bekannt:
(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.
(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.
Zeige, daß sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln läßt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten! Gib diese zusammengehörenden Namen an!

230624 Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.
Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, daß es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, daß es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, daß es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, daß alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

Olympiadeklasse 7

230721 Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während des gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

230722 Es sei *ABCD* ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale *AC* sei *M*. Die Mittelsenkrechte auf *AC* schneide die Gerade durch *A* und *B* in *E* und die Gerade durch *C* und *D* in *F*.
Beweise, daß dann die Dreiecke *AEM* und *CFM* kongruent sind!

230723 Blaue, gelbe und rote Würfel sollen

in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.
Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt! Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an, und weise nach, daß es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

230724 Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

Olympiadeklasse 8

230821 Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.
(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.
Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

230822 Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, daß die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können. Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

230823 Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, daß der Punkt M im Innern des Dreiecks ABC liegt.
Ferner sei $\sphericalangle CAM = 20°$ und $\sphericalangle AMB = 120°$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle CBM$!

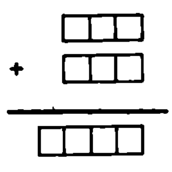
230824 Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, E und F bezeichnet.
Beweise, daß der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

Olympiadeklasse 9

230921 Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

230922 Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt:
(1) Es gilt $AB \parallel DC$.
(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{DC}$.
(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.
(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ bzw. $\sphericalangle ABC$.
Zeigen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese Größen!

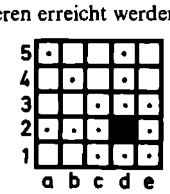
230923 In dem Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, daß jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.
Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!



230924 Beweisen Sie!
Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

Olympiadeklasse 10

231021 Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, daß sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann. Im Bild ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z. B. die Dame auf d2).
Auf einem Quadrat aus 5 × 5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

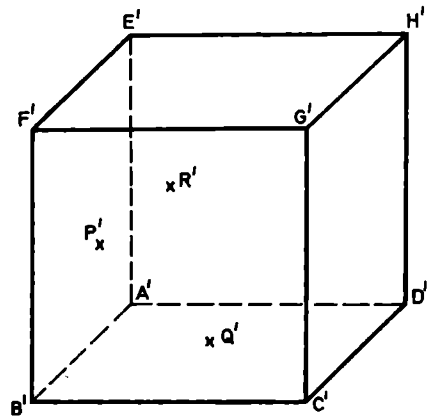


Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

231022 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $[g; r]$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, die die Gleichung

$$\frac{3}{3r^2+1} = g \text{ erfüllen!}$$

231023 Unten ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei schräger Parallelprojektion gegeben. Ferner sind die Bilder P', Q' und R' dreier Punkte P, Q bzw. R gegeben, wobei
P auf der Seitenfläche $ABFE$,
Q auf der Seitenfläche $BCGF$,
R auf der Seitenfläche $DAEH$
liegt.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P, Q und R! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!



231024 Beweisen Sie, daß es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung

$$x^x = 27 \text{ erfüllt!}$$

Olympiadeklassen 11/12

231221 Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme:

$$s_n \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man ermittle
a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_5$.

231222 Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA', BB', CC'. Auf diesen seien drei Punkte X, Y, Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.
Man beweise, daß der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen

$$V_K=\frac{1}{3}F(x+y+z)$$

hat, wobei $x=\overline{AX}$, $y=\overline{BY}$, $z=\overline{CZ}$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

231223 Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:
$\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c, \overline{DA}=d, \overline{AC}=e, \overline{BD}=f$.
Man beweise, daß dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2+ce^2=(a+c)(ac+b^2), \quad (1)$$
$$ae^2+cf^2=(a+c)(ac+d^2). \quad (2)$$

231224 Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl 2^n+5 eine Quadratzahl ist.

alpha-Wettbewerb 1982/83

Abzeichen in Gold

Michael Herrmann, Oberlichtenau; Torsten Endter, Oberschönau; Esther Hädicke, Oranienbaum; Kay Leitz, Michael Taeschner, beide Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Thomas Lieberwirth, Perleberg; Antje und Thomas Reichel, Pirna; Coren Balling, Plessa; Dorit Grulke, Pritzwalk; Andreas Jöstel, Karl-Martin Eichhorn, Katharina Eichhorn, Bettina Beurich, alle Radebeul; Wolfgang Schneider, Radeburg; Steffen Korb, Raschau; Nils Grotrian, Christoph Jahnke, beide Ribnitz; Lutz Marschner, Riesa; Beate Walter, Röbel; Kerstin Gülden, Roitzsch; Holger Nobach, Michael Gräber, Anne Ruser, Heiner Ruser, Elke Haferkorn, alle Rostock; Astrid Grulke, Schernberg; Ronny Henschke, Schierke; Roy Rühl, Schladitz; Kristin Straubel, Schorssow; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Kerstin Klement, Schwerin; Achim Kröber, Schönbach; Roland Drendel, Senftenberg; Ute Hornawsky, Silbach; Christiane May, Siebenlehn; Jochen Wetzel, Klara Töpfer, beide Sömmerda; Ramona Dörre, Bernd Liebmann, beide Sondershausen; Thomas Kaiser, Stralsund; Wolfram Meyerhöfer, Strasburg; Andrea Kurz, Anja Reumschüssel, Antje Recknagel, Christina Schmidt, Anja Häfner, Beate Neubert, Kerstin Reumschüssel, Katja Huhn, Peter Motz, Achim Gratz, Uwe Pfannschmidt, André Albrecht, Mario Recknagel, Uwe Holland-Merten, Katrin Möller, Ines Maschke, Constanze Aster, Silvana Menz, Silke Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Uta Linz, Suhl; Gerlad Schumann, Teichwolframsdorf; Holger Wittner, Teterow; Lothar Matzker, Torno; Mario Winges, Trusetal; Ulricke Dost, Petra Tiersch, Antje Wieland, Maja Rasch, alle Vacha; Thomas Vandahl, Völkershausen; Andrea Schmidt, Waren; Uwe Pillat, Waschow; Monika Rössler, Volker Lehmann, Johannes Thäter, alle Weimar; Heike Eggert, Udo Lehmann, Alexander Benz, Beate Rumpelt, alle Weißwasser; Holger Post, Wiebendorf; Andreas Döring, Lutz Grothe, beide Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mario Kuhn, Wintzingerode; Karin Junk, Peter Eggert, beide Wismar; Cornelia Hahn, Ester Holznagel, beide Wolgast; Maren Zech, Zahna; Adrian Hackenberger, Zedlitz; Antje Schneider, Zeitz; Steffi Ramsthaler, Angelika Weyh, Ute Barthelmes, alle Zella-Mehlis; Holger Radünz, Zerbst; Uwe Schulz, Birgit Gawlik, beide Zittau; Kathrin Scheffel, Kathrin Neum, beide Zschornewitz; Michael Rühling, Dresden; Geertie Maeß, Bad Doberan; Jörg und Gerd Heber, Erfurt

Der Bruch $\frac{355}{113}$ und die Zahl π

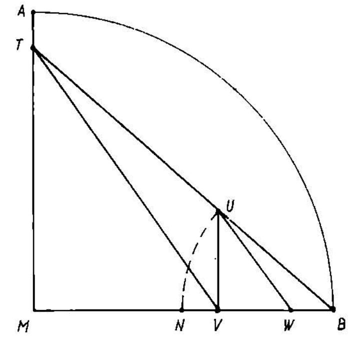
Umfang und Durchmesser eines Kreises sind inkommensurabel. Wären sie kommensurabel, so gäbe es eine Strecke der Länge e so, daß die Längen U bzw. d von Kreisumfang und Kreisdurchmesser ganzzahlige Vielfache von e wären, etwa $U=m\,e$, $d=n\,e$. Dann wäre das für alle Kreise konstante Verhältnis von Umfang und Durchmesser (seit Euler kurz mit π bezeichnet) ein Bruch:
$\pi=\frac{U}{d}=\frac{m\,e}{n\,e}=\frac{m}{n}$. Johann Heinrich Lambert bewies aber 1767, daß π nicht als gebrochene Zahl darstellbar ist (π ist wie $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl). Man kann π durch einen Bruch nur näherungsweise angeben. Der griechische Geometer Archimedes von Syrakus fand im 3. Jh. v. u. Z., daß, wenn der Durchmesser eines Kreises in 7 gleiche Teile geteilt wird, 21 solcher Teile eine kleinere, 22 aber eine größere Länge ergeben als der (etwa abgewickelte) Kreisumfang: $\frac{21}{7}<\pi<\frac{22}{7}$.
Im fünften Jahrhundert benutzte der chinesische Astronom Zu Ch'ong-Zhi den Bruch $\frac{355}{113}$ als einen sehr genäherten Ausdruck des Verhältnisses von Länge des Umfangs zur Länge des Durchmessers. Erst über ein Jahrtausend später wurde dieser Bruch in Europa erneut gefunden. Auf welche Weise der chinesische Astronom und Mitte des 16. Jahrhunderts Peter Metius diesen Bruch $\frac{355}{113}$, dessen Dezimalbruchentwicklung erst in der achten Ziffer von der Dezimalbruchentwicklung von

$$\pi=3{,}14159\,26535\,89793\ldots$$

abweicht, ermittelt haben, ist nicht bekannt. Spätestens seit Eulers Zeit weiß man, daß $\frac{355}{113}$ einer der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von π ist.

