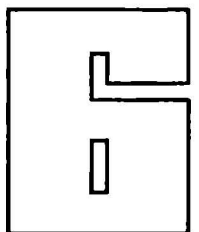


Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,- M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059



Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegenommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Zentralbild (Steinberg), Berlin (S. 97); Jürgen Ludwig, Arnstadt (6 Fotos); J. Lehmann, Leipzig (10 Fotos); DLZ-Graphik (S. 120); Vignetten: W. Tilman, Moskau (S. 114), K. Moschkin, Moskau (S. 110); Ornament aus: Matematički List, Beograd (S. 115); Utschitelskaja gaseta, Moskau (S. 115)

Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei

der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluß: 1. Oktober 1974

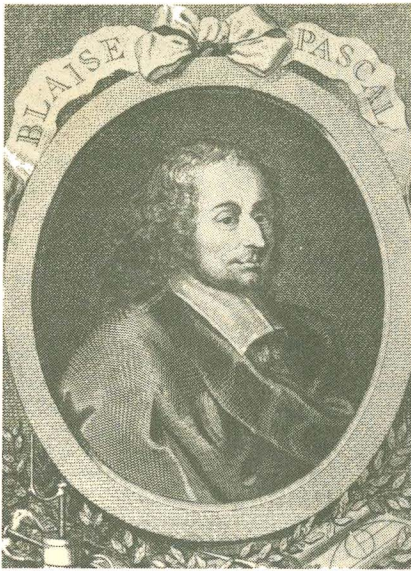
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 **Blaise Pascal [8]***
Doz. Dr. S. G. Gindikin, Lomonossow-Universität Moskau
(gekürzt aus: „Quant“ 8/73)
- 124 **Was braucht man zum Lösen einer Aufgabe? [10]**
Forschungsstudent W. Burmeister, Technische Universität Dresden
- 126 **Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen Teil 2 [6]**
Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS, Döbeln
- 127 **7th Tanzanian Mathematics Contest [7]**
eingesandt von Mathematikfachlehrer H. Bartel, Mbeya/Tansania
- 128 **Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen? (Leseprobe) [8]**
Prof. Dr. J. I. Churgin, Moskau
- 129 **Mit Zirkel und Zeichendreieck [7]**
überreicht durch Institut für Lehrerbildung, Quedlinburg
- 130 **Über das Falten einer Landkarte [8]**
- 132 **Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]**
Autorenkollektiv
- 134 **Eine Aufgabe von stud. math. János Kollár [10]**
Universität Budapest
- 135 ***alpha*-Wettbewerb 1973/74 [5]**
Preisträger · vorbildliche Leistungen · kollektive Beteiligung von Schulen · Entwicklung des *alpha*-Wettbewerbs 1967/1974 · im Wettbewerbsjahr 1973/74: 58 000 Lösungen · vorbildliche Hilfe
- 136 **Domenico Fetti: Archimedes [7]**
Bildbeschreibung von Dipl.-Phil. Ruth Richter, Berlin
- 137 **aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]**
Logik-Aufgaben aus der Ungarischen Volksrepublik [5]
speziell für Klasse 5/6, Urania der UVR
- 138 **In freien Stunden *alpha*-heiter [5]**
Studienrat J. Lehmann, VLdV, Leipzig/Oberlehrer H. Pätzold, Waren (Müritz)
- 140 **30 Jahre VR Polen [5]**
Polnisches Informationszentrum Leipzig/StR J. Lehmann, VLdV
- 141 **Lösungen [5]**
- III. Umschlagseite: Weggefährte Buch**
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

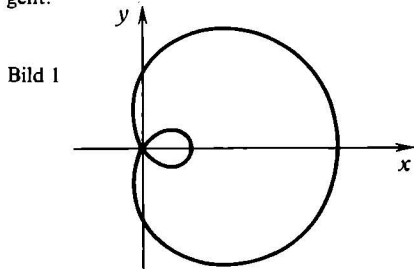


Am 19. Juni 1973 jährte sich der Geburtstag von **BLAISE PASCAL**, einer der bedeutendsten Erscheinungen in der Geschichte der Menschheit, zum 250. Male. Wir verehren *Pascal* als großen Philosophen und Schriftsteller, Physiker und Mathematiker. Es ist aber wahrscheinlich nicht überflüssig, daran zu erinnern, daß er auch die ganz gewöhnliche Schubkarre erfunden hat und daß auf ihn die Idee der Omnibusse zurückgeht – allgemeinschwinglicher Kutschen (für 5 Sou) mit fester Linienführung –, der ersten Form eines regelmäßigen städtischen Transportmittels. Wir wollen hier von einigen Seiten aus dem Leben *Pascals* berichten.

1. Stäbchen und kleine Münzen

Wenn wir lernen, graphische Darstellungen anzufertigen, so begegnen uns neben zahllosen namenlosen Kurven manchmal Kurven, die eine gewisse Bezeichnung tragen oder nach jemandem benannt sind:

Archimedische Spirale, *Newtons Tridens*, *Konchoide von Nikomedes*, *Cartesisches Blatt* (Bild 1), *Locke der Agnesi* (Versiera), *Pascalsche Schnecke* ... Es wird kaum einer daran zweifeln, daß dies ebenderselbe *Pascal* ist, auf den das *Pascalsche Gesetz* zurückgeht.



Mit der Benennung der bemerkenswerten Kurven vierter Ordnung wird jedoch der Name von *Étienne Pascal* (1588 bis 1651) verewigt, des Vaters des zukünftigen Gelehrten. *É. Pascal* diente, wie es im Geschlecht *Pascals* üblich war, am Obersteueramt (cour

des aides) der Stadt Clermont-Ferrand. Es war in der Tat nicht selten, daß eine juristische Tätigkeit mit der Beschäftigung mit einer von der Jurisprudenz weitab liegenden Wissenschaft einherging. Etwa um dieselbe Zeit widmete der Steuerrat von Toulouse *Pierre Fermat* (1601 bis 1665) seine Freizeit der Mathematik. Obgleich *É. Pascal* nur bescheidene eigene Erfolge aufzuweisen hatte, war er auf Grund seiner soliden Kenntnisse in der Lage, mit den meisten der großen französischen Mathematiker Kontakte zu unterhalten. Mit *Fermat* tauschte er schwierige Aufgaben über Dreieckskonstruktionen aus; in dessen Streit mit *Descartes* (1596 bis 1650) über Maximum- und Minimumprobleme nahm er aktiven Anteil auf der Seite *Fermats*.

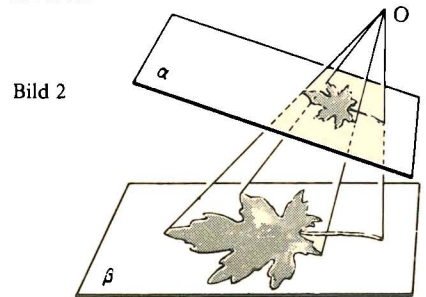
Frühzeitig verwitwet, widmete sich *É. Pascal* hauptsächlich der Erziehung seiner Kinder (außer einem Sohn hatte er zwei Töchter, Gilberte und Jaqueline). Bei dem kleinen *Blaise* ließ sich sehr zeitig eine erstaunliche Begabung beobachten; sie ging aber, wie dies häufig zu geschehen pflegt, mit einer sehr schlechten Gesundheit einher. *É. Pascal* ging in der Erziehung seiner Kinder nach einem sorgfältig durchdachten System vor. In der ersten Zeit schloß er aus der Reihe der Gegenstände, die er seinen Sohn lehrte, die Mathematik kategorisch aus, denn er befürchtete, daß seine Entwicklung durch die Begeisterung für die Mathematik gestört würde und seine schwache Gesundheit durch das angespannte Nachdenken, ohne daß es nun einmal nicht geht, Schaden nehmen könnte.

Der 12jährige *Blaise*, der von der Existenz der geheimnisvollen Geometrie wußte, mit der sich der Vater beschäftigte, überredete ihn jedoch, etwas über die *verbotene Wissenschaft* zu erzählen. Die Informationen, die er dabei erhielt, reichten aus, um ein spannendes „Spiel in Geometrie“ zu beginnen: Satz um Satz zu beweisen. In diesem Spiel waren „kleine Münzen“ (Kreise), „Dreispitze“ (Dreiecke), „Tische“ (Rechtecke) und „Stäbchen“ (Strecken) beteiligt. Der Knabe wurde vom Vater in dem Moment ertappt, als er entdeckte, daß die drei Winkel eines „Dreispitzes“ zusammen ebensoviel ausmachen wie zwei Winkel eines „Tisches“. *É. Pascal* erkannte mühelos den berühmten 32. Satz des ersten Buchs des *Euklid* wieder, den Satz über die Winkelsumme im Dreieck. Das Resultat waren Tränen in den Augen des Vaters und der Zugang zu den Schränken mit mathematischen Büchern.

Mit etwa 10 Jahren fertigte *B. Pascal* seine erste physikalische Arbeit an. Er interessierte sich nämlich dafür, warum ein Fayenceteller tönnte, führte daraufhin eine Serie wohl-durchdachter Experimente mit einer Reihe von Hilfsmitteln durch und erklärte schließlich die ihn interessierende Erscheinung durch das Schwingen der Luftteilchen.

2. „Mystisches Hexagramm“ oder „Großer Pascalscher Satz“

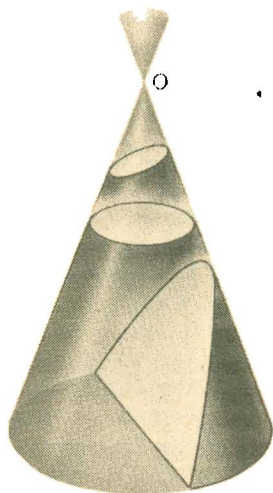
Mit 13 Jahren hatte *B. Pascal* bereits zu dem Mathematischen Kreis um *Mersenne* (1588 bis 1648) Zugang, in dem die meisten Pariser Mathematiker ein- und ausgingen, darunter *É. Pascal* (*Pascal* lebte seit 1631 in Paris). Hier fand er einen Lehrer, der seiner würdig war. Es handelte sich um den Ingenieur und Architekten *Gerard Desargues* (1593 bis 1663) den Schöpfer einer originellen Theorie der Perspektive. Sein Hauptwerk „Erste Niederschrift des Entwurfs eines Versuchs über die Tatsachen, zu welchen der Schnitt eines Kegels durch eine Ebene Veranlassung gibt“ (1639) fand nur wenige Leser; unter ihnen nimmt *B. Pascal*, der es wesentlich weiterentwickeln konnte, einen besonderen Platz ein. Es muß an dieser Stelle gesagt werden, daß die Geometrie zu jener Zeit, von der wir hier sprechen, trotz der völlig neuen Wege, die ihr *Descartes* bahnte, indem er die analytische Geometrie schuf, im wesentlichen kaum das Niveau erreichte, auf dem sie sich im alten Griechenland befand. Vieles aus dem Erbe der griechischen Geometrie blieb unklar. Das bezieht sich vor allem auf die Theorie der Kegelschnitte. Das hervorragendste Werk zu diesem Thema – die acht Bücher „Konika“ von Apollonius – war nur bruchstückhaft bekannt. *Desargues* bemerkte, daß es durch eine systematische Anwendung der Methode der Perspektive möglich würde, eine Theorie der Kegelschnitte von einem völlig neuen Standpunkt aus aufzubauen.



Wir wollen die Zentralprojektion vom Punkte 0 aus von Bildern auf der Ebene α auf die Ebene β betrachten. (Bild 2) Es liegt nahe, in der Theorie der Kegelschnitte eine solche Transformation zu verwenden, weil sich ihre Definition selbst – als Schnitte eines geraden Kreiskegels (Bild 3) – folgendermaßen umformulieren läßt: sie werden alle dadurch gewonnen, daß man einen von ihnen (etwa einen Kreis) durch Zentralprojektion von der Spitze eines Kegels aus auf verschiedene Ebenen abbildet. Da wir weiter bemerken, daß sich schneidende Geraden bei Zentralprojektion entweder in einander schneidende Geraden oder in parallele Geraden übergehen können, fassen wir die beiden letzteren Eigenschaften in eine zusammen, indem wir verabreden, daß sich alle zueinander parallelen Geraden in einem „unendlichfernen

Punkt“ schneiden sollen; daß verschiedene Büschel paralleler Geraden verschiedene unendlichferne Punkte ergeben; und daß alle unendlichfernen Punkte der Ebene die „unendlichferne Gerade“ erfüllen. Nimmt man diese Vereinbarungen an, so werden sich zwei beliebige verschiedene Geraden (selbst Parallelität nicht ausgeschlossen) stets in einem einzigen Punkt schneiden.

Bild 3



Die Aussage, daß man durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden m genau eine zu m parallele Gerade ziehen kann, läßt sich folgendermaßen umformulieren: Durch einen gewöhnlichen Punkt A und einen unendlichfernen Punkt (der zu der Schar der zu m parallelen Geraden gehört) geht genau eine Gerade. Damit gilt unter den neuen Bedingungen ohne jegliche Einschränkungen der Satz, daß durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade hindurchgeht (die unendlichferne Gerade, wenn beide Punkte unendlichfern sind). Wir sehen, daß sich damit eine sehr elegante Theorie ergibt. Für uns ist aber das eine wichtig, daß bei einer Zentralprojektion der Schnittpunkt von Geraden (im verallgemeinerten Sinne) in den Schnittpunkt der Bildgeraden übergeht. Es ist wichtig zu durchdenken, welche Rolle in dieser Aussage die Einführung unendlichferner Elemente spielt (unter welchen Bedingungen der Schnittpunkt in einen unendlichfernen Punkt übergeht, wann die Gerade in die unendlichferne Gerade übergeht und umgekehrt). Ohne uns mit der Ausnutzung dieser einfachen Überlegung durch *Desargues* aufzuhalten, wollen wir darüber berichten, in welcher bemerkenswerter Weise sie von *Pascal* verwendet worden ist.

