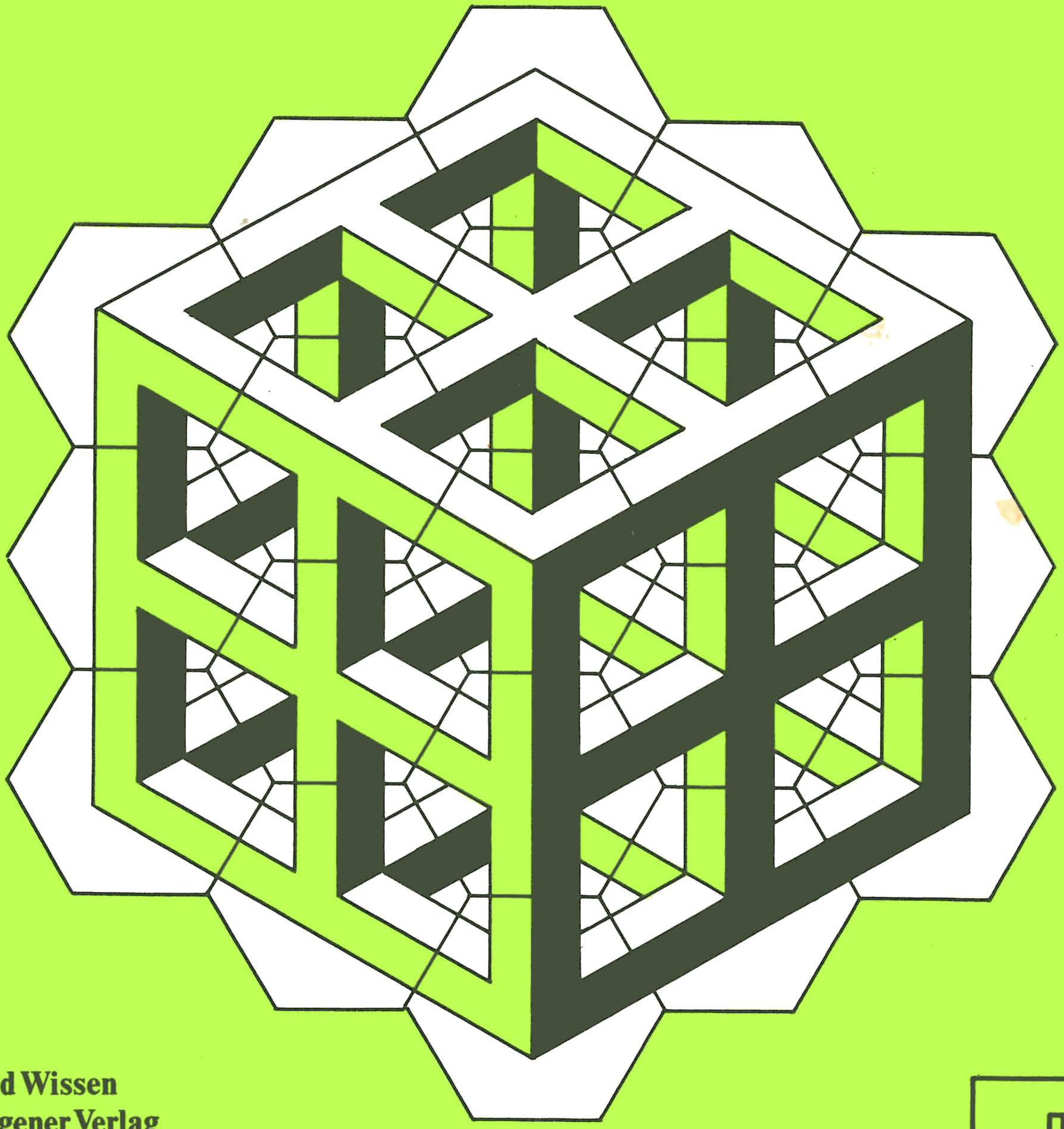
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

3

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Registriernummer 1545 des Presse- und Informationsdienstes der Regierung der DDR
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Dr. H.-J. Schmidt (S. 62); R. Witzlau (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto, Leipzig
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach „Pythagoras", Amsterdam
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 Der Honigwabenwürfel
H. Pot/Kl. Lakemann, „Pythagoras", Amsterdam

50 Überall Algorithmen, Teil 2
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der M.-Luther-Universität Halle

52 Weißt du, wieviel Sternlein stehen? Teil 1
Dr. R. Thiele, K.-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwiss. der K.-Marx-Universität Leipzig

54 Gerechte und ungerechte Würfelspiele, Teil 1
Dr. G. Lorenz, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

56 Das verfehlte Ziel
StR A. Zenkert, Potsdam

58 Ein Zuschneideproblem
J. Heller, Erfurt

59 Dem Erdmittelpunkt näher oder die schiefe Friedrichstraße

60 Ferienmagazin
Zusammenstellung: OStR J. Lehmann, Leipzig

62 In alten Formelsammlungen geblättert
Dr. H.-J. Schmidt, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

63 Schachecke
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin, stud. phys. M. Spindler, Sangerhausen

65 Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz
Dr. M. Schmitz, Sektion Mathematik/Physik der Pädagog. Hochschule „Dr. Th. Neubauer", Erfurt

66 Sprachecke
R. Bergmann, Döbeln/P. Hofmann, Dr. G. Liebau, beide Leipzig

67 XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

69 Lösungen

IV. *U.-Seite:* Peter Apian und der Jakobsstab
R. Witzlau, Bereich Geschichte der Naturwiss. der Pädag. Hochschule Potsdam

Euch ist inzwischen sicher bekannt, daß die Presseerzeugnisse unseres Landes stark subventioniert waren. So auch unsere Zeitschrift. Die Erlöse deckten schon seit vielen Jahren nicht mehr die Kosten für Papier, Satz und Druck. Mit dem Wegfall der Subventionen sehen wir uns deshalb gezwungen, ab Heft 4/90 den Preis unserer Zeitschrift auf 1,50 Mark zu erhöhen (im Abonnement zweimonatlich 1,20 Mark). Wenn ihr unsere Zeitschrift abbestellen möchtet, so muß dies für das III. Quartal bis zum 9. Juli bei der Deutschen Post erfolgen. Wir hoffen aber sehr, euch auch weiterhin zu unseren Lesern zählen zu können. *Eure Redaktion*

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 9. Februar 1990
Auslieferungstermin: 11. Juni 1990

De honingraatkubus
Der Honigwabenwürfel

Auf unserem Titelblatt seht ihr ihn – den Honigwabenwürfel. Er glänzte auf dem Titelblatt unserer niederländischen Schwesternzeitschrift „Pythagoras". Und gefiel uns so ausnehmend gut, daß wir ihn und die dazugehörigen Betrachtungen euch nicht vorenthalten wollten.

Alphons

Was sehen wir? Einen Würfel, der im Mittelpunkt des Sechsecks einen nach vorn weisenden Eckpunkt, sechs Eckpunkte entlang des Randes der Figur hat und dessen vorderer und hinterer Eckpunkt sich überdecken.

Jede der Kanten ist ein Balken mit quadratischem Querschnitt, jede der sechs Seitenflächen mit einem Balkenkreuz versehen. Innen ist der Würfel leer – oder doch nicht? Könnte sich in der Würfelmitte ein zentrales „Achsenkreuz" befinden, das die gegenüberliegenden Flächenmittelpunkte verbindet?

Oder sieht man durch die Öffnungen nur die Balken der Rückseite?

Versuchen wir, die Doppelsinnigkeit durch einen Zeichentrick aufzuheben. An Schnittpunkten, die zwar in der Zeichnung zu sehen sind, die aber in Wirklichkeit nicht existieren, werden die Linien unterbrochen. Schaut euch die folgenden beiden Bilder genau an. Welcher der beiden Würfel hat ein zentrales Achsenkreuz?

Ein winziger Unterschied an drei Stellen und Bild 1 zeigt den hohlen Würfel, Bild 2 einen Würfel mit zentralem Achsenkreuz.

Welchen Sinn hat nun das „Honigwabenmuster" hinter dem Würfel?

Ganz einfach: Alle Balken des Würfels werden durch drei parallele Linienstücke

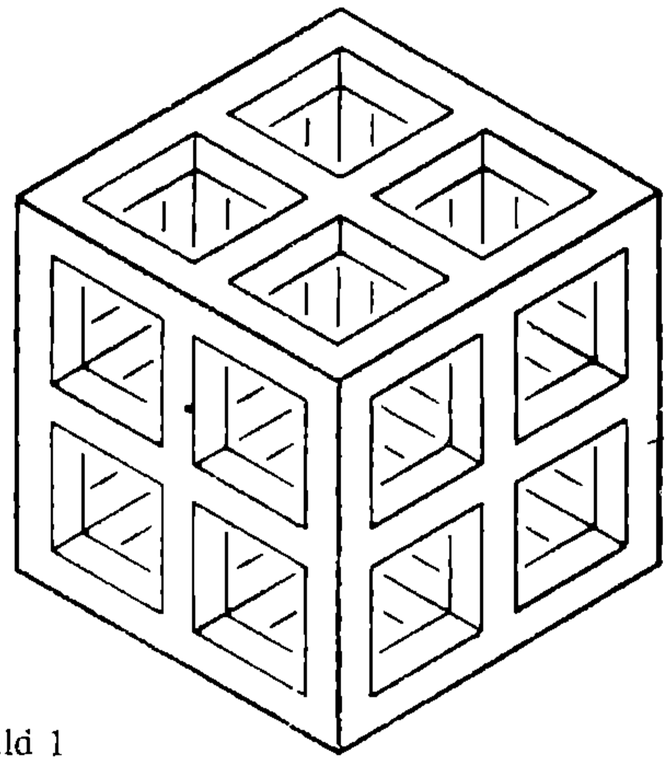


Bild 1

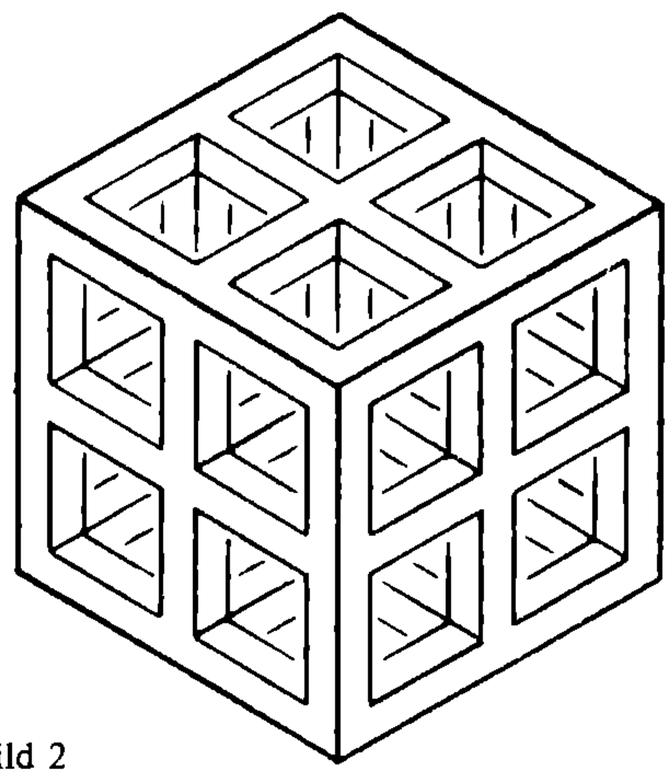


Bild 2

angedeutet, die jeweils senkrecht auf einer Honigwabenseite stehen. Das mittlere Linienstück geht durch die Mitte dieser Seite. (Zerschneidet ihr die Titelfigur in Sechsecke, erhaltet ihr ein ganz schön anstrengendes Puzzle.) Jedes Honigwabenstück ist nun aus ein und derselben Grundfigur abzuleiten.

In einem regelmäßigen Sechseck werden die Mitten jedes Paares gegenüberliegender Seiten durch eine Linie verbunden (Bild 3 a). Beiderseits jeder Linie werden im Abstand von einem Drittel der Länge der Sechseckseite Parallelen gezogen (Bild 3 b).

Fertig ist die Grundfigur.

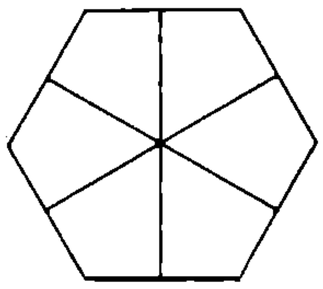


Bild 3 a

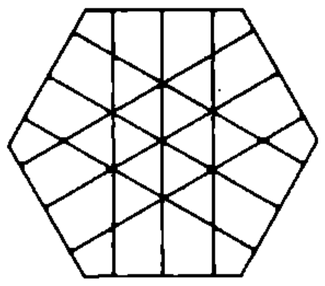


Bild 3 b

Der Honigwabenwürfel und Verwandte von ihm (diesen fehlen einzelne oder mehrere Balken) können nun daraus abgeleitet werden, indem Teile daraus wegradiert werden.

Beispiel 1: Wo kann das folgende Puzzlestück sitzen?

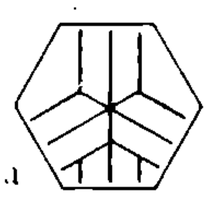


Bild 4 a

Die Lösung, falls das Rahmenkreuz der oberen Fläche weggelassen wurde und der Würfel hohl ist.

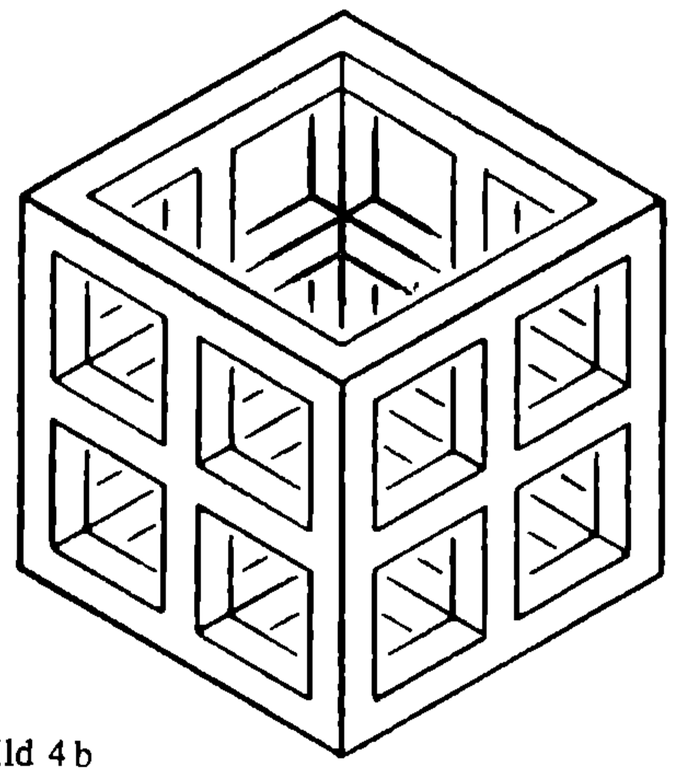


Bild 4 b

Beispiel 2: Wo befindet sich dieses Puzzlestück?

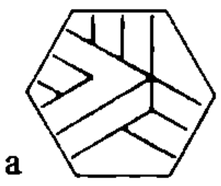


Bild 5 a

Eine Lösung:

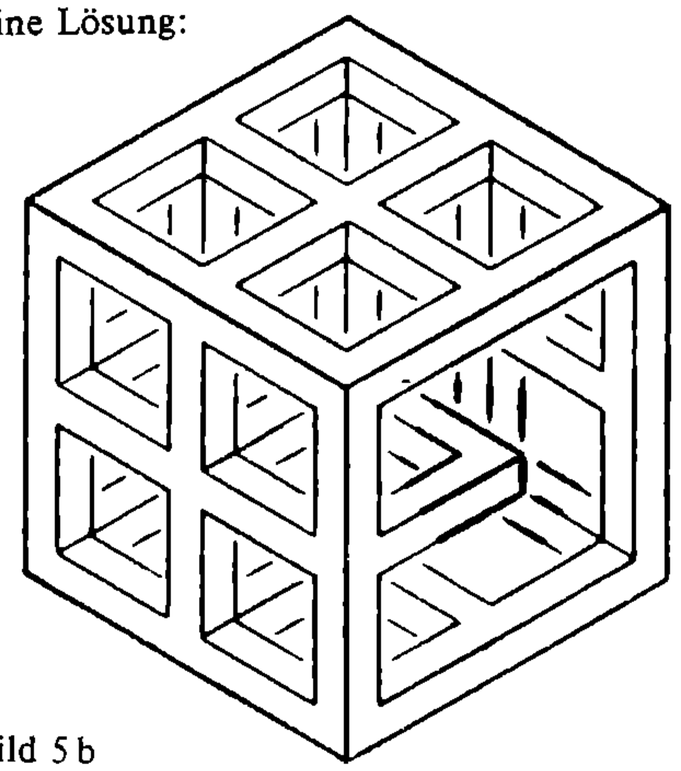


Bild 5 b

Nun seid ihr dran. Sucht für die sechs Teile von Bild 6 eine Stelle im Gebilde der Titelfigur, in der, wie gesagt, Balken entfernt werden dürfen.

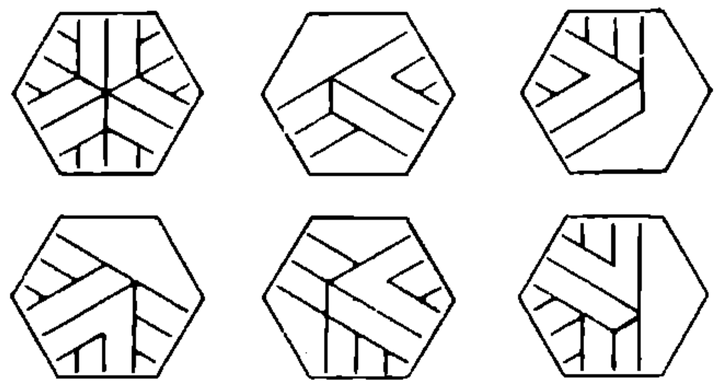


Bild 6

Ein Bild wurde allerdings hineingemogelt, das nicht sein kann!

nach: „De honingraatkubus",
Pythagoras, Amsterdam Hessel Pot/Klaas Lakeman nach einer Idee von G. J. Westerink

Die Lösung der Aufgabe sei dem Leser selbst überlassen.

Überall Algorithmen

Teil 2
Darstellungsformen von Algorithmen

Im Teil 1 (alpha, Heft 2/90) lernten wir Bildfolgen und verbale Beschreibungen als Darstellungsformen von Algorithmen kennen.

BASIC-Programm

Einem Computer nützt es wenig, wenn der Algorithmus z. B. in deutscher Sprache oder in Form einer Bildfolge vorliegt. Für ihn muß man die Vorschrift in eine spezielle „Computersprache" übersetzen. Darauf wurde in Teil 1 schon kurz eingegangen.

Vor der Übersetzung einer Vorschrift in eine Computersprache ist es erforderlich, den Algorithmus in elementare, für den Computer verständliche Anweisungen zu zerlegen. Dabei kann es nützlich sein, den Algorithmus zunächst in Form eines *Programmablaufplanes* bzw. eines *Struktogramms* darzustellen. Auf beide Möglichkeiten der Darstellung gehen wir nun noch etwas näher ein.

Als erstes Beispiel wollen wir die Vorschrift der Aufgabe 4 (siehe Teil 1) in Form eines Programmablaufplans darstellen. In etwas veränderter Form hatte die Vorschrift folgendes Aussehen:

Gegeben sind die Zahlen a, b, c.

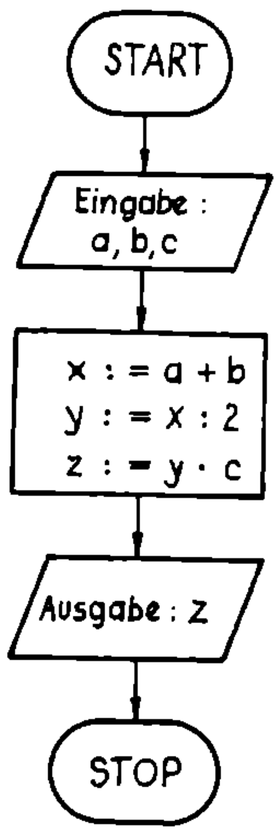
(1) Addiere zu a die Zahl b!
Das ergibt x.

(2) Dividiere x durch 2! Das ergibt y.

(3) Multipliziere y mit c!
Das ergibt z.

(4) Schreibe die Zahl z auf!

Hier nun ein entsprechender Programmablaufplan (Bild 1):



/1/
/2/ Eingabe der Zahlen
/3/ Verarbeitung der Zahlen
/2/ Ausgabe des Resultats
/4/

Bild 1

/1/ Dieses Symbol markiert den Anfang eines jeden Programmablaufplans.

/2/ Das Parallelogramm ist das Symbol für die Eingabe oder Ausgabe von Daten (z. B. Zahlen).

/3/ Ein Rechteck ist das Symbol für die Verarbeitung von Daten. Das Symbol „:=" wird übersetzt mit „ergibt sich aus". $x := a + b$ bedeutet, daß sich der Wert der Variablen x als Summe von a und b ergibt. Ist z. B. $a = 2$ und $b = 4$, so erhält x nach der Anweisung $x := a + b$ den Wert 6. Anweisungen wie $x := a + b$ nennt man auch *Ergibtanweisungen.*

In einer Ergibtanweisung darf links vom Zeichen „:=" nur *eine* Variable stehen. Dieser Variablen wird der Wert des rechts vom Zeichen „:=" stehenden Ausdrucks zugewiesen. Zuweilen findet man auch eine Anweisung wie $x := x + 1$. Eine solche Anweisung ist nur sinnvoll, wenn zuvor der Variablen x ein Wert zugeordnet wurde. Angenommen, x hätte durch die Anweisung $x := 6$ den Wert 6 und anschließend wäre die Anweisung $x :=\ \ + 1$ abzuarbeiten, dann würde sich nun der alte Wert von x um 1 erhöhen und x würde der Wert 7 zugeordnet werden, d. h., vor Abarbeitung der Anweisung $x := x + 1$ hat x den Wert 6, nach Abarbeitung der Anweisung $x := x + 1$ hat x den Wert 7.

/4/ Dieses Symbol markiert das Ende eines jeden Programmablaufplans. Die Abarbeitung des Algorithmus erfolgt in Pfeilrichtung. Mit dem im Programmablauf (Bild 1) angegebenen Algorithmus kann man den Flächeninhalt eines Trapezes ermitteln, falls a und b die Zahlenwerte der zueinander parallelen Seiten sind und c der Zahlenwert der zugehörigen Höhe ist. (Die Maßeinheit sei jeweils „cm"!) z ist dann der Zahlenwert des Flächeninhalts (in cm^2).

▲ 11 ▲ Schreibe einen Programmablaufplan für die Berechnung des Volumens und der Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a!

Im Bild 3 ist ein Flußdiagramm zur Ermittlung der kleinsten von drei vorgegebenen Zahlen dargestellt. In diesem Programmablaufplan finden wir ein neues Symbol (Bild 2):

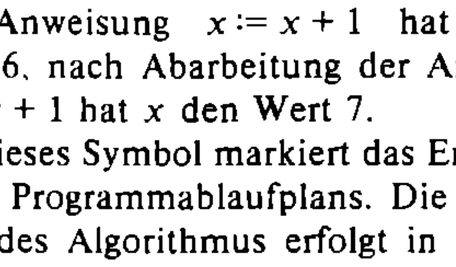


Bild 2

Der Rhombus ist das Symbol für eine Verzweigung. Er hat einen Eingang und zwei Ausgänge. Welcher Ausgang zu benutzen ist, hängt davon ab, ob die Bedingung B im Rhombus erfüllt ist (ja-Weg) bzw. nicht erfüllt ist (nein-Weg).

▲ 12 ▲ Wieviel verschiedene Wege gibt es im Programmablaufplan (Bild 3), um von (START) nach (STOP) zu gelangen?
Gib für jeden Weg ein Zahlentripel a, b, c an!

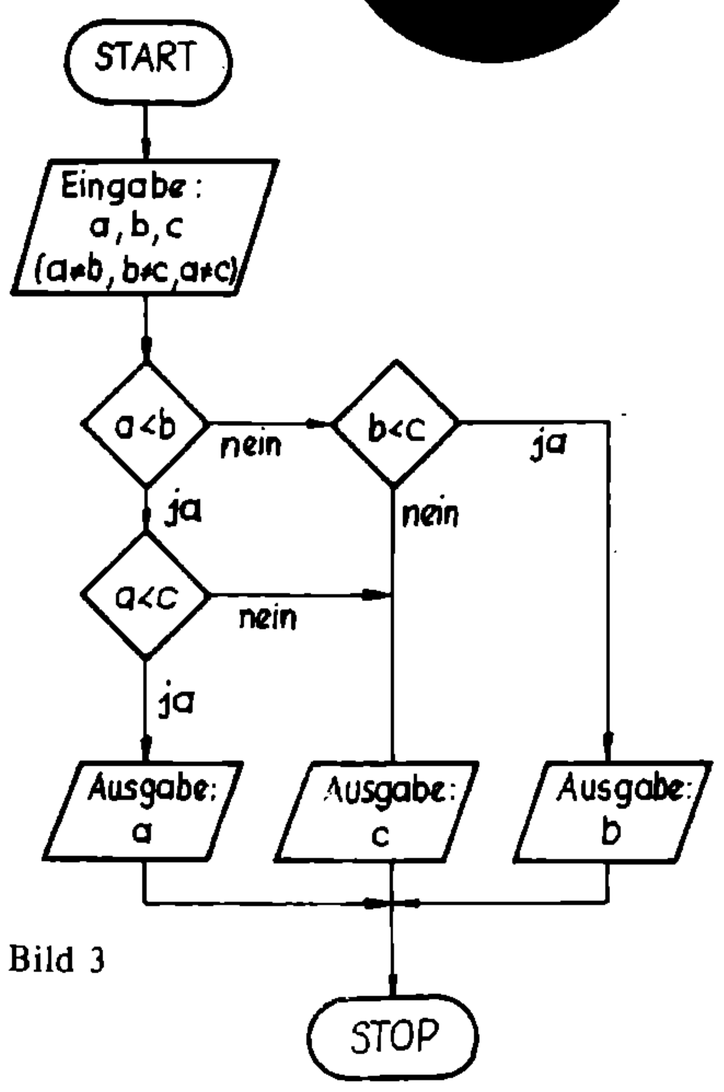


Bild 3

▲ 13 ▲ Entwickle einen Programmablaufplan, nach dem man die größte von drei vorgegebenen Zahlen a, b, c ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$) ermitteln kann!

▲ 14 ▲ Versuche, durch systematisches Probieren alle natürlichen Zahlen von 0 bis 10 zu ermitteln, die die Gleichung $x \cdot x = 11 \cdot x - 24$ erfüllen.

Für die Lösung der Aufgabe 14 fertigen wir uns am besten eine Tabelle an:

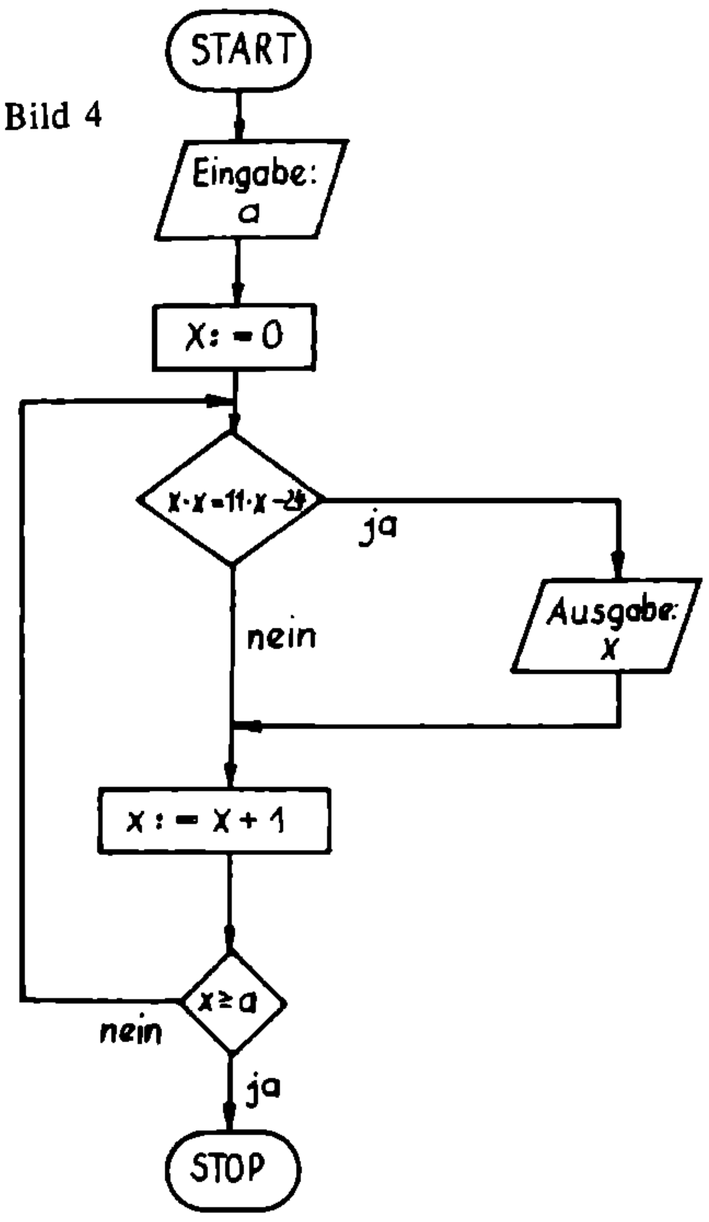
x	$x \cdot x$	$11 \cdot x - 24$	Gilt $x \cdot x = 11 \cdot x - 24$?
0	0	−24	nein
1	1	−13	nein
⋮			
10			

Das systematische Suchen nach den Lösungen könnte auch ein Computer übernehmen, denn dem Suchvorgang liegt ein Algorithmus zugrunde.

Allerdings muß man dem Computer „sagen", von welcher natürlichen Zahl x die Suche beginnen soll und bis zu welcher natürlichen Zahl a die Suche nach einer Lösung durchgeführt werden soll.

Die Suche beginnen wir mit $x = 0$. In Form eines Programmablaufplanes hätte der Suchalgorithmus folgendes Aussehen (Bild 4):

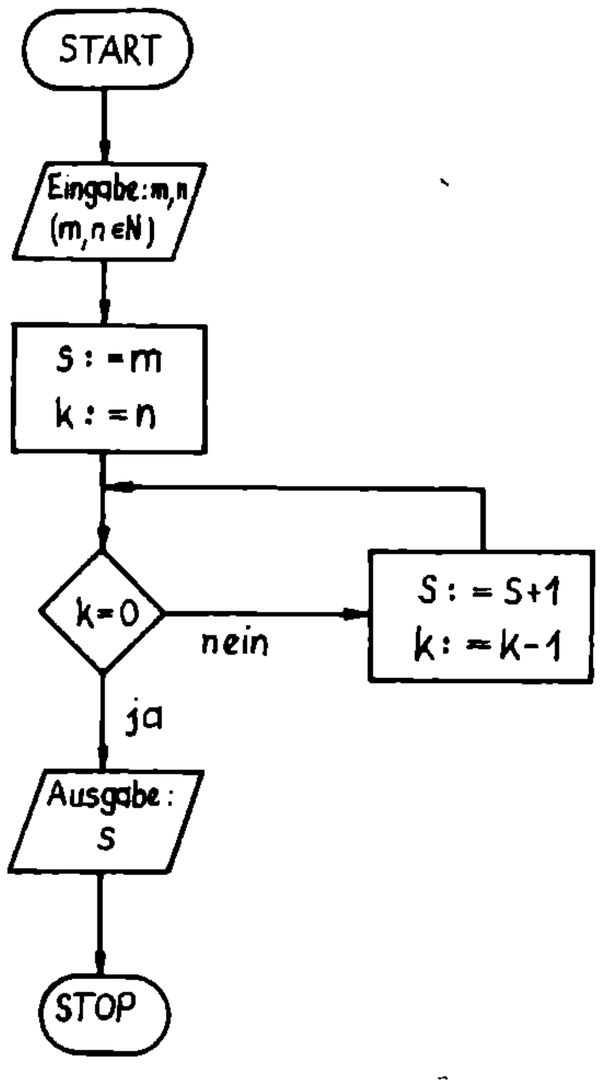
Bild 4



Dieses ständige Wiederholen desselben Weges bezeichnet man als *Schleife* (Zyklus oder Wiederholung). Die *Schleifenvariable* ist in unserem Falle x. Ihr wird durch $x := 0$ zunächst der Anfangswert 0 zugewiesen. Mit diesem Wert ist die Schleife erstmals zu durchlaufen. Danach wird der Wert der Variablen durch $x := x + 1$ um 1 erhöht. Der Durchlauf ist nun so lange zu wiederholen, bis der aktuelle Wert der Variablen größer als der Wert von a ist. Für unser Beispiel legten wir für a den Wert 10 fest.

