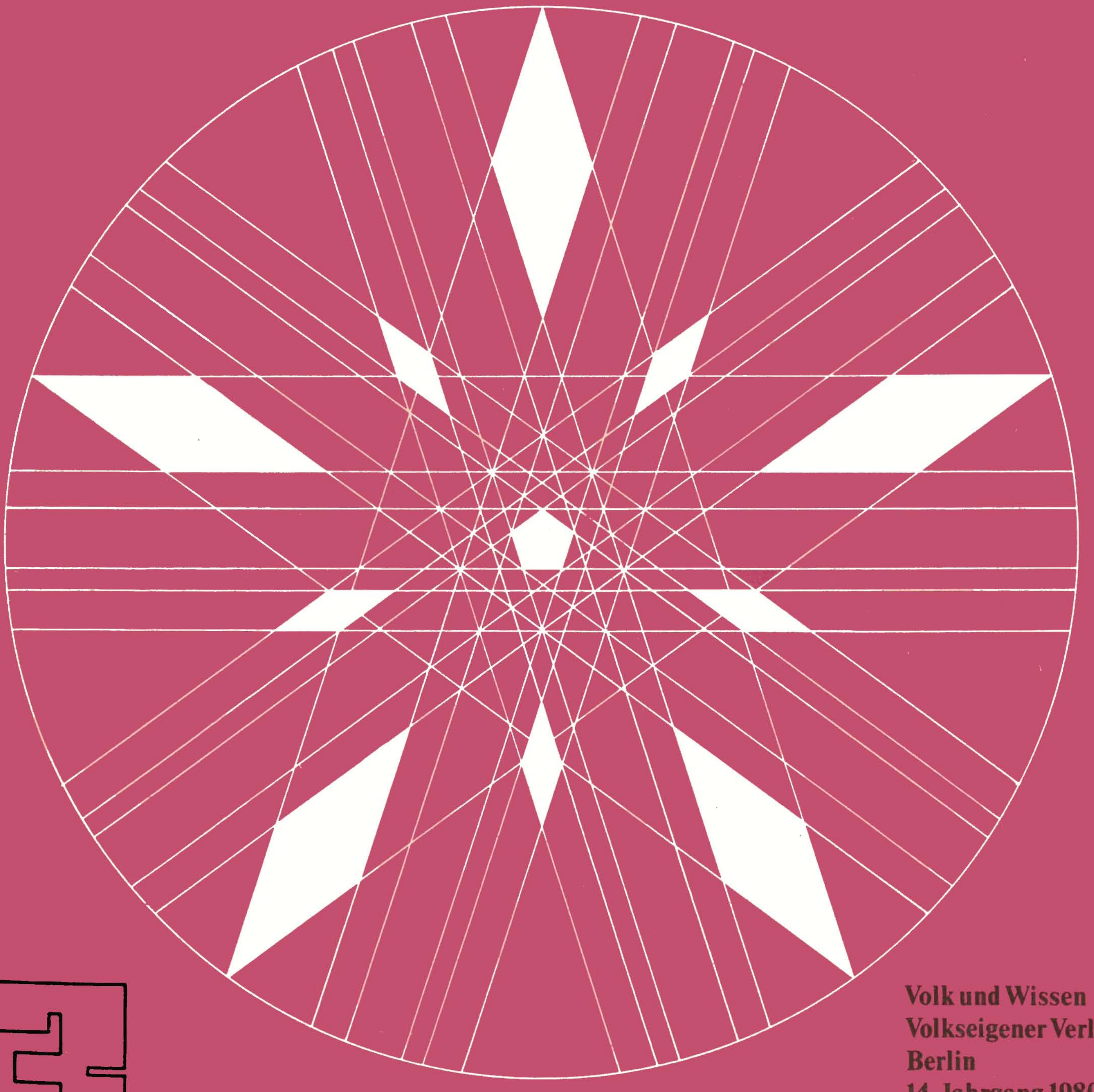
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31 059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: R. Kaps, TH Merseburg (S. 51); Archiv FK Mathematik der Stadt Greifswald (S. 55); Wunder der Rechenkunst (1857) aus der Bibliothek von J. Lehmann, Leipzig (III. U.-Seite). Das Titelblatt zu diesem Heft wurde nach dem Titelblatt der mathem. Schülerzeitschrift „Euklid“, Athen, gestaltet.
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 28. Februar 1980

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über Antipodenpunkte

Unsere Mathematikstudenten *Th. Meusel* und *G. Wallura* aus dem ersten Studienjahr in Merseburg haben sich für den Studentenvortragstag mit einem Stoff beschäftigt, der über den Vorlesungsinhalt hinausgeht und auch für mathematikinteressierte Schüler verständlich und interessant ist. Es ging um Antipodenpunkte auf Kreisen und Kugeln.

Zwei Punkte P_1, P_2 auf dem Kreisrand S^1 mit dem Radius 1 um den Nullpunkt eines (x,y)-Koordinatensystems, die „sich gegenüberliegen", d. h., die auf der gleichen Geraden durch den Nullpunkt liegen, heißen Antipodenpunkte oder auch ein Antipodenpaar des Kreises S^1. Hat also P_1 die Koordinaten (x_1, y_1), wobei gilt $x_1{}^2+y_1{}^2=1$ (weil P_1 auf S^1 liegt), so muß sein Antipodenpunkt P_2 die Koordinaten $(-x_1, -y_1)$ haben. Die Punkte $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ bilden z. B. ein Antipodenpaar des Kreises S^1. Entsprechend erklärt man Antipodenpunkte auf der Oberfläche S^2 der Kugel mit dem Radius 1 um den Nullpunkt eines (x,y,z)-Koordinatensystems. Liegt der Punkt P_1 mit den Koordinaten (x_1, y_1, z_1) auf S^2, dann gilt

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=1,$$

und der Punkt P_2 mit den Koordinaten $(-x_1, -y_1, -z_1)$ ist der zu P_1 gehörige Antipodenpunkt P_2 auf der Kugel (vgl. Bilder 1, 2).

Bild 1

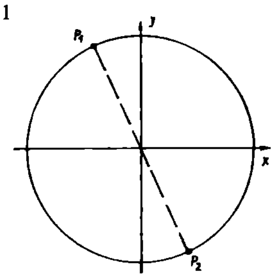
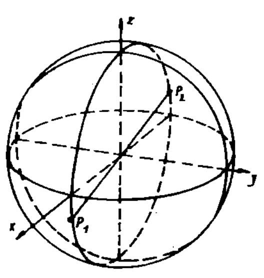
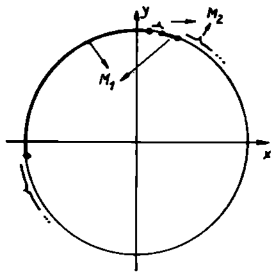


Bild 2



Wir denken uns zwei Teilmengen M_1, M_2 von S^1, so daß die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ der beiden Mengen wieder die gesamte Menge S^1 ergibt. M_1 und M_2 „überdecken" also S^1. Die genannten Mengen sollen „abgeschlossen" sein, das heißt, sie sollen ihre Randpunkte mit enthalten. Die Frage ist, ob eine der Mengen ein Antipodenpaar enthält (vgl. Abb. 3; M_1 in Bild 3 enthält sicher keine Antipodenpunkte!).

Bild 3



Bei der Kugel interessiert uns besonders eine „Überdeckung" ihrer Oberfläche S^2 durch drei Mengen M_1, M_2, M_3. Sie seien ebenfalls abgeschlossen. Um sich den Sachverhalt zu veranschaulichen, kann man sich drei Mengen auf einen Ball aufmalen, die zusammen den gesamten Ball überdecken sollen. Jetzt fällt die Antwort auf die Frage, ob wenigstens eine der drei Mengen M_1, M_2, M_3 einen Antipodenpunkt enthält, schon schwerer. Bei der Diskussion dieser Frage „direkt am Ball" wird man feststellen: Wenn man die Kugeloberfläche S^2 mit vier (oder mehr) Mengen überdeckt, so kann der Fall eintreten, daß keine der erwähnten Mengen ein Antipodenpaar enthält.

Der berühmte „Antipodensatz" von *L. A. Ljusternik* und *L. G. Schnirelman* (1930) beantwortet unsere Fragen (und ist noch in allgemeineren Fällen gültig): Wird die Kreislinie S^1 von zwei bzw. die Kugeloberfläche S^2 von drei abgeschlossenen Teilmengen überdeckt, so enthält mindestens eine der Mengen ein Antipodenpaar.

Der an Mathematik interessierte Schüler wird fragen, wie der Beweis eines so einfach zu formulierenden Satzes geführt werden könnte. Darauf wollen wir am Ende unseres Artikels zu sprechen kommen.

Dieser Satz ist nicht nur nützlich zur Lösung solcher geometrischen Probleme, sondern er ist einer der grundlegenden Existenzsätze der modernen Mathematik. Dies wollen wir an zwei Beispielen erläutern. Wir benutzen den Antipodensatz, um nachzuweisen, daß sogenannte „ungerade" Funktionen Nullstellen auf S^1 (bzw. S^2) haben.

Beispiel 1:

Wir denken uns die (x,y)-Ebene. Jedem Punkt (mit den Koordinaten (x,y)) ordnen wir den Funktionswert

(1) $$f(x,y)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}y+y}{x^2+1}$$

zu. Die so gegebene Funktion f ist ungerade, denn es gilt

$$f(x,y)=-f(-x,-y).$$

Wir fragen, ob die Funktion f Nullstellen hat, die außerdem noch auf S^1 liegen. Wir suchen also Punkte P^* der (x,y)-Ebene, deren Koordinaten (x^*, y^*) folgende Bedingungen erfüllen:

(2) $f(x^*, y^*)=0$

(3) $(x^*)^2+(y^*)^2=1.$

Wir brauchen somit die Funktionswerte von f nur über den Punkten von S^1 zu betrachten. Nun bilden wir zwei Teilmengen M_1, M_2 von S^1. M_1 enthalte die Punkte von S^1, über denen die Funktion f nichtnegative Werte hat:

(4) $M_1=\{(x,y)\in S^1 \ / \ f(x,y)\geqq 0\}$,

und M_2 sei die Menge der Punkte von S^1, über denen f nichtpositive Werte hat:

(5) $M_2=\{(x,y)\in S^1 \ / \ f(x,y)\leqq 0\}$.

Für unsere Funktion f (siehe (1)) sieht man, daß M_1 nichtleer ist (z. B. liegt der Punkt $(1,0)$ in $M_1: f(1,0)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)>0$), und ebenso ist M_2 nichtleer, denn $(-1,0)\in M_2$. Beide Mengen sind abgeschlossen. M_1 und M_2 zusammen überdecken S^1, denn f kann über S^1 nur $f(x,y)\geqq 0$ oder $f(x,y)\leqq 0$ erfüllen. So erkennen wir, daß die Voraussetzungen des Antipodensatzes erfüllt sind. Eine der beiden Mengen muß somit ein Antipodenpaar P_1, P_2 besitzen. Nehmen wir an, $P_1\in M_2$, so schreiben wir auf, was wir von P_1 wissen (die Koordinaten von P_i seien (x_i, y_i), $i=1,2$): es gilt

(6) $f(x_1, y_1)\leqq 0$,

weil $P_1\in M_2$; da P_1, P_2 ein Antipodenpaar bilden, ist weiter

(7) $x_2=-x_1, y_2=-y_1$

richtig; da auch P_2 in M_2 liegt, ist folglich

(8) $f(-x_1, -y_1)\leqq 0$

richtig. Wir wissen, daß f eine ungerade Funktion ist.

Daher folgt aus (8)

(9) $f(-x_1, -y_1)=-f(x_1, y_1)\leqq 0$,

also

(10) $f(x_1, y_1)\geqq 0$.

Wir lesen jetzt (10) zusammen mit (6):

(11) $0\leqq f(x_1, y_1)\leqq 0$,

dies kann nur für

(12) $f(x_1, y_1)=0$

erfüllt sein. Hätten wir angenommen, daß P_1 in M_1 liegt, so erhalten wir (wie man nachrechnen möge) ebenso $f(x_1, y_1)=0$. P_1 ist also eine Nullstelle von f, die auf S^1 liegt.

Nachträglich sieht man: da P_1 Nullstelle ist, liegt P_1 sowohl in M_2 als auch in M_1 (man schaue sich nochmals (4) und (5) an). Wir wissen jetzt, *daß* es eine Nullstelle gibt. Da für den zugehörigen Antipodenpunkt P_2 gilt

(13) $f(x_2, y_2)=-f(x_1, y_1)$,

folgt aus (12):

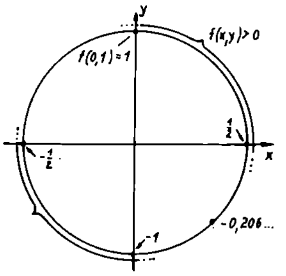
(14) $f(x_2, y_2)=0$,

P_2 ist somit auch Nullstelle.

Um nun die Koordinaten x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 näherungsweise zu bestimmen, nehmen wir Bild 4 zu Hilfe. Wir wollen nämlich gemäß unserer Tabelle an einige Punkte des Kreises S^1 die Funktionswerte von f für diese Punkte schreiben.

x	y	$f(x,y)$
0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$
0	-1	-1
-1	0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-0{,}206\ldots$

Bild 4



Ferner sehen wir aus (1), daß für Punkte auf dem Kreisbogen im 1. Quadranten gilt: $f(x,y)>0$, denn alle eingehenden Größen sind positiv. Entsprechend gilt für Punkte auf dem Kreisbogen im 3. Quadranten, daß dort f stets negativ ist. Folglich müssen (s. Bild 4) die gesuchten Antipodenpunkte im 2. bzw. 4. Quadranten liegen. Zum Beispiel im 4. Quadranten gilt: f hat den Wert $\frac{1}{2}$ über dem Punkt $(1,0)$ und den Wert -1 über dem Punkt $(0;-1)$. Man denke sich die Funktionswerte über dem Kreisbogenstück im 4. Quadranten auf einer Schnur angeheftet. Diese Schnur ist über $(1,0)$ in der Höhe $\frac{1}{2}$ anzubringen, über $(0,-1)$ in der Höhe -1, also muß es (mindestens) einen Punkt auf dem Kreisbogen im 4. Quadranten geben, durch den die Schnur hindurchgeht (man modelliere oder zeichne den Sachverhalt, wodurch noch besser klar wird, wie man sich einem solchen Punkt weiter nähern kann). Da f ungerade ist, ist dies ein Punkt eines Antipodenpaares, in dem f verschwindet.

Diesen Gedanken mit der Schnur kann man zu einem exakten Beweis unseres Satzes für die S^1 benutzen (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen).

Beispiel 2:

Bereits recht kompliziert wird die Anwendung des Antipodensatzes für die Kugeloberfläche S^2. Wir geben uns ein Gleichungssystem vor, etwa

(15) $xy\sin z + z = 0$
$yz\sin x + x = 0.$

Wir wollen wissen, ob Lösungen des Gleichungssystems vorhanden sind, die zugleich auf S^2 liegen. Ein Punkt P ist folglich solch eine Lösung, falls seine Koordinaten (x,y,z) die beiden Gleichungen (15) erfüllen und ferner noch gilt

(16) $x^2+y^2+z^2=1,$

denn dann liegt P auch auf S^2. Wenn wir die linken Seiten in (15) mit $f_1(x,y,z)$ bzw. $f_2(x,y,z)$ abkürzen, gilt ähnlich wie in Beispiel 1: $f_i(-x,-y,-z) = -f_i(x,y,z)$ für $i=1,2$.

Man geht diesmal so vor: für eine *feste* Zahl $k=1,2,\ldots$ bilden wir die zwei Mengen:

(17) $A_{1k} = \{(x,y,z)\in S^2 \;/\; f_1(x,y,z) \geqq k^{-1}\},$

(18) $A_{2k} = \{(x,y,z)\in S^2 \;/\; f_2(x,y,z) \geqq k^{-1}\}.$

Diese Mengen sind beide nichtleer, dies kann man nachrechnen, ferner abgeschlossen. Keine der beiden Mengen kann ein Antipodenpaar enthalten, denn wäre

(19) $(x,y,z)\in A_{1k}, (-x,-y,-z)\in A_{1k},$

so folgte, daß zugleich gelten müssen

(20) $f_1(x,y,z) \geqq k^{-1}$ und

(21) $-f_1(x,y,z) \geqq k^{-1},$

dies ist aber nicht möglich.

Wir überlegen uns nun, welche Punkte $P\in S^2$ wir mit A_{1k} und A_{2k} noch nicht erfaßt haben. Für diese gelten folgende Ungleichungen

(22) $f_1(x,y,z) < k^{-1}$
$f_2(x,y,z) < k^{-1}$

Deshalb bilden wir als dritte abgeschlossene Menge bei Zulassung des Gleichheitszeichens

(23) $A_{3k} = \{(x,y,z)\in S^2 \,|\, f_i(x,y,z) \leqq k^{-1},$
$i=1,2\}.$

Da die drei abgeschlossenen Mengen A_{1k}, A_{2k}, A_{3k} die S^2 überdecken, enthält nach dem Antipodensatz mindestens eine ein Antipodenpaar P_{1k}, P_{2k}. Diese Menge kann nach den obigen Überlegungen nur A_{3k} sein. Wir wollen A_{3k} genauer untersuchen. Wir stellen fest, daß für die Punkte P aus A_{3k}, für die $f_1(x,y,z) < -k^{-1}$ oder $f_2(x,y,z) < -k^{-1}$ gilt, die zugehörigen Antipodenpunkte wegen

(24) $f_i(-x,-y,-z) = -f_i(x,y,z) > k^{-1}$

(für $i=1$ bzw. $i=2$) zu A_{1k} bzw. A_{2k} gehören. Damit können wir die Menge, in der sich ein Antipodenpaar befinden muß, genauer beschreiben. Bezeichnen wir diese Teilmenge von A_{3k} mit B_k, so gilt

(25) $B_k = \{(x,y,z)\in S^2 \,|\, -k^{-1} \leqq f_i(x,y,z)$
$\leqq k^{-1}, i=1,2\},$

und für das Antipodenpaar P_{1k}, P_{2k} mit den Koordinaten (x_{1k}, y_{1k}, z_{1k}) bzw. $(-x_{1k}, -y_{1k}, -z_{1k})$ gilt damit ebenfalls

(26) $-k^{-1} \leqq f_1(x_{1k}, y_{1k}, z_{1k}) \leqq k^{-1}$
$-k^{-1} \leqq f_2(x_{1k}, y_{1k}, z_{1k}) \leqq k^{-1}.$

Für jedes $k=1,2,\ldots$ gibt es ein Antipodenpaar P_{1k}, P_{2k}, das (26) erfüllt, B_k ist also nicht leer. Diese Punkte P_{ik} ($i \leqq 1,2$; $k=1,2,3,\ldots$) liegen alle auf der Kugelfläche! Da wegen $(k+1)^{-1} < k^{-1}$ stets $B_{k+1} \subseteqq B_k$ und damit ein Antipodenpaar aus B_{k+1} auch Antipodenpaar in B_k ist, darf man schlußfolgern (unter Berücksichtigung der Abgeschlossenheit der B_k), daß ein Antipodenpaar $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ existiert, das allen B_k angehört. Dies ist aber wegen (25) nur möglich, wenn gilt

$$|f_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| = 0, \; i=1,2.$$

Dieses Antipodenpaar stellt also zwei Lösungen unserer Aufgabe dar.

Wiederum wissen wir auf diese Weise nur, daß Lösungen existieren. Wir könnten aber nun an die (näherungsweise) Bestimmung einer Lösung herangehen mit der Gewißheit, daß es auch wirklich eine gibt.

Abschließend noch etwas zum Beweis des Antipodensatzes. Obwohl seine Formulierung so leicht verständlich ist, ist ein Beweis schon für die S^1 nicht leicht. Für die S^1 erkennt man, daß irgend zwei abgeschlossene nichtleere Mengen M_1, M_2, die die S^1 überdecken, also $S^1 = M_1 \cup M_2$, einen gemeinsamen Durchschnitt D haben. Sie hätten nämlich sonst einen von Null verschiedenen Abstand voneinander, was dem Zusammenhang der Kreislinie widerspricht. Ist nun etwa P_1 in D, so muß der Antipodenpunkt P_2 zu P_1 in M_1 oder in M_2 liegen. Entsprechend ist dann das Paar P_1, P_2 ein Antipodenpaar in M_1 oder M_2.

Erst recht schwierig wird der Beweis für die höherdimensionalen Fälle. Eine Überdeckung der S^2 mit drei Mengen M_1, M_2, M_3 muß nämlich nicht die Eigenschaft $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \neq \emptyset$ haben, wie man am Ballmodell nachprüft.

A. Göpfert und O. Lange

Über das Mathematik-Studium in Merseburg

Zu den Merkmalen der Stadt Merseburg zählen nicht nur die interessante Geschichte (man denke z. B. an die Merseburger Zaubersprüche) und die recht bedeutende Industrie, sondern auch die *Technische Hochschule Carl Schorlemmer**, die heute mit ihren modernen wissenschaftlichen Einrichtungen und Wohnheimen ein kleiner Stadtteil für sich ist, der schön am westlichen Stadtrand von Merseburg gelegen ist. Es geht schon aus unserem Artikel über Antipodenpunkte hervor, daß zu dieser Hochschule eine Sektion Mathematik und Rechentechnik gehört, und manchem wird es gar nicht bekannt sein, daß man an unserer *Technischen Hochschule* Mathematik studieren kann.

Die Sektion Mathematik und Rechentechnik gliedert sich in drei Wissenschaftsbereiche (Analysis, Numerische Mathematik, Stochastik/Optimierung) und ein Organisations- und Rechenzentrum. Ihre Hauptaufgaben bestehen in Forschung, Lehre und Anwendung der Mathematik auf den eben genannten Gebieten. Vielleicht ist es interessant, einiges über das Mathematikstudium in Merseburg und über die Berufsaussichten nach der Diplomverteidigung zu erfahren.

Die Ausbildung wird natürlich entsprechend dem in der DDR gültigen Studienplan für die Ausbildung eines Diplom-Mathematikers vorgenommen, wobei an unserer Hochschule in den höheren Semestern stärker Probleme der Optimierung und Steuerung im Vordergrund stehen. Diese sind moderne Gebiete der Mathematik, welche weit in die Analysis, Stochastik und numerische Mathematik hineinreichen. Sie sind interessante und aktuelle Forschungsgebiete und kommen in sehr vielen Industriezweigen und wissenschaftlichen Einrichtungen der DDR zur Anwendung. Auch die Studenten haben daran bereits aktiven Anteil. Es werden nämlich die vielen Erfahrungen und Verbindungen der Sektion Mathematik und Rechentechnik in der Zusammenarbeit mit der Praxis und mit Nachbarsektionen der Hochschule ausgenutzt, um die Studenten durch dort auftretende mathematische Probleme und kleine Forschungsaufträge zu eigener wissenschaftlicher Arbeit anzuregen. 1979 wurde z. B. ein Studentenkollektiv für die Lösung einer derartigen Aufgabe mit einem Ehrenpreis des Ministers für das Hoch- und Fachschulwesen ausgezeichnet.

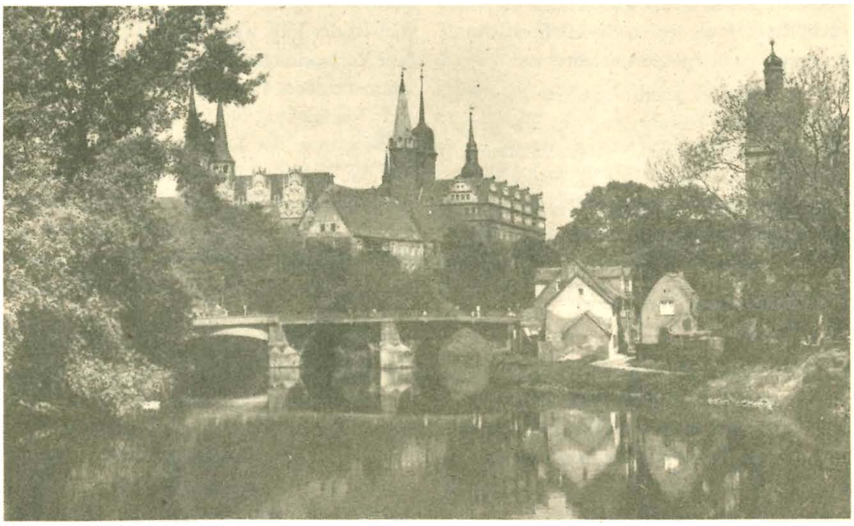
Neben Vorlesungen, Übungen und Seminaren erfolgt die Vorbereitung auf den späteren Berufseinsatz insbesondere durch ein Praktikum (im 6. Semester), durch die Diplomarbeit sowie durch Vorlesungen über Verfahrenstechnik (mathematische Grundlagen von Verfahren vieler Industriezweige). In Fachseminaren (hier stehen die Diskussionen zwischen Professoren und Studenten im Vordergrund) werden Probleme der mathematischen Modellierung technischer oder wissenschaftlicher Fragestellungen und zu anderen wichtigen mathematischen Teilgebieten behandelt.

