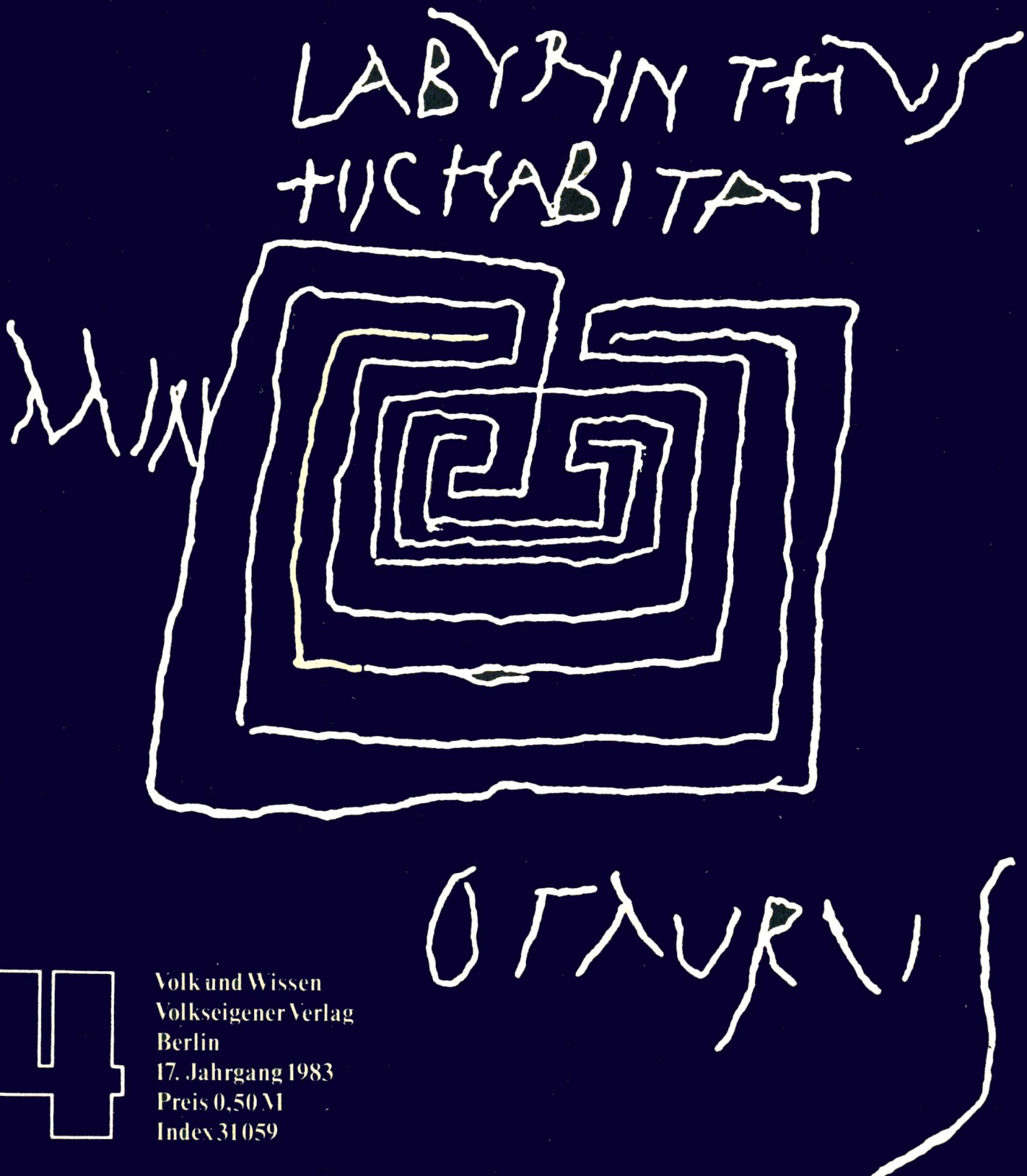
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Altes ägyptisches Amulett, Universität London (S. 73); J. Lehmann, Leipzig; Archiv Universität Oslo (S. 76/77); Vignette aus Tagungsbericht der Mathematikertagung (III. U.-Seite); Foto Spelda, Tabarz (III. U.-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: W. Fahr nach einer Vorlage: Sgraffito in Pompeji (Museo Borbonico)

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
Redaktionsschluß: 23. April 1983
Erscheinungstermin: 20. August 1983

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

73 Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität [9]*
Dr. H. Hemmerling, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald

76 Mathematik und mathematischer Unterricht in Norwegen [8]
Dipl.-Math. Gunnar Gjone, Sektion Mathematik der Universität Oslo/ Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald

78 Der Eulersche Polyedersatz [9]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

79 Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. B. Dykin und Prof. Dr. A. Uspenski
Sektion Mathematik der *Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität*

80 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Kl. 5/6
Genauigkeit gefragt [5]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle/Wittenberg

81 15 Knacknüsse aus: B. Schlotterbeck: *Knacknüsse für Freunde des Rechnens*, Wismar 1880
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin

82 Mathematik und Schiffbau, Teil 2 [11]
Prof. Dr. H.-W. Stolle, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität Rostock*

84 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Köpfchen, Köpfchen – Spiele und Knobeleien [5]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald

85 Ein Blick in das „geistige Labor" von Leibniz
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle Berlin

85 Unsere Sprachecke
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann (alle Leipzig)

86 In freien Stunden · alpha-heiter
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

88 Für den Briefmarkenfreund: Ludwig Boltzmann [8]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

88 Schach und Mathematik [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin

89 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]

92 Lösungen [5]

96 Teubner-Verlag, Leipzig: Mathematikertagung in Reinhardsbrunn [8] J. Weiß, Lektor für Mathematik im Teubner-Verlag

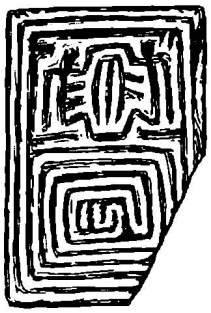
III. U.-Seite: Literatur für *Junge Mathematiker* [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

IV. U.-Seite: Knifflige Aufgaben – Rund um den Kreis [7]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Labyrinth-Probleme – eine alte Thematik mit großer Aktualität

Teil 1



1. Einleitung (Mythologie, Historie, Problemstellungen)

Die Vorstellung eines Labyrinths findet sich schon sehr früh in der Gedankenwelt der Menschheit. Man verstand hierunter wohl meist einen unterirdischen Komplex von Gewölben und Gängen, so verwirrend miteinander verbunden und sich vielfach verzweigend, daß ein Unkundiger, der dieses Reich betrat oder dorthinein verbannt wurde, sehr bald jede Orientierungsmöglichkeit verlor und nie wieder herausfinden konnte. Daher dienten Labyrinthe oft auch als Sinnbilder für Schwieriges oder schwer Überschaubares.

Der griechischen Mythologie zufolge befand sich das erste Labyrinth auf der Insel Kreta und war von dem berühmten Baumeister und Erfinder Daedalus, dem Vater des Ikarus, geschaffen worden (Bild 1). Der römische Dichter Ovid beschreibt das in seinen „Metamorphosen" (8. Buch) sehr anschaulich:

„Daedalus, rühmlich bekannt durch Geschick in den bildenden Künsten, / Schaffet das Werk. Merkmale verwirrt er und führt in die Irre / Täuschend den Blick durch die Zahl vielfältig gewundener Wege. / So wie der lautere Strom des Maeandrus in phrygischen Auen / Treibt sein Spiel ... so machte der Gänge / Wirrwarr Daedalus auch voll Trug, und er fand zu der Schwelle / Selbst kaum wieder den Weg: so ist das Gebäude verfänglich."

Dieses Labyrinth beherbergte den Minotaurus, ein blutrünstiges Ungeheuer, halb Stier, halb Mensch, dem jährlich je sieben der schönsten Knaben und Mädchen Athens geopfert werden mußten. Dem Königssohn Theseus gelang es endlich, den Minotaurus zu töten. Mit Hilfe eines Fadenknäuels, das ihm seine Geliebte Ariadne mitgegeben und dessen Faden er beim Durchwandern des Labyrinths abgewickelt hatte (Ariadnefaden), erreichte Theseus auch wieder den Ausgang. Ovid umschreibt das so:

„Als dann die schwierige Tür, die vormals keiner gewonnen, War auf der Jungfrau Rat mit gewickeltem Faden gefunden, ..."

Als historisch belegte Form von Labyrinthen kann man die Katakomben auffassen, die als Versammlungsort oder auch Kultstätte geheimer Verbindungen dienten. Im Mittelalter, aber auch davor und später, bediente man sich gern geheimer Gänge und versteckter Türen, und manche Burgverliese oder auch Kasematten können mit gutem Recht als Labyrinthe bezeichnet werden.

Auf wesentlich harmlosere Weise setzte die Gartenkunst des 17. und 18. Jahrhunderts (Barock) unsere Thematik um (Bild 2).

Die vielfach zu findende deutsche Übersetzung des Wortes „Labyrinth", nämlich „Irrgarten", deutet auf die Sitte dieser Zeit hin, in Gärten und Parks labyrinthartige Gänge anzulegen. In die Irre zu gehen mag hier ein willkommenes Amüsement wohlhabender Müßiggänger gewesen sein.

Offenbar haben die Labyrinthe bis heute nichts von ihrem Reiz eingebüßt. So findet man Labyrinth-Aufgaben häufig in Knobelecken von Zeitschriften oder in Büchern über Unterhaltungsmathematik, es gibt Geduldspielchen in Form von Labyrinthen, und sogar Labyrinth-Witze oder Karikaturen mit Labyrinthen sind nicht selten.

Die erste mathematische Veröffentlichung über Labyrinthprobleme stammt aus dem Jahre 1873 von Christian Wiener (1826 bis 1896, Professor für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe). Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat man sich dann vor allem in Frankreich unserer Thematik angenommen (Trémaux, Tarry). Bei allen diesen Überlegungen ging es um das Absuchproblem für endliche Graphen, worauf wir noch genauer eingehen werden.

Diese klassischen Lösungsvarianten sind von dem amerikanischen Ingenieur und Mathematiker C. E. Shannon (geb. 1916), einem der „Väter" der Kybernetik, in seinem berühmten kybernetischen Spiel „Maus im Labyrinth" (um 1951) programmiert worden. Das Labyrinth war hier im wesentlichen ein ebenes Muster; auch dieser Begriff wird noch genauer erläutert werden. Shannon hat damit die Anregung zu den modernen Untersuchungen zur Labyrinthproblematik gegeben, die zur mathematischen Kybernetik gehören und in den letzten zwölf Jahren beträchtlich an Breite und Intensität gewonnen haben.

Diese neueren Untersuchungen haben recht praktische Motivationen und besitzen wichtige Anwendungen in der mathematischen Kybernetik. So ist das Verhalten von Automaten in Labyrinthen von bedeutender Aussagekraft für das Studium der Wechselbeziehungen zwischen einem Automaten und seiner Umwelt. Außerdem sind die bei den Labyrinthproblemen entwickelten Lösungsmethoden vielfach umsetzbar in Erkennungsalgorithmen für Graphen- bzw. Mustermen-

Bild 1

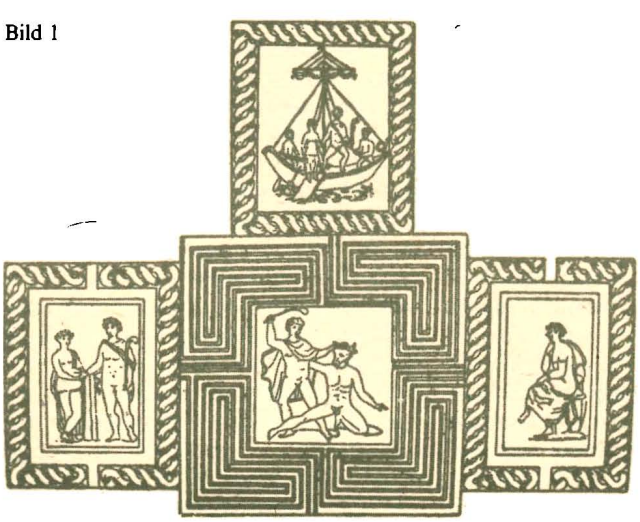
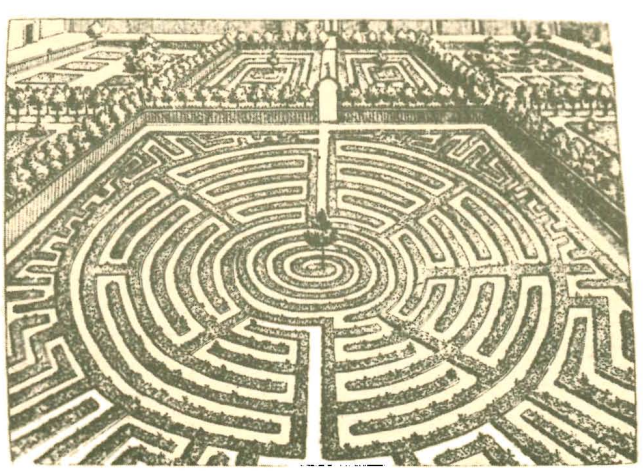


Bild 2



gen und berühren damit die mathematischen Grundlagen der digitalen Bildverarbeitung (hierzu gehört z. B. die automatische Auswertung von Röntgen- oder Mikroskopbildern, Satellitenfotos u. ä.).

Welches sind nun die Aufgaben, die den Mathematiker im Zusammenhang mit Labyrinthen beschäftigen? Zwei grundlegende Probleme sollen hier genauer betrachtet werden.

Das erste besteht darin, ausgehend von einem beliebigen Punkt innerhalb eines Labyrinths einen Ausgang aufzusuchen. Diese Aufgabe stellt sich jedem, der (unfreiwillig) in ein Labyrinth geführt und dort sich selbst überlassen wurde. Dabei möge keinerlei Information über den Aufbau des Labyrinths bekannt sein. Der sich darin befindende Mensch sieht jeweils nur ein kleines Stück des Ganges oder des Gewölbes, in dem er sich befindet, sowie die Anfänge der in der Nähe seines Standortes einmündenden Gänge. Da keine andere Information über das Labyrinth vorliegt, muß das Verfahren, nach dem ein Ausgang gesucht wird, so beschaffen sein, daß es für jedes denkbare Labyrinth zum Erfolg führt. Zusammenfassend können wir also formulieren:

Fluchtproblem:

Man gebe ein Verfahren (Programm, Algorithmus) an, nach dem in jedem Labyrinth bei beliebigem Startpunkt schließlich ein Ausgang erreicht wird.

Die Theseus-Legende ist wohl so zu interpretieren, daß der Held dieses Problem umgangen hat, indem er beim Hineingehen in das Labyrinth den Ariadnefaden abwickelte, dessen Anfang am Eingang liegenblieb. Durch Aufwickeln des Fadens konnte Theseus nun jederzeit wieder zum Eingang zurückfinden.

Dabei wird jedoch ein anderes, nämlich unser zweites, Problem übersehen: Wie gelingt es Theseus, den Aufenthaltsort des Minotaurus ausfindig zu machen, und zwar ohne allzu oft in die Irre zu gehen (etwa „im Kreis" zu laufen), so daß seine Kräfte auch noch zum Besiegen des Ungeheuers ausreichen? Es stellt sich also die Aufgabe des Absuchens eines Labyrinths, die wiederum nur durch ein für alle Labyrinthe erfolgreiches Verfahren gelöst werden kann, sofern keine Information über das speziell vorliegende Labyrinth verfügbar ist.

Absuchproblem:

Man gebe ein Verfahren (Programm, Algorithmus) an, nach dem in jedem Labyrinth bei beliebigem Startpunkt jeder Punkt irgendwann einmal betreten wird (d. h., jedes Labyrinth abgesucht wird).

Man überlegt sich recht schnell, daß zwischen den beiden formulierten Problemen enge Zusammenhänge bestehen. So liefert jede Lösung des Absuchproblems eine Lösung des Fluchtproblems: Ein Verfahren, nach dem das gesamte Labyrinth abgesucht wird, führt irgendwann auch einmal zu einem Ausgang. Andererseits scheint aber das systematische Absuchen des Labyrinths auch notwendig für eine stets erfolgreiche Flucht zu sein: Jeder Gang könnte ja zu dem eventuell einzigen Ausgang führen.

Im weiteren werden wir uns eingehender mit dem Absuchproblem beschäftigen, dessen mathematische Präzisierung etwas leichter erklärbar ist als die des Fluchtproblems.

2. Das Absuchen endlicher Graphen nach Trémaux und Tarry

Für mathematische Untersuchungen ist es natürlich notwendig, auch den Labyrinth-Begriff zu präzisieren. Dafür gibt es zwei grundlegende Möglichkeiten, nämlich den Begriff des (endlichen) Graphen und den des Musters. Der erste soll in diesem Abschnitt bei der Behandlung klassischer Absuchverfahren zugrunde gelegt werden.

Mit Mustern werden wir uns im Abschnitt 3 im Zusammenhang mit moderneren Untersuchungen beschäftigen.

Unter einem endlichen Graphen wollen wir uns hier ein geometrisches Gebilde vorstellen, bestehend aus endlich vielen Knoten(punkten), die durch endlich viele sich nicht schneidende Kurvenstücke, Kanten genannt, miteinander verbunden sein können (siehe Bilder 3 u. 4). Jede Kante beginne und ende mit einem Knotenpunkt, möge sonst aber keinen Knoten enthalten. Die Knoten entsprechen den Plätzen oder Verzweigungspunkten des Labyrinths, die Kanten seinen Gängen.

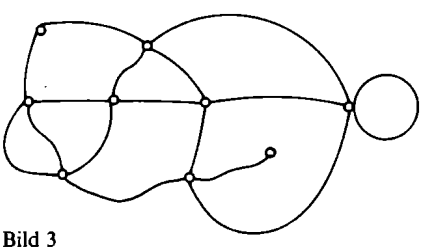


Bild 3

Ein Graph heißt zusammenhängend, falls von jedem Knotenpunkt aus jeder andere dadurch erreichbar ist, daß eine (endliche) Folge von Kanten durchlaufen wird. Das ist eine notwendige Voraussetzung für die Absuchbarkeit des entsprechenden Labyrinths. Beispielsweise kann man in dem Graphen aus Bild 2, der nicht zusammenhängend ist, von dem Knotenpunkt A aus nie den Knoten B erreichen.

Der Graph aus Bild 3 ist zusammenhängend. Er ist außerdem ein ebener Graph. Das bedeutet, daß alle seine Knotenpunkte und Kanten in einer Ebene angeordnet sind; er stellt also ein zweidimensionales Labyrinth dar. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht notwendig für das Funktionieren der beiden folgenden Absuchverfahren.

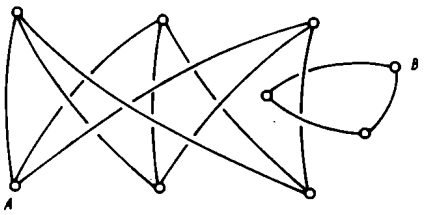


Bild 4

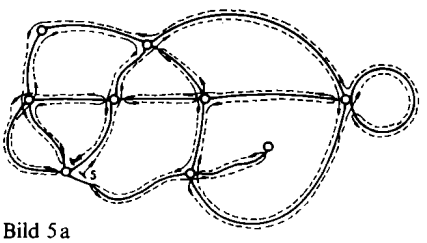


Bild 5a

Schauen wir uns zuerst das Tarrysche Absuchverfahren an, das sich recht leicht beschreiben läßt. Bei diesem Verfahren muß in jedem schon betretenen Knotenpunkt des Graphen die Eintrittskante markiert werden. Das ist diejenige Kante, über die der betreffende Knoten erstmals erreicht wurde. Außerdem muß für jede Kante, die in den gerade erreichten Standort einmündet, erkennbar sein, in welcher Richtung sie schon durchlaufen wurde. Es empfiehlt sich also, beim Durchlaufen einer Kante, ihre beiden Enden mit entsprechenden Markierungen zu versehen.

Der vorgegebene Graph muß nun von Knotenpunkt zu Knotenpunkt nach dem folgenden Programm durchlaufen werden.

Verfahren von Tarry:

1. Verlasse einen Knoten immer über eine Kante, die in dieser Richtung noch nicht durchlaufen wurde, wähle die Eintrittskante aber erst dann, wenn es keine andere Möglichkeit mehr gibt!
2. Gibt es keine einmündende Kante, die in der vom Standort fortführenden Richtung noch nicht durchlaufen wurde, so stoppe (Ende des Absuchens)!

Ein nach diesem Programm in einem Graph zurückgelegter Weg heißt Tarry-Weg. In einem zusammenhängenden endlichen Graphen endet jeder Tarry-Weg nach endlich vielen Schritten durch Eintreten der Stop-Bedingung 2., und zwar auf seinem Startpunkt. Er hat dann jede Kante des Graphen genau zweimal durchlaufen, und zwar einmal in jeder Richtung.

Die Bilder 5 und 6 zeigen einige Beispiele für Tarry-Wege (der Startpunkt ist immer mit S bezeichnet). In Bild 5 haben wir lediglich die Wege gekennzeichnet, in Bild 6 sind auch die Eintrittskanten (durch dicke Pfeile) markiert. Der Leser mache sich mit dem Verfahren vertraut, indem er die angegebenen Wege nachvollziehe (Markierungen der Eintrittskanten und Durchlaufrichtungen selbst setzen!).