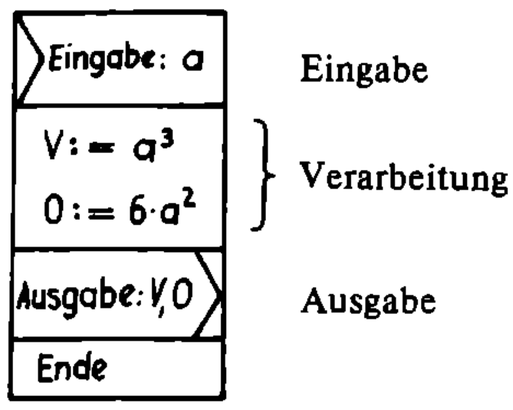
▲ 15 ▲ Arbeite den Programmablaufplan (Bild 5) für folgende Werte ab!
a) $m = 3$; $n = 2$; b) $m = 6$; $n = 3$.

Bild 5



Neben Programmablaufplänen setzen sich mehr und mehr auch *Struktogramme* als anschauliche Darstellungsformen für Algorithmen durch. Deshalb wollen wir zum Abschluß unseres Beitrages noch einige Bemerkungen zu Struktogrammen machen. Als erstes betrachten wir die Darstellung eines Struktogrammes für einen Algorithmus zur Berechnung von Oberfläche und Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a (Bild 6).

Bild 6



Eine Verzweigung wird im Struktogramm mit Hilfe eines Dreiecks dargestellt (vgl. Bild 7). Im Vergleich ist im Bild 7 noch der entsprechende Teil eines Programmablaufplanes angegeben.

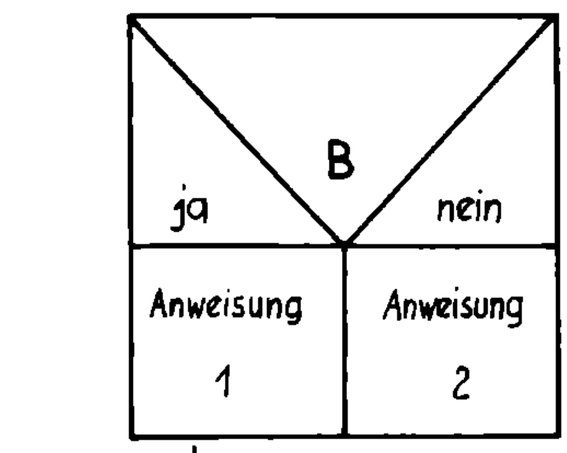
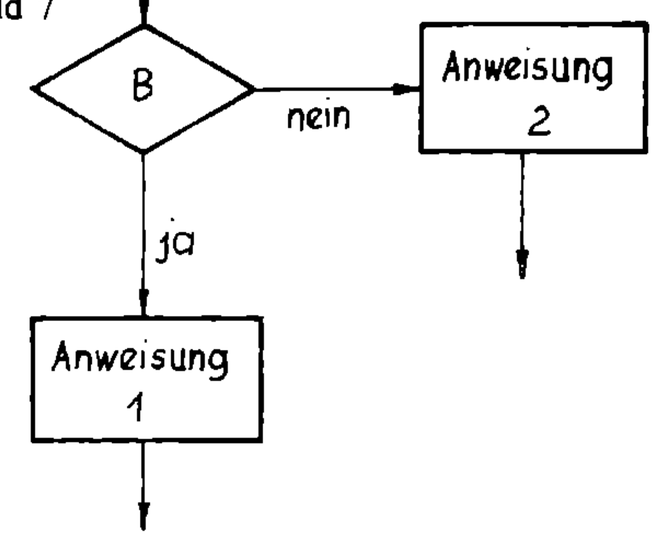
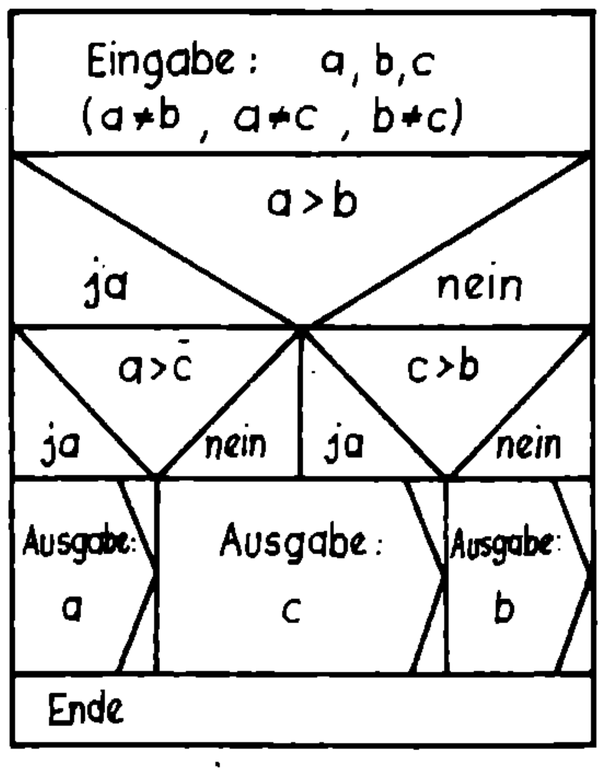


Bild 7



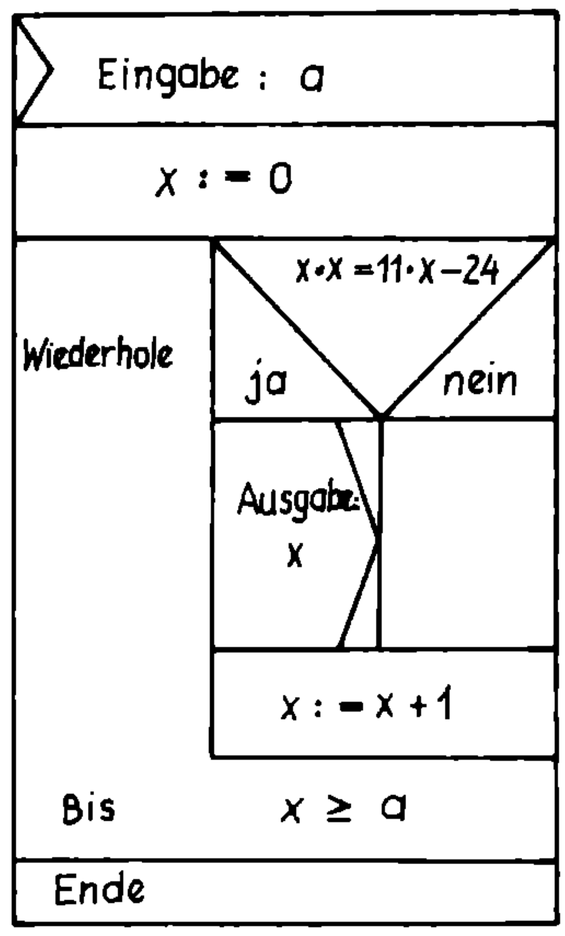
Ein Struktogramm für die Ermittlung der größten von drei angegebenen Zahlen a, b, c ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$) könnte nun wie folgt aussehen (Bild 8):

Bild 8



Als letztes Beispiel wollen wir noch den Algorithmus zur Bestimmung der Lösung der Gleichung
$x \cdot x = 11 \cdot x - 24$ ($x \in N$, $x \leqq 10$)
in Form eines Struktogramms vorstellen. Dabei ist a wieder die Variable für die Zahl, bis zu der die Suche nach einer Lösung durchgeführt werden soll. An dem Struktogramm (Bild 9) kann man erkennen, wie man eine Wiederholung (mit Endbedingung) in einem Struktogramm darstellen kann.

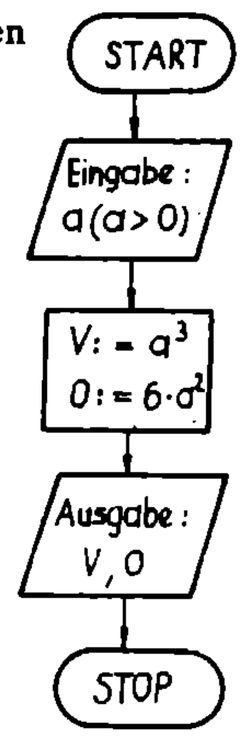
Bild 9



L. Flade

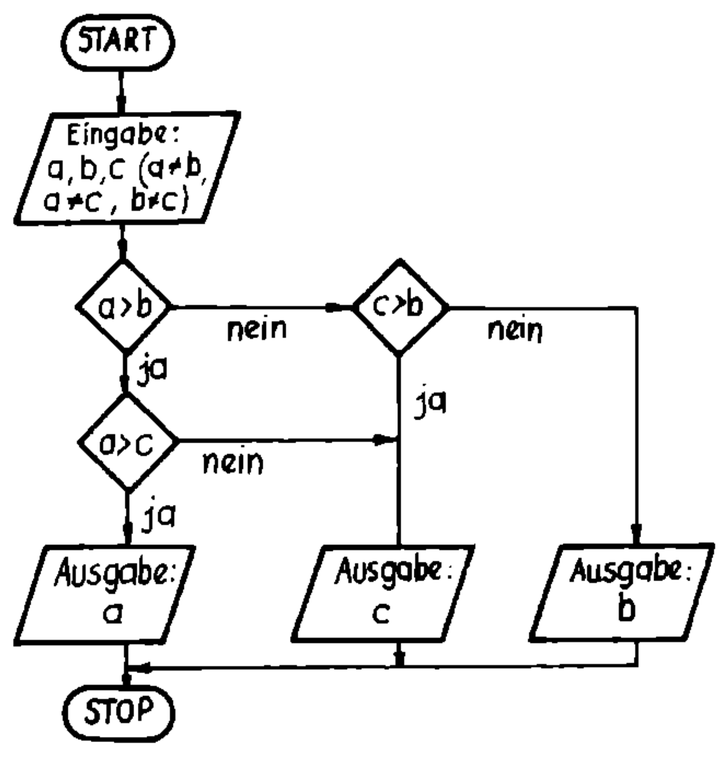
Lösungen

▲ 11 ▲



▲ 12 ▲ 4 Wege!
Beispiele für Zahlentripel:
(2, 3, 4), (4, 3, 2), (3, 2, 4), (3, 4, 2)

▲ 13 ▲



▲ 14 ▲ $x_1 = 3$; $x_2 = 8$

▲ 15 ▲ Als Ausgabewert ergibt sich:
a) $s = 5$; b) $s = 9$.

Weißt du, wieviel Sternlein stehen?

Die Entwicklung der Zahlwörter und Zahlzeichen

Teil 1

In einem alten Kinderlied wird die Frage gestellt, wie viele Sterne am Himmel stehen. Auch eine Antwort wird gegeben: die große Schar sei gezählt. Warum zählen wir eigentlich Dinge, und wie tun wir das? Anders gesagt, wie kam es zu dem Bedürfnis, etwas zu zählen, und wie entwickelten wir Zählfertigkeiten?

Der schwedische Mathematiker Mittag-Leffler (1846 bis 1927) begann seine Arbeit „Einleitung zur Theorie der analytischen Functionen" von 1920 mit der Bemerkung: „Die Zahl ist Anfang und Ende des Denkens. Mit dem Gedanken wird die Zahl geboren. Über die Zahl hinaus reicht der Gedanke nicht." Diese Feststellung unterstreicht nicht nur die grundlegende Rolle des Zählens, denn nach Mittag-Lefflers Meinung erreicht das abstrakte Denken in dem Zahlbegriff und im Umgang damit seinen Höhepunkt schlechthin. So verwundert es nicht, wenn Mittag-Leffler diese Aussage für würdig hielt, den Eingang des von ihm in Djursholm gegründeten mathematischen Instituts zu zieren.

Daß Mathematiker es mit den Zahlen haben, versteht sich. Aber übertreiben sie nicht, wenn sie wie Isodorus (560 bis 636) behaupten: „Nimm allem die Zahl, und alles zerfällt"? Keineswegs, denn dreizehn Jahrhunderte nach Isodorus ist die Rolle der Zahl noch viel offensichtlicher geworden. Es ist der 22. 1. 1990, an dem ich diesen Artikel in die Maschine tippe, am nächsten Tag (23. 1.) werde ich um 6.30 Uhr aufstehen und um 7.32 oder 7.37 Uhr mit den Straßenbahnlinien 2 oder 3 zum Bahnhof fahren, um den Zug 7331 um 8.04 Uhr der Strecke 515 Halle – Leipzig zu benutzen. In Leipzig werde ich am Johannisplatz der alpha-Redaktion das 6seitige Manuskript abgeben. Ich habe dann noch einige Besprechungen in Leipzig zu verschiedenen Uhrzeiten und werde bestimmte Telephonnummern anrufen. Schließlich will ich mir aus der Bibliothek einige Bücher ausleihen, deren Signatur ich dafür angeben muß. Am Abend werde ich das Rundfunk- oder Fernsehprogramm zu einer bestimmten Zeit einstellen. Das Fernsehbild oder die Tonübertragung ließen sich übrigens durch Zahlenfolgen beschreiben, d. h., aus dieser Zahlenfolge könnte das Bild oder der Ton mittels geeigneter Technik rekonstruiert werden. Bankkonto, Postleitzahl, Personenkennziffer, Autonummer, Schulklassenbezeichnung und vieles andere zeigen, wo sich Zahlen unwiderruflich „breit gemacht" haben.

Es ist heute unmöglich, unser Leben ohne Zahlen zu ordnen und in den Griff zu bekommen. War das schon immer so? Nein, und es ist reizvoll zu sehen, wie die Bedeutung der Zahlen zugenommen hat und wie die Menschen den wachsenden Bedürfnissen mit geeigneten Zahlzeichen und Zahlwörtern gerecht zu werden versuchten. Das Zählen (Benennen der Zahl) und das elementare Rechnen (Umgehen mit Zahlzeichen) sinkt heute bereits nach der Unterstufe unserer Schulen zur Handfertigkeit herab, und es wird deshalb als nicht besonders schwierig oder tiefgründig angesehen. Das ist aber ein Irrtum, denn die Leichtigkeit des Umgangs liegt an den außerordentlich praktischen Bezeichnungen und einfachen Regeln, die in einem sich über Jahrhunderte erstreckenden Prozeß aus vielen Ziffernsystemen als die günstigsten herausgeschält wurden.

Das Zählen ist eine angeborene Fähigkeit des Menschen, vergleichbar mit der angeborenen Fähigkeit zu sprechen. Aber wie diese, muß auch die Fähigkeit des Zählens entwickelt werden: der Geist fällt nicht vom Himmel. Allem Zählen voran geht jedoch ein Zweck. Das ist auch heute noch so. Eine Reisegesellschaft wird beispielsweise vom Reiseleiter anders gezählt als von Hotelangestellten, die Zimmer anweisen oder Speisen und Getränke austeilen. Erst ein Zweck erklärt eine Menge und macht sie zählbar.

Die Fähigkeit des Zählens beruht auf dem räumlichen Vorstellungsvermögen des Gehirns. Um irgendwelche „Mächtigkeitseindrücke" einer Menge von Dingen aufzulösen, sie also zu benennen und zu bezeichnen, müssen die Elemente der Menge angeordnet werden, d. h., jedes Ding bekommt seinen Ort. [Gegebenenfalls werden Dinge wie Wasser, Luft u. ä. (Kontinua) durch Maße meßbar gemacht.] Zweckmäßig ist das Aneinanderreihen in einer (geraden) Linie.

Und hier sitzt ein Problem, das aus moderner Sicht leicht übersehen wird. Wir haben keine Schwierigkeit, eine Herde Vieh zu zählen, denn wir abstrahieren beim Zählen und übersehen damit individuelle Unterschiede der Tiere. Jedes Tier ist beim Zählen für uns ein Ding, nämlich ein Tier der zu zählenden Art. Das war aber bei unseren Vorfahren, die zu zählen begannen, längst nicht so. Das Individuelle der Tiere, Menschen oder Dinge überwogs anfangs weit mehr als das Bedürfnis, einen abstrakten Begriff (wie Pferd, Stein oder Baum) zu schaffen, der sich zum Zählen eignet. Hinzu kommt, daß die Mengen, die zunächst gezählt werden sollten, auch ohne einen abstrakten Elementbegriff „zählbar" waren. Genau wie jeder in einer Gruppe von guten Freunden weiß, ob alle da sind, ohne dabei die Gruppe durchzuzählen. Hirten von Naturvölkern (Indianer, Afrikaner), die sehr verbunden mit ihrer Welt und deren Dingen leben, bewältigen auf diese Art das Zählen großer Viehherden bis zu mehreren hundert Tieren. Auch Tiere übersehen auf diese Weise kleinere Mengen (Junge, eigene Horde). Im allgemeinen leisten moderne Menschen beim sogenannten „intuitiven" Zählen auch nicht mehr als Tiere. Tierversuche haben gezeigt, daß Raben in diesem Sinn bis sieben „zählen" können.

Noch ein Beispiel zum Abstrahieren: Ein kleines Kind, das mit einem Ball spielt, wird diesen ganz anders sehen als ein Physiker, der die Flugbahn dieses Balles bestimmt, oder ein Mathematiker, der das Volumen dieses Balles errechnet. Die Farbe des Balls, die für das Kind von größter Bedeutung ist und die Unterschiede zu anderen Bällen schafft, interessiert weder den Mathematiker noch den Physiker – bei ihrem abstrakten Ballbegriff sind Bälle aller Farben lediglich (Hohl-) Kugeln mit bestimmten Radien.

Mit der Paarbildung setzt das begriffliche Isolieren ein. Jedoch noch nicht vollständig, denn es gibt viele wichtige paarweise Dinge im Alltag, die eine Einheit bilden (Augen, Hände, Mann und Frau usw.) und am Anfang des Zählens auftraten. Zahlwörter entstehen, um Mächtigkeiten zu beschreiben und zu erfassen. In den ältesten bekannten Sprachen (wie z. B. im Sumerischen um 4000 v. u. Z.) lautet die Folge der ersten Zahlwörter modern gesagt so: eins, zwei, viele. Die Sumerer hatten nicht wie wir eigene Wörter für eins und zwei, sondern sie benutzten dafür die vorhandenen Wörter: Mann für eins und Frau für zwei. Wie man sich bei den Zahlwörtern mühsam über die Zählgrenze zwei hinausgearbeitet hat, zeigen die Zahlwörter der Pygmäen:

1	a	4 = 2 + 2	oa	oa	
2	oa	5 = 2 + 2 + 1	oa	oa	a
3	ua	6 = 2 + 2 + 2	oa	oa	oa

Man kommt also durchaus mit drei Zahlwörtern über die 3 hinaus!

Aber man muß die Dinge nicht immer benennen, um sie zu zählen. Seit Urzeiten sind Hilfsmengen in Gebrauch. Die einfachste Hilfsmenge besteht aus unseren 10 Fingern, die immer zur Hand sind und mit denen kleine Mengen abgezählt werden können. Steinchen und Stöcke eignen sich auch, um beispielsweise eine Herde zu zählen. Für jedes Tier, das auf die Weide geht, legt man ein Zählsteinchen in eine Urne, und abends, wenn die Tiere wieder in den Stall kommen, nimmt man pro Tier wieder ein Steinchen heraus. Die eineindeutige Zuordnung ermöglicht das Zählen unabhängig von Zahlwörtern (und Ziffern).

Älter als die Zahlwörter sind die Zahlzeichen. Am Anfang standen einfache Kerben (siehe alpha 1/89, Am Anfang war die Kerbe), um Mächtigkeiten von Mengen zu fixieren. Aus der Zeit des Cro-Magnon-Menschen (etwa 30 000 v. u. Z.) kennen wir einen Wolfsknochen mit 55 Kerben. Die Kerben sind linear angeordnet. Es ist unwahrscheinlich, daß für 55 damals bereits ein Zahlwort vorhanden war. Das unablässige Bemühen, das Einkerbungssystem zu verbessern sowie Zahlwörter für die Kerbenzahlen zu finden, weist auf ein grundlegendes Bedürfnis der Menschen jener Zeit hin, sich mit Hilfe von Zahlen besser in Raum und Zeit orientieren zu können.

Das Reihen der Kerben konnte durch Bündeln übersichtlicher gemacht werden, wie wir für die 12 es an drei Möglichkeiten aufzeigen:

a) ||||| ||||| ||

b) ||||| ||||| ||

c) 𝍸 𝍸 ||

Sehr viele Zahlwörter, die ohne ein System die Vielfalt der Zahlreihe stets aufs Neue benennen, kann man sich nicht merken. Die Pygmäen haben bereits mit ihren Zahlwörtern versucht, das Bündeln auch in der Sprache wirksam werden zu lassen. Ein australischer Stamm ging ebenso vor:

1	mal	4 = 2 + 2	bulan-bulan
2	bulan	5 = 2 + 3	bulan-guliba
3	guliba	6 = 3 + 3	guliba-guliba

Jedoch erweisen sich drei Zahlwörter auf die Dauer als Sackgasse, da mit der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft die Zählgrenzen ständig nach vorn geschoben werden. Sumerisches Zählen (um 2000 v. u. Z.) zeigt, wie man versuchte, mit den Zahlwörtern sich voranzuarbeiten und die Zahlgrenze zu überschreiten: Reste eines Fünfersystems finden sich, wenn für 7 bzw. 9 mit alten Zahlwörter 5 + 2 bzw. 5 + 4 gesagt wird, ein Zwanzigersystem schimmert durch, wenn für 40 bzw. 50 mit bekannten Zahlwörtern so operiert wird 2 × 20 bzw. 2 × 20 + 10. Schließlich weist 30, als 3 × 10 benannt, auch noch auf ein Zehnersystem hin. Endergebnis sumerischen Zählens war ein Sexagesimalsystem, also ein Zahlensystem, das in 60er Einheiten bündelte. Wir finden heute noch Reste davon in den 60 Minuten einer Stunde oder in der Winkeleinteilung (360°).

Die mühselig errungene Lösung benutzt konsequent die Bündelung, die ein Verfahren (einen Algorithmus) liefert, für beliebige Anzahlen, Zahlwörter zu liefern. Beim Zehnersystem, das sich durch die Benutzung der 10 Finger als Bündeleinheit herausbildete, sieht das Verfahren so aus: 10 Dinge bilden bekanntlich das erste Bündel, zehn solcher Bündel werden als neues Bündel begriffen und bezeichnet usw. Für die neun möglichen Anzahlen des ersten Bündels, die unterschieden werden müssen, gibt es neun verschiedene Zahlwörter (eins, zwei, ..., neun); für die neun Bündel zweiter Art werden hieraus Zahlwörter abgeleitet (zehn, zwanzig, dreißig, ..., neunzig) usw. Die Herleitung des Wortes zehn aus eins leuchtet nicht ein, aber ab zwanzig ist das grammatische Verfahren klar. Logische und geschichtliche Entwicklung laufen eben nicht immer gleich ab. Wir sagen nicht ein-zehn bzw. zwei-zehn, sondern elf bzw. zwölf, dann aber drei-zehn usw. Die Franzosen haben sogar nach der 10 (dix) bis 16 (seize) individuelle Namen, erst mit 17 (dix sept) greifen sie das erwähnte Prinzip auf. Im Gegensatz zu uns wird das größere Bündel zuerst genannt: erst Zehner, dann Einer. Sie zählen folglich weiter Zwanziger-Einer wie z. B. vingt quatre (24) und nicht vier-und-zwanzig (Einer und Zwanziger) wie wir. Bei den Franzosen bricht bei der 80 ein altes Zwanzigersystem (an Händen und Füßen wurde gezählt) durch:

80 quatre-vingt (vier Zwanziger)
90 quarte-vingt dix (vier Zwanziger [und] zehn).

Sprachliche Logik, die 80 und 90 aus 8 (huit) und 9 (none) ableiten müßte, hätte huitante und nonante hervorgebracht.

Bleiben wir noch einen Augenblick bei sprachlichen Betrachtungen. Die heute übliche Angabe „37 Stunden“, in der das Zahlwort 37 adjektivisch gebraucht wird, hat sich bequemerweise eingebürgert (obwohl sie nicht korrekt ist, denn 37 ist keine Eigenschaft einer Stunde). Ursprünglich wurde der Zahlbegriff in die Endung des Substantivs eingearbeitet. Neben der von uns noch heute so gebrauchten Einzahl (Elter), gab es eine Zweizahl (Eltern), eine Dreizahl usw. Diese grammatische Variante kam allerdings in keiner Sprache über die Vierzahl hinaus, da sich auf lange Sicht der adjektivische Gebrauch als zweckmäßiger erwies und durchsetzte. Im Deutschen gibt es heute nur eine Einzahl (Singular) und eine Mehrzahl (Plural), im klassischen Griechischen oder im heutigen Arabischen finden sich drei grammatische Formen für einen, zwei und mehr als zwei Freunde. Auch im Russischen gab es früher eine Zweizahl (Dual). Für 2, 3 oder 4 Häuser lautete diese alte Dualform „дома“ anstelle von „дом“ (Haus). Für fünf Häuser wird dann logisch „fünf der Häuser“ bzw. „пять домов“ gesagt usw., aber für 2, 3 oder 4 Häuser benutzt man die alte Dualform, die äußerlich mit dem Genitiv Singular übereinstimmt, aber inhaltlich nichts mit ihm zu tun hat. Die scheinbar wörtliche, aber unverständliche Übersetzung von „два дома“ durch „zwei des Hauses“ erklärt sich hiermit. Die alte Zweizahlform erscheint im Russischen bei 100 wieder. Der Plural von „сто“ wäre „ста“, aber 200 heißt „двести“ (Doppelhundert) und nicht „двеста“ (Zweihundert), dann folgt aber für 300 regelmäßig „триста“ usw.

Da das Zählen eine wichtige Tätigkeit war und ist, lassen sich in der Sprache noch viele Schwierigkeiten, die unsere Vorfahren beim Entwickeln der Zählfertigkeiten hatten, aufweisen. Wir haben schon darauf hingewiesen, daß das Abstrahieren wichtig für das Zählen ist. So kam es, daß für bestimmte Sorten von Dingen Zahlwörter entwickelt wurden, aber für andere Arten von Dingen entstanden andere Zahlwörter (für die gleiche Anzahl!). Beispielsweise zählte ein Naturvolk jeweils lebende, runde oder lange Dinge sowie Tage mit verschiedenen Zahlwortarten. In Japan gibt es eine Zählklasse für lange Dinge und Mörder. Bei uns erinnern alte Zählmaße wie Stück, Paar, Dutzend, Schock oder Mandel daran. Man spricht zwar von einem Joch Ochsen, aber nicht von einem Joch Socken, man verlangt zwei Stück Salatköpfe, aber redet nicht über zwei Stück Mensch. Selbst unbestimmte Mengen zählen wir in Klassen: eine Herde Schafe, ein Rudel Hirsche, ein Schwarm Mücken.

Die Kerben sind die ältesten Zahlzeichen. Obwohl mit ihnen Mächtigkeiten erfaßt werden sowie einfache Rechnungen (Weiterzählen) ausgeführt werden können, wurden die Zählgrenzen jedoch durch die Zahlwörter vorangeschoben. Heute eilen die Zahlzeichen jedoch den Zahlwörtern voraus. Das wird vermutlich so bleiben, denn wer will sich wohl der praktischen und einfachen Schreib- und Sprechweise der Physiker entziehen, wenn die Masse der Erde mit $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg anstelle von 5 Quadrillionen und 980 Trilliarden Kilogramm angegeben wird. Spätestens bei der geschätzten Zahl der Atome im All, nämlich rund 10^{50}, dürfte auch der zahlwortfreudigste Leser das Handtuch werfen, denn das ebenso leistungsfähige wie einfache Prinzip der Potenzschreib- und -sprechweise überwindet mühelos jede Zahlwortgrenze. Der polnische Mathematiker unserer Zeit Hugo Steinhaus zeigte, daß es sehr leicht ist, symbolisch riesige Zahlen aufzuschreiben. Dazu vereinbarte er folgendes:

$a^a =$

a in a Dreiecken =

a in a Quadraten =

Was bedeuten in diesem Sinn ① und ②? Aber mit dieser Frage sind wir schon bei den Ziffersystemen. Wie verschiedene Zahlzeichen Ziffersysteme hervorbrachten, das wollen wir im zweiten Teil unseres Artikels untersuchen.

R. Thiele

Gerechte und ungerechte Würfelspiele – Überraschungen mit ungewöhnlichen Würfeln

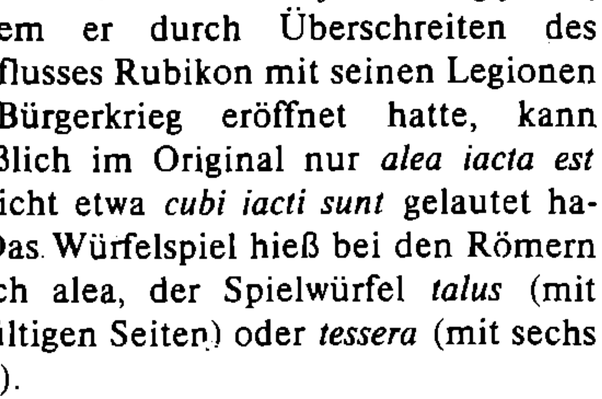
Teil 1

Jedes Kind lernt schon frühzeitig den gewöhnlichen Spielwürfel kennen, der auf seinen sechs Quadratflächen die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Deren Anordnung erfolgt bereits seit dem Mittelalter einheitlich so, daß die Augenzahlen einander gegenüberliegender Flächen zusammen 7 ergeben. Würfeln ist wohl das älteste Glücksspiel der Welt, doch würfelten unsere Vorfahren zunächst mit den Fußgelenkknöcheln von Lämmern; diese konnten nicht 6, sondern nur 4 (verschieden bewertete) Seiten zeigen.

In Sumer vor über 4500 Jahren spielte man mit Tetraedern, also dreiseitigen Pyramiden. „Würfeln mit Pyramiden" erscheint manchem vielleicht als etwas in sich Widersprüchliches. Dann bedenkt er aber nicht, daß der regelmäßige Körper, den die Griechen *Hexaeder*, also *Sechsflächner*, nannten und die Römer *Cubus*, zwar in der deutschen Sprache seit geraumer Zeit nach seiner Verwendung beim Glücksspiel bezeichnet wird, daß das aber nicht selbstverständlich ist. So heißt dieser Körper im Englischen wie im Französischen *cube* (wobei die Aussprache freilich unterschiedlich ist), der Spielwürfel aber *die* (Plural *dice*) bzw. *dé*. Auch in der russischen Sprache unterscheidet man zwischen куб(ик) und (игральная) кость. Der legendäre Ausruf Caesars *Die Würfel sind gefallen*, nachdem er durch Überschreiten des Grenzflusses Rubikon mit seinen Legionen den Bürgerkrieg eröffnet hatte, kann schließlich im Original nur *alea iacta est* und nicht etwa *cubi iacti sunt* gelautet haben. Das Würfelspiel hieß bei den Römern nämlich alea, der Spielwürfel *talus* (mit vier gültigen Seiten) oder *tessera* (mit sechs Seiten).

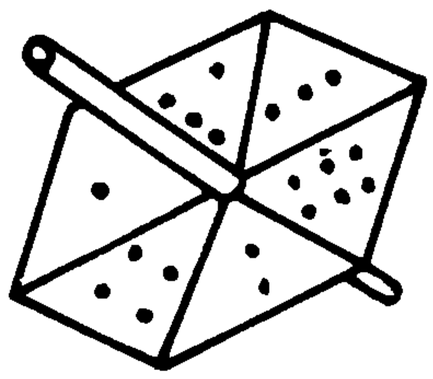
Anstelle eines Hexaeders mit 1 bis 6 Augen auf seinen Flächen kann man auch einen Kreisel als Spielgerät verwenden. In Gesellschaftsspielen für jüngere Kinder findet man zuweilen einen solchen Kreisel mit einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma als Kreiselkörper, dessen Seitenflächen die Augen tragen (Bild 1).

Bild 1



Leichter selbst anzufertigen als ein solcher Kreisel oder als ein „richtiger Würfel" ist ein Kreisel, bei dem ein – etwa aus starker Pappe ausgeschnittenes – regelmäßiges Sechseck als Kreiselkörper dient, ein in der Mitte hindurchgesteckter Stab als Achse (Bild 2).