Dadurch ergeben sich nach Beendigung des Studiums gute Startpositionen bei einer Arbeit als Diplom-Mathematiker in der Industrie oder an einer Hochschule. Die Berufsaussichten sind gut, da der Bedarf an Diplom-Mathematikern in der Industrie und an den Universitäten und Hochschulen der DDR sehr groß ist. Genügend Studienplätze stehen zur Verfügung, und mathematisch interessierte Schüler sollten sich zu den *Tagen der offenen Tür* am 11. und 12. April 1981 oder nach Anmeldung auch zu anderer Zeit selbst noch genauer informieren.

Abschließend wollen wir noch sagen, daß zwischen den FDJ-Studentengruppen und den Gewerkschaftsgruppen der Mitarbeiter unserer Sektion ein aufgeschlossenes Verhältnis besteht, das nicht nur durch fachliche Gespräche geprägt ist. So organisieren wir gemeinsame Ausflüge, sportliche Veranstaltungen und Diskussionsabende im Studenten-Club, die von der Vorstellung individueller Hobbies, über Gespräche mit Professoren, die in engem Forschungskontakt mit Kollegen aus der Sowjetunion stehen, bis hin zu Gesprächen über philosophische Probleme der Mathematik reichen. Selbstverständlich führen die Studenten in ihrem Studenten-Club, den sie selbst ausgestaltet haben, vielfältige kulturelle Veranstaltungen durch. Da zudem die Wohnheime, in denen fast alle Studenten der TH wohnen, mit den Instituts- und Hörsaalgebäuden, der modernen Mensa und den Sportstätten einen gemeinsamen Komplex bilden, kommt – wie die Erfahrung lehrte – eine anregende Studienatmosphäre zustande. *A. Göpfert und O. Lange*

* Carl Schorlemmer (1834 bis 1892) war bedeutender Chemiker und mit Marx und Engels befreundet.

Anblick des historischen Teils von Merseburg

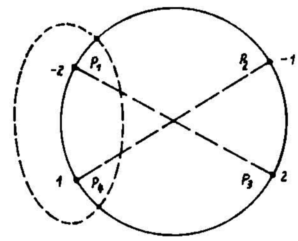


Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. Göpfert und Dr. O. Lange

Sektion Mathematik/Rechentechnik der Technischen Hochschule Leuna-Merseburg

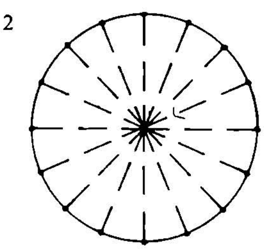
▲1993▲ Wir geben uns einen Kreis vor und legen auf diesem 4 (bzw. $4+2k$) Punkte fest, die sich paarweise gegenüberliegen sollen. Ordnen wir nun jedem Punkt eine der Zahlen -2, -1, 1, 2 zu, und zwar so, daß sich bei gegenüberliegenden Punkten (Antipodenpaaren) die Summe Null, bei benachbarten Punkten aber nicht Null als Summe ergibt, so ist die Anzahl der Paare benachbarter Punkte, denen die Zahlen 1 und -2 zugeordnet wurden, ungerade. Für 4 Punkte zeigt Bild 1 eine mögliche Zuordnung.

Bild 1



Aufgabe: Wie in Bild 2 seien 16 Punkte auf dem Kreis festgelegt (d. h. $k=6$).

Bild 2



a) Gebt zwei Möglichkeiten der Zuordnung der 4 Zahlen für die 16 Punkte an und überprüft, daß die Anzahl der Paare benachbarter Punkte mit 1 und -2 ungerade ist!

b) Beweist, daß diese Anzahl stets ungerade ist!

Interessierte Leser können die Lösung einsenden an:
TH Leuna-Merseburg, Sektion Mathematik-Rechentechnik, 4200 Merseburg 6. Bei richtiger Lösung erhält der Einsender *zwei* Antwortkarten für den Wettbewerb 1980/81, d. Red.

Turnierpläne aus mathematischer Sicht

1. Ein praktisches Problem

Stellt euch vor, an eurer Schule soll ein Fußballturnier durchgeführt werden. Dabei mögen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Anzahl n der am Turnier teilnehmenden Mannschaften ist gerade. ($n \in N$, $n \neq 0$, n gerade)
- Im Verlauf des Turniers hat jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal zu spielen.

Wenn nach der Eröffnung des Turniers durch den Sportlehrer alle teilnehmenden Mannschaften gleichzeitig mit ihren Spielen beginnen sollen, so müssen wir zunächst überlegen, wieviel Sportplätze benötigt werden. Ihr findet die Lösung sicher selbst ganz leicht:
Wir haben n teilnehmende Mannschaften, auf jedem Sportplatz können jeweils genau zwei Mannschaften gegeneinander spielen – wir benötigen also $\frac{n}{2}$ Sportplätze $\left(\frac{n}{2} \in N\right)$.
Für die weiteren Betrachtungen wollen wir davon ausgehen, daß $\frac{n}{2}$ Sportplätze zur Verfügung stehen.

Das Turnier soll in möglichst kurzer Zeit beendet werden. Damit entsteht die Frage nach einem Turnierplan, bei dem keine Mannschaft in irgendeiner Runde spielfrei ist. Wieviel Runden müssen wir einplanen?

Jede der n Mannschaften hat gegen jede der übrigen $n-1$ Mannschaften anzutreten. Das gäbe zunächst $n \cdot (n-1)$ Begegnungen. Wenn aber eine Mannschaft A die Mannschaft B zum Gegner hat, so hat natürlich gleichzeitig B den Gegner A. Unsere ermittelte Anzahl der Begegnungen ist also noch durch 2 zu dividieren. Es müssen demnach in unserem Turnier genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Spiele gespielt werden. (Wer von euch den Begriff „Kombination vom Umfang m aus einer n-elementigen Menge“ kennt, ist natürlich schneller zum Ergebnis $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ gekommen.)

In jeder Runde werden genau $\frac{n}{2}$ Spiele durchgeführt – das Turnier besteht somit aus genau $n-1$ Runden $\left(\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n-1\right)$.

Unsere Aufgabe lautet nun:
Die Mannschaften 1, 2, ..., n sind so in ein Schema (siehe unten) einzutragen, daß
(1) in jeder Runde jede Mannschaft genau einmal auftritt. (Jede Mannschaft spielt in jeder Runde.)
(2) in zwei verschiedenen Runden keine gleichen Spiele auftreten. (Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.)
Als gleich gelten auch Spiele

$\boxed{i \mid j}$ und $\boxed{j \mid i}$!

	Sportplatz 1	Sportplatz 2		Sportplatz $\frac{n}{2}$
1. Runde	$\square\square$	$\square\square$		$\square\square$
2. Runde	$\square\square$	$\square\square$		$\square\square$
	...	...		...
$(n-1)\cdot$ Runde	$\square\square$	$\square\square$		$\square\square$

Für 4 bzw. 6 teilnehmende Mannschaften finden wir z. B. folgende mögliche Turnierpläne:

1 2	3 4
1 3	2 4
1 4	2 3

$n=4$

1 4	2 3	5 6
1 5	2 4	3 6
1 6	2 5	3 4
1 2	3 5	4 6
1 3	2 6	4 5

$n=6$

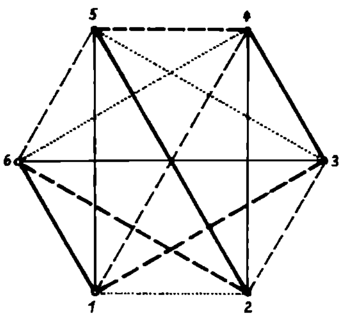
▲1▲ Sucht noch andere Pläne für $n=6$! Versucht selbst, einen Turnierplan für $n=8$ zu finden! Fragt euren Sportlehrer, wie er derartige Turnierpläne aufstellt!

Wir wollen nach einem Verfahren zum Aufstellen solcher Turnierpläne für eine gerade Anzahl n teilnehmender Mannschaften suchen. Dazu erarbeiten wir im nächsten Abschnitt für die praktische Aufgabenstellung eine mathematische Formulierung.

2. Mathematische Formulierung des Problems

In einem regelmäßig ebenen n-Eck numerieren wir die Eckpunkte mit den Zahlen 1, 2, ..., n. Jeder Eckpunkt steht dann für genau eine an unserem Turnier beteiligten Mannschaft und jeder Mannschaft ist genau ein Eckpunkt zugeordnet. Wir zeichnen nun alle möglichen Verbindungsstrecken je zweier Eckpunkte in das n-Eck ein. Verbindet eine Strecke die Eckpunkte i und j, so stellt diese Verbindungsstrecke das Spiel der Mannschaft i gegen die Mannschaft j dar. Nun färben wir die Verbindungsstrecke so, daß alle Spiele, die in derselben Runde ausgetragen werden, dieselbe Farbe bekommen. Zwei Spiele werden genau dann unterschiedlich gefärbt, wenn sie in verschiedenen Runden stattfinden.
Eine mögliche Färbung für unseren obigen Turnierplan für $n=6$ ist in Bild 1 angegeben.

Bild 1



▲2▲ Welche Farbe entspricht welcher Runde? Sucht selbst weitere mögliche Färbungen für $n=6$ und $n=8$!

Da die Menge der Runden eineindeutig auf die Menge der verwendeten Farben abgebildet wurde, benötigen wir zum Färben der Verbindungsstrecke genau $n-1$ paarweise verschiedene Farben. Wenn eine Färbung einen möglichen Turnierplan darstellen soll, so müssen die Bedingungen (1) und (2) der Aufgabenstellung im 1. Abschnitt erfüllt sein. Dies ist der Fall, wenn an keinem Eckpunkt zwei Verbindungsstrecken gleicher Farbe zusammenstoßen. Ein Objekt aus Eckpunkten und Verbindungslinien dieser Eckpunkte nennt man in der Mathematik einen *Graph*. Für die Verbindungslinien ist die Bezeichnung *Kante* üblich. Sind in einem Graph je zwei beliebige voneinander verschiedene Eckpunkte durch genau eine Kante verbunden, so ist der Graph vollständig (siehe auch den Artikel von Voss „Aus der Graphentheorie“, alpha 6/1972, 1, 2, 4/1973). Mit diesen Begriffen kommen wir zu einer ersten mathematischen Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Die Kanten eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten (n gerade) sind mit $n-1$ paarweise verschiedenen Farben so zu färben, daß

an keinem Eckpunkt zwei Kanten gleicher Farbe zusammenstoßen.

▲3▲ Überlege, daß dann jeweils genau $\frac{n}{2}$ Kanten dieselbe Farbe enthalten!

Das „Färben" ist noch der Umgangssprache entnommen. Zur rein mathematischen Formulierung unseres Problems müssen wir noch einen Schritt weiter gehen.
Aus unserem vollständigen Graphen konstruieren wir weitere Graphen – diese werden wir *Linearfaktoren* nennen:
Die Menge der Eckpunkte eines solchen Linearfaktors stimmt mit der Eckpunktmenge des vollständigen Graphen überein. Die Menge der Kanten des Linearfaktors ist eine Teilmenge der Kantenmenge des vollständigen Graphens. Sie wird so gebildet, daß von jedem Eckpunkt des Linearfaktors genau eine Kante ausgeht.
Das Bild zeigt als Beispiel vier Linearfaktoren eines vollständigen 6punktigen Graphen an.

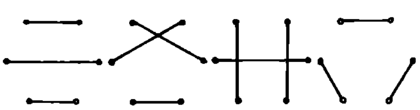


Bild 2

Wir können nun jeden Linearfaktor eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten als eine Runde unseres Turniers für n Mannschaften auffassen. Damit erhalten wir eine weitere Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Ein vollständiger Graph mit n Eckpunkten ($n \in N$, n gerade, $n \neq 0$) ist in $n-1$ Linearfaktoren so zu zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt.

Eine solche Zerlegung für $n=6$ stellt Bild 2 dar, wenn wir die Menge der Kanten einer Farbe mit der zugehörigen Eckpunktmenge als einen Linearfaktor ansehen.
Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen die Begriffe der verschiedenen Formulierungen unserer Aufgabenstellung noch einmal gegenübergestellt werden:

Mannschaft	Eckpunkt	
Spiel	Kante	
Runde	Menge der Kanten derselben Farbe mit der Menge der zugehörigen Eckpunkte	Linearfaktor

▲4▲ Wie spiegelt sich der Begriff „Sportplatz" in der mathematischen Formulierung wider?

3. Ein Verfahren zum Aufstellen eines Turnierplanes

Im Jahre 1947 wurde von dem Mathematiker *W. T. Tutte* bewiesen:

Satz: Jeder vollständige Graph mit n Eckpunkten ($n \in N$, n gerade) läßt sich so in $n-1$ Linearfaktoren zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt. (Genaueres könnt ihr z. B. in *Sachs*, Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I nachlesen.)
Dieser Satz sagt aus, daß es eine Lösung für unsere Aufgabenstellung gibt. Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv geführt wird, gibt er Antwort auf die Frage, *wie* man solche $n-1$ Linearfaktoren erhalten kann:
Wir betrachten eine regelmäßige $(n-1)$-seitige Pyramide. Die Eckpunkte der Pyramide bezeichnen wir mit 1, 2, ..., n. Zu den schon vorhandenen Kanten fügen wir noch alle Diagonalen der Grundfläche hinzu (Bild 3 – $n=6$). Dadurch erhalten wir einen vollständigen Graphen mit den Eckpunkten 1, 2, ..., n.

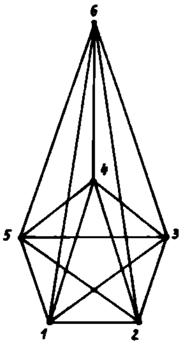


Bild 3

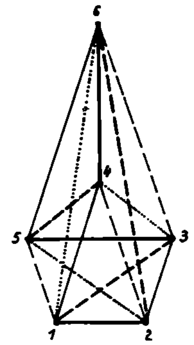


Bild 4

Wir nehmen nun eine beliebige Seite der Grundfläche der Pyramide (regelmäßiges $(n-1)$-Eck) und alle zu dieser Seite parallelen Diagonalen. Durch diese $\frac{n}{2}-1$-Strecken werden alle Eckpunkte der Grundfläche bis auf einen erfaßt. Die Menge der Kanten eines Linearfaktors besteht nun aus diesen $\frac{n}{2}-1$-Strecken und der Strecke, die den noch „freien" Eckpunkt der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet.
Durch die Wahl einer Seite der Grundfläche der Pyramide wird nach obiger Vorschrift genau ein Linearfaktor bestimmt. Es gibt $n-1$ Seiten der Grundfläche, also auch $n-1$ Linearfaktoren. Diese zerlegen den vollständigen Graphen auch wirklich, denn zu jeder Kante gibt es genau einen Linearfaktor, zu dem sie gehört.
Bild 4 zeigt eine solche Zerlegung, die den oben angegebenen Turnierplan für $n=6$ liefert.

▲5▲ Welche Farbe entspricht welcher Runde? Stellt nach diesem Verfahren selbst Spielpläne für $n=4$, $n=6$ und $n=8$ auf!
Sucht selbst andere Verfahren zum Aufstellen von Spielplänen!

U. Feiste

Eine interessante Disziplin

Mathematische Psychologie

Vom 6. bis 12. Juli 1980 findet in Leipzig der *XXII. Internationale Weltkongreß für Psychologie* statt. Das ist ein wissenschaftliches Ereignis von überragender Bedeutung und eine große Ehre und hohe Verpflichtung für die Psychologen der gastgebenden DDR. 4000 Wissenschaftler aus etwa 50 Ländern werden daran teilnehmen.

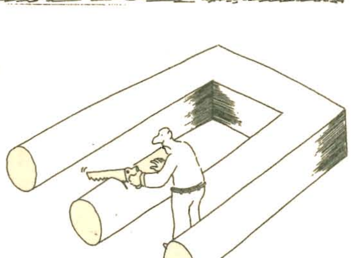
Die Psychologie (Lehre vom Erleben und Verhalten des Menschen) ist im Vergleich zur Mathematik oder zur Astronomie eine verhältnismäßig junge Wissenschaft. Vor etwa 100 Jahren richtete der an die Leipziger Universität berufene *Wilhelm Wundt* ein Laboratorium für experimentelle Psychologie ein, das erste dieser Art in der Welt. Diese Gründung hatte weitreichende Folgen. Schüler *Wundts* trugen den Gedanken, Erkenntnisse der Psychologie mit experimentellen Untersuchungen auf naturwissenschaftlicher Grundlage zu gewinnen, rund um den Erdball. Damit ging das vorwissenschaftliche Stadium der Psychologie, in welchem bloße Beschreibungen von Seelenzuständen vorherrschten, zu Ende.
Die Psychologie hat in den hundert Jahren ihres Bestehens große Fortschritte gemacht. Auch dieser Wissenschaft geht es – wie im Grunde genommen allen anderen – vorrangig um das Aufdecken von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten. Sowohl beim Auffinden als auch beim Formulieren solcher Gesetzmäßigkeiten bedient sich die Psychologie in zunehmendem Maße der Mathematik. Dabei steht sie verständlicherweise noch am Anfang, sind doch ihre Gegenstände nicht die unbelebte Materie (wie in der Physik) oder die allgemeinen Lebensprozesse (wie in der Biologie), sondern das komplizierte Wechselspiel von Wahrnehmungen, Vorstellungen, Gedanken, Gefühlen und Empfindungen im Menschen sowie das soziale Ver-

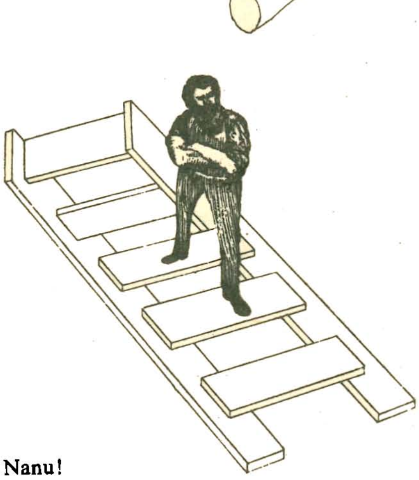
halten zwischen den Menschen (in der Schulklasse, Arbeitsbrigade oder in anderen Kollektiven). Die *Mathematische Psychologie* hat also ein weites Feld vor sich.

Unter Mathematischer Psychologie versteht man die Gesamtheit von Anwendungen mathematischer Methoden bei der Untersuchung psychischer Prozesse.

Von den anderen psychologischen Teilgebieten (Entwicklungs-, Persönlichkeits-, Sozialpsychologie, Pädagogische Psychologie usw.) unterscheidet sie sich daher nicht durch ihren Inhalt, sondern durch die Art der Behandlung und Formulierung psychologischer Fragestellungen. Zur Erkenntnisgewinnung hat dabei die mathematische Modellierung besondere Bedeutung. Der Grund für die Anwendung dieser Modellmethode ist vor allem durch den Forschungsgegenstand selbst bedingt, denn psychische Zustände und Prozesse sind einer unmittelbaren Untersuchung meist nicht zugänglich. In Verbindung mit der Nutzung der modernen Rechentechnik wurden z. B. Simulationsmodelle für komplexe psychische, insbesondere vom Denken beeinflußte, Vorgänge erarbeitet.

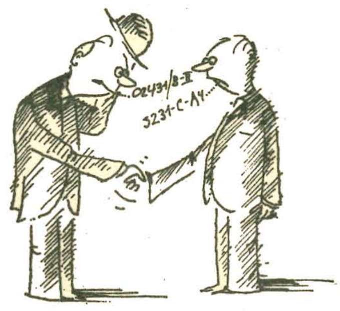
H. Lohse und I. Kraft





Nanu!

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen



Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 6/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■1800 In einer Klasse, der mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler angehören, wurde eine Klassenarbeit in Mathematik geschrieben, an der alle Schüler teilnahmen. Der 9. Teil der Anzahl der Schüler erhielt die Note 1, der 3. Teil die Note 2, der 6. Teil die Note 4; kein Schüler erhielt die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Note 3?

In Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muß ein Vielfaches von 9 und von 6, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20<n<40$ trifft dies nur zu für $n=36$. Dieser Klasse gehören somit 36 Schüler an. Angenommen, x Schüler haben die Note 3 erhalten; dann gilt

$x=36-\frac{36}{9}-\frac{36}{3}-\frac{36}{6}$, also $x=14$.

Die Note 3 erhielten 14 Schüler.

Wir stellen nun die Lösung von Kerstin Kantiem aus Berlin vor, die Schülerin der Klasse 6b der 3. Oberschule „Erich Weinert" ist.

Kerstin löste diese Aufgabe wie folgt:

Es sei x die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt $20<x<40$. Es erhielten $\frac{x}{9}$ Schüler die Note 1, $\frac{x}{3}$ Schüler die Note 2, $\frac{x}{6}$ Schüler die Note 4 und y Schüler die Note 3. Nun gilt $\frac{x}{9}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+y=x$, also $y=\frac{7x}{18}$. Nur wenn x ein Vielfaches von 18 ist, erhalten wir für y eine ganze Zahl. Wegen $20<x<40$ gilt $x=36$, also $y=14$.

Es erhielten 14 Schüler die Note 3.

Im Heft 6/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■1804 Das Motorschiff „Bummi" der Weißen Flotte in Berlin hat sechsmal soviel Innen- wie Außenplätze. Würde dieses Schiff über zwei Innenplätze und sechs Außenplätze mehr verfügen, dann wären viermal soviel Innenplätze wie Außenplätze vorhanden. Wie viele Personen finden auf diesem Schiff einen Sitzplatz?

In Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, es sind x Innenplätze und y Außenplätze; dann gilt $x=6y$ (1) und $x+2=4\cdot(y+6)$ bzw. $x=4y+22$ (2).

Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir $4y+22=6y$, $2y=22$, $y=11$. Daraus folgt durch Einsetzen $x=6\cdot 11=66$.

Das Schiff hat für 77 Personen Sitzplätze.

Wir stellen nun die Lösung von Ines Weiche aus Pinnow vor, die Schülerin der Oberschule Bärenklau, Klasse 7b, ist. Ines löste diese Aufgabe unter Verwendung von nur einer Variablen wie folgt:

Angenommen, das Schiff hat x Außenplätze; dann hat es $6x$ Innenplätze. Nun gilt

$$6x+2=4\cdot(x+6),$$
$$6x+2=4x+24,$$
$$2x=22,$$
$$x=11.$$

Das Schiff hat 11 Außenplätze, $6\cdot 11=66$ Innenplätze. Auf diesem Schiff erhalten 77 Personen einen Platz.

Wir stellen nun die Lösung von Marion Gonschorreck aus Dingelstädt vor. Marion ist Schülerin der Klasse 4 der Makarenko-Oberschule II. Mit Hilfe einer Tabelle löste sie diese Aufgabe wie folgt:

Es sei n die Anzahl der Außenplätze, also $6\cdot n$ die Anzahl der Innenplätze. Ich stelle folgende Tabelle auf:

n	$6n$	$n+6$	$6\cdot n+2$	$4\cdot(n+6)$
1	6	7	8	28
2	12	8	14	32
5	30	11	32	44
9	54	15	56	60
10	60	16	62	64
11	66	17	68	68
12	72	18	74	72

Nur für $n=11$ gilt $6\cdot n+2=4\cdot(n+6)$.

Das Schiff hat 11 Außen- und 66 Innenplätze, also insgesamt 77 Sitzplätze.

Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken

1. Auf einem karierten Papier mit quadratischen Karos markieren wir Figuren, die sich aus 5 einzelnen untereinander zusammenhängenden Quadraten bilden lassen. Es entstehen die in Bild 1 dargestellten Möglichkeiten für die verschiedenen nichtkongruenten Fälle. Durch Anhängen eines weiteren Karos kann man sich alle denkbaren 6-Zeller aus quadratischen Zellen aufbauen. Kannst du alle Fälle herausfinden? Dabei muß man beachten, daß aus verschiedenen 5-Zellern durchaus gleiche, d. h. kongruente, 6-Zeller entstehen können. Bild 2 zeigt dazu drei solcher Möglichkeiten. Die zum 5-Zeller hinzugenommenen Quadrate sind schraffiert gezeichnet.

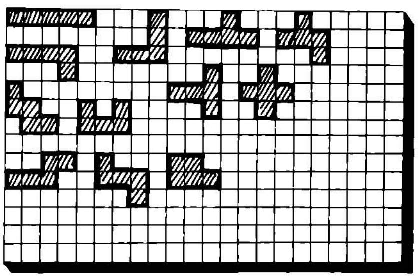


Bild 1

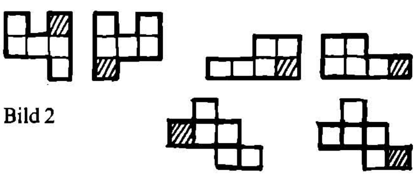


Bild 2

Unter den 6-Zellern sind welche dabei, die zu lustigen Zeichnungen dienen können. Wir geben in Bild 3 einige Beispiele.
Welche Vorschläge fallen dir noch ein?

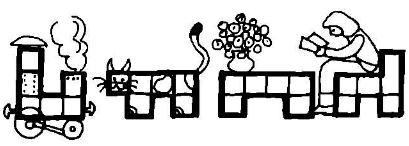


Bild 3

2. Man kann mit den 6-Zellern auch ein 2-Personenspiel spielen. Dazu grenze man sich vorher ein quadratisches oder rechteckiges Feld auf einem karierten Blatt ab. Die Seitenlängen wähle man beliebig aus. Um das Spiel nicht zu lange andauern zu lassen, schränke man sich etwa zunächst auf ein Spielfeld von 10×10 oder ähnlich ein. Es werden nun abwechselnd von den Spielern I und II Felder markiert, so daß nach je 3 *Zügen* von beiden Spielern ein 6-Zeller entstanden ist. Die markierten Karos müssen dabei stets längs einer Quadratseite mit schon markierten zusammenstoßen. Das Spiel wird fortgeführt. Die entstehenden 6-Zeller sollen alle nichtkongruent sein und sie sollen sich gegenseitig nicht berühren. Der Spieler, dem erstmalig keine Fortsetzung in der vorgeschriebenen Weise gelingt, hat verloren. Bild 4a zeigt ein Spielprotokoll. Hiernach hätte I verloren, da er keinen neuen 6-Zeller mehr beginnen kann. Wäre es jedoch im Protokoll 4b für Spieler I möglich, so zu ziehen, daß er gewinnt?

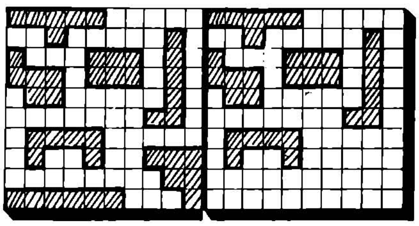


Bild 4a Bild 4b

3. Aus den 6-Zellern sollen durch Falten und Verkleben räumliche Gebilde hergestellt werden. Das Falten geschehe nur längs einer Quadratseite, ebenso erfolge das (gedachte) Verkleben nur längs zweier Quadratseiten. Was kann alles entstehen? Es sind jedenfalls Würfel möglich. Die 6-Zeller, die zu Würfeln verklebt werden können, heißen Würfelnetze. Es gibt 11 verschiedene! Ermittle sie!

Bild 5

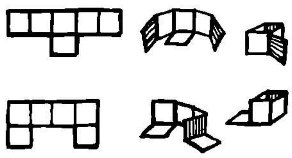
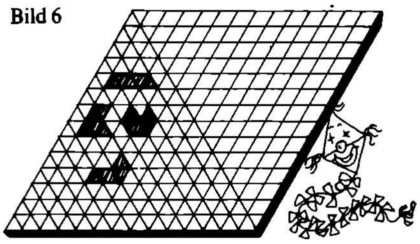


Bild 5 zeigt zwei Verklebungsmodelle von 6-Zellern, die keine Würfelnetze sind. Es ist im ersten Fall eine eckige *Tasse* entstanden, während es im zweiten Falle eine eckige *Schöpfkelle* ist. Welche 6-Zeller liefern noch alle das Klebemodell einer *Tasse* und welche das einer *Schöpfkelle*?

4. Entsprechend zu den Figuren aus Quadraten kombinieren wir nun gleichseitige Dreiecke zu Mehrzellern. Man muß sich zuerst eine Dreiecksfelderung herstellen. Hierzu konstruiert man sich mit Zirkel und Lineal ein großes Parallelogramm aus zwei gleichseitigen Dreiecken und teilt darauf die Seiten in 10 oder mehr gleiche Teile. Durch Ziehen entsprechender Verbindungslinien bekommt man die gewünschte Felderung aus Dreieckszellen. Von den 5-Zellern gibt es jetzt nur vier verschiedene Typen. Bild 6 enthält sie. Von

Bild 6



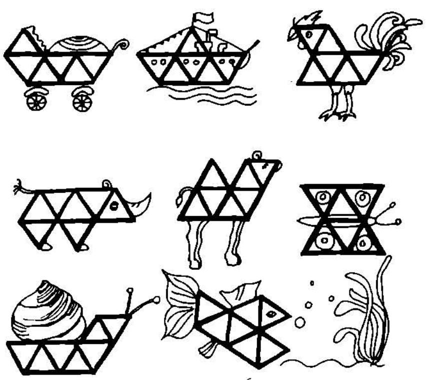


Bild 7

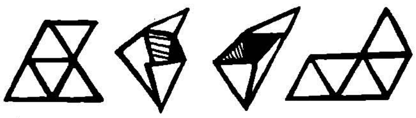
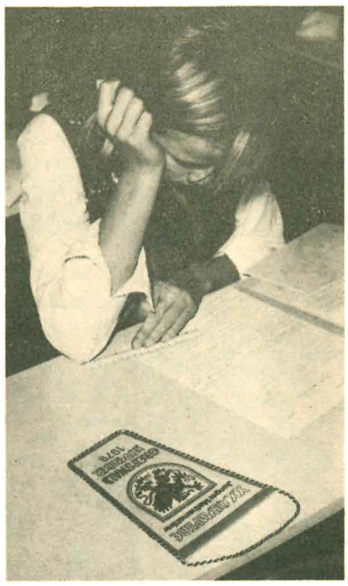


Bild 8

den 6-Zellern sind jetzt 12 nichtkongruente möglich. Finde diese durch Anhängen einer weiteren Dreieckszelle, wenn du von den 5-Zellern ausgehst! Einige phantasievolle Zeichnungen mit 6-Zellern und 7-Zellern zeigt Bild 7. Welche fallen dir noch ein? Bild 8 bringt ein Beispiel für ein räumliches Klebemodell aus zwei verschiedenen Dreiecks-5-Zellern. Es ist eine spitze Tüte mit einer Lasche entstanden. Behandle eine gleichartige Aufgabe wie bei den Quadrat-Zellern! *J. Flachsmeyer*



Alle Teilnehmer an der 20. OJM der Stadt Greifswald erhielten einen Ehrenwimpel (siehe unseren Beitrag S. 66/67, d. Red.)

Helft dem Kosmonauten!

Vor einiger Zeit bekamen wir einen Brief aus Moskau.
Die Komsomolzin *Natascha Shurkowa*, Studentin am Technikum, hatte sich eine Aufgabe ausgedacht, die sie den Lesern unserer Zeitschrift gern stellen möchte. –

Für die aktive Bewegung im schwerelosen Raum gibt es mehrere Möglichkeiten. Am bekanntesten ist uns allen die Bewegung unter Ausnutzung des Rückstoßes, das Prinzip des Raketenantriebs. Es hat den Schritt des Menschen in den Kosmos überhaupt erst möglich gemacht und wurde zu diesem Zweck von dem russischen Gelehrten *Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski* theoretisch ausgearbeitet. Das Rückstoßprinzip findet seine Verwirklichung in Fest- und Flüssigstoffraketen, in ferner Zukunft vielleicht auch eines Tages in Photonentriebwerken. Für Bewegungen im Orbit selbst, wie sie beim Bau und Betrieb von Orbitalstationen vorkommen, kann man sich noch weitere Möglichkeiten denken, nämlich

- die Bewegung unter Ausnutzung des Sonnenlichtes, mit *Sonnensegel*,
- Bewegung infolge der Gravitationskraft zwischen allen Massen und
- die Bewegung unter Ausnutzung elektrischer oder magnetischer Feldkräfte.

Und nun stellt euch einmal die folgende Situation vor:
Auf einer Umlaufbahn um die Erde wird eine Orbitalstation montiert. Die Monteure – Kosmonauten in ihren schweren Raumanzügen – bewegen sich in unmittelbarer Nähe der Station, indem sie sich mit den Händen an überall vorhandenen Griffen oder Kanten festhalten oder sich an dem Seil wieder heranziehen, das sie mit der Station verbindet. Plötzlich löst sich aus irgendeinem Grunde die Halterung des Seils eines Monteurs, der damit beschäftigt ist, mit einem elektromagnetischen Pickhammer Niete zu setzen. (Ein solches Gerät ist eine kleine Ausgabe der mit Preßluft betriebenen Pickhämmer, wie sie beim Straßenbau oder im Bergwerk verwendet werden.) Zum Glück hatte er sich zuvor nur ganz leicht abgestoßen, so daß er jetzt in einiger Entfernung von der Station im freien Raum schwebt und sich nur ganz langsam weiter von ihr entfernt. Die anderen können keine rasche Hilfe bringen, sie können aber über Funk mit dem Verunglückten sprechen, ihm Mut machen und mit Ratschlägen versuchen, ihm in seiner mißlichen Lage beizustehen. Alle überlegen angestrengt. – Endlich hat einer eine Idee. „Du hast doch deinen Pickhammer! Der funktioniert doch noch. Er wird dich zu uns zurückbringen, wenn du es richtig anstellst!"
Nun, liebe Knobelfreunde, denkt einmal mit und versucht, dem verunglückten Kosmonauten zu helfen! Kann er tatsächlich den Pickhammer in seiner Hand dazu benutzen, zur Station zurückzukommen, und wie muß er es anstellen?
Da es uns nur auf das „Wie" ankommt und wir keine genaueren Berechnungen der Rückkehrzeit und -geschwindigkeit durchführen wollen, können wir bei unseren Überlegungen von einem Gerät ausgehen, das nur die unbedingt notwendigen Konstruktionselemente des wirklichen Pickhammers enthält. Wir „idealisieren" also und führen ein „Gedankenexperiment" aus.
Die Wirkung eines Pickhammers beruht auf dem Zusammenspiel dreier Massen:
– Dem Gehäuse, welches die Form eines beiderseits geschlossenen Rohres hat, und das der Kosmonaut fest in seinen Händen hält, mit einer Gesamtmasse M,
– den beiden gleichgroßen Massen $\left(\frac{m}{2}\right)$ des insgesamt im Rohr beweglichen Gleiters. Er hat die Form einer Hantel, bei der die beiden Massen im Abstand S^x voneinander durch eine Klemmeinrichtung festgehalten werden, bei einem Stoß aber entlang der Hantelstange aufeinander zu gleiten können (Bild 1).

Первая советская жидкостная ракета „ГИРД-09" (двигатель „09"). Запущена 17 августа 1933 г.

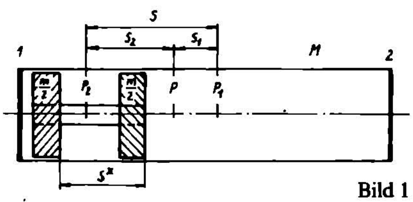


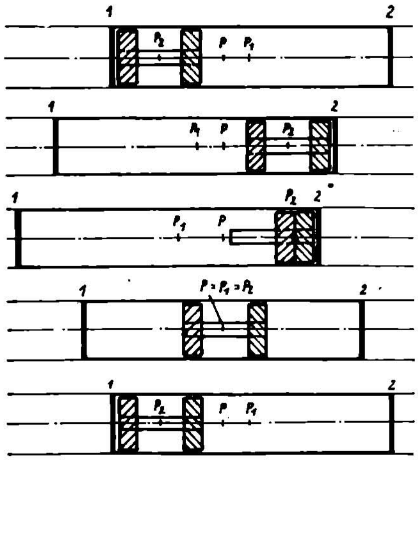
Bild 1

Wie arbeitet eigentlich ein solcher Pickhammer?
Wir beginnen unsere Beobachtungen in dem Moment, wo sich die beiden Halbmassen $\frac{m}{2}$ im Abstand S^x voneinander am linken Ende des Körpers befinden. (Beschreibung und Lösung des Problems verwenden zwar die in Bild 1 dargestellte Vorstellung von der Form des Gerätes, fassen die Massen aber dann als punktförmig auf, wie das in der Mechanik üblich ist, da wir sonst nicht ohne Verwendung von höherer Mathematik auskommen könnten!) Durch eine Antriebskraft (Preßluft oder elektromagnetische Kräfte) werden beide Halbmassen in diesem festen Abstand in Richtung auf das andere Ende „2" hin beschleunigt und stoßen dort nach einer gewissen Zeit t wie eine Masse m mit dem Gehäuse der Masse M zusammen. Durch den Aufprall wird gleichzeitig eine Sperre gelöst, so daß die linke Halbmasse nun auch noch um die Strecke S^x nach rechts gleiten kann, um nach einer kurzen Zeit t' aufzuprallen. Der Stoß wird reflektiert und die Halbmasse läuft wieder nach links, wird im Abstand S^x wieder mit der zweiten Halbmasse gekoppelt und nun gleiten beide gemeinsam zum linken Ende „1", wo das Spiel von neuem beginnt.
(Im Bild bedeuten:
P, P_1 und P_2 – die Schwerpunkte des Gesamtsystems, des Hammerkörpers und des bewegten Innenteils,
S, S_1 und S_2 – die Abstände der Schwerpunkte.
Das Bild ist nur eine *Momentaufnahme*, alle Größen außer der Gesamtlänge des Körpers und den beteiligten Massen hängen von der Zeit ab!)

Problemdiskussion:

(1) Würden keine inneren Kräfte wirken und gäbe es keine Reibung, dann wären die Stöße an den beiden Enden „1" und „2" allesamt vollkommen elastisch und der Gleiter würde mit einer einmal gegebenen Geschwindigkeit von „1" nach „2" laufen, die erste Halbmasse würde dort auftreffen und reflektiert werden. Inzwischen würde die zweite entlang der Hantelstange auf sie zugleiten und beim Zusammentreffen ebenfalls reflektiert und im Abstand S^x arretiert werden und der Gleiter liefe nach „1" zurück, wo sich das gleiche Spiel

Bild 2



wiederholte. Trotz dieser recht komplizierten Bewegungsfolge im Inneren würde der Gesamtschwerpunkt ortsfest bleiben, das Gerät würde also im Takt der inneren Bewegung um den Schwerpunkt hin- und herschwingen (Bild 2)!

(2) In einem Pickhammer ist das aber anders! Der Stoß des Gleiters im Punkte „2" ist unelastisch, d.h., die Bewegung wird abgebremst, die kinetische Energie leistet Arbeit und wird nach außen abgegeben. Im Punkte „1" erhält er in jedem Takt durch eine innere Kraft (Preßluft, Explosion, elektromagnetische Kraft, ...) einen Impuls nach rechts. Der Stoß der beiden Halbmassen kann als elastischer Stoß angesehen werden. (Die Darstellung ist vereinfacht!)

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, die der Gleiter in „1" bekommt, mit v, so ist der Impuls mv. Nach dem Reaktionsprinzip erhält das Gehäuse den gleichen Impuls nach links. Seine Geschwindigkeit V ergibt sich dann aus der Impulsgleichheit

$$MV = mv. \qquad (1)$$

Da m sicher kleiner als M ist, ist die Geschwindigkeit des Gleiters wesentlich größer als die des Gehäuses. Beim Auftreffen der ersten Halbmasse auf die Gehäusewand bei „2" wird die Geschwindigkeit abgebremst. M und $\frac{m}{2}$ zusammen haben danach nur noch die Geschwindigkeit v' nach links, die sich wiederum aus der Gleichheit der Impulse berechnet:

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)v' = MV - \frac{m}{2}v = MV - \frac{M}{2}V = \frac{M}{2}V. \quad (2)$$

Die zweite Halbmasse des Gleiters stößt *elastisch* auf die viel größere Masse $\left(M+\frac{m}{2}\right)$, ihre Geschwindigkeit wird in der Richtung lediglich umgekehrt und sie gleitet wieder nach links und überträgt ihren Impuls $\frac{m}{2}\cdot v$ nach Durchlaufen der Strecke S^x auf den ganzen Gleiter, der nun mit der Geschwindigkeit v'' von der Wand „2" weg nach links läuft.

Es gilt offensichtlich

$$v'' = v' + \hat{v}, \qquad (3)$$

mit $$m\hat{v} = \frac{mv}{2}. \qquad (4)$$

Setzen wir (2) und (4) in (3) ein, dann erhalten wir

$$v'' = \frac{MV}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M+\frac{m}{2}}\right) \qquad (5)$$

Wenn der Gleiter bei „1" eintrifft, hat er gegenüber der Gehäusewand die Relativgeschwindigkeit $\hat{v}$ und überträgt durch elastischen Stoß den Impuls $\frac{m}{2}\cdot\hat{v}$ auf das Gehäuse. Dieser Impuls beträgt nach (1) $\frac{MV}{4}$. Da das Gehäuse nach (2) ohnehin noch die Geschwindigkeit $v' = \frac{M}{2M+m}\cdot V$ hatte, hat es also am Ende eines Arbeitstaktes noch eine Restgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{V}{4} + \frac{M}{2M+m}\cdot V = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2+\frac{m}{M}}\right)V,$$

die für $m \leqq M$ größer als $\frac{7}{12}$ der durch die innere Kraft verursachten Anfangsgeschwindigkeit ist.

(3) Die Antwort lautet also:

Der Pickhammer und mit ihm der Kosmonaut erfährt bei jedem Arbeitstakt einen Impuls in Richtung der Geräteachse des Pickhammers zur Seite des Arbeitspunktes „1" hin.

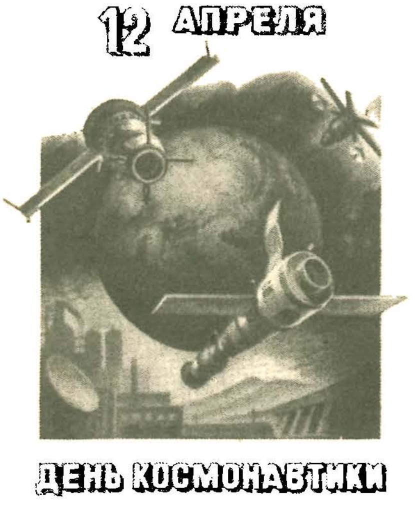
Der Kosmonaut kann sich also mit seinem Arbeitsgerät selbst zur Raumstation zurückmanövrieren!

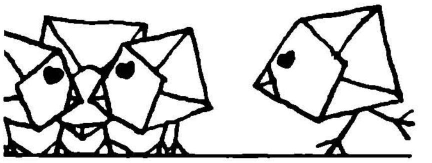
Eine notwendige Nachbemerkung

Die Komsomolzin *Natascha Shurkowa* hat sich diese Aufgabe eigentlich nicht selbst ausgedacht. Sie schrieb uns, daß ihr Vater das Problem untersucht hat, als er vor vielen Jahren selbst im Bergwerk mit einem Preßluft-Pickhammer arbeiten mußte. Ihn hatte die Frage beschäftigt, ob man sich den schweren Umgang mit diesem Gerät bei geschickter Handhabung etwas erleichtern kann! Seine Lösung verwendete die wirklichen Gegebenheiten etwas stärker und enthielt die Verwendung der Integralrechnung. *N. S.* ist ein echtes Kind unserer Zeit und hat das Problem in den Kosmos verlagert; sie liebt aber auch Kinder sehr und hat deshalb versucht, die Aufgabe so einfach zu machen, daß die Lösung mit den Mitteln der Schule ermöglicht wird.

Es wäre schön, wenn ihr die hier nur skizzierte Diskussion einmal in allen Einzelheiten durchführen würdet – das schult das physikalische Denkvermögen.

Wir danken Herrn Dr. R. Hofmann für die Übersetzung des Briefes und seine Umsetzung zu diesem Artikel, d. Red.





Leserbriefe

● Anbei 15 Antwortkarten und die Urkunde der letzten vier Jahre. Die Arbeit mit der *alpha* macht mir Spaß. In der AG Mathematik, Klasse 4, die ich leite, hilft mir die *alpha* sehr. *Pia Zimmermann, Bleicherode*

● Seit fünf Jahren löse ich die *alpha*-Aufgaben. Sie sind immer sehr interessant und haben mir besonders bei der Entwicklung meines mathematisch-logischen Denkens geholfen. Das macht sich auch im Mathematikunterricht bemerkbar. Im letzten Schuljahr erwarb ich 51 Antwortkarten. Ich habe nun die 8. Klasse an der OS beendet und besuche nun die EOS in Lichtenstein.
Angela Illing, Gersdorf (Kl. 9)

● Uns Schülern bereitet die *alpha*, besonders der Wettbewerb, viel Freude, da sie nicht nur zusätzliches Wissen vermittelt, sondern weil sie durch ihre Vielfalt anregt, sich mehr mit der Mathematik zu befassen.
Karin Lewdon, Lauscha

● Mathematik ist für mich Hobby, das mir manche Freude bereitet in meiner nun schon vier Jahre währenden „Verbannung" an Bett und Wohnung aus gesundheitlichen Gründen. Deshalb sind mir besonders die Aufgaben des Wettbewerbs Ablenkung und Anregung. *Rentner M. Pohl, Leipzig (75 Jahre), begeisterter „Esperantist"*

● *alpha* ist wertvoll in dem Sinne, daß sie die Möglichkeit gibt, sein Wissen außerhalb des Unterrichts zu vervollkommnen. Ich bin z. Z. Schüler einer 12. Klasse und habe den Wunsch, Mathematiker zu werden. Deshalb ist mir die *alpha* eine willkommene Bildungsmöglichkeit... Negativ finde ich, daß die Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb erst ziemlich spät erscheinen.
Rainer Werner, Ruppertsgrün (Kl. 12)

● Die Lösung der Aufgaben hat mir nicht nur Freude bereitet, sondern vor allem gezeigt, daß mein mathematisches Wissen noch vielfach einer Festigung bedarf, um die ich mich bemühen muß. Die *alpha* hilft mir dabei in angenehmer Weise.
Georg Lang, Burg-Spreewald (Kl. 8)

● Seit 1976 bist Du mein treuer Begleiter. Dies hat sich in meinen Kenntnissen in Ma, Ph und Ch bereits mit Erfolgen in der Schule bis zur Stadtbezirksolympiade, abgesehen von einer interessanten Freizeitbeschäftigung, ausgezahlt.
Lutz Schuppenhauer, Dresden

● Anlaß für meine sechsjährige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb war mein Sohn Henri, der seit der 5. Klasse ständig die Aufgaben auf den Gebieten Mathematik, Physik und speziell Chemie löst und so eine solide Basis in allen Fächern erarbeitete. Lohn waren etliche Preise in allen Fächern bei Kreisolympiaden und sehr gute Noten beim Abschluß der einzelnen Schuljahre. Nun beginnt er seine EOS-Ausbildung. Wir beide werden auch weiterhin am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen. *Dieter Koch, Arnstadt (42 Jahre)*

● Mit viel Freude gehe ich immer an die Lösung der Wettbewerbsaufgaben. Ich muß allerdings bekennen, daß sie mir meistens recht schwer fallen und ich oft wochenlang daran herumknobele. Um so größer ist dann die Freude, wenn die Lösung richtig war, wenn auch mein Lösungsweg wahrscheinlich umständlicher ist als der eines Wissenschaftlers. *Edith Löffler, Königshain*

● Anbei meine Antwortkarten. Ich bin jetzt 22 Jahre, seit zwei Jahren Verkehrsstudent und beschäftige mich schon viele Jahre mit der Mathe. Die *alpha* hat mich stets dabei unterstützt. Nicht zuletzt dadurch konnte ich als Schüler an den Olympiaden aller Stufen mit Erfolg teilnehmen und im Jahre 1979 als Höhepunkt einen ersten Preis bei der *DDR-Mathematikolympiade der Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen* erringen... Anbei eine Aufgabe für den *alpha*-Wettbewerb aus meiner Studienrichtung. *Student Matthias Bär, Freital*

● Anbei meine Antwortkarten und eine Aufgabe, die Ihr vielleicht in Klasse 5 oder 6 stellen könnt. Es ist mein erster derartiger Versuch. Die *alpha* ist eigentlich toll; es könnten vielleicht mehr *Lustige Logeleien* veröffentlicht werden.

