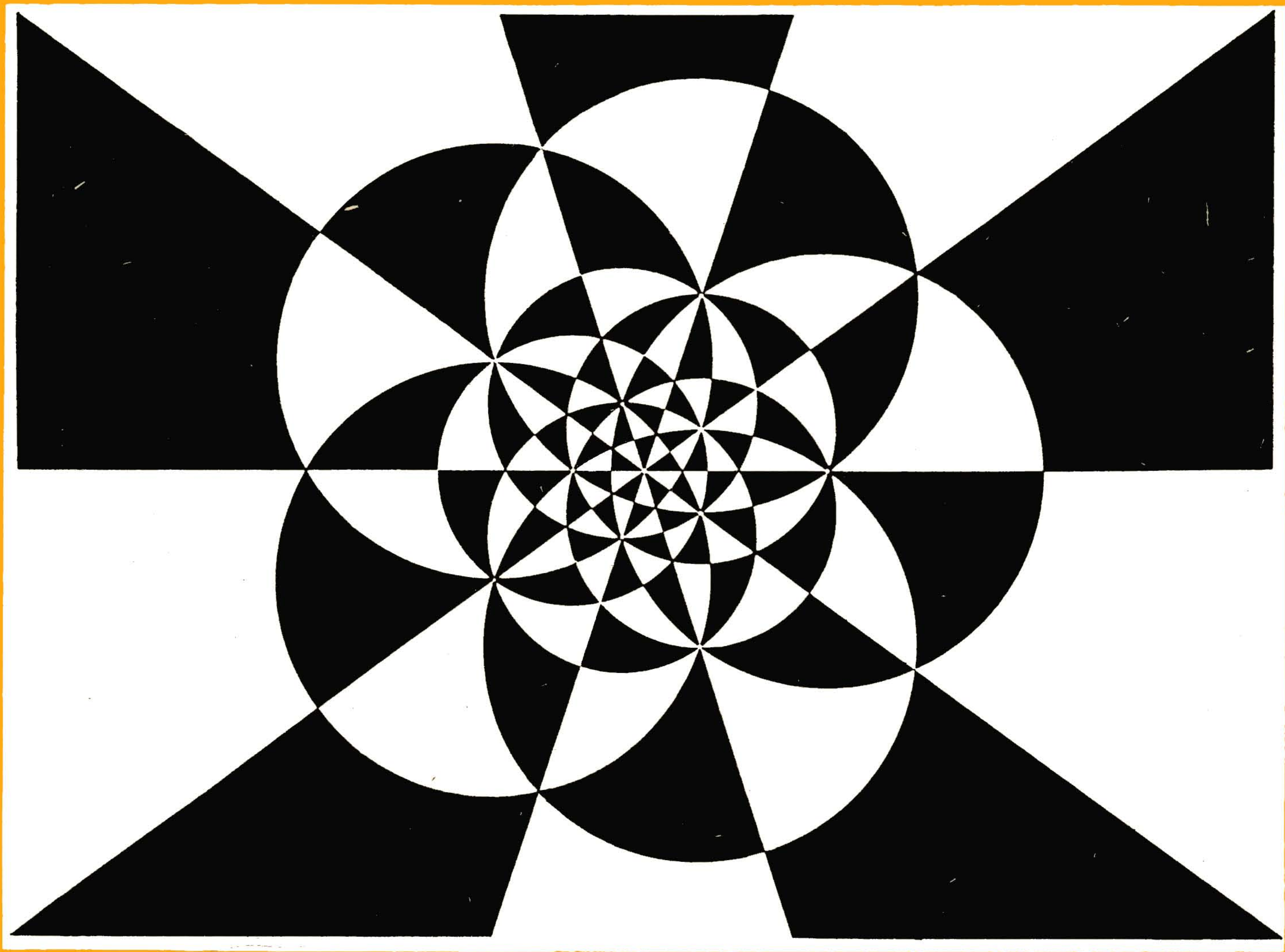
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: PH Güstrow (S. 131); J. Lehmann, Leipzig (S. 132); PH Dresden, Just (S. 135); *Vignetten:* H. Teske Leipzig (S. 135, 137); S. 127: *Gesucht und gefunden bei:* „Lapok" und „Füles", Budapest; „Frösi" und „NBI", beide Berlin; Dr. Thiele, BSB B. G. Teubner (Funktionen),
Titelblätter: W. Fahr, Berlin (nach Motivauswahl von J. Lehmann, Leipzig)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 11. August 1978

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Lineare Optimierung

Teil 1

Eine Klasse hat sich verpflichtet, für einen Solidaritätsbasar zu basteln. Es ist zu überlegen, welche und wie viele Gegenstände in der zur Verfügung stehenden Zeit mit den vorhandenen Mitteln, wie Bast, Karton, Leinen, Modelliermasse, angefertigt werden können, um einen möglichst hohen Erlös dafür auf dem Basar zu erzielen. Das lateinische Wort „Optimum" bedeutet „das Beste", „das Günstigste". Im vorliegenden Beispiel ist der Erlös für die selbstgebastelten Gegenstände zu optimieren. Dabei sind gewisse Nebenbedingungen zu beachten. Es steht nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung und mehr, als man an vorhandenen Materialien besitzt, kann man sicher nicht verarbeiten.

In der Praxis sind für die Lösung von Problemen oft viele Möglichkeiten gegeben, die ihrerseits aber verschiedene Zeiten, unterschiedliche Kosten und unterschiedlichen Materialeinsatz erfordern. Die Frage nach der bestmöglichen Lösung der Probleme ist im Rahmen der Rationalisierung von technischen und ökonomischen Prozessen von großer Bedeutung. Der größtmögliche oder maximale bzw. der kleinstmögliche oder minimale Wert einer Funktion ist unter Einhaltung gegebener Nebenbedingungen zu ermitteln.

Es seien einige praktische Aufgabenstellungen genannt, die im Rahmen dieses Beitrages allerdings nicht gelöst werden können, die aber dennoch die Problemstellung sowie die Aktualität des Stoffgebietes deutlich machen:

– Aus verschiedenen in bestimmter Menge zur Verfügung stehenden Gasen mit unterschiedlichem Schwefelgehalt und unterschiedlichem Heizwert soll eine Heizgasmischung hergestellt werden, deren Kosten minimal sind. Nebenbedingungen: Der Schwefelgehalt darf eine bestimmte Grenze nicht überschreiten. Der Heizwert der Mischung muß zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen, um einerseits eine Entzündbarkeit des Gemisches zu garantieren und andererseits eine Explosionsgefahr zu vermeiden. Außerdem stellen die vorhandenen Mengen der gegebenen Gase eine Kapazitätsbeschränkung dar.

– Bei plötzlich einsetzendem Frost oder Schneefall sollen die Hauptverkehrsstraßen eines Kreises in kürzester Zeit eisfrei gemacht werden. Wo sind Laugedepots für das Betanken der Sprühfahrzeuge anzulegen?

– Großbaustellen mehrerer Neubaugebiete sollen in kürzester Zeit mit Platten von mehreren Plattenwerken beliefert werden. Wo sind diese Plattenwerke einzurichten?

– Minimierung der Liegezeiten der Schiffe im Überseehafen.

– Maximierung der Produktion von Konsumgütern eines Betriebes.

– Maximierung der Auslastung bestimmter Maschinensätze in einem Großbetrieb.

– Minimierung der Wartezeiten im Fernsprechverkehr.

Der Leser möge für die letztgenannten Beispiele selbst Nebenbedingungen angeben.

Mathematische Methoden, welche das Optimum (Maximum oder Minimum) einer linearen Funktion unter gegebenen linearen Nebenbedingungen zu ermitteln gestatten, werden unter dem Begriff „lineare Optimierung" zusammengefaßt. Die Methode der linearen Optimierung wurde erstmals an der Leningrader Universität von L. W. Kantorowitsch im Jahre 1939 vorgestellt.

Die mathematische Bearbeitung eines praktischen Problems erfordert die Umsetzung des jeweiligen Sachverhalts in eine mathematische Aufgabenstellung. Dem ökonomischen oder technischen Modell wird ein mathematisches Modell zugeordnet. Dieses umfaßt neben der linearen Funktion, deren Extremum ermittelt werden soll, eine Menge von Randbedingungen in Form von linearen Ungleichungen und Gleichungen.

Zur Wiederholung geben wir einige Beispiele für das Rechnen mit linearen Ungleichungen an:

B 1 $\quad x+3 \leq 3x-7$.

Durch Addition mit dem Term $(7-x)$ erhält man $10 \leq 2x$. Nach Division mit 2 folgt $5 \leq x$ oder $x \geq 5$. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Menge aller reellen Zahlen, die nicht kleiner als 5 sind: $L=\{x : x \in [5, \infty]\}$. Die grafische Darstellung dieser Lösungsmenge ist in Bild 1 gegeben.

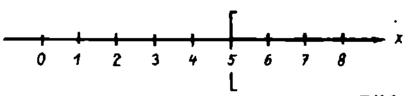


Bild 1

B 2 $\quad$ (I) $\quad x+3 \leq 3x-7$
$\quad$ (II) $\quad 5x-1 \leq 7+4x$
$\quad$ (III) $\quad 1 \geq 2-x$

Zu ermitteln sind alle reellen Zahlen x, die sowohl die Ungleichung (I), als auch die Ungleichung (II), als auch die Ungleichung (III) erfüllen. Die Lösungsmenge der Ungleichung (I) ist gegeben durch $x \geq 5$ (vgl. Beispiel B 1).

(II): Nach Addition mit dem Term $(1-4x)$ folgt: $x \leq 8$.

(III): Nach Addition mit $(x-1)$ erhält man: $x \geq 1$. Es erfüllen alle diejenigen reellen Zahlen x jede der gegebenen Ungleichungen, die sowohl nicht kleiner als 5, als auch nicht größer als 8 sind: $5 \leq x \leq 8$. Oder ausführlich: $L=\{x : x \in [5, 8]\}$. Die grafische Darstellung ist in Bild 2 angegeben.

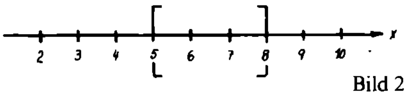


Bild 2

Dem Leser wird empfohlen, die folgenden Ungleichungen bzw. Systeme von Ungleichungen zu lösen. Die Lösungen werden im Beitrag II zu diesem Stoffgebiet im Heft 1/79 angegeben.

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$
2. $1 - x \geq 2x - 1$
3. $7x + 3 \leq 2x + 13$
   $x - 2 \geq 3x - 10$
   $x + 1 \leq 2x + 2$
4. $5x - 2 \leq 12 - 2x$
   $1 - 7x \leq 2x + 3$
   $4x + 1 \leq x + 12$
   $x + 12 \leq 6x + 2$
   $2x - 2 \leq 5x - 3$

In der Klasse 8 werden lineare Funktionen behandelt. Das Bild einer Funktion $y=mx+n$ ist eine Gerade g, welche die Ordinatenachse im Punkt $(0; n)$ schneidet und deren Anstieg m ist (Bild 3). Die Lösungsmenge der Gleichung $y=mx+n$ ist die Menge aller Paare (x, y) mit $y=mx+n$, ihre grafische Darstellung ist die Punktmenge der Geraden g. Die Lösungsmenge der Ungleichung $y \leq mx+n$ ist gegeben durch alle Paare (x, y), für die $y \leq mx+n$ gilt. Die grafische Darstellung dieser Lösungsmenge ist gleich der Menge aller Punkte $P(x; y)$ des Koordinatensystems, für die $y \leq mx+n$ gilt, das sind alle Punkte auf und unterhalb der Geraden g bzw. alle Punkte der in Bild 3 schraffierten Halbebene.

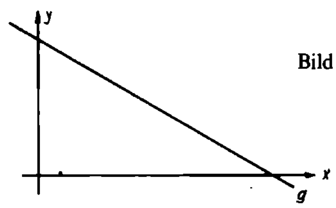


Bild 3

B 3 $\quad 2x+3y \leq 6$.

Durch Subtraktion von $2x$ und anschließender Division durch 3 erhält man: $y \leq -\frac{2}{3}x+2$.

Dieser Ungleichung wird die Funktion $y=-\frac{2}{3}x+2$ und dieser die Gerade g des Bildes 4 zugeordnet. Die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung ist durch Schraffur gekennzeichnet.

Der Lösungsbereich eines Systems von linearen Ungleichungen mit zwei Variablen ist gleich der Menge aller Punkte $P(x; y)$, die jeder der durch die einzelnen Lösungsmengen gegebenen Halbebenen angehören.

B 4 $\quad$ (I) $\quad x + y \leq 10$
$\quad$ (II) $\quad x + 2y \leq 16$
$\quad$ (III) $\quad 4x + y \leq 28$
$\quad$ (IV) $\quad x \geq 2$
$\quad$ (V) $\quad y \geq 0$

Den Ungleichungen werden lineare Funktionen und diesen Geraden g_i $(i=1, 2, \ldots, 5)$ zugeordnet: $g_1: y=-x+10$, $g_2: y=-\frac{1}{2}x+8$, $g_3: y=-4x+28$, $g_4: x=2$, $g_5: y=0$. Die Gerade g_4 ist die Parallele zur Ordinatenachse im Abstand 2, die Gerade g_5 ist die Abszissenachse.

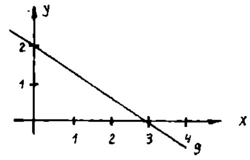


Bild 4

In Bild 5 sind die Lösungsmengen der Ungleichungen als Halbebenen durch Schraffur gekennzeichnet. Alle Punkte des konvexen Fünfecks mit den Eckpunkten (2; 0), (7; 0), (6; 4), (4; 6), (2; 7) einschließlich der Randpunkte – und nur diese – erfüllen jede der gegebenen Ungleichungen; sie stellen die Lösungsmenge des gegebenen Systems linearer Ungleichungen dar.

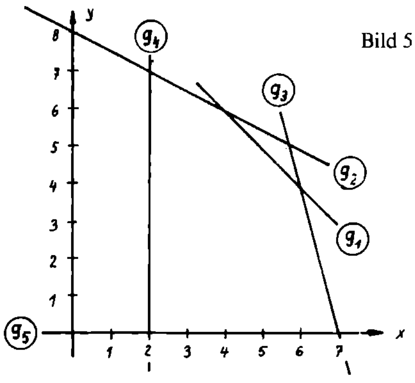


Bild 5

Dem Leser wird empfohlen, die Lösungsmengen folgender Systeme linearer Ungleichungen grafisch zu ermitteln. Die Lösungen werden im Beitrag II im Heft 1/79 angegeben.

5. $\begin{aligned} -3x+2y &\leqq 6 \\ y &\geqq 3 \\ x+2y &\leqq 14 \\ x+y &\leqq 9 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} -x+y &\geqq 4 \\ x+y &\leqq 4 \\ 3x+y &\geqq 12 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x+y &\leqq 19 \\ x+2y &\geqq 6 \\ -3x+y &\leqq -4 \\ x+y &\leqq 12 \\ -x+3y &\leqq 12 \\ x-2y &\geqq 2 \end{aligned}$

Systeme linearer Ungleichungen treten als Nebenbedingungen bei Aufgaben der linearen Optimierung auf. Dies soll an dem soeben bearbeiteten Beispiel B 4 gezeigt werden. Wir nehmen das folgende vereinfachte Problem an:

B 4a Ein Betrieb plant die zusätzliche Produktion zweier Erzeugnisse E_1 und E_2, weil drei Maschinensätze M_i $(i=1, 2, 3)$ nicht voll ausgelastet sind. Für die Herstellung eines Erzeugnisses E_1 werden an den Maschinensätzen M_1 und M_2 je eine Stunde, am Maschinensatz M_3 vier Stunden Bearbeitungszeit benötigt. Für die Herstellung eines Erzeugnisses E_2 werden an den Maschinensätzen M_1 und M_3 je eine Stunde, am Maschinensatz M_2 zwei Stunden benötigt. In einem bestimmten Zeitraum stehen am Maschinensatz M_1 10 Stunden, am Maschinensatz M_2 16 Stunden und am Maschinensatz M_3 28 Stunden zur Verfügung. Wie viele Erzeugnisse E_1 und E_2 können im betrachteten Zeitraum zusätzlich hergestellt werden, wenn außerdem gefordert wird, daß mindestens zwei Erzeugnisse der Sorte E_1 gefertigt werden sollen?

Die Anzahlen der zu produzierenden Erzeugnisse E_1 und E_2 seien x bzw. y. Da für jedes der Erzeugnisse am Maschinensatz M_1 je eine Stunde benötigt wird und da im betrachteten Zeitraum nicht mehr als 10 freie Maschinenstunden am Maschinensatz M_1 zur Verfügung stehen, gilt die Ungleichung (I): $x+y\leqq 10$.

Mehr als 10 Stunden darf die zusätzliche Produktion am Maschinensatz M_1 nicht in Anspruch nehmen. Analog gilt bezüglich der Maschinensätze M_2 und M_3:

(II): $x+2y\leqq 16$, (III): $4x+y\leqq 28$.

Die zusätzliche Bedingung, daß mindestens zwei Erzeugnisse E_1 produziert werden sollen, läßt sich durch die Ungleichung (IV): $x\geqq 2$ angeben. In der Aufgabenstellung ist eine weitere Nebenbedingung enthalten: Von den Erzeugnissen E_2 wird entweder eine bestimmte Anzahl hergestellt oder es wird auf die Produktion dieses Erzeugnisses verzichtet. Dieser Bedingung entspricht die Ungleichung (V): $y\geqq 0$. Damit ist das System linearer Ungleichungen des Beispiels B 4 dem System aller Nebenbedingungen der Aufgabe B 4a zugeordnet. Jeder Punkt des Lösungsbereiches (Bild 5) mit ganzzahligen Koordinaten x und y stellt ein zulässiges Produktionsprogramm dar. Die Menge aller möglichen Produktionsprogramme unter Beachtung aller gegebenen Nebenbedingungen ist gegeben durch die Menge aller Gitterpunkte – das sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten x und y – des Lösungsbereiches. Zum Beispiel könnten von den Erzeugnissen E_1 und E_2 je 4 Stück im betrachteten Zeitraum hergestellt werden. Von den 54 zur Verfügung stehenden Maschinenstunden würden 40 für die Bearbeitung verbraucht. Auch das Paar $(x, y)=(5, 5)$ stellt ein zulässiges Produktionsprogramm dar, die freie Kapazität am Maschinensatz M_1 würde voll verbraucht, an den Maschinensätzen M_2 und M_3 würden eine bzw. drei Stunden frei bleiben.

Von allen möglichen Produktionsprogrammen soll dasjenige realisiert werden, das die freien Maschinenstunden maximal auslastet. Unter Einbeziehung dieser Zielstellung ist die Aufgabe B 4a zu einem Problem der linearen Optimierung geworden:

Wie viele Erzeugnisse E_1 und E_2 müssen im betrachteten Zeitraum produziert werden, wenn die Auslastung der Maschinensätze M_i $(i=1, 2, 3)$ unter Beachtung der gegebenen Nebenbedingungen maximal (optimal) werden soll?

Für ein Erzeugnis E_1 werden insgesamt 6, für ein Erzeugnis E_2 insgesamt 4 Stunden an den drei Maschinensätzen benötigt, für x Erzeugnisse E_1 und y Erzeugnisse E_2 also $6x+4y$ Stunden. Diese Stundenzahl $z=6x+4y$ soll maximal werden. Die lineare Funktion $z=6x+4y$ heißt Zielfunktion, sie stellt mit dem Ungleichungssystem der Aufgabe B 4 das mathematische Modell der erweiterten Aufgabe B 4a dar.

Man geht aus von dem sogenannten Nullprogramm, in dem keines der Erzeugnisse produziert wird und setzt $z=0$. Man erhält aus $0=6x+4y$ die Spur der Zielfunktion $y=-\frac{3}{2}x$, eine Gerade g_s, die durch $0(0; 0)$ geht. Setzt man in der Zielfunktion für z der Reihe nach $z=1, 2, 3, \ldots$ ein, so erhält man die zur Spur parallelen Geraden

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{2}{4}$, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\ldots$

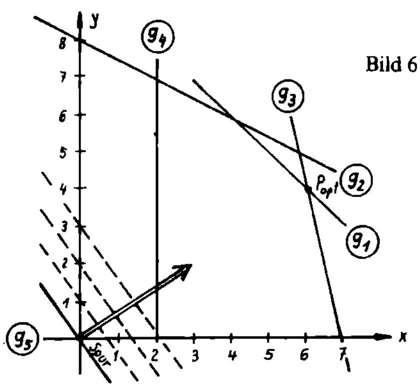


Bild 6

Das Problem der Aufgabenstellung ist nun gleichbedeutend mit der Frage nach derjenigen Parallelen zur Spur der Zielfunktion mit größtmöglichem Abstand von der Spur, die mindestens einen Punkt des Lösungsbereiches enthält.

Grafische Lösung der Aufgabe: Durch maximale Parallelverschiebung der Spurgeraden erhält man die durch den Punkt $P(6; 4)$ gehende Parallele. Dieser Punkt stellt das Optimum dar: $P_{opt}(6; 4)$. Unter den gegebenen Nebenbedingungen müssen 6 Erzeugnisse E_1 und 4 Erzeugnisse E_2 hergestellt werden, wenn der Maschinenzeitfond maximal ausgelastet werden soll. Die an den Maschinensätzen M_1 und M_3 zur Verfügung stehenden Stunden werden voll verbraucht. Am Maschinensatz M_2 bleiben 2 Stunden ungenutzt. Insgesamt werden 52 der zur Verfügung stehenden 54 Stunden an den Maschinensätzen bei der zusätzlichen Produktion der Erzeugnisse E_1 und E_2 genutzt, das sind etwa 96,3%.

Im nächsten Beitrag wird ein wichtiger Sonderfall einer Aufgabe der linearen Optimierung behandelt.