Bild 2



Sorgfalt ist allerdings auch bei seiner Anfertigung nötig, denn es darf ja keine Augenzahl bevorzugt werden – etwa dadurch, daß die Achse nicht genau durch den Mittelpunkt des Sechsecks geht, vielleicht auch nicht senkrecht auf der Sechseckfläche steht, oder auch dadurch, daß die Seiten des Sechsecks verschieden lang sind. Jede Augenzahl muß also – beim Kreisel wie beim Würfel, den schon im antiken Rom geschickte Betrüger durch das Einbringen von Metall fälschten – im Durchschnitt etwa gleich oft fallen. Die Abweichung von einer solchen gleichmäßigen Häufigkeitsverteilung wird freilich nur bei einer sehr großen Anzahl von „Würfen" genügend klein.

Ist der Würfelkreisel nicht homogen, der Würfel „gezinkt", so muß dennoch kein Nachteil bzw. Vorteil für einen Spieler entstehen. Das Spiel bleibt gerecht, wenn alle Beteiligten das gleiche Spielgerät benutzen. Voraussetzung für ein gerechtes Spiel sind außerdem natürlich Spielregeln, die allen Spielern die gleichen Chancen einräumen – wenn schon nicht bei jedem einzelnen Wurf, so doch im Spiel insgesamt. Würfeln etwa zwei Spieler – und nur solche „Zweipersonenspiele" wollen wir im folgenden betrachten – mit einem Würfel und hat derjenige, der die kleinere Augenzahl erzielt, dem anderen eine Spielmarke, einen Chip, zu zahlen, so ist das Spiel fair, wenn bei gleichen geworfenen Augenzahlen keinerlei Zahlung erfolgt: Insgesamt sind 36 verschiedene „Augenkombinationen" möglich, von (1; 1) bis (6; 6). In der Tabelle ist für den „vorgebenden" Spieler V der Gewinn eines Chips durch „+1", der Verlust durch „−1" gekennzeichnet.

V \ Z	1	2	3	4	5	6
1	0	−1	−1	−1	−1	−1
2	+1	0	−1	−1	−1	−1
3	+1	+1	0	−1	−1	−1
4	+1	+1	+1	0	−1	−1
5	+1	+1	+1	+1	0	−1
6	+1	+1	+1	+1	+1	0

Für ihn ist also bei jedem einzelnen Spiel der „Erwartungswert" des Gewinns

$$E_V = \frac{15}{36} \cdot 1 \left(+ \frac{6}{36} \cdot 0 \right) + \frac{15}{36} \cdot (-1) = 0,$$

und für den an zweiter Stelle würfelnden Spieler Z ist analog $E_Z = 0$. (Allgemein – d. h. nicht nur bei Zweipersonenspielen – bezeichnet man ein Glücksspiel als fair, wenn zu Beginn des Spiels der „Erwartungswert" des Gewinns für jeden Spieler gleich Null ist.)

Spielt man aber nach dem Grundsatz „mit gibt's nicht", gewinnt also bei gleicher Augenzahl derjenige, der sie zuerst geworfen hat, so hat V bei jedem Spiel einen Gewinn von $\frac{1}{6}$ Chip zu erwarten, wird also bei einer Serie von 60 Einzelspielen „im Mittel" 10 Chips gewinnen. Diesen Vorteil kann man ausgleichen, indem man sich beim Vorgeben von Spiel zu Spiel abwechselt oder – wie das häufiger geschieht, oft mit der Bemerkung „Dumm fängt an" – das Vorgaberecht immer wechseln läßt, wenn der Vorgebende gewonnen hat.

▲1▲ a) Auch ein einzelnes Spiel nach dem Motto „mit gibt's nicht" kann man fair gestalten, indem man für V und Z unterschiedliche Höhe der Zahlung vereinbart. Wie könnte eine solche Vereinbarung lauten?

b) A und B würfeln nach der Regel: Wenn beide eine gerade Augenzahl würfeln, erhält A von B *a* Chips, andernfalls zahlt er an B *b* Chips. Wie sind *a* und *b* zu vereinbaren, wenn das Spiel fair sein soll?

Wirft man 2-, 3-, ... mal nacheinander, addiert die Augenzahlen der einzelnen Würfe und ermittelt den Sieger durch Vergleichen der Summen, so bleibt das Spiel fair, sofern im Falle gleicher Summen eine Zahlung unterbleibt. (Freilich ist es einfacher und kommt auf dasselbe heraus, wenn man mit 2, 3, ... gleichzeitig zu werfenden Würfeln spielt.) Und läßt man als Gewinner denjenigen gelten, der mit weniger Würfen eine festgelegte Zielzahl, etwa 100, erreicht bzw. übertrifft, so ist auch das ein faires Spiel.

▲2▲ Statt die Augenzahlen mehrerer Würfe(l) zu addieren, kann man sie auch in anderer Weise verknüpfen. Bei „Hoch mal hoch durch niedrig" ist die Verknüpfung aus dem Namen des Spiels abzulesen; es wird mit drei Würfeln gespielt.

a) Welches ist der höchste (niedrigste) Wurf in diesem Spiel?

b) Welche der folgenden Zahlen sind als Spielwerte nicht möglich, und welche können auf unterschiedliche Weise zustandekommen? 2; 2,5; 4; 4,5; 5,$\overline{3}$; 5,5; 7; 7,2; 7,5

c) Manchmal werden bei diesem Spiel nur Würfe gewertet, die auf eine im Bereich

der natürlichen Zahlen lösbare Divisionsaufgabe führen. Wieviel (welche) Kombinationen von Augenzahlen muß man dann ausklammern?

Etwas anders muß man bei „unsymmetrischer Spielweise“ überlegen:
Hier würfelt nur ein Spieler (A), der andere ist Bankhalter (B) und hat beispielsweise für jedes von A geworfene Auge einen Chip auszuzahlen. Wie hoch muß in diesem Fall der „Einsatz“ von A sein, damit das Spiel fair ist? Da der Würfel auf seinen sechs Flächen insgesamt
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ Augen trägt, sind „im Mittel“ bei einem Wurf $\frac{21}{6} = 3{,}5$ Augen zu erwarten. Also muß A an B pro Wurf 3,5 Chips als Einsatz zahlen.
Dieser Einsatz ist auch zu entrichten, wenn man mit einem Würfel spielt, bei dem die 21 Augen auf den Würfelflächen anders verteilt sind, beispielsweise drei Flächen je 3 Augen und die übrigen drei je 4 Augen zeigen.

▲3▲ Wieviel verschiedene „ungewöhnliche“ Würfel sind möglich, die auf ihren sechs Flächen insgesamt 21 Augen, aber anders verteilt als beim „Normalwürfel“, tragen? Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Fläche mindestens 1 Auge und höchstens 6 zeigt.

Kehren wir nun wieder zur symmetrischen Spielweise zurück, lassen einen Spieler den „Normalwürfel“ N benutzen, den anderen aber den eben beschriebenen ungewöhnlichen Würfel, der wegen der recht gleichmäßigen Verteilung der Augenzahlen mit G bezeichnet werde.
Dabei soll nach jedem Wurf beider Spieler derjenige, der die höhere Augenzahl geworfen hat, von dem anderen einen Chip erhalten. Das Auftreten gleicher Augenzahlen soll als „unentschieden“ gewertet werden, bei dem jegliches Zahlen unterbleibt. Davon, daß auch dieses Spiel fair ist, können wir uns leicht anhand einer 6×6-Tabelle überzeugen, deren Felder nach dem jeweils gewinnenden Würfel zu kennzeichnen sind:

G \ N	1	2	3	4	5	6
3	G	G	–	N	N	N
3	G	G	–	N	N	N
3	G	G	–	N	N	N
3	G	G	–	N	N	N
4	G	G	G	–	N	N
4	G	G	G	–	N	N
4	G	G	G	–	N	N

Die Anzahl g_G der Gewinnwürfe von G ist ebenso groß wie die der Gewinnwürfe von N: $g_G = g_N = 15$.
Wie ist es aber, wenn der zweite Spieler nicht mit G, sondern einem anderen der (in Aufgabe 3 angesprochenen) ungewöhnlichen Würfel spielt, etwa dem mit der Augenverteilung 1, 1, 4, 5, 5, 5, – nennen wir ihn (wegen der vielen Fünfen) F? Die Berechnung von g_N und g_F soll hier etwas platzsparender erfolgen; in der Tabelle steht in Klammern hinter der jeweiligen Augenzahl, auf wie viele Weisen sie erzielt werden kann:

N	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (1)	5 (1)	6 (1)
F	1 (2)	–	–	4 (1)	5 (3)	–

$g_N = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 15$
$g_F = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 15$

Auch hier liegt also ein faires Spiel vor.

▲4▲ Bei welchen der ungewöhnlichen Würfel (vgl. Aufgabe 3) ist das Spiel gegen den Normalwürfel (nach den beschriebenen Regeln) ebenfalls fair? Beantworte die Frage möglichst, ohne alle Kombinationen durchzurechnen!

Bleibt das Spiel nun auch fair, wenn die Chips immer erst nach zwei Würfen den Besitzer wechseln und die Summe der bei diesen Würfen erzielten Augenzahlen für den Gewinn maßgebend ist? Man könnte stattdessen auch fragen, ob ein Spiel, bei dem jeder Spieler mit zwei Würfeln (der jeweiligen Art) würfelt, ebenfalls gerecht ist. Man ist sowohl geneigt, diese Frage ohne langes Nachdenken zu bejahen. Doch untersuchen wir das genauer, zunächst für den Vergleich N und G:
Bei zwei Würfen mit dem Normalwürfel N (bzw. bei einem Wurf mit zwei Würfeln N) kann man Augenzahlen von 2 bis 12 erhalten, dabei zwei auf genau eine Weise, drei auf zwei Weisen, ... Zwei Würfel G liefern nur Augenzahlen 6, 7 oder 8, aber jede davon auf verschiedene Weise.

$N^{(2)}$	2 (1)	3 (2)	4 (3)	5 (4)	6 (5)	7 (6)
$G^{(2)}$	–	–	–	–	6 (9)	7 (18)

$N^{(2)}$	8 (5)	9 (4)	10 (3)	11 (2)	12 (1)
$G^{(2)}$	8 (9)	–	–	–	–

$g_N^{(2)} = 6 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + 4 \cdot 36 + 3 \cdot 36 + 2 \cdot 36 + 1 \cdot 36 = 540$
$g_F^{(2)} = 9 \cdot 10 + 18 \cdot 15 + 9 \cdot 21 = 540$

Damit wird unsere Vermutung bestätigt: Auch das Spiel mit zwei Würfeln G gegen zwei Würfel N ist fair. Ersetzt man G durch F, so erhält man:

$N^{(2)}$	2 (1)	3 (2)	4 (3)	5 (4)	6 (5)	7 (6)
$F^{(2)}$	2 (4)	–	–	5 (4)	6 (12)	–

$N^{(2)}$	8 (5)	9 (4)	10 (3)	11 (2)	12 (1)
$F^{(2)}$	8 (1)	9 (6)	10 (9)	–	–

$g_N^{(2)} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 20 + 5 \times 20 + 4 \cdot 21 + 3 \cdot 27 + 2 \cdot 36 + 1 \cdot 36 = 569$
$g_{(F)}^{(2)} = 4 \cdot 6 + 12 \cdot 10 + 1 \cdot 21 + 6 \cdot 26 + 9 \cdot 30 = 591$

Überraschenderweise sind also zwei Würfel F zwei Normalwürfeln N überlegen. Als Maß der Überlegenheit kann man den Quotienten $Q_{F/N}^{(2)}$ aus $g_F^{(2)}$ und $g_N^{(2)}$ ansehen:
$Q_{F/N}^{(2)} = 591 : 569 = 1{,}039$
(auf drei Dezimalen gerundet)
Dieser Quotient ist nur wenig größer als 1, so daß die Überlegenheit erst bei einer ungeheuer großen Zahl von Spielen bzw. bei sehr, sehr langer Spieldauer merklich in's Gewicht fällt.

Ohne die Berechnung hier zu erläutern, sei der „Überlegenheitsquotient“ für das Spiel mit drei Würfeln F gegen drei Würfel N mitgeteilt (ebenfalls auf drei Dezimalstellen gerundet):
$Q_{F/N}^{(2)} = 21\,678 : 20\,841 = 1{,}040$
Obwohl also „auf Dauer“ die Würfel F und N gleich stark sind – bei beiden sind ja im Mittel 3,5 Augen zu erwarten –, liegt also $Q_{F/N}^{(3)}$ nicht etwa näher bei 1 als $Q_{F/N}^{(2)}$.
Für das Spiel mit 4 bzw. 5 Würfe(l)n erhält man
$Q_{F/N}^{(4)} = 787\,299 : 760\,957 = 1{,}035$,
$Q_{F/N}^{(5)} = 28\,523\,280 : 27\,684\,580 = 1{,}030$.
Die bisherigen Erfahrungen zeigen jedoch, daß es vermessen wäre, daraus zu schlußfolgern, daß sich bei weiter wachsender Anzahl der Würfe(l) die Überlegenheitsquotienten „monoton“ immer mehr dem Wert 1 nähern müßten.
Ein gewissermaßen „umgekehrtes“ Verhalten gegenüber dem Normalwürfel N wie beim Würfel F finden wir beim „Zweierwürfel“ Z mit den Augenzahlen 2, 2, 2, 3, 6, 6. Bei nur einem Wurf mit jeweils einem einzigen Würfel ist auch er gleichwertig mit dem Würfel N:
$Q_{Z/N} = g_Z : g_N = 15 : 15 = 1$.
Danach ergeben sich aber gerade die Reziproken der Überlegenheitsquotienten für den Vergleich von F mit N (also gewissermaßen „Unterlegenheitsquotienten“):
$Q_{Z/N}^{(2)} = 569 : 591 = 0{,}962\,8$
$Q_{Z/N}^{(3)} = 20\,841 : 21\,678 = 0{,}961\,4$
$Q_{Z/N}^{(4)} = 760\,957 : 787\,299 = 0{,}966\,5$
$Q_{Z/N}^{(5)} = 27\,684\,580 : 28\,523\,280 = 0{,}970\,6$
2 (3, 4, 5) Würfel Z sind also „schwächer“ als 2 (3, 4, 5) Normalwürfel N.

▲5▲ Vergleiche den „Viererwürfel“ V, dessen Flächen die Augenzahlen 1, 4, 4, 4, 4, 4 tragen, mit dem Normalwürfel N bei zwei und drei Würfen! Berechne dazu die Überlegenheitsquotienten $Q_{V/N}^{(2)}$ und $Q_{V/N}^{(3)}$!

G. Lorenz

alpha-Wettbewerb 1988/89

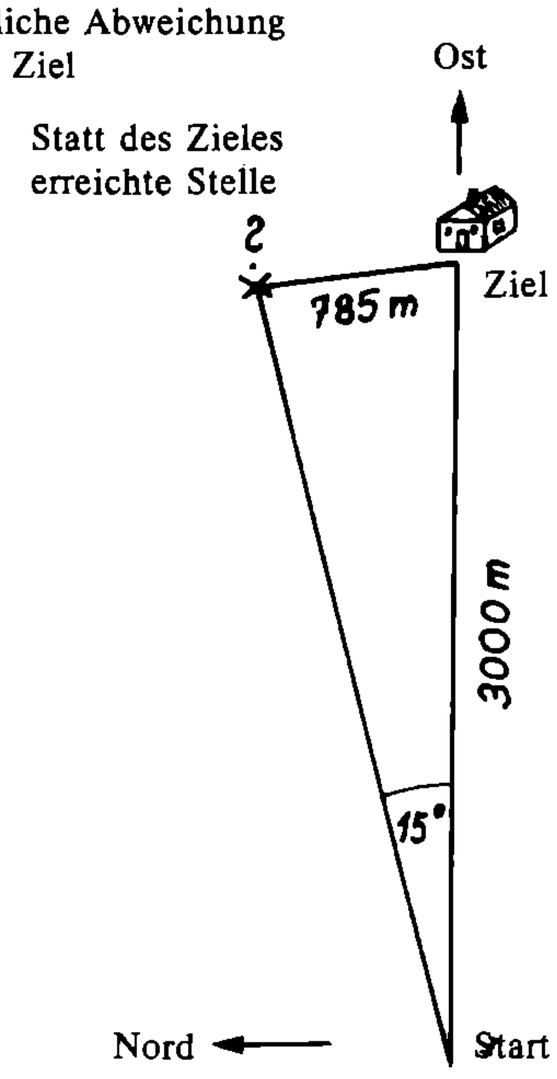
Für vierjährige Teilnahme
Fortsetzung aus Heft 2/90

Katja Giesche, Stralsund; Enrico Jandt, Stützerbach; Thomas Lotze, Andreas Hamm, Ute Streck, alle Suhl; Jens Buchholz, Tantow; Stefan Hannusch, Thale; Andrej Sokol, Templin; Hannah Ullrich, Tripkau; Yvonne Keiderling, Manuela Ullrich, Daniela Weyh, alle Trusetal; Andreas Otto, Mario Pfahl, beide Ueckermünde; Stev Glodowski, Juliane Lohde, beide Vacha; Maik Freitag, Verchau; Thomas Most, Völkerhausen; Roland Isensee, Wanzleben; Ines Schulz, Weimar; Daniel Henkel, Weißenborn-L.; Birgit Elßner, Werneuchen; Christian Kühn, Wismar; Dirk Halama, Wittenberg; Uta Lenhardt, Wittenburg; AG Math. der OS Dr. R. Sorge, Wollin; Kathrin Scholz, Wulfen; Mathias Tötzke, Jens Kandziora, beide Zehdenick; Jörg Siede, Zepernick; Irka Schulze, Zittau; Antje Müller, Zwickau

Das verfehlte Ziel

Es war Mitte Juni, nahe dem Tag der Sommersonnenwende, als eine Schülergruppe in der Schorfheide unweit des Werbellin-Sees den Auftrag erhielt, um 6 Uhr innerhalb von 40 Minuten das Ziel, eine 3 km entfernte Blockhütte, zu erreichen, um sich dort mit einer anderen Gruppe zu treffen.
Wie aber war es möglich, daß das Ziel um fast 800 m verfehlt wurde, und zwar in nördlicher Richtung? Man hatte doch alles genau beachtet, und um 6 Uhr die Ostrichtung festgelegt. Ja, selbst die 6 Minuten Unterschied zwischen der Mitteleuropäischen Zeit und der wahren Sonnenzeit hatte der Gruppenleiter eingehalten und den Stand der Sonne erst um 6.06 Uhr MEZ festgelegt.

Bild 1
Seitliche Abweichung vom Ziel



Es war für alle ein Rätsel, daß eine so große Abweichung vom Ziel zustande gekommen war. Noch am Vortage wurde die bekannte Orientierungsregel gründlich wiederholt, wonach die Sonne um 6 Uhr im Osten und um 18 Uhr im Westen stehe.
Inwieweit ist diese Orientierungsregel richtig?
Nehmen wir diese Regel, die beständig erwähnt wird, einmal kritisch unter die Lupe! Hätte dieser Orientierungsmarsch zur Zeit der Frühlings- oder Herbsttagundnachtgleiche stattgefunden, wäre es nämlich zu keiner Abweichung gekommen. In der Zeit um den 21. 3. oder 23. 9. steht die Sonne um 6 Uhr wirklich im Osten und um 18 Uhr im Westen. Im Sommer dagegen, wenn die Sonne einen großen Tagbogen beschreibt, können wir die Sonne nicht als Kompaß für die Bestimmung der Ost- und Westrichtung zu diesen Zeiten benutzen. Fachmännisch ausgedrückt: Die Sonne befindet sich nördlich (oberhalb) des Himmelsäquators und legt in der Stunde größere Schritte zurück als im Frühling und Herbst oder gar im Winter. Wie allgemein bekannt ist, geht die Sonne streng genommen nur an zwei Tagen im Jahr (21. 3./23. 9.) genau im Osten auf und im Westen unter. Im Sommerhalbjahr verschieben sich diese Punkte in Richtung Nordosten bzw. Nordwesten, im Winterhalbjahr in Richtung Südosten bzw. Südwesten.
Kommen wir auf unser Beispiel mit dem Orientierungsmarsch zurück, der zur Zeit der Sommersonnenwende, also des längsten Tages, stattgefunden hatte! Die Gruppe hatte sich um 6 Uhr wahrer Ortszeit (= 6.06 Uhr MEZ) nach der Sonne gerichtet, ohne zu wissen, daß sie um diese Zeit noch längst nicht die Ostrichtung erreicht haben konnte. Sie befand sich noch rund 15° von dieser Richtung entfernt, weshalb das Ziel selbstverständlich verfehlt wurde.
Dies wäre auch eingetreten, wenn man sich um 18 Uhr nach der Westrichtung hätten orientieren wollen. Das Bild 2 (Seite 57) zeigt deutlich, daß die Sonne die Ostrichtung später als 6 Uhr und die Westrichtung früher als 18 Uhr erreicht. Diese Unterschiede sind von dem Winkelabstand der Sonne vom Himmelsäquator, d. h. vom zeitlichen Abstand zum 21. 3./23. 9. abhängig, wie aus der folgenden Übersicht zu entnehmen ist:

Wann befindet sich die Sonne in der Ost- bzw. Westrichtung?

Datum	Uhrzeit Osten	Uhrzeit Westen	Gültig für 52° nördliche Breite (Mitte der DDR)
21. 6.	7.19 Uhr	16.41 Uhr	
21. 7./21. 5.	7.06 Uhr	16.54 Uhr	Zeitangaben in wahrer Ortszeit
21. 8./21. 4.	6.38 Uhr	17.22 Uhr	(Sonnenzeit)
21. 3./23. 9.	6 Uhr	18 Uhr	

Wollen wir die Sonne für die Bestimmung der Ost-West-Richtung benutzen, müssen wir diese Zeiten einhalten und uns nicht nach 6 Uhr bzw. 18 Uhr richten, den 21. 3. und 23. 9. ausgenommen. Infolge des kleinen Tagbogens und der damit verbundenen kurzen Tage ist im gesamten Winterhalbjahr die Sonne um 6 Uhr noch nicht aufgegangen und um 18 Uhr bereits untergegangen.
Eine Überprüfung der hier geschilderten Verhältnisse ist an einer Hauswand, die in der Ost-West-Richtung verläuft, gut möglich. Eine solche Ost-West-Wand läßt sich auch in einem Modell aus starker Pappe oder Holz errichten, um den Stand der Sonne zu kontrollieren. Dabei sind die beiden Wände nach Süden und Norden gerichtet, und es wird auffallen, daß die Nordwand im Sommerhalbjahr in den frühen Morgen- und späten Abendstunden sogar Sonnenlicht erhält.
Wie sieht es mit den Nebenhimmelsrichtungen aus?
Auch hier müssen wir unsere kritische Betrachtung fortsetzen und darauf verweisen, daß die Sonne um 9 Uhr nicht im Südosten und um 15 Uhr nicht im Südwesten stehen kann. In diesem Fall können wir das Winterhalbjahr mit einbeziehen, da die Sonne zu dieser Zeit über dem Horizont steht (Bild 3, S. 57).
Die folgende Übersicht zeigt, wie ungenau diese Orientierungsregel ist und wann man evtl. die Sonne zur Bestimmung der SO- bzw. SW-Richtung benutzen kann:

Datum	Uhrzeit Südosten	Uhrzeit Südwesten
21. 6.	10.16 Uhr	13.44 Uhr
21. 7./21. 5.	10.08 Uhr	13.52 Uhr
21. 8./21. 4.	9.51 Uhr	14.09 Uhr
21. 3./23. 9.	9.27 Uhr	14.27 Uhr
21. 2./21. 10.	9.06 Uhr	14.54 Uhr
21. 1./21. 11.	8.47 Uhr	15.13 Uhr
21. 12.	8.21 Uhr	15.39 Uhr

Dabei ist interessant, daß am 21. 3. und 23. 9. (Tag- und Nachtgleiche) die Sonne um 9 Uhr bzw. 15 Uhr nicht die Südost- bzw. Südweststellung einnimmt. Dies ist erst um den 12. 2. und 31. 10. der Fall.
Wie aber steht es mit den Richtungen Nordosten und Nordwesten? Für eine grobe Orientierung eignet sich dafür die Zeit der Sommersonnenwende (21. 6.), wenn die Sonne nur 3° entfernt vom Nordostpunkt aufgeht und ebenso so weit entfernt im Nordwestpunkt untergeht.
Unsere Betrachtungen beziehen sich auf die Mitte der DDR (52° nördlicher Breite), die Unterschiede zum Norden (Ostseeküste) bzw. zum Süden (Vogtland, Bezirk Suhl) sind gering, so daß wir sie für unsere Zwecke vernachlässigen können.
Bei unserer kritischen Betrachtung der Orientierungsregel muß auch die vielerorts bekannte „Taschenuhrenregel" erwähnt werden, bei der der kleine Zeiger auf die Sonne gerichtet und der Winkel zur 12 Uhr halbiert wird. Dieses Verfahren gibt die Himmelsrichtungen sehr grob an und zeigt ebenso die Fehler, wie sie hier dargelegt wurden.
In einem Falle aber können wir uns auf unseren Stern Sonne ganz sicher verlassen: *Sie steht um 12 Uhr wahrer Ortszeit (Sonnenzeit) stets im Süden*, – gleich ob im Sommer oder Winter oder in Nord und Süd! Zu diesem Zeitpunkt erreicht sie auf ihrem Tagbogen den höchsten Punkt, die sogenannte

Bild 2 a
Die Stellung der Sonne am 21. 6. sowie am 21. 3./23. 9. am Osthorizont. Die Sonne hat um 6 h noch nicht die Ostrichtung erreicht.

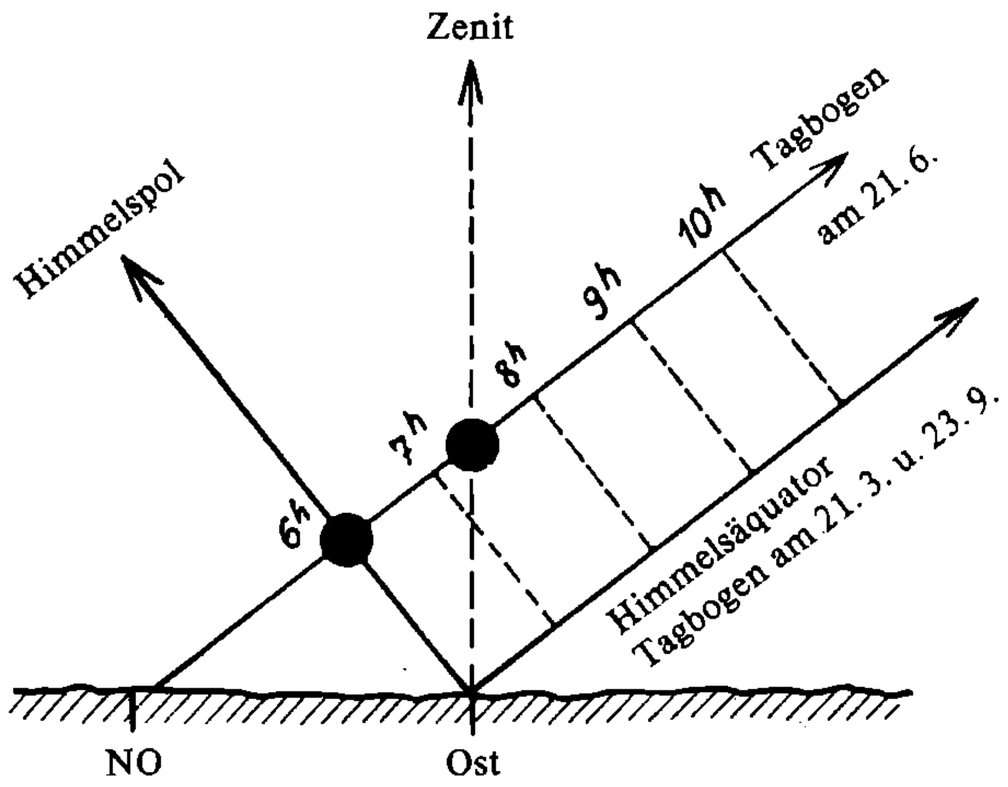


Bild 2 b
Die Stellung der Sonne am 21. 6. sowie am 21. 3./23. 9. am Westhorizont. Die Sonne hat um 18 h die Westrichtung bereits überschritten.

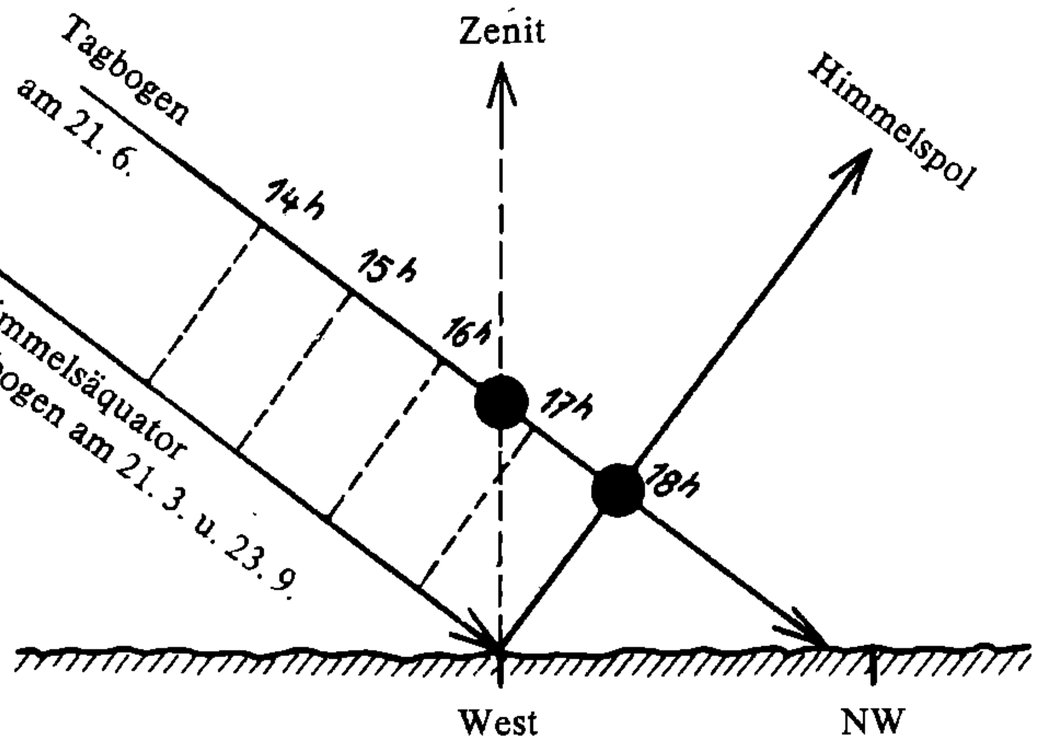
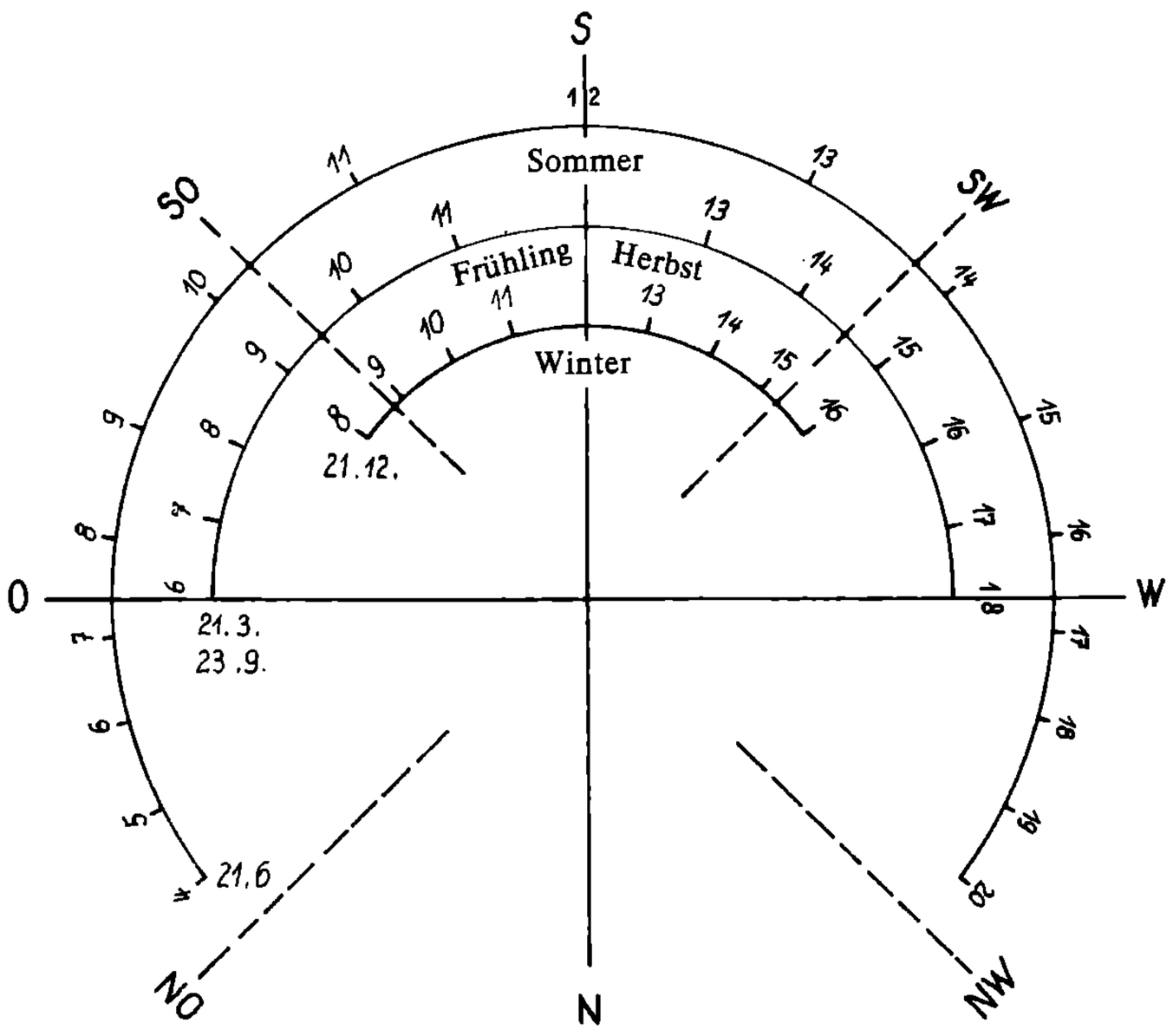


Bild 3
Die Richtung zur Sonne in den Jahreszeiten. Im Sommer sind die wesentlich größeren „Schritte“ deutlich zu erkennen.