1640 druckte *Pascal* seinen „Essai über Kegelschnitte“. Nicht uninteressant sind einige Informationen über diese Ausgabe: Auflage 50 Stück, 53 Zeilen Text wurden auf ein Plakat gedruckt, das zum Ankleben an Häuserecken vorgesehen war (was das Plakat *Pascals* betrifft, so ist das nicht zuverlässig bekannt. *Desargues* hat jedoch bewußt auf solche Weise für seine Resultate Reklame gemacht). Auf dem mit den Initialen des

Autors (*B. P.*) unterschriebenen Plakat wird ohne Beweis der folgende Satz mitgeteilt, der jetzt Satz von *Pascal* heißt. Auf einem Kegelschnitt L (in Bild 4 ist L eine Parabel, in Bild 5 eine Ellipse) seien 6 Punkte beliebig ausgewählt und durchnummeriert. Die Schnittpunkte der drei Geradenpaare (1, 2) und (4, 5); (2, 3) und (5, 6); (3, 4) und (6, 1) bezeichnen wir mit P, Q, R . Bei der einfachsten Numerierung („der Reihenfolge nach“) (Bild 5) liegen diese Schnittpunkte auf gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks. Der Satz sagt aus, daß die Punkte P, Q, R auf einer Geraden liegen.*

Bild 4

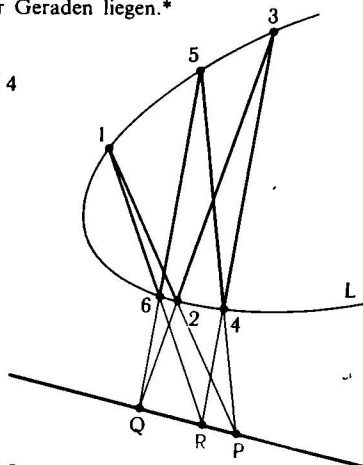
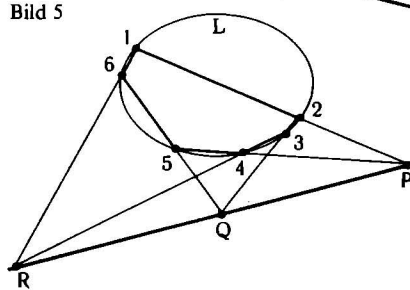


Bild 5



Pascal formuliert den Satz zunächst für einen Kreis und beschränkt sich auf die einfachste Numerierung der Punkte. In diesem Falle ist das eine elementare, wenn auch nicht gar zu einfache Aufgabe. Dann vollzieht sich der Übergang vom Kreis zu einem beliebigen Kegelschnitt sehr einfach. Man braucht nur einen solchen Kegelschnitt mittels einer Zentralprojektion in einen Kreis zu transformieren und auszunutzen, daß bei einer Zentralprojektion Geraden in Geraden und Schnittpunkte (im verallgemeinerten Sinne) in Schnittpunkte übergehen. Da dann, wie bereits bewiesen, die Bilder der Punkte P, Q, R bei der Projektion auf einer Geraden liegen, folgt hieraus, daß auch die Punkte P, Q, R selbst diese Eigenschaft besitzen.

Der Satz, den *Pascal* Satz über das „mystische Hexagramm“ nannte, war kein Eigenwerk; *Pascal* betrachtete ihn als Schlüssel für den

* Formuliert selbständig die Folgerungen, die sich aus diesem Satz ergeben, wenn von den betrachteten Punkten einige unendlichfern sind.

Aufbau einer allgemeinen *Theorie der Kegelschnitte*, die die *Theorie von Apollonius* umfaßt. Bereits auf dem Plakat werden Verallgemeinerungen wichtiger Sätze von *Apollonius* genannt, die herzuleiten *Desargues* nicht gelungen war. *Desargues* schätzte den Satz von *Pascal* hoch ein und nannte ihn den „großen Satz von *Pascal*“; er behauptete, daß in ihm die ersten vier Bücher von *Apollonius* enthalten sind.

Pascal beginnt die Arbeit an seinem „Vollständigen Werk über Kegelschnitte“, die 1654 in den Nachrichten der „Berühmtesten Pariser Mathematischen Akademie“ als vollendet vermeldet wird. Von *Mersenne* ist bekannt, daß *Pascal* etwa 400 Folgerungen aus seinem Satz gezogen hat. *Leibniz* (1646 bis 1716) war der letzte, der das *Traktat von Pascal* in den Jahren 1675 bis 1676 (nach dem Tode *Pascals*) gesehen hat. Trotz der Empfehlung von *Leibniz* wurde die Handschrift von den Verwandten nicht veröffentlicht und ist seitdem verschollen.

3. „Pascaline“

Am 2. Januar 1640 verzieht die Familie der *Pascals* nach Rouen, wo *É. Pascal* die Stelle eines Intendanten der Provinz erhält und faktisch beim Gouverneur alle Dinge verwaltet. Jetzt hatte *É. Pascal* sehr viel Rechenarbeit zu leisten, bei der ihm der Sohn ständig half. Ende 1640 kommt *Blaise* auf die Idee, eine Maschine zu konstruieren, um den Geist von den Rechnungen „mit Feder und Rechenmarken“ zu befreien. Der grundlegende Plan fiel ihm schnell ein, und er blieb im Verlauf seiner Arbeit ungeändert: Durch die Weiterbewegung jedes Rades (oder jeder Stange), das zu einer gewissen Dezimalstelle gehört, um zehn Einheiten wird das nächste um nur eine Ziffer fortbewegt. Die glänzende Idee ist jedoch nur ein erster Schritt: Unvergleichlich mehr Kräfte erforderte ihre Verwirklichung. Fünf Jahre angespannter Arbeit führten zur Schaffung einer Maschine („Pascaline“, wie sie von den Zeitgenossen genannt wurde), die die vier Grundrechenarten mit fünfstelligen Zahlen ausführte, wenn auch ziemlich langsam.

4. Der „horror vacui“ und das „große Experiment über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten“

Ende 1646 erreichte die Kunde von den wunderbaren „italienischen Versuchen mit dem Vakuum“ auch Rouen. Die Frage, ob das Vakuum in der Natur existiert, hatte schon die alten Griechen bewegt; in ihren Anschauungen zu dieser Frage kam die der altgriechischen Philosophie eigentümliche Vielfältigkeit von Gesichtspunkten zum Ausdruck: *Epikur* nahm an, daß es Vakuum geben kann und daß es wirklich existiert; *Heron*, daß es künstlich gewonnen werden kann; *Emedokles*, daß es nicht existiert und

es nirgendwo herkommen kann; *Aristoteles* behauptete, daß „sich die Natur vor dem Vakuum fürchtet“. In der Mitte des Jahrhunderts „vereinfachte“ sich die Situation, da die Wahrheit der Lehre des *Aristoteles* praktisch in der gesetzgebenden Ordnung festgelegt war (noch im 17. Jahrhundert konnte man, wenn man gegen *Aristoteles* auftrat, in Frankreich ins Zuchthaus geworfen werden). Das klassische Beispiel der „Furcht vor der Leere“ (*horror vacui*) lieferte das Wasser, das sich hinter dem Kolben hebt und auf diese Weise keinen leeren Raum entstehen läßt. Plötzlich trat jedoch mit diesem Beispiel ein ungewöhnlicher Vorfall ein. Beim Bau der Springbrunnen in Florenz wurde beobachtet, daß Wasser „nicht wünscht“, über 34 Fuß (10,3 Meter) hoch gehoben zu werden. Die verdutzten Bauleute wandten sich an den hochbetagten *G. Galilei* (1564 bis 1642) um Hilfe, der witzelte, daß die Natur in einer Höhe von über 34 Fuß wahrscheinlich aufhört, sich vor der Leere zu fürchten, und seinen Schülern *E. Torricelli* (1608 bis 1647) und *V. Viviani* (1622 bis 1703) verschlug, die seltsame Erscheinung zu untersuchen.

Wahrscheinlich geht auf *Torricelli* (und eventuell auch auf *Galilei* selbst) der Gedanke zurück, daß die Höhe, auf die eine Flüssigkeit in einer Pumpe gehoben werden kann, umgekehrt zu ihrem spezifischen Gewicht ist. Insbesondere muß sich Quecksilber nur auf eine Höhe heben lassen, die 13,2 mal so klein wie die im Falle von Wasser ist, d. h., um 76 cm. Damit wurde der Versuch auch für Laborbedingungen geeignet und wurde 1643 ausgeführt. Er ist in die Geschichte als *Torricellischer Versuch* eingegangen. Dieser Versuch ist gut bekannt; immerhin wollen wir aber erwähnen, daß eine an einem Ende zugeschmolzene Röhre aus Glas von einem Meter Länge mit Quecksilber gefüllt wird, das offene Ende mit dem Finger zugehalten und danach das Rohr umgedreht und in eine Tasse mit Quecksilber gesenkt wird. Wenn man den Finger wegnimmt, so fällt der Quecksilberspiegel im Rohr auf 76 cm. *Torricelli* stellte zwei Behauptungen auf: 1) der Raum über dem Quecksilber im Rohr ist leer (später wird er „*Torricellische Leere*“ genannt); 2) das Quecksilber aus dem Rohr fließt nicht vollständig aus, da es von der Luftsäule daran gehindert wird, die auf der Quecksilberoberfläche in der Tasse lastet. Nimmt man diese Hypothesen an, so kann man alles erklären, man kann aber auch dadurch zu einer Erklärung gelangen, indem man spezielle, ziemlich kompliziert wirkende Kräfte annimmt, die die Entstehung eines Vakuums verhindern.

Pascal wiederholt mit Begeisterung die italienischen Versuche, indem er sich viele scharfsinnige Verbesserungen ausdenkt. Acht solcher Versuche sind in einem 1647 veröffentlichten Traktat beschrieben. Er be-

schränkt sich nicht auf Versuche mit Quecksilber, sondern experimentiert mit Wasser, Öl, Rotwein, wofür er Fässer anstatt Tassen und Rohre von ungefähr 15 m Länge benötigte. Die eindrucksvollen Versuche wurden auf einer Straße von Rouen durchgeführt und erfreuten seine Bewohner (bis heute reproduziert man in den Physiklehrbüchern gern Stiche mit einem Weinbarometer).

In der Heimat *Pascals*, in Clermont, lebte zu dieser Zeit die ältere Schwester *B. Pascals*, *Gilberte*; ihr Mann *Florin Périer* diente am Gericht und widmete die Freizeit den Wissenschaften. Am 15. November 1647 richtete *Pascal* an *Périer* einen Brief, in dem er darum bittet, die Quecksilberspiegel im *Torricellischen Rohr* am Fuße und auf dem Gipfel des Berges *Puy de Dome* zu vergleichen:

„Ihr versteht, daß man, wenn sich die Höhe des Quecksilbers auf dem Gipfel des Berges als geringer als am Fuße erweisen würde (ich denke aus vielen Gründen, daß dem so sein wird, obgleich alle, die über diesen Gegenstand geschrieben haben, eine andere Meinung vertreten), hieraus schließen könnte, daß der einzige Grund für diese Erscheinung die Schwere der Luft und nicht der berüchtigte *horror vacui* (Furcht vor der Leere) ist. Es ist in der Tat klar, daß die Luft am Fuße des Berges verdichteter sein muß als oben, während es unsinnig ist anzunehmen, daß die Furcht vor der Leere am Fuße größer als auf dem Gipfel ist.“ Das Experiment wurde aus verschiedenen Gründen verschoben, und erst am 19. September 1648 fand das „große Experiment über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten“ in Gegenwart von fünf „hochverehrten Bürgern“ von Clermont statt. Am Ende des Jahres kam eine Broschüre heraus, die den Brief *Pascals* und die Antwort von *Périer* mit peinlich genauer Beschreibung des Versuchs enthielt. Bei einer Höhe des Berges von etwa 1,5 km betrug der Unterschied des Quecksilberniveaus 82,5 mm; das „versetzte die Teilnehmer des Experiments in Entzückung und Verwunderung“ und war wahrscheinlich auch für *Pascal* unerwartet. Es kann nicht angenommen werden, daß vorherige Abschätzungen existiert haben, während die Illusion von der Leichtigkeit der Luft sehr groß war.

Wir können uns nicht mit den anderen Ergebnissen *Pascals* über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten und Gasen aufhalten, die ihn neben *Galilei* und *Stevin* (1548 bis 1620) in die Reihe der Schöpfer der klassischen Hydrostatik stellen. Hierzu gehören auch das berühmte *Pascalsche Gesetz* und die Idee der hydraulischen Presse sowie die wesentliche Herausbildung des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

5. „Mathematik des Zufalls“

Im Januar 1646 verrenkte sich *É. Pascal* bei Glatteis den Schenkel, und dies kostete

ihn beinahe das Leben. Der Gedanke daran, seinen Vater zu verlieren, machte auf den Sohn einen furchtbaren Eindruck, was sich vor allem auf seine Gesundheit niederschlug: die Kopfschmerzen wurden unerträglich, er konnte sich nur auf Krücken bewegen und vermochte nur einige Tropfen warme Flüssigkeiten hinterzuschlucken. Von dem Arzt und Knocheneinrenker, der den Vater behandelt hatte, erfuhr *B. Pascal* von der Lehre von *Cornelius Jansen* (1585 bis 1638), die sich zu dieser Zeit in Frankreich ausbreitete und sich gegen das Jesuitentum stellte (dieses existierte zu der Zeit etwa hundert Jahre lang). Auf *Pascal* machte ein Nebenbestandteil in der Lehre von *Jansen* den größten Eindruck:

ob die unkontrollierte Beschäftigung mit der Wissenschaft zulässig sei, das Streben, alles zu erkennen, alles zu enträtseln, das vor allem mit der unbegrenzten Forscherbegierde des menschlichen Geistes verbunden ist oder, wie *Jansen* schrieb, mit der „Wollust des Geistes“. *Pascal* sieht seine wissenschaftliche Tätigkeit als sündhaft und den auf ihn gekommenen Anteil Unheil als Strafe für diese Sünde auf. Dieses Ereignis nannte *Pascal* selbst „seine erste Bekehrung“. Er beschließt, sich der Dinge zu entsagen, die „sündhaft und gottwidrig“ sind. Dies gelingt ihm jedoch nicht: wir haben bereits einen Sprung nach vorn gemacht und wissen, daß er bald darauf jede Minute, die ihm die Krankheit läßt, der Physik widmet.

Die Gesundheit bessert sich etwas, und mit *Pascal* gehen Dinge vor, die für seine nahen Verwandten wenig verständlich sind. Männlich erträgt er 1651 den Tod des Vaters, und seine rationalistischen, äußerlich kalten Überlegungen über die Rolle des Vaters in seinem Leben heben sich scharf von seiner Reaktion in den letzten fünf Jahren ab. Und danach treten bei *Pascal* Bekannte in Erscheinung, die zu einem Jansenisten wenig passen. Er reist im Gefolge des *Duc de Roannez* und wird dort mit *Chevalier de Méré* bekannt, einem hochgebildeten und geistvollen, aber etwas selbstbewußten und oberflächlichen Menschen.

Wir gehen zur Geschichte dessen über, wie „eine dem strengen Janseisten durch einen weltlichen Menschen gestellte Aufgabe zur Quelle der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde“ (*Poisson*). Eigentlich handelte es sich um zwei Aufgaben, und wie die Mathematikhistoriker erklärt haben, waren sie lange vor *de Méré* bekannt. Die erste Frage besteht darin, wie oft man zwei Spielwürfel werfen muß, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens einmal zwei Sechser fallen, größer als die Wahrscheinlichkeit dafür wird, daß kein einziges Mal zwei Sechser fallen. *De Méré* hat auch selbst diese Aufgabe gelöst, aber leider ... nach zwei Verfahren, die verschiedene Antworten ergeben haben: 24 und 25 Würfe. Von der

gleichen Zuverlässigkeit beider Methoden überzeugt, fällt *de Méré* über die „Unzuverlässigkeit“ der Mathematik her. *Pascal*, der sich davon überzeugt hatte, daß das richtige Resultat 25 lautet, führt nicht einmal eine Entscheidung herbei. Seine Hauptbemühungen waren auf die Lösung der zweiten Aufgabe gerichtet, des Problems der „gerechten Verteilung der Einsätze“. Es wird ein Spiel durchgeführt, alle Teilnehmer (ihre Anzahl kann größer als Zwei sein) machen zunächst in die „Bank“ Einsätze; das Spiel zerfällt in mehrere Partien, und um zu gewinnen, muß die Bank eine gewisse feste Anzahl von Partien gewinnen. Die Frage besteht darin, wie die Bank in Abhängigkeit von der Anzahl der von den Spielern gewonnenen Partien gerecht unter ihnen aufzuteilen ist, wenn das Spiel nicht bis zu Ende durchgeführt wird (niemand hat so viel Partien gewonnen, wie ausreichen, um die Bank zu erhalten).