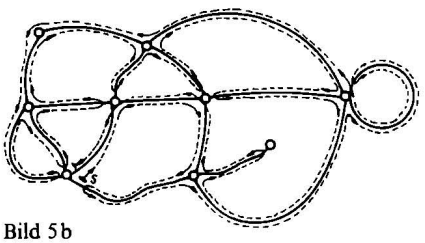


Bild 5b

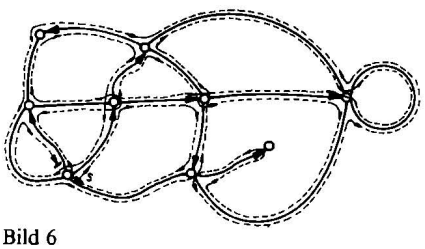


Bild 6

Man erprobe das Programm dann einmal bei Start in einem anderen Knotenpunkt des vorgegebenen Graphen. Schließlich kann man sich selbständig beliebig komplizierte Labyrinthe als Graphen aufzeichnen und sie nach dem beschriebenen Verfahren absuchen.

Übrigens kann man bei dem Tarryschen Verfahren jederzeit von dem jeweiligen Standort auf direktem Wege (d. h. ohne Schleifen) zum Startpunkt zurückfinden. Dazu hat man nur die Markierungen der Eintrittskanten als Wegweiser (in entgegengesetzter Richtung) zu benutzen.

Wie zeigt man nun, daß das Verfahren von Tarry tatsächlich das Absuchproblem für zusammenhängende endliche Graphen löst? Wir wollen den Beweis der behaupteten Eigenschaften von Tarry-Wegen kurz skizzieren.

Zunächst ist nach dem Programm klar, daß ein Tarry-Weg jede Kante des vorgegebenen Graphen in jeder Richtung höchstens einmal, insgesamt also höchstens zweimal durchläuft. Nun überlegen wir uns, daß die Bedingung 2. nur im Startpunkt erfüllt sein kann. Wird ein vom Startpunkt verschiedener Knoten des Graphen erreicht, so ist er zu diesem Zeitpunkt einmal öfter über eine einmündende Kante betreten worden, als er über eine Kante verlassen wurde (denn vorher wurde er immer durchquert, d. h. betreten und wieder verlassen). Da jede Kante nur einmal in jeder Richtung durchlaufen werden darf, muß es eine in diesen Knoten mündende Kante geben, durch die er bisher noch nicht verlassen wurde. Somit kann die Bedingung 2. nicht erfüllt sein.

Aus dem bisher Gezeigten folgt, daß in einem endlichen Graphen stets nach endlich vielen Schritten die Stop-Bedingung 2. erreicht wird, und zwar auf dem Startpunkt. Es bleibt zu zeigen, daß dann jede Kante auch genau zweimal durchlaufen wurde, wenn der Graph zusammenhängend ist.

Sicher wurden alle in den Startpunkt mündenden Kanten zweimal durchlaufen. Wenn dort nämlich die Stop-Bedingung erfüllt ist, sind alle diese Kanten in der vom Startpunkt fortführenden Richtung schon durchlaufen, müssen es dann aber auch in der Gegenrichtung sein.

Gäbe es nun andere, nicht zweimal durchlaufene Kanten, so müßte es eine Kante geben, die selbst zweimal durchlaufen wurde, aber in einen Knoten mündet, in den auch eine nicht zweimal durchlaufene Kante einmündet. (Der Leser beweise diese Behauptung selbständig, dabei ist der Zusammenhang des Graphen auszunutzen. Wir liefern diesen Beweisschritt im Anschluß an den Lösungsteil zu den gestellten Aufgaben – Teil 2 dieses Beitrags.) Man betrachtet nun die in dem gegebenen Tarry-Weg zuerst erreichte Kante dieser Art. Sie ist Eintrittskante für einen Knoten, in den auch eine Kante mündet, die nicht zweimal durchlaufen wurde. Alle in diesen Knoten mündenden Kanten müssen aber in der von ihm fortführenden Richtung durchlaufen worden sein, wenn dieser Knoten schließlich über seine Eintrittskante verlassen wird. Hieraus folgt aber wiederum, daß alle einmündenden Kanten auch in der Gegenrichtung, also genau zweimal durchlaufen werden. Dieser Widerspruch vervollständigt unseren Beweis.

Das Verfahren von Trémaux ist etwas spezieller als das Tarrysche und auch umständlicher in der Beschreibung.

Verfahren von Trémaux:

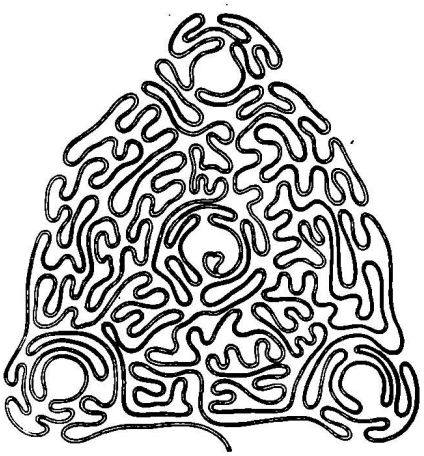
1. Schreite fort, bis ein Knoten erreicht wird, der schon einmal betreten wurde oder nur eine einmündende Kante hat! Kehre dann zum vorgehenden Standort zurück, und handle gemäß 2. weiter!

2. a) Gibt es eine noch nicht durchlaufene Kante, die in den Standort mündet, so durchlaufe eine solche; handele dann weiter gemäß 1!

b) Sind alle einmündenden Kanten schon durchlaufen worden, manche aber erst einmal, so durchlaufe eine solche und handle dann weiter gemäß 2!

c) Sind alle in den Standort mündenden Kanten zweimal durchlaufen worden, so stoppe (Ende des Absuchens)!

Für die Anwendung dieses Verfahrens ist es nötig, daß stets bekannt ist, wie oft eine in den jeweiligen Standort mündende Kante schon durchlaufen wurde, und es muß auch stets die unmittelbar vorher durchlaufene Kante bekannt sein. In einem Labyrinth müßte man sich also an beiden Enden eines Ganges notieren, wie oft er schon durchlaufen wurde. Außerdem hätte man sich beim Überqueren eines Platzes zu merken, durch welchen Gang man ihn erreicht hat. Anstelle von Markierungen könnte man auch einen Faden benutzen, der beim Durchwandern des Labyrinths abgewickelt und liegengelassen wird. Die Anzahl der nebeneinanderliegenden



Fäden in einem Gang gibt an, wie oft er schon durchlaufen wurde.

Die in Bild 5 angegebenen Wege können auch als Trémaux-Wege aufgefaßt werden, der Weg in Bild 6 ist kein Trémaux-Weg. Ganz ähnlich wie beim Tarryschen Verfahren kann man zeigen, daß in jedem zusammenhängenden endlichen Graphen ein Trémaux-Weg stets endlich ist, mit seinem Startpunkt endet und jede Kante genau zweimal durchläuft, und zwar einmal in jeder Richtung. Übrigens ist jeder Trémaux-Weg auch ein Tarry-Weg, nicht aber umgekehrt. Es mag manchen schon gestört haben, daß die Anweisungen in den Verfahren nicht eindeutig sind, da es bei Erreichen eines Knotenpunktes meist mehrere einmündende Kanten gibt, die als nächste durchlaufen werden dürfen. Bei ebenen Graphen kann man die Eindeutigkeit leicht dadurch erzwingen, daß man vorschreibt, jeweils die erste erlaubte Kante zu benutzen, auf die man beim Durchmustern aller in den Standort einmündenden Kanten (entgegen dem Uhrzeigersinn und von der zuletzt durchlaufenen Kante aus) trifft. Dieser Forderung genügen der Weg in Bild 5b bezüglich des Trémauxschen Verfahrens und der in Bild 6 bezüglich des Tarryschen. Ist der Graph nicht eben, so kann man sich auf ähnliche Weise helfen, wenn nur für jeden Knoten eine Reihenfolge (zyklische Ordnung) der einmündenden Kanten vorgegeben ist.

(Dieser Beitrag wird in Heft 5/83 fortgesetzt, d. Red.)

A. Hemmerling

Mathematik und mathematischer Unterricht in Norwegen

Das mathematische Erbe

Im Bewußtsein des norwegischen Volkes hat die Mathematik unter allen Naturwissenschaften durch das Wirken des genialen *Niels Henrik Abel* (1802 bis 1829) eine besondere Vorrangstellung errungen. Dies drückt sich in vielfältiger Weise aus. Zum Beispiel wurden schon in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts, als dies international noch keineswegs üblich war, neben Briefmarken zu Ehren der großen norwegischen Dichter Holberg und Ibsen auch schon solche anläßlich des 100. Todestages von Abel herausgegeben. Abel ist auch auf der gegenwärtig gültigen 500-Kronen-Banknote abgebildet. (Andere Banknoten zeigen den Polarforscher Nansen und wiederum Ibsen.) Ein Denkmal Abels steht an repräsentativer Stelle im königlichen Schloßpark in Oslo. Anekdoten und Begebenheiten aus dem Leben Abels sind auch heute noch im norwegischen Volk bekannt und lebendig.

Es gibt jedoch außer Abel noch weitere bedeutende norwegische Mathematiker, von denen zwei weitere sogar ebenfalls durch Briefmarken geehrt wurden: *Cato M. Guldberg* (1836 bis 1902), der gemeinsam mit dem Chemiker P. Waage (1833 bis 1900) das Massenwirkungsgesetz der Chemie aufstellte und Ole J. Broch (1818 bis 1889), der einen großen Einfluß auf Norwegens Schulmathematik hatte, sich auch in öffentlichen und politischen Ämtern zum Wohle Norwegens betätigte und schließlich erster Direktor des *Internationalen Büros für Maße und Gewichte* in Paris wurde. Ferner muß unbedingt *Sophus Lie* (1842 bis 1899) erwähnt werden, der zeitweise an der Leipziger Universität wirkte. Die von ihm entwickelte *Theorie der stetigen Transformationsgruppen* hatte tiefgreifenden Einfluß auf die moderne Mathematik. Als international bekannte norwegische Mathematiker seien noch L. Sylow (1832 bis 1918), Th. Skolem (1887 bis 1963) und A. Thuc (1863 bis 1922) genannt. Dieses relativ kleine Häuflein namhafter Mathematiker mag zunächst wenig eindrucksvoll erscheinen. Vielleicht sollte man dazu bemerken, was zumindest in Norwegen stets gesagt wird, wenn es darum geht, Norwegen, z. B. auch in bezug auf den Gewinn olympischer Medaillen, mit anderen Ländern zu vergleichen:

Man muß die betreffenden Zahlen ins Verhältnis zur Einwohnerzahl des jeweiligen Landes setzen. Norwegen hat nur etwa 4 Mill. Einwohner. Daran gemessen wird man finden, daß die Dinge bei uns gar nicht so schlecht stehen.

Nils Henrik Abel (1802 bis 1829)

Mathematischer Schulunterricht in Norwegen

Der obligatorische Schulunterricht erstreckt sich in Norwegen über 9 Jahre und wird für alle Schüler in gleicher Weise nach einheitlichen, von der Regierung festgelegten Lehrplänen erteilt. Für die oberen Klassen erfolgte vor einiger Zeit eine Kürzung der theoretischen Fächer, darunter auch der Mathematik, so daß Norwegen jetzt unter den nordischen Ländern den letzten Platz bezüglich der Mathematik-Wochenstunden einnimmt. Im einzelnen haben wir in den Klassenstufen folgende Wochenstundenzahlen

Klassenstufe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wochenstd. Mathematik	3	3	4	4	3	3	4	4	3

Der mathematische Stoff dieser neun Jahre entspricht im wesentlichen dem, was man in den meisten Ländern findet:

Arithmetik, Algebra, Gleichungen, Funktionen, Geometrie, Anwendungen.

In den Klassen 10 bis 12 (Oberstufe, früher als „Gymnasium" bezeichnet) ist die Situation völlig anders, da die Ausbildung hier in differenzierter Weise erfolgt. Es gibt praktisch-berufsvorbereitende und mehr theoretisch orientierte Richtungen. Die Schüler können in jeder Klassenstufe bis zu 5 Wochenstunden Mathematik wählen und außerdem fakultative Kurse über Informationsverarbeitung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik u. ä. belegen. Insgesamt reichen die Möglichkeiten von einjährigen Mathematikkursen für die Berufsausbildung wie z. B. „Mathematik für Bauberufe" bis zu Dreijahrskursen in theoretischer Mathematik, welche die Schüler für ein Universitätsstudium der Mathematik bzw. der Natur- und Technikwissenschaften vorbereiten. Die Teilnahme an einem solchen Kurs ist jedoch keine formal geforderte Voraussetzung für ein solches Studium, sondern eine mehr inhaltliche Vorbereitung auf die genannten Studienrichtungen.

Die Lehrpläne werden vom Staat fixiert, hinsichtlich der Lehrbücher ist die Situation jedoch völlig anders als z. B. in der DDR. Jedermann kann Schulbücher schreiben und veröffentlichen, wenn sie vom zuständigen Ministerium als tauglich genehmigt werden und wenn er einen Verlag dafür findet. Im Ergebnis dieser Verfahrensweise gibt es etwa zehn verschiedene Lehrbücherreihen bzw. -systeme für den Mathematikunterricht der allgemeinen Schule, von denen die meisten sich über alle neun Jahre erstrecken, und etwa sieben Lehrbuchsysteme für die Oberstufe. Die Situation wird dadurch noch komplizierter, daß jedes Lehrbuch gleichzeitig in den beiden offiziellen Landessprachen erscheinen muß. (Die Norweger sind ein in mancher Hinsicht sonderbares Volk. So halten sie z. B. trotz vieler Debatten hierüber zäh am Bestand der beiden historisch entstandenen, ähnlichen, aber doch verschiedenen Varianten ihrer Sprache fest.)

Außerunterrichtliche Beschäftigung mit Mathematik

In Norwegen gibt es keine mathematischen Schülerzirkel und keine mathematische Schülerzeitschrift, nur einige sehr wenige private Klubs, die sich mit Computermathematik beschäftigen. Da die Mathematik auch in der 9jährigen Schule nicht allzu viele Stunden beansprucht, kann man ihr, wenn man will, ganz gut aus dem Wege gehen. Umfragen haben jedoch ergeben, daß die Mathematik ein zwar als schwierig eingestuftes, aber bei den Schülern beliebtes Fach ist. Jährlich veranstaltet die Norwegische Mathematische Gesellschaft einen für alle Schüler offenen Wettbewerb. Die Aufgaben werden in einer weit verbreiteten norwegischen Tageszeitung veröffentlicht, außerdem in einigen Schüler-

zeitschriften. Jeder Einsender von Lösungen muß eine Erklärung unterschreiben, daß er diese ohne fremde Hilfe gefunden hat. Davon abgesehen basiert das ganze System auf Vertrauen. 1979 wurde anläßlich des 150. Todestags Abels ein besonderer, für alle Schüler aus skandinavischen Ländern offener Wettbewerb veranstaltet. Das Anliegen der Wettbewerbe besteht darin, das Interesse an der Mathematik zu fördern. Es nehmen jedoch nur wenige Schüler daran teil, meist solche, die später Mathematik studieren wollen. An unseren Universitäten findet man heute zahlreiche frühere Preisträger dieser Wettbewerbe. An den Internationalen Mathematikolympiaden (IMO) nimmt Norwegen nicht teil.

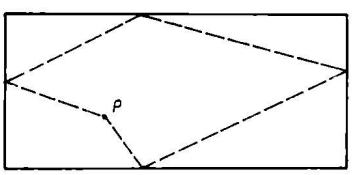
Mathematikstudium

In Norwegen gibt es vier Universitäten (Oslo, Bergen, Trondheim und Tromsø). An allen kann man Mathematik studieren und einen mathematischen Doktorgrad erwerben, außerdem an einigen technischen Hochschulen (z. B. Trondheim). Ein Mathematikstudium mit einem niedrigeren Abschluß ist an den Pädagogischen und Ingenieurhochschulen möglich. An den Universitäten gibt es keine Beschränkung der Studienplätze. Das Studium ist auf eine breite mathematische Allgemeinbildung und die Vertiefung auf einem bestimmten Gebiet gerichtet. Wer nach einem solchen Studium Oberstufenlehrer werden möchte, muß noch eine zusätzliche pädagogische Ausbildung absolvieren. In den letzten Jahren des zweiten Weltkrieges und den ersten Jahren danach gab es in Norwegen ein großes Babyhoch. Diese Welle erreichte in den 60er Jahren die Universitäten und Hochschulen und führte zusammen mit der damals sprunghaft wachsenden Popularität von Mathematik, Naturwissenschaft und Technik (dies war ja die Zeit der ersten Sputniks) zu hohen Studentenzahlen und folglich zu einer starken Vergrößerung der mathematischen Hochschuleinrichtungen. Wenig später füllte diese Welle alle an den Hochschulen in Frage kommenden Arbeitsplätze. Heute besteht ein Problem darin, die ungleichmäßige Altersstruktur der Wissenschaftler abzubauen, junge Leute unterzubringen. Jedenfalls ist die Zahl derjenigen Wissenschaftler, die bis zum Doktorgrad in Mathematik ausgebildet werden, viel größer als das Aufnahmevermögen der Universitäts- und Hochschulforschung. Viele von ihnen suchen sich Arbeitsplätze in der Datenverarbeitungs- und Erdölindustrie, die allerdings auch in zunehmendem Maße Mathematiker beschäftigen. Viele Mathematiker werden Lehrer. Als solcher einen Arbeitsplatz zu finden, ist (außer in den Großstädten) nicht schwer. Während die mathematische Forschung in Norwegen sich in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts stark auf die Zahlentheorie konzentrierte, ist sie gegenwärtig breit gefächert. Dabei wächst jedoch ständig die Bedeutung und der Umfang der angewandten Mathematik, vor allem in Zusammenhang mit der automatischen Informationsverarbeitung und mit der Erdölerkundung und -förderung in der Nordsee.

Aufgaben aus den norwegischen mathematischen Schülerwettbewerben

▲1▲ Zu vier in einer Ebene liegenden Punkten A, B, C, D ist ein Quadrat so zu konstruieren, daß jede Seite des Quadrats einen der vier Punkte enthält.
Man untersuche, unter welchen Bedingungen an A, B, C, D die Aufgabe ein- bzw. mehrdeutig lösbar ist und beschreibe die Konstruktion!

▲2▲ In einem rechteckigen Raum soll eine Person von einem Anfangspunkt P aus auf einem möglichst kurzen Weg der Reihe nach alle vier Wände berühren und dann nach P zurückkehren. Wie ist dieser kürzeste Weg zu konstruieren, und wie lang ist er?

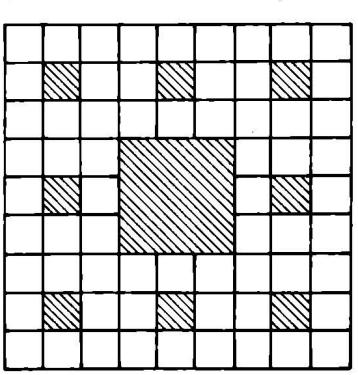


▲3▲ Man zeige: Sind a, b und $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ positive rationale Zahlen, so sind auch $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ rational.

▲4▲ Man beweise für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die Ungleichung

$$x_1+x_1(x_2-x_1)+x_2(x_3-x_2)+\ldots +x_{n-1}(x_n-x_{n-1}) \leqq \frac{x_n^2(n-1)+2x_n+(n-1)}{2n}$$

▲5▲ Die Figur F_1 entsteht, indem man ein Quadrat der Seitenlänge 1 durch Schnitte parallel zu den Kanten in 9 kongruente Teilquadrate zerlegt und das mittlere entfernt. Aus F_1 entsteht die Figur F_2, indem man mit jedem der 8 übriggebliebenen Quadrate so verfährt, wie vorher mit dem Einheitsquadrat.



Entfernt man immer wieder die mittleren Quadrate der zuletzt erhaltenen Teilquadrate, so erhält man eine Folge $F_1, F_2, F_3, \ldots$ von ebenen Punktmengen, so daß $F_{n+1} \subseteq F_n$ für jede natürliche Zahl n gilt. Aus wie vielen Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{3^n}$ setzt sich F_n zusammen? Für $n \to \infty$ bestimme man den Grenzwert der Flächeninhalte der Figuren F_n.

G. Gjone/P. Schreiber

Wappen von Oslo

G. Gjone

Niels-Henrik-Abel-Wettbewerb 1982

Für alle interessierten Leser der mathematischen Schüler- und Studentenzeitschrift *Nordisk Matematisk Tidskrift normat* werden jährlich sechs anspruchsvolle Mathematikaufgaben veröffentlicht. Die Auswertung übernimmt die Sektion Mathematik der Universität Oslo. Die besten Lösungen werden prämiiert.
Aus Anlaß unseres Beitrags veröffentlichen wir zwei Aufgaben aus dem Wettbewerb.

▲1▲ Lösen Sie die Gleichung $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=14$.

▲2▲ Zeigen Sie: $z=n^4+n^2+1$ ist für keine natürliche Zahl n eine Quadratzahl.

Der Eulersche Polyedersatz

In der Stereometrie versteht man unter einem *Körper* eine beschränkte dreidimensionale Punktmenge des dreidimensionalen Raumes, die allseitig von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken begrenzt wird, einschließlich dieser begrenzenden Flächenstücke. Enthält ein solcher Körper mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke, so heißt der Körper *konvex*. Im Mathematikunterricht lernt ihr solche konvexe Körper kennen: Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf und Kugel. In Bild 1 sind ebenfalls Körper dargestellt: K_1 bis K_4 sind konvex, K_5 und K_6 sind nicht konvex (warum?).

Körper, die nur durch ebene Flächenstücke begrenzt werden, nennt man *Polyeder* (auch ebenflächige Körper, Ebenflächner oder Vielflächner). Die das Polyeder begrenzenden ebenen Vielecke heißen *Seitenflächen*, die Strecken, in denen je zwei Seitenflächen zusammenstoßen, Kanten; deren Endpunkte werden *Ecken* des Körpers genannt. Ist ein Polyeder gleichzeitig ein konvexer Körper, nennt man es ein *konvexes Polyeder* oder auch *Eulersches Polyeder*. Würfel, Quader, Prisma, Pyramide und Pyramidenstumpf sind Eulersche Polyeder (warum?); Zylinder, Kegel, Kegelstumpf und Kugel sind zwar konvexe Körper, aber keine Polyeder (es sind krummflächig begrenzte Körper). Alle in Bild 1 dargestellten Körper sind Polyeder, aber nur K_1 bis K_4 sind Eulersche Polyeder, K_5 und K_6 dagegen nicht (warum?).