E. Lehmann

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Zum 6. Mal: Mathematikolympiade der Gehörlosenschulen der DDR

Am 3. Juni dieses Jahres führten die Gehörlosenschulen der DDR ihre *VI. Mathematikolympiade* in Güstrow durch. An diesem Wettstreit beteiligten sich – wie jedes Jahr – alle Gehörlosenschulen unserer Republik mit je einer Schülermannschaft, bestehend aus je einem Schüler der Klassenstufen 2 bis 10. In einer dreistündigen Klausur löste jeder Teilnehmer die ihm gestellten Aufgaben. Während der Korrekturen am Nachmittag führten die *Jungen Mathematiker* eine Busfahrt nach Warnemünde durch. Am Abend fand dieser nun schon traditionelle Wettbewerb mit einer Siegerehrung seinen Abschluß:

Die drei besten Mannschaften kamen aus Güstrow (1. Platz), Halberstadt (2. Platz) und Leipzig (3. Platz).

Einen ersten Platz erreichten: Marcel Remus, Halberstadt (Kl. 2); Sabine Heinicke, Halberstadt (Kl. 3); Uta Lippold, Leipzig (Kl. 4); Steffen Knuth, Güstrow (Kl. 5); Hans Syforth, Erfurt (Kl. 6), Christine Mäusel, Erfurt (Kl. 7); Bernd Nestler, Leipzig (Kl. 8); Ralph Beyer, Güstrow (Kl. 9); Andreas Pour, Leipzig (Kl. 10).

Mathematikfachzirkelleiter F. Harloff, Güstrow

Zwei Sondermarken wurden dem 200. Jahrestag der Gründung der ersten staatlichen Bildungseinrichtung für Gehörlose durch *Samuel Heinicke* gewidmet.

Das Motiv des 20-Pf-Wertes ist das Porträt von *Samuel Heinicke* (1727 bis 1790) und im Hintergrund die Silhouette der Stadt Leipzig um das Jahr 1880. Auf der zweiten Marke zu 25 Pf finden wir die ersten drei Buchstaben des *Daktylalphabetes* (Fingeralphabet) und daneben einen sprechenden und daktylierenden Schüler mit einer elektro-akustischen Hörhilfe, symbolisierend die Bildung Gehörloser in der Gegenwart.

200 Jahre Gehörlosenbildung

Samuel-Heinicke-Schule/Leipzig

Die Ernst-Thälmann-Oberschule Roßlau berichtet

Seit über drei Jahren besteht an der Ernst-Thälmann-OS Roßlau eine mathematische Arbeitsgemeinschaft, der Schüler von der 5. bis 9. Klasse angehören.

Regelmäßig lösen wir *alpha*-Aufgaben und beteiligen uns auch am Wettbewerb der *alpha*.

Vor zwei Jahren schloß die AG einen Patenschaftsvertrag mit einem elektronischen Rechenzentrum in Roßlau ab. Die Schüler der 8. und 9. Klassen wurden mit dem Aufbau und der Wirkungsweise eines Computers bekannt gemacht. In diesem Jahr erarbeiteten wir ein Programm zur Lösung von quadratischen Gleichungen. Zum Abschluß durften alle selbst an den Rechenmaschinen arbeiten.

Diese Arbeit gab uns einen Einblick in die interessante Tätigkeit der Mitarbeiter des elektronischen Rechenzentrums. Erstmalig beteiligte sich die AG Mathematik an der diesjährigen Gruppen- und Schulmesse der ETOS Roßlau. Da an unserer Schule noch einige Lehrmittel für den Mathematikunterricht fehlen, beschlossen wir, dem abzuhelfen. Einige Schüler fertigten aus stabilem Material geometrische Körper an, so z. B. ein Schwalbenschwanzprisma, u. a. insgesamt 20 Körper. Dazu passend zeichneten andere AG-Teilnehmer Folien für den Polylux.

Eine FDJlerin der 9. Klasse beschäftigte sich besonders mit der linearen Funktion und Gleichungssystemen mit zwei Variablen und stellt zwischen beiden den Zusammenhang her. Zu diesem Komplex erarbeitete die Schülerin eine wertvolle Dokumentation, die zur Kreismesse delegiert wird. Insgesamt beträgt der Wert der MMM-Objekte unserer AG ungefähr 700 M.

Zur Ausgestaltung unseres Mathematikkabinetts gehört die regelmäßige Anfertigung von Wandzeitungen. In diesen mathematischen Wandzeitungen werden entweder Lösungsverfahren, Prüfungsaufgaben, geometrische Beweise oder Biographien bekannter Mathematiker veranschaulicht.

Eine Exkursion führte uns Ende 1977 in das Zentrum „Organisation und Datenverarbeitung Bauwesen Berlin". Hier konnten wir Erfahrungen im Bereich der angewandten Mathematik und Datenverarbeitung sammeln.

Ein Ziel unserer Arbeitsgemeinschaft ist es auch, die zukünftigen Schüler der 10. Klassen, die unserer AG angehören, gut auf die Abschlußprüfung im Fach Mathematik 1979 vorzubereiten.

AG Mathematik, OS Roßlau

Mathematik und MMM

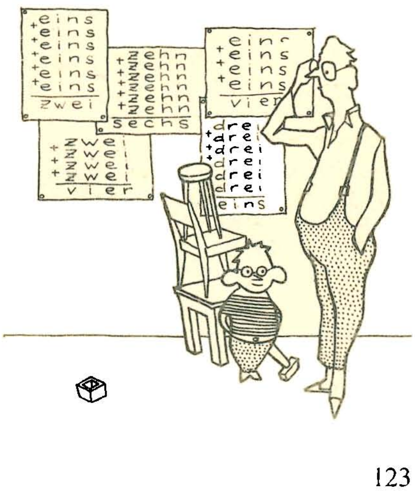
Die beiden 9. Klassen der Clara-Zetkin-Oberschule Groitzsch besuchten im November 1977 die *Zentrale Messe der Meister von morgen* in Leipzig. Neben einer Vielzahl von Eindrücken über diese Leistungsschau der Jugend unserer Republik brachten die Schüler auch viel Zahlenmaterial mit nach Hause. Aus ihm entstand eine Mappe mit Aufgaben für einen aktuellen praxisbezogenen Mathematikunterricht und eine interessante außerunterrichtliche Tätigkeit. Sie enthält u. a. Probleme über Materialeinsparung, Steigerung der Arbeitsproduktivität, statistisches Material über die Entwicklung unserer Volkswirtschaft.

Welche Klasse oder AG kann von ähnlichen Initiativen berichten?

Kryptarithmetik

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern (selbstverständlich kann für die verschiedenen Rätsel die Bedeutung von Buchstaben verschieden sein). Gefällt euch meine lustige Zeichnung?

Architekt A. W. Radunsky, Moskau



Albert Einstein

1879 bis 1955

1. Eine vollendete Physik

Es war etwa um das Geburtsjahr *Albert Einsteins*, als der sich zur Wahl eines Studienfaches anschickende Max Planck von einem Hochschullehrer die Auskunft erhielt, daß die Physik hochentwickelt, ja nahezu voll ausgereift sei und bald ihre endgültige Form angenommen haben werde. Zwar wurde hinzugefügt, es gäbe vielleicht noch ein Stäubchen in dem einen oder anderen Winkel, aber alles in allem nähere sich die Physik der Vollendung, wie sie die Geometrie schon seit Jahrtausenden besitze. Diese Meinung war keine persönliche Sicht irgendeines Physikers des letzten Viertels des vorigen Jahrhunderts, sondern eine allgemein vertretene Ansicht – obwohl gerade der Vergleich mit der Geometrie geeignet gewesen wäre, den schwachen Punkt der Argumentation aufzuzeigen. Am scheinbar sonnigen Himmel der Geometrie entwickelte sich das Wölkchen Parallelenaxiom zu einem klärenden Gewitter (vgl. *alpha* 2/77, Seite 31). Der am Ende des 18. Jahrhunderts stagnierenden Mathematik (weil zu sehr mit mechanischen und astronomischen Methoden gleichgesetzt) wurden durch Gauß und andere Mathematiker des 19. Jahrhunderts fruchtbare Gebiete erschlossen. Und mit der mechanistischen Physikauffassung des ausgehenden 19. Jahrhunderts verhielt es sich ähnlich. Einstein und Planck waren Bahnbrecher neuer physikalischer Ansichten, die der Physik des neuen Jahrhunderts ihren Stempel aufprägten. Das Plancksche Strahlungsgesetz und seine Quantenauffassung, die Einsteinsche Gleichung „Energie gleich Masse mal Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ($E = mc^2$)" und Einsteins revolutionierende Vorstellungen von Raum und Zeit lassen sich aus der Geschichte der Physik nicht mehr wegdenken.

2. Die Faszination der Relativitätstheorie

Wie kaum ein anderer Wissenschaftler ist Einstein populär geworden; von den insgesamt 27 Nobelpreisträgern der Berliner Universität ist er zweifelsohne der berühmteste und bekannteste. Einer seiner Kollegen bemerkte, daß neben den Sehenswürdigkeiten der Stadt wie das Brandenburger Tor, Reinhardts Theatervorstellungen usw. häufig auch Einstein auf dem Programm der Touristen stand. Zur Vorlesungszeit strömte alles in den Ostflügel des Hauptgebäudes der Universität, wo er las und mitunter bei zu gefülltem Hörsaal eine Pause einlegte, damit sich alle die entfernen können, die ihn nun gesehen hatten und sich für das weitere nicht mehr interessierten. Dann blieb in der Regel nur eine Handvoll Studenten zurück. Wenn wir bedenken, daß C. W. Röntgen über die Relativitätstheorie folgendes schrieb: „Mir will es noch nicht in den Kopf hinein, daß man so ganz abstrakte Betrachtungen und Begriffe gebrauchen muß, um Naturerscheinungen zu erklären", so stellt sich die Frage, weshalb Einstein mit dieser Theorie so bekannt wurde. Zumal er sich selbst über die Relativitätstheorie so äußerte: „Warum schwatzen die Leute immer nur von meiner Relativitätstheorie? Ich habe doch noch andere brauchbare Sachen gemacht, vielleicht sogar noch bessere." Sicher werden die erbitterten Kontroversen zwischen Einsteinanhängern und seinen wissenschaftlichen Gegnern (meist nicht theoretisch eingestellte Experimentalphysiker) dem Empfinden der unruhigen und unsicheren Nachkriegszeit des ersten Weltkrieges entgegengekommen sein, aber es ist gewiß auch ein Teil echten Erkenntnisdrangs beteiligt gewesen, der möglicherweise in diesen wirren Jahren mit neuen Gedanken über Raum und Zeit zu einem festen Halt führen sollte. Die praktischen Auswirkungen der Theorie lagen damals weitab vom täglichen Leben, so daß die Faszination der Relativitätstheorie besonders auffällig ist.

3. Jugend und Schule

Um viele große Männer ranken sich immer wieder Geschichten, die symbolhaft ihre Leistungen erklären, wenn etwa wie bei Newton der Fall eines Apfels zur Gravitationstheorie oder Diracs negative Zahl von Kokosnüssen in einer diophantischen Aufgabe zur sogenannten Diracschen „Unterwelt" geführt haben sollen. Gegen die Legende vom Apfel protestierte bereits Gauß lebhaft und energisch, Dirac selbst wies die Urheberschaft für die negative Lösung zurück. Die folgenden Begebenheiten haben auf den jungen Einstein einen tiefen Einruck gemacht und sind durch ihn selbst verbürgt. Die Tatsache, daß sich die Kompaßnadel stets auf einen bestimmten Punkt einstellt, zeigte ihm deutlich, daß etwas hinter dem „leeren" Raum stecken mußte. Der alte Einstein wird hier vom Feld sprechen. Die Sicherheit, mit der die Mathematik ihre Aussagen bewies, faszinierte ihn zuerst an dem Satz, daß sich die drei Höhen jedes Dreiecks stets in einem Punkt schneiden (vgl. *alpha* 2/77, Seite 31). Später, als er die tiefgründige Frage nach der Gültigkeit mathematischer Erkenntnis in der Außenwelt (objektive Realität) stellt, bemerkt er: „Denn es kann nicht wunder nehmen, daß man zu übereinstimmenden

1870–1871	*Deutsch-französischer Krieg*
1879	*Glühlampe (Edison)*
1879	*Einstein geboren*
1883	*Mengenlehre (Cantor)*
1887	*elektrische Wellen (Hertz)*
1885	*Einstein verläßt die Schule u. geht nach Mailand zu den Eltern, fällt durch die Aufnahmeprüfung der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (ETH)*
1896	*Abitur nachgeholt, Studium an der ETH Zürich*
1900	*Wirkungsquantum (Planck)*
1900	*Einstein schließt das Studium mit einem Diplom ab*
1902–1909	*Tätigkeit im Berner Patentamt*
1905	*Promotion (Molekulartheorie), lichtelektrischer Effekt, spezielle Relativitätstheorie*
1908	*Privatdozent in Bern*
1909	*Professor in Zürich*
1909	*Peary erreicht den Nordpol*
1911	*Professor an der Deutschen Universität Prag*
1913	*Mitglied der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften*
1914	*Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts*
1914–1918	*erster Weltkrieg*
1914–1932	*Einstein in Berlin*
1916	*Allgemeine Relativitätstheorie*
1917	*Große Sozialistische Oktoberrevolution*
1918	*Novemberrevolution in Deutschland, KPD gegründet*
1919	*Experimentelle Bestätigung für die Relativitätstheorie durch Lichtablenkung*
1921–1925	*Reisen und Gastvorlesungen (USA, England, Asien, Holland, Südamerika, erster deutscher Wissenschaftler in Frankreich nach dem ersten Weltkrieg)*
1922	*Nobelpreis*
1925	*Begründung der Quantenmechanik (Heisenberg, Born)*
1927	*Unschärferelation (Heisenberg)*
1930–1932	*Vorlesungen während des Wintersemesters in Pasadena (USA)*
1933	*faschistische Diktatur in Deutschland*
1933	*Einstein kehrt aus den USA nicht zurück, Austritt aus der Akademie*
1938	*Uranspaltung (Hahn, Straßmann; Meitner)*
1939–1945	*zweiter Weltkrieg*
1940	*Brief Einsteins an Roosevelt für Atomforschung*
1942	*Kernreaktor in Chicago*
1945	*Atombombenabwürfe in Japan, Gründung der UNO*
1948	*Kybernetik (Wiener)*
1949	*allgemeine Feldtheorie Einsteins*
1949	*DDR gegründet*
1955	*Einstein gestorben*

logischen Folgerungen kommt, wenn man sich über die fundamentalen Sätze (Axiome) sowie Methoden geeinigt hat, vermittels welcher aus diesen fundamentalen Sätzen andere Sätze abgeleitet werden sollen." Sein selbständiges Denken, dem Autoritätsgläubigkeit völlig fremd war, führte zu Schwierigkeiten in der Schule. Er sagte, daß man den unterwürfigen Untertan produziere. Einstein wird oft als Beispiel für einen Schüler – von Mathematik und Physik abgesehen – mit schlechten Leistungen gewählt, um zu zeigen, daß auch solche Schüler große Leistungen vollbringen können. Der Vergleich hinkt aber, wie in allen diesen Fällen (z. B. bei E. Galois, der durch die Aufnahmeprüfung für die Hochschule fiel), denn er läßt die Tatsache unberücksichtigt, daß Einstein sein ganzes Denken auf physikalische Probleme konzentrierte, womit andere Zweige hintenangestellt wurden. Er ist in dieser Hinsicht nicht mit Gauß vergleichbar, der ebenfalls in der Jugend über tiefliegende Dinge nachdachte, aber auch in den Sprachen brillierte. Einstein deshalb aber fehlende Sprachbegabung nachzusagen, wäre übereilt, und seine letzten 20 und englischsprachigen Jahre widerlegen dies zumindest. Das Gymnasium verließ er mit 16 Jahren, ohne einen Abschluß zu haben. Deshalb bewarb er sich später an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich (ETH), wo man ohne Abitur nach einer Aufnahmeprüfung studieren konnte – und fiel durch, da er in den Sprachen und Biologie unzureichende Kenntnisse hatte. Er mußte das Reifezeugnis an einer Schweizer Kantonschule nachmachen, in der ein modernerer Geist als in Deutschland herrschte, was auf das Wirken Pestalozzis zurückzuführen war. Von seinen Schulerfahrungen berichtete er: „Die Lehrer in der Elementarschule kamen mir wie Feldwebel vor und die Lehrer im Gymnasium wie Leutnants."

4. Einsteins Verhältnis zur Mathematik

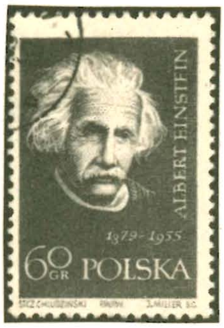
Scherzhaft soll Einstein die Mathematik als einzige perfekte Methode charakterisiert haben, sich selbst an der Nase herumzuführen. Er wies wiederholt darauf hin, daß man eine Sache mathematisch formal zwar beherrschen könne, deshalb ihren Sinn aber noch nicht erfaßt zu haben braucht. Die Hauptsache ist ihm der Inhalt, nicht die Mathematik, und er verweist darauf, daß ein Wissenschaftler nicht in Formeln denkt. Jede physikalische Idee muß sich auch klar und prägnant mit Worten ausdrücken lassen. („Seitdem die Mathematiker über meine Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr.") Hier zeigten sich Einsteins kritische Einstellung zum Formalismus und seine Bemühungen um das Inhaltliche. Die scherzhafte Charakterisierung der Mathematik von oben zeigt uns aus dieser Sicht, daß er natürlich die Hilfe und Sicherheit eines Rechenverfahrens zu schätzen wußte. Einstein, der als Lehrer ausgebildet worden war, hat elementare Mathematik nur wenig unterrichtet – jedoch, wie seine Schüler berichten, auf unkonventionelle und spannende Art: die Unbekannte x wurde etwa so lange gejagt, bis ihr kein Ausweg blieb. Einstein war zwar kein guter Rechner (wie etwa Gauß), aber ein bedeutender und schöpferischer Mathematiker.

5. Leben und Werk

Von 1896 bis 1900 studierte Einstein an der ETH Zürich Mathematik und Physik und schloß sein Studium mit einem Diplom ab. Nach zwei Jahren ohne feste Anstellung zog er für sieben Jahre in das Berner Patentamt ein. Er promovierte 1905 über ein Thema aus der Molekularphysik, hielt 1908 die ersten Vorlesungen, wurde 1909 Professor für Theoretische Physik an der Universität Zürich, erhielt einen Ruf an die Deutsche Universität in Prag und kehrte nach drei Semestern wieder nach Zürich zurück. 1913 wurde er Mitglied der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1914 Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts in Berlin, mit der Möglichkeit, an der Berliner Universität Vorlesungen zu halten. 1922 wurde ihm der Nobelpreis für Physik verliehen. Zu Beginn der 30er Jahre hielt er Gastvorlesungen während des Winters im sonnigen Kalifornien (USA). Er erkannte bald die drohende politische Entwicklung in Deutschland und kehrte deshalb 1933 nicht dorthin zurück, wobei er, um den Machthabern vorauszukommen, seinen Austritt aus der Berliner Akademie erklärte. Das faschistische Ministerium für Wissenschaft gab sich damit nicht zufrieden und inszenierte ein peinliches Ausschlußverfahren. Bis an sein Lebensende 1955 wirkte Einstein, wie viele emigrierte Naturwissenschaftler, am Institute for Advanced Study in Princeton (USA).

Zu Unrecht wird Einstein häufig nur als Begründer der Relativitätstheorie gewürdigt, denn er hat weitere hervorragende Leistungen auf den Gebieten der Physik hinterlassen. Die statistische Deutung der Wärmelehre Boltzmanns gilt streng nur für unendlich viele Teilchen. Die damals (1915) noch angezweifelte Atomistik lehrt aber, daß jedes System nur endlich, wenn auch sehr, sehr viele Teilchen enthält. Aus der endlichen Anzahl der Teilchen erklärte Einstein theoretisch die Unstimmigkeit, die zwischen der statistischen Deutung und der Realität bestand, und erbrachte so ein starkes Argument für die Atomistik. Eine großartige Leistung stellt auch seine Lichttheorie (Licht als Strahl von Lichtquanten) dar, die die Wellen- und Korpuskulartheorie auf höherer Stufe vereint. Einsteins Auftreten war stets bescheiden, auch auf dem Höhepunkt seines Weltruhms. Bezeichnend für ihn war sein Gerechtigkeitssinn. „Wenn es sich um Wahrheit und Gerechtigkeit handelt, gibt es nicht die Unterscheidung zwischen kleinen und großen Problemen. Wer es in kleinen Dingen mit der Wahrheit nicht ernst nimmt, dem kann man auch in großen Dingen nicht vertrauen." Sein Eintreten für den Frieden erfolgte ungeachtet der daraus folgenden Schwierigkeiten. In dem allgemeinen Hurra-Patriotismus des ersten Weltkrieges, in dem selbst hervorragende deutsche Wissenschaftler behaupteten, daß ohne den deutschen Militarismus die deutsche Kultur hinweggefegt worden wäre, gehörte Einstein zu den Gründern eines Bundes, aus dem später die Deutsche Liga für Menschenrechte hervorging. Seinem aufrechten Verhalten während des Krieges ist z. B. die Einladung als erster deutscher Wissenschaftler nach 1918 nach Frankreich zu verdanken. In seiner Sorge um den Frieden fragte er 1932 den berühmten Psychiater Freud um die psychologischen Gründe für die sozialen Probleme und Gefahren. Nach den Atombombenabwürfen über Japan, in deren Geschichte Einstein tragisch verstrickt war, erkannte Einstein die gesellschaftlichen Ursachen. 1932 hatte er bereits darauf hingewiesen, daß das Schweigen der Wissenschaftler es mit ermöglicht hatte, unverantwortliche Elemente an die Macht kommen zu lassen. Seine Befürchtungen, daß in Nazi-Deutschland Atomwaffen hergestellt werden könnten, ließen ihn in einem Brief an den amerikanischen Präsidenten Roosevelt den Bau von Atomwaffen befürworten. Die militärisch sinnlosen Atombombenexplosionen trafen ihn zutiefst, und er setzte sich forthin mit seiner ganzen Kraft gegen den Atomtod ein. Die Erkenntnis, daß die drohende Selbstvernichtung nicht durch einzelne, sondern nur durch die Gesellschaft zu verhindern ist, versuchte Einstein in aufopferungsvoller Tätigkeit zu verwirklichen.

