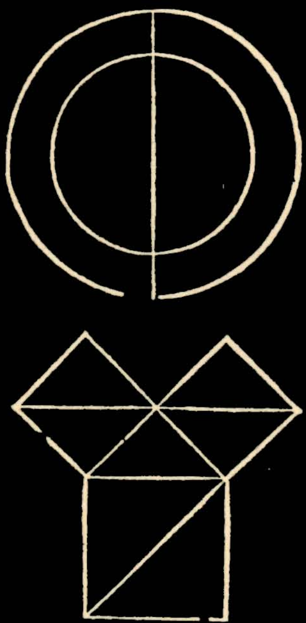
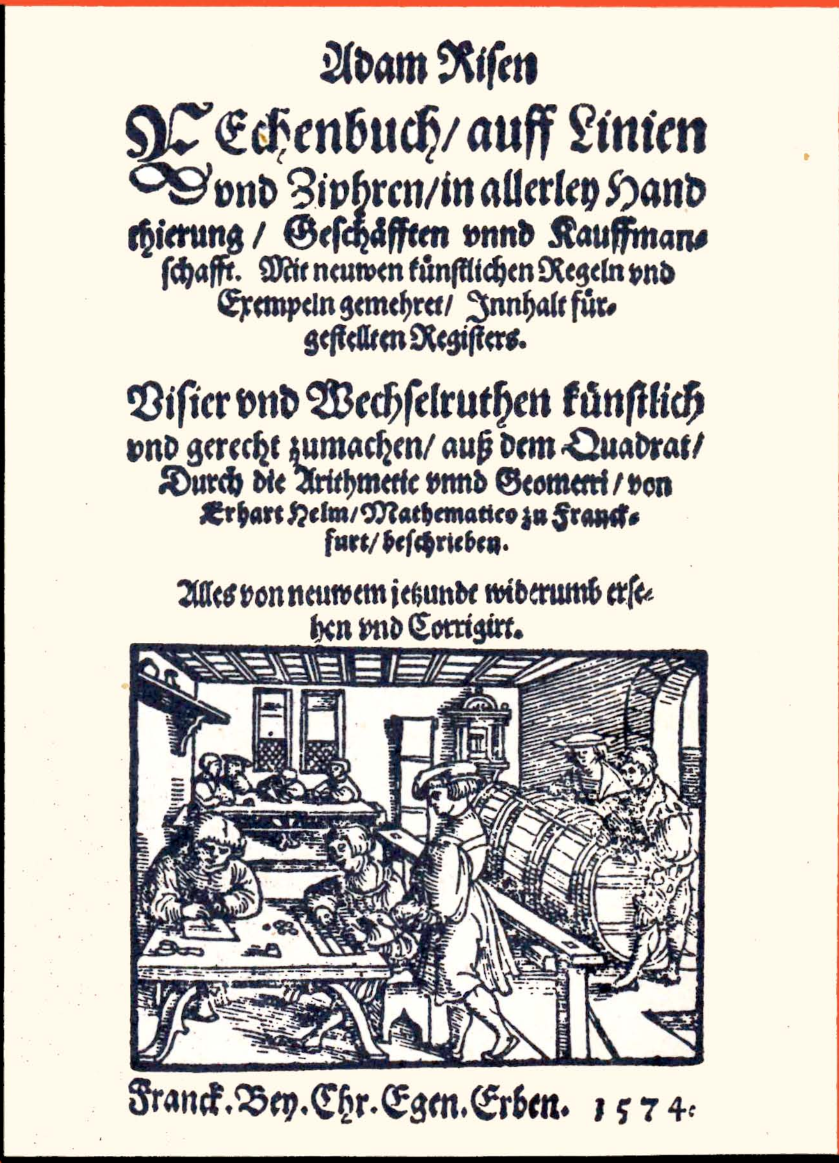
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha





Adam Risen

Rechenbuch/ auff Linien vnd Ziphren/ in allerley Hand
thierung / Geschäfften vnnd Kauffmanschafft. Mit newen künstlichen Regeln vnd
Exempeln gemehret/ Innhalt fürgestellten Registers.

Visier vnd Wechselruthen künstlich
vnd gerecht zumachen/ auß dem Quadrat/
Durch die Arithmetic vnnd Geometri / von
Erhart Helm/ Mathematico zu Franckfurt/ beschrieben.

Alles von newem jetzunde widerumb ersehen vnd Corrigirt.

Franck. Bey. Chr. Egen. Erben. 1574.

4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31 059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Fotos: Vignette J. Jordan, Leipzig (S. 77); Eigenfoto S. Grützner, Bischofswerda (S. 81); K.-H. Müller, Leipzig (S. 86); J. Lehmann, Leipzig (S. 88/89);
Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach Motivauswahl von J. Lehmann, Leipzig)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 18. April 1979

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wir arbeiten mit Mengen

Axio	**M**	**engenbildung**
Allmeng	**E**	**lementbeziehung**
Teilmenge	**N**	**ullmenge**
Mengendarstellun	**G**	**rundbereich**
Leermeng	**E**	**chte Teilmenge**
Individue	**N**	**eunermenge**

Das Wort *Menge* ist von der Umgangssprache in die mathematische Fachsprache übernommen worden und hat eine andere Bedeutung erhalten. In der Mathematik stellt man sich unter einer Menge eine Gesamtheit von Individuen vor, die meist nach ganz bestimmten Gesichtspunkten aus einem fest vorgegebenen Grundbereich ausgewählt und zusammengefaßt werden. Gibt man sich z. B. als Grundbereich alle natürlichen Zahlen vor, so kann man nach dem Mengenbildungsaxiom für Mengen 1. Stufe beispielsweise folgende Menge bilden:

Die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen, die größer als 5 und kleiner als 20 und durch 3 teilbar sind.

Wir erhalten $M=\{6, 9, 12, 15, 18\}$.

Bezeichnet man die Eigenschaften (größer als 5 und kleiner als 20 und durch 3 teilbar) mit $H(x)$, so kann man nach dem Mengenbildungsaxiom sagen:

„Es gibt eine Menge M, zu der alle die, aber auch nur die Individuen x gehören, für die die Eigenschaft(en) $H(x)$ zutrifft (zutreffen)" oder „Das Individuum x ist ein Element der Menge M genau dann, wenn für x die Eigenschaft(en) H zutrifft (zutreffen)."

In Symbolik: $x\in M \leftrightarrow H(x)$.

Mengen lassen sich auf verschiedene Arten angeben (darstellen, veranschaulichen).

$M=\{6, 9, 12, 15, 18\}$ nennen wir elementweise Darstellung. Bei einer solchen müssen alle Elemente einzeln aufgeschrieben werden.

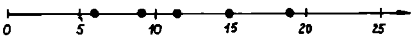
Die gleiche Menge läßt sich auch angeben, indem man schreibt, aus welchem Grundbereich die Elemente stammen und welche Eigenschaften sie besitzen müssen, also allgemein:

$M=\{x\in I;\ H(x)\}$.

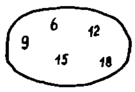
Für unsere Beispielmenge M wäre die folgende Schreibweise möglich:

$M=\{x\in N;\ 5<x<20 \wedge 3\mid x\}$. ($\wedge$: und)

Natürlich kann man diese Menge auch graphisch veranschaulichen, indem man z. B. auf der Zahlengeraden oder auf dem Zahlenstrahl diejenigen Punkte besonders markiert, denen die Zahlen der betreffenden Menge zugeordnet sind.



Schließlich läßt sich auch ein Mengendiagramm entwerfen:



Diese Darstellung soll verdeutlichen, daß man sich um die Elemente der Menge gewissermaßen eine „Hülle" denkt. Die Reihenfolge bzw. Anordnung der Elemente spielt keine Rolle.

Es gilt $\{6, 9, 12, 15, 18\}=\{6, 12, 18, 15, 9\}=\{18, 6, 12, 9, 15\}=\ldots$

Arbeitsblatt 1

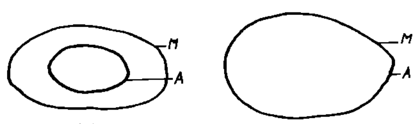
	Wortdarstellung (verbale Darstellung)	elementweise Darstellung	Darstellung mit Hilfe von Grundbereich und Aussageform $H(x)$
1.	Die Menge der ersten zehn natürlichen Zahlen	$M_1=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$M_1=\{x\in N;\ 0\leqq x\leqq 9\}$
2.	Die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 24 sind		
3.	Die Menge aller nichtnegativen Vielfachen der 7 bis höchstens 37		
4.	Die Menge aller ganzen Zahlen zwischen 99 und 100		
5.	Die Menge aller Teiler von -8		
6.	Die Menge aller nichtnegativen Vielfachen der 6, die kleiner als 30 sind		
7.	Die Menge aller zwischen 3 und 5 liegenden rationalen Zahlen		
8.	Die Menge aller Teiler von 12, die größer oder mindestens gleich -10, aber kleiner oder höchstens gleich 10 sind		
9.	Die Menge aller natürl. Zahlen zwischen 43 und 50, die bei Div. durch 3 den Rest 1 lassen		
10.	Die Menge aller positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 100, Vielfache von 9 und durch 12 teilbar sind		

Die „Allmenge" und auch die „leere Menge" sind spezielle Mengen. Die Allmenge über einen bestimmten Grundbereich enthält alle Elemente dieses Grundbereichs und keine anderen. Die leere Menge enthält kein einziges Element (in Zeichen $\emptyset$). Im folgenden Arbeitsblatt wollen wir uns im Angeben von Mengen üben. Die freien Felder sind nach dem Beispiel 1 auszufüllen.

Teilmengenbeziehungen

Wir denken uns die Menge aller Schüler einer Klasse, etwa der Klasse 7a der 31. POS in Leipzig, und bezeichnen diese Menge mit M. Wählen wir aus dieser Menge M nun Schüler mit besonderen Eigenschaften, Merkmalen oder Tätigkeiten aus und fassen diese zu einer Menge zusammen! Als Beispiele könnten wir uns folgende Mengen denken:
A sei die Menge aller Schüler dieser Klasse 7a, die die Zeitschrift *alpha* abonniert haben;
B sei die Menge aller Schüler dieser Klasse 7a, die eine Arbeitsgemeinschaft besuchen;
C sei die Menge aller Schüler dieser Klasse 7a, die Pioniere sind.
Jedesmal haben wir eine Teilmenge der Menge aller Schüler dieser Klasse 7a gebildet. Wir sagen: A ist eine Teilmenge von M und schreiben dafür $A \subseteq M$.
Es könnte möglich sein, daß alle Schüler dieser Klasse 7a die Zeitschrift *alpha* abonniert haben. Dann sagen wir:
A ist eine (unechte) Teilmenge von M ($A \subseteq M$). Da wir in diesem Falle genau wissen, daß beide Mengen gleich sind, können wir $A = M$ schreiben.
Wenn aber nicht alle Schüler dieser Klasse 7a die Zeitschrift *alpha* abonniert haben, wenn es also mindestens einen Schüler dieser Klasse gibt, der die *alpha* nicht abonniert hat, dann sagen wir:
A ist eine echte Teilmenge von M und schreiben $A \subset M$. Jede echte Teilmenge von M ist natürlich erst recht eine Teilmenge von M, während nicht jede Teilmenge von M etwa eine echte Teilmenge sein muß!
Nun läßt sich verallgemeinern:
Seien A und B beliebige Mengen.
Es ist A eine Teilmenge von B genau dann, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.
$(A \subseteq B \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \in B)$
Es ist A eine echte Teilmenge von B genau dann, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist und wenn es in der Menge B mindestens ein Element gibt, das nicht Element der Menge A ist.
$(A \subset B \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \in B \wedge \exists x \in B: x \notin A)$

Zur Veranschaulichung mögen die folgenden Mengendiagramme dienen:
M: Die Menge aller Schüler der Klasse 7a
A: Die Menge aller *alpha*-Abonnenten dieser Klasse 7a



(1) (2)

(1) A ist eine Teilmenge, sogar eine echte Teilmenge von M. Jeder *alpha*-Abonnent dieser Klasse ist auch ein Schüler dieser Klasse; es gibt aber mindestens einen Schüler dieser Klasse, der die *alpha* nicht abonniert hat.
Es gilt $A \subseteq M$, sogar $A \subset M$
(2) A ist eine Teilmenge von M.
Jeder *alpha*-Abonnent dieser Klasse ist auch ein Schüler dieser Klasse. Es ist aber auch jeder Schüler dieser Klasse ein alpha-Abonnent.
Es gilt $A \subseteq M$, sogar $A = M$.

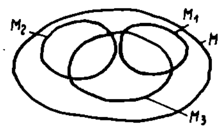
Auf dem folgenden Arbeitsblatt sind in jeder Aufgabe einige Mengen vorgegeben. Nach dem Beispiel 1 sollen alle möglichen echten Teilmengenbeziehungen, die zwischen den vorgegebenen Mengen existieren, aufgeschrieben werden.

Arbeitsblatt 2

	vorgegebene Mengen	echte Teilmengenbeziehungen
1.	N: Die Menge aller natürlichen Zahlen G: Die Menge aller ganzen Zahlen Z: Die Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen V: Die Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen	$N \subset G$, $Z \subset V$ $Z \subset N$, $Z \subset G$, $V \subset G$,
2.	B: Die Menge aller Bäume B_A: Die Menge aller Apfelbäume B_L: Die Menge aller Laubbäume B_O: Die Menge aller Obstbäume	
3.	N: Die Menge aller natürlichen Zahlen N_3: Die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen N_9: Die Menge aller durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen G_9: Die Menge aller durch 9 teilbaren ganzen Zahlen	
4.	R: Die Menge aller Rechtecke V: Die Menge aller Vierecke Q: Die Menge aller Quadrate D: Die Menge aller Drachenvierecke	
5.	W: Die Menge aller Würfel P: Die Menge aller Pyramiden Q: Die Menge aller Quader P_1: Die Menge aller Prismen	
6.	S: Die Menge aller Sehnen des Kreises k D: Die Menge aller Durchm. des Kreises k R: Die Menge aller Radien des Kreises k G: Die Menge aller Geraden, auf denen Sehnen von k liegen Z: Die Menge aller Zentralen von k	
7.	G: Die Menge aller Gleichungen G_1: Die Menge aller Gleichungen mit genau einer Variablen G_2: Die Menge aller linearen Gleichungen mit genau einer Variablen G_3: Die Menge aller linearen Gleichungen mit genau einer Variablen, die keine Lösung haben	

Mengenoperationen

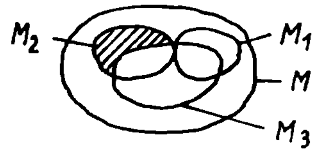
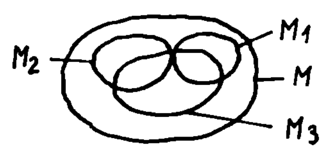
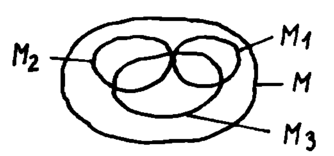
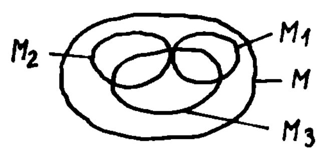
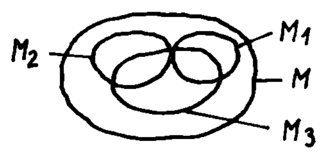
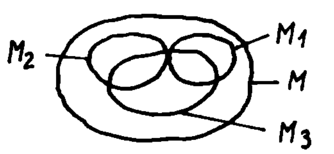
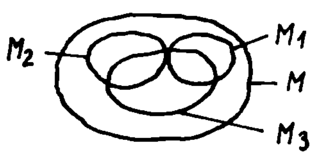
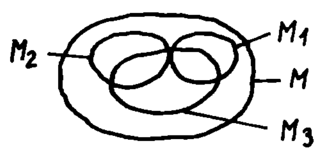
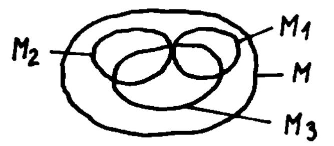
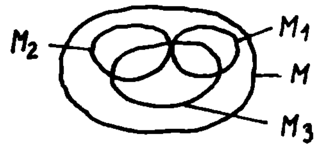
Denken wir uns die Menge aller Einwohner der Stadt A zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt. Bezeichnen wir diese Menge mit M und bilden nun die folgenden Teilmengen:
M_1 sei die Menge aller Einwohner der Stadt A, die älter als 25 und jünger als 50 Jahre sind;
M_2 sei die Menge aller Einwohner der Stadt A, die Altersrentner sind;
M_3 sei die Menge aller Einwohner der Stadt A, die eine Fahrerlaubnis besitzen.
Sicher gilt $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M$ und auch $M_3 \subset M$.
Sicher stehen M_1 und M_2 in keiner Teilmengenbeziehung zueinander, denn kein Einwohner zwischen 25 und 50 Jahren kann Altersrentner sein und umgekehrt. Solche Mengen nennt man elementfremd (disjunkt).
Betrachten wir die Menge M_3, die alle Fahrerlaubnisbesitzer enthält, so können solche Einwohner der Stadt A Altersrentner sein, aber auch zwischen 25 und 50 Jahren. Es wird sicher auch solche Besitzer einer Fahrerlaubnis geben, die 25 Jahre oder jünger sind oder 50 Jahre oder älter, aber noch keine Altersrentner. Das heißt, ein Teil von M_3 liegt in M_1, ein Teil in M_2 und ein Teil weder in M_1 noch in M_2, aber natürlich in M. Das Mengendiagramm könnte man wie folgt zeichnen:



Auf dem folgenden Arbeitsblatt 3 sollen jeweils die Flächenstücke schraffiert werden, die der angegebenen Menge graphisch entsprechen. Beispiel 1 ist wieder vorgegeben.

Wer das Arbeitsblatt 3 fehlerlos ausgefüllt hat, hat schon richtig mit Mengen operiert, vielleicht ohne sich dessen voll bewußt zu sein.
Beziehen wir uns zunächst auf das Beispiel 5. Die Menge M_2 wurde mit der Menge M_3 vereinigt. Die Vereinigungsmenge (gesprochen: „M_1 vereinigt mit M_2“; geschrieben: $M_1 \cup M_2$) enthält diejenigen Einwohner der Stadt A – aber auch nur diese –, die Altersrentner sind oder eine Fahrerlaubnis besitzen.
Man kann sich vorstellen, daß jeder Einwohner der Stadt A die Fragen vorgelegt bekommt „Sind Sie Altersrentner?“ und „Haben Sie eine Fahrerlaubnis?“ Wird wenigstens eine dieser Fragen mit „ja“ beantwortet, gehört der Betreffende zur Menge $M_2 \cup M_3$, natürlich auch dann, wenn beide Fragen bejaht werden.
Wir können nun allgemein sagen:
Es seien A und B beliebige Mengen. Ein Individuum x gehört zur Vereinigungsmenge

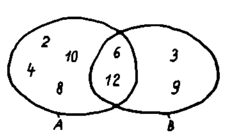
Arbeitsblatt 3

1.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A, die Altersrentner sind und keine Fahrerlaubnis besitzen.	
2.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A, die eine Fahrerlaubnis besitzen, aber weder Altersrentner noch zwischen 25 und 50 Jahren alt sind.	
3.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A, die zwischen 25 und 50 Jahren alt sind und eine Fahrerlaubnis besitzen.	
4.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A, die 25 Jahre oder jünger sind oder 50 Jahre oder älter, aber keine Altersrentner sind und keine Fahrerlaubnis besitzen.	
5.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A, die Altersrentner sind oder eine Fahrerlaubnis besitzen.	
6.	In dieses Mengendiagramm soll die Menge aller Kinder eingezeichnet werden, die den Kindergarten besuchen (Einwohner der Stadt A!).	
7.	In dieses Mengendiagramm soll die Menge aller Schüler bis zur 10. Klasse der POS eingezeichnet werden (Einwohner der Stadt A!).	
8.	In dieses Diagramm soll die Menge aller Brillenträger der Stadt A eingezeichnet werden.	
9.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A, die Altersrentner sind und eine Fahrerlaubnis besitzen.	
10.	Die Menge aller Einwohner der Stadt A zwischen 25 und 50 Jahren ohne Fahrerlaubnis.	