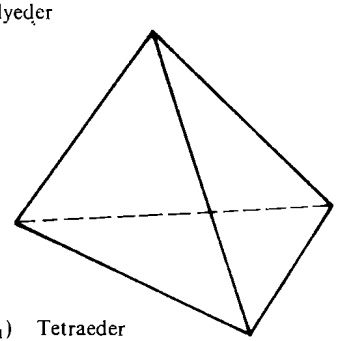
Spezielle Eulersche Polyeder sind solche mit kongruenten regelmäßigen n-Ecksflächen als Seitenflächen, die man *regelmäßige Polyeder* oder auch *Platonische Körper*[1]) nennt. Aus dem Satz, daß in einer n-kantigen körperlichen Ecke die Summe der Größen der Kantenwinkel kleiner als 360° ist, folgt, daß es nur 5 Arten regelmäßiger Körper geben kann: Bei Begrenzung des Polyeders durch gleichseitige Dreiecke können nämlich in einer Körperecke, da ihre Kantenwinkel je 60° betragen, nur 3, 4 oder 5 Seitenflächen zusammenstoßen; für 6 Seitenflächen wäre die Summe der Kantenwinkel bereits $6 \cdot 60° = 360°$. Bei Begrenzung des Polyeders durch Quadrate (Kantenwinkel je 90°) können in einer Körperecke nur 3 Seitenflächen zusammentreffen; dies gilt auch bei Begrenzung durch regelmäßige Fünfecke (Kantenwinkel je 108°). Eine Begrenzung durch regelmäßige Sechsecke (Kantenwinkel je 120°) ist nicht möglich, da bereits $3 \cdot 120° = 360°$ ist. Es ergeben sich die 5 Platonischen Körper: *Tetraeder* (Vierflächner), *Oktaeder* (Achtflächner), *Ikosaeder* (Zwanzigflächner), *Hexaeder* (Sechsflächner oder Würfel) und *Pentagondodekaeder* (Zwölfflächner) (Bild 1).

Für konvexe Polyeder konnte Leonhard Euler die folgende Aussage beweisen, die vermutlich schon Archimedes (um 287 bis 212 v.u.Z.) und mit Sicherheit der französische Mathematiker René Descartes (1596 bis 1650) kannten:

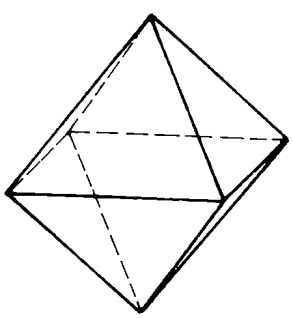
Eulerscher Polyedersatz: Ist e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt: $e+f-k=2$.[2])

Aufgabe 1: Ermittelt die Eckenanzahl e, die Flächenanzahl f und die Kantenanzahl k eines Würfels (Hexaeder), eines Quaders, eines dreiseitigen Prismas, einer quadratischen Pyramide, eines quadratischen Pyramidenstumpfes, sowie der in Bild 1 dargestellten Polyeder und berechnet jeweils $s = e+f-k$! Für welche Körper gilt der Eulersche Polyedersatz?

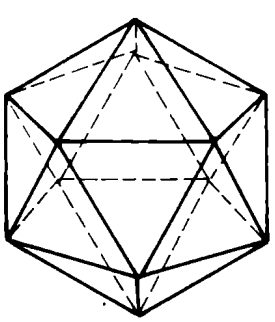
Bild 1
Polyeder



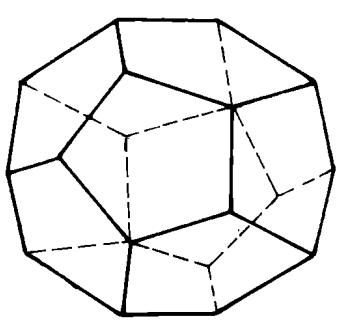
(K_1) Tetraeder



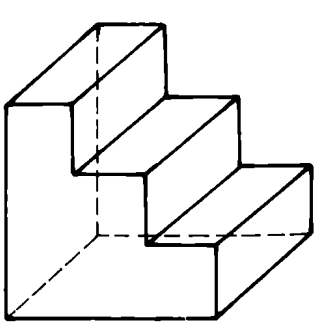
(K_2) Oktaeder



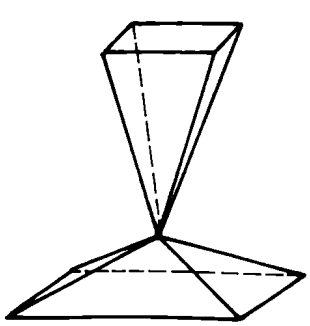
(K_3) Ikosaeder



(K_4) Pentagondodekaeder



(K_5) Treppenkörper



(K_6) 2 quadratische Pyramiden mit gemeinsamer Spitze

Die Eulersche Funktion $\varphi(n)$

Zunächst einige Begriffe: Sei $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für Zahlen $m, n \in N$ bezeichne (m, n) den größten gemeinsamen Teiler von m und n. Gilt $(m, n)=1$, so heißen m und n zueinander *teilerfremd*. Man nennt eine Funktion f, deren Definitionsbereich die Menge N der natürlichen Zahlen ist, eine *zahlentheoretische Funktion*. Eine solche heiße *multiplikativ*, falls für Zahlen $m, n \in N$ mit $(m, n)=1$ stets gilt:
$f(m \cdot n)=f(m) \cdot f(n)$.
Bei der nach Leonhard Euler benannten Funktion $\phi(n)$, die in der Algebra und Zahlentheorie bedeutungsvoll ist, handelt es sich um eine solche zahlentheoretische Funktion: Die *Eulersche Funktion* ϕ ordnet jeder natürlichen Zahl $n \in N$ eine natürliche Zahl $\phi(n)$ zu, wobei $\phi(n)$ die Anzahl aller zu n teilerfremden natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind, ist.[3])

Beispiel 1: Wir berechnen $\phi(8)$: Wegen $(1, 8)=1, (2, 8)=2, (3, 8)=1, (4, 8)=4, (5, 8)=1, (6, 8)=2, (7, 8)=1$ und $(8, 8)=8$ sind genau die 4 natürlichen Zahlen (die kleiner oder gleich 8 sind) 1, 3, 5 und 7 zu $n=8$ teilerfremd, also ist $\phi(8)=4$.
Man kann zeigen, daß $\phi(n)$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion ist, d. h. daß gilt:

$$\phi(m \cdot n)=\phi(m)\,\phi(n), \quad \text{falls } (m, n)=1. \tag{1}$$

Dies ermöglicht eine allgemeine Berechnungsformel für $\phi(n)$, zu der man auf folgende Weise gelangt:

a) Ist $n=p$ eine Primzahl, so sind offenbar alle Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ zu $n=p$ teilerfremd, also ist

$$\phi(p)=p-1. \tag{2}$$

b) Ist $n=p^k$, p Primzahl und $k \in N$, so kann man durch Abzählen finden:

$$\phi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)=p^{k-1}(p-1). \tag{3}$$

c) Sei nun n eine beliebige natürliche Zahl, welche die (bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige) Primfaktorzerlegung $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}$ besitze. Mit Hilfe von (1) erhält man, da $(p_i^{k_i}, p_j^{k_j})=1$ für $i \neq j$ gilt:
$\phi(n)=\phi(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m})$
$=\phi(p_1^{k_1})\,\phi(p_2^{k_2})\cdot\ldots\cdot\phi(p_m^{k_m})$.
Durch Einsetzen der rechten Seite von (3) folgt schließlich:
$\phi(n)=p_1^{k_1-1}\cdot(p_1-1)\cdot p_2^{k_2-1}\cdot(p_2-1)\cdot\ldots$
$\cdot\, p_m^{k_m-1}\cdot(p_m-1)$, (4)
oder auch:

$$\phi(n)=p_1^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_2^{k_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots p_m^{k_m}\left(1-\frac{1}{p_m}\right)=(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m})\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right),$$

so daß gilt:

$$\phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right), \tag{5}$$

wobei $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die verschiedenen Primteiler von n sind.

Beispiel *2:* Wir berechnen $\phi(16200)$: Man erhält die Primfaktorzerlegung $16200=2^3 3^4 5^2$, d. h. 2, 3 und 5 sind die verschiedenen Primteiler von 16200. Nach (4) erhält man:
$\phi(16200)=2^2(2-1)3^3(3-1)5^1(5-1)$
$=4 \cdot 54 \cdot 20=4320$.
Nimmt man die äquivalente Formel (5), so ergibt sich:

$$\phi(16200)=16200\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=4320.$$

Es gibt also 4320 natürliche Zahlen k, $1 \leqq k \leqq 16200$, die zu $n=16200$ teilerfremd sind, d. h. für die $(k, 16200)=1$ gilt.
Abschließend seien die folgenden Beispiele für weitere zahlentheoretische Funktionen genannt:
$d(n)$: die Anzahl aller positiven Teiler von n,
$\sigma(n)$: die Summe aller positiven Teiler von n,
$\pi(n)$: die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich n,
$r(n)$: die Anzahl der ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Gleichung $x^2+y^2=n$.

Aufgabe 2:
Berechnet folgende Funktionswerte:
$\phi(2156)$, $\phi(1800)$, $\phi(841)$, $d(72)$, $\sigma(72)$, $\pi(100)$ und $r(25)$!
Zusatzaufgabe: Ermittelt alle dreistelligen natürlichen Zahlen n, für deren Ziffern a, b und c (a bezeichne die erste, b die zweite und c die dritte Ziffer bezüglich des Dezimalsystems) die Beziehung $a+b-c=2$ gilt!

R. Mildner

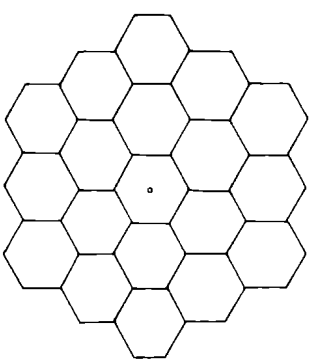
[1]) Benannt nach dem griechischen Philosophen Platon (427 bis 347 v. u. Z.).
[2]) Man beachte, daß dieser Satz keine Aussage über Größen, sondern über Anzahlen ist sowie darüber, welche Stücke in einer gewissen Umgebung eines Randpunktes einander benachbart sind.
Die Aussage $e+f-k=2$ bleibt wahr, wenn man die Oberfläche des Polyeders unter Beibehaltung gewisser topologischer Eigenschaften deformiert; betrachtet unter diesem Aspekt etwa Würfel, Quader und einen quadratischen Pyramidenstumpf.
[3]) Hiermit ist auch $\phi(1)=1$ definiert. Für $n>1$ kann man auch definieren: $\phi(n)$ ist die Anzahl aller zu n teilerfremden natürlichen Zahlen, die kleiner als n sind.
Diejenigen von euch, die bereits mit dem Rechnen mit Kongruenzklassen modulo n vertraut sind, wissen, daß $\phi(n)$ auch gleich der Anzahl der primen Restklassen mod n ist.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. B. Dynkin und Prof. Dr. W. A. Uspenski

Moskauer Staatliche Lomonossow-Universität
Sektion mathematische Schulzirkel

▲2271▲

a) Vom Mittelfeld dieses Wabenmusters aus soll ein Kamel alle Felder betreten, ohne eines zweimal zu berühren.
b) Man numeriere alle Felder des sechsseitigen Brettes in der Reihenfolge, in der sie in Aufgabe a) vom Kamel betreten wurden. Alle Felder, deren Nummern Vielfache von 3 sind, sind schwarz zu färben; alle Felder, deren Nummern durch 3 dividiert den Rest 1 ergeben, sind zu schraffieren. Welche Art der Färbung ergibt das?



Wer mehr über Mehrfarbenprobleme, über Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung wissen möchte, der greife zu dem 1983 erschienenen Buch

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski

Mathematische Unterhaltungen

272 Seiten, 161 Abbildungen, Preis 13,00 M
Bestell-Nr. 570 734 1
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Hinweis zum alpha-Wettbewerb

Aus Platzgründen veröffentlichen wir ab Heft 5/83 Preisträger des alpha-Wettbewerbs, Teilnehmer mit vorbildlichen Leistungen und Preisträger, welche vier Jahre und mehr am alpha-Wettbewerb teilnahmen, d. Red.

Genauigkeit gefragt!

Zur Multiplikation und Division von Näherungswerten

Manfred ist der Fußballstatistiker der 7b. Seit drei Jahren führt er genau Buch über alle Oberligaspiele.

So kann er von jedem Spieltag Auskunft darüber geben, welche Mannschaften gegeneinander gespielt haben, wieviel Zuschauer bei jedem Spiel anwesend waren, welcher Spieler die meisten Tore der Saison geschossen hat und vieles mehr.

Für den 25. Spieltag des Jahres 1982 ist seinen Aufzeichnungen u. a. folgendes zu entnehmen;

22. Mai 1982, 25. Spieltag

	Endstand	Zuschauer
1. FC Lok Leipzig – 1. FC Magdeburg	3 : 2	13000
HFC Chemie – BFC Dynamo	2 : 2	8000
FC Karl-Marx-Stadt – Dynamo Dresden	1 : 1	11000
FC Vorwärts Frankfurt – Wismut Aue	3 : 0	6000
Rot-Weiß Erfurt – Sachsenring Zwickau	5 : 2	8000
Buna-Schkopau – Carl Zeiss Jena	0 : 3	5000
Hansa Rostock – Energie Cottbus	2 : 1	8000

Tore insgesamt:	27
Tore je Spiel:	3,8571428
Zuschauer insgesamt:	59000
Zuschauer je Spiel:	8428,5714

Da Manfred jeweils die Gesamtsummen und die entsprechenden Durchschnittswerte für Tore und Zuschauerzahlen mit einem Taschenrechner ermittelt, ist er sehr stolz auf die Genauigkeit seiner Resultate.

Ist dieser Stolz berechtigt?

Betrachten wir zunächst die Anzahl der geschossenen Tore. Die Torangaben sind im Gegensatz zu den Zuschauerzahlen genaue Werte und nicht durch Runden oder Schätzen entstanden. Somit ist die Angabe, daß am 25. Spieltag 27 Tore geschossen wurden, in Ordnung.

Will man die durchschnittlich pro Spiel geschossenen Tore ermitteln, muß man 27 durch 7 dividieren und erhält mit einem Taschenrechner den Wert 3,8571428.

Da es sich im konkreten Fall um die Anzahl von Toren handelt, wäre es eigentlich vernünftig, den ermittelten Wert auf eine natürliche Zahl, in unserem Falle 4, zu runden.

Um gewisse Tendenzen zum Ausdruck zu bringen, wird in Übersichten oft auf Zehntel, d. h. in unserem Fall auf 3,9, gerundet. Weitere Stellen anzugeben ist allerdings unsinnig.

Wie sieht es mit den Angaben über die Zuschauer aus?

Wir gehen davon aus, daß die jeweiligen Zahlenwerte durch Runden auf Vielfache von Tausend entstanden, also Näherungswerte sind. Damit ergibt sich für die Gesamtzuschauerzahl 59000, so wie es Manfred angegeben hat. Dieser Näherungswert hat zwei zuverlässige Ziffern, nämlich 5 und 9. Das heißt, der wahre Wert liegt zwischen 58500 und 59500 Zuschauern. Aus diesen beiden Werten lassen sich die Wertschranken für die durchschnittliche Zuschauerzahl je Spiel ermitteln, indem man 58500 bzw. 59500 durch 7 (die Anzahl der Spiele ist ein genauer Wert) dividiert.

Mit einem Taschenrechner erhält man:

$58500 : 7 = 8357{,}1428$

$59500 : 7 = 8500.$

Da es wenig sinnvoll ist, von Zehntel Zuschauern zu sprechen, liegt der wahre Wert für die durchschnittliche Zuschauerzahl zwischen 8357 und 8500.

Will man auf die Berechnung von Wertschranken verzichten und ausgehend von dem Wert 8428,5714 ein vernünftiges Ergebnis angeben, muß man den durch Division ermittelten Wert 8428,5714 auf einen Näherungswert mit zwei zuverlässigen Ziffern runden. Man erhält 8400.

Das mit diesem Wert beschriebene Intervall stimmt zwar nicht ganz mit dem durch Wertschranken ermittelten überein, doch kommt es diesem von den in Frage kommenden (8000; 8430; 8429) am nächsten.

Damit wir nicht immer Wertschranken berechnen müssen, wollen wir uns bei der Division und auch bei der Multiplikation von Näherungswerten nach folgender Faustregel richten:

(2) Im Ergebnis einer Multiplikation oder Division von Näherungswerten können nicht mehr Ziffern zuverlässig sein als in dem Eingangswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern, wobei die linken Nullen in einem Dezimalbruch nicht mit gerechnet werden.

Hier nun noch einige Beispiele:

Multipliziere folgende Näherungswerte!

a) $a = 1{,}32$; $b = 2{,}923$

Mit einem Taschenrechner erhält man:

3,85836

$a \cdot b = 3{,}86$, denn das Ergebnis kann wegen $a = 1{,}32$ höchstens drei zuverlässige Ziffern haben.

b) $a = 2{,}92$; $b = 0{,}098$

Mit einem Taschenrechner erhält man:

0,28616

$a \cdot b = 0{,}29$, denn das Ergebnis kann wegen $b = 0{,}098$ (linke Nullen werden nicht gerechnet) höchstens zwei zuverlässige Ziffern haben.

Der Quotient der Näherungswerte $a = 17{,}2$ und $b = 3{,}9$ soll mit sinnvoller Genauigkeit angegeben werden.

Mit einem Taschenrechner erhält man:

4,4102564

$a : b = 4{,}4$, denn der Quotient kann wegen $b = 3{,}9$ höchstens zwei zuverlässige Ziffern haben.

Aufgaben

▲1▲ Gib $\frac{4}{3}$ durch einen Dezimalbruch mit drei zuverlässigen Ziffern an!

▲2▲ Gib $\frac{10}{7}$ durch einen Dezimalbruch mit zwei zuverlässigen Ziffern an!

▲3▲ Runde auf zwei zuverlässige Ziffern!

a) 18,6 b) 1,732 c) 1837

▲4▲ Die Seitenlängen a, b eines Rechtecks werden auf Zentimeter genau gemessen. Man findet die Werte $a = 3$ cm und $b = 9$ cm. Berechne den Flächeninhalt A!

Wie weit muß der rechnerisch gefundene Wert gerundet werden?

L. Flade

15 Knacknüsse

Aus: Knacknüsse für Freunde des Rechnens, Wismar 1880

Klasse 5

▲1▲ Vier Schüler Axel, Bernd, Christian und Dieter haben zusammen 13,80 M in ihren Geldbörsen. Christian hat 60 Pf, Dieter 80 Pf weniger in seiner Geldbörse als jeder der beiden Schüler Axel und Bernd. Welchen Geldbetrag hat jeder dieser vier Schüler in seiner Geldbörse?

▲2▲ Vermehrt ein Schäfer seine Herde um 23 Schafe, dann hat er doppelt so viele Tiere zu betreuen, als wenn er 27 Schafe zum Schlachten abliefert, Wie viele Schafe umfaßt diese Herde?

▲3▲ Der äußere Umfang eines 8 cm breiten rechteckigen Spiegelrahmens beträgt 280 cm. Welche Länge besitzt der innere Umfang dieses Rahmens?

▲4▲ Das Licht bewegt sich mit einer Schnelligkeit von 300000000 m in einer Sekunde. Wie viele Kilometer ist demnach der Polarstern von der Erde entfernt, wenn das Licht desselben 30 Jahre (zu 365 Tagen) gebraucht, um zur Erde zu gelangen?

▲5▲ Im westlichen Mecklenburg beträgt die Höhe der durchschnittlichen jährlichen Regenmenge $52\frac{1}{2}$ cm. Wie viele Hektoliter sind das auf einem Ar?

▲6▲ Von einem Ballen Tuch, der 30 m enthielt, wurden 4 m Tuch mehr verkauft als übrig blieben. Wie viele Meter Tuch verblieben zum weiteren Verkauf?

▲7▲ Vater und Sohn sind zusammen 88 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen, wenn den Unterschied ihres Alters 38 Jahre ausmacht?

▲8▲ Das Alter zweier Kinder, von denen das eine 4 Jahre älter ist als das andere, beträgt zusammen 26 Jahre. Vor wie vielen Jahren war das jüngste Kind halb so alt wie das älteste?

Klasse 6

▲9▲ Zwei Orte A und B liegen 262,5 km voneinander entfernt. Von A geht jemand, der täglich 20 km zurücklegt, nach B. Drei Tage später geht ein anderer, der täglich 25 km zurücklegt, von B nach A. Nach welcher Zeit treffen sich beide Personen? Wie viele Kilometer hat dann jeder von ihnen zurückgelegt?

▲10▲ Eine Gemeinde hat 856 Einwohner, und zwar $1\frac{1}{10}$mal so viele Frauen wie Männer und $1\frac{1}{3}$mal so viele Kinder wie Frauen. Wie viele Männer, Frauen bzw. Kinder gehören dieser Gemeinde an?

▲11▲ Von zwei Uhren geht die erste genau; die zweite geht stündlich $1\frac{1}{2}$ Minuten vor. Angenommen, beide Uhren zeigen die Uhrzeit 12 Uhr an. Welche Zeit vergeht, bis beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit anzeigen?

▲12▲ Grundlinie und Höhe eines Dreiecks sind zusammen 96 m lang. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks, wenn die Höhe 16 m länger ist als die Grundseite?