Marlis Schröder, Brandenburg (Kl. 8)

● Vielen Dank, daß Sie unseren Artikel veröffentlichten. Ich möchte bemerken, daß Ihre Zeitschrift bei unseren *Jungen Mathematikern* sehr populär ist. Ehrlich gesagt, wenn ich selbst das Material Ihrer Zeitschrift durchsehe, erinnere ich mich eines Ausspruchs *David Hilberts* (1900 auf dem Internat. Mathematikerkongreß in Paris): „Das mathematische Problem muß überdies so schwierig sein, um uns zu fesseln und gleichzeitig so gemeinverständlich, um unsere Bemühungen nicht hoffnungslos zu machen. Es muß wegweisendes Zeichen auf gewundenen Pfaden sein, das zu verborgenen Wahrheiten führt und uns am Ende mit Freude über die gefundene Lösung belohnt."
Diese Aussage wird deutlicher, wenn wir Gelehrten die *Jungen Mathematiker* in ihrem Rahmen betrachten.

Prof. Dr. Jeganjan, Jerewan

Konvexe und konkave Funktionen

Für das geometrische und das arithmetische Mittel zweier beliebiger nichtnegativer reeller Zahlen y_1 und y_2 gilt die Ungleichung

$$\sqrt{y_1 \cdot y_2} \leqq \frac{1}{2}(y_1+y_2). \qquad (1)$$

Beweis: Es ist offensichtlich $(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2})^2 \geqq 0$, d. h. $y_1+y_2-2\sqrt{y_1 y_2} \geqq 0$. Daraus folgt $y_1+y_2 \geqq 2\sqrt{y_1 y_2}$ und schließlich $\frac{1}{2}(y_1+y_2) \geqq \sqrt{y_1 y_2}$, w. z. b. w.

▲1▲ Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (1) die Gleichheit eintritt!

Für jede reelle Zahl $a>0$ und beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 sind die Zahlen a^{x_1} und a^{x_2} positiv. Setzen wir nun in (1) $y_1=a^{x_1}$ und $y_2=a^{x_2}$, so ergibt sich $\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} \leqq \frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})$.

Mit der Umformung $\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}=\sqrt{a^{x_1+x_2}}=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ erhalten wir aus (1) die Ungleichung

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leqq \frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2}). \qquad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (2) trifft genau dann zu (d. h., $a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})$ ist eine wahre Aussage), wenn $a^{x_1}=a^{x_2}$ ist (vgl. Lösung ▲1▲). Da die Funktion mit der Gleichung $y=a^x$ für $a \neq 1$ *streng* monoton wächst bzw. fällt, ist dies genau dann der Fall, wenn $x_1=x_2$ ist. (Für $a=1$ gilt $a^{x_1}=a^{x_2}$ für alle x_1 und x_2.)

Gibt es nun außer der Funktion mit der Gleichung $y=a^x$ noch weitere Funktionen f, für die die Ungleichung

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ gilt?}$$

Definition: Eine Funktion f heißt *konvex im Intervall I*, wenn für beliebige Zahlen x_1, $x_2 \in I$ die Ungleichung (3) erfüllt ist:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (3)$$

Sie heißt konkav in I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (3')$$

Dabei soll die Funktion f *streng* konvex (konkav) heißen, wenn die Gleichheit in (3) (bzw. (3')) genau dann eintritt, wenn $x_1=x_2$ ist.

Gelten (3) (bzw. (3')) für alle Elemente x_1, x_2 des *Definitionsbereichs* von f, dann heißt die Funktion f *konvex* (bzw. konkav).

Beispiel 1:

Wir untersuchen die Funktion mit der Gleichung $y=f(x)=x^2$ mit der Menge der reellen Zahlen als Definitionsbereich (Bild 1).

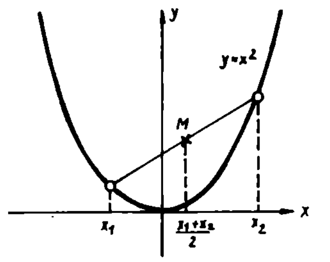


Bild 1

Sie ist streng konvex, wenn (4) für alle x_1, $x_2 \in P$ erfüllt ist und wenn die Gleichheit nur für $x_1=x_2$ eintritt:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) \qquad (4)$$

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn die Beziehung

$$\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geqq 0$$

richtig ist.
Wir formen die linke Seite dieser Ungleichung um:

$$\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{4}-\frac{2x_1x_2}{4}-\frac{x_2^2}{4}$$
$$=\frac{x_1^2}{4}-\frac{2x_1x_2}{4}+\frac{x_2^2}{4}=\frac{1}{4}(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)$$
$$=\frac{(x_1-x_2)^2}{4}=T$$

Offensichtlich gilt für alle $x_1, x_2 \in P$ $T \geqq 0$ und T ist genau dann gleich Null, wenn $x_1=x_2$ ist.
Damit ist bewiesen, daß die Funktion f mit der Gleichung $y=f(x)=x^2$ streng konvex ist.

Beispiel 2:

Es soll untersucht werden, ob die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$ im Intervall $I=\{x \in P \mid -\infty < x < 0\}$ streng konkav ist (siehe Bild 2). Dies ist nach (3') dann erfüllt, wenn die Beziehung

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqq 0$$

für alle x_1, $x_2 \in I$ gilt.

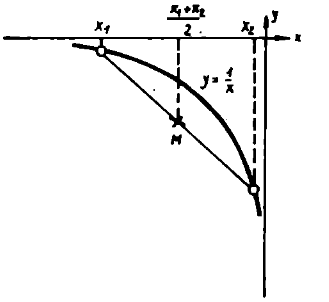


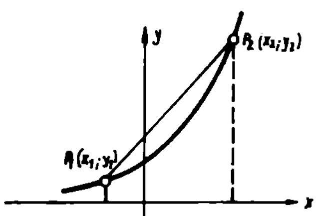
Bild 2

$$\text{Aus } \frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$$
$$= \frac{2}{x_1+x_2} - \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} = T$$
erhalten wir nach weiteren Umformungen
$$T = \frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(-x_1-x_2)}.$$

Offensichtlich gilt für das betrachtete Intervall (d. h. $-x_1>0$, $-x_2>0$) $T>0$ für $x_1 \neq x_2$ und $T=0$ für $x_1=x_2$. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist also im betrachteten Intervall streng konkav.

Nach diesen Beispielen wollen wir die gewonnenen Erkenntnisse etwas allgemeiner betrachten. Es sei $y=f(x)$ die Gleichung einer reellen Funktion f, und wir wählen aus dem Definitionsbereich von f zwei voneinander verschiedene Elemente x_1 und x_2; dann liegen die Punkte P_1 $(x_1;f(x_1))$ und P_2 $(x_2;f(x_2))$ auf dem Bild der Funktion mit der Gleichung $y=f(x)$. Zu den beiden Punkten P_1 und P_2 bilden wir ferner die Strecke $\overline{P_1P_2}$ (siehe Bild 3a, 3b). Der Mittelpunkt dieser Strecke ist
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Bild 3a



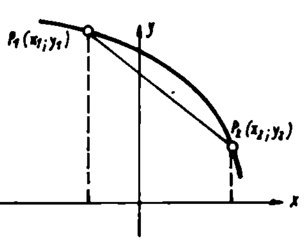


Bild 3b

Die Funktion f ist konvex (konkav), wenn zu zwei beliebigen Elementen x_1 und x_2 $(x_1 \neq x_2)$ aus dem Definitionsbereich von f der zugehörige Punkt M oberhalb (unterhalb) des Funktionsbildes von f liegt. Die Forderung, daß *alle* (inneren) Punkte einer Strecke, deren Endpunkte auf dem Bild der Funktion f liegen, oberhalb (unterhalb) des Funktionsbildes liegen, ist gleichwertig mit der Konvexität (Konkavität) von f.

Satz: Eine im Intervall I stetige[1]) Funktion f mit der Gleichung $y=f(x)$ ist in I genau dann konvex (bzw. konkav), wenn für beliebige Elemente x_1, $x_2 \in I$ und für jede Zahl $t \in P$ $(0<t<1)$ die Bedingung (5) (bzw. (5')) erfüllt ist:
$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \qquad (5)$$
$$f(tx_1+(1-t)x_2) \geqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \qquad (5')$$

Beweis: (Für den Fall der Konvexität)

(1) Wir schließen aus der Konvexität von f auf das Bestehen der Beziehung (5). Diesen Beweis führen wir *indirekt*, d. h., wir folgern aus der Annahme, daß (5) nicht für alle x_1, x_2, t $(0<t<1)$ erfüllt ist, einen Widerspruch zur vorausgesetzten Konvexität von f. Ist (5) für alle x_1, x_2, t erfüllt, so gibt es Elemente x_1, $x_2 \in I$ und $t \in P$ mit $0<t<1$, so daß $f(tx_1+(1-t)x_2) > tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$. Geometrisch bedeutet dies, daß es im Bild von f einen Punkt P^* gibt, der oberhalb einer Sehne $\overline{P_1P_2}$ des Funktionsbildes liegt. Dann müßte der Graph von f die Sehne $\overline{P_1P_2}$ wegen der Stetigkeit von f an mindestens zwei Stellen P_1' und P_2' schneiden. Man wähle nun P_1' und P_2' so, daß *auf dem Graph von f*
a) P^* zwischen P_1' und P_2' liegt und
b) zwischen P_1' und P_2' keine weiteren Schnittpunkte des Graphen von f mit der Sehne $\overline{P_1P_2}$ liegen.
Dann läge der Mittelpunkt M' von $\overline{P_1'P_2'}$ unterhalb des Graphen von f – im Widerspruch zur Definition der Konvexität von f (siehe Bild 4).

(2) Wenn (5) für alle $t \in P$ mit $0<t<1$ gilt, so auch speziell für $t=\frac{1}{2}$. (5) geht dann über in (3), w. z. b. w.

Beispiel 3:

Für jede positive reelle Zahl a ist die Funktion mit der Gleichung $y=ax^2$ $(x \in P)$ in ihrem Definitionsbereich streng konvex. Um dies nachzuweisen, muß die Ungleichung
$a(tx_1+(1-t)x_2)^2 < tax_1^2+(1-t)ax_2^2$
für alle x_1, $x_2 \in P$ $(x_1 \neq x_2)$ und alle t mit $0<t<1$ erfüllt sein. Dazu bilden wir wieder die Differenz
$(tax_1^2+(1-t)ax_2^2)-a(tx_1+(1-t)x_2)^2$;
nach Umformen erhalten wir daraus
$at(1-t)(x_1-x_2)^2=T.$
Für alle x_1, x_2, t mit den genannten Eigenschaften ist $T>0$.

Die im Satz genannten Bedingungen gestatten es, mit elementaren Mitteln die Konvexität bzw. Konkavität einer reellen (stetigen) Funktion für ein bestimmtes Intervall aus ihrem Definitionsbereich festzustellen. So kann z. B. für einen Punkt P_1 $(x_1;y_1)$, der zum Bild einer reellen (stetigen) Funktion f mit der Gleichung $y=f(x)$ gehört, festgestellt werden, ob die Funktion f in einer geeignet gewählten Umgebung von x_1 konvex oder konkav ist. Dies ermöglicht uns zu entscheiden, ob an einem relativen Extrempunkt einer Funktion ein Maximum oder ein Minimum der Funktion vorliegt.

Anežika Wohlmutová

Aus der ČSSR-Zeitschrift *rozhledy* 1/74/75; Übersetzung und Bearbeitung: O. Langer und C. P. Helmholz

[1]) Die Stetigkeit einer Funktion wird in der 11. Klasse exakt definiert. Hier genügt es, sich unter einer stetigen Funktion eine solche vorzustellen, deren Bild sich mit dem Bleistift „ohne abzusetzen" zeichnen läßt.

Lösung zu konvexe und konkave Funktionen:

▲1▲ (1) ist äquivalent zu $(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2})^2 \geqq 0$. Es gilt $(\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2})^2=0$ genau dann, wenn $\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}=0$, d. h. $\sqrt{y_1}=\sqrt{y_2}$. Letzteres ist dann und nur dann der Fall, wenn $y_1=y_2$ ist.

Weitere Aufgaben:

▲2▲ Untersuche die Funktion f mit der Gleichung $y=|x|$ auf Konvexität bzw. Konkavität!

Lösung: f ist konvex, aber nicht streng konvex.

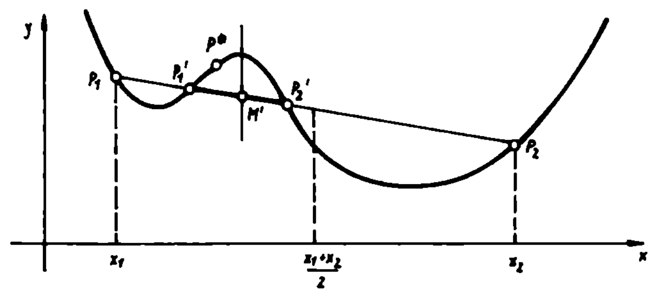
▲3▲ Untersuche die Funktion f mit der Gleichung $y=x^3$ auf Konvexität bzw. Konkavität!

Lösung: f ist in $I_1=\{x \in P \mid -\infty<x<0\}$ streng konkav und in $I_2=\{x \in P \mid 0<x<\infty\}$ streng konvex.

▲4▲ Die Funktion f mit der Gleichung $y=x^2+6x+8$ hat den Extrempunkt P $(-3;-1)$.
Untersuche, ob f an diesem Punkt ein Maximum oder ein Minimum annimmt!

Lösung: Es liegt ein Minimum vor.

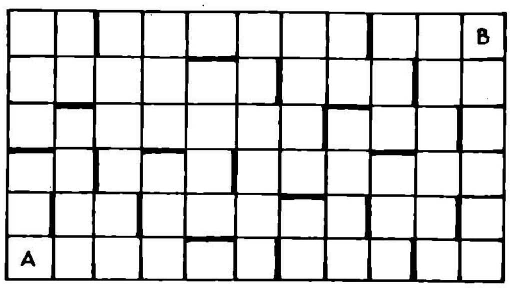
Bild 4



Übersicht

Von A nach B ist ein Weg zu finden, der durch alle Felder führt. Die Linie darf sich nicht kreuzen oder doppelt gezogen werden.

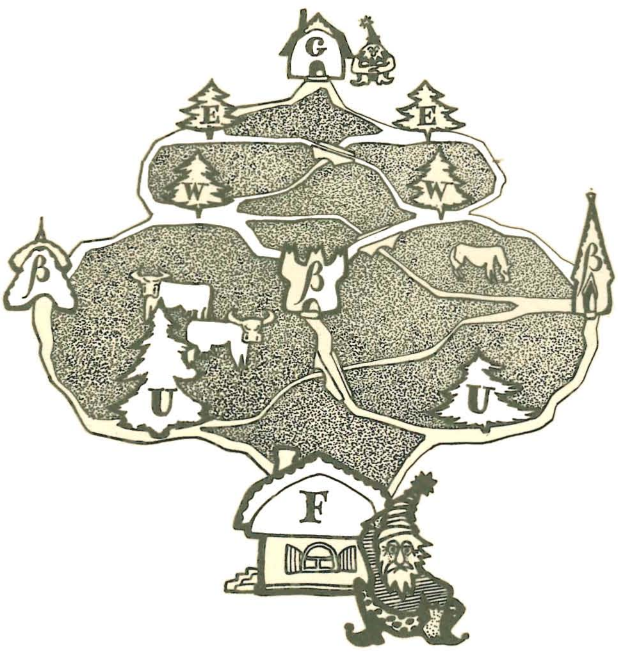
aus: Troll



Die Fußwege zum Bruder

Gnom Nils beabsichtigt, seinen Bruder zu besuchen. Wieviel Marschrouten hat er dafür? (Nils muß den Marschweg „F-u-ß-w-e-g" entlang gehen.)

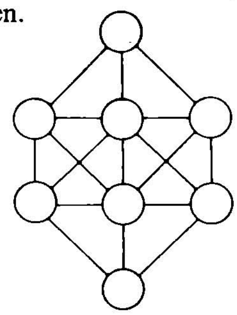
Architekt A. W. Radunski, Moskau



Von 1 bis 8

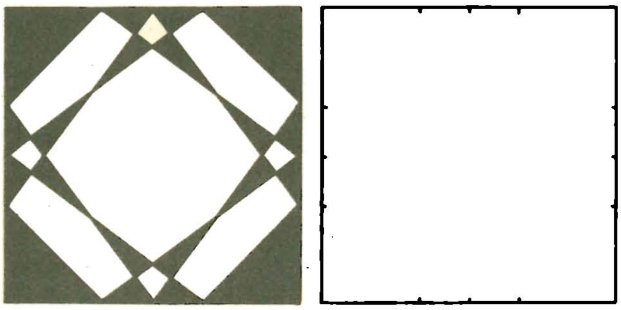
Trage in die Kreise die Zahlen 1 bis 8 so ein, daß die Differenz zwischen zwei benachbarten, auf einer Geraden liegenden Kreise mindestens 2 beträgt! Setzt du beispielsweise in den oberen Kreis 3 ein, so darf in keinem der drei mit ihm verbundenen Kreise 2 oder 4 stehen.

aus: Sputnik, Moskau



Für Tüftler

Das abgebildete Muster soll im nachstehenden leeren Quadrat nachgezeichnet werden. Hilfsmittel sind Lineal und Bleistift. Zu messen gibt es nichts, denn die Markierungspunkte im leeren Quadrat reichen aus, um alle geforderten Linien exakt zeichnen zu können.



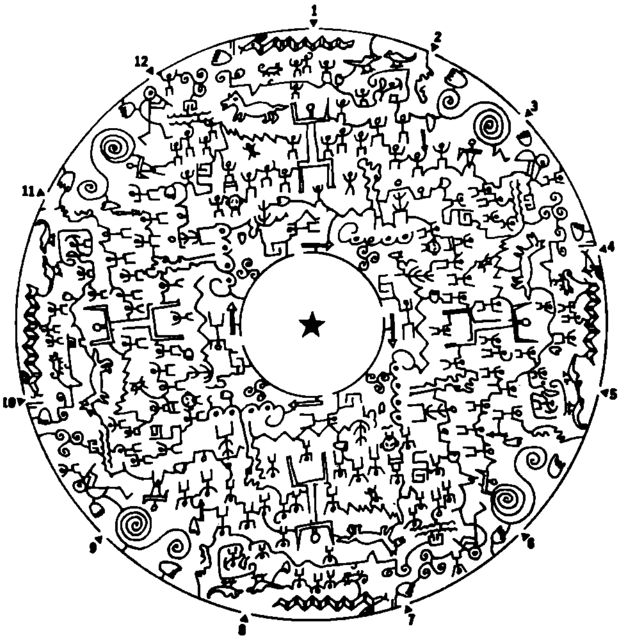
aus: WE 5/79, Köln, M. Junga

... er sieht den Wald vor lauter Bäumen nicht!

Rolf Siegmund, OS Gröbers (Kl. 9)

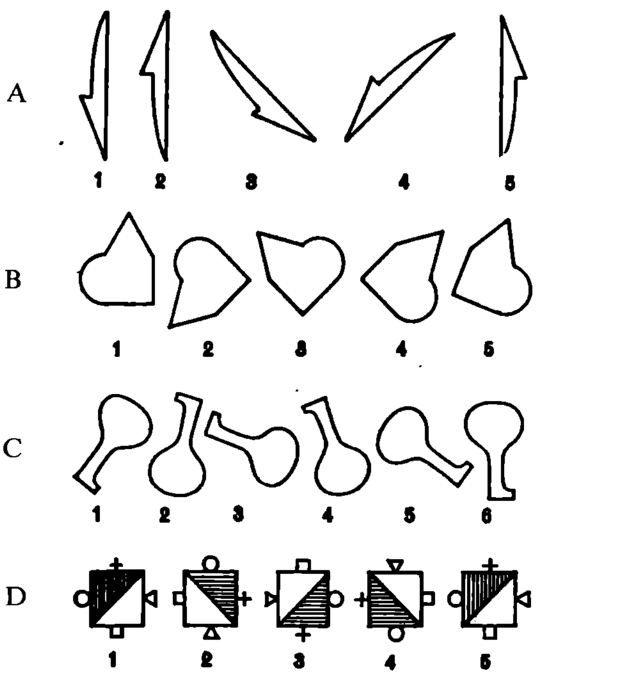
Wunderbare Komposition

Unsere Frage: Welchen der 12 Eingänge muß man nehmen, um den Stern in der Mitte zu erreichen?



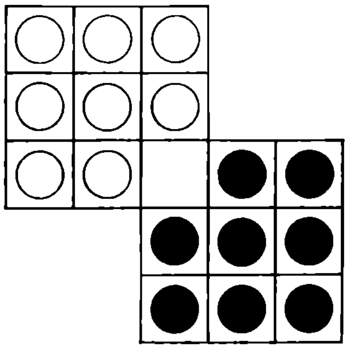
Gleich oder nicht gleich?

Auf den Bildern A, B, C, D scheinen die Figuren gleich zu sein, jede in anderer Lage. Jedoch gibt es je eine, die nicht zu den anderen paßt. *aus: Füles, Budapest*



Platzwechsel

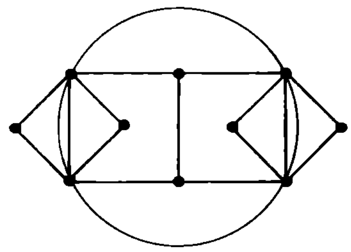
Stelle die weißen und schwarzen Figuren so auf, wie es das Bild zeigt!
Aufgabe: Die weißen und schwarzen Figuren sind so auszutauschen, daß die schwarzen alle links oben und die weißen Figuren alle rechts unten zu stehen kommen. Bedingung: Man darf in waagerechter und senkrechter Richtung auf das nächste leere Feld ziehen, soweit notwendig auch hin und her. Man darf sogar die Figur des Gegners überspringen, falls dahinter ein leeres Feld ist (sogar mehrfach). Mit 46 Schritten ist das Problem lösbar. *aus: Füles, Budapest*



Magische Figur

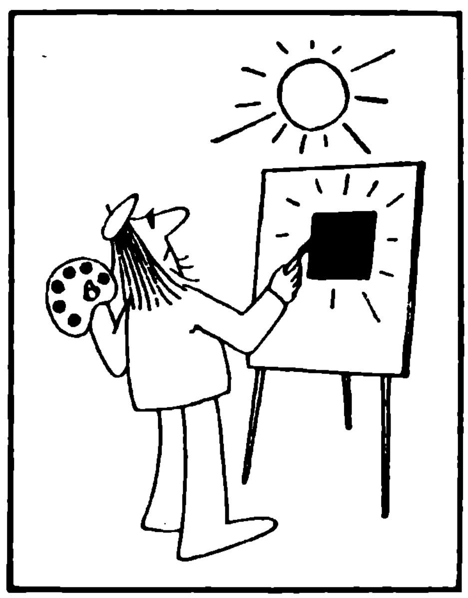
An Stelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 10 so einzutragen, daß die Summe der Zahlen an den Ecken jedes Quadrats und andererseits auf der Kreislinie stets die gleiche ist, insgesamt also 5 gleiche Summen.

Ing. J. Pěnčik, Praha



„Ich seh sie aber so!"

