Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

OJM
DDR

25
JAHRE
OLYMPIADEN
JUNGER MATHEMATIKER

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 26, 27, 37); Eigenfoto P. Bachmann, Dresden (S. 27); Repro, zur Verfügung gestellt von den Nachfahren Gentzens (S. 29); ADN (ZB) (S. 30); Franz Fricke, Berlin (S. 34); Louis Rauwolf (S. 36); Archiv, BG Teubner (S. 42); U. Pullwitt, Leipzig (S. 26)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß 12. Dezember 1985
Auslieferungstermin: 15. April 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

25 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker

Nach 25 Jahren erfolgreicher Durchführung unserer Mathematikolympiaden können wir mit Stolz auf ein Gebiet der außerunterrichtlichen Tätigkeit blicken, auf welchem viele Schüler Bewährungsproben bestanden haben und immer wieder neu bestehen. Ist es doch das Ziel der Olympiaden *Junger Mathematiker*, bei vielen Schülern Interesse für die Mathematik zu wecken bzw. zu vertiefen, besonders befähigte Schülerinnen und Schüler rechtzeitig zu erkennen und ihre systematische Förderung in vielfältiger Weise zu ermöglichen.

Die Erfolge in der Mathematikolympiade sind natürlich Ergebnis vielfältiger Anstrengungen und intensiven Lernens.

Wie auf vielen Gebieten unserer Entwicklung waren es auch bei den Mathematikolympiaden sowjetische Genossen, die uns zum ersten Mal mit derartigen Wettkämpfen vertraut machten.

Wir erhielten Einblick in die langjährigen Erfahrungen bei der Gestaltung dieser Wettbewerbe in der Sowjetunion, und zugleich wurde uns Aufgabenmaterial für den Auftakt unserer Olympiade zur Verfügung gestellt. Ähnlich wirksame Unterstützung wurde uns durch rumänische und ungarische Kollegen zuteil.

Doch aller Anfang war schwer. Das merkten zuerst unsere Teilnehmer an den ersten Internationalen Olympiaden (die es schon seit 1958 gibt), aber auch die 167 Teilnehmer an der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR im Jahre 1962.

In der Olympiadeklasse 10 gab es z. B. folgende Aufgabe, die aus heutiger Sicht sicher vielen keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, aber damals entscheidend die Preisverteilung beeinflußte:

Es sei

$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Berechnen Sie s^2 und s^3, und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden!

Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.

Die beiden Schüler, die in der Olympiadeklasse 10 einen 1. Preis erringen konnten, bewältigten diese Aufgabe als einzige Teilnehmer erfolgreich.

Diese Preisträger sind heute beide erfolgreiche Mathematiker. Dr. *Peter Beckmann* und Dozent Dr. *Hans-Ulrich Schwarz* arbeiten an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig.

Die Leser der *alpha* sollten sich an dieser Aufgabe auch einmal versuchen.

Die Erkenntnis, daß eine hohe mathematische Bildung wesentlicher Bestandteil der Bildung der Menschen in unserer Gesellschaft ist und daß die Wissenschaft Mathematik mehr und mehr zur unmittelbaren Produktivkraft wird, veranlaßte das Politbüro des Zentralkomitees der SED 1962, einen bedeutsamen Beschluß zur Verbesserung des Mathematikunterrichts zu fassen.

In wenigen Jahren gelang es, dank der unermüdlichen Tätigkeit vieler Pädagogen, zahlreicher Funktionäre des Jugendverbandes und einer engen Zusammenarbeit mit vielen Wissenschaftlern, die *Olympiaden Junger Mathematiker* zu einem Massenwettbewerb zu entwickeln. Die Olympiaden sind zu Höhepunkten in der außerunterrichtlichen Tätigkeit geworden.

Gestützt auf eine gründliche mathematische Ausbildung im Unterricht und ständiges Üben, Vertiefen und Erweitern der Kenntnisse in Arbeitsgemeinschaften, Klubs *Junger Mathematiker*, in Mathematischen Schülergesellschaften und in Spezialistenlagern, erreichen heute unsere *Jungen Mathematiker* hervorragende Leistungen in den verschiedenen Stufen der Olympiade.

Sehr viele unserer heutigen Mathematiker in Hochschulen und Betrieben sind erfolgreiche Teilnehmer unserer nationalen Olympiade gewesen oder haben sogar erfolgreich an einer Internationalen Mathematikolympiade teilgenommen.

Unsere Gesellschaftsordnung schafft für alle interessierten Schüler Möglichkeiten, ihre Interessen zu vertiefen und ihre Talente zu entfalten. Es ist aber ein weiter Weg vom interessierten *Jungen Mathematiker* bis zum Preisträger der Olympiaden. Noch als Schüler der 9. Klasse konnte sich *Ulrich Meister* aus Ludwigsfelde nicht vorstellen, gemeinsam mit den „Großen" zu trainieren. Durch intensive Arbeit, nie das Ziel aus dem Auge verlierend, erreichte er 1985 neben dem Prädikat „Ausgezeichnet" im Abitur auch einen 2. Preis bei der *Internationalen Mathematikolympiade* in Helsinki.

Der berühmte Erfinder *Thomas Edison* sagte einmal: „Die anderen begehen den Fehler, zu früh aufzuhören. Ich höre nie auf."

Diese Arbeitsauffassung ist sicher eine Grundlage zum Erfolg, denn nicht jede Aufgabe wird man sofort bewältigen, und auch einen Wettbewerb wird man nicht immer als Preisträger beenden.

In wenigen Wochen findet die XXV. DDR-Olympiade *Junger Mathematiker* statt. In der Jubiläumsolympiade sehen wir unseren spezifischen Beitrag in der breiten Volksbewegung, den XI. Parteitag der SED mit hervorragenden Leistungen zu würdigen.

Alle Leser der *alpha*, die an der vergangenen Bezirksolympiade erfolgreich teilgenommen haben, möchten wir noch nachträglich beglückwünschen, den Teilnehmern an der nächsthöheren Stufe aber wünschen wir viel Erfolg und erlebnisreiche Tage in Erfurt, dem Austragungsort der Jubiläums-DDR-Olympiade.

H. Bausch/D. Müller

Über die Mathematikolympiaden zum Beruf

Von der 4. bis zur 8. Klasse besuchte ich, Geburtsjahr 1947, eine Oberschule auf dem Lande. Mein Interesse in dieser Zeit galt vielen Fächern; Mathematik war eines von diesen. Die außerschulische Förderung an der Schule war einseitig auf den Sport zugeschnitten. Sportliche Erfolge bei Wettkämpfen fanden an der Schule große Anerkennung, bei einigen Lehrern weit mehr als gute schulische Leistungen. An Förderungsmöglichkeiten in anderen Fächern kann ich mich nicht erinnern.

Mein Interesse an der Mathematik verstärkte sich ab 9. Klasse an der EOS *Ernst Schneller* Torgau. Durch das regelmäßige Lösen der *Aufgaben der Woche* an der Schulwandzeitung und durch Erfolge bei Mathematikolympiaden wurde ich zur außerschulischen Beschäftigung mit der Mathematik angeregt. In der Regel habe ich dabei das Lösen von Aufgaben, z. B. von früheren internationalen Mathematikolympiaden, geübt. Stark beeinflußt haben mich in dieser Zeit die kontinuierliche Förderung durch meine Mathematiklehrerin an der EOS und die zweiwöchigen Lager, die jährlich für die Besten der Kreisolympiade zur Vorbereitung auf die Bezirksolympiade durchgeführt wurden. Die Förderungsmaßnahmen am damaligen *Mathematischen Institut* der Leipziger Karl-Marx-Universität, die in dieser Zeit gerade begannen, kamen für mich wegen der ungünstigen Verkehrsverbindungen nicht in Betracht.

Nach meinem 2. Preis bei der DDR-Olympiade in der 11. Klasse habe ich begonnen, mich in die Bücher von *Fichtenholz* zur *Differential- und Integralrechnung* einzuarbeiten. Obwohl ich dadurch viele Fakten des Stoffes im 1. Studienjahr schon kannte, war ich von der Grundvorlesung bei Professor Focke an der KMU Leipzig stark beeindruckt, weil hier der Stoff in der erforderlichen Strenge und als eine schöne einheitliche Theorie dargeboten wurde und sich dabei meine bisherige Auffassung von der Mathematik änderte.

Aus heutiger Sicht auf meinem Entwicklungsweg zu meinem Beruf möchte ich auf folgende Gesichtspunkte aufmerksam machen:

Ich halte es für wichtig, in den Mathema-

tikzirkeln an den Schulen und in der Mathematischen Schülergesellschaft sowohl mathematische Theorie zu entwickeln als auch konkrete Aufgaben mit Hilfe der Theorie und/oder auf originelle Weise zu lösen. Mathematische Zirkel, in denen nur das *Olympiadetraining* im Mittelpunkt steht, führen zu falschen Vorstellungen von der Wissenschaft Mathematik. Ich kann mich noch deutlich erinnern, wieviel Freude ich als Schüler daran hatte, zu schwierigen Aufgaben einen oder mehrere elegante Lösungswege zu finden. Zirkel, die zu sehr auf die Darlegung von mathematischer Theorie orientieren, bringen die Schüler um diese Freude.
Der sowjetische Nobelpreisträger Budker hat einmal gesagt:
Das Wertvollste, was ein Land besitzt, seien die Talente und die Schöpferkraft seiner Jugend. Meine Lehrerin an der EOS hatte dieses wohl erkannt und mir auf meinem Weg die Richtung gegeben. Ich bin der Richtung treu geblieben.

Prof. Dr. Konrad Schmüdgen,
Karl-Marx-Universität Leipzig – Wissenschaftsbereich Mathematische Physik

Ein Teilnehmer der 1. Olympiade Junger Mathematiker erinnert sich

25 Jahre *Olympiaden Junger Mathematiker* bedeuten für mich 25 Jahre engste Verbundenheit mit den Olympiaden.
1962 fand die 1. Olympiade statt. Damals ging ich gerade in die 5. Klasse – die unterste Klassenstufe, die in die Olympiaden einbezogen ist. Acht Jahre lang, bis zur 12. Klasse, nahm ich an Olympiaden teil. Gerne denke ich an die Erfolge zurück, die zunächst z. B. mit einem 3. Platz bei der Kreisolympiade in der 6. Klasse noch recht bescheiden waren und später durch eine sehr gute Förderung im *Bezirksklub Junger Mathematiker Neubrandenburg* mit einem Preis der XI. Internationalen Mathematik-Olympiaden 1969 in der SR Rumänien ihren Höhepunkt fanden.
Gleich danach begann ich u. a. als persönlicher Mentor im Bezirksklub Neubrandenburg und als AG-Leiter im Pionierhaus Rostock, jüngere Schüler auf die Olympiaden vorzubereiten. In den vergangenen 17 Jahren kamen viele weitere Aufgaben hinzu, u. a. als *Korrektor* und später als *Koordinator* bei den DDR-Olympiaden und in der Vorbereitung unserer IMO-Mannschaft. 1984 wurde ich fachlicher Leiter im Bezirksklub Neubrandenburg und Leiter der Mathematischen Schülergesellschaft Rostock. Mit all diesen Funktionen ist natürlich ein erheblicher Aufwand verbunden. Warum dieses Engagement?
Anfangs vor allem weil es Spaß machte und weil ich etwas von dem, was ich als Schüler an Förderung erfahren hatte, zurückgeben wollte. Später kam aus der eigenen Erfahrung immer mehr die Überzeugung zum Tragen, daß eine gute und frühzeitige Förderung eine sehr wesentliche Rolle in der Persönlichkeitsentwicklung von besonders begabten Schülern spielt. So konnten mehrere meiner ehemaligen Schüler nicht nur Preise bei DDR- und internationalen Olympiaden erreichen, sondern leisten als Studenten oder in der Praxis Überdurchschnittliches – Karl-Marx-Stipendien, wissenschaftliche Publikationen als Studenten oder sehr erfolgreiche Abschlüsse von Promotionen mögen das belegen.
Doch auch meine eigene wissenschaftliche Entwicklung ist ein Beispiel dafür. Ohne das frühzeitige Wecken der Begeisterung für die Mathematik und die Förderung während der Schulzeit im Bezirksklub durch StR *H. Birken,* StR *H.-J. Kerber,* StR *W. Kempcke* und OL *H. Pätzold* und später im Studium an der *Wilhelm-Pieck*-Universität Rostock u. a. durch Prof. Dr. *G. Burosch,* Prof. Dr. *W. Engel* und Doz. Dr. *M. Tasche* hätte ich sicher länger für die wissenschaftlichen Qualifikationen gebraucht und wäre nicht bereits 1985 mit 34 Jahren zum ordentlichen Professor für *Diskrete Mathematik* an die *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald berufen worden. Ich wünsche den *Olympiaden Junger Mathematiker,* daß sie für viele Schüler auch in den nächsten 25 Jahren eine ähnliche positive Rolle in der eigenen Entwicklung spielen werden. Ich werde nach Kräften daran mitarbeiten. *H.-D. Gronau*

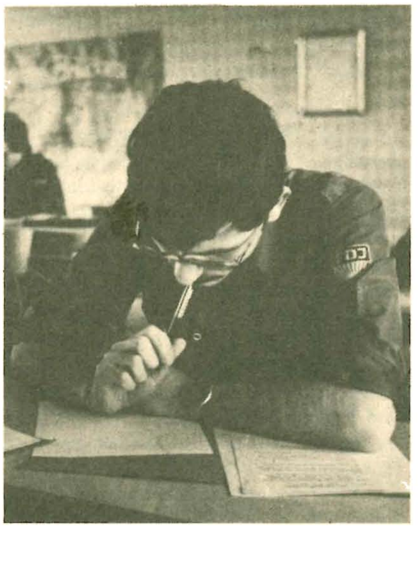
Von den Schülern der DDR errungene Preise bei Internationalen Mathematikolympiaden

IMO	Gastgeber	Jahr	1. Preis	2. Preis	3. Preis
I	Rumänien	1959	–	–	–
II	Rumänien	1960	–	–	–
III	Ungarn	1961	–	–	1
IV	ČSSR	1962	–	1	–
V	Polen	1963	–	–	3
VI	UdSSR	1964	–	1	2
VII	DDR	1965	–	2	3
VIII	Bulgarien	1966	3	3	–
IX	Jugoslawien	1967	3	3	1
X	UdSSR	1968	5	3	–
XI	Rumänien	1969	–	4	4
XII	Ungarn	1970	1	2	4
XIII	ČSSR	1971	1	1	4
XIV	Polen	1972	1	3	4
XV	UdSSR	1973	–	3	4
XVI	DDR	1974	–	5	2
XVII	Bulgarien	1975	–	4	4
XVIII	Österreich	1976	–	2	3
XIX	Jugoslawien	1977	2	1	1
XX	Rumänien	1978	nicht teilgenommen		
XXI	Großbritannien	1979	–	2	2
XXII	USA	1981	nicht teilgenommen		
XXIII	Ungarn	1982	2	1	1*)
XXIV	Frankreich	1983	–	–	5
XXV	ČSSR	1984	1	2	3
XXVI	Finnland	1985	–	2	4

1980 fand keine IMO statt.

*) 1982 wurde die Höchstteilnehmerzahl pro Mannschaft von vorher 8 auf 4 Schüler, ab 1983 auf 6 Schüler begrenzt.

Kleine Statistik: An den Kreisolympiaden *Junger Mathematiker* der DDR nehmen rund 25 000, an den Bezirksolympiaden rund 2 500 und an der DDR-Olympiade rund 250 Schüler teil. Die sechs Besten der DDR-Olympiade werden zur IMO delegiert. Unser Foto: Wettbewerbsatmosphäre



Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau

Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

▲2662▲ Ein Bankdirektor hat einen neuen Tresor mit 6 Schlössern. Zu jedem Schloß kann er beliebig viele Schlüssel anfertigen lassen. Er möchte möglichst vielen seiner Angestellten Schlüssel geben, um ihnen sein Vertrauen zu bekunden. Damit sich jedoch niemand überflüssig vorkommt, soll keiner nur solche Schlüssel erhalten, die ein anderer mindestens auch erhält.
Aus Sicherheitsgründen dürfen je drei Kollegen den Tresor noch nicht öffnen können, d. h., ihnen fehlt zusammen mindestens ein Schlüssel. Und schließlich müssen natürlich alle zusammen den Tresor öffnen können.
Wie vielen Angestellten kann der Direktor in diesem Sinne höchstens Schlüssel übergeben?
Bemerkung: Bezeichnen $S_1, S_2, \ldots, S_6$ die Schlösser, so könnte er zu jedem Schloß genau einen Schlüssel bestellen und diese auf 6 Angestellte verteilen. Man prüft leicht nach, daß dann alle Bedingungen erfüllt sind. Auch könnte er 8 Angestellte ins Vertrauen ziehen, wenn er Schlüssel zu folgenden Schlössern verteilt: $\{S_1, S_2\}$, $\{S_1, S_3\}$, $\{S_1, S_4\}$, $\{S_1, S_5\}$, $\{S_1, S_6\}$, $\{S_2, S_3\}$, $\{S_2, S_4\}$, $\{S_3, S_4\}$. Doch auch das ist noch nicht das Maximum! Das tatsächliche Maximum bietet dem Direktor, wenn er sich selbst einbezieht, eine besondere Situation. Welche?

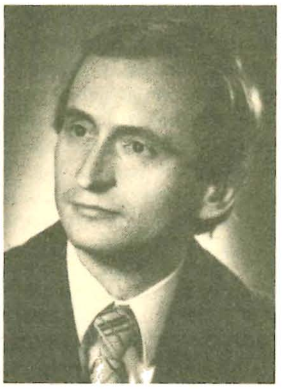
Eine Aufgabe von Prof. Dr. Peter Bachmann

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

▲2690▲ Frank und Franzi finden sich sehr sympathisch. Sie wollen sich Nachrichten austauschen, die andere nicht so leicht lesen können. Als Codierung schlägt Frank die Permutation der Buchstaben vor, d. h. eine eineindeutige Abbildung p des Alphabetes auf sich. Umlaute wollen sie nicht benutzen. Jede Codierung p soll als hintereinander auszuführende Folge $p_1 p_2 \ldots p_n$ *einfacher* Vertauschungen des Buchstaben A mit einem anderen Buchstaben des Alphabets beschrieben werden. Jedes p_i ist somit eine Permutation, die den Buchstaben A mit einem Buchstaben b vertauscht und alle anderen Buchstaben fest läßt. Die p_i werden durch den Buchstaben b, mit dem A zu vertauschen ist, beschrieben. So wird mit C die Vertauschung von A mit C bezeichnet. Die Permutation CKW entsteht, indem hintereinander die Vertauschungen A mit C, A mit K, A mit W ausgeführt werden.
Frank übersendet Franzi die Nachricht *DHNITBTGSOUR* mit dem Codewort BUCHSTABENRECHNUNG. Franzi freut sich über das Kompliment. Zugleich entdeckt sie, daß einige Codeworte wie OTTO, RETTER und auch MAMA zum Codieren nicht taugen. Außerdem beschreiben verschiedene Codeworte die gleiche Codierung, z. B. ROTOR und TOT. Sie bekommt Zweifel, ob mit dieser Methode alle Codierungen beschrieben werden können. Frank beruhigt sie und zeigt ihr sogar, wie lang die Codeworte dazu höchstens werden müssen.
Wie lautet das Kompliment an Franzi, warum kann jede Permutation auf die angegebene Weise beschrieben werden, und wie lang müssen die Codeworte dazu sein?

Kurzbiographie

Prof. Peter Bachmann wurde 1942 in Freital geboren und besuchte dort von 1957 bis 1961 die Erweiterte Oberschule. Die Lehrer *Bellmann* und *Umlauft* organisierten die Olympiadebewegung an der Schule und im Kreis und begeisterten auch den Schüler *Peter Bachmann* dafür. Er konnte 1961 beim Endausscheid der DDR-offenen 1. Berliner Mathematik-Olympiade einen 1. Preis erringen und wurde dadurch in die Delegation zur III. Internationalen Mathematikolympiade nach Ungarn aufgenommen. Dort belegte er einen mittleren Platz.



Von 1961 bis 1966 studierte er bei den Professoren Engel, Kochendörffer, Schmidt und Fenyö Mathematik, I. O. Kerner interessierte ihn für Informatik. Von 1966 bis 1974 arbeitete P. Bachmann im Kombinat Robotron in Dresden an Problemen der Compilertechnik und Betriebssysteme, von 1975 bis 1980 war er als Bereichsleiter im damaligen *Zentrum für Rechentechnik* der AdW in Berlin für Anwendungen der Rechentechnik, unter anderem in der Röntgenkristallstrukturanalyse und im Interkosmos-Programm zuständig. Die Ergebnisse seiner Dissertationen A und B konnte er 1971 in Ljubljana und 1977 in Toronto auf Weltkongressen der IFIP erfolgreich vorstellen. 1980 wurde er als Dozent und 1982 als ordentlicher Professor an die TU Dresden berufen. Hier forscht er auf dem Grenzgebiet von Algebra und Informatik. Er verfaßte bisher drei Bücher (bei zweien als Mitautor) und 30 wissenschaftliche Artikel.

Rundreise der Freundschaft: XI. IMO, SR Rumänien (1969): Die erfolgreichen IMO-Teilnehmer H.-D. Gronau (l.), A. Felgenhauer (r.) und der Chefred. der *alpha* (M.) bei einer Wanderung durch die Karpaten (Bild links). *14 Jahre später:* Dr. H.-D. Gronau, stellv. Delegationsleiter der DDR-Mannschaft und der Chefred. der *alpha* (r.) zur XXV. IMO in Prag (Bild rechts). (Siehe Beiträge v. Prof. Gronau S. 26/27!)

Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater*)

Der mathematischen Fachwelt ist *Gerhard Gentzen* (1909 bis 1945) durch seine Leistungen auf dem Gebiet der mathematischen Logik bekannt. Von ihm stammen die Regeln des „natürlichen Schließens", d. h. logische Schlußformen, die mehr der Praxis des mathematischen Denkens entsprechen als die bis dahin fixierten. Gentzen entwickelte auch das Sequenzenschließen, mit dessen Hilfe er neues Licht in die Beziehungen zwischen klassischer und intuitionistischer Logik brachte. Das Sequenzenschließen ist zu einem wesentlichen Bestandteil der Beweistheorie geworden, eines Spezialgebietes, das für den weiteren Fortschritt der Computer-Wissenschaften immer mehr an Bedeutung gewinnt. Von Gentzen stammt auch ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie, ein sehr schwieriger Beweis, dessen Bedeutung allerdings von einigen Logikern bestritten wurde.

Auf diese Fragen jedoch und deren philosophische Hintergründe soll hier nicht eingegangen werden. Uns geht es um den Schüler, um den Gymnasiasten Gerhard Gentzen.

Die Eltern lebten in Bergen auf Rügen, wo der Vater seit 1905 als Rechtsanwalt tätig war. Die Mutter hat zeitweise als Handelsschullehrerin gearbeitet. Am 24. 11. 1909 ist Gerhard Gentzen in Greifswald geboren. Seine frühe Kindheit verlebte er in Bergen, den ersten Unterricht erhielt er von seiner Mutter. Ostern 1918 wurde er Schüler der Realschule in Bergen, die er nur zwei Jahre besuchte. Im Frühjahr 1919 starb der Vater, und so entschloß sich die Mutter, mit den beiden Kindern zur Großmutter nach Stralsund überzusiedeln. Gerhard besuchte nun das dortige Gymnasium. Zu Hause herrschte eine weltoffene Atmosphäre. Die Großmutter, die einer Hugenottenfamilie entstammte, sprach Englisch und Französisch, sie besaß eine Bibliothek in beiden Sprachen.