▲13▲ Aus dem Tore einer Stadt ging morgens um 6 Uhr ein Reisender in gleichmäßigem Schritte. Zwei Stunden später fuhr aus demselben Tor ein Postwagen auf derselben Straße. Zu welcher Uhrzeit holte der Postwagen den Reisenden ein, wenn der Postwagen eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 2,7 m, der Reisende von 1,2 m je Sekunde hatte?

▲14▲ Zwei Personen A und B sollen zusammen 120 Bogen abschreiben. A schreibt in 3 Stunden $4\frac{1}{2}$ Bogen ab, B dagegen in 2 Stunden 5 Bogen. Wie viele Bogen hat jede der beiden Personen abzuschreiben, wenn beide zur gleichen Zeit beginnen und zur gleichen Zeit fertig werden sollen?

▲15▲ Aus einer Bibliothek war der 30. Teil aller Bücher verliehen, der 20. Teil befand sich beim Buchbinder, so daß 125 Bücher des Gesamtbestandes fehlten. Wie viele Bücher umfaßte diese Bibliothek?

Lösungen

▲1▲ $13{,}80\,M+0{,}60\,M+0{,}80\,M=15{,}20\,M$; $15{,}20\,M:4=3{,}80\,M$; Axel hat 3,80 M, Bernd 3,80 M, Christian 3,20 M und Dieter 3,00 M in seiner Geldbörse.

▲2▲ Angenommen die Herde umfaßt x Schafe; dann gilt $2\cdot(x-27)=x+23$, $2x-54=x+23$, $x=77$. Die Herde umfaßt 77 Schafe.

▲3▲ Von jeder der vier Seitenlängen gehen $2\cdot 8$ cm ab. Insgesamt gehen somit $4\cdot 16\text{ cm}=64\text{ cm}$ vom äußeren Umfang ab. Der innere Umfang des Rahmens hat eine Länge von $280\text{ cm}-64\text{ cm}=216\text{ cm}$.

▲4▲ $1\text{ h}=60\cdot 60\text{ s}=3600\text{ s}$; 1 Tag hat $24\cdot 3600\text{ s}=86400\text{ s}$; 1 Jahr hat $365\cdot 86400\text{ s}=31536000\text{ s}$.
In 30 Jahren legt das Licht des Polarsterns somit
$30\cdot 31536000\cdot 300000000\text{ m}$
$=946080000\cdot 300000\text{ km}$
$=283824000000000\text{ km}$
zurück, bis es zur Erde gelangt. Dies ist zugleich die Entfernung Erde–Polarstern.

▲5▲ 1 Ar ist eine Fläche von 100 m^2 oder von 1000000 cm^2. Die jährliche Regenmenge bildet einen Quader von 52,5 cm Höhe und 1000000 cm^2 Grundfläche. Die Regenmenge hat somit einen Rauminhalt von
$52{,}5\cdot 1000000\text{ cm}^3=52500000\text{ cm}^3$
$=52500\text{ Liter}=525\text{ Hektoliter}$.

▲6▲ $30\text{ m}-4\text{ m}=26\text{ m}$; $26\text{ m}:2=13\text{ m}$; $13\text{ m}+4\text{ m}=17\text{ m}$, $13\text{ m}+17\text{ m}=30\text{ m}$.
Es verblieben 13 m Tuch zum weiteren Verkauf.

▲7▲ $88-38=50$; $50:2=25$; $25+38=63$.
Der Vater ist 63 Jahre, der Sohn 25 Jahre alt.

▲8▲ $26-4=22$; $22:2=11$; $11+4=15$.
Gegenwärtig sind diese Kinder 11 und 15 Jahre alt.
Wir stellen eine Tabelle auf.

	Alter des jüngeren Kindes	Alter des älteren Kindes
Gegenwärtig	11	15
vor 1 Jahr	10	14
vor 2 Jahren	9	13
vor 3 Jahren	8	12
vor 4 Jahren	7	11
vor 5 Jahren	6	10
vor 6 Jahren	5	9
vor 7 Jahren	4	8
vor 8 Jahren	3	7
...		

Vor 7 Jahren war das jüngste Kind halb so alt wie das älteste.

▲9▲ Angenommen, x Tage nach dem Aufbruch der ersten Person in A treffen sich beide; dann gilt $20\cdot x+25\cdot(x-3)=262{,}5$, $20x+25x-75=262{,}5$, $45x=337{,}5$, $x=7{,}5$.
Beide Personen treffen sich nach 7,5 Tagen, gerechnet vom Zeitpunkt des Aufbruchs der ersten Person.
$7{,}5\cdot 20\text{ km}=150{,}0\text{ km}$,
$4{,}5\cdot 25\text{ km}=112{,}5\text{ km}$.
Bis zum Zusammentreffen hat die erste Person 150 km, die andere 112,5 km zurückgelegt.

▲10▲ Angenommen, der Gemeinde gehören x Männer, also $\frac{11}{10}\cdot x$ Frauen und $\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{10}\cdot x=\frac{44}{30}\cdot x$ Kinder an; dann gilt
$x+\frac{11}{10}\cdot x+\frac{44}{30}\cdot x=856$,
$\frac{30}{30}\cdot x+\frac{33}{30}\cdot x+\frac{44}{30}\cdot x=856$, $\frac{107}{30}\cdot x=856$,
$x=240$.
Dieser Gemeinde gehören 240 Männer,
$\frac{11}{10}\cdot 240=264$ Frauen und $\frac{4}{3}\cdot 264=352$ Kinder an.

▲11▲ $12\text{ h}=12\cdot 60\text{ min}=720\text{ min}$;
$720:1\frac{1}{2}=480$. Vorwärts gerechnet kommt die zweite Uhr der ersten in jeder Stunde um $1\frac{1}{2}$ min näher. Nach 480 Stunden, also nach 20 Tagen, zeigen beide Uhren wieder zum selben Zeitpunkt die Uhrzeit 12 Uhr an.

▲12▲ $96\text{ m}-16\text{ m}=80\text{ m}$; $80\text{ m}:2=40\text{ m}$; $40\text{ m}+16\text{ m}=56\text{ m}$. $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$, $A=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 56\text{ m}^2$, $A=1120\text{ m}^2$.

▲13▲ Aus $x\cdot 2{,}7=(x+2)\cdot 1{,}2$ folgt $2{,}7x=1{,}2x+2{,}4$, $1{,}5x=2{,}4$, also $x=\frac{24}{15}=1\frac{3}{5}$. Der Postwagen fuhr um 8 Uhr ab. Nach $1\frac{3}{5}$ h, also nach 1 h 36 min, das heißt um 9^{36} Uhr holte der Postwagen den Reisenden ein.

▲14▲ In 30 Stunden schafft A $30\cdot\frac{3}{2}=45$ Bogen, B hingegen $30\cdot\frac{5}{2}=75$ Bogen.

▲15▲ Angenommen, die Bibliothek umfaßte x Bücher; dann gilt
$\frac{x}{30}+\frac{x}{20}=125$, $\frac{2x}{60}+\frac{3x}{60}=125$, $\frac{5x}{60}=125$,
$x=\frac{125\cdot 60}{5}$, $x=1500$.
Diese Bibliothek umfaßte 1500 Bücher.

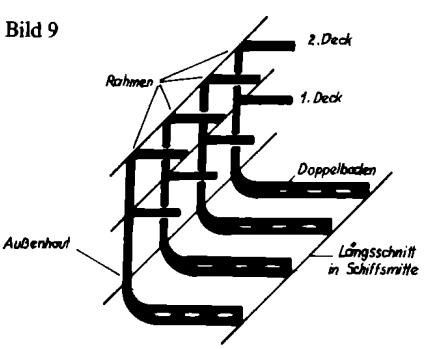
Mathematik und Schiffbau

Teil 2

4. Die Berechnung von Balkentragewerken

Obwohl das Schiff im eigentlichen Sinn kein aus einzelnen Trägern zusammengesetztes Balkentragwerk ist, können viele der im Schiff vorhandenen Teilkonstruktionen als solche Balkentragwerke aufgefaßt und so einer Berechnung zugänglich gemacht werden. Als ein Beispiel seien die Querrahmen eines Schiffes genannt (Bild 9). Jeder einzelne dieser Rahmen wird für sich berechnet. Die gegenseitige Beeinflussung der nebeneinander angeordneten Rahmen, die wegen der von außen aufgeschweißten Beplattung vorhanden ist, wird bei diesem Modell vernachlässigt.

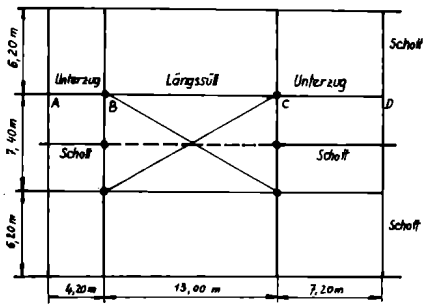
Bild 9



Die einzelnen Träger des Rahmens werden durch die darauf befindliche Nutzlast und den von außen einwirkenden Wasserdruck belastet und verformt. Zur Bestimmung der Beanspruchung der Träger ist die Kenntnis der Momente an den Lagerstellen des Rahmens notwendig. Die Lagerstellen befinden sich dort, wo die einzelnen Träger des Rahmens zusammenlaufen. Wir wollen zeigen, wie man die Berechnung dieser Momente bewerkstelligen kann.

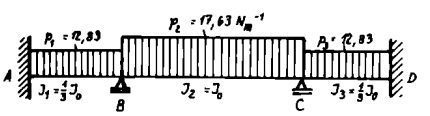
Wir führen unsere Untersuchungen an einem anderen wichtigen Balkentragwerk im Schiff, der Lukenkonstruktion, durch. Die Luke ist eine Öffnung im Schiffsdeck, durch die die Ladung in das Schiffsinnere hineingebracht werden kann. Ein Beispiel dafür ist im Bild 10 zu sehen. Die schraffiert gezeichnete Deckbeplattung und die darauf befindliche Belastung wird von zwei Längsträgern (bestehend aus je zwei sogenannten Unterzügen und je einem Längssüll) und zwei Querträgern getragen. In den Kreuzungspunkten B, C und B', C' sollen sich Stützen befinden, die ein Absenken dieser Punkte verhindern (i. a. sind solche Stützen nicht vorhanden, dann gestaltet sich jedoch der Berechnungsprozeß etwas schwieriger).

Bild 10



Wenn man sich die Decksbelastung auf den Längsträger verteilt denkt, erhält man als ein besonders einfaches Balkentragwerk den in A, B, C und D gestützten Durchlaufträger, der an den starren Querschotten bei A und D fest eingespannt und in den Punkten B und C starr gelagert ist. Die Belastung und die Trägheitsmomente der Unterzüge und des Längssülls sind Bild 11 zu entnehmen.

Bild 11



Um die richtigen Abmessungen des Längsverbandes nachweisen zu können, sind für den Konstrukteur die Biegemomente an den Stützstellen von Interesse. Zur Berechnung dieser Momente kann man ein Itrationsverfahren verwenden. Man spannt den Träger an den Stützstellen B und C zunächst fest ein (was in Wirklichkeit nicht der Fall ist) und erhält auf diese Weise aus dem von A bis D durchlaufenden Träger drei (mit I, II und III bezeichnete) Einzelträger (Bild 12), die beiderseits fest eingespannt sind. Die Momente an den Stabenden in diesem Zustand berechnen sich dann sehr einfach aus den Formeln (20) zu

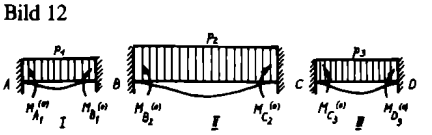
$$M_{A_1}^{(0)} = \frac{12{,}83 \cdot 4{,}2^2}{12} = 18{,}86\ \text{Nm} = -M_{B_1}^{(0)}$$

$$M_{B_2}^{(0)} = \frac{17{,}63 \cdot 13^2}{12} = 248{,}29\ \text{Nm} = -M_{C_2}^{(0)}$$

$$M_{C_3}^{(0)} = \frac{12{,}83 \cdot 7{,}8^2}{12} = 65{,}05\ \text{Nm} = -M_{D_3}^{(0)}$$

Hierbei wurde, um die Drehrichtung der Momente deutlich zu machen, das Einspannmoment positiv gewertet, wenn es links herum dreht, und negativ, wenn es rechts herum dreht. Im Bild 12 wurden die Biegelinien der Träger in diesem Zustand mit eingezeichnet.

Bild 12



Diese Ausgangssituation wird jetzt schrittweise (iterativ) in den wahren Zustand (Bild 11) überführt. Zunächst wird die Einspannung bei B gelöst, wobei die Momentensumme $M_{B_1}^{(0)} + M_{B_2}^{(0)}$ gemäß den Steifigkeiten der beiden Träger I und II verteilt wird. Für einen eingespannten Träger sind die Steifigkeiten entsprechend (23) maßgebend:

$$c_{B_1} = \frac{4EJ_1}{l_1} = \frac{4EJ_0}{3 \cdot 4{,}2},\quad c_{B_2} = \frac{4EJ_2}{l_2} = \frac{4EJ_0}{13{,}0},$$

so daß $100\,\frac{c_{B_1}}{c_{B_1} + c_{B_2}}\,\% = 50{,}8\,\%$ der Momentensumme mit umgekehrter Drehrichtung vom Träger I und $100\,\frac{c_{B_2}}{c_{B_1} + c_{B_2}}\,\% = 49{,}2\,\%$ vom Träger II aufgenommen werden. Man erhält

$M_{B_1}^{(1)} = -116{,}55$, $M_{B_2}^{(1)} = -112{,}88$.

An den gegenüberliegenden Lagern ergibt sich jeweils die Hälfte dieser Momente als Reaktionsmoment, also

$M_{A_1}^{(1)} = -58{,}28$, $M_{C_2}^{(1)} = -56{,}44$.

Nun wird bei C die Momentensumme

$M_{C_2}^{(0)} + M_{C_3}^{(0)} + M_{C_2}^{(1)}$

$= -248{,}29 + 65{,}05 - 56{,}44 = -239{,}68$

gebildet und gemäß den Steifigkeiten der Stäbe II und III verteilt. Hier ist

$$c_{C_2} = \frac{4EJ_2}{l_2} = \frac{4EJ_0}{13{,}0},\quad c_{C_3} = \frac{4EJ_3}{l_3} = \frac{4EJ_0}{3 \cdot 7{,}8}$$

und damit gehen $100\,\frac{c_{C_2}}{c_{C_2} + c_{C_3}}\,\% = 64{,}3\,\%$ der Momentensumme mit umgekehrtem Drehsinn in den Träger II und $100\,\frac{c_{C_3}}{c_{C_2} + c_{C_3}}\,\% = 35{,}7\,\%$ in den Träger III. Wir erhalten

$M_{C_2}^{(2)} = +154{,}11$, $M_{C_3}^{(2)} = +85{,}57$,

und an den gegenüberliegenden Lagern jeweils die Hälfte:

$M_{B_2}^{(2)} = +77{,}06$, $M_{D_3}^{(2)} = +42{,}79$.

In dieser Weise wird das Verfahren mit denselben Verteilungskoeffizienten an den Lagern fortgesetzt. Die Momentenanteile werden immer kleiner, das Trägersystem nähert sich immer mehr dem bei B und C nicht eingespannten Zustand, das Verfahren konvergiert. Der vollständige Ausgleich ist in Tabelle 1 angegeben. Wenn wir nur mit zwei Stellen nach dem Komma rechnen, bricht das Verfahren nach 10 Iterationsstufen ab. Die Summe aller Momentenanteile in den einzelnen Spalten ergeben die Momente im Durchlaufträger (Bild 11) an den Stützstellen A, B, C und D (siehe Tabelle 1).

So wie hier bei der Lukenkonstruktion lassen sich auch die Momente in den Querrahmen (Bild 9) bestimmen. Die Belastung besteht hier aus der Deckslast und dem seitlichen Wasserdruck. Schließlich lassen sich auch Trägerroste größeren Ausmaßes auf diese Weise berechnen.

Tabelle 1

A	← 0,508	B	0,492 →	← 0,643	C	0,357 →	D
+18,86	− 18,86		+248,29	−248,29		+ 65,05	−65,05
−58,28	−116,55	+229,43	−112,88	− 56,44	−183,24		
		0	+ 77,06	+154,11	−239,68	+ 85,57	+42,79
−19,57	− 39,15	+ 77,06	− 37,91	− 18,96	0		
		0	+ 6,09	+ 12,19	− 18,96	+ 6,77	+ 3,38
− 1,55	− 3,09	+ 6,09	− 3,00	− 1,50	0		
		0	+ 0,48	+ 0,96	− 1,50	+ 0,54	+ 0,27
− 0,12	− 0,24	+ 0,48	− 0,24	− 0,12	0		
		0	+ 0,04	+ 0,08	− 0,12	+ 0,04	+ 0,02
− 0,01	− 0,02	+ 0,04	− 0,02	− 0,01	0		
		0	0	+ 0,01	− 0,01	0	
−60,67	−177,91		+177,91	−157,97		+157,97	−18,59

Mathematisch läuft das im Fall der Lukenkonstruktion beschriebene Iterationsverfahren auf die iterative Lösung eines linearen Gleichungssystems hinaus, wobei die Unbekannten die Momente M_A, M_B, M_C, M_D an den Lagerstellen sind. Bei der Berechnung größerer Strukturteile des Schiffes (Rahmen mit vielen Trägern, Trägerroste) sind manchmal 100 und mehr lineare Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten zu lösen. Dann ist der Einsatz von Rechenautomaten und die Heranziehung anderer geeigneter Lösungsalgorithmen unumgänglich.

5. Die Längenfestigkeit und einige weitere Aufgaben der Schiffsfestigkeit

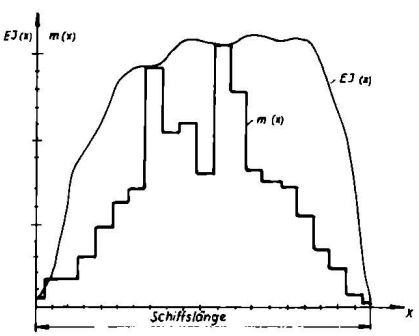
Nicht nur die Beanspruchung einzelner Bauteile und größerer Teilkonstruktionen des Schiffes ist für den Schiffbauingenieur von Interesse, sondern auch die Festigkeit des Schiffes als Gesamtverband (Längsfestigkeit des Schiffes). Dabei kann das Schiff im einfachsten Modell als ein Balken mit stückweise konstantem Querschnitt und stückweise konstanter Belastung aufgefaßt werden, der an seinen Enden frei ist, d. h. das Biegemoment und die Querkraft sind dort Null.

Die Belastung $p(x)$ in Abhängigkeit von der Ortskoordinate x eines solchen Balkens setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

- Gewicht des Schiffes mit Ausrüstung
- Gewicht der Antriebsanlagen (Maschine, Wellenleitung, Schiffsschrauben)
- Gewicht der Ladung
- Gewicht der Vorräte (Brennstoff, Wasser usw.)
- Gewicht des festen und flüssigen Ballasts
- Auftrieb des Schiffskörpers im Wasser (wirkt den anderen Gewichten entgegen).

Bei der Berechnung der Trägheitsmomente $J(x)$ (bzw. der Steifigkeiten $EJ(x)$) in den einzelnen Querschnitten des Schiffes werden alle Längsverbände berücksichtigt. Typische Beispiele für die Massenverteilung $m(x)$ pro Längeneinheit, die für die Gewichtsverteilung ohne Auftrieb maßgebend ist, und die Steifigkeitsverteilung $EJ(x)$ eines Schiffes findet man in Bild 13.

Bild 13



Ist die Belastung $p(x)$ bekannt, dann kann man durch zweimalige numerische Integration der zwischen der Belastung $p(x)$ und dem Biegemoment $M(x)$ gültigen Beziehung

$$M''(x)=p(x) \tag{24}$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen (Biegemoment und Querkraft an den Schiffsenden Null) zunächst das Biegemoment bestimmen. Anschließend läßt sich dann aus der Differentialgleichung der Biegelinie (11), die hier in der Form

$$y''(x)=\frac{M(x)}{EJ(x)} \tag{25}$$

geschrieben werden kann, ebenfalls durch zweimalige numerische Integration der Gleichung (25) die Durchbiegung $y(x)$ des Schiffskörpers errechnen.

Um den ungünstigsten Fall hinsichtlich der Beanspruchung des Schiffskörpers herauszufinden, müssen i. a. verschiedene Situationen untersucht werden:

Schiff im Glattwasser, Schiff auf einem Wellenberg, Schiff im Wellental, Schiff bei unterschiedlichen Beladungszuständen (volle Beladung, Ballastfahrt usw.).

Bei diesen Berechnungen werden effektive Verfahren der numerischen Integration benötigt, die sich auf Rechenautomaten realisieren lassen.

Es gibt genauere Modelle für die Beschreibung der Längsfestigkeit des Schiffes, z. B. die Berücksichtigung der Decksaufbauten, wobei sowohl der Schiffsboden als auch jedes einzelne Stockwerk als Balken aufgefaßt wird. Dieses Modell wird durch ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem beschrieben. In einem anderen Modell wird das Schiff durch ein ebenes oder räumliches Balkentragwerk dargestellt. Die erforderlichen Rechnungen hierbei sind allerdings sehr aufwendig.

Natürlich gibt es noch eine Vielzahl anderer spezieller Bauteile im Schiff, deren Festigkeit unter bestimmten Belastungen untersucht werden muß. Besonders wichtig ist die Berechnung von Platten, die im Schiff überall vorkommen. Hierzu sind gewisse partielle Differentialgleichungen unter bestimmten Randbedingungen numerisch zu lösen. Dazu eignen sich sogenannte Differenzenverfahren oder auch die Methode der finiten Elemente, auf die wir hier selbstverständlich nicht eingehen können. Aber auch Stabilitätsprobleme, z. B. das Ausknicken von Stäben oder das Ausbeulen von Platten unter gewissen kritischen Lasten, gilt es analytisch und numerisch zu untersuchen.