R. Thiele



FLOCKE +FLOCKE SCHNEE

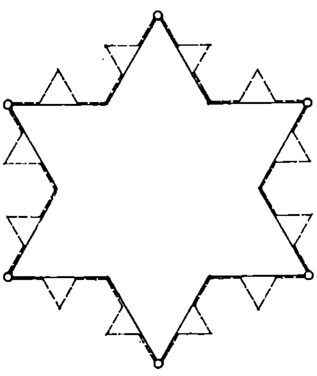
Es ist Winter

Vor dem Fenster tanzen die Schneeflocken. Wie sind sie gestaltet? Was geschieht mit ihnen?
Wenn eine Schneeflocke zu fliegen beginnt, hat sie die Gestalt eines regelmäßigen Sternsechsecks. Nehmen wir an, daß auf ihrem Wege in jeder Sekunde aus dem mittleren Drittel jedes Geradenstückes ihrer äußeren Begrenzung ein gleichseitiges Dreieck aus der Flocke herauswächst. Zuerst wachsen demzufolge 12 kleine Dreiecke aus den Zacken des Sternes (siehe Bild 1). Am Ende der 1. Sekunde hat die Fläche 48 gleiche Seiten, dann springen diese auseinander, so daß weitere 24 gleichseitige Dreiecke hinzukommen. Und so geht es weiter, solange die Flocke fliegt. Plötzlich erhebt sich Wind, ergreift die Flocken und trägt sie weit, weit weg, ins Endlose. Wie werden sie aussehen, wenn sie dort ankommen? Was für ein Schnee fällt im Endlosen? Wird es für die Flocken eine Grenzlinie, eine Fläche geben, und werden sie überhaupt einen Umfang haben?
Sehen wir uns das an! Wenn die Flocken Flächengebilde sind, wenn es das Unendliche gibt und wenn das Gewicht einer gerade entstandenen Schneeflocke $s_0 = 1p$ beträgt, so wird es am Ende der 1. Sekunde $1+\frac{1}{9}p$ betragen, am Ende der n-ten Sekunde aber

$$\frac{s_n}{p} = 1+\frac{1}{9}+\frac{4}{81}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_0^n\left(\frac{4}{9}\right)^i$$

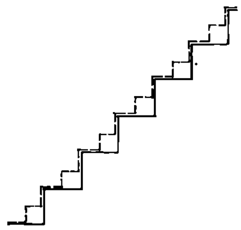
$$= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} = 1{,}2-\frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Bild 1



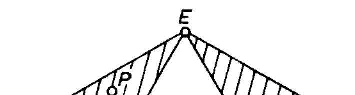
Wenn also die Flocke ins Unendliche wächst, so geht ihr Gewicht gegen $1{,}2\,p$. Was aber wird aus ihrem Umfang? Wenn er zu Beginn $k_0 = 1$ cm beträgt, so ist er nach der 1. Sekunde $k_1 = \frac{4}{3}$ cm, am Ende der n-ten Sekunde $k_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ cm. Das Problem ist, daß der Grenzwert davon unendlich groß ist. Irgendwo müssen wir uns geirrt haben. Wieso haben wir geglaubt, daß im Unendlichen der Umfang der Flocke gleich dem Grenzwert ihres Umfanges ist?
Was ist, wenn der Wind unsere Treppe verweht und ihr dabei auch Kanten, dem Bild 2 entsprechend, zu wachsen beginnen? Unterwegs bleibt dabei die Länge der Treppe unverändert, aber im Unendlichen verringert sie sich plötzlich auf den $\sqrt{2}$ten Teil. Außerdem, wieso haben wir geglaubt, daß die Schneeflocken im Unendlichen einen Umfang hätten? Woher wissen wir überhaupt, daß es dort Schneeflocken gibt?

Bild 2



Wir müssen den Leser beruhigen, wenigstens, was die zweite Hälfte der Frage betrifft. Die Schneeflocke „im Unendlichen“ existiert wirklich, sogar in einer ausreichend einfachen Bedeutung: Man kann ihre Grenze umkehrbar eindeutig und (in beiden Richtungen) stetig auf eine Kreislinie abbilden, ihr Inneres aber auf eine Kreisfläche (hier genügt ein beliebiger Kreis). Der Beweis dafür ist nicht zu kompliziert, aber die Erklärung der benutzten Fachausdrücke (und schon ihre Aufzählung) würde zu lange dauern. Begnügen wir uns damit, daß die Behauptung wahr ist, was wir so auszudrücken pflegen, daß die Grenze einer Kreislinie homeomorph ist, die Schneeflocke selbst aber der Kreisfläche. Wenn wir eine große elastische Gummiplatte haben, dann können wir sie der Schneeflocke genau anpassen, ohne daß die Gummiplatte irgendwo getrennt oder zusammengeklebt werden müßte. Kehren wir zum Umfang der Schneeflocke zurück!
Ist ein Punkt Spitze irgendeiner Zacke, dann ist er auch Spitze aller weiteren. Das bedeutet aber gerade, daß die Spitzenpunkte der Zacken Punkte der Begrenzung der Schneeflocke „im Unendlichen“ werden. Und weil der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten die Gerade ist, so ist der Umfang der Schneeflocke mit Sicherheit größer, als wenn wir aus den Punkten des Umfangs bestimmte herausnehmen und sie (der Reihe nach) durch Geradenstücke miteinander verbinden. Deshalb ist der Umfang der Schneeflocke sicher größer als der Umfang einer beliebigen Zacke, also größer oder gleich dem $\sup\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)$. Diese Zahl aber gibt es nicht, so daß wir erhalten haben, daß den Schneeflocken kein Umfang zukommt. Schneeflocken haben also eine wirklich interessante Eigenschaft: Sie haben eine endliche Fläche, aber keinen Umfang. (Umgekehrt ist das nicht möglich: Eine einem Kreis homeomorphe Figur hat immer eine Fläche.)
Die Schneeflockenkurve zeigte der amerikanische Mathematiker *F. Kasner* 1901 zum ersten Male. Er konstruierte die Kurve, weil er mit ihrer Hilfe eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion zeigen konnte.
Daß die Begrenzung der Schneeflocke stetig ist, wissen wir schon. Wir sehen ein, daß man in keinem ihrer Punkte eine Tangente anlegen kann. Wir sind daran gewöhnt, daß man gerade dann in einem Punkt keine Tangente anlegen kann, wenn dort eine „Spitze“ ist. In diesem Sinne hat die Schneeflockenkurve überall eine Spitze.
Eine in ihrem Punkt P an die Kurve angelegte Tangente kann man auch als den Grenzwert der Geraden PQ definieren, wenn der Punkt Q sich dem Punkt P auf der Kurve nähert. Deshalb wird, wenn der Punkt Q dem Punkt P „genügend nahe ist“, der Winkel zwischen PQ und der Tangente kleiner als sagen wir 10°, und wenn man auf diese Weise zwei Punkte Q_1 und Q_2 auswählt, der Winkel zwischen PQ_1 und PQ_2 kleiner als 20°. Können wir nun Punkte Q_1 und Q_2 beliebig nahe bei P finden, so daß der Winkel zwischen PQ_1 und PQ_2 mindestens 30° beträgt, so haben wir bewiesen, daß man im Punkt P die Tangente nicht anlegen kann. Das werden wir tun.
Es seien also auf der Begrenzung der Schneeflocke ein Punkt P und irgendeine kleine Entfernung gegeben. Wir wollen, daß die Abstände PQ_1 und PQ_2 kleiner als diese Entfernung seien, der Winkel zwischen den Geraden aber größer als 30°. Betrachten wir eine solche Zacke, bei der die Seite kleiner als die vorgegebene Entfernung ist. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn wir über jede Seite die in Bild 3 gezeigten schraffierten Dreiecke anfügen, die gesamte weitere Zacke in den schraffierten Teil oder auf seine Grenzen fällt,

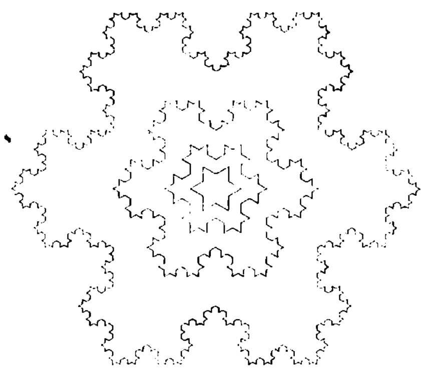
Bild 3



so daß diese Punkte Grenzen sind, der Punkt P auch. Andererseits sind die Punkte A, B, C, D und E Punkte auf der Begrenzung der Schneeflocke, die Strecken PA, PB, PC und PE sind alle kleiner als die Seite AD, also auch kleiner als die gegebene Entfernung. Schließlich werden die Winkel zwischen der Geraden PA und PB bzw. (von der Lage des Punktes P

abhängig) PC und PE mindestens 30°. Die unendlichen Schneeflocken sind ein bißchen stachlig, aber das hindert die dort lebenden Kinder nicht daran, sich mit gut gemachten Schneebällen Schlachten zu liefern.

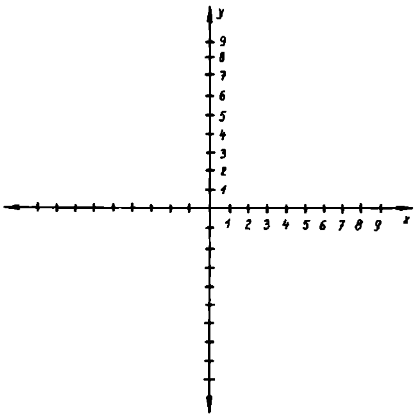
László Csirmaz



(Diesen Beitrag übernahmen wir aus unserer ungarischen Schwesternzeitschrift *Középiskolai Matematikai Lapok*, Dezemberheft 1977.)

Winterliche Knobeleien

▲1▲ Zeichne die Punkte $P_1(0, -4)$, $P_2(4, -8)$, $P_3(4, -3)$, $P_4(10, 0)$, $P_5(4, 3)$, $P_6(4, 8)$, $P_7(0, 4)$, $P_8(-4, 8)$, $P_9(-4, 3)$, $P_{10}(-10, 0)$, $P_{11}(-4, -3)$, $P_{12}(-4, -8)$ und verbinde sie in der Reihenfolge $P_1P_2P_3 \ldots P_{11}P_{12}P_1$!



▲2▲ Zeichne die Funktion

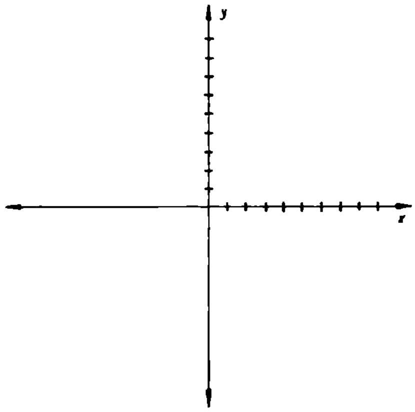
$y_1 = \frac{3}{5}(x+8)$ für $-8 \leqq x \leqq -3$

$y_2 = \frac{5}{3}x - 8$ $\quad -3 \leqq x \leqq 0$

$y_3 = \frac{11}{3}(x+7)+7$ $\quad -7 \leqq x \leqq -\frac{11}{2}$

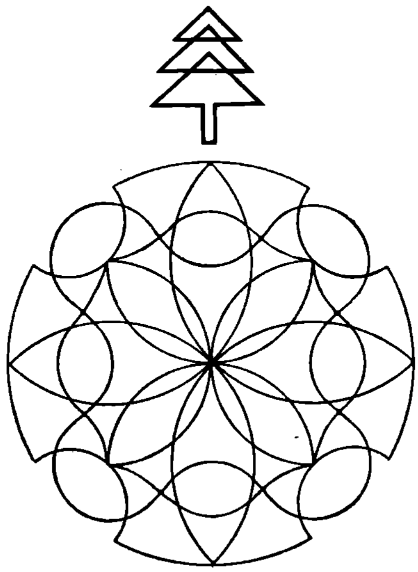
$y_4 = \frac{3}{11}(x+7)+7$ $\quad -7 \leqq x \leqq -\frac{3}{2}$

und spiegle sie an der y- und x-Achse! Verfahre mit den Spiegelbildern entsprechend!

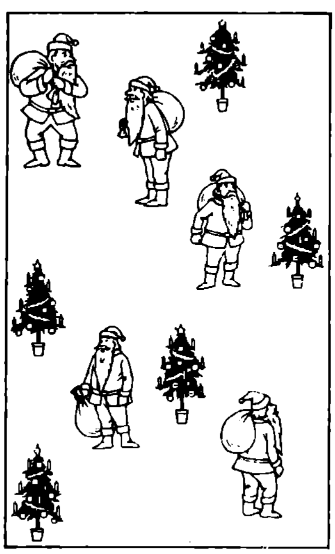


▲3▲ Unser Leser *Hans Dadenschier* aus Wittenberg sandte uns das als Überschrift gestaltete Kryptogramm. Wer findet dazu die Lösungen?

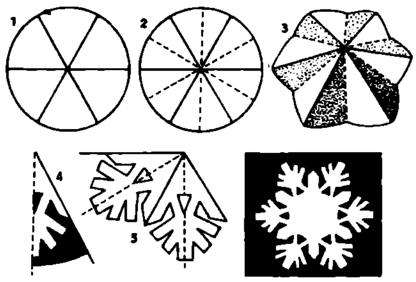
▲4▲ Zeichnet das Bäumchen und den Stern jeweils in einem Zug! Wer schafft es am schnellsten?



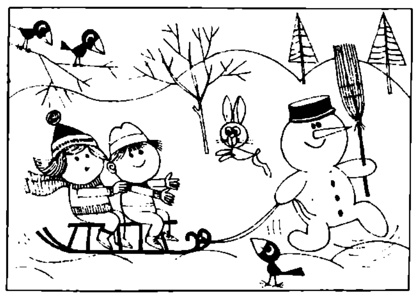
▲5▲ Unterteile das winterliche Feld so durch drei Geraden, daß zu jedem Weihnachtsmann ein Tannenbaum gehört!

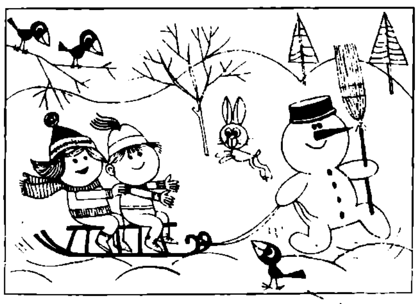


▲6▲ Sicher macht es euch Spaß, aus dünnem Zeichenpapier ein paar Schneeflocken herzustellen.
Schlagt mit dem Zirkel einen Kreis, und übertragt dessen Radius sechsmal auf den Kreisumfang! Verbindet die gegenüberliegenden Punkte miteinander (1)! Ihr erhaltet drei Linien, die den Kreis in sechs Abschnitte teilen. Schneidet nun den Kreis aus, falzt ihn an den Linien! Faltet den Kreis wieder auf, dreht ihn um, und halbiert die durch das Falten gebildeten Abschnitte durch nochmaliges Falzen (2)! Der Kreis ist dann ziehharmonikaartig in zwölf Abschnitte aufgeteilt (3). Legt jeweils zwei dieser Abschnitte übereinander, und zeichnet auf den oberen ein Muster, ähnlich dem auf dem Bild 4! Schneidet die auf dem Bild schwarz markierten Flächen aus! Das übrigbleibende Muster dient dann als Schablone für die nächsten Kreisabschnitte, die nach und nach ebenso ausgeschnitten werden.



▲7▲ Der lustige ungarische Zeichner hat – wenn man beide Bilder betrachtet und vergleicht – 12 Veränderungen vorgenommen. Wer findet sie?





(Lösungen: siehe Heft 1/79, d. Red.)

Wer löst mit?

alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1979

Mathematik

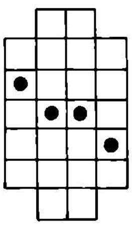
Ma 5 ■[redacted] Die Sternchen in

**** _ *** = 112

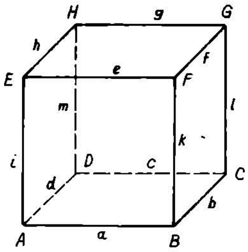
sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Subtraktionsaufgabe entsteht. Dabei soll sowohl der Subtrahend als auch der Minuend nur aus Ziffern für ungerade Zahlen bestehen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■1794 Steffen stellt folgendes fest: Innerhalb von 15 Minuten und 30 Sekunden passierten insgesamt 60 Fahrzeuge eine Brükke, und zwar Autos und Fahrräder. Steffen rechnete und fand heraus, daß genau 200 Räder über die Brücke rollten.
Wieviel Autos und wieviel Fahrräder waren es? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■1795 Das Bild zeigt den in quadratische Felder eingeteilten Grundriß eines Gartens mit vier Apfelbäumen. Vier Familien wollen sich den Garten so teilen, daß jede Familie eine gleich große, zusammenhängende Fläche mit einem Apfelbaum erhält. Zeichne mindestens drei mögliche Aufteilungen auf kariertes Papier! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*



Ma 5 ■1796 Ein Käfer krabbelt entlang der Kante eines Würfels. Er beginnt im Eckpunkt A und gelangt auf dem kürzesten Wege zum Eckpunkt G des Würfels. Gib an, welche und wie viele Möglichkeiten der Käfer zum Krabbeln hat! (Die Kanten des Würfels sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet.)



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

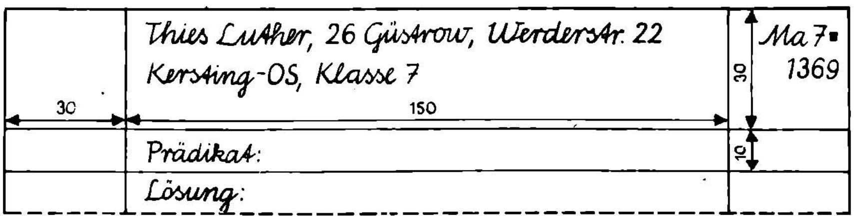
Ma 5 ■1797 Hans, sein Bruder Jürgen und seine Schwester Erika haben fleißig Pilze gesammelt. Beim Vergleichen ihrer Sammelergebnisse stellt sich heraus, daß Jürgen 5 Pilze weniger als die doppelte Anzahl der von Hans gesammelten Pilze hat. Erika hat 20 Pilze weniger als die dreifache Anzahl der von Hans gesammelten Pilze. Zusammen haben alle drei Geschwister mehr als 90, aber weniger als 100 Pilze gesammelt. Wieviel Pilze hat jeder gefunden? *Sch.*

Ma 5 ■1798 In das abgebildete Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccc} aa & \cdot\ bc & = ade \\ + & \cdot & - \\ fg & +\ h & = bja \\ \hline bbf & +\ eh & = bdk \end{array}$$

nach der sowj. Schülerzeitschrift „Quant“

Ma 6 ■1799 Eine Mutter fragt ihren Sohn: „Wieviel Schüler gehören deiner Klasse an?“ Der Sohn antwortet: „Wenn du alle Primzahlen, die kleiner als 100 sind, addierst, diese Summe mit 3 multiplizierst, das Produkt durch 10 dividierst, zum Quotienten 12 addierst, die so erhaltene Summe noch durch 10



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

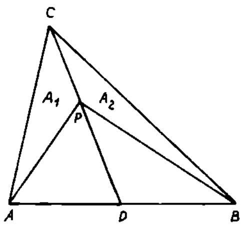
dividierst, dann erhältst du als Ergebnis die Anzahl der Schüler meiner Klasse." Wie viele Schüler sind es?

Schüler Steffen Frigge, Herzberg, Kl. 6

Ma 6 ■1800 In einer Klasse, der mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler angehören, wurde eine Klassenarbeit in Mathematik geschrieben, an der alle Schüler teilnahmen. Der 9. Teil der Anzahl der Schüler erhielt die Note 1, der 3. Teil die Note 2, der 6. Teil die Note 4; kein Schüler erhielt die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Note 3?

Schülerin Gabriele Müller, Schönwalde, Kl. 6

Ma 6 ■1801 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Der Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB}$ wurde mit C verbunden. Der Innere Punkt P der Strecke $\overline{CD}$ wurde mit A und B verbunden. Vergleiche die Flächeninhalte A_1 und A_2 der Dreiecke $\triangle APC$ und $\triangle BCP$. *Sch.*



Ma 6 ■1802 Nachdem in einer Werkküche der Preis für ein Mittagessen von 0,80 M um 10 Pf gesenkt wurde, konnten bei gleichbleibender Tageseinnahme 200 Portionen Essen mehr ausgegeben werden. Wieviel Portionen Essen wurden nach dieser Preissenkung täglich ausgegeben?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ■1803 Im Jahre 1978 ist Olaf acht Jahre älter als sein dreijähriger Bruder Richard; er stellt fest, daß im gleichen Jahre seine Mutter und sein Bruder zusammen genau so alt sind wie sein Vater (in ganzen Zahlen). Alle vier Familienmitglieder sind zusammen 77 Jahre alt. Wie alt ist jedes Mitglied dieser Familie im Jahre 1978?

Schülerin Sabine Jals, Schlagsdorf, Kl. 7

Ma 7 ■1804 Das Motorschiff „Bummi" der Weißen Flotte in Berlin hat sechsmal soviel Innen- wie Außenplätze. Würde dieses Schiff über zwei Innen- und sechs Außenplätze mehr verfügen, dann wären viermal soviel Innen- wie Außenplätze vorhanden. Wie viele Personen finden auf diesem Schiff einen Sitzplatz?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 7 ■1805 Ein Sessellift besteht aus 140 Sesseln. Je zwei aufeinanderfolgende Sessel haben den gleichen Abstand. Alle Sessel sind fortlaufend von 1 bis 140 numeriert, d. h., auf Sessel Nr. 140 folgt Sessel Nr. 1. Ein Beobachter im Talgrund stellt zu einem bestimmten Zeitpunkt fest, daß sich die Sessel mit den Nummern 19 und 99 gegenüberstehen, d. h., daß sie die gleiche Entfernung von jeder der beiden Stationen des Sessellifts haben. Welche Nummern besitzen die Sessel; die sich zum Zeitpunkt dieser Beobachtung in den beiden Stationen des Sessellifts befinden?