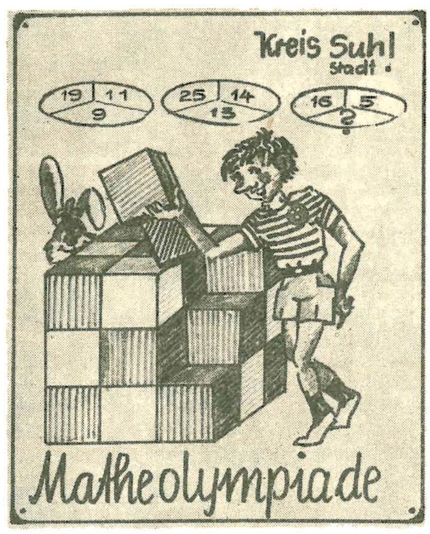
(Die ersten solchen Näherungsbrüche sind:
$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}$.)

Es läßt sich unschwer dadurch mit Lineal und Zirkel eine Strecke konstruieren, die näherungsweise die Länge π hat, indem man zunächst eine Strecke der Länge $\frac{16}{113}$ konstruiert und dann zu dieser Strecke die Strecke der Länge 3 addiert:
$\frac{16}{113}+3=\frac{355}{113}$. Die Konstruktion der Strecke der Länge $\frac{16}{113}$ kann so erfolgen:
Man betrachtet einen Viertelkreis und darin senkrecht aufeinanderstehende Radien MA und MB der Länge 1 (Bild).



Durch fortgesetztes Halbieren teile man den Radius AM in 8 gleiche Abschnitte (der Länge $\frac{1}{8}$) und wähle auf AM den Punkt T so, daß $\overline{TM}=\frac{7}{8}$. Man verbinde T mit B. Der Punkt N halbiere den Radius MB. Schlägt man um B einen Kreis mit dem Radius $\overline{BN}=\frac{1}{2}$, so erhält man auf TB den Schnittpunkt U so, daß $\overline{UB}=\frac{1}{2}$. Man wähle V auf MB so, daß UV parallel zu AM. Man verbinde T mit V und wähle endlich W auf MB so, daß UW parallel zu TV ist. Dann gilt $\overline{WB}=\frac{16}{113}$. Warum?

H. Pieper



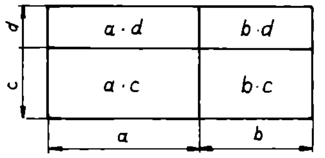
Suhl, 16. November 1983

Die Fachkommission Mathematik in Suhl-Stadt übergab jedem Teilnehmer an der Kreisolympiade eine Postkarte als Erinnerungsgeschenk; Entwurf: Mathematikfachlehrer D. Kiehle, F.-Köhler-OS, Suhl.

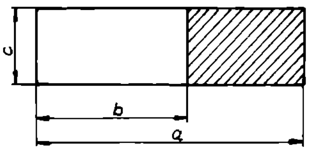
Lösungen

Lösungen zu:
Geometrie hilft der Arithmetik

▲1▲ $(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d$



▲2▲ $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$



▲3▲ a) $(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
b) $(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
c) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

▲4▲ Aus $a<b$ und $c<d$ folgt $a\cdot c<b\cdot d$.

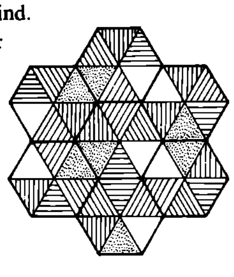
▲5▲ Nein. Es gibt Zahlentripel für $a\cdot c<b\cdot d, a\cdot c=b\cdot d$ und $a\cdot c>b\cdot d$. (Finde selbst solche Beispiele!)

▲6▲ Erhöhung um ein Neuntel! (Benutze zur Begründung ein in 10 gleich große Rechtecke unterteiltes Rechteck!)

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Von 7 regelmäßigen Sechsecken ist eines mit 6 Farben gefärbt (siehe Bild). Färbt die übrigen Sechsecke mit denselben Farben so, daß in der „Blume", die im Bild dargestellt ist, alle dreieckigen Teilflächen, die an einer Sechseckseite aneinanderstoßen, gleichfarbig sind.

Lösung:



▲2▲ In dem rechtwinkligen Dreieck XYZ ist W der Mittelpunkt von $\overline{XY}$, und der Kreis mit $\overline{ZW}$ als Durchmesser schneidet $\overline{WX}$ in V. Berechne die Länge von $\overline{XZ}$, wenn $\overline{XY}=50$ und $\overline{WV}=7$!

Lösung: In dem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende, die zur Hypotenuse gezeichnet wird, gleich der Hälfte der Hypotenuse. Folglich ist $\overline{ZW}=25$, und nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck ZVW, daß

$$\overline{VZ}=\sqrt{\overline{ZW}^2-\overline{VW}^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24.$$

Deshalb ist im rechtwinkligen Dreieck ZVX dann

$$\overline{XZ}=\sqrt{\overline{XV}^2+\overline{VZ}^2}=\sqrt{24^2+18^2}=30.$$

▲3▲ Man will die Fassade einer Schule weißen. Diese Fassade hat eine Länge von 18 m und eine Höhe von 12 m; man sieht weiterhin 12 Fenster und eine Tür. Die Ausmaße jedes Fensters, in m, sind 2,5 und 1,5; diejenigen der Tür 3 und 2. Berechne die Fläche der zu weißenden Fassade in m^2!

Lösung: Die Fläche der Fassade einschließlich der Fenster beträgt $18\text{ m}\cdot 12\text{ m}=216\text{ m}^2$. Die Fläche der Tür ist $3\text{ m}\cdot 2\text{ m}=6\text{ m}^2$, die der Fenster $2{,}5\text{ m}\cdot 1{,}5\text{ m}\cdot 12\text{ m}=45\text{ m}^2$. Dann beträgt die Fläche der zu weißenden Fassade $216\text{ m}^2-45\text{ m}^2-6\text{ m}^2=165\text{ m}^2$.

Lösung zu: Acht und fünf

a) Diese harte Nuß hat eine interessante Geschichte. Vor mehr als hundert Jahren hat der russische Mathematiker und Schachmeister Karl Jatiker bewiesen, daß es 92 solcher Stellungen gibt. Zweiundneunzig! Und selbst eine zu finden ist nicht einfach! Hier nun zwei Beispiele:
Acht Damen sind entweder auf die Felder a3, b5, c2, e1, f7, g4 und h6 oder auf a6, b4, c7, d1, e8, f2, g5 und h3 zu stellen.
b) Die größte Zahl der Felder, die von acht Damen nicht attackiert werden kann, ist elf. Die dafür erforderliche Damenstellung ist folgende:
b1, b2, f2, g1, g3, g7, h2, h7.
c) Fünf Damen auf a2, c4, d5, e6, g8 kontrollieren alle Felder des Brettes. Diese Aufgabe hat mehr als tausend Lösungen.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Frohe Ostern

1–8

Es ist 12 durch 23

Es gibt 135 derartige Lösungen. Oft werden die 59 Fälle nicht berücksichtigt, die von 00:01 bis 00:59 möglich sind.

alpha auf Kurs 80

Es gibt 80 Möglichkeiten. Um diese Anzahl zu ermitteln, kann die Aufgabe in drei Teilaufgaben zerlegt werden: Teilaufgabe 1 (links) enthält $1+4+6+4+1=16$ Möglichkeiten, um das Wort *alpha* auf dem geforderten Wege zu bilden. (Die kleinen Ziffern neben den Buchstaben dienen zur Erleichterung des Auszählens. Man mache sich mit den zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten eingehend bekannt. P^4 bedeutet z. B., daß von A aus vier Wege zu diesem Buchstaben führen.) In Teilaufgabe 2 (Mitte) lassen sich $1+5+11+15+16=48$ Möglichkeiten und in Teilaufgabe 3 noch einmal 16 Möglichkeiten ermitteln. Zusammen also 80.