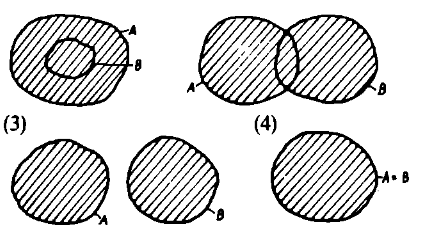
$A \cup B$ genau dann, wenn x zur Menge A oder zur Menge B gehört.
($x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$).
Das Bindewort „oder“ wird in der Mathematik im einschließenden Sinne gebraucht.
Beispiel: Wenn wir die Hausaufgaben ordentlich anfertigen oder im Unterricht gut aufpassen, werden wir gute Leistungen erzielen. Jeder wird sicher uneingeschränkt zustimmen, daß wir auch dann gute Leistungen erzielen werden, wenn wir beides tun. Das „Oder“ schließt also das „Und“ nicht aus!
Soll aber das „Und“ ausgeschlossen werden, so müssen wir die Bindewörter „entweder – oder“ verwenden.
Beispiel: Der Schüler Müller geht entweder in die Klasse 6a oder in die Klasse 6b.
Wir werden sofort verstehen, daß dieser Schüler nicht in beiden Klassen zugleich sein kann.
Da diese Unterscheidung in der Umgangssprache oft nicht genügend beachtet wird, werden in der Mengenlehre manchmal Fehler gemacht, wenn Vereinigungsmengen gebildet werden sollen. Deshalb wollen wir uns zu dieser Problematik noch ein mathematisches Beispiel ansehen:
Es sollen zwei Mengen M_1 und M_2 gebildet werden. M_1 sei die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die durch 2 oder durch 3 teilbar sind; M_2 sei die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die entweder durch 2 oder durch 3 teilbar sind.
Wir erhalten

$M_1 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ und
$M_2 = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$

Wir sehen, daß die Zahlen 6 und 12, die durch 2 und durch 3 teilbar sind, in der Menge M_1 enthalten sind, in der Menge M_2 jedoch nicht. Man kann sich die Menge M_1 auch entstanden denken durch die Vereinigung zweier Mengen, und zwar der Menge A aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die durch 2 teilbar sind und der Menge B aller natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die durch 3 teilbar sind. Dazu ließe sich das folgende Mengendiagramm zeichnen:



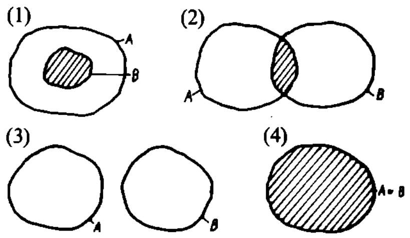
Wir wollen nun noch verschiedene Fälle graphisch veranschaulichen und bringen auch noch Beispiele, bei denen die Elemente von Mengen natürliche Zahlen sind.



Es wurde stets $A \cup B$ schraffiert!

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$
(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(4) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, $A \cup B = \{1, 2\}$

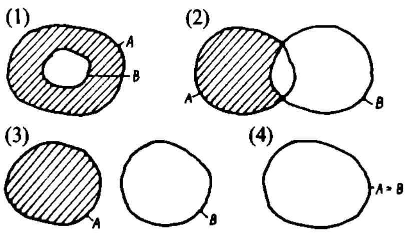
Wenden wir uns nun dem Beispiel 9 zu. Hier wurde der Durchschnitt der Mengen M_2 und M_3 gebildet (gesprochen: „M_2 geschnitten mit M_3“ oder „M_2 Durchschnitt M_3“, geschrieben: $M_2 \cap M_3$).
In dieser Durchschnittsmenge liegen alle diejenigen Einwohner der Stadt A – aber auch nur diese –, die sowohl Altersrentner als auch Fahrerlaubnisbesitzer sind (beides also gleichzeitig). Nur wer beide Fragen mit „ja“ beantwortet, gehört zur Menge $M_2 \cap M_3$.
Allgemein läßt sich formulieren:
Es seien A und B beliebige Mengen. Ein Individuum x gehört zur Durchschnittsmenge $A \cap B$ genau dann, wenn x zur Menge A und auch zur Menge B gehört. ($x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$). Analog zur Vereinigungsmenge folgen auch hier Beispiele.



Es wurde stets $A \cap B$ schraffiert!

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $A \cap B = \{2\}$
(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $A \cap B = \emptyset$
(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$
(4) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$

Im Beispiel 1 müssen zunächst die Einwohner Altersrentner sein, also der Menge M_2 angehören. Sie dürfen aber keine Fahrerlaubnis besitzen, also der Menge M_3 nicht angehören. Es wurde die Differenz der Mengen M_2 und M_3 gebildet.
Zur Differenzmenge $M_2 \setminus M_3$ (M_2 Differenz M_3) gehören alle diejenigen Elemente – und nur diese –, die zur Menge M_2 aber nicht zur Menge M_3 gehören.
Allgemein kann man formulieren:
Seien A und B beliebige Mengen. Ein Individuum x ist ein Element der Differenzmenge $A \setminus B$ genau dann, wenn x ein Element von A und kein Element von B ist.
($x \in (A \setminus B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$) *Beispiele:*



Es wurde stets $A \setminus B$ schraffiert!

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$
(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{1\}$
(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$
(4) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \emptyset$

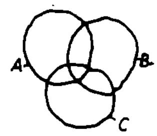
Wir erkennen nun, daß auf dem Arbeitsblatt 3 folgende Mengen dargestellt sind:

1. $M_2 \setminus M_3$
2. $M_3 \setminus M_1 \setminus M_2$
3. $M_1 \cap M_3$
4. $M \setminus M_1 \setminus M_2 \setminus M_3$
5. $M_2 \cup M_3$
9. $M_2 \cap M_3$
10. $M_1 \setminus M_3$

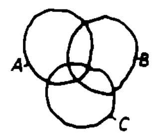
Im folgenden Arbeitsblatt 4 wollen wir uns im Operieren mit Mengen üben.

Arbeitsblatt 4

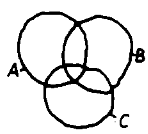
1. $A \cap B \cap C$



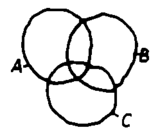
2. $(A \cap B) \setminus C$



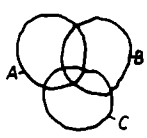
3. $(A \cup B) \setminus C$



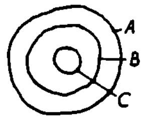
4. $(A \setminus B) \cap C$



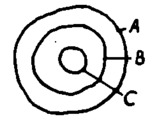
5. $(A \setminus B) \cap C$



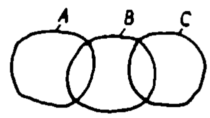
6. $(A \cup B) \setminus C$



7. $A \cap B \cap C$



8. $B \setminus A \setminus C$



9. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
10. Gegeben seien
$A = \{6, 7, 8, 9\}$;
$B = \{5, 6, 10\}$;
$C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

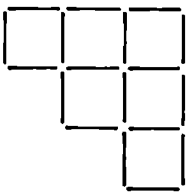
Man bilde folgende Mengen:

$A \cup B$	$A \setminus C$
$A \cup C$	$C \setminus A$
$B \cup C$	$B \setminus C$
$A \cap B$	$C \setminus B$
$A \cap C$	$A \cup B \cup C$
$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
$A \setminus B$	$A \setminus B \setminus C$
$B \setminus A$	$(A \cap B) \setminus C$

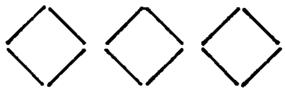
W. Fregin

Spiele mit Hölzchen

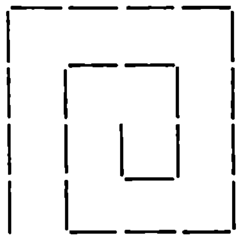
▲1▲ Aus 18 Hölzchen kann man diese Figur mit 6 Quadraten legen. Nimm aus der Figur 6 oder 5 oder 4 oder 2 Hölzchen weg! Stets bleiben 4 Quadrate übrig.



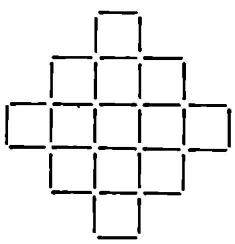
▲2▲ Wie macht man aus 3 Quadraten 4 Quadrate, ohne die Lage der Hölzchen der beiden ersten Quadrate beim Umlegen zu verändern?



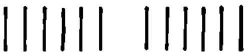
▲3▲ a) Bilde durch Umlegen von 4 Hölzchen aus dieser Figur 3 Quadrate!
b) Lege in der gleichen Figur 4 Hölzchen so um, daß 2 gleich große Quadrate zu erkennen sind!



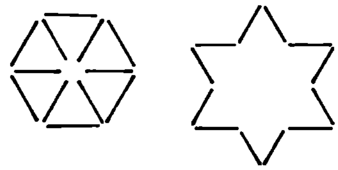
▲4▲ Entferne aus der Figur 16 Hölzchen; es sollen 12 gleich große Quadrate übrig bleiben!



▲5▲ Bilde aus 10 Hölzchen eine Figur, die drei gleichgroße Quadrate enthält!

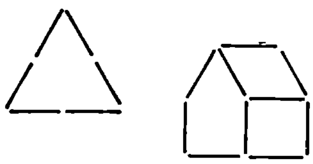


▲6▲ Diese sechs kongruenten gleichseitigen Dreiecke sollen durch Umlegen von 3 Hölzchen in sechs kongruente Parallelogramme verwandelt werden.



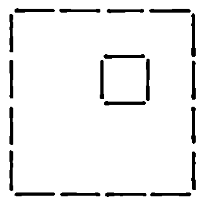
▲7▲ Von den 12 Hölzchen, die diesen Stern bilden, sollen 6 Hölzchen so umgelegt werden, daß drei gleich große, symmetrisch liegende Vierecke entstehen.

▲8▲ a) Durch Umlegen von 3 Hölzchen in dieser Figur soll ein Sechseck entstehen.
b) Verwandle das aus 6 Hölzchen gelegte Dreieck in zwei Dreiecke!
c) Ich gebe dir noch 3 Hölzchen. Diese sollst du in die Figur so legen, daß du nunmehr vier kongruente Dreiecke erhältst.



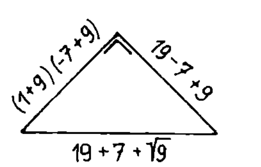
▲9▲ Hier wurde das Bild eines Hauses aus 10 Hölzchen gelegt. Lege zwei Hölzchen so um, daß der Hausgiebel auf der anderen Seite liegt!

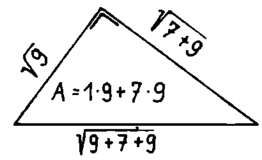
▲10▲ Die gelegte Figur soll einen quadratischen Garten, in dem sich ein kleiner quadratischer Teich befindet, darstellen. Die Gartenfläche soll mittels weiterer 10 Hölzchen in fünf flächen- und formgleiche Beete aufgeteilt werden.

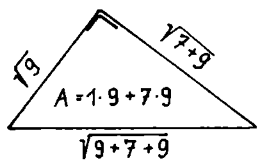


„Seit wann ist Ihr Sohn denn so fleißig, Frau Müller?" – „Seit er Hölzchen für die *alpha* braucht!"

$1979 = 197 \cdot 9 + 197 + 9$







$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9$
$= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot 7 \cdot \sqrt{9} \cdot (1+9-7) \cdot \sqrt{9}$
$= \sqrt{1 \cdot 9} \cdot 7 \cdot \sqrt{9 \cdot (19-7-\sqrt{9})}$
$= (\sqrt{1 \cdot 9} + \sqrt{7+9})(-1+\sqrt{9}+79)$
$= (197-9+1^{979})(19-7-9)$
$= (1+9-7)^{\sqrt{9}} \cdot (19-7+9)$
$1+9-7-9 = 1{,}9-7{,}9$
$19+79 = (1+9+\sqrt{7+9})(\sqrt{1 \cdot 9}+\sqrt{7+9})$
$19-79 = (1+9)(7-9)(19-7-9)$

$A = (1+9) \cdot 7 \cdot \sqrt{9}$
$U = -1 \cdot 9 + 79$
$S = 19+7+9$

$1^{9+7-9} = 1$
$-1^9 \cdot 7 + 9 = 2$
$1^9 - 7 + 9 = 3$
$1^9 \cdot \sqrt{7+9} = 4$
$1 \cdot \sqrt{9+7+9} = 5$
$-1+9+7-9 = 6$
$1 \cdot 9 + 7 - 9 = 7$
$1+9+7-9 = 8$
$1^{9+7} \cdot 9 = 9$
$1^9 \cdot 7 + \sqrt{9} = 10$

Die Raumdiagonale eines Quaders mit quadratischer Grundfläche mißt $\sqrt{1979}$ cm.
Wie groß sind die Kantenlängen des Quaders, wenn nur ganzzahlige Werte zugelassen sind?

Die 16 Teilnehmer einer Werkgruppe basteln Würfel mit ganzzahligen Seitenlängen. Beim Berechnen der Rauminhalte stellt sich heraus, daß sich die 16 Würfel zu 4 Vierergruppen ordnen lassen, wobei die Summe der Würfelvolumen in jeder Gruppe 1979 ergibt.
Welche Seitenlängen haben die vier Würfel jeder Gruppe?

Diese Zahlenspiele stammen aus der Feder von Ing. H. Decker, Köln; A. Fittke, EOS *H. Hertz*, Berlin (Kl. 11); stud. math. W. Förg-Rob, Schwaz (Österreich); W. Hoppe, OS Marienberg (Kl. 7).

„Life“ – ein mathematisches Spiel

Teil 2

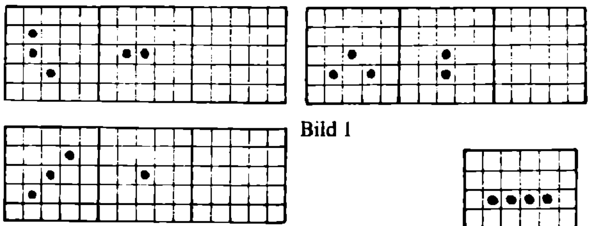


Bild 1

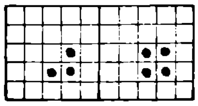


Bild 2

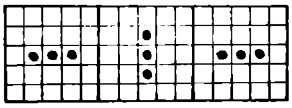


Bild 3

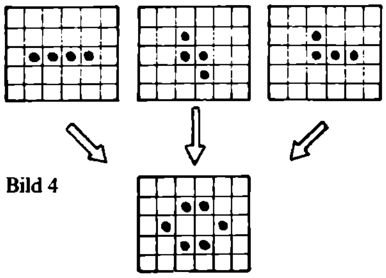


Bild 4

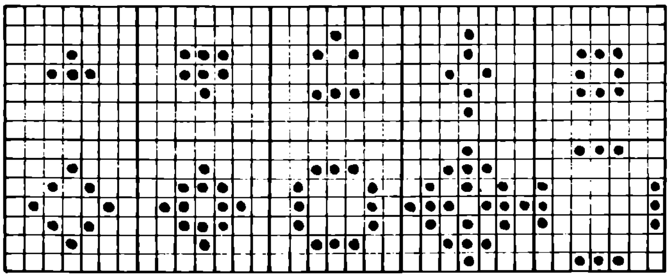


Bild 5

Verkehrsampel

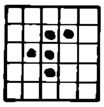


Bild 6

Der Leser könnte zunächst vermuten, daß die in der vorigen Ausgabe dieser Zeitschrift vorgestellten Spielregeln recht willkürlich gewählt seien, doch dies ist keineswegs der Fall. Um das Spiel interessant zu gestalten, hat *Conway* das Augenmerk darauf gerichtet, die Regeln so festzulegen, daß die Lebensgeschichte nicht ohne weiteres aus der Anfangskonfiguration abzulesen ist. Es soll keine „sofort auffindbare“ Ausgangskonfiguration geben, die beliebig wächst. Obwohl der Leser gewiß keine solche gefunden hat, gibt es eine derartige Erscheinung aber dennoch. Darauf werde ich noch zurückkommen. Zunächst fällt schnell auf, daß es Ausgangskonfigurationen gibt, die bald „aussterben“, wie die Beispiele in Bild 1 zeigen.

Eine andere Dreierkonfiguration wird schon in der nächsten Generation zu einem stabilen „Block“, d. h., eine weitere Anwendung der Regeln bewirkt keine weitere Veränderung mehr (Bild 2).

Die einfachste Möglichkeit für eine sich periodisch verändernde Figur ist der „Blinker“ (Bild 3).

Drei Viererkonfigurationen führen nach 2 bis 3 Generationen zu einer stabilen Anordnung, für die die Bezeichnung „Honigwabe“ geprägt wurde (Bild 4).

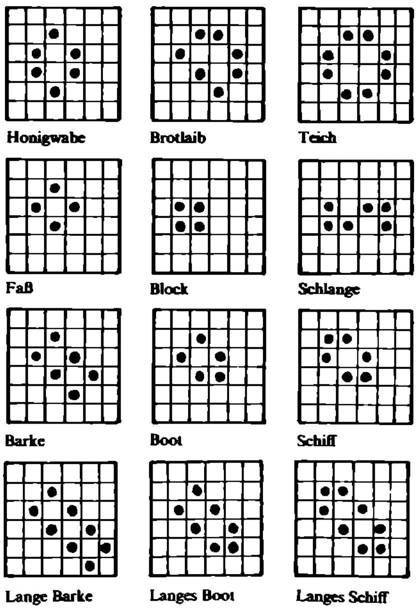
Der Leser kann sich die Zwischenschritte selbst überlegen. Nach der recht kurzen Lebensgeschichte dieser Viererkonfiguration ist es erstaunlich, daß eine andere Viererkonfiguration 10 Generationen benötigt, um zu einem periodischen Verhalten zu gelangen. Dabei tritt noch eine Verdreifachung der Anzahl der Steine auf (Bild 5).

Die letzte Figur setzt sich aus 4 unabhängigen „Blinkern“ zusammen. Man hat dafür den Begriff „Verkehrsampel“ geprägt. Damit ist die Lebensgeschichte sämtlicher Tetrominos (Konfigurationen aus vier zeilen- und spaltenweise zusammenhängenden Steinen) aufgezeigt.

Der Leser kann nun die Entwicklung der 12 Pentominos untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß 6 davon vor der 5. Generation verschwinden, 2 erreichen schnell eine stabile Anordnung, die aus 7 Steinen besteht, und weitere 3 verwandeln sich bald in „Verkehrsampeln“. Eine Überraschung ist der in Bild 6 dargestellte Pentomino.

Diese Konfiguration verschwindet weder in absehbarer Zeit, noch wird sie stabil oder geht in eine oszillierende Anordnung über. *Conway* hat das Geschehen 460 Züge verfolgt, ohne ein erkennbares Schicksal zu finden. Der Leser beachte, daß zunächst feststellbare Ausbreitung kein Beweis für unbegrenztes Wachstum ist. Es wäre bei der starken Unregelmäßigkeit durchaus denkbar, daß nach endlichen Generationen endlich viele unabhängige stabile oder oszillierende Teile entstehen oder gar wieder alles „abstirbt“.

Bild 7



Dem Leser werden sicher schon einige der einfachen stabilen Anordnungen aufgefallen sein (Bild 7).