Mit der Schiffsfestigkeit im Zusammenhang steht das Gebiet der durch die Maschine bzw. den Propeller erzwungenen Schiffsschwingungen und bestimmter Resonanzschwingungen einzelner Teile des Schiffes (z. B. der Decksbeplattung). Die Lösung dieser Probleme erfordert ebenfalls eine Vielzahl analytischer und numerischer Methoden und Verfahren und damit ein reiches Anwendungsfeld der Mathematik.

Der Schiffbauingenieur kann die im Schiffbau anstehenden mathematischen Aufgaben und deren numerisch-rechentechnische Lösung weitgehend selbständig bearbeiten. Dazu erhält er eine gut fundierte mathematische Ausbildung während seines Studiums.

In vielen Fällen kann man aber auf eine interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen Ingenieur, Mathematiker und Informatiker nicht verzichten.

H.-W. Stolle

Alle Suhler Teilnehmer erhielten diese Karte. Entwurf: D. Kiehle, Mathematiklehrer, F.-Köhler-OS Suhl.

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Köpfchen, Köpfchen – Spiele und Knobeleien

In Spielzeugläden in der Sowjetunion kann man mit etwas Glück sehr preiswert kleine Spiele erstehen, die helfen sollen, das geometrische Vorstellungsvermögen und das logische Denken zu entwickeln. Einige derartige Spiele wollen wir uns hier gemeinsam ansehen. Ihr könnt sie leicht nachbauen und werdet bestimmt viel Freude daran haben.

Beim Spiel Гексатрион (Hexatrion) sind aus 12 Elementen verschiedene geometrische Figuren zusammenzulegen. Jedes Element besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken (hieraus leitet sich der Name des Spiels ab). Ihr findet die 12 Elemente in Bild 1, übertragt sie auf Zeichenkarton, Sperrholz oder Plastmaterial (Schreibtischauflage), und schneidet oder sägt jedes Element je einmal aus. Nun könnt ihr versuchen, Figuren zusammenzubauen.

Es gibt dafür sehr viele verschiedene Möglichkeiten. Einige sind in Bild 2 dargestellt. Allerdings muß man sich intensiv damit beschäftigen. Die Lösungen sind nicht ganz einfach zu erhalten.

Auch mir sind viele noch nicht bekannt.

Ebenso wie Hexatrion ist auch das Spiel Пентамино (Pentamino) für Schüler der Mittel- und Oberstufe sowjetischer Schulen gedacht. Auch bei Pentamino sind aus 12 Elementen geometrische Figuren zusammenzufügen, die einzelnen Elemente bestehen hier aus jeweils 5 Quadraten in unterschiedlichen Anordnungen (Bild 3).

Ich habe 9 Figuren (Bild 4) ausgewählt, die ihr mit Pentamino konstruieren könnt. Eine Unmenge weiterer Figuren könnt ihr euch selbst ausdenken.

Viel Freude beim Entwerfen schöner Figuren und Muster!

W. Schmidt

Bild 1 Hexatrion

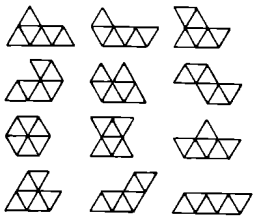


Bild 2

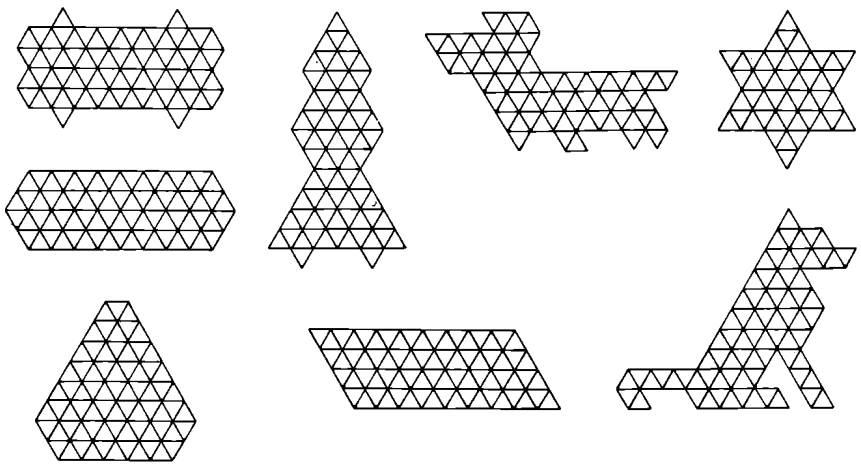


Bild 3
Pentamino

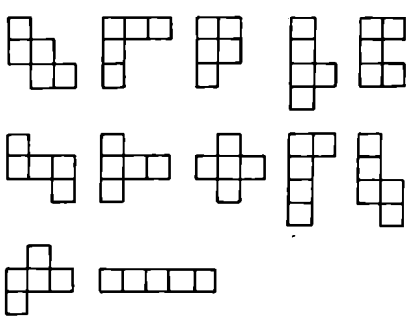
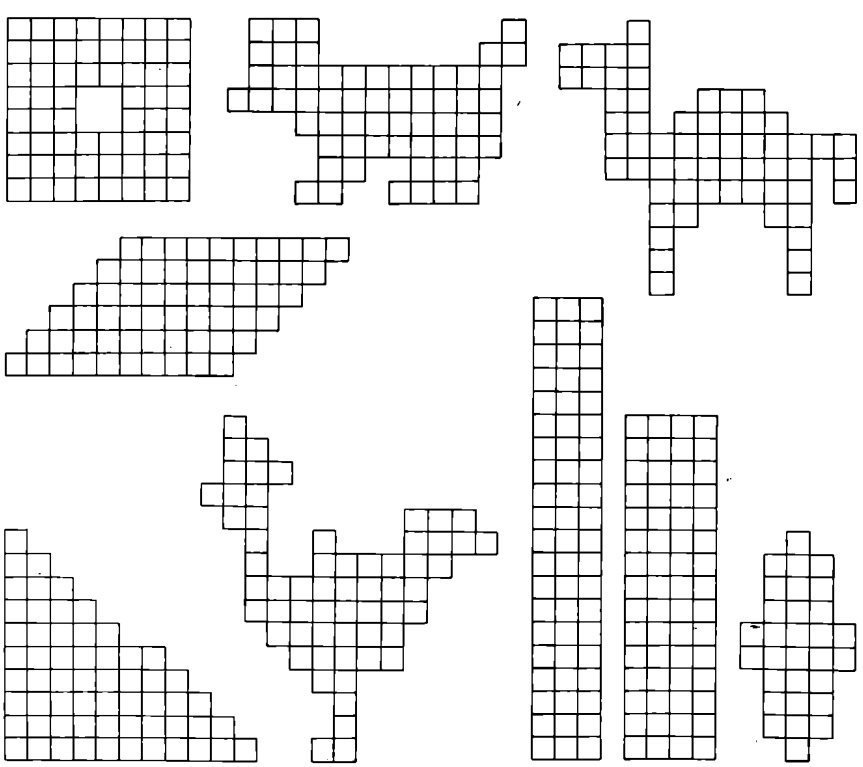


Bild 4



Ein Blick in das „geistige Labor“ von Leibniz

Der Mathematikhistoriker, der mit handschriftlichen Quellen arbeitet, muß wenigstens drei Hindernisse überwinden, bis sich ihm der Zugang zum Inhalt des Textes erschließt. Er muß erstens die Schrift lesen können. Schon dies Entziffern ist oft ein mühevolles und zeitraubendes Unterfangen. Das zweite Hindernis ist die sprachliche Barriere. Sie kann darin liegen, daß sich der Autor einer Fremdsprache bedient hat und (oder) sich in einer uns heute fremden Rechtschreibung und Zeichensetzung, unter Benutzung ungewohnter, altertümlicher Wendungen ausdrückt. Und schließlich liegt eine weitere Hürde auf dem Weg zum Verständnis in der Verwendung überholter mathematischer Symbole und Begriffe, Zeichen und Fachwörter. Hat der Historiker all diese Hindernisse überwunden, braucht er noch keineswegs am Ziel zu sein, denn oft genug fehlen bei flüchtigen Notizen Hinweise auf den Zusammenhang.

Ein solches Beispiel wollen wir hier als Aufgabe für Knobler vorführen. Die Hindernisse haben wir beseitigt. Wir bringen eine Transkription der in Rede stehenden Tabelle, indem wir die Zahlen zuvor geordnet und vervollständigt haben, und zwar unter Weglassung allen überflüssigen Beiwerks. Zur Erleichterung der Lösung geben wir zudem aus dem teils lateinischen, teils französischen Begleittext die Stichworte „Würfel“ und „Kombinationen“ (siehe Bild).

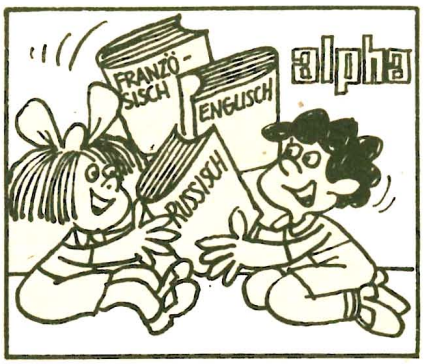
Es handelt sich um eine Tabelle des großen Philosophen und Mathematikers Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) aus dem Jahre 1676.

Leibniz hatte eine Vorliebe für Tafeln. Er benutzte sie, um induktiv Gesetze und Regeln zu finden, die dann ihrerseits zur Anlegung weiterer Tabellen zwecks Einsparung künftiger Rechenarbeit gebraucht wurden. Hierbei werden wir an den „Fürsten der Mathematiker“ *Carl Friedrich Gauß* (1777 bis 1855) erinnert, der allerdings die gewissermaßen auf experimentellem Wege gefundenen Gesetze nachträglich streng bewiesen hat.

Wenn wir annehmen, daß einige Leser darangehen werden, den Sinn der Tabelle zu deuten, so tun wir das, weil Mathematiker von jeher einen Hang zum Entschlüsseln (oder auch zum Verschlüsseln) gehabt haben. *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) und der englische Mathematiker *Charles Babbage* (1792 bis 1871) waren beispielsweise, um nur zwei Namen zu nennen, Meister des Dechiffrierens. Gauß andererseits liebte es, ihm besonders wertvolle Resultate zu verschlüsseln.

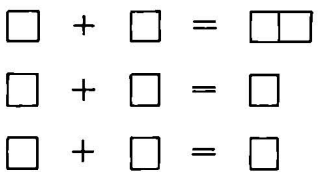
K.-R. Biermann

1	6	5	1	1					
2	36	25	11	10	1				
3	216	125	91	75	15	1			
4	1296	625	671	500	150	20	1		
5	7776	3125	4651	3125	1250	250	25	1	
6	46656	15625	31031	18750	9375	2500	375	30	1



▲1▲ Десять цифр

Десять цифр – от 0 до 9 – запишите в клеточки так, чтобы получилось три верных равенства на сложение.



▲2▲ Cryptarithms

A popular puzzle is to take someone's name or a well-known saying and make it into an addition or subtraction sum. It is often necessary to add an extra condition in order to make the answer unique.

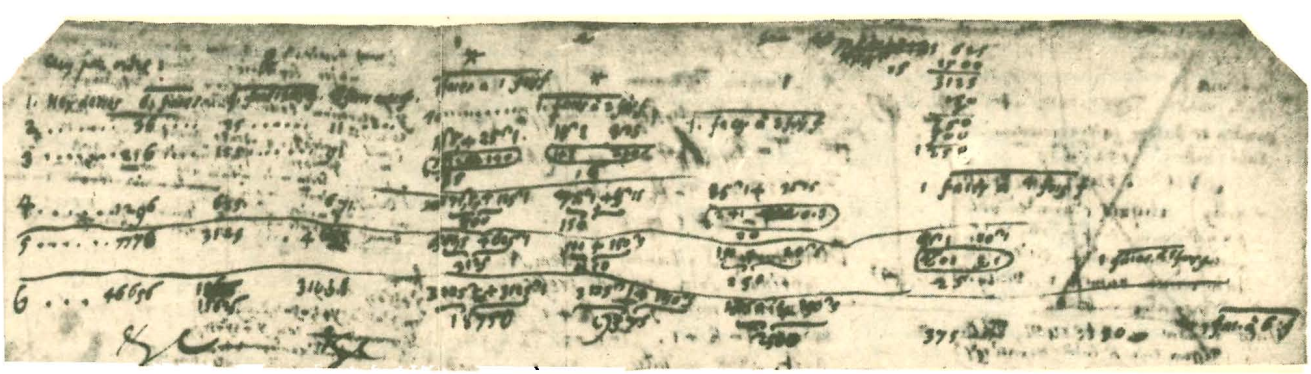
Example. HOW (Note the '0' is a letter.)

\+ HIS

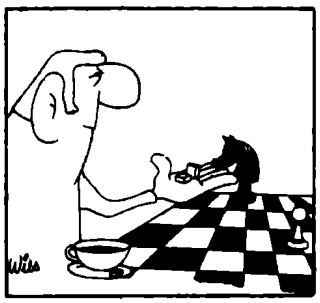
SIS

Each letter stands for a different digit and SOW is a perfect square. A standard convention is that the left-hand end letter of each word does not stand for zero.

▲3▲ Une baignoire est remplie par son robinet en 10 minutes et vidée par sa bonde en $\frac{1}{4}$ d'heure. On ouvre le robinet et on oublie de fermer la bonde; au bout de combien de temps la baignoire sera-t-elle pleine?



In freien Stunden · alpha-heiter



Wie alt sind sie?

Ralf, Roland und Rüdiger sind Brüder. Zusammen sind sie $34\frac{1}{2}$ Jahre alt. Ralf ist der Jüngste, Roland ist $2\frac{1}{2}$ Jahre älter als er und Rüdiger $2\frac{1}{2}$ Jahre älter als Roland. Nun findet heraus, wie alt jeder der Brüder ist!

aus: NBI, Berlin

Drachenlabyrinth

Wie findet der kampflustige und mutige Herakles den richtigen Weg vom Kopf bis zum Schwanz der Sirene?

aus: Füles, Budapest

Spiel mit Zahlen

20	·		:		8
:		+		+	
	·		:		15
·		−		:	
	+		−		10
32		4		2	

3, 5, 6, 8, 9, 9, 11, 15

18	·		:		12
+		+		+	
	+		:		3
:		−		−	
	−		+		17
2		12		5	

8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17

Sinnvolle Begriffe gesucht

Vor die folgenden Bruchstücke von Wörtern ist jeweils das Zahlwort für eine natürliche Zahl so einzusetzen, daß sinnvolle Begriffe entstehen. Sei a die Summe der unter A eingefügten, b die Summe der unter B eingefügten Zahlen, so ergibt $a-b$ das Todesjahr von Carl Friedrich Gauß.

A .....schönchen, ...tagsfliege, ...erbahn, ...topfesser, ...füßler.

B .....schaft, ...meter, ...auge, ...meilenstiefel, ...waldstätter See, ...zack, ...gestirn, ...baum, ...käsehoch, ...schläfer, ...groschenoper.

OStR K. Lehmann, VLdV, Berlin

Kryptarithmetik

Jeder Buchstabe entspricht einer Ziffer von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

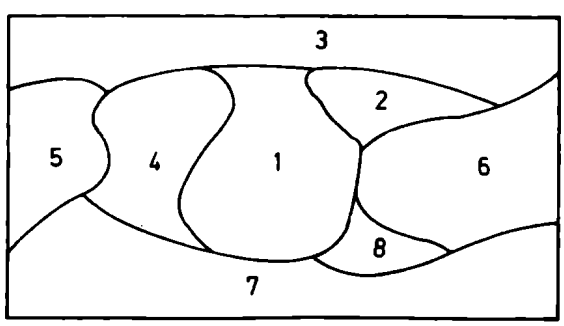
GAUSS	EULER
+ EULER	+ HERON
68003	71677

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Färbung einer Landkarte

Die Skizze zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbungen verschieden sind?

aus: Urania, Berlin



Fünf Kongreßteilnehmer im Gespräch

Fünf Teilnehmer eines Kongresses bemerken, daß man durch Umstellen der Buchstaben ihres Vor- und Zunamens mathematische Begriffe erhalten kann, von denen vier zu ein und demselben Stoffkomplex gehören. Nur einer der Teilnehmer tanzt in dieser Hinsicht also etwas aus der Reihe. Um wen handelt es sich?

EVI SINNOR
RITA ONAVI
INA BOMITKON
REMO TAPUTIN
FRANK SEUMIG

Student Mario Richter, Berlin

Unterwegs ins Bad

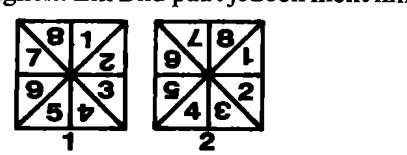
Einige der Fahrgäste im Bus sind zum Bad unterwegs. Welche sind diese? Man kann sie im Bad wiedererkennen.

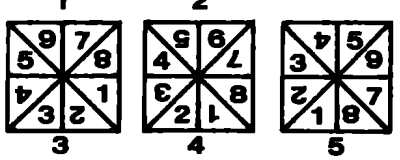
aus: Füles, Budapest

Eins von fünf!

Die numerierten Bilder folgen einer gewissen Gesetzmäßigkeit. Ein Bild paßt jedoch nicht hinein. Welches?

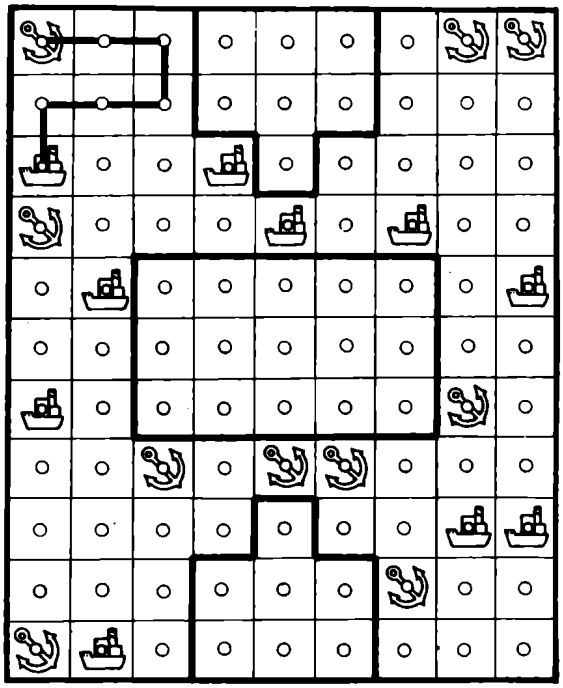
aus: Roháč, Prag





Ein Schiff und ein Anker

Zu jedem Schiff gehört ein Anker, der an einer schweren Kette befestigt ist.
Jede Kette besteht aus 6 Gliedern (sie sind die von Punkt zu Punkt führenden Geradestücke). Als Beispiel wird eine Kettenverbindung im oberen linken Eck gezeigt. Man trage die anderen Ketten so ein, daß die Ketten nur senkrecht oder waagerecht liegen dürfen (nicht diagonal), und sie dürfen sich weder kreuzen



noch berühren. Die eingerahmte „Insel" bleibt unangetastet.
Zu welchem Schiff gehört welcher Anker?

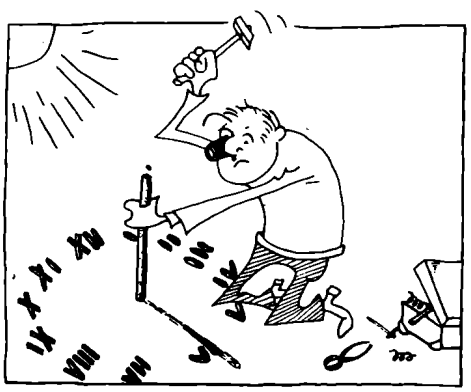
aus: math pie, London

Vexierbild

Sokrates trinkt auf das Wohl von Xantippe.
Wo ist sie zu finden?

aus einem griechischen Magazin (1899)

Merkwürdiger Handwerker



Ludwig Boltzmann

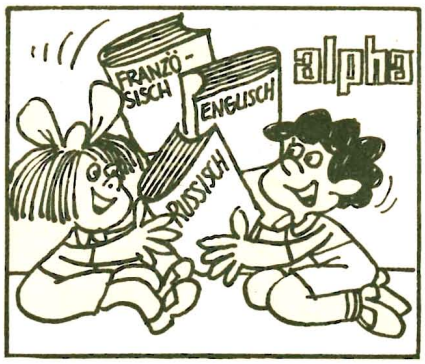
Seit der Herausbildung einer wissenschaftlichen Physik durch Galilei, Newton u. a. bis zum Ende des 18. Jh. hatte sich das Interesse der Wissenschaftler auf mechanische Prozesse konzentriert, deren wesentliches Merkmal vom Standpunkt der Energieumwandlung das im Idealfall verlustlose Wechselspiel zwischen kinetischer und potentieller Energie ist, beispielhaft illustriert durch den Pendelvorgang. Der Fortschritt der Physik wäre sogar undenkbar gewesen ohne die anfängliche bewußte Vernachlässigung von Energieverlusten durch Reibung usw. und die dadurch erreichte theoretische Umkehrbarkeit der mechanischen Vorgänge. Die Erfindung der Dampfmaschine und ihre industrielle Nutzung lenkten die Aufmerksamkeit der Naturwissenschaftler zu Beginn des 19. Jh. auf die Nichtumkehrbarkeit aller Prozesse, bei denen in wesentlichem Umfang mechanische Energie in Wärme oder umgekehrt verwandelt wird, und es bildete sich ein, explizit zuerst von Rudolf Clausius (1822 bis 1882) formulierter, anfangs noch verschwommener Begriff von einer als Entropie bezeichneten physikalischen Größe heraus, deren Betrag bei Energieumwandlungen höchstens zunehmen kann und tatsächlich in dem Maße zunimmt, wie „wertvolle" Energie in weniger wertvolle Energie, nämlich Wärmemenge von geringer Temperatur, verwandelt wird. Clausius schloß aus seinen Überlegungen voreilig auf einen „Wärmetod", d. h. einen Endzustand völliger Entwertung aller Energie, dem das Weltall unaufhaltsam zustrebe.

