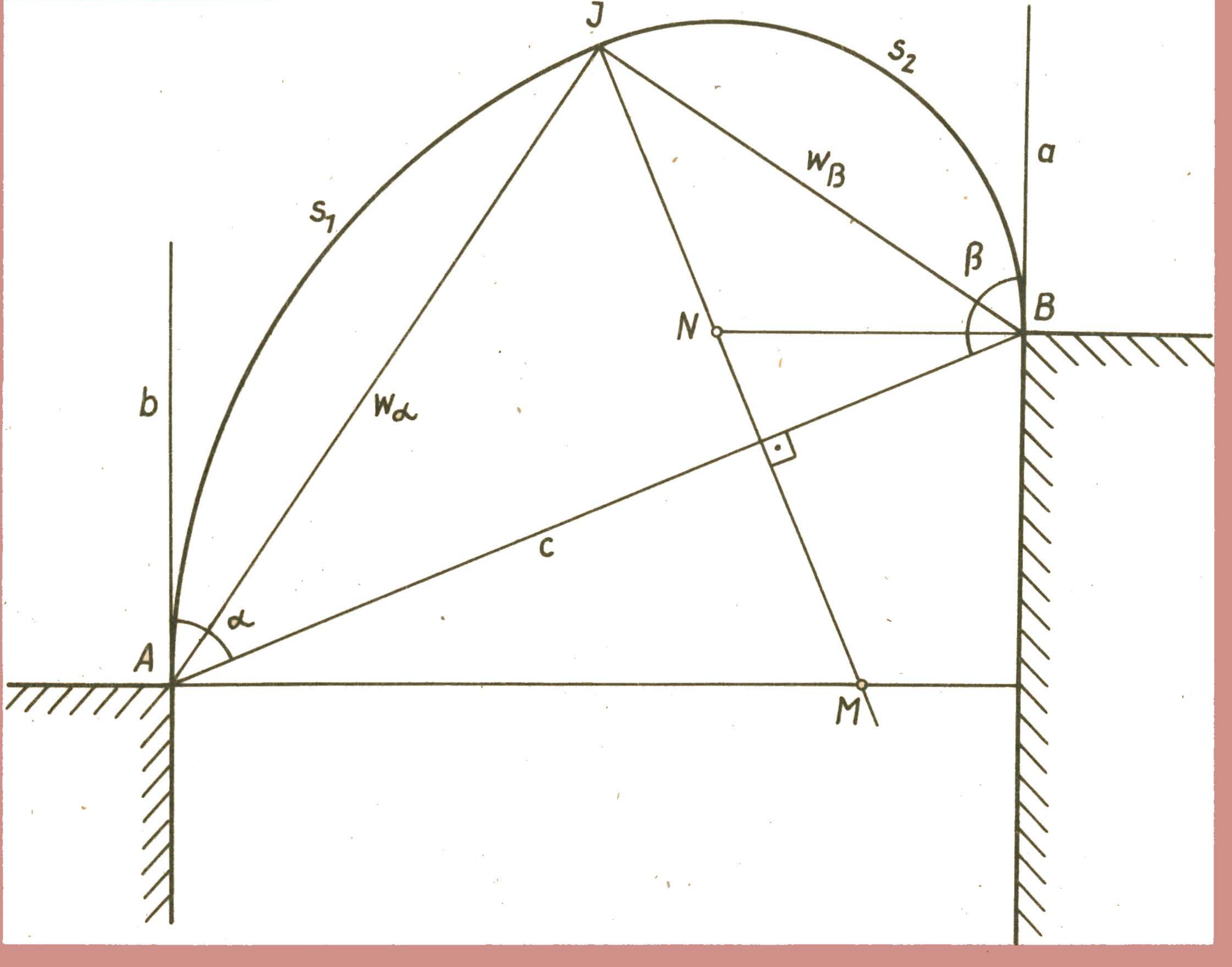
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Nabil El-Solami, Berlin (S. 55); Archiv R. Thiele, Leipzig (S. 59, S. 64); Briefmarkenzusammenstellung: P. Schreiber, Greifswald (IV. U.-Seite).
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von Dr. E. Schröder, TU Dresden
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 25. Februar 1983
Auslieferungstermin: 20. Juni 1983

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Korbbogenkonstruktion

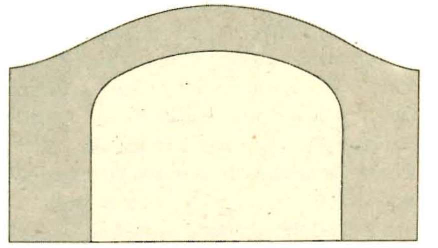


Bild 1

Wer einmal nach unserem Nachbarland in die ČSSR fährt, sieht dort noch manches alte Bauerngehöft mit einem schönen Torbogen als Krönung der Einfahrt. Auch an den Marktplätzen alter Kleinstädte sind Bogengänge der Häuserfronten rund um den Markt recht beeindruckend. Schauen wir uns den Torbogen eines alten Bürgerhauses genauer an, so ist zu bemerken, daß kein einfacher Halbkreisbogen die Einfahrt überwölbt. Vielmehr ist die Bogenlinie in der Mitte weniger stark gekrümmt als an den Seiten. Dabei ist die Symmetrie bezüglich der Mittellinie des Tores gewahrt. Die Bogenlinie geht an den Seiten nicht geknickt, sondern fließend in die Senkrechte über (vgl. Bild 1). Nach flüchtiger Betrachtung kann man den Torbogen für eine Halbellipse halten, deren Hauptachse waagerecht liegt. An der Ellipse nimmt die Krümmung von einem Nebenscheitel ausgehend nach den Hauptscheiteln stetig zu. Im höchsten Punkt des Tores, der damit als Nebenscheitel anzusehen wäre, weist die Krümmung ein Minimum auf. Eine genauere Untersuchung solcher Torbögen zeigt jedoch, daß die Krümmung der Bogenlinie von der Mitte nach den Seiten laufend nicht stetig zunimmt. Die Bogenlinie setzt sich aus drei Kreisabschnitten zusammen. Haben der mittlere Abschnitt den Krümmungsradius r_1 und die beiden äußeren Abschnitte den Krümmungsradius r_2, so gilt stets

$$r_1 > r_2. \qquad (1)$$

Die Krümmungen k_i der Kreisabschnitte stellen die Kehrwerte von r_i dar, also

$$k_i = {}^1/r_i \quad (i=1,2). \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $k_1 < k_2$. (3)

Außer der Forderung $\frac{r_1}{r_2} > 1$ bestehen für das Verhältnis der Krümmungsradien keine Einschränkungen. Je nach den baustatischen Forderungen, die die Bögen zu erfüllen hatten, wählte man das Verhältnis der Krümmungsradien $q = r_1 : r_2$ mehr oder weniger groß. Für $q > 1$ ergibt sich ein stark abgeflachter Torbogen.

Gibt man sich ein Rechteck vor, dessen Breite mehr als doppelt so groß ist wie die Höhe, so kann man offenbar beliebig viele aus drei Kreisabschnitten zusammengesetzte symmetrische Bogenlinien konstruieren, die die waagerechte Seite als Grundlinie und die senkrechte Seite als Höhe besitzen und bei denen außerdem an der Übergangsstelle genau eine Tangente existiert. Wie eine genauere Vermessung zeigt, erfüllen die von den damaligen Baumeistern verwendeten Bogenkonstruktionen noch zusätzlich die folgende Forderung: Die Tangente an die Bogenlinie in der Nahtstelle J der zwei Kreisbögen von unterschiedlicher Krümmung ist parallel zu der Sehne, die den höchsten Punkt (Scheitelpunkt des Tores) mit dem entsprechenden tiefsten Punkt der Bogenlinie verbindet (vgl. Bild 2). Wie man zeigen kann, sind die Kreisabschnitte und damit die gesamte Bogenlinie durch Vorgabe des Rechtecks unter Einbeziehung dieser Forderung eindeutig bestimmt.

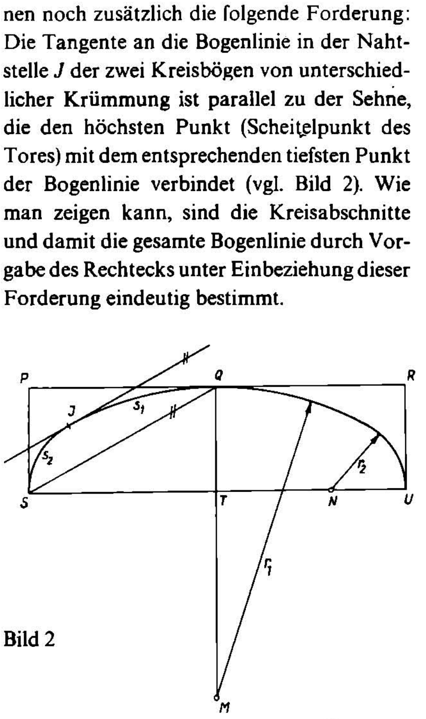


Bild 2

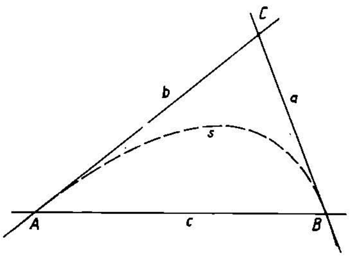


Bild 3

Uns stellt sich die Frage, wie man die Nahtstelle J der Kreisbögen s_i unterschiedlicher Krümmung mit Zirkel und Lineal konstruktiv finden kann, wenn dabei im Punkt J die geforderte Tangentenrichtung vorliegen soll. Da die beiden Nahtstellen symmetrisch zur Mittellinie QT des Rechtecks liegen, genügt die Betrachtung einer Hälfte der Fläche. Ferner können wir unsere Untersuchungen auf das Dreieck $\triangle SQP$ beschränken, denn die halbe Bogenlinie s besitzt dieses Dreieck als Sekanten-Tangentendreieck. Da der Winkel $\sphericalangle SPQ$ ein rechter Winkel ist, liegt ein spezieller Fall vor. Wir verallgemeinern die Problemstellung in folgender Weise:

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ (vgl. Bild 3). Gesucht ist eine aus zwei Kreisbögen zusammengesetzte Bogenlinie s, die folgende Forderungen erfüllt:

1. Die Bogenlinie s soll A mit B verbinden.
2. Die Bogenlinie s soll – abgesehen von den Randpunkten A und B – nur innere Punkte des Dreiecks ABC besitzen.
3. Die Bogenlinie s soll die Seite a in B und die Seite b in A berühren.
4. Die Bogenlinie s setzt sich aus zwei Kreisabschnitten mit den Krümmungsradien r_1 bzw. r_2 zusammen.
5. In der Verknüpfungsstelle J der beiden Kreisabschnitte s_1 und s_2 ist die Tangente eindeutig bestimmt.
6. Die Tangente in der Verknüpfungsstelle J von s_1 und s_2 soll parallel zur Dreieckseite c sein.

Bemerkung:

Für das gesuchte Kurvenstück s sind a die Tangente in B, b die Tangente in A und c die Anfangs- und Endpunkte von s verbindende Sekante.

Um zu einer Aussage über die Lage des Punktes J bezüglich des Dreiecks ABC zu gelangen, gehen wir von einer ebenen Figur aus, bei der die geforderten Lagebeziehungen zwischen dem Dreieck und dem aus zwei Kreisbögen zusammengesetzten Kurvenstück s bereits bestehen (vgl. Bild 4). Hierzu zeichnen wir

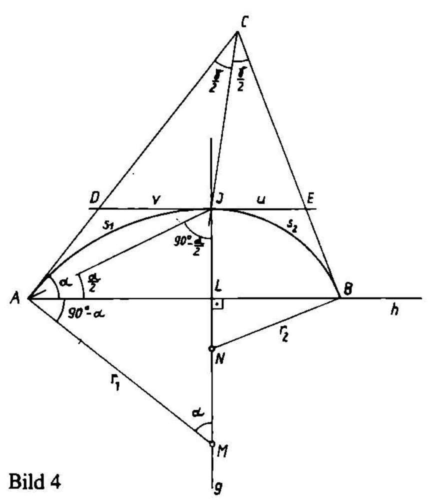


Bild 4

eine Gerade g und legen auf dieser drei Punkte M, N und J fest, wobei zu fordern ist, daß J kein Punkt der Strecke $\overline{MN}$ ist. Mit der Distanz $r_1 = \overline{MJ}$ schlagen wir einen Kreisbogen s_1 um M, mit der Distanz $r_2 = \overline{NJ}$ einen Kreisbogen s_2 um N. Beide Bögen berühren sich nach Konstruktion in J. Weiterhin werde auf g ein Punkt L angenommen, der innerer Punkt für wenigstens eine der Strecken $\overline{MJ}$ oder $\overline{NJ}$ ist. Nun wird in L auf g das Lot h errichtet. Dieses schneidet s_1 in A und s_2 in B. Die Tangenten b an s_1 in A und a an s_2 in B schneiden sich im Punkt C. Für das sich aus s_1 und s_2 zusammensetzende Kurvenstück s sind bezüglich des Dreiecks ABC alle Forderungen erfüllt, die eingangs in unserer Aufgabe gestellt wurden.

Mittels der Vorbetrachtungsfigur (Bild 4) soll nun geklärt werden, wie man den Punkt J konstruktiv finden kann, wenn die Punkte A und B samt ihren Tangenten b bzw. a gegeben sind.

Bemerkung:

Ein Kurvenpunkt P samt der Kurventangente t an s in P heißt Linienelement $P(t)$ von s.

Zunächst schneiden sich die Tangenten a und b im Punkt C.

Aus Bild 4 ist ablesbar:

$$\overline{DA} = \overline{DJ} \text{ und } \overline{EB} = \overline{EJ}. \tag{4}$$

Weiterhin gilt nach Konstruktion die Proportion

$$\overline{CD} : \overline{DA} = \overline{CE} : \overline{EB}. \tag{5}$$

Aus (5) folgt mit (4)

$$\overline{CD} : \overline{DJ} = \overline{CE} : \overline{EJ}. \tag{6}$$

Als bekannt aus der Dreiecksgeometrie werde vorausgesetzt:

Im Dreieck teilt die Halbierungslinie eines Innenwinkels die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Nach diesem Satz und der Proportion (6) ist die Gerade (CJ) Winkelhalbierende im Dreieck DEC. Sie halbiert den Winkel γ. Wie leicht zu erkennen ist, deckt sich die Gerade (CJ) mit den Winkelhalbierenden w_γ des Dreiecks ABC. Mit einfachen Überlegungen läßt sich zeigen, daß auch die anderen Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC durch J gehen. J ist also Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Im folgenden identifizieren wir die Größe eines Winkels mit der Bezeichnung dieses Winkels gemäß Bild 4. Es sei $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Dann folgt

$$\sphericalangle BAM = 90° - \alpha \tag{7}$$

und $\sphericalangle AML = \alpha$. Nach Konstruktion ist das Dreieck AMJ gleichschenkelig. Für die Basiswinkel gilt

$$\sphericalangle JAM = \sphericalangle AJM = 90° - \alpha/2. \tag{8}$$

Mit (7) folgt aus (8)

$$\sphericalangle JAB = \alpha/2. \tag{9}$$

Aus (9) folgt, daß die Verbindungslinie (AJ) den Winkel $\sphericalangle BAC$ halbiert. Es geht also w_α und damit auch w_β durch den Punkt J. Der gesuchte Punkt J ist daher Inkreismittelpunkt des Sekanten-Tangentendreiecks ABC.

Damit ist geklärt, wie man konstruktiv vorzugehen hat, wenn zwei Linienelemente $A(b)$ und $B(a)$ des Bogenstückes s vorgegeben sind. Man ergänzt die Linienelemente zum Sekanten-Tangentendreieck ABC. Mittels der Winkelhalbierenden ist der Inkreismittelpunkt J von $\triangle ABC$ zu bestimmen. Aus J fällt man das Lot g auf die Sekante c. In A errichtet man das Lot auf b. Dieses schneidet g in M. In B errichtet man das Lot auf a. Dieses schneidet g in N. Um M schlägt man den Kreisbogen s_1 mit der Strecke $\overline{MA}$ als Radius und um N den Kreisbogen s_2 mit der Strecke $\overline{NB}$ als Radius. Das aus s_1 und s_2 zusammengesetzte Bogenstück s besitzt die geforderten Eigenschaften 1 bis 6.

Auf das Problem des Torbogens zurückkehrend, ist diese Konstruktion analog auf die Dreiecke $\triangle PQS$ und $\triangle QRU$ in Bild 2 zu übertragen.

In der Praxis nennt man ein aus zwei Kreisbögen zusammengesetztes Kurvenstück mit stetiger Tangente einen „Korbbogen". Die von uns angewandte Konstruktion heißt „Korbbogenkonstruktion". Für die Übergangsstelle von dem einen Kreisbogen in den anderen hätte man auch einen anderen Tangentenanstieg fordern können. Dann ist das hier vorgeführte einfache Konstruktionsverfahren nicht anwendbar. Es ergäben sich andere Radien für die beiden Kreisbögen, und die Übergangsstelle würde nicht mit dem Inkreismittelpunkt des Sekanten-Tangentendreiecks zusammenfallen.

Die hier abgeleitete Bogenkonstruktion läßt einige erwähnenswerte Varianten zu. Zum Beispiel soll eine Wandöffnung mit unterschiedlichen Ausgangshöhen durch einen von A nach B steigenden Korbbogen überspannt werden. Der Verbindungsgeraden $c = (AB)$ fällt die Rolle der Sekante des gesuchten Korbbogens s zu. In A und B stehen die Tangenten an die gesuchte Kurve lotrecht. Der dritte Punkt C des Dreiecks ABC ist damit der unendlich ferne Punkt der Lotrechten. Die Winkel α und β werden daher von c mit den Lotrechten durch A bzw. B eingeschlossen (siehe Bild 5, Titelbild).

Damit lassen sich auch hier die Winkelhalbierenden w_α und w_β sofort einzeichnen. Sie schneiden sich im Punkt J, der Übergangsstelle von s_1 nach s_2. Auf dem Lot von J auf c liegen die gesuchten Kreismittelpunkte M und N. Das Lot in A auf b liefert M, das Lot in B auf a liefert N. Der Kreisbogen s_1 um M mit der Distanz $\overline{MA}$ und s_2 um N mit der Distanz $\overline{NB}$ berühren sich in J. Der aus den Bogenstücken s_1 (AJ) und s_2 (JB) zusammengesetzte Korbbogen s erfüllt alle eingangs gestellten Forderungen bezüglich der Ausgangselemente. Bei Stützkonstruktionen für Treppen und Zuschauerarenen gelangen solche steigende Korbbögen mitunter zum Einsatz. In der Sprache des Baupraktikers heißen solche Bogenverbindungen „Pferdeköpfe".

Die nach unserem Verfahren konstruierten Korbbögen haben noch eine bemerkenswerte differentialgeometrische Eigenschaft. Für die Übergangsstelle von s_1 nach s_2 liegt der Quotient aus den Krümmungsradien $q = r_1 : r_2$ $(r_1 > r_2$ vorausgesetzt$)$ im Vergleich zu allen anderen noch möglichen Lösungen am nächsten bei der Zahl Eins. Für alle anderen Korbbogenkonstruktionen ist das Verhältnis von größerem zu kleinerem Krümmungsradius – also der Quotient q – größer als bei der hier gezeigten Konstruktion. Bei vielen Problemstellungen des Maschinenbaus, in denen mit Korbbögen gearbeitet wird, ist man bestrebt, den Quotienten q möglichst nahe bei Eins und damit die Unstetigkeit bezüglich der Krümmung an der Übergangsstelle J so klein als möglich zu halten. Wegen vieler Vorteile für die Fertigung gelangt die Korbbogenkonstruktion z. B. bei Nockenprofilen im Maschinenbau oder bei Höhenlinien von Staumauern und bei Kanalprofilen im Bauwesen zum Einsatz. Erinnert sei auch an NC-Fräsmaschinen, die nur geradlinige oder kreisförmige Fräserführungen erlauben.

So gelangt die bereits in Bauhütten zur Zeit der Gotik praktizierte und im Barockzeitalter vielfältig verwendete Korbbogenkonstruktion im modernen Bauwesen und im Maschinenbau aus vorwiegend fertigungstechnischen Gründen und ökonomischen Überlegungen zu neuer Aktualität.

Aufgaben

Zur Konstruktion von genormten Eiprofilen für Kanäle geht man von zwei Kreisen k_1 und k_2 mit den Radien r_1 bzw. r_2 aus, wobei $r_1 = 2r_2$ gilt.

Für die Distanz der Mittelpunkte M_i gilt $|M_1M_2| = 3r_2$.

Mittels zweier Kreisbögen sind k_1 und k_2 so miteinander zu verbinden, daß ein bezüglich (M_1M_2) symmetrisches Eiprofil entsteht, welches frei von Knickstellen ist. Die Endpunkte des Durchmessers $\overline{AB}$ von k_1 sollen Ansatzstellen für die verbindenden Kreisbögen sein (siehe Bild 6).

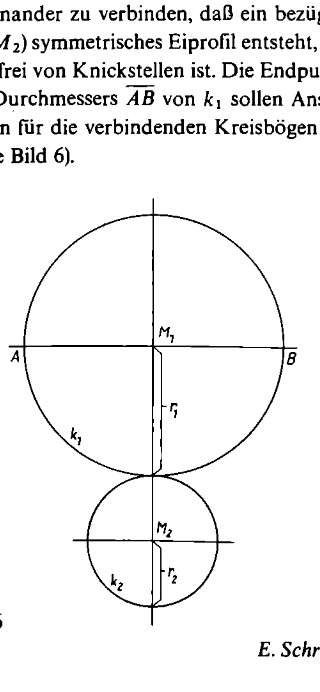


Bild 6

E. Schröder

Mathematik und Schiffbau

Teil 1

1. Einleitende Bemerkungen

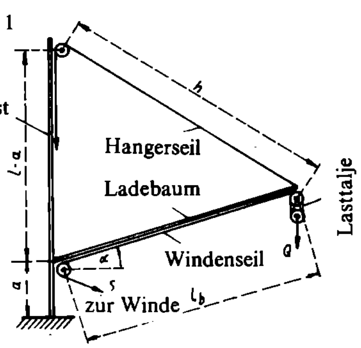
Der Schiffbau nimmt in der Industrie der DDR eine bedeutende Stellung ein. Jährlich werden gegenwärtig etwa 25 See- und Küstenschiffe auf unseren Werften hergestellt, außerdem noch viele andere Spezial- und Fischereifahrzeuge. Die meisten Schiffe werden exportiert. Um auf dem Weltmarkt konkurrieren zu können, müssen die Werften einen hohen Entwicklungsstand ihrer Produkte gewährleisten. Eine moderne Technologie des Schiffbaus erfordert eine präzise Ermittlung aller Bedingungen und Wirkungen, die im Prozeß der Nutzung auf das Schiff und alle seine Geräte und Ausrüstungen Einfluß haben.
Zur Gewährleistung dieser Erfordernisse ist in den Konstruktions- und Entwicklungsbüros der Werften ein hoher Einsatz mathematischer und rechentechnischer Hilfsmittel erforderlich.
Schwerpunkte des Einsatzes mathematischer Methoden und Verfahren bilden etwa Probleme der Schiffsfestigkeit und Schiffsschwingungen sowie Fragen, die mit der Umströmung des Schiffes und dem Schiffswiderstand zusammenhängen, um nur einige Gebiete zu nennen.
Will man einen kleinen Eindruck vermitteln, in welchem Umfang mathematische Methoden im Schiffbau verwendet werden, so ist es zweckmäßig, sich auf einen speziellen, etwas engeren Problemkreis dieses breiten Gebietes zu beschränken. Das ist einerseits notwendig, um die erforderliche mathematische Modellierung der technischen Aufgabenstellung hinreichend zu verdeutlichen, und andererseits, um nur solche Aufgaben zu beschreiben, die eine nicht zu hohe mathematische Vorbildung verlangen.
Als ein solches spezielles Gebiet haben wir die Schiffsfestigkeit gewählt und daraus wieder nur einige einfach zu beschreibende Teilgebiete. Als erforderliches mathematisches Rüstzeug werden dabei nur einige einfache Grundlagen der linearen Algebra, der Lehre von den Dreiecken, der Vektoralgebra und der Differential- und Integralrechnung gebraucht, wie sie bis zur 11. Klasse behandelt werden.
Ein Festigkeitsnachweis ist für alle Bauteile eines Schiffes, die in irgendeiner Weise belastet werden (und das ist die überwiegende Mehrzahl aller Bauteile) erforderlich. Dabei geht es um die Ermittlung der in den Bauteilen wirkenden Kräfte und Biegemomente bzw. um die Bestimmung der unter den Krafteinwirkungen auftretenden Durchbiegungen. Der Vergleich der errechneten Werte mit experimentell ermittelten Grenzbelastungen, bei deren Überschreiten das Bauteil zerstört bzw. in seiner Funktion stark beeinträchtigt würde, gestattet dann ein Urteil über die Zulässigkeit und Güte der verwendeten Konstruktion.

2. Die Berechnung von Ladegeschirren

Relativ einfache mathematische Beziehungen werden bei der Berechnung von Ladegeschirren benötigt. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um die Anwendung der Partialsumme einer endlichen geometrischen Folge, um Beziehungen in ähnlichen und rechtwinkligen Dreiecken und um einige Grundgleichungen der Vektoralgebra.
Das Ladegeschirr besteht im wesentlichen aus dem Ladebaum, dem Hangerseil, dem Windenseil und der Lasttalje, an der die Last hängt (Bild 1). Bei gegebener Last Q interessieren den Konstrukteur die Größen der Windenzugkraft S im Windenseil, der Kraft B im Ladebaum und der Kraft H im Hangerseil.

Bild 1

Mast



oberstes Deck

l Länge des Mastes
a Abstand des Abstützpunktes des Ladebaums vom obersten Deck
h Länge des Hangerseils
l_b Länge des Ladebaums
α Neigungswinkel des Ladebaums

Um die Windenzugkraft S klein zu halten, ist bei Schwergutladegeschirren der Ladeläufer i. a. mehrfach geschoren, d. h., das Windenseil ist mehrfach um zwei Rollen geschlungen. Eine solche Anordnung wird Talje (Lasttalje) genannt. In den Taljen ergibt sich infolge der Reibung und infolge der Formänderungsarbeit im Seil bei jeder Seilumlenkung um 180° ein Kraftverlust von annähernd 5%. Dadurch reduziert sich bei 1 N (Newton) Windenzugkraft nach einer Umlenkung des Seils um 180° diese Kraft auf 0,95 N beim Hieven (Anheben) der Last, sie erhöht sich dagegen auf 1,05 N beim Fieren (Herablassen) der Last. Der Verlustfaktor beträgt also beim Hieven $\eta=0{,}95$ und beim Fieren $\eta=1{,}05$. Nach jeder Umlenkung des Seils um 180° ist also die vorherige Seilkraft mit dem Faktor η zu multiplizieren, um die Seilkraft nach Umlaufen der Rolle zu erhalten.
Läuft der holende Part vom oberen Block ab (Bild 2) und werden im Schnitt $a-a$ insgesamt n Seile geschnitten, dann ergibt das Kräftegleichgewicht zwischen den Seilkräften ηS, $\eta^2 S$, ..., $\eta^n S$ und der Last Q:

$$\eta S+\eta^2 S+\ldots+\eta^n S=Q. \qquad (1)$$

Die linke Seite der Gleichung (1) ist die Partialsumme einer endlichen geometrischen Folge mit dem Quotienten η bestehend aus n Summanden. Nach einer bekannten Formel ergibt sich die links stehende Summe zu

$$\eta S\frac{1-\eta^n}{1-\eta},$$

so daß die erforderliche Windenzugkraft S die Größe

$$S=\frac{1-\eta}{\eta(1-\eta^n)}Q \text{ hat. (Bild 2)} \qquad (2)$$

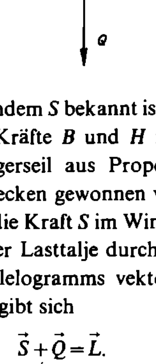


Bild 2

Nachdem S bekannt ist, kann die Berechnung der Kräfte B und H im Ladebaum und im Hangerseil aus Proportionen in ähnlichen Dreiecken gewonnen werden. Zunächst werden die Kraft S im Windenseil und die Last Q an der Lasttalje durch Zeichnen des Kräfteparallelogramms vektoriell addiert (Bild 3). Es ergibt sich

$$\vec{S}+\vec{Q}=\vec{L}. \qquad (3)$$

$\vec{L}$ ist die resultierende Kraft im Ladeblock. Diese muß in Richtung des Hangerseils und des Ladebaums zerlegt werden, um die Kräfte $\vec{H}$ und $\vec{B}$ in diesen beiden Teilen des Ladegeschirrs zu gewinnen. Dazu wird durch den

Punkt 6 in Bild 3 eine Parallele zum Hangerseil gezogen. Es entsteht das Kräftedreieck mit den Ecken 5, 6 und 2. Aus diesem Dreieck liest man die Vektorgleichung

$$\vec{L}=\vec{H}+\vec{B} \tag{4}$$

ab. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ sind die vektoriellen Komponenten der Kraft $\vec{L}$ am Ladeblock in Richtung des Hangerseils bzw. des Ladebaums. Zwischen den Vektoren und ihren Beträgen bestehen die Beziehungen $|\vec{B}|=B$, $|\vec{H}|=H$ usw.