Einen herzlichen Kontakt gab es zu dem Großvater Alfons Bilharz aus Sigmaringen am Bodensee. Alfons Bilharz ist jüngerer Bruder des bekannten Arztes und Forschers Theodor Bilharz, der jahrelang in Kairo wirkte und sich große Verdienste um die Bekämpfung der nach ihm benannten Bilharziose, einer von einem Saugwurm hervorgerufenen Krankheit, erwarb. Alfons Bilharz, ebenfalls Arzt, arbeitete über 10 Jahre in den USA, war danach Leiter des Krankenhauses in Sigmaringen und schrieb im Alter eine Reihe philosophischer Bücher. Er kümmerte sich sehr um seinen Enkel Gerhard Gentzen, und es ist anzunehmen, daß er auf den jungen Gentzen einen spürbaren Einfluß hatte. Der Brief, den wir hier abdrucken, ist an ihn gerichtet. Gentzen hat ihn höchstwahrscheinlich im Dezember 1922, also als 13jähriger Schüler, geschrieben.

Den Lehrern des Stralsunder Gymnasiums fiel Gentzen bald als besonders talentiert auf. Er fertigte 1926 und 1927 besondere Studienarbeiten an, woraufhin der Mutter jeweils eine Erziehungsbeihilfe von 1 000 Mark gewährt wurde – eine Unterstützung, die sehr willkommen war, denn die Familie lebte in ziemlich bescheidenen Verhältnissen. Diese Studienarbeiten sind offenbar nicht erhalten geblieben. Mit welchem Thema sich Gentzen hierin beschäftigte, können wir der „Meldung des Oberprimaners Gerhard Gentzen zur Reifeprüfung Ostern 1928" entnehmen. Er schreibt: „Von den Unterrichtsgegenständen hat mich die Mathematik am meisten gefesselt, und ich habe mich viel mit ihr beschäftigt. 1922 begeisterte ich mich für die Sternkunde und versuchte bald, die Stellungen der Planeten am Himmel vorauszubestimmen zu können. 1924 bearbeitete ich das Problem mathematisch und löste es nach vielen Versuchen. In demselben Jahre wandte ich mich der analytischen Geometrie zu, worüber ich in Unterprima (1926/27) eine Studienarbeit anfertigte. Ich möchte demnach Mathematik studieren."

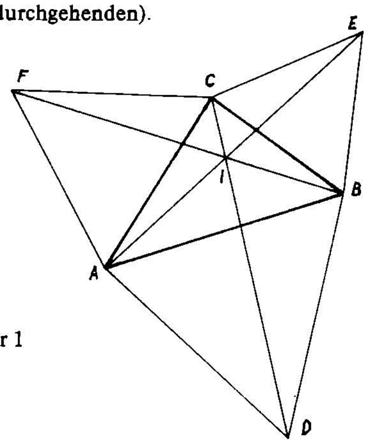
Gentzen beteiligte sich am wahlfreien englischen Unterricht und an philosophischen, griechischen und geschichtlichen Arbeitsgemeinschaften. Die Lehrer schrieben in der Abschlußbeurteilung über ihn: „Er ist der begabteste Schüler, den die Anstalt seit langem gehabt hat." *G. Robbel*

*) Für die diesem Artikel zugrunde liegenden Materialien und Informationen möchte ich Frau *W. Student*, der Schwester *G. Gentzens*, und dem *Stadtarchiv Stralsund* danken. Frau Student stellte freundlicherweise auch den Brief und die Fotografie zur Publikation zur Verfügung.

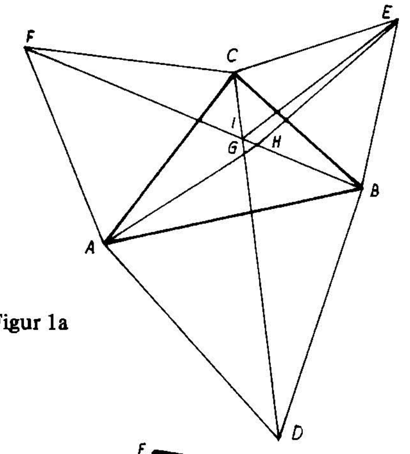
Lieber Großpapa!

Da ich weiß, daß Du Dich für meine mathematischen Fortschritte interessierst, schicke ich Dir folgende selbstgefundenen und selbstbewiesenen Lehrsätze:

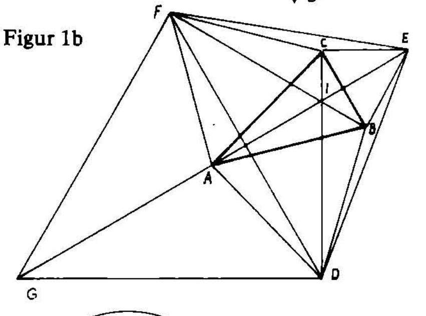
Ich zeichne über den Seiten eines beliebigen Dreiecks die gleichseitigen Dreiecke (Figur 1) und verbinde ihre Spitzen mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks. Diese Linien nenne ich der Kürze halber Pereunten (pereuntes, die Hindurchgehenden).



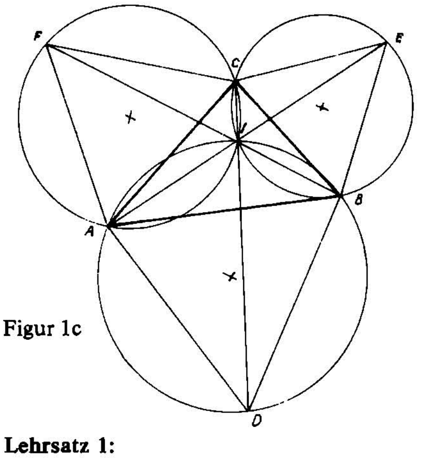
Figur 1



Figur 1a



Figur 1b



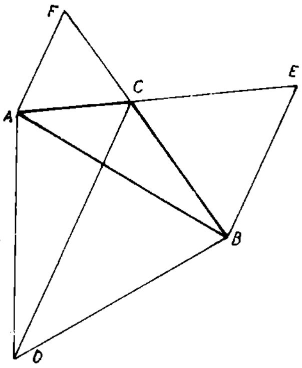
Figur 1c

Lehrsatz 1:
Zeichne ich in einem Dreieck, dessen einer Winkel gleich 120° ist, über der gegenüberliegenden Seite das gleichseitige

Dreieck, so halbiert die Pereunte den Winkel.

Zum Beweis zeichne ich auch über den beiden anderen Seiten die gleichseitigen Dreiecke (Figur 2)

Figur 2



Nun ist
$$\left.\begin{array}{l} AF = AC \\ AD = AB \end{array}\right\}\ \text{nach Voraussetzung}\ ^{1)}$$
$$\underline{\sphericalangle FAB = CAD \quad (60° + CAB)}$$
$$\triangle FAB \cong \triangle CAD$$

(Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich, so sind sie kongruent.)

Also ist auch $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ACD$

$\sphericalangle AFB = 60°$

$\sphericalangle ACD = 60°$,

also die Hälfte von $\sphericalangle ACB$, was zu beweisen war.

Lehrsatz 2:

Die Pereunten eines Dreiecks sind gleich, schneiden sich in einem Punkte und bilden um diesen lauter Winkel von 60°.

Beweis (Figur 1):

$AF = AC$ und $CE = CB$

$AB = AD$ und $CA = CF$

$\underline{\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAD}$ und $\underline{\sphericalangle ECA = \sphericalangle BCF}$ [2)]

$\triangle FAB \cong \triangle CAD$ und $\triangle ECA \cong \triangle BCF$

wie oben

$FB = CD$ $\quad$ $EA = BF$

Also ist $CD = FB = EA$, was zu beweisen war.

Ebenso ist $\sphericalangle CEA = CBF$ und $\sphericalangle BEA = BCD$ als gleiche Stücke in kongruenten Dreiecken.

$\underline{\sphericalangle CEA + \sphericalangle BEA = 60°}$

$\sphericalangle CBF + \sphericalangle BCD = 60°$

$\sphericalangle CBF + BCD + BIC = 180°$

(die Summe der Winkel eines Dreiecks)

$\underline{\sphericalangle BIC = 120° \ (180° - 60°)}$ [3)]

$\sphericalangle CIE = \ 60°$ (Lehrsatz 1)

Auch ist (angenommen, EA ginge nicht durch I, so würde es die anderen Pereunten vielleicht in G und H schneiden)

$\sphericalangle GCE + \sphericalangle CEG + \sphericalangle EGC = 180°$

$\underline{\sphericalangle GCE = 60° + \sphericalangle BCG}$

$\sphericalangle BCG + CEG + EGC + 60° = 180°$

$\underline{\sphericalangle BCG = \sphericalangle BEA \text{ wie oben}}$

$\sphericalangle BEA + CEG + EGC + 60° = 180°$

$\underline{\sphericalangle BEA + \sphericalangle CEG = 60°}$ [4)]

$\underline{60° + EGC + 60° = 180°}$

$\sphericalangle EGC = 60°$

$\underline{\text{Oben ist auch } \sphericalangle CIE = 60°}$

$\sphericalangle EGC = \sphericalangle CIE$

$\sphericalangle EGC = CIE + IEG$ (ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Innenwinkel, die nicht seine Nebenwinkel sind)[5]). Also ist $\sphericalangle IEG = 0°$, oder EIA und $EGHA$[6]) decken sich, was zu beweisen war.

Nun bleibt noch zu beweisen, daß alle Winkel um I gleich 60° sind.

$\triangle FAB \cong CAD$ und $\triangle ECA \cong BCF$ wie oben bewiesen ist. Ebenso läßt sich beweisen, daß $\triangle CDB \cong EAB$ ist. Dann ist

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle AFB$ $\quad$ $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CEA$

$\underline{\sphericalangle EAC = \sphericalangle BFC}$ $\quad$ $\underline{\sphericalangle DCB = \sphericalangle AEB}$

$\sphericalangle CIA = \sphericalangle 120°$ $\quad$ $\sphericalangle BIC = 120°$

$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BDC$

$\underline{\sphericalangle FBA = \sphericalangle CDA}$

$\sphericalangle AIB = 120°$

wie oben. Dann sind nach Lehrsatz 1 alle Winkel um I gleich 60°, was zu beweisen war.

Lehrsatz 3:

Verbinde ich die Spitzen der über den Seiten eines Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke miteinander, so decken sich die Pereunten des so entstandenen Dreiecks mit denen des Grunddreiecks.

Beweis: Verbinde ich in Figur 1 F mit D und zeichne über FD das gleichseitige Dreieck,[7]) so ist $\sphericalangle FID = 120°$ und wird von IA halbiert (Lehrsatz 2, 3. Teil), also geht nach Lehrsatz 1 IA durch die Spitze des Dreiecks über FD, oder, die Pereunte AE ist ebenfalls Pereunte in $\triangle FED$. Ebenso ist dies für die anderen beiden zu beweisen.

Lehrsatz 4:

Die Umkreise der drei über den Seiten eines Dreiecks gezeichneten gleichseitigen Dreiecke schneiden sich im Schnittpunkt der Pereunten.

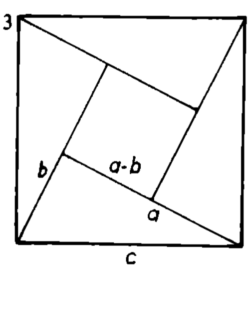
Beweis (Figur 1):

$\underline{\sphericalangle ADB = 60°, \ \sphericalangle AIB = 120° \ (\text{Lehrs. } 2)}$ [8)]

Viereck $AIBD$ ist ein Sehnenviereck, da die Summe zweier gegenüberliegender Winkel $2R$ beträgt. Also geht der Kreis um ABD durch I. Dasselbe ist ebenso für $AICF$ und $BICE$ zu beweisen.

In der Schule sind wir in Geometrie gerade bis zum pythagoreischen Lehrsatz gekommen. Für diesen habe ich selbst einen eigenen Beweis gefunden (Figur 3):

Figur 3

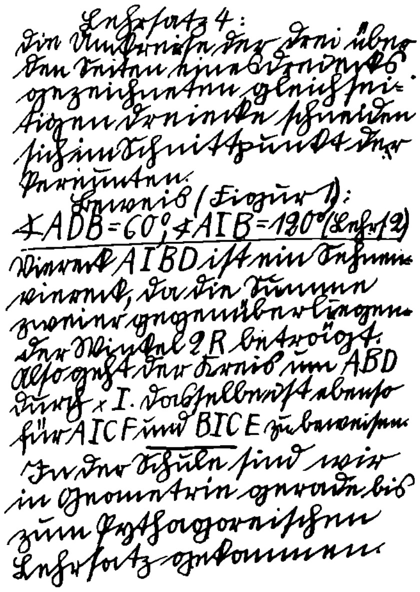


Die Winkel an den Ecken dieser Figur sind rechte, denn die Winkel eines Dreiecks sind $2R$ und der dritte Winkel des Dreiecks mit den Seiten a, b und c ist gleich R. Also sind a und b die Katheten, c die Hypotenuse, die ganze Figur ist c^2, das Quadrat in der Mitte $(a-b)^2$, der Inhalt jedes der Dreiecke $\frac{ab}{2}$. Also ist

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a-b)^2$$
$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ein Fröhliches Weihnachtsfest wünscht

Gerhard


Lehrsatz 4:
Die Umkreise der drei über
den Seiten eines Dreiecks
gezeichneten gleichseitigen
Dreiecke schneiden
sich im Schnittpunkt der
Pereunten:
Beweis (Figur 1):
∢ADB=60°, ∢AIB=120° (Lehrs.2)
Viereck AIBD ist ein Sehnen-
viereck, da die Summe
zweier gegenüberliegen-
der Winkel 2R beträgt.
Also geht der Kreis um ABD
durch I. Dasselbe ist ebenso
für AICF und BICE zu beweisen.
In der Schule sind wir
in Geometrie gerade bis
zum pythagoreischen
Lehrsatz gekommen

Auszug aus dem Brief des 13jährigen G. Gentzen an seinen Großvater

Fußnoten zum Brief

1) Es wird stillschweigend die Tatsache verwendet, daß die Strecke CF Fortsetzung der Strecke BC ist.

2) In analoger Weise folgt $\triangle ABE \cong DBE$ und hieraus die Gleichheit $\sphericalangle BEA = BCD$. Dies aufzuschreiben hielt Gentzen offensichtlich nicht für notwendig.

3) Der Schnittwinkel von 60° zwischen den Pereunten ergibt sich auch unmittelbar aus der Tatsache, daß die als kongruent nachgewiesenen Dreiecke auseinander durch eine Drehung von 60° um den jeweiligen Dreieckseckpunkt hervorgehen. Gentzen hält sich jedoch streng an die Kongruenzsätze.

4) Zur besseren Verdeutlichung des jetzt folgenden indirekten Beweises wird die Figur 1 noch einmal als Figur 1a dargestellt. Gentzen bezeichnet, ohne es ausdrücklich zu erwähnen, mit I den Schnittpunkt der Pereunten DC und FB.

5) Der Satz über Stufenwinkel hätte auch herangezogen werden können. Aber Gentzen scheint Wert darauf zu legen, vor allem Sätze der Dreieckslehre zu benutzen.

6) Die oben angegebene Winkelgleichheit $\sphericalangle BCG = BEA$ verlangt, daß G auf der Strecke CD liegt. Deshalb sollte hier besser $EHGA$ stehen.

7) siehe Figur 1b. 8) siehe Figur 1c.

In diesem Beitrag wurden (teilweise) nicht die üblichen Symbole für Winkel, Dreiecke und Strecken verwendet.

Schulolympiaden in der MVR

In der Mongolischen Volksrepublik werden jährlich in der Schule Mathematikolympiaden für die Klassen 5 bis 7 in zwei Stufen durchgeführt: Die *Klassenolympiade* und die *Schulolympiade.*
Die fünf besten Schüler der Klassenolympiade nehmen an der zweiten Stufe, der Schulolympiade, teil. Dort wird dann der *Schulmeister der jeweiligen Klassenstufe* ermittelt.
Unser langjähriger Freund, Herr Dipl.-Math. *P. Altanzog*, Institut für Physik und Technik, Akademie der Wissenschaften der Mongolischen Volksrepublik, Ulan Bator, sandte der Redaktion *alpha* eine Auswahl von Aufgaben des Wettbewerbsjahres 1985. Wir wollen euch Aufgaben davon vorstellen und dazu Bemerkungen zum Lösen und Weiterdenken machen.

Klassenstufe 5
(Klassenolympiade, 1. Stufe)

5.1.1. Gesucht sind vier natürliche Zahlen. Ihre Summe und auch ihr Produkt soll 8 sein.
Bemerkung: Es gibt a) 2, b) 3 natürliche Zahlen, deren Summe und Produkt gleich sind. Wie lauten sie? Und hast du die 5.1.1. gelöst, so findest du auch bald die fünf natürlichen Zahlen, deren Summe und Produkt 8 betragen.

5.1.2. Vor einer Katze waren genau zwei Katzen; auch hinter einer waren genau zwei. Wieviel Katzen waren es, wenn zwischen diesen beiden Katzen genau eine Katze war?
Bemerkung: Mit nur einer Lösung hast du die Aufgabe auch nur halb gelöst. Anders wäre es, wenn auch zwischen beiden genau zwei Katzen wären. – Eine Zeichnung hilft sofort!

5.1.3. Wie findet man beliebig viele Zahlen, die durch 5 geteilt einen Rest 2 haben und gerade sind?
Bemerkung: Hier kann verschieden formuliert werden. Überlege das! – Wie lautet die Antwort, wenn die Zahlen statt gerade ungerade sein sollen?

5.1.4. Wie müßte man einige Zahlen vertauschen, damit man in jeder Spalte die gleiche Summe erhält?

2	3	4
5	6	12
7	10	13
15	11	14

Bemerkung: Es gibt als Lösung verschiedene Möglichkeiten. Sicher eine leichte Aufgabe.

Klassenstufe 6
(Klassenolympiade, 1. Stufe)

6.1.1. Gib alle natürlichen Zahlen n an, für die $\frac{3\cdot n^2+2\cdot n-20}{n}$ auch eine natürliche Zahl ist!
Bemerkung: Da ein Durchprobieren viel Zeit kostet, bedenke: Man dividiert eine Summe (Differenz) durch eine Zahl, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert.

6.1.2. Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 3024. Wie lauten diese Zahlen?
Bemerkung: Kann eine der Zahlen 10 sein? Können alle vier Zahlen größer als 10 sein?

6.1.3. Welche Potenz ist größer, 3^{21} oder 9^{10}?
Bemerkung: Um vergleichen zu können, schreibt man die Potenzen als Produkte! Etwas schwerer wäre z. B. die Untersuchung von 4^8 und 8^4.

6.1.4. Welche Primzahlen p erfüllen die Ungleichung
$$45 \leq 2\cdot p - 1 \leq 60?$$
Bemerkung: Beachte als erstes nur das Gleichheitszeichen!

Klassenstufe 5
(Schulolympiade, 2. Stufe)

5.2.1. Löse die Gleichung
$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 687$,
wenn $\overline{abc}$ bzw. $\overline{bc}$ drei- bzw. zweistellige natürliche Zahlen sind!
Bemerkung: Mancher löst die Aufgabe lieber, wenn Summanden und Ergebnis untereinandergeschrieben werden. Ansonsten gilt das, was schon bei Aufgabe 5.1.2. anfangs angedeutet wurde.

5.2.2. Gesucht sind dreistellige natürliche Zahlen. Dabei sollen ihre Ziffern geradzahlig und verschieden sein. Faßt man die drei Ziffern als Zahlen auf, so sollen die gesuchten Zahlen durch das Produkt aus diesen drei Zahlen teilbar sein.
Bemerkung: Es gibt doch sicherlich nur vier Möglichkeiten für den Divisor. Welche?

5.2.3. Löse die Multiplikationsaufgabe!
$$\begin{array}{r} \underline{xxx\cdot x8x} \\ xxxx \\ xxx \\ \underline{xxxx} \\ xxxxx5 \end{array}$$
Bemerkung: Sie sieht schwerer aus, als sie ist. Die ersten Überlegungen macht man wohl sicher mit den beiden schon bekannten Ziffern.

5.2.4. In einer Familie ist der Vater zwei Jahre älter als die Mutter und der Sohn drei Jahre älter als die Tochter. Addiert man das Alter von allen, so erhält man 73. Vor vier Jahren betrug diese Summe 58. Wie alt ist jetzt jeder?
Bemerkung: Beachte, daß $73 - 4\cdot 4 = 57$!

Klassenstufe 6
(Schulolympiade, 2. Stufe)

6.2.1. In einem Kasten liegen 24 Kugeln, und zwar rote, blaue, grüne und weiße. Es sind doppelt so viele rote wie blaue und doppelt so viel blaue wie grüne. Wieviel waren es von jeder Farbe, wenn es nicht mehr weiße als grüne Kugeln waren?
Bemerkung: Eine Gleichung (oder Ungleichung) hilft da sicher weiter. Beginne mit den grünen Kugeln!

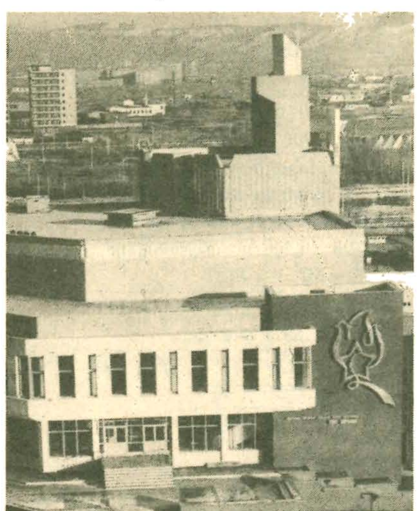
6.2.2. Ein Schüler hat vier Aufgaben der 1. Stufe und drei Aufgaben der 2. Stufe gelöst und insgesamt 60 Punkte erhalten. Wieviel Punkte bekam er für jede Aufgabe, wenn er in jeder Stufe für jede Aufgabe gleich viel Punkte erhielt und in der 1. Stufe für jede Aufgabe einen Punkt mehr erhielt als für jede Aufgabe in der 2. Stufe?
Bemerkung: Auch hier hilft sicher eine Gleichung weiter. Oder man fragt sich: Wieviel Punkte hätte er bekommen, wenn er bei der 1. Stufe genau so viele Punkte je Aufgabe erhalten hätte wie bei der 2. Stufe?

6.2.3. Die fünfstellige Zahl $\overline{42x4y}$ soll durch 72 teilbar sein.
Wie lauten die Ziffern x und y?
Bemerkung: Es ist $72 = 9\cdot 8$. Und die Teilbarkeitsregeln muß man kennen!

6.2.4. Schreibe die Zahl 91 als Summe von natürlichen Zahlen so, daß das Produkt aus diesen Zahlen ebenfalls 91 beträgt!
Bemerkung: Diese Aufgabe lösen wir sofort, wenn wir schon Aufgabe 5.1.1. richtig gelöst haben.

D. Altanzog/H.-J. Kerber

Der neue Pionierpalast in Ulan Bator wurde 1985 eingeweiht.