$A^1\,L^1\,P^1H^1\,A^1\bullet\,A^1\,L^1\,P^1H^1\,A^1\bullet\,A^1$
$L^1\,P^2H^3\,A^4\bullet\,A^1\,L^2\,P^3H^4\,A^5\bullet\,A^1\,L^2$
$P^1H^3\,A^6\bullet\,A^1\,L^2\,P^4H^7\,A^{11}\bullet A^1L^2P^4$
$H^1\,A^4\bullet\,A^1\,L^2\,P^4H^8\,A^{15}\bullet A^1L^2P^4H^8$
$A^1\bullet\,A^1\,L^2\,P^4H^8A^{16}\bullet A^1L^2P^4H^8A^{16}$

Spielereien um das Jahr 1984

a) $1984=1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 31=1\cdot 2\cdot 32\cdot 31$
Der Vater ist 32 Jahre, die Mutter 31 Jahre alt, die beiden Kinder zählen 1 und 2 Jahre.

b)
$$x+2x+4x+8x+16x=1984$$
$$31x=1984$$
$$x=64$$
$$64+128+256+512+1024=1984$$

Alter der Familienmitglieder gesucht

Sohn 9, Tochter 18, Mutter 36, Vater 45 Jahre; Gesamtalter: 108.

Dreierlei, Viererlei

a)
$$3x+3=3^3-3x$$
$$6x=27-3$$
$$x=4$$

b)
$$\frac{x}{4}+4=4x-4$$
$$8=\frac{15}{4}x$$
$$x=\frac{32}{15}$$

alpha-Logik

Durch äquivalente Umformung der Gleichung (2) ergibt sich $2\cdot\alpha=L\cdot\alpha$, also $L=2$.
Aus $L=2$, der Ungleichung (1) und dem vorgegebenen Variablengrundbereich folgt unmittelbar $\alpha=1$.
Nach Einsetzen von $\alpha=1$, $L=2$ in Gleichung (3) und äquivalenter Umformung ergibt sich $O=3$.
Dieses Verfahren schrittweise auf die Gleichungen (4) bis (6) angewendet, liefert $G=4$, $I=5$, $K=6$.
Diese Zahlen erfüllen alle gestellten Bedingungen, was die Probe beweist:

(2) $\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

(5) $\frac{1}{5}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

(6) $\frac{1}{6}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)$
$\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

Übung

Figur 3 entspricht den Bedingungen.

Lösungen zu:
Ungarischer Bilderbogen

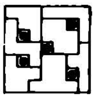
▲1▲ Die Polizei betritt Haus 18. Auf die Spur führt sie die Lage der Häuser 17 und 18 sowie die Bäume über den beiden Häusern.

▲2▲ Der Buchstabe N erfüllt die geforderten Bedingungen.

▲3▲ Die Kreisfigur 4 bleibt übrig.

▲4▲ $A: f=2\cdot v-1$, also 289;
$B: f=v^2-1$, also 15745023;
$C: f=3\cdot v$, also 486;
$D: f=3+v$, also 16.

▲5▲ Durch weitere 30 Pfeile wird die vorgegebene Figur zum Rechteck.

▲6▲


▲7▲ $1+9-8+2+7-6+5-4+3-2+5$
$-6+7-8+9-1-9+4-1+3-5$
$-4-1=0$

▲8▲ Ein F-Element bleibt übrig.

▲9▲ Der Körper Nr. 2 gehört zum abgebildeten Netz.

alpha-Wettbewerb
Heft 5/83, Fortsetzung

Ma 10/12 ■2374 Es sei n der kleinste der zu ermittelnden Summanden; dann gilt
$n+(n+1\cdot 6)+(n+2\cdot 6)+(n+3\cdot 6)+\ldots+(n+k\cdot 6)=115$, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt weiter
$(k+1)\cdot n+6\cdot(1+2+3+\ldots+k)=115$,
$(k+1)\cdot n+6\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2}=115$,
$(k+1)(n+3k)=115$,
$n+3k=\frac{115}{k+1}$, also $n=\frac{5\cdot 23}{k+1}-3\cdot k$.
Nur für $k=4$ und somit für $n=11$ existiert auf Grund der vorgegebenen Bedingungen eine Lösung. Die Summanden lauten 11, 17, 23, 29, 35, und es gilt $11+17+23+29+35=115$.

Ma 10/12 ■2375 Für Kugel bzw. Würfel gelten folgende Beziehungen:
$A_K=4\pi r^2$; $V_K=\frac{4}{3}\pi r^3$; $A_W=6a^2$; $V_W=a^3$
(A bedeutet Oberflächeninhalt, V Volumen und a Kantenlänge.)
Nun gilt $A_K:A_W=4\pi r^2:6a^2$,
und wegen $\frac{4}{3}\pi r^3=a^3$ erhalten wir

$$A_K:A_W=4\pi r^2:6\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^{\frac{2}{3}}.$$

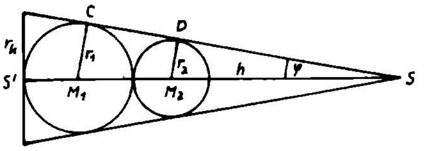
Durch Umformen ergibt sich

$$A_K:A_W=1:\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ bzw.}$$

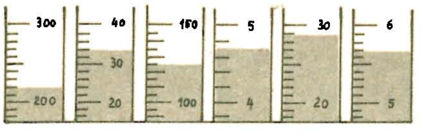
$$A_K:A_W\approx 1:1{,}24.$$

Die gesuchte Maßzahl x beträgt angenähert 1,24.

Ma 10/12 ■2376 Skizze nicht maßstäblich! Die Berührungsradien stehen senkrecht auf der Mantellinie und sind zueinander parallel. Wir wenden den Strahlensatz an und erhalten
$\overline{DM_2}:\overline{CM_1}=\overline{SM_2}:\overline{SM_1}$
$=\overline{SM_2}:(\overline{SM_2}+r_1+r_2)$,
$r_2(\overline{SM_2}+r_1+r_2)=r_1\cdot\overline{SM_2}$.



Nach weiteren Umformungen ergibt sich
$\overline{SM_2}=\frac{r_1\cdot r_2+r_2^2}{r_1-r_2}$; $\overline{SM}=36$ cm.
Für die Länge der Höhe des Kegels gilt
$h=\overline{SS'}=\overline{SM_2}+r_2+2r_1$; $h=50$ cm.
Es gilt weiter
$\sin\phi=\frac{r_2}{\overline{SM_2}}$; $\sin\phi=0{,}1$; $\phi\approx 6{,}4°$ und
$\tan\phi=\frac{r_K}{\overline{SS'}}$; $r_K=\overline{SS'}\cdot\tan\phi$;
$r_K=50\text{ cm}\cdot\tan 6{,}4°$; $r_K\approx 5{,}6$ cm.
Die Länge des Grundkreisradius dieses Kegels beträgt etwa 5,6 cm, seine Höhe 50 cm. (Alle Symbole für Strecken sind hier als Symbole für Längen aufzufassen!)

Ph 6 ■141 a) 270 ml, 26 ml, 145 ml, 4,3 ml, 24 ml, 5,3 ml.
b)


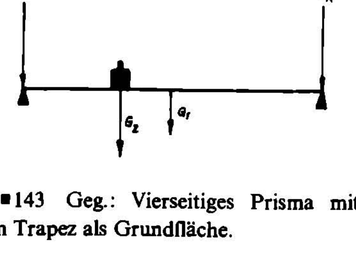
Ph 7 ■142
Geg.: $l=1$ m Länge des Balkens
$a=0{,}3$ m Abstand des Massestückes zur linken Schneide
$G_1=20$ N Gewichtskraft des Balkens
$G_2=30$ N Gewichtskraft des Massestückes
Ges.: F_L und F_R
Da der Balken nur von den beiden Schneiden gehalten wird, er waagerecht liegt und alle Kräfte vertikal wirken, gilt:
$F_L+F_R=G_1+G_2$.
Nun betrachtet man den Balken als einseitigen Hebel mit dem Drehpunkt in der linken Auflage.