Schülerin Brigitte Rotter, Dresden, Kl. 5

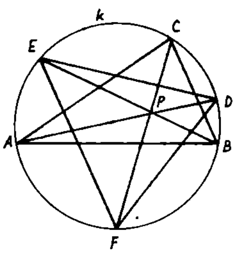
Ma 7 ■1806 In den Endausscheid der Fußballmeisterschaft einer Oberschule kamen die Mannschaften der Klassen 9b, 10a und 10b. Es war vereinbart worden, daß jede dieser drei Mannschaften gegen jede der übrigen genau ein Spiel auszutragen hatte. Für ein gewonnenes Spiel wurden an die Siegermannschaft 2 Punkte, für ein unentschiedenes Spiel an jede der beiden Mannschaften je 1 Punkt vergeben. Nach Austragung der Spiele gab es folgenden Stand:

Klasse	Punkteverhältnis	Torverhältnis
9b	2:2	3:1
10a	3:1	3:2
10b	1:3	2:5

Es ist das Torverhältnis jedes der ausgetragenen Spiele zu ermitteln.

Schüler Volker Schulz, Nauen, Kl. 10

Ma 7 ■1807 Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis k dar. Im Innern dieses Dreiecks wurde ein Punkt P derart konstruiert, daß $\sphericalangle APB = 60° + \gamma$, $\sphericalangle BPC = 60° + \alpha$ und $\sphericalangle CPA = 60° + \beta$ gilt. Die Gerade AP schneidet k in D, die Gerade BP schneidet k in E, die Gerade CP schneidet k in F. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck DEF gleichseitig ist. *Sch.*



Ma 8 ■1808 Beweise, daß das doppelte Produkt aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger um 1 kleiner ist als die Summe aus der Quadratzahl dieser natürlichen Zahl und der Quadratzahl ihres Nachfolgers!

Schüler Bernd Schmutzler, Kirchberg, Kl. 7

„Jetzt werden sie bestimmt zur Tafel sehen."

Ma 8 ■1809 Gesucht sind zwei verschiedene natürliche Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

a) Das geometrische Mittel dieser Zahlen ist um 4 größer als die kleinere der beiden Zahlen.

b) Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist um 6 kleiner als die größere der beiden Zahlen. *Schülerin Birgit Arndt, Loitz, Kl. 8*

Ma 8 ■1810 Man konstruiere ein Dreieck ABC aus $a+b=7$ cm; $c=4$ cm und $\beta=30°$ und begründe die Konstruktion!

Dr. W. Moldenhauer, Universität Rostock

Ma 8 ■1811 Man denke sich einen Würfelschnitt derart, daß die Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Seiten die Diagonalen je einer Quadratfläche des Würfels sind.

a) Man zeichne den Würfel mit Schnitt in einer Schrägbilddarstellung!

b) Man konstruiere die Netze beider Teilkörper!

c) Wie heißt der kleinere der beiden Teilkörper? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ■1812 Man untersuche, ob die Zahl $3^{8192}-1$ eine Primzahl ist! Man gebe drei Zahlen an, die Teiler von $z=3^{8192}-1$ sind, falls z keine Primzahl ist!

Jörg Hartmann, Annaberg, Kl. 12e

Ma 9 ■1813 Ein Mädchen wird gefragt, wieviel Geschwister es habe. Darauf antwortet das Mädchen: „Die Anzahl der zu unserer Familie gehörenden Kinder ist gleich dem ganzzahligen Lebensalter des Jüngsten. Der Altersunterschied zwischen den Geschwistern beträgt stets genau zwei Jahre. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter eines jeden Kindes angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die gleich dem neunfachen Lebensalter des Jüngsten ist. Wie viele Kinder gehören zu dieser Familie, und wie alt ist jedes Kind?

Schüler Klaus Mohnke, Lübbenau, Kl. 7a

Ma 9 ■1814 Die Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC sei 6 cm, die Seitenhalbierende s_c sei 3 cm lang, und der Winkel $\sphericalangle CAB$ habe eine Größe von 30°. Wie lang ist die Seite $\overline{AC}$ dieses Dreiecks? *Schüler Holger Friedrich, Karl-Marx-Stadt, Kl. 7*

Ma 9 ■1815 Zum Abschluß des Jahres 1978 folgendes Problem: Eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche hat das Volumen $V = 1978$ cm^3. Der halbe Grundflächenumfang ist 66 cm, die Höhe der Pyramide 6 cm lang. Wie lang sind die Grundkanten?

Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz, Österreich

Ma 10/12 ■1816 Schreibt man die einzelnen Ziffern einer beliebigen zweistelligen natürlichen Zahl noch zweimal in der vorgegebenen Reihenfolge dahinter, so erhält man eine sechsstellige Zahl. Man beweise, daß diese sechsstellige Zahl stets durch 273 teilbar ist!

Schüler Andreas Fittke, Berlin, Kl. 10

Ma 10/12 ▪1817 Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{\lg(91-x^3)}{\lg(7-x)}=3 \text{ erfüllen!}$$

Schülerin Birgit Arndt, Loitz, Kl. 8

Ma 10/12 ▪1818 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq 2\sqrt{n}-1$$

erfüllt ist!

Mathematikfachlehrer Sh. B. Linkowski, Moskau

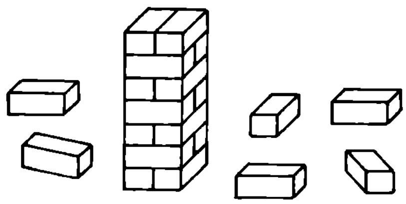
Ma 10/12 ▪1819 Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 30 cm, sein Flächeninhalt 30 cm^2. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

Dipl.-Lehrer f. Math./Phys., Renate und Manfred Kutschauk, Deutschenbora

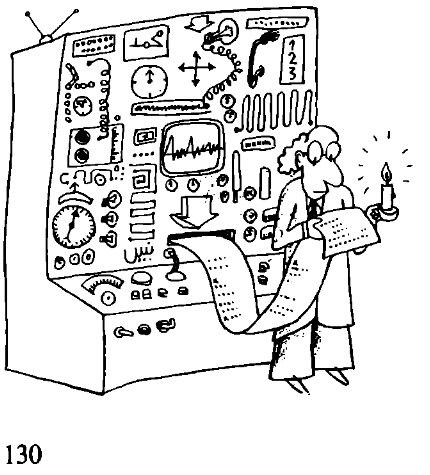
Physik

Ph 6 ▪46 Bei einer Wanderung möchte Peter die Wandergeschwindigkeit feststellen. Aus diesem Grund mißt er die eigene Schrittlänge; sie beträgt 65 cm. Weiterhin stellt Peter fest, daß er in jeder Minute 80 Schritte macht. Wie groß ist Peters Wandergeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?

Ph 7 ▪47 Jens will 20 Ziegelsteine von je 6,5 cm Höhe und 3,5 kp Gewicht zu je zwei aufeinanderschichten. Berechne die Hubarbeit, die Jens insgesamt verrichten muß!



Ph 8 ▪48 Ein Klassenzimmer ist 6 m breit, 8,5 m lang und 3,5 m hoch. Berechne das Volumen der Luft, die aus dem Zimmer strömt, wenn die Temperatur von 15 °C auf 25 °C erhöht wird! Der Luftdruck betrage 770 Torr.



Ph 9 ▪49 Auf einem Rangierbahnhof werden vom Ablaufberg ablaufende Güterwagen je nach Erfordernis durch sogenannte „Hemmschuhe" abgebremst. Auf welchem horizontalem Weg wird ein zweiachsiger Güterwagen mit einer Gesamtmasse von 35 Tonnen unter einer Geschwindigkeit von 6 $\frac{m}{s}$ mittels eines Hemmschuhes zum Stehen gebracht, wenn folgende Koeffizienten der gleitenden Reibung angesetzt werden:

– zwischen Hemmschuh und Schiene $\mu_1 = 0{,}16$

– zwischen Rad und Schiene $\mu_2 = 0{,}10$?

Anmerkung: Beachten Sie, daß bei Eisenbahnwagen die Räder starr auf den Achsen befestigt sind! Die Achsen seien durch die Gesamtmasse gleichmäßig belastet.

Ph 10/12 ▪50 Zwei technische Widerstände ergeben bei Reihenschaltung einen Gesamtwiderstand von 10 Ohm und bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 1,6 Ohm. Wie groß sind die beiden Einzelwiderstände?

Math./Phys.-Fachlehrer K. Meier, Osternienburg

Chemie

Ch 7 ▪37 In unserer chemischen Industrie wird Natronlauge nach dem Diaphragmaverfahren hergestellt. Für die Herstellung 1 t Natronlauge werden 1 730 kg Natriumchlorid benötigt.

1 t Natriumchlorid kostet 6,50 M. Durch besseres Eindampfen der Diaphragmalauge wurde erreicht, daß nur noch 1 710 kg Natriumchlorid pro Tonne Natronlauge eingesetzt werden müssen.

a) Wieviel Tonnen Natronlauge können bei einer monatlichen Planauflage von 1 000 t auf Grund der Materialeinsparung über den Plan hinaus produziert werden?

b) Um wieviel Mark erhöht sich im Monat das Brigadekonto der Chemiefacharbeiter, wenn 20% der Materialeinsparung auf das Konto gebucht werden?

Ch 8 ▪38 Kalziniertes Soda ist für die DDR ein wichtiger Exportartikel. Wieviel Tonnen Soda wurden im Jahre 1977 exportiert, wenn zur Herstellung für Exportsoda 92 500 t Natriumchlorid verarbeitet wurden und eine Planerfüllung von 107% erreicht wurde?

Ch 9 ▪39 Äthanol läßt sich aus Äthan oder Äthen herstellen.

a) Wieviel Kubikmeter Äthen werden zur Herstellung von 50 t Äthanol durch katalytische Wasseranlagerung benötigt?

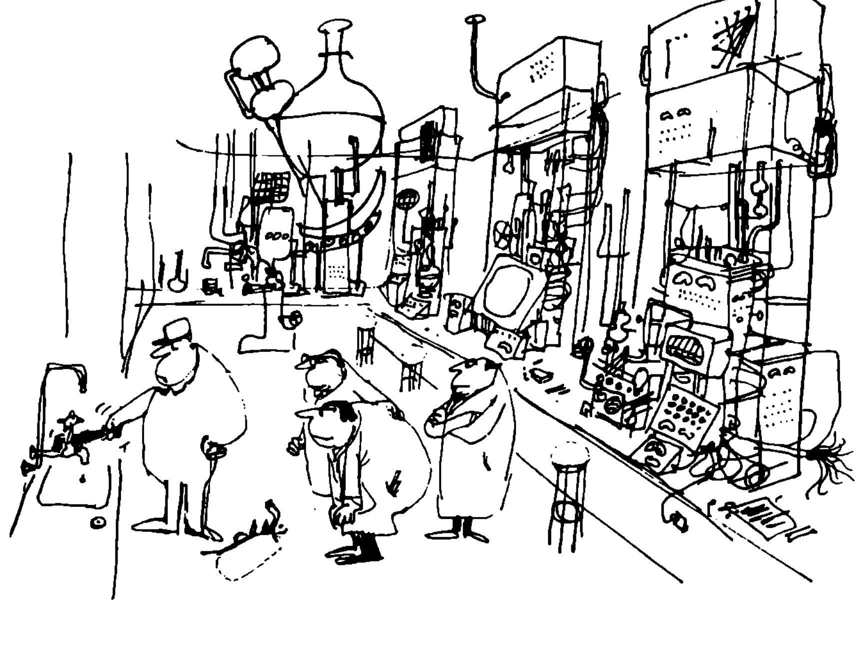
b) Äthan wird zu Monobromäthan bromiert und dann mit Silberhydroxid umgesetzt. Wieviel Liter 40%iges Äthanol mit der Dichte $\varrho = 0{,}81\ g \cdot ml^{-1}$ lassen sich aus 245 g Äthan herstellen?

Ch 10/12 ▪40 Ammoniak wird im VEB Leuna-Werke *Walter Ulbricht* durch Synthese aus den Elementen bei einer Temperatur von 450 °C und einem Druck von 250 at im Beisein eines Katalysators hergestellt.

a) Berechnen Sie, wieviel Kubikmeter Ammoniak aus 120 m^3, 200 m^3 und 930 m^3 Stickstoff im Normalzustand entstehen!

b) Wieviel Kubikmeter Ammoniak entstehen unter den gegebenen Bedingungen?

c) Wieviel Gramm Ammoniumchlorid kann man aus den gebildeten Volumina Ammoniak im Normalzustand herstellen?



VI. Güstrower Physikwettbewerb

Vom 20. 2. bis 24. 2. 1978 fand in der Pädagogischen Hochschule *Liselotte Herrmann* Güstrow der VI. Physikwettbewerb statt. Es nahmen daran 50 Schüler der Klassen 9 bis 12 aus Erweiterten Oberschulen der DDR teil, die besten unter den 340, die versucht hatten, die Aufgaben der Auswahlklausur zu lösen.

Während des Wettbewerbs mußten die Teilnehmer 4 theoretische und eine experimentelle Aufgabe bearbeiten. Sie konnten dabei maximal 60 Punkte erreichen, 10 für jede theoretische, 20 für die experimentelle Aufgabe.

Folgende Preisträger konnten ermittelt werden:

Einen ersten Preis und den Preis für den besten Teilnehmer erhielt Stefan Müller-Pfeiffer, Kl. 9, EOS Carl Zeiss, Jena.

Erste Preise erhielten: Andreas Förster, Kl. 10, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Stefan Kasper, Kl. 12, EOS *Karl Marx*, Leipzig; Michael Heinrich, Kl. 11, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin.

Zweiter Preis und Sonderpreis für die originellste experimentelle Arbeit: Jörg Alscher, Kl. 12, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin.

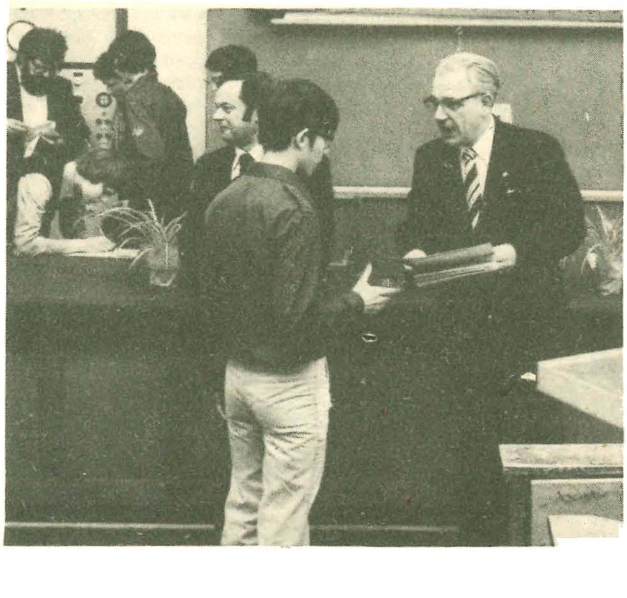
Einen zweiten Preis erhielten: Jürgen Gräfenstein, Kl. 10, EOS *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Peter Wüstner, Kl. 10, EOS *Karl Marx*, Leipzig; Axel Fröhlich, Kl. 10, EOS *C. F. Gauß*, Frankfurt (Oder); Frank Marlow, Kl. 11, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Andreas Berger, Kl. 12, Martin-Luther-Universität Halle, Spezialklasse; Stefan Schuster, Kl. 11, EOS *Ernst Schneller*, Meißen; Andreas Prause, Kl. 12, EOS *Max Planck*, Berlin; Thomas Richter, Kl. 12, EOS *Carl Zeiss*, Jena; Ingo Stiebritz, Kl. 11, EOS *Carl Zeiss*, Jena.

Einen dritten Preis erhielten: Erasmus Scholz, Kl. 10, EOS *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Ingo Will, Kl. 12, ABF Halle; Andreas Chrobok, Kl. 11, Martin-Luther-Universität Halle, Spezialklassen; Rainer Gutsche, Kl. 11, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklassen; Peter Hartmann, Kl. 10, EOS Greiz; Konrad Thürmer, Kl. 10, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Carsten Zander, Kl. 10, EOS Eilenburg.

Den Sonderpreis für den besten weiblichen Teilnehmer erhielt Kerstin Gommel, Kl. 10, EOS *Carl Zeiss*, Jena.

Die Preisverleihung wurde vom Leiter des Wettbewerbs Prof. Dr. Wendt, im Beisein des Hauptreferenten für Physik im Ministerium für Volksbildung H. Schmidt, vorgenommen.

B. Träger/U. Walta



Auszeichnung der Besten durch Prof. Dr. Wendt.

Aufgaben der Klassenstufe 9/10

Theoretische Aufgaben

1. Es ist bekannt, daß die Bahnebene von Satelliten fest im Raum steht.

a) Geben Sie eine ausführliche Erklärung für diese Erscheinung!

b) Wie groß ist der Winkel, um den sich die Erde bei einem Satellitenumlauf dreht?

c) Geben Sie die Bedingungen dafür an, daß der Satellit sich genau auf einer Kreisbahn bewegt!

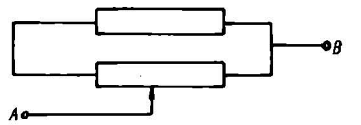
d) Unter welchen Bedingungen kann der Satellit von der Erde aus immer an der gleichen Stelle beobachtet werden?

2. Ein mit 1000 m^3 Wasserstoff gefüllter Ballon schwebt bei Normaldruck in Bodennähe. Wie groß ist an diesem Tag die Lufttemperatur?

Als Masse der völlig leeren zusammengefalteten Hülle und des Korbes mit Inhalt wurden bei gleichen Temperatur- und Druckverhältnissen wie beim Start 1100 kg ermittelt. Es wurde eine Balkenwaage mit Wägestücken von vernachlässigbarem Volumen benutzt.

Unter Normalbedingungen beträgt die Dichte der Luft 1,293 kg/m^3, die des Wasserstoffs 0,0899 kg/m^3.

3. Von zwei Widerständen mit je $R = 100\,\Omega$ ist einer mit einem Gleitkontakt versehen (Skizze). Geben Sie an, an welcher Stelle der Gleitkontakt stehen muß, damit der Gesamtwiderstand zwischen A und B 32 Ω beträgt!



4. Ein Lichtstrahl wird nacheinander an zwei ebenen Spiegeln reflektiert. Er verläuft in einer zur Schnittgeraden zwischen den beiden Spiegelebenen senkrechten Ebene.

Unter welchen Bedingungen verläuft der Strahl nach der zweiten Reflexion senkrecht zum einfallenden Strahl?

Experimentelle Aufgaben

Klassenstufen 9/10 und 11/12

1. Bestimmen Sie die Brechzahlen (Übergang Luft–Flüssigkeit) für Äthanol und Toluol! Ihnen stehen zur Verfügung: Vorratsgefäße mit Äthanol und Toluol, eine Küvette, ein Glasstab, ein Lineal, Zahlentafel.

Zeichnen Sie eine Skizze zur Versuchsanordnung, und erläutern Sie das angewandte Meßverfahren! Alle Meßgrößen sind mehrmals zu bestimmen (Mittelwertsbildung und Fehlerabschätzung!).

2. Theoretische Aufgabe:

Gegeben sei eine Mischung aus Äthanol und Toluol. Wie kann man mit Hilfe der in Aufgabe 1 genannten Hilfsmittel das Mischungsverhältnis der beiden Substanzen ermitteln? Welche Voraussetzungen müssen für die Anwendbarkeit Ihres Verfahrens erfüllt sein?

Hinweis für Kl. 9/10:

a) Die Brechzahl ist definiert durch

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

b) Es gilt für ein rechtwinkliges Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Auf die Veröffentlichung der theoretischen Aufgabe für Kl. 11/12 müssen wir aus Platzgründen verzichten.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Schäfer

Direktor der Sektion Mathematik und Rechentechnik der Technischen Hochschule Leipzig

▲1820▲ Es ist zu zeigen, daß sin 10° irrational ist.

Hinweis: Man kann zum Beispiel durch Anwendung von Additionstheoremen, von $\sin 30° = \frac{1}{2}$ ausgehend, eine Gleichung für $x = \sin 10°$ erhalten.

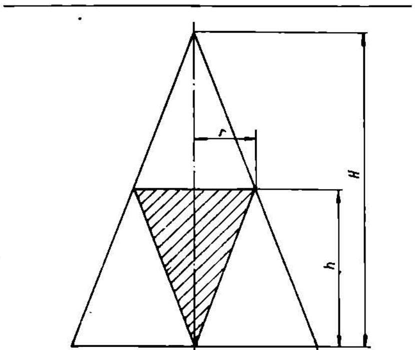
Kurzbiographie

Geboren 1931 in Halle, Beruf des Vaters: Schlosser, Beruf der Mutter: Weißnäherin, Besuch der Volksschule (1938 bis 1942) und der Mittelschule (1942 bis 1948), Lehre als Maurer in Leuna, Abitur an der ABF *Walter Ulbricht* in Halle, Mathematikstudium an der *Martin-Luther-Universität* in Halle (1953 bis 1957), Abschluß als Diplom-Mathematiker, Promotion 1964, Habilitation 1967, Arbeit als Wissenschaftler an der TH Karl-Marx-Stadt, TH Leuna-Merseburg, im VEB Petrolchemischen Kombinat Schwedt, als Dozent an der Universität Greifswald und an der Ingenieurhochschule Leipzig, ordentl. Professor (1971) an der IH Leipig, jetzt Direktor der Sektion Mathematik und Rechentechnik an der TH Leipzig.

Eine Aufgabe von Dozent Dr.-Ing. Rolf Thiele

Technische Hochschule Leipzig
Sektion Ingnieurbau

▲1821▲ Einem geraden Kegel mit dem Radius R und der Höhe H sei ein zweiter Kegel so eingefügt, daß seine Spitze mit dem Mittelpunkt des Grundkreises und die Achsen beider Kegel zusammenfallen. Der Grundkreis des 2. Kegels berühre den Mantel des 1. Kegels vollständig.
Welche Abmessungen r und h sind dem 2. Kegel zu geben, damit sein Volumen möglichst groß wird?