Über Vielecke und Kreise in der Taxi-Geometrie

Im folgenden möchte ich euch, liebe Mathematik-Knobelfreunde, mit einer leicht verständlichen, aber ungewohnten Geometrie vertraut machen. Jeder von euch kann ihre Struktur auf einem karierten Blatt Papier studieren und leicht neue Sätze entdecken. Diese Geometrie wollen wir *T-Geometrie* oder *Taxi-Geometrie* nennen, denn man kann sie durch Taxifahrstrecken in einer idealisierten *Stadt* wie folgt modellieren:

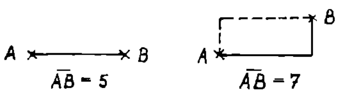
Die *T-Ebene*, d. h. die *Stadt*, in der das Taxi fährt, ist das karierte Blatt Papier. Die *Häuserblöcke* sind die Quadrate des quadratischen Gitters des Blattes.

T-Geraden, d. h. *Taxi-Fahrstraßen*, sind die Horizontal- und Vertikalgeraden des Gitters von Quadraten.

T-Punkte sind die Schnittpunkte dieser Horizontal- und Vertikalgeraden des Gitters *(Straßenkreuzungen)*.

Um den T-Abstand $\overline{AB}$ zweier T-Punkte A und B ($\neq A$) zu messen, unterscheiden wir zwei Fälle: (Bild 1)

Bild 1



1. A und B liegen auf derselben T-Geraden $g(AB)$. Dann wird der T-Abstand $\overline{AB}$ gemessen, indem wir die *Häuserblöcke* abzählen, die zwischen A und B liegen.
2. Wenn A und B nicht zur selben T-Geraden gehören, so finden wir den T-Abstand $\overline{AB}$ als Anzahl der *Häuserblöcke*, die ein Taxi auf kürzestem Wege umfahren muß, um von A nach B (beziehungsweise von B nach A) zu gelangen.

In der ebenen Geometrie existiert zu zwei Punkten A und B ($\neq A$) genau eine kürzeste Verbindung $\overline{AB}$. Demgegenüber gibt es in der T-Geometrie mehrere kürzeste Wege, durch die zwei Punkte A und B verbunden werden können, wenn A und B nicht auf einer T-Geraden liegen. Im folgenden bezeichnet *Weg* jeden Fahrweg eines Taxis, der von einem zum anderen Punkt führt bei minimaler Anzahl der dabei zu passierenden Häuserblöcke.

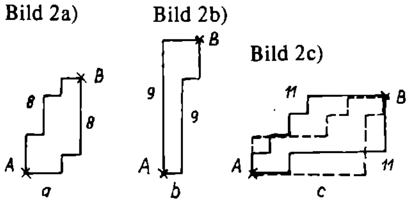
Wir wollen einige Begriffe der ebenen Geometrie in die T-Geometrie übertragen und neue Begriffe der T-Geometrie erklären.

Ein *Punkt X liegt zwischen A und B* ($\neq A$) d. h. $Zw(AXB)$, wenn das Taxi auf einem kürzesten Weg von A nach B die Punkte A, X und B in dieser Reihenfolge passiert ($X \neq A$ und $X \neq B$). Sind A, B zwei Punkte, so wird die Menge $\{X: \{Zw(AXB)$ oder $X = A$ oder $X = B\}$ die *T-Strecke* $\overline{AB}$ genannt. Die T-Strecke $\overline{AB}$ ist demnach die Punktmenge, die die Endpunkte A, B und alle zwischen A und B liegenden Punkte, *innere Punkte* genannt, enthält.

Ein *T-Streckenzug* ist die Vereinigung von n-T-Strecken, in der je zwei aufeinanderfolgende Strecken genau einen Endpunkt gemeinsam haben. Ein geschlossener T-Streckenzug $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, dessen n Eckpunkte in der T-Ebene liegen, heißt *T-Vieleck* (oder T-n-Eck oder T-Polygon). Wir vereinbaren, daß in einem T-Vieleck drei benachbarte Eckpunkte nicht auf einer T-Geraden liegen. Die Verbindungsstrecke zweier benachbarter Eckpunkte heißt *T-Vieleckseite* (oder T-n-Eckseite oder T-Polygonseite). Eine T-Verbindungsstrecke zweier nichtbenachbarter Eckpunkte eines T-n-Ecks ($n > 3$) heißt Diagonale des T-n-Ecks.

In der Menge der T-n-Ecke sind die T-Zweiecke enthalten, die es in der ebenen Geometrie nicht gibt. Ein T-n-Eck mit $n = 2$ heißt *T-Zweieck*. Bild 2 zeigt einige Varianten von T-Zweiecken.

Bild 2a) Bild 2b) Bild 2c)



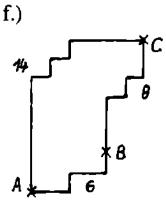
Zwei verschiedene T-Zweiecke können das gleiche Paar von T-Eckpunkten haben (Bild 2c). Die zwei Seiten eines beliebigen T-Zweiecks müssen gleich lang sein, da sie kürzeste Wege zwischen denselben Punkten darstellen.

Aufgaben

▲1▲ Zeichne ein Zweieck P_1P_2 mit der Seitenlänge 7!

Ein ungleichseitiges T-Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C und den Seitenlängen 14, 8 und 6 zeigt Bild 3. Die Seiten eines T-Dreiecks müssen Wege des Taxis sein. Diese Wege, die ein T-Dreieck mit gegebenen Seitenlängen bilden, können verschiedene Formen haben, sind aber gleich lang. Typisch für die Taxi-Geometrie ist die wichtige Erkenntnis, daß die *Dreiecksungleichung nicht gilt* (Bild 3). (Siehe hierzu: Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6, 15. Auflage, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1983; S. 113f.)

Bild 3



▲2▲ Ermittle ein gleichseitiges T-Dreieck $P_1P_2P_3$ mit der Seitenlänge 8!

Bild 4

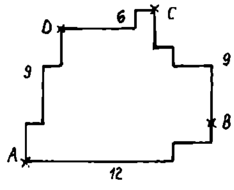


Bild 4 zeigt ein *T-Viereck* mit den Seitenlängen 9, 6, 9 und 12. Drei *T-Quadrate*, alle mit der Seitenlänge 6, sind in Bild 5 dargestellt. Der Satz: *Die Diagonalen eines Quadrates sind gleich lang* gilt in der T-Geometrie im allgemeinen nicht.

▲3▲ Für welches Quadrat des Bildes 5 gilt dieser Satz?

Bild 5a) Bild 5b)

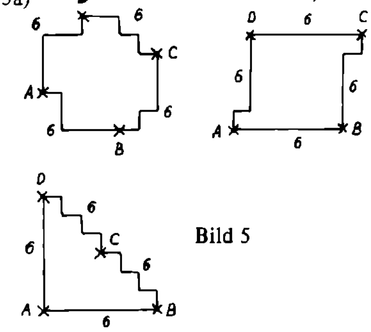
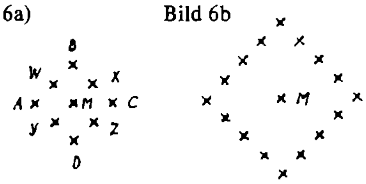


Bild 5

Aus Bild 5 ist ersichtlich, daß T-Quadrate sehr vielfältige Formen annehmen können.

Ein *T-Kreis* ist die Menge aller T-Punkte, die von einem gegebenen T-Punkt M, dem Mittelpunkt des T-Kreises, den gleichen T-Abstand $\overline{MP} = r (r > 0)$ haben. Das überraschende Resultat (für $r = 2$) zeigt Figur 6a. Der T-Kreis besteht aus 8 Punkten. Ein T-Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r (r > 0$ und r ganz) wird aus $4r$ T-Punkten gebildet. Der Kreisumfang ist $8r$.

Bild 6a) Bild 6b



▲4▲ Ermittle zwei T-Kreise mit den Radien $r_1 = 3$ und $r_2 = 5$! Bestimme die Anzahl der Kreispunkte, und berechne den Kreisumfang!

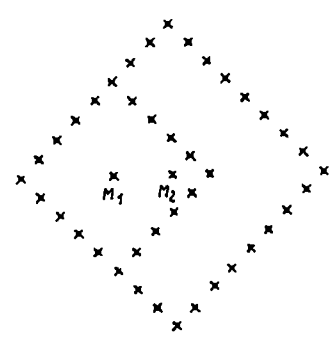
Übertragen wir die Definition von π (das Verhältnis des Kreisumfanges zu seinem Radius), so hat π in der T-Geometrie exakt den Wert 4.

Die Menge der T-Kreispunkte enthält als Teilmenge Eckpunkte von T-n-Ecken.

▲5▲ Suche T-Kreispunkte in Bild 6a, die Eckpunkte eines T-Zweiecks, gleichseitigen T-Dreiecks, T-Quadrates, regulären T-Fünfecks, regulären T-Sechsecks, regulären T-Siebenecks, regulären T-Achtecks sind!

In der euklidischen Geometrie gilt bekanntlich der Satz, daß sich zwei Kreise in

Bild 7



höchstens zwei Punkten schneiden können. Wie Bild 7 zeigt, gilt dieser Satz in der T-Geometrie nicht. Das heißt: Zwei T-Kreise können sich in einer beliebigen Anzahl von T-Punkten schneiden. Je *größer* die T-Kreise sind, um so größer ist die mögliche Anzahl von Schnittpunkten.

▲6▲ Ermittle zwei T-Kreise mit den Radien $r_1 = 4$ und $r_2 = 7$, die sich nicht schneiden, in einem Punkt berühren, in 9 Punkten schneiden!

Abschließend sei bemerkt:
Nach dieser anschaulichen Skizzierung des Gegenstandes der Taxi-Geometrie können, z. B. in Schülerzirkeln, weiterführend folgende Problemkreise untersucht werden:
- Übertragung von Begriffsbildungen, Sätzen und Relationen der Schulgeometrie (z. B. Mittelsenkrechte, Parallelität) in die T-Geometrie,
- geometrische Konstruktionen in der T-Geometrie,
- Ausdehnung der T-Geometrie auf Gitter, die aus regelmäßigen n-Ecken, statt Quadraten bestehen.

Bei allen Betrachtungen ist nur zu sichern, daß der *Taxi-Chauffeur* immer den *Straßen* folgt und den kürzesten Weg nimmt, um zum Bestimmungsort zu gelangen.

P. Knabe

Jakob Steiner irrte sich

Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt

Im Jahre 1841 legte der Geometer *Jakob Steiner* (1796 bis 1862), Professor an der 1810 gegründeten Berliner Universität, der Pariser Akademie zwei seiner bedeutendsten Abhandlungen vor, in denen er die Ergebnisse seiner langjährigen Untersuchungen „über Maximum und Minimum bei den Figuren der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt“ niedergelgt hat.
Darin beschreibt *Steiner* auch eine einfache geometrische Konstruktion, die es ermöglicht, zu jeder geschlossenen und nicht kreisförmigen ebenen Kurve K eine neue Kurve C zu konstruieren, die wieder eben und geschlossen ist, ferner gleichen Umfang, aber größeren Flächeninhalt hat wie K.
Schon der Grieche *Zenodoros* (2. Jh. v. u. Z.) hatte vermutet, daß es der Kreis ist, der von allen ebenen Figuren gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt hat. Er konnte dieses nur für den Spezialfall beweisen, daß er den Kreis mit Polygonen verglich. *Steiner* meinte nun, diese Vermutung allgemein bewiesen zu haben. Aus der Konstruktion der Kurve C aus der Kurve K folgerte er nämlich: „Unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfang hat der Kreis den größten Inhalt.“ *Dirichlet*, ebenfalls Professor der Berliner Universität, soll *Steiner* auf die Lückenhaftigkeit seiner Schlußweise hingewiesen haben.
Worin besteht diese?

H. Pieper

Überlegung zu einer Aufgabe der Mathematikolympiade

In der XVIII. Mathematikolympiade *Junger Mathematiker* der DDR lautete eine Aufgabe der dritten Stufe für die Klasse 9: *Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist: „Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.“*

1. Indem wir zunächst einmal die Quersumme einiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen auf die Teilbarkeit durch 4 untersuchen, wollen wir Hinweise zum Lösungsweg gewinnen.

natürliche Zahl k	Quersumme $Q(k)$	$Q(k)$ ist durch 4 teilbar	Rest, der bei der Division von $Q(k)$ durch 4 bleibt
17 324	17	nein	1
17 325	18	nein	2
17 326	19	nein	3
17 327	20	ja	0
17 328	21	nein	1
17 329	22	nein	2
17 330	14	nein	2
17 331	15	nein	3
17 332	16	ja	0
17 333	17	nein	1
17 334	18	nein	2
17 335	19	nein	3
17 336	20	ja	0
17 337	21	nein	1

Wir stellen fest:
Solange bei den aufeinanderfolgenden Zahlen k kein „Zehner“ (Vielfaches von 10) überschritten wird, sind auch deren Quersummen $Q(k)$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Deshalb gibt es in diesen Fällen jeweils drei aufeinanderfolgende Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist. Abweichungen von dieser Regelmäßigkeit treten offenbar beim Übergang zu einem neuen „Zehner“, „Hunderter“, „Tausender“ usw. auf. In unserem Fall gibt es an dieser Stelle eine Serie von vier aufeinanderfolgenden Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.

▲1▲ Untersuche, ob bei jedem Übergang zu einem neuen „Zehner“ (die „Hunderter“ sollen unverändert bleiben) eine Serie von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen auftritt, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist!

2. Der oben stehenden Tabelle entnehmen wir:
Während die bei der Division durch 4 auftretenden Reste immer um 1 wachsen bis auf 3, um dann wieder auf 0 zu fallen, bleibt beim Übergang zum neuen Zehner der Rest unverändert. Daß das immer so ist, zeigt folgende Überlegung: Ist z eine natürliche Zahl mit genau einer Null am Ende, so hat die Zahl $z - 1$ am Ende eine 9. Für die Quersumme von z, die wir wieder mit $Q(z)$ bezeichnen, gilt:
$Q(z) = Q(z-1) - 9 + 1 = Q(z-1) - 8$.
Läßt $Q(z-1)$ bei der Division durch 4 den Rest r, d. h. ist
$Q(z-1) = 4 \cdot t + r$,
so ist
$$Q(z) = Q(z-1) - 8 = 4 \cdot t + r - 8 = 4 \cdot (t-2) + r.$$
$Q(z)$ läßt also bei der Division durch 4 ebenfalls den Rest r. Immer, wenn dieser Rest verschieden von Null ist, gehört die Zahl z zu einer Serie von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.

3. Die Serie von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist, kann nur dann verlängert werden, wenn beim Übergang zu einem neuen „Hunderter“ bzw. „Tausender“ bzw. „Zehntausender“ usw. der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest vermindert wird. Der günstigste Fall ist der folgende:

	natürliche Zahl	der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest
	$z-4$	0
	$z-3$	1
	$z-2$	2
Übergang <	$z-1$	3
	z	1
	$z+1$	2
	$z+2$	3

Wir schließen daraus: Mehr als sechs aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist, kann es nicht geben.

▲2▲ Begründe, weshalb der oben beschriebene Fall der günstigste ist!

4. Kann dieser günstigste Fall auftreten?
Dazu sind zwei Probleme zu untersuchen:
a) Gibt es Übergänge von $z-1$ zu z, bei

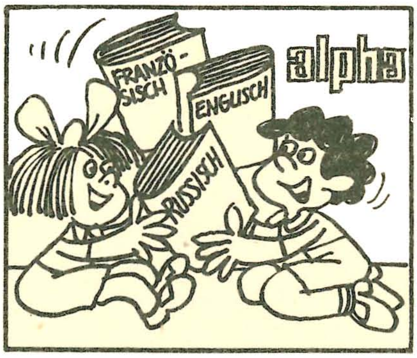
denen der Rest, der bei der Division der Quersumme durch 4 auftritt, um 2 vermindert wird?
b) Gibt es unter den Zahlen z, die wir vielleicht bei der Beantwortung der Frage a) finden, solche, deren Quersumme bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt?
▲3▲ Untersuche bei einigen Übergängen zu neuen „Hundertern" bzw. „Tausendern" bzw. „Zehntausendern", um wieviel sich der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest vermindert!

5. Zur Beantwortung der Frage a) verschaffen wir uns einen Überblick darüber, um wieviel die bei den verschiedenen Übergängen auftretenden Reste vermindert werden:

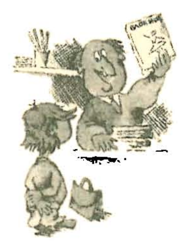
Anzahl der Neunen am Ende von $z-1$	die Quersumme vermindert sich beim Übergang zu z um	der bei der Division der Quersumme durch 4 auftretende Rest vermindert sich um
1	$1 \cdot 9 - 1 = 8$	0
2	$2 \cdot 9 - 1 = 17$	1
3	$3 \cdot 9 - 1 = 26$	2
4	$4 \cdot 9 - 1 = 35$	3
5	$5 \cdot 9 - 1 = 44$	0
6	$6 \cdot 9 - 1 = 53$	1
7	$7 \cdot 9 - 1 = 62$	2
⋮	⋮	⋮
p	$p \cdot 9 - 1$	

Wir stellen fest, daß der fragliche Rest beim Übergang von $z-1$ zu z genau dann um 2 vermindert wird, wenn z eine Zahl mit genau 3 Nullen am Ende oder genau 7 Nullen am Ende oder genau 11 Nullen am Ende usw. ist (allgemein mit genau $(4n-1)$ Nullen; $n = 1, 2, 3, \ldots$).

6. Wenden wir uns nun der Frage b) zu.
Die Nullen am Ende von z liefern keinen Beitrag zur Quersumme von z. Wählen wir also irgendeine natürliche Zahl m, die nicht auf Null endet und deren Quersumme bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt, so gehört jede der Zahlen $m \cdot 10^3$, $m \cdot 10^7$, $m \cdot 10^{11}$ usw. zu einer Serie von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.
Die kleinste Zahl m, deren Quersumme bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt, ist die Zahl 1. Die Zahl $m \cdot 10^3$ ist dann die Zahl 1000, die entsprechende Serie ist 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002. Mit $m \cdot 10^7$ erhalten wir die Serie 9999997, 9999998, 9999999, 10000000, 10000001, 10000002. Weitere Zahlen m sind 5, 9, 14, 18, 23, 27, ...
Damit haben wir die in der Aufgabenstellung gesuchte natürliche Zahl n gefunden. Es ist $n = 6$.
Darüber hinaus haben wir aber sogar einen Überblick über alle Stellen in der Folge der natürlichen Zahlen gewonnen, an denen eine Serie von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen auftritt, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist.



▲1▲ „Николай Иванович, – спросил Вадик у знакомого продавца магазина, – сколько стоит блокнот?" „16 блокнотов стоят столько же рублей, сколько блокнотов можно купить на 1 рубль", – с улыбкой ответил продавец. Сколько же стоит один блокнот?



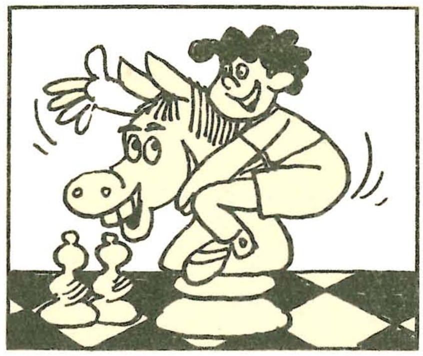
▲2▲ Choose a pair of integers between 0 and 10. (E. g. 5 and 8) and find their sum S $(5 + 8 = 13)$. Next find the sum, T, of the two numbers formed by the two integers, $(58 + 85 = 143)$. Can you explain why T is always a multiple of S? Find the quotient $Q = T/S$.

▲3▲ La combinaison du coffre de l'oncle Archibald comporte quatre chiffres, tous différents.
(1) Le premier est pair.
(2) La somme des deux premiers est 7.
(3) Le 3ᵉ est plus petit que le 2ᵉ.
(4) Le produit du 2ᵉ et du 3ᵉ se termine par 5.
(5) On peut diviser tous les nombres naturels par le 4ᵉ.

▲4▲ *Aus: A. H. Rieß, Rechenbuch für niedere und bes. Landschulen (Magdeburg 1801):* Eine gewisse Arznei wird aus mehreren Sachen bereitet; von der ersten kommen 12 Loth, von der zweiten 13 Loth, von der dritten 8 Loth, von der vierten 7 Loth, wieviel von jeder Ingredienz (Zutat) wird zu 10 Pfund erfordert? (1 Pfund = 32 Loth)

▲4▲ Ermittle alle Stellen in der Folge der natürlichen Zahlen, an denen eine Serie von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen auftritt, deren Quersumme nicht durch 4 teilbar ist!
▲5▲ Gib zwei Beispiele dafür an, daß von drei aufeinanderfolgenden Zahlen nur die Quersumme der mittleren nicht durch 4 teilbar ist!

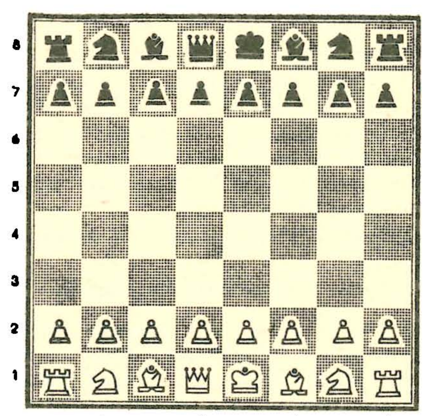
W. Stoye



Schach und Mathematik

Zwischen dem Spiel Schach und der Wissenschaft Mathematik bestehen zahlreiche Beziehungen, angefangen mit der Legende von den Weizenkörnern, die als Belohnung für den Erfinder des Schachspiels auf dem Brett angehäuft werden sollten (*alpha* 3/84), über das berühmte Achtdamenproblem (*alpha* 2/84) bis zu der Frage, wie Turnierergebnisse am gerechtesten zu bewerten sind, und dem Einsatz von Computern zum Lösen von Schachproblemen.

Als Anfänger sitzt man zögernd vor dem Schachbrett und betrachtet sinnend seine 16 Figuren. Mit welchem Zug soll man beginnen, mit welchem Zug wird der Gegner antworten? Deshalb bietet sich gerade die Partieanfangsstellung zu zahlreichen Knobeleien an. Zwei Aufgaben des finnischen Problemkomponisten *Eero Bonsdorff* seien als Beispiele genannt und zu lösen:

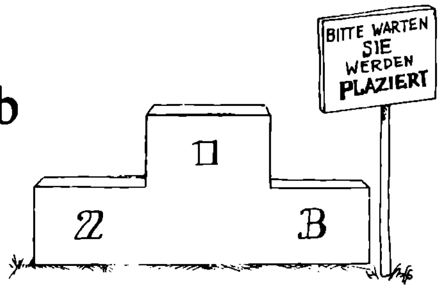


▲1▲ Wie groß ist die Anzahl der kürzesten Zugfolgen aus der Partieanfangsstellung, die zu einem Schachgebot durch einen Bauernzug führen?
Eine mögliche Lösung ist z. B.: 1. g4 d5, 2. Lh3 Kd7, 3. g5+.

▲2▲ Wie groß ist die Anzahl der kürzesten Zugfolgen aus der Partieanfangsstellung, die zu einem Schachgebot durch einen Turmzug führen?
Eine mögliche Lösung ist z. B.: 1. d3 a5, 2. Kd2 Ta6, 3. Kc3 Tc6+.