Wladimir Wladow, aus: Trud



Mathematikaufgaben aus Freundesland

10 Aufgaben aus der Sowjetunion

▲1▲ Es ist nachzuweisen, daß es keine n-stellige natürliche Zahl z_1 gibt, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der letzten Ziffer eine natürliche Zahl z_2 erhält, die fünfmal so groß ist wie die Zahl z_1.

▲2▲ Aljoscha, Kolja, Petja und Wanja bestreiten das Finale in einem 100-Meter-Lauf. Drei ihrer Freunde stellen je eine Prognose auf, die jeweils aus zwei Aussagen besteht.
P_1: Petja wird Erster. Aljoscha wird Dritter.
P_2: Petja wird Zweiter. Wanja wird Erster.
P_3: Kolja wird Erster. Aljoscha wird Vierter.
Nach dem 100-Meter-Lauf stellte sich heraus, daß in jeder der drei Prognosen genau eine Aussage wahr, die andere hingegen falsch war. Keiner von den vier Läufern belegte mit einem anderen den gleichen Platz.
Welchen Platz belegte jeder dieser Jungen?

▲3▲ Es ist nachzuweisen, daß es keine dreistellige natürliche Zahl z_1 gibt, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der dritten Ziffer eine natürliche Zahl z_2 erhält, die viermal so groß ist wie die Zahl z_1.

▲4▲ Es sind zwei natürliche Zahlen zu ermitteln, deren Summe 252 beträgt und deren größter gemeinsamer Teiler 36 ist. Dabei soll die größere dieser beiden Zahlen höchstens doppelt so groß sein wie die kleinere Zahl.

▲5▲ Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die sich durch das Produkt derjenigen Zahlen, die jeweils den beiden Ziffern entsprechen, ohne Rest teilen lassen.

▲6▲ Eine Schülerin wollte 187 mit einer dreistelligen natürlichen Zahl multiplizieren. Versehentlich vertauschte sie im zweiten Faktor die Einer- mit der Zehnerstelle und erhielt als Produkt eine Zahl, die um 6732 kleiner war als das richtige Ergebnis. Es ist bekannt, daß im zweiten Faktor die Zahl, die der Zehnerstelle entspricht, dreimal so groß ist wie die Zahl, die der Einerstelle entspricht.
Welches ist die kleinste Zahl, die diese Schülerin unter diesen Bedingungen als Ergebnis erhalten haben könnte?

▲7▲ Es ist zu untersuchen, ob man die Kanten eines Würfels so mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 11, 12 durchnumerieren kann, daß für jeden Eckpunkt des Würfels die Summe aus den Zahlen, die zu den drei in diesem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten gehören, stets die gleiche ist.

▲8▲ Welche zweistelligen natürlichen Zahlen, die in dekadischer Darstellung nicht die Ziffer 0 enthalten, lassen sich ohne Rest durch ihre Quersumme teilen?

▲9▲ Bei einer vierstelligen natürlichen Zahl, die in der dekadischen Darstellung genau eine Ziffer 0 enthält, wird diese Ziffer 0 gestrichen. Man erhält dann eine dreistellige natürliche Zahl, die gleich dem neunten Teil der Ausgangszahl ist.
Man finde eine solche Zahl.

▲10▲ Eine fünfstellige gerade natürliche Zahl enthält in ihrer dekadischen Darstellung keine Ziffer 0. Die aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl ist eine Quadratzahl. Die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl ist eine Kubikzahl.
Um welche natürlichen Zahlen handelt es sich?

Diese zum Teil anspruchsvollen Aufgaben stammen aus Mathematikolympiaden (1. und 2. Stufe) der Sowjetunion. Sie wurden zusammengestellt und mit Lösungen versehen von stud. math. O. Langer (Döbeln), z. Z. Student an der Universität in Leningrad. Bearbeitet für unsere *alpha*-Leser hat sie StR Th. Scholl, Berlin.

Lösungen:

▲1▲ Angenommen, es gibt eine solche n-stellige natürliche Zahl z_1, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der letzten Ziffer eine Zahl z_2 erhält, für die $z_2=5\cdot z_1$ gilt, und es seien $z_1=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ und $z_2=\overline{a_na_2a_3\ldots a_1}$ ihre Zifferdarstellungen. Wegen $a_1\neq 0$ endet z_2 nicht mit der Ziffer 0. Wegen $z_2=5\cdot z_1$ müßte z_2 auf die Ziffer 5 enden, also $a_1=5$ sein. Daraus folgt weiter $z_2=5\cdot z_1$ bzw. $\overline{a_na_2a_3\ldots 5}=5\cdot\overline{5a_2a_3\ldots a_n}$. Wegen $a_n\leqq 9$ und $5\cdot 5>9$ ist diese Gleichung nicht erfüllbar. Also war die Annahme der Existenz von z_1 falsch, d. h., es gibt keine Zahl mit der geforderten Eigenschaft.

▲2▲ Wir bezeichnen z. B. die beiden Aussagen der ersten Prognose mit $P_1(a)$ und $P_1(b)$ und nehmen eine Fallunterscheidung vor.
1. Fall: Angenommen $P_1(a)$ ist eine wahre Aussage. Dann ist $P_1(b)$ eine falsche Aussage. Ferner ist dann $P_2(a)$ eine falsche Aussage und somit $P_2(b)$ eine wahre Aussage. Das führt jedoch zum Widerspruch zur Annahme. Diese Möglichkeit entfällt also.
2. Fall: Angenommen $P_1(a)$ ist eine falsche Aussage. Dann ist $P_1(b)$ eine wahre Aussage. Ferner ist dann $P_3(b)$ eine falsche Aussage und somit $P_3(a)$ eine wahre Aussage. Daraus folgt weiter, daß $P_2(b)$ eine falsche und somit $P_2(a)$ eine wahre Aussage ist.
Das führt zu folgendem Ergebnis:
Kolja wurde Erster, Petja Zweiter, Aljoscha Dritter und Wanja Vierter.

▲3▲ Angenommen, es gibt eine solche dreistellige natürliche Zahl z_1, aus der man nach Vertauschen der ersten und dritten Ziffer eine Zahl z_2 erhält, für die $z_2=4\cdot z_1$ gilt, und es seien $z_1=\overline{abc}$ und $z_2=\overline{cba}$ ihre Zifferndarstellungen. Wegen $z_2=4\cdot z_1$ muß z_2 eine gerade natürliche Zahl sein und wegen $a\neq 0$ auf die Ziffer 2, 4, 6 oder 8 enden. Wegen $4a<9$ gilt $a=2$. Wegen $\overline{cb2}=4\cdot\overline{2bc}$ könnte $c=3$ oder $c=8$ sein.
Andererseits gilt aber $c\geqq 4a=4\cdot 2=8$. Folglich muß $c=8$ gelten. Daraus folgt weiter $\overline{8b2}=4\cdot\overline{2b8}$ oder in anderer Schreibweise $802+10b=4(208+10b)$ mit $0\leqq b\leqq 9$, also
$802+10b=832+40b$,
$30b=-30$,
$b=-1$.
Also existiert keine solche dreistellige Zahl z_1 mit der geforderten Eigenschaft.

▲4▲ Die zu ermittelnden natürlichen Zahlen seien $x=36k$ und $y=36n$, wobei k und n von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Dann gilt $36k+36n=252$, also $k+n=7$. Es sei $k>n$; dann erfüllen folgende Zahlenpaare $(k;n)$ diese Gleichung:
(6;1), (5;2) und (4;3). Nur das Zahlenpaar (4;3) erfüllt aber die Bedingung $k\leqq 2n$. Die zu ermittelnden Zahlen lauten somit 144 und 108.

▲5▲ Eine zweistellige natürliche Zahl z läßt sich darstellen durch $z=10a+b$ mit $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Nun soll gelten
$\frac{10a+b}{ab}=k$, wobei k ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt weiter $b\neq 0$. Nun gilt
$10a+b=abk$, $b=abk-10a$,
also $b=a(bk-10)$.
Daraus folgt, daß a Teiler von b ist. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

b	a	k	z
1	1	11	11
2	1, 2	$6, \frac{11}{2}$	12
3	1, 3	$\frac{13}{3}, \frac{11}{3}$	–
4	1, 2, 4	$\frac{14}{4}, 3, \frac{11}{4}$	24
5	1, 5	$3, \frac{11}{5}$	15
6	1, 2, 3, 6	$\frac{16}{6}, \frac{13}{6}, 2, \frac{11}{6}$	36
7	1, 7	$\frac{17}{7}, \frac{11}{7}$	–
8	1, 2, 4, 8	$\frac{18}{8}, \frac{14}{8}, \frac{12}{8}, \frac{11}{8}$	–
9	1, 3, 9	$\frac{19}{9}, \frac{13}{9}, \frac{11}{9}$	–

Die gesuchten Zahlen lauten 11, 12, 15, 24 und 36.

▲6▲ Der zweite Faktor läßt sich durch $100a+10b+c$ darstellen. Nun gilt

$187(100a+10b+c)-187(100a+10c+b)$
$=6732,$
$(100a+10b+c)-(100a+10c+b)=36,$
$9b-9c=36,$
$b-c=4.$

Wegen $b=3c$ erhalten wir daraus
$3c-c=4$, $2c=4$, also $c=2$ und somit $b=6$.
Der kleinste dreistellige zweite Faktor lautet 162, und das kleinste Produkt lautet $187 \cdot 126 = 23\,562$, das diese Schülerin unter diesen Bedingungen als Ergebnis erhalten haben könnte.

▲7▲ Es sei a die Summe aus den Zahlen, die zu den drei in einem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten gehören. Da jede Kante in genau zwei Eckpunkten des Würfels endet und es acht Eckpunkte gibt, gilt

$$8a=2(1+2+\ldots+11+12),$$
$$a=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{2}\cdot(1+12),$$
$$a=\frac{39}{2}.$$

Da a keine natürliche Zahl, sondern eine gebrochene Zahl ist, lassen sich die Kanten des Würfels mit den gegebenen Zahlen nicht entsprechend der geforderten Bedingung durchnumerieren.

▲8▲ Eine solche zweistellige natürliche Zahl läßt sich durch $10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $1\leqq b\leqq 9$ darstellen; sie hat die Quersumme $a+b$. Nun soll gelten $10a+b=k(a+b)$, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$10a+b=ak+bk,$$
$$10a-ak=bk-b,$$
$$a(10-k)=b(k-1).$$

Daraus folgt $2\leqq k\leqq 9$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
Aus $k=2$ folgt $8a=b$, also $a=1$ und $b=8$. Aus $k=3$ folgt $7a=2b$, also $a=2$ und $b=7$. Aus $k=4$ folgt $2a=b$, also $a=1, 2, 3$ oder 4 und $b=2, 3, 6$ oder 8. Aus $k=5$ folgt $5a=4b$, also $a=4$ und $b=5$. Aus $k=6$ folgt $4a=5b$, also $a=5$ und $b=4$. Aus $k=7$ folgt $a=2b$, also $a=2, 4, 6$ oder 8 und $b=1, 2, 3$ oder 4. Aus $k=8$ folgt $2a=7b$, also $a=7$ und $b=2$. Aus $k=9$ folgt $a=8b$, also $a=8$ und $b=1$. Es existieren 14 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 12, 18, 21, 24, 27, 36, 42, 45, 48, 54, 63, 72, 81, 84.

▲9▲ Eine vierstellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $1000a+100b+10c+d$ mit $1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$, $0\leqq c\leqq 9$ und $0\leqq d\leqq 9$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.
Es sei $b=0$; dann gilt

$$1000a+10c+d=9(100a+10c+d),$$
$$100a=8(10c+d),$$
$$25a=20c+2d,$$
$$2d=25a-20c,$$

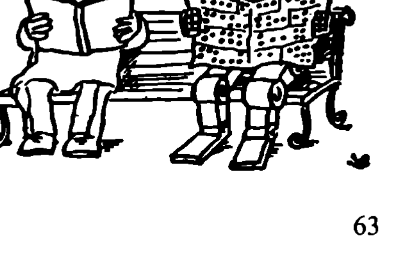
also $$d=\frac{25a}{2}-10c.$$

Für $a=2$ erhalten wir daraus $d=25-10c$.
Nur $c=2$ erfüllt diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen. Aus $c=2$ folgt $d=5$. Damit haben wir bereits eine solche Zahl gefunden; sie lautet 2025. Die weiteren Fälle $c=0$ und $d=0$ brauchen deshalb nicht näher untersucht zu werden.

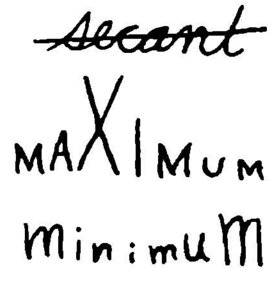
▲10▲ Es gibt genau fünf dreistellige Kubikzahlen; sie lauten $5^3=125$; $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$. Da die zu ermittelnde fünfstellige natürliche Zahl gerade sein soll, kommen nur die Kubikzahlen 216 oder 512 in Frage. Damit muß die aus den ersten drei Ziffern gebildete Quadratzahl auf die Ziffern 2 oder 5 enden. Es gibt keine Quadratzahl, die auf die Ziffer 2 endet. Deshalb entfällt die Zahl 216. Wegen $5^2<100$ und $35^2>1000$ kommen nur die Quadratzahlen $15^2=225$ und $25^2=625$ in Frage. Es existieren genau zwei Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 22512 und 62512.

Campingplätze vom Rechner vermittelt

Mit Hilfe der EDV können jetzt die Zeltplätze des Campingzentrums in Stralsund vermittelt werden. Dafür wurde ein entsprechendes EDV-Projekt vom VEB Datenverarbeitungszentrum (DVZ) Rostock entwickelt.
Das Kernstück dieses Projektes ist der Algorithmus zur Ermittlung der Reihenfolge, in der die Anträge vom Rechner abgearbeitet werden sollen. Dafür wird eine Reihe von Prioritäten aufgestellt, die von ganz bestimmten Faktoren abhängig sind. Dazu gehört z. B., ob der Antragsteller kinderreich ist, ob er überhaupt schon einmal gezeltet hat, ob er zum Zelten nur die Vor- bzw. Nachsaison bisher benutzt hat bzw. jetzt beanspruchen möchte oder ob er entgegen den Vermittlungsbedingungen mehr als einen Antrag gestellt hat usw.
Die Beantwortung dieser Fragen wird in einer Bewertungsziffer festgelegt, die zusammen mit der Personenkennzahl auf einem Magnetband, einem sogenannten Stammband, für vier Jahre gespeichert wird. Auf dem Stammband sind also die Daten jedes Bürgers enthalten, der sich um eine Zeltgenehmigung im Ostseebezirk beworben hat. Es gibt Auskunft darüber, wie seine Wünsche in den letzten vier Jahren berücksichtigt worden sind. Die niedrigste Bewertungsziffer erhalten kinderreiche Familien, die höchste der, der mehr als einen Antrag gestellt hat. Im zuletzt genannten Fall wird der Antrag für das laufende Jahr nicht bearbeitet und der Antragsteller für ein weiteres Jahr von der Vermittlung ausgeschlossen.
Auf dem Antragformular können vier verschiedene Campingplätze und drei verschiedene Anreisezeiten angegeben werden. Es bestehen dann 12 Möglichkeiten zur Erteilung einer Genehmigung. Diese Maßnahme ist vor allem zur Auslastung der Plätze in der Vor- und Nachsaison gedacht; denn wenn diese als Ersatzzeit angegeben ist, erfolgt in den meisten Fällen eine Genehmigung. Die Bewertungsziffer liegt dann unter der für die Hauptsaison und bietet für das Folgejahr günstigere Bedingungen.
Das Campingzentrum erhält durch dieses Projekt außerdem Informationen über freie Kapazitäten, über die Belegung der Plätze in bestimmten Zeiträumen und eine Übersicht über Mehrantragsteller und fehlerhaft ausgefüllte Anträge. Mit der Einführung des Projektes konnten beispielsweise die erteilten Genehmigungen von 486500 im Jahre 1972 auf 603700 im Jahre 1975 ansteigen. Bis auf wenige Ausnahmen war es möglich, die vorhandenen Campingplätze im Ostseebezirk über die ganze Saison hinweg auszulasten.
Die guten Ergebnisse, die mit diesem Projekt erzielt wurden, sollen nicht nur auf die Ostseebezirke beschränkt bleiben. Im Zusammenhang mit der Umarbeitung des Projektes auf die Datenverarbeitungsanlage *es 1040* bieten sich jetzt günstigere Möglichkeiten an, das Projekt so zu konzipieren, daß in einer Endstufe alle Kapazitäten sämtlicher Campingplätze der DDR gemeinsam mit einem Rechnerlauf vergeben werden können. Für die Antragsteller ergibt sich daraus der große Vorteil, Ersatzplätze aus allen Bezirken der DDR auswählen zu können. *(ADN)*



In freien Stunden · alpha-heiter



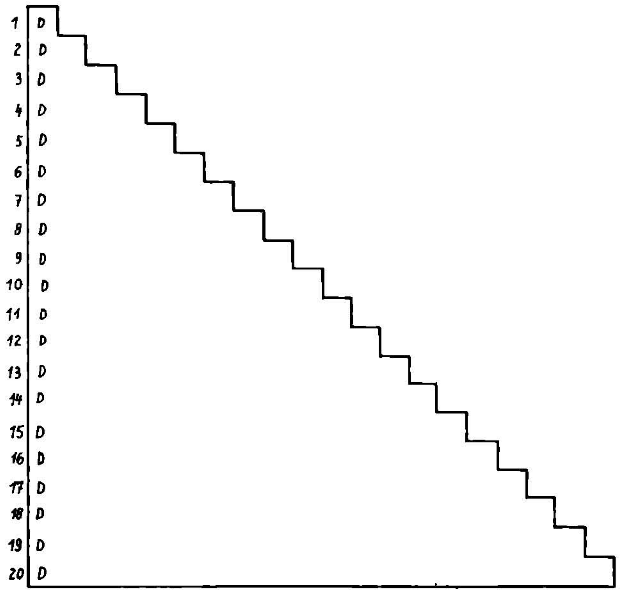
Wer lügt? Wer sagt die Wahrheit?

Zwei Zwillingsbrüder Erich und Fritz sind äußerlich nicht zu unterscheiden: gleiche Größe, gleiche Gestalt, gleichen Gesichtsausdruck, gleicher Haarschnitt, gleiche Sprache, gleiche Kleidung. Aber man weiß, daß der eine immer lügt, der andere immer die Wahrheit sagt. Wie kann man durch Fragen ermitteln, wer Erich und wer Fritz und wer der Lügner ist?

Dr. G. Hesse, Radebeul

Rätselspaß mit D

In die folgende Figur sind Wörter mit der angegebenen Bedeutung einzutragen: 2. Abkürzung für Dezitonne; 3. Abkürzung für Dekameter; 4. Zahlwort; 5. griechischer Buchstabe; 6. Zeitraum von 10 Tagen; 7. Teil einer Divisionsaufgabe; 8. graphische Darstellung; 9. französischer Mathematiker; 10. Festlegung eines Begriffs; 11. Term der Form $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; 12. umgangssprachlicher Ausdruck für arithmetisches Mittel; 13. Ausdruck, mit dem entscheidbar ist, wieviel Lösungen eine quadratische Gleichung hat; 14. spezielles Viereck; 15. Eigenschaft von Gebilden, die Länge, Breite und Höhe besitzen; 16. Ergebnis der Multiplikation von 17 mit seinem Nachfolger; 17. Name eines Rechengesetzes; 18. Menge aller Zahlen, für die eine Funktion erklärt ist; 19. Darstellungsverfahren; 20. Teilgebiet der Mathematik.



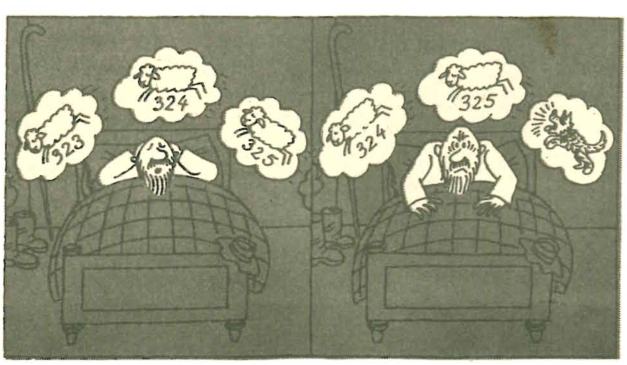
OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Wunderbare Arithmetik

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben – verschiedene Ziffern. (Für die verschiedenen Rätsel kann die Bedeutung von Buchstaben verschieden sein.)

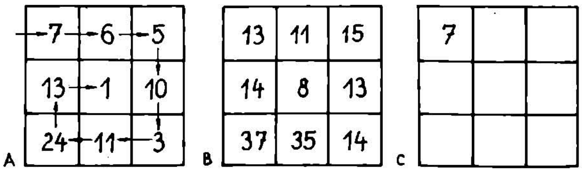
Architekt A. W. Radunski, Moskau

aus: Eulenspiegel, H. Schrade



Das Zahlenquadrat-Spiel

Zeichne drei Zahlenquadrate A, B, C (siehe Beispiel)!



A ist mit beliebigen natürlichen Zahlen besetzt. Zusätzlich ist ein *Weg* eingezeichnet, der alle Kästchen in einem Zug genau einmal durchläuft. Dieser *Weg* schneidet nur die Seiten der Teilquadrate, also nicht deren Eckpunkte.

B entsteht aus A, indem man entlang des *Weges* zu jeder Zahl die nachfolgende addiert und die Summe in das betreffende Teilquadrat schreibt. Das heißt im obigen Beispiel für das erste Teilquadrat $7 + 6 = 13$, für das zweite $6 + 5 = 11$, usw. Am Ende des *Weges* wird auf die Zahl am Anfang als nachfolgende Zahl zurückgegriffen.

C enthält lediglich die erste Zahl von A.

Damit hast du die Grundlage geschaffen für eine Reihe von Spielen und Knobelaufgaben:

1. Wie viele *Wege* gibt es, die man im Zahlenquadrat A festlegen könnte? 2. Können Anfang und Ende des *Weges* zusammenfallen? 3. Lege deinem Freund die Zahlenquadrate B und C vor und lasse ihn A ermitteln! 4. Gibt es bei der Aufgabe 3 genau eine Lösung? 5. Wenn es bei Aufgabe 3 mehrere Lösungen gibt, wie hängen diese zusammen?

Natürlich lassen sich in der Aufgabenstellung auch Zahlenquadrate mit 16 und mehr Feldern verwenden. Es können andere Zahlenbereiche festgelegt werden, z. B. kann die Menge der gebrochenen Zahlen Verwendung finden. Und schließlich lassen sich kompliziertere Abmachungen über die *Wege* treffen.

Diplomlehrer E. Schulze, Mildenberg
aus: Journal of Recreational Math., Livermore

Krypto-Knobelei

(1) $EPS + I - L - ON = LL$
(2) $E - P - S - I + LO + N = LL$
(3) $EP - S + IL - O + N = LL$
(4) $EP : S + I + L + O \cdot N = LL$

In den Gleichungen sind für die Buchstaben Ziffern von 0 bis 9 so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Diagonale Verkettung

In jeder Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter folgender mathematischer Bedeutung so einzutragen, daß immer der eingetragene Buchstabe der letzte Buchstabe des ersten Wortes und gleichzeitig der erste Buchstabe des zweiten Wortes ist.

1				F									
2					E								
3						H							
4							L						
5								E					
6									R				

1. Zeile: Zahlwort – Eindeutige Abbildung (Plural). 2. Z.: Freihandzeichnung – Durch Rotation einer Ellipse entstandener Körper. 3. Z.: Name der Funktion dritten Grades – Kegelschnitt. 4. Z.: Kegelschnitt – Französischer Mathematiker und Astronom (1749 bis 1827). 5. Z.: Teilgebiet der Mathematik – Mathematiker des Altertums. 6. Z.: Begriff aus der Logarithmenrechnung – Vorschrift, Richtschnur.

D. Völzke, Greifswald

„Ideen muß man haben, Kollege!"

aus: Eulenspiegel, Heinz Behling

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

20 Jahre Kreisolympiaden Junger Mathematiker in der Stadt Greifswald

Die 2. Stufe der XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR war zugleich die 20. Greifswalder Olympiade. Das nahmen Lehrer, Schüler und der Jugendverband zum Anlaß, die Siegerehrung besonders festlich zu begehen und sich der Anfänge zu erinnern.