Für eine aus 5 Steinen bestehende Figur wurde der Name „Segler“ („Glider“) geprägt (Bild 8). Nach 2 Generationen finden wir die gleiche Figur zunächst gespiegelt, und nach 4 Generationen hat sich die Konfiguration lediglich ein Kästchen nach rechts unten bewegt. Dadurch entfernt sich der „Segler“, nach jeweils 4 Zügen betrachtet, bei gleichbleibender Form beliebig weit. Die zunächst denkbare größte Geschwindigkeit einer wandernden Figur ist die eines Königs auf dem Schachbrett; *Conway* nannte sie Lichtgeschwindigkeit. Obiger „Segler“ bewegt sich also diagonal mit dem Viertel der Lichtgeschwindigkeit. *Conway* hat bewiesen, daß dies die größtmögliche Diagonalgeschwindigkeit einer Figur ist. Es gibt noch weitere, sich bei gleichbleibender Figur bewegende Figuren (nach einigen Generationen jeweils betrachtet), die sogenannten „Raumschiffe“. Diese bewegen sich vertikal mit der Hälfte der Lichtgeschwindigkeit (nach 4 Generationen 2 Felder vorgerückt) (Bild 9). Bei der Bewegung entstehen kleine Abfallprodukte, die aber sofort wieder verschwinden. Wird der „Hauptkörper“ aber länger als 6 Steine, so werden Objekte „geboren“, die danach das „Raumschiff“ selbst zerstören. Es gibt jedoch trotzdem längere, sogenannte „Übergewichtige Raumschiffe“. Diese benötigen aber als Schutz vor der Selbstzerstörung Eskorten von kleineren „Raumschiffen“. Das längste Raumschiff, zu dessen Eskortierung 2 kleinere ausreichen, hat einen Hauptkörper aus 12 Steinen (Bild 10). *Conway* hat herausgefunden, daß ein Raumschiff mit einem

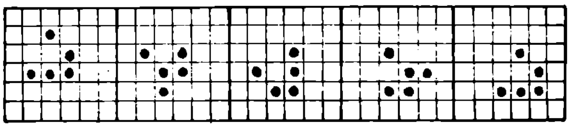


Bild 8

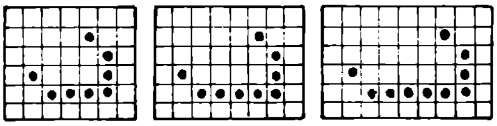


Bild 9

Leichtgewichtiges Raumschiff — Mittelgewichtiges Raumschiff — Schwergewichtiges Raumschiff

Hauptkörper von 100 Steinen sicher sich bewegen kann, wenn es von einer Flotille von 33 kleineren Raumschiffen begleitet wird.
Eine Mittelstellung zwischen den „Raumschiffen“ und den stabilen Figuren nehmen die oszillierenden Konfigurationen ein (wie der schon genannte „Blinker“) (Bild 11).

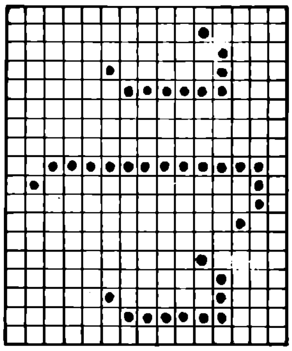
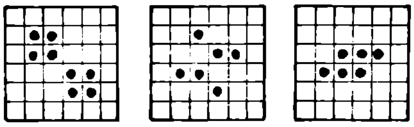


Bild 10

Es gibt auch periodische Figuren, die einen festen äußeren Rand haben, mit dessen Hilfe das Innere bewegt wird. *Conway* nennt sie „Billard-Tisch“-Konfigurationen. Ein Beispiel dafür ist das „Speichenrad“. Das Innere (die „Billardbälle“) dreht sich bei jedem Generationswechsel um 90° (Bild 12).
Geringe Veränderung der Ausgangsfigur kann drastische Folgen haben. So kommt der Buchstabe „H“ zu einem schnellen Ende; wird jedoch nur ein Stein um ein Feld verschoben, so daß der Buchstabe „π“ vorliegt, so finden wir erst nach 173 Generationen 5 „Blinker“, 6 „Blöcke“ und 2 „Teiche“ als (periodisches) Ergebnis (Bild 13).
Eine interessante Lebensgeschichte finden wir auch bei der „Getreidemähmaschine“. Das abzuerntende Feld ist eine sehr lange Diagonale von Steinen. Die Maschine bewegt sich nun diagonal entlang dem Feld, „erntet“, „bündelt in Garben“ und läßt diese dann hinter sich stehen (Bild 14).
Zu einem strategischen Spiel wird „Life“ durch zwei Konfigurationstypen, auf der einen Seite solche, die Geschosse abfeuern, andererseits Figurenschlucker, die, wie ihr Name sagt, andere Figuren verschlucken, ohne dadurch verändert zu werden (als periodische Figuren). Dies ist das Ergebnis der im letzten Artikel erwähnten Preisaufgabe. Wissenschaftler vom „Project of Artificial Intelligence“ vom „Massachusetts Institute of Technology“ hatten dem Computer einfach die Aufgabe gestellt, ein Gegenbeispiel zur im vorigen Artikel erwähnten Endlichkeitsbehauptung zu finden. Herausgekommen ist dabei die „Glider Gun“ („Segler-Kanone“), ein räumlich fixierter Oszillator, der nach 30 Generationen in seine ursprüngliche Gestalt übergeht und dabei jeweils einen „Glider“ abfeuert, der dann über das Spielfeld wandert. Durch die Periodizität ist gesichert, daß eine unbegrenzte Zahl von Glidern produziert wird (die sich offensichtlich auch nicht gegenseitig beeinflussen). Man kann das unbegrenzte Wachstum aber verhindern, indem man den Glidern einen „Eater“ (Figurenschlucker) in den Weg stellt (Bild 15, Bild 16).
Durch die vielfältigen Beispiele erscheint die Spielbezeichnung „Life“ (Leben) keineswegs unmotiviert. Aus einfachen Grundregeln wird eine komplexe Welt aufgebaut, die nicht nur komplex bezüglich der räumlichen Strukturen ist, sondern auch bezüglich des funktionellen Verhaltens. In einem wesentlichen Punkt aber scheint der Name nicht gerecht-

Bild 11



Leuchtturm — Uhr (sie „tickt“) — Kröte

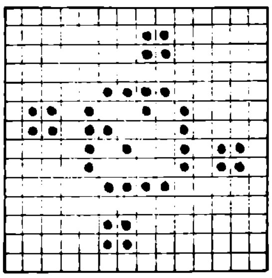
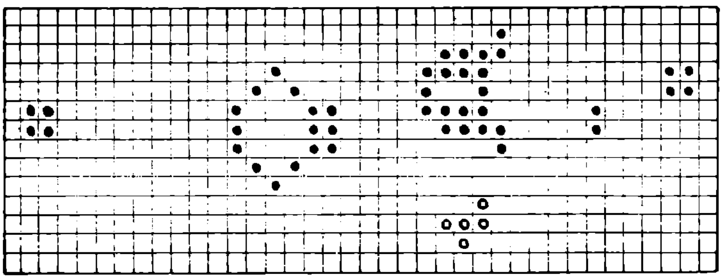


Bild 12

Bild 15



Glider Gun

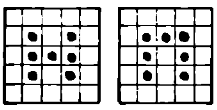


Bild 13

H — π

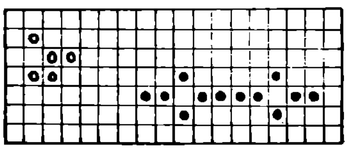
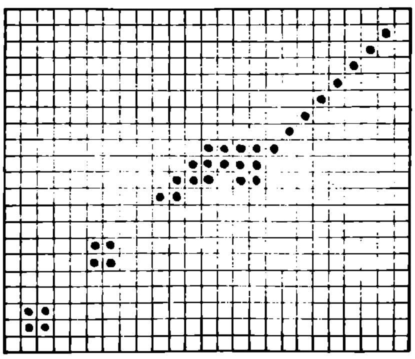


Bild 16

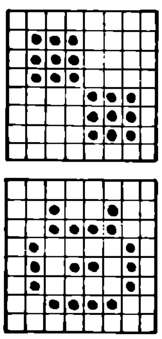
Eater

Bild 14

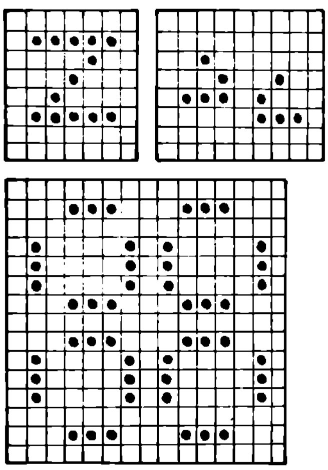


Getreidemähmaschine

Bild 17



Kater



Pulsar 48-56-72

fertigt; es fehlt der „schöpferische Zufall“. Wir finden ein Musterbeispiel eines deterministischen Prozesses, bei dem alles aus den Anfangsbedingungen folgt. Das Spiel offenbart seine Ideen, aber der Zufall ist einfach nicht vorgesehen.

Ein mathematisches Spiel kann durchaus den Blick auch in ein anderes Wissenschaftsgebiet lenken. Das Conway-Spiel ist in der Tat nicht weit entfernt von einem Weg, den die mathematische und angewandte Forschung in den letzten Jahrzehnten tatsächlich beschritten hat. In unserem Spiel haben wir Zellen (Quadrate), die sich in einer endlichen Zahl von Zuständen befinden können (in unserem Spiel nur 2), und das Verhalten in der nächsten Generation hängt von gewissen Umgebungszellen (bei uns 8) ab. In der Mathematik spricht man bei derartigen Systemen auch von zellularen Automaten. Wir finden hier aber keinesfalls nur einen abstrakten Apparat zur Untersuchung von einem dem Selbstzweck dienenden Spiele. Die Entwicklung der Theorie zellularer Automaten begann 1950 mit Arbeiten des bekannten Mathematikers *John von Neumann*. Er suchte nach Automaten, die Modelle der biologischen Reproduktion sind, indem sie genaue Kopien ihrer selbst oder geringfügig abweichende Varianten herstellen. Er benötigte dabei nicht nur 2, sondern 29 Zellzustände, jede Zelle hatte 4 Nachbarzellen (statt 8), und der Automat bestand aus 200000 Zellen.

Nachdem zunächst die Theorie der zellularen Automaten vorwiegend für die Konstruktion parallel arbeitender Schnellrechner (Multiprozessoren) verwendet wurde, zeigen sich in jüngerer Zeit auch Anwendungen in Biologie und Medizin.

Die Situation, daß das zukünftige Zellverhalten vom Verhalten in Umgebungszellen abhängt, finden wir auch bei der Ausbreitung von Störungswellen in biologischen Zellverbänden. Es entstehen Möglichkeiten, Situationen zu modellieren, zu denen es in der Herzmuskulatur bei einem Infarkt kommt. Durch moderne Rechner können zellulare Räume konstruiert werden, deren Anzahl von Zellen etwa der Anzahl der Muskelzellen in einem Gewebeteil entspricht.

In Bild 17 möchte ich noch – ohne damit der Entfaltung der Phantasie Grenzen setzen zu wollen – einige Ausgangskonfigurationen angeben, die einen interessanten Spielverlauf gewährleisten.

R. Schuster

Prof. Dr. A. J. Chintschin, Moskau:
Wer einmal die erhabene Freude der schöpferischen Leistung erfahren hat, wird niemals die Anstrengungen scheuen, um diese von neuem zu erleben.

XX. Internationale Mathematik-Olympiade 1978

Bukarest (3. 7. bis 10. 7. 1978)

Die XX. Internationale Mathematikolympiade fand im Juli 1978 in Bukarest statt. An ihr nahmen Mannschaften aus 17 Ländern teil. Wie gewöhnlich bestand die Mannschaft eines jeden Landes aus 8 Schülern. Den Teilnehmern wurden 6 Aufgaben vorgelegt – je 3 an jedem der zwei Tage des Wettbewerbs. Für die Lösung jeder Aufgabe erteilte die Jury eine bestimmte Anzahl von Punkten. Die maximal mögliche Summe der Punkte für die Lösung aller Aufgaben betrug für die einzelnen Teilnehmer 40, d. h., für die gesamte Mannschaft 320 Punkte. In der inoffiziellen Wertung erreichte die SR Rumänien mit 237 Punkten den ersten Platz; es folgten USA (225 P.), Großbritannien (201 P.), Vietnam (200 P.), ČSSR (195 P.). Die DDR war bei dieser Olympiade nicht vertreten.

Aufgaben

1. Es seien m und n natürliche Zahlen mit $n > m \geqq 1$. Die Dezimaldarstellung von 1978^m und 1978^n enden beide auf denselben Dreierblock von Ziffern. Bestimme m und n so, daß $m+n$ minimal

2. P ist ein gegebener Punkt im Inneren einer gegebenen Kugel, und A, B, C sind drei beliebige auf der Kugel gelegene Punkte, so daß PA, PB und PC paarweise zueinander senkrechte Strecken sind. Es sei Q die zu P diagonal gegenüberliegende Ecke im durch PA, PB und PC aufgespannten Quader.
Bestimme die Menge aller Punkte Q (geometrischer Ort von Q), wenn die Punkte A, B und C alle möglichen erlaubten Lagen durchlaufen!

3. Die Menge aller positiver ganzer Zahlen sei die Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen
$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$ und
$\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, wobei
$f(1) < f(2), < \ldots < f(n) < \ldots,$
$g(1) < g(2), < \ldots < g(n) < \ldots,$ und
$g(n) = f(f(n)) + 1$ für alle $n \geqq 1$.
Bestimme $f(240)$!

4. Es sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$. Ein Kreis berühre sowohl den Umkreis des Dreiecks ABC von innen als auch die Seiten AB und AC. Die Berührungspunkte mit den Seiten AB bzw. AC seien P bzw. Q.

Beweise, daß der Mittelpunkt der Strecke PQ der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC ist!

5. Es sei $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ eine Folge paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen.
Beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ gilt!}$$

6. Die Mitglieder einer internationalen Gesellschaft stammen aus 6 verschiedenen Ländern. Die Liste der Mitglieder enthält 1978 Namen, welche mit 1, 2, ..., 1978 numeriert sind.
Beweise, daß es ein Mitglied gibt, dessen Nummer gleich der Summe der Nummern zweier Mitglieder aus seinem eigenen Land oder gleich dem Doppelten der Nummer eines Mitglieds aus seinem eigenen Land ist!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jan Vyšin

Prag

▲1879▲ Es ist folgender Additions-Algorithmus gegeben

$$\begin{array}{r} \text{SOMMER} \\ \text{OSTSEE} \\ \hline \text{FERIEN} \end{array}$$

Jeder Buchstabe bedeutet eine ganze Zahl aus dem Intervall $[0, 9]$, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen.

Diese Aufgabe wurde dem MSB-Buch Nr. 5
Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben
entnommen.
146 Seiten, 41 Abb., kartoniert, Preis 9,60 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig
Bestell-Nr. 665 635 5

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Eine Methode zur Ermittlung pythagoreischer Zahlentripel

Ich bin seit Jahren Mitglied des *Zentralen Mathematikzirkels* des Kreises Bischofswerda sowie des Bezirkskorrespondenzzirkels Dresden und natürlich auch *alpha*-Leser. Auf Grund der außerschulischen Beschäftigung mit der Mathematik konnte ich schon mehrmals unter den Preisträgern bei Kreis- und Bezirksolympiaden sein. In der AG Mathematik beschäftigen wir uns u. a. mit pythagoreischen Zahlentripeln.

Im folgenden möchte ich eine Methode zur Gewinnung solcher Tripel darstellen.

Definition: Ein Tripel $[a; b; c]$ von Null verschiedener natürlicher Zahlen a, b, c wird genau dann pythagoreisches Tripel genannt, wenn $a^2+b^2=c^2$ gilt.

Solche Tripel sind z. B. $[3; 4; 5]$ und $[5; 12; 13]$.

Wenn $[a; b; c]$ ein pythagoreisches Tripel ist, so ist für beliebige natürliche Zahlen k $(k \neq 0)$ auch das Tripel $[ka; kb; kc]$ ein solches. (Beweist diesen Satz!)

Wie kann man nun aber weitere pythagoreische Tripel finden? Um zu einer Idee zu kommen, untersuchen wir einige bekannte pythagoreische Tripel etwas genauer:

$$[3;4;5] \quad 3^2+4^2=5^2$$
$$3^2=9=4+5$$
$$[5;12;13] \quad 5^2+12^2=13^2$$
$$5^2=25=12+13$$
$$[7;24;25] \quad 7^2+24^2=25^2$$
$$7^2=49=24+25$$

Dabei fällt uns zunächst auf, daß man das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl als Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben kann. (Für alle $n \in N$ gilt: $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=(2n^2+2n)+(2n^2+2n+1)$.) Dann sehen wir, daß in unseren Beispielen diese beiden Summanden mit der betrachteten ungeraden Zahl ein pythagoreisches Tripel bilden. Wir vermuten:

Satz: Jedes Tripel $[a; b; c]$ natürlicher Zahlen mit $a^2=b+c$, $c=b+1$ und $b \neq 0$ ist ein pythagoreisches Zahlentripel.

Beweis: 1. Wegen $b \neq 0$, $c=b+1$ und $a^2=b+c$ sind a, b und c von Null verschieden.

2. Aus $a^2=b+c=b+b+1=2b+1$ und $c^2=(b+1)^2=b^2+2b+1$ folgt $c^2=a^2+b^2$; w. z. b. w.

Da die Voraussetzung des Satzes für jede ungerade natürliche Zahl a $(a>1)$ – und nur für diese – erfüllbar ist, finden wir folgendes Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Zahlentripel:

1. Man wähle für a eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 1 ist.
$$a=2n+1, \quad n \neq 0$$
2. Man schreibe a^2 als Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen b und c.
$$b=2n^2+2n \quad c=2n^2+2n+1$$
3. $[a; b; c]$ ist ein pythagoreisches Tripel.
$$a^2+b^2=c^2$$
4. Für jedes $k \in N$ mit $k \neq 0$ ist $[ka; kb; kc]$ ebenfalls ein pythagoreisches Tripel.
$$(ka)^2+(kb)^2=(kc)^2$$

Natürlich liefert diese Methode längst nicht alle pythagoreischen Zahlentripel, z. B. nicht $[9; 12; 15]$.

Abschließend ein Beispiel:

Im 30. Jahr des Bestehens unserer Republik nehmen wir für a die Zahl 1979 und erhalten nach unserer Methode das pythagoreische Zahlentripel $[1979; 1958220; 1958221]$.

Wem es Spaß macht, der kann es nachrechnen!

S. Grützner

Aus der Arbeit des Kreisklubs Junger Mathematiker Gräfenhainichen

In diesem Schuljahr führten wir erstmals einen Mathematikwettbewerb für Schüler der Klassenstufe 4 durch. Ziel war, interessierte und leistungsstarke Schüler frühzeitig auf die OJM vorzubereiten und sie für den seit acht Jahren bestehenden Kreisklub auszuwählen. Es beteiligten sich 71 Schüler. – Zusätzlich organisierten wir einen Mannschaftswettbewerb. An ihm nahmen fünf Schulmannschaften der Klassenstufe 6 teil. Die Aufgaben dazu stellten wir nach den Empfehlungen der Pädagogischen Lesung von OStR G. Schulze, Herzberg, zusammen.

R. Schulz, Rotta

Aufgaben des Wettbewerbs der Klassenstufe 4

1. Trage in Bild 1 des beiliegenden Arbeitsblattes die Zahlen 1 bis 9 in die vorhandenen 9 Felder ein! Dazu darf jede Zahl nur einmal verwendet werden. In jeder Zeile (von links nach rechts), in jeder Spalte (von oben nach unten) und in jeder der beiden Hauptdiagonalen (Schrägen) soll die Summe der drei Zahlen stets 15 betragen. Zur Erleichterung sind bereits drei Zahlen eingetragen. Schreibe auf, wie du die Lösung gefunden hast!

Bild 1

2		6
4		

2. In Bild 2 beiliegenden Arbeitsblattes sind gegeben:

Bild 2

(1) Eine Gerade g
(2) Ein Punkt P_1, der nicht auf g liegt
(3) Ein Punkt P_2, der nicht auf g liegt

Zeichne mit Lineal und Zeichendreieck zu g die Parallele p durch P_1 und die Senkrechte s durch P_2!