Mit den Worten *Pascals* „war *de Méré* ... überhaupt nicht fähig, dieser Frage beizukommen ...“. Niemand aus dem Kreis um *Pascal* vermochte die von ihm vorgeschlagene Lösung zu begreifen, immerhin fand sich aber ein Gesprächspartner, der seiner würdig war. Zwischen dem 29. Juni und dem 27. Oktober stand *Pascal* mit *Fermat* im Briefwechsel. Man nimmt häufig an, daß im Verlauf dieses Briefwechsels die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstanden ist. *Fermat* löst die Aufgabe über die Einsätze anders als *Pascal*, und erstmalig kommt es zu gewissen Meinungsverschiedenheiten. Im letzten Brief stellt jedoch *Pascal* fest: „unser Einvernehmen ist vollständig wiederhergestellt“ und weiter „wie ich sehe, ist die Wahrheit in Toulouse und Paris ein und dieselbe“. Er ist glücklich darüber, daß er einen großen Gesinnungsgenossen gefunden hat:

„Auch ich möchte künftig meine Gedanken nach Maßgabe der Möglichkeiten mit Ihnen teilen“.

6. Louis de Montalte

Bald nach dem Tode des Vaters geht *Jaqueline Pascal* ins Kloster, und *Blaise Pascal* wird der Gegenwart eines sehr nahen Menschen beraubt. Zu gewisser Zeit zieht ihn die Möglichkeit an, so zu leben, wie die meisten Leute leben: er trägt sich mit dem Gedanken, ein Amt am Gericht zu erkaufen und zu heiraten. Aber diese Pläne gingen nicht in Erfüllung. Mitte November 1654, als *Pascal* eine Brücke überschritt, riß sich das vordere Paar Pferde los, und der Wagen wurde wie durch ein Wunder am Rande des Abgrunds aufgehalten. Am 23. November erfolgt ein ungewöhnlicher Nervenanstrengung.

Fortsetzung auf Seite 143

Was braucht man zum Lösen einer Aufgabe?

Einige Bemerkungen zum Prozeß des Problemlösens, illustriert am Beispiel einer IMO-Aufgabe dieses Jahres

Viele Leser unserer Zeitschrift sind oder waren Teilnehmer von Mathematikolympiaden und standen öfter vor Problemen, die sich nicht schematisch mit Methoden aus dem Schulstoff lösen ließen. Zu jeder solchen Aufgabe war eine Idee, etwas Originelles, Unschematisches notwendig. Daher kann man kein Rezept zur Lösung von Aufgaben aufstellen, ebenso wie die mathematischen Probleme in Ökonomie und Technik, Transport- und Nachrichtenwesen, Physik, Chemie und Biologie stets Ideen und Schöpferkraft verlangen. Dennoch lohnt es sich, einige Dinge aufzuzählen, die für die erfolgreiche Lösung eines Problems grundlegend sind.

In jedem Abschnitt unseres Artikels wollen wir dazu einen kleinen Beitrag leisten, und wenn es dem Leser gelingt, die in dieser Zeitschrift und anderswo abgedruckten Lösungen (besonders solche, die kurz sind), künftig besser zu verstehen und Zusammenhänge zwischen mathematischen Problemen der verschiedensten Art zu erkennen, ist der Sinn dieses Artikel erfüllt.

Aufstellung der wichtigen Voraussetzungen

Es kommt darauf an, den wesentlichen Inhalt einer Aufgabe mathematisch zu formulieren, das kann durch Gleichungen (z. B. $a^2 + b^2 = c^2$), Elementbeziehungen (z. B. $A \in G$), Beziehungen zwischen Mengen (z. B. $Z = X \cap Y$, $M \subset N$) oder durch eine Beschreibung in Worten geschehen (z. B. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich). Dabei ist die Bedeutung der vorkommenden Größen die Hauptsache. Es ist nicht richtig, wenn wir sagen:

„Der Satz des Pythagoras lautet $a^2 + b^2 = c^2$.“
Wie formuliere ich nun die Voraussetzungen eines Problems?

Läßt man sehr viele Größen dabei vorkommen, so wird die Beschreibung sehr schwierig; im entgegengesetzten Fall können wesentliche Seiten des Problems verlorengehen. Also wird man meist so vorgehen:

Schritt 1: Finde möglichst wenig Größen, die das Problem hinreichend vollständig beschreiben!

Schritt 2: Gib alle wesentlichen Beziehungen zwischen diesen Größen an!

Ist von einem Kreis die Rede, so reicht es, wenn man seinen Radius kennt, die Angabe des Durchmessers ist dann überflüssig; ein Rhombus ist durch seine beiden Diagonalen bestimmt usw. Zu den wesentlichen Beziehungen zwischen den Größen gehören auch Einschränkungen wie „ x ist eine positive reelle Zahl“ oder „ a ist ganzzahlig“.

Es sei noch erwähnt, daß man die Größen in gegebene, gesuchte und Hilfsgrößen einteilen kann. Bei der Lösung einer Aufgabe strebt man danach, daß die Hilfsgrößen aus der Betrachtung verschwinden und daß eine direkte Beziehung zwischen gegebenen und gesuchten Größen übrigbleibt. Wir führen als Beispiel die 1. Aufgabe der 1. Stufe der diesjährigen OJM an; vgl. „alpha“ Heft 4/74:

In dieser Aufgabe ist von einem Tanzabend die Rede, auf dem für jeden Herrn die Anzahl der Damen, mit denen er tanzte, nicht kleiner als 10 und nicht größer als 12 ist und für jede Dame die Anzahl der Herren, mit denen sie tanzte, nicht kleiner als 12 und nicht größer als 14 ist. Wollte jeder Herr mit jeder Dame tanzen, so hätten nacheinander 480 Paare gebildet werden müssen.

Bezeichnet man mit d , h und t die Anzahl der Damen, Herren bzw. der durchgeführten Tänze, so kommt die Beziehung zwischen diesen Größen in folgendem zum Ausdruck: d , h , t sind positive ganze Zahlen mit

$$(1) \quad 10h \leq t \leq 12h, \quad 12d \leq t \leq 14d, \quad dh = 480$$

Gefragt ist in der Aufgabe nach den Anzahlen d , h . Als Hilfsgröße tritt t in Erscheinung, während uns die Beziehungen (1) gegeben sind. Wir weisen besonders darauf hin, daß die Beziehungen (1) das Problem nicht vollständig beschreiben. Es könnte nämlich sein, daß zwischen den Größen d , h und t noch weitere, verborgene Beziehungen bestehen, die die Anzahl der Lösungen einschränken. Darum genügt es nicht, die Probe für eine gefundene Lösung mit (1) durchzuführen, sondern man muß zur ursprünglichen Aufgabe (Tanzabend mit d Damen und h Herren) zurückkehren und die Paarzuordnung direkt festlegen. (Dies ist auch in Teil b) der Aufgabe gefordert, und es ist eigentlich nicht richtig, die Aufgaben a) und b) zu trennen; überlege selbst noch einmal warum!).

Im vorigen Beispiel lag ein Problem vor, dessen Bedingungen nicht vollständig in Formeln angegeben werden konnten. Dort, wo es geht, muß man aber nach vollständiger Beschreibung streben.

Ein mathematischer Sachverhalt ist vollständig beschrieben, wenn sich beweisen läßt, daß alle Ergebnisse, die mit der Beschreibung in Einklang stehen, auch dem betrachteten Sachverhalt entsprechen.

Als Beispiel nennen wir eine Aufgabe aus der Olympiade in der SR Rumänien aus dem Jahre 1967:

Drei Gruppen von Fischern fingen insgesamt 113 Fische. In der ersten Gruppe entfielen auf jeden Fischer 13, in der zweiten 5 und in der dritten 4 Fische. Wie groß war die Anzahl der Fischer in jeder Gruppe, wenn es insgesamt 16 waren?

Der Inhalt dieser Aufgabe wird durch das Gleichungssystem

$$13x + 5y + 4z = 113, \quad x + y + z = 16,$$

x, y, z positive ganze Zahlen vollständig beschrieben.

Nun wollen wir sehen, wie man von der Beschreibung einer Aufgabe zu ihrer Lösung gelangen kann.

Analyse eines Problems

Das Ziel der Analyse ist, einen möglichst großen Überblick über die Folgerungen zu gewinnen, die man aus den Voraussetzungen ziehen kann. Dazu kann man etwa Ungleichungen addieren, Gleichungen addieren, subtrahieren, multiplizieren usw. Je zielgerichteter man solche Umformungen durchführt (man überlege: was will ich mit der Umformung bezwecken?) und je gründlicher die Analyse ist, desto besser ist man für die Lösung einer Aufgabe gerüstet. Mitunter trifft man auch Aufgaben, die einen Widerspruch in sich enthalten. Soll eine Analyse vollständig sein, muß festgestellt werden, ob ein solcher Widerspruch vorliegt. Ein typisches Beispiel ist die folgende Aussage.

Von 1000 bestimmten Personen essen 811 Schokolade, 752 Konfekt, 418 Bonbons gern. 570 Personen essen gerne Schokolade und Konfekt, 356 Schokolade und Bonbons, 348 Konfekt und Bonbons. 297 der 1000 befragten Personen essen alle drei Süßigkeiten gern.

Weise selbst nach, daß diese Information fehlerhaft ist! Sehen wir nun einmal, wie weit wir mit der Lösung der Aufgabe vom Tanzabend (s. o.) kommen!

Die Beziehungen (1) verlangen, daß die Intervalle $[10h; 12h]$ und $[12d; 14d]$ auf der Zahlengeraden einen gemeinsamen Punkt, nämlich t , enthalten. Zwei Intervalle haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn die rechte Grenze jedes Intervalls rechts von der linken Grenze des anderen Intervalls liegt oder mit ihr identisch ist. (Wir sprechen hier von abgeschlossenen Intervallen. In welchem Falle haben zwei Intervalle keinen Punkt gemeinsam? Formuliere genau!).

Wir erhalten so

$$(2) \quad 10h \leq 14d, \quad 12h \geq 12d, \quad dh = 480.$$

Unser Ziel, die Hilfsgröße t zu beseitigen, ist erreicht. Die beiden Ungleichungen schreiben wir nun als

$$\frac{5}{7}h \leq d \leq h$$

und nach Einsetzen von $d = \frac{480}{h}$ erhalten wir schließlich

$$\frac{5}{7}h \leq \frac{480}{h} \leq h, \quad h^2 \leq 672 \text{ und } h^2 \geq 480.$$

Von den Möglichkeiten $h = 22, 23, 24, 25$ ist nur $h = 24$ ein Teiler von 480, und es wird $d = 20$. Daß die Aufgabe damit noch nicht völlig gelöst ist, haben wir schon oben erwähnt, der Rest sei dem Leser überlassen.

Über die erste Aufgabe der diesjährigen IMO

Am Beispiel einer Aufgabe von der XVI. Internationalen Mathematikolympiade in Erfurt sollen unsere Bemerkungen noch einmal ausführlich illustriert werden. Die Aufgabe lautet so:

Drei Spieler A, B, C spielen folgendes Spiel: Auf genau drei Spielkarten ist je eine ganze Zahl geschrieben. Für diese drei Zahlen p, q, r gilt $0 < p < q < r$. Diese drei Karten werden gemischt und so verteilt, daß jeder der drei Spieler eine Karte erhält. Jeder bekommt dann genauso viele Kugeln zugeteilt, wie die Zahl auf der erhaltenen Karte angibt. Danach werden die Karten wieder eingesammelt; die zugeteilten Kugeln bleiben bei den Spielern. Dieser Spielverlauf (Mischen und Verteilen der Karten, Zuteilen von Kugeln, Einsammeln der Karten) wird mindestens zweimal durchgeführt. Nach dem letzten Mal hat insgesamt

A	B	C
20	10	9

Kugeln. B weiß noch, daß er beim letzten Mal r Kugeln bekommen hat. Wer hatte beim ersten Mal q Kugeln erhalten?

Die Größen, die wir aus der Aufgabenstellung ableiten können, sind die Anzahl n der durchgeführten Spiele sowie die Anzahlen a_i, b_i, c_i der Kugeln, die A, B, C in der i -ten Runde (für $i = 1, 2, \dots, n$) erhalten haben. Die Spielregeln und die Bedingungen der Aufgabe kommen in den folgenden Gleichungen vollständig zum Ausdruck:

(3) Für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ gilt $\{a_i, b_i, c_i\} = \{p, q, r\}$ (Gleichheit zweier Mengen; beschreibe diese Beziehung ausführlicher!);

$$(4) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 20,$$

$$(5) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = 10, \quad b_n = r$$

$$(6) \quad c_1 + c_2 + \dots + c_n = 9,$$

$$(7) \quad p, q, r, n \text{ sind ganze Zahlen mit } 0 < p < q < r, \quad n \geq 2.$$

Die Beziehungen (3)–(7) umfassen zwar die gesamte Aufgabe, aber insbesondere die Gleichungen (4)–(6) sind für eine Analyse zu kompliziert. Wir beginnen also am besten damit, eine Gleichung für die Anzahl aller verteilten Kugeln aufzustellen, diese lautet

$$n(p + q + r) = 39.$$

Für die Faktoren n und $p + q + r$ des Produkts besteht die Einschränkung, daß sie ganz-

zählig sind. Welche weiteren Einschränkungen gelten noch? Wegen $p \geq 1$ muß $q \geq 2$ und $r \geq 3$ und damit $p + q + r \geq 6$, $n = \frac{39}{p + q + r} < 7$ sein. Von den Zahlen $n = 2, 3,$

4, 5, 6 ist aber nur $n = 3$ ein Teiler von 39; weiter gilt $p + q + r = 13$. Unser weiterer Lösungsplan sieht nun folgendes vor:

1. Ausnutzung der Voraussetzung „ B erhielt beim letzten Mal r Kugeln“.

2. Untersuchung, welcher der Fälle „ A erhielt beim ersten Mal q Kugeln“, ..., „ C erhielt beim ersten Mal q Kugeln“ möglich ist oder unmöglich ist.

Wir haben bisher gesehen, daß (angenommen, daß der angegebene Ausgang des Spiels überhaupt möglich ist) bei dem Spiel drei Runden stattfanden. Da B in der letzten Runde r Kugeln und in den ersten beiden Runden mindestens je eine Kugel erhielt, ist die Anzahl seiner Kugeln nicht kleiner als $r + 2$. Es gilt also $10 \geq r + 2$ und damit $r \leq 8$. Nehmen wir nun an, daß A beim ersten Mal q Kugeln erhielt. Dann erhielt er beim zweiten Mal höchstens r und beim dritten Mal höchstens q Kugeln, und insgesamt ist seine Kugelanzahl nicht größer als $q + r + q = 13 - p + q \leq 12 + q \leq 11 + r \leq 19$.

In dieser Ungleichungskette benutzten wir im ersten Schritt die Gleichung $p + q + r = 13$, anschließend die Ungleichung $p \geq 1$, dann die Ungleichung $q < r$ oder, anders geschrieben, $q \leq r - 1$

(welche Voraussetzung ist notwendig, um aus $q < r$ auf $q \leq r - 1$ schließen zu können?) und schließlich die Ungleichung $r \leq 8$.