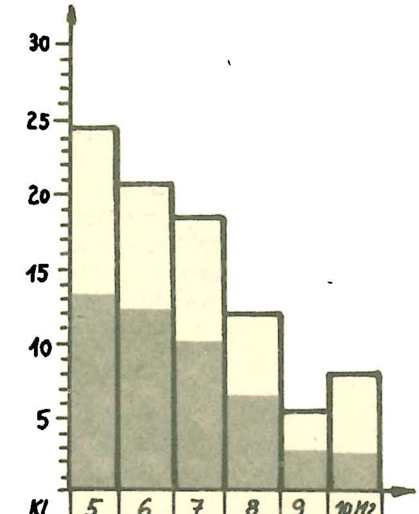
alpha-Wettbewerb 1977/78

Preisträger

Johannes Wien, Manuela Winges, beide Bad Liebenstein; Marei Hellmann, Bad Salzungen; Dirk Grabner, Karin Gröger, Kerstin Kantiem, Holger Neye, alle Berlin; Holger Schick, Jörg Berger, Gerd Rakowski, alle Bernsbach; Beate Weber, Bernburg; Thomas Streich, Brandenburg; Susanne Below, Burg Stargard; O. Sasse, Frank Techen, Karsten Mittag, alle Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Wolfgang Tenor, Dessau; AG Math. der N.-Ostrowski-OS, Diedorf; Mario Dette, Dingelstädt; Julius Clausnitzer, Horst Schulze, beide Dresden; Ralf Arnold, Claudia Pleyer, beide Eisenach; Jens Wackernagel, Falkenberg; Kathrin Danz, Floh; Anett Forberg, Freiberg; Matthias Bär, Freital; Dietmar Schmiedl, Olaf Liebegott, beide Friedeburg; Torsten Knause, Gossa; Raik Langlotz, Grabkow; Susanne Dimsat, Frigga Rudolph, Karl-Jürgen Bär, Antje Kilian, alle Greußen; Babett Maulhardt, Großbodungen; Cordelia Krippner, Hammerbrücke; Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Antje Rudolph, Kämmeritz; Steffen Herpich, Kamsdorf; Felix Baitalowitsch, Kasan (UdSSR); Tanja Mittag, Jens Siewert, Eske Röhrich, Mathias Womacka, Cornelia Unger, alle Karl-Marx-Stadt; Martina Albrecht, Anita Meyer, beide Kieselbach; Bernd Schmutzler, Kirchberg; André Schlosser, Klingenthal; Thoralf Blättermann, Könnern; Jens-Uwe Eigenwillig, Lauchhammer; Matthias Heller, Lauscha; Petra Seibt, Lauscha-Ernstthal; AG Math. (Kl. 6b) W.-Pieck-OS Lichte; Sybille und Claudia Seifert, Lichtenberg; Heike Pietzsch, Kathy Kranz, Kerstin Villwock, alle Löderburg; Doris Grünler, Lössau; Klaus Mohnke, Lübbenau; Andreas Herrmann, Ludwigsfelde; Torsten Schulz, Merseburg; Jörg Schmidt, Heidi Teidga, beide Neubrandenburg; Gabriele Kohnert, Simone Pahl, beide Neuenhofe; Irene Hesse, Niederorschel; Sandra Niedlich, Oberschönau; AG Math. (Kl. 9/10) EOS R. Fetscher, Pirna; Torsten Kühn, Potsdam-Babelsberg; Ullrich Klinzing, Roßdorf; Lutz Andrews, Gitta Schöne, Grit Maciejewski, alle Rostock; Evelyn Neumann, Rotta; Andrea Teschendorf, Rüdnitz; Bodo Bricks, Saalfeld; Sabine Recknagel, Silke Fischer, Theresa Häfner, alle Steinbach-Hallenberg; Steffen Weber, Tiefenort; Marena Pannier, Uthausen; Silke Raßmann, Ray Langlotz, beide Unterbreizbach; Tom Boyhs, Vietlübbe; Evelin Beyer, Wegefahrt; Karsten Busse, Wittenberg; Guido Köhnke, Marion Reek, beide Wittstock; Jörg Wenzel, Zeulenroda; Holger Alex, Birgit Erdmann, Heide Hilse, alle Zittau

Vorbildliche Leistungen

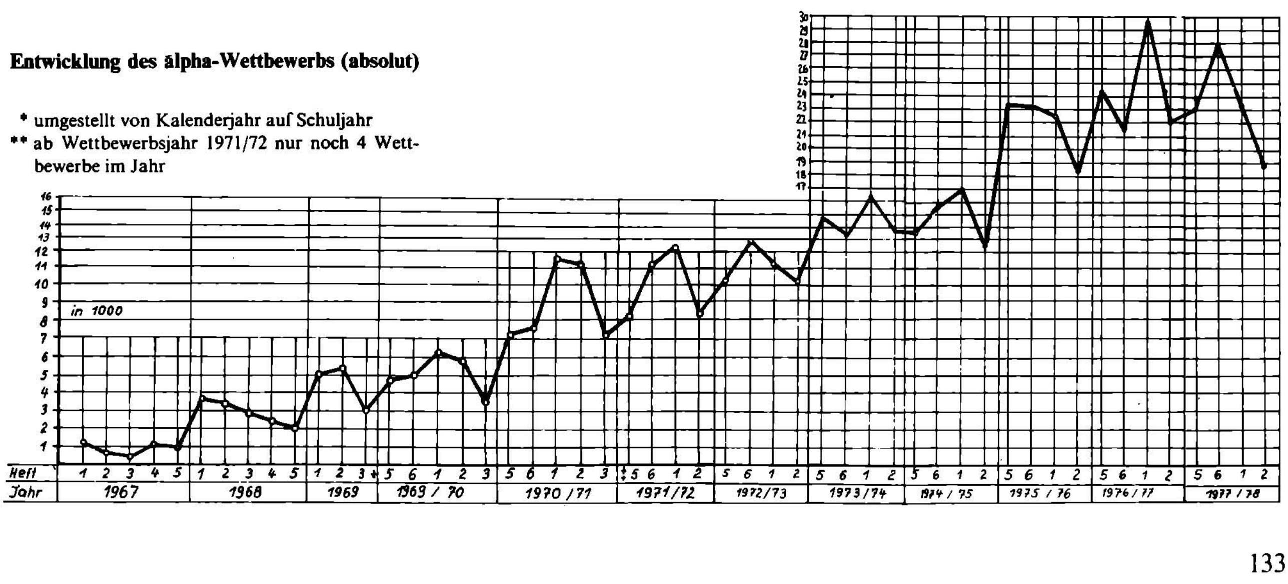
Andreas Gedat, Bad Liebenstein; Thomas Strobel, Michael Grünberg, beide Berlin; Peter Strempel, Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Ruth Backhaus, Gabi Stöber, Astrid Kullmann, Petra Bülow, alle Dingelstädt; Brigitte Rotter, Kathrin Wustmann, Werner Kirsch, alle Dresden; Astrid Kafka, Eisleben; Katrin Burgmann, Ralf Fünfziger, beide Friedeburg; Jens Franke, Gera; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Hagen Haberland, Greifswald; Ingolf Hentzsche, Gremmin; Matthias Hunger, Grimma; Helen Stock, Großbodungen; Andreas Löffler, Halle-Neustadt; Astrid May, Hausen; Anja Kusserow, Haynrode; Gabriele Missal, Insel; Silvia Kriesche, Klausa; Manuela Hellbach, Lauscha; Ralf Laue, Thoralf Hönicke, beide Leipzig; Angela Tautenhahn, Lichtenstein; Hartmut Uschmann, Loburg; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Birgit Polley, Mühlhausen; Mario Marinitsch, Neubrandenburg; Ines Birkefeld, Niederorschel; Kristian Lauritzen, Reichenberg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Kirstin Trägener, Rietz; Gunter Siebenhaar, Conny Steube, beide Roßdorf; Peter Krause, Rostock; Karsten Geißler, St. Egidien; Ingolf Erdmann, Torsten Günzel, beide Sebnitz; Heike Hader, Schlotheim; Ralf-Birger Häfner, Corina Kaiser, Ines Nothnagel, alle Steinbach-Hallenberg; Cordula Gottwald, Stendal; Joachim Krug, Tiefenort; Sylvia Feige, Weißwasser; Bettina Wolff, Wittstock; Thomas Reinke, Wolgast; Thomas Andermann, Jens Fache, beide Altenburg; Sascha Beyer, Beetzendorf; Udo Bellack, Berlin; Iris Hoffmann, Brielow; Uwe Schüzte, Camin; Kristina Roeke, Cottbus; Ulf Fache, Culitzsch; Britta Böttcher, Damsdorf; Birgit Rahn, Dresden; Una Heinecke, Gabriele Wehrsdorfer, Britta Burkert, alle Eisenberg; Axel Siebert, Eisenhüttenstadt; Elvira Stallbohm, Eldena; Jörg Klingohr, Erfurt; Kathrin Naumann, Glauchau; Holger Stoffel, Grabow; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Jörn Wintsche, Grimma; Volker Winkler, Görlitz; Frank Thümmler, Horka; Claudia Bock, Jeßnitz; Ricarda Ramm, Karl-Marx-Stadt; Judith Kühn, Kreuzebra; Susann Schaede, Jesua Dietze, Corinna Mathdorff, alle Klietz; Kathrin Schiemann, Klinge; Ulrike Otto, Lauscha; Falk Hübner, Landsberg; Andreas Helbig, Langenleuba; Vera Wilhelm, Gunter Fucke, Petra Polster, alle Leipzig; Heike Scherf, Leisnig; Antje Peter, Lichtenstein; Steffen Haschke, Mittelherwigsdorf; Uwe Weßollek, Neundorf; Annett Ludwig, Niederorla; Thomas Heidrich, Oberlungwitz; Antje Gerlach, Parchim; Reinhard Kaufmann, Peißen; Gudrun Zirnstein, Pirna; Jörg Stark, Plauen; Karola Klitsch, Scharlibbe; Heike Beutel, Schönfeld; Wilfried Möbius, Schwerin; Anne Willroth, Stadtlengsfeld; Brigitta Müller, Teterow; Thomas Harz, Weimar; Beate Hentschke, Weißwasser; Ralf Malinowski, Wendorf; Katrin Krüger, Wildau; Frank Truckenbrodt, Wolfen; Sonja Güssow, Wollin, Jörg Angelmann, Wittenberg; Kerstin Jung, Wöbbelin; Ralf Wiegand, Unterbreizbach; Marion Vogt, Uthausen; Birgit Vogel, Reuden; Mathias Eipert, Petra Zander, beide Wittstock; Simone Marks, Astrid Schunck, Bärbel Biendarra, Heike Arnold, Sabine Rindermann, alle Dingelstädt; Rainer Schwäblein, Anette Usbeck, Thomas Werner, Stefan Kührt, Sabine Dziatzko, Katrin Pfannschmidt, Sabine Marr, Petra Marr, Elfi Recknagel, Gabi Knebel, Ramona Holland-Nell, Markus Heckert, Frank Pfannschmidt, Claudia Döll, Pirka Godau, Petra Preiß, Steffi Bahner, Dirk Walther, alle Steinbach-Hallenberg; Sylke Pohl, Rostock; Thomas Stoffel, Grabow; Mario Köppeh, Berlin; Frank-Michael Wegner, Greifswald; Uta Melchior, Neuruppin; Uta Heiland, Breitenbach; Peter Meng, Röblingen; Antje Schlosser, Klingenthal; Michael Kaufhold, Hüpstedt; Frank Siebert, Halle; Heike Klötzer, Bernsbach; Uwe Schulze, Pirna; Christine Zieger, Neudietendorf; Ralph Lukoschus, Neubrandenburg; Jenny Pelzer, Lübar; Stefan Große, Halle; Silke Vogel, Klietz; Urte Tauer, Seegrehna; Torsten Steinborn, Klietz; Heike Nagel, Seegrehna; Thomas Schunke, Neubrandenburg; Christine Kirsch, Dresden; Martin Forberger, Feldberg; Astrid Werther, Nordhausen; Kerstin Singer, Herlasgrün; Frank Schwarzer, Leipzig; Ines Hoffmann, Weißwasser; Detlef Ritter, Jena-Lobeda; Bianka Zeh, Heinersgrün; Anke Markgraf; Sybille Kerner, Bad Salzungen; Hartmut Beyer, Sondershausen; Beate Dziabel, Calbe; Detlef Conrad, Braunsbedra; Heike Wöstenberg, Templin; Thomas Markert, Sondershausen; Gerd Eckstein, Mehltheuer; Bernd Mehnert, Dresden; Grit Bauer, Hohenstein-E.; Jens-Uwe Otto, Rohr; Grit Knebel, Dresden; Elke Haase, Kreuzebra



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn %	46	44	46	48	54	67
Mä %	54	56	54	52	46	33

Kollektive Beteiligung

P.-Neruda-OS Ahlbeck; OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP Altenburg; OS II Altentreptow; Walter-Ulbricht-OS Altwigshagen; Karl-Marx-Schule Anklam; OS Asbach; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; R.-Schwarz-OS Bad Liebenstein; O.-Grotewohl-OS III, M.-Poser-OS, OS V, alle Bad Salzungen; Zentrale OS Bärenklau; *alpha*-Zirkel OS Bahratal; H.-Warnke-OS Bergwitz; AG Math. 20. OS, Botschafterschule der ARÄ, beide Berlin; OS Fr. Mehring, V.-Tereschkowa-OS, beide Bernburg; OS Bernterode; OS Birkungen; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; Mat.-Kreiszirkel Kl. 6, Bischofswerda; Max-Planck-EOS, OS W. Pieck, beide Bleicherode; OS Fr. Weineck, Blumberg; OS Bockau; K.-Marx-OS Borna; OS Brandshagen; AG Math. OS Bregenstedt; AG Math. OS Brehme; OS Breitenworbis; OS W. Seelenbinder, Breitungen; P.-Neruda-OS Britz; M.-Poser-OS Bürgel; TOS Büttstedt; OS AG Math. Burkau; W.-Estel-OS Buttlar; H.-Grundig-OS Cossebaude; Klub Jg. Math., Station Jg. Naturf., beide Cottbus; OS Deuna; OS Deutschenbora; N.-Ostrowski-OS Diedorf; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; AG Math. Diesdorf; OS K. Bürger, Dobbertin; K.-Marx-OS Mathe-Club, Döbeln; M.-Curie-OS AG Jg. Math., Dohna; OS K. Niederkirchner Dreilützow; OS 24. u. 112. AG Jg. Math., 73. OS H. Rothbarth, 82 OS. S. Rädel AG Math., P.-Gruner-OS, alle Dresden; OS Dubna (UdSSR); OS Ebersbrunn; Fr.-Wolf-OS Ebersdorf; OS Effelder; OS Ehrenberg; OS Eilsleben; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; OS Empfertshausen; H.-Joachim-OS Espenhain; A.-Wedding-OS Falkenberg; OS Fambach; OS Frauensee; OS *alpha*-Club Friedeburg; OS Fr. Reuter, Friedland; B.-Brecht-OS Floh; OS V. H. Günther, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS Geisa; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Gerstungen; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; 10. OS O. Drews, Karl-Krull-OS, beide Greifswald; OS J. Gagarin, OS H. Beimler, beide Greußen; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbodungen; Haus d. JP AG Math. Großenhain; OS Groß Köris; Lessingschule Großpostwitz; Pestalozzi-OS Großschönau; J.-Gagarin-OS Fachzirkel Math. Grünhain; Friedens-OS Guben; Th.-Müntzer-OS Gumpelstadt; OS Gutenswegen; Diesterwegschule Halle; Kreisst. Jg. Naturf. u. Techniker Hagenow-Land; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; Schule der DSF Heiligengrabe; P.-Schreier-OS Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; EOS E. Weinert Herzberg; Goethe-OS Hohenleipisch; OS Hohenhundeshagen; OS Ivenack; Fr.-Engels-Schule Kaltennordheim; OS A. Becker Kamsdorf; Clara-Zetkin-OS Kandelin; H.-Beimler-OS Karbow; P.-Tschaikowski-OS, E.-Thälmann-OS, OS Borna, Pionierhaus J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; Th.-Neubauer-Schule Kieselbach; Bruno-Tesch-OS Klausdorf; EOS, OS G. Eisler, beide Kleinmachnow; OS Könitz; Station Jg. Naturf. u. Techn. Köthen; OS Küllstedt; AG Jg. Math. Kuhfelde; R.-Breitscheid-OS *alpha*-Club Latdorf; Schulkombinat Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-Salvador-Allende-OS, EOS Karl Marx, alle Leinefelde; Stat. Jg. Naturf. u. Techniker Juri Gagarin, Leisnig; W.-Pieck-OS Lichte; OS Liebstadt; E.-Schneller-OS Löbnitz; OS W. Wallstab, Löderburg; R.-Neddermeyer-OS Löwenberg; OS *alpha*-Club Lössau; Th.-Neubauer-OS Meiningen; OS J. Gagarin Merkers; J.-Gagarin-OS AG Math., Merseburg; OS Zirkel Jg. Math. Mittelherwigsdorf; OS Mittel-Springstille; OS Naundorf; TOS Neuenhofe; OS Neukloster; Dr.-Th.-Neubauer-OS Niederorschel; OS J. Gagarin, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; Pestalozzi-OS Oberlungwitz; OS E. Weinert Oberschönau; OS Oechsen; OS Olbersdorf; Comeniusschule Oranienburg; OS Osternienburg; G.-Dimitroff-OS Parchim; Goethe-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Kreisklub Math., beide Parchim; OS Dr. Th. Neubauer Pfaffschwende; EOS R. Tetscher, Math.-Zirkel Pirna; Makarenko-OS Plessa; OS 16 Potsdam; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; Cl.-Zetkin-OS Raschau; Geschw.-Scholl-Schule Rathenow; OS AG Math. Rehna; Juri-Gagarin-OS Ribnitz; Spezialschule Riesa; Tagesschule, Ziolkowski-OS, beide Roßdorf; Haus d. JP, 34. OS M. Reichpietsch, beide Rostock; *alpha*-Club Rotta; OS S. Kosmodemjanskaja Rotterode; OS Rüdnitz; OS Rüsseina; OS II Saalfeld; alpha-Club Sachsendorf; W.-Pieck-OS Sangerhausen; T.-Bunke-OS Sanitz; H.-Matern-OS Schernberg; M.-Gorki-OS Schkölen; J.-G.-Seume-OS, EOS G. Dimitroff, OS Karl Marx, OS H. Danz, alle Schmalkalden; OS Schmölln; Haus d. JP W. Sonneberg Schönebeck; E.-Schneller-OS Schöneiche; O.-Nagel-OS AG Math. Schönewalde; Schule der DSF Schorssow; Haus d. JP E. Schneller, Schwedt; K.-Liebknecht-OS Schwerin; E.-Thälmann-OS Sebnitz; Fr.-Reuter-OS Siedenbollentin; OS J. R. Becher, Pionierhaus, beide Sondershausen; OS A. Becker, Spremberg; OS Stadtlengsfeld; OS E. Thälmann Steinbach-Hallenberg; Haus d. JP Klub Jg. Math., W.-Heinze-OS, O.-Grotewohl-OS, alle Stralsund; 12. OS Dr. R. Sorge, Kreis-AG 11. OS A. S. Schumawzow, beide Suhl; EOS Karl Marx, H.-Rieke-Schule, beide Tangerhütte; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner Teterow; Fr.-Mehring-OS Tiefenort; OS *alpha*-Club Timmenrode; OS Töplitz; Pestalozzi-Schule Torgelow; E.-Thälmann-OS AG Math. Trebsen; OS W. Pieck Trusetal; H.-Beimler-OS Unterbreizbach; OS J. G. Seume Vacha; OS Viernau; OS Vitte; EOS J. Fucik Waldheim; Goetheschule Waren; OS Weilar; E.-Thälmann-OS, Sprachheil-OS, beide Weimar; OS Weißenborn; OS Wellmitz; Goethe-OS Welzow; OS Wernshausen; J.-Harder-OS Wesenberg; OS Westerengel; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; alpha-Kollektiv der OS Wingerode; OS IV, E.-Thälmann-OS, beide Wittstock; Goethe-OS Wittenberg; OS H. Heine, Wörmlitz; H.-Beimler-Schule, Station Jg. Naturf. u. Techn., beide Wolfen; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS Wusterhusen; OS Zahna; Fr.-Schiller-OS, Lutherschule, Schule d. VEB Kombinat Zentronik, alle Zella-Mehlis; 1. OS, Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, EOS, Pestalozzi-OS, alle Zittau; OS Zschornewitz; OS AG Math. Zschortau



Entwicklung des alpha-Wettbewerbs (absolut)

* umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
** ab Wettbewerbsjahr 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe im Jahr

10 Jahre Jugendobjekt „Klub Junger Mathematiker" Dresden

Da seit nunmehr 10 Jahren Studenten der Sektion Mathematik/Geographie der Pädagogischen Hochschule *Karl Friedrich Wilhelm Wander* Dresden mathematisch interessierte und befähigte Schüler Dresdner Oberschulen in den Arbeitsgemeinschaften des Klubs Junger Mathematiker fördern und durch den Wechsel der Studenten alle zwei Jahre ein einheitliches Arbeitsmaterial entwickelt werden mußte, sind aus den Erfahrungen der Zirkelarbeit in den vergangenen Jahren im Auftrage des Pionierpalastes Dresden im Studentenwettstreit „Hilfen für die Planung der Arbeitsgemeinschaftsstunden der Klassen 5 bis 8" entstanden.
Aus der 343 Seiten umfassenden Broschüre haben wir einen Komplex für unsere *alpha*-Leser ausgewählt. Wir geben vier Aufgabenblätter wieder zum Thema
Aussagen – Aussageformen – Wahrheitswerte.

▲1▲ In der folgenden Tabelle sind Terme, Gleichungen und Ungleichungen gegeben. Berechne die Terme bei beliebiger Wahl des Grundbereichs der Variablen! Belege die Variablen in den Gleichungen und Ungleichungen so, daß wahre Aussagen entstehen!

	Terme, Gleichungen, Ungleichungen
1.	$2(a+3)$
2.	$2a=2b$
3.	$x+y=x-y$
4.	$2x=3x-7$
5.	$a+3a<7(a+b)$
6.	$3a(b+a)+7ab$
7.	$13+71$
8.	$11=13(0+1)$

Wer findet eine richtige Antwort?

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	

▲2▲ Was sind Aussagen und was sind Aussageformen? Bestimme den Wahrheitswert der Aussagen!
Beachte: Aussagen sind sinnvolle sprachliche Gebilde, die entweder wahr oder falsch sind.
Aussageformen sind sprachliche Gebilde, die mindestens eine freie Variable enthalten und zu einer Aussage werden, wenn man die auftretenden Variablen durch Elemente des Grundbereichs ersetzt.