Kulmination (lat. culmen = Gipfel). Wahre Ortszeit bedeutet, daß diese mit unserer MEZ nur in Görlitz (15° Länge) zusammenfällt. Je weiter westlich, desto später tritt diese Südstellung ein, so daß wir pro Längengrad die Korrektur von +4 Minuten berücksichtigen müssen. So gelten für Potsdam 8 Min., Halle 10 Min. und Erfurt bereits 16 Min. *A. Zenkert*

Bemerkung: Die Datumsangaben beziehen sich auf den Beginn der jeweiligen Jahreszeit. Infolge des vierjährigen Schaltjahrzyklusses können sich diese Daten um einen Tag verschieben. So lag z. B. der Frühlingsbeginn 1988 am 20. 3., der Herbstbeginn am 22. 9.

100mal 1989 ohne Trick

Unsere Leser Andreas Hempler, Walter Görgens, Klaus-Horst Milde, Ralf Wojatschke, Axel Henchert, Volkmar Färber, Rudolf Strischek, Klaus Göring, Beate Balzer, Olaf Lummer, Katja Sonntag, Roland Jancke und Hans Engelhaupt sandten uns zum Beitrag aus Heft 6/89 folgende Lösungen ein:

$38 = -(1+9) + 8 \cdot \sqrt{9}!$
$= (1+\sqrt{9}) \cdot 8 + \sqrt{9}!$
$= 19 \cdot (8 - \sqrt{9}!)$

$42 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 + \sqrt{9}!)$
$= ((-1)^9 + 8) \cdot \sqrt{9}!$
$= 1 \cdot \sqrt{9}! \cdot 8 - \sqrt{9}!$

$56 = 1^9 \cdot 8! : (\sqrt{9}!)!$
$= -1 + 9 + 8 \cdot \sqrt{9}!$
$= (1+\sqrt{9}) \cdot (8 + \sqrt{9}!)$

$57 = 1 \cdot 9 + 8 \cdot \sqrt{9}!$
$= 1 \cdot \sqrt{9}! \cdot 8 + 9$
$= 19 : \sqrt{8!:9!}$

$60 = 1 + \sqrt{9} + 8! : (\sqrt{9}!)!$
$= (-1 + \sqrt{9} + 8) \cdot \sqrt{9}!$
$= (1 + 9!:8!) \cdot \sqrt{9}!$
$= 1 \cdot \sqrt{(\sqrt{9}!)! \cdot (8 - \sqrt{9})}$

$78 = 1 \cdot \sqrt{9}! + 8 \cdot 9$
$= 1 \cdot 9 \cdot 8 + \sqrt{9}!$
$= (-1 + \sqrt{9}! + 8) \cdot \sqrt{9}!$

$84 = 1 - \sqrt{9}! + 89$
$= (1+9)!:8! - \sqrt{9}!$
$= 1 \cdot (\sqrt{9}! + 8) \cdot \sqrt{9}!$

Ralf Wojatschke sandte die Lösungen bis zur 121 ein und will weitertüfteln.
Klaus-Horst Milde machte den Vorschlag, die Aufgabenstellung noch anspruchsvoller zu gestalten. Zum Beispiel einen Logarithmus oder eine Wurzel zu verwenden. Er wies uns auch auf einen Druckfehler hin: statt $16 = 1^9 + 8 + 9$ muß es heißen $16 = -1^9 + 8 + 9$.
Axel Henchert bemängelte die in die Irre führende Erklärung des Ausdrucks [ ]. Es muß richtig heißen: Der Nachkommaanteil des Ausdrucks wird abgeschnitten. Fazit für uns: Auch wir haben noch Reserven, die besser ausgenutzt werden müssen.
Alphons

Ein Zuschneideproblem

Aus der Werkstatt einer Hobbyschneiderin

Hella Genau will sich einen Rock schneidern, der am Saum möglichst weit sein soll. In Muttis Restekiste findet sie ein Stück geeignetes Material; aber dieser rechteckige Stoffrest ist bei einer Breite (Abstand der Webekanten) von 1,50 m nur 1,35 m lang.

Der Schnitt soll folgende Bedingungen erfüllen:

1. Taillen- und Saumlinie seien konzentrische Kreise oder Kreisbögen; die Linien für Naht und Reißverschluß bzw. für die Seitennähte müssen Radien des Saumkreises sein.
2. Bei der Berechnung des kleineren Radius r_T ist von Hellas Taillenweite auszugehen. Diese beträgt 62 cm.
3. Für die Rocklänge l_R gelte:
$60\text{ cm} < l_R < 68\text{ cm}$.
4. Der Bundstreifen ist im Fadenlauf zuzuschneiden, d. h. parallel zu den Webekanten. Der Mode entsprechend und weil er längs gefaltet werden muß, soll er möglichst breit sein.
5. Wegen Nahtzugabe und Untertritt muß der Bundstreifen mindestens 3 cm länger als Hellas Taillenweite sein.

Zwei Zuschneidepläne hat Hella schon gezeichnet (Bild 1 und 2), aber beide wieder verworfen. Warum?

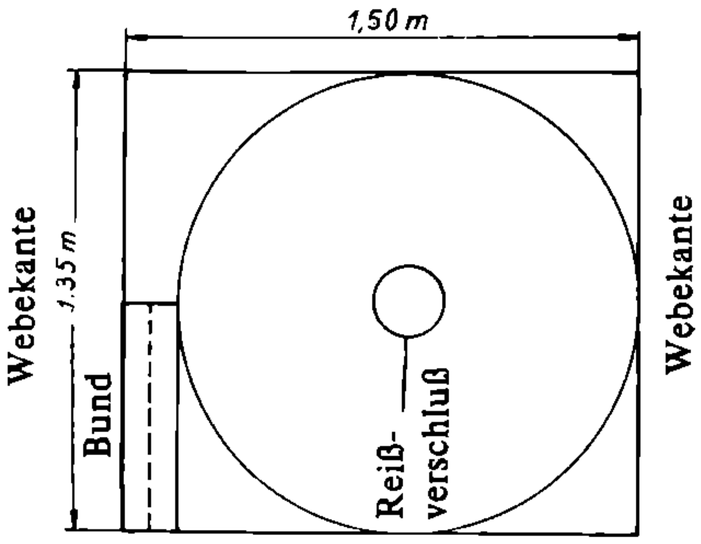


Bild 1
Tellerrock

Es gibt zwei bessere Lösungen des Problems. Bei der einen wird der Rock aus einem Stück zugeschnitten, bei der anderen aus einem vorderen und zwei symmetrischen hinteren Rockteilen zusammengesetzt.

Zeichne beide Schnittlösungen als maßstabgerechte Skizzen und errechne jeweils folgende Maße:

- Radius der Taillenlinie r_T
- Rocklänge l_R
- Weite an der Saumlinie s
- Länge l_B und Breite b des Bundstreifens

Welchen Vorteil bietet die eine, welchen die andere Schnittlösung?

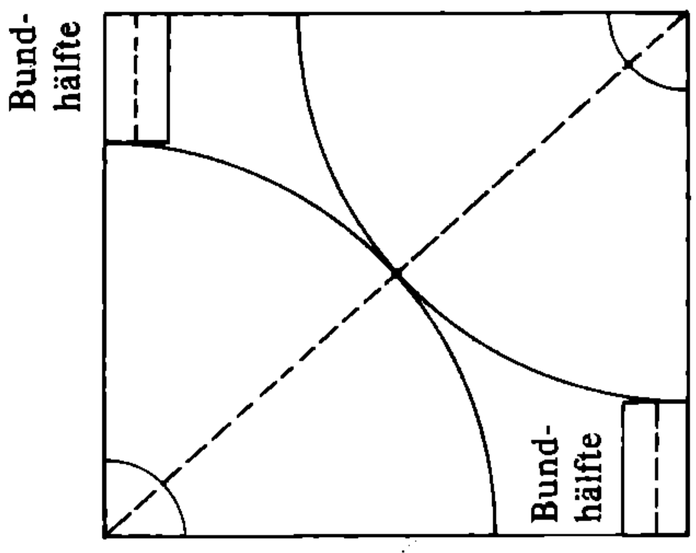


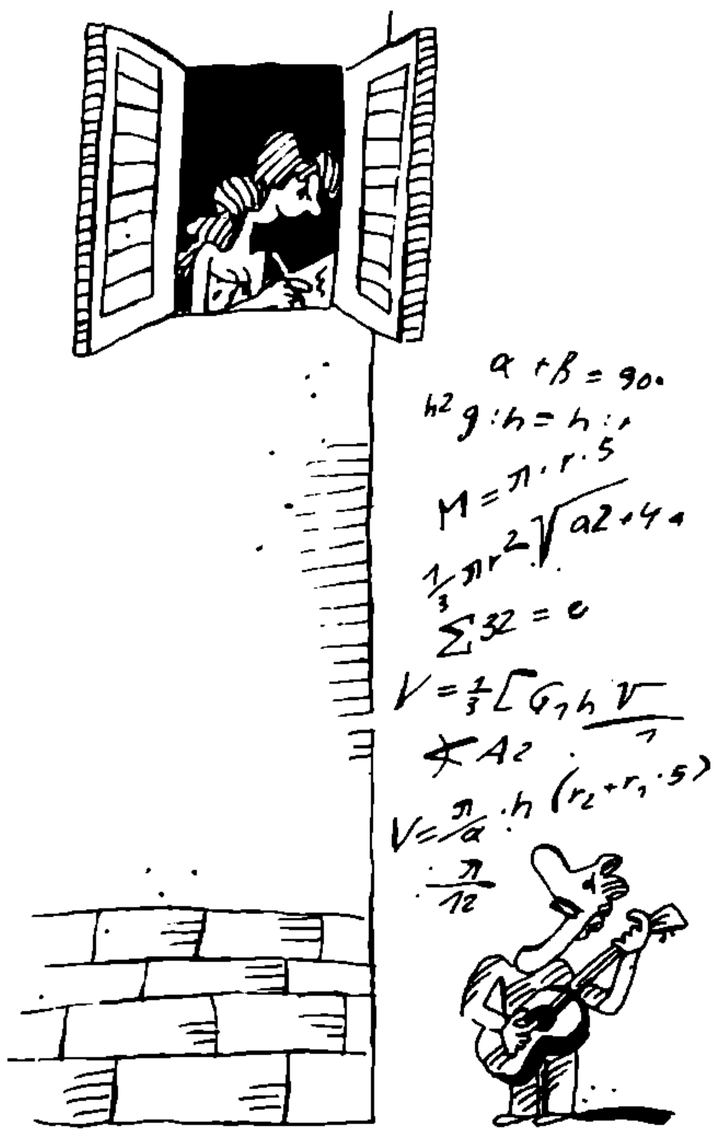
Bild 2
Glockenrock

J. Heller

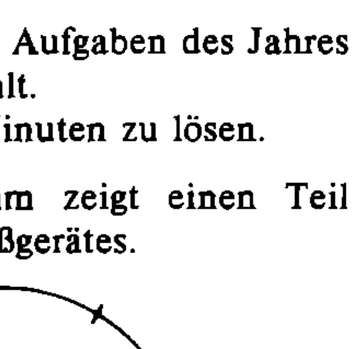
Ihr werdet es schon gemerkt haben: Unsere Vignetten und der Löwenanteil der Karikaturen stammen vom Leipziger Grafiker Lothar Otto. Darüber freuen wir uns riesig, denn – Lothar Otto ist ein gefragter Mann. Und – ein preisgekrönter! Wir gratulieren herzlich zum 1. Preis im Ergebnis der Auswahl der weltbesten Cartoonbücher bei der internationalen Cartoonale in Beringen (Belgien) 1989.

Das Spitzenprodukt: „Ottografie" vom Kinderbuchverlag Berlin. *Alphons*

(Eine „Otto-Schöpfung")



AJHSME



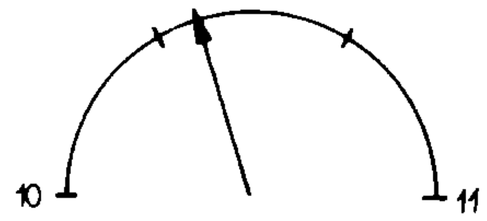
Eine Geheimschrift? Nein! Es ist die Abkürzung für den jährlich in den USA stattfindenden Amerikanischen Hochschulwettbewerb für Kinder (american junior high school mathematics examination).

Für 25 Aufgaben erhalten die Schüler der Klassen 7 und 8 40 Minuten reine Arbeitszeit. Alle Aufgaben sind im Antwort-Wahl-System gestellt, nur eine der fünf angegebenen Antworten ist richtig und damit anzukreuzen.

Wir haben einige der Aufgaben des Jahres 88 für euch ausgewählt.

Versucht, sie in 10 Minuten zu lösen.

▲1▲ Das Diagramm zeigt einen Teil einer Skala eines Meßgerätes.



Der Zeiger zeigt näherungsweise
A) 10,05 B) 10,15 C) 10,25
D) 10,3 E) 10,6 an.

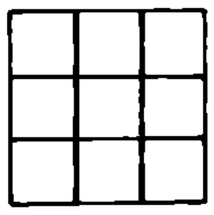
▲2▲ Das Produkt $8 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}125$ ist gleich
A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2.

▲3▲ Betty benutzt den Taschenrechner, um das Produkt $0{,}075 \cdot 2{,}56$ auszurechnen. Sie vergaß dabei das Dezimalkomma (d. h. das Komma) zu drücken. Der Rechner zeigte 19200 an. Wenn Betty das Komma korrekt eingetippt hätte, dann wäre die Antwort
A) 0,0192 B) 0,192 C) 1,92
D) 19,2 E) 192.

▲4▲ Wir setzen voraus, daß die geschätzten Kosten von 20 Billionen Dollar, die der Flug eines Menschen zum Planeten Mars kostet, gleichmäßig auf die 250 Millionen Menschen der USA aufgeteilt wird. Dann hat jede Person
A) 40 Dollar B) 50 Dollar
C) 80 Dollar D) 100 Dollar
E) 125 Dollar zu bezahlen.

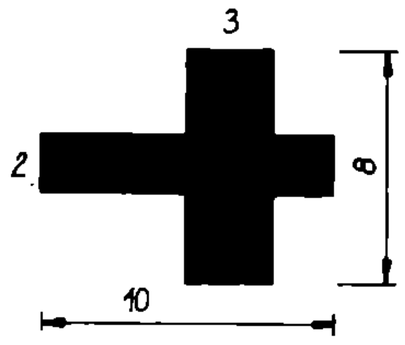
▲5▲ Wenn Rosenstöcke mit einem Fuß* Abstand gepflanzt werden, dann benötigt man rund
A) 12 B) 38 C) 48 D) 75 E) 450
Rosenstöcke, um ein rundes Beet mit einem Radius von 12 Fuß anzulegen.
(* Fuß = veraltetes, von der Länge des Fußes abgeleitetes Längenmaß, 1 Fuß entspricht etwa 30 cm)

▲6▲ Es darf höchstens ein Kreuz in jedes kleine Quadrat gezeichnet werden. Bestimme die größte Anzahl von Kreuzen, die man in dem quadratischen Gitter unterbringen kann, wenn keine drei Kreuze in jeder Vertikalen, Horizontalen und Diagonalen sein dürfen!

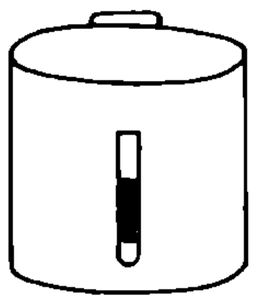


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6.

▲7▲ Die dunkle Fläche wird von zwei sich überschneidenden, senkrecht aufeinanderstehenden Rechtecken gebildet. Die Fläche beträgt dann
A) 23 B) 38 C) 44 D) 46 E) es ist unmöglich, mit den gegebenen Informationen eine Entscheidung zu treffen.



▲8▲ Das Glasfenster in einer zylindrischen Kaffeemaschine zeigt an, daß man 45 Tassen erhalten kann, wenn die Maschine zu 36 % gefüllt ist. Wie viele Tassen enthält sie, wenn sie gefüllt ist?



A) 80 B) 100 C) 125 D) 130 E) 262.

Sofia Kowalewskaja (1850 bis 1891), erste Universitätsprofessorin der Welt für Mathematik, gehört zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts. Ihre hervorragenden Leistungen haben bis heute nichts von ihrem Glanz eingebüßt.
Zunächst studierte sie in Heidelberg bei Königsberger, dann in Berlin als Privatschülerin bei Weierstraß.
Für ihre vortrefflichen Arbeiten über die Rotation schwerer Körper erhält sie den Bordin-Preis der Akademie der Wissenschaften Frankreichs. Ab 1884 ist sie zum Professor für Mathematik an die Universität Stockholm berufen.
Im Gegensatz zu ihrer erfolgreichen beruflichen Laufbahn verläuft ihr persönliches Leben eher tragisch. Auf dem Höhepunkt ihres schöpferischen Lebens ereilt sie völlig unerwartet der Tod.
Über diese hervorragende Frau hat der Moskauer Mathematiker Alexander Halameisär jetzt ein Buch geschrieben. Es ist im Selbstverlag des Autors veröffentlicht und kann bei folgender Kontaktadresse zu einem Betrag von 10,– M zuzüglich Versandkosten bestellt werden: Dr. M. Röhr, Alte Salzstraße 110, 7062 Leipzig

Dem Erdmittelpunkt näher oder die schiefe Friedrichstraße

Unsere Erde ist infolge der bei ihrer Eigendrehung (Rotation) auftretenden Zentrifugalkraft an den Polen abgeplattet. So ist der Poldurchmesser um 42,952 km kürzer als der Äquatordurchmesser.
Das Abplattungsverhältnis ist aber sehr klein und beträgt 1 : 297, ganz im Gegensatz zu den beiden Riesenplaneten Jupiter und Saturn, wo es 1 : 16 bzw. 1 : 10 beträgt. Würde man das Verhältnis auf einen Erdglobus mit 33 cm Durchmesser (Schulglobus) übertragen, wäre der Poldurchmesser nur um reichlich 1 mm kürzer. Bewegen wir uns auf der Erde von Süden nach Norden (auf der Südhalbkugel von Norden nach Süden), müssen wir folglich dem Erdmittelpunkt näher kommen. Betrachten wir einmal eine von Süden nach Norden verlaufende Straße und wählen wir darauf eine Strecke von 1 Kilometer aus! Befindet sich das Nordende unserer ausgewählten Straße tatsächlich näher am Erdmittelpunkt oder handelt es sich dabei um einen unbedeutenden Betrag, der überhaupt nicht ins Gewicht fällt?
Wir wollen dabei eine gleichmäßige Verteilung der Abplattung zwischen Pol und Äquator annehmen, auch spielt das Oberflächenprofil der Erde (Berge, Täler) keine Rolle.
Unsere ausgewählte Strecke sei die Friedrichstraße in Berlin!
Die Entfernung von der Leipziger Straße bis zum Bahnhof Friedrichstraße, Ecke Georgenstraße, beträgt genau 1 km. Wem ist beim Abschreiten dieses Kilometers schon einmal bewußt geworden, daß man am Bahnhof Friedrichstraße dem Erdmittelpunkt 2,15 m näher ist als in der Leipziger Straße?
Eine kurze Berechnung soll unser Ergebnis bestätigen! Ein Kilometer ist der zehntausendste Teil eines Erdquadranten. Der ganze Erdquadrant hat eine Länge von 10 000 km (genauer Wert: 10 002,288 km). Damit wurde früher übrigens auch unser Längenmaß, das Meter, definiert. Unser Kilometer in der Friedrichstraße macht demnach den 10 000. Teil des Erdquadranten aus. Die Verkürzung des Erdhalbmessers infolge der Abplattung beträgt 21,476 km (= 21 476 m), die wir durch 10 000 teilen müssen.
Wenn unsere Kilometerstrecke in der Friedrichstraße den 10 000. Teil des Erdquadranten ausmacht, muß dieser Anteil auf die Abplattung entfallen. Das Ergebnis ist demnach 2,15 m!

Wählen wir eine größere Strecke, so werden die Unterschiede noch augenscheinlicher. Rostock und Gera liegen auf demselben Längenkreis, ihre Luftlinienentfernung beträgt 353 km. Diese Strecke entspricht dem 28,334. Teil des Erdquadranten. Beziehen wir diesen Betrag auf die Abplattung der Erde, indem wir 21,476 km durch 28,334 teilen, so erhalten wir 0,757 958 km (gerundet: 758,5 m).
Ist den Rostockern schon einmal bewußt geworden, daß sie um 758,5 m dem Erdmittelpunkt näher sind als die Einwohner von Gera?

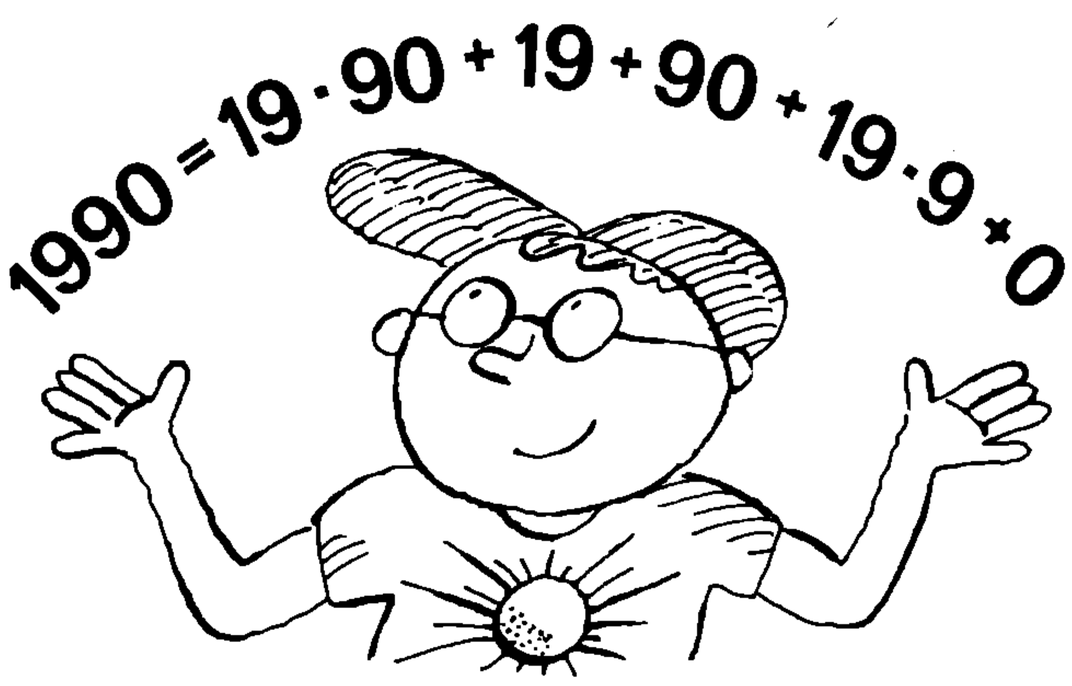
Erdwölbung und Hauswände

Es ist selbstverständlich, daß die Wände der Häuser senkrecht gebaut werden. Das bedeutet, daß eine senkrechte Hauswand in ihrer Verlängerung zum Erdmittelpunkt gerichtet ist.
Infolge der gewölbten Erdoberfläche können zwei voneinander entfernte Hauswände zueinander aber nicht mehr parallel verlaufen, sondern müssen einen Winkel bilden. Dieser Winkel beträgt bei einer 1 km langen Strecke immerhin 32,4 Bogensekunden, also eine reichliche halbe Bogenminute. Unter diesem Winkel sehen wir z. B. ein Zehnpfennigstück in einer Entfernung von 133,7 m. Handelt es sich um eine Strecke von 111,11 km, was einem Breitengrad entspricht (z. B. Jüterbog – Gransee), beträgt dieser Winkel bereits 1°.
Kommen wir zu der 1 km langen Strecke noch einmal zurück:
Multiplizieren wir den Winkel von 32,4″ mit 10 000 (Länge des Erdquadranten: 10 000 km) so erhalten wir 324 000″, also 90°. Dies ist genau der Winkel, den senkrechte Wände auf dem Pol mit denen auf dem Äquator bilden würden.

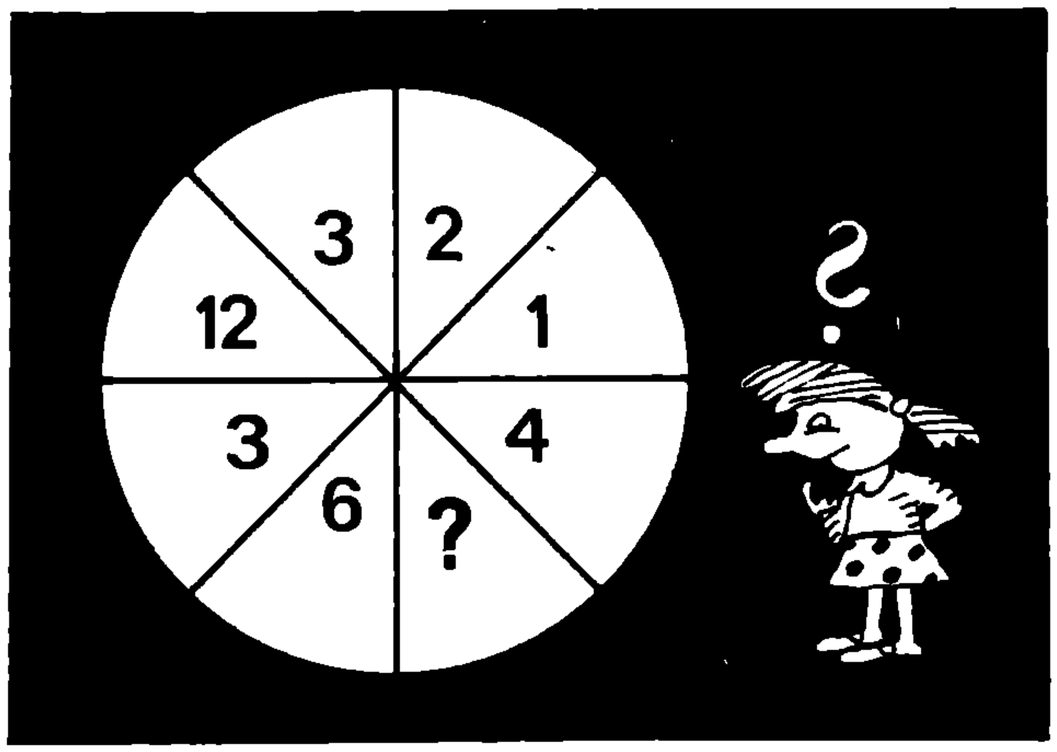
A. Zenkert

Im Heft 3/88 hatten wir es bereits berichtet: Unser Autor, StR A. Zenkert leitet den Kulturbund-Arbeitskreis Gnomonik. Dieser brachte den Katalog der ortsfesten Sonnenuhren auf dem Gebiet der DDR auf den neuesten Stand. Insgesamt gibt es 1374 Sonnenuhren, mit 265 hat der Bezirk Dresden die Nase vorn.
563 gelten als historisch bzw. künstlerisch wertvoll. Aus der Zeit vor 1500 stammen 124, aus den letzten vier Jahrzehnten ein Drittel der Uhren.

Alphons



FERIENMAGAZIN



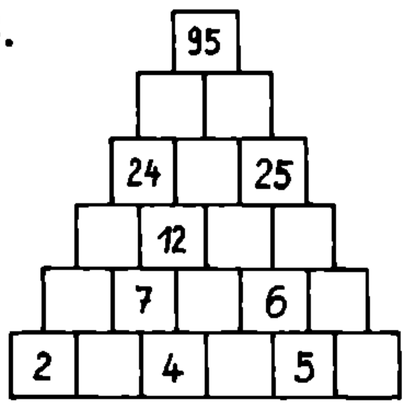
1.

12	· 8 + 2 =
123	· 8 + 3 =
1234	· 8 + 4 =
12345	· 8 + 5 =
123456	· 8 + 6 =
1234567	· 8 + 7 =
12345678	· 8 + 8 =
123456789	· 8 + 9 =

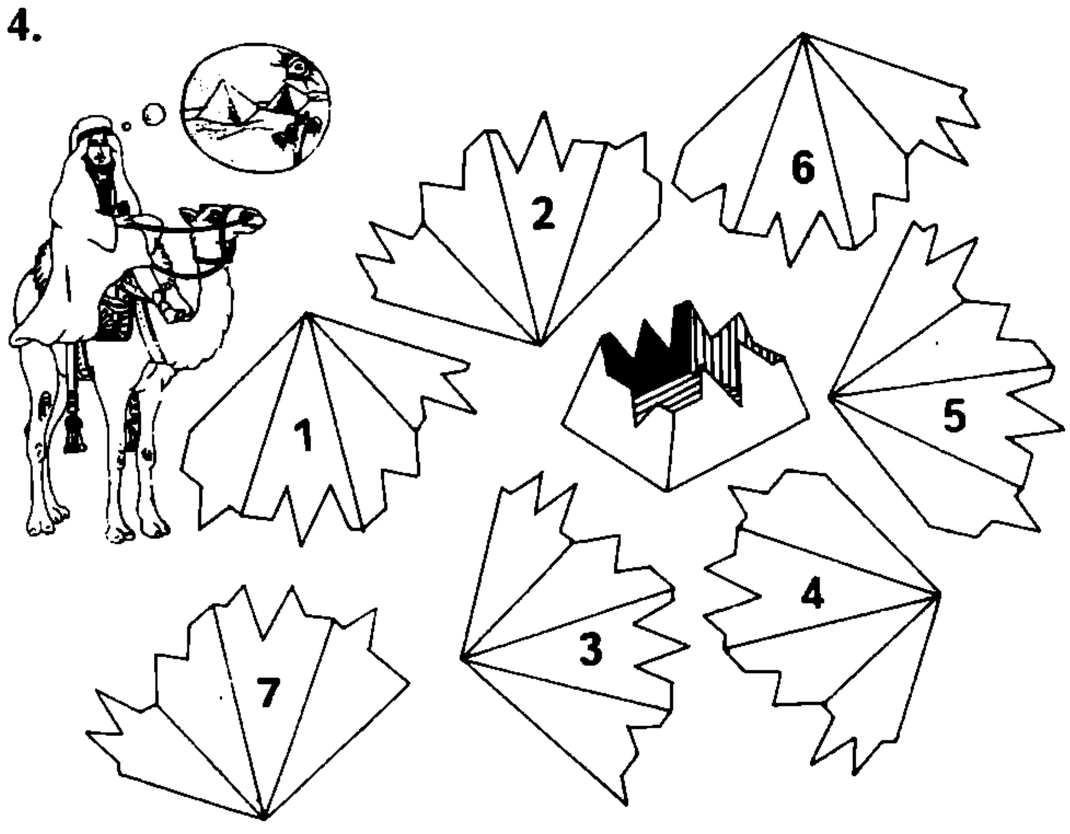
2.