Wir sind zu einem Widerspruch gekommen, denn A erhielt 20 Kugeln. Dieser Widerspruch beruhte auf unserer Annahme, A habe beim ersten Mal q Kugeln erhalten.

Hätte B beim ersten Mal q Kugeln erhalten, so müßte seine Kugelanzahl mindestens

$$q + 1 + r = 14 - p$$

betragen, also würde $10 \geq 14 - p$, $p \geq 4$ gelten. In diesem Falle hätte jeder der Spieler, insbesondere auch C , mindestens $3p = 12$ Kugeln zu erhalten. Wir haben erneut einen Widerspruch erhalten. Wir können damit schon auf die gestellte Frage antworten. Die Antwort lautet:

Falls der angegebene Ausgang des Spiels überhaupt möglich ist, so erhielt C beim ersten Mal q Kugeln.

Überzeugen wir uns nun noch davon, daß das Spiel wirklich diesen Ausgang haben kann! Dazu betrachten wir den Fall $p = 1$, $q = 4$ und $r = 8$. Wenn A 8, 8 und 4, B 1, 1 und 8 sowie C 4, 4 und 1 Kugel in dieser Reihenfolge erhalten, so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Eine vollständige Analyse, die hier nicht verlangt war, würde zeigen, daß dies der einzig mögliche Fall ist, in dem alle in der Aufgabe gemachten Aussagen wahr sind.

Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen

Teil 2

Allgemein gilt:

Satz 8: Besitzt die natürliche Zahl n die normierte Primfaktorzerlegung $n = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{n_s}$, so sind die sämtlichen Teiler t von n gegeben durch $t = q_1^{x_1} \cdot q_2^{x_2} \cdot \dots \cdot q_s^{x_s}$, wobei die natürlichen Zahlen x_1, x_2, \dots und x_s den Ungleichungen $x_1 \leq n_1, x_2 \leq n_2, \dots$ und $x_s \leq n_s$ genügen. Die Anzahl Z der sämtlichen Teiler von n ist

$$Z = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_s + 1).$$

Nach Satz 8 hat jede natürliche Zahl n , deren Primfaktorzerlegung die Struktur $n = p^5 \cdot q^7$ hat, in der p und q voneinander verschiedene Primzahlen sind, genau $(5+1)(7+1) = 48$ Teiler. Über zwei natürliche Zahlen wird im Satz 8 keine Aussage gemacht, über die Zahlen 0 und 1. Während die Zahl 1 genau einen Teiler besitzt, hat die Zahl 0 jede von 0 verschiedene natürliche Zahl zum Teiler.

Wiederum lösen wir die folgenden Aufgaben selbstständig:

Aufgabe 7: Eine natürliche Zahl n besitzt genau 10 Teiler. Gib sämtliche mögliche Strukturen der normierten Primfaktorzerlegung von n an! Gib die kleinste natürliche Zahl n mit genau 10 Teilern an!

Aufgabe 8: Die von 0 verschiedene natürliche Zahl t heißt echter Teiler der natürlichen Zahl n , wenn t/n und $t < n$ gilt. Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen, wenn die Summe ihrer echten Teiler gleich n ist. Zum Beispiel ist 6 eine vollkommene Zahl, weil $6 = 3 + 2 + 1$ gilt.

Zeige: Von allen natürlichen Zahlen n , deren normierte Primfaktorzerlegung die Struktur $n = p^1 \cdot q^1$ (p, q Primzahlen; $p < q$) haben, ist 6 die einzige vollkommene Zahl.

Aufgabe 9: Als gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen m und n werden alle von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen t bezeichnet, für die gleichzeitig $t|m$ und $t|n$ gilt.

a) Bestimme die Menge T der gemeinsamen Teiler t der natürlichen Zahlen m und n , wenn m und n die normierten Primfaktorenzerlegungen

$$m = p^5 \cdot q^3 \cdot r^2 \cdot s^4 \cdot t^1 \text{ und} \\ n = p^4 \cdot r^{11} \cdot t^3 \text{ (} p, q, r, s, t \text{ Primzahlen;} \\ p < q < r < s < t \text{) haben.}$$

b) Die Menge T enthält als endliche Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen eine größte Zahl t_{max} . Gib die normierte Primfaktorzerlegung von t_{max} an!

c) Zwei natürliche Zahlen, die nur den gemeinsamen Teiler 1 haben, heißen teilerfremd.

Zeige: Die natürlichen Zahlen $\frac{m}{t_{max}}$ und $\frac{n}{t_{max}}$ sind teilerfremd.

Aufgabe 10: Beweise: Sind m und n natürliche Zahlen mit $m, n > 1$ und ist p Primzahl, so folgt aus $p|(mn)$ und $p \nmid m$ stets $p|n$.

Aufgabe 11: Beweise: Sind m, n und s natürliche Zahlen mit $m, n > 1$ und $s > 0$, so folgt aus $p^s|(mn)$ und $p \nmid m$ stets $p^s|n$.

Aufgabe 12: Gib sämtliche natürliche Zahlen n an, für die gleichzeitig $12|n, 50|n$ und $21|n$ gelten! Gib die größte natürliche Zahl v an, so daß für jedes derartige n $v|n$ gilt!

Aufgabe 13: Beweise: Sind z und x teilerfremde, natürliche Zahlen, gilt $z > x$ und ist p eine von 2 verschiedene Primzahl, so gilt nie gleichzeitig $p|(z-x)$ und $p|(z+x)$.

Aufgabe 14: Beweise: Sind je zwei der natürlichen Zahlen x, y und z teilerfremd, ist y ungerade und gilt $x^2 + y^2 = z^2$, so läßt sich die Zahl y so als Produkt teilerfremder natürlicher Zahlen m und n ($y = mn$) darstellen, daß für x und z gilt:

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2}; \quad z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

Anleitung: Forme die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ zunächst in $y^2 = (z-x)(z+x)$ um! Beachte weiterhin die Aufgaben 13 und 11!

Aufgabe 15: Beweise: Sind m und n teilerfremde ungerade natürliche Zahlen, mit $m > n$, so sind

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad y = mn \text{ und } z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

ebenfalls natürliche Zahlen, die paarweise teilerfremd sind und der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen.

Aufgabe 16: Wähle fünf geordnete Paare ($m; n$) teilerfremder ungerader natürlicher Zahlen m und n mit $m > n$! Berechne für jedes geordnete Paar jeweils

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad y = mn \text{ und } z = \frac{m^2 + n^2}{2}!$$

Hinweis: Die so ermittelten Zahlentripel $(x; y; z)$ heißen pythagoreische Zahlen.

Wir beweisen den Unitätssatz der Primfaktorzerlegung.

Als Abschluß dieses Beitrages soll der Satz 3 indirekt bewiesen werden, und zwar auf dem Wege, der erstmals von dem Mathematiker Zermelo (1871 bis 1953) angegeben wurde.*

Indirekter Beweis: Angenommen, Satz 2 sei falsch. Dann gäbe es mindestens eine natürliche Zahl m mit $m > 1$, für die mindestens zwei voneinander verschiedene normierte Primfaktorzerlegungen vorhanden sind. Die Menge derjenigen natürlichen Zahlen, für die es mindestens zwei voneinander verschiedene normierte Primfaktorzerlegungen gibt, ist also nicht leer und enthält folglich (als nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen) eine kleinste Zahl, die wir m_* nennen wollen.

Zwei verschiedene normierte Primfaktorzerlegungen von m_* seien $m_* = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ und $m_* = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$. Dabei sind nach Definition 4' $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ den Ungleichungen $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$ und $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$ genügende Primzahlen. Da beide Primfaktorzerlegungen voneinander verschieden sind, muß $s = r$ oder im Falle $s \neq r$ mindestens eine der Beziehungen $p_1 \neq q_1, p_2 \neq q_2, \dots$ und $p_r \neq q_s$ gelten.

Wir wollen die Fälle $p_1 < q_1$ und $p_1 > q_1$ unterscheiden.

1. Fall: Es sei $p_1 = q_1$.

Aus $m_* = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ folgt durch Division aller Seiten durch p_1

$$(4) \quad \frac{m_*}{p_1} = p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r = q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s$$

Wegen $\frac{m_*}{p_1} < m_*$ und der obigen Minimalauswahl von m_* gibt es für die natürliche Zahl $\frac{m_*}{p_1}$ nur eine normierte Primfaktorzerlegung.

Also folgt aus (4) $s-1 = r-1$ und damit $s = r$ sowie $p_2 = q_2, p_3 = q_3, \dots$ und $p_r = q_r$. Da im jetzigen Falle zusätzlich $p_1 = q_1$ gilt, müßten im Widerspruch zur möglichen Wahl beider normierter Primfaktorzerlegungen für m_* doch beide Zerlegungen übereinstimmen. Also kann der erste Fall nicht eintreten.

2. Fall: Es sei $p_1 < q_1$.

Als $p_1 < q_1$ folgt durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit der natürlichen Zahl $q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s \cdot p_1 \cdot (q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s) < q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s)$. Mittels $m_* = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ kann hierfür $p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s < m_*$ geschrieben werden. Wegen dieser letzten Ungleichung ist die Differenz

(5) $d := m_* - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s$ positiv, also eine von 0 verschiedene natür-

* Dieser Beweis ist abgedruckt in E. Lehmann: Übungen für Junge Mathematiker, Teil I Zahlentheorie, BG Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968.

liche Zahl d genügt darüber hinaus der Bedingung $d < m_*$. Da laut getroffener Auswahl m_* die kleinste natürliche Zahl ist, die mehr als eine normierte Primfaktorzerlegung besitzt, kann d höchstens eine normierte Primfaktorzerlegung besitzen.

Nach Satz 1' (Existenzsatz der Primfaktorzerlegung) muß für $d > 1$ d mindestens eine Primfaktorzerlegung besitzen, die sich dann auch nachträglich noch normieren läßt. Also gilt entweder $d = 1$ oder d besitzt genau eine normierte Primfaktorzerlegung.

Mittels $m_* = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ folgt aus (5) $d = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s$ und hieraus weiterhin $d = p_1 (p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r - q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s)$. Hiernach muß $d > 1$ gelten und in der normierten Primfaktorzerlegung von d kommt der Primfaktor p_1 vor. Mittels $m_* = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ folgt wiederum aus (5) $d = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s$ und hieraus weiterhin

$$(6) \quad d = (q_1 - p_1) q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_s.$$

Indem der Faktor $q_1 - p_1$ in Primfaktoren zerlegt wird, entsteht aus (5) eine Primfaktorzerlegung von d , die sich nachträglich durch Umordnen noch normieren läßt. In der so erhaltenen eindeutig bestimmten normierten Primfaktorzerlegung von d muß, wie oben erkannt, der Primfaktor p_1 vorkommen. Da im jetzigen Falle $p_1 < q_1$ gilt und damit wegen der Normierung ebenfalls $p_1 < q_2, q_3, \dots, q_s$, folgt aus (6) $p_1 (q_1 - p_1)$. Mit einer geeigneten natürlichen Zahl k , für die wegen $p_1 < q_1$ $k > 0$ gilt, muß $p_1 k = q_1 - p_1$ gelten. Durch Umstellen nach q_1 folgt hieraus

$$(7) \quad q_1 = (k+1)p_1$$

Da für die natürliche Zahl $k+1 \geq 2$ gilt, könnte wegen (7) im Gegensatz zur Annahme q_1 keine Primzahl sein. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

3. Fall: Es sei $p_1 > q_1$.

Durch das Vertauschen der Indices r und s und gleichzeitiges Vertauschen der Symbole p und q geht die Betrachtung des 2. Falles in die des 3. Falles über. Also kann auch der dritte Fall nicht eintreten.

Da keiner der überhaupt möglichen Fälle $p_1 = q_1$, $p_1 < q_1$ und $p_1 > q_1$ eintreten kann, ist die Annahme, der Satz 2 sei falsch, selbst falsch. Der Satz 2 ist also wahr.

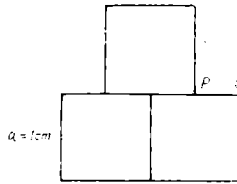
W. Träger

Zum siebten Male fand im vergangenen Jahr in Tansania ein Mathematikwettbewerb statt. Mathematikfachlehrer *H. Bartel*, zur Zeit Mbega/Tansania, stellte uns freundlicherweise das Material zur Verfügung. Studienrat *Th. Scholl*, Berlin, wählte aus den zehn gestellten Problemen sieben für die *alpha*-Leser aus. Die Lösungen geben wir in Heft 1/75 wieder.

7th Tanzanian Mathematics Contest

3rd Eastern African Regional Contest

▲1▲ Die nachstehende Abbildung stellt drei kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $a = 1$ cm dar. Die Länge der Strecke PQ beträgt $\frac{1}{2}$ cm. Berechne den Radius r der kleinstmöglichen Kreisscheibe, welche die drei Quadrate vollständig bedeckt!



▲2▲ Es ist die kleinste natürliche Zahl zu bestimmen, die bei Division durch 10 den Rest 9, bei Division durch 9 den Rest 8, bei Division durch 8 den Rest 7 – und so fort – und schließlich bei Division durch 2 den Rest 1 läßt.

▲3▲ In dem Schema

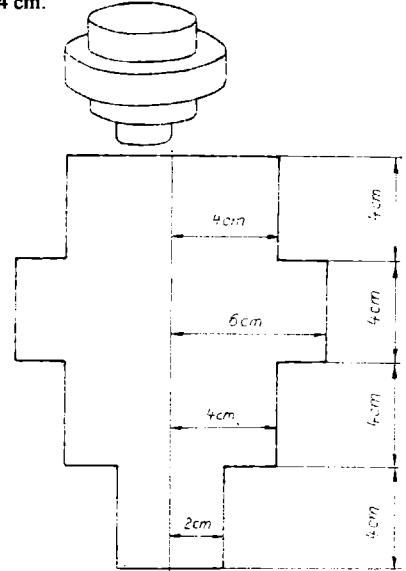
s	e	t		
s	o	m		
+	m	o		
+	s	u		
+	s	u		
m				
t	e	s	t	s

sollen die Buchstaben so durch Grundziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Für den Buchstaben „s“ ist die Ziffer 9, für den Buchstaben „o“ die Ziffer 0 zu setzen.

▲4▲ Wenn von einer aus sieben Gliedern bestehenden offenen Kette das dritte Glied genau in der Mitte durchgezwickelt wird, verbleiben zwei einzelne halbe Glieder, zwei zusammenhängende und nochmals vier zusammenhängende Glieder. Nun ist es möglich, ein Kettenglied (die beiden Hälften des geteilten Gliedes), zwei Kettenglieder, drei $(2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ oder vier oder fünf $(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ oder sechs $(2 \cdot 4)$ oder sieben (alle) Kettenglieder als Wägestücke zu benutzen.

Welche zwei Glieder einer aus 23 Gliedern bestehenden offenen Kette sind in der Mitte durchzuzwickeln, damit 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder ... oder 22 oder 23 Glieder dieser Kette als Wägestücke benutzt werden können?