H. Rüdiger

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR vergangener Jahre

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1986

Ma 5 ■ 2663 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl. Bestimme diese beiden Zahlen!

Ma 5 ■ 2664 Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem 12 Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legt in jeder Stunde 4 km zurück. Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen. Wann muß sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

Ma 5 ■ 2665 An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.
a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muß er so heißen?

Ma 5 ■ 2666 Nach der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mit noch 10 Punkte an 100."
a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

Ma 5 ■ 2667 In drei Abteilen eines Eisenbahnwagens befinden sich 90 Fahrgäste. Würden aus dem ersten Abteil 12 Fahrgäste in das zweite und aus dem zweiten 9 Fahrgäste in das dritte umsteigen, dann wären in allen drei Abteilen gleich viel Personen. Wie viele Fahrgäste waren ursprünglich in den einzelnen Abteilen?

Ma 5 ■ 2668 Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden Bedingungen genügen!
(1) Die Differenz $a - b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180.

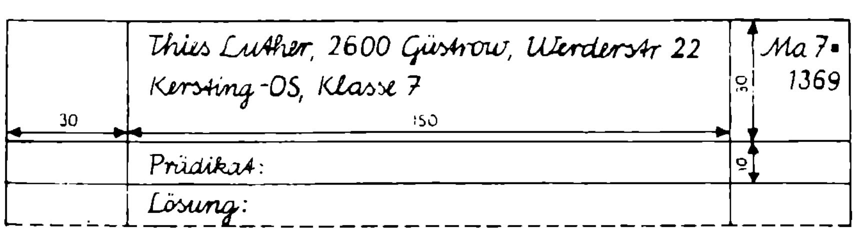
Ma 6 ■ 2669 Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Ma 6 ■ 2670 Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.
a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

Ma 6 ■ 2671 Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden." Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

Ma 6 ■ 2672 Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf: „In unserer Klasse können 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Wieviel Schüler besuchen die Klasse?"

Ma 6 ■ 2673 In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:
$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier.
Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 7 ■ 2674 In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterländen beschafft werden, so daß an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden. Wie viele neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

Ma 7 ■ 2675 Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuß ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.
Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuß; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoß die 9.
a) Wer gewann den Wettkampf?
b) Wer schoß die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

Ma 7 ■ 2676 Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl
$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$ größer oder kleiner als 1 ist?

Ma 7 ■ 2677 In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5“, jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1“, jeder dritte die Zensur „2“ und jeder sechste die Zensur „4“. Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$. Wie viele Schüler erhielten die Zensur „3“?

Ma 8 ■ 2678 Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf der Geraden g liegt.
Die Konstruktion ist zu begründen!

Ma 8 ■ 2679 Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wieviel Schüler die Klasse hat und wieviel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:
1. Wären 12 Schüler mehr dabeigewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.
2. Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.
3. Es soll vorausgesetzt werden, daß jeder Schüler die gleiche Anzahl Kastanien sammelt.
a) Wieviel Schüler haben teilgenommen?
b) Wieviel Schüler hat die Klasse?

Ma 8 ■ 2680 Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden. Ermittle die dafür genau benötigten Massen! (Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.)

Ma 8 ■ 2681 In einer 8. Klasse sind 40 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Fremdsprachen: Englisch, Deutsch, Französisch. 34 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Englisch und Deutsch. 25 Schüler lernen mindestens eine der Sprachen: Deutsch, Französisch. 6 Schüler lernen nur Deutsch. Genau zwei Sprachen, Englisch und Deutsch, lernen drei Schüler mehr als Französisch und Deutsch. Kein Schüler lernt Englisch und Französisch. Wie viele Schüler lernen genau eine bzw. genau zwei Sprachen?

Ma 9 ■ 2682 Geben Sie alle geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Ma 9 ■ 2683 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je genau einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:
(1) Anna hat den Ball.
(2) Brigitte hat den Ball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

Ma 9 ■ 2684 Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}?

Ma 9 ■ 2685 Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez aus seiner Grundseite $\overline{AB}$ mit der Länge $a = 6$ cm und dem Radius des einbeschriebenen Kreises mit der Länge $r = 1{,}8$ cm!

Ma 10/12 ■ 2686 a) Beweisen Sie, daß die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

Ma 10/12 ■ 2687 Auf der Kleinmesse liegen in einer Würfelbude 3 Würfel bereit. Jeder Wurf (mit den 3 Würfeln zugleich) kostet einen bestimmten Betrag. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Wurf einen der Hauptgewinne (1, 2, 3, 18, 17, 16 Augen) zu erreichen? (Die Wahrscheinlichkeiten sind für jeden Fall einzeln anzugeben!)

Ma 10/12 ■ 2688 Es ist ein beliebiges Dreieck ABC zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, daß das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ABC ähnlich ist. Die Konstruktion ist zu begründen!

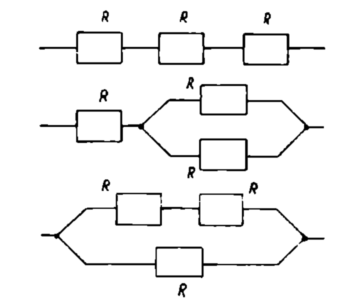
Ma 10/12 ■ 2689 Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC $(\gamma = 90°)$ aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Physik

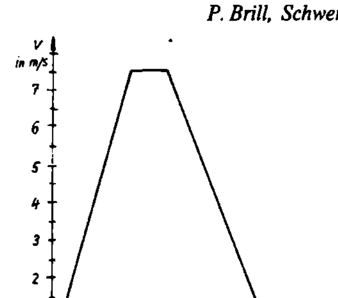
Ph 6 ■ 197 Ein Fußgänger macht je Minute 90 Schritte. Die Länge eines Schrittes beträgt 75 cm. Bestimme die Geschwindigkeit des Fußgängers in km/h!

Ph 7 ■ 198 Die Stoßfugen zwischen den 10 m langen und 20 cm dicken Betonplatten einer Fernverkehrsstraße sind bei 10 °C 10 mm breit und werden mit Teer ausgegossen. Wieviel Teer quillt bei einer Plattenbreite von 3,5 m heraus, wenn sich im Sommer die Platten auf 30 °C erwärmen? (Der lineare Ausdehnungskoeffizient für Beton beträgt $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/K und der räumliche Ausdehnungskoeffizient für Teer $\beta = 55 \cdot 10^{-5}$ 1/K. Die Höhen- und Breitenausdehnung der Platten bleibe unberücksichtigt.)

Ph 8 ■ 199 Ein Elektroherd besteht aus drei Heizvorrichtungen mit je gleichen Widerständen R. Sind alle drei Widerstände parallel geschaltet, so siedet das Wasser in einem Kessel in 12 Minuten. Nach welcher Zeit siedet die gleiche Wassermasse bei dem im folgenden Bild angegebenen Schaltungen der Heizvorrichtung des Herdes? *U. Iben, Magdeburg*

a)
b)
c)


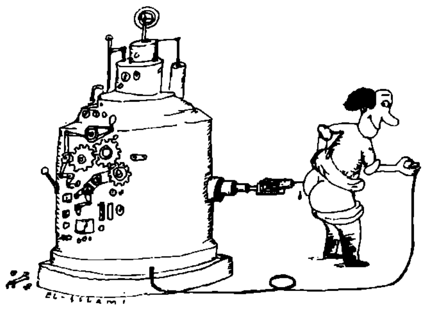
Ph 9 ■ 200 Entwickle das zum Bild gehörige a-t- und s-t-Diagramm! *P. Brill, Schwerin*



Ph 10/12 ■ 201 Die seit 1983 in Großbritannien stationierten Spionageflugzeuge vom Typ Lockheed haben eine Operationsflughöhe von etwa 27 500 m und eine Reichweite von etwa 6450 km.
a) Bis in welche Tiefe kann ein solches Flugzeug optische Spionage betrieben, wenn es bei seinem Einsatz 5 km westlich und parallel der Staatsgrenze der DDR fliegt? (Erdradius 6370 km)
b) Welche Fläche kann ein solches Flugzeug während eines Einsatzes fotografieren?

(Dabei soll angenommen werden, daß das Flugzeug einen geradlinigen Kurs einschlägt und die fotografierte Fläche zum Teil als ein Rechteck betrachtet wird.)

Th. Baumann, Meißen



Chemie

Ch 7 ■ 157 Bei der technischen Zersetzung von Bariumperoxid wird pro Molekül ein Sauerstoffatom abgespalten.
Wieviel ml Sauerstoff entstehen, wenn 2,1 g Bariumperoxid zur Reaktion gebracht werden und 1 l Sauerstoff 1,429 g wiegt?

Ch 8 ■ 158 Aus Phosphortrichlorid sollen 8,1 g Phosphorpentachlorid dargestellt werden. Berechne die Menge Kaliumpimanganat, die zur Darstellung der notwendigen Menge Chlor erforderlich ist!

Ch 9 ■ 159 Äthin ist ein wichtiger Ausgangsstoff für die chemische Industrie und wird in unserer Republik aus Kalziumkarbid durch Umsetzung mit Wasser hergestellt.
1 t Karbid enthält 85,5 % Kalziumkarbid; zur Erzeugung dieser Menge sind 3 900 kWh erforderlich. Ermitteln Sie den Verbrauch an Elektroenergie i. N. für die Herstellung von 5 m^3 Äthin, wenn 95 % Kalziumkarbid reagieren!

Ch 10/12 ■ 160 65 mg eines Gemisches aus Natriumchlorid und Kaliumchlorid wurden zur Analyse eingewogen. Nach dem Auflösen der Einwaage wurden die Chloride mit Silbernitrat als Silberchlorid gefällt, wobei sich als Auswaage 141,1 mg ergaben.
Wieviel Prozent der beiden Chloride waren in der Einwaage enthalten?

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematiklager des Bezirkes Gera

Es ist schon zu einer guten Tradition geworden, daß sich die auf mathematischen Gebieten talentierten Schüler des Bezirkes Gera als Mitglieder des Klubs *Junger Mathematiker* zu Ferienlagern besonderer Art zusammenfinden.
In jedem Schuljahr werden zwei Ferienlager zu je zehn Tagen durchgeführt; ein Winterlager, das sich unmittelbar an die Bezirksolympiade *Junger Mathematiker* anschließt und ein Sommerlager, das mit dem ersten Ferienmontag beginnt. Der Unterricht wird in vier, den Schulklassen 8 bis 11 entsprechenden Leistungsklassen durchgeführt, die von den Schülern in der Regel altersgerecht durchlaufen werden.
Neben Herrn *Werner Krügel* vom Rat des Bezirkes, der sich als Lagerleiter um die technische Absicherung und die Schaffung optimaler Bedingungen für die Freizeitgestaltung bemüht, und Herrn *Günther Scheuermann*, Mathematiklehrer an der Betriebsschule *Ernst Thälmann* des Kombinates Carl Zeiss Jena, der schon seit vielen Jahren den entscheidenden Beitrag zur fachlichen Leitung des Bezirksklubs leistet, nehmen Studenten und Mitarbeiter der Friedrich-Schiller-Universität, vor allem gegenwärtige und ehemalige Mitglieder des FDJ-Jugendobjektes *Studienwerbung – Studienvorbereitung*, dem sich auch die *Wurzel* zugehörig zählt, die fachliche und erzieherische Betreuung wahr. Von diesem Jugendobjekt ging auch vor 22 Jahren die Initiative zur Gründung der Klubs aus. Anfangs stand vor allem die Aufgabe, die Schüler auf die mathematischen Wettbewerbe besonders vorzubereiten. Mit dieser Forderung verband sich zunächst ein Vielseitigkeitstraining besonderer, in der Schule nicht praktizierter Aufgabentypen aus den Randgebieten des Lehrplans oder aus weiterführenden Lehrstoffen. Das geschah zunächst sporadisch, glich sich den in den ersten Olympiaden vorherrschenden Aufgabenstellungen an und litt im ganzen gesehen an Systematik. Seit etwa zehn Jahren wird in den Lagern nach einem Themenplan, der von Mitarbeitern der *Friedrich-Schiller*-Universität Jena und erfahrenen Lehrern ausgearbeitet wurde, unterrichtet.
In jedem Lager werden in jeder Klassenstufe 17 Stunden Unterricht erteilt, wobei neben dem für 16 Stunden im Stoffverteilungsplan festgelegten Themenkreis in den Winterferien ein Seminar zu aktuellen mathematisch-naturwissenschaftlichen Problemen und im Sommerlager eine Lagerolympiade mit Aufgaben zum behandelten Stoff durchgeführt werden.
Die Arbeit des Klubs beschränkt sich indes nicht auf die Aktivitäten in den Mathematiklagern. So werden in der Zeit zwischen den Lagern seit einigen Jahren die besten und seit diesem Jahr alle Schüler des Klubs durch *Korrespondenzzirkel* betreut, deren Aufgabenstellungen sich auf den im vergangenen Lager erarbeiteten Lehrstoff konzentrieren. Spitzentalente unter den Klubmitgliedern werden außerdem von den Mitarbeitern der Sektion Mathematik der *F.-Schiller*-Univ. gefördert. Die Mathematiklager sind nicht als Fortsetzung der intensiven Lernarbeit in der Ferienzeit gedacht, sondern als spezielle Form der Feriengestaltung zu verstehen und mit einem in Bildung und erholsamer Freizeit ausgewogenen Programm zu gestalten.

G. Scheuermann/Th. Gundermann
gekürzt aus: Wurzel, Jena

Jünger W. Blaschkes

An der Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität findet alljährlich zu Ehren eines bekannten Mathematikers ein Preisausschreiben statt. Begonnen wurde diese Tradition mit dem Gauß-Wettbewerb anläßlich des 200. Geburtstages von Gauß im Jahr 1977. In diesem Jahr wurde nun *Wilhelm Blaschke* geehrt, dessen Geburtstag sich am 13. September zum 100. Male jährte. Blaschke war ein bedeutender Geometer und trat insbesondere mit seinen Arbeiten zur Differentialgeometrie hervor. Für den Blaschke-Wettbewerb stellten Wissenschaftler der Sektion Mathematik vier Aufgaben, deren Lösungen, auch einzeln, eingereicht werden sollten. 39 Studenten beteiligten sich an diesem Preisausschreiben. Einer von denen, die alle Aufgaben lösten, war *Steffen Zopf*, damals noch Student in Szeged. Wir fragten ihn:
Wodurch wurde Ihr mathematisches Interesse geweckt?
Vor allen Dingen durch meine Mathematiklehrer und die ersten Erfolge bei den Mathematikolympiaden, an denen ich später (9. und 10. Klasse) auch als Frühstarter teilnahm.
Was waren Ihre schönsten Erfolge bei den Olympiaden Junger Mathematiker?
Erste Preise bei den DDR-Olympiaden und natürlich die Auszeichnung, 1979 mit zur IMO nach London fahren zu können.
Waren Sie auch in der Schule bei den Prüfungen ein sogenannter Frühstarter?
Ja, als ich mein Abitur im Fach Mathematik vorzeitig in der 10. Klasse ablegte.
Seit wann hatten Sie den Wunsch, Mathematik zu studieren?
Mathematik war eigentlich seit jeher mein Studienwunsch.
Was untersuchten Sie in Ihrer Diplomarbeit?
Ein spezielles Gebiet der Differentialgeometrie, das ich jetzt als befristeter Assistent an der KMU weiterbearbeite.

Raum-Mühle

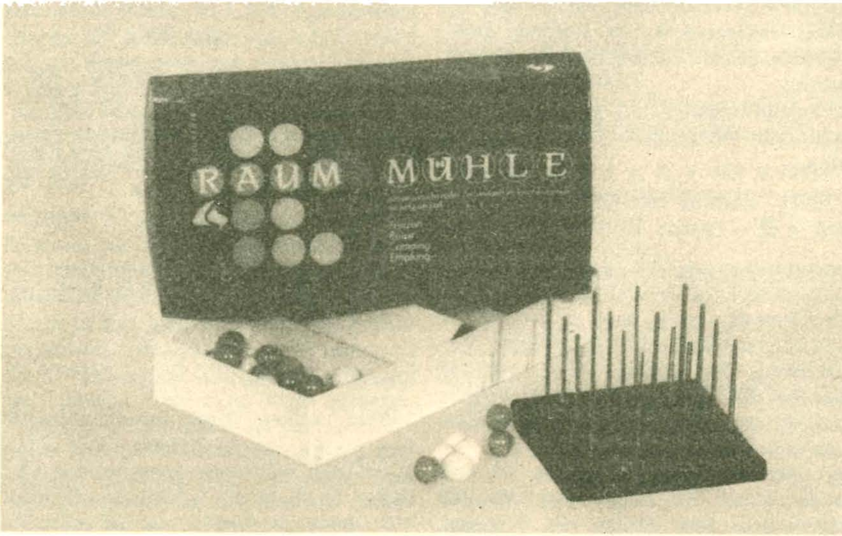


Bild 1

Seit einiger Zeit ist ein neues kombinatorisches Denkspiel mit der Bezeichnung *Raum-Mühle* vom *VEB Thüringer Schmuck Waltershausen* (EVP etwa 12,– M) auf dem Markt.

Wir wollen dieses interessante und vielfältige Spiel unseren Lesern vorstellen und einige Anregungen geben.

Das Spiel besteht aus einer Platte mit 16 quadratisch angeordneten Stäben (Bild 1) und 64 durchbohrten Kugeln, 32 gelben und 32 roten. Wenn zwei Spieler spielen wollen, so erhält jeder die Kugeln einer Farbe. Beide Spieler beginnen jetzt abwechselnd, ihre Kugeln beliebig auf einen der 16 Stäbe zu stecken. Ziel ist es dabei, möglichst bald eine Mühle zu setzen.

Eine Mühle ist eine Anordnung von vier gleichfarbigen Kugeln auf einer Geraden. Um Kombinationen besser beschreiben zu können, bezeichnen wir die insgesamt 64 Plätze mit 3stelligen Zahlen. Entsprechend den Koordinaten in einem xyz-Koordinatensystem benutzen wir die erste Stelle für die x-Koordinate, die zweite für die y-Koordinate und die dritte Stelle für die z-Koordinate. Bild 2 gibt die Lage einiger Koordinaten an.

Es gibt nun 3 Typen von Mühlen:

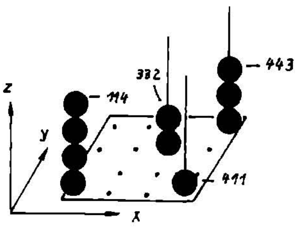
1. Die Mühle ist parallel zu jeweils einer dieser Koordinatenachse. Das wären die Mühlen ($1ab$, $2ab$, $3ab$, $4ab$) oder ($a1b$, $a2b$, $a3b$, $a4b$) oder ($ab1$, $ab2$, $ab3$, $ab4$) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Die Mühle ist die Diagonale eines Quadrates parallel zu einer Koordinatenebene. Das wären die Mühlen ($11a$, $22a$, $33a$, $44a$), ($1a1$, $2a2$, $3a3$, $4a4$), ($a11$, $a22$, $a33$, $a44$), ($14a$, $23a$, $32a$, $41a$), ($1a4$, $2a3$, $3a2$, $4a1$), ($a14$, $a23$, $a32$, $a41$) mit $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Die Mühle ist eine Würfeldiagonale. Also (111, 222, 333, 444), (114, 223, 332, 441), (141, 232, 323, 414), (144, 233, 322, 411).

In der Spielanleitung werden nun drei mögliche Spielregeln vorgeschlagen: Sieger ist derjenige Spieler,

Bild 2



(1) der als erster eine Mühle hat,
(2) der die meisten Mühlen nach Setzen der 64 Kugeln erzielt hat,
(3) wie in (2) angegeben. Dabei wird jeweils bei Erreichung einer Mühle dem Gegenspieler von den aufgesteckten Kugeln eine entfernt.

Bevor wir uns aber diesem 2-Personen-Spiel zuwenden, wollen wir zunächst mit einigen Aufgaben andeuten, daß man bereits alleine sehr viele interessante und schwierige (!) Probleme stellen kann. Viel Spaß beim Knobeln!

Wir beginnen mit einer

Aufgabe 1

Wie viele verschiedene Mühlen sind insgesamt möglich?

Als nächstes versuchen wir den Würfel so zusammenzubauen, daß die beiden Parteien eine vorgegebene Anzahl von Mühlen haben. Eine komplette Übersicht, welche Anzahlen möglich sind, wäre zwar recht interessant, doch scheint dieses Problem sehr kompliziert zu sein. Für spezielle Anzahlen sind die Aufgaben aber schon reizvoll.

Aufgabe 2

Baue den Würfel so, daß jede Partei genau
a) 20 Mühlen
b) 18, 17, 16, ..., 10 Mühlen hat!

Nach dem Lösen der Aufgabe 2b) ergibt sich die Frage, ob es auch für 19 Mühlen bzw. für weniger als 10 Mühlen eine Lösung gibt. Besonders interessant ist die Frage nach der maximalen Anzahl von Mühlen, die eine Partei erreichen kann. Wir haben bisher keine Anordnung gefunden, bei der eine Partei mehr als 20 Mühlen hatte. Aber einen Beweis dafür haben wir auch noch nicht! Vielleicht schafft ihr es? Und auf der anderen Seite fragt man sich natürlich nach der minimalen Zahl von Mühlen.

Aufgabe 3

Baue den Würfel so, daß
a) keine Partei eine Mühle hat,
b) Rot genau eine und Gelb keine Mühle hat!

Wie bereits eingangs erwähnt, bieten sich im Zwei-Personen-Spiel vor allem zwei Spielvarianten an: Sieger ist, wer die erste bzw. wer die meisten Mühlen hat. Unserer Erfahrung nach wird das Spiel besonders dann spannend, wenn alle Kugeln benutzt werden. Deshalb erscheint den Autoren die zweite Variante für besonders reizvoll. Gerade mit den letzten Kugeln bieten sich oft recht interessante Konstellationen, bei denen Sieg und Niederlage dicht beieinander liegen. Selbstverständlich können auch bereits mit den ersten Kugeln Situationen geschaffen werden, die für die Schaffung von Mühlen günstig oder ungünstig sind. Doch dies ist für eine allgemeine Untersuchung schwer faßbar.

Natürlich stellt man sich bald die Frage nach der optimalen Gewinnstrategie. Im allgemeinen läßt sich diese Frage nur schwer beantworten. Aber es gibt eine recht einfache Strategie für den Nachziehenden, immer Remis (d. h. ein Unentschieden) zu erreichen. Der Anziehende kann also den Sieg nicht erzwingen.

Aufgabe 4

Man gebe eine Strategie für den Nachziehenden an, die ihm immer ein Remis sichert!

Bleibt die Frage: Kann der Nachziehende den Sieg erzwingen?

Zum Schluß machen wir noch den Vorschlag, mit sich selbst einen Wettstreit durchzuführen. (Unabhängig vom Problem der Aufgabe 3a) setzen wir zu Anfang 2 gelbe und 2 rote Kugeln in die Ecken der Ebene.) Dieses Solospiel ist deshalb recht reizvoll, da der Spieler ja die ständigen Absichten *beider Parteien* kennt. Ziel ist es, nach Setzen aller 64 Kugeln möglichst wenig Mühlen gesetzt zu haben.