Die 1. Olympiade wurde am 26. März 1961 mit 24 Schülern der 7. Klassen durchgeführt. (Die Aufgaben findet der Leser unten angegeben.) Jetzt nehmen ständig etwa 220 Schüler der Klassen 5 bis 12 an der Kreisolympiade teil.

Die Siegerehrung findet stets an dem auf die Olympiade folgenden Sonntag statt. Sie wird traditionsgemäß um 9 Uhr mit einstündigen Fachvorträgen eröffnet. Wissenschaftler der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald sprechen vor den Teilnehmern der einzelnen Klassenstufen über interessante mathematische Probleme. Professor Terpe, Direktor der Sektion Mathematik, Professor Asser und Dr. Domm sind seit mehr als 15 Jahren herzlich begrüßte Referenten.

Im Anschluß an die Vorträge treffen sich alle Gruppen zur Auszeichnung der Preisträger, die vom Stadtschulrat und der FDJ-Kreisleitung vorgenommen wird. Ein gemeinsames Mittagessen für die Preisträger, Gäste und Lehrer beschließt die Veranstaltung.

Zur 20. Kreisolympiade hatte das *Haus der Jungen Pioniere*, dem die Zirkel des Klubs *Junger Mathematiker* angeschlossen sind, einen Ehrenwimpel (siehe Bild Seite 55) für alle Teilnehmer anfertigen lassen. Mitarbeiter des Instituts für Kunsterziehung schufen eine Keramikplakette.

Der Schulrat erinnerte an die guten Leistungen, die in den beiden Jahrzehnten von den Teilnehmern der Olympiade gezeigt wurden. Als Ehrengast war Dr. Christoph Bandt eingeladen, der als Greifswalder an den Internationalen Olympiaden 1967 in Cetinje (SFR Jugoslawien) und 1968 in Moskau teilgenommen und jeweils einen 1. Preis für die DDR errungen hatte. Er ist jetzt Mitarbeiter an der Sektion Mathematik der Universität Greifswald. Von den drei Lehrern, die die 1. Olympiade durchgeführt hatten, waren Oberlehrer Klaus Krüger, VLdV, Bad Doberan, und Oberlehrer Erich Walter, Greifswald, anwesend, während Studienrat Uwe Unruh wegen eines Auslandseinsatzes in Afrika der Einladung nicht folgen konnte.

Die Schüler der 5., 6. und 7. Klassen freuen sich jetzt schon auf die 25. Olympiade, an der sie noch selbst teilnehmen können. Aber auch viele der Teilnehmer aus den höheren Klassenstufen werden gern als Gäste 1984 bei der Siegerehrung dabei sein. Auch die Lehrer, die jedes Jahr unermüdlich mitarbeiten, denken an die Jubiläumsolympiade in 4 Jahren. Daß diese Olympiade und auch die dazwischenliegenden mit guten Ergebnissen abschließen, haben sich alle Beteiligten vorgenommen.

Die Aufgaben der 1. Olympiade (Klasse 7)

▲1▲ Der Kraftstoffverbrauch bei einer Fahrt mit dem Motorroller *Berlin* über 235 km betrug 8 l.
Wie hoch ist der Verbrauch für 100 km?

▲2▲ Nachdem zwei Traktoren die Frühjahrsbestellung auf einem 6,8 ha großen Feld in $2\frac{1}{2}$ Tagen durchgeführt haben, sollen sie die gleiche Arbeit auf einem 3,8 ha Ackerstück in $1\frac{1}{2}$ Tagen erledigen.
Ist das zu schaffen?

▲3▲ Zwei gemischte Zahlen sollen so ausgewählt werden, daß ihr Produkt 100 ergibt! (Eine Lösung genügt!)

▲4▲ Zeichne einen Winkel von 60° und trage auf seinen Schenkeln die Strecken $\overline{ST} = \overline{SU} = 5$ cm ab! (S ist der Scheitelpunkt des Winkels.)
a) Konstruiere den Kreis, der die Schenkel in T und U berührt!
b) Ist diese Konstruktion auch möglich, wenn sich die Größe des Winkels ändert? (Begründung!)
c) Läßt sich der Kreis beim Winkel von 60° auch dann konstruieren, wenn $\overline{ST} = 7$ cm und $\overline{SU} = 5$ cm ist? (Begründung!)

Auftakt zur 20.

Aus dem Aufruf des *Hauses der Jungen Pioniere* Greifswald, sich durch Lösen (und Einsenden) von Aufgaben durch einen Mathe-Knobel-Wettstreit auf die 20. Kreisolympiade vorzubereiten:

Klasse 3

▲1▲ Multipliziere die Summe aus 1874 und 562 mit 3!

▲2▲ Peters neue Schuhe kosten 29,50 M. Vaters Schuhe sind um 13,50 M teurer, Utes Schuhe dagegen um 5,85 M billiger als Peters Schuhe.
Wieviel kosten Vaters und wieviel Utes Schuhe?

▲3▲ Längs einer Landstraße stehen Bäume in regelmäßigen Abständen; vom ersten bis zum sechsten Baum sind es 60 m.
Wieviel Meter sind es vom ersten bis zum neunten Baum?

Klasse 4

▲1▲ Zum Quotienten, der durch Division von 360 und 2 entsteht, ist das Produkt aus 120 und 3 zu addieren!

▲2▲ Klaus hatte fünf Zahlen zu addieren. Er führte seine Rechnung zunächst auf einem Zettel aus und schrieb sie dann in sein Heft. Dabei vergaß er einen Summanden; nun stand folgendes in seinem Heft:

$$\begin{array}{r} 3459 \\ 2078 \\ 1097 \\ +\ 8356 \\ \hline 29401 \end{array}$$

Die Summe ist richtig. Welchen Summanden hat er aber ausgelassen?

▲3▲ In einem HO-Bekleidungshaus kauften 3 Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte 3 Meter, der zweite 5 Meter und der dritte 9 Meter. Der zweite Kunde bezahlte 30 M mehr als der erste.
Wieviel Mark hatte jeder der drei Kunden zu zahlen?

Klasse 5

▲1▲ Im Betonwerk stellen zwei Facharbeiter zusammen 280 Platten her, wobei der eine Arbeiter 50 Platten mehr als der andere fertigt.
Wieviel Platten produziert jeder?

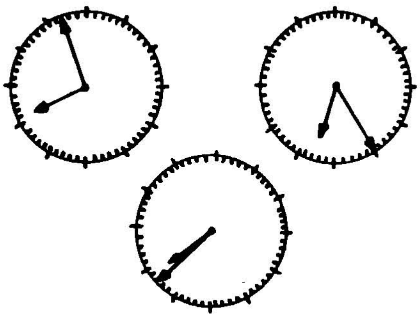
▲2▲ Im Ferienlager sollen von den 6 Jungen Alfred, Bernd, Dieter, Ehrenfried, Frank und Gerald drei in der Küche helfen.
Wie viele und welche Möglichkeiten gibt es, jeweils drei Schüler zur Küchenarbeit einzuteilen?

▲3▲ Ein großer rechteckiger Platz in einem Neubaugebiet wurde mit 5000 Platten ausgelegt. Jede Platte ist 60 cm lang und 40 cm breit. Der Platz ist dreimal so lang wie breit.
Bestimme Länge und Breite des Platzes!

Klasse 6

▲1▲ Ermittle die größte und die kleinste sechsstellige Zahl, die durch 2, 3, 4, 5, 6 und 9 teilbar ist!

▲2▲ Die untenstehenden Zifferblätter gehören zu richtiggehenden Uhren. Sie wurden lediglich aus den Gehäusen herausgenommen und beliebig hingelegt.
Kann man allein aus der Stellung der beiden Zeiger die genaue Uhrzeit bestimmen?
Wo es möglich ist, gib an, wie spät es auf den angegebenen Zifferblättern ist!



Weiteres zur Billardkugel

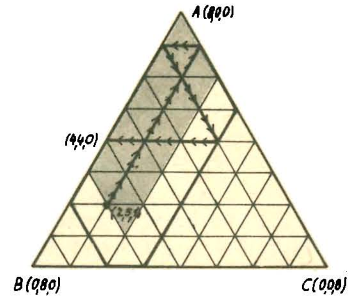


Bild 2: Billardtisch für $a=8$, $b=5$ und $c=2$ (gerasterter Teil). Der eingezeichnete Weg gehört zu dem umrandeten Teil (vergl. Bild 3).

▲3▲ Fünf Schüler, nämlich Karsten, Henry, Frank, Peter und Andreas wohnen in einem Internatszimmer im NEG. Ihre Heimatorte sind Rostock, Leipzig, Stendal, Berlin und Wolgast.

Aus ihrem Gespräch erfahren wir:

a) Henry und Frank sind Mitglieder des Singeklubs, während die Schüler aus Stendal und Wolgast in der Kabarettgruppe mitarbeiten.

b) Drei Schüler, nämlich Peter, Frank und der Schüler aus Rostock lesen gern.

c) Henry, Andreas und der Schüler aus Rostock haben im Fach Mathematik eine „1".

d) Peter und der Schüler aus Wolgast spielen in ihrer Freizeit gern Schach.

e) Henrys Heimatort ist mehr als 300 km von Greifswald entfernt. Ermittle, in welchen Orten diese fünf Schüler beheimatet sind!

Klasse 7

▲1▲ Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er 3 Stunden und 12 Minuten.

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Stelle nach dem Komma!

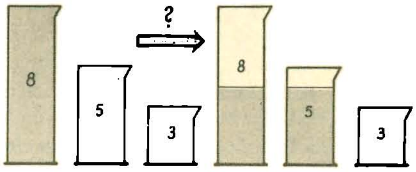
▲2▲ In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich zunächst je 6 Personen auf je eine Bank, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur 3 Personen Platz nehmen. Setzen sich hingegen je 5 Personen auf jede der vorhandenen Bänke, so müssen 4 Personen stehen.

Wie viele Bänke und wie viele Personen befinden sich in diesem Aufenthaltsraum?

▲3▲ Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein fester Punkt P sowie ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1, der mit g keinen Punkt gemeinsam hat.

Es ist ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 zu konstruieren, der g in P und den Kreis k_1 von außen in einem Punkt Q berührt.

Auf die Aufgaben der Klassenstufen 8 bis 10 müssen wir aus Platzgründen verzichten, d. Red.



Wir erinnern noch einmal an unser Problem aus Heft 2/80. Gegeben waren drei Gefäße G_1, G_2 und G_3 mit den Fassungsvermögen von genau a, b und c Litern ($a>b>c>0$; a, b, c natürliche Zahlen), dabei sollte G_1 bis zum Rande gefüllt sein. Durch Umschütten (ohne Vergießen, Verdunsten u.ä.) sollten d Liter (d ebenfalls natürliche Zahl) abgesondert werden. Wenn also x, y und z zu irgendeinem Zeitpunkt die Inhalte der Gefäße G_1, G_2 und G_3 sind, so muß gelten

$$x+y+z=a \qquad (1)$$

mit den Nebenbedingungen, die das Fassungsvermögen der Gefäße berücksichtigen,

$$0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b,\ 0 \leqq z \leqq c. \qquad (2)$$

Wir betrachten den Fall $a<b+c$, wie er z.B. in der *Poisson* gestellten Aufgabe mit $a=12$, $b=8$ und $c=5$ auftrat. Der Billardtisch hat die in Bild 1 gezeigte Form.

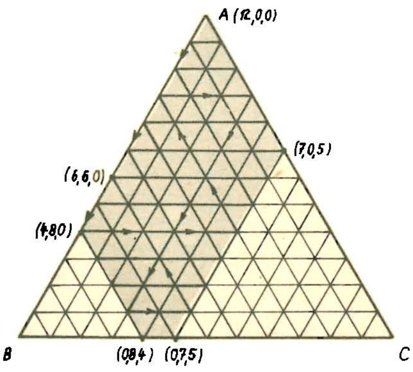


Bild 1: Konstruktion des Billardtisches für 12-, 8- und 5-Liter-Gefäße aus dem Grunddreieck

Ein Beispiel für den Fall $a>b+c$ zeigt Bild 2.

Nun geben wir die versprochene Lösung von *Bachet* an. Dabei ist mit dem ersten, zweiten und dritten Gefäß das 8 Maß, 5 Maß und 3 Maß fassende Gefäß gemeint: „Da es zur Teilung von 8 Maß in zwei gleiche Teile nötig ist, daß man auf der einen Seite 4 und auf der anderen gleichfalls 4 hat, und man diese 4 nur in dem zweiten oder in dem ersten Gefäß bekommen kann, so muß man entweder das eine oder das andere zu erreichen suchen. Hiernach ergeben sich zwei verschiedene Wege. Um den ersteren einzuschlagen, schließe ich folgendermaßen. Um zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 4 Maß bleiben, muß man von diesem Gefäß, wenn es voll ist, gerade 1 Maß fortnehmen. Dies kann aber nur so ausgeführt werden, daß man jenes Maß in eines der beiden anderen Gefäße gießt, wenn demselben nur noch 1 Maß fehlt, um voll zu sein; dies kann bei dem ersten Gefäß nicht vorkommen (denn, wenn das zweite voll wäre und dem ersten nur noch 1 Maß fehlen sollte, um auch voll zu sein, so würde dies schon 12 Maß erfordern); es muß also das dritte Gefäß dasjenige sein, dem nur noch 1 Maß fehlen soll, um voll zu sein, d.h. also: es müssen in ihm 2 Maß enthalten sein. Dieser Zustand kann nun auf zwei Arten erreicht werden: 1. indem dem vollen dritten Gefäß 1 Maß genommen wird oder 2. indem in das leere Gefäß 2 Maß gegossen werden. Der erste Fall ist unmöglich, denn dann müßte ja einem der beiden anderen Gefäße gerade nur noch 1 Maß fehlen, was wir ja bei dem zweiten Gefäß gerade erstreben, also noch nicht voraussetzen dürfen, und was bei dem ersten Gefäß auch nicht möglich ist, weil dann im ersten Gefäß gegen die Voraussetzung 7 Maß und im dritten 3 Maß, also im ganzen 10 Maß Wein vorhanden wären. Es bleibt also nur der zweite Weg, d.h. es müssen in das dritte Gefäß 2 Maß gegossen werden. Diese 2 Maß können aber nicht aus dem ersten Gefäß kommen (denn wenn bei leerem drittem Gefäß das erste nur 2 Maß enthielte, so könnten, auch wenn das zweite ganz voll wäre, nur 7 Maß Wein gegen die Voraussetzung vorhanden sein); die 2 Maß müssen also aus dem zweiten Gefäß kommen. Um nun zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 2 Maß sind, muß man, wenn es voll ist, 3 Maß davon abnehmen, was sehr leicht ist, da wir ein Gefäß für 3 Maß haben. Geht man umgekehrt diesen Weg, so wird man die erste Lösung der Aufgabe finden." – Diese Lösung ist sehr scharfsinnig und widmet sich allen möglichen Fällen. Beweistechnisch wird von der Lösung ausgegangen, so daß das Zurückschließen tatsächlich erforderlich ist, auch wenn es keine Schwierigkeiten bereitet. Die Lösung ist aber in ihrer Länge etwas unübersichtlich. Wir fassen sie in folgendem Schema kurz zusammen:

	8-Maß-Gefäß	5-Maß-Gefäß	3-Maß-Gefäß
ursprünglicher Zustand	8	0	0
nach 1. Umgießen	3	5	0
nach 2. Umgießen	3	2	3
nach 3. Umgießen	6	2	0
nach 4. Umgießen	6	0	2
nach 5. Umgießen	1	5	2
nach 6. Umgießen	1	4	3
nach 7. Umgießen	4	4	0

Der erwähnte zweite Weg, auf den wir nicht eingehen, erfordert ein Umgießen mehr.

Die Lösung der *Aufgabe 1* lautet – in dieses Schema gebracht – wie folgt:

	12 l	8 l	5 l
Ausgang	12	0	0
1. Umgießen	4	8	0
2. Umgießen	4	3	5
3. Umgießen	9	3	0
4. Umgießen	9	0	3
5. Umgießen	1	8	3
6. Umgießen	1	6	5
7. Umgießen	6	6	0

Die andere Lösung erfordert 12maliges Umgießen.

Der in *Aufgabe 2* gesuchte Graph hat die Gestalt:

naten kommt für ein Aufteilen der $h=8$ Liter auf die drei Gefäße in Frage. Der eingezeichnete Weg in Bild 2 ergibt eine Lösung für die Halbierung der 8 Liter an ($d=4$), wenn anfänglich das erste Gefäß 2, das zweite 5 und das dritte 1 Liter enthalten.

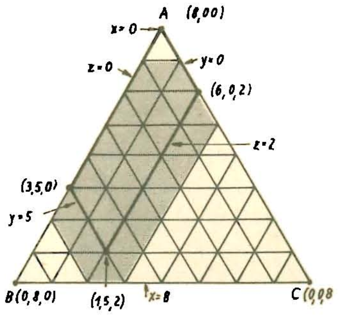


Bild 3: Ein Billardtisch für ein allgemeineres Problem

Das Problem, 10 auf 8-, 6- und 4-Liter-Gefäße verteilte Liter zu halbieren, führt auf folgende Erscheinung (Bild 4):

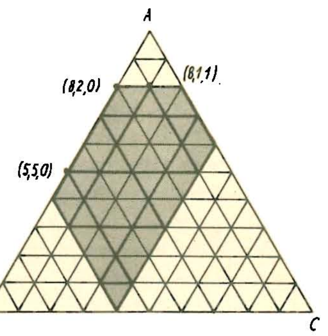


Bild 4: Unlösbare Aufgabenstellung

Das Bild 5 zeigt den zum Problem gehörigen Billardtisch. Ein Herausfüllen von 5 Litern bedeutet in der *Sprache* unseres Computers, daß die Kugel an einem Punkt reflektiert wird, der als eine Dreieckskoordinate die 5 enthält. Wie der Billardtisch zeigt, werden die 3 fraglichen Punkte durch einen geschlossenen Linienzug verbunden, auf den die Kugel von außen nicht mehr gelangen kann.

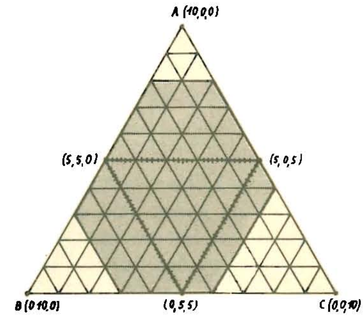
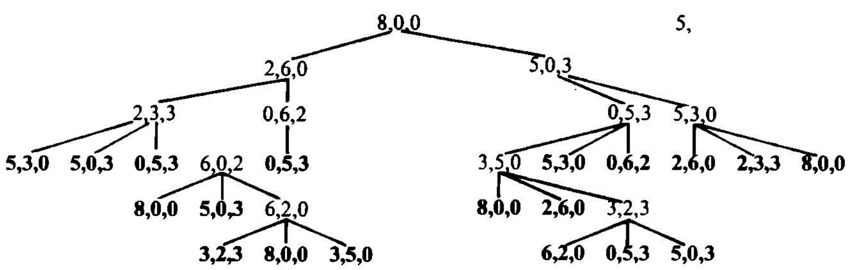


Bild 5: Billardtisch für 8-, 7- und 6-Liter-Gefäße

Unser Problem kann auch auf mehr als drei Gefäße ausgedehnt werden. Wir geben als Beispiel die folgende Aufgabe an:

Gegeben sind vier Gefäße mit je 24, 13, 11 und 7 Litern Fassungsvermögen. Das 24-Liter-Gefäß ist gefüllt, und sein Inhalt ist zu dritteln. Schematische Lösung:

	24 l	13 l	11 l	7
Ausgang	24	0	0	0
1. Umgießen	13	0	11	0
2. Umgießen	13	0	4	7
3. Umgießen	13	4	0	7
4. Umgießen	20	4	0	0
5. Umgießen	9	4	11	0
6. Umgießen	9	4	4	7
7. Umgießen	16	4	4	0
8. Umgießen	16	8	0	0



Umfüllungsgraph zu 8-, 6- und 3-Liter-Gefäßen

Bild 1 ist die Lösung der *Aufgabe 3.*

Mit unserer Theorie bzw. dem dazugehörigen Computer können wir auch die allgemeinere Aufgabe behandeln, in der a, b und c die Bedeutung von Punkt 7 haben und h Liter mit $h \geqq a > b > c$ (h natürliche Zahl) auf die drei Gefäße in ganzzahligen Mengen verteilt sind. Wieder sind d Liter herauszufüllen. Zur Lösung ändern wir lediglich (1) wie folgt ab:

$$x+y+z=h. \qquad (1')$$

Wir zeichnen also ein Grunddreieck mit der Seitenlänge h und grenzen in ihm wie bisher durch (2) den Billardtisch ab.

Für $h=8$, $a=7$, $b=6$ und $c=3$ erhalten wir den in Bild 3 gezeigten Billardtisch. Jeder Punkt des Tisches mit ganzzahligen Koordinaten kommt für ein Aufteilen der $h=8$ Liter

Zu dem Punkt (5, 5, 0), der die Lösung darstellt, führt nur ein in sich geschlossener Linienzug, der z. B. vom Punkt (8, 2, 0) aus nicht erreichbar ist. Das scheint zunächst verblüffend zu sein, ist aber nur Ausdruck der Tatsache, daß sich ungerade Mengen von Wein nicht mit geradzahligen Meßgefäßen ausmessen lassen. Wenn die geradzahligen Meßgefäße anfangs ungeradzahlige Mengen enthalten, so kann man damit auf den geschlossenen Weg gelangen (z. B. vom Punkt 8, 1, 1).

Aufgabe: Zeige, daß 10 Liter, die in ganzzahligen Mengen auf 8-, 7- und 6-Liter-Gefäße verteilt wurden, kein Herausfüllen von 5 Litern erlauben!

Damit ist ein Drittel herausgefüllt. Lassen wir das mit 8 Litern gefüllte Gefäß außer Betracht, so haben wir eine bekannte Aufgabe vor uns, nämlich 16 Liter (im 24-Liter-Gefäß) zu halbieren (mit 11- und 7-Liter-Gefäßen):

	24 l	11 l	7 l
Ausgang	16	0	0
1. Umgießen	5	11	0
2. Umgießen	5	4	7
3. Umgießen	12	4	0
4. Umgießen	12	0	4
5. Umgießen	1	11	4
6. Umgießen	1	8	7
7. Umgießen	8	8	0

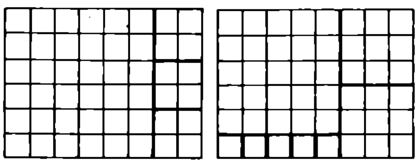
R. Thiele

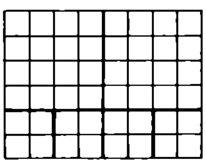
Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb 6/79:

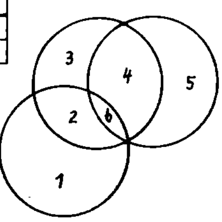
Ma 5 ■1909 Da alle drei Schnecken mit gleicher konstanter Geschwindigkeit vorwärts kriechen, hängt die Zielankunft nur von den Pausenlängen ab.
Wegen $20 \cdot 5\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$ legt Schnecke A 19 Pausen ein; wegen $10 \cdot 10\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$ legt Schnecke B 9 Pausen ein; wegen $5 \cdot 20\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$ legt Schnecke C 4 Pausen ein.
Die Dauer aller Pausen beträgt für Schnecke A $19 \cdot 6\,\text{s} = 114\,\text{s}$, für Schnecke B $9 \cdot 12\,\text{s} = 108\,\text{s}$, für Schnecke C $4 \cdot 25\,\text{s} = 100\,\text{s}$. Folglich erreicht Schnecke C als erste, Schnecke B als zweite, Schnecke A als letzte das Ziel.

Ma 5 ■1910
$$36+4+4+4=48$$
$$16+16+4+4+4+4=48$$
$$25+9+9+1+1+1+1+1=48$$

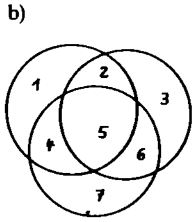




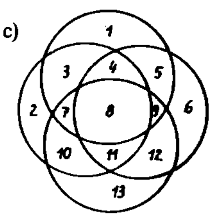
Ma 5 ■1911 a)



b)



c)



Allgemein gilt: n sich schneidende Kreise können höchstens $[n \cdot (n-1)+1]$ von Kreisbögen begrenzte Flächen erzeugen. In unserem Falle erhalten wir $(4 \cdot 3+1)=13$ solcher Flächen.