▲5▲ Die beiden nachstehenden Abbildungen zeigen das Schrägbild sowie den Längsschnitt eines Regennessers, der so konstruiert wurde, daß er sowohl bei leichten als auch bei schweren Regenfällen verwendbar ist. Jeder Teilabschnitt des oben offenen Regennessers hat die Form eines 4 cm hohen Kreiszyinders. Die inneren Radien der einzelnen Zylinder betragen (siehe Abb.) von unten beginnend 2 cm, 4 cm, 6 cm und 4 cm.



Wenn der gefallene Regen in einem beliebigen anderen Auffanggefäß mit durchgehend lotrechter Innenwand eine Höhe von x cm erreicht hat, so möge die Höhe des im Regennmesser aufgefangenen Regens y cm betragen. Stelle die Höhe y des aufgefangenen Regens in Abhängigkeit von x in einem rechtwinkligen Koordinatensystem für $0 \leq x \leq 14$ graphisch dar!

▲6▲ Die Zahlen 2, 9 und 12 lassen sich durch Terme, in denen die Ziffer 7 jeweils genau viermal vorkommt, wie folgt darstellen:

$$2 = (7+7) : \sqrt{7 \cdot 7},$$

$$9 = (7+7) : 7 + 7,$$

$12 = (77+7) : 7$. Die Zahlen 7, 8, 11 und 14 sind auf ähnliche Weise durch Terme darzustellen, in denen die Ziffer 7 jeweils genau viermal vorkommt.

▲7▲ Im *Chiu-Fußball-Klub* haben die aktiven Fußballspieler einen Mitgliedsbeitrag von je 5 Shs, die gewöhnlichen Mitglieder von nur je 2 Shs zu entrichten. Der Kassierer, der für Beiträge insgesamt 476 Shs vereinnahmt hat, weiß, daß die Anzahl der aktiven Spieler 60 nicht überschreitet und die Anzahl der gewöhnlichen Mitglieder kleiner als 100 ist. Es sind die möglichen Anzahlen an aktiven Spielern und gewöhnlichen Mitgliedern dieses Klubs zu berechnen.

Angenommen, im folgenden Jahr werden 42 neue Mitglieder in den Klub aufgenommen und zugleich scheiden 25 alte Mitglieder aus. Welchen Maximalbetrag aus den Mitgliedsbeiträgen könnte der Kassierer dann einnehmen?

Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen?

Leseprobe

Die gesamte Geometrie kann man analytisch darlegen, beginnend damit, daß man einem Punkt der Geraden eine Zahl (x) zuordnet, einem Punkt der Ebene ein Zahlenpaar (x, y) und einem Punkt im Raum drei Zahlen (x, y, z). Eine Kreisfläche vom Radius 5 mit dem Mittelpunkt im Punkt (2, 3) ist dann nichts anderes als die Menge der Zahlen (x, y), die der Ungleichung

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 5^2$$

genügen. Eine Ebene im Raum, die durch den Koordinatenursprung geht, ist einfach die Menge der Zahlentripel (x, y, z), die der Gleichung

$$ax + by + cz = 0$$

genügen, wobei a, b und c bestimmte konstante Zahlen sind. Wichtig ist die völlige Äquivalenz des geometrischen und des analytischen Standpunktes: Geometrische Gebilde lassen sich analytisch durch Gleichungen oder Ungleichungen beschreiben, während sich analytische Beziehungen in Form von Kurven, Flächen oder Figuren darstellen lassen. Das analytische Herangehen an geometrische Aufgaben gibt z. B. dem Arzt die Möglichkeit, verschiedene Daten eines Menschen anschaulich darzustellen. So kann beispielsweise die Körpergröße auf einer Geraden abgetragen werden.

Bei Messung der Körpergröße h und des Gewichts p entspricht jedem Menschen ein Punkt in der Ebene mit den Koordinaten (h, p). Wird noch zusätzlich das Alter t angegeben, so erfolgt die Kennzeichnung im Raum durch einen Punkt mit den Koordinaten (h, p, t).

Doch wie kann man verfahren, wenn der Mensch durch viele Parameter charakterisiert wird: Körpergröße h , Gewicht p , Alter t , Brustumfang Q , Druckkraft der linken und rechten Hand f_1 und f_2 , Sehschärfe r ? Vorstehend sind sieben Größen vorgegeben worden. Eine anschauliche geometrische Darstellung scheint nicht mehr möglich zu sein.

Tatsächlich ist jedoch eine analoge geometrische Betrachtung weit verbreitet: Man faßt die Menge der Kombinationen von vier Zahlen (x, y, z, t) als Koordinaten von Punkten im vierdimensionalen Raum auf; die Kombinationen von sieben Zahlen (x, y, z, t, u, v, w) werden als Koordinaten von Punkten im siebendimensionalen Raum auf-

gefaßt. Derart kann man alle Kombinationen von n Zahlen (x_1, x_2, \dots, x_n) als Punkte im n -dimensionalen Raum ansehen.

Solch eine Auffassung wird bei jedem, der erstmalig damit in Berührung kommt, auf Befremden stoßen: Was bedeutet vierdimensionaler Raum? Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen? Wir nehmen ein dünnes Glasrohr, dessen Durchmesser gerade so groß ist, daß eine Ameise hindurchpaßt, und lassen das Insekt hinein. Wenn die Ameise zurück will, muß sie rückwärts kriechen. Lassen wir von der anderen Seite noch eine zweite Ameise hinein, so können die beiden Ameisen nicht aneinander vorbei (Bild 1). So traurig ist das Leben im eindimensionalen Raum – auf einer Linie!



Bild 1

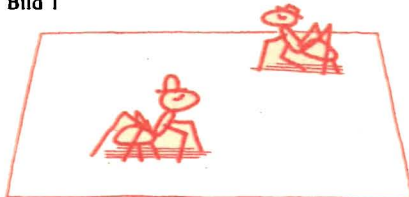


Bild 2

Nun lassen wir die zwei Ameisen auf dem Tisch oder der Oberfläche eines Kürbiss umherspazieren. Sie können sich in beliebiger Richtung bewegen, Hindernisse umgehen usw. (Bild 2). Für sie bedeutet das Leben auf einer Fläche – im zweidimensionalen Raum – bereits die große Freiheit. Allerdings gibt es auch hier gewisse Schwierigkeiten: Zwei Ameisen, die z. B. durch einen Bach voneinander getrennt sind, können niemals zusammenkommen. Man sagt, daß ein Hahn, den man in einen mit weißer Farbe gezogenen Kreis stellt, unentschlossen darin herumlaufen würde und nicht darauf käme, die Kreislinie einfach zu überschreiten. (Bild 3)

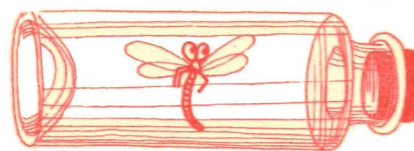
Bild 3



Wenn man sich in die Lage des Hahnes hineinsetzt, kann man sich vorstellen, daß tatsächlich allerhand Auffassungsgabe und Mut dazugehören, um aus dem zweidimensionalen Raum in den dreidimensionalen zu gehen.

Eine Libelle hat es schon besser als eine Ameise – sie kann einen Bach einfach überfliegen. Die Libelle lebt im dreidimensionalen Raum, und eine geschlossene Linie auf einer Fläche stellt für sie kein Hindernis dar. Setzt man die Libelle jedoch in ein Glas und deckt es zu, so sitzt auch sie in der Klemme: Sie kann nicht herausfliegen (Bild 4). Eine geschlossene Fläche (die Oberfläche des Glasgefäßes) teilt ihren dreidimensionalen Lebensraum in zwei Teile – ein Inneres und ein Äußeres –, ähnlich wie eine geschlossene Kurve den Lebensraum der Ameise – die Fläche – in zwei Teile zerlegt.

Bild 4



Übrigens wird eine Fläche nicht durch jede daraufgezeichnete geschlossene Kurve in zwei Teile zerlegt, so daß die Ameise nicht von einem Teil in den anderen käme, ohne die Kurve zu überschreiten. Als Beispiel kann der Kringel im Bild 5 dienen: Die gestrichelte Linie zerlegt seine Oberfläche in zwei Teile, die ausgezogene Linie jedoch nicht.

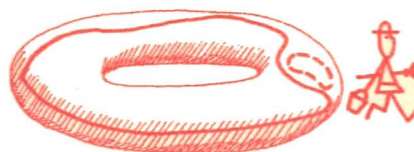


Bild 5

Überlege selbst einmal: Wie sieht es aus der Kugel mit drei Griffen im Bild 6 oder auf dem Möbiusschen Band aus? Allerdings gibt es auf jeder Fläche geschlossene Kurven, die sie in zwei Teile, ein Äußeres und ein Inneres zerlegen. Das ist für uns hier wesentlich.



Bild 6

Stelle dir nun ein Wesen vor, das im vierdimensionalen Raum lebt. Für ein solches Tier ist das geschlossene Glas kein Hindernis, es zerlegt seinen Lebensraum nicht in zwei Teile. Das Wesen „überfliegt“ das Glas einfach, indem es sich der vierten Dimension bedient.

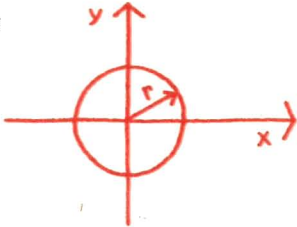
Beachtet, liebe Leser, daß wir selbst nicht im dreidimensionalen, sondern im vierdimensionalen Raum leben; seine Koordinaten sind die drei Ortskoordinaten x, y, z und die Zeit t . Diese Koordinaten sind allerdings nicht gleichwertig: Während für x, y und z beliebige Werte zulässig sind, können wir uns in der Zeit t nur vorwärts bewegen. In diesem vierdimensionalen Raum gelangen wir aus einem geschlossenen Zimmer heraus, ohne die Tür oder die Fenster zu benutzen, wenn wir die vierte Koordinate – die Zeit – benutzen. Bewegen wir uns nur in dieser vierten Koordinate und lassen wir die drei ändern unverändert, so können wir uns irgendwann in einer anderen Situation befinden und aus dem Zimmer heraustreten. z. B. wenn das Haus auseinanderbröckelt und die Zimmerwände für uns keine Grenze mehr sind.

Dieser Zustand braucht nicht sehr bald einzutreten, uns geht es nur um die prinzipielle Möglichkeit.

Die Situation wird noch deutlicher, wenn wir zulassen, daß wir uns auf der Zeitachse auch nach der anderen Seite, rückwärts, bewegen können. Denselben Punkt (x, y, z) innerhalb des verschlossenen Zimmers haben früher nicht die Wände, der Fußboden und die Decke eingeschlossen, sie waren noch gar nicht da. Bewegen wir uns also zunächst nur auf der Zeitachse zurück, so können wir zu einem gewissen Zeitpunkt aus dem verschlossenen Zimmer heraustreten.

Wir wollen noch etwas bei den mehrdimensionalen Welten verbleiben. In der Ebene (im zweidimensionalen Raum) ist eine Kreislinie mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung (Bild 7) gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Bild 7



Das Analogon zum Kreis in der Ebene ist die Kugelfläche im dreidimensionalen Raum. Liegt der Mittelpunkt im Koordinatenursprung und wird der Radius mit r bezeichnet (Bild 8), so lautet die Gleichung der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

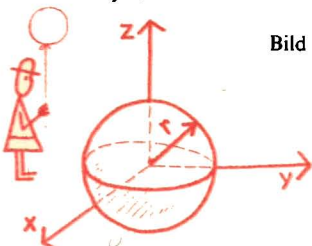


Bild 8

Geht man vom dreidimensionalen zum vierdimensionalen Raum über, so liegt es nahe, als Kugelfläche mit dem Radius r und dem

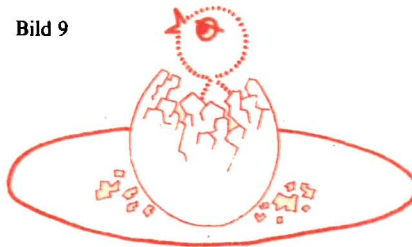
Mittelpunkt im Koordinatenursprung die „dreidimensionale Fläche“ zu bezeichnen, die der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2 \text{ genügt.}$$

Ein Küken, das im dreidimensionalen Raum lebt, kann nicht aus dem Ei schlüpfen, ohne die Schale aufzupicken. Genausowenig kann ein vierdimensionales Küken aus einer vierdimensionalen Kugel einfach heraustreten.

Um aus der vierdimensionalen Kugel herauszukommen, muß sie das Küken aufpicken. Kann es sich jedoch im fünfdimensionalen Raum bewegen, so könnte es aus einer vierdimensionalen Kugel einfach heraustreten (Bild 9). Die Eierschale müßte aber in diesem Falle eine fünfdimensionale Kugelfläche sein und keine vierdimensionale, denn die letztere könnte das Embryo nicht von allen Seiten bedecken. (Genausowenig wie eine zweidimensionale Kreislinie ein dreidimensionales Küken einhüllen kann.) Das fünfdimensionale Embryo in einer vierdimensionalen Eierschale würde von seinen fünfdimensionalen Feinden aufgefressen sein, bevor es überhaupt zum Küken heranwachsen könnte.

Bild 9



Natürlich bereitet es Schwierigkeiten, sich eine vierdimensionale Kugel praktisch vorzustellen oder diese aufzuzeichnen, wenn man nicht eine Darstellung durch eine Gleichung benutzt. Wenn man es genau nimmt, zeichnest du aber auch eine dreidimensionale Kugel nicht in den dreidimensionalen Raum, sondern nur die Projektion dieser Kugel in die Ebene des zweidimensionalen Zeichens. Ein beliebiges dreidimensionales Gebilde kannst du durch Grundriß, Aufriß und Seitenriß, also in drei Projektionen eindeutig im Zweidimensionalen darstellen. Wer hindert dich daran, ein vierdimensionales Gebilde in den dreidimensionalen Raum oder in die Ebene zu projizieren?

Grund-, Auf- und Seitenriß einer dreidimensionalen Kugel sind Kreise auf dem Zeichenspapier. Die entsprechenden senkrechten Parallelprojektionen einer vierdimensionalen Kugel sind vier dreidimensionale Kugeln, die man dann nochmals auf Zeichenspapier projizieren kann. Und wer Lust hat, noch mehr aus diesem interessanten Buch zu erfahren, der greife zu:

J. CHURGIN

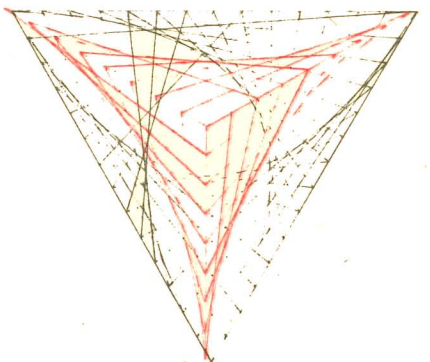
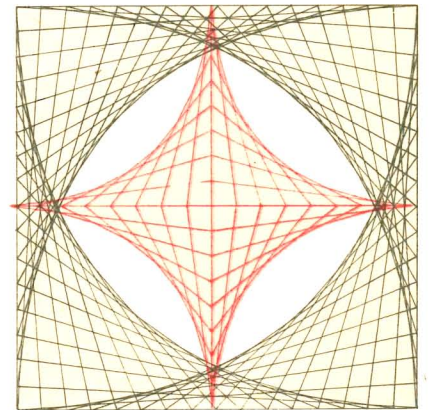
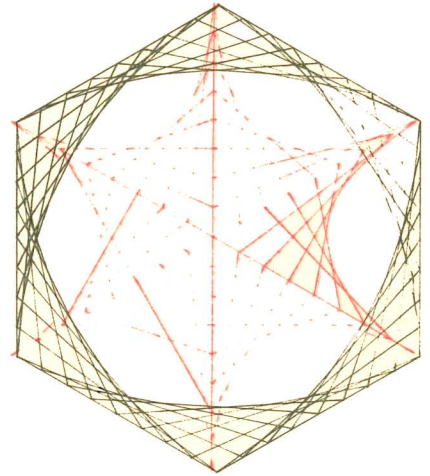
Formeln – und was dann?