3. Ersetze in den beiden Aufgaben die Variablen (Buchstaben) durch Ziffern, damit zwei richtig gelöste Aufgaben entstehen! Vergiß die Probe nicht!

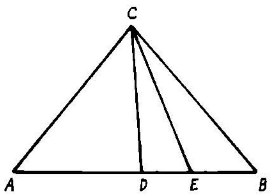
(1) $\begin{array}{r} a57 \\ +\,34bc \\ \hline 4444 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 8000 \\ -\,xyz \\ \hline 7531 \end{array}$

4. Du hast Fünfmarkstücke und Zweimarkstücke. Wie kannst du den Betrag von 29 Mark passend zahlen?
Hinweis: Es gibt nicht nur eine Lösung. Mache zu jeder Lösung die Probe!

5. Ordne die folgenden Längenangaben der Größe nach! Verwende dabei das Zeichen „kleiner als“!
15 m 2 cm; 848 cm; 9,01 m; 75 dm; 10 m.
Hinweis: Wandle die Längenangaben so um, daß sie alle dieselbe Maßeinheit besitzen!

6. Wieviel verschiedene Dreiecke enthält das Bild 3 auf beiliegendem Arbeitsblatt? Zwei Beispiele dazu lauten:
(1) Dreieck ADC (2) Dreieck AEC
Schreibe auch die übrigen Dreiecke in dieser Form auf, indem du ihre Eckpunkte angibst!

Bild 3



Das Einbeschreiben von Kreisen gleichen Durchmessers in ein Quadrat

▲1▲ Einem Quadrat mit der Seitenlänge a sei ein Kreis einbeschrieben. Wieviel Prozent der Fläche des Quadrats werden durch den Kreis abgedeckt?

Lösung:

$$p=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\pi}{a^2}\cdot 100=\frac{\pi}{4}\cdot 100=78{,}54$$

Es werden 78,54% der Fläche des Quadrats abgedeckt.

Man kann nun dem Quadrat nicht nur einen Kreis, sondern mehrere zueinander kongruente Kreise einbeschreiben, etwa wie in Bild 1.

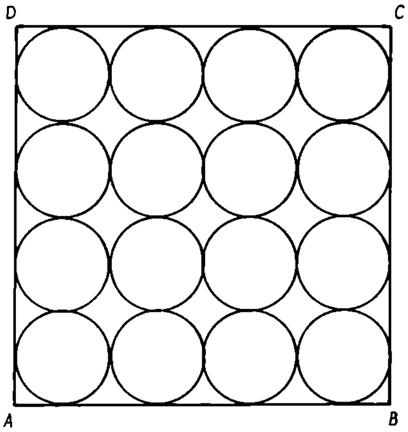


Bild 1 Anordnung I

▲2▲ Die gemeinsame Länge der Durchmesser der zueinander kongruenten Kreise in Bild 1 sei $\frac{a}{n}$. Wieviel Prozent der Fläche des Quadrats werden durch die in Bild 1 dargestellten Kreise insgesamt abgedeckt?

Lösung:

$$p=\frac{n^2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{a}{n}\right)^2\cdot\pi}{a^2}\cdot 100=\frac{\pi}{4}\cdot 100=78{,}54$$

Es werden 78,54% der Fläche des Quadrats abgedeckt.

Wir stellen fest, daß der Anteil der abgedeckten Fläche an der gesamten Fläche des Quadrats überhaupt nicht von der Anzahl bzw. Größe der einzelnen Kreise abhängt, wenn diese wie in Bild 1 angeordnet sind.

Was geschieht aber, wenn wir die zueinander kongruenten Kreise „auf Lücke“ wie in Bild 2 anordnen?

Dies soll uns im folgenden beschäftigen.

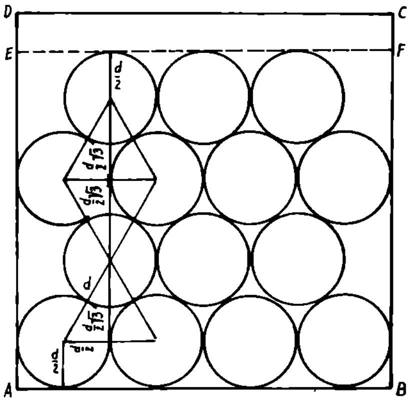


Bild 2 Anordnung II

Bild 2 zeigt, daß man in dem gegebenen Quadrat bei Anordnung II nur 14 Kreise mit dem Durchmesser $d=\frac{a}{4}$ unterbringen kann – gegenüber 16 nach Anordnung I. Die Seite $\overline{CD}$ des Quadrats wird von den Kreisen aber nicht berührt.

▲3▲ Weise rechnerisch nach, daß sich keine weitere „Lage“ von Kreisen im Quadrat $ABCD$ (Bild 2) unterbringen läßt! Berechne die Breite $\overline{AE}$ des „ausgefüllten“ Rechtecks $ABFE$! Wie breit wäre der von 5 Lagen abgedeckte Streifen?

Lösung:

$\overline{AE}=\frac{d}{2}+3\cdot\frac{d}{2}\sqrt{3}+\frac{d}{2}=\frac{d}{2}(2+3\sqrt{3})$ (vgl. Bild 2)

Eine 5. Lage bringt einen Breitenzuwachs von $\frac{d}{2}\sqrt{3}$.

Der von 5 Lagen ausgefüllte Streifen hat eine Breite $\frac{d}{2}(2+4\sqrt{3})>4d=a$.

Wird die Anzahl n der in der ersten Lage befindlichen Kreise größer (und damit ihr Durchmesser kleiner), so werden die Zwischenräume von den folgenden Lagen besser ausgefüllt und man kann evtl. zu den auf alle Fälle möglichen n Lagen m zusätzliche Lagen von Kreisen im Quadrat unterbringen.

Ein Versuch mit Pfennigmünzen läßt vermuten, daß erstmals bei $n=8$ eine zusätzliche Lage von Kreisen im Quadrat untergebracht werden kann. Bei 8 Kreisen in der 1. Lage lassen sich $8+1=9$ Lagen von Kreisen dem Quadrat einbeschreiben:

5 Lagen mit je 8 Kreisen,
4 Lagen mit je 7 Kreisen.

Das sind insgesamt 68 Kreise, die die Quadratfläche zu 83,45% abdecken.

▲4▲ Bestätige rechnerisch, daß die durch obigen Versuch gefundene Vermutung zutrifft, und überprüfe die daran anschließenden Rechnungen!

Wie sieht das nun bei noch größeren Werten für n aus? Läßt sich evtl. ein noch größerer Anteil der Fläche des Quadrats abdecken? Dazu suchen wir einen Term m, der für jedes $n\in N$ angibt, wieviel Lagen Kreise zusätzlich zu den n mit Sicherheit möglichen im Quadrat untergebracht werden können.

Lösung:

Sei g_i ($i=1, 2, 3, \ldots$) die Gerade, die durch die Mittelpunkte aller Kreise der i-ten Lage geht.

Die Geraden g_j und g_{j+1} sind parallel zueinander und haben – vgl. Lösung zu ▲3▲ – den Abstand $\frac{d}{2}\sqrt{3}$.

Die Geraden g_1 und g_n haben dann den Abstand $(n-1)\frac{d}{2}\sqrt{3}$. Die Kreise von n aufeinanderfolgenden Lagen füllen somit ein Rechteck der Breite

$\frac{d}{2}+(n-1)\frac{d}{2}\sqrt{3}+\frac{d}{2}=\frac{d}{2}[2+(n-1)\sqrt{3}]$

aus. Jede zusätzliche Lage verbreitert dieses Rechteck um $\frac{d}{2}\sqrt{3}$.

m ist nun die größte ganze Zahl, für die

$$m\cdot\frac{d}{2}\sqrt{3}\leq n\cdot d-\frac{d}{2}[2+(n-1)\sqrt{3}] \text{ ist.}$$

(Siehe Bild 3)

Wenn wir wissen, daß in der Mathematik für jede reelle Zahl x mit $[x]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet wird, für die $g\leq x<g+1$ gilt (d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als x), so können wir schreiben

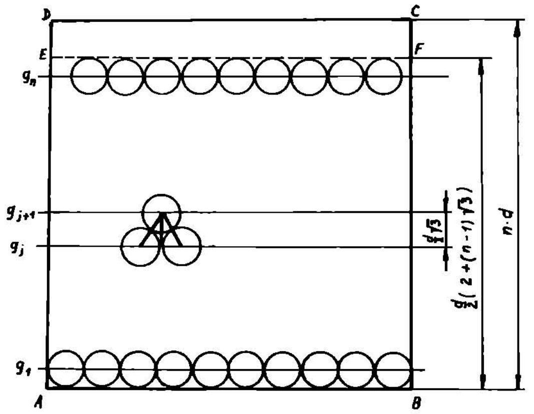
$$m=\left[\frac{nd-\frac{d}{2}[2+(n-1)\sqrt{3}]}{\frac{d}{2}\sqrt{3}}\right]=\left[\frac{1}{3}(n-1)(2\sqrt{3}-3)\right].$$

Setzen wir im letzten Term $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3)=p$, so erhalten wir $m=[(n-1)\cdot p]$. Wie man mit Hilfe genauerer Zahlentafeln (oder durch Intervallschaltung) ermittelt, ist $0{,}154700538<p<0{,}154700539$.

Zum Ermitteln zusammengehöriger Werte von n und m genügt meist schon der Rechenstab. Nur dann, wenn der Rechenstab für $(n-1)\cdot p$ einen Wert in unmittelbarer Nähe einer ganzen Zahl anzeigt, macht sich die Verwendung eines Näherungswertes für p mit größerer Stellenzahl notwendig.

Erstmals für $n=8$ ist $m>0$.

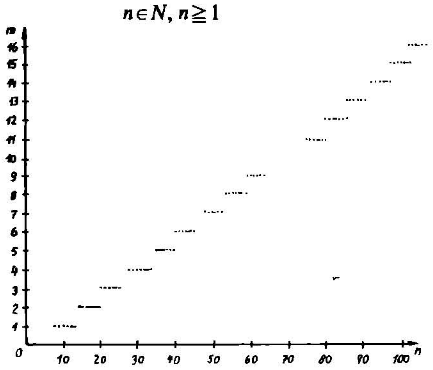
Wenn man für jedes n das zugehörige m ausrechnet, bemerkt man, daß n jeweils um 6 oder 7 vergrößert werden muß, damit sich m um 1 erhöht. In der folgenden Werttabelle



$d = \frac{a}{n}$

Bild 3

Bild 4
$m=[0{,}154700538(n-1)]$
$n \in N, n \geq 1$



sind nur die Zahlen n aufgeführt, bei denen sich m im Vergleich zum der Zahl $n-1$ zugeordneten Wert ändert. (Ausführlicher ist der Zusammenhang zwischen m und n in Bild 4 dargestellt.)

$m=[(n-1)\cdot p]$ $\qquad p=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3)$

n	m	%	n	m	%
8	1	83,45	73	11	89,9
14	2	86,55	79	12	89,9
21	3	87,62	86	13	89,9
27	4	88,56	92	14	90,0
34	5	88,8	98	15	90,1
40	6	89,19	105	16	90,08
47	7	89,28	111	17	90,17
53	8	89,56	...	...	...
60	9	89,58	1003	155	90,63
66	10	89,75	...	...	...

Die Tabelle gibt auch Auskunft über den jeweiligen Anteil der von den Kreisen abgedeckten Fläche an der Gesamtfläche des Quadrats. Laut Tabelle wächst dieser Anteil. Ist dieses Wachsen gesetzmäßig? Gibt es eine Grenze für dieses Wachstum?

Ist $m+n$ eine gerade Zahl, so gibt es genau $\frac{m+n}{2}$ Lagen mit je n Kreisen und $\frac{m+n}{2}$ Lagen mit je $n-1$ Kreisen, insgesamt also $\frac{m+n}{2}(2n-1)$ Kreise mit Durchmesser $d=\frac{a}{n}$. Das Verhältnis V_n der Gesamtfläche dieser Kreise zur Fläche des Quadrats ist

$$V_n=\frac{\frac{n+m}{2}(2n-1)\cdot\frac{\pi}{4}d^2}{(nd)^2}=\frac{(n+m)(2n-1)}{n^2}\cdot\frac{\pi}{8}$$

▲5▲ Berechne V_n für den Fall, daß $m+n$ eine ungerade Zahl ist!

Wir überlegen nun, welche Werte das Verhältnis V_n annimmt, wenn n immer größer wird. Zunächst läßt sich dann $m=[(n-1)\cdot p]$ näherungsweise durch $(n-1)\cdot p$ ersetzen (der Unterschied von höchstens 1 fällt nicht mehr ins Gewicht).

Wir erhalten für gerade Werte von $m+n$:

$$V_n=\frac{[n+(n-1)p](2n-1)}{n^2}\cdot\frac{\pi}{8}$$
$$=\left(2+2p+\frac{3p}{n}-\frac{1}{n}+\frac{p}{n^2}\right)\cdot\frac{\pi}{8}$$

Für wachsendes n kommen die Werte der Terme $\frac{3p}{n}$, $\frac{1}{n}$ und $\frac{p}{n^2}$ immer mehr der 0 nahe, so daß sich V_n dem Wert

$$\frac{\pi}{8}(2+2p)=\frac{\pi}{4}(1+p)\approx 0{,}9069$$

nähert. (Die letzten Überlegungen werden euch in Klasse 11 in exakterer Form wiederbegegnen.)

▲6▲ Welchem Wert nähert sich V_n mit wachsendem n, wenn für $m+n$ nur ungerade Zahlen in Frage kommen?

Aus der Folge der Verhältnisse V_n haben wir zwei Teilfolgen ausgewählt:
1. Die Folge der V_n, für die $m+n$ gerade ist.
2. Die Folge der V_n, für die $m+n$ ungerade ist.

Da für jede natürliche Zahl n das Verhältnis V_n entweder zur 1. oder 2. Teilfolge gehört und beide Teilfolgen sich mit wachsendem n demselben Wert („Grenzwert") $\frac{\pi}{4}(1+p)$ nähern, hat auch die gesamte Folge der Verhältnisse V_n den Grenzwert $\frac{\pi}{4}\cdot(1+p)$. (Man schreibt dafür auch $\lim\limits_{n\to\infty} V_n=\frac{\pi}{4}(1+p)$.)

Wenn wir – unter Beachtung der Anordnung II – die Kreise immer kleiner machen (und damit ihre Anzahl erhöhen), schaffen wir es trotzdem nie, das gesamte Quadrat zu überdecken. Der Anteil der von den Kreisen überdeckten Fläche an der Gesamtfläche des Quadrats nähert sich lediglich 90,69%.

Abschließend muß bemerkt werden, daß die hier behandelten Abdeckungen des Quadrats durch zueinander kongruente Kreise sehr speziell sind, da wir uns ja immer an Anordnung I oder Anordnung II gehalten haben. Man kann sich noch viele andere Anordnungen ausdenken und diese untersuchen.

W. Zehrer

Internationaler Mathematiker-kongreß 1978

Die Tradition dieser internationalen Kongresse ist vergleichbar mit den Olympischen Spielen der Neuzeit; der 1. Mathematiker-Kongreß wurde 1897 veranstaltet, die 1. Olympiade 1896. Die Kongresse fanden dann regelmäßig aller vier Jahre statt, jedoch wurde diese Folge durch die beiden Weltkriege unterbrochen. Die Mathematiker-Kongresse werden von der *Internationalen Mathematiker-Union* veranstaltet; diese legt dafür wechselnde Tagungsorte fest (darunter 1966 Moskau, 1970 Nice/Frankreich, 1974 Vancouver/Kanada, 1978 Helsinki). Für das Jahr 1982 ist Warschau vorgesehen.

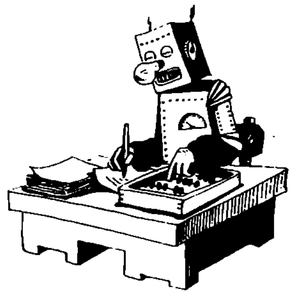
Die finnische Hauptstadt beherbergte die rund 3000 Kongreß-Teilnehmer vom 15. bis 23. August 1978. Der Kongreß wurde in der großen Finlandia-Halle eröffnet, in der 1975 die Abschlußberatung der Helsinki-Konferenz stattfand. Die Plenartagungen des Kongresses waren auch in dieser Halle; für die Beratungen in den Arbeitskreisen standen Räume in den Gebäuden der Universität Helsinki zur Verfügung. Eine wertvolle Informationsquelle war die Buchausstellung zur Mathematikliteratur, an der führende Verlage aus aller Welt beteiligt waren.

Wie verlief ein Tag eines Kongreßteilnehmers? Aus einer Broschüre mit einer zeitlichen Übersicht aller Vorträge und Veranstaltungen, ferner aus Mitteilungen über Gesprächsrunden im kleineren Kreis konnte jeder Teilnehmer im voraus auswählen und das Programm für diesen Tag selbst zusammenstellen. Vorteilhaft war es, daß nach jedem Vortrag Zeit für Anfragen und Begegnungen mit anderen Teilnehmern vorgesehen war, auch Kontakte zum Referenten konnten geknüpft werden. Zum Teil wurden an die Teilnehmer Arbeitstexte und Kurzinformationen verteilt. Gerade diese persönlichen Kontakte waren eine wertvolle Ergänzung für jeden Teilnehmer.

Jeder Leser sollte aber wissen, falls er in der Mathematik zu wissenschaftlicher Arbeit vordringen will, daß er dazu auch mindestens zwei Weltsprachen gut beherrschen sollte, um sein Anliegen bei Gesprächsrunden und bei der allgemeinen Diskussion vorbringen zu können.

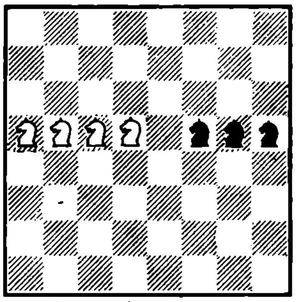
Aus: „rozhledy" 1/79, Prag
(Übersetzt von O. Langer, Döbeln)

In freien Stunden alpha heiter



Über die Donau

In der eingezeichneten Position versetze man die weißen Springer senkrecht auf e, f, g, h und die schwarzen auf a, b, c, und zwar nicht unbedingt in dieser Reihenfolge, bloß dürfen sie nicht wieder zurückversetzt werden (die weißen nach links, die schwarzen nach rechts). Außerdem darf bei den Zügen auf jeder Linie nur ein Springer stehen.
(Diese Aufgabe stammt von dem bekannten englischen Quizmeister *S. Lloyd* [1841 bis 1911]. Er schrieb, daß sich viele seiner Freunde vergebens den Kopf zerbrachen, wie sie „über die Donau" [die Linie „e"] setzen sollen.)



Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben bilde man 8 Wörter, deren erste Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen eines Rechenmeisters nennen.
a – ar – chi – del – des – eck – ex – in – ion – kat – ke – kel – me – me – mul – nen – nent – pli – po – recht – rith – strek – ta – ti – tik – win.

1. Teilgebiet der Mathematik;
2. griechischer Buchstabe;
3. Mathematiker des Altertums (um 287 bis 212 v. u. Z.);
4. Rechenoperation;
5. Fläche, bei dem je 2 gegenüberliegende Seiten gleichlang (und parallel) sind;
6. ihre Summe beträgt bei jedem Dreieck 180°;
7. Teil einer Potenz;
8. durch Punkte begrenzte Gerade.

K. Hacker, 31. OS Dresden (Kl. 8)

Eineindeutige Abbildungen

Gegeben sind die Mengen
$M_1 = \{D, I, O, P, H, A, N, T, X\}$ und
$M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
sowie die Gleichungssysteme I und II.