Ma 5 ■1912 Angenommen, Bernd hat n Briefmarken zu 20 Pf, also noch $(10-n)$ Briefmarken zu 25 Pf gekauft; dann gilt
$$20 \cdot n+25 \cdot (10-n)=215,$$
$$20n+250-25n=215,$$
$$5n=35,$$
$$n=7.$$
Bernd hat sieben 20-Pf-Marken und drei 25-Pf-Marken gekauft. ($7 \cdot 20\,\text{Pf}+3 \cdot 25\,\text{Pf} = 215\,\text{Pf} = 2{,}15\,\text{M}$)

Ma 5 ■1913 Angenommen, an der Sportart Schach nehmen x Schüler, an der Sportart Judo y Schüler teil; dann gilt
$x+y=36:9$, also $x+y=4$.
Wegen $y>0$ und $x>y$ existiert genau eine Lösung, nämlich $x=3$ und $y=1$. Es nehmen 3 Schüler an der Sportart Schach und 1 Schüler am Judo teil. Deshalb nehmen $2 \cdot 3=6$ Schüler an der Sportart Tischtennis teil.
Angenommen, an der Sportart Leichtathletik nehmen a Schüler, an der Sportart Schwimmen b Schüler teil; dann gilt
$a+b=36-10$, also $a+b=26$.
Wegen $a>18$ und $b>6$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a=19$ und $b=7$. Es nehmen 19 Schüler an der Sportart Leichtathletik und 7 Schüler am Schwimmen teil.

Ma 5 ■1914 Angenommen, an der Wanderung beteiligten sich n Personen; dann gilt
$$3 \cdot n+10=2 \cdot n+50.$$
Nur für $n=40$ wird diese Gleichung erfüllt. An der Wanderung nahmen 40 Personen teil.

Ma 6 ■1915 Da der ASK und der SCD gegeneinander unentschieden spielten, erhielt jede dieser beiden Mannschaften je einen Punkt aus diesem Spiel. Der SCD erreichte insgesamt aber nur einen Punkt. Deshalb muß der SCD alle übrigen Spiele verloren haben. Somit endeten die Spiele SCM gegen SCD, ASK gegen SCD, SCE gegen SCD und PS gegen SCD sämtlich 2:0. Da der PS insgesamt nur zwei Punkte erreichte und diese aus dem Spiel PS gegen SCD resultieren, hat der PS alle anderen Spiele verloren. Somit endeten die Spiele SCM gegen PS, ASK gegen PS und SCE gegen PS ebenfalls alle 2:0. Aus den Spielen SCM gegen PS und SCM gegen SCD erreichte der SCM genau 4 Punkte. Da der SCM ungeschlagen blieb, muß er aus den Spielen gegen den ASK und gegen den SCE insgesamt noch 2 Punkte erreicht haben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten: SCM gegen ASK 2:0 oder SCM gegen SCE 2:0 oder beide Spiele gingen unentschieden aus, also SCM gegen ASK 1:1 und SCM gegen SCE 1:1. Da der SCE aus den Spielen gegen den PS und den SCD bereits 4 Punkte erreicht hat, muß er das dritte Spiel verloren, das vierte unentschieden gespielt haben. Das ist nur möglich, wenn das Spiel ASK gegen SCE 2:0 ausging. Somit wurden folgende Ergebnisse erreicht:

SCM/ASK 1:1, SCM/SCE 1:1; SCM/PS 2:0; SCM/SCD 2:0; ASK/SCE 2:0; ASK/PS 2:0; ASK/SCD 1:1; SCE/PS 2:0; SCE/SCD 2:0; PS/SCD 2:0.

Ma 6 ■1916 Aus $ab+bc+ca=abc$ folgt $a=1$ oder $a=2$.
Dabei gilt $1 \leqq a, b, c \leqq 9$. Nun gilt
$(10a+b)+(10b+c)+(10c+a)$
$=100a+10b+c,$
$11a+11b+11c=100a+10b+c,$
$b+10c=89a.$
Für $a=2$ erhalten wir $b+10c=178$. Wegen $b, c \leqq 9$ hat diese Gleichung keine Lösung.
Für $a=1$ erhalten wir $b+10c=89$,
$$10c=80+9-b,$$
$$c=8+\frac{9-b}{10}.$$
Nur für $b=9$ und damit für $c=8$ erhalten wir eine positive ganzzahlige Lösung. Deshalb existiert genau eine Lösung; sie lautet: $19+98+81=198$.

Ma 6 ■1917 Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $49 \cdot (6-c)=98$; daraus folgt $c=4$ und $(a-b)^2 \cdot c=(7-6)^2 \cdot 4=4$.
Aus $(a-b)^2 \cdot c$ erhalten wir durch Einsetzen $(6-b)^2 \cdot 2=18$; daraus folgt $b=3$ und $a^2 \cdot (b-c)=36 \cdot (3-2)=36$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $a^2 \cdot (1-0)=16$; daraus folgt $a=4$ und $(a-b)^2 \cdot c=(4-1)^2 \cdot 0=0$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $81 \cdot (b-5)=81$; daraus folgt $b=6$ und $(a-b)^2 \cdot c=(9-6)^2 \cdot 5=45$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)$ erhalten wir durch Einsetzen $a^2 \cdot (b-0)=1$; daraus folgt $a=1$, $b=1$ und $(a-b)^2 \cdot c=(1-1)^2 \cdot 0=0$.
Aus $(a-b)^2 \cdot c=1$ folgt $c=1$ und $a-b=1$, also $b=a-1$.
Aus $a^2 \cdot (b-c)=9$ folgt durch Einsetzen $a^2 \cdot (a-2)=9$, also $a=3$ und somit $b=2$.

Ma 6 ■1918 Aus $a=b+5c$ und $a+b+c=20$ folgt durch Einsetzen
$$b+5c+b+c=20,$$
$$2b+6c=20,$$
$$b+3c=10.$$
Die folgenden geordneten Zahlentripel $[a,b,c]$ erfüllen die gestellten Bedingungen: $[16,1,3]$, $[14,4,2]$, $[12,7,1]$, $[10,10,0]$.

Ma 6 ■1919 Aus $\sphericalangle CAD=90°$ und $\sphericalangle CAB=60°$ folgt $\sphericalangle BAD=30°$.
Aus $\sphericalangle CBD=90°$ und $\sphericalangle CBA=60°$ folgt $\sphericalangle ABD=30°$.
Aus $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ABD=30°$ folgt $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.
Analog dazu gilt $\overline{BE} \cong \overline{CE}$ und $\overline{AF} \cong \overline{CF}$.
Aus der Gleichheit der Winkelgrößen und aus $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$ folgt weiter die Kongruenz der Dreiecke $\triangle BAD$, $\triangle CBE$, $\triangle ACF$. Deshalb gilt $\overline{AD} \cong \overline{BD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CE} \cong \overline{AF} \cong \overline{CF}$.

Ma 7 ■1920
$$56x+252=72x+196,$$
$$72x-56x=252-196,$$
$$16x=56,$$
$$x=3\tfrac{1}{2}.$$
Belegen wir in der dritten, der im Aufgabentext angegebenen Gleichung $7 \cdot (8x-28) = 9 \cdot (8x-28)$ die Variable x mit $3\frac{1}{2}$, so erhal-

ten wir $7\cdot 0=9\cdot 0$, also $0=0$. Das bedeutet, der Schüler hat beim Lösen der Gleichung durch 0 dividiert, was nicht statthaft ist.

Ma 7 ■1921 Angenommen, n Schüler erhielten die Note 4, dann erhielten $2n$ Schüler die Note 3 und $4n$ Schüler die Note 2, also $(25-7n)$ Schüler die Note 1. Nun gilt

$$1\cdot(25-7n)+2\cdot 4n+3\cdot 2n+4\cdot n=25\cdot 1{,}88,$$
$$25-7n+8n+6n+4n=47,$$
$$11n=22,$$
$$n=2.$$

Es erhielten 11 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 3 und 2 Schüler die Note 4.

Ma 7 ■1922 Aus $\overline{AB}:\overline{CD}=5:4$ folgt $\overline{CD}=\frac{4}{5}\cdot\overline{AB}$. Aus $\overline{EF}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}+\overline{CD})$ folgt durch Einsetzen

$$5{,}4=0{,}5\cdot(\overline{AB}+0{,}8\cdot\overline{AB}),$$
$$10{,}8=1{,}8\cdot\overline{AB},$$

$\overline{AB}=6$ und somit $\overline{CD}=4{,}8$.

Die parallelen Seiten des Trapezes sind 6 cm und 4,8 cm lang.

Ma 7 ■1923 Es seien b die Basis und s ein Schenkel; dann gilt $s=b+1{,}5$ und $b:s=2:5$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$b:(b+1{,}5)=2:5,$$
$$5\cdot b=2\cdot b+3,$$
$$3b=3, \text{ also } b=1.$$

Die Leiterenden stehen am Fußboden einen Meter, also 100 cm auseinander.

Ma 8 ■1924 Es sei q eine ganze Zahl. Wir formen q^3-q äquivalent um und erhalten:

$$q^3-q=q(q^2-1)$$
$$=q(q+1)(q-1).$$

Dieser Term ist ein Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Da äquivalent umgeformt wurde, hat der Term q^3-q die gleiche Eigenschaft.

In einem Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist stets genau eine durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar. Somit ist das Produkt durch 6 teilbar, w. z. b. w.

Ma 8 ■1925 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

(1) $m=6x+5$ und
(2) $n=6y+5$ mit $x, y\in N$.

Es gilt weiter

$$mn=(6x+5)(6y+5)$$
$$=36xy+30x+30y+25$$
$$=6(6xy+5x+5y+4)+1, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 8 ■1926 Wir bezeichnen den Betrag (in Rubel), den Lena besitzt, mit x und den von Sweta mit y.

Dann gilt nach Aufgabenstellung

(1) $0{,}4x+0{,}45y=2{,}15$
(2) $0{,}45x+0{,}4y=2{,}1$

Aus (2) folgt nach äquivalenter Umformung
$0{,}4y=2{,}1-0{,}45x$ bzw. $y=5{,}25-1{,}125x$. (3)

Setzt man (3) in (1) ein, so erhält man

$$0{,}4x+0{,}45(5{,}25-1{,}125x)=2{,}15,$$
$$0{,}4x+2{,}3625-0{,}50625x=2{,}15,$$
$$0{,}10625x=0{,}2125,$$
$$x=2.$$

Das setzt man nun in (3) ein und erhält

$$y=5{,}25-1{,}125\cdot 2$$
$$y=3.$$

Lena besitzt 2 Rubel, Sweta 3 Rubel.

Ma 8 ■1927 Da jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, gilt:

(1) $\triangle ACD\cong\triangle ABC$,
(2) $\triangle AEF\cong\triangle AIE$,
(3) $\triangle ECH\cong\triangle EGC$.

Daraus folgt: Die Parallelogramme $IBGE$ und $FEHD$ haben den gleichen Flächeninhalt, w. z. b. w.

Ma 9 ■1928 Die beiden Zahlen seien mit x bzw. y bezeichnet.

Dann gilt nach der Aufgabenstellung:

(1) $xy=16$
(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

Durch Quadrieren von (2) erhalten wir

$$x+2\sqrt{xy}+y=16.$$

Wegen $xy=16$, also $\sqrt{xy}=4$ gilt nun
$x+y+8=16$ bzw. $x+y=8$ bzw. $y=8-x$ (3)

Aus (1) und (3) folgt nach Einsetzen

$$x(8-x)=16,\ 8x-x^2=16,$$
$$x^2-8x+16=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-16},$$

$x_1=x_2=4$. Daraus folgt $y=4$.

Die Proben in (1): $4\cdot 4=16$ und in (2): $\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$, $2+2=4$ zeigen, daß $x=4$ und $y=4$ das Gleichungssystem erfüllen. Die Behauptung stimmt. (Es wurde nicht behauptet, daß die zwei Zahlen verschieden sind!)

Ma 9 ■1929 Es seien x, $x+1$, $x+2$ und $x+3$ vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Nun gilt nach Aufgabenstellung:

$$x(x+2)=(x+1)+(x+3).$$

Nach äquivalenter Umformung erhalten wir

$$x^2+2x=2x+4$$
$$x^2-4=0 \qquad x_1=2$$
$$(x+2)\cdot(x-2)=0 \qquad x_2=-2$$

Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn $x=2$, so $x+1=3$ und $x+2=4$ und $x+3=5$
2. Wenn $x=-2$, so $x+1=-1$ und $x+2=0$ und $x+3=1$.

Die Quadrupel $[2;3;4;5]$ und $[-2;-1;0;1]$ erfüllen die Bedingungen der Aufgabe, denn $2\cdot 4=3+5$ und $(-2)\cdot 0=(-1)+1$. Es sind die einzigen Quadrupel, die den geforderten Bedingungen genügen, da x_1 und x_2 die einzigen Lösungen der Gleichung $x(x+2)=(x+1)+(x+3)$ sind.

Ma 9 ■1930 Das arithmetische Mittel der Zahlen a und b ist $\frac{a+b}{2}$, das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$. Nun gilt

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}.$$

Durch äquivalentes Umformen erhält man

$$a+b=2\sqrt{ab}$$
$$(a+b)^2=4\cdot ab$$
$$a^2+2ab+b^2=4ab$$
$$a^2-2ab+b^2=0 \qquad a-b=0$$
$$(a-b)^2=0 \qquad a=b.$$

Die gesuchten Paare sind (0;0), (1;1), (2;2), …, (9;9). Alle zweistelligen Zahlen lassen sich durch $10a+b$ mit $a, b\in N$ und $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ darstellen. Wegen $a=b$ gilt $10a+a$ bzw. $11a$ mit $0<a\leqq 9$. Es gilt stets $11/11a$, w. z. b. w.

Ma 9 ■1931 Aus $5^3+6^3=125+216=341$ und $7^3=343$ folgt $5^3+6^3<7^3$.

Durch äquivalentes Umformen erhalten wir daraus $\frac{5^3}{7^3}+\frac{6^3}{7^3}<1$,

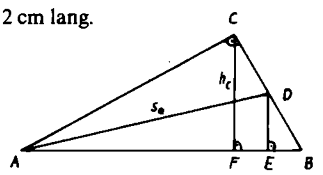
$\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{6}{7}\right)^3<1$. Wegen $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}<\left(\frac{5}{7}\right)^3$ und $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<\left(\frac{6}{7}\right)^3$ gilt somit $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}+\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<1$, also $5^{10}+6^{10}<7^{10}$. Die Aussage ist wahr.

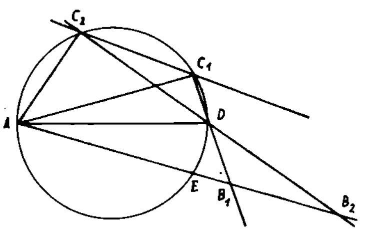
Ma 10/12 ■1932 Aus dem Text geht hervor, daß Uwes Schulweg 5 min beansprucht. Wegen (2) und (3) folgt, daß Uwe 13.04 Uhr oder 13.05 Uhr zu Hause ankommt.

Aus (1) und (2) folgt, daß Uwe 12.59 Uhr oder 13.00 Uhr die Schule verließ.

Aus (1) und (3) folgt, daß Uwe die Schule 12.59 Uhr verließ. Uwe kam 13.04 Uhr zu Hause an.

Ma 10/12 ■1933 In die Planfigur wurde $\overline{DE}\perp\overline{AB}$ eingezeichnet. Somit gilt $\overline{DE}\parallel\overline{CF}$. Fassen wir nun BA und BC als zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt B auf, die von den Parallelen, die durch E und D bzw. durch F und C gehen, geschnitten werden, so verhalten sich $\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{ED}:\overline{FC}=1:2$. Es gilt also: $\overline{DE}$ ist halb so lang wie $\overline{FC}$, d. h. $\overline{DE}$ ist 2 cm lang.





Das rechtwinklige Dreieck $\triangle AED$ ist nach dem Kongruenzsatz (ssw) konstruierbar. Der Punkt C liegt auf dem Kreis mit $\overline{AD}$ als Durchmesser und auf der Parallelen zu $\overline{AB}$ im Abstand $h_c=4$ cm. Bei der Konstruktion entstehen vier Dreiecke, von denen jeweils zwei paarweise kongruent sind. Wegen der besseren Übersicht wurden in der Zeichnung nur zwei nicht kongruente Dreiecke dargestellt.

Ma 10/12 ■1934 Man zeichnet zu $\overline{DC}$ durch B die Parallele. Diese schneidet die Verlängerung von $\overline{AC}$ in E. Nun gilt

$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)

$\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CBE$ (Wechselwinkel a. g. P.)

Daraus folgt

$\sphericalangle CEB \cong \sphericalangle CBE$; $\triangle BCE$ ist gleichschenklig; $\overline{CB} \cong \overline{CE}$.

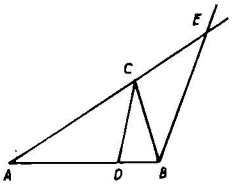
Nach dem Strahlensatz gilt

$\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{AD} : \overline{DB}$ und wegen $\overline{CB} \cong \overline{CE}$

$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$ und somit

$\overline{CB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$.

Die Flächeninhalte beider Rechtecke sind gleich groß; sie stehen im Verhältnis 1 : 1.

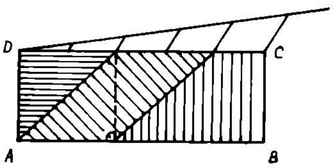


Ma 10/12 ■1935 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

$$A_D : A_P : A_T = 1 : 2 : 2,$$

wenn A_D, A_P bzw. A_T die Flächeninhalte des Dreiecks, des Parallelogramms bzw. des Trapezes bezeichnen.

Man teilt eine Seite des Rechtecks in fünf gleiche Teile ein und verfährt wie das Bild zeigt:



Nun gilt: $A_D = \dfrac{\frac{2}{5}a \cdot b}{2} = \frac{1}{5}ab$

$$A_P = \frac{2 \cdot \frac{2}{5}a \cdot b}{2} = \frac{2}{5}ab$$

$$A_T = \frac{\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}a}{2} \cdot b = \frac{\frac{4}{5}a}{2} \cdot b = \frac{2}{5}ab.$$

Somit gilt

$$A_D : A_P : A_T = \frac{1}{5}ab : \frac{2}{5}ab : \frac{2}{5}ab = 1 : 2 : 2.$$

Ph 6 ■66 Geg.:

Eigenmasse des Wagens $m_e = 27\,100$ kg

Ladungsvolumen $V_L = 52\ \mathrm{m^3}$

Dichte der Ladung $\varrho = 960\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$

Ges.: Gesamtmasse m in t

Die Gesamtmasse m des Großraumwagens berechnet man aus der Summe von Eigenmasse m_e des Wagens und der Masse der Ladung m_L,

also $m = m_e + m_L$ mit $m_L = V_L \cdot \varrho$.

Nun ist $m_L = 52\ \mathrm{m^3} \cdot 960\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$

$m_L = 49\,920$ kg.

Daraus folgt

$$m = 27\,100\ \mathrm{kg} + 49\,920\ \mathrm{kg}$$
$$m = 77\,020\ \mathrm{kg}$$
$$m \approx 77\ \mathrm{t}.$$

Die Gesamtmasse des beladenen Wagens beträgt etwa 77 t.

Ph 7 ■67 Geg.:

Zugkraft $F = 11\,000$ kp

Geschwindigkeit $v = 90\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \dfrac{90}{3{,}6}\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Ges.: Leistung P in PS und kW

Die Leistung P der Elektrolokomotive berechnet man nach der Formel $P = F \cdot v$

$$P = \frac{11\,000\ \mathrm{kp} \cdot 90\ \mathrm{m}}{3{,}6\ \mathrm{s}}$$

$$P = 275\,000\ \frac{\mathrm{kpm}}{\mathrm{s}}.$$

Nun ist noch die Maßeinheit umzurechnen:

$P = 275\,000 \cdot 0{,}0133\ \mathrm{PS} \approx 3666\ \mathrm{PS}$

$P = 275\,000 \cdot 0{,}00981\ \mathrm{kW} \approx 2693\ \mathrm{kW}$.

Die Elektrolokomotive hat eine Leistung von ungefähr 3670 PS bzw. 2690 kW.

Ph 8 ■68 Geg.: $p_1 = 75$ at

$T_1 = 288\ ^\circ\mathrm{K}$

$T_2 = 318\ ^\circ\mathrm{K}$

Ges.: p_2 in at und Pa

Da das Volumen konstant bleibt, vereinfacht sich die Zustandsgleichung der Gase zu

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1}$$

$$p_2 = \frac{75\ \mathrm{at} \cdot 318\ ^\circ\mathrm{K}}{288\ ^\circ\mathrm{K}}$$

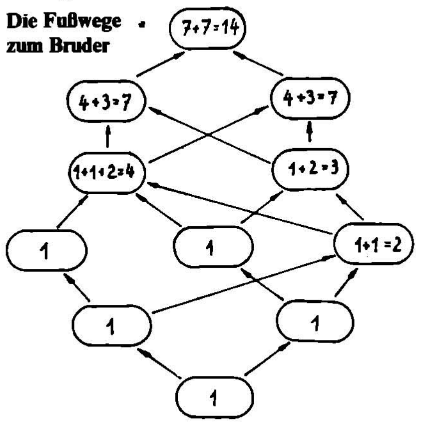
$$p_2 \approx 82{,}8\ \mathrm{at} = 82{,}8 \cdot 98\,100\ \mathrm{Pa}$$

$$p_2 = 8\,122\,680\ \mathrm{Pa} \approx 8{,}12\ \mathrm{MPa}$$

Der Druck erhöht sich auf 82,8 at oder 8,12 MPa.

Lösungen zu: Ferienzeit

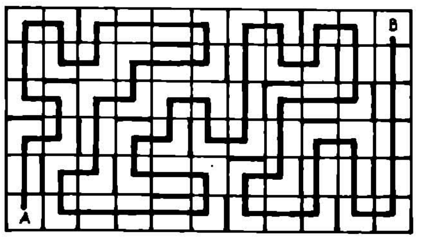
Die Fußwege zum Bruder



. . . er sieht den Wald vor lauter Bäumen nicht

4031 + 4031 = 8062; 1043 + 1043 = 2086; 2039 + 2039 = 4078; 3591 + 3591 = 7902 u. a.

Übersicht



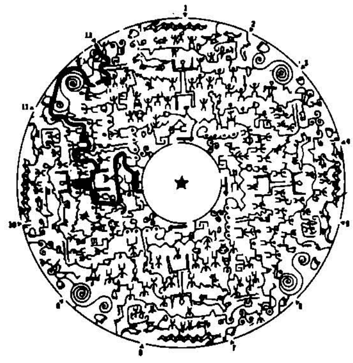
Von 1 bis 8

Eine der möglichen Lösungen

	2	
6	8	5
4	1	3
	7	

Wunderbare Komposition

Der Weg 12 führt zum Stern.

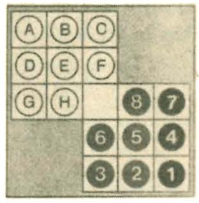


Gleich oder nicht gleich?

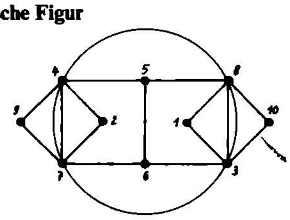
A–2, B–1, C–3, in Bild D dreht sich die Figur stets um 90°. In Figur 3 ist aber die Schattierung anders.

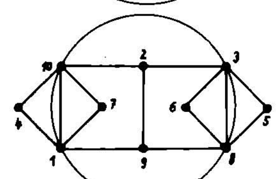
Platzwechsel

8, H, G, 8, 6, F, C, 6, 3, 2, H, G, 3, 7, 4, F, C, E, 3, B, A, 8, 7, 4, 1, H, G, 5, C, E, D, 7, 4, 5, B, A, 6, 5, 2, E, D, 2, 1, B, A, 1



Magische Figur





Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Wer lügt, wer sagt die Wahrheit?

Es genügen zwei Fragen:

Frage 1: beliebig an einen gerichtet: Sagt Erich immer die Wahrheit?