Am Ende der klassischen Periode dieser neuen Ideen steht der österreichische Physiker Ludwig Boltzmann (geb. 20. 4. 1844 in Wien, gest. 5. 9. 1906 in Duino, einem kleinen Ort bei Gorizia an der heutigen italienisch-jugoslawischen Grenze), der nach Zwischenstationen in Graz, München und Leipzig bis zu seinem Tode in seiner Heimatstadt Wien wirkte und als eigentlicher Begründer der statischen Physik gilt. Boltzmann präzisierte die Entropie als Logarithmus einer geeignet definierten Wahrscheinlichkeit des betrachteten physikalischen Zustands und erklärte die Tendenz der Prozesse zur Entropiezunahme somit als Streben nach dem wahrscheinlichsten „Gleichgewichtszustand" des jeweiligen Systems. Fruchtbar erwies sich dieser Standpunkt vor allem in der Thermodynamik, indem er es gestattete, makroskopisch beobachtete Größen wie Druck, Temperatur und Volumen einer Gasmenge mittels mathematischer Methoden aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik auf die zufällig verteilten, im Detail nicht beobachtbaren mechanischen Bewegungen der einzelnen Gasmoleküle zurückzuführen. Diese Richtung der Physik hat seit Boltzmanns grundlegenden Gedanken einen ungeheuren Aufschwung genommen, wobei freilich Boltzmanns Theorie aus heutiger Sicht nur eine im Normalfall geltende Näherung der tatsächlichen Beziehungen ist.

Anläßlich des 75. Todestages von Ludwig Boltzmann erschien in Österreich die abgebildete Gedenkmarke. Unter den „10 mathematischen Formeln, die das Gesicht der Erde veränderten" (Nikaragua 1971) ist ebenfalls eine Marke dem Boltzmannschen Gesetz (besser: Prinzip) $S = k \cdot \ln W$ (S Entropie, k Boltzmannsche Konstante, W thermodynamische Wahrscheinlichkeit) gewidmet, das in dieser Form auf seinem Grabstein eingemeißelt ist, jedoch so explizit mit dem numerisch bestimmten Proportionalitätsfaktor k erst von Max Planck (1858 bis 1947) im Jahre 1906 formuliert wurde.

Über Leben und Werk von L. Boltzmann gibt es ein Buch von E. Broda (Berlin 1957).

P. Schreiber



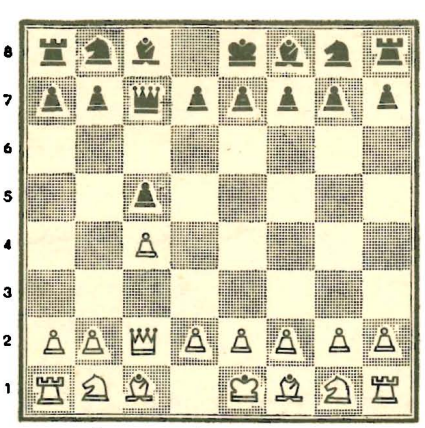
Schach und Mathematik

Die Ähnlichkeit zwischen mathematischer Denkweise und den beim Schachspiel notwendigen Überlegungen ist wahrscheinlich für jeden offensichtlich. Beide erfordern hervorragende logische Fähigkeiten und hohes Kombinationsvermögen.

So wird zum Beispiel die Anzahl der beim Schachspiel auftretenden Möglichkeiten dadurch charakterisiert, daß jeder der Spieler zu Beginn der Partie unter 20 Zügen wählen kann, die Anzahl der möglichen Stellungen nach dem ersten Zug beider Spieler also 400 beträgt. Wie man sich überzeugen kann, sind nach dem zweiten Zug von Weiß 5206 Stellungen möglich. Hierbei haben wir beim Zusammenzählen der Fälle nicht berücksichtigt, daß eine Stellung auf mehr als eine Weise entstehen kann. So sehen wir zum Beispiel die Fälle 1. e4 e5 2. Sc3 und 1. Sc3 e5 2. e4 als identisch an. Wenn wir diese als verschieden betrachten, bekommen wir etwa das Doppelte von 5206.

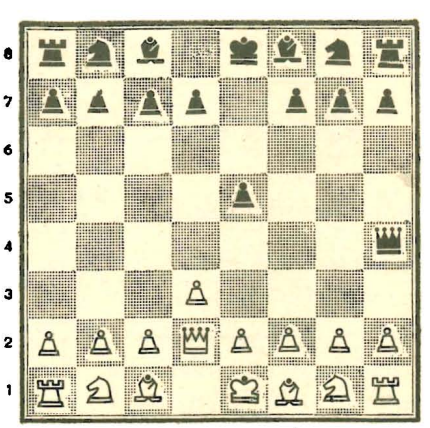
Folgende Aufgabe, die von *Fritz Hoffmann* (Internationaler Schiedsrichter für Schachkompositionen) stammt, gilt es zu lösen!

Wieviel verschiedene Stellungen sind nach zwei Zügen aus der Partieanfangsstellung möglich, wenn dabei beide Spieler die Dame gezogen haben? Siehe dazu die beiden Beispiele!



1. d3 e5 2. Dd2 Dh4

Bild 1



1. c4 c5 2. Dc2 Dc7

Bild 2

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Schulolympiade (1. Stufe)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1983

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden.

Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1983 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärksten Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

230511 Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom.

Ferner ist bekannt:

(1) Der Schüler mit dem 2. Preis ist älter als Bernd.
(2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.
(3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.
(4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom?

Begründe deine Antwort!

230512 Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen eines Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 42 cm.

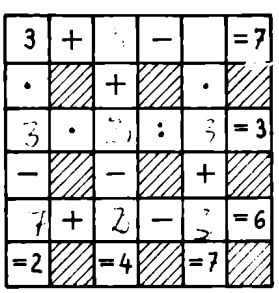
Wie lang sind seine drei Seiten?

230513 Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, daß richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

(1) $a+b+c=21$,
(2) $b \cdot c=42$,
(3) $c+d=70 : b$,
(4) $e : a=d$,
(5) $c=54 : 9$,
(6) $a+b+c+d+e+f=60$.

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

230514 In die leeren Felder des Bildes sind natürliche Zahlen so einzusetzen, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.



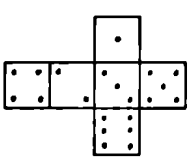
a) Gib eine solche Einsetzung an!

b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

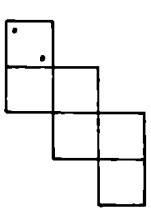
Olympiadeklasse 6

230611 Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.

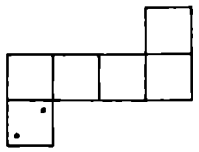
a)



b)



c)

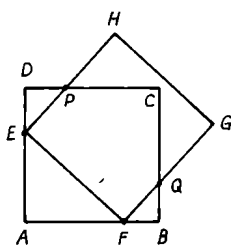


Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)? Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

230612 Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel. Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.

Wieviel Mark kostete ein Buch? Wieviel Mark kostete ein Ball?

230613 Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben.



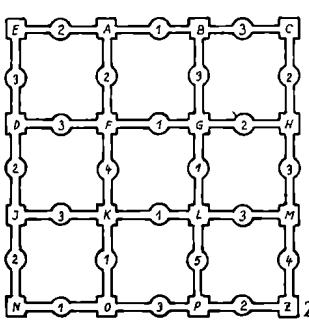
Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, daß sie

a) genau einen Punkt,
b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte,
d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte,
f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

230614 Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen. Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.

Eingang

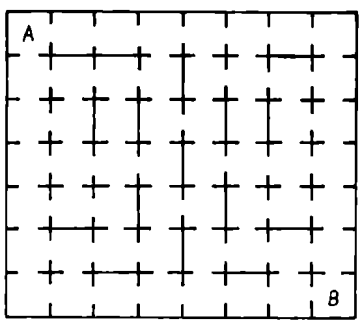


Ziel

a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird! Wieviel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?
b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!
Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit $A, B, C, D, \ldots, P$ bezeichnet, wie es im Bild angegeben ist.

Olympiadeklasse 7

230711 Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede „Tür" höchstens einmal benutzt werden.
Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

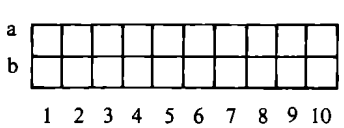


230712 Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von $85 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

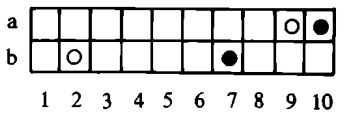
a) Wieviel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?
b) Wieviel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

230713 Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\sphericalangle ASB$ habe die Größe 120°. Ermittle die Diagonalenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in Abhängigkeit von der Seitenlänge $\overline{BC}$!

230714 Zwei Spieler A und B spielen auf einem „2 × 10-Brett" folgendes Spiel: (Bild a)



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein. Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muß, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist Weiß:
a9, b2; Schwarz: a10, b7 (Bild b) eine mögliche Anfangsstellung.



Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muß (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld; jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechts ziehen. Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, daß dieser nicht mehr ziehen kann.
a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, daß er mit Sicherheit siegt:
(1) Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7.
(2) Weiß: a3, b5; Schwarz: a8, b6.
(3) Weiß: a8, b4; Schwarz: a10, b7.
(4) Weiß: a4, b2; Schwarz: a8, b9.
b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:
(5) Weiß: a2, b4; Schwarz: a7, b9.
(6) Weiß: a6, b2; Schwarz: a8, b5.
(7) Weiß: a5, b3; Schwarz: a8, b6.
c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

Olympiadeklasse 8

230811 Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g. Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

230812 Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Quersumme von n ist 17.
(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d. h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade, die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

230813 Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtzeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.
a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr an einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?
b) Wieviel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?
c) Wieviel Zeit vergeht für einen Wagenzug, der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

230814 a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm. Gesucht sind drei Punkte P, Q, R, die so auf der Berandung dieses Quadrats liegen, daß die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.
Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, daß sie die geforderte Eigenschaft haben!
b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so daß die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!
c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

Olympiadeklasse 9

230911 Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5 \leqq a \leqq 10$ und $5 \leqq b \leqq 10$ gibt es folgende „Fingerregel": Man streckt an der einen Hand so viel Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b. Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a \cdot b$. Beweisen Sie, daß diese „Fingerregel" für alle genannten a und b gilt!

230912 Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.
(2) Es gilt $x + y = 121$.

230913 Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.
a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!
b) Beweisen Sie, daß die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird einer Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T'_1, T'_2, T'_3 bezeichnen lassen, daß $T_1 \cong T'_1$, $T_2 \cong T'_2$ und $T_3 \cong T'_3$ gilt.

230914 Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

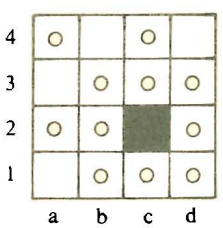
Beweisen Sie, daß es genau eine solche Strecke GH gibt und daß ihre Länge $\overline{GH}=s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c!

Olympiadeklasse 10

231011 Anne setzt in den beiden Termen a^2-b^2 und $a-b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus a^2-b^2 beim Einsetzen die Zahl z und aus $a-b$ bie Zahl n, so stellt Anne fest, daß sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt. Gilt das immer?

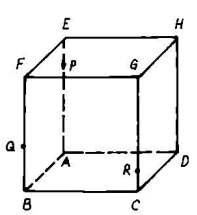
231012 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $x^3-9x>0$ gilt!

231013 Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, daß sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.



Im Bild ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z. B. die Dame im Bild auf c2.
Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

231014 Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Bild) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q=\frac{1}{2}$, $\alpha=45°$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE, BF und CG mögen Punkte P, Q und R so liegen, daß $\overline{AP}:\overline{PE}=4:1$, $\overline{BQ}:\overline{QF}=2:3$ und $\overline{CR}:\overline{RG}=1:4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P, Q und R geht,

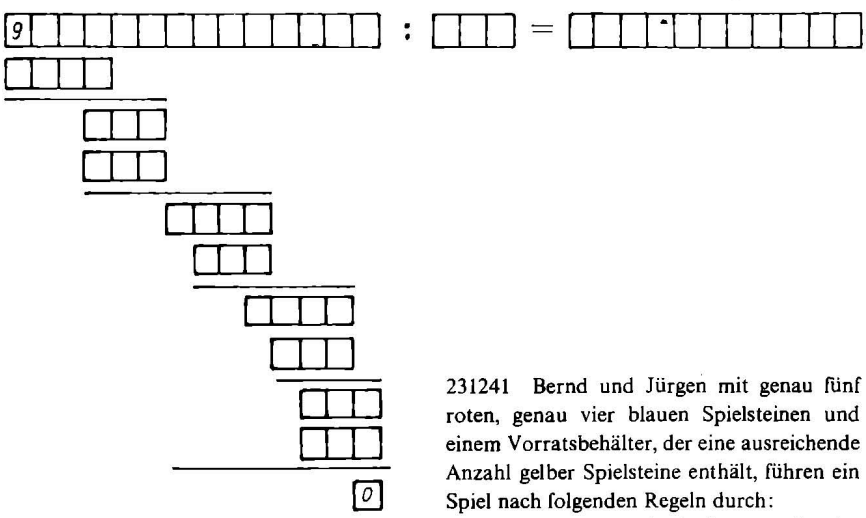


die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P', Q', R' der Punkte P, Q, R und dann das Bild S' des Punktes S! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, daß der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!

Olympiadeklassen 11/12

231211 In dem folgenden Schema (siehe Bild) ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas an erster Stelle die Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, daß es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

231212 Man ermittle alle Tripel $(x;y;z)$ von Null verschiedener reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x+\frac{1}{y}=-2 \tag{1}$$

$$y+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2} \tag{2}$$

$$z=1. \tag{3}$$

231213 Man gebe die Menge aller ebenen, konvexen, nichtentarteten Vierecke $ABCD$ an, für die zwei der vier folgenden Aussagen wahr und zwei der Aussagen falsch sind:

(1) Das Viereck $ABCD$ besitzt wenigstens ein Paar paralleler Seiten.
(2) Das Viereck $ABCD$ besitzt vier gleichlange Seiten.
(3) Ein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ ist ein rechter Winkel.
(4) Kein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ hat eine Größe von 90°.

Teilnehmer des Klubs *Junger Mathematiker* Karl-Marx-Stadt beim Training

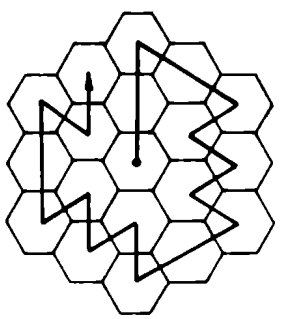
231241 Bernd und Jürgen mit genau fünf roten, genau vier blauen Spielsteinen und einem Vorratsbehälter, der eine ausreichende Anzahl gelber Spielsteine enthält, führen ein Spiel nach folgenden Regeln durch:
Zu Beginn werden die fünf roten, die vier blauen und genau drei gelbe Steine auf den Tisch gelegt. Danach sind die Spieler abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, nimmt drei beliebige Steine vom Tisch, wobei es nur verboten ist, drei rote Steine zu nehmen; dann verfährt er nach folgenden Vorschriften:

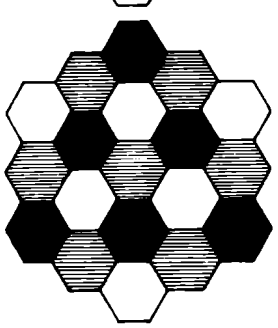
(1) Jeder genommene rote Stein wird wieder auf den Tisch gelegt.
(2) Für jeden genommenen blauen Stein wird ein gelber Stein aus dem Vorratsbehälter auf den Tisch gelegt; der blaue Stein kommt in den Vorratsbehälter.
(3) Jeder genommene gelbe Stein kommt in den Vorratsbehälter.

Sind diese Vorschriften befolgt, so hat der betreffende Spieler seinen Zug beendet.
Hat ein Spieler mit seinem Zug erreicht, daß nur noch rote Steine auf dem Tisch liegen (so daß der Gegenspieler keinen Zug mehr anschließen kann), so hat er gewonnen.
Jürgen macht den ersten Zug.
Geben Sie eine Strategie an, mit der Jürgen den Sieg erzwingen kann!

Lösungen

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. B. Dynkin und Prof. Dr. W. A. Uspenski





Olympiade-Kryptogramm

Die Buchstaben in dem Wort OLYMPIADE sind so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

O · D + O =	E
OL · D + L =	ED
OLY · D + Y =	EDA
OLYM · D + M =	EDAI
OLYMP · D + P =	EDAIP
OLYMPI · D + I =	EDAIPM
OLYMPIA · D + A =	EDAIPMY
OLYMPIAD · D + D =	EDAIPMYL
OLYMPIADE · D + E =	EDAIPMYLO

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Lösungen zu: Für den Sprachfreund

Zehn Ziffern

▲1▲ Schreibt die zehn Grundziffern (0, 1, ..., 9) so in die Quadrate, daß drei richtig gerechnete Additionsaufgaben entstehen!

Lösung: 4 + 6 = 10; 2 + 7 = 9; 3 + 5 = 8.

▲2▲ Ein beliebtes Geduldsspiel ist, irgendeinen Namen oder ein bekanntes Sprichwort zu nehmen und damit eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe zu bilden. Es ist oft notwendig, eine zusätzliche Bedingung einzufügen, um eine eindeutige Antwort zu erhalten. Beispiel (s. englischen Text). (Beachte, daß O ein Buchstabe ist!): Jeder Buchstabe bedeutet eine unterschiedliche Ziffer, und SOW ist ein vollständiges Quadrat. Eine maßgebende Voraussetzung ist, daß der linke Endbuchstabe jedes Wortes keine Null ist.

Lösung: 461 + 39 + 439 = 939.

▲3▲ Eine Badewanne wird durch ihren Wasserhahn in 10 Minuten gefüllt und durch ihren Abfluß in $\frac{1}{4}$ Stunde geleert. Man öffnet den Wasserhahn und vergißt, den Abfluß zu schließen. Nach welcher Zeit ist die Badewanne gefüllt?

Lösung: Die Anzahl der Minuten sei x, dann gilt die Gleichung

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 1,$$

$$\frac{5x}{150} = 1,$$

$$x = 30.$$

Die Badewanne ist nach 30 Minuten gefüllt.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Wie alt sind sie?

Ralf ist 9, Roland $11\frac{1}{2}$ und Rüdiger 14 Jahre alt.

Drachenlabyrinth

Spiel mit Zahlen

20	·	6	:	16	8
:		+		+	
5	·	8	:	3	15
·		−		:	
8	+	11	−	8	10
32		4		2	

18	·	8	:	12	12
+		+		+	
10	+	17	:	9	3
:		−		−	
14	−	13	+	18	17
2		12		5	

Sinnvolle Begriffe gesucht

$a = 1000 + 1 + 8 + 1 + 1000 = 2010$

$b = 100 + 11 + 9 + 7 + 4 + 3 + 7 + 1 + 3 + 7 + 3 = 155$

$a - b = 2010 - 155 = 1855$

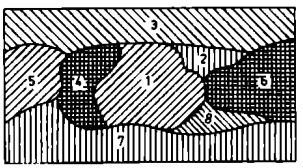
C. F. Gauß starb im Jahre 1855.

Kryptarithmetik

$$38977 + 29026 = 68003;$$
$$29026 + 42651 = 71677.$$

Färbung einer Landkarte

Wir bezeichnen die vier Farben mit a, b, c, d und färben zuerst das Gebiet 1 (s. Skizze) mit a und 2 mit b. Da 6 ein Nachbar von 1 und 2 ist, erhält dieses Gebiet die Farbe c. Die Länder 4 und 6 haben keine gemeinsame Grenze; wir können für 4 also auch c wählen. Da 5 und 1 getrennt liegen, können wir 5 mit a färben. Das Gebiet 3 ist ein Nachbar von 1, 2, 4, 5, 6; für dieses Gebiet bleibt uns nur die Farbe d. Zum Schluß färben wir 7 noch mit b und 8 mit d und haben so unsere Aufgabe gelöst.



Fünf Kongreßteilnehmer

Frank Seumig paßt nicht zum Quartett der vier Kombinatoriker (Inversion, Permutation, Variation, *Kreisumfang*, Kombination).

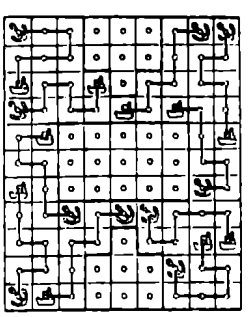
Unterwegs ins Bad

Im Bad sind wiederzufinden:
B–5, D–7, G–13, H–17, I–20,
L–11, P–8, T–6, Z–4.

Eins von fünf

Bild 2 gehört nicht in die Reihe.

Ein Schiff und ein Anker



Vexierbild

Man drehe das Bild um 180°. Dann ist Xantippe links oben zu sehen.

Lösung zu: Für den Schachfreund

Weiß erreicht nach 1. c3 oder c4 je drei verschiedene Damestellungen, nach 1. e3 oder e4 je vier, nach 1. d4 zwei und nach 1. d3 eine Damestellung. Das ergibt 17 einfarbige Stellungen. Weiß und Schwarz kombiniert: $17 \cdot 17 = 289$ Stellungen. Davon sind zwei illegale Stellungen – so bleibt Schwarz nach 1. c3 oder c4 d5 2. Da4+ Dd6 (?) im Schachgebot – zu subtrahieren. Somit ergibt sich als Lösung, daß 287 verschiedene Stellungen möglich sind.