60	?	10	?	60	—	10
5	?	2	?	3	—	30
20	?	5	?	15	—	40
10	?	9	?	31	—	50

3.



4.



5. E = R : 2 R = K + A
K = A · 3 A = 210 : 7
E + R + I + K + A = 350

E	R	I	K	A

3280 + *a* = 3330
a + *b* = 200
c : *a* = 4
a + *b* + *c* + *d* = 500

a =	*b* =	*c* =	*d* =

6. 840 : 120 = ○
○ · 5 = △
(△ − 31)² = □
□ + 4 = □

7.

AAA · A = BBB
− −
CCC · A = DDD
FFF · A = 3 3 3

10 : 2 + □ = 9
+ + + +
14 · 2 − □ = 3
+ + + +
□□ − □ − 2 = 7
36 − 7 − □ = □□

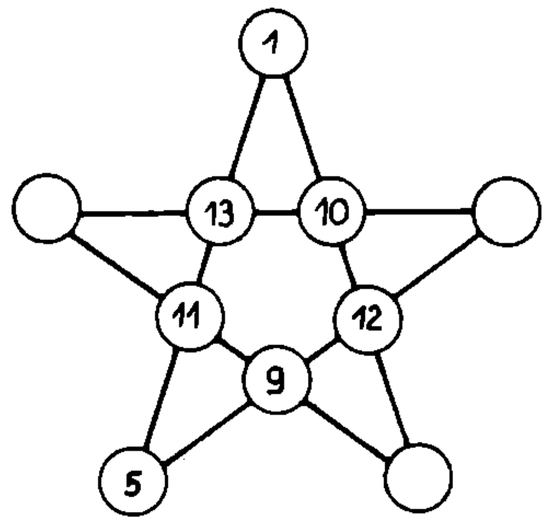
□△ + 8 = 3○
− − −
1◇ + ○ = 1○
1△ + 3 = □◇

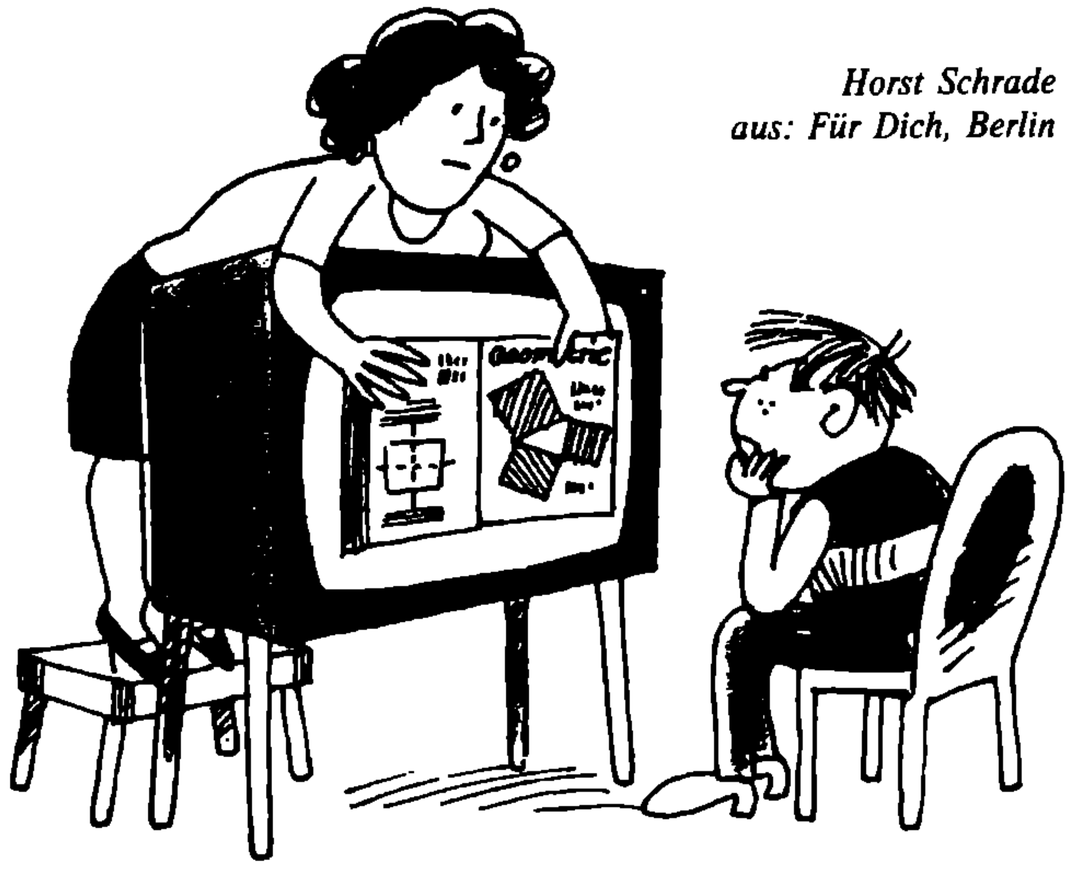
8.

+9		−5	+6
−2		+4	+1
	−1		
−3			−6

1		14	4
12	6		
	10	11	
13			16

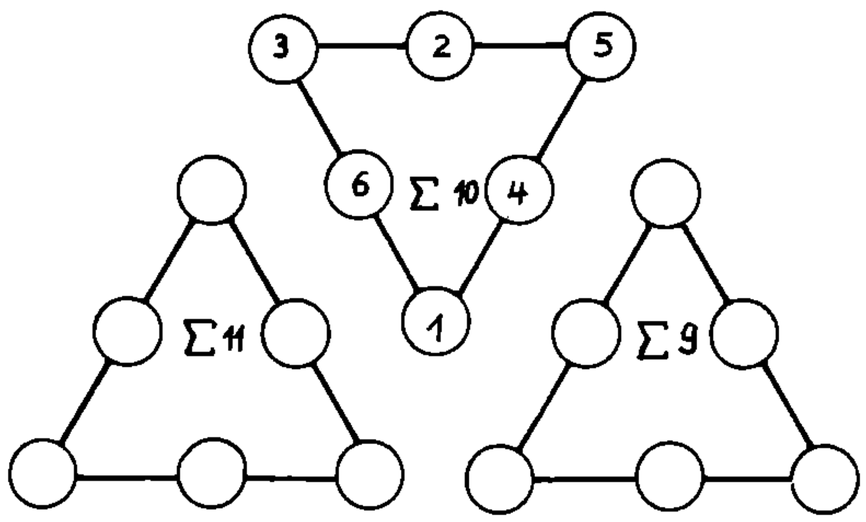
9.



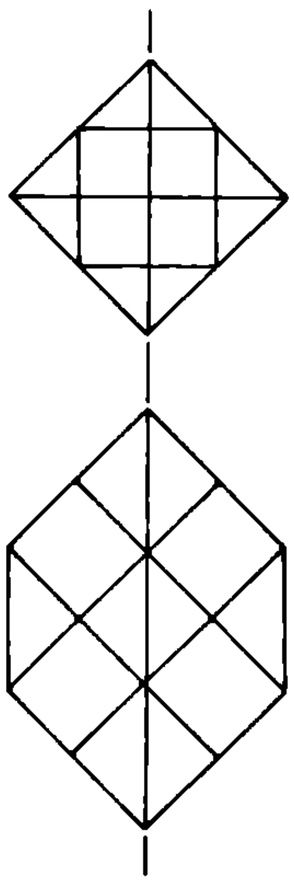


Horst Schrade
aus: Für Dich, Berlin

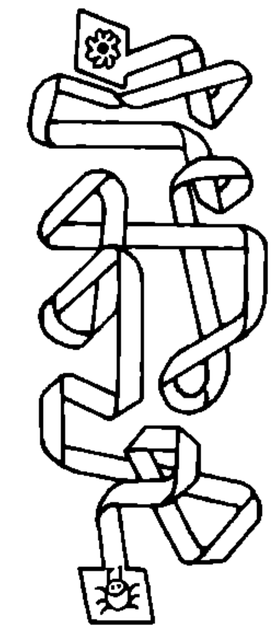
10.



11. Zähle die Dreiecke, die in jeder der Figuren enthalten sind.



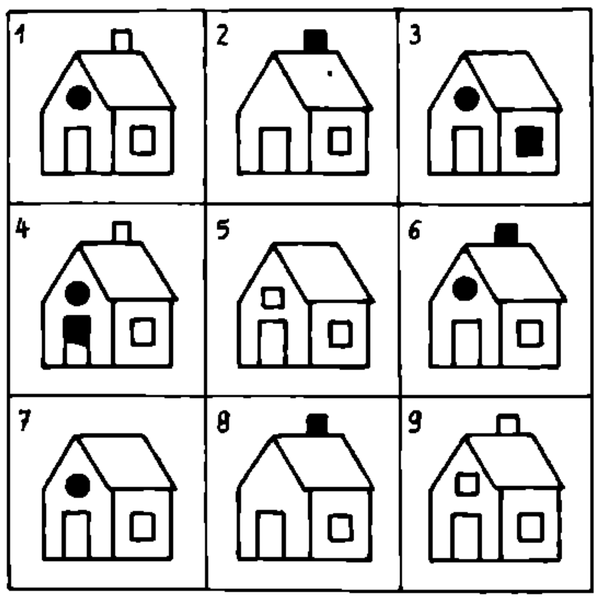
12. Erreicht der Marienkäfer die Blume?



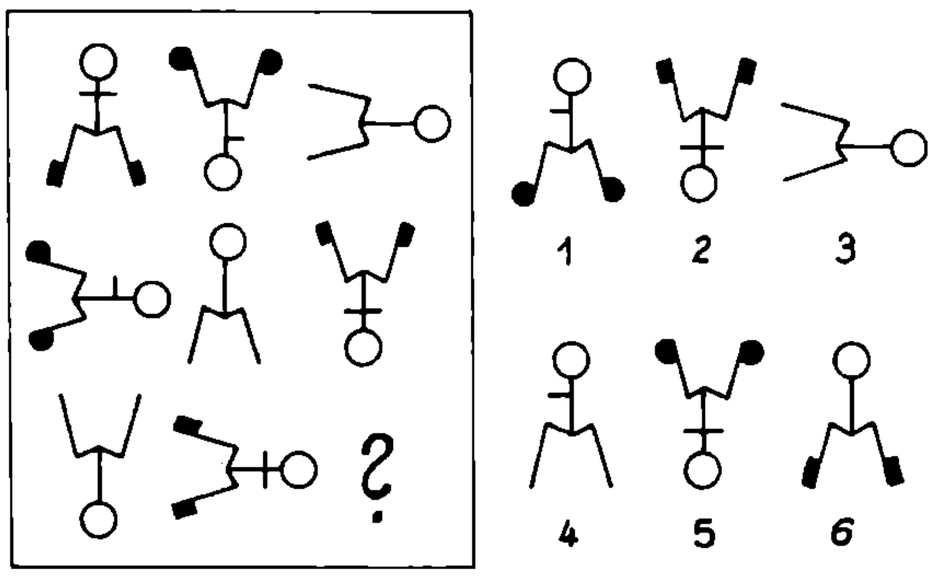
13.

	oh		ster	Ü
ne		Preis		mei
	und		bung	den
kein		Fleiß		macht

14. Welche Häuser gleichen sich?



15.



Mit oder ohne Feder?

Am Hof eines orientalischen Herrschers dienten einst drei Weise: Abdul, Ali und Achmed. Jeder von ihnen behauptete ohne falsche Bescheidenheit, daß gerade er der Weiseste der Weisen sei.

„Wer ist aber wirklich der Weiseste?“, wollte der Herrscher von seinem Hofnarr wissen.

„Das herauszubekommen, ist nicht schwierig, oh mein Gebieter“, antwortete der Narr bereitwillig. „Lasse nur fünf Samtmützen mit je einem Turban herstellen, und zwei davon mit einer Fasanenfeder schmücken. Und dann rufe deine Weisen.“

Als die Weisen kamen, zeigte ihnen der Narr sämtliche Mützen, befahl ihnen, sich ihre Augen zu verbinden, stülpte jedem eine der Mützen auf den Kopf, zog ihnen die Binde ab und sprach:

„Derjenige, der errät, ob sein Turban eine Feder hat oder nicht, wird als der Weiseste anerkannt. Kannst du diese Frage beantworten, oh Abdul der Weise?“

Der Narr setzte aber allen dreien die Mütze ohne Feder auf.

Abdul sah, wie die anderen „Weisesten“, zwei Mützen ohne Feder bei seinen Rivalen, wußte aber nicht, ob er selbst an seiner eine Feder hat.

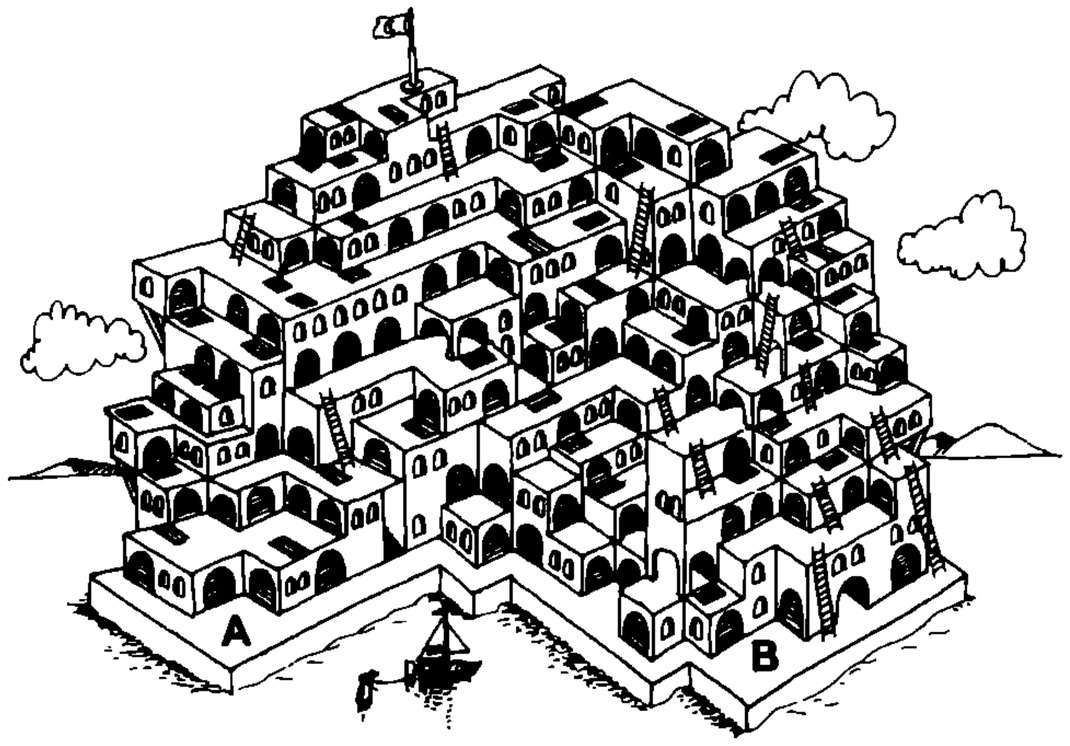
„Ich wage es nicht, denn ich fürchte, mich zu irren und ausgelacht zu werden“, sagte Abdul vorsichtshalber.

„Und du, oh weisester Ali?“ forschte der Narr weiter.

„Ich auch nicht“, antwortete Ali.

„Aber ich weiß es!“ rief sogleich Achmed. „Meine Mütze hat keine Feder! Ich bin also wirklich der Weiseste der Weisen!“

A. Halameisär



In alten Formelsammlungen geblättert: über eine Näherungsformel zum Wurzelziehen

Es ist recht reizvoll, in alten Mathematikbüchern zu schmökern.
Immer wieder ist man erstaunt, was damals schon zum Allgemeingut gehörte: So in dem 488 Seiten starken und über 200 Jahre alten Band
„Logarithmische, trigonometrische,
und andere zum Gebrauche der Mathematik
eingerichtete Tafeln und Formeln",
aus dem wir nachfolgend eine Näherungsformel zum Wurzelziehen behandeln wollen.

(✣)

LOGARITHMISCHE,
TRIGONOMETRISCHE,
und andere
zum Gebrauche der Mathematik
eingerichtete
TAFELN UND FORMELN.

Herausgegeben
von
GEORG VEGA,
Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik
bey dem K.K. zweyten Feld-Artillerie-
Regiment.

WIEN,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1783

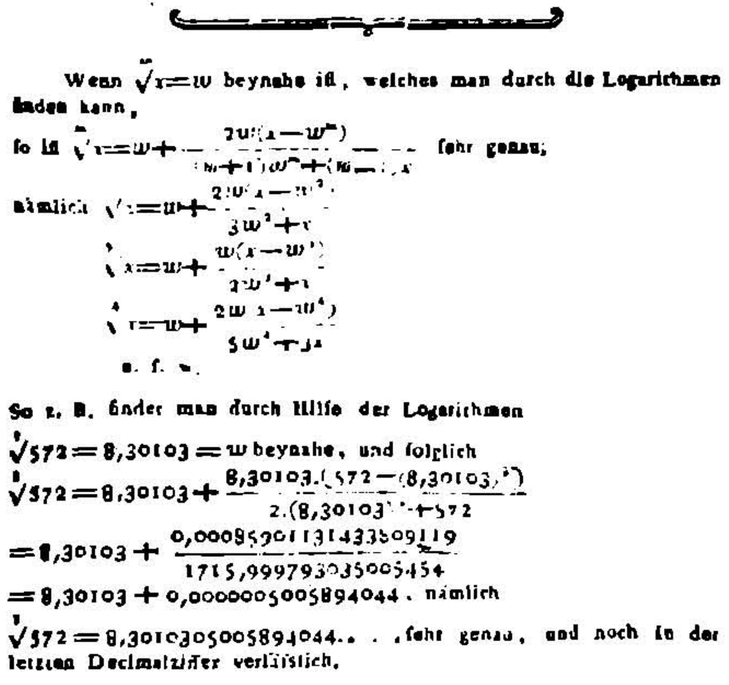
(✣)

Schon die im Vorbericht versprochene Zuverlässigkeit der Tafeln ist beachtlich; wir lesen:
„... und derselben ein volles Zutrauen verschaffet zu haben, dass man sich kraft einer öffentlichen Ankündigung verbindlich machte für jede erste Anzeige eines jeden in gegenwärtigen Tafeln entdekten wirklichen Fehlers einen kaiserlichen Dukaten zu bezahlen ...
Wien am letzten Novembris 1783
GEORG VEGA"
Eine vergleichbare Ankündigung dürfte heute kaum ein Herausgeber wagen können!
Auf S. 387 finden wir folgenden Abschnitt:

„Allgemeine Formel um aus was immer für einer Zahl x die Wurzel m zu ziehen.
Wenn $\sqrt[m]{x} = w$ beynahe ist, welches man durch die Logarithmen finden kann, so ist

$$\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w(x - w^m)}{(m+1)w^m + (m-1)x}$$

sehr genau. So z. B. findet man durch Hilfe der Logarithmen $\sqrt[3]{572} = 8{,}301\,03 = w$ beynahe, und folglich
$\sqrt[3]{572} = 8{,}301\,030\,500\,589\,404\,4.$ sehr genau, und noch in der letzten Decimalziffer verlässlich."



XVIII. Allgemeine Formel um aus was immer für einer Zahl x die Wurzel m zu ziehen.

Wenn $\sqrt[m]{x} = w$ beynahe ist, welches man durch die Logarithmen finden kann,

so ist $\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w(x-w^m)}{(m+1)w^m+(m-1)x}$ sehr genau;

nämlich $\sqrt{x} = w + \frac{2w(x-w^2)}{3w^2+x}$

$\sqrt[3]{x} = w + \frac{w(x-w^3)}{2w^3+x}$

$\sqrt[4]{x} = w + \frac{2w(x-w^4)}{5w^4+3x}$

u. s. w.

So z. B. findet man durch Hilfe der Logarithmen
$\sqrt[3]{572} = 8{,}30103 = w$ beynahe, und folglich
$\sqrt[3]{572} = 8{,}30103 + \frac{8{,}30103.(572-(8{,}30103)^3)}{2.(8{,}30103)^3+572}$
$= 8{,}30103 + \frac{0{,}000859011314338909119}{1715{,}999793035005454}$
$= 8{,}30103 + 0{,}000000500589404\,4$. nämlich
$\sqrt[3]{572} = 8{,}301030500589404\,4$. . . sehr genau, und noch in der letzten Decimalziffer verlässlich.

In heutiger Anwendung mag die erste Näherung eher durch den Taschenrechner ermittelt werden, aber wenn man eine Wurzel auf mehr Dezimalstellen genau benötigt als der Taschenrechner angibt, ist die angegebene Formel überaus praktisch, da sie zum einen recht einfach gebaut ist und zum anderen, wie das zitierte Beispiel zeigt, in einem einzigen Näherungsschritt eine Vielzahl von gültigen Dezimalstellen erzeugen kann.
Nun gibt es seit einigen Jahren Kriterien für die Güte von Näherungsverfahren. Wir wollen dies alte Verfahren daraufhin untersuchen und mit dem heute verbreiteten Newtonschen Näherungsverfahren vergleichen.
Wir schreiben die Aufgabe wie folgt um:
Seien $x > 0$ eine reelle und $m \geqq 2$ eine natürliche Zahl, gesucht ist $w = \sqrt[m]{x}$, also die positive Nullstelle der Funktion

$$f(w) = w^m - x$$

wobei eine Näherungslösung $w = w_1$ bereits bekannt ist.
Ein Näherungsverfahren besteht nun in der Angabe einer Vorschrift F, wie aus einer Näherung eine bessere Näherung ermittelt werden kann. Durch mehrfache Anwendung dieser Vorschrift erhält man induktiv eine ganze Näherungsfolge (w_n), die induktiv durch $w_{n+1} = F(w_n)$ definiert wird. Das Verfahren aus der VEGA-Sammlung wird also durch die Vorschrift

$$F_V(w) = w\left[1 + \frac{2(x - w^m)}{(m+1)w^m + (m-1)x}\right] \quad (1)$$

definiert, während beim bekannten Newtonschen Verfahren

$$F_N(w) = w\left[\frac{m-1}{m} + \frac{x}{m \cdot w^m}\right] \quad (2)$$

zu berechnen ist.
Der Übersichtlichkeit halber sollen die Spezialfälle für die Quadratwurzeln, also $m = 2$, auch angegeben werden:

$$F_V(w) = w \cdot \left[1 + \frac{2(x - w^2)}{3w^2 + x}\right],$$

$$F_N(w) = w\left[\frac{1}{2} + \frac{x}{2w^2}\right].$$

Nun verlangt man von einem guten Näherungsverfahren nicht nur, daß für sehr große n der Wert w_n sehr nahe an der genauen Lösung liegt, sondern man erwartet schon für kleine Werte n einen befriedigend genauen Näherungswert w_n. Die Güte eines Näherungsverfahrens läßt sich dadurch beschreiben, wie der Fehler $\varepsilon_{n+1} = f(w_{n+1})$ der $(n+1)$-ten Näherungslösung w_{n+1} im Vergleich zum Fehler ε_n der n-ten Näherungslösung w_n ausfällt.
Ist beispielsweise $|\varepsilon_{n+1}| \approx \frac{|\varepsilon_n|}{10}$, so kann man, grob gesagt, davon ausgehen, daß sich in jedem Näherungsschritt eine weitere gültige Dezimalstelle ergibt. Wie sieht das jetzt bei den beiden oben angegebenen Verfahren aus? Sie lassen sich gemeinsam behandeln. Wir schreiben in Abhängigkeit von A und B

$$F(w) = w \cdot \left[1 + \frac{2(x - w^m)}{Aw^m + Bx}\right] \quad (3)$$

so, daß sich für $A = m + 1$ und $B = m - 1$ gerade F_V nach (1) und für $A = 2m$ und $B = 0$ gerade F_N nach (2) ergibt.
$\varepsilon = f(w)$ ist der Fehler der Lösung w, $\varepsilon^* = f(F(w))$ der der nächsten Näherungslösung. Es wird also $f(w) = w^m - x$ nach x aufgelöst und $x = w^m - \varepsilon$ in (3) eingesetzt: man erhält dann

$$\varepsilon^* = w^m\left[1 - \frac{2\varepsilon}{(A+B)w^m - B}\right]^m + \varepsilon - w^m \quad (4)$$

Für $\varepsilon = 0$ ist natürlich auch $\varepsilon^* = 0$; d. h., wenn man die genaue Lösung als erste Näherung benutzt, ist die zweite Näherung dieser gleich.
Wir wollen jetzt die Koeffizienten A und B so bestimmen, daß bei festem $|\varepsilon| \gtrsim 0$ der Wert von $|\varepsilon^*|$ möglichst klein wird. Wir benutzen die binomischen Formeln

$$(1 + \alpha)^m = 1 + m\alpha + \frac{m}{2}(m-1)\alpha^2 + \ldots \quad (5)$$

speziell für $m = -1$

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \ldots \quad (6)$$

und ordnen (4) nach Potenzen von ε.
Man erhält

$$\varepsilon^* = \left(1 - \frac{2m}{A+B}\right)\varepsilon + G\varepsilon^2 + H\varepsilon^3 + \ldots \quad (7)$$

mit gewissen Koeffizienten G und H, die von A, B und m abhängen. Wir fordern den Leser auf, diese zu berechnen. Dafür

genügt es, die Formeln (5) und (6) in der angegebenen Näherung zu verwenden.
Nun sind wir in der Lage, die Güte der beiden angegebenen Verfahren miteinander zu vergleichen. In beiden Fällen gilt $A + B = 2m$, so daß der Faktor vor ε in Formel (7) verschwindet.
Für das Newtonsche Verfahren ist
$|G| \approx 1$, also $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^2$, d. h. mit jedem Näherungsschritt wird die Zahl der gültigen Dezimalstellen verdoppelt. Für das von VEGA angegebene Verfahren ist dagegen
$G = 0$, und $|H| \approx 1$, also $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^3$,
d. h., die Zahl der gültigen Dezimalstellen wird sogar mit jedem Näherungsschritt verdreifacht. Die Leser, denen der Übergang von Formel (4) zu Formel (7) Probleme bereitet, fordern wir auf, sich anhand einer Reihe selbst ausgedachter Beispiele von der Gültigkeit der Beziehungen $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^2$ bzw. $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^3$ zu überzeugen.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß das von Vega angegebene Verfahren, obwohl es nur unwesentlich aufwendiger zu handhaben ist, eine höhere Güte besitzt als das Newtonsche Verfahren:
Seine Konvergenzgeschwindigkeit ist kubisch im Gegensatz zur quadratischen Konvergenzgeschwindigkeit beim Newtonschen Verfahren. Das angegebene Beispiel $\sqrt[3]{572}$ (von 6 auf 17 gültige Dezimalen) ist also ein typischer Genauigkeitszuwachs.

H.-J. Schmidt

Buchtip: Carl Friedrich Gauß

Erlebtes und Erstrebtes

Selbstdarstellung des „Fürsten der Mathematiker" in Briefen und Gesprächen
Herausgeber: Kurt-R. Biermann
232 S., zahlr. Abb., Leinen
Bestell-Nr. 654 385 2 Preis: 19,80 M
Urania-Verlag Leipzig

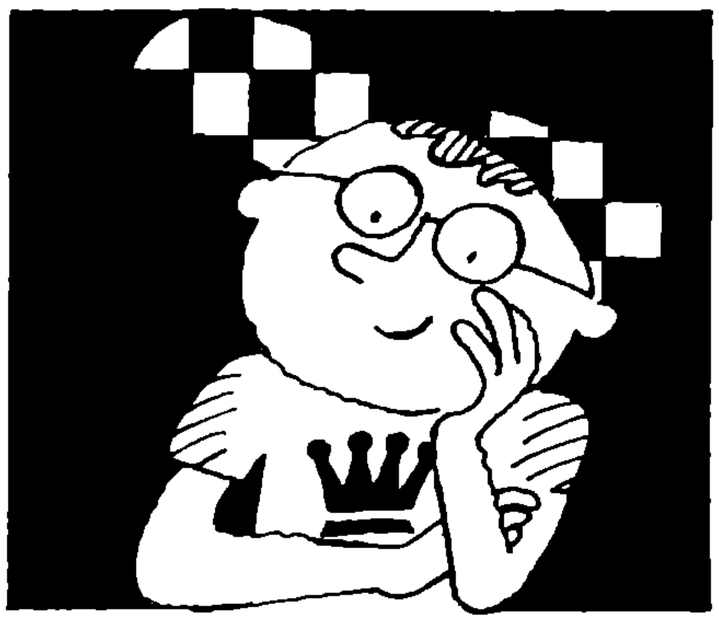
Kryptarithmetische Knobelaufgabe

In einer bekannten Rätselzeitschrift wurde folgende kryptarithmetische Aufgabe veröffentlicht:

$$\begin{array}{rcl} E\ I\ C & - & I\ H = G\ B\ C \\ : & & + \quad - \\ I\ I & \cdot & D\ C = B\ C\ G \\ \hline C\ I & + & G\ C = A\ I\ F \end{array}$$

Dabei hatte aber der Druckfehlerteufel seine Hand im Spiel, und so war für zwei verschiedene Ziffern der gleiche Buchstabe verwendet worden.
Es heißt aber stets, daß gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern bedeuten.
Wenn man die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mit den Buchstaben *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* und *K* bezeichnet, so fehlte der Buchstabe *K*.
Finde heraus, wo der Druckfehler steckt!

A. Körner



Schach dem König – Muß der Schachweltmeister einem Computer weichen?

Diese Frage erregt unter Schachspielern, Mathematikern – Wissenschaftlern und Laien immer wieder größtes Interesse. Antworten gibt es viele – Meinung prallt auf Meinung. Haben wir in unserer letzten Ausgabe über die pädagogischen Seiten des königlichen Spiels berichtet, so wollen wir heute auf neue Erkenntnisse im Computerschach eingehen.
Vieldiskutiert ist nicht nur der Kampf um die Schachkrone; seit mehr als tausend Jahren träumen begeisterte Anhänger davon, eine perfekte Spielweise zu entwikkeln, unschlagbar zu werden. Gibt es diese optimale Strategie? Nur wenige wissen, daß bereits vor 75 Jahren der deutsche Mathematiker Ernst Zermelo (1871 bis 1953) auf diese Frage eine erschöpfende Antwort gab. Durch Anwendung einfacher Methoden der Kombinatorik und der Schachregeln lassen sich alle nur möglichen Stellungen beschreiben, in denen Schwarz matt gesetzt wurde. Eine solche Position nennen wir S0. (Wir betrachten hier nur diesen Fall, für einen Verlust von Weiß – W0 – gilt alles analog.) Wird in jeder solchen Stellung der letzte weiße Zug zurückgenommen, erhalten wir Stellungen des Types S1, wobei darauf geachtet wird, daß nur praktisch mögliche Konfigurationen auftreten – z. B. niemals beide Könige im Schach stehen u. a. Hier ein Beispiel für eine Stellung: S0 und alle aus ihr folgenden Positionen S1: W – Kb6, Da7, Sf7; S – Ka8. Daraus ergeben sich 3 Stellungen S1, nämlich W – Kb6, Sf7; S – Ka8 und die weiße Dame steht entweder auf e7, d7 oder c7. Die Menge S2 wird entsprechend durch Zurücknahme des letzten schwarzen Zuges gebildet – aus jeder der 3 Stellungen S1 ergibt sich im Beispiel genau eine Stellung S2, da der König nur von b8 gekommen sein kann. Zu beachten ist dabei, daß zu S2 nur Positionen gehören, in denen jeder schwarze Zug zu einer Stellung S1 führt. Für De7 ist dann auch Kc8 möglich, doch gehört natürlich auch diese Position zur großen Menge S1. Bei optimalem Spiel von Weiß gewinnt dieser also jede Position S2 in 2 Halbzügen.
Führt man dieses Verfahren immer weiter fort und wendet es auf jedes Mattbild S0 an, so erhält man die Menge aller Positionen SX, in denen Weiß zwangsläufig nach einer Anzahl von X Halbzügen gewinnt. Ebenso erhält man die Menge aller WX. Alle übrigen Stellungen – weder Weiß noch Schwarz können bei optimalem Spiel gewinnen – bilden die Menge aller möglichen Remispositionen R. Sowohl Schwarz als auch Weiß steht hier mindestens ein Zug zur Verfügung, der zum Remis führt. Daraus folgt eine mathematisch bewiesene, optimale Strategie:
1. In jeder Position SX muß sowohl Weiß als auch Schwarz zu S(x – 1) überleiten. Das sichert Weiß den schnellstmöglichen Sieg und Schwarz den längsten Widerstand. Für WX gilt das analog.
2. In Stellungen aus R müssen beide Spieler Züge wählen, die wieder zu Positionen aus R führen.
Jeder Zug, der den Anforderungen dieser Strategie entspricht, ist der in der jeweiligen Stellung beste, wobei mehrere solcher Züge existieren können. Im Durchschnitt sind es ungefähr 1,4 bis 1,7 pro Stellung.
Damit wäre die Angelegenheit Schach erledigt – wenn jeder nach der optimalen Strategie spielt, haben alle Partien das gleiche Ergebnis. Von entscheidender Bedeutung ist jedoch, daß niemand stets genau einschätzen kann, ob er sich in einer Position der Menge S, W oder R befindet. Nicht geklärt ist z. B. auch, zu welcher Menge die Ausgangsstellung gehört. Ebenso sind die optimalen oder Meisterzüge, von denen der Algorithmus ausgeht, nur schwer zu finden. Die absolute Wahrheit existiert unabhängig von unserem Spiel – wir können sie nicht nutzen.