Man erkennt aus Bild 3, daß das Dreieck mit den Ecken 1, 2, 3 ähnlich ist zum Dreieck mit den Ecken 4, 5 6. Daher gelten die Proportionen

$$\frac{B-S}{Q}=\frac{l_b}{l-a},\quad \frac{H}{Q}=\frac{h}{l-a}.$$

Daraus erhält man

$$B=\frac{l_b}{l-a}Q+S \tag{5}$$

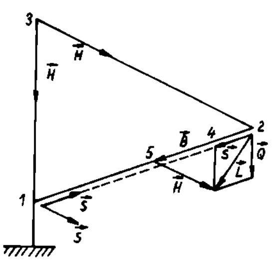
(Kraft im Ladebaum),

$$H=\frac{h}{l-a}Q \tag{6}$$

(Kraft im Hangerseil).

Man kann diese Kräfte bei gegebenen S und Q auch aus der grafischen Konstruktion (Bild 3) durch Abgreifen der entsprechenden Vektorlängen ermitteln.

Bild 3



Die Kräfte H und B sind für die Bemessung des Hangerseils und des Baumquerschnitts wichtig. Andererseits belasten sie zusammen mit der Windenzugkraft S den Mast, so daß ihre Größen auch die erforderlichen Querschnittsabmessungen des Mastes bestimmen. Dazu werden die Horizontal- und Vertikalkomponenten dieser Kräfte am Mast benötigt.

Wie man aus Bild 3 erkennt, wirkt in Richtung des Ladebaums nur die Kraft $B-S$. Aus dem unteren rechtwinkligen Dreieck in Bild 4 ergibt sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen

$$B_h=\frac{l_b}{l-a}Q\cos\alpha \tag{7}$$

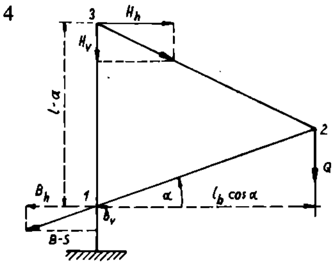
(horizontale Baumkraft am Mast),

$$B_v=\frac{l_b}{l-a}Q\sin\alpha \tag{8}$$

(vertikale Baumkraft am Mast).

Die horizontale Hangerkraft H_h erhält man aus der Überlegung, daß die Summe der Drehmomente (Kraft mal Hebelarm) aller Kräfte um den Punkt 1 (Abstützpunkt des

Bild 4



Baumes am Mast) Null sein muß, d. h., die Drehmomente müssen im Gleichgewicht sein:

$$H_h(l-a)+l_b\cos\alpha=0.$$

Es folgt

$$H_h=-\frac{l_b}{l-a}Q\cos\alpha. \tag{9}$$

Außerdem muß die Summe der am Mast angreifenden Vertikalkräfte gleich der äußeren Belastung Q sein (Kraftgleichgewicht), d. h.

$$H_v=Q-B_v. \tag{10}$$

Zerlegt man noch die Windenzugkraft S in ihre Komponenten, so sind alle Kräfte, die infolge des Ladegeschirrs horizontal und vertikal auf den Mast einwirken, bekannt.

Die Verhältnisse werden komplizierter, wenn mit zwei gekoppelten Ladegeschirren gearbeitet wird. In diesem Fall ist es am zweckmäßigsten, die Kräfte in den Seilen und Bäumen vektoriell zu ermitteln. In diesem Zusammenhang ist auch folgende Fragestellung wichtig: Bei welchen Stellungen gekoppelter Ladegeschirre sind die statischen Kräfte in den Ladebäumen bzw. Hangerseilen am größten? Eine Beantwortung dieser Frage gestattet eine optimale Bemessung der einzelnen Bauteile. Man wird bei diesem Problem auf eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen geführt, die in das mathematische Gebiet der nichtlinearen Optimierung einzuordnen ist. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein.

3. Die Berechnung von Biegeträgern

Ein wichtiges Bauelement im Schiffbau ist der Träger oder Balken. Er besteht aus Stahl und hat je nach dem Verwendungszweck unterschiedliche Abmessungen und Querschnittsprofile (Beispiele für gebräuchliche Profile siehe Bild 5). Solche Träger dienen sowohl zur Aufnahme von Kräften in ihrer Längsrichtung als auch von Kräften senkrecht zur Trägerachse (Querkräfte) und von Biegemomenten. Uns soll hier nur der auf Biegung beanspruchte Träger interessieren.

Bild 5

Die Bestimmung der Biegemomentenverteilungen und der Durchbiegungen solcher Träger kann in einfacher Weise mit den Mitteln der Differential- und Integralrechnung geschehen. Die Grundlage dafür ist die sogenannte Differentialgleichung der Biegelinie, die eine Beziehung zwischen der 2. Ableitung der Durchbiegung und der auf den Träger einwirkenden Belastung in Gestalt des sogenannten Biegemoments darstellt.

Diese Differentialgleichung resultiert aus der leicht begründbaren Tatsache, daß im Fall kleiner Durchbiegungen die Krümmung der Biegelinie $y(x)$ des Trägers im Punkt x durch ihre 2. Ableitung $y''(x)$ dargestellt werden kann und die Krümmung ihrerseits proportional zum Biegemoment $M(x)$ des Trägers im Punkt x ist, d. h., es gilt

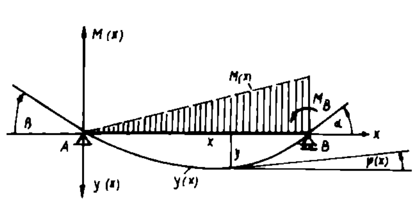
$$EI\,y''(x)=M(x). \tag{11}$$

Der Proportionalitätsfaktor ist EI. Dabei bedeutet E den Elastizitätsmodul, das ist eine Materialkonstante, die die Elastizität des Materials beschreibt (gemessen in Nm^{-2}). I ist das Flächenträgheitsmoment (gemessen in m^4), eine von der Form des Balkenquerschnitts abhängige Größe. Für Träger konstanten Querschnitts ist I konstant, d. h. nicht von x abhängig. Das Biegemoment $M(x)$ hat die Dimension „Kraft mal Hebelarm" (gemessen in Nm) und stellt das Drehmoment aller Kräfte dar, die rechts von der Schnittstelle x auf den Träger einwirken, bezüglich des Punktes mit der Abszisse x als Drehpunkt.

Ist z. B. ein Träger der Länge l und konstanten Querschnitts auf zwei Stützen bei A und B frei drehbar gelagert und wird bei B ein Drehmoment der Größe M_B in der angegebenen Drehrichtung aufgebracht (Bild 6), dann nimmt das Biegemoment $M(x)$ vom Wert M_B in B linear auf den Wert Null in A ab, d. h.

$$M(x)=\frac{x}{l}M_B. \tag{12}$$

Bild 6



Mit (12) lautet die Differentialgleichung der Biegelinie (11) in diesem Fall

$$EI\,y''(x)=\frac{x}{l}M_B. \tag{13}$$

Um die Durchbiegung $y(x)$ zu erhalten, müssen wir diese Gleichung zweimal unbestimmt über x integrieren. Unter Anwendung einfacher Regeln für das unbestimmte Integral ergibt sich zunächst:

Auf der linken Seite:

$$\int EI\,y''(x)\,dx=EI\int\frac{d}{dx}y'(x)\,dx=EI\,y'(x)+c'.$$

Auf der rechten Seite:

$$\int\frac{x}{l}M_B\,dx=\frac{M_B}{l}\int x\,dx=\frac{M_Bx^2}{2l}+c''.$$

Nach der unbestimmten Integration tauchen die willkürlichen Integrationskonstanten c' und c'' auf. Faßt man diese beiden Konstanten zu $c'' - c' = C_1$ zusammen, dann ergibt sich

$$EI\, y'(x) = \frac{M_B x^2}{2l} + C_1. \qquad (14)$$

Bei einer nochmaligen Integration folgt in der gleichen Weise

$$EI\, y(x) = \frac{M_B x^3}{6l} + C_1 x + C_2. \qquad (15)$$

Hierbei sind C_1 und C_2 willkürliche Integrationskonstanten.
Diese Konstanten werden durch die beiden Randbedingungen

$$y(0) = 0,\; y(l) = 0 \qquad (16)$$

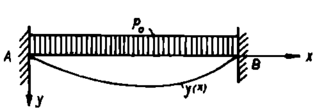
festgelegt. Die Randbedingungen (16) besagen, daß der Träger an seinen Enden A und B starr gelagert ist und somit die Durchbiegungen dort Null sein müssen.
Aus (15) folgt für $x=0$ die Beziehung $C_2 = 0$ und für $x = l$ die Gleichung $C_1 = -\frac{M_B l}{6}$. Damit lautet die Durchbiegung

$$y(x) = -\frac{M_B l^2}{6\,EI}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \qquad (17)$$

Die Biegelinie $y(x)$ des Trägers infolge der Momentenbelastung M_B bei B entsprechend Formel (17) ist ebenfalls in Bild 6 eingezeichnet.
Wir haben mit (17) die Lösung der Differentialgleichung (13) mit den Randbedingungen (16) erhalten. Die Aufgabe, eine Differentialgleichung unter Beachtung gewisser Randbedingungen zu lösen, d. h., diejenige Funktion zu bestimmen, die sowohl der Differentialgleichung als auch den Randbedingungen genügt, heißt Randwertproblem. Solche Randwertprobleme sind auch bei anderen Lagerungsbedingungen an den Trägerenden (Randbedingungen) und anderen Biegemomentenverteilungen (Belastungen) zu lösen. So lautet z. B. die Durchbiegung für einen beiderseits fest eingespannten Träger, der über seine Länge l hin mit einer konstanten Streckenlast $p(x) = p_0 = \text{const.}$ (gemessen in Nm^{-1}) belastet ist (Bild 7):

$$y(x) = -\frac{p_0 l^4}{24\,EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right). \qquad (18)$$

Bild 7



Die zugehörige Biegemomentenverteilung ergibt sich nach (11) zu

$$M(x) = EI y''(x)$$
$$= -\frac{p_0 l^2}{24}\left(2 - 12\frac{x}{l} + 12\frac{x^2}{l^2}\right) \qquad (19)$$

und die Einspannmomente an den Lagerstellen

$$M_A = M(0) = -\frac{p_0 l^2}{12},$$
$$M_B = M(l) = -\frac{p_0 l^2}{12}. \qquad (20)$$

Wir wollen noch kurz auf die Bedeutung der 1. Ableitung $y'(x)$ von $y(x)$ eingehen. Bekanntlich ist $y'(x)$ der Anstieg der Tangente an die Kurve $y(x)$ im Punkt x, d. h., wenn $\phi(x)$ der Tangentenwinkel in x ist (Bild 6), so gilt

$$y'(x) = \tan\phi(x) \approx \phi(x). \qquad (21)$$

In der letzten Beziehung wurde $\tan\phi(x)$ annähernd durch $\phi(x)$ ersetzt. Das ist bei den von uns angenommenen kleinen Durchbiegungen und damit auch kleinen Tangentenwinkeln möglich, da für kleine Winkel der Wert des Tangens mit dem Winkelwert fast übereinstimmt. Im Rahmen der vorausgesetzten Näherung wird das Zeichen $\approx$ im folgenden durch das Gleichheitszeichen $=$ ersetzt.
Für das Randwertproblem (13), (16) entsprechend Bild 6 ergibt sich unter Beachtung dieser Bemerkungen aus (17) durch Differentiation

$$\phi(x) = y'(x) = -\frac{M_B l}{6EI}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right).$$

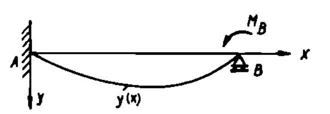
Uns interessiert insbesondere der Tangentenwinkel am Lager B (Drehwinkel infolge des Drehmoments M_B). Er ergibt sich für $x = l$ zu $\phi(l) = \phi_B = \frac{M_B l}{3EI}$. Der Quotient von Drehmoment M_B und Drehwinkel ϕ_B, also

$$c_B := \frac{M_B}{\phi_B} = \frac{3EI}{l} \text{ (Lager } A \qquad (22)$$
gelenkig gelagert)

heißt Drehfederkonstante des bei A gelenkig gelagerten Trägers. Sie ist ein Maß für die Steifheit des Trägers am Lager B.
Ähnlich kann man für den bei A fest eingespannten Träger (Bild 8) eine solche Drehfederkonstante errechnen; man erhält

$$c_B = \frac{M_B}{\phi_B} = \frac{4EI}{l} \text{ (Lager } A \qquad (23)$$
fest eingespannt).

Bild 8

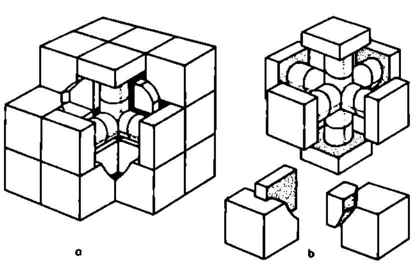


Die Drehfederkonstanten für einen bei A drehelastisch eingespannten Träger liegen zwischen diesen beiden durch (22) und (23) bestimmten Werten. Je stärker die drehelastische Einspannung des Trägers bei A ist, um so steifer ist der Träger am Lager B.

H.-W. Stolle

Der Beitrag wird in Heft 4/83 fortgesetzt.

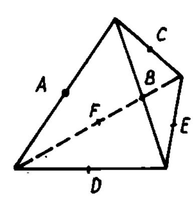
Blick in das Innere des Rubik-Würfels



Das magische Figuren-Match

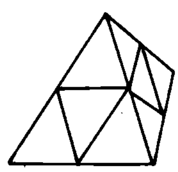
Viele *alpha*-Leser werden sicher mit großer Freude bemerkt haben, daß es inzwischen auch das erste in der DDR produzierte logisch-kombinatorische Spiel gibt. Es handelt sich um ein kleines Tetraeder, das aber nicht parallel zu den Seitenflächen geschnitten ist wie etwa die in *alpha* 1/83 beschriebene magische Pyramide. Auch zur Unterscheidung benutzen wir hier für dieses Spiel die offizielle Bezeichnung *Figuren-Match*.
(Hersteller: VEB Spielwaren-Mechanik Pfaffschwende, Preis 12,– M)
Betrachten wir ein regelmäßiges Tetraeder und bezeichnen die Kantenmittelpunkte mit A, B, C, D, E und F, so beschreiben jeweils die 4 Punkte $ABEF$, $ACED$ und $BCDF$ eine Ebene. Diese drei Ebenen stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Bild 1



Übrigens sind diese Schnitte gerade Quadrate. Um die Mittelsenkrechten dieser Quadrate als Drehachsen kann man jeweils die beiden Teile des Tetraeders zueinander verdrehen, die durch das entsprechende Quadrat begrenzt werden. Wir haben also 3 Drehachsen und können um jede Drehachse 90°-Drehungen (und Vielfache davon) ausführen. Insgesamt besteht das Figuren-Match aus 8 Teilen: 4 Spitzen (3 farbige Seitenflächen) und 4 Mitten (1 farbige Seitenfläche).

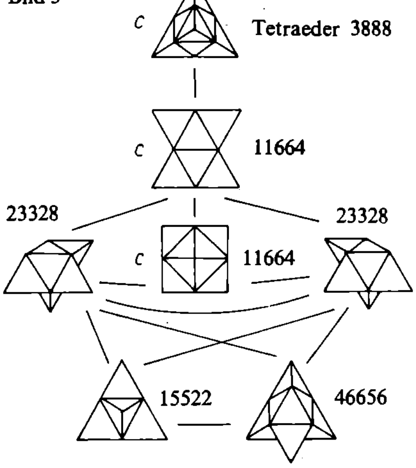
Bild 2



In der Grundstellung sind nun die Seitenflächen des Tetraeders einfarbig (rot, grün, gelb, weiß) gefärbt. (Inzwischen existieren auch Tetraeder mit rot, gelb, weiß und blau.)
Interessant ist nun, daß bei 90°-Drehungen aus dem Tetraeder auch andere Figuren entstehen.
Wir wollen zunächst untersuchen, welche Figuren entstehen und welche durch nur eine

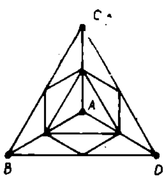
Drehung ineinander überführbar sind. Die Zahlen geben jeweils an, wie viele Möglichkeiten es gibt, die entsprechende Figur durch Drehungen zu färben.
Bemerkenswert ist auch, daß hier alle theoretischen Färbungen (Zusammensetzungen der Figur durch die gegebenen Teile) realisierbar sind. Wir erinnern, daß man bei der magischen Pyramide (*alpha* 1/83) z.B. zwei Kantensteine nicht austauschen kann.
Durchweg wollen wir die Tetraeder und Figuren immer als Draufsicht darstellen.

Bild 3



Insgesamt gibt es 136080 Möglichkeiten, das Tetraeder zu verdrehen. Dem Anfänger wird es zuerst sogar etwas Mühe machen, aus einer beliebigen Figur ein Tetraeder zu erreichen. Auch wenn es vergleichsweise hier nur wenig Möglichkeiten gibt, sollte man das Problem nicht unterschätzen. Durch die ungewohnten Schnitte (nicht parallel zu den Seitenflächen) verliert man hier leichter die Übersicht als etwa bei der *magischen Pyramide*. Dennoch wird es uns mit dem dort beschriebenen Grundprinzip auch hier gelingen, einen Algorithmus zu entwickeln.
Wir wollen uns hier nur überlegen, wie man ein verdrehtes Tetraeder ordnen kann. Hat man eine andere Figur, so kann man ja nach obiger Übersicht mit maximal 3 Drehungen ein Tetraeder erhalten.
Zunächst brauchen wir eine Methode der Beschreibung.
Halten wir z.B. das Teil mit der Kante *BC* fest und drehen das mit der Kante *AD* nach rechts, so erreichen wir dieselbe Verdrehung, als wenn wir *AD* festhalten und *BC* nach rechts drehen würden.

Bild 4



Nach dieser Überlegung können wir uns auf Drehungen beschränken, bei denen wir die Spitze bei *A* festhalten und jeweils Teile mit den Kanten *BD*, *DC* und *BC* drehen.

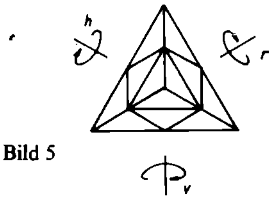


Bild 5

Die Drehungen um 90° bezeichnen wir mit v, r und l, wobei wir darunter immer Drehungen in Uhrzeigerrichtung (beim Draufschauen) verstehen wollen. Drehungen um 180° bezeichnen wir mit v^2, r^2 und l^2 und um 90° links herum mit v^{-1}, r^{-1} und l^{-1}. vr bedeutet dann einfach die Hintereinanderausführung der Drehungen v und r (in dieser Reihenfolge). Auch sei noch erinnert, daß die umgekehrte (inverse) Operation, d.h. die, die genau das Umgekehrte bewirkt, mit z.B. $(vl)^{-1}$ bezeichnet wird und für die gilt $(vl)^{-1}=l^{-1}v^{-1}$, d.h., die Reihenfolge der Operationen und die einzelnen Drehrichtungen sind umzukehren.
Nach diesen Vorbemerkungen können wir darangehen, einen Algorithmus zum Ordnen des Tetraeders zu beschreiben. Auch hier werden wir schrittweise vorgehen. Zunächst wählen wir eine Spitze aus, die wir als obere Spitze des Tetraeders ständig festhalten werden. Entscheiden wir uns etwa für die Spitze mit den Farben rot, gelb und grün, so halten wir das Tetraeder so, daß diese Spitze oben und seine rote Fläche vorn ist. Dann ist zwangsläufig (zumindestens beim Exemplar des Autors) die hintere rechte Fläche der Spitze gelb und die hintere linke grün gefärbt. Für alle anderen sieben Teile wissen wir nun auch, wo sie in der Grundstellung sein müssen. Zum Beispiel muß unten vorne rechts die Spitze mit den Farben rot, gelb und weiß auftreten.
Wir ordnen das Tetraeder in 3 Schritten.

1. Spitzen-Platz
Durch die Drehung v können wir z.B. die beiden Spitzen vorne unten austauschen. Durch nur 2 geeignete Drehungen können wir die 3 unteren Spitzen auf ihre richtigen Plätze bringen. Man beachte, daß die Orientierung der Spitzen noch falsch sein kann.

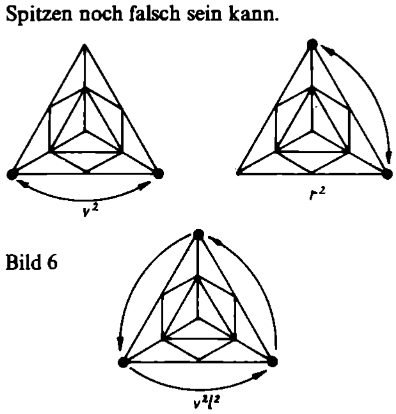


Bild 6

2. Spitzen-Orientierung
Wir drehen die Spitzen auf ihren Plätzen. Dafür geben wir einige Operationen an, die dieses Ziel (bei geeigneter Anwendung) mit höchstens 6 Drehungen erreicht. Die Buchstaben *R* und *L* geben an, wie die Spitzen auf ihren Plätzen gedreht werden. *R* bedeutet 120° nach rechts, *L* 120° nach links, wenn man jeweils von oben auf die Spitze schaut, so daß alle 3 Farben sichtbar sind.

Bild 7a $v^{-1}lv^2rl^{-1}$

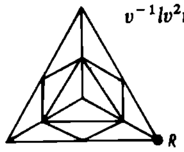


Bild 7b $l^{-1}v^{-1}r^2v^2rl$

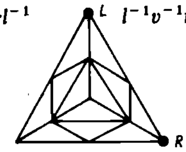


Bild 7c $r^{-1}v^2r^2vl^2$

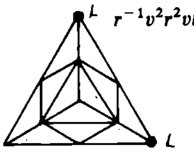


Bild 7d $l^2r^{-1}lr^2vr$

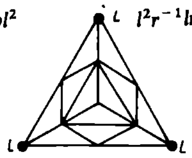
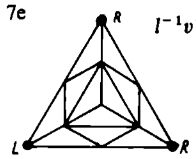


Bild 7e $l^{-1}v^{-1}l^2rv^2r$



3. Mitten
Jetzt bringen wir die Mitten auf ihre Plätze, wobei das bisher Erreichte nicht mehr zerstört werden darf. Wir geben einige Operationen an, die dieses Ziel mit höchstens 8 Drehungen erreicht. Eventuell muß man das Tetraeder in der Hand drehen, um eine Situation zu erreichen, die durch eine Operation realisiert wird. Der Punkt außerhalb bezeichne die nicht sichtbare, untere Mitte.

Bild 8a $l^{-1}r^2vr^2l^{-1}r^2l^2v^2$

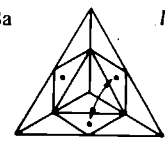


Bild 8b $r^{-1}l^2rvlv^{-1}l^{-1}v^2$

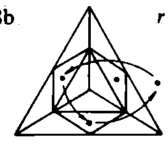


Bild 8c $l^2v^2r^2v^2$

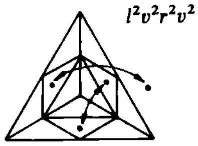
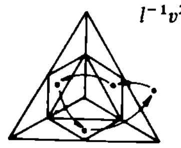


Bild 8d $l^{-1}v^2rv^2l$



Damit haben wir das Ziel bereits mit höchstens 16 Drehungen erreicht. Neuste Computer-Untersuchungen des Autors zeigen, daß man bei optimalem Vorgehen stets mit 10 Drehungen auskommt. Sicher werden viele *alpha*-Leser andere und auch kürzere Operationen gefunden haben oder finden. Für interessante neue Operationen, Fragen und Hinweise ist der Autor stets dankbar.

H.-D. Gronau

Karl Marx und seine „Mathematischen Manuskripte“

Wir alle kennen Karl Marx als Ökonomen, Philosophen und leidenschaftlichen Streiter für das Glück der Menschen. Weniger bekannt ist, ein wie tiefes Interesse er auch für die Mathematik hatte. Anhand seiner umfangreichen Notizen und Ausarbeitungen (fast 300 Seiten sind als „Mathematische Manuskripte“ 1968 in Moskau veröffentlicht worden) können wir verfolgen, wie mühsam, konsequent und enthusiastisch er sich sein hohes Wissen in dieser Wissenschaft erarbeitete.
Auch auf Gebieten der Mathematik, z. B. in der Differentialrechnung, war er bestrebt, bis zum Wesen vorzudringen. „Es muß also der Witz – das Geheimnis – aufgesucht werden, das in der von uns angewandten Methode liegt“ (S. 464). In der damaligen Darstellungsweise und Begründung war die Differentialrechnung bei weitem nicht so einfach wie heute zu verstehen. Speziell beim *Taylorschen Lehrsatz*[1]), durch den der Wert der Funktion an einer bestimmten Stelle näherungsweise mittels höherer Ableitungen an einer benachbarten Stelle beschrieben wird, lesen wir „und es ist hier wie überall wichtig, der Wissenschaft den Schleier des Geheimnisvollen abzureißen“ (S. 192).
Für Marx bedeutete die geistige Auseinandersetzung mit der Differentialrechnung nicht nur ein Eindringen in die damalige Wissenschaft Mathematik, sondern auch einen Rückblick in die Geschichte der Mathematik.
Marx las zahlreiche mathematische Schriften und Lehrbücher. Dabei war es für ihn von großem Nutzen, daß er mehrere Sprachen beherrschte. In seinen Heften führte er seitenlange Rechnungen durch, die er z. T. ausführlich in Worten beschrieb, und auch viele Überlegungen, die ihm dabei durch den Kopf gingen, notierte er – in einer manchmal recht bildhaften Sprache. Beispielsweise schrieb sich Marx einmal auf „sobald h die Höllenfahrt durch 0 passiert hat“ (S. 150), wo wir heute kurz sagen „h konvergiert gegen 0“ und uns noch kürzer aufschreiben könnten „$h \to 0$“[2]).
Der fundamentale Begriff des Grenzwertes bereitete damals noch Schwierigkeiten. Das übliche recht verschwommene Gerede über „unendlich klein“ gefiel Marx gar nicht, er mußte sich näher mit der Sache befassen. Das beim Differentiationsprozeß anschaulich auftretende „$\frac{0}{0}$“[3]) war ein grundlegendes Problem, nämlich noch ein „transzendentales oder symbolisches Unglück“, es „hat aber seine Schrecken bereits verloren, da es nun nur als Ausdruck eines Prozesses erscheint (S. 36).
Mit Grenzprozessen hat man es schon im täglichen Leben zu tun. Auch im Altertum beschäftigten Grenzbetrachtungen schon Mathematiker und Philosophen. Man hatte aber immer Schwierigkeiten, mit ihnen so richtig fertigzuwerden.
Newton und Leibniz gelten bekanntlich als die Väter der Differentialrechnung (die aber auch viele Vorväter hatte). Sie schufen, insbesondere auch ausgehend von Problemen der Mechanik und der Geometrie, unabhängig voneinander, einen geeigneten Kalkül, eine „spezifische Rechnungsart, die bereits selbständig auf ihrem eignen Boden operiert“ (S. 56). Dennoch konnte Marx zu Recht noch vom „mystischen Differentialcalculus“ (z. B. S. 164) sprechen. Bis zu der in den heutigen Lehrbüchern üblichen Darstellung war noch ein weiter Weg zurückzulegen. Marx selbst hob die Bedeutung einer für das Denken bequemen Bezeichnungsweise mehrfach hervor. In einem Konspekt über Algebra schrieb er bzgl. des Wurzelzeichens „Das Ersetzen dieser Notation durch die von fractional Exponents – großes Verdienst von Descartes – erleichtert alles durch ihre Analogie mit ganzen Exponenten und macht auf sie anwendbar die in den Berechnungen der letzten angewandten Regeln“ (S. 338).
Seine ausführlichen Notizen halfen Marx nicht nur, seine eigenen Gedanken nicht wieder zu vergessen, sondern auch sein Gesprächspartner Engels konnte so den Gedankengängen von Marx gut folgen. 1881 fertigte er für Engels eine Ausarbeitung über den Begriff der abgeleiteten Funktion an (S. 28 bis 45). „Gestern also endlich hab' ich mir die Courage gefaßt, auch ohne Hilfsbücher Deine mathematischen Manuskripte durchzustudieren, und war froh zu sehen, daß ich die Bücher nicht nötig hatte. Ich mache Dir mein Kompliment dazu“ (Brief von Engels an Marx, 18. 8. 1881). Auch Engels befaßte sich so ernsthaft mit dem Differentialquotienten, daß er sich selbst im Schlaf nicht davon losreißen konnte: „Die Sache hat mich so erfaßt, daß sie mir nicht nur den ganzen Tag im Kopf herumgeht, sondern ich auch vorige Nacht im Traum einem Kerl meine Hemdsknöpfe zum Differenzieren gab und dieser mir damit durchbrannte“ (ebenda).
Mit Engels verständigte sich Marx nicht nur über Mathematik, sondern auch über viele naturwissenschaftliche Fragen. Die Begründer des wissenschaftlichen Kommunismus hielten das für unbedingt erforderlich für ihre philosophischen und ökonomischen Analysen. Im übrigen war für Marx Mathematik auch einfach eine Quelle der Entspannung. Es wird berichtet, daß er zuweilen Kopfschmerzen durch Nachdenken über mathematische Probleme verdrängte.

M. Deweß

Zum Abschluß eine in seinen Notizen mit Lösungsweg dargelegte unterhaltsame Aufgabe (S. 350).