$l\cdot F_R=\frac{l}{2}\cdot G_1+a\cdot G_2$ $\quad F_L=G_1+G_2-F_R$

$F_R=\frac{G_1}{2}+\frac{a}{l}\cdot G_2$ $\quad F_L=20\text{ N}+30\text{ N}-19\text{ N}$

$F_R=\frac{20\text{ N}}{2}+\frac{0{,}3\text{ m}}{1\text{ m}}\cdot 30\text{ N}$ $\quad F_L=31$ N

$F_R=19$ N.
Die rechte Schneide wird mit 19 N belastet, die linke mit 31 N.



Ph 8 ■143 Geg.: Vierseitiges Prisma mit einem Trapez als Grundfläche.
$a=26$ cm; $c=(26-12)$ cm $=14$ cm;
$h_1=12$ cm; $h=12$ cm.
Ges.: Holzverbrauch V_1 in einem Jahr.
Das Volumen des Keiles erhält man nach der Gleichung
$V=A_G\cdot h$ mit $A_G=\frac{a+c}{2}\cdot h_1$,
$V=\frac{(a+c)\cdot h\cdot h_1}{2}=\frac{(26+14)\text{ cm}\cdot 12\text{ cm}\cdot 12\text{ cm}}{2}$
$V=2880\text{ cm}^3=0{,}00288\text{ m}^3$.
Der Holzverbrauch in einem Jahr ist dann
$V_1=4\cdot 5000\cdot V=20000\cdot 0{,}00288\text{ m}^3$,
$V_1=57{,}6\text{ m}^3$.

Ph 9 ■144 Geg.: $h_1=15$ m, $v_0=10$ m/s, $g=10\text{ m/s}^2$
Ges.: t_{ges}
Die Steighöhe h ergibt sich aus der Gleichung

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \text{ mit } v=gt, \text{ also } t=\frac{v}{g}.$$

Dann ist $h=\frac{1}{2}\cdot g\cdot\frac{v^2}{g^2}$

bzw. $\quad h=\frac{v^2}{2g}$ und mit $v=v_0$,

$$h=\frac{10\text{ m}\cdot 10\text{ m}\cdot\text{s}^2}{2\cdot 10\text{ m}\cdot\text{s}^2}=5\text{ m}.$$

Die Fallhöhe $h_F=h_1+h$,
$h_F=15\text{ m}+5\text{ m}=20$ m.
Die Steigzeit erhält man aus der Gleichung
$v_0=g\cdot t_1$
also $\quad t_1=\frac{v_0}{g}$, $\quad t_1=\frac{10\text{ m}\cdot\text{s}^2}{10\text{ m}\cdot\text{s}}=1$ s.
Die Fallzeit findet man nach $h_F=\frac{g}{2}\cdot t_2^2$,
$t_2=\sqrt{\frac{2\cdot h_F}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 20\text{ m}\cdot\text{s}^2}{10\text{ m}}}=2$ s.
Schließlich ist dann
$t_{ges}=t_1+t_2$,
$t_{ges}=1\text{ s}+2\text{ s}=3$ s.
Der Stein erreicht die Erdoberfläche nach 3 Sekunden.

Ph 10/12 ■145 Geg.: $I=20000$ A, $W=5000$ kWh, $Q=20$ C
Ges.: Spannung U und die Zeitdauer eines Blitzes t
Die Elektrizitätsmenge Q berechnet man nach der Gleichung
$Q=I\cdot t$,
also ist
$t=\frac{Q}{I}=\frac{20\text{ C}}{20000\text{ A}}=0{,}001$ s.
Weiterhin ist
$W=U\cdot Q$, also ist
$U=\frac{W}{Q}=\frac{5000\text{ kWh}}{20\text{ C}}=\frac{5\cdot 10^6\cdot 3{,}6\cdot 10^3\text{ VAs}}{2\cdot 10^1\text{ As}}$,
$U=900000000$ V.
Es trat eine Spannung von 900 Millionen Volt auf, und der Blitz hatte eine Dauer von 0,001 Sekunde.

Ch 7 ■113
a) 1 kg Schwefelkies $\triangleq$ 0,36 kg Schwefel
$m\triangleq 1{,}5$ t Schwefel
$m=\frac{1\text{ kg}\cdot 1{,}5\text{ t}}{0{,}36\text{ kg}}$
$m=4{,}17$ t
b) $4{,}17\text{ t}\cdot 30=125{,}1$ t

Dem Betrieb müssen täglich 4,17 t und monatlich 125,1 t Schwefelkies zur Verfügung gestellt werden.

Ch 8 ■ 114

a) $160\,g\ Fe_2O_3 \triangleq 112\,g\ Fe$

$0{,}23\,g\ Fe_2O_3 \triangleq m$

$$m=\frac{0{,}23\,g\cdot 112\,g}{160\,g}$$

$$m=0{,}16\,g$$

Die Einwaage enthält 0,16 g Eisen.

b) 0,732 g Legierung $\triangleq$ 0,16 g Eisen

100 g Legierung $\triangleq m$

$$m=\frac{100\,g\cdot 0{,}16\,g}{0{,}732\,g}$$

$$m=21{,}9\,g$$

Die Legierung enthält 21,9% Eisen.

Ch 9 ■ 115

$$Ca_2(HPO_4)_2 \rightarrow 2\,CaO + P_2O_5 + H_2O$$

$m \quad \rightarrow 212{,}3\,kg$

$Ca_2(HPO_4)_2 \quad 2\,P$

$272\,g \quad 62\,g$

$$m=\frac{272\,g\cdot 212{,}3\,kg}{62\,g}$$

$$m=931{,}4\,kg$$

980 kg $Ca_2(HPO_4)_2$ (x%ig) –
931,4 kg $Ca_2(HPO_4)_2$ (100%ig)
100 kg $Ca_2(HPO_4)_2$ (x%ig) –
x kg $Ca_2(HPO_4)_2$ (100%ig)

$$x=\frac{100\,kg\cdot 931{,}4\,kg}{980\,kg}$$

$$x=95\,kg$$

Das Kalziumphosphat besitzt einen Reinheitsgrad von 95%, also enthält es 5% Verunreinigungen.

Ch 10/12 ■ 116

a) 1 m³ Gas enthält 0,45 m³ Wasserstoff
0,3 m³ Methan
0,045 m³ Äthylen
0,04 m³ Kohlenmonoxid

Kohlendioxid und Stickstoff kommen für die Verbrennung nicht in Frage.

$0{,}45\,m^3 \quad V_1 \quad V_2$

$2\,H_2 \ + O_2 \ \rightarrow 2\,H_2O$

$44{,}8\,l \quad 22{,}4\,l \quad 44{,}8\,l$

$$V_1=\frac{0{,}45\,m^3\cdot 22{,}4\,l}{44{,}8\,l}$$

$$V_1=0{,}225\,m^3\ O_2$$

$$V_2=\frac{0{,}45\,m^3\cdot 44{,}8\,l}{44{,}8\,l}$$

$$V_2=0{,}45\,m^3\ H_2O$$

$0{,}3\,m3 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3$

$CH_4 \ + 2\,O_2 \ \rightarrow CO_2 + 2\,H_2O$

$22{,}4\,l \quad 44{,}8\,l \quad 22{,}4\,l \quad 44{,}8\,l$

$$V_1=\frac{0{,}3\,m^3\cdot 44{,}8\,l}{22{,}4\,l}$$

$$V_1=0{,}6\,m^3\ O_2$$

$$V_2=\frac{0{,}3\,m^3\cdot 22{,}4\,l}{22{,}4\,l}$$

$$V_2=0{,}3\,m^3\ CO_2$$

$$V_3=\frac{0{,}3\,m^3\cdot 44{,}8\,l}{22{,}4\,l}$$

$$V_3=0{,}6\,m^3\ H_2O$$

$0{,}045\,m^3 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3$

$C_2H_4 \ + 3\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2 + 2\,H_2O$

$22{,}4\,l \quad 67{,}2\,l \quad 44{,}8\,l \quad 44{,}8\,l$

$$V_1=\frac{0{,}045\,m^3\cdot 67{,}2\,l}{22{,}4\,l}$$

$$V_1=0{,}135\,m^3\ O_2$$

$$V_2=\frac{0{,}045\,m^3\cdot 44{,}8\,l}{22{,}4\,l}$$

$$V_2=0{,}09\,m^3\ CO_2$$

$$V_3=\frac{0{,}045\,m^3\cdot 44{,}8\,l}{22{,}4\,l}$$

$$V_3=0{,}09\,m^3\ H_2O$$

$0{,}04\,m^3 \quad V_1 \quad V_2$

$2\,CO \ + O_2 \ \rightarrow 2\,CO_2$

$44{,}8\,l \quad 22{,}4\,l \quad 44{,}8\,l$

$$V_1=\frac{0{,}04\,m^3\cdot 22{,}4\,l}{44{,}8\,l}$$

$$V_1=0{,}02\,m^3\ O_2$$

$$V_2=\frac{0{,}04\,m^3\cdot 44{,}8\,l}{44{,}8\,l}$$

$$V_2=0{,}04\,m^3\ CO_2$$

Der Gesamtverbrauch an Sauerstoff beträgt:

$0{,}225\,m^3 + 0{,}6\,m^3 + 0{,}135\,m^3 + 0{,}02\,m^3 = 0{,}98\,m^3$

$$\frac{0{,}98\,m^3\cdot 100\%}{21\%}=4{,}67\,m^3\ \text{Luft}$$

Zur Verbrennung von 1 m³ Stadtgas benötigt man 4,67 m³ Luft.

b) Die Rauchgase bestehen aus Stickstoff, Kohlendioxid und Wasser.

$0{,}14\,m^3 + 4{,}67\,m^3 - 0{,}98\,m^3 = 3{,}83\,m^3\ N_2$

$0{,}025\,m^3 + 0{,}3\,m^3 + 0{,}09\,m^3 + 0{,}04\,m^3 = 0{,}455\,m^3\ CO_2$

$0{,}45\,m^3 + 0{,}6\,m^3 + 0{,}09\,m^3 = 1{,}14\,m^3\ H_2O$

Das Gesamtvolumen der Rauchgase beträgt:

$3{,}830\,m^3\ N_2 + 0{,}455\,m^3\ CO_2 + 1{,}140\,m^3\ H_2O = 5{,}425\,m^3$

$5{,}425\,m^3 \triangleq 100\%$

$3{,}83\ \ m^3 \triangleq x$

$$x=\frac{3{,}83\,m^3\cdot 100\%}{5{,}425\,m^3}$$

$$x=70{,}6\%\ N_2$$

$$x=\frac{0{,}455\,m^3\cdot 100\%}{5{,}425\,m^3}$$

$$x=8{,}4\%\ CO_2$$

$$x=\frac{1{,}14\,m^3\cdot 100\%}{5{,}425\,m^3}$$

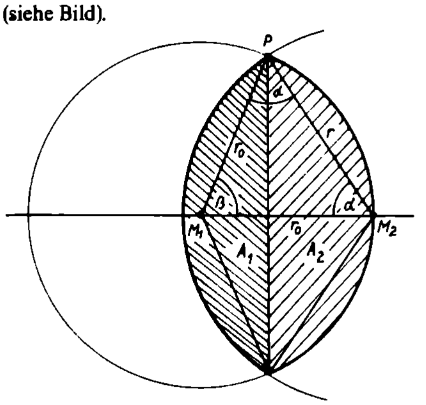
$$x=21\%\ H_2O$$

Die Rauchgase bestehen aus 70,6% Stickstoff, 8,4% Kohlendioxid und 21% Wasser.

Lösung zu: Eine hungrige Ziege

Heft 1/84

Alle Winkel werden im Bogenmaß gemessen. Im $\triangle M_1M_2P$ gilt $\overline{M_1M_2}=r_0$ und $\beta=\pi-2\alpha$ (siehe Bild).



Dann ist $\cos\beta=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha$ und

$$r^2=r_0^2+r_0^2-2r_0^2\cos\beta,$$
$$r^2=2r_0^2(1-\cos\beta),$$
$$r^2=2r_0^2(1+\cos 2\alpha). \qquad (1)$$

Weiterhin besteht die gesamte schraffierte Fläche A aus den beiden Kreissegmenten A_1 und A_2, also

$$A=A_1+A_2. \qquad (2)$$

Nun ist

$$A=\frac{\pi\cdot r_0^2}{2},$$
$$A_1=\frac{r^2}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)$$
$$=\frac{r^2}{2}(2\alpha-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha),$$
$$A_1=r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha) \qquad (3)$$

und

$$A_2=\frac{r_0^2}{2}(2\beta-\sin 2\beta)=\frac{r_0^2}{2}[2(\pi-2\alpha)-\sin 2(\pi-2\alpha)],$$
$$A_2=r_0^2[\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha)\cdot\cos(\pi-2\alpha)],$$
$$A_2=r_0^2[\pi-2\alpha-(\sin\pi\cos 2\alpha-\cos\pi\sin 2\alpha)(\cos\pi\cos 2\alpha+\sin\pi\sin 2\alpha)],$$
$$A_2=r_0^2(\pi-2\alpha+\sin 2\alpha\cos 2\alpha). \qquad (4)$$

Setzt man (1), (3) und (4) in (2) ein, ergibt sich

$$A=A_1+A_2,$$
$$\frac{\pi r_0^2}{2}=2r_0^2(1+\cos 2\alpha)(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)+r_0^2(\pi-2\alpha+\sin 2\alpha\cos 2\alpha)$$
$$0=2\alpha+2\alpha\cos 2\alpha-2\cdot\sin\alpha\cos\alpha-2\cdot\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\pi}{2}-2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha,$$
$$0=\frac{\pi}{2}+2\alpha\cos 2\alpha-\sin 2\alpha.$$

Ersetzt man $2\alpha=x$, erhält man die goniometrische Gleichung

$$0=x\cdot\cos x-\sin x+\frac{\pi}{2}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die Abszisse des Schnittpunktes der beiden Graphen von

$$g=f(x)=\sin x+\frac{\pi}{2},$$
$$h=f(x)=x\cdot\cos x.$$

Als Näherungswert findet man durch Zeichnung $x\approx 1{,}9$.

Bestimmt man mit der Regula falsi x' für den Fall $x_1<x'<x_2$ mit $x_1=1{,}89$ und $x_2=1{,}91$ in der Funktion

$$y=f(x)=x\cdot\cos x-\sin x+\frac{\pi}{2},$$

erhält man zunächst

$$y_1=f(x_1)=1{,}89\cdot\cos 1{,}89-\sin 1{,}89+1{,}5708=0{,}02794,$$
$$y_2=f(x_2)=1{,}91\cdot\cos 1{,}91-\sin 1{,}91+1{,}5708=-0{,}00690,$$

und

$$x'=\frac{(y_1x_2-y_2x_1)}{y_1-y_2}=\frac{0{,}02794\cdot 1{,}91+0{,}006902\cdot 1{,}89}{0{,}03484}=1{,}906. \qquad (5)$$

Schließlich setzt man (5) in (1) ein und erhält

$$r^2=2r_0^2(1+\cos 2\alpha),$$
$$r^2=2r_0^2(1+\cos x'),$$
$$r^2=2r_0^2(1+\cos 1{,}906),$$

$r^2=1{,}342\cdot r_0{}^2,$
$r\ =1{,}1585\,r_0.$

Der Strick muß also rd. 1,16mal so lang sein wie der Radius der kreisförmigen Wiese.

Berichtigung zum Beitrag: Labyrinth-Probleme

In Heft 2/83, S. 101, muß es in Bild 7, rechts, heißen: Bewegungsanweisung (auf ein zum Muster gehörendes Nachbarfeld).

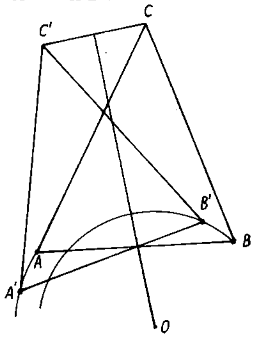
Lösungen zu: alpha-Wettbewerb,
Heft 6/83

Ma 5 ▪2379 Wegen $1\leqq a\leqq 9$ entfällt $a=0$. Da b Nachfolger von a ist, gilt $b=a+1$. Wegen $0\leqq c\leqq 9$ entfällt $a\geqq 5$; denn bereits für $a=5$, also $b=6$ gilt $c=11$, also $c>9$, was nicht möglich ist. Wir stellen eine Tabelle auf.

a	b	c
1	2	3
2	3	5
3	4	7
4	5	9

Es existieren genau vier solche Zahlen; sie lauten 123, 235, 347 und 459.