Was aber führt uns von Ernst Zermelo zum Computerschach und dem Kampf um die Krone?
Zur Einschätzung der Spielstärke eines Schachsportlers existiert das sogenannte Ratingsystem. Es ordnet jedem Spieler eine Punktzahl entsprechend seiner Leistung zu. Dabei kommen Lernende auf Werte zwischen 0 und 1500, Spieler der Leistungsklasse 1 auf durchschnittlich 2070 und Großmeister auf ungefähr 2500 Punkte. Neuer Rekordhalter ist mit 2810 Punkten Weltmeister Garri Kasparow. Die besten Computer bleiben mit einer Ratingzahl von 2550 deutlich unter diesem Niveau.
Nach neuesten Erkenntnissen könnte sich jedoch eine plötzliche Wandlung in diesem Verhältnis einstellen. Anhand empirischer Untersuchungen wurde folgendes festgestellt: Sei A die Anzahl an Meisterzügen in Prozent, welche ein Spieler innerhalb seiner Partien ausführt und B die Ratingzahl dieses Spielers, so gilt erstaunlich gut folgende Formel:
$A = 70 + 24 \cdot 10^{-3}(B - 1800)$
Danach hätte ein Spieler, welcher nach dem Zermelo-Algorithmus spielt, eine Wertzahl von
$B = (100 - 70) : (24 \cdot 10^{-3}) + 1800 = 3050.$
Auch der Weltmeister ist demnach schlagbar – nur von wem?
Mathematiker, Informatiker und andere

beschäftigen sich mit sogenannten Kollektiven Entscheidungssystemen (CIS). Diese werden dadurch charakterisiert, daß verschiedene Individuen nach bestimmten Regeln gekoppelt werden. Dabei sind die Aufgaben jedes Individuums und des Gesamtsystems identisch. Die Leistung des Systems ist berechenbar und liegt deutlich über der Ausgangsleistung der Individuen, wenn diese paarweise voneinander verschieden sind. Entsprechende Tests, bei denen mit Hilfe komplizierter Programme die Bedingungen eines Zusammenschlusses rechnerisch simuliert worden, haben ergeben, daß z. B. 5 Spieler mit einer durchschnittlichen Ratingzahl von 2000 ein System bilden würden, welches mehr als 2600 Punkte besäße. Bei Computern, die sich nicht in so hohem Maße voneinander unterscheiden, liegt der Zuwachs etwas unter diesem Wert.

Interessant werden solche Überlegungen, geht es um die Konstruktion neuwertiger Computer. Zur Zeit erreicht die Entwicklung neuer Schachprogramme einen jährlichen Zuwachs von maximal 40 Ratingpunkten. Sollte es jedoch gelingen, mit Hilfe der CIS besagte Simulation praktisch zu verwirklichen, so ergäbe bereits der Zusammenschluß von 3 Spitzencomputern mit einer Ratingzahl von 2550 ein System, welches über die bisher unerreichte Spielstärke von 2900 Punkten verfügen würde. Der Weltmeister müßte sich geschlagen geben.

Im Verlaufe seiner fast 2000jährigen Entwicklung durchlief das Schachspiel immer wieder Höhen und Tiefen; trotz Verboten und vielen anderen Hindernissen trat es einen triumphalen Siegeszug um die Welt an. Auf weitere neue Erkenntnisse und Entwicklungen dürfen wir gespannt sein. Ob es sich aber um die heißumkämpfte Schachkrone handelt oder um eine gemütliche Freundschaftspartie – das königliche Spiel schlägt stets aufs Neue Millionen in seinen Bann – und nicht nur Könige.

(Die Veröffentlichung dieser neuen Erkenntnisse und Hypothesen erfolgte mit freundlicher Genehmigung von Dipl. Physiker Frank Rieger, selbst begeisterter *alpha*-Leser, dem ich hiermit für sein Entgegenkommen herzlich danken möchte.)

M. Spindler

Verlockende Knobelei

Scharfsinn, Geduld und nicht zuletzt Einfallsreichtum waren beim

7. alpha-Schachwettbewerb gefragt, um die vier Aufgaben richtig zu lösen und spielerisch das logische Denken zu trainieren. Vielen Lesern vermittelte der Wettbewerb wieder Spaß und Freude. „Ich hatte auch diesmal viel Freude beim Lösen" (F. Rauhe, Wendgräben). Wobei „die vier Urdrucke eine gelungene Überraschung für alle Schachfreunde" (F. Götze, Döbeln) waren. In Versform gab D. Koch (Arnstadt) sein Gefallen an der schachlichen Knobelei zum Ausdruck:

„Es erscheint der alpha-Schachwettbewerb
alljährlich,
für mich als Laie ist das Lösen mitunter
beschwerlich,
doch das königliche Spiel ist Spitze,
auch wenn ich manche Stunde versitze.
Aber viel Freude wird echt empfunden,
wenn durch Knobeln Richtiges gefunden."

Lösungen

▲1▲ 1. Kd3 Kd6/Kf5
2. Ke4/Kd4 matt.

Vom Aufgabenverfasser als leichter Einstieg in den Wettbewerb gedacht. So hatten auch nur 2 % der Einsender eine falsche Lösung hierzu aufgeschrieben.

▲2▲ 1. e5 (droht 2. Sf4/Sg5 matt)
1. ... T:e5/L:e5
2. Sf4/Sg5 matt.

Gegen die zweifache Mattdrohung hat Schwarz keine Parade mehr. Sie kann nur noch durch Schlagen des Bauern differenziert werden. Deshalb erstaunlich, daß diese Aufgabe mit 18,7 % die meisten Fehllösungen aufwies. Die Versuche
1. Df1 und 1. Df3 oder 1. Da1
scheitern an 1. ... Tc5 bzw. an
1. ... b2, ebenso 1. Dc1 an 1. ... Th6.

▲3▲ 1. Dd7 (droht 2. Sf5 matt)
1. ... Sc3+/S:e3/Tc6
2. d:c3/d:e3/d:c6 matt.
1. ... Td6/Te6/Tf6
2. Dg4/d:e6/Le5 matt.
1. ... Tg5/T:g3
2. Da7/Da7 matt.

Zu dieser Aufgabe notierten 17,7 % der Teilnehmer eine fehlerhafte Lösung. Als vermeintlichen Schlüsselzug wurde oftmals 1. Df5 angegeben, was jedoch Schwarz mit 1. ... Sf2 parieren kann.

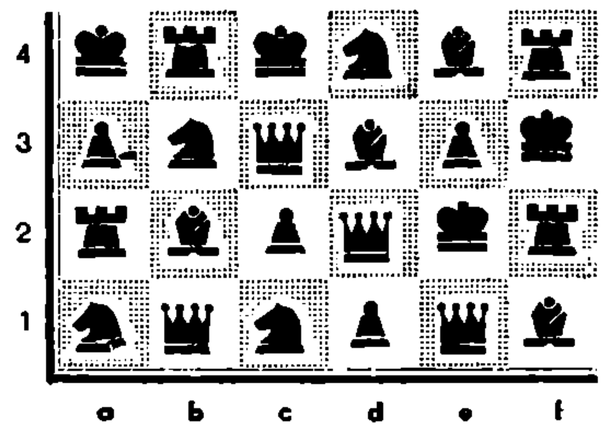
▲4▲ 1. g8T+ Kf5/Kh5/Kh6
2. e8S/e8D+/e8D K:e5/Kh6/Kh7
3. Tg5/Dg6/Dg6 matt.

Der Reiz dieser dreizügigen Miniatur liegt in den beiden Unterverwandlungen. Zunächst führt die Umwandlung des g-Bauern in die stärkste Figur, die Dame, nicht zum Ziel.

Nach 1. g8D+ folgt 1. ... Kh6 und ein Matt im 3. Zug ist nicht möglich, da sich z. B. bei 2. e8D oder 2. g4 ein Patt ergibt. In dem Abspiel 1. ... Kf5 ist die zweite Unterverwandlung in einen Springer (2. e8S) mattwirksamer als wiederum die Umwandlung in eine Dame. Die Zahl derer, die die Verführung 1. g8D+ als Lösung notierten, betrug 12,8 %.

Unter den Einsendern, die alle vier Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Christian Kühnert (Karl-Marx-Stadt),
Sebastian Kumke (Berlin),
Yvonne Langer (Eisenach),
Hans-Georg Sobeck (Radebeul) und
Roman Strecker (Dingelstädt).
Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Annerose Hoff (Hohen-Demzien),
Martin Michalk (Erfurt),
Andreas Napp (Riesa),
Michael Nowakowski (Wittenberg) und
Birgit Stiller (Hoyerswerda).
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!
„Dieser alpha-Schachwettbewerb war wieder eine Verlockung für jeden Schachfreund" (F. Fiedler, Mügeln).
Wer wieder dieser Verlockung erlegen sein möchte, schaue in Heft 6/90, dort erscheint der nächste alpha-Schachwettbewerb!

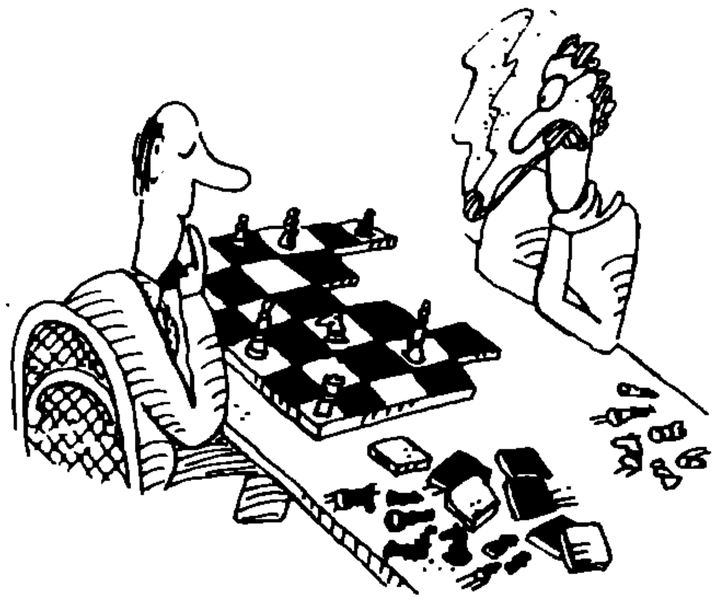
In einem Teil des Schachbretts sind die sechs verschiedenen Schachsteine scheinbar willkürlich jeweils viermal angeordnet. Es gibt jedoch vier zusammenhängende unregelmäßige Flächen, in denen die sechs Schachsteine jeweils einmal enthalten sind.



Wie sehen diese Flächen aus bzw. aus welchen Feldern setzen sie sich zusammen?

H. Rüdiger

W. Spelnikow, aus: Junge Welt, Berlin



Lothar Otto, aus: Eulenspiegel, Berlin

Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz

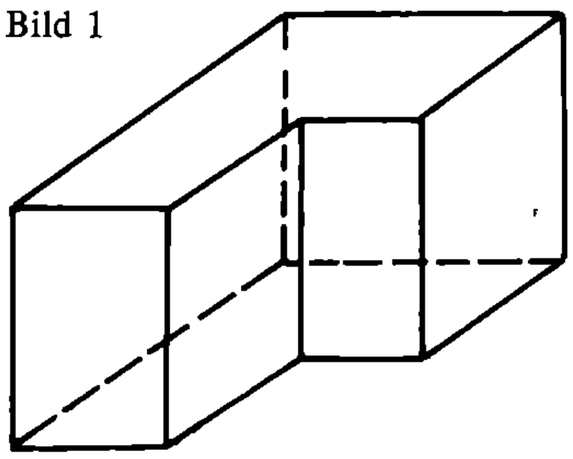
Die folgenden Ausführungen beziehen sich nur auf konvexe Polyeder. Für diese Polyeder gilt der Eulersche Polyedersatz:

Ist P ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten, so gilt

$$e + f - k = 2. \tag{1}$$

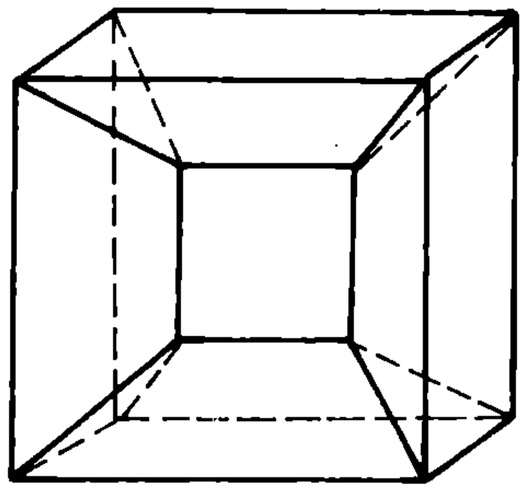
Dieser Satz wurde bereits in der *alpha*, Heft 4/1983 behandelt.
Jedoch wollen wir noch einmal darauf hinweisen, daß es auch nichtkonvexe Polyeder gibt, für die (1) gilt.
Ein solches Beispiel zeigt Bild 1.

Bild 1



$e = 12$
$f = 8$
$k = 18$

Bild 2



$e = 12$
$f = 12$
$k = 24$

Bild 2 zeigt aber ein nichtkonvexes Polyeder das (1) nicht erfüllt.
Die folgenden Ergebnisse stammen von *Leonhard Euler* (1707 bis 1783). In dem Buch *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder* von *Ernst Steinitz* (1871 bis 1928) sind diese Ergebnisse (ebenfalls) zusammenfassend dargestellt.
Nun betrachten wir für das Weitere ein konvexes Polyeder P mit e Ecken, f Flächen und k Kanten und bezeichnen mit $p_1, p_2, \ldots, p_f$ die Anzahl der Kanten jeder Fläche sowie mit $q_1, q_2, \ldots, q_e$ die Anzahl der Kanten, die von jeder Ecke von P ausgehen.

1. Da P ein konvexes Polyeder ist, hat natürlich jede Polyederfläche mindestens drei Kanten, und von jeder Polyederecke gehen ebenfalls mindestens drei Kanten aus. Es gilt also

$$p_i \geqq 3 \quad \text{und} \quad q_j \geqq 3, \tag{2}$$

wobei $i = 1, 2, \ldots, f$ und $j = 1, 2, \ldots, e$ gilt.
Summieren wir nun die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_f$ und die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_e$, so erhalten wir jeweils die doppelte Anzahl der Kanten, da bei dieser Addition jede Kante doppelt gezählt wurde. Es gehört nämlich jede Kante zu genau zwei Flächen, und zu jeder Kante gehören genau zwei Ecken des Polyeders. Damit gelten

$$2k = p_1 + p_2 + \ldots + p_f \tag{3}$$

und $\quad 2k = q_1 + q_2 + \ldots + q_e.$

Aus den Gleichungen (3) folgt aber mit (2) sofort, daß

$$2k = p_1 + p_2 + \ldots + p_f \geqq 3f$$

und $\quad 2k = q_1 + q_2 + \ldots + q_e \geqq 3e,$

also $\quad 2k \geqq 3f \tag{4}$

und $\quad 2k \geqq 3e \quad$ gelten. (5)

Nehmen wir zu der Ungleichung (4) noch die Eulersche Formel (1) hinzu, so erhalten wir $2k \geqq 3f = 3(2 + k - e)$, woraus $3e \geqq k + 6$ folgt. Zusammen mit der Ungleichung (5) gilt dann

$$2k \geqq 3e \geqq k + 6. \tag{6}$$

Analog folgt aus (5) unter Verwendung der Eulerschen Formel (1) und der Ungleichung (4), daß

$$2k \geqq 3f \geqq k + 6 \quad \text{gilt.} \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt gleichzeitig, daß $2k \geqq k + 6$ ist, und damit gilt für jedes konvexe Polyeder P

$$k \geqq 6. \tag{8}$$

Damit hat also jedes konvexe Polyeder mindestens sechs Kanten; die Tetraeder (dreiseitige Pyramiden) haben genau sechs Kanten. Es ist erstaunlich, daß es kein konvexes Polyeder gibt, das genau sieben Kanten hat. Wir werden dies gleich zeigen. Mit der Ungleichung (8) können wir aus (6) und (7) sofort schlußfolgern, daß

$$e \geqq 4 \quad \text{und} \quad f \geqq 4 \quad \text{gilt.} \tag{9}$$

Nun nehmen wir an, daß es ein konvexes Polyeder P_1 mit genau sieben Kanten gibt. Da für dieses Polyeder auch die Eulersche Formel (1) mit $k = 7$ gelten muß, haben wir $e + f - 7 = 2$ und damit

$$e + f = 9. \tag{10}$$

Wegen der Ungleichungen (9) kann P_1 nur ein Polyeder mit $e = 4$ und $f = 5$ oder $e = 5$ und $f = 4$ sein.
Im ersten Fall bedenken wir, daß das *einzige* Polyeder mit $e = 4$ nur ein Tetraeder sein kann. Ein Tetraeder hat aber nur 4 Flächen.
Im zweiten Fall bedenken wir, daß ein Polyeder mit $f = 4$ auch nur ein Tetraeder sein kann. Dieses Tetraeder hat aber genau 4 Ecken.
Folglich gibt es kein solches Polyeder P_1, und damit gibt es kein konvexes Polyeder mit genau sieben Kanten.

Aufgabe 1

Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $k = 8$, 9, 10, ... Kanten gibt.
Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $e = 5$, 6, 7, ... Ecken gibt.
Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $f = 5$, 6, 7, ... Flächen gibt.

2. Bevor du hier weiterliest, versuche ein konvexes Polyeder zu finden, das entweder nur von Sechseckflächen begrenzt wird, oder bei dem von jeder Ecke genau sechs Kanten ausgehen.
Selbst nach längerem Probieren wirst du wohl kein solches Polyeder gefunden haben, und wir vermuten, daß es solche nicht geben kann. Zum Beweis dieser Vermutung bezeichnen wir mit

$p = \dfrac{p_1 + p_2 + \ldots + p_f}{f}$ die mittlere Kantenzahl der Flächen und mit

$q = \dfrac{q_1 + q_2 + \ldots + q_e}{e}$ die mittlere Kantenzahl der Ecken eines konvexen Polyeders P. Wegen (3) gilt

$$p = \frac{2k}{f} \tag{11}$$

und $\quad q = \dfrac{2k}{e} \tag{12}$

Nun stellen wir (7) etwas um.
Es gilt sicher $k + 6 \leqq 3f$, woraus sofort $2k \leqq 6f - 12$ folgt.
Daraus erhalten wir

$$\frac{2k}{f} \leqq 6 - \frac{12}{f}. \tag{13}$$

Weil $\dfrac{12}{f}$ stets positiv ist, ist $6 - \dfrac{12}{f} < 6$ stets richtig. Damit gilt $\dfrac{2k}{f} < 6$ und mit der Beziehung (11) gilt

$$p < 6. \tag{14 a}$$

Analog erhalten wir aus der Ungleichung (6) unter der Verwendung der Beziehung (12), daß

$$q < 6 \quad \text{gilt.} \tag{14 b}$$

Aus der Ungleichung (14 a) folgt nun, daß es kein konvexes Polyeder gibt, das nur durch Sechseckflächen begrenzt wird. Entsprechend folgt aus (14 b), daß es kein konvexes Polyeder gibt, bei dem von jeder Ecke genau sechs Kanten ausgehen.

3. Um eine weitere interessante Eigenschaft von konvexen Polyedern herzuleiten, bezeichnen wir mit $f_3, f_4, \ldots$ die Anzahl der Flächen mit genau 3, 4, ... Kanten und mit $e_3, e_4, \ldots$ entsprechend die Anzahl der Ecken, von denen genau 3, 4, ... Kanten ausgehen.
Es ist klar, daß

$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots = f$ und

$e_3 + e_4 + e_5 + \ldots = e$ ist (15),

wobei die linken Seiten dieser Gleichungen natürlich aus endlich vielen Summanden bestehen. Außerdem überlegen wir uns leicht, daß

$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 2k$ und

$3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \ldots = 2k$ (16)

gilt. Aus den Gleichungen (15) folgt
$4f_3 + 4f_4 + 4f_5 + \ldots = 4f$ und
$4e_3 + 4e_4 + 4e_5 + \ldots = 4e.$ (17)
Subtrahieren wir nun die Gleichungen (16) von den entsprechenden Gleichungen (17), so erhalten wir
$f_3 - 1f_5 - 2f_6 - \ldots = 4f - 2k$ und
$e_3 - 1e_5 - 2e_6 - \ldots = 4e - 2k.$ (18)
Die beiden Gleichungen (18) werden nun nach f_3 bzw. e_3 umgestellt.
Wir erhalten
$f_3 = 4f - 2k + 1f_5 + 2f_6 + \ldots$ und
$e_3 = 4e - 2k + 1e_5 + 2e_6 + \ldots$
Nun addieren wir noch diese beiden Gleichungen und erhalten
$f_3 + e_3 = 4f + 4e - 4k + (f_5 + e_5)$
$+ 2(f_6 + e_6) + \ldots$
Nun ist aber $f_5 + e_5 \geqq 0$, $f_6 + e_6 \geqq 0$, ..., und folglich erhalten wir
$$f_3 + e_3 \geqq 4(f + e - k). \quad (19)$$
Nun erkennen wir sofort, daß wir wieder die Eulersche Polyederformel (1) anwenden können, und wir erhalten aus der Ungleichung (19), daß
$$f_3 + e_3 \geqq 8 \quad \text{ist.} \quad (20)$$
Das heißt, daß in jedem konvexen Polyeder die Summe aus der Anzahl der Dreiecksflächen und der Ecken, von denen genau drei Kanten ausgehen, mindestens acht ist.
Eine abgeschwächte, aber auch interessante Interpretation von (2) besagt, daß es kein Polyeder gibt, in dem gleichzeitig Dreiecksflächen und Ecken mit genau drei Kanten fehlen.
Oder: Ein Polyeder ohne Dreiecksflächen hat mindestens acht Ecken, von denen genau drei Kanten ausgehen.
Ein Beispiel dazu ist der Würfel.
Das Oktaeder liefert uns ein Beispiel für ein Polyeder, das keine Ecken hat, von denen genau drei Kanten ausgehen. Das Oktaeder hat aber acht Dreiecksflächen.
Beim Tetraeder ist $e_3 = f_3 = 4$.

Aufgabe 2

Zwei konvexe Polyeder sollen vom gleichen Typ heißen, wenn sie dieselbe Anzahl von Flächen, Ecken und Kanten haben, und wenn von einander entsprechenden Ecken die gleiche Anzahl von Kanten ausgeht. Zum Beispiel gehören Würfel und Quader zum selben Typ. Im Bild 3 sind zwei konvexe Polyeder dargestellt, die jeweils fünf Flächen haben, aber nicht vom gleichen Typ sind.

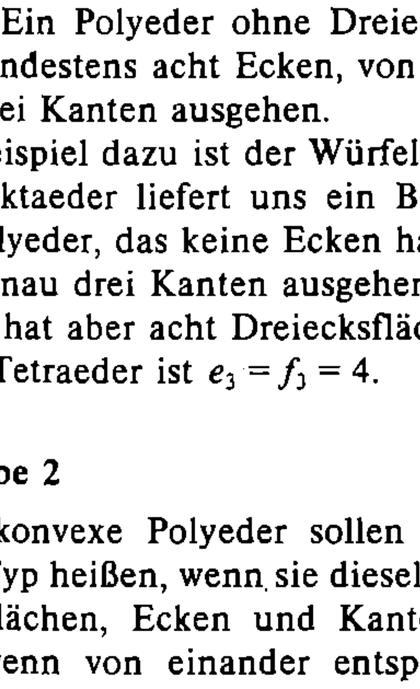


Bild 3

Unter allen konvexen Polyedern mit genau fünf Flächen gibt es nur die zwei oben gezeigten Typen.
Beweise diese Aussage!
Versuche alle Typen von konvexen Polyedern zu finden, die genau sechs Flächen haben.
Gib zu jedem Typ ein Beispiel an!

Aufgabe 3

Unter einem Flächenwinkel eines konvexen Polyeders P verstehen wir einen Innenwinkel eines Polygons von P.
Zeige, daß die Summe aller Flächenwinkel eines konvexen Polyeders stets $2\pi(k - f)$ ist.

Aufgabe 4

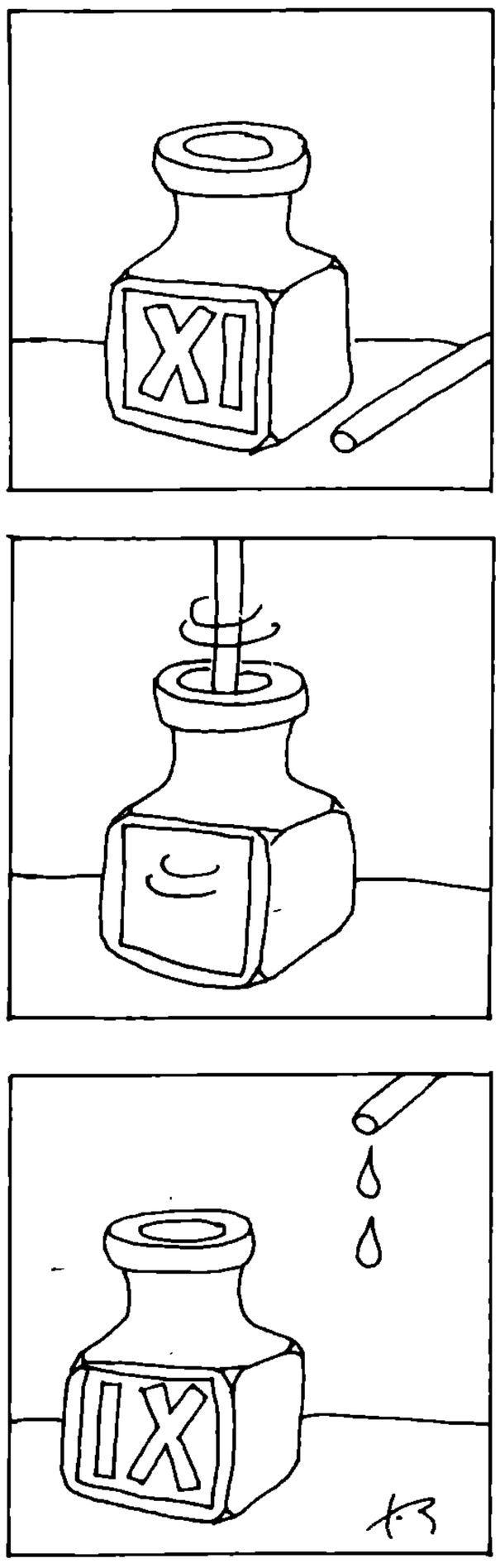
Gibt es Tetraeder, bei denen jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels von einem Flächenwinkel ist?

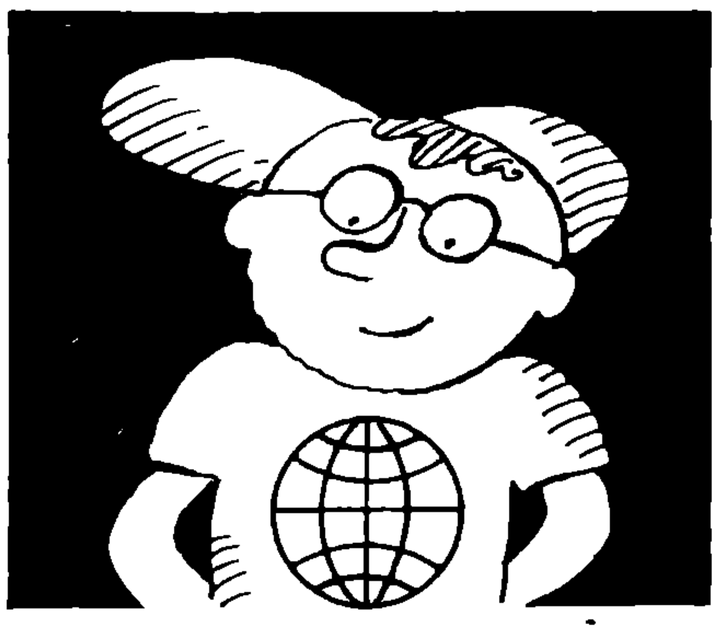
M. Schmitz

Die Lösungen erscheinen im Heft 4/90

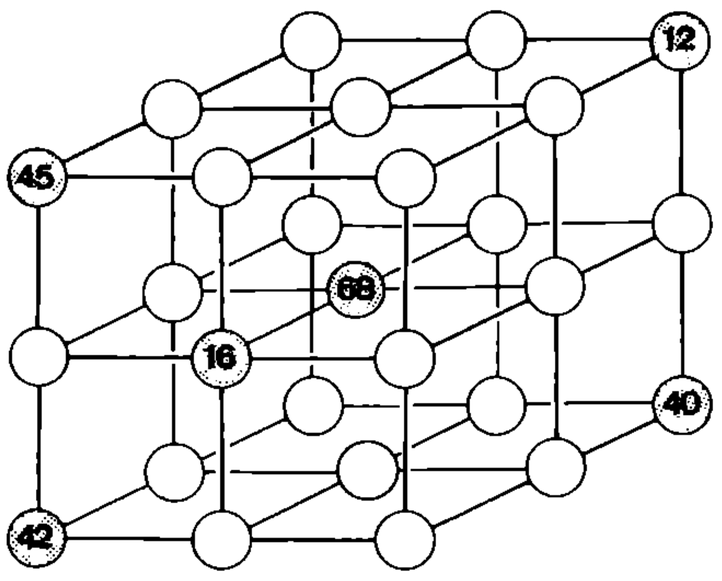
---

aus: Funktio, Helsinki





▲1▲ Jeu de billes
Placez dans chacune des sphères vides l'un des nombres suivants: 6–7–9–10–11–14–16–17–20–23–24–25–28–31–33–37–41–42–51–57, de manière à toujours obtenir le même total de 249 en additionnant les valeurs contenues dans neuf sphères situées dans un même plan.
N.B.: les sphères concernées sont réparties dans neuf plans différents.

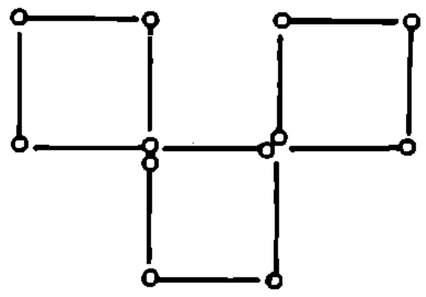


aus: Logigram, Paris

▲2▲ С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: либо заменять его удвоенным, либо стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Still Square—but up in the air
The drawing shows twelve matches put together to form three unit squares. Using the same number of matches, can you make six unit squares?



aus: Fun with mathematics, Toronto

Kein niederländisches Wörterbuch im Haus? Probiert es doch mal ohne!
▲4▲ Gegeven zijn twee op elkaar volgende priemgetallen p en q, beide groter dan 2 (tussen p en q bevinden zich dus geen andere priemgetallen). Bewijs dat de som $p + q$ geschreven kan worden als het produkt van drie natuurlijke getallen groter dan 1.

aus: Pythagoras, Amsterdam

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

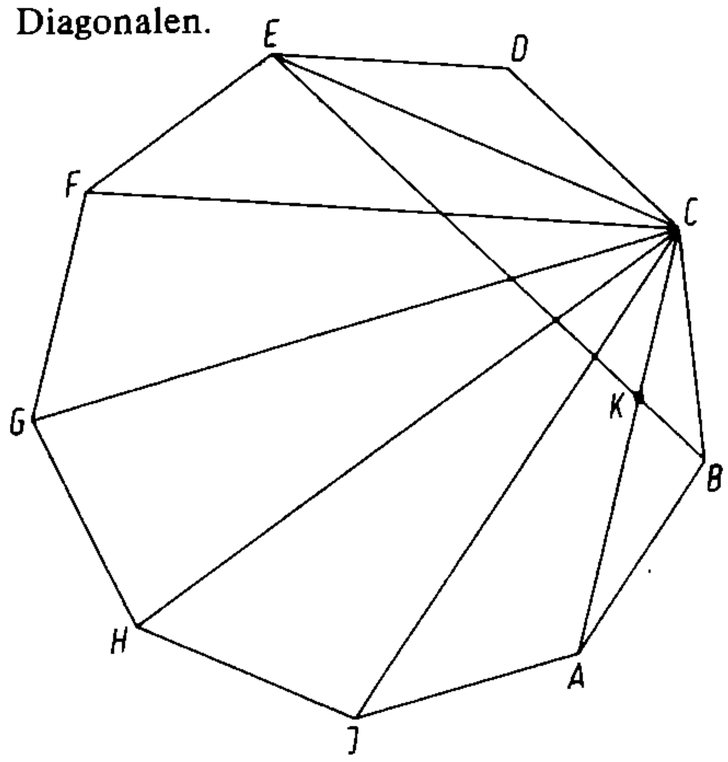
Aufgaben der Bezirksolympiade

Februar 1990

Olympiadeklasse 7

290731 28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:
(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starteten.
(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.
(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.
Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

290732 Das Bild zeigt ein regelmäßiges Neuneck *ABCDEFGHI* und einige seiner Diagonalen.



a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!
b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!
c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE.
Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle CKE$!