Aufgabe

▲2270▲ 30 Personen, darunter Männer, Frauen und Kinder, geben in einer Kneipe 50 sh. (Schilling) aus. Ein Mann gibt jeweils 3 sh., eine Frau 2 sh. und ein Kind 1 sh. aus. Wieviel Männer, Frauen und Kinder waren in der Kneipe?

[1]) Er wurde von Taylor (J. Brook) (1685 bis 1731) längst nicht in der heute üblichen Form aufgestellt. Genaue Restgliedeuntersuchungen spielten erst später eine Rolle. (Siehe z. B. *Kleine Enzyklopädie* Mathematik, VEB Bibliographisches Institut)
[2]) Siehe z. B. *Kleine Enzyklopädie* Mathematik, S. 414ff. oder auch S. 408.
[2]) Der Pfeil → wurde nachweislich 1905 von John Gaston Leathem in diesem Sinne benutzt.
[3]) Wer z. B. über Descartes, Newton oder Leibniz mehr erfahren möchte, dem seien die „Biographien bedeutender Mathematiker“, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1975, empfohlen.

Aphorismen

Das Zeugnis

Daß Karl Marx trotz allen Arbeitsaufwandes und aller Mühen nicht zu den besten Schülern unter den Abgängern gehörte, bewies sein Zeugnis. Die Mutter betrachtet es mit einigem Mißbehagen. „Und dabei hast du so viel gelesen, armer Bub“, klagte sie.
„Ach was, Mutter, ich will die Welt nicht mit dem Zirkel ausmessen, und für die Gleichungen mit zwei Unbekannten suche ich mir geeignetere Objekte.“

Die gelehrten Bücher

Kurz vor seiner Abiturientenprüfung glich Karl Marx' Klause einem einzigen Lesesaal. Alle Möbelstücke, Tisch, Stühle und die Lagerstatt waren mit aufgeschlagenen Büchern bedeckt, als hätte er sie alle gleichzeitig gelesen. Die Mutter wußte nicht, wohin sie die Tasse Kaffee stellen sollte. „Karl, mein Junge, überall Bücher, nichts als Bücher. Wird dir nicht manchmal schwindlig von dem ganzen gelehrten Zeug?" fragte sie bewundernd. „Wenn man ihre Irrtümer und Fehler kennt, verliert man den Respekt vor ihnen", antwortete Karl seelenruhig.

Blindekuh

Zur Abiturientenfeier im Hause des Geheimrats von Westfalen waren die ausgezeichnetsten Persönlichkeiten der Stadt erschienen. Während sich jedoch die Älteren bei Spiel und Unterhaltung vergnügten, hatte sich die Jugend zum Blindekuhspiel zurückgezogen. Dabei wurden auch Karl die Augen verbunden. Etwas ungeschickt versuchte er Jennys Hand zu ergreifen, aber sie entglitt ihm immer wieder. Endlich wurde es ihm zu viel. Er riß sich die Binde von den Augen und rief: „Warum soll ich blind nach etwas suchen, was ich besser mit offenen Augen erobern kann." Damit ergriff er entschlossen nach Jennys Hand. In dem anschließenden Gespräch gestand Karl dem Mädchen seine kühnen Pläne. „Die Wissenschaft ist ohne Grund und Ende. Und tausend Wege führen zur Wahrheit. Ich will sie alle finden."
„Das werden Sie", bestätigte Jenny. „Sie leiden keine Binde vor den Augen wie die meisten Sucher."

Georg W. Pijet

Karl Marx – seine Töchter nannten ihn nicht „Vater", sondern „Mohr", ein Spitzname, den er wegen seines braunen Teints und seines ebenholzschwarzen Haupt- und Barthaares erhalten hatte (nach einer Zeichnung von Nabil El-Solami).

Eulers Beweis für die Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen

Die Fermatsche Vermutung, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2)$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt, wurde für den Fall $n = 3$ zuerst von Leonhard Euler bewiesen. (Siehe den Beitrag: „Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung" in *alpha*, Heft 2/1983, wo auch einige allgemeine Bemerkungen zur Beweismethode stehen.) Sein Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen soll hier in der Originalform aus der 1770 in Petersburg erschienenen *Vollständigen Anleitung zur Algebra* wiedergegeben werden. Der veraltete sprachliche Ausdruck ist nicht modernisiert worden. Als Grundlage dient der Abdruck der „Algebra" im ersten Band (1911) von Eulers Werkausgabe. In eckigen Klammern werden Anmerkungen hinzugefügt, die das Verstehen des Beweises erleichtern sollen.

Eulers Beweis

Aus: Leonhard Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra.* (Petersburg 1770.) In: Leonhardi Euleri Opera Omnia (1) 1 (1911).

Lehr-Satz: Es ist nicht möglich zwey Cubos [Kubikzahlen] zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus [eine Kubikzahl] wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemercken, daß wann [wenn] die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müße. Dann wann es unmöglich ist daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3 - y^3 = x^3$, nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz von zwey Cubis. Es ist also genung die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich [teilerfremd] sind. Dann wann [Denn wenn] sie einen gemeinen [gemeinsamen] Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum deßelben theilen laßen. Wäre z. E. $x = 2a$, und $y = 2b$ so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun x und y keinen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerad, oder die eine gerad, und die andere ungerad. Im erstern Falle müßte z gerad seyn; im andern Fall aber müßte z ungerad seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerad und eine gerad. Wir wollen dahero zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wann die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen demnach x und y zwey ungerade [natürliche] Zahlen, so wird so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn. [Es sei etwa $x > y$. Ist $x < y$, so vertausche man x und y. Der Fall $x = y$ ist unmöglich. Da x und y teilerfremd sind, müßte $x = y = 1$ sein, also $z^3 = 2$, was mit natürlicher Zahl z unmöglich ist.] Man setze dahero $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$ [mit natürlichen Zahlen p und q], so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß; dahero aber wird $x^3 + y^3 = [(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ $= 2p((p+q)^2 - (p+q)(p-q) + (p-q)^2)$ $= 2p(p^2 + 3q^2) =]$ $2p(pp + 3qq)$:
es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp + 3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3$ $= 2q(qq + 3pp)$, welche Formel der vorigen gantz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, dahero es genung ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp + 3qq)$ [= Kubikzahl] zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp + 3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerad und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine gantze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(pp + 3qq)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad ist, so wird $pp + 3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich p durch 4 theilen laßen müße und also $\frac{p}{4}$ eine gantze Zahl sey.

V. Wann [Wenn] nun dieses Product $\frac{p}{4} \cdot (pp+3qq)\left[\frac{p}{4}(p^2+3q^2)\right]$ ein Cubus [eine Kubikzahl] seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$, ein Cubus seyn, so nemlich dieselben keinen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben. Dann wann ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar [teilerfremd] sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wann dieselben aber einen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp+3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen [gemeinsamen] Theiler, so würden auch diese pp und $pp+3qq$ eben denselben gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, und also auch ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben; da nun p und q unter sich untheilbar [teilerfremd] sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wann [wenn] sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben dahero zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wann die Factoren p und $pp+3qq$ $[p^2+3q^2]$ keinen gemeinen [gemeinsamen] Theiler haben, welches immer geschieht, wann sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt, da dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwei Fälle müßen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$ untheilbar unter sich [teilerfremd], so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns dahero $pp+3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wann man, wie oben gezeigt worden, setzt

$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ und

$p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$.

Damit dadurch werde $pp+3qq=(tt+3uu)^3$ und also ein Cubus. [Euler benutzt hier den folgenden Hilfssatz. (Erst am Schluß des Beweises soll auf ihn eingegangen werden.)

Satz A: Sind p und q teilerfremde natürliche Zahlen und ist

$p^2+3q^2(=(p+q\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3}))$

eine Kubikzahl, so gilt

$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ und

$p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$

mit natürlichen Zahlen t, u.

Aus dem Satz A ergibt sich die angegebene Darstellung von p^2+3q^2 als Kubikzahl:

$$(p+q\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3})=p^2-(q\sqrt{-3})^2$$
$$=p^2+3q^2=(t+u\sqrt{-3})^3(t-u\sqrt{-3})^3$$
$$=((t+u\sqrt{-3})(t-u\sqrt{-3}))^3=(t^2+3u^2)^3.$$

Es gilt also der

Satz B: Ist p^2+3q^2 eine Kubikzahl, so gibt es natürliche Zahlen t, u so, daß $p^2+3q^2=(t^2+3u^2)^3$.]

Hieraus aber wird

$p=t^3-9tuu=t(tt-9uu)$ und

$q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu)$.

[In der Tat, aus

$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ (Satz A), also

$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3}\,t+u\sqrt{-3})^2$$
$$=(t+u\sqrt{-3})(t^2+2tu\sqrt{-3}-3u^2)$$
$$=t^3+3t^2u\sqrt{-3}+3tu^2(-3)+u^3(-3)\sqrt{-3}$$
$$=(t^3-9tu^2)+(3t^2u-3u^3)\sqrt{-3}$$

folgt durch Vergleich beider Seiten

$p=t^3-9tu^2$, $q=3t^2u-3u^3$.

(Für das Rechnen mit Zahlen der Form $t+u\sqrt{-3}$ sei auf das folgende Buch verwiesen: H. Pieper, Die komplexen Zahlen. Theorie – Praxis – Geschichte. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. – Mathematische Schülerbücherei Nr. 110.)

Es gilt also der

Satz C: Es seien t, u natürliche Zahlen. Aus

$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3 \text{ folgt}$$
$$p=t^3-9tu^2,\ q=3t^2u-3u^3.$$

Zusammen mit dem Satz A bedeutet dies den Satz D: Ist p^2+3q^2 (mit teilerfremden p, q) eine Kubikzahl, so gibt es natürliche Zahlen t, u so, daß $p=t^3-9tu^2$, $q=3t^2u-3u^3$.]

Weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerad, t aber gerad seyn, weil sonsten $tt-uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp+3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden

$$p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u),$$

so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; dahero diese Formel $2t(t+3u)\cdot(t-3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemercken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonsten auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist.

[Da t gerade und u ungerade ist, sind $t+3u$ und $t-3u$ beide ungerade. Ein gemeinsamer Teiler d von $2t$, $t+3u$ und $t-3u$ wäre auch gemeinsamer Teiler von t, $t+3u$ und $t-3u$, also auch gemeinsamer Teiler von t, $3u=(t+3u)-t$, $-3u=(t-3u)-t$. Es kommt höchstens $d=3$ in Frage. Aber 3 ist kein Teiler von t; folglich ist $d=1$. Ein gemeinsamer Teiler e von $t+3u$ und $t-3u$ ist auch Teiler von $2t=t+3u+t-3u$, woraus wieder $e=1$ folgt.]

Also sind diese drey Factoren $2t$, $t+3u$ und $t-3u$ unter sich untheilbar [teilerfremd], und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$ so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus $[2t=h^3]$, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre $[f^3+g^3=h^3]$, welche offenbahr ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Dann nachdem wir gesetzt haben $x=p+q$ und $y=p-q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müßen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wann es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleineren Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summ auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewis nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir so gleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p=3r$ so wird unsere Formel $\left[\frac{p}{4}(p^2+3q^2)=\right]$

$$\frac{3r}{4}\cdot(9rr+3qq),\text{ oder }\frac{9}{4}r(3rr+qq),$$

welche beyde Factoren unter sich untheilbar [teilerfremd] sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben so wohl gerad seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q=t(tt-9uu)$ und $r=3u(tt-uu)$; wo zu mercken, daß weil q ungerad war, hier auch t ungerad, u aber eine gerade Zahl seyn müße.

[Hier wird noch einmal der Satz A benutzt. Sind q und r teilerfremde natürliche Zahlen und ist $q^2+3r^2(=(q+r\sqrt{-3})(q-r\sqrt{-3}))$ eine Kubikzahl, so gilt

$q+r\sqrt{-3})^3=(t+u\sqrt{-3})^3$ und $q-r\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$ mit natürlichen Zahlen t und u.

Hieraus folgt (wie oben)

$q+r\sqrt{-3}=(t^3-9tu^2)+(3t^2u-3u^3)\sqrt{-3}$

und daraus durch Vergleich beider Seiten

$q=t^3-9tu^2=t(t^2-9u^2)$,

$r=3t^2u-3u^3=3u(t^2-u^2)$.]

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar [teilerfremd] und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wann man aber setzt $t+u=f^3$ und $t-u=g^3$, so folgt daraus $2u=f^3-g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre; dann man darf nur setzen $f^3-g^3=h^3$, so wird $f^3=h^3+g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

Der Hilfssatz

Im Teil VII des Beweises wird zunächst festgestellt, daß p^2+3q^2 eine Kubikzahl (ein Cubus) sein müßte. Dann heißt es weiter, daß p^2+3q^2 zu einem Cubus gemacht werden soll. Aus früheren Ausführungen Eulers kann man schließen, daß Euler folgendes meint: „Wir wollen p und q suchen, für die p^2+3q^2 Cubus ist." Hier gilt sicher

Satz E: Setzt man $p=t^3-9tu^2$, $q=3t^2u-3u^2$ mit gewissen natürlichen Zahlen t, u, so wird $p^2+3q^2=(t^2+3u^2)^3$ ein Cubus.

Um dies einzusehen, brauchen wir die folgende (leicht nachzuprüfende) Identität:

$(t^2+3u^2)(v^2+3w^2)=(tv-3uw)^2+3(tw-uv)^2$.

(Das Produkt von Zahlen der Form t^2+3u^2 ist wieder von dieser Form!)

Nun ist $(t^2+3u^2)^3=(t^2+3u^2)[(t^2-3u^2)^2+3(2tu)^2]$; unter Benutzung der angegebenen Identität (mit $v=t^2-3u^2$, $w=2tu$) folgt hieraus tatsächlich

$(t^2+3u^2)^3=[t(t^2-3u^2)-3u(2tu)]^2$
$+3[t(2tu)+u(t^2-3u^2)]^2=(t^3-9tu^2)^2$
$+3(3t^2u-3u^2)=p^2+3q^2$,

was zu zeigen war.

Daß auf die im Satz E gegebene Weise sogar alle teilerfremden p, q erfaßt werden, für die p^2+3q^2 Cubus ist, besagt der oben angegebene

Satz D: Ist p^2+3q^2 eine Kubikzahl (mit teilerfremden p, q), so gibt es natürliche Zahlen t, u so, daß $p=t^3-9tu^2$, $q=3t^2u-3u^3$.

Betrachten wir zusammenfassend die drei wesentlichen hier auftretenden Aussagen (darin seien p und q teilerfremde natürliche Zahlen):

R: Es existieren natürliche Zahlen t, u so, daß
$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3.$$

S: Es existieren natürliche Zahlen t, u so, daß
$$p=t^2-9tu^2,\ q=3t^2u-3u^3.$$

T: p^2+3q^2 ist eine Kubikzahl.

Diese drei Aussagen sind äquivalent (jede folgt aus jeder anderen):

Wenn R, so S. (Satz C; bewiesen.)
Wenn S, so T. (Satz E; bewiesen.)
Wenn T, so R. (Satz A; unbewiesen.)

Der Eulersche Ansatz $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ liefert also *alle* p, q, für die p^2+3q^2 eine Kubikzahl ist. Euler wußte sicher, daß er alle p, q erfaßte, ohne dies ausdrücklich zu erwähnen.

Er schrieb nur: „Laßt uns dahero p^2+3q^2 zu einem Cubo machen [wir wollen p und q suchen, für die p^2+3q^2 Cubus ist], welches [vollständig] geschieht, wenn man, wie oben gezeigt worden, setzt $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ und $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$." (Das Adverb „vollständig" fehlt bei Euler.)

Der folgende Satz: „Damit dadurch werde $p^2+3q^2=(t^2+3u^2)^3$ und also ein Cubus", also Satz B, ist für den weiteren Gedankengang überflüssig.

Unklar bleibt Eulers Hinweis: „wie oben gezeigt worden".

Vorangegangene Artikel der Algebra, auf die sich dieser Hinweis bezieht, werden nicht genannt und lassen sich (wie G. Bergmann 1965 analysierte) auch nicht finden. An dieser Stelle ist Eulers Algebralehrbuch unvollständig.

Von den vier Sätzen, Satz A (wenn T, so R), Satz C (wenn R, so S), Satz E (wenn S, so T), Satz D (wenn T, so S) sind bisher nur die Sätze C und E bewiesen. Satz A ist unbewiesen. Ist Satz A bewiesen, so auch Satz D. Der Satz D ist der entscheidende Satz in der Eulerschen Beweiskette. Es gibt somit zwei Möglichkeiten:

I. Es wird der Satz D direkt bewiesen (was elementar möglich ist).
II. Es wird der Satz A bewiesen; aus dem Satz A folgt der Satz D.

Euler benutzte offenbar den Satz A, machte also einen „Umweg" über Summen der Form $t+u\sqrt{-3}$. (Hier wurden erstmals komplexe Zahlen in der Zahlentheorie benutzt!)

Wir bezeichnen mit M die Menge aller Zahlen der Form $t+u\sqrt{-3}$ (t, u ganze Zahlen). In M gelten einige analoge Eigenschaften, wie in der Menge N der natürlichen Zahlen. Die Summe zweier Zahlen aus M ist offenbar wieder eine Zahl aus M.

Das Produkt zweier Zahlen aus M ist wieder eine Zahl aus M:

$(t+u\sqrt{-3})(v+w\sqrt{-3})$
$=(tv-3tw)+(tw+uv)\sqrt{-3}$.

Eine im Beweis mehrmals benutzte Eigenschaft natürlicher Zahlen ist die folgende:

(K) Das Produkt aus zwei teilerfremden natürlichen Zahlen ist nur dann eine Kubikzahl, wenn jede der beiden Zahlen Kubikzahlen sind.

Die analoge Eigenschaft für Zahlen aus M wäre:

(K') Das Produkt aus zwei „teilerfremden" Zahlen aus M ist nur dann eine Kubikzahl, wenn jede der beiden Zahlen Kubikzahlen in M sind.

Wäre diese Eigenschaft richtig, so könnte man wie folgt weiter schließen: $p^2+3q^2=(p+q\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3})$ ist nach Voraussetzung eine Kubikzahl in $N\subset M$; besitzen $p+q\sqrt{-3}$ und $p-q\sqrt{-3}$ keinen gemeinsamen „Teiler" in M, so müssen $p+q\sqrt{-3}$ und $p-q\sqrt{-3}$ Kubikzahlen in M sein:

$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3,$$
$$p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3.$$

Vielleicht ist hier das Motiv für Eulers Übergang zu den komplexen Zahlen zu suchen! Doch ein Analogieschluß ist kein Beweis!

Für den Beweis von (K) benutzt man den Satz, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig (das ist wichtig!) als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.

(Einen Beweis dieses Satzes findet man z. B. in: H. Pieper, Zahlen aus Primzahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Schülerbücherei Nr. 81, 1. Kapitel.)

In der Menge M gilt eine analoge Eigenschaft nicht; die Zerlegung in „unzerlegbare Zahlen" („Primzahlen") aus M ist nicht eindeutig! Beispielsweise gilt $4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$, worin (wie man zeigen kann) 2, $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$ in M unzerlegbare Zahlen („Primzahlen") sind.

Und doch ist der Satz A richtig. In einer 1763 gedruckten Arbeit bewies Euler Sätze über Zahlen der Form p^2+3q^2 (mit teilerfremden p, q), aus denen unschwer der Satz A folgt. (Doch darauf kann hier nicht mehr eingegangen werden.)

Es sei noch folgendes bemerkt: Es gibt eine für den Beweis von Satz A geeignete Menge M^* komplexer Zahlen, in der die Zerlegung in „Primzahlen" aus M^* eindeutig ist. Um diese Zahlen zu erklären, werde die Gleichung $x^3-1=0$ betrachtet.

Die Gleichung $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ hat die drei Lösungen $x_1=1$, $x_2=\varrho$, $x_3=\varrho^2$, wobei $\varrho=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\varrho^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ist. Die Menge M^* bestehe nun aus allen (komplexen) Zahlen der Form $a+b\varrho$ (mit ganzen Zahlen a, b). Diese Zahlen wurden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von C. F. Gauß, C. G. J. Jacobi und G. Eisenstein untersucht. Sie werden meist als Eisensteinsche Zahlen bezeichnet.

Jede Zahl $a+b\varrho$ kann dadurch, daß man für ϱ den Wert einsetzt, auf die Form $\frac{t+u\sqrt{-3}}{2}$ gebracht werden (t, u sind darin gleichzeitig gerade bzw. ungerade ganze Zahlen) und umgekehrt. In der Menge M^* ist (wie man beweisen kann) die Zerlegung in „Primzahlen" eindeutig.

Die Zahl 4 kann man in M auf zwei verschiedene Arten in „Primzahlen" zerlegen. In M^* sind die Zahlen $+1$, -1, $\varrho=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, $-\varrho$, $-\varrho^2$ Einheiten (sie entsprechen den Zahlen $+1$, -1 bei den ganzen Zahlen). Die Zerlegung in „Primzahlen" ist in M^* (bis auf Einheiten) eindeutig. Die Zerlegungen $4=2\cdot 2$ und $4=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ sind „dieselben", da sie sich nur um Einheiten als Faktoren unterscheiden:

$1+\sqrt{-3}=2\cdot\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=2\cdot\varrho$,
$1-\sqrt{-3}=2\cdot\varrho^2$.

Kennt man die Arithmetik der Eisensteinschen Zahlen, so ist der Satz A leicht zu beweisen.

Aus Eulers Idee der Ausdehnung der Zahlentheorie auf gewisse (nämlich algebraische) komplexe Zahlen hat sich im 19. Jahrhundert eine neue mathematische Disziplin, die algebraische Zahlentheorie, entwickelt.

H. Pieper

Aufgaben aus der Frühzeit der Mathematik bei Leonhard Euler

Die ältesten überlieferten mathematischen Texte zeigen, daß sehr früh schon neben den von der Praxis der Arbeit, des Bauens, des Lohnes, der Verteilung von Feldern und Nahrungsmitteln, des Handels und des Tausches, des Wiegens und Messens gestellten Problemen sich andere Aufgaben großer Beliebtheit erfreut haben, die wir als mathematische Rätsel oder mathematische Unterhaltungsaufgaben bezeichnen können. Sie sollten, wie ihre Verbreiter gelegentlich ausdrücklich sagten, der *Schärfung des Verstandes* dienen, stellten also eine Art Denksportaufgaben dar. Auch in den dem täglichen Leben entnommenen Aufgaben treten manchmal praxisfremde Bruchteile von Menschen und Tieren oder von Geldstücken auf, aber die Aufgabenstellung selbst ist praxisnahe. Anders bei den Unterhaltungsproblemen – hier entspricht der Einkleidung z. B. bei Verfolgungsaufgaben („Achilles und die Schildkröte“) keine Realität.

Gerade diese Art Aufgaben aber erlaubt es, Schlüsse auf gegenseitige Abhängigkeiten der Aufgabensteller und das *Wandern* der Probleme zu ziehen, während dies bei den von der gesellschaftlichen Praxis, die bei gleichartigen Produktionsverhältnissen gleich oder doch annähernd gleich ist, veranlaßten Problemstellungen selten und nur dann möglich ist, wenn in den Aufgaben gleiche, und zwar nicht zu einfache Zahlenwerte enthalten sind.

Auf welchem Wege sich die dem Training des Geistes dienenden Unterhaltungsaufgaben in der alten Welt verbreitet haben, ob durch Handelskarawanen, durch Reisende, Kriegsgefangene oder Schiffbrüchige, wissen wir im einzelnen nicht. Tatsache ist, daß solche Probleme überall auftauchten und sich erstaunlich lange gehalten haben. Sogar bei *Leonhard Euler* finden wir in seiner zuerst in deutscher Sprache 1770 erschienenen berühmten *Vollständigen Anleitung zur Algebra* (siehe *alpha*-Wettbewerb, Heft 2/83) derartige Beispiele. Jenes Lehrbuch, das in viele Sprachen übersetzt und noch in der Gegenwart neu aufgelegt worden ist, hatte der erblindete *Euler* einem ehemaligen Schneidergesellen ohne wissenschaftliche Vorbildung diktiert, um sich von der Verständlichkeit der Darstellung zu überzeugen. Von *Euler* haben solche Standardaufgaben ihren Weg in viele Rechenbücher bis an unsere Tage heran gefunden und sind so am Leben geblieben.

Das erste von uns hier gebrachte Beispiel wird in der mathematikhistorischen Literatur nach seiner häufigen Einkleidung das *Problem der 100 Vögel* genannt. Zuerst ist es in China im Anfang des 3. Jahrhunderts nachweisbar, danach bei den Indern (3. Jh.), dann gelangte es über die Araber (um 900) nach Europa und Byzanz. In einem byzantinischen Rechenbuch des 15. Jh. findet es sich in folgender Form:

▲1▲ a) Ein Herr sandte seinen Diener aus, er solle ihm Vögel dreierlei Art, Tauben, Turteltauben und Sperlinge kaufen. Es kostete die Taube 4 Weißmünzen, die Turteltaube 2 und von den Sperlingen kamen auf die Weißmünze drei. Und er gab ihm 100 Weißmünzen, daß er 100 Vögel kaufe, weder mehr noch weniger. Ich will wissen, wieviel er von jeder Art kaufen wird.

Euler bringt die Aufgabe im Abschnitt *Von der unbestimmten Analytik* in dieser Fassung:

▲1▲ b) Jemand kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 100 Taler. Nun kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Taler, eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Taler und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Taler. Wie viele sind es von jeder Gattung?

L. Euler (nach J.-G. Brucker, 1737)

Euler behandelte das Problem im Anschluß an *Bachet de Méziriac* (Lyon 1612), der die Ganzzahligkeit der Lösung verlangt hatte.

Eine weitere alte Aufgabe, die wir vorstellen wollen und die zu einer mit *Der Wächter im Apfelgarten* bezeichneten Gruppe gehört, führt *Euler* in seinem Abschnitt *Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung* vor. Wir zitieren zunächst wieder die Fassung in jenem byzantinischen Rechenbuch, weil dort die Aufgabe in *der* Einkleidung gebracht wird, der sie ihre Einordnungsbezeichnung verdankt.

▲2▲ a) Es war ein Mann mitten in einem Garten, und jener Garten hatte vier Tore, und es bestand die Vorschrift, wenn er aus allen den Toren herausgehen wollte, solle er so viele Silberstücke mitnehmen, daß er dann an jedem Tor die Hälfte abgebe und ein halbes Silberstück mehr – damit er kein Silberstück zerteilen müsse – und daß ihm dann, wenn er aus allen den Toren herausgegangen sei, 1 Silberstück übrigbleibe. Wie viele Silberstücke mußte er mitnehmen?

Bei *Euler* findet sich eine entsprechende Aufgabe als Forderung nach Verteilung einer Erbschaft, und er sagte, sie sei „von einer ganz besonderen Art und verdient beachtet zu werden“:

▲2▲ b) Ein Vater hinterläßt einige Kinder und ein Vermögen, das die Kinder in folgender Art unter sich teilen: Das erste nimmt 100 Taler und dazu den zehnten Teil des Restes. Das zweite nimmt 200 Taler und dazu den zehnten Teil des nunmehr erhaltenen Restes. Das dritte nimmt 300 Taler und dazu den zehnten Teil des verbliebenen Restes. Das vierte nimmt 400 Taler und dazu den zehnten Teil des verbliebenen Restes usw. Hierauf stellt sich heraus, daß das ganze Vermögen gleichmäßig verteilt worden ist. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen war, wie viele Kinder der Vater hinterließ und wieviel jedes bekam.

Ob das Erbschaftsproblem zuerst bei den Arabern oder in Europa bzw. in Byzanz gestellt worden ist, läßt sich nicht sagen. Belegt ist indessen, daß die Aufgabe in der *Apfelgarten*- bzw. anderen Einkleidungen zuerst in China (um 250, nach alten Vorlagen), dann in Armenien (um 700) auftrat, danach bei den Indern (um 900) und Arabern (um 1000) gestellt wurde und von den letzteren ihren Weg in die mittelalterlichen Rechenaufgabensammlungen Europas (z. B. *Leonardo Fibonacci von Pisa*, um 1200) und von Byzanz gefunden hat.

Wir haben es also *Euler* zu verdanken, daß die Tradition der Unterhaltungsmathematik mit neuem Leben erfüllt wurde und das unterhaltsame Element des Rätsels mit dem nützlichen Element der Anwendung und Ausbildung mathematischen Wissens verbunden blieb.