251 S., zahlreiche Bilder

Preis: 9,00 M

VEB Verlag Technik Berlin

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Diese formschönen Korbhogenfiguren stellte das Institut für Lehrerbildung Quedlinburg zur Verfügung.

Über das Falten einer Landkarte

Das Problem

Auf wieviel Arten kann man eine Landkarte falten?

Unsere $p \times q$ -Karte ist ein sehr dünner elastischer Bogen Papier, der durch $p-1$ senkrechte und $q-1$ waagerechte Falten in $p \cdot q$ gleichgroße Felder eingeteilt ist.

Eine $p \times q$ -Faltung ist irgendeine Anordnung der Karte, in der alle Felder genau übereinander liegen. Dies wird durch Knicken an den Falten, Verbiegen und Glattstreichen (um die Felder ineinander zu schachteln), aber nicht durch Zerreißen, erreicht.

Das Deckblatt ist eine Seite – etwa die Oberseite – eines speziellen Feldes (Feld 1, in den Diagrammen mit einem Punkt bezeichnet): Es ist immer im Raum festgehalten, um zu sichern, daß wir nicht zwei verschiedene Diagramme für dieselbe Faltung erhalten. Uns interessiert die Gesamtzahl der möglichen Faltungen einer gegebenen $p \times q$ -Karte und wir nennen diese Gesamtzahl $G(p, q)$.

Man betrachte als Beispiel den Londoner U-Bahn-Streckenplan – dieser besteht nur aus drei hintereinanderliegenden Feldern – für den $p=3$ und $q=1$ ist. Es gibt sechs Möglichkeiten, ihn zu falten; diese sind hier von der Karte aus gesehen dargestellt (Bild 1). Nun, diese Karte ist 1-dimensional: Wir nennen sie eine p -Karte ($p=3$) und sprechen von der Gesamtzahl $G(p)$ der p -Faltungen ($G(3)=6$). $G(p)$ ist recht schwierig zu bestimmen – keine Formel ist dafür bekannt – und so wollen wir dieser Zahl in unserem Artikel näherkommen. Wir werden sehen, wie $G(p)$ durch Abzählen der Faltungen bestimmt werden kann.

Das Programm

Um das Landkartenfalten für den Rechenautomaten aufzubereiten, müssen wir es erstens in eine abstrakte Form bringen (denn ein Computer kann nur mit Symbolen arbeiten) und zweitens die Zählmethode in ein-

fache Schritte, die nicht schwieriger als die Grundrechenarten sind, zerlegen.

Es ist klar, daß eine p -Faltung durch die Anordnung der Felder der Karte vollständig bestimmt ist. Wenn wir die Felder in natürlicher Reihenfolge mit $1, 2, \dots, p$ numerieren, so kann eine abstrakte Beschreibung einer p -Faltung einfach eine Liste der Feldnummern sein, die die Reihenfolge der Felder in der Faltung beschreibt: Dies ist eine Permutation von $1, 2, \dots, p$. Es gibt jedoch viele Möglichkeiten, eine Permutation zu erzeugen, und wir werden sehen, daß der auf der Hand liegende Weg nicht immer der für unseren Zweck beste ist.

Wir werden die Menge aller p -Faltungen durch Induktion konstruieren, d. h., wir werden sagen, was eine 1-Faltung ist und unter der Annahme, daß irgendein Genie für uns die Menge aller $(r-1)$ -Faltungen bestimmt hat, die Menge aller r -Faltungen konstruieren und diesen Induktionsschritt dann für $r=2, 3, \dots, p$ ausführen. Die Idee des Induktionsschrittes ist einfach, ein neues Feld r an das Ende des Feldes $r-1$ anzubauen und dieses neue Feld der Reihe nach in jede Lücke, die in derselben Falte wie Feld $r-1$ liegt, einzufügen. (Eine Lücke ist der Raum zwischen zwei in der Faltung aufeinanderliegenden Feldern, eine Falte ist der Raum zwischen zwei Feldern mit gemeinsamer Kante.) Man betrachtet Bild 2a, wo wir eine Faltung halbiert und eine Falte herausgegriffen haben. Auf diese Art entstehen aus der 7-Faltung in Bild 2b vier neue 8-Faltungen.

Der Computer kann diese Diagramme natürlich nicht sehen, aber man kann mittels unserer Gedankengänge ein recht schönes und einfaches ALGOL-Programm schreiben, das dann für den Rechenautomaten verständlich ist. Dieses kann durch technische Maßnahmen, wie Handprogrammierung in der Maschinensprache eines speziellen Computers, wesentlich verbessert werden. Zu einer weiteren Verbesserung des Programms gelangt man, wenn man nur die subnormalen Faltungen zählt.

Eine normale Faltung liegt vor, wenn das Deckblatt oben liegt. In diesem Fall muß das erste Falten (zwischen Feld 1 und Feld 2) nach unten geschehen. Falls das darauffolgende Falten (zwischen Feld 2 und Feld 3) ebenfalls nach unten geschieht, nennen wir die Faltung *subnormal*. In der Aufstellung der 3-Faltungen am Anfang des Artikels sind die ersten beiden Faltungen normal und die erste ist subnormal. Es zeigt sich, daß dann genau jede p -te p -Faltung normal ist und genau jede $2p$ -te subnormal.

Können ihr diese Feststellung beweisen?

Wenn wir nun das Programm so gestalten, daß es nur subnormale Faltungen konstruiert, werden Schritte eingespart und die Rechenzeit verringert sich auf den $2p$ -ten Teil der ursprünglichen Rechenzeit.

Eine Reihe von Ergebnissen, die mit unserem Programm errechnet wurden, sind in der linken Spalte von Tabelle 1 zu finden. Das Programm ist bis $p=24$ gelaufen: Es gibt $G(24) = 258\,360\,586\,368$ Faltungen einer 1-dimensionalen Karte mit 24 Feldern.

Die Größe von $G(p)$

Da es keine Formel zur Berechnung von $G(p)$ gibt, fragen wir als nächstes nach einer groben Abschätzung für große Werte von p . Dazu benötigen wir einen Satz aus der Analysis, genannt *Theorem von Pólya-Szegő*.

Wir nehmen an, daß eine Funktion $f(p)$ mit positiven Werten vorliegt und daß für alle p und q gilt $f(p+q) \geq f(p)f(q)$. Dann sagt dieses Theorem aus, daß mit wachsendem p die p -te Wurzel aus $f(p)$ sich einer Zahl l beliebig annähert, dabei jedoch nie größer als diese wird:

$$\sqrt[p]{f(p)} \rightarrow l \text{ und } \sqrt[p]{f(p)} \leq l.$$

Für große Werte von p ist demnach $f(p) \approx l^p$.

(Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f(p) = 2^p$, da $2^{p+q} = 2^p 2^q$ ist. Für diese Funktion ist offensichtlich $l=2$.)

Da $G(p)$ selbst nicht die geforderten Eigenschaften hat, definieren wir $G'(p)$ als Gesamtzahl der normalen p -Faltungen:

$$G'(p) = \frac{G(p)}{p}.$$

Wenn nun irgendein Paar von

normalen p - und q -Faltungen gegeben ist, so können wir eine normale $(p+q)$ -Faltung herstellen, indem wir einfach die eine an das Ende der anderen anhängen; z. B. können wir für $p=4, q=3$ eine normale 4- und eine normale 3-Faltung aneinandersetzen und somit eine normale 7-Faltung erhalten:

Es gibt also mindestens $G'(p)G'(q)$ normale $(p+q)$ -Faltungen:

$G'(p+q) \geq G'(p)G'(q)$. Im *Theorem von Pólya-Szegő* können wir deshalb $f=G'$ setzen und folgern, daß $G'(p) \approx l^p$ für eine gewisse Zahl l ist. Da $G(p) = pG'(p)$ ist, wird auch $G(p) \approx l^p$ – der Faktor p ist zu klein, um uns zu interessieren.

Bild 2a

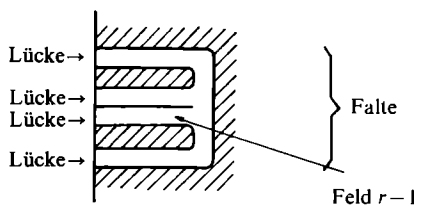
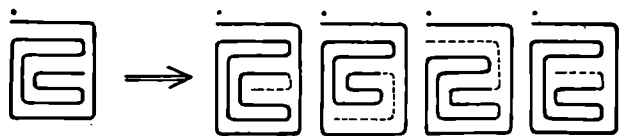


Bild 1

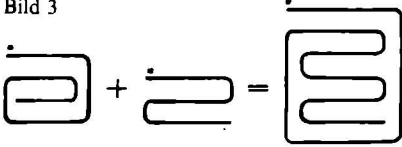


Bild 2b



Wir wissen jetzt, daß l existiert und wollen nun seinen Wert finden. Wir werden zunächst versuchen, l von unten einzuschränken. Man sieht leicht, daß $l \geq 2$ ist; zu einer gegebenen p -Faltung können wir zwei verschiedene $(p+1)$ -Faltungen herstellen, indem wir das Feld $p+1$ direkt über bzw. unter dem Feld p einfügen.

Bild 3



Eine bessere Abschätzung erhalten wir, wenn wir das Theorem von Pólya-Szegő anwenden, das ja besagt, daß die p -te Wurzel aus $G(p)$ kleiner oder gleich l ist. Für $p=24$ finden wir $l \geq \sqrt[24]{10765024432} = 2,618\dots$

Nun wollen wir versuchen, l von oben einzuschränken. Dafür benötigen wir die Catalanischen Zahlen C_n , die definiert sind als Anzahl der Möglichkeiten, n Paare von Klammern zu setzen; z. B. gibt es für $n=3$ $C_3=5$ Möglichkeiten:

$((()))$, $(())()$, $(())()$, $(())()$, $(())()$

Die ersten Werte von C_n sind in der Tabelle angegeben:

n	0	1	2	3	4	5	6
C_n	1	1	2	5	14	42	132

$p \backslash q$	1	2	3	4	5
1	1				
2	2	8			
3	6	60	1368		
4	16	320	15552	300608	
5	50	1980	201240	6139920	18608660
6	144	10512	2016432		
7	462	60788	21582624		
8	1392	320896			
9	4536	1787904			
10	14060	9381840			

Unter Benutzung von Hilfsmitteln aus der Analysis, speziell der Theorie der unendlichen Reihen, erhält man $C_n \approx 4^n$.

Nun wenden wir unsere Kenntnisse über C_n bei der Einschränkung von l und $G(p)$ an. Wenn eine Faltung von p Feldern gegeben ist, schneiden wir sie in der Mitte durch und betrachten nur eine Hälfte. Unter Vernachlässigung des eventuellen freien Endes entspricht diese Seite einer Klammerung von $\frac{1}{2}p$ Paaren, wobei jedes Klammerpaar einem

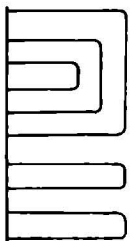


Bild 4

$((()))$ $(())$

Paar von Feldern mit gemeinsamer Falte entspricht:

Folglich gibt es höchstens $C_{p/2}$ rechte Seiten und eine gleiche Anzahl linker Seiten für eine Faltung, demnach ist

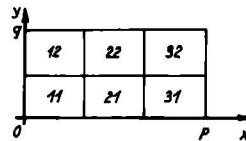
$$G(p) \leq (C_{p/2})^2 \approx 4^p, \text{ also } l \leq 4.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, daß $2,618^p \leq G(p) \leq 4^p$, was noch nicht sonderlich gut ist. Durch weitere Untersuchungen erhält man $l = 3,5018 \pm 0,0001$ oder rund $3\frac{1}{2}$.

Zweidimensionale Karten

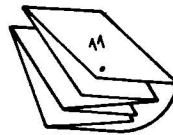
Das ursprüngliche Problem, das darin bestand, eine $p \times q$ -Karte zu falten, war eigentlich zweidimensional, d. h. p und q konnten beide größer als 1 sein. Als Beispiel diene die hier abgebildete 3×2 -Karte:

Bild 5

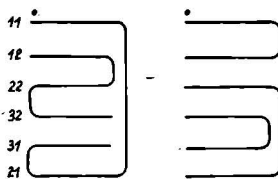


Wir nehmen an, es wäre eine Faltung dieser Karte gegeben:

Bild 6



Wir können sie in zwei Richtungen parallel zur x - bzw. y -Achse zerschneiden. Der Schnitt parallel zur x -Achse besteht aus q ineinandergeschachtelten p -Faltungen und der Schnitt parallel zur y -Achse aus p ineinandergeschachtelten q -Faltungen:



Schnitt parallel zur x -Achse Schnitt parallel zur y -Achse

Bild 7

Solch ein Paar von eindimensionalen Schnitten bestimmt eindeutig die zweidimensionale Faltung. Darüber hinaus entspricht jedes solches Paar von Schnitten (in denen die Falten

an den richtigen Stellen liegen) einer $p \times q$ -Faltung.

Wenn wir dies wissen, können wir das eindimensionale Programm auf das zweidimensionale Problem ausdehnen: Wir falten gleichzeitig ein Paar von $p \times q$ -Karten, von denen die eine in q und die andere in p Stücke zerschritten ist. Wenn wir ein neues Feld in einer speziellen Faltung einsetzen, setzen wir es nur in die Lücken ein, die in beiden Schnitten zu derselben Falte gehören. Dabei kann es natürlich passieren, daß wir keine neue $p \times q$ -Faltung konstruieren haben.

Wir geben die Ergebnisse in Tabelle 3 an. Für die 3×2 -Karte gibt es 60 Faltungen, von denen $10 = \frac{60}{3 \cdot 2}$ normal sind. Die ermittelten Zahlen wachsen sehr schnell.