1. Er ist 1,43 m groß.
2. Meißen ist eine Stadt im Bezirk Dresden.
3. Jedes Viereck ist ein Quadrat.
4. Das Dreifache einer Zahl ist gleich dem Fünffachen dieser Zahl.
5. Die Zahl 2 erfüllt die Gleichung $5y=3y$.
6. Die beiden Geraden sind parallel.

	Aussageform (AF) oder Aussage (A)?	Wahrheitswert der Aussage W (wahr) oder F (falsch)
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

▲3▲ Bilde die Negation, und bestimme den Wahrheitswert von Aussage und Negation!

	Aussage
1.	29 ist eine Primzahl.
2.	5 ist größer als 9.
3.	Alle durch 10 teilbaren Zahlen sind gerade.
4.	Es gibt rechtwinklige Dreiecke.
5.	$25+31=65$

	W/F?	Negation	W/F?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

▲4▲ Stelle fest, ob die in der folgenden Tabelle genannten Ausdrücke Aussagen (A) oder Aussageformen (AF) sind! Ermittle weiter von den Aussagen, ob es sich um Einzelaussagen (e), Allaussagen (a) oder um Existenzaussagen (ex) handelt, und bestimme ihren Wahrheitswert (ww)! Gib von den Aussageformen an, ob sie erfüllbar (er) oder nicht erfüllbar (n er) sind!
Hinweis: Orientiere dich an der nach der Tabelle folgenden Übersicht!

	Ausdruck
1.	25 ist eine gerade Zahl.
2.	$a+1=a$
3.	Es gibt Figuren, die sich durch eine Gerade in zwei symmetrische Teilfiguren zerlegen lassen.
4.	Die Ungleichung $4+m<5$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen genau eine Lösung.
5.	Für jede natürliche Zahl a gilt: $a\cdot 0=0$
6.	$xy=yx$
7.	$(t+4)\cdot 2<12$
8.	Zu natürlichen Zahlen a und b gibt es genau eine natürliche Zahl x, die das Produkt der Zahlen a und b ist.
9.	$25-13<12$
10.	Es gibt keine natürliche Zahl x, für die gilt: $x+x=x\cdot x$.
11.	Nicht für alle natürlichen Zahlen a gilt: a hat einen Vorgänger.

	A		AF
	e/a/ex?	ww	er n er
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.			

Arten von Aussagen

1. *Einzelaussage*

z. B. „$3+2=7$“ F

Überprüfung der Richtigkeit dieser Aussage.

2. *Existenzaussage*

Variablenbindung durch
„Es gibt ein ...“, z. B.
„Es gibt Primzahlen, die kleiner als 10 sind.“ W
Beweisnotwendigkeit!
Beweis der Wahrheit dieser Aussage durch Angabe (wenigstens) eines Beispiels.

Eindeutigkeitsaussage

Variablenbindung durch
„Es gibt genau ein ...“, z. B.
„Es gibt genau eine gerade Primzahl.“ W
Beweis der Wahrheit dieser Aussage durch Angabe dieses einen Elements.

3. *Allaussage*

Variablenbindung durch
„Für alle ... gilt: ...“, z. B.
„Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a+b=b+a$.“ W
Beweisnotwendigkeit!
Die Angabe eines oder mehrerer Beispiele genügt für den Beweis der Aussage nicht. Es muß ein direkter Beweis geführt werden.

Aussageformen heißen

erfüllbar,
wenn sie durch mindestens eine Belegung aus dem Variablengrundbereich in eine wahre Aussage übergehen.

nicht erfüllbar,
wenn sie durch keine Belegung aus dem Variablengrundbereich in eine wahre Aussage überführt werden können.

Erfüllbare Aussageformen heißen

allgemeingültig,
wenn sie für *alle* Elemente des Variablengrundbereichs erfüllbar sind.

nicht allgemeingültig,
wenn sie für mindestens ein Element des Variablengrundbereichs erfüllbar sind.

Beispiele: Der Variablengrundbereich sei die Menge der natürlichen Zahlen.

$a\cdot b=b\cdot a$

$2x+3=5$
Für $x=1$ erfüllbar.

$2x+3=0$
Für kein $x\in N$ erfüllbar.

Unterscheide Aussageform und Term!

Werden in einem mathematischen Ausdruck nur Konstante, Variable, Operations- und technische Zeichen verwendet, so nennt man den Ausdruck einen *Term*. Zum Beispiel ist $2(x+5)-x$ ein Term. Werden jedoch auch Relationszeichen (z. B. $=$, $<$, $>$) verwendet, so heißt dieser Ausdruck *Aussageform*. Zum Beispiel ist $2(x+5)-x=9$ eine Aussageform.

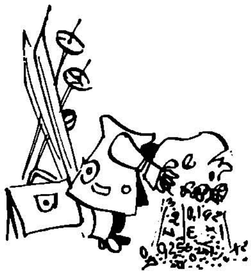
A. Hilbert

(Die Lösungen veröffentlichen wir aus Platzgründen in Heft 1/79, d. Red.)

Entwurf des Abzeichens für die Teilnehmer im Klub.

Klubteilnehmer bei aktiver Arbeit unter Anleitung einer Studentin.

In freien Stunden alpha heiter

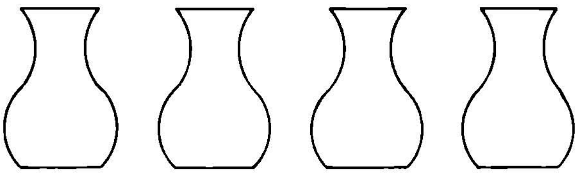


Endlich Ferien!
W. Malachow, Moskau

Seltsame Vasen

Wenn man jede der Vasen durch zwei Schnitte in drei Teile zerlegt, und zwar jede Vase in gleicher Weise, so lassen sich die 12 Teile zu einem Quadrat zusammenlegen. Aber wie?

aus: *„Füles“, Budapest*



Freudiges Wiedersehen

Ein Fahrgast erblickt aus der fahrenden Straßenbahn seinen Freund, der entgegengesetzt zur Fahrtrichtung die Straße entlanggeht. Nach einer Minute steigt er aus und läuft zurück, um den Freund zu treffen. Er läuft doppelt so schnell wie der Freund, aber nur mit dem vierten Teil der Geschwindigkeit der Straßenbahn. Nach insgesamt wieviel Minuten holt er den Freund ein?

P. J. Germanowitsch, Moskau

Verschwundener Wein

Ein Mann hatte 24 Flaschen Wein, die er in der gezeigten Weise im Keller anordnete. Er erinnert sich, daß das Muster symmetrisch war und daß längs jeder Seite des quadratischen Kellers neun Flaschen standen. Seine Frau trank einige dieser Flaschen und ordnete den Rest in einer solchen Weise um, daß der Mann von der Umordnung nichts merkte, da weiterhin alle ursprünglichen Bedingungen erfüllt waren. Wie sah das neue Muster aus? Wieviel Flaschen hat die Frau getrunken?

3	3	3
3		3
3	3	3

aus: Math. Pie, London

Griechischer Denksport

$\square = \triangle + \bigcirc \qquad (\bigcirc \to 60)$

$\bigcirc + \square = \triangle + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle$

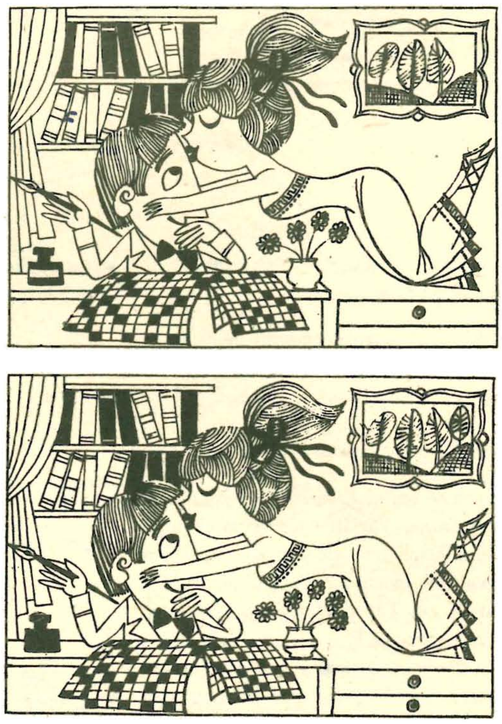
$\boxed{} = \square + \triangle$

aus: Eukleides, Athen

Der Kuß der Muse

Der so geküßte Rätselredakteur wird ein fabelhaftes Rätsel schreiben. Man lasse sich auf gleiche Weise anregen und finde so die 12 Einzelheiten, in denen die beiden Zeichnungen voneinander abweichen.

aus: „Füles“, Budapest



Ein schwieriges Problem

Wie lauten die folgenden fünf Aufgaben, wenn für die jeweils angegebenen Sternchen (*) die Ziffern 0 bis 9 eingesetzt werden. Jede dieser Ziffern darf jedoch in jeder der Aufgaben nur einmal auftreten.

(1) $\ast\ast\ast + \ast\ast\ast = \ast\ast\ast\ast$

(2) $\ast\ast\ast\ast - \ast\ast\ast = \ast\ast\ast$

(3) $\ast\ast\ast\ast \cdot \ast = \ast\ast\ast\ast\ast$

(4) $\ast\ast\ast\ast\ast : \ast\ast\ast\ast = \ast$

(5) $\dfrac{\ast\ast}{\ast \cdot \ast - \ast} = \dfrac{\ast + \ast}{\sqrt[\ast]{\ast^{\ast}}}$

aus: Archimedes, Beograd

Ein Rätselredakteur in Aktion

Man bilde aus den folgenden Silben 12 Wörter, deren erste Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen eines Mathematikers nennen.

aus – bi – bus – e – be – eu – ga – gen – hann – in – jo – ka – kel – kreis – ler – lich – mann – me – na – ne – nom – o – rhom – sen – sum – tan – te – ten – the – tür – wid – win.

1. Mathematiker des 15. Jahrhunderts
2. ihre Summe beträgt bei jedem Dreieck 360°
3. Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks
4. letzter Buchstabe des griechischen Alphabets
5. zweigliedriger Ausdruck der Form $a + b$ oder $a - b$
6. Ergebnis der Addition
7. eine Gerade, die eine Fläche (z. B. Kreis) in einem ihrer Punkte berührt.
8. Mathematiker von 1707 bis 1783
9. Linie, die die Seiten eines Vielecks berührt
10. Bezeichnung für die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4...
11. Grundbegriff der Geometrie
12. Viereckart

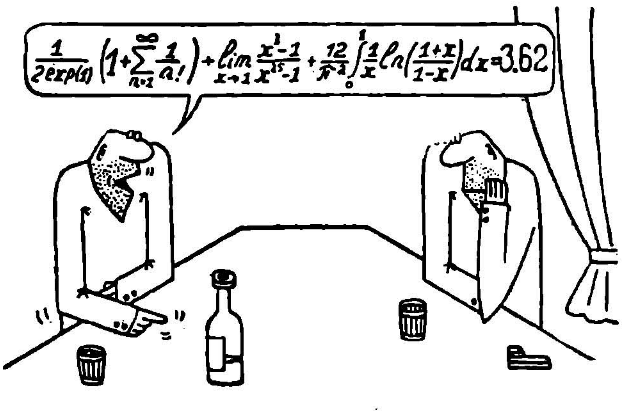
K. Hacker, 31. OS Dresden (Kl. 8)

Abschied von 1978

$$\begin{array}{c} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 8+7+9+1+9+7+8 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ \hline 19+78 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 9-9+9 \\ 7-7+7-7+7 \\ 8-8+8-8+8-8+8 \\ = \\ \hline 1+9+7+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+9+7+8 \\ +1+9+7+8 \\ +1+9+7+8 \\ \hline 19+7\cdot 8 \end{array}$$

aus: PM, Köln



Ein ernst zu nehmender Hinweis!

W. Wassiljew, Moskau

Wie binde ich einen Krawattenknoten?

Es gibt viele Möglichkeiten, Binder, Schal oder Tuch zu knoten. Bei der Wahl des Knotens sollte man aber stets beachten, daß die jeweilige Kragenform auch einen besonderen Knoten erfordert. So passen zum Hemdkragen mit kurzen Ecken am besten breite Krawatten oder Schals in den Längen 100 cm bis 120 cm. Geeignet ist dafür der Windsor-Knoten (1). Der einfache Knoten (2), gebunden aus Viereck- oder Dreiecktüchern, sieht dagegen besonders schick zu Kragen mit langen und spitzen Ecken aus.

Ch. Moschke, Reichenau

„Mutti, hast du ein Lösungsmittel im Haus?“ fragt Peter. „Ja, wozu brauchst du es?“ fragt die Mutter. „Ach, ich habe solche Schwierigkeiten bei meinen Mathe-Aufgaben.“

Marleen Schöne, Dresden

Archimedes, eine Minute!
Was soll diese Schmiererei?

aus: Rir, Frankreich

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (15. 11. 1978)

Olympiadeklasse 5

1. Die Gleise der BAM werden nach ihrer Fertigstellung eine Gesamtlänge von 3200 km haben. Je 1 m Gleis entsprechen 2 m Schiene. Wieviel Tonnen Stahl werden für die Schienen der BAM insgesamt benötigt, wenn man für je 1 m Schiene 65 kg Stahl braucht?

Lösung: Wegen $3200 \cdot 2 = 6400$ werden insgesamt 6400 km Schienen benötigt. Wegen $6400\,\text{km} = 6400000\,\text{m}$ und $6400000 \cdot 65 = 416000000$ werden insgesamt $416000000\,\text{kg} = 416000\,\text{t}$ Stahl für diese Schienen benötigt.

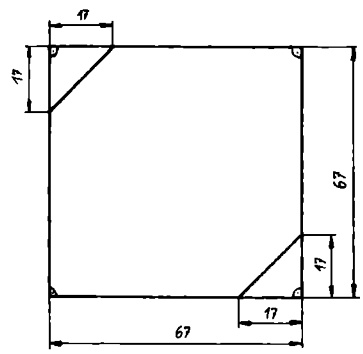
2. Marie-Luise möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:
(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vergrößert man die Einerziffer der Zahl z um 4, so erhält man die Zehnerziffer von z.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches kleiner als 100 ist.
Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Lösung: Wenn eine Zahl z die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt: Die Einerziffer ist nach (1) nicht 0 und nach (2) so beschaffen, daß aus ihr nach Vergrößerung um 4 ein Ergebnis kleiner oder gleich 9 entsteht.
Daher ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und für z verbleiben höchstens die Möglichkeiten 51, 62, 73, 84, 95. Durch Vertauschen der Ziffern entsteht jeweils 15, 26, 37, 48, 59, und das Dreifache dieser Zahlen ist jeweils 45, 78, 111, 144, 177. Daher können wegen (3) nur die Zahlen 51 und 62 alle Bedingungen erfüllen. Die für diese Zahlen durchgeführten Rechnungen zeigen, daß diese Zahlen die Bedingungen (1), (2) und (3) auch tatsächlich erfüllen.

3. Vier Kooperative Abteilungen Pflanzenproduktion (KAP), die mit A, B, C und D bezeichnet sein sollen, besitzen zusammen 92 Traktoren. Wenn B zur besseren Nutzung drei ihrer Traktoren an A und vier ihrer Traktoren an D weitergibt, dann verfügen alle vier KAP über die gleiche Anzahl von Traktoren.
Wie viele Traktoren besaß ursprünglich jede der vier KAP?

Lösung: Wegen $92 : 4 = 23$ verfügt nach dem Ausleihen jede der vier KAP über 23 Traktoren. Da C weder einen Traktor erhielt, noch einen Traktor abgab, besaß sie auch ursprünglich genau 23 Traktoren. A besaß 3 Traktoren weniger als 23, also 20 Traktoren. D besaß 4 Traktoren weniger als 23, also 19 Traktoren. B besaß 7 Traktoren mehr als 23, also 30 Traktoren.

4. Die abgebildete schraffierte Fläche entsteht, indem von einer quadratischen Fläche zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten werden.



Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche (in cm^2) zu berechnen.

Lösung: Wegen $67^2 = 4489$ beträgt der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrats $4489\,\text{mm}^2$. Die beiden Dreiecke lassen sich zu einem Viereck ergänzen, das vier gleichlange Seiten und zwei rechte Winkel enthält, also ein Quadrat ist. Wegen $17^2 = 289$ beträgt der Flächeninhalt dieses Quadrats $289\,\text{mm}^2$. Wegen $4489 - 289 = 4200$ und $4200\,\text{mm}^2 = 42\,\text{cm}^2$ hat die schraffierte Fläche den Flächeninhalt $42\,\text{cm}^2$.

Olympiadeklasse 6

1. a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.
Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!
b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.
Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Lösung: a) Wegen $115 \cdot 165 = 18975$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Gebietes $18975\,\text{km}^2$.
b) Wegen $700000 \cdot 65 = 45500000$ ist die Strecke in Wirklichkeit $45500000\,\text{cm} = 455\,\text{km}$ lang.

2. Ermittle alle zweistelligen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:
(1) Die Einerziffer von z ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von z.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

Lösung: Wenn z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist, so hat z nach (2) nicht 0 als Einerziffer, also ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, ..., 9. Da nach (1) die Zehnerziffer um 1 größer ist, entfällt 9 als Einerziffer, und es verbleiben wegen (1) für die zweistelligen Zahlen z nur die Möglichkeiten 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.
Von ihnen entfallen 21, 43, 65 und 87, da aus ihnen bei Ziffernvertauschung je eine gerade zweistellige Zahl, also keine Primzahl entsteht. Ferner entfällt die Zahl 54, aus der die durch 5 teilbare zweistellige Zahl 45 entsteht. Daher können nur die Zahlen 32, 76 und 98 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich sind sie zweistellig und erfüllen (1), und sie erfüllen auch (2), da 23, 67 und 89 zweistellige Primzahlen sind. Die gesuchten Zahlen lauten folglich 32, 76 und 98.

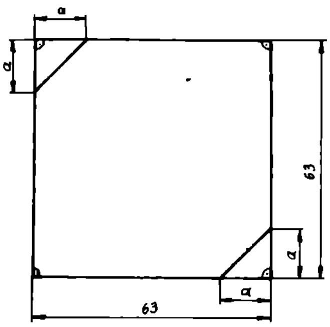
3. In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.
Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt 10,50 M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M gespart. Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M mehr bezahlen müssen.
Wieviel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

Lösung: Wegen $1050 - 75 = 975$ und $975 : 3 = 325$ kostet die billigste Ausführung des Artikels 3,25 M.
Wegen $1050 + 75 = 1125$ und $1125 : 3 = 375$ kostet die teuerste Ausführung des Artikels 3,75 M.
Wegen $1050 - 325 - 375 = 350$ kostet die dritte Sorte 3,50 M.

4. Die abgebildete schraffierte Fläche ist $38\,\text{cm}^2$ groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleich

große) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.



Lösung: Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt $3969\ \text{mm}^2$. Wegen $38\ \text{cm}^2 = 3800\ \text{mm}^2$ und $3969 - 3800 = 169$ haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt $169\ \text{mm}^2$. Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von $169\ \text{mm}^2$ und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm. Die Seitenlänge a der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

Olympiadeklasse 7

1. An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.

(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.

(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Lösung: Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute S = d, daß Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; S ≠ b bedeute, daß Schulze nicht im Fach Biologie unterrichtet; usw.

Aus (1) und (2) folgt S ≠ b und S ≠ p; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog S ≠ r und S ≠ m. Wegen (1) muß daher S = d und S = g gelten. Ebenfalls wegen (1) gilt K ≠ d und K ≠ g, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen K ≠ b und K ≠ r folgen, gilt wegen (1) mithin K = m und K = p. Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich U = r und U = b.

Damit ist gezeigt, daß auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist: Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte, Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie, Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

(Folgende Tabelle veranschaulicht den Lösungsweg. Dabei bedeute „(2)-nein" im Feld S/b, daß Schulze wegen (2) nicht in Biologie unterrichtet; usw.)

	d	r	g	m	p	b
S	ja	(3a)-nein	ja	(3a)-nein	(2)-nein	(2)-nein
U	(1)-nein	ja	(1)-nein	(1)-nein	(1)-nein	ja
K	(1)-nein	(3b)-nein	(1)-nein	ja	ja	(3b)-nein

2. Von einem Bruch wird gefordert, daß er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat.

Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.

(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Lösung: Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$.

Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$. Daraus folgt $p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in N$, $n \neq 0$), also $p + q = 7n$, was mit $7 \mid p + q$ gleichbedeutend ist. Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p + q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten.

Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein.

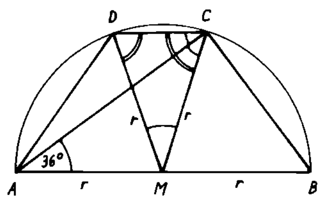
Tatsächlich erfüllt $\frac{14}{35}$ beide Bedingungen; denn es gilt $\frac{14}{35} = 0{,}4$ und $14 + 35 = 49 = 7^2$.

Also hat genau der Bruch $\frac{14}{35}$ die geforderten Eigenschaften.

3. In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, daß die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist.

Außerdem sei $\sphericalangle MAC = 36°$.

Beweise, daß dann $\sphericalangle CMD = 36°$ ist!



Lösung: Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $\overline{AM} = \overline{MC} = r$, also gilt $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = 36°$. (1)

Da $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt

$\sphericalangle DCA = \sphericalangle MAC = 36°$. (2)

Aus (1) und (2) folgt

$\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACM = \sphericalangle DCM = 72°$. (3)

Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $\overline{MD} = \overline{MC} = r$; hiernach und wegen (3) gilt

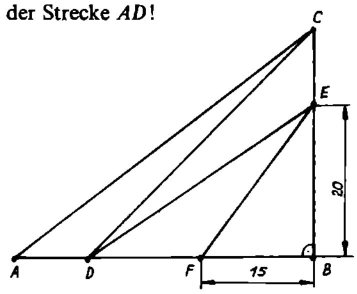
$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DCM = 72°$.

Daraus folgt $\sphericalangle CMD = 36°$, w. z. b. w.

4. Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt: $\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB; E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC; F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB. Die Dreiecke ADC, DEC, DFE und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich.

Ferner gilt $\overline{FB} = 15$ cm und $\overline{BE} = 20$ cm.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!