K.-R. Biermann

Das Fünfzehnerspiel

In den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts breitete sich in der ganzen Welt ein Geduldsspiel wie eine Seuche aus – etwa so wie heute der *Ungarische Würfel.* Es war das *Fünfzehnerspiel,* in Deutschland damals auch unter dem Namen *Boss Puzzle* bekannt. Ein Zeitgenosse, der Mathematiker H. Schubert, berichtete: „Monatelang bildeten die an dieses Spiel sich anknüpfenden Erörterungen eine stehende Rubrik in Journalen und Zeitungen. Selbst in Straßenbahnwagen konnte man die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen. Unternehmende Wirte luden zu einem Boss-Puzzle-Turnier ein, in welchem ein vom Wirt gestelltes Problem gegen Auszahlung einer hohen Belohnung gelöst werden sollte." Schubert erinnerte sich auch, daß in Hamburg „die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlefieber ihrer Angestellten in Verzweiflung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit aufs strengste verbieten mußten." Bei S. Günther können wir lesen, „daß um 1880 im Deutschen Reichstagssaale auf den Bänken an der Wand Abgeordnete aller Richtungen, darunter würdevolle alte Herren, saßen, die den Rednern gar keine Aufmerksamkeit schenkten, aber eifrig *boss puzzleten.*"

Soll man nun Schlüsse bezüglich der Reden oder mancher Abgeordneten ziehen? In zahlreichen Artikeln wurde das Spiel mathematisch behandelt, vor allem in den Jahren von 1879 bis 1883, wobei besonders Woolsey Johnson und William E. Story sowie H. Schubert zu nennen wären. Wer das Fünfzehnerspiel noch nicht kennen sollte, ist bestimmt neugierig geworden, was für ein Spiel solche Spielleidenschaft hervorgerufen hatte:

Fünfzehn mit den Zahlen von 1 bis 15 versehene Steine S1, ..., S15 werden willkürlich in ein quadratisches Kästchen hineingelegt, so daß ein Feld F frei bleibt. (Die 16 Felder

Bild 1

F1	F2	F3	F4
F5	F6	F7	F8
F9	F10	F11	F12
F13	F14	F15	F16

dieses Kästchens wollen wir entsprechend Bild 1 durchnumerieren.) Lediglich durch Verschieben (nicht Herausnehmen!) der Steine soll nun versucht werden, die Stellung auf Bild 2, die wir Stellung I nennen wollen, zu erreichen: S1 auf F1, S2 auf F2, ..., S15 auf F15, F16 bleibt unbesetzt.

Bild 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Im Sonntagsblatt einer New Yorker Zeitung bot Samuel Loyd, der als Erfinder dieses Spiels gilt, einen Preis von 1000 $ für die Lösung des folgenden Problems an:

Die Stellung II (Bild 3), in der gegenüber der Stellung I nur S14 und S15 vertauscht sind, soll nur durch Verschieben in die Stellung I überführt werden.

Bild 3

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Als der Verleger zögerte, soll sich Loyd ohne weiteres bereit erklärt haben, den Betrag aus seiner eigenen Tasche zu hinterlegen. Tatsächlich gab es auch niemanden, der diesen Preis in Empfang nehmen konnte, „obgleich Tausende von Leuten behaupteten, die gestellte Aufgabe gelöst zu haben. ... Das Geheimnis des Puzzles liegt in der Tatsache, daß sich niemand, der es gelöst hat, nachträglich daran zu erinnern vermag, wie die Lösung zustandegekommen ist. ... Ein bekannter Zeitungsmann aus Baltimore berichtete, daß er mittags sein Büro verließ, um essen zu gehen – und von seinen entsetzten Angestellten lange nach Mitternacht aufgefunden wurde, wie er auf einem Teller kleine Tortenstückchen herumschob."

Wer Lust hat, kann sich ja aus kleinen Pappe-Quadraten ein Fünfzehnerspiel schnell herstellen und es auch einmal versuchen. Oder man nimmt ein handelsübliches *Schiebefax* und versucht es einmal umgekehrt, nämlich aus der Stellung I die Stellung II zu erhalten. Nach einigem Probieren kommt ihr bestimmt zu dem Schluß, daß hier gilt: Studieren geht über Probieren! Immerhin gibt es mehr als 1 Billion Möglichkeiten

(15! = 1307674368000),

die 15 Steine im Kästchen so anzuordnen, daß F16 leer ist, und mehr als 20 Billionen

(16! = 20922789888000)

Möglichkeiten gibt es, die Steine im Kästchen zu verteilen, wenn es keine Rolle spielt, wo sich das Leerfeld befindet. (Wenn wir annehmen, daß das Verschieben in eine neue Stellung zwei Sekunden dauert, dann müßten wir mehr als 1 Million Jahre ohne Unterbrechung nur Spielsteine schieben, um alle Stellungen einmal zu erhalten – mal ganz abgesehen davon, daß die Sache noch einen theoretischen Haken hat.)

Versuchen wir es doch einmal mit einem Dreier-Spiel, denn dort haben wir nur 4! = 24 Möglichkeiten, die drei Steine mit den Nummern 1, 2 und 3 im 2 ×2-Kästchen anzuordnen. Probiert doch einmal aus, was für Stellungen ihr aus der in Bild 4 gezeigten Anordnung nur durch Verschieben erhalten könnt. Ihr habt festgestellt, daß es gar nicht 24, sondern nur 12 sind. Die Stellung von Bild 5 habt ihr z. B. nicht erhalten. Fangen wir von dieser Stellung ausgehend an herumzuschieben, so erhalten wir die restlichen 12.

Bild 4

1	2
3	

Bild 5

1	3
2	

Damit haben wir zwar für das 4 ×4-Kästchen unseres Fünfzehnerspiels noch nichts bewiesen, aber es kommt die Vermutung auf, daß es dort vielleicht ähnlich ist, daß auch hier die Stellung I nur aus der Hälfte aller Stellungen erreicht werden kann, es also Aufgaben gibt, die unlösbar sind. Loyd konnte sich seiner Sache auch sicher sein, denn das genannte Problem von ihm gehörte zur Menge der unlösbaren Aufgaben. Unglücklicherweise hatte er auch dem Beamten des Patentamtes eine unlösbare Aufgabe unterbreitet. Den Vorschriften gemäß mußte er, um ein Patent auf das von ihm erfundene Spiel erhalten zu können, ein *Arbeitsmodell* vorlegen. Als sich der Beamte nach der Lösbarkeit der ihm gestellten Aufgabe erkundigte, mußte Loyd zugeben, daß dies unmöglich ist. „In diesem Fall", so lautete die Antwort, „kann von einem Arbeitsmodell nicht die Rede sein, und wenn kein Arbeitsmodell vorliegt, gibt es auch kein Patent."

Nach dem Spielen im 2 ×2-Kästchen könnte man auf die Idee kommen, es einmal mit einem 3 ×3-Kästchen zu versuchen. Wegen der 9! = 362880 Anordnungsmöglichkeiten der 8 Steine lassen wir das aber lieber sein und versuchen es besser mit einem 2 ×3-Kästchen. In diesem Fall gibt es zwar 720 Möglichkeiten, aber vielleicht nützt uns dessen Studium schon etwas, auch wenn wir nicht alle Möglichkeiten durchprobieren. Wir haben hier also 5 Steine S1, ..., S5 und 6 Felder F1, ..., F6, die analog zu Bild 1 numeriert seien. Wir wollen die Felder F1, F2, F4, F5 als „linkes Quadrat" und die Felder F2, F3 F5 sowie F6 als „rechtes Quadrat" bezeichnen. Ausgehend von einer beliebigen Anfangsstellung können wir es immer so einrichten, daß S4 auf F1 kommt und F4 durch irgendeinen anderen Stein besetzt ist.

Lösungen

Lösung zur Aufgabe aus:
Korbbogenkonstruktion

Der Mittelpunkt M_0 des verbindenden Kreisbogens s_0 muß nach Forderung der Aufgabe auf dem Durchmesser (AB) liegen, da andernfalls eine Knickstelle in A und entsprechend in B auftreten würde. Ferner muß die Übergangsstelle von s_0 nach k_2 im Schnittpunkt der Verbindungsgeraden (M_0M_2) mit k_2 liegen. Ist r_0 der zu s_0 gehörige Krümmungsradius, dann muß für das rechtwinklige Dreieck $M_0M_1M_2$ nach dem pythagoreischen Lehrsatz die folgende Gleichung erfüllt sein:

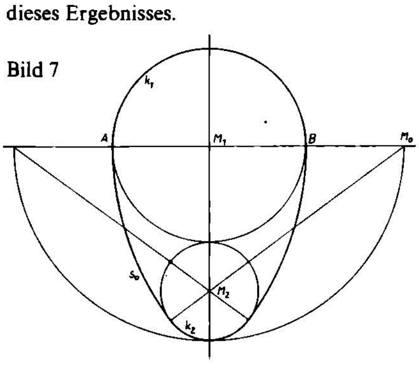
$$(r_0-r_2)^2=(r_1+r_2)^2+(r_0-r_1)^2.$$

Wegen $r_1=2r_2$ folgt als Lösung aus dieser Gleichung für r_0:

$$r_0=3r_1.$$

Bild 7 zeigt die konstruktive Auswertung dieses Ergebnisses.

Bild 7



Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Teilbarkeitsregel

a) $xx1983:101=xxx3$

Das Ergebnis muß die Einerstelle 3 haben und 4stellig sein. Beginnend mit der letzten Zeile ergibt sich eindeutig folgende Lösung:

371983 : 101 = 3683
303
689
606
838
808
303
303
0

Die beiden Ziffern heißen 37.

b) $1983x_1x_2:101=196x_2$
101
973
909
$64x_1$
606
x_30x_2
x_30x_2
0

x_1 muß 6 sein, da im Rest (Zeile 7) die 0 steht; damit muß $x_3=4$ sein und also x_2 ebenfalls 4.

198364 : 101 = 1964

Die beiden Ziffern heißen 64.

Kannenknobelei

Die 21 Milchkannen werden folgendermaßen verteilt:

LPG 1 = 3 volle, 1 halbvolle, 3 leere Kannen;
LPG 2 = 3 volle, 1 halbvolle, 3 leere Kannen;
LPG 3 = 1 volle, 5 halbvolle, 1 leere Kanne(n).

Rätselspaß

1. HÖHE
2. BRUCHSTRICH
3. ACHSE
4. DIAGONALE
5. QUADRAT
6. DEFINITION
7. BASIS
8. SUBTRAKTION
9. SATZ
10. WÜRFEL

Lösungswort: Laubfrosch

Auf Pilzsuche

	Vater von Väter:	Sohn von Söhne
Urenkel		
Enkel		
Sohn		
Vater		
Opa		
Uropa		

Zahlenpyramide

1 · 9 = 9
12 · 9 = 108
123 · 9 = 1107
1234 · 9 = 11106
12345 · 9 = 111105
123456 · 9 = 1111104
1234567 · 9 = 11111103
12345678 · 9 = 111111102
123456789 · 9 = 1111111101

Welcher Beruf? Welches Studienthema?

EDV-Facharbeiter; Instandhaltungsmechaniker – Winkelmessung; Dezimalbrüche

Rundreiseproblem

Route	Länge der Route
12341	58
12431	49
13241	49
13421	49
14231	49
14321	58

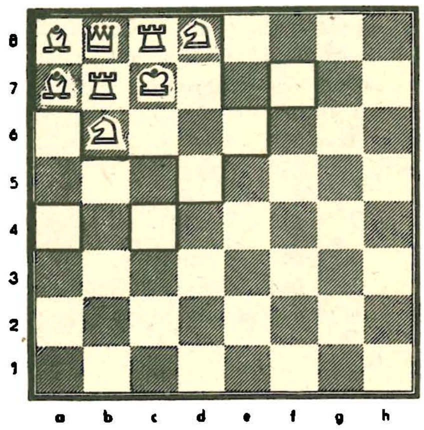
Das Optimum liegt bei 49, und dieser Wert wird durch vier Routen realisiert.

Rätselfigur

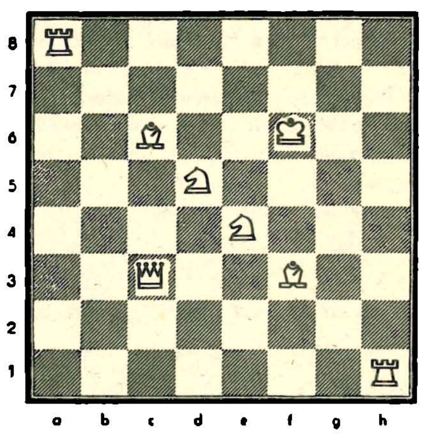
1. Senner/Rennes, 2. Essen/Nesse, 3. Gras/Sarg, 4. mod/Dom, 5. Esel/Lese, 6. Nebel/Leben, 7. Tannat/Tannat, 8. TP/Pt, 9. sie/Eis, 10. Ruma/Amur, 11. Neger/Regen, 12. Lies/Seil, 13. Rho/Ohr, 14. Mn/Nm. Kontrollbegriffe: Segment, Pearson.

Lösungen zu:
Wirkungskraft der Schachfiguren

a) Noch 16 Felder können die acht Figuren im Minimalfall beherrschen. Eine mögliche Figurenaufstellung zeigt Diagramm 1. Diese Stellung ist natürlich durch Spiegelungen auch in den anderen Brettecken möglich.



b) 64 Felder besitzt das Schachbrett, und alle 64 Felder können von diesen acht Figuren beherrscht werden! Die Figurenaufstellung zeigt Diagramm 2. Auch hier sind Spiegelungen durchführbar. Es mußten für die Lösung die beiden Läufer auf gleichfarbige Felder, was ja erlaubt war, gestellt werden. Die Aufstellung mit Läufern auf unterschiedlicher Feldfarbe läßt nur ein Maximum von 63 Feldern zu. Hier eine Lösungsmöglichkeit: Kf5, Dh2, Ta7, Tb8, Ld4, Le4, Se3, Sf3. Das Feld c1 bleibt unbedroht.



Lösungen zu: Für den Sprachfreund

Zahlenstern

▲1▲ Schreibt alle Zahlen von 1 bis 10 so in die Kreise auf der sternförmigen Linie, daß

die Summe der Zahlen in zwei beliebigen benachbarten Kreisen weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar ist!
Lösung: Man erhält eine zweite Lösung, wenn die Zahlen 1 und 10 ihre Plätze tauschen.

Kryptarithmetik

▲2▲ Ein beliebtes Geduldsspiel ist, irgendeinen Namen oder ein bekanntes Sprichwort zu nehmen und damit eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe zu bilden. Es ist oft notwendig, eine zusätzliche Bedingung einzufügen, um eine eindeutige Antwort zu erhalten. Beispiel (s. englischen Text). (Beachte, daß O ein Buchstabe ist!) Jeder Buchstabe bedeutet eine unterschiedliche Ziffer, und SOW ist ein vollständiges Quadrat. Eine maßgebende Voraussetzung ist, daß der linke Endbuchstabe jedes Wortes keine Null ist.
Eine Variation dieser Art von Geduldsspiel ist, eine lange Multiplikation oder Division auszuwählen und die Sternchen durch die richtigen Ziffern zu ersetzen. Beispiel (s. englischen Text).

Lösungen:

$$\begin{array}{r} 461\\ 39\\ 439\\ \hline 939 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64\cdot 22\\ \hline 92\\ 92\\ \hline 1012 \end{array}$$

▲3▲ Zum Bau des Eiffelturms wurden ungefähr 885 m^3 Eisen verwendet; die Dichte des Eisens beträgt $7{,}8\,\frac{t}{m^3}$. Welche Masse Eisen wurde für diese Konstruktion benötigt?
Lösung: $m = V \cdot \varrho$

$$m = \frac{885\ m^3 \cdot 7{,}8\ t}{m^3}$$

$$m = 6903\ t$$

Für den Bau wurden 6903 t Eisen benötigt.

Lösung zu:
Die historische Mathematikaufgabe,
Heft 2/83

Ein Maultier und ein Esel

Der Maulesel habe x Pud getragen, der Esel aber y Pud. Gibt nun der Maulesel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y+1$, der Maulesel aber behält noch $x-1$; da nun der Esel zweimal soviel hat als der Maulesel, so wird $y+1=2x-2$. Wenn aber der Esel dem Maulesel ein Pud gibt, so bekommt der Maulesel $x+1$, und der Esel behält noch $y-1$. Da nun jene Last dreimal so groß ist als diese, so wird $x+1=3y-3$.
Also sind unsere zwei Gleichungen:

$$\text{I.}\ |y+1=2x-2|$$
$$\text{II.}\ |x+1=3y-3.|$$

Aus der ersten findet man $x=\frac{y+3}{2}$ und aus der anderen $x=3y-4$, woraus diese neue Gleichung entsteht: $\frac{y+3}{2}=3y-4$, welche mit 2 multipliziert gibt $y+3=6y-8$, und y subtrahiert, kommt $5y-8=3$, dazu 8 addiert, so hat man $5y=11$, $y=\frac{11}{5}$ oder $2\frac{1}{5}$ und hieraus $x=2\frac{3}{5}$.
Antwort: Also hat der Maulesel $2\frac{3}{5}$ Pud, der Esel aber $2\frac{1}{5}$ Pud getragen. (Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*) *H. Pieper*

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 6/82

Ma 5 ■2266 Der jüngste Sohn sei n Jahre alt; folglich ist der zweite Sohn $(n+2)$ Jahre, der älteste Sohn $(n+4)$ Jahre, die Mutter $(n+24)$ Jahre, der Vater $(n+30)$ Jahre alt. Die Familienmitglieder sind somit zusammen $(5n+60)$ Jahre alt.
Nun gilt $5n+60=80$, $5n=20$, also $n=4$. Die Söhne sind 4, 6 und 8 Jahre alt; die Mutter ist 28 Jahre, der Vater 34 Jahre alt.

Ma 5 ■2267 Angenommen, die Familien Kunz, Schulz, Ludwig, Müller und Richter haben (in dieser Reihenfolge) k, s, l, m und r Kinder. Aus b) folgt: $k<s$.
Aus c) folgt: $k<s<r$.
Aus d) folgt: $k=m$, also $k=m<s<r$.
Aus e) folgt: $l<k$, also $l<k=m<s<r$.
Wegen $1 \leqq l, k, m, s, r \leqq 4$ und $l+k+m+s+r=12$ existiert genau eine Lösung, nämlich $l=1$, $k=2$, $m=2$, $s=3$, $r=4$. Die Familie Ludwig hat 1 Kind, die Familien Kunz und Müller haben je 2 Kinder, die Familie Schulz 3 Kinder und die Familie Richter 4 Kinder.

Ma 5 ■2268 Angenommen, Karl las am ersten Tag n Seiten dieses Buches; dann las er am zweiten Tag $3 \cdot n$ Seiten, am dritten Tag $5 \cdot n$ Seiten. Das Buch umfaßt somit $9 \cdot n$ Seiten. Nun gilt $160<9 \cdot n<170$. Daraus folgt $n=18$. Das Buch umfaßt somit $9 \cdot 18=162$ Seiten.

Ma 5 ■2269 Angenommen, der Sohn ist n Jahre alt, der Vater also $5 \cdot n$ Jahre und Großvater $10 \cdot n$ Jahre. Zusammen sind sie $16 \cdot n$ Jahre alt. Nun gilt $16 \cdot n=80$, also $n=5$. Der Sohn ist 5 Jahre, der Vater 25 Jahre, der Großvater 50 Jahre alt.

Ma 5 ■2270 Es seien a, b und c die Lebensalter der Kinder von Frau Meier. Dann gilt $a \cdot b \cdot c=1 \cdot 1 \cdot 24=1 \cdot 2 \cdot 12=1 \cdot 3 \cdot 8=1 \cdot 4 \cdot 6=2 \cdot 2 \cdot 6=2 \cdot 3 \cdot 4$. Nur die Summe $1+4+6=11$ ergibt eine Primzahl. Die Kinder von Frau Meier sind 1 Jahr, 4 Jahre und 6 Jahre alt. Die Hausnummer lautet 11.

Ma 5 ■2271 Wir gehen wie folgt vor:
(1) Der 9-l-Eimer wird gefüllt.
(2) Aus dem 9-l-Eimer füllen wir zweimal nacheinander jeweils den 4-l-Eimer, der danach jedes Mal geleert wird.
(3) Die im 9-l-Eimer verbliebene Wassermenge von 1 Liter gießen wir in den 4-l-Eimer.
(4) Wir füllen erneut den 9-l-Eimer, füllen danach den 4-l-Eimer bis zum Rand auf. Es verbleiben im 9-l-Eimer danach 6 Liter Wasser.

Ma 6 ■2272 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.
a) Angenommen, jemand hat sich eine gerade Zahl $2n$ gedacht; er hat dann folgendes notiert:
$1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n$.
Da die erste notierte Zahl (1) ungerade, die letzte notierte Zahl aber gerade ist, sind es genau so viele ungerade wie gerade Zahlen.
b) Angenommen, jemand hat sich eine ungerade Zahl $2n+1$ gedacht; er hat dann folgendes notiert:
$1, 2, 3, 4, \ldots, 2n, 2n+1$.
Da sowohl die erste als auch die letzte notierte Zahl ungerade ist, existiert genau eine ungerade Zahl mehr, als gerade Zahlen vorhanden sind.
Folglich ist die Anzahl der verbleibenden ungeraden Zahlen niemals kleiner als die Anzahl der gestrichenen Zahlen. Sie ist entweder gleich oder um 1 größer als die halbe Anzahl aller notierten Zahlen.

Ma 6 ■2273 Durch Einsetzen erhalten wir aus der gegebenen Ungleichung

$$a+b+a \cdot b+8<10,$$
$$a+b+a \cdot b<2.$$

Folgende geordneten Zahlentripel $[a, b, c]$ erfüllen die gestellten Bedingungen: $[0, 0, 8]$, $[1, 0, 8]$, $[0, 1, 8]$.

Ma 6 ■2274 Die Größe des Außenwinkels $\sphericalangle CBF$ des Dreiecks ABC ist gleich der Summe aus den Größen der ihm nicht anliegenden Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACB$; sie beträgt somit $35°+45°=80°$. Winkel $\sphericalangle CEF$ ist Außenwinkel des Dreiecks BFE. Seine Größe ist gleich der Summe der Größen der ihm nicht anliegenden Innenwinkel $\sphericalangle EBF$ und $\sphericalangle BFE$, also $80°+20°=100°$.

Ma 6 ■2275

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$$
$$=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{3-1}{3}\cdot\frac{4-1}{4}\cdot\frac{5-1}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{100-1}{100}$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100}=\frac{1}{100}$$

Ma 6 ■2276 Die Anzahl der von Axel, Bruno, Christian und Dieter erzielten Tore sei a, b, c und d; dann gilt

$$c<d, \quad (1)$$
$$a+b=c+d, \quad (2)$$
$$b+d<a+c. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

$$a+2b+d<a+2c+d,$$
$$2b<2c, \text{ also } b<c. \quad (4)$$

Aus (2) und (4) folgt

$$a+c>c+d,\ a>d, \text{ also } d<a. \quad (5)$$

Aus (1), (4) und (5) folgt schließlich

$$b<c<d<a.$$

Bruno erzielte die wenigsten, Axel die meisten Tore.

Fortsetzung auf Seite VII.

Knobel mit α

Aus der Aufgabenstellung und der Struktur der Gleichungen ergibt sich unmittelbar: $\alpha = 0$. (Da kein Produkt Null ist, kann auch kein Faktor Null sein; α tritt nicht als Faktor auf.)
Das Produkt in Gleichung (9) ist somit eine 10stellige Zahl, während die Produkte der Gleichungen (1) bis (8) 11stellige Zahlen sind. Daraus folgt, daß der Faktor T in (9) kleiner sein muß als jeder der übrigen Faktoren K, N, O, B, E, L, M, I. Also gilt $T = 1$.
Wegen $T = 1$ folgt aus (1) $\ldots T \cdot K \cdot K = \ldots T$, daß $K = 9$ gilt. Da $K = 9$ in allen Gleichungen als Faktor auftritt, sind sämtliche Zahlen auf den rechten Seiten Vielfache von 9, ihre Quersumme also durch 9 teilbar.
Die Quersumme aus den 9 mittleren (jeweils gleichen) Ziffern ist in jedem Falle ein Vielfaches von 9, deshalb muß die aus der ersten und der letzten Ziffer gebildete Summe 9 betragen. Aus der rechten Seite von (1) folgt $N + T = 9$ und wegen $T = 1$ somit $N = 8$. Aus (1) $80000000001 : (9 \cdot 9) =$ KNOBELMIT
$80000000001 : 81 = 987654321$
ergibt sich

K = 9	L = 4
N = 8	M = 3
O = 7	I = 2
B = 6	T = 1
E = 5	α = 0

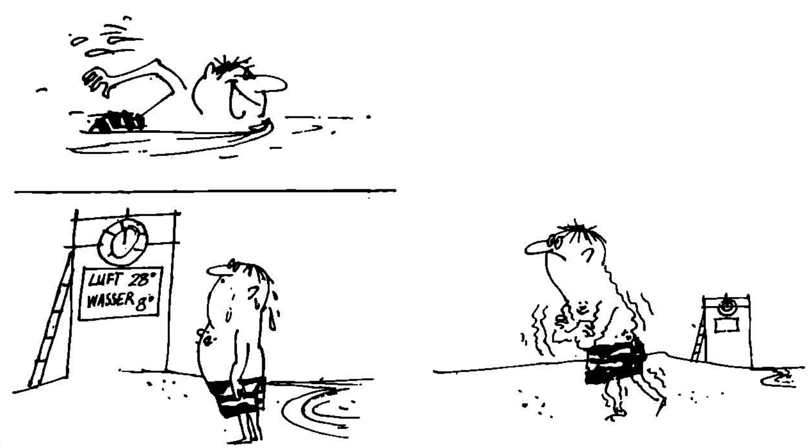
Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

Sprung-Turnier

Reihenfolge: B – D – A – C

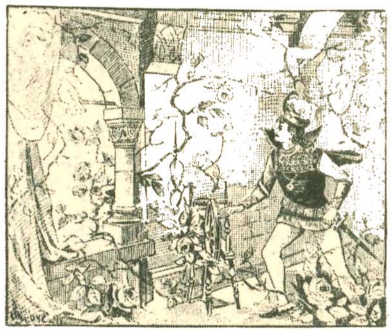
Kürzester Weg gesucht!

Reihenfolge der Kioske: 1–2–3–5–7–8–9–10–11–12–13–14–17–18–16–15–21–20–31–19–22–15–28–27–26–24–23–29–4–30–6.



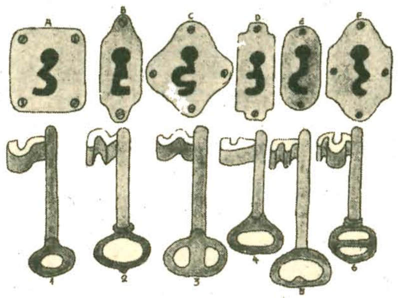
Vexierbild

Der Märchenprinz sucht Dornröschen. Helft ihm!



Schlüsseleien

Ordne zu! Welcher Schlüssel (1 bis 6) gehört zu welchem Schloß?



alpha-Ferienmagazin

Sehen – Merken – Kombinieren

1. Haben die Jungen schon öfter gezeltet? 2. Wie steht es mit ihren hauswirtschaftlichen Fertigkeiten? 3. In welcher Richtung fließt der Fluß? 4. Muß die Wäsche lange trocknen? 5. Wird die Sonnenblume noch wachsen? 6. Ist das Lager der Touristen weitab von der Stadt aufgeschlagen? 7. Mit welchem Transportmittel sind die Jungen hierher gekommen? 8. Zu welcher Stadt fliegt das Flugzeug?

Knobel mit α

Jedem der 10 Buchstaben in der Überschrift ist genau eine der 10 Ziffern 0 bis 9 zuzuordnen, daß die Gleichungen (1) bis (9) zu wahren Aussagen werden.

(1)
KNOBELMIT · K · K = NααααααααT

(2)
KNOBELMIT · N · K = OTTTTTTTTI

(3)
KNOBELMIT · O · K = BIIIIIIIIM

(4)
KNOBELMIT · B · K = EMMMMMMMML

(5)
KNOBELMIT · E · K = LLLLLLLLLE

(6)
KNOBELMIT · L · K = MEEEEEEEEB

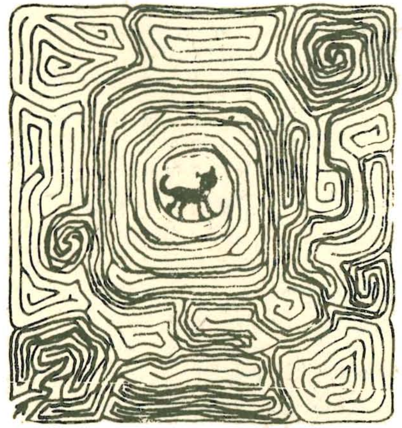
(7)
KNOBELMIT · M · K = IBBBBBBBBO

(8)
KNOBELMIT · I · K = TOOOOOOOON

(9)
KNOBELMIT · T · K = αNNNNNNNNK

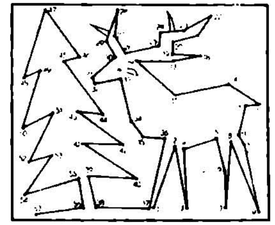
10

Labyrinth



15

Im Wald

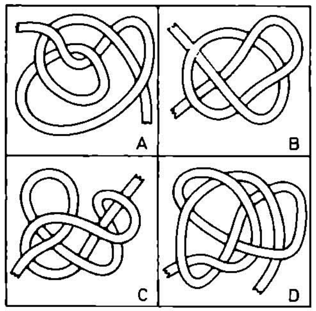


Vexierbild

Dornröschen steht in der linken oberen Ecke des auf die linke Seite gedrehten Bildes.

Schlüsseleien

Es gehören zusammen: A–2; B–4; C–6; D–5; E–1; F–3



Knifflige Frage

Wenn man an den Enden der Bänder zieht, wird sich nur bei zwei Verschlingungen ein Knoten bilden – die anderen lösen sich glatt auf. Wo ergeben sich Knoten?