Ma 5 ▪2380 Wegen $\overline{OC}=\overline{OC'}$ ist das Dreieck OCC' gleichschenklig. Die Mittelsenkrechte zur Basis $\overline{CC'}$ geht durch den Punkt 0. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Wir zeichnen die Mittelsenkrechte zu $\overline{CC'}$, zeichnen um C einen Kreis mit dem Radius $r=6$ cm, der die Mittelsenkrechte in O schneidet. Der Schnittpunkt der Kreise um O mit dem Radius $\overline{OA}$ und um C' mit dem Radius $\overline{CA}$ liefert den Bildpunkt A'. Analog dazu konstruieren wir B'.



Ma 5 ▪2381 48000000 Minuten sind 800000 Stunden; 800 000 Stunden sind rund 33333 Tage: 33333 Tage sind rund 91 Jahre. Günters Urgroßvater feierte seinen 91. Geburtstag.

Ma 5 ▪2382 $90374+623374=713748$.

Ma 5 ▪2383 Wegen $95\cdot 3=285<300$ muß der zweite Faktor größer als 3 sein. Da sowohl der erste Faktor als auch das Produkt auf die Grundziffer 5 enden, kann der zweite Faktor nur 5, 7 oder 9 sein. Durch Abschätzen erhalten wir folgende fünf Lösungen: $65\cdot 5=325$, $75\cdot 5=375$, $45\cdot 7=315$, $55\cdot 7=385$, $35\cdot 9=315$.

Ma 5 ▪2384 Angenommen, diese Klasse hatte x Quartiere geworben; dann gilt $(x-4)\cdot 3=2\cdot x$,
$3x-12=2x$, also $x=12$.
Diese Klasse hatte 12 Quartiere geworben.

Ma 6 ▪2385 Es sei $z=\overline{abab}$ eine solche im dekadischen Positionssystem dargestellte vierstellige natürliche Zahl mit $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$.
Dann gilt $z=1000a+100b+10a+b$,
$z=1010a+101b$, $z=101\cdot(10a+b)$.
Wegen $10\leqq 10a+b\leqq 99$, also $10+b\neq 101$, kann z nicht Quadratzahl sein. Da z durch 101 teilbar ist, kann z auch nicht Primzahl sein.

Ma 6 ▪2386 Insgesamt wurden $6\cdot 22=132$ Spiele ausgetragen. Angenommen, es beteiligten sich n Schüler an diesem Tischtennisturnier; dann muß jeder dieser n Spieler gegen $(n-1)$ Spieler antreten. Nun gilt $n\cdot(n-1)=132=12\cdot 11$, also $n=12$.
An diesem Tischtennisturnier nahmen 12 Schüler teil.

Ma 6 ▪2387

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{99}{100}\right)$$
$$=\frac{(2-1)\cdot(3-2)\cdot(4-3)\cdot\ldots\cdot(100-99)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100}=\frac{1}{100!}.$$

Ma 6 ▪2388
(1) $a=46+9\ =55$
(2) $b=20+6\ =26$
(3) $c=45+15=60$
(4) $d=46+18=64$
(5) $e=33+32=65$
(6) $f=32\div 25=57$

Ma 6 ▪2389 Angenommen, es wurden x 6-Liter- und y 7-Liter-Gefäße verwendet; dann gilt $6\cdot x+7\cdot y=50$, $7\cdot y=50-6\cdot x$. Wir belegen x nacheinander mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und berechnen stets die Differenz $50-6\cdot x$. Dabei stellen wir fest, daß die so erhaltene Differenz nur für $x=6$ durch 7 teilbar ist, also $y=2$ gilt. Zum Abfüllen von 50 Liter Flüssigkeit sind sechs 6-Liter- und zwei 7-Liter-Flaschen erforderlich.

Ma 7 ▪2390 Angenommen, x Schüler erhielten die Note 1; dann gilt

$$\frac{x\cdot 1+7\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 4}{x+7+3+1}=2,$$
$$\frac{x+27}{x+11}=2,\ 2\cdot(x+11)=x+27,\ x=5.$$

Fünf Schüler erhielten die Note 1.

Ma 7 ▪2391 Angenommen, Andreas ist n Jahre alt; dann ist Helmut $2\cdot n$ und Wolfgang $(2\cdot n+2)$ Jahre alt. Somit ist der Vater $2\cdot(2n+2)=(4n+4)$ und die Mutter $(4n+1)$ Jahre alt. Dann ist Jürgen $(4n+1):3=\frac{4}{3}n+\frac{1}{3}$ und Roswitha $\left(\frac{4}{3}n+5\frac{1}{3}\right)$ Jahre alt. Zusammen sind alle $\left(13\frac{8}{3}n+12\frac{2}{3}\right)$ Jahre alt, und es gilt $13\frac{8}{3}n+12\frac{2}{3}=232$,

$$\frac{47}{3}n=\frac{658}{3},\ n=\frac{658}{47},\ n=14.$$

Der Vater ist 60, die Mutter 57, Wolfgang 30, Helmut 28, Roswitha 24, Jürgen 19 und Andreas 14 Jahre alt.

Ma 7 ▪2392 Es seien $n, n+1, n+2, n+3$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n\neq 0$; dann gilt
$n\cdot(n+3)<(n+1)\cdot(n+2)$,
$n^2+3n\ \ <n^2+3n+2$,
$0\qquad\quad <2$.
Für jede Belegung von n wird diese Ungleichung erfüllt, d. h., sie ist allgemeingültig. Deshalb gilt diese Beziehung für vier beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Ma 7 ▪2393 Es sei v_1 die Geschwindigkeit des Schiffes, also $10\cdot v_1$ die des Flugzeuges und s_1 der vor dem Start des Flugzeugs zurückgelegte Weg des Schiffes, also (s_1+180) der Weg des Flugzeugs bis zum Einholen des Schiffes.

Wegen $t=\frac{s}{v}$ gilt dann
$s_1:v_1=(s_1+180):10v_1$,
$10s_1 v_1=v_1(s_1+180)$ und wegen $v_1\neq 0$ somit
$10s_1=s_1+180$, also $s_1=20$ und somit
$s_2=20+180=200$.
Das Flugzeug holte das Handelsschiff in einer Entfernung von 200 Seemeilen vom Heimathafen ein.

Ma 8 ▪2394 Bezeichnen wir drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $(n-1)$, n, $(n+1)$, so gilt nach der Aufgabenstellung $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=56\cdot[(n-1)+n+(n+1)]$; $n\geqq 2$. Die äquivalente Umformung dieser Gleichung ergibt
$n\cdot(n^2-1)=56\cdot 3n$,
$n^2-1=168$,
$n^2=169$,
$n=\ 13$.
Es handelt sich um die Zahlen 12, 13 und 14.
Probe: $12\cdot 13\cdot 14=56(12+13+14)$
$2184=2184$.

Ma 8 ▪2395 Wegen $F+F=Z$ gilt $F=1, 2, 3$ oder 4. Wenn $F=1$, so $N=2$, also $H=4$ und $Z=3$ und $\ddot{U}+\ddot{U}=10+E$, also $\ddot{U}\geqq 5$. Für $\ddot{U}=5$ gilt $E=0$.

1. Lösung:
$$\begin{array}{r} 1521\\ +1521\\ \hline 3042\end{array}$$

Für $\ddot{U}=6$ wäre $E=2$, was wegen $N=2$ nicht möglich ist. Für $\ddot{U}=7$ wäre $E=4$, was wegen $H=4$ nicht möglich ist. Für $\ddot{U}=8$ gilt $E=6$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

2. Lösung:
$$\begin{array}{r} 1821\\ +1821\\ \hline 3642\end{array}$$

Für $\ddot{U}=9$ gilt $E=8$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

3. Lösung:
$$\begin{array}{r} 1921\\ +1921\\ \hline 3842\end{array}$$

Wenn $F=2$, so $N=4$ und $H=8$ und $Z=5$. Wegen $Z=5$ entfällt $\ddot{U}=5$. Für $\ddot{U}=6$ wäre $E=2$, was wegen $F=2$ nicht möglich ist. Für $\ddot{U}=7$ wäre $E=4$, was wegen $N=4$ nicht möglich ist.
Wegen $H=8$ entfällt $\ddot{U}=8$.
Für $\ddot{U}=9$ wäre $E=8$, was wegen $H=8$ nicht möglich ist. Wenn $F=3$, so $N=6$ und $H=2$ und $Z=7$, also $1+\ddot{U}+\ddot{U}=10+E$. Für $\ddot{U}=5$ gilt $E=1$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

4. Lösung:
$$\begin{array}{r} 3563 \\ +3563 \\ \hline 7126 \end{array}$$

Wegen $N=6$ entfällt $\ddot{U}=6$. Wegen $Z=7$ entfällt $\ddot{U}=7$. Für $\ddot{U}=8$ wäre $E=7$, was wegen $Z=7$ nicht möglich ist. Für $\ddot{U}=9$ wäre $E=9$, was wegen $\ddot{U}=E$ nicht möglich ist. Wenn $F=4$, so $N=8$ und $H=6$ und $Z=9$ und $1+\ddot{U}+\ddot{U}=10+E$. Für $\ddot{U}=5$ gilt $E=1$ und wir erhalten eine weitere Lösung.