Wir hoffen, daß diese wenigen Ausführungen bereits die Vielfältigkeit der Spielmöglichkeiten und der auftretenden mathematischen Probleme veranschaulichen und weitere Anregungen gegeben haben. Wir meinen, daß dieses Spiel eine neue Bereicherung der Palette von logisch-kombinatorischen Spielen darstellt.

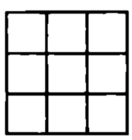
H.-D. Gronau/H.-J. Kerber

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

250521 In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Bild) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (□), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (⊞), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht. Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.



Beantworte folgende Fragen:
a) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?
b) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?
c) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (8×8)-Felderbrett enthalten?
Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

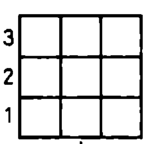
250522 Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein. Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen. Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.00 Uhr ab. Die Busfahrer grüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.
Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

250523 Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, daß die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.
(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.
a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
b) Begründe, daß es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

250524 Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $\overline{A'B'} = 5{,}0$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 6,5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft! Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.
a) Löse die genannte Aufgabe so, daß außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!
b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, daß weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!

Olympiadeklasse 6

250621 Auf einem (3×3)-Spielbrett (siehe Bild) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, daß jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.



Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

250622 Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.
Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

250623 Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.
a) Konstruiere dieses Quadrat, und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

250624 Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.
a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!
b) Weise nach, daß es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

Olympiadeklasse 7

250721 Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3. Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: „Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2."
Es stellt sich jedoch heraus, daß sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

250722 Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216\ \mathrm{dm}^3$, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.
Von einem zweiten Quader sei bekannt, daß er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und daß die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.
Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader, und gib sie in Quadratzentimetern an!

250723 Es sei ABC ein Dreieck mit $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha > 90^\circ$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{\sphericalangle BHC} = \overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle ACB} \text{ gilt!}$$

250724 a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten. Zeige, daß die Summe aus allen

diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!
b) Gegeben seien drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist!
Beweise, daß die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

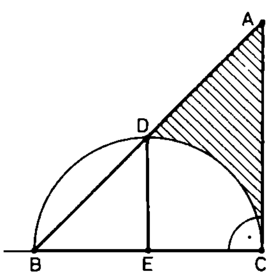
Olympiadeklasse 8

250821 Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

250822 Beweise folgenden Satz!
Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, läßt bei Division durch 9 stets den Rest 2.

250823 Ein Sicherheitsschloß besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) läßt sich das Schloß öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, daß in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.
a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?
b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muß?

250824 Es sei ABC ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (siehe Bild).



a) Beweise, daß die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!
b) Berechne, wieviel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.
Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$!

Olympiadeklasse 9

250921 Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a \leqq b \leqq c$ und
$$a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$$
gilt!

250922 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt.
Durch je zwei solche Teilpunkte, die jeweils auf ihrer Viereckseite ein und derselben Ecke des Vierecks $ABCD$ am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet. Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck $STUV$ bilden.
Welches der beiden Vierecke $ABCD$ bzw. $STUV$ hat den größeren Flächeninhalt?

250923 Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte
$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y}.$$
Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets
$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y} \text{ folgt!}$$

250924 Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die
$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} \text{ gilt!}$$

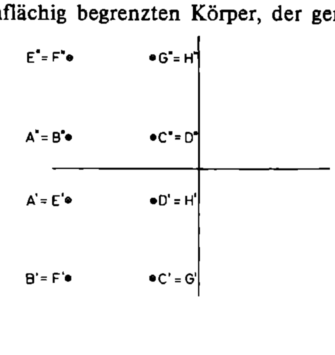
Olympiadeklasse 10

251021 Geben Sie alle Tripel (a, b, c) von ganzen Zahlen a, b, c mit $a \leqq b \leqq c$ und $a \cdot b \cdot c = 1985$ an!

251022 Man zeige, daß für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung $\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$ gilt.

251023 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $\overline{AB} = 20\,\text{cm}$ und der Höhenlänge $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben werden, daß E und F auf AB, G auf BC und H auf AC liegen und daß dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.
Beweisen Sie, daß es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!
Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

251024 Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H seien im Raum so gelegen, wie es das Bild in Zweitafelprojektion zeigt. Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau



diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch „Herausschneiden" eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist. Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.
Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten.
Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.

Olympiadeklassen 11/12

251221 Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!
$$x^2 + y^2 = 5, \qquad (1)$$
$$x^2 + xy = 2. \qquad (2)$$

251222 Beweisen Sie, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung
$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$
gilt!

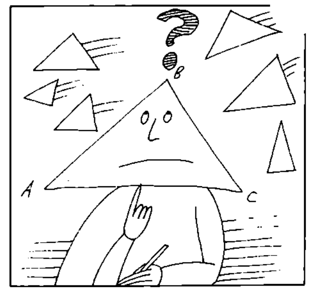
251223
a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch
$$a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$b_n = a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
definierten Zahlenfolgen.
Beweisen Sie, daß dann die Folge der Differenzen
$$b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
eine arithmetische Zahlenfolge ist!
b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:
Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch
$$b_n = a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen
$$b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
ebenfalls eine arithmetische Folge.
Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

251224 Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben: Im abgeschlossenen Intervall $\langle 2^n, 2^{n+1} \rangle$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

alpha-Wettbewerb 1984/85
Abzeichen in Gold
Für vierjährige Teilnahme
(Fortsetzung)

Claudia Höhn, Stefan Knauf, Marco Kirchner, Roland Lückert, Björn Langlotz, Eric Schneider, Cornelia Thum, Manuela Stark, Wim Fleischhauer, Andreas Walter, Thomas Flatz, Anja Frank, Katja Ledderhos, Alexandra Schick, alle Vacha; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Achim Nahler, Swen Hoffmann, Ben Forstreuter, alle Weimar; Uta Hotze, Weißenborn; René Voigt, Wernburg; Torsten Christophel, Wismar; Cordula Heymann, Wittstock; Carl Grosch, Wolferstedt; Katja Pietzner, Wolgast; Arno Barthelmes, Zella-Mehlis; Matthias Klinke, Zeulenroda; Gunnar Clausnitzer, Ivenack

In freien Stunden · alpha-heiter



Rolf Felix Müller, Gera

Silbenrätsel

de – der – e – ein – fel – funk – ga – ge – go – go – i – in – jek – ka – ko – ko – le – lo – me – me – mus – nal – ni – no – no – nu – null – nus – on – ons – or – pro – ra – rith – rus – sa – schief – si – stel – ta – te – te – ter – the – tho – ti – ti – tri – trie – un – us – vall – wer – wind.

1. Lagebeziehung zweier Geraden im Raum,
2. Strecke auf der Zahlengeraden,
3. Hilfsskale, z. B. eines Meßschiebers,
4. Winkelfunktion,
5. zeichnerische Darstellung auf eine Projektionstafel,
6. diejenige gesuchte Zahl c, mit der eine gegebene Zahl a potentiert werden muß, um eine ebenfalls gegebene Zahl b darzustellen,
7. Elemente des Wertebereichs einer Funktion,
8. Eigenschaft aller nicht ohne Rest durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen,
9. Bezeichnung der Zahl b (siehe 6.),
10. Seite im rechtwinkligen Dreieck,
11. Dreiecksbezeichnung als mathematische Disziplin,
12. regelmäßiges Polyeder (Zwanzigflächner),
13. senkrecht,
14. die Abszissen der Punkte, in denen eine Kurve die Abszissenachse schneidet.

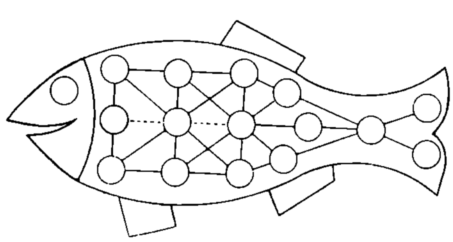
Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe verkörpern in gegebener Reihenfolge Funktionen eines bestimmten Typs.

Diplom-Lehrer L. Clausnitzer, OS Cunnersdorf

Der Zauberfisch

Trage die Zahlen 1 bis 16 so ein, daß entlang jeder ausgezogenen sowie entlang der gestrichelten Geraden stets die Summe 33 erscheint!

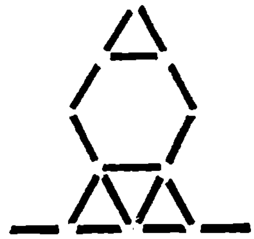
Mathematika List, Beograd



Regelmäßige Sechsecke

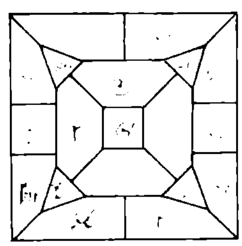
Lege in der abgebildeten Figur sechs Hölzchen so um, daß drei regelmäßige Sechsecke entstehen!

Dr. R. Mildner, Sektion Math. der Karl-Marx-Universität Leipzig



Mit vier Farben

Stellt euch vor, die Teilgebiete der abgebildeten Figur seien Länder einer (frei erfundenen) Landkarte. Eure Aufgabe ist es nun, diese Landkarte mit Hilfe von vier verschiedenen Farben (etwa Rot, Gelb, Grün und Blau) so zu färben, daß je zwei beliebige benachbarte Länder unterschiedlich gefärbt sind.



Zusatzfrage: Könnte man diese Landkarte auch schon mit drei verschiedenen Farben in der geforderten Weise färben?

Dr. R. Mildner, KMU Leipzig

Hausnummer gefragt

Zu einer Familie gehören Mutter und drei Kinder. Auf die Frage nach dem Alter ihrer drei Kinder antwortete die Mutter:

„Die Summe ihrer ganzen Alterszahlen ergibt unsere Hausnummer, das Produkt derselben ist 72, und – um das Ergebnis eindeutig zu machen – erwähnte ich noch, daß mein jüngstes Kind ein Mädchen ist."

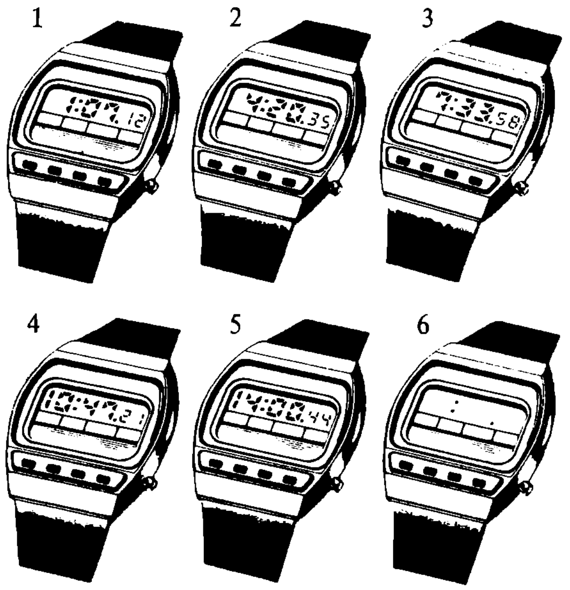
Wie alt sind die Kinder? Dem Fragenden war die Hausnummer bekannt.

Diplom-Lehrer M. Freitag, Schwarzheide

Logelei

Betrachtet die fünf dargestellten Uhren! Sie sind nach einem bestimmten System eingestellt. Wie muß logischerweise die Zeit auf dem sechsten Chronometer eingestellt werden?

Aus: Füles, Budapest



Tele-Lotto (5 aus 35)

Uwe spielt Tele-Lotto. Auf die Frage seines Freundes, welche Zahlen er spielt, antwortet Uwe:
„Alle meine Tips enthalten zwei Quadratzahlen und eine Primzahl. Verdoppelst du eine der Quadratzahlen, so erhältst du die vierte Zahl. Die fünfte Zahl ist um eins größer als die Primzahl. Die Summe der fünf Zahlen beträgt genau 100."

a) Wieviel Tips spielt Uwe?
b) Gib jeweils die fünf Zahlen an!

Student K. Wagner, Plauen

Videologika

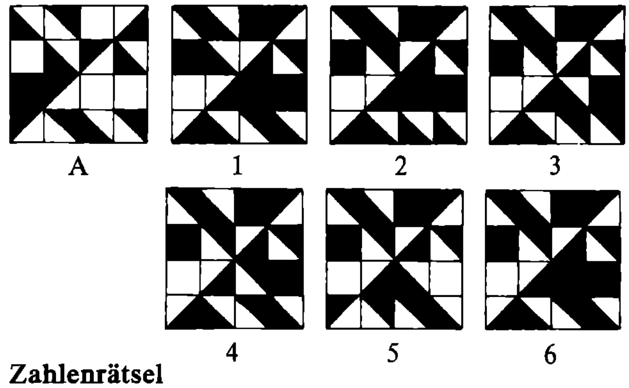
Die drei rechten Felder sind noch „unvollendet". Was muß man hineinzeichnen?

Aus: Füles, Budapest

Farbenverkehrt

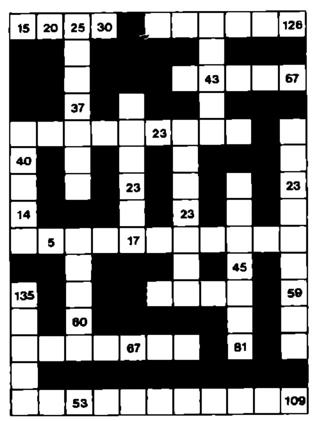
A ist das Negativ einer Filmaufnahme. Welche der andern sechs Figuren ist dann das Positiv?

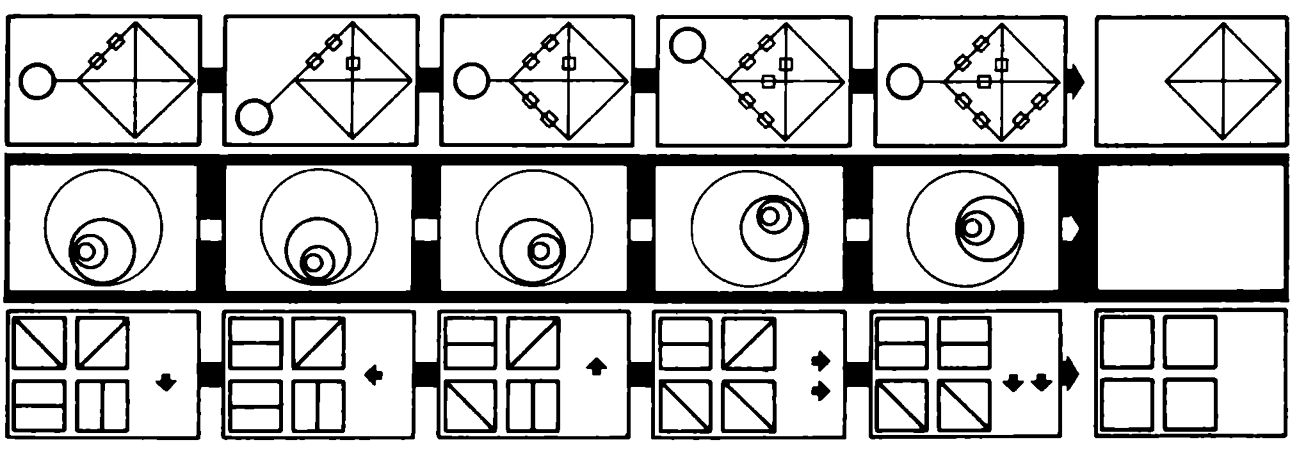
Oberlehrer O. Chromy, Coswig



Zahlenrätsel

Man trage die richtigen Zahlen in die leeren Quadrate ein, daß diese mit den vorgegebenen Zahlen zusammen eine logische Zahlenreihe bilden. In jeder Reihe steigen die Zahlen oder nehmen sie ab, von links nach rechts bzw. von oben nach unten, und zwar in gleichem Maße innerhalb von einer Reihe. Man nehme als Beispiel die links oben abgebildete Reihe. Hier steigen die Zahlen von einem Quadrat zum anderen jeweils um 5. Man nenne die Größe der Steigerung oder die Abnahme der Schlüsselzahl. Diese kann natürliche in jeder Reihe unterschiedlich sein. Welches sind die richtigen Schlüsselzahlen?

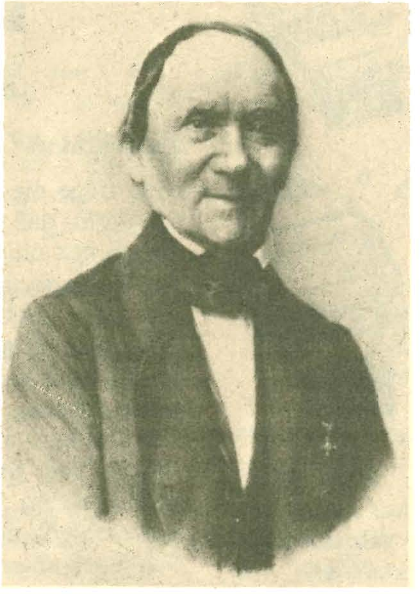




„... mit der Herausgabe einer Mathematischen Schülerbibliothek zu beginnen ..."

Populärwissenschaftliche mathematische Literatur im Teubner-Verlag Leipzig

Vor mehr als zwanzig Jahren beflügelte jene Forderung aus dem Mathematikbeschluß[1]) alle bereits vorhandenen Aktivitäten zur Entwicklung populärwissenschaftlicher mathematischer Literatur, und es dauerte nur wenige Monate, bis die ersten Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) vorlagen. Heute beteiligen sich sechs Verlage unseres Landes an dieser Reihe:
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Fachbuchverlag, Kinderbuchverlag, Teubner-Verlag, Urania-Verlag, Verlag Volk und Wissen. Nahezu 120 Titel sind seither erschienen und davon etwa ein Drittel im Teubner-Verlag.
Mit diesen Bänden knüpft das Leipziger Verlagshaus an eigene, positive Traditionen an, denn bereits 1911 gehörte die populärwissenschaftlich orientierte *Mathematische Bibliothek*, aus der später die *Mathematisch-physikalische Bibliothek* hervorging, zum Editionsprogramm. Teubners 175jähriges Verlagsjubiläum sei im folgenden Anlaß für einige Anmerkungen zur Entwicklung des mathematischen Verlagszweiges:
Benedictus Gotthelf Teubner (1784 bis 1856) übernahm am 21. Februar 1811 die Leipziger Buchdruckerei seines Schwagers *J. C. Weinedel*. Als gelernter Schriftsetzer widmete er sich von Anfang an mit besonderer Vorliebe dem Satz und Druck altphilologischer Schriften. Schon bald galt Teubner als Meister der Herstellung technisch schwieriger fremdsprachiger Ausgaben, und noch heute erscheint im Verlag die von ihm 1849 ins Leben gerufene *Bibliotheca Teubneriana*, die inzwischen älteste und umfassendste Sammlung textkritischer Ausgaben von Werken griechischer und römischer Klassiker.
Als Mitte des vergangenen Jahrhunderts die enormen Fortschritte in den Naturwissenschaften mehr und mehr die Erkenntnis reifen ließen, daß den mathematisch-technischen Disziplinen wachsende Bedeutung zukommen wird, begann Teubner auch mit



Benedictus Gotthelf Teubner

dem Verlegen mathematischer Bücher. Anfangs stand ihm vor allem der Dresdner Mathematikprofessor *Oskar Schlömilch* (1823 bis 1901) beratend zur Seite; später wurde der Begründer und erste Direktor des Mathematischen Seminars der Leipziger Universität, *Felix Klein* (1849 bis 1925), wichtigster mathematischer Berater des Verlages. Zu Beginn unseres Jahrhunderts hatte Teubner neben der Altphilologie auch auf dem Gebiet der Mathematik eine im Weltmaßstab führende Rolle inne. Seine Kataloge verzeichneten Werke bedeutender Mathematiker verschiedener Epochen:
N. H. Abel, *J.* und *W. Bolyai*, *P. G. L. Dirichlet*, *L. Euler*, *C. F. Gauß*, *D. Hilbert*, *F. Klein*, *L. Kronecker*, *S. Lie*, *N. I. Lobatschewski*, *H. Minkowski*, *G. Peano*, *B. Riemann*, um nur einige zu nennen.
Neben hervorragenden Einzelarbeiten wie D. Hilberts *Grundlagen der Geometrie* oder H. Minkowskis *Geometrie der Zahlen* legte der Verlag auch die mehrbändigen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von M. Cantor vor, ebenso die umfangreiche *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*.
Ein weiterer Autor jener Zeit soll hier noch kurz Erwähnung finden: *Wilhelm Ahrens* (1872 bis 1927): Mehrere Schriften dieses aus Lübz stammenden, später in Magdeburg und Rostock wirkenden Mathematikers zählen heute längst zu den *Klassikern der Unterhaltungsmathematik* und werden seit vielen Jahrzehnten immer wieder in populärwissenschaftlichen Abhandlungen zitiert.
Der Teubner-Verlag jedoch konnte seine führende Stellung nicht mehr lange behaupten. Mit der verstärkten Hinwendung zur Schulbuchproduktion ging leider die Vernachlässigung des mathematischen Verlagszweiges einher; vor allem während der Zeit des Faschismus sank das wissenschaftliche Niveau der Produktion rapide ab.
Nach fast völliger Vernichtung von Gebäuden, Einrichtungen, Beständen und Archiv im Jahre 1943 und schwerem Neuanfang begann man erst einmal mit Nachdrucken älterer bewährter Werke. Hauptsächlich Übersetzungen aus dem Russischen, aber auch eigene, neuentwickelte Hochschullehrbücher ermöglichten schließlich in den fünfziger Jahren die Neuprofilierung. Schon 1958 erschien erstmals die Übersetzung des seither aus Lehre und Forschung nicht mehr wegzudenkenden *Taschenbuches der Mathematik* von *I. N. Bronstein* und *K. A. Semendjajew*.
Doch bereits damals wurden auch einzelne Titel der einstigen *Mathematisch-physikalischen Bibliothek* neu aufgelegt, so daß der eingangs erwähnte *Mathematikbeschluß* auf äußerst fruchtbaren Boden fiel.
Zur MSB steuerte der Verlag neben den erfolgreichen Schriften von *W. Lietzmann* auch gleich zu Beginn Titel bei, die sich bis heute großer Beliebtheit erfreuen. So befindet sich zur Zeit die 9. Auflage des Bandes *Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik* von M. Hasse in Vorbereitung, und M. Millers *Rechenvorteile* werden im nächsten Jahr auch schon zum achten Male erscheinen. Außerdem liegen inzwischen zahlreiche Übersetzungen populärwissenschaftlicher Bücher aus dem Russischen, Tschechischen, Ungarischen und Polnischen vor. Hinzu kommen jene fachübergreifenden Titel, die unmittelbar an den Erfahrungsschatz des Lesers anknüpfen, wie P. Schreibers *Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie* oder E. Schröders Schrift *Mathematik im Reich der Töne*, die aus zwei gleichnamigen *alpha*-Beiträgen der Jahre 1972 und 1973 hervorgegangen ist. Besonders erfolgreich sind R. Thieles *Mathematische Beweise* und der bereits in *alpha* 2/84 ausführlich vorgestellte Band *Algebra – aller Anfang ist leicht* von H. Kästner und P. Göthner. Übrigens erscheint in diesem Jahr des Verlagsjubiläums auch der 125. Titel der MSB: *Summa summarum*, herausgegeben von M. und G. Deweß.
Abschließend sei aber noch ein langjähriger, tatkräftiger Verbündeter bei der Propagierung mathematischer Literatur genannt, der eigentlich schon viel weiter oben hätte erwähnt werden müssen: *Johannes Lehmann*, Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*. Gleich im ersten Heft, das Anfang 1967 veröffentlicht

[1]) Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962 „Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR".

wurde, kam *Dorothea Ziegler* vom Teubner-Verlag zu Wort; seither haben immer wieder Autoren und Verlage die Möglichkeit, ihre Neuerscheinungen vorzustellen. *alpha*-Leser erhalten somit regelmäßig wertvolle Hinweise und Anregungen für die im *Mathematikbeschluß* des Jahres 1962 besonders hervorgehobene Verbesserung der außerunterrichtlichen Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik, und der Teubner-Verlag freut sich bereits jetzt darauf, daß *J. Lehmann* das aktuelle MSB-Angebot 1987 erneut bereichern wird, mit seinem Buch *Mathematik – von der Pflicht zur Kür.*

J. Weiß

Die Bücher von heute sind die Taten von morgen.