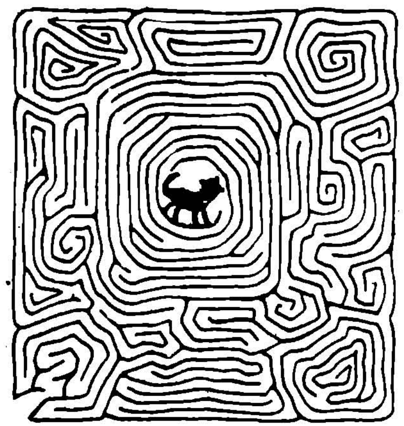
Logeleien

1△△ : 1□ = 1□
12 * : * = 24

A · A = B
\+ · –
C · D = E
F – G = H

2

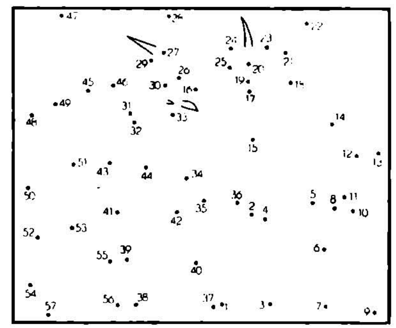
Labyrinth



7

Im Wald

Verbinde die Punkte 1 bis 57!
Es entsteht ein nettes Ferienbild.



Experiment

$6 + 1 - 3 = 4$; $3 + 7 - 7 = 3$;
$1 + 2 - 1 = 2$

Teilbares

		6	9	2		
	5	2	3	1	2	
4	6	3	1	5	3	2
8	1	7	5	5	3	7
	5	6	1	8	1	
		4	3	2		

Gut beobachten!

1. Reihe 4. Vase; 2. Reihe 2. Vase;
3. Reihe 3. Vase

Kryptarithmetik

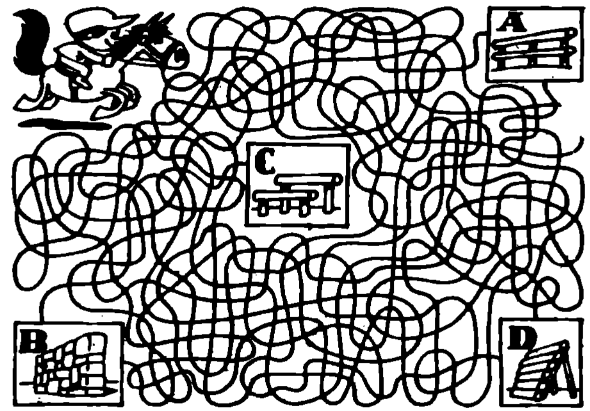
$$\begin{array}{rcrcr} 89 & \cdot & 11 & = & 979 \\ 63 & : & 7 & = & 9 \\ 2 & + & 1 & = & 3 \\ 10 & - & 1 & = & 9 \\ \hline 164 & & 20 & & 1000 \end{array}$$

Tambourmajor

Es gehören zusammen: 2 + 6; 1 + 7;
3 + 8; 4 + 5.

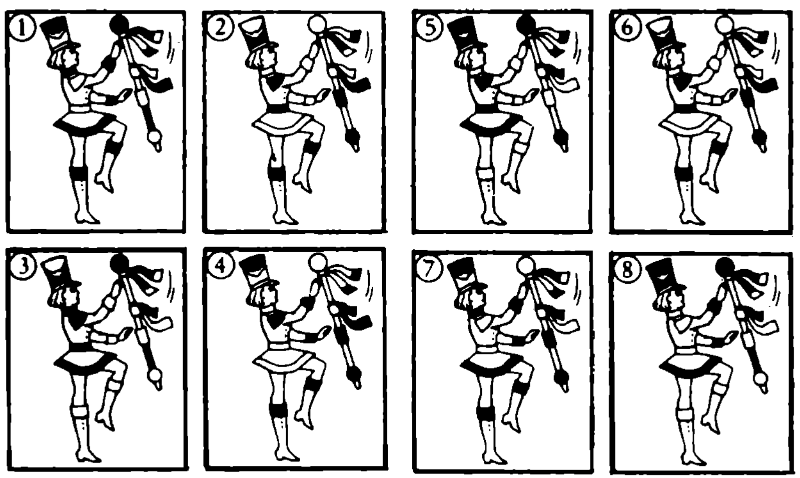
Sprung-Turnier

In welcher Reihenfolge nehmen Reiter
und Pferd die Hürden?



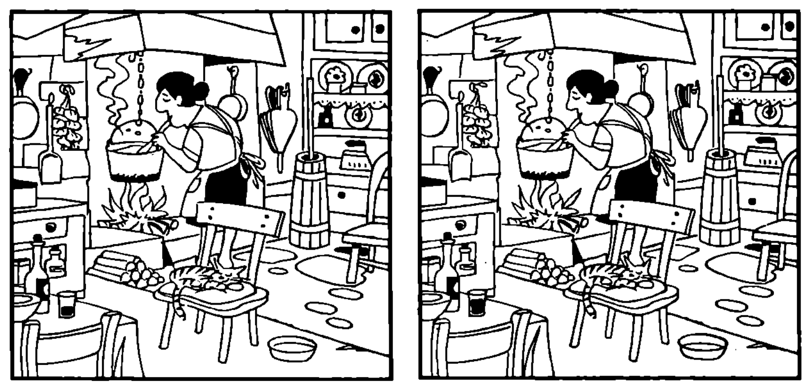
Tambourmajor

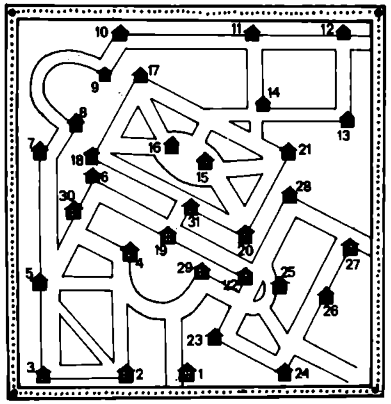
Vergleiche die 8 Bilder!
Was fällt dir dabei auf?



Kesselgulasch

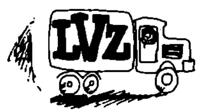
Zwischen den beiden Bildern, gezeichnet
von einem ungarischen Graphiker, gibt
es viele kleine Unterschiede.
Welche?





Kürzester Weg gesucht!

Wie muß der Fahrer der Leipziger Volkszeitung (LVZ) fahren, um mit kürzestem Weg alle Zeitungskioske zu beliefern?



Lösungen zu:

Sehen – Merken – Kombinieren

1. Offensichtlich nicht: Erfahrene Touristen stellen das Zelt nicht in einer Mulde auf. Auch ist die Feuerstelle unsachgemäß angelegt. 2. Mit aller Wahrscheinlichkeit nicht gut:
Fisch wird nicht vo& Kopf her geschuppt, und Strümpfe mit so langem Faden zu stopfen, ist unzweckmäßig.
3. Von links nach rechts. 4. Nein, denn es weht Wind. 5. Die Sonnenblume ist offensichtlich abgebrochen und in die Erde gesteckt. 6. Am Bildrand ist ein Wegweiser zum nahegelegenen Ort zu sehen. 7. Die Jungen haben aller Wahrscheinlichkeit nach Fahrräder: am Zelt lehnt eine Luftpumpe. 8. Zu keiner. Das ist ein Agrarflugzeug.

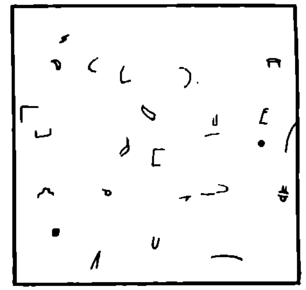
Knifflige Frage

Die Bänder A und D bilden Knoten.

Logeleien

144 : 12 = 12; 120 : 5 = 24;
3 · 3 = 9, 4 · 2 = 8, 7 — 6 = 1.

Kesselgulasch



	−		:		=3
+		+		+	
	+		:		=4
−		−		−	
	+		−		=9
=4		=3		=2	

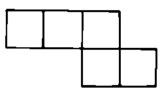
Experiment

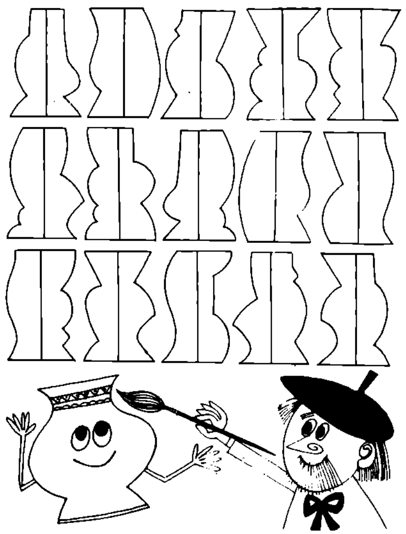
In die untenstehende Figur sollst du Ziffern so einsetzen, daß sich waagerecht wie senkrecht richtig gelöste Aufgaben ergeben.

		6	9	2		
	5	2	3	1	2	
4	6	3	1	5	3	2
8	1	7	5	5	3	7
	5	6	1	8	1	
		4	3	2		

Teilbares

Lege die Vorlage (bestehend aus 5 kleinen Quadraten) sechsmal so auf das große Quadrat, daß jeweils die Summe 20 erscheint!





Gut beobachten!

Auf der Zeichnung sind 15 halbierte Vasen zu sehen. Unter ihnen befinden sich 12, von denen man jeweils zwei Teile zu einer vollständigen Vase zusammensetzen kann. Zu drei von ihnen jedoch läßt sich keine „Partnerin" finden. Welche sind das?

Kryptarithmetik

□9 · □1 = □□□
6□ : 7 = □
□ + □ = 3
□□ − □ = □
□6□ □0 □□□□

Ma 7 ■2277 Angenommen, Klaus ist gegenwärtig x, Jens y, also Gisela $(27-x-y)$ Jahre alt. Vor drei Jahren war Klaus $x-3$, Jens $y-3$, Gisela $(24-x-y)$ Jahre alt. Nun gilt

$x-3=3\cdot(24-x-y)$ und $y-3=2\cdot(24-x-y)$,
$x-3=72-3x-3y$ und $y-3=48-2x-2y$,
$4x+3y=75$ und $2x+3y=51$,
$3y=75-4x$ und $3y=51-2x$.

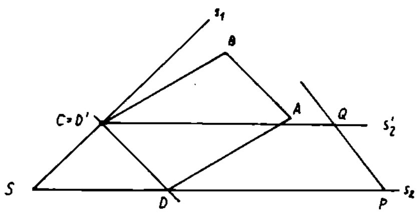
Daraus folgt durch Gleichsetzen

$$51-2x=75-4x,$$

$2x=24$, also $x=12$ und somit $3y=51-2\cdot 12=27$, also $y=9$.

Gegenwärtig ist Klaus 12, Jens 9, Gisela 6 Jahre alt.

Ma 7 ■2278 Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ und $\overline{AB}=\overline{CD}$ gilt. (Auf den einfachen Beweis sei hier verzichtet.) Durch Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ wird C das Bild von D und s_2' das Bild von s_2. Das heißt, wir konstruieren das Bild des Schenkels s_2 bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ und erhalten den Punkt $C=D'$. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C schneidet s_2 in D.



$\overline{AB}=\overline{PQ}$; $\overline{AB}\parallel\overline{PQ}$

Ma 7 ■2279 Wenn $x=3$, so $x^2=9>7$. Deshalb gilt $x<3$. Für $x=0$ gilt $y^2=7$; es gibt keine natürliche Zahl, deren Quadrat gleich 7 ist.

Für $x=1$ gilt $1+y+y^2=7$, also $y+y^2=6$ bzw. $y(y+1)=2\cdot 3$.
Für $x=1$ gilt somit $y=2$.
Für $x=2$ gilt $4+2y+y^2=7$, also $2y+y^2=3$ bzw. $y(y+2)=1\cdot 3$.
Für $x=2$ gilt somit $y=1$.
Die geordneten Paare [1, 2] und [2, 1] sind die einzigen Lösungen dieser Gleichung.

Ma 7 ■2280 Wegen $5^4=625<1000$ und $10^4=10000>9999$ gilt für die Quersumme $q=a+b+c+d$ dieser Zahlen $6\leqq q\leqq 9$. Wir erhalten somit

$6^4=1296$ (entfällt, da $q=18$),
$7^4=2401$ mit $q=7$,
$8^4=4096$ (entfällt, da $q=19$),
$9^4=6561$ (entfällt, da $q=18$).

Es existiert genau eine solche Zahl, nämlich $2401=(2+4+0+1)^4=7^4$.

Ma 8 ■2281 z endet auf 0, also ist z durch 2, 5 und 10 teilbar. z endet auf 00, also ist z durch 4 teilbar. z endet auf 100, also ist z nicht durch 8 teilbar.

Um die Teilbarkeit von z durch 3, 6 bzw. 9 zu ermitteln, benötigt man die Quersumme von z.

Wir schreiben nun die Ziffern der Zahl z in folgendes Schema:

1 2 3 4 5 6 7 8 9
10111213141516171819
20212223242526272829
30...
40...
.
.
100

Es läßt sich überblicken, daß die Summe $1+2+3+\ldots+9$ in der Quersumme von z zwanzigmal vorkommt. Nun ist $20(1+2+3+\ldots+9)=900$. Die 1 von der 100 ist noch zu addieren, so daß die Quersumme von z gleich 901 beträgt. Daraus folgt, daß z durch keine der Zahlen 3, 6 oder 9 teilbar ist.

Ma 8 ■2282 a) Bildet man den Quotienten aus z und ihrer Quersumme, so erhält man $\frac{111a}{3a}=\frac{111}{3}=37$.

b) Jede dreistellige natürliche Zahl mit drei gleichen Grundziffern läßt sich in der Form $100a+10a+a=111a$ darstellen. Ihre Quersumme beträgt also $3a$ und ist demzufolge ein Vielfaches von 3.

Wenn z eine gerade Zahl ist, so ist z ein Vielfaches von 6, da jede durch 3 teilbare gerade Zahl, die größer oder gleich 6 ist, ein Vielfaches von 6 ist.

Ma 8 ■2283 Da die Summe der Innenwinkelgrößen in jedem konvexen Viereck 360° beträgt, gilt:

a) $\alpha+2\alpha+3\alpha+4\alpha=360°$, d. h. $\alpha=36°$.
Es folgt $\beta=72°$, $\gamma=108°$ und $\delta=144°$.
Da $\alpha+\delta=180°$ und $\beta+\gamma=180°$ ist und diese Winkelpaare jeweils entgegengesetzt liegende Winkel sind, gilt $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$; $ABCD$ ist ein Trapez.

b) $\alpha=36°, \beta=72°, \gamma=144°$ und $\delta=108°$.
Da $\alpha+\gamma=180°$ und $\beta+\delta=180°$ und α und γ sowie β und δ jeweils in diesem Viereck gegenüberliegende Winkel sind, ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Ma 8 ■2284 Bezeichnet man den Flächeninhalt des Kreises k mit A_k und den des Kreises k_1 mit A_{k_1}, so gilt das Verhältnis

$$2A_{k_1}:A_k=x\%:100\%.$$

Nun gilt die Beziehung $r=2r_1$, wenn r die Radiuslänge von k und r_1 die von k_1 bezeichnet.

Daraus folgt

$$2\pi r_1^2:4\pi r_1^2=x\%:100\% \text{ bzw.}$$
$$1:2\quad=x\%:100\%.$$

Die Flächeninhalte der beiden einbeschriebenen Kreise nehmen zusammen 50% des Flächeninhaltes des Kreises k ein.

Ma 9 ■2285 Wir formen die Gleichung

$$(x+a)^{-1}=x^{-1}+a^{-1}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen äquivalent um und erhalten

$$\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a},$$
$$\frac{a+x}{xa}=\frac{1}{x+a},$$
$$(x+a)^2=ax,$$
$$x^2+ax+a^2=0,$$
$$x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2-4a^2}{4}}.$$

Es kann nur dann reelle Lösungen geben, wenn die Diskriminante nicht negativ ist. Folglich muß gelten:

$$\frac{a^2-4a^2}{4}\geqq 0,$$
$$-3a^2\geqq 0,$$
$$3a^2\leqq 0,$$
$$a^2\leqq 0.$$

Daraus folgt, daß nur $a=0$ möglich sein kann. Das ist aber laut Bedingung der Aufgabe auszuschließen $\left(\frac{1}{a}\text{ wäre nicht definiert}\right)$! Es gibt keine reelle Zahl x, für die die gegebene Gleichung eine wahre Aussage wird.

Ma 9 ■2286 Es seien x_1 und x_2 zwei Lösungen der Gleichung $x^2-2x+k=0$; dann gilt nach dem Wurzelsatz des Vieta

$$x_1+x_2=2 \qquad (1)$$
$$x_1\cdot x_2=k. \qquad (2)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $x_1^2=x_2$.
Es folgt dann nach (2): $x_1^3=k$.
Setzt man $a^3=k$, dann ist $a=x_1$ und $a^2=x_2$.
Dann gilt nach (1): $a^2+a-2=0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen $a_1=-2$ und $a_2=1$. Wegen $a^3=k$ ergibt sich nun $k_1=-8$ und $k_2=1$.
Probe: Setzt man in die Gleichung $x^2-2x+k=0$ für k die Zahl $k_1=-8$ ein, so erhält man $x_1=4$ und $x_2=-2$, und es gilt $(-2)^2=4$. Setzt man für k die Zahl $k_2=1$ ein, so erhält man $x_1=1$ und $x_2=1$, und es gilt $1^2=1$.
1 und -8 sind somit die einzigen reellen Zahlen für k, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Ma 9 ■2287 Aus $a^4-b^4=65$ folgt schrittweise durch äquivalentes Unformen

$(a^2-b^2)(a^2+b^2)=65$,
$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=1\cdot 5\cdot 13$.

Wegen $a-b<a+b<a^2+b^2$ gilt $a-b=1$, $a+b=5$, $a^2+b^2=13$.
Daraus folgt $a=3$ und $b=2$.
Es existiert genau ein solches geordnetes Zahlenpaar, nämlich (3, 2).

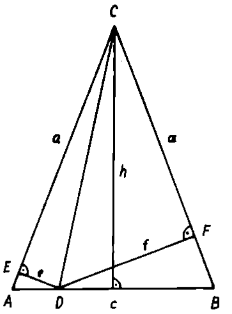
Ma 9 ■2288 a) Es seien A, A_1, A_2 die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, ADC bzw. DBC; dann gilt:

$$A=A_1+A_2,$$
$$A=\frac{a\cdot e}{2}+\frac{a\cdot f}{2},$$
$$A=\frac{a}{2}(e+f),$$
$$A=10\text{ cm}^2.$$

b) Es gilt:

$$a\cdot e+a\cdot f=c\cdot h,$$
$$a(e+f)=c\cdot h,$$
$$e+f=\frac{c\cdot h}{a},$$

d. h. $e+f$ ist konstant.



Ma 10/12 ■2289 Wir betrachten zunächst die Jahreszahl x^2 und suchen nach möglichen Quadratzahlen, deren Wurzeln ein sinnvolles Lebensalter des Bruders ergeben.

Es ist $44^2=1936$,
$45^2=2025$,
$46^2=2116, \ldots$

Hieraus ergbit sich eigentlich schon die einzige Möglichkeit, nämlich, daß der Bruder im Jahre 2025 ein Lebensalter von 45 Jahren erreicht haben wird.

Dann ist er im Jahre $2025-45=1980$ geboren, und für das Geburtsjahr 1980 gilt:
$$1980=x\cdot y$$
$$=45\cdot y.$$
Es folgt $y=44$.
Der Bruder wird im Jahre
$$(x+1)\cdot y=(45+1)\cdot 44$$
$$=46\cdot 44$$
$$=2024\ y \text{ Jahre, d. h.}$$
44 Jahre alt sein. Im Jahre
$$x^2+y^2-xy=45^2+44^2-45\cdot 44$$
$$=2025+1936-1980$$
$$=1981$$
war der Bruder 1 Jahr alt.

Ma 10/12 ■2290 Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
(1) $d_1{}^2=a^2+b^2$
(2) $d_2{}^2=b^2+c^2$
(3) $d_3{}^2=a^2+c^2$

Setzt man $a^2=x$, $b^2=y$ und $c^2=z$, so erhält man $d_1{}^2=x+y$; $d_2{}^2=y+z$ und $d_3{}^2=x+z$.
Nun gilt $x+y=25\text{ cm}^2$,
$y+z=34\text{ cm}^2$,
$x+z=41\text{ cm}^2$. Daraus folgt
$z-x=\ 9\text{ cm}^2$ und
$x+z=41\text{ cm}^2$ und schließlich
$z=25\text{ cm}^2$ und damit $c=5$ cm.
Weiter folgen nun
$x=16\text{ cm}^2$ und damit $a=4$ cm und
$y=\ 9\text{ cm}^2$ und damit $b=3$ cm.
Das Volumen dieses Quaders beträgt
$$V=a\cdot b\cdot c$$
$$=3\text{ cm}\cdot 4\text{ cm}\cdot 5\text{ cm}$$
$$=60\text{ cm}^3.$$

Ma 10/12 ■2291 Es sei $a<b<c$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Aus
$$h_a=\frac{2A}{a},\ h_b=\frac{2A}{b},\ h_c=\frac{2A}{c} \text{ folgt}$$
$$\frac{2A}{a}+\frac{2A}{b}+\frac{2A}{c}=h_a+h_b+h_c,$$
$$2A\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=h_a+h_b+h_c.$$
Wegen $\frac{3}{c}=\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
gilt weiter $\frac{6A}{c}\leqq h_a+h_b+h_c$.
Wegen $A=\varrho\cdot s=\frac{\varrho(a+b+c)}{2}$ gilt
$$\frac{3\varrho(a+b+c)}{c}\leqq h_a+h_b+h_c,$$
$$\frac{9\varrho(a+b+c)}{3c}\leqq h_a+h_b+h_c.$$
Wegen $3c>a+b+c$ gilt
$$\frac{9\varrho\cdot 3c}{3c}\leqq h_a+h_b+h_c,$$
$$9\varrho\leqq h_a+h_b+h_c, \text{ w. z. b. w.}$$
Für $a=b=c$ gilt das Gleichheitszeichen.

Ma 10/12 ■2292 Bezeichnet man den Flächeninhalt des Kreises k mit A_k und den des Kreises k_1 mit A_{k_1}, so gilt das Verhältnis
$$3A_{k_1}:A_k=x\%:100\%.$$
Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der einbeschriebenen Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2r_1$, wenn man die Länge des Radius des Kreises k_1 mit r_1 bezeichnet. Der Mittelpunkt M des Kreises k ist Schnittpunkt der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks. Deshalb gilt für die Länge des Radius r:
$$r=\frac{2}{3}\sqrt{3}r_1+r_1 \text{ bzw. } r=\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)r_1.$$
Nun folgt
$$\frac{3A_{k_1}}{A_k}=\frac{3\pi r_1{}^2}{\pi r^2}=\frac{3r_1{}^2}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2\cdot r_1{}^2}=\frac{3}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2}=\frac{3}{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{3}{3}}$$
$$=\frac{9}{7+4\sqrt{3}}=\frac{9(7-4\sqrt{3})}{49-48}=9(7-4\sqrt{3})=63-36\sqrt{3}=0{,}646.$$
Die drei einbeschriebenen Kreise nehmen zusammen etwa 64,6% des Flächeninhalts des größeren Kreises ein.

Ph 6 ■116 Aus dem Weg-Zeit-Diagramm erhält man als gegebene Größen:
für $\overline{OB}$ $s_1=\ 800$ m, $t_1=\ 2$ min,
für $\overline{CD}$ $s_2=2400$ m, $t_2=\ 3$ min,
für $\overline{EF}$ $s_3=1200$ m, $t_3=\ 4$ min,
für $\overline{OD}$ $s_4=3200$ m, $t_4=\ 6$ min,
für $\overline{CF}$ $s_5=3600$ m, $t_5=\ 8$ min,
für $\overline{OF}$ $s_6=4400$ m, $t_6=11$ min.
Gesucht ist die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$. Man erhält sie in allen Fällen nach der Gleichung $\bar{v}=\frac{s}{t}$, also
$$\bar{v}_1=\frac{s_1}{t_1}=\frac{800\text{ m}}{2\text{ min}}=\frac{800\text{ km}\cdot 60}{1000\cdot 2\text{ h}}=24\frac{\text{km}}{\text{h}},$$
$$\bar{v}_2=\frac{s_2}{t_2}=\frac{2400\text{ m}}{3\text{ min}}=\frac{2400\text{ km}\cdot 60}{1000\cdot 3\text{ h}}=48\frac{\text{km}}{\text{h}},$$
$$\bar{v}_3=\frac{s_3}{t_3}=\frac{1200\text{ m}}{4\text{ min}}=\frac{1200\text{ km}\cdot 60}{1000\cdot 4\text{ h}}=18\frac{\text{km}}{\text{h}},$$
$$\bar{v}_4=\frac{s_4}{t_4}=\frac{3200\text{ m}}{6\text{ min}}=\frac{3200\text{ km}\cdot 60}{1000\cdot 6\text{ h}}=32\frac{\text{km}}{\text{h}},$$
$$\bar{v}_5=\frac{s_5}{t_5}=\frac{3600\text{ m}}{8\text{ min}}=\frac{3600\text{ km}\cdot 60}{1000\cdot 8\text{ h}}=27\frac{\text{km}}{\text{h}},$$
$$\bar{v}_6=\frac{s_6}{t_6}=\frac{4400\text{ m}}{11\text{ min}}=\frac{4400\text{ km}\cdot 60}{1000\cdot 11\text{ h}}=24\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ph 7 ■117 Geg.: $F_1=515$ kp
$F_2=665$ kp
$e=s_1+s_2=2{,}40$ m
Ges.: s_1, s_2

Nach dem Hebelgesetz ist
$F_1\cdot s_1=F_2\cdot s_2$, und außerdem gilt $s_1=e-s_2$. Dann ist
$$F_1(e-s_2)=F_2\cdot s_2,$$
$$F_1e-F_1s_2=F_2\cdot s_2,$$
$$F_1e=F_2\cdot s_2+F_1s_2,$$
$$F_1e=s_2(F_1+F_2),$$
$$s_2=\frac{F_1e}{F_1+F_2},$$
$$s_2=\frac{515\text{ kp}\cdot 2{,}40\text{ m}}{515\text{ kp}+665\text{ kp}},$$
$$s_2=1{,}05\text{ m},$$
und
$$s_1=e-s_2,$$
$$s_1=2{,}40\text{ m}-1{,}05\text{ m},$$
$$s_1=1{,}35\text{ m}.$$
Die Entfernung von den Achsen beträgt 1,05 m bzw. 1,35 m.

Ph 8 ■118 Geg.: $m=13$ g, $d=31$ mm,
$\varrho_{Cu}=8{,}92\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $\varrho_{Al}=2{,}7\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,
$p_{Cu}=94\%$, $p_{Al}=6\%$.
Ges.: h

(1) Berechnung von m_{Cu} und m_{Al}
$$m:m_{Cu}=100:p_{Cu} \qquad m_{Al}=m-m_{Cu}$$
$$m_{Cu}=\frac{m\cdot p_{Cu}}{100} \qquad m_{Al}=13\text{ g}-12{,}22\text{ g}$$
$$m_{Cu}=\frac{13\text{ g}\cdot 94\%}{100\%} \qquad m_{Al}=0{,}78\text{ g}$$
$$m_{Cu}=12{,}22\text{ g}$$
(2) Berechnung von V_{Cu} und V_{Al}
$$\varrho_{Cu}=\frac{m_{Cu}}{V_{Cu}} \qquad \varrho_{Al}=\frac{m_{Al}}{V_{Al}}$$
$$V_{Cu}=\frac{m_{Cu}}{\varrho_{Cu}}=\frac{12{,}22\text{ g}\cdot\text{cm}^3}{8{,}92\text{ g}}$$
$$V_{Al}=\frac{m_{Al}}{\varrho_{Al}}=\frac{0{,}78\text{ g}\cdot\text{cm}^3}{2{,}7\text{ g}}$$
$$V_{Cu}=1{,}37\text{ cm}^3 \qquad V_{Al}=0{,}29\text{ cm}^3$$
(3) Berechnung von V
$$V=V_{Cu}+V_{Al}$$
$$V=1{,}37\text{ cm}^3+0{,}29\text{ cm}^3$$
$$V=1{,}66\text{ cm}^3$$
(4) Berechnung von h
$$V=\frac{\pi}{4}d^2\cdot h$$
$$h=\frac{4\cdot V}{\pi d^2}=\frac{4\cdot 1{,}66\text{ cm}^3}{3{,}14\cdot 3{,}1^2\text{ cm}^2}$$
$$h=0{,}22\text{ cm}$$
Die Münze ist 2,2 mm dick.

Fall a) Befindet sich S2, S3 oder S5 auf F4, so können wir durch Verschieben innerhalb des „rechten Quadrates" S1 auf F2 bringen und erhalten damit die Stellung von Bild 6.

Bild 6

4	1	

Fall b) Ist F4 mit S1 besetzt, dann verschieben wir die Steine so, daß S4 auf F4, S1 auf F5 kommt und F1 mit irgendeinem Stein besetzt ist. S1 verschieben wir nun innerhalb des „rechten Quadrates" auf einen der rechten Randplätze F3 oder F6. Anschließend bringen wir innerhalb des „linken Quadrates" S4 wieder auf F1 (S1 bleibt dabei auf seinem Platz). Jetzt schieben wir innerhalb des „rechten Quadrates" S1 auf F2 (Bild 6).