5. Lösung:
$$\begin{array}{r} 4584 \\ +4584 \\ \hline 9168 \end{array}$$

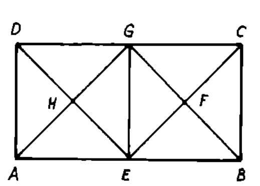
Wegen $H=6$ entfällt $\ddot{U}=6$.
Für $\ddot{U}=7$ gilt $E=5$, und wir erhalten eine weitere Lösung.

6. Lösung:
$$\begin{array}{r} 4784 \\ +4784 \\ \hline 9568 \end{array}$$

Wegen $N=8$ entfällt $\ddot{U}=8$. Wegen $Z=9$ entfällt $\ddot{U}=9$.

Ma 8 ▪2396 Bezeichnet man zwei beliebige natürliche Zahlen mit a bzw. b, so ist das Verhalten der Quadratzahlsumme $s=a^2+b^2$ bei der Division durch 4 zu untersuchen.
1. Fall: a und b sind beide gerade Zahlen, etwa $a=2m$, $b=2n$ $(m, n \in N)$. Es ist dann $s=4m^2+4n^2$, $s=4(m^2+n^2)$. Die Division durch 4 geht auf.
2. Fall: a sei eine gerade und b eine ungerade Zahl, etwa $a=2m$, $b=2n+1$ $(m, n \in N)$. Es ist dann $s=4m^2+4n^2+4n+1$, $s=4(m^2+n^2+n)+1$. Bei der Division von s durch 4 bleibt Rest 1.
3. Fall: a und b sind beide ungerade Zahlen, etwa $a=2m+1$, $b=2n+1$ $(m, n \in N)$. Es ist dann $s=(2m+1)^2+(2n+1)^2$, $s=4m^2+4m+1+4n^2+4n+1$, $s=4(m^2+m+n^2+n)+2$. Bei der Division von s durch 4 bleibt Rest 2. Weitere Fälle können nicht auftreten.

Ma 8 ▪2397 Wenn nach Voraussetzung $\overline{GE} \cong \overline{BC}$ ist, dann muß G auf $\overline{CD}$ und E muß auf $\overline{AB}$ liegen. Dann sind $AEGD$ und $EBCG$



kongruente Quadrate. In einem solchen Falle gilt $\overline{AB} \cong 2 \cdot \overline{BC}$.
$\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie $\overline{BC}$.

Ma 9 ▪2398 In jeder Folge von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen kommen vor:
(1) stets genau ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 5,
(2) mindestens ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 3,
(3) mindestens ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 4 und
(4) mindestens ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 2, das nicht auch noch ganzzahliges Vielfaches der Zahl 4 ist.
Somit sind in jedem derartigen Produkt die Faktoren 2, 3, 4 und 5 enthalten.
Da nun $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 9 ▪2399 Die Zahlen n und n' lassen sich wie folgt darstellen:
$n=1000a+100b+10a+d$,
$n'=1000d+100c+10b+a$, wobei
$1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$, $0 \leqq c \leqq 9$ und $1 \leqq d \leqq 9$ gilt.
Daraus folgt weiter
$n+n'=1001a+110b+110c+1001d$ bzw.
$n+n'=11(91a+10b+10c+91d)$.
Wie man sieht, ist $n+n'$ durch 11 teilbar, w. z. b. w.

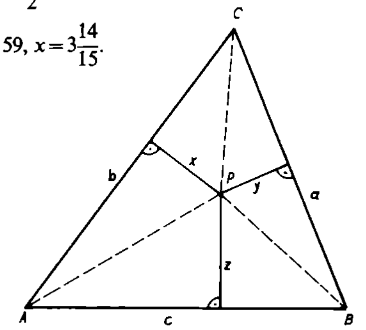
Ma 9 ▪2400
$$10^x+10^{-x}=100 \,|\cdot 10^x$$
$$10^{2x}+1=10^{x+2}$$
$$10^{2x}-10^{x+2}+1=0.$$
Wir setzen $10^x=y$ und erhalten
$$y^2-100y+1=0.$$
Nun lösen wir diese quadratische Gleichung nach y auf:
$y_{1,2}=50 \pm \sqrt{2499}$; $y_{1,2}=50 \pm 7\sqrt{51}$. Nun ist $x_1=\lg y_1$ und $x_2=\lg y_2$, und es gilt weiter
$x_1=\lg(50+7\sqrt{51})$; $x_1 \approx \lg 100$; $x_1 \approx 2$.
$x_2=\lg(50-7\sqrt{51})$; $x_2 \approx \lg 0{,}01$; $x_2 \approx -2$.
Probe: $10^2+10^{-2}=100+0{,}01 \approx 100$ und $10^{-2}+10^2=0{,}01+100 \approx 100$.
Die Lösungen der Gleichungen sind 2 und -2 (Näherungswerte!).

Ma 9 ▪2401 Da die Winkel $\sphericalangle AEB$ und $\sphericalangle ADB$ beide die Größe 90° besitzen, geht der Halbkreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser nach dem Satz des Thales durch die Punkte E und D. Wir verbinden E mit D. Das Viereck $ABDE$ ist somit ein Sehnenviereck. Nach dem Sehnensatz gilt deshalb $\overline{BS} \cdot \overline{ES} = \overline{AS} \cdot \overline{DS}$ bzw. $p \cdot q = m \cdot n$.

Ma 10/12 ▪2402 Wir nehmen an, daß es ein derartiges Zahlensystem gibt. Dann gilt
$(x^2+x+1)(2x^2+2x+2)=3x^4+x^2+4x+2$.
Durch Umformen erhalten wir
$2x^4+4x^3+6x^2+4x+2=3x^4+x^2+4x+2$;
$0=x^4-4x^3-5x^2$ und wegen $x \neq 0$
$0=x^2-4x-5$.
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen -1 und 5. Wegen $x \in N$ ist 5 die einzige Lösung für unsere Aufgabe. Die Basis des Zahlensystems ist 5.
Probe: $31 \cdot 62 = 1922$.

Ma 10/12 ▪2403 Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq b$ gilt
$$(a^c-b^c)^2>0.$$
Wir formen um und erhalten
$$a^{2c}-2a^cb^c+b^{2c}>0,$$
$$a^{2c}+b^{2c}>2a^cb^2 \,|:2,$$
$$\frac{a^{2c}+b^{2c}}{2}>a^cb^c, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 10/12 ▪2404 Der Abstand des Punktes P von den Seiten $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AB}$ habe die Länge x, y bzw. z. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt
$$A=\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}cz$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ mit } 2s=a+b+c.$$
Daraus folgt
$$\frac{1}{2}\cdot 15 \cdot x+\frac{1}{2}\cdot 13 \cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 14 \cdot 5=\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7},$$
$$\frac{15}{2}\cdot x+\frac{109}{2}=84,\ 15x+109=168,$$
$$15x=59,\ x=3\frac{14}{15}.$$



Der Abstand des Punktes P von der Seite $\overline{AC}$ beträgt rund 4 cm.