Lösung: Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung $2 \cdot A_1$, so daß für $\overline{BD}$ folgt:

$\frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{BE} = 300\ \text{cm}^2$, d. h. $\overline{BD} = 30$ cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung $3 \cdot A_1$, so daß für $\overline{BC}$ folgt

$\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{BD} = 450\ \text{cm}^2$, d. h. $\overline{BC} = 30$ cm.

Analog folgt für $\overline{AB}$:

$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 600\ \text{cm}^2$, $\overline{AB} = 40$ cm

und somit $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = 40\ \text{cm} - 30\ \text{cm} = 10$ cm.

Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ beträgt 10 cm.

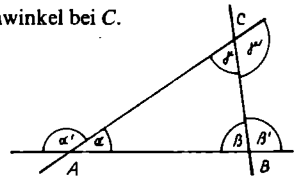
Olympiadeklasse 8

1. Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.
(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.
(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.
(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.
(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname. Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!
(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?
(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Lösung: Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.
Wenn die Angaben (1) bis (5) zutreffen, so folgt:
aus (1): $a<e<b$, aus (2): $a<d<b$,
aus (3): $E<D<A$, aus (4): $D<B<b$.
Aus (1) und (2) folgt, daß Alfred der jüngste, Benno der älteste ist.
Aus (3) und (4) folgt, daß Erbe der jüngste, Dürer der zweitjüngste ist.
Der jüngste Schüler heißt folglich Alfred Erbe. Da ferner Benno der älteste Schüler ist und er nicht Erbe oder Dürer und wegen (4) nicht Baumbach heißen kann, muß er Ampler heißen.
Aus (5) folgt nunmehr: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Somit heißt der vierte Schüler Egon Baumbach. Daher können nur die Namen Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach und Benno Ampler, in dieser Reihenfolge aufgezählt, die Fragen (a), (b) in Übereinstimmung mit den Angaben (1) bis (5) beantworten.
Umgekehrt zeigt sich: Wenn diese Aufzählung die Namen und die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter angibt, so treffen die Angaben (1) bis (5) zu. Also sind mit dieser Aufzählung die eindeutigen Antworten auf die Fragen (a), (b) ermittelt.

2. Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:
Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 16° größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 49° kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

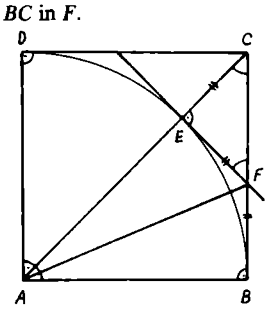


Lösung: Werden die Größen der Innen- bzw. Außenwinkel des Dreiecks ABC bei A mit α bzw. α', bei B mit β bzw. β' und bei C mit γ bzw. γ' bezeichnet, so sind die zwischen ihnen einerseits allgemein gültigen und andererseits vorausgesetzten Beziehungen beschrieben durch
$\alpha'=180°-\alpha=\gamma'+16°=180°-\gamma+16°$ und
$\beta'=180°-\beta=\gamma'-49°=180°-\gamma-49°$,
woraus folgt:
$\alpha=\gamma-16°$ und
$\beta=\gamma+49°$, und mit Hilfe des Satzes über die (Innen)Winkelsumme im Dreieck:
$\alpha+\beta+\gamma=180°=3\gamma+33°$.
Daraus erhält man
$\gamma=49°, \alpha=49°-16°=33°$
und $\beta=49°+49°=98°$.
Tatsächlich existiert wegen $49°+33°+98°=180°$ ein solches Dreieck ABC, und es besitzt außerdem Außenwinkel folgender Größen:
bei C mit $\gamma'=180°-49°=131°$,
bei A mit $\alpha'=180°-33°=147°=131°+16°=\gamma'+16°$ und
bei B mit $\beta'=180°-98°=82°=131°-49°=\gamma'-49°$.

3. Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:
Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Lösung: Angenommen, es gibt eine derartige Zahl. Dann hat sie die Form $10x+y$, wobei x und y natürliche Zahlen mit $x, y \leqq 9$ sind. Für diese gilt:
$$10x+y+2=3(10y+x),$$
$$\text{somit } y=\frac{7x+2}{29}.$$
Da y eine natürliche Zahl ist, ist $7x+2$ ein Vielfaches von 29. Wegen $0 \leqq x \leqq 9$ ist $2 \leqq 7x+2 \leqq 65$; deshalb kommen nur die Fälle $7x+2=29$ und $7x+2=58$ in Frage.
$7x+2=29$ ist nicht in natürlichen Zahlen lösbar.
Aus $7x+2=58$ folgt $x=8$; für y erhält man dann 2. Also kann höchstens die Zahl 82 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn es gilt $82+2=84=3\cdot 28$.

4. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.



Beweise, daß die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!

Lösung: (1) Der Winkel $\sphericalangle BCA$ ist 45° groß; denn die Diagonale halbiert den rechten Winkel bei C.
(2) Der Winkel $\sphericalangle CEF$ ist 90° groß, denn Berührungsradius und Tangente stehen senkrecht aufeinander.
(3) Aus den Aussagen (1) und (2) ergibt sich: Der Winkel $\sphericalangle EFC$ ist 45° groß, und aus den Aussagen (1) und (3) folgt $\overline{EF}=\overline{EC}$. Ferner gilt $\triangle AFE \cong \triangle AFB$ (Übereinstimmung in AF, in $\overline{AE}=\overline{AB}$ und in $\sphericalangle AEF=\sphericalangle ABF$, wobei diese Winkel 90° betragen, also jeweils der längsten Dreieckseite gegenüberliegen). Daher ist $\overline{FB}=\overline{FE}=\overline{BC}$, w. z. b. w.

Olympiadeklasse 9

1. Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend numeriert sind.
Der jüngste Sohn meint: „Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muß eine durch 4 teilbare Quersumme haben." Der ältere Sohn behauptet dagegen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Wer von beiden hat recht?

Lösung: Es kommt z. B. unter den sechsstelligen Zahlen
1 0 0 0 0 8,
1 0 0 0 0 9,
1 0 0 0 1 0 und
1 0 0 0 1 1
keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

2. In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u. a. folgende Aussagen gemacht:
(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.
Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

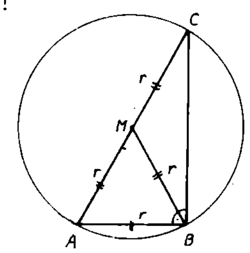
Lösung: Zu (1): Die Zahlen $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$ ist dagegen rational. Aussage (1) ist also falsch.
Zu (2): $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind verschieden irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren

Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0, d \neq 0$ und

$$r=\frac{a}{b}, r+x=\frac{c}{d}.$$

Daraus ergäbe sich $x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$, also der Widerspruch, daß x rational wäre. Damit ist bewiesen, daß Aussage (3) wahr ist. (Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von $x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ als Satz zitiert werden, daß die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist.)

3. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\sphericalangle BAC = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben. Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!



Lösung: Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt B auf dem Halbkreis über AC. Sei M der Mittelpunkt von AC, dann ist der Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=r$ der Umkreis des Dreiecks ABC. Damit gilt $\overline{AC}=2r$.

Das gleichschenklige Dreieck ABM hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe 60°, ist also gleichseitig.

Daraus folgt $\overline{AB}=r$. Nach dem Satz des Pythagoras erhält man $\overline{CB}=r\sqrt{3}$.

Damit gilt für den Umfang $u=3r+r\sqrt{3}=r(3+\sqrt{3})$ und für den Flächeninhalt

$$I=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}r^2\cdot\sqrt{3}.$$

Da der Flächeninhalt auch nach der Formel $I=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot h=r\cdot h$, mit h als Länge der Höhe auf der Hypotenuse AC berechnet werden kann, folgt

$$h=\frac{I}{r}=\frac{1}{2}r\sqrt{3}.$$

4. Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:

(1) z ist eine Primzahl.

(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.

(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.

(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

Lösung: Angenommen, eine dreistellige Zahl z hat die Eigenschaften (1) bis (4).

Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7. Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten. Also endet z auf eine Ziffer 3 oder 7.

Da die Quersumme z' eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann z' nur eine der Zahlen 11; 13; oder 17; 19 sein. Von ihnen hat nur $z'=11$ eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.

Also gilt $z'=11$.

Sei nun die letzte Ziffer von z die Zahl 7. Dann muß die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+4$; $1+3$; $2+2$; $3+1$ und $4+0$) erfüllt nur $2+2$ die Bedingung (2). Damit erhält man $z=227$.

Sei nun 3 die letzte Ziffer von z. Dann muß die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von z dargestellten Zahlen 8 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+8$; $1+7$; $2+6$; $3+5$; $4+4$; $5+3$; $6+2$; $7+1$; $8+0$) erfüllen nur $3+5$ und $5+3$ die Bedingung (2). Das führt auf die Zahlen $z=353$ und $z=533$. Wegen $533=13\cdot 14$ erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).

Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

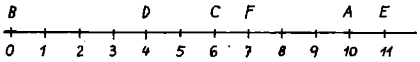
Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen. (Beweis: 227 ist durch keine Primzahl $p<17$ teilbar, und es gilt $17^2>227$, 353 ist durch keine Primzahl $p<19$ teilbar, und es gilt $19^2>353$.)

Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

Olympiadeklasse 10

1. Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, daß $\overline{AB}=10$ cm; $\overline{BC}=6$ cm; $\overline{BE}=11$ cm; $\overline{CD}=2$ cm; $\overline{FD}=3$ cm; $\overline{AF}=3$ cm und $\overline{DE}=7$ cm gilt

Untersuchen Sie, ob das möglich ist und in welcher Reihenfolge die Punkte bei jeder derartigen Möglichkeit angeordnet sind! (Dabei ist von den zwei zueinander entgegengesetzten Anordnungsmöglichkeiten einer gesuchten Reihenfolge nur eine anzugeben.)



Lösung: Angenommen, eine Anordnung von Punkten $A, \ldots, F$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, werde als Zahlengerade mit der Einheit 1 cm aufgefaßt.

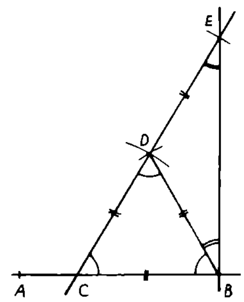
Wegen $\overline{BE}=11$ cm kann dabei erreicht werden, daß die Punkte B bzw. E den Zahlen 0 bzw. 11 entsprechen. Dann entspricht C wegen $\overline{BC}=6$ cm der Zahl 6 oder der Zahl -6, weiterhin D wegen $\overline{DE}=7$ cm der Zahl 4 oder der Zahl 18. Hiernach kann aber $\overline{CD}=2$ cm nur erfüllt werden, wenn C der Zahl 6 und D der Zahl 4 entspricht. Nun folgt weiter: Wegen $\overline{AB}=10$ cm entspricht A der Zahl 10 oder der Zahl -10; wegen $\overline{FD}=3$ cm entspricht F der Zahl 1 oder der Zahl 7. $\overline{AF}=3$ cm kann aber danach nur erfüllt werden, wenn A der Zahl 10 und F der Zahl 7 entspricht. Also können nur bei der Anordnung im Bild die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.

In der Tat erfüllt diese Anordnung (als einzige) alle gestellten Bedingungen. Die gesuchte Reihenfolge lautet: B, D, C, F, A, E. (Laut Aufgabentext ist E, A, F, C, D, B als Ergebnis ebenfalls richtig.)

2. Um auf einer gegebenen Strecke AB im Punkt B die Senkrechte zu errichten, führt Roland folgende Konstruktion aus:

Er wählt zwischen A und B einen Punkt C. Sodann zeichnet er um B und C Kreise mit dem Radius $\overline{BC}$. Einen der Schnittpunkte dieser Kreise nennt er D.

Schließlich zeichnet er die Gerade durch C und D und trägt darauf von D aus auf der Verlängerung von CD eine Strecke der Länge $\overline{CD}$ ab. Ihren zweiten Endpunkt nennt er E. Nun behauptet er, die Gerade durch B und E sei die gesuchte Senkrechte.



Lösung: Variante I

Wegen $\overline{CD}=\overline{BD}=\overline{BC}$ ist das Dreieck CBD gleichseitig.

Damit gilt $\sphericalangle CBD=\sphericalangle BDC=60°$.

Ferner ist wegen $\overline{DE}$ $(=\overline{CD})$ $=\overline{BD}$ das Dreieck BED gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle DBE=\sphericalangle BED$ (als Basiswinkel).

Nach einem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks folgt ferner

$\sphericalangle BDC=\sphericalangle DBE+\sphericalangle BED$.

Daraus erhält man $\sphericalangle DBE=30°$.

Damit ist $\sphericalangle CBE=\sphericalangle CBD+\sphericalangle DBE=60°+30°=90°$.

Also ist BE Senkrechte zu AB in B.

Variante II

Nach Konstruktion gilt $\overline{DC}=\overline{DE}=\overline{DB}$. Also liegt B auf dem Halbkreis über CE, und $\sphericalangle CBE$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales ein rechter Winkel.

3. Beweisen Sie, daß die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht durch 3 teilbar ist!

Lösung: Variante I
Die erste der beiden Zahlen sei a. Dann ist die andere $a+1$, und für die Summe s ihrer Quadrate gilt

$$s=a^2+(a+1)^2$$
$$=2a^2+2a+1=2a(a+1)+1.$$

Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 oder 2.
Fall 1: a ist durch 3 teilbar. Dann ist auch $2a(a+1)$ durch 3 teilbar, und s läßt bei Division durch 3 den Rest 1.
Fall 2: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Dann ist $a+1$ durch 3 teilbar, damit auch $2a(a+1)$, und somit läßt s bei Division durch 3 den Rest 1.
Fall 3: a läßt bei Division durch 3 den Rest 1. Dann ist es mit einer natürlichen Zahl n in der Form $3n+1$ darstellbar. Man erhält mithin

$$s=2(3n+1)\cdot(3n+2)+1,$$
$$=2(9n^2+9n+2)+1,$$
$$=18n^2+18n+5,$$

und $18n^2+18n$ ist durch 3 teilbar, während 5 und somit auch s bei Division durch 3 den Rest 2 läßt.
Damit ist die Behauptung in jedem der möglichen Fälle bewiesen.

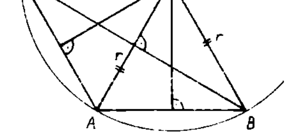
Variante II
Die zu betrachtende Summe ist $s=a^2+(a+1)^2$ mit natürlichem a (s. Variante I, Anfang). Jede natürliche Zahl ist modulo 3 einer der Zahlen 0, 1, 2 kongruent.
Ist $a\equiv 0(3)$, so ist $a+1\equiv 1(3)$,
$(a+1)^2\equiv 1(3)$, also $s\equiv 1(3)$.
Ist $a\equiv 1(3)$, so ist $a+1\equiv 2(3)$,
$(a+1)^2\equiv 1(3)$, also $s\equiv 2(3)$.
Ist $a\equiv 2(3)$, so ist $a+1\equiv 0(3)$,
$(a+1)^2\equiv 0(3)$, also $s\equiv 1(3)$.

Variante III
Die zu betrachtende Summe ist
$s=a^2+(a+1)^2$. Jede natürliche Zahl a läßt sich in der Form $a=3n+r$ mit natürlichen Zahlen n, r schreiben, wobei $0\leqq r\leqq 2$ gilt. Durch Einsetzen erhält man:

$$s=(3n+r)^2+(3n+r)^2+2(3n+r)+1,$$
$$=18n^2+12nr+6n+2r^2+2r+1.$$

Da die ersten drei Summanden durch 3 teilbar sind, ist s nur dann durch 3 teilbar, wenn der Term $2r^2+2r+1$ dies ist. Setzt man 0, 1 bzw. 2 für r in diesen Term ein, so erhält man als Wert des Terms 1, 5 bzw. 13. Da dieser Wert in keinem der Fälle durch 3 teilbar ist, ist es auch s nicht.

4. Von einem Dreieck ABC mit $\sphericalangle CAB=\alpha=120°$ und $\sphericalangle BCA=\gamma=30°$ ist die Länge r des Umkreisradius bekannt.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!



Lösung: Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck gilt $\sphericalangle ABC=\beta=30°$, und damit $\overline{AB}=\overline{AC}$. (1)
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt

$$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=r. \qquad (2)$$

Wegen (1) und (2) geht die Mittelsenkrechte von BC durch A und durch M, und sie ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABC die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$. Also hat in dem gleichschenkligen Dreieck ABM ein Winkel die Größe 60°, folglich ist das Dreieck gleichseitig. Dasselbe gilt für $\triangle ACM$. Somit ist $CABM$ ein Rhombus der Seitenlänge r. Seine Diagonale BC steht auf der Diagonalen AM senkrecht und wird von ihr halbiert, also ist $\overline{BC}$ die doppelte Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge r. Daher hat das Dreieck ABC den Umfang

$$\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{BC}=r+r+2\frac{r}{2}\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})r.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Flächeninhalt des Rhombus $CABM$, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABM; er beträgt somit

$$\frac{r^2}{4}\sqrt{3}.$$

Olympiadeklasse 11/12

1. Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, daß durch

$$a_n=\frac{n+b}{cn+d}\ (n=1, 2, 3, \ldots)$$

eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{3}{8}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$ gilt. Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

2. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch $k=\frac{x}{x^2-5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

3. Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0°<\alpha<180°$ gilt. Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t.
Man beweise, daß es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

4. Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:
(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.
(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.
(3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.
(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.
(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.
(6) Die Anzahl der „Fußballer“ ist größer als die Anzahl der „Schwimmer“, diese wiederum ist größer als die Anzahl der „Turner“ und diese größer als die Anzahl der „Leichtathleten“.
(7) Die Anzahl der „Fußballer“ ist gleich der Summe der Anzahl der „Turner“ und der „Leichtathleten“.
In (6) und (7) bezeichnet „Fußballer“, „Schwimmer“ usw. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.
Gib die Anzahl der „Fußballer“, der „Schwimmer“, der „Turner“ und der „Leichtathleten“ in meiner Klasse an!
Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, daß diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei.
Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

Auf die Lösungen zu den Aufgaben 1 bis 4 der Olympiadeklasse 11/12 müssen wir aus Platzgründen verzichten.

Lösungen

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Lösungen der Aufgaben der DDR-Olympiade (Fortsetzung)

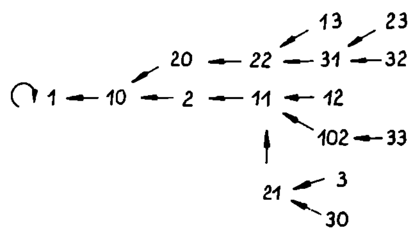
2. Lösung entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission:
Angenommen, eine rationale Zahl x habe die verlangte Eigenschaft. Dann gibt es ganze zueinander teilerfremde Zahlen p, q mit $q>0$ und $x=\frac{p}{q}$ sowie eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{p^2}{q^2}+\frac{p}{q}+6=n^2.$$

Daraus folgt $p^2=q(-p-6q+n^2q)$. Also ist p^2 durch q teilbar. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müßte diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zur

Teilerfremdheit von p und q. Daher ist $q=1$, und es gilt:
$p^2+p+6=n^2$.
$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2=n^2-\frac{23}{4}.$$
$$23=4n^2-(2p+1)^2$$
$$=(2n-2p-1)(2n+2p+1).$$
Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich $4n$, ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23=1\cdot 23=(-1)(-23)$ die zweite aus, und es gilt
entweder
$2n-2p-1=1$, $2n+2p+1=23$
oder
$2n-2p-1=23$, $2n+2p+1=1$.
Im ersten Fall folgt $n-p=1$, $n+p=11$ und daraus $p=5$, im zweiten folgt $n-p=12$, $n+p=0$ und daraus $p=-6$.
Folglich können nur die Zahlen $x=5$ und $x=-6$ die geforderten Eigenschaften haben. Tatsächlich ist sowohl $25+5+6=36$ als auch $36-6+6=36$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

3 A. Es sei z eine im 4-adischen Zahlensystem mindestens dreistellige Zahl. Dann ist
$$z=\sum_{i=0}^{n} a_i 4^i \text{ und } z'=\sum_{i=0}^{n} a_i^2$$
mit $n\geqq 2$, $0\leqq a_i\leqq 3$ für $i=0, 1, \ldots, n$ und $a_n\neq 0$, woraus
$$z-z'=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(4^i-a_i)\right)-a_0(a_0-1)$$
folgt. Da $a_0(a_0-1)\leqq 6$, $a_i(4^i-a_i)\geqq 0$ für $i=1, 2, \ldots, (n-1)$ und $a_n(4^n-a_n)\geqq 4^2-a_n\geqq 16-3=13$ ist, gilt $z-z'>0$.
Somit entsteht bei wiederholter Anwendung des genannten Verfahrens eine Zahlenfolge, deren Glieder, solange sie mindestens dreistellig bleiben, ständig kleiner werden. Somit muß schließlich eine ein- oder zweistellige Zahl auftreten. (Damit ist auch die Teilbehauptung a) bewiesen.)
Nun sind sämtliche ein- bzw. zweistellige Zahlen im 4-adischen System dargestellten Zahlen ($\neq 0$), wobei jeweils die Basis 4 aus Gründen der Vereinfachung fortgelassen sei:
1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33. (1)
Nun gilt, wenn in abgekürzter Schreibweise die Gewinnung von z' aus z jeweils durch $z\to z'$ dargestellt wird:

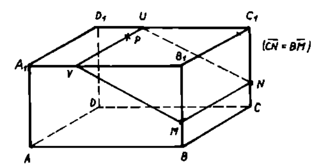


Hier treten alle Zahlen aus (1) auf, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.
Bemerkungen: Diese Wahlaufgabe wurde von 72 der 93 Teilnehmer gewählt (etwa 75%). Im Schwierigkeitsgrad erscheint sie angemessen. Einige Fehlschlüsse traten gehäuft auf. Sie seien hier kurz genannt.
1. Falsche Induktion:
Sei $z_n=[a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0]_4$,
$z_n'=a_0^2+a_1^2+\ldots+a_n^2$ und $z_n>z_n'$.
Dann gilt
$z_{n+1}=[a_{n+1}a_n\ldots a_1 a_0]_4>z_{n+1}'$
$=a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{n+1}^2$.
Dabei wurde nicht beachtet, daß bei z_n $a_n\neq 0$ gelten muß, dies aber nicht bei z_{n+1} gelten muß.
2. Sei z eine Zahl im 4-adischen Zahlensystem mit der Stellenzahl größer als zwei. Dann wurde zunächst richtig $z>z'$ aber dann falsch $z'>z''\ldots$ geschlossen, woraus dann gefolgert wird, daß die 1 notwendigerweise erreicht wird.
3. Es wurde geschlußfolgert, daß nach endlich vielen Schritten eine zweistellige Zahl entsteht und nicht, wie es richtig wäre, eine „höchstens" zweistellige Zahl.