In jedem Falle können wir also S4 auf F1 und zugleich S1 auf F2 bringen. Davon ausgehend können wir also stets S1 und S4 auf ihre richtigen Plätze F1 und F4 bringen. Aus dem Studium des 2 ×2-Kästchens wissen wir, daß wir mit den restlichen drei Steinen stets entweder die Stellung von Bild 7 oder die Stellung von Bild 8 erreichen können.

Bild 7

1	2	3
4	5	

Bild 8

1	2	5
4	3	

Wir wenden uns wieder dem 4 ×4-Feld zu. Wir wissen nun, daß wir in einem 2 ×3-Feld bzw. 3 ×2-Feld, in dem das Leerfeld enthalten ist, stets die beiden Randplätze auf einer der Schmalseiten nach Wunsch besetzen können. Stellen wir uns jetzt im 4 ×4-Kästchen jeweils nacheinander 2 ×3- bzw. 3 ×2-Kästchen abgeteilt vor, so können wir uns überlegen, daß wir von einer beliebigen Anfangsstellung ausgehend erst F1 und F2, dann F3 und F4, dann F5 und F6, dann F7 und F8, dann F9 und F13, schließlich F10 und F14 als „die beiden Randplätze" nehmen und so mindestens zu einer der folgenden beiden Stellungen I oder II gelangen können (natürlich muß man vorher immer erst die beiden jeweiligen Steine in den Sechserblock hineintauschen):

Bild 9

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Bild 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
13	14	12	

Durch Verschieben innerhalb des stark umrandeten 2 ×3-Feldes von Bild 10 könnt ihr nach einigen Zügen zu der Stellung von Bild 11 gelangen. Also gilt folgender Satz.

Bild 11

10	11	12
15	14	

Satz 1: Aus jeder Anfangsstellung läßt sich durch Verschieben stets die Stellung I oder II erzeugen.

Noch ungeklärt ist, ob sich die Stellungen I und II ineinander durch Verschieben überführen lassen.

Bild 12

1	7	5	9
3	12	8	14
2	15	4	10
13	11	6	

Wir stellen uns irgendeine Anfangsstellung vor, z. B. Bild 12, und notieren die Zahlen in der beim Lesen gewohnten Reihenfolge, wobei das Leerfeld dabei nicht berücksichtigt wird.

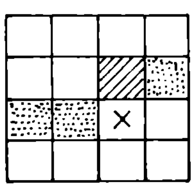
Im Beispiel: 1, 7, 5, 9, 3, 12, 8, 14, 2, 15, 4, 10, 13, 11, 6. Wir führen nun einen Vergleich mit der natürlichen Reihenfolge der Zahlen von 1 bis 15 durch: Die Zahl 1 steht an richtiger Stelle. Die Zahl 7 steht vor den Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Das sind 5 Verstöße gegen die natürliche Reihenfolge. Solche Verstöße wollen wir Inversionen nennen. Wir haben es hier also mit 5 Inversionen zu tun. Die nächste Zahl, die Zahl 5, steht im Widerspruch zur natürlichen Reihenfolge vor den Zahlen 2, 3 und 4. Also liegen 3 Inversionen vor. Die nun folgende Zahl 9 steht vor den Zahlen 2, 3, 4, 6 und 8, d. h. 5 Inversionen. Insgesamt haben wir $0 + 5 + 3 + 5 + 1 + 6 + 3 + 6 + 0 + 5 + 0 + 1 + 2 + 1 = 38$ Inversionen. Diese Inversionen liefern nun den Schlüssel, um zu entscheiden, ob eine Aufgabe des Fünfzehnerspiels lösbar oder unlösbar ist. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 2: Eine Stellung mit F16 als Leerfeld kann genau dann in die Stellung I überführt werden, wenn die Anzahl aller Inversionen eine gerade Zahl ist.

Diesen Satz 2 werden wir mittels der Sätze 3 und 4 beweisen. Aus Satz 2 folgt dann z. B., daß Stellung I nicht in Stellung II zu überführen ist: Stellung I hat keine Inversionen; Stellung II hat eine Inversion, die 15 steht vor der 14.

Wir wollen durch Satz 3 zunächst einmal die Frage beantworten, wie sich durch das Verschieben eines Steins die Anzahl der Inversionen ändert. Durch waagerechtes Verschieben ändert sich offensichtlich nichts. Schieben wir in Bild 13 den Stein mit der Nr. x senkrecht nach oben, so rückt er in der Reihenfolge drei Plätze vor. Die Nummern der drei übersprungenen Steine (in Bild 13 punktiert) seien a, b, c ($a < b < c$). Es sind folgende vier Fälle möglich:

Bild 13



1. $x > a, b, c$; 2. $x < a, b, c$; 3. $a < b < x < c$; 4. $a < x < b < c$. Stand Sx erst hinter den drei Steinen Sa, Sb, Sc, so steht Sx nach dem Hochziehen vor diesen drei Steinen. Veränderung der Anzahl der Inversionen: 1. 3 neue; 2. 3 weniger; 3. 2 neue (wegen $x > a, b$) und 1 weniger (wegen $x < c$), insgesamt 1 mehr; 4. 2 weniger und 1 mehr, d. h. 1 weniger. Eine entsprechende Überlegung können wir für den Fall durchführen, daß wir einen Stein senkrecht nach unten schieben. Insgesamt erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 3: Durch das waagerechte Verschieben eines Steines ändert sich die Anzahl der Inversionen nicht, durch das senkrechte Verschieben um eine ungerade Zahl.

Führen wir beim Fünfzehnerspiel einen Zug durch, so wandert dabei das Leerfeld um einen Platz in waagerechter oder senkrechter Richtung. Ist das Leerfeld anfangs auf einem bestimmten Platz und nach einer gewissen Anzahl von Zügen wieder an derselben Stelle, so muß jeder Zug in einer bestimmten Richtung durch einen anderen in entgegengesetzter Richtung aufgehoben worden sein, ein Zug nach rechts z. B. durch einen nach links.

Satz 4: Verschieben wir eine Stellung in eine andere mit dem Leerfeld auf demselben Platz, so haben wir dabei eine gerade Anzahl von waagerechten und eine gerade Anzahl von senkrechten Zügen durchgeführt.

Da eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen geradzahlig ist, können wir aus den Sätzen 3 und 4 schließen, daß sich eine Stellung mit dem Leerfeld auf F16 höchstens dann in Stellung I überführen läßt, wenn die Anzahl aller Inversionen gerade ist. Ist umgekehrt die Anzahl der Inversionen irgendeiner Anfangsstellung gerade, so ist dann die Stellung II (mit 1 Inversion) nicht erreichbar. Nach Satz 1 müssen wir also in unserem Beispiel durch Verschieben die Stellung I erreichen können. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir haben somit beim Fünfzehnerspiel 2 Gruppen von Anfangsstellungen mit dem Leerfeld auf F16, die „lösbaren" und die „unlösbaren". (Zu welcher Gruppe die Aufgaben der geschäftstüchtigen Wirte gehörten, können wir uns ja denken.) Es bleibt uns noch die Vermutung zu bestätigen, daß diese Gruppen gleich groß sind.

Vertauschen wir bei irgendeiner Stellung S14 und S15 miteinander, so ändern wir die Inversionenanzahl um 1. Einer lösbaren (unlösbaren) Aufgabe können wir also genau eine unlösbare (lösbare) Aufgabe zuordnen, indem wir gerade die Steine 14 und 15 vertauschen. Die der (lösbaren) Stellung auf Bild 12 auf diese Weise zugeordnete (unlösbare) Stellung ist in Bild 14 zu sehen. Wir können uns überlegen, daß dasselbe auch für die Vertauschung zweier beliebiger Steine gilt, und erhalten dann die folgende Entscheidungsregel für die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit einer Aufgabe, die auch in einigen Büchern über unterhaltsame Mathematik angegeben ist.

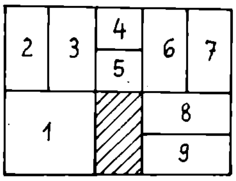
Bild 14

1	7	5	9
3	12	8	15
2	14	4	10
13	11	6	

Satz 5: Eine beliebige Stellung mit dem Leerfeld auf Platz 16 läßt sich genau dann in die Stellung I verschieben, wenn sich die Stellung I durch eine gerade Anzahl von aufeinanderfolgenden Vertauschungen zweier Steine erhalten läßt.

Im 2×2-Feld haben wir die Steine zwar in alle möglichen Stellungen geschoben, aber wie sieht es dort mit der Gültigkeit der Sätze 1 bis 5 aus? Genauso könntet ihr einmal im 3×3-Kästchen untersuchen, welche Sätze dort in welcher Form gelten. Ein richtiger Mathematiker hat oft erst dann Ruhe, wenn er allgemein für ein $n \times n$-Feld (n beliebige natürliche Zahl) das Problem gelöst hat. Bei Wilhelm Ahrens und auch bei Gerhard Kowalewski könnt ihr euch noch ausführlicher über das Fünfzehnerspiel und gewisse Abwandlungen davon belesen. Sicher lag es nicht nur an der durch die Mathematiker geschaffenen Klarheit, daß die Spielwut allmählich wieder abflaute.

Bild 15



Wir wollen uns abschließend folgendem Schiebeproblem, das auch auf Sam Loyd zurückgeht, zuwenden: Wir stellen uns ein wie in Bild 15 mit Rechtecken bzw. Quadraten besetztes 4×5-Feld vor und wollen versuchen, das Quadrat 1 in die rechte untere Ecke zu schieben, dorthin, wo sich jetzt die Steine 8 und 9 befinden. Probiert es doch einmal!

M. Deweß

Sam Loyd

Sam Loyd (1841 bis 1911) ist sicher als Schachproblemkomponist einigen von euch schon bekannt. Er erfand aber auch unzählige Rätsel und Spiele. Bereits mit 10 Jahren spielte er ausgezeichnet Schach, und im Alter von 14 Jahren wurde im *New York Saturday Courier* erstmals eine Schachaufgabe von ihm veröffentlicht. Das Schachspiel nahm bald sein ganzes Interesse in Anspruch. Mit 16 Jahren wurde er Schach-Redakteur beim *Chess Monthly*. Er bestritt aber auch die Schachspalten einer Reihe anderer Zeitungen und Zeitschriften. Teilweise verbarg er sich unter Pseudonymen wie W. King, A. Knight, W. K. Bishop. Nach 1870 beschäftigte er sich zunehmend mit mathematischen Denkspielen, Rätseln, Gesellschaftsspielen und originellen Werbegeschenken.

Einige seiner Rätsel und Spiele gingen um die ganze Welt und sind auch heute noch interessant. Nach seinem Tode gab sein Sohn Sam Loyd jr. 1914 die „Cyclopedia of Puzzles" heraus, eine umfassende Sammlung von Rätseln seines Vaters. Martin Gardner, ein amerikanischer Unterhaltungsmathematik-Experte, hat etliche dieser Rätsel neu herausgegeben.

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Bericht über eine Schulmeisterschaft

In diesem Schuljahr wurde an unserer Schule, der 12. Oberschule *Georg Schumann* in Berlin-Lichtenberg, im Rahmen der ersten Stufe der Mathematikolympiade eine *Schulmeisterschaft der Jungen Mathematiker* durchgeführt.

In einer Klausur, wie sie in den höheren Stufen üblich ist, hatten die Teilnehmer in zweieinhalb Stunden drei Aufgaben zu lösen.

Der gesamte Wettbewerb wurde durch die Kinder- und Jugendorganisation geführt. Dazu wurde von der Grundorganisationsleitung eine Arbeitsgruppe gebildet. In Absprache mit den Fachlehrern schlugen die gewählten Leitungen der Klassen ihre Vertreter als Teilnehmer vor. Das waren pro Klasse 4 bis 8 Schüler. Auch einige Teilnehmer aus Klasse 4 nahmen als *Frühstarter* am Wettbewerb teil.

Die Arbeitsgruppe stellte die Meldungen zusammen, lud die Teilnehmer ein, richtete die Klausurräume her, legte die Sitzordnung fest und führte während der Klausur auch die Aufsicht. Zu Beginn des Wettbewerbs begrüßten in den einzelnen Räumen die Direktorin, die Pionierleiterin und der Fachzirkelleiter die Teilnehmer, beglückwünschten sie zu ihrer Delegierung und wünschten ihnen viel Erfolg. Ein Fachlehrer der Schule stand bereit, um während der ersten Stunde eventuelle Fragen der Teilnehmer zu den Aufgabentexten zu beantworten.

Alle Teilnehmer arbeiteten mit großem Eifer und in ausgezeichneter Disziplin. Nach Abschluß des Wettbewerbs fanden sich mehrere Gruppen zusammen und diskutierten über die verschiedenen Lösungswege.

Die Arbeiten der Teilnehmer aus den Klassen 5 und 6 wurden von Mitgliedern der Arbeitsgruppe unter Anleitung eines Mathematiklehrers durchgesehen und bewertet. Die Schüler arbeiteten sehr gewissenhaft und erfüllten diese Aufgabe ausgezeichnet. Die Arbeiten der übrigen Klassenstufen wurden von den Fachlehrern korrigiert. Anschließend nahm die Arbeitsgruppe eine Zusammenstellung der Ergebnisse vor. In einer gemeinsamen Beratung mit der stellvertretenden Direktorin für außerunterrichtliche Tätigkeit und dem Fachzirkelleiter wurden die Preisträger festgelegt und gleichzeitig die Mannschaft für die 2. Stufe zusammengestellt. Durch einen Aushang an der Wandzeitung der Schule wurden die Namen der erfolgreichsten Teilnehmer dem Schulkollektiv bekanntgegeben. Anläßlich des Appells zum Jahrestag der Gründung der DDR erhielten diese Schüler Urkunden und Bücher. Zugleich werden die erfolgreichsten Teilnehmer und die Mitglieder der Arbeitsgruppe zu einer Festveranstaltung eingeladen, an der auch die Sieger der Wettbewerbe in anderen Fächern, wie z. B. dem Fest der deutschen Sprache, dem Fest der russischen Sprache usw. teilnehmen.

Diese Form des Wettbewerbs fand bei den Schülern großen Anklang. Sie freuten sich, ihr Wissen und Können auf dem Gebiet der Mathematik unter Beweis stellen und ihre Kräfte messen zu können. Für einige war dieser Wettstreit Anlaß, in eine mathematische Arbeitsgemeinschaft einzutreten. Wenn unsere Schule inzwischen über zahlreiche Schüler verfügt, die Mitglied des *Klubs Junger Mathematiker* Lichtenbergs sind, und wenn von den sieben zur zweiten Stufe delegierten Schülern drei einen Preis dabei errangen, dann zeigt sich auch daran, daß die Mathematik an unserer Schule hohe Wertschätzung genießt.

Freilich mußten wir für die Klausur eigene Aufgaben entwickeln, da die zentral veröffentlichten zum Teil nicht für eine Klausur geeignet und überdies auch vorher bereits bekannt sind. Wir stützten uns dabei auf Aufgaben aus früheren Olympiaden und auf solche, die in der *alpha* veröffentlicht wurden. Selbstverständlich konnte jeder Schüler auch Lösungen zu den zentral veröffentlichten Aufgaben beim Fachlehrer abgeben.

In ähnlicher Form und mit den gleichen Aufgaben ist eine Schulmeisterschaft an nahezu allen Schulen unseres Stadtbezirkes und an etwa weiteren 100 Schulen Berlins durchgeführt worden und hat viel Zustimmung gefunden. Wir werden daher auch im kommenden Jahr wieder eine solche Meisterschaft durchführen.

K. Lehmann

Welche Aufgaben die Teilnehmer zu lösen hatten, sei am Beispiel vorgestellt: Schulmeisterschaft – Mathematik 1982

Klasse 5

1. Uwe hat 235 Briefmarken in seiner Sammlung. Würde er 55 Stück weniger besitzen, so hätte er genau halb so viele Marken, wie Antje zur Zeit besitzt und 70 Marken weniger als Kurt. Wie viele Marken besitzen diese drei Kinder zusammen?

2. Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 so, daß sie
a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte und
e) genau acht Schnittpunkte miteinander haben!

Als Lösung gilt jeweils eine entsprechende Zeichnung. Eine Begründung ist hier nicht erforderlich, doch sind parallele Geraden zu kennzeichnen, z. B. $g_1 \parallel g_2$.

3. Joachim, Frank und Thomas haben erfolgreich an der Spartakiade teilgenommen, einer von ihnen am 100-m-Lauf, einer am Speerwerfen und einer am Tischtennis. Jeder von ihnen erkämpfte eine Medaille, und zwar einer eine Gold-, einer eine Silber- und einer eine Bronzemedaille.
Ferner ist bekannt:
(1) Der Tischtennisspieler, der mit Joachim befreundet ist, erhielt eine Bronzemedaille.
(2) Thomas nahm an keiner der beiden leichtathletischen Disziplinen teil.
(3) Joachim nahm nicht am Speerwerfen teil.
(4) Im Speerwerfen erreichte keiner dieser drei Jungen eine Goldmedaille.
Wer beteiligte sich an welcher Sportart? Wer erkämpfte welche Medaille?

Klasse 6

1. Eine Strecke von 154 mm Länge soll in drei Teilstrecken a, b und c zerlegt werden. Dabei soll b doppelt so lang wie a sein, und c soll viermal so lang wie a sein.
Gib die Längen von a, b und c an!

2. Um ein Becken mit rechteckiger Grundfläche, das 18 m lang und 12 m breit ist, wird ein 2 m breiter Gang angelegt. Wie groß ist die Fläche des Ganges?

3. Gegeben sind die drei Gleichungen
(1) $a+b=10$; (2) $c+d+e=16$;
(3) $f+g+h=14$.
Anstelle von a, b, c, d, e, f, g und h sollen Zahlen so eingesetzt werden, daß drei richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen.
Dabei sind folgende Bedingungen einzuhalten:
(I) Es dürfen nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 benutzt werden.
(II) Jede dieser Zahlen darf höchstens einmal verwendet werden.
(III) Für verschiedene Buchstaben sind verschiedene Zahlen einzusetzen.
a) Da acht Buchstaben zu ersetzen sind, aber neun Zahlen zur Verfügung stehen, wird eine dieser Zahlen nicht benutzt. Welche ist das?
b) Gib ein Beispiel dafür an, wie die Zahlen eingesetzt werden können, so daß alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind!

Klasse 7

1. In einer Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Die Klasse hatte mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler.
Ermittle die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

2. Auf den Schenkeln eines spitzen Winkels BAC werden von A aus gleiche Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{AN}$ abgetragen. Ein beliebiger Punkt D (von A verschieden) der Halbierenden dieses Winkels wird mit M und N verbunden.
a) Beweise, daß $\overline{DM}=\overline{DN}$ ist!
b) Beweise, daß $\overline{MN}$ von $\overline{AD}$ halbiert wird!

3. In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, und zwar 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest besteht aus schwarzen und weißen Kugeln. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, daß unter ihnen mit Sicherheit 10 Kugeln gleicher Farbe sind.
Wie viele Kugeln muß sie mindestens herausnehmen?

Klasse 8

1. In einer Klassenarbeit erhielten 5 Schüler die Note „Eins", acht Schüler die Note „Zwei", 4 Schüler die Note „Vier". Alle übrigen Schüler erhielten die Note „Drei". Der Durchschnitt der Arbeit betrug genau 2,5.
Wieviel Schüler haben diese Arbeit mitgeschrieben?

2. Gegeben sei ein beliebiges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Seine Diagonalen mögen einander in S schneiden.
Beweise, daß die Dreiecke ASD und BCS einander flächengleich sind!

3. Marianne sagt: „Ich habe mich in meinem Leben erst viermal geirrt." Darauf erwidert Uli: „Dann hast du dich jetzt zum fünften Mal geirrt."
Zeige, daß Ulis Aussage auf jeden Fall falsch ist!

Klasse 9

1. Ermitteln Sie alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen:
(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die vier aufeinanderfolgende einstellige natürliche Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden keine Anforderungen gestellt.
(2) Die Zahl ist durch 45 teilbar.

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC.
Darin seien β und γ die Größen der Innenwinkel ABC bzw. BCA. Auf der Seite $\overline{BC}$ liege ein Punkt D so, daß der Winkel BDA die Größe $90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ hat.
Beweisen Sie, daß D auf der Halbierenden des Winkels BAC liegt!

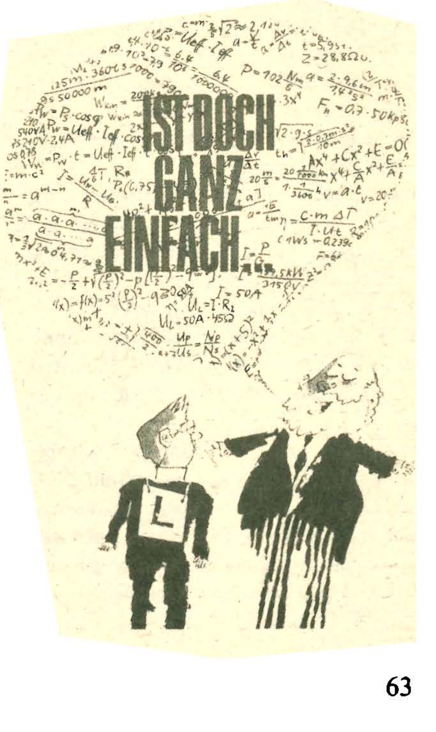
3. In
$$\begin{array}{r} \text{HAUS} \\ +\ \text{HAUS} \\ \hline \text{STADT} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an!
(Es sei vorausgesetzt, daß keine der Zahlen mit der Ziffer 0 beginnt.)

Klasse 10

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei bekannt:
$\overline{AC}=6$ cm; $\overline{BC}=8$ cm; Winkel $BCA=90°$.
a) Berechnen Sie die Länge von $\overline{AB}$!
b) Das Lot von C auf AB habe den Fußpunkt D. Berechnen Sie die Länge von $\overline{CD}$!

2. Beweisen Sie folgenden Satz:
Setzt man vor eine dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so ist die entstehende sechsstellige bzw. siebenstellige Zahl stets durch 3, 23 und 29 teilbar!

3. Gegeben seien n Punkte $A, B, C, D, \ldots$ in der Ebene. Sie sollen so miteinander verbunden werden, daß jeder dieser Punkte mit genau drei anderen Punkten direkt (d. h., ohne daß die Verbindungslinie einen weiteren dieser Punkte trifft) verbunden ist.
a) Zeigen Sie, daß das für $n=6$ möglich ist!
b) Begründen Sie, daß das für $n=7$ nicht möglich ist!



Genauigkeit gefragt!

Teil 1: Zur Addition und Subtraktion von Näherungswerten

Klaus bekommt zur Jugendweihe von seinen Eltern einen Taschenrechner. Bei allen möglichen Rechnungen verwendet er ihn nun. Dabei ist Klaus immer wieder erstaunt, wie schnell und genau man mit diesem Hilfsmittel arbeiten kann.

Nach seiner 14tägigen Urlaubsfahrt versuchte er, die von ihm zurückgelegte Fahrstrecke zu ermitteln.

Er war am 1. August von Leipzig mit dem Fahrrad zu seiner Tante nach Halle gefahren. Mit Hilfe seines Kilometerzählers am Fahrrad ermittelte er eine Fahrstrecke von 41,4 km.

Nach einem dreitägigen Aufenthalt in Halle ging es per Anhalter nach Rostock Lütten Klein. Hier verbrachte Klaus 10 erholsame Tage bei seiner Schwester, die ihn am 14. August mit dem Auto nach Halle zurückbrachte. Die Entfernung betrug entsprechend der Anzeige des Kilometerzählers am Auto 384 km. Die Strecke Halle–Leipzig fuhr Klaus wieder mit seinem Fahrrad.

Hier sind nun die Entfernungen für die einzelnen Teilstrecken angegeben:

Leipzig–Halle	41,4 km,
Halle–Rostock	380 km,
Rostock–Halle	384 km,
Halle–Leipzig	41,8 km.

Die Entfernung Halle–Rostock bestimmte Klaus mit Hilfe einer Autokarte.

Nachdem Klaus die Entfernungen mit seinem Taschenrechner addiert hatte, schrieb er in sein Tagebuch „Fahrstrecke Leipzig–Halle–Rostock und zurück 847,2 km".

Was meinst du zu dieser Angabe?

Ist Klaus – ausgehend von seinen Entfernungsangaben – berechtigt, die Gesamtstrekke in Kilometer auf Zehntel genau anzugeben?

Betrachten wir dazu die einzelnen Angaben: Bei allen Werten handelt es sich um Näherungswerte. Mit Näherungswerten, die durch Messen, Schätzen oder Runden entstanden sein können, wird jeweils ein Intervall angegeben, in dem der genaue Wert liegt.

Mit dem Näherungswert 41,4 km gibt man an, daß der wahre Wert der Strecke s_1 zwischen 41,35 km und 41,45 km liegt, d. h., hätte man den wahren Wert auf Zehntel gerundet, so hätte man 41,4 km erhalten.

● Gib das Intervall an, das mit dem Näherungswert 41,8 km beschrieben wird!

Da der Kilometerzähler des Autos nicht die Zehntelkilometer angibt, liegt der genaue Wert der Fahrstrecke s_2 (Rostock–Halle) in folgendem Intervall:

$383{,}5\ \text{km} \leqq s_2 \leqq 384{,}5\ \text{km}$.

Die getrampte Strecke Halle–Rostock hat Klaus im Nachhinein mit Hilfe eines Lineals und der Autokarte seines Vaters ermittelt. Gehen wir davon aus, daß die Strecke nur auf Zehner genau bestimmt wurde, d. h. die Null der Angabe 380 km nicht mehr *zuverlässig* ist, so liegt der wahre Wert zwischen 375 km und 385 km. Könnte man davon ausgehen, daß man 380 km auf Einer gerundet hätte, wäre die Null eine *zuverlässige* Ziffer, und der wahre Wert läge im Intervall 379,5 km und 380,5 km.

Wie wir sahen, sind die einzelnen Näherungswerte jeweils als Angaben für ein Intervall aufzufassen, in denen der genaue Wert liegt.

Die Gesamtentfernung zu ermitteln, bedeutet wiederum die Angabe eines Intervalls.

Am genauesten erhält man dieses Intervall, indem man die jeweils kleinsten Werte (untere Wertschranken) und die jeweils größten Werte (obere Wertschranken) der einzelnen Intervalle addiert. In unserem Fall müßten wir die untere Wertschranke wie folgt berechnen:

$41{,}35\ \text{km} + 375\ \text{km} + 383{,}5\ \text{km} + 41{,}75\ \text{km} = 841{,}6\ \text{km}$.

Für die obere Wertschranke ergibt sich analog:

$41{,}45\ \text{km} + 385\ \text{km} + 384{,}5\ \text{km} + 41{,}85\ \text{km} = 852{,}8\ \text{km}$.

Wie man sieht, wird mit dem von Klaus ermittelten Wert von 847,2 km ein viel zu kleines Intervall beschrieben, d. h. eine viel zu große Genauigkeit vorgetäuscht, denn mit dem Näherungswert 847,2 km müßte der wahre Wert zwischen 847,15 km und 847,25 km liegen.

Würde man 847,2 km auf 847 km runden, so ist das damit beschriebene Intervall noch immer viel zu klein.

Mit 800 km würde ein zu großes Intervall angegeben, da dieser Näherungswert nur eine zuverlässige Ziffer enthält, nämlich die 8. Will man das Berechnen von Wertschranken umgehen, also von 847,2 km ausgehen, so müßte man dieses Resultat auf 850 km runden. Das mit dieser Zahl angegebene Intervall stimmt zwar auch nicht mit dem durch Wertschranken ermittelten überein, doch kommt es diesem von den in Frage kommenden am nächsten.

Als grobe Faustregel gilt:

(1) Bei der *Addition* und *Subtraktion* von Nährungswerten ist im Ergebnis höchstens die Stelle noch zuverlässig, bis zu der *alle* Eingangsdaten zuverlässig sind.

Betrachten wir dazu nochmals die Entfernungsangaben von Klaus. Bei allen Angaben war die Stelle der Zehner mit einer zuverlässigen Ziffer besetzt. Bei den Einern war das (wegen der Entfernungsangabe Halle–Rostock) schon nicht mehr der Fall, d. h., nach (1) ist das Ergebnis auf Vielfache von 10, also auf 850 km zu runden.

Klaus könnte als ermittelte Gesamtstrecke seiner Reise 850 km angeben.

Aufgaben

▲1▲ Gib – ausgehend von den Sachverhalten und den vorgegebenen Zahlenwerten – ein Intervall an, in dem der wahre Wert liegt!

- Seitenlänge eines Vierecks: 3,4 cm
- Zuschauerzahl bei einem Fußballspiel: 45000
- Zimmertemperatur (mit einem Zimmerthermometer gemessen): 21 °C
- Körpertemperatur (mit einem Fieberthermometer gemessen): 37,0 °C
- Wanderweg: 5,4 km

▲2▲ Ermittle die Gesamtzuschauerzahl der sechs angegebenen Sportveranstaltungen des Monats Mai auf dem Sportplatz der BSG *Einheit*!

	Zuschauer
1. Mai Volkssportfest	750 auf Vielfache von 10 gerundet
6. Mai Fußballspiel	3000 auf Vielfache von 1000 gerundet
12. Mai Schulsportfest	150 auf Vielfache von 10 gerundet
18. Mai Fußballspiel	1500 auf Vielfache von 1000 gerundet
22. Mai Betriebssportfest	600 auf Vielfache von 100 gerundet
28. Mai Kreismeisterschaft der Leichtathleten	400 auf Vielfache von 100 gerundet.