Heinrich Mann

Der Geizige liest jedes gekaufte Buch aufmerksamer, er will etwas für sein Geld haben.

Jean Paul

Einige Bücher soll man schmecken, andere verschlucken und einige wenige kauen und verdauen.

Sean O'Casey

Lesen – das ist die beste Lehre.
Den Gedanken eines großen Menschen zu folgen, ist die unterhaltsamste Wissenschaft.

Alexander Puschkin

---

175 JAHRE TEUBNERBÜCHER LEIPZIG 1811-1986

Mathematische Schülerbücherei –
Freund und Helfer der Olympiadebewegung

Band 100	Lehmann, 2×2 plus Spaß dabei (VWV)
Band 101	Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (DVW)
Band 102	Hódi, Endre (Hrsg.), Mathematisches Mosaik 1. Aufl. 1977, 2. Aufl. 1980 (U)
Band 103	Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW)
Band 104	Kufner, Raum und Entfernung (Übers. a. d. Tschech.) (BGT)
Band 105	Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW)
Band 106	Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT)
Band 107	Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht (BGT)
Band 108	Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW)
Band 109	Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW)
Band 110	Pieper, Komplexe Zahlen (Theorie – Praxis – Geschichte) (DVW)
Band 111	Lehmann, Mathematische Schatzkammer – 444 Historische Aufgaben aus 444 Jahrzehnten (Arbeitstitel) (U) (1987)
Band 112	Kudrjavzev, Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium (Übers. a. d. Russ.) (BGT)
Band 113	Belkner/Brehmer, Lebesguesche Integrale (DVW)
Band 114	Sprengel/Wilhelm, Funktionen und Funktionalgleichungen (DVW)
Band 115	Belski/Kaloujnine, Division mit Rest (DVW)
Band 116	Quaisser, Bewegungen in der Ebene und im Raum (DVW)
Band 117	Höfner/Klein, Wahrscheinlichkeit ganz einfach – Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung (U)
Band 118	Péter, Das Spiel mit dem Unendlichen (Übers. a. d. Ungar.) (BGT)
Band 119	Krysicki, Keine Angst vor x und y *(Übers. a. d. Poln.)* (BGT)
Band 120	Bogdanovič, Mathematischer Regenbogen (Übers. a. d. Russ.) (VWV) (1986)
Band 121	Lehmann, 3 plus 8 und mitgemacht (VWV)
Band 122	Klotzek, B.; Letzel, E.; Lengtat, U.; Schröter, K.: Kombinieren, Parkettieren, Färben (DVW)
Band 123	Schäfer, Die Wunder der Rechenkunst (Herausg. J. Lehmann) (VWV)
Band 124	Kaloujnine/Suščanskij, Transformationen und Permutationen (Eine Einführung in die Graphentheorie) (1985)
Band 125	Deweß/Deweß, Summa summarum (BGT) (1986)
Band 126	Sominski/Golowina/Jaglom, Die vollständige Induktion (DVW) (1985)
Band 127	Quaisser/Sprengel, Extrema (DVW)
Band 128	Schröder, Kartenentwürfe der Erde (BGT)
Band 129	Boltjanskij/Jefremovich, Anschauliche kombinatorische Topologie (DVW)
Band 130	Lehmann, Mathematik – von der Pflicht zur Kür (BGT) (1987)

Es bedeuten:

VWV	Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
DVW	VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin
U	Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin
BGT	BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

alpha-Wettbewerb 1984/85

Abzeichen in Gold

Für achtjährige Teilnahme

Eckhard Heinrich, Aschersleben; Steffen Hoffmann, Babelsberg; Heike Eckardt, Bad Liebenstein; Sabine Mantel, Kerstin Kantiem, Andris Möller, Susanne Krüger, Berit Kleinbauer, alle Berlin; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Andreas Heinze, Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ines Lauter, Gerald Eichler, Heiko Ringl, Kerstin Urban, Pedro Thiele, Rainer Schültke, alle Dresden; Thomas Böhme, Eisleben; Lars Mönch, Erfurt; Una Heinecke, Eisenberg; Jens Wackernagel, Falkenberg; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Gräfenhainichen; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Birgit Seifert, Hagenow; Uwe Prochno, Halle; Annett Eichner, Halle-N.; Thomas Weiß, Jena; Andreas Paukert, Karbow; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Uta Mersiowsky, Sabine Pohlmann, beide Langewiesen; Ralf Laue, Petra Polster, Lutz Lämmer, alle Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Sven Saar, Mühlhausen; Norbert Fuchs, Meiningen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Ingo Lohde, Schönefeld; Erhard Zilinske, Stralsund; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Irene Michallik, Waren; Margret Boettcher, Stefan Thäter, beide Weimar; Agnes Jorzick, Wismar; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Mathias Goltzsche, Zschopau

Für siebenjährige Teilnahme

Anka Sommer, Augsdorf; Michael Simang, Bautzen; Norbert Dorn, Reinhard Wegener, Cornelia Wolf, Jens Prochno, Steffen Padelt, Beate und Stefan Müller, alle Berlin; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Clingen; Jens Leberwurst, Manfred Roßius, Andreas Stenzel, alle Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Dahme; Silke Riechen, Rolf Dach, Stefan Mattausch, Carsten und Helmut Schreiber, Matthias Winkler, Jens Fuchs, Michael Nitsche, Annegret Wustmann, alle Dresden; Bert Minske, Eberswalde; Claudia Pleyer, Eisenach; Elke Sühnholz, Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Heike Morgner, Falkenstein; Henry Mäder, Frohburg; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Dirk Wenzlaff, Grieben; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Henning Salz, Halle; Uta und Jutta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Thomas Benusch, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Carla Umlauf, Sebastian Horbach, Andreas Israel, Annegret Schatte, alle Karl-Marx-Stadt; Heiko Witte, Friedhelm Reichert, beide Königs Wusterhausen; Gert Künzelmann, Krina; Helge Müller, Königsee; Bernd Fucke, Petra Gollewski, beide Leipzig; Ekkehard Ludwig, Lühmannsdorf; Tilo Grüneberger, Nerchau; Anja Voß, Neustadt; Irma Goßmann, Oranienburg; Hellmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann, Prausitz; Klaus-Peter Lindner, Rackwitz; Annette Schubert, Schalkau; Ronald Kaiser, Schleid; Sven Hader, Schlotheim; Winfried Ullrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Bernd Urbanek, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Lars Brückner, Vacha; Uta Michallik, Waren; Claudia Tiersch, Weimar; Horst Rißmann, Wesenberg; Ralph Bock, Wolfen

Für sechsjährige Teilnahme

Beatrice List, Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Wolfgang und Ralf Beukert, Altenburg; Geertje Maeß, Bad Doberan; Markus Kostrzewa, Bad Liebenstein; Yvonne Selke, Matthias Tittel, Matthias Röder, Clemens Thielecke, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Blumberg; Peter Sitz, Calau; Daniela Syrbe, Cottbus; Michael Rühling, Rainer Fabianski, Bernd Miethig, alle Dresden; Matthias Voigt, Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Martina Helms, Erfurt; Rainer Fabianski, Falkensee; Peter und Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Ute Frank, Forst; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Andreas Funk, Christiane Preuß, Volker Pohlers, alle Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Maike Thiele, Susanne Buchheim, Kai Streubel, Ragna Siol, alle Grimma; Kathrin Henker, Groitzsch; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Halle; Christina Schmerlin, Antje Hüttig, beide Halle-Neustadt; Uta Reck, Heiligenstadt; Heidi Konarski, Hohenbucko; Silke Umbreit, Ilmenau; Steffi Gebauer, Jena; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Gert Reifarth, Ingolf Knopf, Michael Tix, Volker Liebert, Jürgen und Michael Hoppe, Annette Brungräber, Grit Lohse, alle Karl-Marx-Stadt; Jens Steiniger, Kleinmachnow; Torsten Schütze, Klettenberg; Susan Hoffmann, Klingenthal; Simone Kauert, Kathleen Hentrich, beide Langenweddingen; Karola Funke, Leinefelde; Michael Weber, Uwe Werner, beide Leipzig; Simone Brungräber, Marxwalde; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Henning Hetzer, Oettersdorf; Viola Thomala, Lobenstein; Michael Taeschner, Kay Leitz, beide Parchim; Jeanette Stahnke, Pasewalk; Antje Reichel, Pirna; Dorit Grulka, Pritzwalk; Steffen Scheithauer, Parey; Andreas Jöstel, Radebeul; Nils Grotrian, Ribnitz-D.; Lutz Marschner, Riesa; Steffen Dragesser, Christine Elberskirch, beide Roßdorf; Ulf Gebhardt, Anne und Heiner Ruser, Ulf Winkler, alle Rostock; Beate Walter, Röbel; Ronny Henschke, Schierke; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Astrid Grulke, Schernberg; Achim Gröber, Schönbach; Pier Bierbach, Schwerin; Roland Drendel, Senftenberg; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Ramona Dörre, beide Sondershausen; Gerald Schumann, Armin Singer, beide Teichwolframsdorf; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Holger Nobach, Warnemünde; Volker Lehmann, Monika Rössler, Uta Langer, Johannes Thäter, alle Weimar; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg; Adrian Hackenberger, Zedlitz; Andrea Schmidt, Ute Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Uwe Schulz, Zittau

Für fünfjährige Teilnahme

Kathrin Christ, Ammern; Uwe Döbler, Arnstadt; Frank Senf, Ines Sobanski, beide Bad Liebenstein; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Stefan Bading, Stefan Rödel, Frauke Wendt, Sarah Plietzsch, Tom Pfeifer, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Ralf Gröper, Biesenrode; Michael Kremmer, Breitungen; Antje Lück, Brieselang; Christian Gering, Steffen Gering, beide Beuditz; Catarina Bröcker, Bürgel; Manuela Herrmann, Thomas Jurke, beide Cottbus; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Annett Germann, Dörfel; AG Math. der OS K. Niederkirchner, Domersleben; Jens Haufe, Klaus-Horst Milde, Ulrich Hartung, alle Dresden; Jörn Quedenau, Eberswalde; Ulrike Rößner, Erfurt; Lutz Küch, Erlau; Kerstin Dötsch, Kristin Herbarth, Heide Ilgen, Beate Michel, Ines Möller, Angela Schellenberg, Carmen Wolf, Marko Schneider, alle Fambach; Kai Mettke, Alexander Schackow, beide Frankfurt (Oder); Anke Zimmermann, Hanka Pruditzsch, beide Geithain; Berit Schönrock, Goddin; Andrea Rueß, Goldberg; Kristina Böttger, Görlitz; Jens Czichowski, Marie-Luise Funk, Volker Bölter, alle Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Regine Mollwitz, Holger Porath, beide Güstrow; Antje Ohlhoff, Anja Grafe, beide Halberstadt; Anja Botzon, Havelberg; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Heike Scholz, Hermannsdorf; Ines Menzel, Hohndorf; Axel Müller, Hoyerswerda; Frank Lautenschläger, Stefan Lippmann, beide Ilsenburg; Britta Fliegner, Jarmen; Kathrin Kreusel, Kändler; Rainer Werner, Holger Illgen, Katrin Holzhaus, Heiko Frank, Gerd F. Reifarth, alle Karl-Marx-Stadt; Ronald Albrecht, Sven Anecke, Erik Baewer, Mario Baumbach, Peter Denner, Dennis Krug, Matthias Morgenzweck, Marco Niebergall, Silvio Schade, Pere Specht, Reni Finzel, Katja Flegel, Kathrin Gunia, Nicole Hauke, Yvonne Hillig, Kati Kister, Jana Kister, Sabine Pause, Bianca Schmidke, Jana Schwärzel, Susanne Zierd, alle Kieselbach; Frank Müller, Klaffenbach; Kerstin Trägenap, Klietz; Heike Deumeland, Annett Raue, beide Langenweddingen; Sören Leuckefeld, Udo Woitek, beide Leinefelde; Petra Heiliger, Leuna; Silke Perthel, Udo Wagner, Katrin Görsch, alle Lössau; Bert Stallbaum, Lössen; Jens Neumann, Luckau; Bernhard Schlegel, Mahlsdorf; Hanna Erler, Massanei; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Dirk Franke, Mülsen; Iris Schulze, Naunhof; Thomas Drobek, Andreas Suchanow, beide Neubrandenburg; Steffen Ewert, Martina Schulz, beide Neuhaus; Ulf Woike, Neustadt; Peter Schmedemann, Neustrelitz; Ingolf Wappler, Olbernhau; Karsten Kattner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Martina Schenck, Pitschen-Pikkel; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Thams Handke, Pulsnitz; Wolfgang Schneider, Radeberg; Stefan Jung, Birgit und Dagmar Lenz, alle Reichenbach; Ines Barthel, Remse; Ines Schmidt, Reuth; Grit Marschner, Karen Jobst, beide Riesa; Grit Sündram, Ronneburg; Gunther Siebenhaar, Roßdorf; Martin Wolff, Rostock; Stephan Dittmann, Rostock; Sven Ungelenk, Saalfeld; Klara Töpfer, Sömmerda; Olaf Otto, Stolpe; Kerstin Emmrich, Spremberg; Claudia Schwartz, Suhl; Tanja Reinwarth, Teltow; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Sylvia Müller, Heidi Egle, Sabine Fuß, alle Unterbreizbach; Christiane Schröter, Vacha; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, Vitzenburg; alpha-Club, Kl. 5, 6, 7 der OS Vitzenburg; Regine Katzy, Waren; Edith Boettcher, Weimar; Rainer Schmidt, Wismar; Heintje Grosch, Wolferstedt; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Annett Hellwing, Zschornewitz; Olaf u. Kirsti Knobe, Sondershausen

Für vierjährige Teilnahme

Corinna Beutel, Ahlbeck; Matthias List, Christian Auer, beide Altenburg; Gerlind Krolop, Angern; AG Math. der W.-Pieck-OS Anklam; Veneta Türke, Auerbach; Jochen und Matthias Sommer, Augsdorf; Ute Partsch, Bad Salzungen; Veit Eska, Bad Sülze; Britta Guder, Marlis Berg, Thomas Götz, Claudia Lehmann, Eva-Christina Müller, Axel Schneider, Stephan Eckart, Petra Kuckuk, Wilko Wohlauf, Gerhard Haug, Sven Hartmann, Holger Laabs, Ralf Paeslack, alle Berlin; Brit Hennicke, Bernburg; Peter Grabs, Bibra; Andrea Hirschfeld, Bleicherode; Annette Scholz, Blumberg; Christina Werner, Bötzow; Ralf Schmidt, Breitungen; Angela Maier, Bürgel; Jörg Neubecker, Coswig; Iris Freitag, Réne Düring, Olaf Baur, Claudia Bielow, Rainer Lenk, alle Cottbus; Charis Förster, Crimmitschau; Henry Theuer, Crussow; Sylvia Besser, Dietlas; Tino Riethmüller, Dingelstädt; Hans Schwenke, Dohna; Michaele Meyer, Dorndorf; Kristina Kutzer, Thomas Rotter, Sebastian Schreiber, Sylvia Penz, Rita Dach, Christoph Reichl, alle Dresden; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Matthias Bruére, Eggesin; Christian Pigorsch, Eisleben; Ute Heinemann, Erfurt; Heike Koch, Falkensee; Susanne Heller, Sandro Heß, Rüdiger Öetzel, Nicole Möller, Yvonne Schindel, alle Fambach; Gudrun Warzel, Guido Strauch, beide Finsterwalde; Steffi Wirth, Iris Scholl, beide Floh; Gerd Kunert, Sven Schmitt, beide Freiberg; Jan Biebrach, Garz; Petra Rüdiger, Geschwenda; Lars Schiefner, Geseck; Wolfgang Sitte, Görlitz; Kathrin Pohle, Görzke; Katrin Herrmann, Gräfenhainichen; Thilo Kuessner, Gunthard Stübs, beide Greifswald; Katrin Haufe, Großröhrsdorf; Silke Trottnow, Groß-Kelle; Markus List, Grünbach; Daniela Burkhardt, Ralf und Ina Kühnel, alle Guben; Heinz Seifert, Ulf Schmiedel, beide Hagenow; Sören Freiwald, Halberstadt; Thomas Vetterling, Halle; Lutz Eichner, Alexander Schmerling, Karsten Müller, alle Halle-Neustadt; Ottilie Falk, Grit Keßner, beide Harzgerode; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Ingo Müller, Ulf Graubner, beide Hermannsdorf; Fred Krümmling, Nicole Krauste, beide Hillersleben; Hagen Reimann, Horka; Klaus Liesenberg, André Klinge, beide Ilsenburg; Ulf Prudlo, Jena; Frank Lampert, Michael Köhler, Jana Hodam, alle Kaltennordheim; Ricarda Baartz, Kandelin; Annett Zipfel, Uwe Pirl, Antje Lößner, Annett Przybycin, alle Karl-Marx-Stadt; Heidi August, Christiane Schulz, Christel Vorig, Yvonne Münch, Sybille Helm, Ute Rug, Diana Fladung, Antje Wehnelt, Rommy Preißel, Matthias Wohlfahrt, Michael Annecke, Matthias Berger, Mike Nehring, Jörg August, Sven Hiller, Martin Hundertmark, Hendrik Weber, Sandra Leinhos, Kirsten Mey, Sandra Oetzel, alle Kieselbach; Katja Hoffmann, Klingenthal; Kerstin Braune, Langenweddingen; Sven Juffa, Langewiesen; Bernd Schauer, Latdorf; Thomas Neuhaas, Leipzig; Falk Lindner, Lichtenberg; Claas Gennrich, Löwenberg; Jens Löw, Luisenthal; Antje Mißbach, Thomas Rolle, Simone Schönemann, alle Magdeburg; Dirk Jürgeleit, Malchin; Christiane Kitzmann, Möhlau; Manja Franke, Mülsen; Carsten Kühne, Neetzow; Dirk Plischka, Rosa Flint, Jens Burmann, alle Neuhaus; Bodo Braune, Neuburxdorf; Falk Thomas, Neukirch; Annett Kleider, Katrin Joran, beide Neundorf; Stefan Voß, Neustadt; Stefan Warnest, Neuruppin; Thomas Haase, Niederodewitz; Lars Abbe, Niederorla; Grit Heidrich, Nieder-Seifersdorf; Christian Usbeck, André Wachs, beide Oberschönau; Thomas Hummel, Olbersdorf; Susanne Taeschner, Parchim; Uwe Anke, Pappendorf; Yvonne Brüggemann, Claudia Methner, Anke Limpert, Kerstin Erbe, Tom Brüggemann, Ines Materna, alle Ribnitz-D.; Matthias Ketzel, Tobias Vetter, beide Riesa; Claudia Paschwitz, Räckelwitz; Birgit Klingbeil, Röbel; Lothar Fischer, Ronneburg; Monike Möller, Sigrid Engels, beide Roßdorf; Katja Grunow, Sangerhausen; Lutz Hertel, Schneckengrün; Jens Gläßer, Schönfels; Antje Blechschmidt, Schwarzenberg; Bertram Bracher, Schwarzheide; Gerhard Matthäs, Seyda; Gerit Holland-Moritz, Alexander Anschütz, Steffi Döll, Frank Holland, Thomas Reumschüssel, Bärbel Brock, Kathrin Gendera, Christiane Holland-Letz, Jutta Huhn, Sabine Humpa, Christiane Marr, Gesine Pfeffer, Mario Endter, Katrin Usbeck, Andrea Seruneit, Sandra Ebert, Manuele Reich, Michael Brückner, Isabell Wiegandt, Manuela Neuber, Beate König, Andrea Kurz, Katrin Brock, alle Steinbach-Hallenberg; Rüdiger Scheller, Teltow; Annett Wiesner, Töplitz; Sven Janssen, Tornau; Corinna Krische, Treben; Katrin Peter, Gitta Eichel, René Storch, Luise Bunge, Andre Storch, Astrid Brenn, Ronny Stengel, Katrin Bohn, Stefan Otto, Jörg Fischer, Christin Hobert, alle Trusetal.

Fortsetzung und Schluß siehe Seite 39!

Lösungen

Lösungen zu:
Schulolympiaden in der MVR

5.1.1. Es gilt $2+4+1+1 = 2\cdot 4\cdot 1\cdot 1$, *Bemerkung:* $2+2 = 2\cdot 2$; $3+2+1 = 3\cdot 2\cdot 1$; $2+2+2+1+1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1$.

5.1.2. Entweder 3 oder 7 Katzen. *Bemerkung:* Genau 8 Katzen.

5.1.3. Multipliziert man beliebig natürliche Zahlen mit 5 und addiert 2, so erhält man gerade und ungerade Zahlen. Man multipliziert daher nur gerade natürliche Zahlen mit 5 und addiert 2.
Oder anders: Man multipliziert natürliche Zahlen mit 10 und addiert 2. Oder noch kürzer: Alle natürlichen Zahlen, die auf 2 enden (und nur solche), erfüllen die Bedingung. *Bemerkung:* Alle natürlichen Zahlen, die auf 7 enden.

5.1.4. Zum Beispiel:

2	7	4
14	6	12
3	10	13
15	11	5

6.1.1. $S = \frac{3n^2+2n-20}{n} = 3n+2-\frac{20}{n}$.
Nur $n = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ ergeben, in $\frac{20}{n}$ eingesetzt, natürliche Zahlen. $n = 1, 2$ entfällt.

n	4	5	10	20
S	9	13	30	61

6.1.2. Da kein Faktor 10 sein kann (das Produkt endet nicht auf Null) und alle Faktoren nicht größer als 10 sein können (das Produkt wäre sonst größer als 10000), sind alle Faktoren kleiner als 10. Sie lauten 6, 7, 8, 9. Ihr Produkt ist 3024.

6.1.3. Da 9^{10} zehnmal den Faktor 9 hat und $9 = 3\cdot 3$ gilt, hat 9^{10} als Produkt 20mal den Faktor 3. 3^{21} hat als Produkt 21mal den Faktor 3. Also gilt $3^{21} > 9^{10}$. *Bemerkung:* $4^8 > 8^4$,
da $8^4 = 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^6$.

6.1.4. $23 \leqq p \leqq 30{,}5$; $p = 23$; 29.

5.2.1. Nur für $c = 9$ ergibt $3\cdot c$ die Endziffer 7. $c = 9$, $b = 8$, $a = 5$ und $c = 9$, $b = 3$, $a = 6$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

5.2.2. $2\cdot 4\cdot 6 = 48$, $2\cdot 4\cdot 8 = 64$, $2\cdot 6\cdot 8 = 96$, $4\cdot 6\cdot 8 = 192$. Nur $624 : 48 = 13$ erfüllt die Bedingungen.