Lösung zu: Eine unterhaltsame Aufgabe von Karl Marx (Original),

Zahl der Männer sei $= p$, der Weiber $= q$; der Kinder $= r$; so haben wir:

1) $p + q + r = 30$; 2) $3p + 2q + r = 50$;

daraus p, q und r zu finden in *ganzen* und *positiven* Zahlen.

Gleichung 1) gibt

$r = 30 - p - q$; also

$p + q < 30$; setzen wir

den Wert von r in 2-te Gleichung, so

$3p + 2q + 30 - p - q = 50$; also

$2p + q + 30 = 50$; also

$q = 20 - 2p$, $p + q = 20 - p < 30$.

Aus der Gleichung $q = 20 - 2p$

folgt, daß wenn $p = 10$,

$q = 20 - 20 = 0$; wird daher größere Zahl als 10 für p genommen, so würde q negativ; z. B. wenn $p = 11$ wird

$p + q = 20 - p$ zu

$11 + q = 20 - 11$, oder

$q = 20 - 22 = -2$.

Dies ausgeschlossen. Für p können wir also alle Zahlen nehmen, die nicht > 10. Wir erhalten dann 11 Antworten, erinnernd, daß

$p + q < 30$, und $q = 20 - 2p$

[ist daher $p = 0$, so $q = 20$]:

$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$

$q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0,$

$r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$

Schließen wir aus

I) $p = 0$, $q = 20$, $r = 10$, und

II) $p = 10$, $q = 0$, $r = 20$,

d. h. erste und letzte Lösung, wo sub I) $p = 0$ und sub II) $q = 0$, so bleiben 9 Lösungen.

Lösungen zu: Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei Leonhard Euler,
Heft 3/83

▲1▲ a) I. $4x + 2y + \frac{z}{3} = 100$

II. $x + y + z = 100$

$11x + 5y = 200$;

für $x = 5$ wird $y = 40 - 11 = 29$ somit $z = 66$

▲1▲ b) Euler: Es sei die Zahl der Schweine gleich p, die der Ziegen gleich q, die der Schafe gleich r; dann hat man folgende zwei Gleichungen:

I. $p + q + r = 100$,

II. $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$.

Multipliziert man die zweite mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, und dieser Wert gibt in der zweiten für r gesetzt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18}{5}p$; also muß $18p$ durch 5 teilbar sein oder 5 als einen Faktor in sich schließen. Setzt man also $p = 5s$, wo wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebig ganze Zahl genommen werden kann, doch so, daß q nicht negativ wird. Daher kann s nicht größer als 3 angenommen werden, und damit haben, wenn auch 0 ausgeschlossen wird, nur folgende drei Auflösungen Geltung:

Wenn $s =$	1,	2,	3,
wird $p =$	5,	10,	15
$q =$	42,	24,	6
$r =$	53,	66,	79.

▲2▲ a) Bei n Toren sind mitzunehmen $2 \cdot (2^n - 1) + 1$ Silberstücke. Bei 4 Toren also $2 \cdot (2^4 - 1) + 1 = 2^5 - 1 = 31$ Silberstücke.

▲2▲ b) Euler: Um die Aufgabe leichter auflösen zu können, setzen wir das ganze hinterlassene Vermögen gleich z Taler, und weil alle Kinder gleich viel bekamen, sei der Anteil eines jeden gleich x; daraus folgt die Anzahl der Kinder zu $\frac{z}{x}$.

Hieraus wollen wir die Auflösung in folgender Art vornehmen:

Das zu teilende Geld	Ordnung der Kinder	Anteil jedes Kindes	Die Differenzen der Anteile
z	das erste	$x = 100 + \frac{z - 100}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - x$	das zweite	$x = 200 + \frac{z - x - 200}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 2x$	das dritte	$x = 300 + \frac{z - 2x - 300}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 3x$	das vierte	$x = 400 + \frac{z - 3x - 400}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 4x$	das fünfte	$x = 500 + \frac{z - 4x - 500}{10}$	usw.
$z - 5x$	das sechste	$x = 600 + \frac{z - 5x - 600}{10}$	

In der letzten Spalte sind hier die Differenzen angegeben, die entstehen, wenn man jedes Erbteil von dem folgenden subtrahiert. Weil nun alle Erbteile einander gleich sind, so muß jede dieser Differenzen gleich 0 sein. Da es sich nun so fügt, daß alle Differenzen einander gleich sind, genügt es, daß man eine davon gleich 0 setzt. Daher erhalten wir die Gleichung $100 - \frac{x + 100}{10} = 0$. Man multipliziert mit 10 und erhält $100 - x - 100 = 0$ oder $900 - x = 0$, also $x = 900$. Hieraus ersehen wir schon, daß das Erbteil jedes Kindes 900 Taler betragen wird. Nimmt man nun irgendeine von den Gleichungen in der dritten Spalte, z. B. die erste $900 = 100 + \frac{z - 100}{10}$, dann findet man daraus sogleich z.

Es folgt nämlich

$9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$,

also $z = 8100$; damit wird $\frac{z}{x} = 9$.

Antwort: Es waren 9 Kinder; das hinterlassene Vermögen betrug 8100 Taler, von denen jedes Kind 900 Taler erhielt.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb,
Heft 6/82 – Fortsetzung

Ph 9 ■119 Geg.: $m = 4000$ kg, $t = 7{,}5$ s,

$h = 3{,}5$ m, $v_k = 30 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$F_{max} = 60$ kN, $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ges.: Ausnutzung der maximalen Haftkraft η

Nach der Skizze ergibt sich folgende Berechnung: $h = h_b + h_k$, (1a)

$t = t_b + t_k$, (1b)

$h_b = a \cdot \frac{t_b^2}{2} = \frac{v_k \cdot t_b}{2}$, (2a)

$h_k = v_k \cdot t_k$ und $v_k = a \cdot t_b$. (2b) und (2c)

Mit (2a) und (2b) in (1a) ist

$h = \frac{v_k \cdot t_b}{2} + v_k \cdot t_k = v_k \left(\frac{t_b}{2} + t_k \right)$.

Mit $t_k = t - t_b$ aus (1b) folgt weiter

$h = v_k \left(\frac{t_b}{2} + t - t_b \right) = v_k \left(t - \frac{t_b}{2} \right)$

und hieraus

$t - \frac{t_b}{2} = \frac{h}{v_k}$ und $\frac{t_b}{2} = t - \frac{h}{v_k}$ und $t_b = 2t - \frac{2h}{v_k}$,

$t_b = 2 \cdot 7{,}5 \text{ s} - \frac{2 \cdot 3{,}5 \text{ m}}{0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$,

$t_b = 1 \text{ s}$.

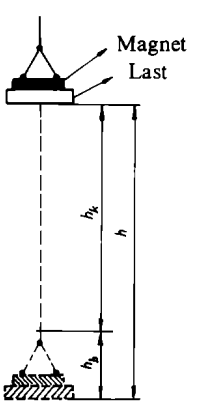
Damit ist die Beschleunigung

$a = \frac{v_k}{t_b} = \frac{0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ s}} = 0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (Aus 2c)

Die Beschleunigungskraft ist dann

$F_b = m \cdot a = 4000 \text{ kg} \cdot 0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2000 \text{ N}$

und die gesamte beim Anheben auftretende Hubkraft



$F_H = m \cdot g + F_b = 4000 \cdot 9{,}81\ \text{N} + 2000\ \text{N}$
$= 41240\ \text{N}$.
Die Ausnutzung der maximalen Haftkraft η beträgt dann
$\eta = \frac{F_H}{F_{max}} = \frac{41240\ \text{N}}{60000\ \text{N}} = 0{,}69 = 69\%$.
Die Ausnutzung der maximalen Haftkraft erfolgt zu 60%.

Ph 10/12 ■120 Geg.: $R = 1\ \Omega$
Ges.: R_G zwischen A und B
Bezeichnet man die Länge der Seite des Quadrates mit a, so wird der Draht durch das Biegen in die Teilstücke $l = 4a + a\sqrt{2}$ zerlegt. Da die Längen im Quadrat im gleichen Verhältnis zu den Teilwiderständen stehen, gilt

$$l = a(4+\sqrt{2}),$$
$$1 = a(4+\sqrt{2}),$$
$$a = \frac{1}{4+\sqrt{2}}\ \Omega. \quad (1)$$

Nach dem Gesetz über den verzweigten Stromkreis ist nun

$$\frac{1}{R_G} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{a\sqrt{2}},$$

also $R_G = a(2-\sqrt{2})$. (2)
(1) in (2) eingesetzt, ergibt

$$R_G = \frac{2-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}\ \Omega = \frac{(2-\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}{16-2}\ \Omega,$$

$$R_G = \frac{5-3\sqrt{2}}{7}\ \Omega \approx 0{,}1\ \Omega$$

Der Gesamtwiderstand beträgt rd. 0,1 Ω.

Ch 7 ■101
100 g Rohmehl ≙ 66,2 g Kalziumoxid
720 kg Rohmehl ≙ x

$$x = \frac{720\ \text{kg} \cdot 66{,}2\ \text{g}}{100\ \text{g}}$$
$$x = 476{,}6\ \text{kg}$$

100 g Rohmehl ≙ 20,6 g Siliziumdioxid
720 kg Rohmehl ≙ x

$$x = \frac{720\ \text{kg} \cdot 20{,}6\ \text{g}}{100\ \text{g}}$$
$$x = 148{,}3\ \text{kg}$$

100 g Rohmehl ≙ 6,6 g Aluminiumoxid
720 kg Rohmehl ≙ x

$$x = \frac{720\ \text{kg} \cdot 6{,}6\ \text{g}}{100\ \text{g}}$$
$$x = 47{,}5\ \text{kg}$$

100 g Rohmehl ≙ 3,1 g Eisen(III)-oxid
720 kg Rohmehl ≙ x

$$x = \frac{720\ \text{kg} \cdot 3{,}1\ \text{g}}{100\ \text{g}}$$
$$x = 22{,}3\ \text{kg}$$

In 720 kg des Rohmehles sind 476,6 kg Kalziumoxid, 148,3 kg Siliziumdioxid, 47,5 kg Aluminiumoxid und 22,3 kg Eisen(III)-oxid enthalten.

Ch 8 ■102
a) 1000 g Lösung ≙ 1,65 g Kalziumhydroxid
100 g Lösung ≙ x

$$x = \frac{1{,}65\ \text{g} \cdot 100\ \text{g}}{1000\ \text{g}}$$
$$x = 0{,}165\ \text{g}$$

Eine gesättigte Kalziumhydroxid-Lösung ist 0,165%ig.

b) $0{,}00165 \cdot m$ $0{,}02 \cdot 24\ \text{g}$
$Ca(OH)_2 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + 2H_2O$
74 g 111 g

$$m = \frac{0{,}02 \cdot 24\ \text{g} \cdot 74\ \text{g}}{111\ \text{g} \cdot 0{,}00165}$$
$$m = 193{,}9\ \text{g}$$

193,9 g 0,165%ige Kalziumhydroxidlösung müssen mit Salzsäure reagieren, damit 24 g 2%ige Kalziumchlorid-Lösung entstehen.

Ch 9 ■103
2000 g
$CaCO_3 \cdot MgCO_3 \rightarrow MgO + CaO + 2CO_2$
100 g 84 g
184 g ≙ 1 mol
2000 g ≙ x

$$x = \frac{2000\ \text{g} \cdot 1\ \text{mol}}{184\ \text{g}}$$
$$x = 10{,}9\ \text{mol}$$

10,9 mol sind in 2000 g Dolomit enthalten.
Diese 10,9 mol setzen sich zusammen aus
5,45 mol Kalziumkarbonat und
5,45 mol Magnesiumkarbonat.
Für die Zersetzung von Kalziumkarbonat gilt:
5,45 mol ≙ x
1 mol ≙ 165,3 kJ

$$x = \frac{5{,}45\ \text{mol} \cdot 165{,}3\ \text{kJ}}{1\ \text{mol}}$$
$$x = 900{,}9\ \text{kJ}$$

Für die Zersetzung von Magnesiumkarbonat gilt: 5,45 mol ≙ x
1 mol ≙ 105 kJ

$$x = \frac{5{,}45\ \text{mol} \cdot 105\ \text{kJ}}{1\ \text{mol}}$$
$$x = 572{,}3\ \text{kJ}$$

$900{,}9\ \text{kJ} + 572{,}3\ \text{kJ} = 1473{,}2\ \text{kJ}$
Zur Zersetzung von 2 kg Dolomit sind 1473,2 kJ erforderlich.

Ch 10/12 ■104

$$n_{CaCO_3} = \frac{m_{CaCO_3}}{M_{CaCO_3}} = \frac{419{,}1\ \text{g}}{100\ \text{g}}$$

$\approx 4{,}2\ \text{mol}\ CaCO_3 \triangleq 4{,}2\ \text{mol}\ CaO$

$$n_{Al_2O_3} = \frac{m_{Al_2O_3}}{M_{Al_2O_3}} = \frac{172{,}9\ \text{g}}{102\ \text{g}} \approx 1{,}7\ \text{mol}\ Al_2O_3$$

Bei der Reaktion werden a mol $3CaO \cdot Al_2O_3$ und b mol $12CaO \cdot 7Al_2O_3$ gebildet.
Für CaO: $3a + 12b = 4{,}2$
für Al_2O_3: $a + 7b = 1{,}7$

$3a + 12b = 4{,}2$ $\quad a = 1{,}7 - 7b$
$3(1{,}7 - 7b) + 12b = 4{,}2$
$-9b = -0{,}9$
$b = 0{,}1$
$3a + 12(0,1) = 4{,}2$
$3a = 3$
$a = 1$

$m = a \cdot M$

$$m = 1\ \text{mol} \cdot 270\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$m = 270\ \text{g}$
$m = b \cdot M$

$$m = 0{,}1\ \text{mol} \cdot 1386\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$m = 138{,}6\ \text{g}$

0,27 kg $3CaO \cdot Al_2O_3$ und 0,1386 kg $12CaO \cdot 7Al_2O_3$ werden gebildet.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 1/83:

Ma 5 ■2294 Aus (2) folgt: Arthur wohnt nicht im Haus Nr. 14. Aus (3) folgt: Weder Christian noch Dirk wohnen im Haus Nr. 14. Folglich wohnt Bernd im Haus Nr. 14.
Aus (3) folgt weiter: Weder Bernd noch Christian noch Dirk wohnen im Haus Nr. 11. Deshalb wohnt Arthur im Haus Nr. 11.
Aus (1) folgt: Christian wohnt nicht im Haus Nr. 17. Deshalb wohnt Dirk im Haus Nr. 17 und Christian im Haus Nr. 16.

Ma 5 ■2295 Es sei x die kleinste dieser vier Zahlen; dann sind $2 \cdot x$, $4 \cdot x$ und $8 \cdot x$ die übrigen drei Zahlen, und es gilt $x + 2x + 4x + 8x = 255$, $15x = 255$, also $x = 17$. Die vier Zahlen lauten somit 17, 34, 68 und 136.

Ma 5 ■2296 Frank hat für die Limonade $n \cdot 51$ Pf $= 3 \cdot 17 \cdot n$ Pf, für den Apfelmost $9 \cdot x$ Pf $= 3 \cdot 3 \cdot x$ Pf, für die Äpfel $3 \cdot y$ Pf, insgesamt also $3 \cdot (17n + 3x + y)$ Pf zu bezahlen. Dieser Geldbetrag ist durch 3 teilbar. Nun ist der Betrag von 9,10 M = 910 Pf aber nicht durch 3 teilbar. Deshalb muß sich die Kassiererin vertippt haben.

Ma 5 ■2297 Die folgenden zweistelligen natürlichen Zahlen haben die Quersumme 12: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93.
Wegen $2 \cdot 57 - 12 = 102$ und $102 > 99$ brauchen wir nur die Zahlen 39 und 48 zu untersuchen. Es gilt $2 \cdot 39 - 12 = 66$ und $2 \cdot 48 - 12 = 84$.
Somit existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 48.

Ma 5 ■2298 Angenommen, die Schüler der Klasse 5b sammelten x Gläser; die Schüler der Klasse 5a sammelten dann $(x + 22)$ Gläser, die der Klasse 5c nur $(x - 7)$ Gläser. Das sind zusammen $(3x + 15)$ Gläser. Nun gilt $3x + 15 = 645$, $3x = 630$, $x = 210$. Die Schüler der Klasse 5a sammelten 232, die der Klasse 5b hingegen 210, die der Klasse 5c nur 203 Gläser.

Ma 5 ■2299 Kerstins Schwester Gerda ist gegenwärtig $12 - 2 = 10$ Jahre alt. Vor drei Jahren war Kerstin $12 - 3 = 9$ Jahre, ihre Schwester Gerda $10 - 3 = 7$ Jahre alt. Vor drei Jahren war deshalb Kerstins Mutter $5 \cdot 7 = 35$ Jahre, Kerstins Vater $4 \cdot 9 = 36$ Jahre alt. Somit ist Kerstins Mutter gegenwärtig $35 + 3 = 38$ Jahre, ihr Vater $36 + 3 = 39$ Jahre alt.

Ma 6 ■2300 Die Anzahl der Bücher, die Peter besitzt, ist durch 2, 5 und 8 teilbar, also durch 40 teilbar. Deshalb könnte Peter 40 oder 80 Bücher besitzen. Nun gilt

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{40 - 20 - 8 - 5}{40} = \frac{7}{40} = \frac{14}{80}.$$

Da 14 keine Primzahl ist, entfällt die Anzahl 80. Peter besitzt 40 Bücher; 20 davon sind

Abenteuerromane, 8 sind Nachschlagewerke, 5 sind Tiergeschichten, und 7 sind populärwissenschaftliche Bücher.

Ma 6 ■2301 Wegen $F \cdot U = 48$ gilt $F \neq 0$ und $U \neq 0$. Wegen $E + F = 12$ gilt $1 \leqq E \leqq 11$ und $1 \leqq F \leqq 11$. Wegen $E \cdot R = 28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$ könnte $E = 1, 2, 4, 7$ sein. Wegen $F \cdot U = 48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$ könnte $F = 1, 2, 3, 4, 6, 8$ sein. Wegen $E + F = 12$ gilt $E = 4$ und $F = 8$, also $U = 48 : 8 = 6$, $R = 28 : 4 = 7$ und $T = 10 - 7 + 6 = 9$.
Daraus folgt weiter $E + R + F + U + R + T = 4 + 7 + 8 + 6 + 7 + 9 = 41$.

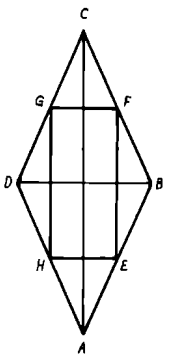
Ma 6 ■2302 Wegen $2 \mid 8$, $3 \mid 9$, $4 \mid 8$ und $6 = 2 \cdot 3$, also $6 \mid 8 \cdot 9$ ist nur die Teilbarkeit durch 7, 8, 9 und 10 von Bedeutung. Das k.g.V. dieser Zahlen lautet $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. Wegen $x < 3000$ und $2x = 5040 > 3000$ hat Herr A. genau 2520 M im Tele-Lotto gewonnen.

Ma 6 ■2303 Aus g) folgt: Agnes hat den Nachnamen Jahn.
Aus c) folgt: Christa hat nicht den Nachnamen Meier.
Aus c), d) und h) folgt: Christa erlernt weder die tschechische, noch die französische Sprache, noch Latein. Folglich erlernt Christa die englische Sprache.
Aus f) folgt: Christa hat nicht den Nachnamen Schmidt. Folglich hat sie den Nachnamen Robert.
Aus c) folgt: Das älteste Mädchen hat nicht den Vornamen Christa.
Aus e) folgt: Das älteste Mädchen heißt Agnes. Somit heißt das jüngste Mädchen Babett.
Aus d) folgt: Babett hat nicht den Nachnamen Meier. Folglich hat Katja den Nachnamen Meier und Babett den Nachnamen Robert.
Aus c) folgt: Agnes, Katja und Christa erlernen nicht die tschechische Sprache. Folglich erlernt Babett die tschechische Sprache.
Aus d) folgt: Babett, Katja und Christa lernen nicht Latein.
Folglich lernt Agnes Latein. Deshalb erlernt Katja die französische Sprache.
Babett ist jünger als Katja, diese jünger als Christa, diese jünger als Agnes.

Ma 6 ■2304 Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p_1, $p_1 + 1$, $p_1 + 2$, $p_1 + 3$, $p_1 + 4$ sind p_1, $p_1 + 2 = p_2$, $p_1 + 4 = p_2 + 2 = p_3$ sämtlich Primzahlen, also nicht durch 3 teilbar. Deshalb muß von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p_1, $p_1 + 1$, p_2 die Zahl $p_1 + 1$ durch 3 teilbar sein. Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p_2, $p_2 + 1$, p_3 müßte aus dem gleichen Grunde $p_2 + 1$ durch 3 teilbar sein. Das führt zu einem Widerspruch; denn von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p_1 + 1$, p_2, $p_2 + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Deshalb existiert außer dem gesamten Primzahldrilling (3, 5, 7) kein weiterer.

Ma 7 ■2305 Angenommen, Heinz hat x Mark, Klaus y Mark gespart; dann gilt $x + 2 = y - 2$, also $y = x + 4$, und $3 \cdot (x - 11) = y + 11$. Durch Einsetzen erhalten wir $3 \cdot (x - 11) = x + 4 + 11$, $3x - 33 = x + 15$, $2x = 48$, also $x = 24$ und somit $y = 28$. Heinz hat 24 M, Klaus 28 M gespart.

Ma 7 ■2306 Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist parallel zur dritten Dreiecksseite und halb so lang wie diese. Daraus folgt $\overline{GF} \parallel \overline{DB}$ und $\overline{HE} \parallel \overline{DB}$, also $\overline{GF} \parallel \overline{HE}$.