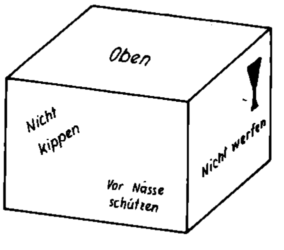
▲3▲ Für die Seitenlängen a, b eines Rechtecks wurden folgende Meßergebnisse angegeben: $a = 41$ cm, $b = 3{,}1$ m.

Ermittle den Umfang des Rechtecks, und runde sinnvoll!

L. Flade

Überraschungen mit einem Würfel

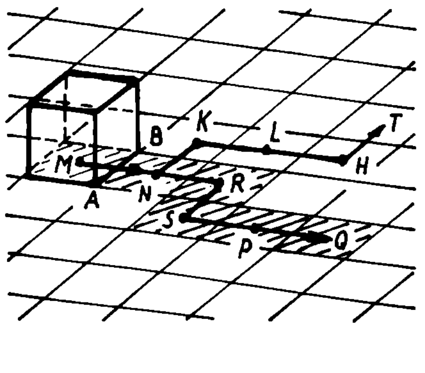
Überall in unserer Umwelt steckt Mathematik. Sogar ein Würfel, wie ihr ihn aus Gesellschaftsspielen oder auch aus einem Kinderbaukasten kennt, birgt einige mathematische Überraschungen. Um die Umwelt zu studieren, darf man sie nicht nur einfach anschauen – man muß sie *beobachten*. Aber auch das ist zu wenig: Man muß *experimentieren*.
Für unsere Experimente mit einem Würfel brauchen wir ein *Quadratgitter* – ein Blatt quadratisch karierten Papiers, bei dem die Seitenlängen der Quadrate mit der Kantenlänge unseres Würfels übereinstimmen. Auf diesem Gitter werden wir den Würfel bewegen.



Der Würfel zeichnet sein Netz

Wir legen den Würfel auf das Quadrat mit dem Mittelpunkt M (Bild 1); dann drehen wir den Würfel um 90° um seine Kante $\overline{AB}$, die mit einer Seite des Gitters zusammenfällt (d. h., wir *kippen* ihn um die Kante $\overline{AB}$). Der Würfel liegt jetzt mit einer anderen Fläche auf dem Quadrat mit dem Mittelpunkt N. Diesem Kippen kann man die Strecke $\overline{MN}$ zuordnen.
Wir führen nun fünf aufeinanderfolgende Kippungen aus, die durch den Streckenzug $MNRSPQ$ festgelegt sind. Bei dieser Bewegung berührt der Würfel nacheinander sechs Quadrate des Gitters, diese bilden ein Vieleck (schraffierte Fläche in Bild 1). Überprüft durch ein Experiment, daß dabei jede Begrenzungsfläche des Würfels das Netz genau einmal berührt! Das schraffierte Vieleck ist deshalb ein *Netz* des Würfels.
Es ist leicht einzusehen, daß auch der Streckenzug $MNKLHT$ ein Netz des Würfels festlegt, das jedoch vom ersten verschieden ist.

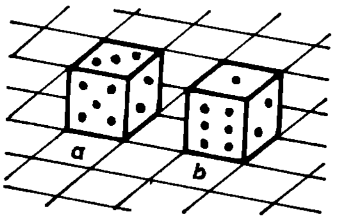
Bild 1



▲1▲ Findet durch fortlaufendes Kippen des Würfels experimentell noch zwei seiner Netze, die von den beiden aus Bild 1 verschieden sind!

▲2▲ Im Bild 2 ist ein und derselbe Spielwürfel in zwei verschiedenen Lagen dargestellt. Welche seiner Begrenzungsflächen trägt die „4"?

Bild 2



▲3▲ Ein Spielwürfel befindet sich in der linken unteren Ecke eines 3 x 10-Gitters (3 Spalten aus je 10 quadratischen Feldern) in der in Bild 2a angegebenen Ausgangslage. Kann der Würfel (durch fortlaufendes Kippen) über alle Felder des Gitters laufen, wenn er kein Feld mit der „3" berühren darf?

Der Würfel färbt die Ebene

Beschäftigen wir uns jetzt mit einem Würfel mit verschiedenfarbigen Begrenzungsflächen. Wir nehmen an, daß jede Fläche des Würfels das Feld des Gitters, das sie gerade berührt, mit der entsprechenden Farbe einfärbt. Auf jedem Quadrat soll sich der Würfel nur einmal aufhalten dürfen.

Nun lösen wir gemeinsam die folgende *Aufgabe*:

▲4▲ Kann ein Würfel mit verschiedenfarbigen Begrenzungsflächen, der fortlaufend um jeweils eine seiner Kanten gekippt wird, ein 4 x 4-Gitter so einfärben, daß es keine benachbarten gleichfarbigen Quadrate gibt?

Das Besondere des aufgeworfenen Problems kann man sich am leichtesten auf experimentellem Wege klarmachen, indem man zunächst kleinere Gitter betrachtet: Beim Überstreichen eines 2 x 2-Gitters sind das erste und das letzte Quadrat stets sowohl benachbart als auch gleichfarbig. Es ist also nicht möglich, eine *scharfe* Kurve des Typs $RNKL$ (Bild 1) durch fortlaufendes Kippen zu beschreiben. Aber ohne solche *scharfen* Kurven kann man auch kein 3 x 3-Gitter und kein 4 x 4-Gitter überstreichen. Folglich kann man keine Färbung, wie sie in Aufgabe 4 gefordert wird, erhalten.

▲4a▲ Löst Aufgabe 4 für ein 5 x 5-Gitter!

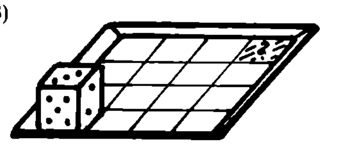
▲5▲ Kann ein Würfel mit verschiedenfarbigen Begrenzungsflächen durch fortlaufendes Kippen alle Felder eines 4 x 5-Gitters so überstreichen, daß dieses Gitter mit nur 5 Farben eingefärbt wird?

Wir kippen einen Spielwürfel

In den folgenden Aufgaben geht es wieder um einen Spielwürfel, wie er in Bild 2 dargestellt ist. Wir vereinbaren einige Regeln, nach denen der Würfel zu kippen ist:
(1) Ausgangslage ist jeweils die in Bild 2a angegebene Stellung des Würfels.
(2) Der Würfel darf nur nach rechts oder nach oben gekippt werden.
(3) Auf jedem Feld des Gitters darf sich der Würfel nur einmal befinden.

Wir beginnen mit folgender Frage:
▲6▲ Der Würfel befindet sich in Ausgangslage im linken unteren Feld eines 4 x 4-Gitters. Kann man ihn nach unseren Regeln so in die rechte obere Ecke des Gitters bringen, daß der Würfel dann auf der „3" liegt? (Bild 3)

Bild 3

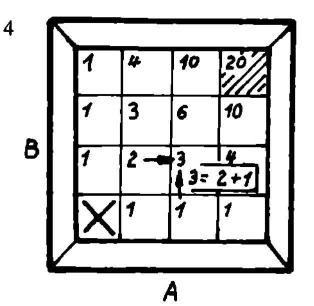


Auch jetzt ist es zweckmäßig, zunächst 2 x 2- bzw. 3 x 3-Gitter zu betrachten. Ein Versuch zeigt, daß der Würfel nur diejenigen Quadrate mit seiner „3" berührt, die in der 3. Vertikalen oder in der 3. Horizontalen (von unten gezählt) liegen. Demzufolge ist die aufgeworfene Frage negativ zu beantworten.

Ein weiteres Problem:
▲7▲ Wir haben wieder wie in Bild 3 ein quadratisches 4 x 4-Gitter, in dessen linker unterer Ecke ein Würfel liegt.
Ermittelt für jedes Feld des Gitters, auf wieviel voneinander verschiedene Arten man den Würfel nach unseren Regeln in dieses Feld bringen kann!

Experimentiert mit dem Würfel, bevor ihr die Antwort auf Bild 4 anseht! Habt ihr die Gesetzmäßigkeit erkannt, die in diesem Bild steckt? In jedem Feld ist die eingetragene Zahl gleich der Summe der beiden Zahlen, die in den unmittelbar unter bzw. links von diesem Feld liegenden Feldern stehen.

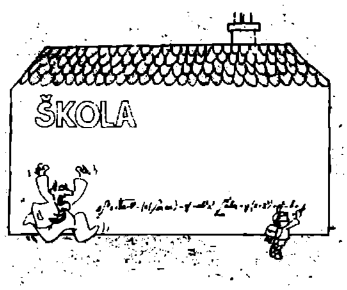
Bild 4



▲8▲ Ein Spielwürfel befindet sich in Ausgangslage im linken unteren Feld eines 4 x 4-Gitters. Auf welche Felder des Gitters kann man den Würfel nach unseren Regeln bringen, so daß er sich dort wieder in Ausgangslage befindet? Beantwortet diese Frage auch für ein 5 x 5-Gitter!

F. Bartenew

In freien Stunden · alpha-heiter



aus: Dikobraz, Prag

Die Null auf der Bank

Auf einer Bank im Sonnenschein
saß – wertlos – eine Null allein,
und niemand nahm von ihr Notiz,
nicht ein Passant, nicht die Miliz.

Da kam die Eins des Wegs daher,
zur Bank, die sozusagen leer.
Und setzt' sich ohne weitern Sinn
vor jene Null ganz einfach hin.

Im Augenblick war's eine Zehn,
und eine Frau blieb vor ihr stehn.
Sie hat dann sofort nachgedacht
und eine zweite Null gebracht,

woraus die Hundert nun entstand
und allgemeinen Beifall fand.
Denn wer vorbeikam, dem gefiel
das attraktive Zahlenspiel.

Sechs Nullen waren angehängt
und hatten sich kaum angestrengt.
Die Eins, die sprang zur Seite,
und jene Bank war pleite.

E. Winkler, aus: Eulenspiegel

Teilbarkeitsregel

Welche beiden Ziffern muß man
a) vor die Zahl 1983,
b) hinter die Zahl 1983
setzen, damit die so entstehende fünfstellige Zahl durch 101 teilbar ist?

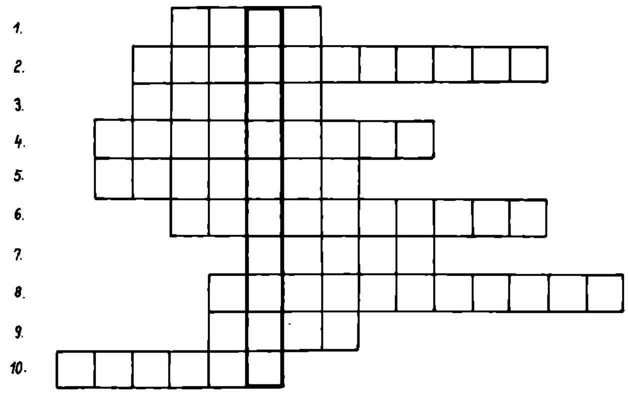
Dr. J. Riehl, EOS Egeln

Kannenknobelei

Aus einer Molkerei werden 7 volle und 7 halbvolle Kannen Magermilch sowie 7 leere Kannen an drei LPG (Landw. Produktionsgenossenschaft) zurückgeliefert. Die Kannen sollen so aufgeteilt werden, daß jede Genossenschaft die gleiche Menge Magermilch und die gleiche Anzahl Kannen erhält, ohne daß eine Umfüllung notwendig ist. Wieviel volle, halbvolle und leere Kannen muß jede LPG bekommen?

aus: NBI

Rätselspaß



1. Linie im Dreieck; 2. trennt Zähler und Nenner; 3. ein Drachenviereck hat sie immer; 4. Dreieck hat keine, Viereck hat zwei, Fünfeck hat fünf ...; 5. Viereck; 6. Festlegung; 7. Seite eines gleichschenkligen Dreiecks; 8. Rechenoperation; 9. wahre Aussage; 10. Körper

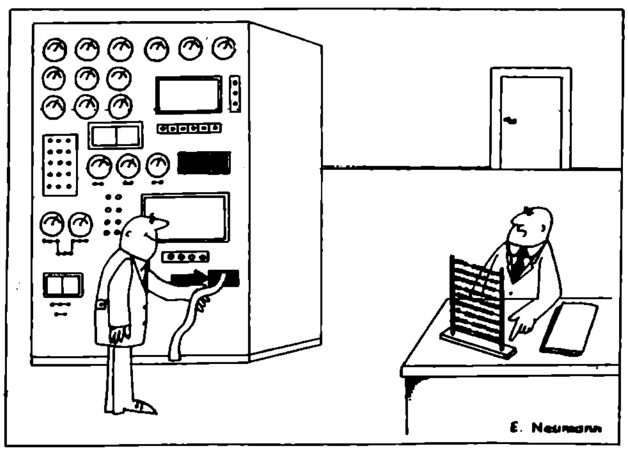
Bezirksklub Junger Mathematiker, Halle, Klassenstufe 6

Auf Pilzsuche

5 Väter und 5 Söhne gingen in den Wald und sammelten Pilze.
Obwohl jeder einen Korb voll gesammelt hatte, standen am Schluß nur 6 Körbe vor der Datsche. Wie kann das sein?

Schülerin Andrea Leuschke, Aue

„Stimmt!" *E. Neumann, aus NBI*



Zahlenpyramide

Die Buchstaben in dem Namen des deutschen Mathematikers J. H. LAMBERT (1728 bis 1777) und der Buchstabe X sind so durch Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß nachfolgende Gleichungen zu wahren Aussagen werden. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{aligned} J \cdot T &= T \\ JH \cdot T &= JXR \\ JHL \cdot T &= JJXE \\ JHLA \cdot T &= JJJXB \\ JHLAM \cdot T &= JJJJXM \\ JHLAMB \cdot T &= JJJJJXA \\ JHLAMBE \cdot T &= JJJJJJXL \\ JHLAMBER \cdot T &= JJJJJJJXH \\ JHLAMBERT \cdot T &= JJJJJJJJXJ \end{aligned}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Welcher Beruf – Welches Studienthema?

EVA D. FECHTER
BARI

ING. ANITA SCHENK-RUHM
STENDAL

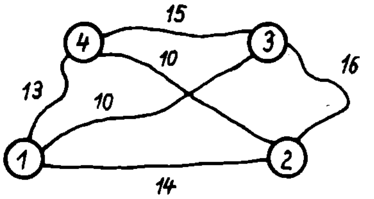
WIM KLUNG
ESSEN

HELI C. BRÜZ
EDAM

Fachlehrer D. Knape, Jessen

Rundreiseproblem

Gegeben sind 4 Städte, jede ist mit jeder durch eine Straße bekannter Länge verbunden, und ein Wanderer will von der Stadt 1 aus alle Städte auf einer kürzesten Route aufsuchen und wieder zur Stadt 1 zurückkehren. Welches ist die kürzeste Länge des Wanderweges?



Aus der math. Schülerzeitschrift Wurzel, Universität Jena

Neue Begriffe

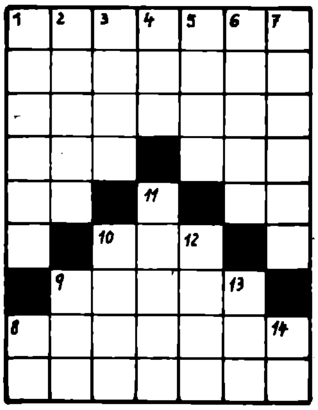
Boxreportage – Faustskizze
Taucherfahrung – Grundkenntnisse
Wer sendet der Redaktion *alpha* weitere neue mathematikintensive Begriffe?

Neues vom Juli

Angesichts der Tatsache, daß vor zwei Wochen noch Juni war und in drei Wochen schon wieder August ist, muß man doch sagen, daß der Juli ganz schön in der Klemme steckt.

Rätselfigur

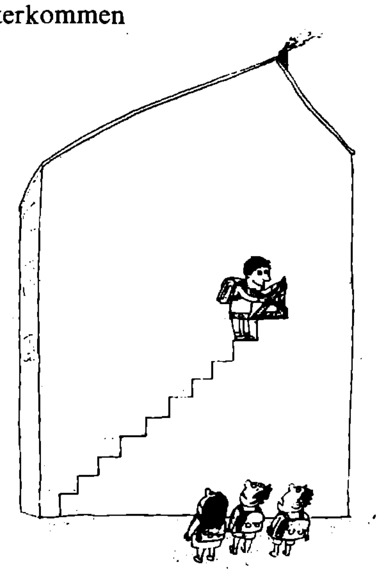
Rauf und runter: Erster Begriff – von oben nach unten, zweiter Begriff – von unten nach oben:
1. Alpenhirt/Stadt in Frankreich, 2. Stadt im Ruhrgebiet/Fluß im Bezirk Erfurt, 3. Wiesenpflanze/Bestattungsbehältnis, 4. Kurzzeichen für „modulo"/ ein Münster, 5. Einhufer/Weinernte, 6. kosmisches Gebilde/Bewegungs- und Existenzform der Materie, 7. gerbsaures Salz/wie v. o. n. u., 8. Hilfspunkt für Vermessungsarbeiten (Abk.)/Metall (chem. Formelz.), 9. Personalpronomen/Wasser in festem Zustand, 10. Stadt in Jugoslawien/Fluß in der Sowjetunion, 11. Ureinwohner Afrikas/Niederschlag, 12. ein Verb (Imperativ)/ Schnur, 13. griechischer Buchstabe/Sinnesorgan, 14. eisenähnliches Metall (chem. Formelz.)/Energieeinheit.



Bei richtiger Auflösung ergeben sich in der ersten Zeile ein Kreis- oder Kugelabschnitt und in der letzten Zeile ein Mathematiker und Statistiker (1857 bis 1936) (siehe schattierte Zeilen!).

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Weiterkommen



Nabil El-Solami, aus Elternhaus und Schule

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Aufgaben

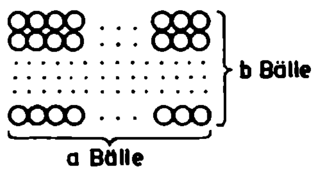
Olympiadeklasse 7

220731 Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:
A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D;
die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 M zurückerstattet.
Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:
a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?
b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

220732 Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, daß die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.
a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!
b) Beweise, daß bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

220733 Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a=5{,}0$ cm, $b=3{,}5$ cm, $c=2{,}5$ cm und $h=3{,}0$ cm! Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

220734 Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleich großen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie das Bild zeigt. Die Anzahl a und die Anzahl b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechende Anzahl in der darunterliegenden Schicht. In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Zahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Zahlen a, b.



Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

220735 Beweise folgenden Satz!
Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

220736 Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt: M ist der Mittelpunkt der Strecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CMD$ sind einander gleich groß.
Zeige, daß durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

Olympiadeklasse 8

220831 Cathrin fragte an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete: „Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl."
Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?
Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11, sondern 1911.

220832 a) Beweise, daß für $n=2, 3, 4$ und 5 der folgende Satz gilt: Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.
b) Ermittle unter den Zahlen $n=2, 3, 4, 5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

220833 Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b=6$ cm! Dabei sei b die Länge der Seite BC. Die geforderten Eigenschaften sind:
(1) Es gilt $\overline{AD}=\overline{BC}$.
(2) Es gilt $\overline{AB}:\overline{DC}=2:1$.
(3) Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

220834 Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit $250\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit $200\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.
Ermittle die Länge des Weges von A nach B!

220835 Der Zentriwinkel $\sphericalangle ASB$ eines Kreissektors s betrage 60°. In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\widehat{AB}$ von innen berührt.
Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k?

220836 Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
(1) Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S.
(2) Derjenige Teilbogen von A nach B, der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
(3) Derjenige Teilbogen von C nach D, der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{\sphericalangle ASD}=\frac{1}{2}(\overline{\sphericalangle AMB}+\overline{\sphericalangle CMD})$$

gilt!

Olympiadeklasse 9

220931 Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung

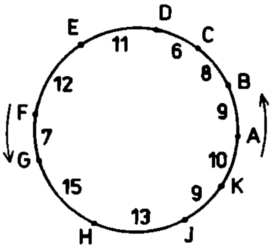
$$z=(a+b)^c$$

erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

220932 Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, daß der Kreis k_2 durch den Punkt M_1

geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1, k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 bzw. P_2 genannt.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

220933 Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße von 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich. Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, daß ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglänge zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, daß es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)
Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

220934 Jens behauptet, daß man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Dirk behauptet dagegen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Wer hat recht?

220935 Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.
Beweisen Sie, daß für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $\overline{PS}^2+\overline{QS}^2$ denselben Wert hat!
Ermitteln Sie diesen Wert!
Hinweise: 1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z. B. $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

220936 Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ und $\overline{BC}=a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.
Ermitteln Sie die Länge $\overline{QR}$ in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

Olympiadeklasse 10

221031 Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die $0<x\leqq y\leqq z\leqq u\leqq v$ und
$x+y+z+u+v=x\cdot y\cdot z\cdot u\cdot v$ gilt!

221032 Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, daß M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.
Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!
Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\sphericalangle APB$ halb so groß ist wie $\sphericalangle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

221033 Beweisen Sie, daß $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

221034 Beweisen Sie folgende Aussage!
In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, daß je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

221035 Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch
$$f(x)=1981x^4+1979x^3+1982x^2+1978x+1980$$
definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

221036 Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.
Beweisen Sie, daß es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt! Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!

Olympiadeklassen 11/12

221231 Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems
$$\begin{aligned}
x_1+11x_2+21x_3+31x_4+41x_5&=55,\\
2x_1+12x_2+22x_3+32x_4+42x_5&=60,\\
3x_1+13x_2+23x_3+33x_4+43x_5&=65,\\
4x_1+14x_2+24x_3+34x_4+44x_5&=70,\\
5x_1+15x_2+25x_3+35x_4+45x_5&=75
\end{aligned}$$
zu ermitteln.

221232 Man ermittle für alle diejenigen 30tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i=1, \ldots, 30)$, die $\sum_{i=1}^{30} a_i=1983$ erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

221233A a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks $F\leqq p\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)$.
b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks $F\leqq q\cdot(a^2+b^2+c^2)$.
Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

221233B Man beweise:
a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt
$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AD}+\overline{BC}. \qquad (1)$$
b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt.
Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

221234 Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichne f die für alle reellen $x\neq 0$ durch
$$f(x)=\sin\frac{c}{x}$$
definierte Funktion.
Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m>1$.
a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10\leqq x\leqq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.
b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, daß f im Intervall $20\leqq x<\infty$ nur endlich viele Nullstellen hat. Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

221235 a) Man beweise: Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a>0$ und $ac-b^2>0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y, die nicht beide 0 sind,
$$ax^2+2bxy+cy^2>0.$$
b) Man beweise: Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a>0$ und $ac-b^2<0$ sind, dann gibt es in der x,y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung (0; 0) zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften: Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1{}^2+2bx_1y_1+cy_1{}^2>0$; für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2{}^2+2bx_2y_2+cy_2{}^2<0$.

221236 Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden. Zu jedem Schloß soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloß passen soll. Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede

Person für jedes Schloß. Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:

- Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloß auch ein passender Schlüssel;
- immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloß keinen passenden Schlüssel.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

Leserpost

...Mit meinen Schulklassen habe ich in diesem Jahr (1981/82) geschlossen am Wettbewerb teilgenommen, so daß alle die Minimalforderungen erfüllen. Zwei meiner Schüler der 5. Klasse sind so gefesselt, daß sie ohne Aufforderung sich gegenseitig so antreiben im Lösen der Aufgaben, um meinen eigenen Aufgabenrekord von 32 Aufgaben vor 11 Jahren in einem Jahr zu brechen. Einer hat es geschafft, 64 dieses Jahr selbständig ohne Hilfe der Eltern, nur mit einigen Hinweisen in der Schule, zu lösen...

Mit freundlichen Grüßen,
Ihre ganz jungen Kollegen Hartwig und Birgit Göpfert geb. Krötenheerdt, Stadtroda

...Lehrreiche Berichte mit anschließendem Quellenhinweis lese ich aufmerksam und besorge mir die entsprechende Lektüre...
Schüler Steffen Padelt, Berlin-Buch

...Seit 1977 nehme ich am *alpha*-Wettbewerb teil. Zur Zeit bin ich Studentin an der Fachschule für Kindergärtnerinnen in Berlin. Ich bleibe der *alpha* nach wie vor treu...
Petra Köbke, Oranienburg

...Mir imponiert immer wieder das Niveau und die Vielseitigkeit der gestellten Wettbewerbsaufgaben...
Schüler Rolf Kuhn, Leipzig

...Liebe *alpha*! Ich sah Dich zufällig in einem Zeitungskiosk und kaufte Dich aus Neugier. Deinen Wettbewerb machte ich erfolgreich mit... Ich war dann aber schlauer und abonnierte Dich.
Schülerin Daniele Burkhardt, W.-P.-Stadt Guben

...Ich hatte wieder viel Freude an den gestellten Aufgaben. Da sie sich nicht so einfach in das Schema eines gerade behandelten Stoffgebiets einfügen lassen, waren sie mir eine große Hilfe in Vorbereitung auf das Abitur...
Schülerin Uta Bolz, Cottbus

...Wir haben gern gearbeitet, mit Fleiß, Ausdauer und manchmal heftigen Diskussionen die Lösungen gesucht. Auch im kommenden Jahr sind wir dabei...
AG Mathe, Kl. 6a, OS Staßfurt

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade) Lösungen

Olympiadeklasse 5

220521 Es gibt genau die folgenden Verteilungen der geforderten Art:

A	0	0	0	0	1	1	1	2
B	0	1	2	3	1	2	3	2
C	7	6	5	4	5	4	3	3

220522 Wegen $2 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 10 = 100 + 120 + 120 + 10 = 350$ wurden 350 cm Schnur verwendet.

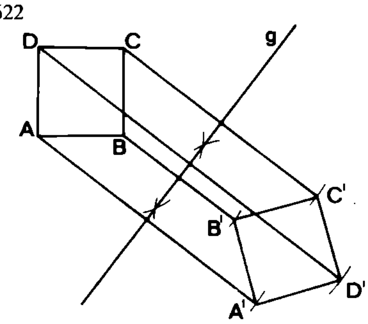
220523 Wegen $650 - 100 = 550$ sind 550 Schüler Mitglied mindestens je einer Arbeitsgemeinschaft. Wegen $550 - 400 = 150$ sind von diesen 550 Schülern 150 Mitglieder nur in einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
Unter den 500 Mitgliedern von Sport-Arbeitsgemeinschaften sind wegen $500 - 150 = 350$ folglich 350 Schüler auch Mitglied je einer anderen Arbeitsgemeinschaft.

220524 Wegen $2 \cdot 7 + 5 = 19$ kosten die 7 Bleistifte und 5 Hefte ebensoviel wie 19 Hefte. Wegen $380 : 19 = 20$ kostet ein Heft folglich 20 Pf. Wegen $2 \cdot 20 = 40$ kostet also ein Bleistift 40 Pf.

Olympiadeklasse 6

220621 Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:
$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280\,\text{cm}^2 = 2140 \cdot 280\,\text{cm}^2 = 599\,200\,\text{cm}^2$,
das sind 59,92 m², also rund 60 m².
Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund
$L_W = 60 \cdot (28 + 26 + 83)\,\text{Pf} = 60 \cdot 137\,\text{Pf} = 8220\,\text{Pf}$, das sind 82,20 M.
Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten:
$A_D = (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350)\,\text{cm}^2 = (550 + 170) \cdot 350\,\text{cm}^2 = 720 \cdot 350\,\text{cm}^2 = 252\,000\,\text{cm}^2$,
das sind 25,2 m², also rund 25 m².
Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit rund
$L_D = 25 \cdot (28 + 26 + 112)\,\text{Pf} = 25 \cdot 166\,\text{Pf} = 25 \cdot 166\,\text{Pf} = 4183\,\text{Pf}$,
das sind 41,83 M.
Die gesamten Lohnkosten L betragen daher $L = (82{,}20 + 41{,}83)\,\text{M} = 124{,}03\,\text{M}$,
das sind rund 124 M.

220622



220623 Ein Lösungsweg:
Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie $3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$. Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müßte der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht. Also muß der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, daß auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

220624 Aus (7) folgt $c > a$,
aus (1) folgt $a > e$,
aus (4) folgt $e > d$,
aus (6) folgt $d > b$.
Daher können nur bei der Anordnung
$$c > a > e > d > b$$
die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein.
Sie sind erfüllbar, z. B. durch
$b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, $a = 8$, $c = 16$;
denn
8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,
1 ist ein Teiler von 16,
16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,
2 ist ein Teiler von 4,
8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1,
1 ist ein Teiler von 2,
16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8,
8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

Olympiadeklasse 7

220721 I. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Die aus den letz-

ten drei Ziffern von z gebildete Zahl ist eine der Zahlen
$5^3=125, 6^3=216, 7^3=343, 8^3=512, 9^3=729$; denn wegen $4^3<100$ und $10^3>999$ sind dies die einzigen dreistelligen Kubikzahlen.
Da z und somit die letzte Ziffer von z gerade ist, verbleiben nur die Möglichkeiten 216 und 512 für die letzten drei Ziffern von z. Also endet die aus den ersten drei Ziffern von z gebildete Zahl auf 2 oder 5. Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; denn endet eine natürliche Zahl a auf

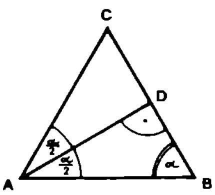
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9,

so endet ihre Quadratzahl auf

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 bzw. 1.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit 512 für die letzten drei Ziffern von z, und die ersten drei Ziffern bilden eine auf 5 endende Quadratzahl, also eine der Zahlen 5^2, 15^2, 25^2, 35^2, ... Von diesen sind wegen $5^2<100$ und $35^2>999$ nur $15^2=225$ und $25^2=625$ dreistellig.
Damit ist gezeigt, daß nur 22512 und 62512 die geforderten Eigenschaften haben können.
II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie sind gerade und fünfstellig, sie enthalten die Ziffer 0 nicht, 225 sowie 625 sind Quadratzahlen, und 512 ist eine Kubikzahl.
Also sind genau 22512 und 62512 die gesuchten Zahlen.