Gleichungssystem I:	Gleichungssystem II:
(1) $D-\frac{D}{x}=D\cdot\frac{D}{x}$	(1) $D+\frac{D}{x}=D\cdot\frac{D}{x}$
(2) $I-\frac{I}{D}=I\cdot\frac{I}{D}$	(2) $I+\frac{I}{D}=I\cdot\frac{I}{D}$
(3) $O-\frac{O}{I}=O\cdot\frac{O}{I}$	(3) $O+\frac{O}{I}=O\cdot\frac{O}{I}$
(4) $P-\frac{P}{O}=P\cdot\frac{P}{O}$	(4) $P+\frac{P}{O}=P\cdot\frac{P}{O}$
(5) $H-\frac{H}{P}=H\cdot\frac{H}{P}$	(5) $H+\frac{H}{P}=H\cdot\frac{H}{P}$
(6) $A-\frac{A}{H}=A\cdot\frac{A}{H}$	(6) $A+\frac{A}{H}=A\cdot\frac{A}{H}$
(7) $N-\frac{N}{A}=N\cdot\frac{N}{A}$	(7) $N+\frac{N}{A}=N\cdot\frac{N}{A}$
(8) $T-\frac{T}{N}=T\cdot\frac{T}{N}$	(8) $T+\frac{T}{N}=T\cdot\frac{T}{N}$

Aufgabe 1: Bilde die Mengen M_1 und M_2 eineindeutig aufeinander ab, so daß sämtliche Gleichungen des Systems *I* zu wahren Aussagen werden!
Aufgabe 2: Bilde die Mengen M_1 und M_2 eineindeutig aufeinander ab, so daß sämtliche Gleichungen des Systems II zu wahren Aussagen werden!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Unsere Fibel

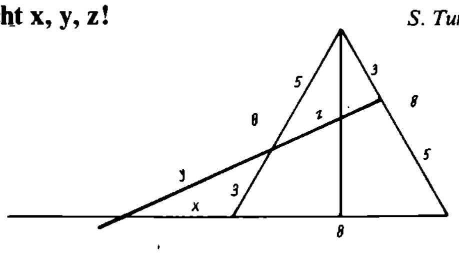
Beim „Durchkramen" seines Bücherschrankes fällt dem pfiffigen Schüler Hans-Jürgen „Unsere Fibel" in die Hände. Er durchblättert sie bedächtig, und als er die nachfolgenden Worte aufmerksam betrachtet hat, fällt ihm eine Gesetzmäßigkeit auf.
Welche?

1. HEXE	6. HOI
2. EHE	7. ECHO
3. MIAU	8. OTTO
4. BEBE	9. MOTTO
5. OMA	10. TOTO

E. Schmidt, Potsdam

Gesucht x, y, z!

S. Tunn, Berlin

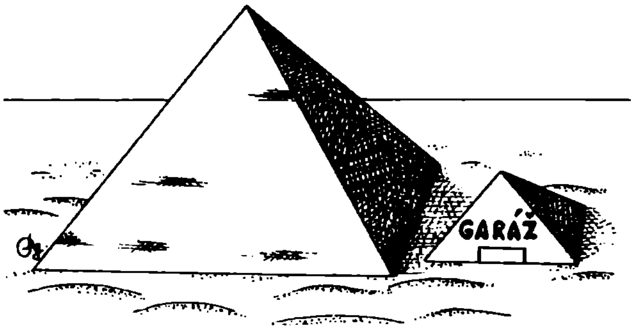


Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern. Es ist die kleinste und größte Summe zu finden.

(1)		(2)
	ALT	ROM
	WIE	PRAHA
	EIN	MOSKAU
	BAUM	EUROPA

Jarmila Pěnčiková, Jindřich Pěnčik, Prag



Peter Gassányi, Budapest

Das sagt man so

In der untenstehenden Leiste sind Redensarten bildlich dargestellt. Wie lauten sie?

Zusammengestellt aus der NBI

Bitte anrufen!

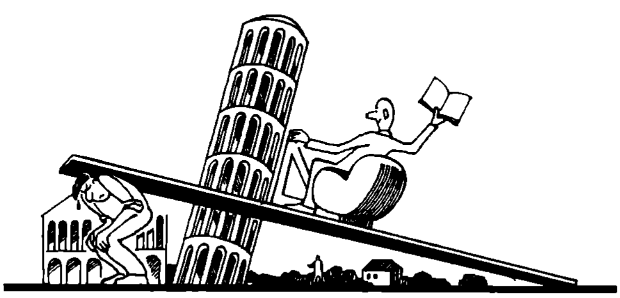
Ein Freund hat zu Hause ein neues Telefon bekommen. Ich frage ihn nach der Nummer.

„Schreib auf", sagt er, diktiert mir aber statt der Rufnummer folgendes:

1. Sie ist fünfstellig und enthält keine Null;
2. die kleinste gerade Zahl steht links von der ihrem absoluten Wert nach mittleren geraden Zahl;
3. die größte ungerade Zahl steht links von einer beliebigen geraden Zahl;
4. die Differenz zwischen den ungeraden Zahlen ist größer als die kleinste gerade;
5. die ihrem absoluten Wert nach mittlere gerade Zahl ist kleiner als die kleinste ungerade;
6. die Nummer hat weniger ungerade als gerade Zahlen;
7. die kleinste ungerade Zahl steht rechts von einer beliebigen geraden Zahl;
8. die größte gerade Zahl steht rechts von der ihrem absoluten Wert nach mittleren geraden und
9. die kleinste ungerade ist kleiner als die größte gerade Zahl.

Welche Rufnummer hat mein Freund?

Aus: Sputnik, Moskau



Peter Dittrich, aus: „Eulenspiegel"

Im Gespräch mit einem Automaten

Wer denkt bei dieser Überschrift nicht an einen Film, dessen Handlung in ferner Zukunft spielt, malt sich nicht Abenteuer aus, von denen er sicher zu wissen glaubt, daß sie ja nie Wirklichkeit werden können? Und doch ist nicht alles davon Zukunftsvision. Manche technische Entwicklung, die vor wenigen Jahrzehnten noch Utopie zu sein schien, ist inzwischen Wirklichkeit geworden.

Wir wollen nicht phantasieren, sondern entdecken, wie das „Gespräch mit einem Automaten" bereits zur Realität wurde, daß also aus Zukünftigem bereits Gegenwart geworden ist. Wir können mehr und vor allem Genaueres erfahren, wenn wir Gelegenheit zu einem kleinen Einblick in die Elektronische Datenverarbeitung – oder wie viele kurz sagen – in die EDV nehmen.

Diesen Einblick kann uns am anschaulichsten ein Besuch in einem Rechenzentrum vermitteln. Aber sicher haben nur wenige die Gelegenheit zu einer solchen Besichtigung. Außerdem könnte die Fülle der Eindrücke dazu führen, daß Wesentliches übersehen und Nebensächliches mißverstanden wird. So wollen wir versuchen, zunächst das Wichtigste und Interessanteste vorzustellen.

Wer einmal im Rahmen der „wissenschaftlich-praktischen Arbeit" oder während seines Studiums die Möglichkeit zur Arbeit mit den Mitteln der EDV erhält, wird dann vieles rascher verstehen.

Seit Jahren besteht an der jetzigen Technischen Hochschule Leipzig ein Rechenzentrum, das mit einer modernen, leistungsfähigen Rechenanlage ausgestattet ist. Diese technischen Möglichkeiten bieten den Studenten Gelegenheit zu praktischen Übungen an einer Elektronischen Datenverarbeitungsanlage (EDVA). Darüber hinaus ist an diesem Rechenzentrum ein großes Wissenschaftlerkollektiv tätig, zu dessen ständigen Aufgaben es gehört, neue Verfahren bei der Nutzung der modernen Rechentechnik zu entwickeln und zu erproben.

Um unseren anfänglich genannten Problemen näherzukommen, wollen wir uns mit einigen Grundzügen der Datenverarbeitung vertraut machen. Ein Beispiel aus unserer täglichen Umwelt soll das Verständnis erleichtern:

Wir wollen uns eine elektrische Registrierkasse vorstellen, wie wir sie in jeder Kaufhalle sehen können. Diese Kasse erspart der Kassiererin eine Menge Arbeit. Früher wurden alle Preise, die eine Kundin zu bezahlen hatte, notiert und der Gesamtpreis im Kopf ausgerechnet. Das erledigt jetzt die Maschine! Ihr muß mitgeteilt werden, welche einzelnen Preise sie verrechnen soll, d. h., durch die Kassiererin werden alle notwendigen Zahlen in die Maschine eingetastet – oder wie man auch sagen kann: *eingegeben.* Ebenfalls durch Bedienung der Tastatur wird die Maschine darüber informiert, welche Rechenoperationen sie mit den Zahlen ausführen soll. Das kann unterschiedlich sein: verschiedenartige Einzelpreise müssen summiert werden; kauft ein Kunde aber mehrere Stücke einer Ware, so kann der einzelne Preis mit der Stückzahl multipliziert werden und so fort. Ist das alles in die Kasse eingegeben worden, veranlaßt die Kassiererin durch Knopfdruck die *Berechnung* des zu zahlenden Gesamtpreises, der auf den Kassenbon gedruckt wird. Dieser Bon, den der Kunde mit sich nehmen kann, wird von der Registrierkasse *ausgegeben.* Für die Abrechnung nach Beendigung der Öffnungszeit wird zusätzlich eine besondere Liste benötigt, die alle Gesamtpreise, die bezahlt worden sind, und die Summe dieser eingenommenen Geldbeträge enthält.

Deshalb werden diese Zahlen von der Registrierkasse aufgehoben, d. h. auf einem Papierstreifen gespeichert. Manche Kassen, besonders in großen Kaufhäusern, *speichern* diese Zahlen auch magnetisch auf einem langen Band aus Folie. Solche Magnetbänder ähneln in ihrem Aufbau und ihrer Funktion einem Tonband.

Wenn wir uns dieses Beispiel genau vorstellen können, haben wir bereits vieles Wichtige von der Elektronischen Datenverarbeitung kennengelernt. Freilich spielt sich in einem Rechenzentrum alles in viel größeren Maßstäben ab: So werden sehr viel umfangreichere Zahlenmengen – oder wie man sagt – Datenmengen verarbeitet. Diese Verarbeitung muß sehr schnell durchgeführt werden, damit die Ergebnisse rechtzeitig verwendet werden können.

Die Rechnungen, die mit diesen Daten ausgeführt werden, sind oft sehr viel komplizierter.

Maschinen, die solche Berechnungen ausführen, sind größer, komplizierter, und ihre Bedienung erfordert vielseitige Kenntnisse, ihre Pflege obliegt speziell ausgebildeten Ingenieuren. Die Bewältigung derartig großer Zahlenmengen stellt besondere Anforderungen:

Der Rechenweg, der zu beschreiten ist, wird sehr lang. Meist besteht er aus einer langen Reihe von mathematischen Ausdrücken, die auf die Daten anzuwenden sind. Es würde viel zu lang dauern, wenn diese Formeln für jede Rechnung neu zusammengestellt und eingegeben werden müßten. Sie werden deshalb von Spezialisten – den Programmierern – für die notwendigen Rechnungen aus der mathematischen, technischen und ökonomischen Literatur herausgesucht und zusammengestellt. Sie werden dabei nach bestimmten Schreibregeln, die teilweise den herkömmlichen mathematischen Schreibweisen ähnlich sind, aufgeschrieben. Dazu kommen noch bestimmte Informationen, die die Reihenfolge der einzelnen Rechenschritte regeln. Alle diese Vorschriften müssen mit viel Mühe überprüft und erprobt werden.

Das Ergebnis einer solchen Arbeit bildet ein *Rechenprogramm.* Bei seiner Erarbeitung muß sich der Programmierer in Gedanken alle Besonderheiten vorstellen, die bei der späteren Anwendung des Programms auf-

Bild 1
Blick in den Rechnerraum der TH Leipzig mit einer ESER-Rechenanlage vom Typ EC 1022. Hier werden alle Programme gerechnet, die entweder Lochkarten verarbeiten oder durch Kabel mit den Geräten in dem in einem anderen Gebäude gelegenen Bildschirmraum verbunden sind.

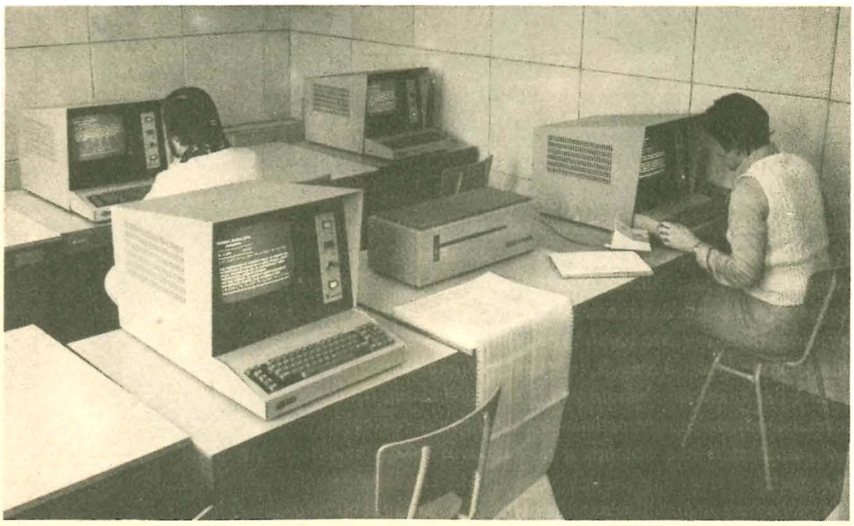
treten können. (So darf niemals eine Division durch Null auftreten! Läuft nämlich sein Programm und erreicht dabei einen Punkt, an dem eine Zahl als Divisor verwendet wird, für die eine Null eingegeben wurde, so wird die ganze Rechnung unbrauchbar, ohne daß er noch korrigierend eingreifen kann.)
Diese Programmierarbeiten, die erst abgeschlossen werden können, wenn ein Programm fehlerfrei ist, dauern oft viele Monate. Das mag manchem als sehr lange Zeit erscheinen. Dafür kann der Nutzen dann aber auch sehr groß sein, wenn ein solches fertiges Programm sehr oft angewendet wird und bei jeder Verwendung in kurzer Zeit Probleme löst, die ein geübter Rechner gar nicht oder nur in sehr langer Zeit bewältigen könnte. So gibt es z. B. im Bauwesen Probleme, die die Lösung von Gleichungssystemen mit vielen, vielen Unbekannten (100 oder mehr!) erfordern. Früher rechneten Ingenieure wochen- oder monatelang an solchen Systemen, heute kann man dieselbe Aufgabe mit dem Automaten eines Rechenzentrums in Stunden oder gar Minuten berechnen.
Für die tägliche Arbeit eines Rechenzentrums sind nun bestimmte Arbeitsregeln, bestimmte Technologien, entwickelt worden, die die Voraussetzung für eine möglichst rasche, kostengünstige und weitgehend fehlerfreie Arbeit bieten sollen.
Bevor eine bestimmte Rechnung ausgeführt werden soll, wird zunächst das betreffende Programm in die Rechenanlage eingegeben. Hierfür werden meist sogenannte Lochkarten verwendet. Das sind Kartonkarten genormter Größe, in denen nach bestimmten Regeln Lochungen angebracht werden. Aus diesen Lochungen kann die Rechenanlage alle Formeln, die sie realisieren soll, erkennen. Ein solches Programm besteht oft aus mehreren Hundert Lochkarten. Danach werden die Daten eingegeben, die oft ebenfalls auf Lochkarten stehen. Sind diese Eingaben abgeschlossen, so führt die Rechenanlage – der Automat – mit den Zahlen die gewünschten Rechnungen aus. Schließlich erfolgt die Ausgabe der Ergebnisse. Hierbei werden die berechneten Summen usw., Tabellen oder auch schriftliche Mitteilungen, die die Maschine ausgibt, von einem Druckgerät auf Papier in normaler Druckschrift bereitgestellt. Wenn wir uns an unser anfängliches Beispiel von der Registrierkasse erinnern, so entdecken wir wieder die drei wesentlichen Arbeitsgänge: Eingeben, Rechnen, Ausgeben. Die Anlagenteile für diese Arbeitsetappen können nun nicht mehr, wie bei einer Registrierkasse, innerhalb eines einzigen Maschinengehäuses untergebracht werden.
Für jeden dieser Arbeitsgänge besitzt eine EDVA besondere Geräte: Zur Eingabe der Lochkarten – sogenannte Lochkarten-Leser, für die Rechnung – die Zentrale Verarbeitungseinheit, für die Ausgabe – den Schnelldrucker.
Freilich, von all dem sieht der Kunde eines Rechenzentrums sehr wenig. Meist gibt er alles Notwendige (Lochkarten mit Daten und Programm) für die von ihm gewünschte Rechnung an einem Schalter ab. Dort kann er nach einiger Zeit wieder das Ergebnis entgegennehmen, mit dem er zufrieden oder manchmal auch unzufrieden ist. Denn hat er etwas bei der Vorbereitung einer Rechnung vielleicht übersehen, hat er sich geirrt, so hatte er früher fast keine Möglichkeit, während der laufenden Rechnung in die Arbeit der Rechenanlage einzugreifen.
Das war in manchen Fällen ein gewichtiger Nachteil. Deshalb ließ die Frage, ob man das nicht noch verbessern könne, vielen Wissenschaftlern keine Ruhe. Man suchte nach Wegen, wie man während einer laufenden Rechnung die Anlage nach dem Stand der Rechenoperationen befragen könne, wie sie darauf Antwort geben könne. Diese Antwort kann dann dem Kunden die Möglichkeit geben, unmittelbar die Weiterarbeit der EDVA zu steuern.
Man fand für diese Probleme Lösungen: Ihnen gab man den Namen „*Dialogarbeit*“, weil sich aus den Fragen des Kunden und den Antworten der Maschine ein Dialog, ein „Gespräch“ ergibt. Denken wir dabei daran, daß ein Gespräch nicht immer durch gesprochene Wörter erzeugt wird. Zwei Menschen können Briefe wechseln und so miteinander in Gedankenaustausch treten. So wollen wir das „Gespräch“ verstanden wissen: Mensch und Maschine führen ein Gespräch durch den Austausch geschriebener Texte. Das geschieht meist so, daß der Mensch seine Anfrage über eine Schreibmaschinentastatur in die Rechenanlage eingibt und die Maschine durch die Ausgabe gedruckter Sätze antwortet. (Übrigens, es wird bereits daran gearbeitet, daß sich Mensch und Maschine akustisch verständigen – aber wir wollen ja in der Gegenwart bleiben!).
Sehen wir uns die Dialogarbeit an, wie sie im Rechenzentrum der Technischen Hochschule Leipzig bereits durchgeführt wird.

Für diese Arbeit stehen den Mitarbeitern und Studenten 5 ungarische Bildschirmgeräte, die in einem separaten Raum installiert sind, zur Verfügung. Sie bestehen aus einer, vom Fernsehen her bekannten Bildröhre und dazugehörig einer Schreibmaschinentastatur. Über Steuer- und Anschlußgeräte sowie eine Telefonleitung sind diese Bildschirmgeräte mit der schon genannten Rechenanlage EC 1022 (siehe Bild 1) verbunden. Erst diese Verbindung ermöglicht eine Nutzung der für den Rechner zugänglichen Programme und Daten.

Ein von Wissenschaftlern entwickeltes System regelt den Fluß der Mitteilungen, die von dem Rechner zum Bildschirm kommen und denen, die ein Nutzer an den Rechner schicken will. Alle diese gesendeten Informationen werden als geschriebener Text auf dem Bildschirm sichtbar.

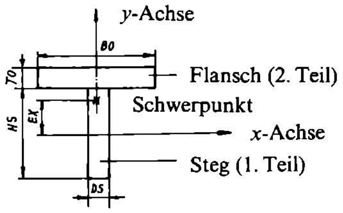
Ein einfaches *Beispiel* soll dies jetzt näher zeigen:
Studenten haben zur Wiederholung vor einer Prüfung nachfolgende Übungsaufgabe (1. Abschnitt einer größeren Berechnung) erhalten. Jeder einzelne muß mit anderen Maßangaben rechnen. Die Überprüfung der Resultate kann dann jeder Student selbständig mit Hilfe des Bildschirmdialogs durchführen. Damit dieser Dialog überhaupt möglich wird, mußte vorher einmal ein Mitarbeiter diese Aufgabe für den Rechner aufbereiten und programmieren. Dieser Aufwand ist aber vergleichsweise gering, wenn man bedenkt, daß so ein Programm dann beliebig oft genutzt werden kann.