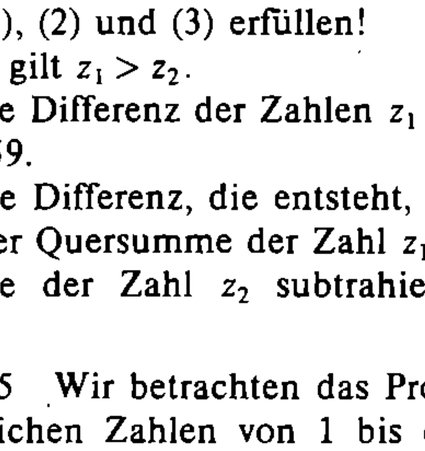
Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

290733 Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß $a = 5{,}0$ cm, $s_a = 6{,}0$ cm und $h_c = 4{,}3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.
a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!
d) Stelle fest, ob durch die Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

290734 Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!
(1) Es gilt $z_1 > z_2$.
(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

290735 Wir betrachten das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000.
Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

290736 Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt. Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede auf genau einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5. Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie das Bild zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.



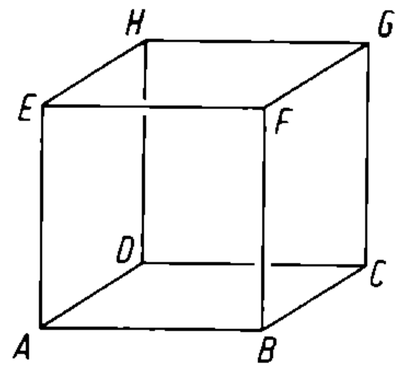
a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0{,}5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!
b) Beweise, daß in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!

Olympiadeklasse 8

290831 Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:
Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme. Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu. Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu. Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu. Dabei stellte er fest, daß sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.
Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muß!
Weise nach, daß bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

290832 Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Die – aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende – Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.
(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.
Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

290833 In einem Würfel *ABCDEFGH* (siehe Bild) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen *ABCD*, *BCGF*, *EFGH* bzw. *ABFE*.



Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!

290834 Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die

die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

290835 Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw.

Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, daß von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999 000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

290836 Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, daß es ein Trapez mit
$AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48°$,
$\varepsilon = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ und, wenn S den Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ε die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, daß durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

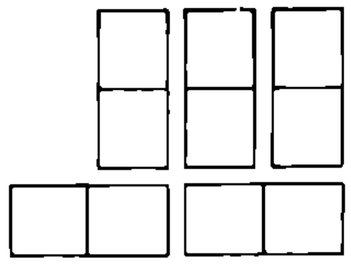
Olympiadeklasse 9

290931 Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden!

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strekken AB und AC, die einen Winkel $\sphericalangle BAC$ der Größe 7° bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

290932 Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die im Bild gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen: Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Ziffemdarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.



Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz Dominosteine bilden lassen!

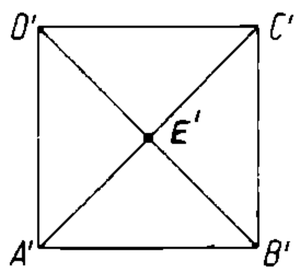
Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x \mid y}$ mit $0 \leqq x \leqq y \leqq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

290933 Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.

(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D' bzw. E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.

Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von „oben“ nach „unten“ bezeichnet), so sind Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie im Bild angegeben.



(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.

(4) Der Punkt D liegt „oberhalb“ der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.

(5) Der Punkt E liegt „oberhalb“ der Ebene ε im Abstand a von ihr.

(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4} \cdot a^3$.

Zeigen Sie, daß der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

290934 Beweisen Sie, daß es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

290935 a) Beweisen Sie, daß es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x - 1) = (x^2 - 1) \cdot f(x + 1) \qquad (*)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt!

b) Beweisen Sie, daß es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (*) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

290936 Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$. Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, seit t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

Olympiadeklasse 10

291031 Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

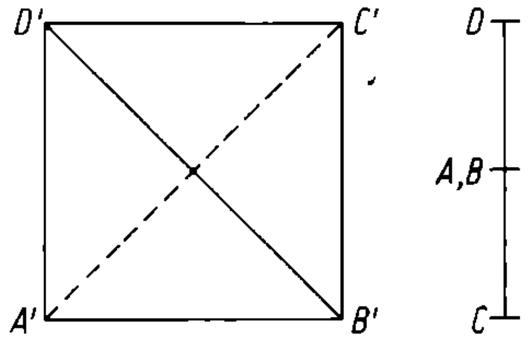
rational oder irrational ist.

291032 In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geqq 3$ von Städten S_1, S_2, ..., S_n. Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes. Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n - 1$ Farben so gefärbt, daß für jede Stadt gilt: Die $n - 1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n - 1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.

Untersuchen Sie für jedes $n \geqq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, daß für eine einheitlich gewählte Reihenfolge F_1, F_2, ..., F_{n-1} der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!

(*) Für jede Stadt S_i ($i = 1, \ldots, n$) gilt: Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben F_1, F_2, ..., F_{n-1}, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

291033 Das Bild stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat. Ihre Bildpunkte A',



B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendiffe-

renz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!

291034 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (*) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1\,! \qquad (*)$$

291035 Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:

(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.

(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.

(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.

Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

291036 a) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder −) derart zu wählen, daß mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.

b) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (*) gilt.

Olympiadeklassen 11/12

291231 Man beweise: Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen sind, die $a_1^2 = \ldots = a_n^2 = 1$ und

$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$

erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

291232 Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne R den Radius seiner Umkugel (d. h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d. h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).

Man beweise, daß es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Von den nachstehenden Aufgaben 291233A und 291233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

291233 A Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3, und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit $1\frac{m}{s}$, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$. Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B und P_3 in C. Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufssinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.

Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefaßt werde).

291233 B Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geqq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geqq \frac{1}{n^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert,

b) einen größten Wert

annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

291234 Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a},$$
$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

291235 Man beweise: In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Viereckfläche sind.

Hinweis: Eine Viereckfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

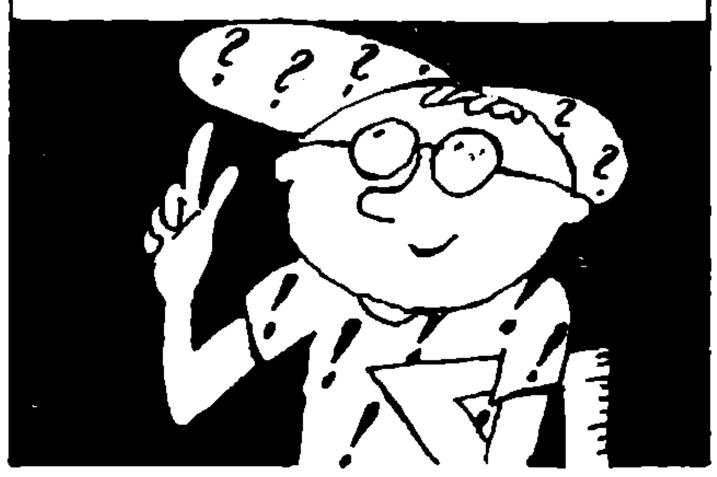
291236 Man beweise: Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leqq n \leqq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung der Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit.

Achtung!

Wir bitten alle Statistikfans um Verständnis, wenn wir aus Platzgründen den 2. Teil von „Kann man den Zufall berechnen?“ erst im nächsten Heft bringen. *Alphons*

Lösungen



Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 1/90

Ma 5 ■ 3077 Wir rechnen $22 - 4 = 18$, $18 : 2 = 9$, $9 + 4 = 13$. Das Geld für die leeren Flaschen beträgt
$13 \cdot 0{,}30\,\text{M} + 9 \cdot 0{,}20\,\text{M} = 5{,}70\,\text{M}$;
deshalb verfügt Martin über
$5{,}00\,\text{M} + 5{,}70\,\text{M} = 10{,}70\,\text{M}$.
Er behält somit $10{,}70\,\text{M} - 4{,}80\,\text{M} - 1{,}12\,\text{M} - 0{,}62\,\text{M} - 1{,}09\,\text{M} = 3{,}07\,\text{M}$ übrig.

Ma 5 ■ 3078 Wegen $59 = 7 \cdot 8 + 3$ schrieb Beate mindestens acht und höchstens neun Briefe.

Ma 5 ■ 3079 Aus (1) folgt: Schulz hat nicht den Rufnamen Maik und auch nicht Sven. Also hat Schulz den Rufnamen Udo. Aus (2) folgt: Schmitt hat nicht den Rufnamen Sven, also hat Schmitt den Rufnamen Maik. Deshalb hat Meier den Rufnamen Sven. Wir rechnen $35 - 2 = 33$ und $33 : 3 = 11$. Sven Meier ist 11 Jahre, Maik Schmitt und Udo Schulz sind jeweils 12 Jahre alt.

Ma 5 ■ 3080 Wegen $25 \cdot 25 = 625$ ist jede Gartenseite 25 m lang. Der Zaun hat deshalb einen Flächeninhalt von
$4 \cdot 25 \cdot 1\,\text{m}^2 = 100\,\text{m}^2$. Wegen $100 : 2 = 50$ werden zum Anstreichen des Zaunes 50 Dosen Farbe benötigt.

Ma 5 ■ 3081 Wegen (2) haben Frank und Annett einen Altersunterschied von 7 Jahren. Als Frank doppelt so alt war wie Annett, müssen Annett 7 Jahre und Frank 14 Jahre alt gewesen sein.
Wegen (3) ist Annett $7 + 5 = 12$ Jahre, Frank $14 + 5 = 19$ Jahre alt. Wegen (4) ist die Großmutter $110 - 19 - 12 = 79$ Jahre alt. Wegen (1) ist der Vater $79 - 34 = 45$ Jahre, seine Frau $45 - 3 = 42$ Jahre alt.

Ma 5 ■ 3082 Wir rechnen $80 - 20 = 60$, $60 : 2 = 30$; das Speiseeis kostet ohne Früchte 30 Pf.

Ma 5 ■ 3083 Wir stellen eine Tabelle auf: Lebensalter (in Jahren) von Jirka und dem Vater

J	6	7	8	9	10	11
V	28	29	30	31	32	33

Jirka ist jetzt 11 Jahre alt.

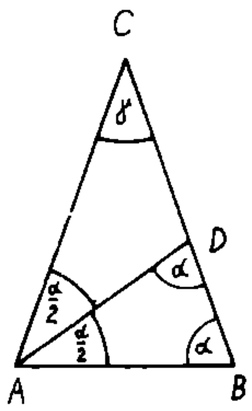
Ma 6 ■ 3084

$$\frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2} \cdot 218 = 109.$$

Ma 6 ■ 3085 Wegen $\overline{CA} = \overline{CB}$ haben die beiden Basiswinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$ die Größe α. Wegen $\overline{AB} = \overline{AD}$ haben die beiden Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ADB$ die Größe α.
Nach dem Außenwinkelsatz gilt deshalb

$\gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, also $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. Daraus folgt

weiter $\frac{5}{2} \cdot \alpha = 180°$, $\alpha = 72°$, $\gamma = 36°$.



Ma 6 ■ 3086 Das k. g. V. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 ist 60. Den Rest 1 lassen bei Division durch jede dieser Zahlen 61, 121, 181, 241, 301, 361, ... Davon ist 301 die kleinste durch 7 teilbare Zahl.

Ma 6 ■ 3087 Wegen $a + b > c$, also $3 + 1 = 4 > c$, kann nur $c = 3$ gelten; denn für $b = 2$, also $1 + 2 = 3$ existiert kein Dreieck.
Der Umfang des Dreiecks beträgt 7 cm.

Ma 6 ■ 3088 Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muß durch 9, 3 und 6, also durch 18 teilbar sein. Wegen $20 < 18 \cdot n < 40$ gilt $n = 2$. Zu dieser Klasse gehören 36 Schüler. Die Note 1 erhielten 4 Schüler, die Note 2 erhielten 12 Schüler, die Note 4 erhielten 6 Schüler. Deshalb erhielten $36 - 4 - 12 - 6 = 14$ Schüler die Note 3.

Ma 6 ■ 3089
Zum Beispiel: 12 301 + 12 301 = 24 602.

NaTe 6 ■ 469 Da sich im Gefäß stets das gleiche Volumen der benutzten Stoffe befindet, vergrößert sich die Masse und damit auch die Gewichtskraft des Gefäßes auf das 13,6fache. Demzufolge ist auch die Ausdehnung 13,6mal größer als bei Wasser. Die Längenänderung beträgt, wenn sich im Gefäß Quecksilber befindet, 13,6 cm.

Ma 7 ■ 3090 Angenommen, zu dieser Klassenstufe gehören x Schüler; dann gilt $\frac{3}{4}x + \frac{1}{9}x + 10 = x$, $x - \frac{31}{36}x = 10$,

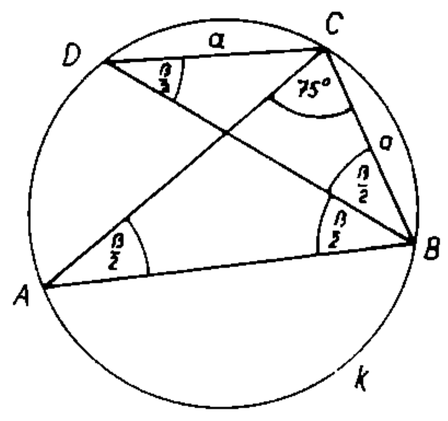
$\frac{5}{36}x = 10$, $x = 72$. An der AG „Malen und Zeichnen“ nehmen $\frac{72 \cdot 3}{4} = 54$ Schüler, an der AG „Schach“ $72 : 9 = 8$ Schüler, an der AG „Bergsteigen“ 10 Schüler teil.

Ma 7 ■ 3091 Wegen
$\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MD} = \overline{ME}$ sind die Dreiecke $\triangle ACM$, $\triangle CDM$, $\triangle DEM$, $\triangle EAM$ sämtlich gleichschenklig.
Daraus folgt
$\delta_1 = \gamma_2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$,
$\sphericalangle DME$ hat die Größe $180° - 40° = 140°$,
$\delta_2 = \varepsilon_1 = (180° - 140°) : 2 = 20°$,
$\beta = \varepsilon_1 = 20°$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Ferner gilt $\sphericalangle AMB$ hat die Größe $90° - 20° = 70°$ (Berührungsradius und Tangente sind senkrecht zueinander), also gilt
$\alpha_2 = \gamma_1 = (180° - 70°) : 2 = 55°$
und somit $\alpha_1 = \varepsilon_2 = 90° - 55° = 35°$.

Ma 7 ■ 3092
Entsprechend der Aufgabenstellung gilt
$2a + 1 = 3b + 2 = 4c + 3 = 5d + 4$
$= 6e + 5 = 7f + 6 = 8g + 7 = 9h + 8$
$= 10i + 9$. Durch Addition von 1 und anschließendem Ausklammern erhalten wir daraus
$2(a + 1) = 3(b + 1) = 4(c + 1) = 5(d + 1)$
$= 6(e + 1) = 7(f + 1) = 8(g + 1)$
$= 9(h + 1) = 10(i + 1)$. Das k. g. V. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ist 2520. Die Zahl 2519 erfüllt die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ■ 3093 Nach Voraussetzung hat der Winkel $\sphericalangle CBD$ die Größe $\frac{\beta}{2}$. Wegen $\overline{BC} = \overline{CD}$ hat auch der Winkel $\sphericalangle BDC$ die Größe $\frac{\beta}{2}$. Als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{BC}$ haben die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BAC$ beide die Größe $\frac{\beta}{2}$.

Nun gilt $\frac{3}{2} \cdot \beta + 75° = 180°$, also
$\beta = 70°$ und $\alpha = 35°$!



Ma 7 ■ 3094 Die Zahl des Geburtsjahres von Axel sei (in dekadischer Schreibweise) $\overline{19xy}$ mit $0 \leqq x \leqq 9$ und $0 \leqq y \leqq 9$. Sie hat die Quersumme $10 + x + y$. Nun gilt
$(1900 + 10x + y) + (10 + x + y) = 1989$,
$11x + 2y = 79$. Nur für $x = 7$ und $y = 1$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Axel wurde im Jahre 1971 geboren, und es gilt $1971 + (1 + 9 + 7 + 1) = 1989$.

Na/Te 7 ■ 470 Volumen des Würfels: $V = a^3 = 125\ \text{cm}^3$; Masse des Würfels: $m = \varrho \cdot V = 975\ \text{g}$; Gewichtskraft des Würfels: $F_G = 9{,}75\ \text{N}$; Längenänderung bei 9,75 N: $s = 9{,}75 \cdot 5\ \text{mm} = 48{,}7\ \text{mm}$. Die Feder wird also um rund 5 cm gedehnt.

Na/Te 7 ■ 471 Aus der Angabe der Dichte kann man entnehmen:
$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{l}$ haben eine Masse von 0,9 t. Demnach nehmen 10 t Öl ein Volumen von $\frac{10}{0{,}9}\ \text{m}^3$ ein,
$V = 11{,}1\ \text{m}^3 = 11 \cdot 10^3\ \text{l}$; da die Pumpe in 1 s 50 l fördert, benötigt sie für das Volumen V die Zeit
$t = \frac{11\,000}{50}\ s$, $t = 220\ \text{s}$. Der Wagen ist in 3 min und 40 s gefüllt.

Ma 8 ■ 3095 Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise; dann gilt
$a \cdot b \cdot c = 5 \cdot (a + b + c)$.
Wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ muß einer der drei Faktoren a, b, c gleich 5 sein. Aus $c = 5$ folgt
$a \cdot b \cdot 5 = 5 \cdot (a + b + 5)$,
$a \cdot b = a + b + 5$, $a \cdot b - b = a + 5$,
$b \cdot (a - 1) = a + 5$, $b = \frac{a + 5}{a - 1}$,

$b = 1 + \frac{6}{a - 1}$. Diese Gleichung hat genau vier positive ganzzahlige Lösungen, nämlich

a	2	3	4	7
b	7	4	3	2

Wegen der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. der Faktoren existieren genau 12 solcher Zahlen; sie lauten
257, 275, 345, 354, 435, 453, 527, 534, 543, 572, 725, 752.

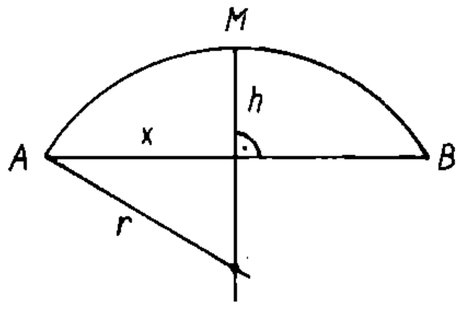
Ma 8 ■ 3096 Wir stellen folgende Tabelle auf:

n	Letzte Ziffer von 8^n	Letzte Ziffer von 2^n	Letzte Ziffer von 8^n+2^n	Letzte Ziffer von 8^n-2^n	$10/8^n+2^n$ oder $10/8^n-2^n$?
0	1	1	2	0	ja
1	8 (Periode)	2 (Periode)	0	6	ja
2	4	4	8	0	ja
3	2	8	0	4	ja
4	6	6	2	0	ja
5	8	2	0	6	ja
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Da die Endziffern der Potenzen mit den Basen 8 und 2 die gekennzeichnete Periode durchlaufen, treten keine anderen Fälle auf. $8^n + 2^n$ oder $8^n - 2^n$ ist für alle $n \in N$ durch 10 teilbar, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3097 Der Durchmesser CD halbiert die Sehne AB und auch den Winkel $\sphericalangle ACB$ (Symmetrie). Da $\overline{CM} \cong \overline{BM}$ ist (beides sind Radien), ist das Dreieck CMB gleichschenklig. Daraus folgt die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle CBM$. Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck
ist dann $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = 180°$, also
$\alpha + \beta = 180°$, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3098 Nach dem Satz des Pythagoras gilt $x^2 = r^2 - (r - h)^2$. Wir rechnen nur mit den Maßzahlen und erhalten:
$x^2 = 8{,}5^2 - (8{,}5 - 3)^2$;
$x^2 = 8{,}5^2 - 5{,}5^2$; $x^2 = 42$; $x \approx 6{,}48$.
Die Spannweite der Brücke beträgt etwa 13 m.

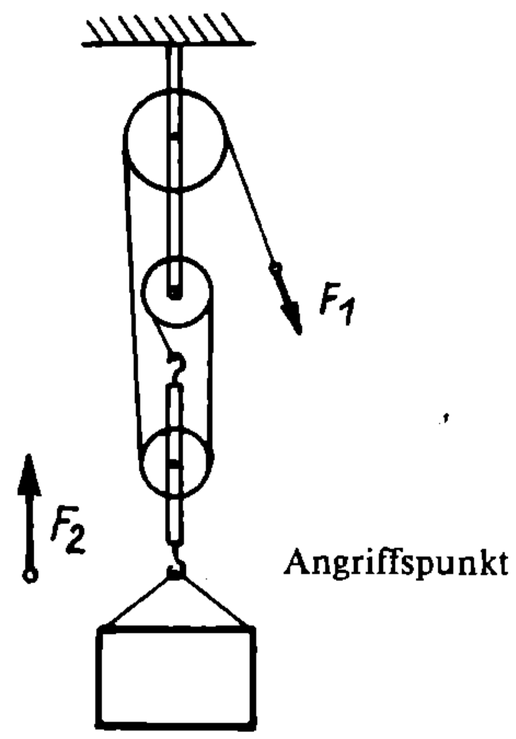


Ma 8 ■ 3099 Der Durchmesser des Kreises k ist am kürzesten, wenn er gleich der Höhe $\overline{CP}$ auf $\overline{AB}$ ist. Wegen der Ähnlich-

keit der Dreiecke $\triangle BCP$ *und* $\triangle ABC$ gilt $d:6 = 8:10$, $d = 4{,}8$. Da Winkel $\sphericalangle ACB$ 90° beträgt, ist QR nach dem Satz des Thales Durchmesser des Kreises k. Deshalb hat die Sehne QR die Länge 4,8 cm.

Na/Te 8 ■ 472 Die Kraft wird durch den Schweredruck hervorgerufen. Die Kraft auf die Bodenfläche A bei einer Eintauchtiefe s ist gleich der Gewichtskraft F_G des von einem Quader mit der Grundfläche A und der Höhe s verdrängten Wassers. Der Druck p ergibt sich als Quotient aus Gewichtskraft F_G und Fläche A.
Masse des Wassers: $m = A \cdot s \cdot \varrho$,
$m = 320$ kg, $F_G = 3200$ N,
Druck $p = \frac{F_G}{A}$; $p = 2000$ Pa.
Die Kraft auf den Boden des Kajaks beträgt 3200 N, der Druck 2000 Pa.

Na/Te 8 ■ 473 Der Flaschenzug muß so konstruiert sein, daß drei tragende Seilstücke vorhanden sind:



Ma 9 ■ 3100
$k = \frac{k^2 + k + n - [(k-1)^2 + (k-1) + n]}{2}$;
$k = \frac{k^2 + k + n - k^2 + 2k - 1 - k + 1 - n}{2}$;
$k = \frac{2k}{2}$; $k = k$. w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3101 Aus $u = 2s = a + b + c$ folgt durch äquivalente Umformungen schrittweise $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$,
$\frac{\varrho \cdot s}{\varrho} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot h_a}{h_a} + \frac{\frac{1}{2}b \cdot h_b}{h_b} + \frac{\frac{1}{2}c \cdot h_c}{h_c}$,
$\frac{A}{\varrho} = \frac{A}{h_a} + \frac{A}{h_b} + \frac{A}{h_c}$, $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

Ma 9 ■ 3102 Wir beweisen zunächst, daß die Dreiecke AEF und FBC ähnlich sind:
$\sphericalangle AFE \cong \sphericalangle CFB$ (Scheitelwinkel);
$\sphericalangle AEF \cong \sphericalangle FBC$ (Im Sehnenviereck $ECDA$ gilt $\sphericalangle AEC + \sphericalangle ADC = 180°$, im Sehnenviereck $ABCD$ gilt $\sphericalangle FBC + \sphericalangle ADC = 180°$, es folgt daraus $\sphericalangle AEF \cong \sphericalangle FBC$.) Damit gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle AEF \sim \triangle FBC$. Daraus folgt
$\overline{AE} : \overline{AF} = \overline{BC} : \overline{FC}$ bzw. $\overline{BC} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{FC}}{\overline{AF}}$.
$\overline{BC} = 5$ cm. Die Strecke $\overline{BC}$ hat eine Länge von 5 cm.

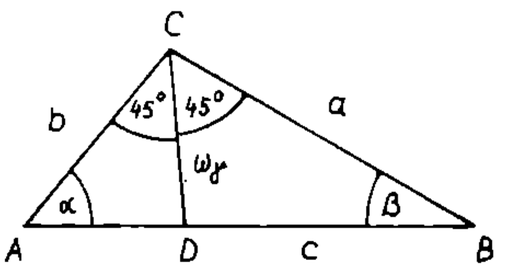
Ma 9 ■ 3103 Angenommen, es gäbe solche Zahlen a, b, c, so müßten diese verschieden von Null sein, und äquivalente Umformungen ergäben dann
$\frac{2}{a} \geqq \frac{b+c}{bc}$, $2bc \geqq a(b+c)$. Wegen $a = b + c$ folgt $2bc \geqq (b+c)^2$ und schließlich $0 \geqq b^2 + c^2$, was für keine reelle Zahl, die ungleich Null ist, erfüllt werden kann. Somit ist die Annahme falsch und die Behauptung damit bewiesen.

Ma 9 ■ 3104 Durch schrittweises Umformen erhalten wir
$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{(\sqrt{2} + \sqrt{1})(\sqrt{2} - \sqrt{1})} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \ldots + \frac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{(\sqrt{100} + \sqrt{99})(\sqrt{100} - \sqrt{99})}$
$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \ldots + \frac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{100 - 99}$
$= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$
$= -\sqrt{1} + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9$.

Na/Te ■ 474 Aus $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ und $a = \frac{v}{t}$ (da gleichmäßig beschleunigt) erhält man $s = \frac{v \cdot t}{2}$, $s = 230$ m.

Na/Te 9 ■ 475 Es wird zunächst die Kraft auf das Elektron berechnet. Aus dem Tafelwerk entnimmt man den Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke E, der Kraft F auf eine Ladung im elektrischen Feld: $E = \frac{F}{Q}$. Daraus kann die Kraft berechnet werden. Setzt man das Newtonsche Grundgesetz ein, so erhält man für die Beschleunigung
$a = \frac{Q \cdot E}{m}$, $a = 3{,}15 \cdot 10^{14} \frac{m}{s^2}$.

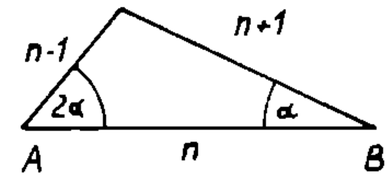
Ma 10/12 ■ 3105 Aus der Skizze geht hervor: $A_{ABC} = A_{ADC} + A_{DBC}$,
$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}b \cdot w_\gamma \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}a \cdot w_\gamma \cdot \sin 45°$,
$= \frac{1}{2} \cdot w_\gamma \cdot \sin 45° \cdot (a + b)$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_\gamma \cdot (a + b)$,
$\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_\gamma$, $\frac{a+b}{ab} = \frac{2}{w_\gamma \sqrt{2}}$,
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{w_\gamma} \Big| \cdot c$, $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{c\sqrt{2}}{w_\gamma}$ und wegen $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$ folgt
$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c \cdot \sqrt{2}}{w\gamma}$. w. z. b. w.



Ma 10/12 ■ 3106 Nach Voraussetzung, daß $7/100a + b$, muß es eine ganze Zahl n geben, so daß gilt $7 \cdot n = 100a + b$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit 4 und erhalten $4 \cdot 7 \cdot n = 400a + 4b$. Weitere äquivalente Umformungen ergeben
$4 \cdot 7 \cdot n - 399a = a + 4b$,
$4 \cdot 7 \cdot n - 7 \cdot 57a = a + 4b$,
$7(4n - 57a) = a + 4b$.
Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar, daß $7/a + 4b$ ist, denn es gibt eine ganze Zahl (es ist $4n - 57a$), die, mit 7 multipliziert, $a + 4b$ ergibt, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3107 Die Längen der Parallelogrammseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BE}$ bzw. $\overline{BG}$ seien a, b, c bzw. d, der Winkel $\sphericalangle ABC$ habe die Größe φ; dann gilt
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin\varphi$,
$a \cdot b = c \cdot d$, $a : c = d : b$. Folglich sind die Dreiecke $\triangle AEB$ und $\triangle GCB$ einander ähnlich, und es gilt $AE \parallel CG$.

Ma 10/12 ■ 3108 Der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen:
$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{n+1}{n-1}$, $\frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{n+1}{n-1}$, $\cos\alpha = \frac{n+1}{2 \cdot (n-1)}$;
ferner gilt
$\cos\alpha = \frac{n^2 + (n+1)^2 - (n-1)^2}{2 \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{n \cdot (n+4)}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n+4}{2 \cdot (n+1)}$.
Durch Gleichsetzen erhalten wir
$\frac{n+4}{2 \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{2 \cdot (n-1)}$,
$(n-1)(n+4) = (n+1)^2$,
$n^2 + 3n - 4 = n^2 + 2n + 1$, $n = 5$.
Für die Seitenlängen des Dreiecks ABC gilt somit $b = n - 1 = 4$,
$c = n = 5$, $a = n + 1 = 6$.



Ma 10/12 ■ 3109 Die Dreiecke AEH und HGD sind ähnlich, denn sie stimmen in den Innenwinkeln überein ($\sphericalangle HAE$ und $\sphericalangle GDH$ sind rechte Winkel und, da Winkel, deren Schenkel paarweise zueinander senkrecht sind, auch kongruent sind, gilt $\sphericalangle DHG \cong \sphericalangle AEH$ und $\sphericalangle DGH \cong \sphericalangle AHE$). Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt $\frac{x}{y} = \frac{t}{s}$. Wegen $t = b - y$ und $s = a - x$ gilt $\frac{x}{y} = \frac{b-y}{a-x}$.

Na/Te 10/12 ■ 476 Aus der Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtquelle $c = \lambda \cdot f$ folgt, da die Frequenz f unabhängig vom Stoff ist:
$\frac{c_L}{\lambda_L} = \frac{c_w}{\lambda_w}$; $\lambda_w = \frac{c_w \cdot \lambda_L}{c_L}$;
$\lambda_w = \frac{2{,}25\,000 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1} \cdot 4{,}861 \cdot 10^{-7} m}{2{,}99\,711 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}}$.
Die Wellenlänge im Wasser beträgt $\lambda_w = 365 \cdot 10^{-9} m$. Aus der Gleichung $c_L = \lambda_L \cdot f$ kann auch die Frequenz berechnet werden:
$f = \frac{2{,}99\,711 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}}{4{,}861 \cdot 10^{-7} m}$.
Die Frequenz dieser Linie beträgt $6{,}17 \cdot 10^{14}$ Hz.

Na/Te 10/12 ■ 477 Gesucht ist die Zeit t. Während dieser Zeit legt der 1. Körper den Weg $v_1 \cdot t$, der zweite Körper den Weg $v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ zurück. Zum Zeitpunkt des Treffens haben beide Körper zusammen 100 m zurückgelegt. Die Zeit t errechnet sich aus
$100m = t \cdot 3m \cdot s^{-1} + t \cdot 7m \cdot s^{-1} + 2 \cdot t^2 m \cdot s^{-2}$ zu $t = 5s$. Die Körper treffen sich nach 5 s.