5.2.3.
Einzige Lösung $115\cdot 989 = 113\,735$.

5.2.4. Das jüngste Kind (Tochter) muß drei Jahre alt sein, denn $73-58 = 4+4+4+3$. Also ist der Sohn 6, die Mutter 31 und der Vater 33 Jahre alt. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

6.2.1. Da $w > 0$, gilt $4g+2g+g < 24$. Aus $7g < 24$ folgt $g = 1, 2, 3$. Nur $g = 3$ erfüllt die Bedingungen. Also sind es 3 grüne, 6 blaue, 12 rote und 3 weiße Kugeln.

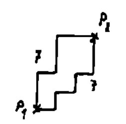
6.2.2. Hätte er in beiden Stufen je Aufgabe gleich viel Punkte erhalten, so wären es $60-4 = 56$, also 56 Punkte. Das wären für jede Aufgabe 8 Punkte. Er erreichte aber 4mal 9 Punkte und 3mal 8 Punkte. Das sind insgesamt 60 Punkte.

6.2.3. Wegen der Teilbarkeit durch 9 muß die Quersumme 18 oder 27 sein. Andere Quersummen sind nicht möglich, da $0 \leqq x+y \leqq 18$ gilt. $x+y = 17$ entfällt, da 948 nicht durch 8 teilbar ist. Für $x+y = 8$ erfüllen von den fünf möglichen Fällen ($y = 0, 2, 4, 6, 8$) nur 42840 und 42048 die Bedingungen.

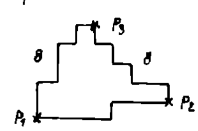
6.2.4. Wegen $91 = 13\cdot 7$ ergibt $13+7$ und 71 mal 1 hinzugefügt 91. Ebenso ist $13\cdot 7$ und 71 mal 1 hinzumultipliziert ebenfalls 91.

Lösungen zu:
Über Vielecke und Kreise in der Taxi-Geometrie

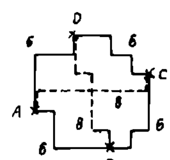
▲1▲



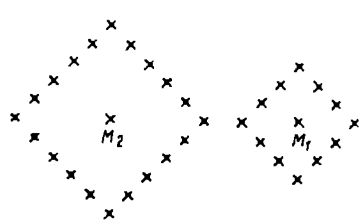
▲2▲



▲3▲



▲4▲



20 Kreispunkte $U_2 = 8r_2 = 40$ 12 Kreispunkte $U_1 = 8r_1 = 24$

▲5▲ Wir finden z. B. in Bild 6a das T-Zweieck DX; das gleichseitige T-Dreieck BCD; das T-Quadrat $ABCD$; das reguläre T-Fünfeck $AWXZY$; das reguläre T-Sechseck $AWBXZY$; und das reguläre T-Siebeneck $AWXCZDY$.
Die 8 Punkte des Kreises können als reguläres T-Achteck aufgefaßt werden.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ „Nikolai Iwanowitsch“, fragte Wadik einen ihm bekannten Verkäufer im Geschäft, „wieviel kostet ein Notizblock?“ „16 Notizblöcke kosten genausoviel Rubel, wie man Notizblöcke für einen Rubel kaufen kann“, antwortete der Verkäufer mit einem Lächeln.
Wieviel kostet denn nun ein Notizblock?
Lösung: Wenn 16 Blöcke x Rubel kosten und man für 1 Rubel x Blöcke bekommt, dann kostet 1 Block $\frac{x}{16}$ bzw. $\frac{1}{x}$ Rubel. Es gilt also $\frac{x}{16} = \frac{1}{x}$, d. h., $x^2 = 16$ und $x = 4$.
Ein Block kostet also 0,25 Rubel.

▲2▲ Wähle ein Paar ganzer Zahlen zwischen 0 und 10 (z. B. 5 und 8), und bilde deren Summe S $(5+8 = 13)$! Berechne dann die Summe T der zwei Zahlen, die durch die beiden ganzen Zahlen gebildet werden $(58+85 = 143)$! Kannst du erklären, warum T immer ein Vielfaches von S ist? Berechne den Quotienten $Q = \frac{T}{S}$!
Lösung: Sind x und y die beiden gewählten ganzen Zahlen, dann ist $S = x+y$. Die Zahlen, die durch diese beiden Ziffern gebildet werden können, sind $10x+y$ und $10y+x$, deren Summe ist dann $T = 11(x+y) = 11S$. Demzufolge ist immer
$Q = \frac{T}{S} = 11$.

▲3▲ Die Kombination von Onkel Archibalds Koffer umfaßt vier verschiedene Ziffern.
(1) Die erste ist gerade.
(2) Die Summe der beiden ersten ist 7.
(3) Die dritte ist kleiner als die zweite.
(4) Das Produkt der zweiten und der dritten endet auf 5.
(5) Man kann alle natürlichen Zahlen durch die vierte teilen.
Lösung: Wenn die erste Zahl gerade ist, muß die zweite wegen (2) ungerade sein. Wegen (4) sind die zweite und dritte ungerade, und die zweite Zahl ist eine 5. Dann ergibt sich für die erste Zahl aus (2) eine 2. Da die 4. Zahl wegen (5) nur eine 1 sein kann, muß infolge (3) die 3. Zahl eine 3 sein.
Die Kombination lautet demzufolge 2531.

Lösung zu: Schach und Mathematik

1. Es gibt 18 unterschiedliche Zugfolgen. Zum Beispiel: 1. d4 e5, 2. d5 Ke7, 3. d6+ oder 1. c4 f6, 2. Db3 Kf7, 3. c5+.

2. In 31 unterschiedlichen Zugfolgen gelingt es einem der schwarzen Türme, dem weißen König im 3. Zug Schach zu bieten. Sobald Weiß seinen d-, e- oder f-Bauern gezogen hat, kann der König in zwei Zügen auf die 3. Reihe vorrücken, so daß ihn einer der schwarzen Türme im 3. Zug bedrohen kann, z. B.:
1. f4 h5, 2. Kf2 Th6, 3. Kg3 Tg6+ oder 1. f3 a5, 2. Kf2 Ta6, 3. Ke3 Te6+. Es gibt 24 Lösungen von diesem Typ. Der Typ 1. f3 h5, 2. g4 h:g4, 3. Kf2 T:h2+ liefert vier weitere Lösungen. Zwei Lösungen entste-

hen nach 1. e4 h5(a5), 2. e5 Th6(Ta6), 3. e6 T:e6+. Außerdem gibt es noch die separate Lösung: 1. e4 h5, 2. D:h5 T:h5, 3. e5 T:e5+.

Lösungen zu: Raummühle

▲1▲ Typ 1 mit $3 \cdot 16$, also 48 Mühlen; Typ 2 mit $6 \cdot 4$, also 24 Mühlen; Typ 3 mit 4 Mühlen. Es gibt demnach 76 Möglichkeiten. (Siehe dazu auch die Angaben über die 3 Typen! Beliebig können a und b aus $\{1, 2, 3, 4\}$ gewählt werden.)

▲2▲ a) Eine Möglichkeit finden wir in der Lösung zur Auffgabe 4.
b) Man geht z. B. von der Lösung a) aus. Lösungsbeispiele wären für 18 Mühlen: Tausch von 213 mit 214; 17 Mühlen: Tausch von 113 mit 114; 16 Mühlen: Tausch von 113 und 213 mit 114 und 214; 15 Mühlen: Tausch von 113 und 413 mit 114 und 414; 14 Mühlen: Tausch von 113, 213, 413 mit 114, 214, 414. Die restlichen Fälle findet der Leser schnell.

▲3▲ Die (z. B.) roten Kugeln sind: 211, 221, 321, 421, 131, 231, 331, 341 (1. Schicht). 112, 212, 412, 422, 132, 142, 342, 442 (2. Schicht). 313, 123, 223, 323, 233, 333, 433, 243 (3. Schicht). 114, 214, 414, 424, 134, 144, 344, 444 (4. Schicht). – Tauscht man in dieser Darstellung 111 mit 112, so erhält man ein 1:0 für Rot. (Tauscht man noch dazu 411 mit 412, so wäre es ein 2:0 für Rot.)

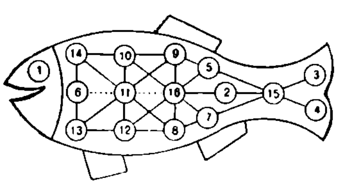
▲4▲ Der Nachziehende (Gelb) setzt seine Kugel stets auf die vom Anziehenden (Rot) gerade gesetzte. Auf diese Weise befinden sich die roten Kugeln genau in der 1. und 3. Schicht und die gelben in der 2. und 4. Schicht. Offenbar ist dieses Verfahren auch bis zum Ende ausführbar. Nun hat aber jeder genau 20 Mühlen, also endet die Partie remis.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

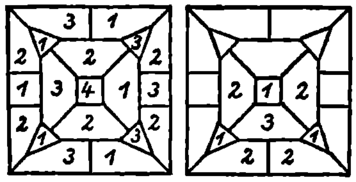
Silbenrätsel

1. windschief, 2. Intervall, 3. Nonius,
4. Kosinus, 5. Eintafelprojektion,
6. Logarithmus, 7. Funktionswerte,
8. ungerade, 9. Numerus, 10. Kathete,
11. Trigonometrie, 12. Ikosaeder,
13. orthogonal, 14. Nullstelle,
Lösungswort: Winkelfunktion.

Zauberfisch



Mit vier Farben



Das linke Bild zeigt eine mögliche zulässige Färbung, wobei die vier verschiedenen Farben durch 1, 2, 3 und 4 gekennzeichnet sind. Das rechte Bild verdeutlicht, daß eine zulässige Färbung mit nur drei verschiedenen Farben nicht möglich ist.

Hausnummer gefragt

Ohne Rücksicht auf biologische Möglichkeiten kann man die Zahl 72 auf folgende Weise in Produkte aus drei Faktoren zerlegen:
$1 \cdot 1 \cdot 72$, $1 \cdot 2 \cdot 36$, $1 \cdot 3 \cdot 24$,
$1 \cdot 4 \cdot 18$, $1 \cdot 6 \cdot 12$, $1 \cdot 8 \cdot 9$,
$2 \cdot 2 \cdot 18$, $2 \cdot 3 \cdot 12$, $2 \cdot 4 \cdot 9$,
$2 \cdot 6 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 8$, $3 \cdot 4 \cdot 6$.
Da der Fragende die Hausnummer kannte, hätte er mit ihrer Hilfe aus diesen 12 Möglichkeiten die richtige herausfinden können, wenn die Hausnummer nicht mehrmals als Summe aufträte. Tatsächlich haben die Faktorenzerlegungen $2 \cdot 6 \cdot 6$ und $3 \cdot 3 \cdot 8$ die gleiche Faktorensumme 14, so daß bei dieser Hausnummer noch keine Eindeutigkeit besteht. Diese wird durch die Bemerkung über das jüngste Kind herbeigeführt. Die Kinder sind demnach 2 Jahre (Mädchen) und 6 Jahre (Zwillinge) alt.

Logelei

Die Uhr muß logischerweise 17:14:07 zeigen. Zu den Stunden muß man 3 addieren, zu den Minuten 13 und zu den Sekunden 23 Zeiteinheiten.

Tele-Lotto

Magische Quadratzahlen bis 35 sind:
1, 4, 9, 16, 25.
Folgende Fallunterscheidungen:

I.	II.	III.	IV.
1	4	1	9
4	1	9	1
2	8	2	18
93	87	<u>88</u>	<u>72</u>
/ \	/ \		
47 46	43 44	entf.	entf.
entf.	entf.	(ger.	(ger.
>35	>35	Zahl)	Zahl)

V.	VI.	XIII.
1	16	4
16	1	25
2	32	8
81	51	63
/ \	/ \	/ \
40 41	40 41	$\boxed{31\ 32}$
entf.	keine	Bed.
>325	Primz.	erf.

XIX. 16, 25, 32, 27 → $\boxed{13\ 14}$
Bedingung erfüllt.
Es gibt 20 mögliche Kombinationen, von denen zwei Lösungen sind.
a) Uwe führt 4 Tips in Tele-Lotto aus;
b) Uwes Zahlen sind:

I	4	8	25	31	32;
II	13	14	16	25	32.

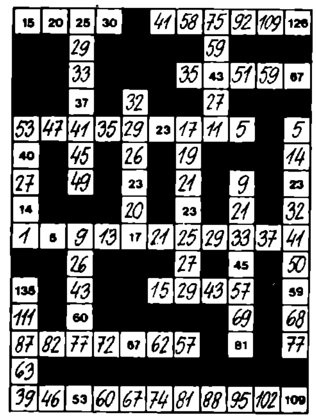
Videologika

Farbenverkehrt

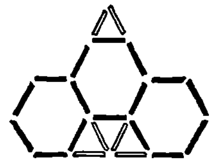
Nummer 6 ist das Positiv zum Negativ A.

Zahlenrätsel

Die Feststellung der richtigen Schlüsselzahl ist in jeder Reihe möglich, in der bereits zwei Zahlen bekannt sind. Man ziehe von der größeren Zahl die kleinere ab. Man stelle fest, wieviel leere Quadrate zwischen den beiden Zahlen liegen, und man addiere zu der Anzahl der leeren Quadrate eins. Man dividiere mit dieser Zahl das Ergebnis des Subtrahierens. Das Ergebnis der Dividierung ergibt die Schlüsselzahl. Die richtige Lösung ist folgende:



Regelmäßige Sechsecke



Lösungen zu:
Mathematik und Technik
Heft 1/86

Klasse 5

▲1▲ Die Quelle liefert in 4 Sekunden 2 Liter Wasser, also in 2 Sekunden 1 Liter Wasser. Ein Tag hat $60 \cdot 60 \cdot 24 = 86\,400$ Sekunden. Aus $86\,400 : 2 = 43\,200$ folgt, daß die Quelle an einem Tag 43 200 Liter Wasser liefert.

▲2▲ Die Kosten für 6 Lampen betragen bei einer Brenndauer von 15 Minuten 6 Pf. Sie betragen für 210 Lampen in der gleichen Zeit 35mal soviel, das heißt 2,10 M. Brennen diese 210 Lampen 30 Tage lang täglich 15 Minuten, erhöhen sich die Kosten auf 63,00 M. Bei einer unnützen Brenndauer von 5 Minuten täglich ergibt sich demnach für die Schule eine Mehrausgabe von 21 M.

▲3▲ $20 \cdot 4 = 80$. Mit dem ersten LKW wurden 80 t Ware befördert. $170 - 80 = 90$. Mit dem zweiten LKW wurden 90 t Ware befördert. $90 : 5 = 18$. Der zweite Fahrer machte 18 Fahrten.

▲4▲ In 34 Liter Kraftstoffgemisch sind 1 Liter Öl und 33 Liter Benzin enthalten. Aus $10 : 34 \approx 0{,}3$ folgt, daß dieser Kanister etwa 0,3 Liter Öl enthält.

▲5▲ Der Maßstab 1:87 bedeutet, daß 1 cm im Modell 87 cm in der Wirklichkeit entspricht.
1,74 m = 174 cm; 174 : 87 = 2.
Ein Mensch von 1,74 m Körpergröße müßte im Modell 2 cm groß sein.

▲6▲ 3 min = 180 s; $180 \cdot 24 = 4320$. Für eine Trickfilmsendung von drei Minuten Dauer müssen 4320 einzelne Bilder aufgenommen werden.

▲7▲ Aus $280 - 50 = 230$ und $230 : 2 = 115$ und $115 + 50 = 165$ folgt, daß der erste Gießer 165 Stück, der zweite 115 Stück herstellt.

▲8▲ Wir rechnen
$51 - 1 = 50$, $50 : 2 = 25$, $25 + 1 = 26$.
Auf der einen Straßenseite stehen 25, auf der anderen 26 Laternen. Nun gilt $25 \cdot 30\,\text{m} = 750\,\text{m}$. Die erste Straße ist 750 m lang.

▲9▲ Aus $2550 : 3 = 850$ und $2125 : 5 = 425$ und $850 : 425 = 2$ folgt, daß die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges doppelt so groß wie die des Propellerflugzeuges ist.

▲10▲ Die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators A sei a; dann ist die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators B gleich $a + 4$. Wir entnehmen der nachfolgenden Tabelle, daß die Variable a nur mit 2 belegt werden darf.

a	$a+4$	$a \cdot (a+4)$
1	5	5
2	6	12
3	7	21
4	8	32

Der Kondensator A besitzt eine 2 m² große, der Kondensator B eine 6 m² große Austauschfläche.

▲11▲ Bei einer Umdrehung des Kettenblattes macht das Hinterrad $54 : 18 = 3$ Umdrehungen; bei 5 Umdrehungen des Kettenblattes sind es $5 \cdot 3 = 15$ Umdrehungen des Hinterrades.

Klasse 6

▲1▲ $\dfrac{1500 \cdot 7{,}5}{2} = 5625$.
Das Wasser hat eine Tiefe von 5625 m.

▲2▲ a) 1(B, C); 2(A, B, G, E, D); 9(F, A, A, G, C, D)
b) bzw. 3

▲3▲ Die Lok führt den Zug hinter die Weiche 6 über die Weichen 2 – 3 – 4 – 4 – 6 – 6. Auf dem Abschnitt zwischen den Weichen 5 und 6 bleibt der Zug stehen, die Lok selbst fährt vorwärts hinter die Weiche 5, hält an und fährt im Rückwärtsgang über die Weichen 5 – 3 – 4 – 6 hinter die Weiche 6. Sie fährt an den Zug heran, führt ihn nun hinter die Weiche 6 und schiebt ihn dann hinter die Weiche 1 (über die Weichen 6 – 4 – 3 – 2 – 1). Die Lok bleibt stehen und fährt den Zug auf die Endposition.

▲4▲ a) $0{,}10 \cdot 120\,\text{mm} = 12\,\text{mm}$;
b) $0{,}70 \cdot 120\,\text{mm} = 84\,\text{mm}$

▲5▲ $3\,\text{min} = \frac{3}{60}\,\text{h} = \frac{1}{20}\,\text{h}$;

$$v = \frac{s}{t} = \left(2 : \frac{1}{20}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Herr Meyer fuhr mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h. Er hat sich nicht an die Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten.

▲6▲ $160 - 105 = 55$. Von den 160 Fahrzeugen hatten 55 Fahrzeuge Mängel. $55 - 15 = 40$. An 40 Fahrzeugen wurden Reifen- oder Beleuchtungsmängel festgestellt. $16 + 40 = 56$; $56 - 40 = 16$. An 16 Fahrzeugen wurden gleichzeitig Reifen- und Beleuchtungsmängel festgestellt.

▲7▲ Die Breite der Terrasse beträgt $(400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4) : 10\,\text{m} = 9{,}6\,\text{m}$.

▲8▲ $5\,\text{s} = \frac{5}{60}\,\text{min} = \frac{1}{12}\,\text{min} = \frac{1}{12 \cdot 60}\,\text{h} = \frac{1}{720}\,\text{h}$; $100\,\text{m} = \frac{1}{10}\,\text{km}$.

$$v = \frac{s}{t} = \left(\frac{1}{10} : \frac{1}{720}\right)\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Die Geschwindigkeit von 72 km/h entspricht nicht den Vorschriften der Straßenverkehrsordnung (50 km/h). Der Motorradfahrer gefährdet die übrigen Verkehrsteilnehmer.

▲9▲ 2 kW = 2000 W; 2000 : 40 = 50.
Eine Glühlampe von 40 W Leistung kann 50 Stunden brennen, bis $2\,\frac{\text{kW}}{\text{h}}$ verbraucht sind.

▲10▲ $A = (24 \cdot 15 - 4 \cdot 4^2)\,\text{cm}^2 = (360 - 64)\,\text{cm}^2 = 296\,\text{cm}^2$;
$V = 7 \cdot 16 \cdot 4\,\text{cm}^3 = 448\,\text{cm}^3$.
Zur Herstellung des Kastens werden 296 cm² Zinkblech benötigt; er faßt 448 cm³, das sind 0,448 Liter Flüssigkeit.

▲11▲ $P = I \cdot U = 220 \cdot 0{,}1\,\text{W} = 2002\,\text{W} = 2{,}002\,\text{kW}$.
Die Leistungsaufnahme der Waschmaschine beträgt rund 2 kW (Kilowatt).

▲12▲ Aus $8 \cdot x = 40 \cdot 5$ folgt $x = 25$.
Auf das Ventil drückt eine Kraft von 25 kp.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Slobodezki/Aslamasow

▲2635▲ Die auf der Leinwand abgebildeten Räder führen eine Umdrehung in der Zeit aus, in der vier Bilder durch den Projektor laufen. Deshalb muß sich das Rad auf jedem Bild im Vergleich zum vorhergehenden Bild um $\frac{1}{4}$ Umdrehung weitergedreht haben. Die Räder auf der Leinwand drehen sich *vorwärts*, wenn das Auto mit einer solchen Geschwindigkeit fährt, daß in der Zeit zwischen den Bildern $\tau = \frac{1}{16}\,\text{s}$ die Räder des Autos n ganze Umdrehungen und noch $\frac{1}{4}$ Umdrehung um die eigene Achse ausführen. Wenn aber in τ Sekunden die Räder n ganze und $\frac{3}{4}$ Umdrehungen machen, so drehen sich die auf der Leinwand abgebildeten Räder *rückwärts*. Also ist die Winkelgeschwindigkeit der Räder entweder

$$\omega_1 = 32\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)\text{s}^{-1}$$

oder $\omega_2 = 32\pi \cdot \left(n + \frac{3}{4}\right)\text{s}^{-1}$.

Dies bedeutet, daß sich die Achsen der Räder und damit das Auto mit der Geschwindigkeit $v_2 = 32\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi R \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (in diesem Falle drehen sich die abgebildeten Räder *rückwärts*) fortbewegen. Setzen wir in diesen Formeln $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, erhalten wir als Ergebnis

$$v_1 = 12{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

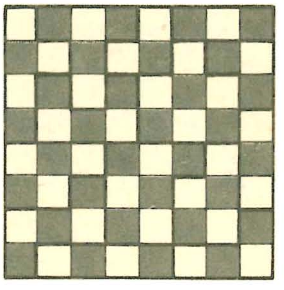
oder $v_1' = 223\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \ldots$ und

$$v_2 = 136\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ oder } v_2' = 316\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \ldots$$

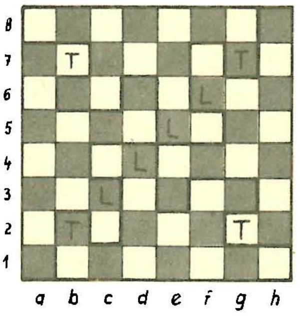
Da ja die Geschwindigkeit des Autos kaum größer als $140\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sein wird, ist sie gleich $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wenn sich die Räder auf der Leinwand *vorwärts* drehen, oder gleich $136\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wenn sie sich auf der Leinwand *rückwärts* drehen.