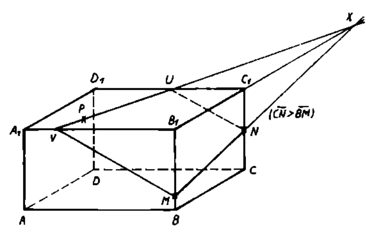
Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	2	3	5	10	6	6	21	12	7

Dr. W. Harnau,
W.-Pieck-Universität Rostock

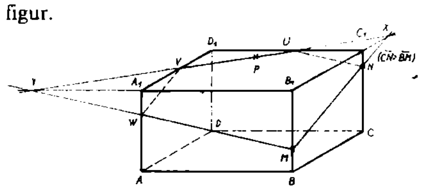
3 B. Lösung entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission:
Für den 1. Fall ist insbesondere folgender grundlegender Satz der räumlichen Geometrie von Bedeutung: (*i*) *Liegen eine Gerade g und ein Punkt P in einer Ebene ε und ist h die Parallele zu g durch P, so liegt auch h in ε.* Aus der Voraussetzung $\overline{CN}=\overline{BM}$ folgt zunächst $MN \parallel B_1C_1$. Die Parallele h zu B_1C_1 durch P liegt nach (*i*) in der Ebene ε A_1, B_1, C_1, D_1) und auch in der Ebene ε M, N, P) wegen $MN\parallel h$; sie ist also die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.
Da bei der Parallelprojektion – die ja der Kavalierperspektive zugrundeliegt – parallele Geraden wieder in solche übergehen, erhält man in der vorliegenden Kavaliersperspektive selbst die Schnittfigur $MNUV$ (siehe Bild 1), indem man die Parallele zu MN durch P mit den Strecken C_1D_1 und A_1B_1 zum Schnitt bringt.



Im 2. Fall ist $MN \nparallel B_1C_1$ wegen $\overline{CN}>\overline{BM}$; da diese Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt X. Die Gerade PX ist nun offensichtlich der Schnitt der Ebene ε (A_1, B_1, C_1, D_1) mit ε (M, N, P). Diese Schnittgerade kann in der Darstellung selbst konstruiert werden (siehe Bild 2); sie schneidet auf Grund der Lage von P die Kanten C_1D_1 und A_1B_1 in Punkten U und V. Damit ist $MNUV$ die gesuchte Schnittfigur.



Im 3. Fall kann zunächst in gleicher Weise verfahren werden. Die Gerade PX schneidet zwar auch hier die Kante C_1D_1 in einem Punkt U, aber nur die Verlängerung der Strecke A_1B_1 über A_1 hinaus in einem Punkt Y (siehe Bild 3); folglich schneidet PX die Kante A_1D_1 in einem Punkt V. Die Gerade YM schneidet schließlich die Kante AA_1 in einem Punkt W. Damit ist jetzt das Fünfeck $MNUVW$ die gesuchte Schnittfigur.



Bemerkungen: Seit mehreren Jahren wurde den Schülern wieder einmal eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie gestellt. Nur etwa 20% der Teilnehmer griffen zu dieser Wahlaufgabe. Die vorgelegten Lösungen zeigen, daß die Schwierigkeiten an mangelhaften Kenntnissen der elementaren Beziehungen (insbesondere der Lage) im Raum liegen. Trotz einer Reihe verschiedener und ideenreicher Ansätze und Lösungswege (auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden kann) konnten deshalb nur relativ wenige der 8 Punkte erzielt werden (siehe Ergebnisspiegel). Es wurde u. a. die Meinung vertreten, daß im Falle 2 und 3 verschiedene Ebenen durch MN zueinander parallele Schnittgeraden auf der Ebene ε (A_1, B_1, C_1, D_1) erzeugen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	3	5	2	1	1	4	1	3	1

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule
„Karl Liebknecht" Potsdam

4. Sei s' die Gerade, die auf s in C senkrecht steht und t' die Gerade, die auf t in C senkrecht steht. s' zerlegt die Ebene ε, die von s und t aufgespannt wird, in die Halbebene $\varepsilon_s(1)$ und $\varepsilon_s(2)$, wobei $\varepsilon_s(1)$ die Halbebene ist, in der sich s befindet. Analog erhalten wir $\varepsilon_t(1)$ und $\varepsilon_t(2)$, wobei in $\varepsilon_t(1)$ t liege.
Behauptung: $L=\varepsilon_s(1)\cap\varepsilon_t(1)$ ist die gesuchte Menge.
Beweis: Ist P Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC mit $A\in s$ und $B\in t$, so ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CA und CB, also zweier Geraden, die sich in L schneiden, da die Mittelsenkrechten in $\varepsilon_s(1)$ bzw. $\varepsilon_t(1)$ liegen.
Liegt P in L, so liegen die Fußpunkte Q bzw. R der Lote von P auf die Geraden, die s und t enthalten, auf s bzw. t selbst und sind von C verschieden. Wir verlängern die Strecken $\overline{CQ}$ und $\overline{CR}$ um ihre eigene Länge über Q bzw. R

hinaus. Wir erhalten die Punkte A und B, die ebenfalls auf s bzw. t liegen und zusammen mit C ein Dreieck bilden. Nach Konstruktion gilt $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$, da $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ auf den Mittelsenkrechten von CA bzw. CB liegen. Damit gehört P der gesuchten Menge an.

Bemerkungen: 1. Viele Schüler betrachteten äquivalente Fragestellungen: a) Gesucht ist die Menge aller Punkte P, von denen man auf s und t das Lot fällen kann.

b) Gesucht ist die Menge aller Kreismittelpunkte P, so daß der Kreis um P durch C geht und s und t noch einmal schneidet.

2. 60 bis 70% der Schüler haben nur die Menge L konstruiert, aber nicht gezeigt, daß alle in L enthaltenen Punkte auch tatsächlich den geforderten Bedingungen genügen. Dies liegt evtl. daran, daß den Schülern die Begriffe notwendig und hinreichend im Zusammenhang mit geometrischen Ortsaufgaben nicht genügend vertraut sind.

3. Sehr viele Schüler hatten Schwierigkeiten bei der Formulierung der Lagebeziehungen. Der logisch klare Aufbau der Lösung war oft nicht gegeben. Es wurden verschwommene geometrische Begriffsbildungen benutzt (z. B. bei den Begriffen Strecke, Gerade, Strahl).

4. Die Begriffe Vereinigung und Durchschnitt wurden von einigen Schülern verwechselt.

5. Die Aufgabe war angemessen. Nur drei Schüler erkannten die Problematik nicht.

Punkte	nicht bearbeitet	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	9	5	20	23	8	11	14

Dr. rer. nat. W. Moldenhauer, W.-Pieck-Universität Rostock

Fortsetzung

(Aufgaben 5 und 6 s. Heft 1/79)

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Heute stellen wir wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen allen Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma6 ■1660 Zu ermitteln sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 10, die folgende Bedingungen erfüllen: Vergrößert man die der vorderen Ziffer entsprechende Zahl um 4 und vermindert man die der hinteren Ziffer entsprechende Zahl um 2, dann erhält man das Dreifache der Ausgangszahl. Wie viele Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt es?

In Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich durch $10a+b$ darstellen; dabei gilt die Einschränkung $1\leq a\leq 5$ und $2\leq b\leq 9$. Alle möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle erfaßt:

a	b	$a+4$	$b-2$
1	9	5	7
2	8	6	6
3	7	7	5
4	6	8	4
5	5	9	3

Nur für $a=1$ und $b=9$ existiert eine Lösung, und es gilt $19\cdot 3=57$.

Wir stellen nun die Lösung von *Martin Bismark* aus Dresden, Schüler einer 6. Klasse der Dr.-Richard-Sorge-OS, vor. Martin löste diese Aufgabe wie folgt:

Die gesuchte zweistellige natürliche Zahl sei $x=10a+b$. Die der vorderen Ziffer entsprechende Zahl wird genau dann um 4 vergrößert, wenn man zu x noch 40 addiert. Die der hinteren Ziffer entsprechende Zahl wird genau dann um 2 vermindert, wenn man von x noch 2 subtrahiert. Daraus folgt

$x+40-2=3\cdot x$,

$x+38=3x$,

$2x=38$,

$x=19$.

Die zu ermittelnde Zahl heißt 19, und es gilt $3\cdot 19=57$.

Wir stellen nun die Lösung von *Birgit Wittwer* aus Dresden, Schülerin der Klasse 6c der 108. Oberschule, vor. Birgit löste diese Aufgabe wie folgt:

Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich durch $10a+b$ darstellen; nun gilt

$3\cdot(10a+b)=10\cdot(a+4)+(b-2)$,

$30a+3b=10a+40+b-2$,

$20a+2b=38$,

$10a+b=19$.

Nur $a=1$ und $b=9$ erfüllen wegen $1\leq a\leq 9$ und $0\leq b\leq 9$ diese Gleichung. Die gesuchte Zahl lautet 19.

Wir stellen nun die Lösung von *Frank Mangold* aus Unterschönau, Schüler der Kl. 6 der POS „Erich Weinert", vor. Frank löste diese Aufgabe wie folgt:

Die gesuchte Zahl läßt sich darstellen durch $z_1=10a+b$. Ferner soll gelten

$z_2=10\cdot(a+4)+(b-2)=10a+b+38$.

Weiterhin gilt

$3\cdot z_1=z_2$, also

$3\cdot(10a+b)=10a+b+38$,

$30a+3b=10a+b+38$,

$20a+2b=38$,

$10a+b=19. \qquad (1)$

Aus der Bedingung $a+b=10$ für die Quersumme folgt

$b=10-a. \qquad (2)$

Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir

$10a+(10-a)=19$,

$9a=9$,

$a=1$.

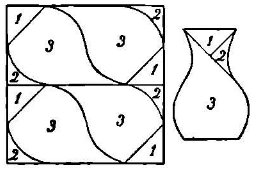
Daraus folgt weiter $b=10-a=10-9=9$.

Die gesuchte Zahl heißt 19.

J. Lehmann/Th. Scholl

Lösungen zu alpha-heiter 6/78:

Seltsame Vasen



Freudiges Wiedersehen

Die Entfernung, die der spazierengehende Freund in einer Minute zurücklegt, sei eine Einheit. Dann entspricht die Entfernung, die der Fahrgast zurücklegt, 2 Einheiten. Die Entfernung, die die Straßenbahn in einer Minute zurücklegt, entspricht 8 Einheiten. Als der Fahrgast aussteigt, besteht eine Entfernung von $8+1$ Einheiten. Die Entfernung verkürzt sich dann je Minute um $2-1=1$ Einheit. Folglich holt er den Freund in 9 Minuten ein.

Verschwundener Wein

Die Frau setzte in jede Ecke vier Flaschen und 1 Flasche in die Mitte jeder Seite. Jetzt waren nur noch 20 Flaschen da. Die Frau hatte also vier Flaschen getrunken.

4	1	4
1		1
4	1	4

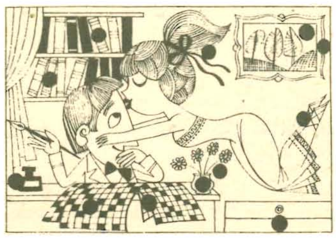
Griechischer Denksport

$90=30+60$;

$60+90=30+30+30+30+30$;

$120=90+30$

Der Kuß der Muse



Ein schwieriges Problem

(1) $849+753=1602$;

(2) $1089-432=657$;

(3) $7039\cdot 4=28156$;

(4) $27504:9168=3$;

(5) $\dfrac{50}{4\cdot 7-8}=\dfrac{9+1}{\sqrt[3]{2^6}}$

Ein Rätselredakteur in Aktion

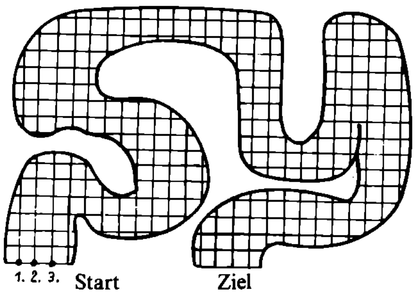
1. Johann Widmann, 2. Außenwinkel, 3. Katheten, 4. Omega, 5. Binom, 6. Summe, 7. Tangente, 8. Euler, 9. Inkreis, 10. natürlich, 11. Ebene, 12. Rhombus.

Der Name des Mathematikers ist Jakob Steiner.

Das „mathematische Autorennen“

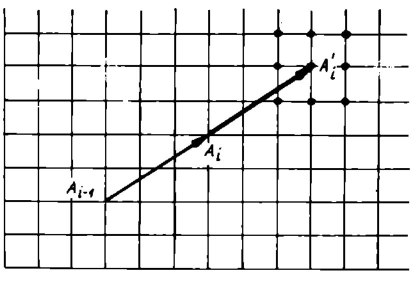
Ich möchte den Lesern der *alpha* ein unter ungarischen Schülern sehr beliebtes Spiel für 2 bis 3 Personen vorstellen:
Das *mathematische Autorennen.* (Ein ähnliches Spiel war Gegenstand der Aufgabe 1 für die 9. Klasse in der ersten Stufe der XVI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR.)
Vor Beginn des Spiels legen die Spieler die *Rennbahn* auf quadratisch kariertem Papier fest (Bild 1). Die Schwierigkeit dieser Bahn kann der Erfahrung der Spieler angepaßt werden. Durch Auslosen werden die Startplätze bestimmt. Das Rennen erfolgt in einzelnen *Zügen* von *Gitterpunkt* zu *Gitterpunkt.* Sieger ist, wer die Ziellinie unter Beachtung der Spielregeln als erster erreicht.

Bild 1



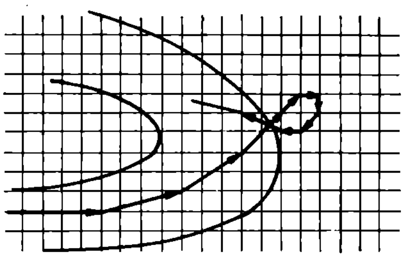
Spielregeln:
(1) Die Spieler *fahren* abwechselnd.
(2) Der erste *Zug* führt vom Startpunkt A_0 zu einem unmittelbar benachbarten Gitterpunkt.
(3) Wenn bereits ein Zug $A_{i-1} \to A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ausgeführt wurde, so wählt man den nächsten Zug $A_i \to A_{i+1}$ nach folgender Vorschrift aus: (Bild 2)

Bild 2



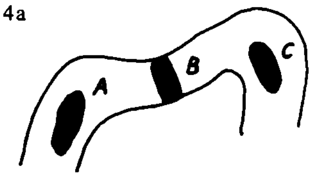
a) Man verlängert die Strecke $\overline{A_{i-1}A_i}$ über A_i hinaus um sich selbst und erhält einen Punkt A'_i.
b) Man wählt entweder A'_i oder einen der acht Gitterpunkte, die A'_i unmittelbar benachbart sind, als Punkt A_{i+1}.
(4) Hat ein Spieler unter Beachtung der Regel (3) angehalten ($A_{i+1} = A_i$), so fährt er wieder wie beim Start neu an (Regel (2)).
(5) Zwei Spieler dürfen nie gleichzeitig auf demselben Punkt stehen. Es ist aber gestattet, auf der Spur eines Mitspielers zu fahren.
(6) Wenn ein Spieler aus einer Kurve *herausgetragen* wurde, so muß er *umlenken* und in unmittelbarer Nähe der Stelle, an der er die *Leitplanke* durchfahren hat, auf die Rennbahn zurückkehren (siehe Bild 3).

Bild 3



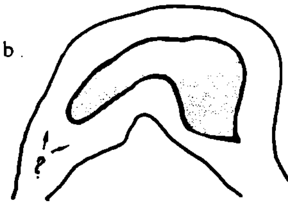
Nach einigen *Probefahrten* wird man merken, daß es gar nicht so leicht ist, immer *die Kurve zu kriegen* und auf der Bahn zu bleiben. Wie im Straßenverkehr ist es also notwendig, vorausschauend zu fahren.
Man kann das Spiel durch Eintragen von *Ölflecken* auf der Fahrbahn (siehe Bild 4a) erschweren. Die dort befindlichen Gitterpunkte dürfen nicht Endpunkt eines Zuges sein.

Bild 4a



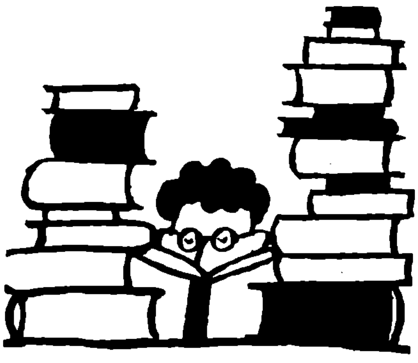
Um die Schwierigkeit des Spiels weiter zu erhöhen, kann man auch Verzweigungen der Rennbahn vorsehen (siehe Bild 4b).

Bild 4b



Es ist wichtig, die Rennbahn erst unmittelbar vor Spielbeginn festzulegen, da ja sonst die Spieler ihre Route vorplanen könnten.
Es gilt auch als unfair, einen Mitspieler aus seiner Spur herauszudrängen. Ich wünsche viel Vergnügen bei diesem Spiel!

László Schmidt, Budapest



Nikiforowski, Wiktor A., und Leon Freiman

Wegbereiter der neuen Mathematik

Übersetzung aus dem Russischen
Bestell-Nr. 546 411 6
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
Etwa 230 Seiten mit 37 Bildern,
12,5 cm × 20 cm, Broschur
etwa 5,50 M

In diesem populärwissenschaftlichen Buch wird ein bedeutender Abschnitt aus der Geschichte der Mathematik beschrieben: die erste Hälfte des 17. Jahrhunderts, in der die Grundlage zur analytischen Geometrie und zur Infinitesimalrechnung gelegt wurden. Vier große Männer stehen im Mittelpunkt des Geschehens: *Descartes, Fermat, Torricelli, de Roberval.* Ihre wissenschaftlichen Ergebnisse werden im Zusammenhang mit den gesellschaftlichen Verhältnissen jener Zeit allgemeinverständlich dargestellt. *Leserkreis:* alle an populärwissenschaftlichen Darstellungen Interessierten, Oberschüler, Studenten an Fachschulen, Lehrer, Mathematiker.

M. Rehm

Strecke, Kreis, Zylinder

Mein kleines Lexikon
Kinderbuchverlag Berlin
80 Seiten, zahlreiche vierfarb. Illustr.
Preis 5,80 M
Bestell-Nr. 629 770 0

Das Buch bietet die Möglichkeit, sich über elementare geometrische Begriffe zu informieren, bereits erworbenes Wissen wieder aufzufrischen, zu vertiefen und zu erweitern und sich auch mit geometrischen Zusammenhängen vertraut zu machen.
Viele Stichwörter des Buches greifen Schönheit und Spaß mathematischer Sachverhalte auf, immer wird der Leser zur Selbständigkeit angeregt, zum Basteln und zum Knobeln.

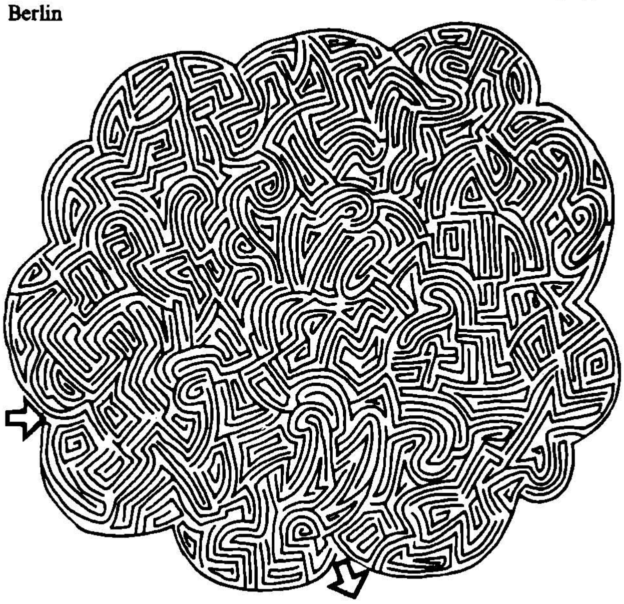
G. Fanghänel/H. Vockenberg

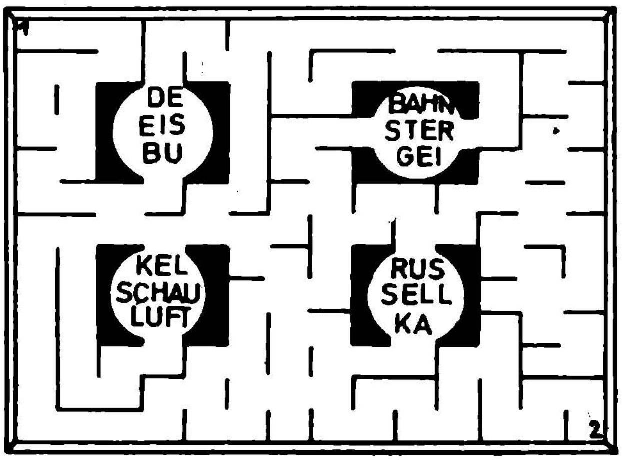
Arbeiten mit Mengen

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
152 Seiten, zahlr. Abb. Preis 3,50 M
Geeignet für Arbeitsgemeinschaften
der Klassen 9 und 10
Bestell-Nr. 707 053 2

Labyrinthe

Gesucht und gefunden in Tschajan, Moskau; „Füles“, Budapest; Math. i. School, London; „Jesch“, Beograd; „NBI“, „Eulenspiegel“ Berlin





In der Stadt ist ein kleiner Jahrmarkt aufgebaut worden. Roland will den Platz von Anfang bis Ende (von 1 nach 2) durchlaufen und dabei alle Stände und Kinderbelustigungen besuchen, ohne einen Weg zweimal zu gehen oder einen zu kreuzen. Wenn ihr die Silben in den Kreisen ordnet, wißt ihr, was es auf dem Markt zu sehen gibt.