Lösung zu: Denk dir eine Zahl
Heft 1/90

▲1▲ Für die gedachte Zahl n gilt
$n = 21r_1 + 15r_2 + 70r_3 - 105 \cdot k$,
wobei k gleich 1 oder 2 oder 3 ist.
1. Beispiel: $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $r_3 = 2$,
$n = 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 + 70 \cdot 2 - 105 \cdot 2$
$= 84 + 90 + 140 - 210 = 104$;
2. Beispiel: $r_1 = 1$, $r_2 = 6$, $r_3 = 0$,
$n = 21 \cdot 1 + 15 \cdot 6 + 70 \cdot 0 - 105 \cdot 1$
$= 21 + 90 + 0 - 105 = 6$;
3. Beispiel: $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 1$,
$n = 21 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 70 \cdot 1 - 105 \cdot 0 = 70$.
Für $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ lautet die gedachte Zahl 105.

▲2▲ Es sei x die gedachte Zahl; dann gilt $(x - 1) \cdot 2 - 1 + x = y$,
$x = (y + 3) : 3$. Zum Ergebnis sind 3 zu addieren, diese Summe ist danach durch 3 zu dividieren.
Beispiel: Es sei $y = 48$ das Ergebnis,
also $x = (48 + 3) : 3 = 17$ die gedachte Zahl.

▲3▲ Angenommen, jemand habe sich die Zahl n gedacht; dann gilt
$[(n \cdot 2 + 5) \cdot 5 + 3] \cdot 10 + 3 - 150 = x$,
also $n = \frac{x - 133}{100}$. Vom verbleibenden Rest x sind 133 zu subtrahieren, diese Differenz ist durch 100 zu dividieren, um die gedachte Zahl n zu ermitteln.
Beispiel: $n = 21$, $x = 2233$, also
$n = \frac{2233 - 133}{100} = 21$.

▲4▲ Es sei x die von Monika gedachte Zahl; dann gilt
$[(x + 2) \cdot 3 - 4] \cdot 3 + x + 4 = y$,
$(3x + 2) \cdot 3 + x + 4 = y$, $10x + 10 = y$,
$10x = y - 10$, $x = (y - 10) : 10$.
Marie-Luise braucht vom Ergebnis y nur 10 zu subtrahieren und danach durch 10 zu dividieren, um die von Monika gedachte Zahl x zu ermitteln.
Beispiel: Monika habe die Zahl 11 gedacht; sie rechnete schrittweise
$11 + 2 = 13$, $13 \cdot 3 = 39$, $39 - 4 = 35$,
$35 \cdot 3 = 105$, $105 + 11 + 4 = 120$,
also $y = 120$ und somit
$x = (120 - 10) : 10 = 11$.

▲5▲ Angenommen, es wurde die Zahl x gedacht; dann gilt
$\{[(x \cdot 2 + 4) : 2 + 7] \cdot 8 - 12\} : 4 - 11 = y$;
$[(x + 9) \cdot 8 - 12] : 4 - 11 = y$;
$2x + 4 = y$; $x = (y - 4) : 2$.
Vom Ergebnis y sind 4 zu subtrahieren, danach durch 2 zu dividieren, um die gedachte Zahl x zu ermitteln.
Beispiel: Die gedachte Zahl sei 13, dann ist schrittweise zu rechnen
$13 \cdot 2 = 26$, $26 + 4 = 30$, $30 : 2 = 15$,
$15 + 7 = 22$, $22 \cdot 8 = 176$,
$176 - 12 = 164$, $164 : 4 = 41$,
$41 - 11 = 30$, also $y = 30$ und somit
$x = (30 - 4) : 2 = 13$.

▲6▲ Es sei t die Zahl des Tagesdatums und m die Zahl des Geburtsmonats; dann gilt
$(t \cdot 6 + 12) \cdot 5 - 10t + m - 60 = x$,
$20t + m = x$,
$t = (x - m) : 20$ mit $1 \leqq m \leqq 12$.
Beispiel: Es sei $x = 592$ das Ergebnis, dann könnte $m = 2$ oder $m = 12$ sein. Da 590 nicht durch 20 teilbar ist, entfällt $m = 2$. Wir erhalten $m = 12$ und
$t = (592 - 12) : 20 = 580 : 20 = 29$.
Die betreffende Person hat am 29. Dezember Geburtstag.

▲7▲ Es sei x die Zahl des Lebensalters des Freundes, t die Zahl des Wochentages, an dem er geboren wurde, und y das Rechenergebnis; dann gilt
$(x \cdot 5 + 25) \cdot 2 + t - 50 = y$,
$10x + t = y$ mit $1 \leqq t \leqq 7$.
Beispiel: $y = 135 = 10 \cdot 13 + 5$; der Freund ist 13 Jahre alt und am Freitag (5. Wochentag) geboren.

▲8▲ Es sei x die Zahl des Tages und y die Nummer des Monats, in dem der Befragte geboren wurde, und S sei die Summe der beiden Produkte; dann gilt
$12x + 31y = S$, also $x = (S - 31y) : 12$,
wobei $1 \leqq y \leqq 12$ gilt.
Beispiel: Der Geburtstag sei am 17. Juni (17. 6.); daraus folgt
$S = 12 \cdot 17 + 31 \cdot 6 = 390$, also
$x = (390 - 31y) : 12$. Nur für $y = 6$ und somit $x = 17$ erhalten wir eine ganzzahlige Lösung.

▲9▲ Es sei x das Tagesdatum des Geburtstages, y die Zahl für den Geburtsmonat, z die Zahl, die aus den beiden letzten Grundziffern des Geburtsjahres gebildet wird; dann gilt
$\{[(x \cdot 20 + 3) \cdot 5 + y] \cdot 20 + 3\} \cdot 5 + z$
$= (2000x + 303 + 20y) \cdot 5 + z$
$= 10\,000x + 100y + z + 1515$.
Man braucht nur von der angesagten Zahl die Zahl 1515 zu subtrahieren und erhält die gewünschten Zahlen in der richtigen Reihenfolge.
Beispiel: Ergebnis der Rechnung sei die Zahl 212 286. Es ist zu rechnen $212\,286 - 1515 = 210\,771$. Der Geburtstag ist der 21. Juli 1971 (21. 07. 71).

Lösungen zu: Spezialistenlager Mathematik im Blick
Heft 1/90

▲1▲ Angenommen, Andreas ist $3x$ Jahre und Stefanie y Jahre alt; dann ist der Vater $3 \cdot (3x + y) = (9x + 3y)$ Jahre, die Mutter $(9x + 3y - 4)$ Jahre alt, und es gilt
$3x + y + (9x + 3y) + (9x + 3y - 4) = 66$,
$21x + 7y = 70$, $3x + y = 10$, $y = 10 - 3x$.
Nur für $x = 1$, also $y = 7$ ist
$y > 3x (7 > 3)$. Der Vater ist 30 Jahre, die Mutter 26 Jahre, Stefanie 7 Jahre, Andreas 3 Jahre alt.

▲2▲ Angenommen, Angelika ist x Jahre alt, dann ist Steffen $(x + 8)$ Jahre, die Mutter $(x + 30)$ Jahre, der Vater $(x + 32)$ Jahre alt. Alle zusammen sind $(4x + 70)$ Jahre alt, und es gilt
$4x + 70 = 3 \cdot (x + 30)$,
$4x + 70 = 3x + 90$, $x = 20$.
Angelika ist 20 Jahre, Steffen 28 Jahre, die Mutter 50 Jahre, der Vater 52 Jahre alt.

▲3▲ Angenommen, Susi ist x Jahre alt, dann ist Ralf $(x + 3)$ Jahre, der Vater $4x$ Jahre, die Mutter $(x + 33)$ Jahre, die Großmutter $(x + 63)$ Jahre alt. Zusammen sind sie $(8x + 99)$ Jahre alt, und es gilt
$8x + 99 = 195$, $8x = 96$, $x = 12$.
Susi ist 12 Jahre alt, Ralf 15 Jahre, die Mutter 45 Jahre, der Vater 48 Jahre, die Großmutter 75 Jahre alt.

▲4▲ $5342 + 5342 = 10\,684$; $5463 + 5463 = 10\,926$; $5384 + 5384 = 10\,768$; $6726 + 6726 = 13\,452$; $5347 + 5347 = 10\,694$; $6926 + 6926 = 13\,852$; $6547 + 6547 = 13\,094$; $7268 + 7268 = 14\,536$; $5468 + 5468 = 10\,936$.

Lösungen zu: Läßt sich der Zufall berechnen?
Heft 2/90

▲1▲ Die 28 Steine des Dominospieles werden durch die geordneten Zahlenpaare $(i; j)$ mit $i; j \in N$ und $i \leqq j \leqq 6$ beschrieben. Damit sind $\{(i; j)\}$ mit $i; j \in N$ und $i \leqq j \leqq 6$ die 28 Elementarereignisse.
$A = \{(0; 0), (0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4), (1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2)\}$
$B = \{(0; 5), (1; 4), (2; 3)\}$
$C = \{(0; 6), (1; 5), (2; 4), (3; 3)\}$
$D = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)\}$
$P(A) = \frac{9}{28}$, $P(B) = \frac{3}{28}$, $P(C) = \frac{1}{7}$,
$P(D) = \frac{1}{4}$

▲2▲ $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = \frac{3}{4}$

▲3▲ $P = 1 - P(A) - P(B) - P(C)$
$= 1 - \frac{9}{28} - \frac{3}{28} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

▲4▲ A und D, C und D

▲5▲ $A \cap D = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$
$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$
$= \frac{9}{28} + \frac{1}{4} - \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$

Beweisskizze zu: Eine Aufgabe von Prof. A. Engel, Heft 2/90

a) Ist $k = 2n + 1$, so enthält die Zerlegung mindestens eine 1, und es muß daher nur noch $2n$ in 2-Potenzen zerlegt werden. D. h. $b(2n + 1) = b(2n)$.
b) Eine Zerlegung von $2n$ enthält entweder keine 1. Davon gibt es $b(n)$, da man jedes Glied halbieren kann. Oder sie enthält mindestens 2 Einsen. Davon gibt es $b(2n - 2)$. Also ist
$b(2n) = b(2n - 2) + b(n)$.

Lösung zu: Eine runde Sache
Heft 2/90

Vorüberlegung: Ich betrachte zwei Sehnen unterschiedlicher Länge durch den Punkt P.
Sei $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ (**)

$\rightarrow x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 < x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2$.
Da $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ folgt
$x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 < x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2$, (*)
wobei jeder Term $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2$,
$x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2$ positiv ist. Multiplizieren wir die linke Seite von (**) mit der linken Seite von (*) und die rechte Seite von (**) mit der rechten Seite von (*), so erhalten wir die Ungleichung
$(x_1 + y_1)(x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2)$
$< (x_2 + y_2)(x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2)$.
Das führt auf
$$x_1^3 + y_1^3 < x_2^3 + y_2^3.$$
Hieraus folgt: Die längste Sehne $x + y$ erzeugt die größte Summe $x^3 + y^3$ und die kleinste Sehne $x + y$ erzeugt die kleinste Summe $x^3 + y^3$.

Zu a): Die längste Kugelsehne durch P ist $\overline{CD}$, also $(x^3 + y^3)_{max} = (r + a)^3 + (r - a)^3 = 2r^3 + 6ra^2$.
Zu b): Es gilt
$$\frac{x^3 + y^3}{2} \geqq \sqrt[2]{x^3y^3} = \text{konstant}.$$
$x^3 + y^3$ wird genau dann am kleinsten, wenn das Gleichheitszeichen zur Geltung kommt. Das Gleichheitszeichen gilt aber nur dann, wenn $x = y$,
d. h. $x^2 = y^2 = r^2 - a^2$ und damit
$(x^3 + y^3)_{min} = 2 \cdot \sqrt[2]{(r_1^2 - a_1^2)^3}$.
Gibt es nun auch eine solche Sehne durch P mit $x = y$? Es ist die Sehne durch P, die senkrecht auf $\overline{CD}$ steht.

Lösungen zu: Über selbstregenerierende Zahlenfolgen, Heft 2/90

▲1▲ Wir wenden die Formel
$[a] + [b] = [[a] + b]$ an.

▲2▲ Sei $x = \frac{p}{m}$, m, p natürlich, dann ist
$r_n = r_{n+m}$.

Lösung zur Schachecke, Heft 2/90

1. Db7 (2. Dh1 + Lh2 3. D:h2 matt) Lh2
2. Db8 (3. Dg8 matt) Se8
3. D:h2 matt

Lösungen zu: Überall Algorithmen
Heft 2/90

▲1▲ *c a d b e*
▲2▲ 5 4 3 1 2 7 8 6
▲3▲ 1 4 3 2
▲4▲ a) 9 b) 8 c) 12
▲5▲ Der erste Schritt ist nicht eindeutig formuliert.
▲6▲ Mögliche Antwort: Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a, b.
(1) Multipliziere a mit sich selbst!
Das ergibt x.
(2) Multipliziere b mit sich selbst!
Das ergibt y.
(3) Berechne die Summe aus x und y!
▲7▲ „Sie gehen geradeaus bis zum Kino. Wenn Sie das Kino erreicht haben, biegen Sie rechts ab. Sie befinden sich dann auf der Leipziger Straße. Nun laufen Sie bis zur ersten Ampelkreuzung. Wenn Sie an der Ampelkreuzung sind, biegen Sie links in den Meisenweg ein. Wenn Sie das Ende des Meisenwegs erreicht haben, stehen Sie vor der Post."
▲8▲ a) 3 b) 13
▲9▲ *a, b, e, f, g, h, i*
▲10▲ Nur 10 b) ist ein Algorithmus.

Lösung zu: Ostereiereien, Heft 2/90

Egon: $\frac{1}{2}x + x + x = 15$ mit x – Anzahl der blauen bzw. violetten Eier; $x = 6$
Fritz: $1{,}5(r + b) + r + b = 15$; da $r = 5$ folgt $b = 1$; $v = 9$.
Sie haben 15 Eier violett, 8 Eier rot und 7 Eier blau gefärbt.

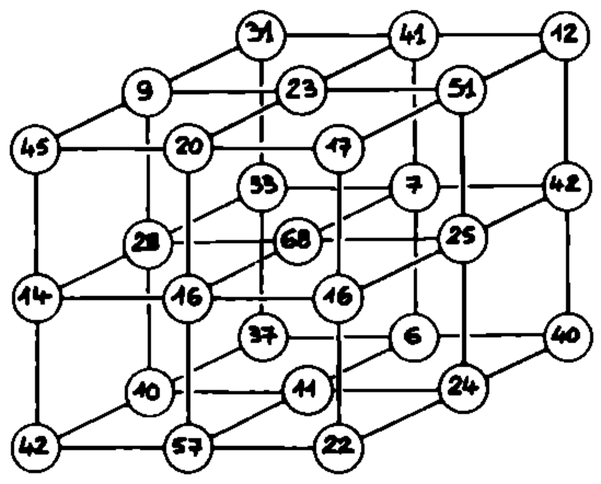
Lösungen zum Ferienmagazin

Titelblatt: Es fehlt die Zahl 9.
▲1▲ 98, 987, ..., 987 654 321.
▲2▲ $60 + 10 - 60 = 10$; $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$; $20 + 5 + 15 = 40$; $10 + 9 + 31 = 50$.
▲3▲ 95; 47; 48; 24, 23, 25; 12, 12, 11, 14; 5, 7, 5, 6, 8; 2, 3, 4, 1, 5, 3.
▲4▲ Das zum Hohlkörper gefaltete Netz 2 vervollständigt die Pyramide.
▲5▲ $E = 60$; $R = 120$; $I = 50$; $K = 90$; $A = 30$. $a = 50$; $b = 150$; $c = 200$; $d = 100$.
▲6▲ $840 : 120 = 7$; $7 \cdot 5 = 35$; $(35 - 31)^2 = 16$; $16 + 4 = 20$.
▲7▲ $333 \cdot 3 = 999$; $222 \cdot 3 = 666$; $111 \cdot 3 = 333$. $10 : 2 + 4 = 9$; $14 : 2 - 4 = 3$; $12 - 3 - 2 = 7$; $36 - 7 - 10 = 19$. $27 + 8 = 35$; $10 + 5 = 15$; $17 + 3 = 20$.
▲8▲ 1, 15, 14, 4; 12, 6, 7, 9; 8, 10, 11, 5; 13, 3, 2, 16. +9, −4, −5, +6; −2, +3, +4, +1; +2, −1, 0, +5; −3, +8, +7, −6.
▲9▲ Den Stern ergänzen die Zahlen 3, 4 und 7.
▲10▲ 6, 1, 4; 4, 5, 2; 2, 3, 6. 1, 5, 3; 3, 4, 2; 2, 6, 1.
▲11▲ Die obere Figur enthält 20, die untere 12 Dreiecke.
▲12▲ Der Käfer erreicht die Blume.
▲13▲ Übung macht den Meister und kein Preis ohne Fleiß.
▲14▲ Die Häuser 2 und 8 sind gleich.
▲15▲ Die Figur 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

Mit oder ohne Feder?
Falls einer der Weisen zwei Mützen mit der Feder gesehen hätte, dann würde er sofort begreifen (und sagen), daß seine eigene Mütze gar keine Feder hat.
Das heißt also:
(1) Abdul sah die zwei Mützen mit der Feder nicht.
(2) Auch Ali sah die zwei Mützen mit der Feder nicht. Er sah jedoch auch die eine Feder nicht!
(3) Achmed konnte etwa folgende Überlegungen anstellen: „Wenn ich eine Feder habe, so würde Ali, wenn er eine Feder sieht, und weiß, daß Abdul die zwei Federn nicht sieht, schlußfolgern, daß er selbst keine Feder hat. Gelangt Ali nicht zu dieser Schlußfolgerung, dann heißt das, daß er die Feder auf meinem Turban auch nicht sieht. Dann habe ich also wirklich keine Feder!"

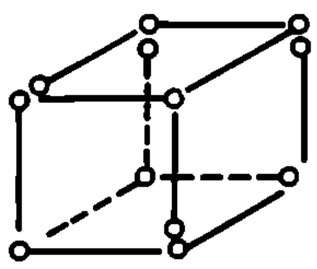
Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ **Kugelspiel**
Schreibe in jede der leeren Kugeln eine der folgenden Zahlen:
6 – 7 – 9 – 10 – 11 – 14 – 16 – 17 – 20 – 23 – 24 – 25 – 28 – 31 – 33 – 37 – 41 – 42 – 51 – 57 und zwar so, daß man immer die Zahl 249 erhält, wenn man die Zahlen der Kugeln addiert, die in einer Ebene liegen! Hinweis: Die abgebildeten Kugeln können neun verschiedenen Ebenen zugeordnet werden.
Lösung:



▲2▲ Mit einer an die Tafel geschriebenen Zahl ist es gestattet, folgende Operationen durchzuführen: Entweder sie durch die doppelte Zahl zu ersetzen, oder ihre letzte Ziffer zu löschen. Wie erhält man mit Hilfe dieser Operationen aus der Zahl 458 die Zahl 14?
Lösung: Um dies zu erreichen, kann man z. B. wie folgt verfahren: 458 – 45 – 90 – 9 – 18 – 36 – 72 – 7 – 14

▲3▲
Noch Quadrat – dann hoch in die Luft
Die Zeichnung zeigt zwölf zu drei einzelnen Quadraten zusammengelegte Streichhölzer. Kann man mit derselben Anzahl von Streichhölzern sechs einzelne Quadrate zusammenlegen?
Lösung: Es geht, aber nur in drei Dimensionen. Man muß mit den zwölf Hölzern einen Würfel konstruieren.



▲4▲ Gegeben sind zwei aufeinanderfolgende Primzahlen p und q, beide größer als 2 [zwischen p und q gibt es (befindet sich) keine weitere (andere) Primzahl]. Beweise, daß die Summe $p + q$ dargestellt (geschrieben) werden kann als Produkt von 3 natürlichen Zahlen größer als 1.
Lösung: Da p und q beide von zwei verschiedene aufeinanderfolgende Primzahlen sind, sind beide voneinander verschiedene natürliche Zahlen. Ist q die größere von beiden, so gilt $q = p + 2n$ mit $n \in N$ und $n \neq 0$.
Damit gilt $p + q = p + p + 2n = 2(p + n)$.
Wegen $p < p + n < p + 2n = q$ liegt $p + n$ zwischen p und q. Da zwischen p und q keine weitere Primzahl liegt, ist $p + n$ eine zusammengesetzte Zahl und damit als Produkt zweier natürlicher Zahlen n_1 und n_2 mit $n_1 > 1$ und $n_2 > 1$ darstellbar:
$p + n = n_1 \cdot n_2$.
Mithin gilt $p + q = 2 \cdot n_1 \cdot n_2$.

Lösung zur Schachaufgabe, S. 64

1. Fläche: a1, a2, a3, a4, b1, b2.
2. Fläche: b3, b4, c2, c3, c4, d3.
3. Fläche: d2, d4, e2, e3, e4, f4.
4. Fläche: c1, d1, e1, f1, f2, f3.

Peter Apian und der Jakobsstab

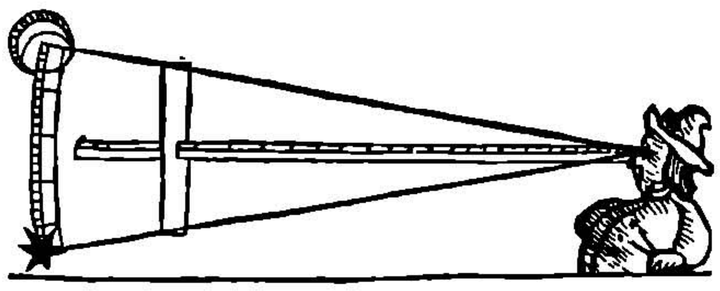
Im Rahmen unserer Serie „Historische mathematische Instrumente" stellte Dr. P. Schreiber im Heft 5/89 den Jakobsstab vor. Leider mußten wir, an das Format dieser einen Seite gebunden, einige Informationen streichen. Ein Grund mehr für uns, den von unserem Leser R. Witzlau eingesandten ergänzenden Beitrag zum Jakobsstab zu veröffentlichen. Alphons

Im Jahre 1533 erschien in Ingolstadt ein Buch mit dem Titel „Instrument Buch", in dessen letztem Teil ausführlich der Auf- und Nachbau sowie die Nutzung des Jakobsstabes für geodätische Messungen erklärt wurde. Dieses Buch war eines der ersten und umfassendsten Instrumentenbeschreibungen der Renaissance in deutscher Sprache. Der Verfasser dieses Buches, Peter Apianus (oder kurz Apian, latinisiert aus dem eigentlichen Namen Bienewitz oder Bennewitz) wurde 1495 oder 1501 (Das Geburtsjahr Apians steht urkundlich nicht fest!) in Leisnig geboren und wirkte als Professor für Mathematik an der bayrischen Universität Ingolstadt (1826 nach München verlegt), wo er 1552 starb.

Der Jakobsstab Apians bestand aus einem Meßstab und einem Läufer, wobei Apian eine nichtlineare Teilung des Meßstabes vorschlug.

Die Nutzung des Jakobsstabes für die Messung der Abstände des Mondes zu Fixsternen zeigte er bereits im Jahre 1524 in seinem Buch „Cosmographicus liber".

Mit Hilfe der Monddistanzmessung war es möglich, die geographische Länge eines Ortes zu bestimmen. Dieses Verfahren war Apian durch Johannes Werner (1468 bis 1528) bekannt, der es im Jahre 1514 in seinen Kommentaren zum ersten Buch der Ptolemäischen Geographie vorgeschlagen hatte. Bis zur Einführung des Chronometers im 18. Jahrhundert stellte die Monddistanzmessung eine wichtige Orientierungsmethode in der Nautik dar.

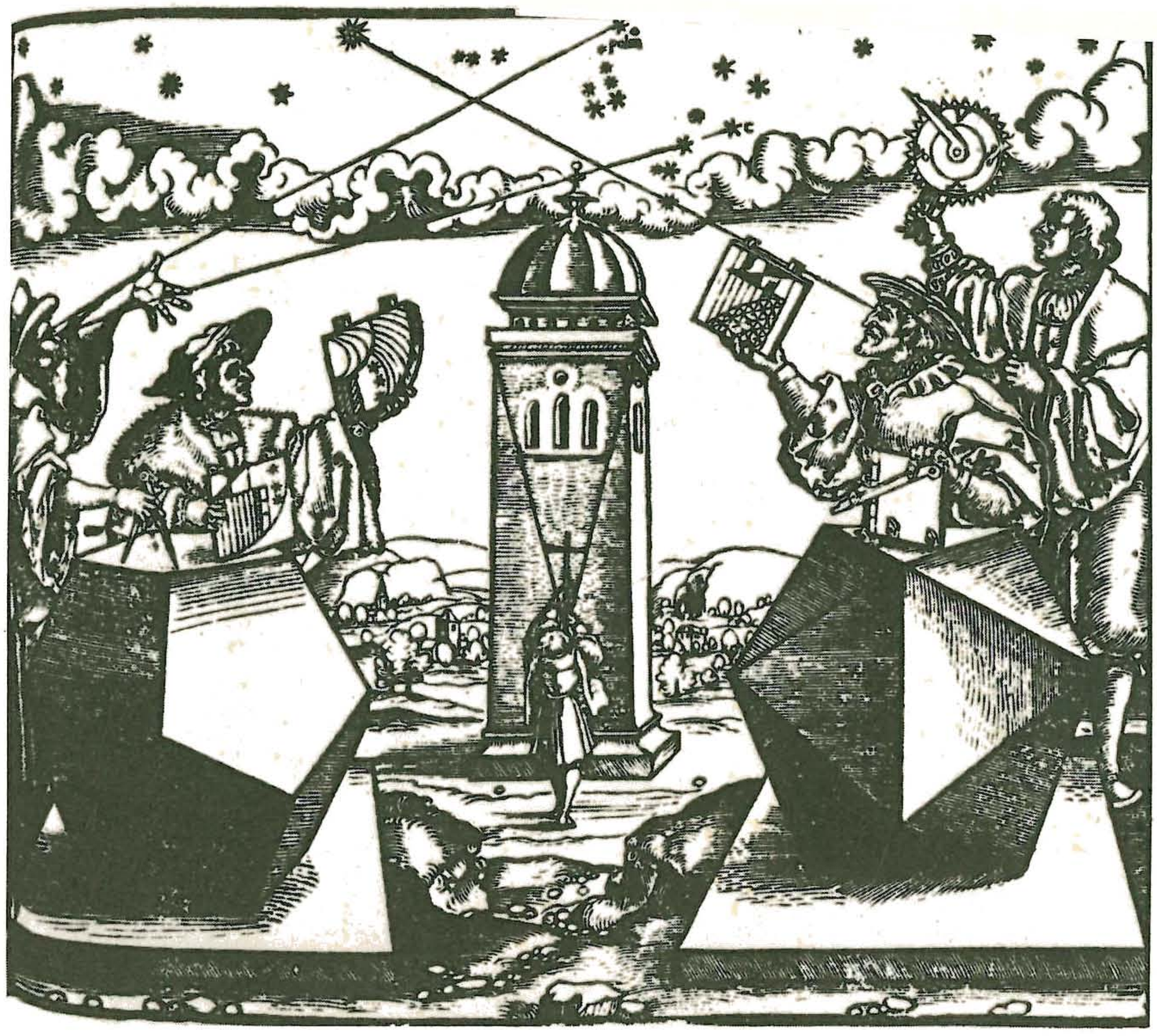


Monddistanzmessung nach Apian, 1524

Apian sah den Einsatz des Jakobsstabes vielseitig. Er erläuterte dessen Gebrauch für geodätische und astronomische Messungen auch 1532 in seinem Werk „Introductio geographica".

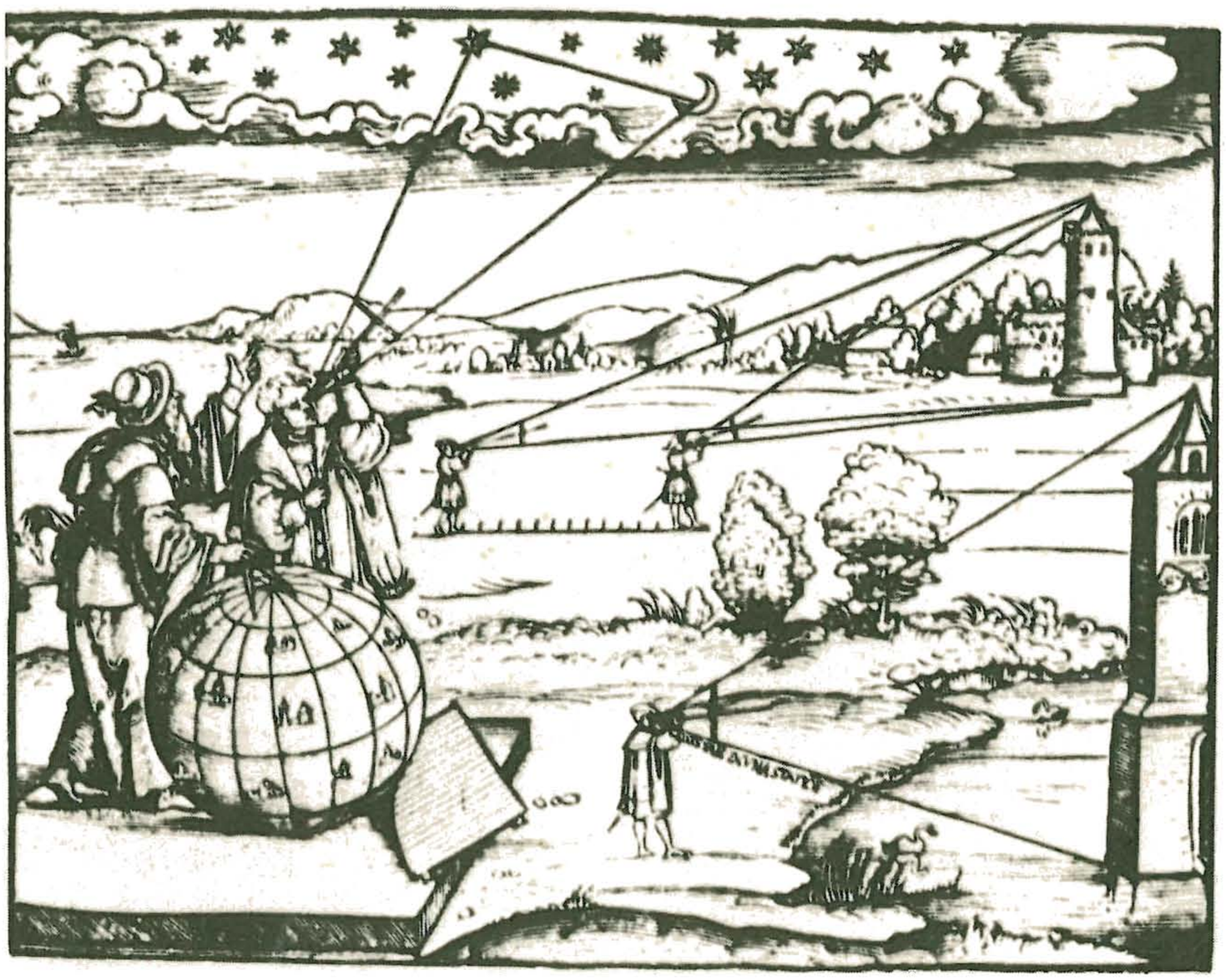
Die genannten Werke Apians, sein in der Bayrischen Staatsbibliothek erhaltenes Manuskript über den Jakobsstab und der nachweisliche Einsatz desselben für Kometenbeobachtungen durch Apian im Jahre 1532 sind u. a. Beweise für seinen Anteil an der Popularisierung der Kenntnisse über den Jakobsstab und dessen weiterer Entwicklung und Anwendung.

Nachzutragen wäre noch, daß im Jahre 1984 die Studenten M. Wendt und M. Gleichmann von der Pädagogischen Hochschule Potsdam unter der Betreuung von Frau Prof. Dr. sc. Goetz im Rahmen einer Diplomarbeit die historische Entwicklung des Jakobsstabes und den Nachbau eines „Apianischen" Jakobsstabes behandelt haben. *R. Witzlau*



Titelblatt des Instrument Buches (Ingolstadt, 1533) zeigt u. a. die Nutzung des Jakobsstabes zur Höhenmessung eines Turmes

Vielseitige Anwendung des Jakobsstabes nach Apian, 1532



ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin 24 (1990) 3 · Seiten 49 bis 72