Ma 10/12 ▪2405 Im rechtwinkligen Dreieck FMD gilt
$\overline{FD}=\sqrt{\overline{FM}^2+\overline{DM}^2}$; $\overline{FD}=\sqrt{\frac{r^2}{4}+r^2}$;
$\overline{FD}=1{,}118r$. Weiter gilt
$\overline{MG}=\overline{FG}-\overline{FM}$; $\overline{MG}=1{,}118r-0{,}5r$;
$\overline{MG}=0{,}618r$.
Im rechtwinkligen Dreieck MGD gilt
$\overline{DG}=\sqrt{\overline{MG}^2+\overline{MD}^2}$; $\overline{DG}=\sqrt{(0{,}618r)^2+r^2}$;
$\overline{DG}=1{,}175r$.
Wenn nun $\overline{DG}$ tatsächlich Fünfeckseite ist, dann gilt
$\alpha=360°:5$; $\alpha=72°$ und $\beta=(180°-72°):2$; $\beta=54°$.
Nach dem Sinussatz gilt dann weiter
$\overline{DC}:\overline{MD}=\sin 72°:\sin 54°$;
$\overline{DC}=\frac{\overline{MD}\cdot\sin 72°}{\sin 54°}$; $\overline{DC}=\frac{r\cdot 0{,}9511}{0{,}8090}$;
$\overline{DC}=1{,}175r$, w. z. b. w.

Ph 6 ▪146 Fahrzeiten: $t_1=30$ s, $t_2=27$ s, $t_3=36$ s, $t_4=24$ s, $t_5=18$ s.

Ph 7 ▪147 Frau M. hat eine Leistung von $0{,}667\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ und Frau H. $0{,}8\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ vollbracht.

Ph 8 ▪148 Die theoretische Öltemperatur beträgt etwa 48 °C und die abgegebene Wärmemenge etwa 15540 kJ.

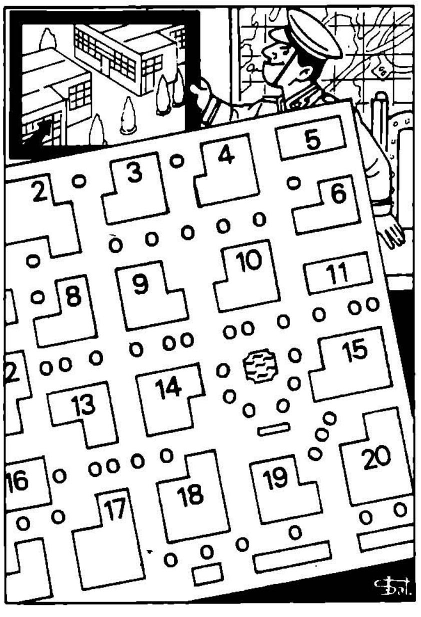
Ph 9 ▪149 Die Geschwindigkeit des Geschosses beträgt rund 800 m/s.

Ph 10/12 ▪150 Das Isotop $^{121}_{51}Sb$ ist zu 57,5% und das Isotop $^{123}_{51}Sb$ zu 42,5% vorhanden.

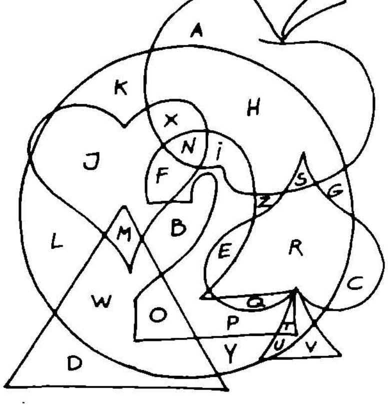
Ungarischer Bilderbogen

Unterhaltsame Aufgaben aus „Füles“, Budapest

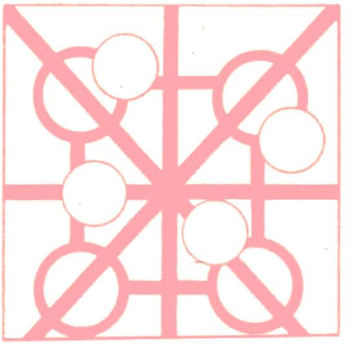
▲1▲ In dem mit einem Pfeil versehenen Gebäude (oben links) sind Diebe am Werk. Die Polizei erscheint sofort am Tatort. In welches der auf der Karte gezeichneten Häuser muß sie gehen?



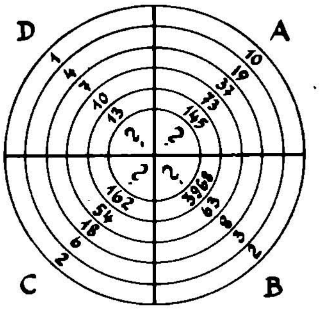
▲2▲ Sieh auf die Uhr, und miß die Zeit! Finde möglichst schnell den Buchstaben, der in dem Apfel, dem Herzen, der Ziffer 2 und in dem Kreis zu finden ist, der aber nicht in dem Dreieck und der Pik-Figur zu sehen ist! (Ergebnisse unter zwei Minuten sind sehr gut!)



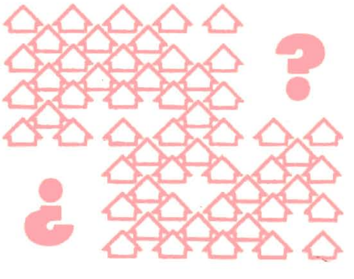
▲3▲ Vier der fünf Kreise passen in die vier Aussparungen der Figur. Welche bleibt übrig?



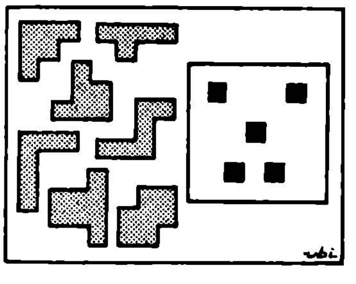
▲4▲ Welche Zahlen gehören logischerweise an Stelle der Fragezeichen?



▲5▲ Mit wieviel kleinen Pfeilen muß man die Figur vervollständigen, um ein Rechteck zu erhalten?



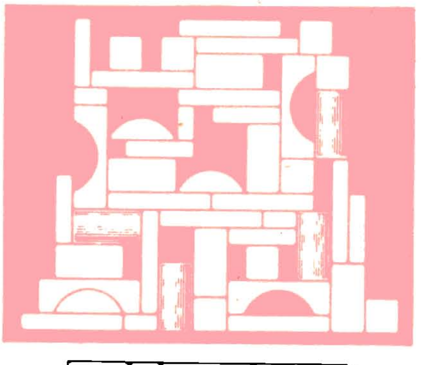
▲6▲ Die grauen Teilchen sind so in das Bild umzusetzen, daß die gesamte weiße Fläche bedeckt ist.

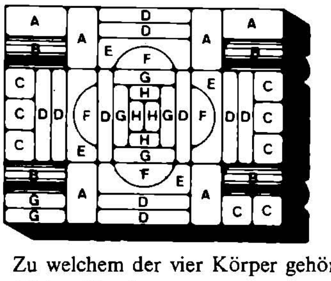


▲7▲ Das Labyrinth ist durch das Feld (+1) zu betreten und durch das Feld (−1) zu verlassen. Man darf von einem Feld aus jedes Nachbarfeld betreten, auch die Felder in Diagonalrichtung. Es ist ein Weg zu finden, bei dem man bei Ausführung der Addition bzw. Subtraktion als Ergebnis 0 erhält.

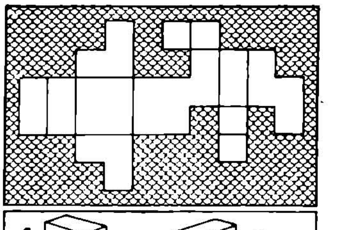
	−1		−2			+6		−5		+7	
+3		−5		−1	+1		+7	−8	+9	−1	−3
	+6	−4	+3	−2	+5	−6		+7		−9	
		+5		+8	−9		−4		+5	+4	−2
	−8	−6	+7	+2				+2	+3	−1	
+9		+4	+3	−8	−6		+1		−5		+4
				+9		−3		+8	−4	+6	
				+1	+4		−5		−1		+7

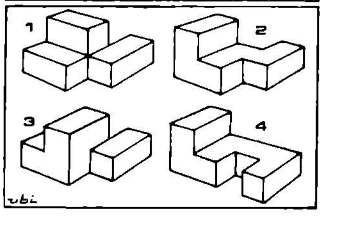
▲8▲ Die merkwürdige Burg wurde aus den Elementen des unten abgebildeten Baukastens errichtet. Mit einer Ausnahme wurden alle Elemente dabei verwendet. Welches bleibt übrig?





▲9▲ Zu welchem der vier Körper gehört das abgebildete Netz?





ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 18 (1984) 2 · Seiten 25 bis 48