H. F. Lunnon

(aus: *Mathematical Spectrum* 2/72)

Übersetzt und bearbeitet von

Dipl.-Math. Claus-Peter Helmholz, Leipzig



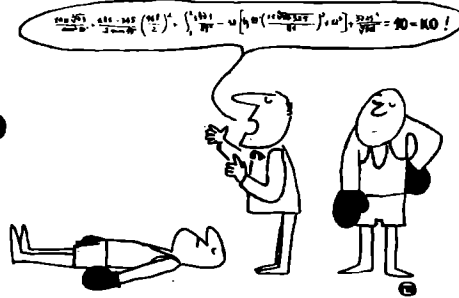
Dietrich Bauer, ZB 4/67

100 Jahre metrisches System



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. März 1975



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorge setzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

▲ 5 ▲ 1289 *Kerstin* erhält von ihrer Mutter 10 Mark. Sie soll Brot, Kuchen, Fleisch und Wurst einkaufen. Für Brot und Kuchen bezahlte *Kerstin* zusammen 2,54 M. Wieviel Mark hatte sie für Fleisch und Wurst zu bezahlen, wenn sie der Mutter nach dem Einkauf 60 Pf zurückgab?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch Altenburg

▲ 5 ▲ 1290 Eine Arbeitsgemeinschaft *Junge Gärtner* verkaufte im Monat April 70 Narzissen zu je 15 Pf und 55 Tulpen zu je 20 Pf das Stück. Von den Einnahmen sollte eine Heckenschere gekauft werden. Reichten die Einnahmen aus, wenn eine Heckenschere 22,20 M kostet?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5 ■ 1291 *Wolfgang*s Eltern kauften für das Wohnzimmer neue Gardinen. Sie bezahlten für Stores und Dekostoff zusammen 463,35 Mark. Der Dekostoff kostete 174,55 M. Wieviel Meter Stores kauften sie, wenn 1 m Store 36,10 M kostete?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5 ■ 1292 Ein Zirkus gab im Verlaufe der letzten Saison 200 Vorstellungen, die stets ausverkauft waren. Die Anzahl der Sitzplätze im Zirkuszelt ist dreimal so groß wie der vierte Teil der Anzahl der gegebenen Vorstellungen.

a) Wieviel Programmzettel wurden während dieser Saison verkauft, wenn der vierte Teil der Zirkusgäste einen Programmzettel erwarb?

b) Wieviel Mark wurden während dieser Saison aus den Eintrittspreisen für die Tierchau zusätzlich eingenommen, wenn sie von der Hälfte der Zirkusgäste besucht wurde und der Eintrittspreis 30 Pf. betrug?

Brigitte Weyh, OS Fambach, Kl. 7

W 5*1293 In dem Schema

U W E
U T E

T R E U

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Sch.

W 5*1294 Ein *magisches Quadrat* ist ein quadratisch angeordnetes Schema aus natürlichen Zahlen, deren Summe für jede Zeile, Spalte und Diagonale den gleichen Wert hat.

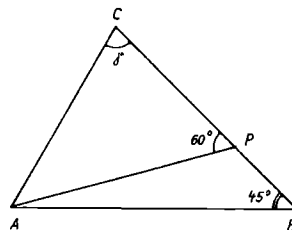
Albrecht Dürer stellte auf seinem Kupferstich „Melancholie“ ein magisches Quadrat dar, das in den beiden mittleren Feldern der unteren Zeile die Jahreszahl 1514 der Entstehung dieses Kunstwerkes enthält.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Wie läßt sich durch Veränderung von höchstens sieben Zahlen ein solches magisches Quadrat herstellen, das in den beiden mittleren Feldern der unteren Zeile an Stelle von 1514 die Jahreszahl 1974 enthält? In diesem Falle darf die konstante Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonale einen anderen Wert als im abgebildeten Schema haben.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

▲ 6 ▲ 1295 Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck *ABC* dar, dessen Innenwinkel



	<i>Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128</i>	W 5=346
	<i>Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5</i>	
	Prädikat:	
	Lösung:	

$\sphericalangle ABC = \beta = 45^\circ$ beträgt und auf dessen Seite \overline{BC} ein innerer Punkt P so festliegt, daß $3 \cdot \overline{BP} = \overline{BC}$ und $\sphericalangle APC = \delta = 60^\circ$ gilt. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$ zu berechnen
Ch. Lerche, Hähnichen

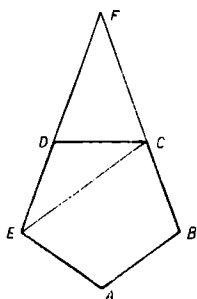
▲6▲1296 Zur Vorbereitung auf die nächste Mathematik-Olympiade wurden den Teilnehmern einer Arbeitsgemeinschaft *Junge Mathematiker* 30 Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Mathematik gestellt. Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen war um 5 größer als die Anzahl der gestellten Knobelaufgaben. Die Anzahl der Geometrieaufgaben war um 2 kleiner als die Anzahl der Knobelaufgaben. Wieviel Knobelaufgaben, Geometrieaufgaben und Gleichungen waren zu lösen?
Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 6■1297 Das Produkt aus drei natürlichen Zahlen beträgt 1120. Dabei ist der zweite Faktor um 2 größer als die Hälfte des ersten Faktors und der dritte Faktor um 2 größer als die Hälfte des zweiten Faktors. Wie lauten diese drei Zahlen?
H. Walner, Bergen

W 6■1298 Großmutter hat Geburtstag. Fünf Enkelkinder kommen zu Besuch. Die Geburtstagstorte wurde in 24 gleichgroße Stücke geteilt. Axel verzehrte $\frac{1}{8}$, Bernd $\frac{1}{4}$, Christian $\frac{5}{48}$, Dieter $\frac{1}{6}$ und Ernst $\frac{3}{16}$ der Torte. Die Großmutter aß zwei von den eingeteilten 24 Stücken. Wieviel eingeteilte Stücke Torte blieben übrig?
M. Hanke, Kl. 6, Karl-Marx-Stadt

W 6*1299 Es sind alle geordneten Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen mit $m < n$ zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
a) Jede Zahl eines solchen geordneten Zahlenpaares soll zweistellig sein.
b) Die zweite Zahl eines solchen geordneten Zahlenpaares geht aus der ersten Zahl durch Vertauschen ihrer Ziffern hervor.
c) Die Summe der beiden Zahlen jedes geordneten Paares soll bei Division durch 5 den Rest 3 ergeben.
Sch.

W 6*1300 Die abgebildete Figur stellt ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ dar. Der Schnittpunkt der Geraden BC und ED wurde mit F bezeichnet, und es wurden die Punkte E und C miteinander verbunden.

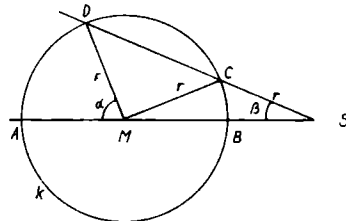


Untersuche, ob \overline{EC} kürzer oder länger als \overline{DF} oder genau so lang wie \overline{DF} ist. Begründe deine Feststellung!
Sch.

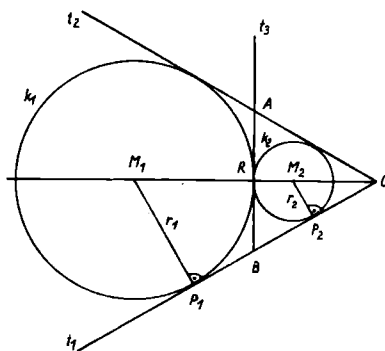
▲7▲1301 Es sollen m Gegenstände in n gleichartigen Kartons verpackt werden. Legt man jeweils fünf dieser Gegenstände in je einen dieser Kartons, so verbleiben für den letzten Karton nur noch zwei Gegenstände. Werden hingegen in jedem vorhandenen Karton jeweils vier Gegenstände verpackt, so bleibt ein Gegenstand übrig, der nicht mehr in einem Karton verpackt werden kann. Wieviel Gegenstände und wieviel Kartons sind vorhanden?
Oberlehrer Mathematikfachlehrer K. Becker, Lüththeen

▲7▲1302 In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten \overline{AB} und \overline{CD} sei E die Mitte von \overline{AB} und F die Mitte von \overline{CD} . Das Trapez ist aus den Diagonalen $\overline{AC} = e = 7$ cm, $\overline{BD} = f = 11$ cm, der Strecke $\overline{EF} = 5,5$ cm und der Seite $\overline{AB} = a = 10,5$ cm zu konstruieren.
Sch.

W 7■1303 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dar. Die Sekante CD schneidet die Zentrale AB im Punkt S so, daß $\overline{CS} = r$ gilt. Der Winkel $\sphericalangle BSC = \beta$ ist durch den Winkel $\sphericalangle AMD = \alpha$ auszudrücken.
Sch.

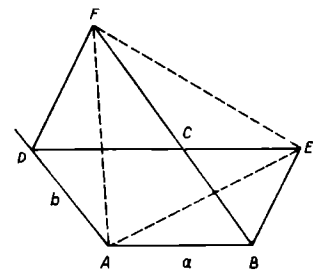


W 7■1304 Die abgebildete Figur stellt zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 dar, wobei $r_1 > r_2$ ist. Die beiden Kreise berühren sich von außen in dem Punkt R . Von den Tangenten t_1, t_2 und t_3 , die beiden Kreisen gemeinsam sind, wird ein Dreieck ABC bestimmt. Wieviel mal so lang wie der Radius r_2 muß der Radius r_1 sein, wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist?
T.



W 7*1305 Die abgebildete Figur stellt ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = \alpha > 90^\circ$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$ dar. Es wurden um B ein Kreis mit dem Radius $\overline{BC} = b$ geschlagen,

der CD in E schneidet, um D ein Kreis mit dem Radius $\overline{CD} = a$ geschlagen, der BC in F schneidet. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck AEF gleichschenkelig ist.
Sch.



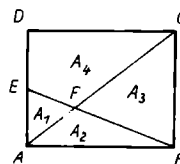
W 7*1306 Es sind alle natürlichen Zahlen a, b, c, d, e mit $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e < 10$ zu ermitteln, welche die Gleichung $a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ erfüllen.
B. Herrmann, Alt-Töplitz

▲8▲1307 Nach dem Verfahren des sowjetischen Wissenschaftlers und Leninpreisträgers Prof. *A. W. Ulitowski* können Mikrodrähte in Hochfrequenzgeneratoren unmittelbar durch Gießen hergestellt werden. So erhält man z. B. aus 1 g Kupferschmelze einen Mikrodraht von 1000 m Länge.

- Wie groß ist der Durchmesser dieses Drahtes, wenn er einen kreisförmigen Querschnitt hat und die Dichte des Kupfers $8,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt?
- Wie groß ist der elektrische Widerstand dieses 1000 m langen Drahtes, wenn der spezifische Widerstand des Kupfers $0,016 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ beträgt?
L.

W 8■1308 In einer Bakterienkolonie möge sich die Anzahl der Bakterien im Verlauf von jeweils 30 Minuten verdoppeln. In Abständen von 30 Minuten soll viermal für Versuchszwecke die gleiche Anzahl von Bakterien entnommen werden. Wie groß kann diese Anzahl höchstens sein, wenn sich zum Zeitpunkt der ersten Entnahme vor der Entnahme genau 3000 Bakterien in der Kolonie befanden?
Wolfgang Burmeister, Forschungsstudent an der TU Dresden

W 8■1309 Es seien $ABCD$ ein Rechteck, E der Mittelpunkt der Seite \overline{AD} und F der Schnittpunkt der Diagonale \overline{AC} mit der Verbindungsstrecke \overline{BE} (vgl. die Abb.).



In welchem Verhältnis zueinander stehen die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Dreiecke AFE, ABF, BCF und des Vierecks $FCDE$?
Reinhard Schulz, Rotta, Fachlehrer für Mathematik

W 8*1310 Es sind alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x und y zu ermitteln,

für die die Gleichung

$$x^2 + y - 37 = 0$$

erfüllt ist.

T.

W 8*1311 a) Man beweise, daß die Aussage „Jedes Drachenviereck ist ein Tangentenviereck.“ wahr ist.

(1)

b) Man formuliere die Negation (Verneinung) der Aussage (1). Ist die dann entstehende Aussage wahr oder falsch?

c) Man formuliere die Aussage (1) als Implikation in der Form: „Für alle ... gilt: Wenn, ..., so ...“

T.

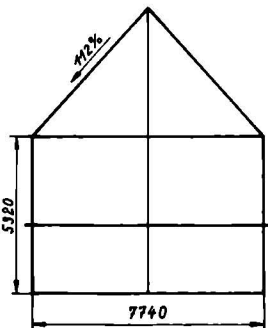
W 9 ■ 1312 Man untersuche, ob es ein geordnetes Paar (x, y) natürlicher Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung

$$x^2 - 5y + 8 = 0$$

erfüllt ist.

T.

W 9 ■ 1313 Das Einzelwohnhaus EW 71 B, eines der Projekte für den Eigenheimbau, die besonders geeignet sind, unter Nutzung vorhandener Rohstoffe und Baumaterialien kostengünstige Eigenheime zu errichten, hat einen rechteckigen Grundriß mit einer Länge von 10,48 m und einer Breite von 7,74 m. Aus der Skizze der Seitenansicht (vgl. die Abb.) ist zu entnehmen, daß Kellergeschoß und Erdgeschoß dieses Hauses eine Höhe von zusammen 5,32 m haben und daß das Dach um 112% geneigt ist, d. h. der Quotient aus der Höhe des Dachgeschosses und der halben Grundlinie ist gleich 1,12.



a) Man berechne die bebaute Fläche des Hauses.

b) Man berechne den umbauten Raum des Hauses, d. h., das Volumen des Hauses (einschl. des Kellergeschosses).

L.

W 9*1314 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Zahl

$$z = 448^n + 57 \cdot 332^n$$

durch 29 teilbar ist. Oberlehrer K. Becker, Lüththeen, Diplom-Mathematiklehrer

W 9*1315 Es sei ABC ein regelmäßiges Kreisbogendreieck, d. h., die Menge aller Punkte, die auf den drei durch A, B bzw. B, C bzw. C, A begrenzten, im Innern des gleichseitigen Dreiecks ABC verlaufenden Kreisbogen von gleichem Radius liegen (vgl. die Abb.). Ferner seien K mit dem Radius R und k mit dem Radius r zwei konzentrische Kreise, von denen der Kreis K durch die Punkte A, B, C geht und der Kreis k die drei Kreisbogen

Eine Aufgabe von stud. math.

János Kollár

Universität Budapest

I. Preisträger der XV. und XVI. IMO

▲ 1320▲ Es sei $M = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ eine endliche Punktmenge in der Ebene mit $n \geq 3$, wobei jeweils zwei dieser Punkte einen von Null verschiedenen Abstand haben. Der größte dieser Abstände sei mit d bezeichnet. Ferner werde die Verbindungsstrecke zweier Punkte P_i, P_j Durchmesser genannt genau dann, wenn $P_i P_j = d$ gilt, wenn also diese Punkte einen größtmöglichen Abstand voneinander haben.

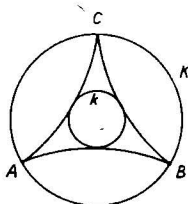
a) Man beweise, daß es zu einer solchen Punktmenge höchstens n Durchmesser gibt.

b) Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 3$ an, für die es solche Punktfolgen mit genau n Durchmessern gibt.

berührt. Man berechne den Radius der drei Kreisbogen.

Dittmar Kurtz,

Friedrichsrode, POS Keula, Kl. 9



W 10/12 ■ 1316 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung $x^{11} - 4x^9 + x^8 - 4x^6 - x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = 0$

erfüllt ist. Thomas Jentsch, Halle

W 10/12 ■ 1317 Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen

$$\overline{BC} = a = 15 \text{ cm}, \quad \overline{CA} = b = 13 \text{ cm},$$

$$\overline{AB} = c = 14 \text{ cm}.$$

Man berechne

- den Flächeninhalt dieses Dreiecks;
- die Länge der von C ausgehenden Höhe $\overline{CF} = h_c$;
- die Längen der Abschnitte \overline{AF} und \overline{FB} ;
- den Radius ρ des Inkreises dieses Dreiecks;
- die Abstände der Berührungspunkte P_1, P_2, P_3 des Inkreises mit den Seiten des Dreiecks von den Eckpunkten.