Analog dazu gilt $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. Das Viereck $EFGH$ ist somit ein Parallelogramm. Da die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ Symmetrieachsen des Rhombus sind, ist das Parallelogramm $EFGH$ ein Rechteck. Es seien e bzw. f die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ und a bzw. b die Längen der Rechteckseiten $\overline{EF}$ bzw. $\overline{FG}$; dann gilt $e = 2a$ und $f = 2b$. Aus $A_R = \frac{1}{2} ef = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab$ und $A_V = ab$ folgt $A_R = 2 \cdot A_V$.

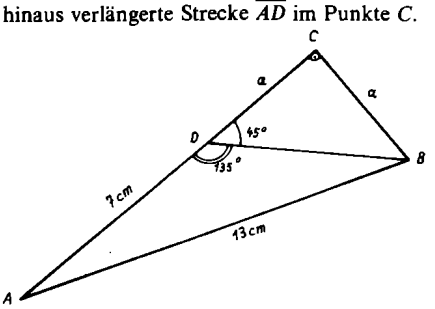
Ma 7 ■2307 Man beginnt zunächst mit den Buchstaben:

AA	BA	CA ... (26mal)
AB	BB	insgesamt $26 \cdot 26 = 676$mal
AC	BC	
AD	BD	

. . .
26mal 26mal

Die Zifferndarstellung geht von 00–00 bis 99–99, umfaßt also insgesamt 10000 mögliche Nummern.
Nun läßt sich jede der 676 möglichen Buchstabenzusammenstellungen von AA bis ZZ mit jeder der 10000 Nummern kombinieren, so daß insgesamt $676 \cdot 10000 = 6760000$ verschiedene Autonummern möglich wären.

Ma 7 ■2308 Es sei a die Länge der Kathete $\overline{BC}$, also $(a + 7\,\text{cm})$ die Länge der Kathete $\overline{AC}$. Dann läßt sich die Länge a auf $\overline{AC}$ von C bis D abtragen, wobei D innerer Punkt von $\overline{AC}$ ist. Wegen $\overline{CB} = \overline{CD}$ ist das Dreieck BCD gleichschenklig. Die Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle CDB$ haben deshalb die Größe 45°. Der Winkel $\sphericalangle ADB$ hat folglich die Größe 135°. Somit läßt sich das Teildreieck ABD aus $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ und $\sphericalangle ADB$ konstruieren. Die Mittelsenkrechte von $\overline{BD}$ schneidet die über D hinaus verlängerte Strecke $\overline{AD}$ im Punkte C.



Ma 8 ■2309 Aus $\frac{a}{5} + \frac{b}{6} + \frac{c}{7} < 1$ folgt $\frac{42a}{210} + \frac{35b}{210} + \frac{30c}{210} < \frac{210}{210}$, also $42a + 35b + 30c < 210$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
a) Es sei $a = 2$, also $35b + 30c < 126$. Wegen $b > a$ muß $b \geqq 3$ gelten. Für $b = 3$ gilt $30c < 21$, was nicht möglich ist.
b) Es sei $a = 1$, also $35b + 30c < 168$. Wegen $b > a$ muß $b \geqq 2$ gelten. Für $b = 2$ gilt $30c < 98$, also $c = 3$ wegen $c > b$.
Somit existiert genau eine Lösung; sie lautet [1, 2, 3], und es gilt

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} = \frac{42 + 70 + 90}{210} = \frac{202}{210} < 1.$$

Ma 8 ■2310 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, dann gilt die Behauptung

$$8 \mid (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 - 2.$$

Nun ist $(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 - 2$
$= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 - 2$
$= 8n^2 + 16n + 8$
$= 8(n^2 + 2n + 1)$.
Es gilt $8 \mid 8(n^2 + 2n + 1)$, folglich gilt auch die Behauptung, w.z.b.w.

Ma 8 ■2311 Nach Aufgabenstellung gilt für die Geburtsjahre die Zifferndarstellung $19ab$ bzw. $19ba$.
Weiter gilt $(10a + b) - (10b + a) = 36$, also $a - b = 4$. Man kann nun die folgende Tabelle aufstellen:

Geburtsjahre von Mutter	Tochter	Alter der Tochter (1982)
1904	1940	42
1926	1962	20
1937	1973	9
1948	1984	–

Nur die Geburtsjahre 1937 (Mutter) und 1973 (Tochter) erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe.

Ma 8 ■2312
Die Gerade PQ schneide die Gerade AD im Punkt R. Nun gilt:
Länge von $\overline{DQ} = 3$ cm und Länge von $\overline{AP} = 9$ cm. Es sei die Länge von $\overline{DR} = y$, also die Länge von $\overline{AR} = y + 12$ cm. Nach dem Strahlensatz erhalten wir
$y : (y + 12\,\text{cm}) = 3\,\text{cm} : 9\,\text{cm} = 1 : 3$,
$3y = y + 12$ cm, also $y = 6$ cm.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle DNM$ und $\triangle DQR$ folgt
$x : (12\,\text{cm} - x) = 3\,\text{cm} : 6\,\text{cm} = 1 : 2$,
$2x = 12\,\text{cm} - x$, also $x = 4$ cm.
Die Strecke $\overline{DN}$ ist 4 cm lang.

Teubner-Verlag, Leipzig: Mathematikertagung in Reinhardsbrunn

LEIPZIG

MGDDR

Enge und vertrauensvolle Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern des In- und Auslandes ist seit vielen Jahren für die Arbeit des Teubner-Verlages, Leipzig, kennzeichnend. Bedeutende Mathematiker zu einer Tagung einzuladen, dort über aktuelle, grundsätzliche Trends ihres Fachgebietes zu beraten und zugleich neue Buchvorhaben zu erörtern, das nahm sich der Verlag im Sommer 1980 allerdings zum ersten Mal vor. Damals begannen die konkreten Vorbereitungen, ein Jahr später wurden die Einladungen verschickt, und im Oktober 1982 war es dann soweit: Der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, veranstaltete die Tagung „Aktuelle Probleme und Entwicklungstendenzen der Mathematik". Mit der Organisation und Durchführung einer wissenschaftlichen Tagung beschritt der Verlag Neuland, und deshalb war es um so erfreulicher, daß mehr als 60 Mathematiker aus der UdSSR, der ČSSR, aus Polen, Rumänien, Österreich, der BRD, Frankreich, Italien, Finnland, Schweden, Großbritannien, Kanada, Japan, den USA und aus der DDR der Einladung nach Reinhardsbrunn (siehe Bild) folgten.

Neben programmatischen Übersichtsvorträgen wie „Recent Trends in Riemannian Geometry" von Prof. Dr. M. Berger (Paris) oder „Einheitlichkeit, Wirklichkeitsbezug und Kommunizierbarkeit der Mathematik" von Prof. Dr. H. Dinges (Frankfurt/Main) wurden in den drei Sektionen Analysis, Algebra/Geometrie und Stochastik auch zahlreiche Spezialvorträge gehalten. So sprachen beispielsweise Prof. Dr. A. Göpfert (Merseburg) „Über einige Entwicklungstrends in der Mathematischen Optimierung" und Prof. Dr. L. D. Kudrjavzev (Moskau) über „Some Topics of the Imbedding Theory of Function Spaces and its Applications". Abgerundet wurde das dreitägige wissenschaftliche Programm durch den Vortrag von Prof. Dr. T. Banchoff (Providence), der Möglichkeiten der Computergrafik anhand selbstgefertigter mathematischer Filme vorführte, sowie durch eine gemeinsame Wanderung zur nahegelegenen Marienglashöhle. Zahlreiche ausländische Teilnehmer nutzten ihren Aufenthalt in der DDR, um im Anschluß an die Tagung Weimar, Dresden, Leipzig oder Berlin zu besuchen.

Bereits im Januar 1983 sind die Reinhardsbrunner Tagungsberichte erschienen, und zwar als 50. Band der „Teubner-Texte zur Mathematik".

Vor allem derart kurze Veröffentlichungszeiten, günstige Preise auch bei niedrigen Auflagenhöhen und weltweite Verbreitung sind die wesentlichen Vorzüge dieser im Offsetverfahren erscheinenden Buchreihe. Wenn man dabei bedenkt, daß heute selbst Artikel in Fachzeitschriften erst ein bis zwei Jahre nach Fertigstellung des Manuskriptes gedruckt vorliegen, zugleich aber die wissenschaftliche Forschung immer schneller und sprunghafter in neue Bereiche vorstößt, dann wird verständlich, daß neben der traditionellen Buchherstellung auch neue Wege der Vervielfältigung und Verbreitung aktueller Erkenntnisse beschritten werden müssen. Seit 1976 stellt sich die Reihe „Teubner-Texte zur Mathematik" dieser Aufgabe. Der Autor liefert dem Verlag ein reproduktionsfähiges Schreibmaschinenmanuskript, und nach endgültiger Fertigstellung der Offsetvorlage erfolgt die Veröffentlichung des Buches innerhalb von vier bis fünf Monaten.

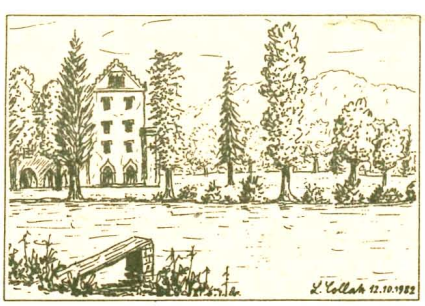
Diese Publikationsform hat der Teubner-Verlag, Leipzig, natürlich nicht erst neu erfinden müssen, im Gegenteil: er konnte an eigene, positive Traditionen anknüpfen, denn bereits in den neunziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts veröffentlichte der deutsche Mathematiker Felix Klein (1849–1925) handschriftliche Vorlesungsausarbeitungen im sogenannten Steindruckverfahren. Diese von Klein, dem Begründer des Mathematischen Seminars der Leipziger Universität, im Teubner-Verlag publizierten Autographien waren die eigentlichen Vorläufer unserer „Teubner-Texte zur Mathematik".

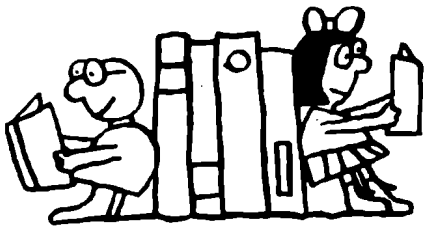
Inzwischen erschienen in dieser Reihe 50 Monographien, Spezialvorlesungen bzw. Tagungsbände, und vor allem die wachsende Zahl interessanter Manuskriptangebote, Lizenzvergaben in die UdSSR, nach Großbritannien, in die USA sowie der Export in mehr als 30 Länder zeigen, daß diese Bücher bereits innerhalb weniger Jahre einen festen Platz im vielschichtigen internationalen Angebot wissenschaftlicher Literatur einnehmen.

Abschließend sei noch ein bemerkenswertes Ergebnis der Tagung in Reinhardsbrunn hervorgehoben: Das bisher aus vier Mathematikern unseres Landes bestehende Herausgebergremium der Teubner-Texte wurde erweitert. Mit Mathematikern aus der UdSSR, der ČSSR, aus Italien, Großbritannien, Japan und der BRD wurde vertraglich vereinbart, daß sie ab 1983 dem Verlag als beratende Herausgeber zur Seite stehen und aktiv Einfluß auf die Auswahl und das fachliche Niveau der einzelnen Bücher nehmen.

Auf diesem Wege wird der Teubner-Verlag, Leipzig, seinem Ziel, in noch stärkerem Maße neueste Forschungsergebnisse des In- und Auslandes zu publizieren, näherkommen.

J. Weiß





Autorenkollektiv
unter Leitung von A. Hilbert

Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 5 bis 8

268 Seiten mit zahlr. Bildern
Preis 7,65 M
Bestell-Nr. 707 441 0
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

J. Lehmann

2 × 2 plus Spaß dabei

(Unterhaltungsmathematik für Klasse 1 bis 5)
80 Seiten, zahlr. farbige Bilder
Preis: 2,60 M
Bestell-Nr. 707 437 3
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

B. Noack/H. Titze

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR in den Klassen 5 bis 8

184 Seiten, 38 Abb. *Preis: 6,40 M*
Bestell-Nr. 707 624 8/002196
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

J. Ch. Schäfer · Herausgeber: J. Lehmann

Die Wunder der Rechenkunst

Etwa 240 Seiten mit etwa 45 Bildern
Preis: etwa 7,00 M
Bestell-Nr. 707 745 1
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Autorenkollektiv

Wissensspeicher Formeln und Werte

Mathematik – Physik – Astronomie – Chemie
Etwa 192 Seiten mit etwa 160 Bildern
Preis: etwa 5,80 M
Bestell-Nr. 707 438 1
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

A. Hilbert

Funktionen

Reihe: Wir wiederholen
Etwa 160 Seiten mit 203 Bildern
Preis: 6,80 M
Bestell-Nr. 546 706 9
VEB Fachbuchverlag Leipzig

A. Hilbert

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Reihe: Wir wiederholen
Etwa 112 Seiten mit 45 Bildern und 5 Tabellen *Preis: 4,80 M*
Bestell-Nr. 546 707 7
VEB Fachbuchverlag Leipzig

A. Hilbert

Differential- und Integralrechnung

Etwa 112 Seiten mit 59 Bildern
Preis: 4,80 M
Bestell-Nr. 546 704 2
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Wolfgang Schifferdecker

Der Dreh mit dem Würfel

96 Seiten mit 171 Zeichnungen, 11 Illustrationen und 13 Farbfotos
Preis: 8,00 M
Bestell-Nr. 653 857 8
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Wolfgang Hintze

Der ungarische Zauberwürfel

140 Seiten mit 171 z. T. farbigen Bildern und 4 Tabellen *Preis: 9,50 M*
Bestell-Nr. 571 154 3
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

A. A. Belski/L. A. Kaloujnine

Division mit Rest

75 Seiten, 3 Abb. *Preis: 5,00 M*
Bestell-Nr. 571 049 5
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

H. Grabowski, R. Fucke, R. Schroeder

Praktische Mathematik

438 Seiten mit 47 Bildern, 5 Tabellen und 203 Beispielen *Preis: 23,80 M*
Bestell-Nr. 545 746 9
VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Lohse/R. Ludwig

Prüfstatistik

Ein programmierter Lehrgang
236 Seiten mit 200 Lehrschritten und 25 Bildern *Preis: 18,00 M*
Bestell-Nr. 546 530 3
VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Sychow/P. Petzold

Mathematische Psychologie

Mathematische Modellierung und Skalierung in der Psychologie
323 Seiten, zahlr. Bilder *Preis: 32,00 M*
Bestell-Nr.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

W. Gilde

Licht und Schatten

Etwa 196 Seiten mit 133 Bildern
Preis: 24,00 M
Bestell-Nr. 546 721 0
VEB Fachbuchverlag Leipzig

W. Lischewski

Unterhaltsames aus der Mechanik

Etwa 120 Seiten mit 60 Bildern
Preis: etwa 5,50 M
Bestell-Nr. 546 788 6
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Neuere Titel der Mathematischen Schülerbücherei (MSB)

Band 101 Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (1980) (DVW)
Band 102 Hodi, Endre (Hrsg.) Mathematisches Mosaik. 1. Aufl. 1977, 2. Aufl. (1980) (U)
Band 103 Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW) (1982)
Band 104 Kufner, Raum und Entfernung (BGT) (1981)
Band 105 Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW) (1981)
Band 106 Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT) (1982)
Band 107 Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht (BGT) (1983)
Band 108 Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW) (1982)
Band 109 Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW) (1984)
Band 110 Pieper, Komplexe Zahlen (Theorie – Praxis – Geschichte) (DVW) (1983)
Band 111 Lehmann, 222 Historische Aufgaben aus 444 Jahrzehnten (U) (1984)
Band 112 Kudrjawzew, Gedanken über die moderne Mathematik (BGT) (1983)
Band 113 Belkner/Brehmer, Lebesguesche Integrale (DVW) (1984)
Band 114 Sprengel/Wilhelm, Funktionen und Funktionalgleichungen (DVW) (1983)
Band 115 Belski/Kaloujnine, Division mit Rest (DVW) (1982)
Band 116 Quaisser, Bewegungen in der Ebene und im Raum (DVW) (1985)
Band 117 Höfner/Klein, Wahrscheinlichkeit ganz einfach – Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung (U) (1985)
Band 118 Péter, Das Spiel mit dem Unendlichen (BGT) (1984)

J. Lehmann/D. Ziegler, Leipzig

Knifflige Fragen – Rund um den Kreis

▲1▲ Welche der schraffierten Flächen (Bild 1, 2, 3, 4) in den abgebildeten vier kongruenten Quadraten ist am größten? Die Antwort ist zu begründen.

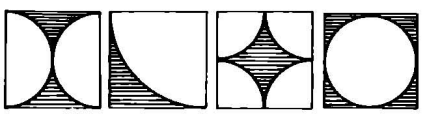
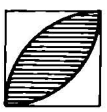


Bild 1 Bild 2 Bild 3 Bild 4

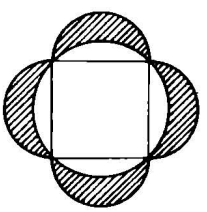
▲2▲ Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Quadrates beträgt die im Quadrat schraffierte, von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche? (Bild 5)

Bild 5



▲3▲ Die Zeichnung (Bild 6) stellt ein Quadrat mit seinem Umkreis dar. Ferner wurde über jeder Quadratseite als Durchmesser nach außen ein Halbkreis konstruiert. Dabei entstanden vier schraffiert dargestellte Kreisbogenzweiecke. Es ist nachzuweisen, daß die Summe der Flächeninhalte der vier Kreisbogenzweiecke gleich dem Flächeninhalt des Quadrates ist.

Bild 6



▲4▲ Die vier abgebildeten Figuren (Bild 7, 8, 9, 10) haben sämtlich den gleichen Durchmesser d. Es sind die schraffiert dargestellten Flächeninhalte durch d auszudrücken und der Größe nach zu ordnen.

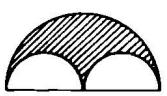
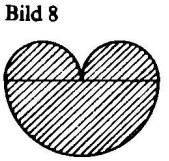


Bild 7

Bild 8



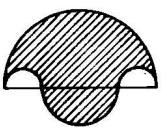


Bild 9

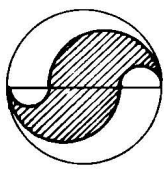


Bild 10

▲5▲ Die sieben abgebildeten großen Quadrate (Bild 11 bis 17) sind jeweils aus vier kongruenten kleineren Quadraten zusammengesetzt. Die schraffierten Flächen sind durch die Seitenlänge a eines kleinen Quadrates auszudrücken.

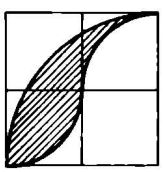


Bild 11

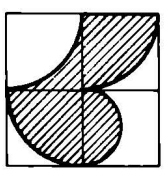


Bild 12

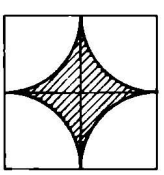


Bild 13

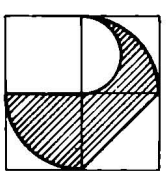


Bild 14

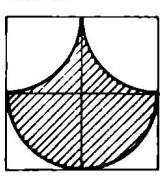


Bild 15

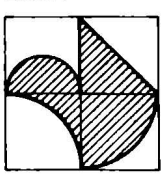


Bild 16

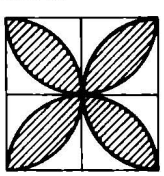
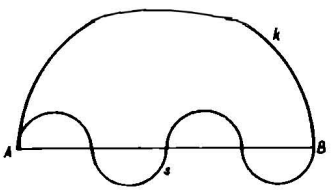


Bild 17

▲6▲ Über den Durchmesser $\overline{AB}$ eines Halbkreises k wurden, abwechselnd nach beiden Seiten, vier kleinere kongruente Halbkreise gezeichnet, die eine Schlangenlinie s bilden. Es ist zu untersuchen, welche der drei Beziehungen $k<s$, $k=s$ oder $k>s$ gilt. (Bild 18)



▲7▲ Das Bild zeigt zwei kongruente Quadrate. Dem linken Quadrat (Bild 19) wurde der Inkreis, dem rechten Quadrat (Bild 20) wurden vier kongruente Kreise einbeschrieben. Es sind die schraffierten Flächeninhalte beider Figuren zu vergleichen.

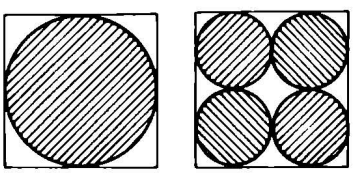


Bild 19 Bild 20

▲8▲ Jedes der kleinen Quadrate der drei abgebildeten Figuren (Bild 21, 22, 23) hat die Seitenlänge $a=1$ cm. Es ist der Flächeninhalt jeder der drei schraffierten Flächen zu berechnen.

Bild 21

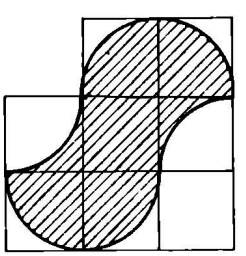


Bild 22

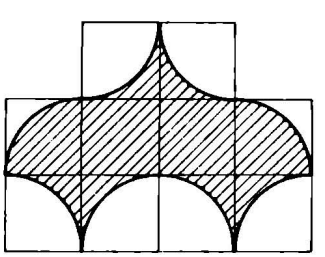
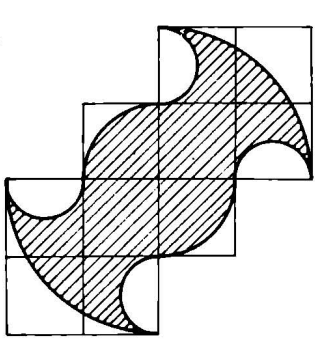


Bild 23



J. Lehmann/Th. Scholl

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 17 (1983) 4 · Seiten 73 bis 96