Bild 2
Innenansicht des Bildschirmraumes der TH Leipzig; hier stehen die Dialoggeräte, die mit der ESER-Anlage im Rechnerraum durch Kabel verbunden sind.



Aufgaben

Gegeben sei der folgende T-Querschnitt



Gesucht seien der Flächeninhalt F, der Abstand des Schwerpunktes von der X-Achse EX und die Trägheitsmomente IX und IY.

Der Student begibt sich nach der Errechnung der Ergebnisse an einen Bildschirm. Dort startet er das Programm, und dann erfolgen zeilenweise nacheinander Ausgaben und Anforderungen an ihn, im Dialog gekennzeichnet durch „MASCHINE“ und entsprechende Reaktionen von ihm, gekennzeichnet durch „MENSCH“.

Dialog:

MENSCH — *START AUFGABE QUERSCHNITT*
MASCHINE — BERECHNUNG VON QUERSCHNITTS-WERTEN
WERTE GEMÄSS AUFGABENSTELLUNG
TEILEANZAHL
MENSCH — *2*
MASCHINE — STEGDICKE DS [CM]
MENSCH — *1.1*
MASCHINE — STEGHÖHE HS [CM]
MENSCH — *19.0*
MASCHINE — FLANSCH OBEN
DICKE TO [CM]
BREITE BO [CM]
MENSCH — *1.4 20.5*

Die speziellen Ausgangswerte der Aufgabe stehen nun dem Rechner zur Verfügung, und in Bruchteilen von Sekunden werden die Ergebnisse berechnet. Der Student wird nun aufgefordert, seine zu Hause errechneten Resultate dem Rechner mitzuteilen und erhält jeweils eine Aussage über die Richtigkeit seiner Ergebnisse. Bei falschem Ergebnis wird ihm zur Unterstützung bei einer erneuten Berechnung eine Hilfsinformation gegeben.

MASCHINE — TEILEN SIE JETZT IHRE ERGEBNISSE MIT
FLÄCHE F
[CM**2]
MENSCH — *52.6*
MASCHINE — ERGEBNIS IST FALSCH
HILFSINFORMATION:
F = DS * HS + TO * BO
MENSCH — *49.6*
MASCHINE — ERGEBNIS IST JETZT FEHLERFREI
SCHWERPUNKT-KOORDINATE EX [CM]
MENSCH — *5.9*
MASCHINE — ERGEBNIS IST FEHLERFREI
TRÄGHEITSMOMENTE
IX [CM**4]
IY [CM**4]
MENSCH — *1892 1004*
MASCHINE — 2. WERT IST UNGENAU
MENSCH — *1892 1007*
MASCHINE — ERGEBNISSE SIND JETZT FEHLERFREI
ENDE DER AUFGABE QUERSCHNITT

Dieser Dialog zeigt deutlich, daß das Schema Eingabe–Rechnung–Ausgabe durch ein ständiges *Wechselspiel* zwischen Eingaben, Ausgaben und Berechnungen ersetzt wird.

Wie man sich denken kann, ist diese Arbeitsweise sehr vielfältig zu variieren und einzusetzen. An der TH Leipzig wird sie zunehmend genutzt, sei es zur Bemessung von Bauteilen (Stockwerkrahmen, Spannbetonquerschnitten), zur Lösung von Gleichungssystemen, Projektierung von Elektroenergiesystemen oder um aus großen Datenbeständen, die auf Magnetbändern oder -platten gespeichert sind, Informationen herauszulesen – etwa vergleichbar mit dem Blättern in einem Buche – bzw. um solche Daten zu ändern. So werden zum Beispiel sämtliche Zensuren aller Studenten in Speicher eingetragen und aufbewahrt, um im Bedarfsfalle über die Bildschirmgeräte abgefragt werden zu können. Erstmals wurden auch Studenten im Studienjahr 77/78 mit der Bildschirmarbeit vertraut gemacht. Bei ihrer späteren Tätigkeit wird das für sie von Nutzen sein, da die Entwicklungen dahingehen, daß immer mehr Betriebe und Institutionen unmittelbaren Dialogkontakt mit Großrechenzentren haben werden.

Diese Form der Ausbildung ist modern und auf die Zukunft gerichtet.

Autorenkollektiv der TH Leipzig

Aus: „Eulenspiegel“

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Preisträger

Einen ersten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Andreas Goede (1), General-Walter-EOS, Strausberg; Jürgen Gräfenstein (2), EOS Martin-Andersen-Nexö, Spezialschule f. Elektron. Industrie, Dresden; Axel Schüler (3), Gerh.-Eisler-EOS Kleinmachnow (Kl. 8); Detlef Horbach (4), EOS Friedrich Engels, Karl-Marx-Stadt

In Olympiadeklasse 12: Stefan Schuster (5), EOS Ernst Schneller, Meißen; Steffen Zopf (6), EOS Karl Marx, Leipzig (Kl. 11); Lutz Dietrich (7), TH Karl-Marx-Stadt, Spezialkl. Math. (Kl. 11)

1

2

3

4

5

6

7

Einen zweiten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Jens Heinrich, Goethe-Schule, Jüterbog; Michael Giesecke, Spezialschule f. Elektron. Industrie, Dresden; Steffen Grünewald, EOS Kleinmachnow; Marid Helbig, Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder); Jens Franke, 15. OS Rudolf Scheffel, Gera (Kl. 8); Bernd Kirchheim, EOS F. Schiller, Weimar (Kl. 9); Gabriele Drauschke, EOS Clara Zetkin, Neustrelitz; Ralf Hartig, 13. OS Cottbus (Kl. 9); Stefan Thäter, EOS F. Schiller, Weimar; Norbert Münch, Goethe-EOS, Bad Doberan

In Olympiadeklasse 11/12: Andreas Kasparek, Spezialkl. der Martin-Luther-Universität Halle; Uwe Szyska, EOS Friedrich Engels, Neubrandenburg; Tilo Brock, BBS BMK Leipzig Süd; Frank Eisenhaber, Spezialschule Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin; Axel Fröhlich, Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder) (Kl. 11); Frank Erdmann, Spezialkl. der Martin-Luther-Universität Halle (Kl. 11); Matthias Gelbrich, EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 11)

25 Schüler erhielten einen dritten Preis, 30 Schüler eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen. Ein Diplom für eine besonders elegante Lösung der Aufgabe 1, Klassenstufe 10, erhielt Norbert Koksch, EOS B. Brecht, Dresden.

An der XVIII. OJM nahmen 183 Schüler, davon 28 Mädchen, teil. 33 Schüler waren „Frühstarter", d. h. starteten in einer höheren Klassenstufe.

Aufgaben

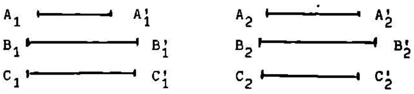
Olympiadeklasse 10

1. Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x, die die Gleichung

$$\log_{13}[\log_{12}(\log_{11} x)] = 1$$

erfüllt?

2. In einer Ebene ε seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte die 6 Strecken $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ gegeben (siehe Arbeitsblatt).



Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_1 = \overline{A_1A'_1}$, $b_1 = \overline{B_1B'_1}$, $c_1 = \overline{C_1C'_1}$ hat; mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_2 = \overline{A_2A'_2}$, $b_2 = \overline{B_2B'_2}$, $c_2 = \overline{C_2C'_2}$ hat.

a) Beschreiben Sie eine in ε durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (*)!

$$(*)\quad \begin{cases} \text{Falls } \overline{P_2Q_1} < \overline{P_2Q_2} \text{ ist, gilt } V_1 < V_2; \\ \text{falls } \overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2} \text{ ist, gilt } V_1 = V_2; \\ \text{falls } \overline{P_1Q_1} > \overline{P_2Q_2} \text{ ist, gilt } V_1 > V_2. \end{cases}$$

(Zur Konstruktion dürfen wie üblich nur Zirkel, Lineal und Zeichendreieck verwendet werden.)

Daß P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (*) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.

b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A'_1$, ..., $C_2C'_2$ auf dem Arbeitsblatt auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

3A. Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.

Man beweise, daß f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g.

3B. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist.

4. Man beweise: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

a) $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ und b) $\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$.

5. Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die

$$2^n + 12^2 = z^2 - 3^2 \text{ gilt!}$$

6. Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.

Beweisen Sie, daß auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!

Die Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in Heft 5/79 veröffentlicht.

Jugendhochschule *Wilhelm Pieck*, Berlin-Bogensee, Gastgeber der OJM

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade) Aufgaben

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): Ende September

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1979 veröffentlicht.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

1. (Eine historische Aufgabe, 2000 Jahre v. d. Z.)
In einem Käfig sind Kaninchen und Fasane eingesperrt. Diese Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 104 Füße.
Nenne die Anzahl aller Kaninchen und die Anzahl aller Fasane, die in dem Käfig sind!

2. In die sieben leeren Felder des folgenden Bildes sind Zahlen derart einzutragen, daß alle vier waagerechten und alle vier senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{} & - & \boxed{2} & + & \boxed{0} & = & \boxed{} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{} & + & \boxed{} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

3. Kurt, Peter und Konrad sind jeweils in genau einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Mathematik“, „Biologie“, „Zeichnen“. Ferner ist bekannt:
(1) Peter geht häufiger zum Schwimmen als der Junge aus der AG „Mathematik“.
(2) Der Junge aus der AG „Mathematik“ und Konrad haben nicht gleich viele Urkunden bei einem Sportwettkampf erhalten.
(3) Peter geht in eine niedrigere Klasse als der Junge aus der AG „Biologie“.
Welcher der drei Jungen besucht die AG „Mathematik“, welcher die AG „Biologie“ und welcher die AG „Zeichnen“?

4. Wie viele Streichhölzer würden sich insgesamt in einem hohlen Würfel unterbringen lassen, dessen Kantenlänge, innen im Hohlraum gemessen, 1 m beträgt?
Wir wollen dabei annehmen, daß jedes Streichholz genau 5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch ist. Die Verdickung am Streichholzkopf und andere Unregelmäßigkeiten sollen bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

Olympiadeklasse 6

1. Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt
für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ Stunde,
für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ Stunde,
für den dritten Bus 36 Minuten und
für den vierten Bus 1 Stunde.
Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab? Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

2. Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so daß folgendes gilt:
Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl, die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl, die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl, die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.
Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

3. In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, daß sie mit Sicherheit erreicht, daß sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden. Sie meint: „Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen.“
Birgit meint: „Es genügen sogar 13 Kugeln.“
Cornelia behauptet: „Es genügen dafür 12 Kugeln.“
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

4. Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser drei Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:
„Dieter erhielt keinen ersten Preis.“ (1)
„Karin erhielt keinen zweiten Preis.“ (2)
„Frank erhielt einen zweiten Preis.“ (3)
Später stellte sich heraus, daß von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.
Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Olympiadeklasse 7

1. Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus. Es werde vorausgesetzt, daß von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).
Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

2. Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15
teilbar zu sein!

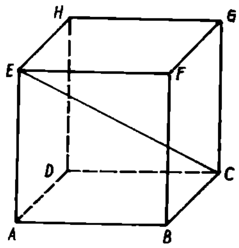
3. Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.
Beweise hierfür die folgende Aussage:
Wenn $\overline{\sphericalangle CAB} = 22{,}5°$ ist, dann gilt
$\overline{\sphericalangle ADE} = \overline{\sphericalangle CDB}$.

4. Sechs Schüler halfen bei der Obsternte; sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:
(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.
(2) Konrad spendete mehr als Peter.
(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.

(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.
(5) Helga spendete 2 M weniger als Frank. Peter 2 M mehr als Inge.
(6) Alle spendeten volle Markbeträge.
Wieviel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

Olympiadeklasse 8

1. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, daß die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrißtafel und senkrecht zur Aufrißtafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen.
Beschreibung und Begründung der Konstruktion sind nicht erforderlich.



2. Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!
Dabei werde
a) vorausgesetzt, daß die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,
b) vorausgesetzt, daß die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

3. Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

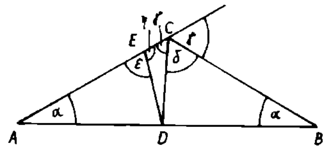
$$p=0,\overline{3456}\ldots,\quad r=0,34\overline{56}\ldots,$$
$$q=0,3\overline{456}\ldots,\quad s=0,345\overline{6}\ldots$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt:
In der n-ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.
b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt:
In der m-ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

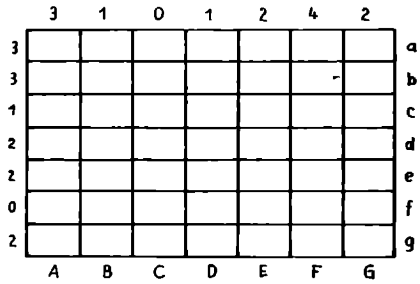
4. Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, daß sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t. Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R. Der Schnittpunkt von s mit t sei S.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!

Olympiadeklasse 9

1. In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\sphericalangle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, daß gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und ϕ in Abhängigkeit von δ!



2. Von den 49 Feldern des Bildes sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte des Bildes sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.



Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!
(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z. B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

3. Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen 1, ..., n zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden:
Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.
Beweisen Sie, daß eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

4. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!
In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Daß bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

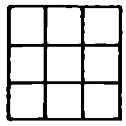
Olympiadeklasse 10

1. Jens zeichnet auf ein Zeichenblatt ein Quadrat von der Seitenlänge 2 cm. Dirk soll vier möglichst kleine, einander kongruente Kreise aus Papier ausschneiden und so auf das Zeichenblatt legen, daß kein Punkt der Quadratfläche mehr sichtbar ist.
Wie groß muß Dirk den Radius der vier Kreise wählen, um diese Forderungen zu erfüllen?

2. Es seien b und c von 0 verschiedene natürliche Zahlen und a eine Primzahl. Ferner gelte für sie die Gleichung $a^2+b^2=c^2$.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $a<b$ und $b+1=c$ gilt!

3. Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $-1\leqq x\leqq 1$, für die der Term x^2+3x+4 das Quadrat einer natürlichen Zahl ergibt.

4. In die neun Felder des Bildes sollen die Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt und daß in jeder Spalte und jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe auftritt.
Ermitteln Sie die größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen dieser Art! Dabei werden zwei Eintragungen genau dann als kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.



Olympiadeklasse 11/12

1. Es sei (bezüglich eines kartesischen x, y-Koordinatensystems) p die Parabel mit $y=x^2$ als Gleichung.
a) Man beweise: Durch den Punkt (0; 1) gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.
b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c\geqq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt (0; c) gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

2. Für zwei Länder, „Normalland" und „Spiegelland", und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:
(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y ist.
(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B, aber keine zwischen A' und B',
oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B', aber keine zwischen A und B.
(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q, die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, daß man wenigstens zweimal umsteigen muß, um von P nach Q zu gelangen.
Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

3. Von einem Dreieck werde gefordert, daß sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.
Man beweise, daß diese Forderung erfüllbar ist und daß durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

4. a) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$7x+100y=0 \qquad (1)$$
$$0{,}069x+\quad y=0{,}3 \qquad (2)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung (x_0, y_0) hat, und ermitteln Sie diese!
Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x „innerhalb einer gegebenen δ-Umgebung von 0,069 verändert", d. h. für gegebenes reelles $\delta>0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \leqq h \leqq \delta \qquad (3)$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$7x+100y=0 \qquad (1)$$
$$(0{,}069+h)x+\quad y=0{,}3 \qquad (4)$$

betrachtet. Man möchte erreichen, daß sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 „um höchstens 1% ändern kann". Damit ist die unten folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.
Zunächst wird definiert:
Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta>0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta=\frac{|x_0-x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit η_{max} („bezüglich (3) maximaler relativer Fehler" von x) bezeichnet.
b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta>0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler η_{max} existiert!
c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{max}\leqq 0{,}01$ gilt!

Lösungen

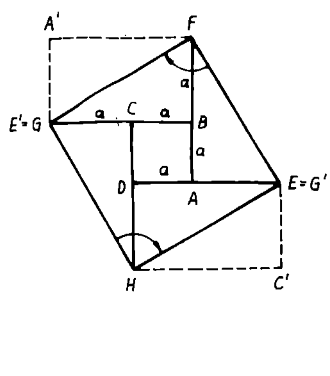
Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/79

Ma 5 ■1823 Da an Stelle der Sternchen nur Ziffern für gerade Zahlen stehen dürfen, beginnt der Minuend mit der Ziffer 2. Aus $2000-1114=886$ folgt, daß der Subtrahend gleich oder größer als 886 ist. Es existieren genau zwei Lösungen; sie lauten $2000-886=1114$ und $2002-888=1114$. Bei den dreistelligen Subtrahenden, die gleich oder größer als 890 sind, tritt entweder an der zweiten oder an der ersten Stelle des Minuenden eine Ziffer für eine ungerade Zahl auf.

Ma 5 ■1824 Wenn durchnumerierte Eintrittskarten von der Nummer a bis zur Nummer b verkauft werden, so sind das $(b-a+1)$ Eintrittskarten. Daraus folgt:
An der Kasse A wurden $498-1+1=498$, an der Kasse B wurden $1999-1247+1=753$, an der Kasse C wurden $n-3000+1=n-2999$ Eintrittskarten verkauft. Nun gilt
$498+753+n-2999=1978$, also $n=3726$.
Auf der zuletzt verkauften Karte stand die Nummer 3726.

Ma 5 ■1825 Preis der Hose: 20,50 M : 2 = 10,25 M.
Preis des Kleides: 3 · 10,25 M = 30,75 M.
Preis der Schürze: 40,25 M − 30,75 M = 9,50 M.

Ma 5 ■1826 Drehen wir das rechtwinklige Dreieck AEF um F als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinn um 90°, so fällt das Bild E' von E mit G zusammen, und wir erhalten das Rechteck $E'BFA'$. Drehen wir das rechtwinklige Dreieck CGH um H als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinn um 90°, so fällt das Bild G' von G mit E zusammen, und wir erhalten das Rechteck $HC'ED$.
Der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ setzt sich somit zusammen aus der Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $E'BFA'$ und



$HC'ED$ und des Quadrats $ABCD$. Deshalb gilt
$A_{EFGH}=2\cdot a\cdot 2a+a^2=4a^2+a^2=5a^2$,
$A_{ABCD}=a^2$.
Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ist somit fünfmal im Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ enthalten.

Ma 5 ■1827 Aus $abb-agd=eb$ folgt $d=0$,
aus $ag0-f=aef$ folgt $f=5$,
aus $abb+c0=e5b$ folgt $e=a+1$,
aus $e5b+ae5=51a$ und $e=a+1$ folgt $a=2$ und $e=3$,
aus $3b\cdot hk=512$ folgt $h=1$,
aus $35b+235=512$ folgt $b=7$,
aus $37\cdot 1k=512$ folgt $k=6$ und $l=9$,
aus $277-2g0=37$ folgt $g=4$,
aus $c0:5=16$ folgt $c=8$.
Ergebnis:

$$\begin{array}{ccccc} 277 & + & 80 & = & 357 \\ - & & : & & + \\ 240 & - & 5 & = & 235 \\ \hline 37 & \cdot & 16 & = & 592 \end{array}$$

Ma 5 ■1828 Die Zahl des erreichten Lebensalters des Lehrers läßt sich durch $z=3\cdot 10+y$ darstellen. Nun gilt

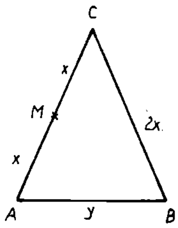
$$3\cdot 10+y=10\cdot y+3+9,$$
$$9y=18, \text{ also } y=2.$$

Im Jahre 1978 ist der Lehrer 32 Jahre alt geworden; er wurde somit im Jahre 1946 geboren.