Fallunterscheidung: Wenn Erich der Lügner ist, antwortet Erich mit ja, Fritz mit nein; wenn Fritz der Lügner ist, antwortet Erich mit ja, Fritz mit nein. Auf Grund der Antwort kann man eindeutig dem Befragten seinen Vornamen zuordnen:

ja: Erich bzw. nein: Fritz.

2. Frage an Fritz: Heißt du Fritz? Bejaht Fritz, spricht er die Wahrheit, also ist Erich der Lügner. Verneint Fritz, ist er der Lügner.

Rätselspaß mit D

2. dt; 3. dam; 4. drei; 5. delta; 6. Dekade; 7. Divisor; 8. Diagramm; 9. Descartes; 10. Definition; 11. Doppelbruch; 12. Durchschnitt; 13. Diskriminante; 14. Drachenviereck; 15. dreidimensional; 16. dreihundertsechs; 17. Distributivgesetz; 18. Definitionsbereich; 19. Dreitafelprojektion; 20. Differentialrechnung

Wunderbare Arithmetik

$4294-2147=2147$; $1975+1975+1975=5925$; $176\cdot 176=30976$; $3714\cdot 8=29712$

Krypto-Knobelei

$E=1, P=2, S=3, I=4, L=5, O=6, N=7$

Diagonale Verkettung

1. Zeile: fünf – Funktionen,
2. Zeile: Skizze – Ellipsoid,
3. Zeile: kubisch – Hyperbel,
4. Zeile: Hyperbel – Laplace,
5. Zeile: Geometrie – Euklid,
6. Zeile: Kennziffer – Regel

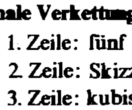
Lösungen zu: Die Wunder der Rechenkunst

IV. U.S. (Originaltext aus dem Buch)

1. Das Buch enthält 194 Aufgaben.

10. Die ganze Gesellschaft bestand überhaupt aus 7 Personen. Es war nämlich ein alter Mann mit seiner Frau, dessen Sohn mit seiner Frau und ihren drei Kindern; von diesen Kindern waren zwei Mädchen und ein Knabe.

21. Man wische von den zwei oberen Eckfeldern die 4 äußeren Wände, und auch von dem untersten mittelsten Felde die äußere Wand weg, wodurch noch 3 gleichgroße Felder bleiben, wie folgende Figur zeigt:



29. Carl hatte 180 Stück oder 3 Schock; und verkaufte in jedem Hause 60 Stück oder 1 Schock; denn $\frac{1}{4}$ und $15=60$ – erster Verkauf – von 180, bleibt 120; hiervon $\frac{1}{3}$ und $20=60$ – zweiter Verkauf – bleibt 60; hiermit ging er in's dritte Haus und verkaufte davon $\frac{1}{2}$ und 30, also sämtliche Aepfel. –

31. Man findet die Zahl 211, wonach man die Zahlen, zu welchen der Spieler die gewonnenen Ducaten durchzählte, bis zur 7, als: 2, 3, 5 und 7, miteinander multiplicirt und zum Product eins addirt.

34. 180 Stück Aepfel und eben soviel Nüsse hatte er gekauft und hatte 11 Kinder.

47. 36 Gänse. Man suche die kleinste Zahl, die sich, wie die Aufgabe lautet, durch 2 und 4 theilen läßt, diese Zahl ist 4; nun vervielfältige und zertheile man dieselbe, wie in der Aufgabe gesagt wird, also noch einmal soviel, halb soviel, ein Viertel soviel genommen, setze die dadurch erhaltenen Zahlen unter einander, und addire solche, also

4 verdoppelt giebt	8
die Hälfte von 4 giebt	2
ein Viertel davon giebt	1
zusammen	11

Hierauf zieht man erst soviel von der geschätzten Anzahl Gänse ab, als noch dazuaddirt werden müssen, um die geschätzte Anzahl zu erhalten, nämlich 1 von 100 bleibt 99, und sagt nun:

11 giebt 4, wieviel giebt 99, so zeigt das Herauskommende an, wieviel Gänse es waren, als giebt 4
wieviel giebt 99
9
—
36

mit 11 in 99 dividirt, so bleibt in der Colonne rechts 4 und 9, zusammen multiplicirt giebt 36; aus soviel Gänsen bestand der herzugeflogene Schwarm.

69. Auf dem Tisch lagen 5 Thaler. Fritz hatte 10, Bast 30 und Hans 120 Thlr., folglich alle 3 zusammen 160 Thlr.

119.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

142. Um womöglich jedesmal zuletzt wegnehmen zu können, merke man folgende Regel, nach welcher allemal derjenige zuletzt wegnehmen wird, der von den 30 Rechnenpfennigen zuerst wegnimmt, wenn beide damit sich Unterhaltende die Regel kennen. Soll man zuerst von den 30 Rechnenpfennigen einige wegnehmen, so nehme man 2 Stück und habe nun ein Auge auf die andere Person, wieviel sie davon wegnimmt dann nehme man wieder soviel, daß der Person ihre und die selbst zuletzt hinweggenommenen zusammen 7 betragen. Wird so wechselseitig fortgefahren und das Verfahren beobachtet, so werden, wenn man selbst weggenommen hat, alle weggenommenen zusammen entweder 2, 9, 16 oder 23, also eine arithmetische Progression ausmachen: hat man zuletzt weggenommen und die Zahl aller weggenommenen Pfennige beträgt 23, so liegen noch 7 da; weil aber ausgemacht ist, daß nicht über 6 Stück weggenommen werden dürfen, so mag der Gegner wegnehmen, wie er will man wird doch zuletzt wegnehmen können. Hat man aber mit einer Person zu thun, welche diese Regel nicht weiß, so kann man immer etwa einen Rechnenpfennig so lange wegnehmen, bis, wenn man das vorletzte Mal wegnimmt, noch 7 daliegen, um dann gewiß zuletzt wegnehmen zu können. Z. B., man nehme der Regel zufolge von den 30 Rechnenpfennigen 2, eine zweite Person beliebig 3, man selbst wieder 4, eine zweite Person beliebig 5, man selbst wieder 2, eine zweite Person beliebig 4, man selbst wieder 3, eine zweite Person beliebig 3; jetzt sind noch 4 Stück übrig, diese nimmt man zuletzt weg und hat gewonnen.

144.
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 ∅ ∅
0 0 0 ∅ ∅ ∅
0 0 0 ∅ 0 ∅

160. Durch diese Rechnungsweise bleibt jedesmal die Hälfte von der geraden Zahl, welche man dazuaddiren ließ, übrig; z. B. die gedachte Zahl sei

7
mit 2 multiplicirt
—
14
eine gerade Zahl z. B. 18 dazu addirt,
—
diese 32 halbirt
—
16
die gedachte Zahl 7 abgezogen
—
9

Diese Zahl ist die Hälfte von der geraden Zahl 18. Man spricht also: 9 bleibt übrig.

194. Den Angaben der Aufgabe nach sollen immer 3 der unbekannten Zahlen addirt und eine von deren Summe subtrahirt werden, so daß jede Zahl 3 Mal addirt und 1 Mal abgezogen wird, woraus hervorgeht, daß die Summe der angegebenen Reste gerade noch 1 Mal so groß sein muß, als die Summe der unbekannten 4 Zahlen. Da nun die Reste 79, 61, 39 und 19 zusammen 198 betragen, so ist daher die einfache Summe aller vier Zahlen $=99$. Nun bleibt, wenn man die erste Zahl von der zweiten, dritten und vierten abzieht, 79 übrig und man erhält, wenn die erste Zahl zu 79 addirt wird, den Betrag der 3 übrigen Zahlen, folglich muß die erste Zahl noch 1 Mal dazuaddirt werden, um die Summe aller 4 Zahlen; also 99, zu erhalten, woraus sich leicht übersehen läßt, daß die Differenz zwischen 79 und 99 doppelt so groß ist, als die erste Zahl; es ist sonach, wenn man 79 von 99 abzieht, die Hälfte des dadurch bleibenden Restes 20, also 10, die erste Zahl, und es ist einleuchtend, daß die übrigen 3 Zahlen sich nach derselben Regel berechnen lassen. Nämlich: den zweiten Rest 61 von 99 abgezogen, bleibt 38, die Hälfte davon ist 19, zweite Zahl; den dritten Rest, 39, von 99 abgezogen bleibt 60, die Hälfte davon ist 30, dritte Zahl; den vierten Rest, 19, von 99 abgezogen bleibt 80, die Hälfte davon ist 40, vierte Zahl. Hieraus ist nun eine Auflösung der Aufgabe gefunden, es ist nämlich buchstäblich:

Die erste Zahl Zehn, die zweite Neunzehn, die dritte Dreißig und die vierte Vierzig und das Wort – von Zehn den zweiten Buchstaben, e, von Neunzehn den ersten, n, von Dreißig ebenfalls den ersten, d, und von Vierzig den dritten, e, zusammengesetzt – Ende.

Gute Grundkenntnisse gefragt

Über das Wiederholen

Der größte Informationsverlust liegt in den frühen Stadien des Einprägens

Auch das Wiederholen der eingeprägten Informationen ist, wie die vorangegangenen Gedächtnisvorgänge, ein Erkenntnisprozeß. Seine Besonderheit gegenüber der Aufnahme, der Konzentration und dem Einprägen besteht darin, daß es sich hier nicht um einen neu zu erlernenden Erkenntnisprozeß handelt, sondern um das erneute Durchlaufen bereits durchgeführter Erkenntnisprozesse. Mit anderen Worten, das Wiederholen der Information ist das erneute Durchlaufen des Gedächtnisprozesses von der Aufnahme über die Konzentration bis zum Einprägen der Information. Dieses erneute Durchlaufen des Gedächtnisprozesses erhöht die Intensität der Aufnahme, der Konzentration und des Einprägens. Die Information wird auf diese Weise immer allseitiger und umfassender in das Informationsnetz des Gedächtnisses eingebunden und dadurch verfestigt. Doch diese Verfestigung benötigt ihre Zeit. Es wird angenommen, daß der Zeitraum, den das Ultrakurzgedächtnis umfaßt, nämlich etwa 20 Sekunden, nicht ausreicht, um Informationen zu verfestigen. Informationen, die innerhalb von 20 Sekunden aus dem Gedächtnis abgestoßen werden, gehen für immer verloren. Der größte Informationsverlust liegt deshalb in den ersten zwanzig Sekunden. Erst wenn Informationen länger als 20 Sekunden im Gedächtnis verweilen, gehen sie in das Kurzzeitgedächtnis über und lassen sich für eine bestimmte Zeit verfestigen. Auch hier gilt jedoch das Prinzip, daß der größte Informationsverlust in den frühen Stadien liegt. Je länger Informationen wiederholt werden, desto intensiver ist, in der Tendenz, die Verfestigung der Information.

aus: Gedächtnistraining, Franz Loeser, Urania-Verlag

Über den Wert der Pausen beim Wiederholen erfährt der Leser in Heft 5/80, d. Red.

Aufgaben

Klasse 5

▲1▲ a) Stelle fest, ob 15 eine Lösung der Ungleichung $25+x>20-x$ ist!
b) Stelle fest, ob die Zahlen 7 und 12 die Gleichung $(a+19)\cdot 10=260$ erfüllen!

▲2▲ a) Vergleiche $\frac{1}{9}$ von 72 l mit $\frac{1}{8}$ von 88 l! b) Berechne!

$a-2$	$a-1$	a	$a+1$
297			
	4600		
		231	
			7903

▲3▲ a) Stelle fest, ob die Gleichung $315\cdot 210=66150$ wahr ist!
b) Ist die Ungleichung $25\cdot 0>12\cdot 0$ wahr oder falsch?

▲4▲ a) Die Zeichenreihe $(37+65)\cdot 8+17$ soll in Worten wiedergegeben werden.
b) Gib folgende wörtliche Formulierungen in einer Zeichenreihe! Die Summe der Zahlen 37 und 65 ist mit der Summe der Zahlen 8 und 17 zu multiplizieren.

▲5▲ a) Auf einer Karte im Maßstab 1:50000 ist eine Strecke 12 mm lang. Wie lang ist sie im Gelände?
b) Eine Strecke von 1,4 km Länge soll in eine Karte im Maßstab 1:25000 eingetragen werden. Wie lang ist sie auf der Karte?

▲6▲ Ein Mastschwein von 68 kg soll bis auf 110 kg gefüttert werden. Wieviel Tage muß es noch gefüttert werden, wenn es täglich 600 g zunimmt?

Klasse 6

▲1▲ Löse die Gleichung $3t+4=2t+6$!

▲2▲ Welche gebrochenen Zahlen g erfüllen die Gleichung
$$\frac{1}{4}\cdot g=\frac{1}{5}?$$

▲3▲ Vervollständige!

a	$a\cdot 10$	$a\cdot 100$	$a\cdot 1000$
17			
		3400	
825			
	7240		

▲4▲ Die VR Polen hat eine Fläche von rund 313000 km² und eine Bevölkerungszahl von etwa 33 Mill. Die Fläche der ČSSR beträgt etwa 128000 km², und dort leben etwa 15 Mill. Menschen.
Welches Land ist dichter besiedelt?

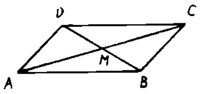
▲5▲ Zur Ausstattung einer Abteilung im Warenhaus werden 600 m² Teppichauslegware benötigt. Wieviel Meter Teppichauslegware müssen beschafft werden, wenn folgende Breiten in Betracht kommen?

Breite in m	1	2	3
Lösung in m	600	300	

1 m² Teppich kostet 60,00 M

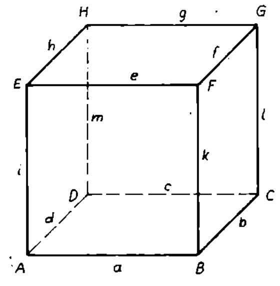
Fläche in m²	1,00	2,40	3,60
Preis in M	60		

▲6▲ Ermittle die Größen in den offen gelassenen Feldern, wenn das folgende Parallelogramm gegeben ist:



	a)	b)	c)	d)
$\overline{AB}$	8 cm	5,7 cm	–	
$\overline{BC}$	3 cm		–	5 cm
$\overline{CD}$			–	5 cm
$\overline{DA}$		4,5 cm	–	
∢DAB	60°		–	
∢ABC			–	75°
∢BCD		90°	–	
∢CDA			–	
$\overline{AM}$	–	–	7 cm	–
$\overline{MC}$	–	–		–
$\overline{BM}$	–	–	6 cm	–
$\overline{MD}$	–	–		–
∢AMB	–	–	100°	–
∢BMC	–	–		–
∢CMD	–	–		–
∢AMD	–	–		–

▲7▲ Ein Käfer krabbelt entlang der Kante eines Würfels. Er beginnt im Eckpunkt A und gelangt auf dem kürzesten Wege zum Eckpunkt G des Würfels.
Gib an, welche und wie viele Möglichkeiten der Käfer zum Krabbeln hat. (Die Kanten des Würfels sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet.)



(Die Lösungen zu diesem Beitrag siehe Heft 4/80, d. Red.)

Die Wunder

der

Rechenkunst.

Eine Zusammenstellung der räthselhaftesten, unglaublichsten und belustigendsten arithmetischen Kunstaufgaben.

Zur

Beförderung der geselligen Unterhaltung und des jugendlichen Nachdenkens.

Von

Joh. Christ. Schäfer.

Achte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Weimar, 1857.

Druck und Verlag von Bernh. Friedr. Voigt.

1. Anrede des Buchs.

Ich Büchelchen bin angefüllt
Mit arithmet'schen Sachen,
Wenn damit wird dein Wunsch gestillt,
So soll mir's Freude machen.
Eh Du nun aber weiter lies'st,
Vielleicht die letzte Nummer siehst,
So rechne Du einmal geschwind:
Wie viel Aufgaben in mir sind. —

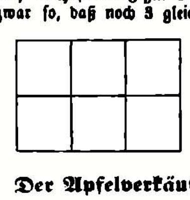
Die Kubikwurzel von 12 Million
8 Hundert 12 Tausend 9 Hundert und 4,
Das heißt, so viel sie beträgt davon,
Findest Du zwar nicht ganz in mir;
Doch ziehst Du ab erst 5 und 2,
Dann wieder 8 wen'ger 3,
Und auch die 4 siebenmal,
So findest Du die rechte Zahl.
Hast Du sie so herausgerathen,
Dann sehe nach in Resultaten!

10. Die sonderbare Gesellschaft.

Bei'm Verfasser dieses saß an einem Winterabende eine ganz besondere Gesellschaft in der Stube um den Tisch herum. Es waren da nämlich 1 Großvater, 2 Väter, 2 Mütter, 4 Kinder, 3 Enkel, 1 Bruder, 2 Schwestern, 2 Söhne, 2 Töchter, 2 verheirathete Männer, 2 verheirathete Frauen, 1 Schwiegervater, 1 Schwiegermutter und 1 Schwiegertochter. Wie viel Personen mögen dies wohl gewesen sein?

21. Die Sechsfelder-Figur.

Wo werden von folgender, mit Kreide auf den Tisch gezeichneter, Sechsfelder-Figur 5 Wände weggewischt, und zwar so, daß noch 3 gleichgroße Felder bleiben?



29. Der Apfelverkäufer.

Karl versuchte einst als Obsthändler sein Heil,
Und bot seine Aepfel in drei Häusern feil;
Er hatte dabei das unverhoffte Glück,
Daß er nicht einen Apfel brachte zurück,
Und schnell verkaufte der Früchte ganze Zahl.
Such' Leser mir dieselbe jetzt einmal,
Berechne auch dabei und gieb es an,
Wie viele Stücke wohl kaufte jeder Mann.

Vom ganzen Vorrath nimmt ein Viertheil erst heraus
Und funfzehn noch der Mann im ersten Haus.
Im zweiten ist das Glück ihm wieder günstig,
Man kaufte da vom Rest ein Drittheil und noch zwanzig.
Mit den Uebrigen geht er sodann in's dritte Haus
Und bietet sie daselbst zum Verkaufe aus;
Der Mann, der den Vorrath noch zu groß findet,
Nimmt erst die Hälfte. — Doch damit verbindet
Er noch dreißig Stücke. — Carl freute sich sehr,
Denn sein Korb war nun geworden ganz leer.

31. Der glückliche Spieler.

Ein Spieler zählte eine Summe gewonnener Ducaten durch, die weniger als 400 beträgt; zählt er sie zu Zweien, Dreien, Fünfen und Sieben, so bleibt allemal einer; zählt er sie aber zu Zwölfen, so bleiben sieben übrig. Wie viel Ducaten hatte er gewonnen?

34. Das Weihnachtsgeschenk.

Ein Vater hatte Aepfel und Nüsse, von jedem gleichviel Stück gekauft, um damit am Weihnachtsfeste seine Kinder zu beschenken. Jedem Kinde gab er erst 12 Aepfel und behielt 48 Stück übrig. Dann gab er auch jedem Kinde 15 Nüsse und behielt da 15 Stück übrig. Wie viel Aepfel und Nüsse hatte er gekauft, und wie viel Kinder hatte er?

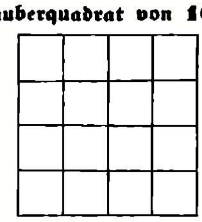
47. Der Gänserich und der Gänseschwarm.

Ein Gäns'rich watschelte in Ruh
In einem Erlgesträuche,
Da flog ein Gänseschwarm hinzu
Von einem nahen Teiche.
Der Gäns'rich sprach: Ich grüß euch schön!
Fürwahr, ich bin verwundert,
Euch insgesammt allhier zu seh'n,
Ihr seid gewiß an Hundert!"
Ein kluges Gänschen d'rauf versetzt:
„Wird viel zu Hundert fehlen!
Du hast zu hoch die Zahl geschätzt,
D'rum magst du selbst nun zählen.
Verdopple uns're Zahl, dann sei
Die Hälfte noch gewonnen;
Ein Viertel und Du, Freund, dabei,
Wirst Hundert dann bekommen."
Das kluge Gänslein flog geschwind
Zu den verlass'nen Schaaren;
Du aber sage, liebes Kind,
Wieviel es Gänse waren?

69. Die 3 Freunde.

Fritz, Bast und Hans, die sahen Geld
Auf einem Tische hingezählt.
Fritz sagte drauf: Mein Beutel enthält
Zweimal soviel, als dieses Geld.
Da hab ich dreimal soviel, sagt Bast,
Als Du angeblich im Beutel hast.
Hans wendet sich an Bast und setzt hinzu:
Und ich hab' viermal soviel, als Du.
160 Thaler hatten sie alle Drei;
Rechne nun aus und sag es ohne Scheu,
Wieviel Geld auf dem Tische wohl lag
Und jede Person gehabt haben mag? —

119. Zauberquadrat von 16 Feldern.



Wie werden die sechszehn Zahlen von 1 bis 16 so in obiges Quadrat vertheilt, daß, wenn man die Zahlen addirt, welche in den vier Feldern in einer und derselben Reihe stehen, die Summe immer 34 beträgt?

1[illegible]3. Wer von 3[illegible]chenpfennigen den letzten weg[illegible] gewonne[illegible]

Wie werden 30 auf den Tisch gelegte Rechenpfennige mit noch Jemandem sämmtlich nach und nach so weggenommen, daß immer einer um den andern eine beliebige Anzahl, aber nicht über 6 Stück, nehmen darf, und man auf solche Weise zuletzt davon nimmt, indem der zuletzt Wegnehmende gewonnen hat?

144. Künstliche Wegnahme.

Ein Vater legte 36 Nüsse in ein Quadrat nachstehender Gestalt auf den Tisch und sagte zu seinem Sohne: „Kannst Du 6 Stück so wegnehmen, daß in jeder wag- und senkrechten Reihe eine gerade Anzahl Nüsse liegen bleiben, so sollen Dir die 6 Nüsse geschenkt sein." Der Sohn nahm hierauf auch wirklich auf die ausbedungene Weise 6 Stück davon: welche waren es wohl?

Lage der Nüsse?					
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

160. Die errathene Rechnung.

Läßt man Jemand eine beliebige Zahl sich denken, diese Zahl mit 2 multipliciren, dann zu diesem Product irgend eine gerade Zahl addiren, diese Summe halbiren oder, was einerlei ist, durch 2 dividiren und die gedachte Zahl davon abziehen; wie kann man nun die übrig gebliebene Zahl, ohne die Rechnung selbst zu sehen, oder sich etwas sagen zu lassen, nennen?

194. Worträthsel.

Wenn man vier gewisse Zahlen mit Buchstaben schreibt, und von der ersten den zweiten, von der zweiten und dritten den ersten und von der letzten Zahl den dritten Buchstaben nimmt und daraus ein Wort bildet, so giebt das Wort, in Beziehung zu diesem Schriftchen und besonders zu dieser Aufgabe, eine recht treffende Benennung. Die vier Zahlen sind folgendermaßen zu finden: Subtrahirt man die erste Zahl von der Summe der zweiten, dritten und vierten, so bleibt 79, die zweite Zahl von der Summe der ersten, dritten und vierten, so bleibt 61, die dritte Zahl von der Summe der ersten, zweiten und vierten, so bleibt 39, die vierte Zahl von der Summe der ersten zweiten und dritten, so bleibt 19. Welches sind die Zahlen und wie heißt das Wort?

Vorrede zur ersten Auflage (1831):
Nicht Eigennutz oder die Sucht, in die Reihen der arithmetischen Schriftsteller zu treten, verleiten mich, diese Blätter, die ich früher bloß zu meinem Vergnügen gesammelt habe, dem Drucke zu übergeben; nur das Zureden einiger Freunde und der Wunsch, die gesellige Unterhaltung zu befördern und der Jugend in ihren Freistunden eine angenehme und nützliche Beschäftigung an die Hand zu geben, waren die Triebfedern, welche mich dazu bewogen. Ich schmeichle mir, daß dieses Werkchen seinen Zweck nicht ganz verfehlen werde; erstlich, weil es, wie schon der Titel zeigt, räthselähnliche und belustigende arithmetische Kunstaufgaben enthält, und zweitens, weil das Studium der Mathematik, den Aussprüchen der größten Männer zufolge, eins der vorzüglichsten Bildungsmittel des menschlichen Geistes ist... *Der Verfasser*

(Lösungen zu diesem Beitrag siehe S. 72.)