220722 Ist $\sphericalangle BAC=\alpha$, so folgt aus (1), daß auch $\sphericalangle ABC=\alpha$ (3)

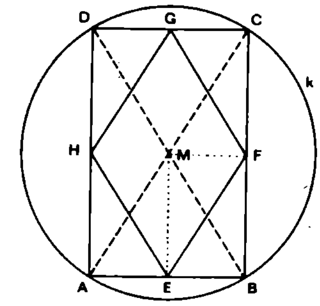


gilt (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck). Ist ferner D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$, so folgt aus (2) und (3), daß

$$\frac{\alpha}{2}+\alpha+90^\circ=180^\circ$$

gilt (Winkelsumme im Dreieck ABD). Daher ist $\frac{3}{2}\cdot\alpha=90^\circ$, also $\sphericalangle BAC=\alpha=60^\circ$, nach (3) daher auch $\sphericalangle ABC=60^\circ$.
Mithin ist das Dreieck ABC gleichseitig und somit nicht rechtwinklig. Folglich ist Veras Behauptung wahr, Ursels und Werners Behauptungen sind falsch.
Andere Beweismöglichkeiten: Aus (2) folgt $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ADC=90^\circ$. Hiernach und wegen $\overline{AD}=\overline{AD}$ gilt $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (wsw), also $\overline{AB}=\overline{AC}$. Daher und nach (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig.

220723 Der Mittelpunkt von k sei M. Im gleichschenkligen Dreieck ABM (mit $\overline{AM}=\overline{BM}=r$) ist die Seitenhalbierende ME zugleich Höhe, also gilt $\sphericalangle MEB=90^\circ$. Entsprechend folgt $\sphericalangle MFB=90^\circ$. Da ferner nach Voraussetzung auch $\sphericalangle EBF=\sphericalangle ABC=90^\circ$ ist, ist $EBFM$ ein Rechteck. In ihm sind die Diagonalen gleich lang, also gilt $\overline{EF}=\overline{MB}=r$. Entsprechend ergibt sich $\overline{FG}=r$, $\overline{GH}=r$ und $\overline{HE}=r$.



Damit ist die Behauptung $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}=4r$ bewiesen.

220724 Natürliche Zahlen a, b, c erfüllen genau dann die Forderung (2), wenn für sie die Gleichungen

$$abc=270, \quad (3)$$
$$a+b+c=20, \quad (4)$$

gelten.
I. Wenn natürliche Zahlen a, b, c die Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen, so folgt:
Nach (3) sind a, b, c von 0 verschieden; hiernach und wegen (1), (4) gilt

$$0<a<b<c<20. \quad (5)$$

Die einzigen Teiler von 270 zwischen 0 und 20 sind
1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 und 18. (6)
Die einzigen Möglichkeiten, aus diesen Zahlen zwei als a und b mit $a<b$ so auszuwählen, daß die – nach (4) erhaltene – Zahl $c=20-a-b$ auch $b<c$ erfüllt, sind in der folgenden Tabelle angegeben. Für diejenigen a, b, für die auch diese Zahl $c=20-a-b$ eine der Zahlen (6) ist, wird dann geprüft, ob auch $abc=270$ gilt:

a	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	5
b	2	3	5	6	9	3	5	6	5	6	6
c	17	16	14	13	10	15	13	12	12	11	9
c in (6)?	nein				ja	ja	nein				ja
abc					90	90					270

Es ergibt sich, daß nur $a=5$, $b=6$, $c=9$ die Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen können.
II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $5<6<9$, $5\cdot 6\cdot 9=270$, $5+6+9=20$.
Damit ist gezeigt: Es gibt Zahlen, die die Forderungen (1), (2) erfüllen, sie sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt und lauten $a=5, b=6, c=9$.

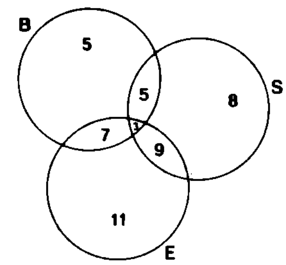
Olympiadeklasse 8

220821 Ein Lösungsweg:
a) Für das Jahr 1981 gilt: Da (1) wahr ist, folgt:
Anke fährt an die Ostsee. (3)
Da (2) falsch ist, folgt: Christine fährt nicht in den Thüringer Wald. Daraus und aus (3) ergibt sich:
Christine fährt in die Sächsische Schweiz. (4)
Nach (3) und (4) verbleibt nur noch:
Birgit fährt in den Thüringer Wald. (5)
Damit ist bewiesen, daß sich für 1981 die Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig ermitteln lassen. Sie lauten wie in (3), (4), (5) angegeben.
b) Für das Jahr 1982 gilt: Da (1) falsch ist, fährt Anke nicht an die Ostsee. Würde sie in den Thüringer Wald fahren, so könnte Christine nicht dorthin und Anke nicht in die Sächsische Schweiz fahren, also wäre (2) dann falsch. Damit ist gezeigt:
Anke fährt in die Sächsische Schweiz. (6)
Bereits mit (6) ist erreicht, daß (1) falsch und (2) wahr ist. Dies gilt daher bei jeder der beiden nach (6) noch möglichen Verteilungen der Reiseziele (Birgit an die Ostsee, Christine in den Thüringer Wald oder umgekehrt). Damit ist für 1982 bewiesen:
Die Reiseziele von Birgit und Christine lassen sich nicht eindeutig ermitteln; das Reiseziel von Anke läßt sich dagegen eindeutig ermitteln, es lautet, wie in (6) angegeben.

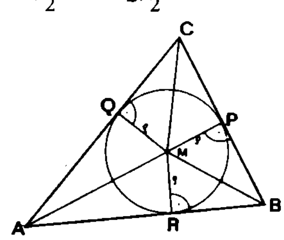
220822 Die gesuchten Eintragungen können durch folgende Rechenschritte gefunden werden:

Angabe Nr.	Gesuchte Antworten	Folgerung aus Angaben Nr.	Berechnung der Anzahl
8	(A) Ja, (B) Ja, (C) Nein	4,7	8-3 = 5
9	(A) Ja, (B) Nein, (C) Ja	6,7	10-3 = 7
10	(A) Nein, (B) Ja, (C) Ja	5,7	12-3 = 9
11	(A) Ja, (B) Nein, (C) Nein	1,7,8,9	20-3-5-7 = 5
12	(A) Nein, (B) Ja, (C) Nein	2,7,8,10	25-3-5-9 = 8
13	(A) Nein, (B) Nein, (C) Ja	3,7,9,10	30-3-7-9 = 11
Aufgabe a)	Keinmal Ja	7,...,13	50-3-5-7-9-5-8-11=2
b)	Genau einmal Ja	11,12,13	5+8+11 = 24
c)	(A) Ja und (B) Nein	9,11	7+5 = 12
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	7,...,11,13	3+5+7+9+5+11 = 40

Andere Darstellungen des Lösungsweges, z. B. in Textformulierung oder mit einem Mengendiagramm (siehe Bild), sind ebenfalls möglich und zulässig.



220823 Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Sein Inkreis habe den Mittelpunkt M und berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in P, Q bzw. R. Dann ist $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=u$ und $\overline{MP}=\overline{MQ}=\overline{MR}=\varrho$.
Ferner gilt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $MP\perp BC$, $MQ\perp CA$, $MR\perp AB$. Die Dreiecke BCM, CAM bzw. ABM haben folglich die Flächeninhalte
$\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{MP}$, $\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\overline{MQ}$, $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{MR}$.



Andererseits ist die Summe dieser Flächeninhalte gleich F; daher gilt

$$F=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\varrho+\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\varrho+\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\varrho=\frac{1}{2}u\cdot\varrho.$$

Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung

$$\varrho=\frac{2F}{u}.$$

220824 Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, so folgt:
Da AE nach (2) Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ ist, gilt

$$\sphericalangle BAE=\sphericalangle EAD. \tag{3}$$

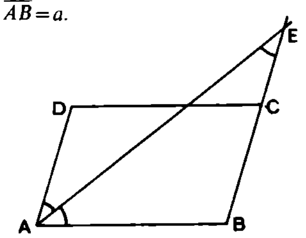
Ferner sind $\sphericalangle EAD$ und $\sphericalangle BEA$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also ist

$$\sphericalangle EAD=\sphericalangle BEA. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\sphericalangle BAE=\sphericalangle BEA,$$

also ist das Dreieck ABE gleichschenklig mit $\overline{BE}=\overline{AB}=a$.



Aus (2) folgt somit
$a=\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{CE}=b+3$ cm, d. h.

$$a-b=3\text{ cm}. \tag{5}$$

Wegen der gleichen Länge der Gegenseiten im Parallelogramm ist nach (1) mithin

$$a+b=18\text{ cm}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt durch Addition $2a=21$ cm, also $a=10{,}5$ cm und damit aus (5) $b=(10{,}5-3)$ cm $=7{,}5$ cm. Somit ist bewiesen, daß durch (1), (2) die Seitenlängen a, b eindeutig bestimmt sind. Sie betragen $a=10{,}5$ cm $b=7{,}5$ cm.

Olympiadeklasse 9

220921 I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1), (2) genügt, so folgt: Nach (2) ist die Zahl $(n-1)(n+1)$ durch 10 teilbar, also gerade. Folglich ist (mindestens) eine der Zahlen $n-1$, $n+1$ gerade. Somit ist n ungerade und daher $n-9$ gerade. Da aber 2 die einzige gerade Primzahl ist, so folgt aus (1), daß $n-9=2$ und daher $n=11$ sein muß. Also kann nur die Zahl $n=11$ den Bedingungen (1), (2) genügen.
II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn für $n=11$ ist $n-9=2$ eine Primzahl, und $n^2-1=120$ ist durch 10 teilbar.
Daher genügt genau die Zahl $n=11$ den Bedingungen (1), (2).

220922 Es gilt

$$a=\frac{(x+y\sqrt{z})^2+(x+y\sqrt{z})^2}{2}=x^2+y^2z, \tag{1}$$

$$b=\frac{x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z-x^2+2xy\sqrt{z}-y^2z}{\sqrt{z}}$$

$$=2xy, \tag{2}$$

$$c=(x^2+y^2z)^2-(x^2-y^2z)^2. \tag{3}$$

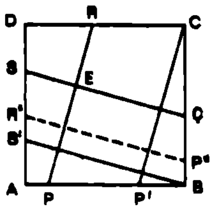
Da x, y, z natürliche Zahlen sind, folgt aus (1), (2), (3), daß auch a, b, c natürliche Zahlen sind. Ferner ergibt sich

$$c=4x^2y^2z=2xy\cdot 2xyz,$$

$$c=b\cdot 2xyz. \tag{4}$$

Da $2xyz$ ganzzahlig ist, folgt aus (4), daß b ein Teiler von c ist. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

220923 Aus den Voraussetzungen (1) bis (4) folgt:
Die Strecken PR und QS schneiden sich in einem Punkt E. Es gilt
$\sphericalangle BPR=180°-\sphericalangle APE$ (Nebenwinkel)
$=\sphericalangle ASQ$ (Winkelsumme im Viereck $APES$ mit rechtem Winkel bei A und wegen (5) bei E).
Nun gibt es nur die folgenden drei Fälle:
1. Fall: $\sphericalangle BPR=90°$.



In diesem Fall sind $BPRC$ und $ASQB$ Rechtecke. Daher gilt

$$\overline{PR}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{QS}.$$

2. Fall: $\sphericalangle BPR<90°$.
In diesem Fall schneidet die Parallele durch C zu PR die Strecke PB in einem Punkt P' zwischen P und B, und die Parallele durch B zu QS schneidet die Strecke AS in einem Punkt S' zwischen A und S. Hiernach gilt einerseits
$\sphericalangle BP'C=\sphericalangle BPR$ (Stufenwinkel)
$=\sphericalangle ASQ=\sphericalangle AS'B$ (Stufenwinkel)
sowie $\sphericalangle P'BC=\sphericalangle S'AB=90°$ und $\overline{BC}=\overline{AB}$, also $\triangle P'BC\cong\triangle S'AB$ (sww) und daher

$$\overline{P'C}=\overline{S'B}. \tag{6}$$

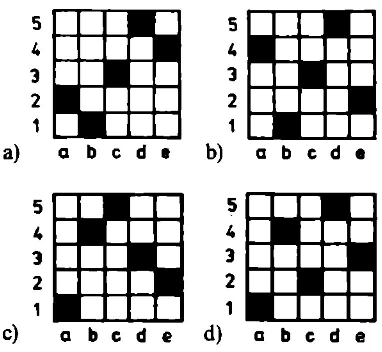
Andererseits sind $PP'CR$ und $SS'BQ$ Parallelogramme, also ist

$$\overline{PR}=\overline{P'C}. \tag{7}$$

und $$\overline{QS}=\overline{S'B}. \tag{8}$$

Aus (6), (7), (8) folgt $\overline{PR}=\overline{QS}$.
3. Fall: $\sphericalangle BPR>90°$.
In diesem Fall ist $\sphericalangle APR<90°$. Daher läßt sich wie im 2. Fall, nur mit vertauschten Bezeichnungen, $\overline{PR}=\overline{QS}$ beweisen.
Somit gilt für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, die Aussage $\overline{PR}=\overline{QS}$.

220924 I. Wenn eine Markierung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:
Es trifft nur einer der beiden folgenden Fälle zu:
Fall 1: Das Feld c3 ist markiert.
Dann kann in Zeile 1 nur eines der Felder b1, d1 markiert sein; denn a1 und e1 liegen jeweils in derselben Diagonale und c1 in derselben Spalte mit c3. Durch Spiegelung, die c3 festläßt, kann gegebenenfalls erreicht werden, daß b1 markiert ist.
Hiernach bleibt in Zeile 5 für eine Markierung nur noch d5; denn a5 und e5 liegen jeweils in derselben Diagonale, c5 in derselben Spalte mit c3, und b5 liegt in derselben Spalte mit b1.
In Zeile 2 kann dann nur eines der Felder a2, e2 markiert sein. Das führt auf die beiden Markierungen in Bild a, b. Sie sind voneinander verschieden (im Sinne der Aufgabenstellung), da in Bild a solche markierten Felder vorkommen, die an einer Ecke benachbart sind, in Bild b dagegen nicht.
Fall 2: Das Feld c3 ist nicht markiert.
Wäre dann auch keines der Felder a1, a5, e5 markiert, so müßte in jeder der beiden Diagonalen eines der Felder b2, b4, d2, d4 markiert sein, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also ist gegebenenfalls durch eine Spiegelung erreichbar, daß a1 markiert ist.
Hiernach kann in der Diagonalen von a5 bis e1 nur eines der Felder b4, d2 markiert sein; gegebenenfalls nach einer Spiegelung, die c3 und a1 festläßt, das Feld b4.
In Zeile 3 kann dann nur eines der Felder d3, e3 markiert sein. Das führt auf die beiden Markierungen in Bild c, d. Wie im Fall 1 beweist man, daß sie voneinander verschieden sind. Sie sind auch beide verschieden von beiden Markierungen des Falles 1; denn das (dort markierte und hier nicht markierte) Feld c3 bleibt bei allen Drehungen und Spiegelungen fest, die das Quadrat in sich überführen.
II. Die Markierungen in den Bildern a bis d erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe. Daher sind mit diesen Bildern alle den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Markierungen angegeben.



Olympiadeklasse 10

221021 I. Wenn ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen die Gleichung

$$2x^3+xy-7=0 \text{ erfüllt, so gilt}$$

$$x(2x^2+y)=7.$$

Da x und $2x^2+y$ ganze Zahlen sind und 7 eine Primzahl ist, folgt daraus

entweder	$x=1$ und $2x^2+y=7$		(1)
oder	$x=7$ und $2x^2+y=1$		(2)
oder	$x=-1$ und $2x^2+y=-7$		(3)
oder	$x=-7$ und $2x^2+y=-1$.		(4)

Aus (1) folgt $y=5$; aus (2) folgt $y=-97$; aus (3) folgt $y=-9$; aus (4) folgt $y=-99$.
Also können höchstens (1; 5), (7; −97), (−1; −9), (−7; −99) Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen sein, die die Gleichung $2x^3+xy-7=0$ erfüllen.
II. Sie erfüllen diese Gleichung; denn es gilt

$2\cdot 1+1\cdot 5-7=2+5-7=0$

und $2\cdot 343+7\cdot(-97)-7=686-679-7=0$

und $2\cdot(-1)+(-1)(-9)-7=-2+9-7=0$

und $2\cdot(-343)+(-7)(-99)-7=-686+693-7=0.$

Folglich haben genau die genannten Zahlenpaare die geforderten Eigenschaften.

221022 Diejenige Zahl, die in derselben Zeile wie a und in derselben Spalte wie b steht, sei c genannt. Für sie gilt $a\geqq c$, da a in der genannten Zeile die größte Zahl ist, und $c\geqq b$, da b in der genannten Spalte die kleinste Zahl ist. Daher gilt $a\geqq b$, für $a\neq b$ also sogar $a>b$. Axels Behauptung trifft mithin zu.

221023 Ein Dreieck mit den Maßzahlen a, b, c der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen ist nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung genau dann rechtwinklig mit c als Maßzahl der Hypotenusenlänge, wenn

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (3)$$

gilt. Es erfüllt genau dann (1) und (2), wenn darüber hinaus die Gleichungen

$$a+b+c=132 \qquad (4)$$

und

$$a^2+b^2+c^2=6050 \qquad (5)$$

gelten.
I. Wenn (3), (4), (5) erfüllt sind, so folgt:
Nach (3) und (5) gilt $2c^2=6050$, $c^2=3025$, wegen $c>0$ also $c=55$ und damit nach (4) und (3)

$$a+b = 77, \qquad (6)$$

$$a^2+b^2=3025. \qquad (7)$$

Aus (6) folgt $b=77-a$ und damit aus (7)

$$a^2+(77-a)^2 = 3025,$$

$$a^2-77a+1452=0. \qquad (8)$$

Wegen $\frac{77^2}{4}-1452=\frac{121}{4}>0$ folgt aus (8)

$$a=\frac{77}{2}\pm\frac{11}{2},$$

d. h. entweder $a=44$ und nach (6) dann $b=33$ oder $a=33$ und nach (6) dann $b=44$.
Also können nur die Kathetenlängen 33 cm, 44 cm und die Hypotenusenlänge 55 cm den Forderungen (1), (2) genügen.
II. Sie genügen ihnen; denn mit
$33^2+44^2=11^2(9+16)=55^2$,
$33+44+55=132$,
$33^2+44^2+55^2=11^2(9+16+25)=6050$
sind (3), (4), (5) erfüllt.
Damit ist der geforderte Beweis geführt. Die Seitenlängen betragen 33 cm, 44 cm und 55 cm.

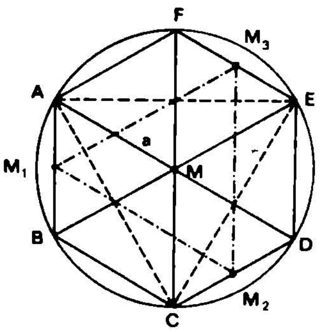
221024 Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a des Sechsecks beträgt $D=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; daher ist $F_1=6D=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

Jede der Seitenlängen des Dreiecks ACE ist gleich der doppelten Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a. Daher ist $s=\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EA}=a\sqrt{3}$ und folglich $F_2=\frac{s^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.
Wegen $\sphericalangle BAD=60°$ und $\sphericalangle ABC=2\cdot 60°$ ist $AD \parallel BC$ (Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen). Also ist M_1M_2 Mittellinie in einem Trapez, dessen parallele Seiten die Längen $2a$ bzw. a haben. Entsprechendes gilt für M_2M_3 und M_3M_1; daher ist

$$t=\overline{M_1M_2}=\overline{M_2M_3}=\overline{M_3M_1}=\frac{3}{2}a$$

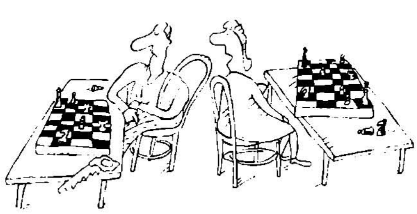
und folglich

$$F_3=\frac{t^2}{4}\sqrt{3}=\frac{9}{16}a^2\sqrt{3}.$$

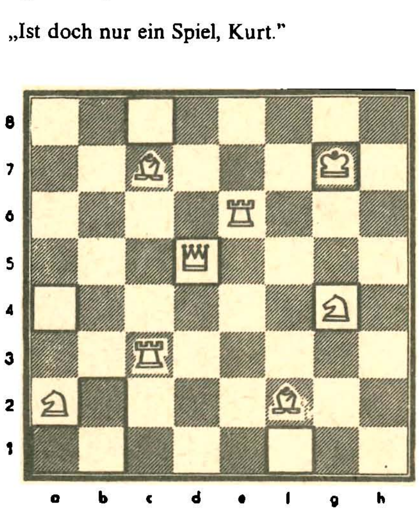


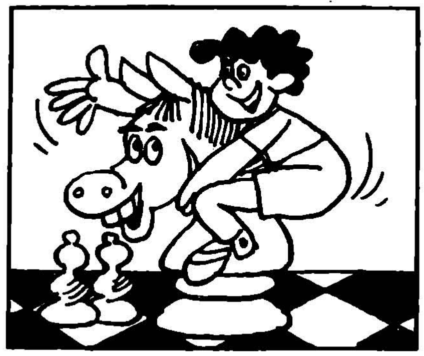
Somit gilt $F_1:F_2:F_3=\frac{3}{2}:\frac{3}{4}:\frac{9}{16}=8:4:3.$

Auf die Lösungen zur Olympiadeklasse 11/12 müssen wir aus Platzgründen verzichten.



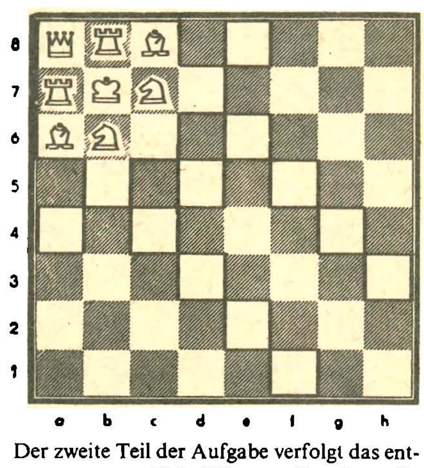
„Ist doch nur ein Spiel, Kurt.“





Wirkungskraft der Schachfiguren

Nachdem wir die Gangart der einzelnen Schachfiguren kennengelernt haben, wollen wir uns ihre Wirkungskraft auf dem Schachbrett in minimaler und maximaler Form anschauen bzw. herausfinden. Dazu stellen wir auf dem Brett acht Figuren einer Farbe – König, Dame, 2 Türme, 2 Läufer und 2 Springer – so auf, daß die geringste Anzahl von Feldern von ihnen beherrscht wird.
Machen wir zur Bedingung, daß das Feld, auf dem die Figur steht, von ihr selbst nicht beherrscht wird, doch kann es selbstverständlich von einer beliebigen anderen Figur in Übereinstimmung mit den Schachregeln bedroht werden. Dabei können die Läufer auf Felder gleicher Farbe gestellt werden.
Auf dem Diagramm 1 sind die acht Figuren so angeordnet, daß sich 22 Felder unter „Bedrohung“ befinden. Die betreffenden Felder, ausgenommen c5 und d6, sind durch eine Umrandung gekennzeichnet. Das ist noch lange nicht die untere Grenze!
a) Findet heraus, wie bei anderer Figurenaufstellung weniger Felder von den acht Figuren beherrscht werden können!



Der zweite Teil der Aufgabe verfolgt das entgegengesetzte Ziel. Wir verteilen jetzt die acht Schachfiguren so, daß sie eine maximale Anzahl von Feldern auf dem Schachbrett beherrschen. Die Bedingungen sind die gleichen wie im ersten Teil der Aufgabe.
In der Figurenaufstellung auf dem Diagramm 2 werden 55 Felder des Brettes bedroht. Die nicht bedrohten Felder sind durch eine Umrandung hervorgehoben.
b) Wie kann die Zahl der beherrschten Felder durch eine andere Stellung der Figuren vergrößert werden? *H. Rüdiger*

Das Astrolabium

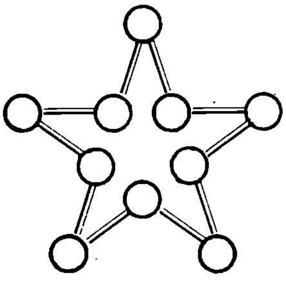
Zu den vielbewunderten mechanischen Kunstwerken in kulturhistorischen Sammlungen und Museen gehören astronomische Uhren (vgl. z. B. die abgebildete Uhr aus dem Besitz des Grünen Gewölbes Dresden auf einer DDR-Marke von 1975). Ihr Zifferblatt ist nichts anderes als ein mechanisch bewegtes Astrolabium. Das Astrolabium (lat.: etwa Sternnehmer) gehört zu den ältesten Hilfsmitteln der Positionsastronomie (auch mathematische Astronomie, sphärische Astronomie; sie beschäftigt sich unter Vernachlässigung der physikalischen Ursachen nur mit den beobachtbaren Bewegungsabläufen am Himmel).

Leider tritt das Wort Astrolabium in mehrfacher Bedeutung auf. Das sphärische Astrolabium ist ein einfaches Modell der gedachten Himmelskugel zur konstruktiven Lösung von Aufgaben der sphärischen Astronomie. Es besteht aus mehreren ineinander drehbaren und meist mit Gradeinteilung versehenen hölzernen oder metallenen Ringen, die eine Art Kugelskelett bilden. Seine Erfindung wird dem griechischen Astronomen Hipparch von Nikaia (~ 190 bis 125 v. u. Z.) zugeschrieben. Hipparch und eine urtümliche Form des sphärischen Astrolabs sehen wir auf der griechischen Briefmarke von 1965. In der Renaissance wurde das sphärische Astrolab durch mechanische Getriebe zur Armillarsphäre weiterentwickelt (siehe z. B. die 1687 von Möller gebaute auf der DDR-Marke von 1972), von der sie leider bezeichnungsmäßig heute meist nicht klar unterschieden wird. Die Armillarsphäre ist bereits ein Modell für astronomische Bewegungsabläufe, sozusagen ein primitives Planetarium. Das ebene Astrolabium (Astrolabium planisphaerium) beruht auf der stereographischen Projektion (vgl. hierzu den Artikel Euler und die Kartographie in alpha 2/1983) der Himmelskugel in die Ebene. Es wurde zusammen mit der Herleitung der grundlegenden geometrischen Eigenschaften dieser Abbildung (Kreisverwandtschaft und Winkeltreue) zuerst in einer Abhandlung des spätantiken Astronomen Ptolemaios (um 80 bis um 160 u. Z.) beschrieben. Der bewegliche Kreis dieses scheibenförmigen Gerätes modelliert in Abhängigkeit von der Tages- und Jahreszeit den jeweils sichtbaren Teil der Himmelskugel auf dem Hintergrund des stereographischen Bildes des Fixsternhimmels. Die islamischen Astronomen und Mathematiker des 9. bis 14. Jh. bildeten das ebene Astrolab zu hoher Vollkommenheit aus. In dieser orientalischen Form ist es z. B. auf der abgebildeten syrischen Marke zu sehen. Im Zeitalter der Astrologiegläubigkeit war das Astrolabium sowohl im Orient als auch in Europa ein ähnlich wichtiger und demgemäß in vielen Exemplaren verbreiteter „Gebrauchsgegenstand" wie heute die gewöhnliche Uhr. Daher sind zahlreiche Stücke in verschiedensten Varianten, mit und ohne mechanischen Antrieb, bis heute erhalten geblieben. Zur Freude an ihrer reizvollen kunsthandwerklichen Gestaltung sollte sich aber wenigstens ein Grundwissen über den ursprünglichen Verwendungszweck und das Funktionsprinzip gesellen.

P. Schreiber

Числа по периметру

▲1▲ По периметру звезды в кружочки впишите все числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в любых двух соседних кружках не делились ни на 3, ни на 5, ни на 7.



Cryptarithms

▲2▲ A popular puzzle is to take someone's name or a well-known saying and make it into an addition or subtraction sum. It is often necessary to add an extra condition in order to make the answer unique.

Example

```
  HOW     (Note the 'O'
    I S    is a letter.)
 +HI S
 -----
  S I S
```

Each letter stands for a different digit and SOW is a perfect square. A standard convention is that the left-hand end letter of each word does not stand for zero.

A variation on this type of puzzle is to take a long multiplication or division and rub out most of the numbers but indicate where they were.

Example.

```
** · 2*
-------
     **
    *2
-------
   ****
```

▲3▲ Pour construire la Tour Eiffel, on a utilisé environ 885 m^3 de fer; la masse volumique du fer est 7,8 t/m^3. Quelle masse de fer a-t-on utilisée pour cette construction?