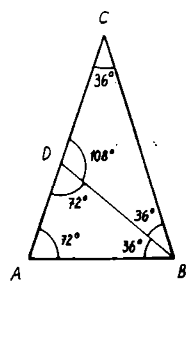
Ma 6 ■1829 Aus (2) folgt $c=1$; aus (3) folgt $d=0$. Nach (1) gilt dann $\overline{aa}\cdot\overline{b}=110=55\cdot 2=22\cdot 5$. Daraus folgt $a=5$ und $b=2$ oder $a=2$ und $b=5$. Demnach gilt

$$x=5+2+1+0=8.$$

Ma 6 ■1830 Es sei $\overline{AM}=\overline{MC}=x$ und $\overline{AB}=y$, also $\overline{BC}=2x$;
dann gilt $x+2x=45$, $3x=45$, $x=15$.
Ferner gilt $y+x=25$, $y+15=25$, $y=10$.
Die Basis $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC ist 10 cm lang, jeder Schenkel ist 30 cm lang.



Ma 6 ■1831 Aus $\overline{AB}=\overline{BD}$ folgt $\sphericalangle BDA=\sphericalangle BAD=72°$. Im Dreieck ABD beträgt dann $\sphericalangle ABD=180°-72°-72°=36°$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt
$\sphericalangle BDC=72°+36°=108°$. Aus $\overline{BD}=\overline{CD}$ folgt



$\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC$. Im Dreieck BCD gilt deshalb $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC = (180° - 108°) : 2 = 36°$. Daraus folgt weiter $\sphericalangle ABC = 180° - 72° - 36° = 72°$. Aus $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 72°$ folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d. h., Dreieck ABC ist gleichschenklig.

Ma 6 ▪1832 Aus $ab + ci = iga$ folgt $i = 1$.
Aus $iga + hc = gig$ folgt $g = 2$.
Aus $ci - dg = ik$ folgt $k = 9$.
Aus $efgh : ik = gig$ folgt $h = 8$.
Aus $efgh : ik = gig$ folgt weiter $e = 4$ und $f = 0$.
Aus $ab \cdot cd = efgh$ folgt $b \cdot d = 8$ oder 18 oder 28 oder 38 oder 48 oder 58 oder 68, denn $9 \cdot 8 = 72$.
Wegen $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$ und $i = 1$ und $g = 2$ ist dieser Fall nicht möglich. Wegen $28 = 4 \cdot 7$ und $e = 4$ entfällt 28. Wegen $38 = 2 \cdot 19$ und $19 > 9$ entfällt 38. Wegen $48 = 6 \cdot 8$ und $h = 8$ entfällt 48. Wegen $58 = 2 \cdot 29$ und $29 > 9$ entfällt 58. Wegen $68 = 4 \cdot 17$ und $17 > 9$ entfällt 68. Wegen $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ und $g = 2$ gilt $b \cdot d = 3 \cdot 6$ oder $b \cdot d = 6 \cdot 3$. Für $b = 3$ gilt wegen $ab + ci = iga$ $a = 4$, was wegen $e = 4$ nicht möglich ist.
Folglich gilt $b = 6$ und $d = 3$. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} 76 \cdot 53 &=& 4028 \\ + \quad + & & : \\ 51 - 32 &=& 19 \\ \hline 127 + 85 &=& 212 \end{array}$$

Ma 6 ▪1833 Aus (6), (9) und (7) folgt:
Götz geht in die 9. Klasse, er hat den Nachnamen Krause und wohnt in Rostock.
Aus (10) und (4) folgt:
In Berlin wohnt der Schüler mit Nachnamen Schmidt; er geht in die 6. Klasse.
Aus (8) und (7) folgt:
Peter wohnt in Erfurt. Folglich heißt Peter mit Nachnamen Saßnitz oder Jacke.
Aus (5) folgt:
Peter hat den Nachnamen Saßnitz.
Aus (10) folgt: Peter ist Schüler der 8. Klasse.
Aus dem bisherigen folgt: In Prag wohnt der Schüler mit Nachnamen Jacke; er ist Schüler der 7. Klasse.
Aus (3) folgt: Mario wohnt in Berlin. Deshalb hat der Schüler aus Prag den Vornamen Torsten.

Ma 7 ▪1834 Es seien a und b zwei natürliche Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen; dann gilt

$$\begin{aligned} (a+b) + a \cdot b &= 110, \\ a + ab &= 110 - b, \\ a(1+b) &= 110 - b, \\ a &= \frac{110-b}{1+b} = \frac{111}{1+b} - 1 \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 37}{1+b} - 1. \end{aligned}$$

a ist nur dann eine natürliche Zahl, wenn $1 \cdot 3 \cdot 37$ ein Vielfaches von $1 + b$ ist. Das trifft zu für $b = 0, 2, 36, 110$ bzw. für $a = 110, 36, 2, 0$. Sieht man von der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. Faktoren ab, so erhält man genau zwei Lösungen; sie lauten: 110 und 0 bzw. 36 und 2, denn $110 + 0 + 110 \cdot 0 = 110$ und $36 + 2 + 36 \cdot 2 = 110$.

Ma 7 ▪1835 Angenommen, der Vater sei v Jahre, die Mutter m Jahre, der Sohn s Jahre und die Tochter t Jahre alt; dann gilt $v + m = 75$ und $v + s = 54$ und $v + t = 51$ und $v + m + s + t = 100$. Addieren wir die ersten drei Gleichungen, so erhalten wir $3v + m + s + t = 180$. Subtrahieren wir davon die vierte Gleichung, so erhalten wir $2v = 80$, also $v = 40$. Die übrigen Zahlen sind nun leicht zu ermitteln. Der Vater ist 40 Jahre, die Mutter 35 Jahre, der Sohn 14 Jahre, die Tochter 11 Jahre alt.

Ma 7 ▪1836 Wir fertigen eine Tabelle an!

p_1	p_2	p_3	$p_1 + p_2 + p_3$
2	3	5	10
3	5	7	15
5	7	11	23 Primzahl
7	11	13	31 Primzahl
11	13	17	41 Primzahl
13	17	19	49
17	19	23	59 Primzahl
19	23	29	71 Primzahl
23	29	31	83 Primzahl
29	31	37	97 Primzahl

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß es sieben reguläre Primdreiecke gibt, die zugleich binär sind.

Ma 7 ▪1837 Wir wählen den 31. Januar als Bezugspunkt und stellen für reguläre Jahre (Februar mit 28 Tagen) sowie für Schaltjahre (Februar mit 29 Tagen) folgende Tabelle auf:

Reguläres Jahr

Datum	Differenz d zum 31. 1. in Tagen	$d:7$
31. 1.	0	$0:7 = 0 \cdot 7 + 0$
31. 3.	59	$59:7 = 8 \cdot 7 + 3$
31. 5.	120	$120:7 = 17 \cdot 7 + 1$
31. 7.	181	$181:7 = 25 \cdot 7 + 6$
31. 8.	212	$212:7 = 30 \cdot 7 + 2$
31. 10.	273	$273:7 = 39 \cdot 7 + 0$
31. 12.	334	$334:7 = 47 \cdot 7 + 5$

Schaltjahr

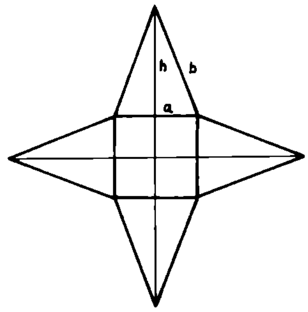
Datum	Differenz d zum 31. 1. in Tagen	$d:7$
31. 1.	0	$0:7 = 0 \cdot 7 + 0$
31. 3.	60	$60:7 = 8 \cdot 7 + 4$
31. 5.	121	$121:7 = 17 \cdot 7 + 2$
31. 7.	182	$182:7 = 26 \cdot 7 + 0$
31. 8.	213	$213:7 = 30 \cdot 7 + 3$
31. 10.	274	$274:7 = 39 \cdot 7 + 1$
31. 12.	335	$335:7 = 47 \cdot 7 + 6$

Da eine Woche 7 Tage hat, gibt jeder Rest von $d:7$ einen bestimmten Wochentag an. Die Tabelle zeigt, daß in einem regulären Jahr der Rest 4 fehlt und dafür der 31. 1. und der 31. 10. auf denselben Wochentag fallen. In einem Schaltjahr fehlt der Rest 5; dafür fallen der 31. 1. und der 31. 7. auf denselben Wochentag. Also gibt es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag, auf den der 31. Tag eines Monats nicht fallen kann.

Ma 8 ▪1838 Aus (1) oder (5) folgt, daß A für beliebiges α nur 1 sein kann. Aus (2) folgt, daß L für beliebiges α immer 2 ist.
Wenn $\alpha = 3$, dann ist $P = 4$ und $H = 6$.
Wenn $\alpha = 4$, dann ist $P = 5$ und $H = 8$.
Wegen $A = 1$, $L = 2$ und wegen Gleichung (4) sind keine weiteren Belegungen für α möglich; denn für $\alpha \geqq 5$ wäre $H \geqq 10$, was den Bedingungen widerspricht.
Es gibt also genau zwei Möglichkeiten:
1. $A = 1$, $L = 2$, $P = 4$, $H = 6$, $\alpha = 3$
2. $A = 1$, $L = 2$, $P = 5$, $H = 8$, $\alpha = 4$.

Ma 8 ▪1839 Es waren 5% der Tage nicht kalt, 15% nicht naß, 25% nicht windig und 35% nicht trübe.
Daraus folgt, daß es an 20% aller Urlaubstage kalt, naß, windig und trübe zugleich war.

Ma 8 ▪1840 Skizze (nicht maßstäblich)

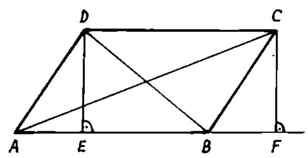


Die vier Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecksflächen.
Es gilt für ein Dreieck: $u = a + 2b$, wenn a die Länge der Basis und b die Länge eines Schenkels ist. Weiter gilt $b = 1{,}5a$. Da $u = 16$, folgt $16 = a + 3a$, $16 = 4a$, $4 = a$. Daraus folgt $b = 6$.
Nun ist nach dem Satz des Pythagoras $h = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \approx 5{,}66$
(h bezeichnet die Länge der Dreieckshöhe).
Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt
$A = \frac{a \cdot h}{2}$, also $A \approx \frac{4 \cdot 5{,}66}{2} \approx 11{,}32$.
Das Netz der Pyramide besteht aus vier derartigen Dreiecken und einem Quadrat (Grundfläche) mit der Seitenlänge 4 cm. Somit gilt für den Flächeninhalt des Netzes

$$A_N \approx 11{,}32 \cdot 4 + 16$$
$$A_N \approx 61{,}28.$$

Das Netz dieser Pyramide hat einen Flächeninhalt von etwa 61,28 cm².

Ma 8 ▪1841 Skizze (nicht maßstäblich)



Zunächst berechnet man im rechtwinkligen Dreieck AED die Länge der Seite $\overline{AE}$ nach dem Satz des Pythagoras.
Es gilt $\overline{AE}^2 = 5^2 - 4^2$
$\overline{AE} = \sqrt{9}$
$\overline{AE}$ ist 3 cm lang.
Nun berechnet man im rechtwinkligen Dreieck AFC die Länge der einen und im recht-

winkligen Dreieck EBD die Länge der anderen Diagonalen.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$\overline{AC}^2 = 13^2 + 4^2$, d. h. $\overline{AC} = 13{,}6$ und
$\overline{DB}^2 = 7^2 + 4^2$, d. h. $\overline{DB} = 8{,}06$.
Die beiden Diagonalen sind 13,6 cm bzw. 8,06 cm lang. (Die Maßzahlen sind Näherungswerte!)

Ma 9 ■1842 Es seien x, y, z die drei gesuchten natürlichen Zahlen. Nach der ersten Bedingung der Aufgabe gilt
(1) $x + y + z = 945$.
Nach der zweiten Bedingung gilt
(2) $\frac{1}{6}x = \frac{1}{7}y = \frac{1}{8}z$.
Aus $\frac{1}{6}x = \frac{1}{7}y$ folgt $y = \frac{7}{6}x$;
aus $\frac{1}{6}x = \frac{1}{8}z$ folgt $z = \frac{4}{3}x$.
Nun lassen sich in der Gleichung (1) y und z durch x ausdrücken:
(1)' $x + \frac{7}{6}x + \frac{4}{3}x = 945 \qquad \frac{7}{2}x = 945$
$\frac{21}{6}x = 945 \qquad x = 270.$
Es folgt nun
$y = \frac{7}{6} \cdot 270$, $y = 315$ und $z = \frac{4}{3} \cdot 270$, $z = 360$. Die drei gesuchten Zahlen sind 270, 315 und 360.
Probe: $270 + 315 + 360 = 945$
$945 = 945$
$\frac{1}{6}$ von 270 ist 45, $\frac{1}{7}$ von 315 ist 45, $\frac{1}{8}$ von 360 ist 45.

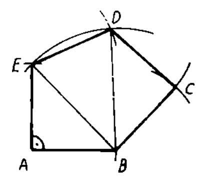
Ma 9 ■1843 Es sei $(x; y)$ mit $x > y$ ein solches Zahlenpaar.
Dann gilt nach Aufgabenstellung
$$x^2 - y^2 = 4 \cdot \frac{x+y}{2}.$$
Nach Umformung beider Terme erhält man
$(x+y)(x-y) = 2(x+y)$ und
nach Division der Gleichung durch $(x+y)$
$x - y = 2$.
[$(x+y)$ ist stets verschieden von Null!]
Alle Paare natürlicher Zahlen, deren Differenz 2 ist, erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.
(Beispiel: (6; 4): $6^2 - 4^2 = 4 \cdot \frac{6+4}{2}$
$20 = 20$.)

Ma 9 ■1844 Man zerlegt $p^2 - 1$ in $(p-1)(p+1)$.
Da p nach Voraussetzung ungerade ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen. Da eine davon durch 4 teilbar ist, ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch $2 \cdot 4$, also durch 8 teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ist eine durch 3 teilbar. Da $p \neq 3$, ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar.
Daraus folgt, daß der Term $p^2 - 1$ für alle Primzahlen p mit $p > 3$ durch $8 \cdot 3$, also durch 24 teilbar ist, w. z. b. w.

Ma 9 ■1845 Die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ seien mit a, b, c bezeichnet. Dann gilt nach der Aufgabenstellung:
(1) $a + b + c = 9{,}6$
(2) $a + c = 2b$
(3) $a : c = 5 : 3$.
Aus (1) folgt
(4) $a + c = 9{,}6 - b$
und aus (2) und (4) folgt
$9{,}6 - b = 2b$
$9{,}6 = 3b$
$3{,}2 = b$.
Die Seite $\overline{AC}$ ist 3,2 cm lang.
Aus (2) folgt
(5) $a + c = 6{,}4$ und
aus (3) und (5) folgt
$c = 2{,}4$;
Die Seite $\overline{AB}$ ist 2,4 cm lang.
Aus (2) folgt nun
(6) $a + 2{,}4 = 6{,}4$ und daraus
$a = 4$.
Die Seite $\overline{BC}$ ist 4 cm lang.
Die Probe ergibt, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

Ma 10/12 ■1846 Aus (1) folgt $c = 2a$.
Aus (2) folgt $2\gamma = 180°$ wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Damit gilt $\gamma = 90°$, folglich auch $\alpha + \beta = 90°$.
Nach dem Sinussatz gilt
$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, folglich
$a : 2a = \sin\alpha : \sin 90$ und wegen $\sin 90° = 1$
$a : 2a = \sin\alpha$.
Daraus folgt $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = 30°$ und damit $\beta = 60°$. Es gilt also
$a : b : c = \sin 30° : \sin 60° : \sin 90°$ bzw.
$a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$.

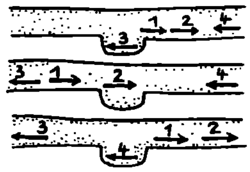
Ma 10/12 ■1847 Skizze (nicht maßstäblich)



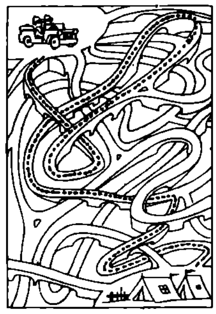
Man konstruiert zunächst das Dreieck ABE mit $\sphericalangle EAB = 90°$ und den je 2 cm langen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AE}$. Um B zeichnet man einen Kreis mit dem Radius der Länge von $\overline{BE}$ und um E einen Kreis mit dem Radius der Länge von $\overline{AB}$. Beide Kreise schneiden einander in D. (D muß in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden EB liegen, die A nicht enthält!) Um D und um B zeichnet man je einen Kreis mit dem Radius der Länge von $\overline{AB}$. Die Kreise schneiden einander in C. (C muß in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden DB liegen, die A nicht enthält!) Der Flächeninhalt dieses Fünfecks setzt sich aus den Flächeninhalten von drei Dreiecken zusammen. Die Dreiecke ABE und BCD sind kongruent. Sie sind gleichschenklig-rechtwinklig. Man kann beide zu einem Quadrat mit dem Flächeninhalt $A = 4\,\text{cm}^2$ zusammensetzen. Das Dreieck EBD ist gleichschenklig. Die Basis $\overline{ED}$ ist 2 cm lang; $\overline{EB}$ und $\overline{DB}$ sind $\sqrt{8}$ cm lang (Satz des Pythagoras). Die Höhe von B auf die Basis $\overline{ED}$ ist $\sqrt{7}$ cm lang (Satz des Pythagoras). Für den Flächeninhalt des Dreiecks EBD ergibt sich deshalb
$A_{EBD} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{2}\,\text{cm}^2$; $A_{EBD} \approx 2{,}65\,\text{cm}^2$.
Somit beträgt der Flächeninhalt dieses Fünfecks etwa $6{,}65\,\text{cm}^2$.

Lösungen zu: Lustige Logeleien

1.

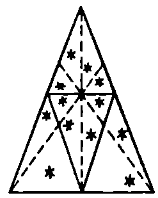


2.

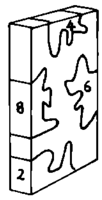


3.
$3 + 2 + 1 = 6$
$+ \quad \times \quad +$
$2 \times 3 - 1 = 5$
$- \quad - \quad \times$
$4 + 4 : 2 = 4$
$= 1 = 2 = 4$

4.



5.



7. $6 - 4 - 2 = 0$; $4 + 3 - 6 = 1$;
$4 + 2 - 3 = 3$; $6 + 2 - 4 = 4$;
$6 - 4 + 3 = 5$; $6 + 3 - 2 = 7$;
$6 + 4 - 2 = 8$; $4 + 3 + 2 = 9$

8. Der Seitenriß Nr. 5 gehört zum dargestellten Grundriß.

Lösungen zu: Wir arbeiten mit Mengen

Arbeitsblatt 1:
$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$M_2 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
$M_3 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35\}$
$M_4 = \emptyset$
$M_5 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24\}$
nicht möglich
$M_8 = \{-6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6\}$
$M_9 = \{46, 49\}$
$M_{10} = \{36, 72\}$
$M_1 = \{x \in N; 0 \leqq x \leqq 9\}$
$M_2 = \{x \in N; 3 \mid x \wedge x < 24\}$
$M_3 = \{x \in N; 7 \mid x \wedge x < 37\}$
$M_4 = \{x \in G; 99 < x < 100\}$
$M_5 = \{x \in G; x \mid -8\}$
$M_6 = \{x \in N; 6 \mid x \wedge x < 30\}$
$M_7 = \{x \in R; 3 < x < 5\}$

$M_8 = \{x \in G; x \mid 12 \wedge -10 \leqq x \leqq 10\}$

$M_9 = \{x \in N; 43 < x < 50 \wedge x = 3y+1 \wedge y \in N\}$

$M_{10} = \{x \in G; 0 < x < 100 \wedge 9 \mid x \wedge 12 \mid x\}$

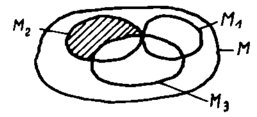
oder

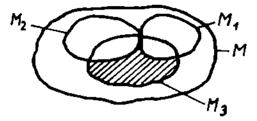
$M_{10} = \{x \in G; 0 < x < 100 \wedge 36 \mid x\}$

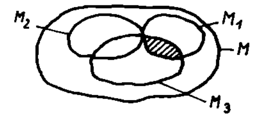
Arbeitsblatt 2

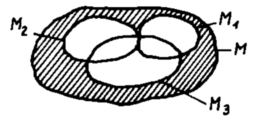
1. $N \subset G, Z \subset V, Z \subset N, Z \subset G, V \subset G$
2. $B_L \subset B, B_A \subset B, B_O \subset B, B_A \subset B_O, B_A \subset B_L, B_O \subset B_L$
3. $N_3 \subset N, N_9 \subset N, N_9 \subset N_3, N_9 \subset G_9$
4. $R \subset V, Q \subset V, D \subset V, Q \subset R, Q \subset D$
5. $W \subset Q, W \subset P_1, Q \subset P_1$
6. $D \subset S, Z \subset G$
7. $G_1 \subset G, G_2 \subset G, G_3 \subset G, G_2 \subset G_1, G_3 \subset G_1, G_3 \subset G_2$

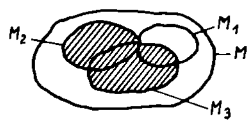
Arbeitsblatt 3:

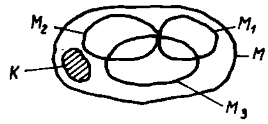
1. 