Lösungen zu: Knobelwandzeitung (6)
Heft 1/86

▲1▲ Schachbrett-Puzzle



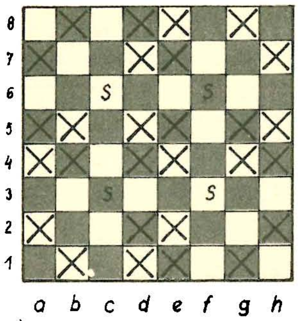
▲2▲ Schachbrett-Teilung



▲3▲ Schachbrett mit Münzen
Die Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung der Münzen:

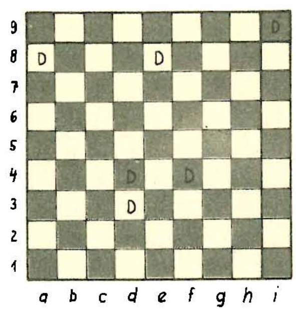
	a	b	c	d	e	f	g	h
8	1	20	5	50	1	100	5	10
7	10	1	100	5	50	1	20	5
6	100	1	5	20	5	50	10	1
5	5	10	50	5	100	1	1	20
4	20	100	1	1	10	5	5	50
3	50	5	1	10	1	20	100	5
2	1	5	10	100	20	5	50	1
1	5	50	20	1	5	10	1	100

▲4▲ Mit 4 Springern



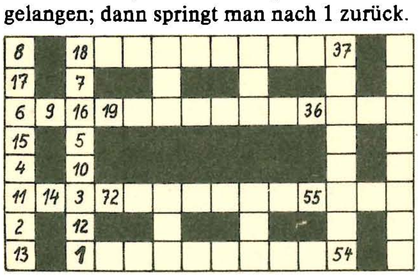
▲5▲ Mini-Schach
a) c2, b) c1, c) Die 3 Damen beherrschen das gesamte Spielfeld; der König stünde überall im „Schach“, d) b2.

▲6▲ Damen-Problem
Ja! Auf einem 8×8-Schachbrett kann man 5 = 8-3 Damen so aufstellen, daß alle Felder von ihnen beherrscht werden. Geht man zu einem 9×9-Brett über, so kommen zwei sich in i9 kreuzende Reihen hinzu, die durch eine weitere Dame in i9 beherrscht werden. Zur Beherrschung eines 9×9-Brettes genügen also 6 = 9-3 Damen.

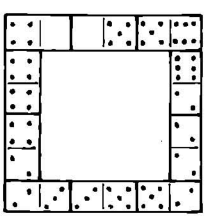


Analog schließt man weiter bis zur Aussage, daß ein 1986×1986-Brett durch 1983 = 1986 − 3 Damen beherrscht werden kann. Es gilt hiernach sogar für jede natürliche Zahl $n \geqq 8$: Ein $n \times n$-Schachbrett kann durch n-3 Damen vollständig beherrscht werden (Exakter Beweis durch „vollständige Induktion über n“, den unsere obige Schlußweise verdeutlicht).

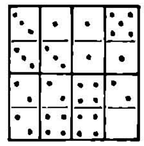
▲7▲ Rösselsprung
Das Bild zeigt einen möglichen Weg von 1 bis 18. Auf die gleiche Weise kann man von 19 bis 36, von 37 bis 54, von 55 bis 72 gelangen; dann springt man nach 1 zurück.



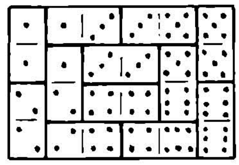
▲8▲ Domino-Rahmen



▲9▲ Magisches Domino-Quadrat



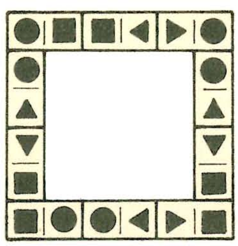
▲10▲ Eine Quadrille



▲11▲ Lage-Rekonstruktion

4	2	4	2	1	6	2	5
0	1	5	0	5	5	0	5
4	5	4	6	6	0	3	3
4	4	1	3	2	0	3	3
1	6	6	6	2	6	2	0
0	4	3	5	2	0	2	4
5	6	1	3	1	1	1	3

▲12▲ Kinderleicht

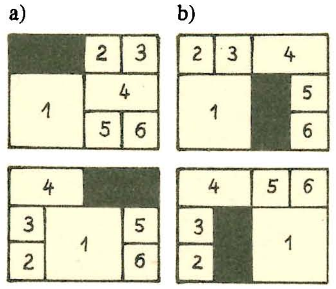


▲13▲ Magisches Domino-Wort-Quadrat

R	O	S	E
O	B	E	R
S	E	I	L
E	R	L	E

▲14▲ Schiebe-Puzzle
2 Möglichkeiten mit 14 Zügen sind:
1) 6, 5, 1 (Bild a), 2, 3, 4, 5 (Bild b), 1, 2, 3, 4 (Bild c), 5, 6, 1 (Bild d).
2) 4, 2, 1, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 4, 2, 3, 1.

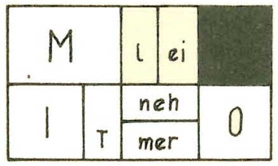
a) b)



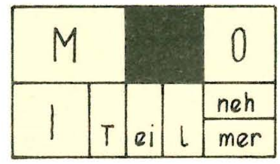
c) d)

▲15▲ IMO-Teilnehmer
Eine Möglichkeit mit 16 Zügen ist:

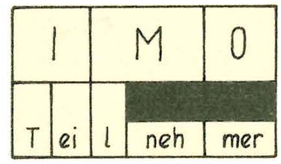
a)



b)



c)



0, mer, neh, l, ei (Bild a),
0, mer, neh, l, ei (Bild b),
M, I, T, ei, l, neh (Bild c, Endstand).

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/85 (Fortsetzung)

Ch 7 ■ 145 350 ml Lösung ≙ 12 g Kochsalz
40 ml Lösung ≙ m

$$m = \frac{40\,\text{ml} \cdot 12\,\text{g}}{350\,\text{ml}}$$

$$m = 1{,}4\,\text{g}$$

1,4 g Kochsalz sind in den 40 ml der Lösung enthalten.

Ch 8 ■ 146 150 g Asche ≙ 100 %
1 g Asche ≙ x

$$x = 0{,}667\,\%$$

Multiplikation der einzelnen Auswaagen mit dem Faktor 0,667:

$$2{,}6 \cdot 0{,}667 = 1{,}734 = 1{,}73$$
$$16{,}8 \cdot 0{,}667 = 11{,}206 = 11{,}21$$
$$18{,}1 \cdot 0{,}667 = 12{,}073 = 12{,}07$$
$$45{,}7 \cdot 0{,}667 = 30{,}482 \approx 30{,}48$$
$$51{,}2 \cdot 0{,}667 = 34{,}150 \approx 34{,}15$$
$$5{,}6 \cdot 0{,}667 = 3{,}735 \approx 3{,}74$$
$$10{,}0 \cdot 0{,}667 = 6{,}670 \approx 6{,}67$$

Die Asche besitzt demzufolge nachstehende Zusammensetzung:

Korngröße in mm			
1,0	1,0–0,75	0,75–0,5	0,5–0,25
Prozent			
1,73	11,21	12,07	30,48

0,25–0,1	0,1–0,75	0,075
34,15	3,74	6,67

Ch 9 ■ 147 a) Ermittlung des Verbrauchs einer genau 1n Salzsäure:
15,3 ml · 1,005 ≙ 15,377 ml
1 ml 1n Salzsäure ≙ 40 mg Natriumhydroxid
15,377 ml Salzsäure = m

$$m = \frac{15{,}377\,\text{ml} \cdot 40\,\text{mg}}{1\,\text{ml}}$$

$$m = 615{,}08\,\text{mg}$$
$$m = 0{,}62\,\text{g}$$

In den 0,02 dm^3 Natronlauge sind 0,62 g Natriumhydroxid enthalten.
b) Die Natronlauge enthält 0,775 Mol Natriumhydroxid im Liter.
c) Die Natronlauge enthält 3 % Natriumhydroxid.

Ch 10/12 ■ 148 Zur Herstellung einer 32,2 %igen Magnesiumsulfat-Lösung muß eine 27,9 %ige Schwefelsäure verwendet werden.

Eine Ungleichung

verschiedene Lösungswege – Verallgemeinerungen

In *alpha* Heft 1/1985, S. 5 wird von *L. Püffeld* folgende Aufgabe gestellt:
Man beweise: Für alle reellen Zahlen x und y gilt die Ungleichung

$$x^2 + y^2 - 1 \geqq x + y + xy. \qquad (1)$$

Die dort angeführte Lösung geht über den Schulstoff hinaus, da sie Kenntnisse über die Differentialrechnung zweier Veränderlicher voraussetzt. In diesem Beitrag wird die Ungleichung (1) mit elementaren Schulmitteln bewiesen. Er entstand infolge der Zuschriften auf den oben genannten Artikel von Mr. pharm. Doris Gollé (Wien), Prof. Nawrotzki (Jena), F. Rehm (Schönebeck) und des Autors.

1. Weg:
Im Lehrbuch Mathematik, Kl. 9, S. 111 finden wir: „Jede Funktion $y = x^2 + px + q$ nimmt also an der Stelle $x_s = -\frac{p}{2}$ ihren kleinsten Funktionswert $y_s = -D$ an." (D bezeichnet die Diskriminante.)
Um diesen Sachverhalt anwenden zu können, fassen wir $z = x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$ als quadratische Funktion in x auf. Dann ist

$$z = x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1$$
$$\geqq \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{y+1}{2}(y+1) + y^2 - y + 1$$
$$= \frac{3}{4}(y-1)^2 \geqq 0$$

und damit (1) bewiesen.
Da z in x und y symmetrisch ist (d.h., vertauscht man x mit y, so erhält man das gleiche z), hätten wir z auch als quadratische Funktion in y auffassen können und wären zu dem gleichen Ergebnis gekommen.

2. Weg:
Wir verwenden aus dem gleichen Lehrbuch, S. 113: „Für jede Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ gilt: f hat genau dann Nullstellen, wenn $D = \frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ ist."
Nun gilt für die in x quadratische Funktion

$$f(x) = x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1, \text{ daß}$$
$$D = \frac{(y+1)^2}{4} - (y^2 - y + 1)$$
$$= -\frac{3}{4}(y-1)^2 \leqq 0 \text{ ist.}$$

Damit hat $f(x)$ nur für $y = 1$ eine Nullstelle und berührt in diesem Fall die x-Achse. Da aber

$$f(1) = 1 - (y+1) + y^2 - y + 1$$
$$= (y-1)^2 \geqq 0$$

ist, gilt damit für alle reellen x und y: $f(x) \geqq 0$.

3. Weg:
Mit $a = x - 1$, $b = y - 1$ geht (1) wegen

$$x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$$
$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 - (x-1)(y-1)$$

in die äquivalente Ungleichung

$$a^2 + b^2 \geqq ab \qquad (2)$$

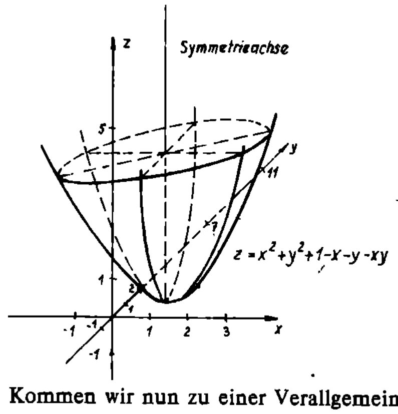
über.
Diese Ungleichung kann nun mit den Mitteln, die im 1. und 2. Weg dargestellt wurden, bewiesen werden. Dies überlassen wir dem Leser.
Wir zeigen noch zwei andere Methoden.
Für $a = 0$ oder $b = 0$ gilt (2) offenbar. Haben a und b verschiedene Vorzeichen, so gilt (2) ebenfalls, da die linke Seite positiv und die rechte negativ ist. Es genügt daher, (2) für $a, b > 0$ zu beweisen. (Für $a, b < 0$ kompensieren sich die Minuszeichen.)
Nun folgen die beiden Beweise:
a) Es ist $(a - b)^2 \geqq 0$, also
$a^2 + b^2 \geqq 2ab > ab$.
b) Es sei $x = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, dann entsteht aus (2) nach Division durch b^2 $(\neq 0)$ die äquivalente Ungleichung $x^2 + 1 \geqq x$. Es ist aber

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4} > 0.$$

4. Weg:
Wir geben einige äquivalente Darstellungen für $z = x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$ an, aus denen man die Nichtnegativität sofort ersieht, da Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ sind. Es ist

$$z = \left(x - \frac{1+y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2$$
$$= \frac{1}{6}(x - 2y + 1)^2 + \frac{1}{6}(2x - y - 1)^2 + \frac{1}{6}(x + y - 2)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2$$
$$= 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} - 1\right)^2.$$

Derartige „mystische" Lösungen (F. Rehm) kann man natürlich nur durch Probieren finden. Allerdings geht es bei langjähriger Erfahrung und vielfältigem Üben leichter.
Bevor wir die Ungleichung (1) verlassen, zeigen wir noch nebenstehendes Bild von $z = x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy$.



Kommen wir nun zu einer Verallgemeinerung.
Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d dafür, daß für alle reellen x und y

$$x^2 + y^2 + ax + by + cxy + d \geqq 0 \qquad (3)$$

gilt.
Wir verfolgen den 1. Weg. Den 2. Weg überlassen wir dem Leser.
a) Es gelte für alle reellen x, y die Ungleichung (3). Dann ist

$$x^2 + x(a + cy) + y^2 + by + d$$
$$\geqq \left(\frac{a+cy}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+cy}{2}\right)(a + cy)$$
$$+ y^2 + by + d = y^2\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)$$
$$+ y\left(b - \frac{1}{2}ac\right) + d - \frac{a^2}{4} \qquad (=).$$

(Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = -\frac{a+cy}{2}$.) Damit nun diese in y quadratische Funktion nicht negativ wird, muß

$$1 - \frac{c^2}{4} > 0 \quad \text{und} \quad D = \left(b - \frac{1}{2}ac\right)^2 \qquad (4)$$
$$- 4\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)\left(d - \frac{a^2}{4}\right) \leqq 0 \text{ sein.} \qquad (5)$$

Betrachten wir noch den Fall, daß der Koeffizient bei y^2 verschwindet.
(4a) Für $c = 2$ folgt aus (5) $a = b$. Damit $z = x^2 + y^2 + 2xy + ax + ay + d$
$= (x+y)^2 + a(x+y) + d$ nichtnegativ ist, muß ferner $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ sein.
(4b) Für $c = -2$ folgt aus (5) $a = -b$. Damit $z = x^2 + y^2 + ax - ay - 2xy + d =$
$(x-y)^2 + a(x-y) + d$ nichtnegativ ist, muß ferner $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ gelten.
b) Die Bedingungen (4) und (5) bzw. (4a), (4b) sind hinreichend für das Bestehen der Ungleichung (3).
Für $c = 2$, $a = b$, $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ ist

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + ax + by + d$$
$$= (x+y)^2 + a(x+y) + d$$
$$= \left(x + y + \frac{a}{2}\right)^2 + d - \frac{a^2}{4} \geqq 0.$$

Für $c = -2$, $a = -b$, $\frac{a^2}{4} - d \leqq 0$ ist

$$z = x^2 - 2xy + y^2 + ax + by + d$$
$$= (x-y)^2 + a(x-y) + d$$
$$= \left(x - y + \frac{a}{2}\right)^2 + d - \frac{a^2}{4} \geqq 0.$$

Gelten nun (4) und (5), so ist

$$y^2\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) + y\left(b - \frac{1}{2}ac\right) + d - \frac{a^2}{4} \geqq 0$$

und wegen (=) gilt (3).
Damit haben wir als notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung (3) die Bedingungen (4) und (5) bzw. (4a), (4b) erhalten.
Wir haben also einen allgemeineren Sachverhalt als die ursprüngliche Ungleichung (1) gelöst.
Als Klausuraufgabe in einer Mathematikolympiade würde man versuchen, diesen allgemeinen Sachverhalt besonders attraktiv zu gestalten. Dies könnte z. B. wie folgt geschehen:
Man untersuche, ob für alle reellen Zahlen x und y die Ungleichung $x^2 + y^2 + xy - 19x - 84y + 1985 \geqq 0$ erfüllt ist.
(Antwort: Die Bedingungen (4) und (5) sind erfüllt, also gilt die Ungleichung für alle reellen Zahlen x und y.)
Weitere Verallgemeinerungen sind möglich, doch wollen wir diese dem interessierten Leser selbst überlassen. *W. Moldenhauer*

Ein mathematisches Spiel

Wir betrachten zunächst das folgende Zweipersonenspiel, das im englischen Sprachraum den Namen *Chomp* erhalten hat und vor reichlich 20 Jahren von dem amerikanischen Mathematiker *David Gale* erfunden wurde. Für *Chomp* benötigen wir ein rechteckiges Spielfeld mit quadratischen Feldern, z. B. ein Dame-Brett oder ein Go-Brett und die dazugehörigen Steine. Uns kommt es nicht darauf an, welche Farbe die Steine haben, da wir nur eine Sorte Steine benötigen. Vor Beginn des Spiels werden die Steine in Form eines $n \times m$-Rechtecks aufgebaut. Für den Anfang wählen wir ein 3×4-Rechteck (Bild 1). Ein Zug besteht nun darin, einen Stein auf dem Feld auszuwählen und diesen Stein und alle Steine zu entfernen, die sich auf der gleichen senkrechten Reihe nach oben und auf der gleichen waagerechten Reihe nach rechts befinden sowie auch alle die Steine, die sich im Inneren des so gebildeten rechten Winkels befinden. Die Spieler ziehen nun abwechselnd, und wer den letzten Stein (Schlußstein) links unten vom Brett nehmen muß, hat verloren. Ein möglicher Spielverlauf ist im Bild 1 dargestellt. Für einige spezielle Werte für n und m können wir uns überlegen, wie man spielen muß, um zu gewinnen. Für $n = 2$ kann der anziehende Spieler stets gewinnen, der Gewinnzug ist im Bild 2 dargestellt. Nach diesem Zug ist die untere Reihe um einen Stein länger als die obere. Der zweite Spieler ist gezwungen, diesen Zustand zu zerstören. Ihr könnt euch schnell überlegen, daß danach der erste Spieler wieder einen solchen Zug machen kann, daß wieder die untere Reihe um einen Stein länger ist als die obere. Schließlich bleibt nur der letzte Stein übrig, und den muß der zweite Spieler nehmen.

Betrachten wir nun ein quadratisches Spielfeld, d. h. $m = n$.

Auch hier kann der anziehende Spieler stets gewinnen, wenn er zuerst den Stein wählt, der zum Schlußstein diagonal benachbart ist. Es bleiben dann nur zwei gleich lange, rechtwinklig gelegene Streifen übrig. Jeder mögliche Zug des zweiten Spielers verkürzt genau einen der Streifen, der erste Spieler kann den zweiten Streifen entsprechend verkürzen. Nach höchstens $2n$ Zügen hat also der anziehende Spieler gewonnen.

Wählt man $n = 3$ und m beliebig ($m \geqq 4$), dann ist schon kein allgemeines zum sicheren Gewinn führendes Verfahren mehr bekannt, obwohl die Einzelfälle schon von D. Gale bis $m = 100$ auf einem Computer analysiert wurden. Die Gewinnzüge für den ersten Spieler bis $m = 10$ sind in Bild 3 angegeben.

In allen bisherigen Spezialfällen konnte der anziehende Spieler gewinnen, wir können auch recht kurz und elegant beweisen, daß dies bei beliebigen $n \times m$-Spielfeldern richtig ist. Dieser Beweis ist jedoch ein reiner Existenzbeweis, er gibt uns überhaupt keinen Hinweis, wie wir spielen müssen, um zu gewinnen. Wir nehmen nun an, der anziehende Spieler wählt im ersten Zug den Stein rechts oben in der Ecke. Dann gibt es genau zwei Möglichkeiten, nämlich:

1. Das ist der Gewinnzug, d. h., wie der zweite Spieler auch weiterspielt, stets wird der zweite Spieler verlieren.
2. Das ist nicht der Gewinnzug, und der zweite Spieler kann einen Gewinnzug machen.

Im ersten Fall ist alles gut. Im zweiten Fall hätte aber der erste Spieler zu Beginn statt des Steins rechts oben denjenigen Stein wählen können, den nun der zweite Spieler in seinem Antwortzug gewählt hat. Dadurch hätte sich gleich nach dem ersten Zug das Bild ergeben, das sich so erst im 2. Zug ergeben hat, also wäre das ein Gewinnzug gewesen. Damit ist bewiesen, daß stets für den anziehenden Spieler ein Gewinnzug existiert.

R. Lehmann/U. Quasthoff

Bild 1: Das Spiel Chomp auf einem 3× 4-Spielfeld

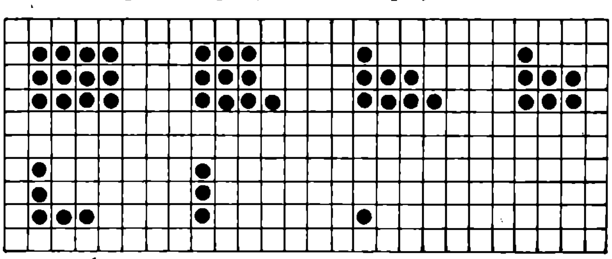


Bild 2: Gewinnzug für das 2× m-Spielfeld

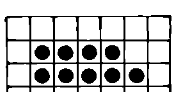
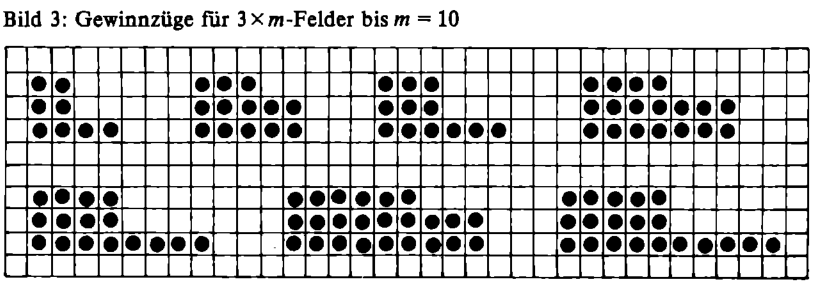


Bild 3: Gewinnzüge für $3 \times m$-Felder bis $m = 10$



Sternennacht

von Gerh. Gentzen, 15 J. alt, s. Beitrag Seite 28/29, Erstveröffentlichung

Blutig rot erglüht's im Westen,
Und die Sonne sinkt ins Meer.
Unter geht das Licht des Tages,
Dunkler wird es um uns her.

In des Himmels Dämmerscheine
Blitzt es auf: der erste Stern!
Venus ist's, der Erde Nachbar,
Und dennoch so fern, so fern.

Dunkler wird's am Firmamente,
Leuchtend flüchtet der Planet.
Seine Stunde ist vorüber,
Wenn die Dämmerung vergeht.

Dunkle Nacht! Die Sterne leuchten
Hoch am Himmel klar und hell,
Und in weitem Bogen fliegen
Meteore, flink und schnell.

Ruhig wandeln die Planeten
In der festgesetzten Bahn.
Leuchten uns mit ihrem hellen
Ruhig sanften Schimmer an.

Um des Himmels größten Bogen
Schlingt sich hell ein Sternenband
Wie ein großer Nebelstreifen.
Die Milchstraße wird's genannt.

Tief im Süd am Horizonte
Zieht ein Komet durchs Sternenreich,
Und sein Schweif im langen Bogen
Eilt voraus ihm, matt und bleich.

Eine Wolke zieht vorüber,
Hinter ihr strahlt's hell und klar;
Und des Mondes lichter Schimmer
Überstrahlt die Sternenschar.

Und im Osten wird es heller,
Sternenglanz vergeht zu Nichts;
Und ein roter Morgenschimmer
Kündet uns das Nahn des Lichts.