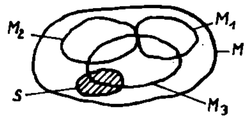
2. 

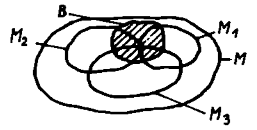
3. 

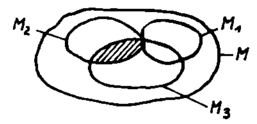
4. 

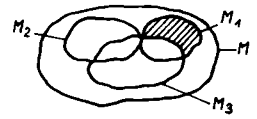
5. 

6. 

7. 

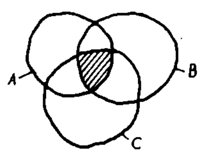
8. 

9. 

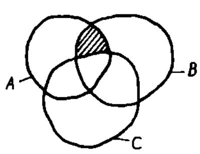
10. 

Arbeitsblatt 4:

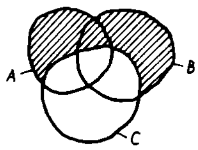
1. $A \cap B \cap C$



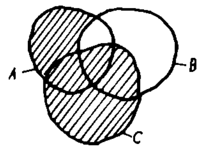
2. $(A \cap B) \setminus C$



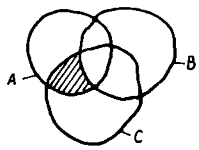
3. $(A \cup B) \setminus C$



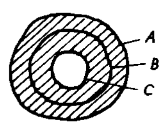
4. $(A \setminus B) \cup C$



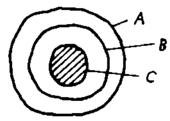
5. $(A \setminus B) \cap C$



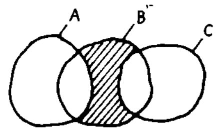
6. $(A \cup B) \setminus C$



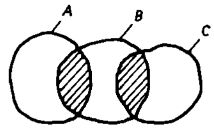
7. $A \cap B \cap C$



8. $B \setminus A \setminus C$



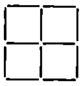
9. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

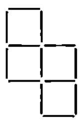


10. $A \cup B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A \cup C = \{3, 6, 7, 8, 9, 12, 15\}$
$B \cup C = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$
$A \cap B = \{6\}$
$A \cap C = \{6, 9\}$
$B \cap C = \{6\}$
$A \setminus B = \{7, 8, 9\}$
$B \setminus A = \{5, 10\}$
$A \setminus C = \{7, 8\}$
$C \setminus A = \{3, 12, 15\}$
$B \setminus C = \{5, 10\}$
$C \setminus B = \{3, 9, 12, 15\}$
$A \cup B \cup C = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15\}$
$A \cap B \cap C = \{6\}$
$A \setminus B \setminus C = \{7, 8\}$
$(A \cap B) \setminus C = \emptyset$

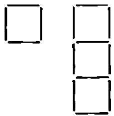
Lösungen zu: Spiele mit Hölzchen!

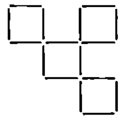
▲1▲ 6 Hölzchen weg 5 Hölzchen weg



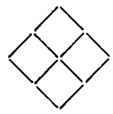


4 Hölzchen weg 2 Hölzchen weg

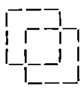




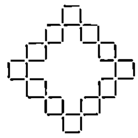
▲2▲



▲3▲ a) oder b)



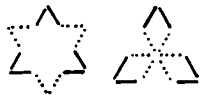
▲4▲



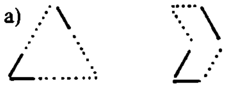
▲5▲

▲6▲

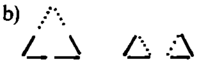
▲7▲



▲8▲ a)



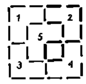
b)



c)

▲9▲ vorher nachher

▲10▲



Lösungen zu: 1979

Vorletztes Problem:
$25^2 + 25^2 + 27^2 = 1979$

Letztes Problem:
$1^3 + 5^3 + 5^3 + 12^3 = 1979$
$2^3 + 3^3 + 6^3 + 12^3 = 1979$
$5^3 + 5^3 + 9^3 + 10^3 = 1979$
$6^3 + 6^3 + 6^3 + 11^3 = 1979$

Lösungen zu: Das Einbeschreiben von Kreisen gleichen Durchmessers in ein Quadrat

▲5▲ Ist $m+n$ eine ungerade Zahl so gibt es genau $\frac{m+n+1}{2}$ Lagen mit je n Kreisen und $\frac{m+n-1}{2}$ Lagen mit je $n-1$ Kreisen, insgesamt also $\frac{(m+n)(2n-1)+1}{2}$ Kreise mit Durchmesser $d = \frac{a}{n}$.

Dann ist

$$V_n = \frac{\frac{(m+n)(2n-1)+1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{(nd)^2} = \frac{(m+n)(2n-1)+1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{8}.$$

▲6▲ Für große Werte von n ersetzen wir m durch $(n-1) \cdot p$ und erhalten für ungerade $m+n$ (vgl. Lösung von ▲5▲)

$$V_n=\frac{(n+(n-1)p)(2n-1)+1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{8}$$
$$=(2+2p)+\frac{3p}{n}-\frac{1}{n}+\frac{p}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{8}$$

Die Terme $\frac{3p}{n}, \frac{1}{n}, \frac{p}{n^2}, \frac{1}{n^2}$ kommen beim Anwachsen der für n eingesetzten Werte immer mehr der 0 nahe, so daß sich auch jetzt V_n dem Wert $\frac{\pi}{8}(2+2p)=\frac{\pi}{4}(1+p)\approx 0{,}9069$ nähert.

Lösungen zu: alpha-heiter

Über die Donau

Man kann die Springer in 19 Zügen umstellen. Hier der schnellste Übergang über die Donau: de, fd, gf, eg, ce, bc, db, fd, hf, gh, eg, ce, ac, ba, db, fd, ef, ce, dc.

Silbenrätsel

1. Arithmetik; 2. Delta; 3. Archimedes; 4. Multiplikation; 5. Rechteck; 6. Innenwinkel; 7. Exponent; 8. Strecke.
Der Name des Rechenmeisters ist Adam Ries.

Eineindeutige Abbildungen

Beim Betrachten des Gleichungssystems I ergeben sich folgende Feststellungen:
1. Alle 8 Gleichungen besitzen die gleiche Struktur.
2. Der Zähler im Bruch einer beliebigen Gleichung entspricht dem Nenner des Bruches in der nachfolgenden Gleichung.
Auf Grund dieser Tatsachen lassen sich die Variablen D, I, O, P, H, A, N, T in Abhängigkeit von X darstellen:

(1a) $D=X-1$
(2a) $I=D-1$ bzw. (2b) $I=X-2$
(3a) $O=I-1$ (3b) $O=X-3$
(4a) $P=O-1$ (4b) $P=X-4$
(5a) $H=P-1$ (5b) $H=X-5$
(6a) $A=H-1$ (6b) $A=X-6$
(7a) $N=A-1$ (7b) $N=X-7$
(8a) $T=N-1$ (8b) $T=X-8$

Aus M_1 und den Gleichungen (1a), (2b), ..., (8b) ergibt sich unmittelbar die Zuordnung

X	D	I	O	P	H	A	N	T
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Die Proben für (1), ..., (8) bestätigen die Richtigkeit:

(1) $8-\frac{8}{9}=8\cdot\frac{8}{9}$
$\frac{64}{9}=\frac{64}{9}$

(8) $1-\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Entsprechendes ergibt sich für Gleichungssystem II

(1a) $D=X+1$
(2a) $I=D+1$ bzw. (2b) $I=X+2$
(3a) $O=I+1$ (3b) $O=X+3$
(4a) $P=O+1$ (4b) $P=X+4$
(5a) $H=P+1$ (5b) $H=X+5$
(6a) $X=H+1$ (6b) $A=X+6$
(7a) $N=A+1$ (7b) $N=X+7$
(8a) $T=N+1$ (8b) $T=X+8$

Die Zuordnung ist

X	D	I	O	P	H	A	N	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Die Proben für (1), ..., (8) des Gleichungssystems II bestätigen die Richtigkeit:

(1) $2+\frac{2}{1}=2\cdot\frac{2}{1}$
$4=4$

(8) $9+\frac{9}{8}=9\cdot\frac{9}{8}$
$\frac{81}{8}=\frac{81}{8}$

Unsere Fibel

Es gibt Buchstaben, bei denen die Symmetrieachse horizontal verläuft: B, C, E, K,
oder vertikal: A, M, U, V, W, T,
sowie beide Symmetrieachsen möglich sind: O, I, H, X.
Bei den ausgewählten Worten verläuft die Symmetrieachse bei den Buchstaben in horizontaler Richtung:
1. HEXE, 2. EHE, 4. BEBE, 7. ECHO,
in vertikaler Richtung: 3. MIAU, 5. OMA, 9. MOTTO, 8. OTTO, 10. TOTO
und in beiden Richtungen: 6. HOI

Gesucht x, y, z

$x=4{,}5$ (Ähnlichkeit und Winkelhalbierende)
$y=6{,}54$ (cos-Satz)
$z=4{,}36$ (cos-Satz)

Kryptarithmetik

(1) $279+365+564=1208$ oder
$274+365+569=1208$
$972+406+605=1983$ oder
$975+406+602=1983$
(2) $193+81262+390527=471982$
$593+85262+390127=475982$

Das sagt man so

Den Buckel runter rutschen. Wie auf Eiern laufen. Das Gras wachsen hören. Den Teufel an die Wand malen. Geld zum Fenster herauswerfen. Einen Bären aufbinden. Mit dem Kopf durch die Wand gehen. Die Flinte ins Korn werfen. Wie aus allen Wolken fallen. Ein Brett vorm Kopf haben.

Bitte anrufen!

Die Aufgabe hat zwei Lösungen: 92465 und 92485.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

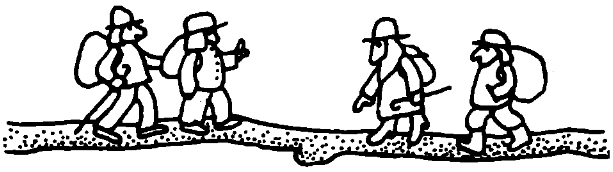
Ma6 ■1772
Addiert man zu einer zweistelligen natürlichen Zahl ihre Quersumme und multipliziert man diese Summe mit 5, so erhält man 150.
Um welche Zahl handelt es sich?

Im Heft 1/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $10a+b$ darstellen; ihre Quersumme beträgt $a+b$. Nun gilt
$$[(10a+b)+(a+b)]\cdot 5=150,$$
$$(11a+2b)\cdot 5=150,$$
$$11a+2b=30,$$
$$11a=30-2b,$$
$$11a=2\cdot(15-b).$$
Die rechte Seite dieser Gleichung muß wegen $11\cdot a$ ebenfalls durch 11 teilbar sein. Wegen $0\leqq b\leqq 9$ trifft das nur für $b=4$ zu. Somit gilt $11a=2\cdot 11$, also $a=2$. Die Zahl lautet 24.

Wir stellen nun die Lösung von Axel Schulz aus Potsdam vor, der Schüler einer 6. Klasse ist. Axel löste diese Aufgabe wie folgt:
Die zweistellige natürliche Zahl z läßt sich darstellen durch $z=10a+b$ mit $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$; ihre Quersumme lautet $q=a+b$. Nun gilt
$$(z+q)\cdot 5=150,$$
$$z+q=30,$$
$$11a+2b=30.$$
Da sowohl die Summe 30 als auch der Summand $2b$ gerade Zahlen sind, muß auch der Summand $11a$ eine gerade Zahl sein. Wegen $0<a$ und $11a<30$ kann nur $a=2$ gelten. Wir erhalten somit
$$11\cdot 2+2b=30,$$
$$2b=8,$$
$$b=4.$$
Die Zahl 24 ist die einzige, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

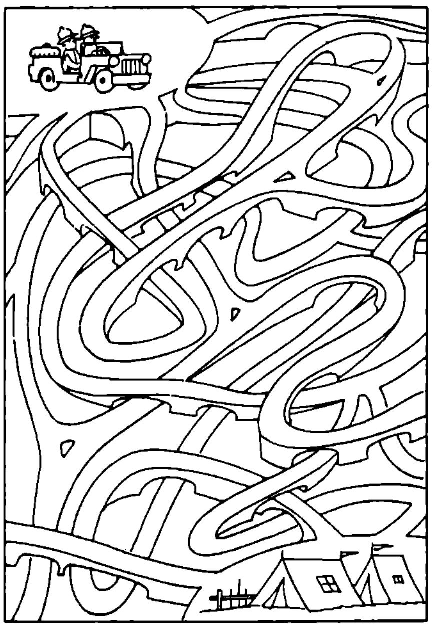
Wir stellen nun die Lösung von Wilfried Mäbius aus Schwerin vor, der Schüler der Klasse 6b der Maxim-Gorki-Oberschule ist. Wilfried geht wie folgt vor:
Entsprechend der Aufgabenstellung kann ich folgende Gleichung aufstellen:
$(10x+y+x+y)\cdot 5=150$ mit $x\neq 0$, also
$11x+2y=30$.
Ich nehme eine Fallunterscheidung vor.
1. Fall: Es sei $x=1$; dann gilt
$11+2y=30$, also $2y=19$.
Es gibt keine natürliche Zahl y, die diese Gleichung erfüllt.
2. Fall: Es sei $x=2$; dann gilt
$22+2y=30$, $2y=8$, $y=4$.
Die Zahl lautet 24.
3. Fall: Es sei $x=3$; dann gilt
$33+2y=30$, $2y=30-33$.
Wegen $30<33$ ist diese Gleichung im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Das trifft auch zu für $x>3$.

Lustige Logeleien



1. Auf einem schmalen Bergpfad treffen sich vier Wanderer. Zwei kommen von links, zwei von rechts. Es gibt nur eine Stelle, an der jeweils einer der vier ausweichen kann.
Wie kommen sie so aneinander vorbei, daß jeder von ihnen seine Wanderung in gewünschter Richtung fortsetzen kann? (siehe Titelbild)

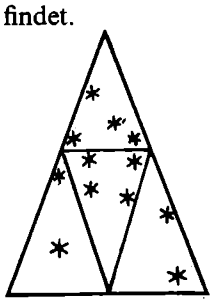
2. Wie kommt der „Oldtimer“ zum Zeltlager?

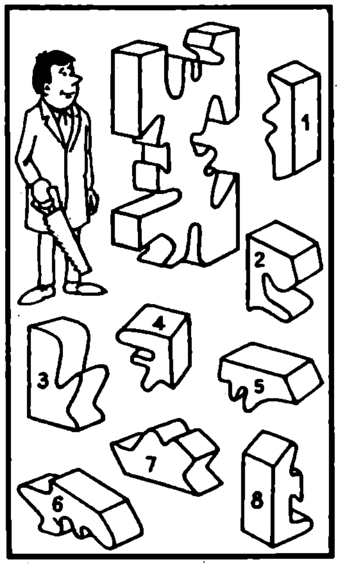


3. Setzt Zahlen so ein, daß richtig gelöste Gleichungen entstehen!

3	+		+		=6
+		X		+	
	X		−		=5
−		−		X	
	+		:		=4
=1		=2		=4	

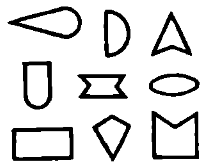
4. Mit nur drei Schnitten ist die Figur so zu teilen, daß sich jeweils nur ein Stern in jedem Figurenteil befindet.





5. Herr Knifflig will die acht Teile wieder so einsetzen, daß ein Quader entsteht. Wer hilft ihm?

6. Prägt euch die neun geometrischen Figuren 8 bis 10 Sekunden lang ein! Dann deckt ihr das Bild ab und zeichnet die Figuren aus dem Gedächtnis nach. Wer alle neun richtig hat, verdient ein *Sehr gut*, wer fünf bis acht Figuren behalten hat, das Prädikat *Gut*.

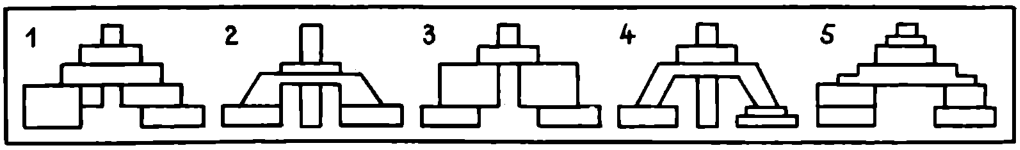


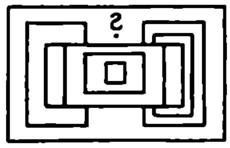
7. Jeweils drei der Zahlen 6, 4, 3 und 2 sind so in die acht Kryptogramme einzuzeichnen, daß richtig gelöste Gleichungen entstehen.

6 4 3 2

○−○−○=0 ○−○+○=5
○+○−○=1 ○+○−○=7
○+○−○=3 ○+○−○=8
○+○−○=4 ○+○+○=9

8. Schaut euch die fünf numerierten Konstruktionen – im Seitenriß gezeichnet – genau an! Ganz rechts ist eine davon im Grundriß zu sehen. Findet heraus, welche es ist!





Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl?

¶ Knechtlohn.

Item ein Jar gibt man einem Knecht 10. fl. 16. groschen/wie viel gebürt jhm 17. wochen?

Facit 3. fl. 10. groschen/10. dl. ein heller 1 $\frac{3}{13}$.

Mach die fl. zu groschen/vnd setz also:

52 226. gro. 17

¶ Kalmus.

Item ein Sack mit Kalmus wigt 48. lb. 24. loth/Tara 2. lb. vnd 16. loth/kost ein lb. 13. ß. ein halben.

Facit 31. f. 4. ß. 4. hlr vnd ein halben.

Das Tara nimb herab/mach forn vnd hinden loth/brichs mitten/vnd gehe herfür/stehet:

64 27 1480

Vom Wechsel.

Item ein fl. Reinisch gilt in Müntz 21. gro. vnd 20. ß. in Golt/wie viel Müntz gebürt sich zu geben für 11. ß. 9. hlr?

Facit 12. grosch. 4. dl. vnd 2 $\frac{1}{8}$.

Stecht also:

240. hlr. 21. gro. 141. hlr.

Item 894. Vngerisch gülden/wie viel machen die Reinisch/29. auff?

Facit 1153. Reinisch/5. ß. 2. hlr. vnd zwey fünfftheil.

Thu jm also/Addir den auffwechsel zu 100. Reinischen/vnd sprich/100. Vngerisch thun 129.