Hinweise zur Lösung:

1. Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \rho \cdot s$, wobei

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

- „Hier kommt keiner in die Brüche“, sagt der Verfasser dieser Aufgabe; denn die zu berechnenden Werte sind sämtlich ganzzahlig.

Dr. W. Bennewitz, Radebeul

W 10/12*1318 Die am 25. Juni 1974 auf eine Erdumlaufbahn beförderte sowjetische wissenschaftliche Orbitalstation *Salut 3* hat einen mittleren Abstand von 270 km von der Erdoberfläche.

a) Man berechne die Höhe der Kugelzone, deren Oberfläche bei einem vollen Umlauf von der Station überblickt werden kann.

b) Man stelle fest, wieviel Prozent der Erdoberfläche bei einem vollen Umlauf von der Orbitalstation *Salut 3* überblickt werden können.

Anleitung zur Lösung: Legt man von einem Bahnpunkt P der Station die Tangenten an die Erdkugel, so wird das Gebiet, das von Punkt P aus zu überblicken ist, durch die Berührungspunkte dieser Tangenten begrenzt. Bringt man nun die Erdkugel mit einer Ebene, die durch den Punkt P und den Mittelpunkt M der Erdkugel geht, zum Schnitt und sind A, B die Berührungspunkte der von P an den Schnittkreis gelegten Tangenten, so ist $\overline{AB} = z$ die Höhe der Kugelzone, deren Gebiet bei einem vollen Umlauf überblickt werden kann. Für den Oberflächeninhalt der Kugelzone gilt

$$A_1 = 2\pi R \cdot z, \text{ wobei } R = 6370 \text{ km der Radius der Erdkugel ist.}$$

L.

W 10/12*1319 Es sei a eine positive reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen x , für die die Gleichung

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

erfüllt ist. Oberlehrer Lew Dimenstein, Leningrad, UdSSR

alpha-Wettbewerb 1973/74 Preisträger

Jürgen Wage, Mittelstille; Volkmar Türke, Auerbach; Ines und Heike Grigoleit, Stefan Gondlach, Karin Bischoff, alle Zittau; Haiko Müller, Schmalkalden; Dirk Herrmann, Alt-Töplitz; Torsten Löwe, Gunter Ender, beide Lössau; Gerald Manske, Almut Beckmann, beide Steinbach-Hallenberg; Martina Schmidt, Rotta; Cornelia Werner, Clingen; Sabine Moldauer, Sondershausen; Ute Schilling, Hoyerswerda; Andrea Herrmann, Hammerunterwesenthal; Roland Schlesinger, Saßnitz; Holger Bensch, Berlin; Uwe Bergmann, Stolpen; Manuela Wilke, Rüdnitz; Stefan Berchardt, Worbis; Barbara Höpfner, Wolgast; Volker Thiele, Uwe Wiegel, beide Neuenhofe; Aloys Werner, Wingerode; Dietmar Müller, Schmalkalden; Barbara Gebb, Fambach; Torsten Busch, Klausdorf; Carsten Hocke, Gabriele Klötzke, beide Clingen; Arndt Gläßer, Altenbeuthen; Katrin Günther, Pfaffroda; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Rolf Busch, Lobenstein (Kl. 3); Klaus Baumgart, Dresden; Diether Pickel, Briese-lang; Peter Fleischer, Eisenhüttenstadt; Andreas Gude, Berlin; Christa Blümlinger, Linz (Österreich); Ulf Brüstel, Ziegelheim; Jörg Hutschenreiter, Dresden; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Éva Kertész, Kecskemét (Ungarische VR); Hans-D. Schwabe, Sondershausen; Ing. Armin Körner, Leipzig; Eva Gerstner, Dresden; Michael Weicker, Mügeln; Thomas Müller, Krems (Österreich); Peter Fuchs, Bad Saarow; Gudrun Billig, Coswig; Sigrun Below, Seelow; Roger Labahn, Anklam; Josef Hofbauer, Traismauer (Österreich); Andrea Wolter, Uebigau; Annette Lasar, Erfurt; Andrea Hönemann, Stützerbach; Ellen Krüger, Übigau; Matthias Bernstein, Wernshausen; Klaus Reichardt, Magdeburg; Wilfried Röhnert, Radebeul; Katrin Wahn, Uebigau; Christiane Jordan, Kietz (Kl. 3); Bernadette Damaschke, Seifhennersdorf; Henry Ribbe, Tholdorf.

Vorbildliche Leistungen

Anke Müller, Sabine Klotzsche, beide Wolgast; Petra Recknagel, Cornelia Horn, Reinhold Beckmann, Jens Hoffmann, Sabine Menz, Ines Semmelrogge, Christine Munk,

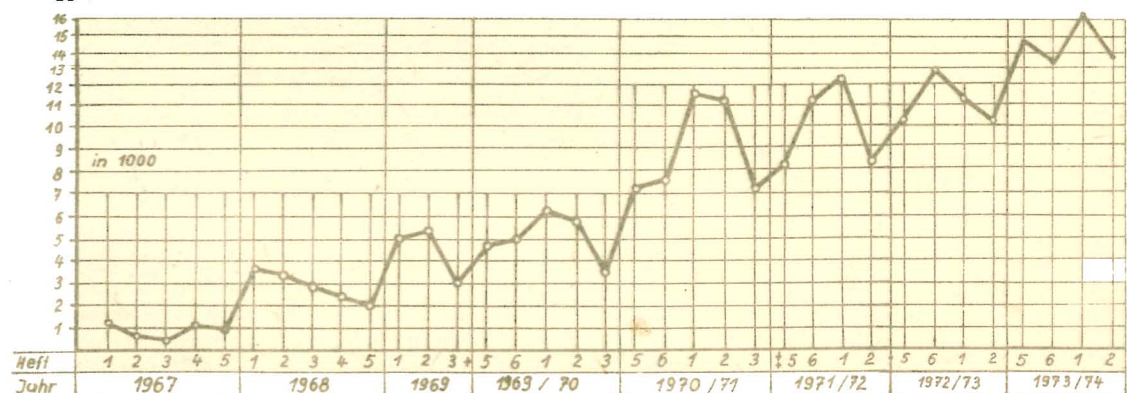
Bernd Endter, alle Steinbach-Hallenberg; Ingbert de Weert, Sabine Könnecke, Liane Krümming, Ines Pahl, Dagmar Krümming, alle Neuenhofe; Sylvia Hoth, Helmut Tanke, Dagmar Koch, Anita Seromin, Andrea Jost, Haidrun Tesch, alle Altentreptow; Birgit Baldauf, Rotta; Thomas Diegmann, Teistungen; Michael Wiegand, Teistungen; Angelika Rode, Wingerode; Ines Baumann, Bahratal; Christiane Bloch Wernikow; Sylvia Czarnetzki, Zaatzke; Andreas Kundt, M. Thamm, beide Ribnitz-Damgarten; Sieglinde Marx, Heinz Olaf Müller (Kl. 3), Kathrin Bauer, Kati Vietsch, Petra Bohn, alle Schmalkalden; Gerd Ullrich, Anke Illgen, Monika Müller, Thomas Wingeß, Lutz Mittelsdorf, Marita Heß, alle Fambach; Ellen Hille, Zörnigall; Petra Hansche, Steffen Apel, Frauke Apel, alle Klausdorf; Stephan Fischer, Bendeleben; Rosemarie Mausehund, Birgit Schnarr, beide Clingen; Hiltrud Müller, Birgit Demme, Gabriele Vaterrodt, alle Deuna; Uta Pfeifer, Ramona Willfahrt, Heike Hohnstein, alle Sondershausen; Torsten Flade, Beierfeld; Beate Floeter, Sachsendorf; Frank Jeschek, Kloster; Birgit Oelschlegel, Altenbeuthen; Petra Biehain, Horka; Beate Gramsch, Großenhain; Angela Friedemann, Pfaffroda; Claudia Steiber, Lienz (Österreich); Frank Geißler, Lobenstein; Andrea Martin, Pfaffroda; Dietmar Glanz, Kefferhausen; Michael Rehm, Torgau; Michael Hanft, Teuchern; Ralf Kretschmer, Dresden; Hans-Uwe Simon, Apolda; Lutz Gärtner, Wismar; Monika Schultz, Berlin; Jürgen Prestin, Waren; Martina Menge, Bernburg; Gudrun Tappert, Guben; Reinhard Pohl, Dresden; Michael Thranhardt, Oranienbaum; Wolfhart Umlauf, Freital; Jörg Pöhland, Klingenthal; Sylvia Schmidt, Buchholz; Steffen Pankow, Zittau; Aldo und Jörg Bojarski, Saßnitz; Franka Wölfel, Greifswald; AG Mathematik Kl. 6-7, Aschersleben; Kirsten Wettchstein, Bad Salzungen; Frank Lohmeyer, Zittau; Michael Winks, Berlin; Birgit Lehmann, Rostock; Gerd Birnbaum, Spitzkunnersdorf; Bettina Dähn, Güstrow; Mario Binkowski, Demmin; Falk Bachmann, Halle; Steffi Voigt, Wilkau-Haßlau; Ulrike Baumann, Radebeul; Simone Kühn, Leuna; Margrit Weibrecht, Bad Salzungen; Cordula Becker, Moskau (UdSSR); Annette Schulz, Cottbus;

Thomas Kruppa, Eilenburg; Thomas Bienek, Schwepnitz; Karsten Breuer, Radebeul; Jana Michaelis, Bad Salzungen; Hans-D. Gröger, Hecklingen; Joe Hederich, Bad Salzungen; Uwe Haberland, Leipzig; Astrid Pflaum, Berlin; Silvia Marr, Henri Hofmann, beide Oberschönau; Annegret Wolf, Trusetal.

Kollektive Beteiligung von Schulen am alpha-Wettbewerb

OS Ahlbeck; OS I Altentreptow; OS Alt-Töplitz; OS Asbach; AG Jg. Math. Aschersleben; OS Th. Neubauer, Bad Salzungen; alpha-Zirkel OS Bahratal; OS Beierfeld; AG Math. 27. OS Berlin; OS Berlingerode; OS Beuren; OS Birkungen; OS Blumberg; OS II Breitung; OS Brehme; OS Brodersdorf; AG Math. OS Brohm; K.-Kollwitz-OS Bützow; OS Burkau; OS Clingen; H.-Grundig-OS Cossebaude; St. Jg. Techniker und Naturforscher, Cottbus; Klub Jg. Math., Cottbus; OS Culitzsch; OS Deuna; K.-Kollwitz-OS Dingelstädt; OS Dörnthal/Pfaffroda; EOS Dresden-Süd; OS Magnus Poser, Drognitz; OS Effelder; AG Math. OS Eilenburg; OS Alexander Schulgin, Eisenhüttenstadt; OS Fambach; Kreis AG Freiberg; OS Friedeburg; E.-Hartsch-OS Gersdorf; H.-Günther-OS Fürstenwalde; OS I Gnoin; J.-Brinckmann-OS Goldberg; OS Otto Drews, Greifswald; OS J.-Gagarin, Greußen; OS Großbodungen; Haus der JP und Jugend Großenhain; OS Großschwarzlosen; OS Grüna; Diesterweg-OS I, Halle; OS II Hainichen; F.-Engels-OS Herzberg; Kreisklub Math., Hettstedt; Goethe-OS Hohenleipisch; Alpha-Club OS Horka; E.-Schneller-OS Hoyerswerda; OS Jördenstorf; A.-Becker-OS Kamsdorf; C.-Zetkin-OS Kandelin; E.-Thälmann-OS, Karl-Marx-Stadt; Pionierhaus J. Gagarin, Karl-Marx-Stadt; OS Klausdorf; OS Könitz; OS Küllstedt; AG Math. OS Kuhfelde; K.-Liebknecht-OS, Leinefelde; Bezirksklub Math. Leipzig; A.-Bebel-OS, Leuna; AG Math. OS Lichte; OS Lichtenhain; OS W. Wallstab, Löderburg; OS Lössau; OS Markersbach; OS Mittel-Springstille; TOS Neuenhofe; 3. OS Neustrelitz; Th.-Neubauer-OS Niederorschel; G.-Hauptmann-OS Obercunewalde; E.-Weinert-OS Oberschönau; OS IV A.-Hennecke, Oelsnitz;

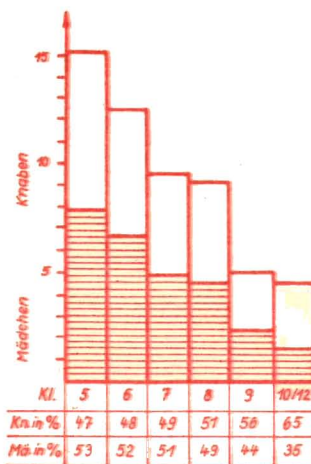
Entwicklung des alpha-Wettbewerbs 1967/74



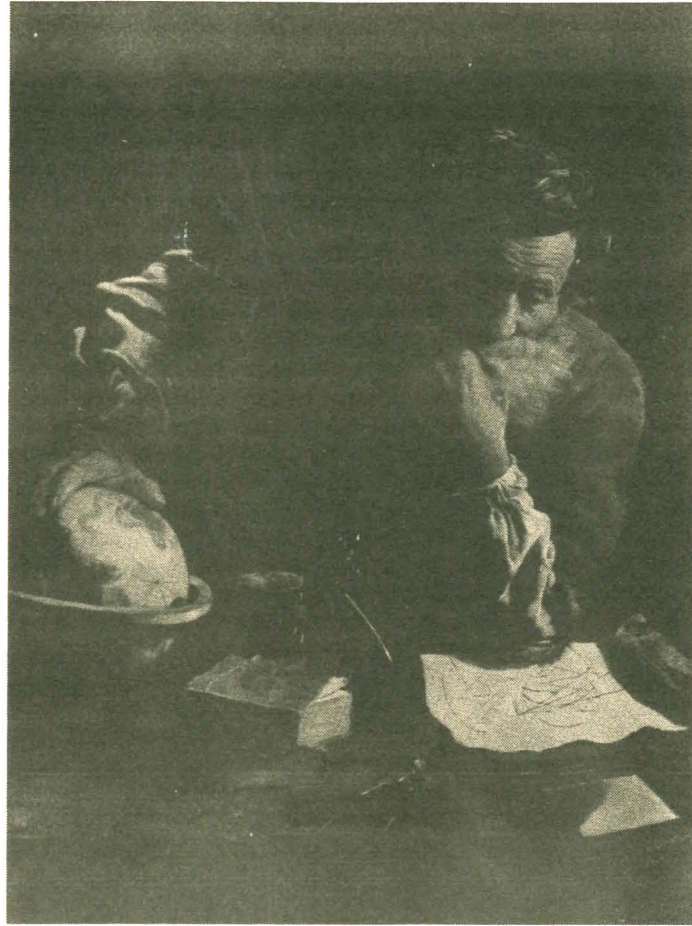
OS Olbersdorf; Comenius-OS Oranienburg; OS Osternienburg; OS Pfaffroda; AG Math. EOS Rainer Fetscher, Pirna; OS Rackwitz; OS Radis; AG Math. Th.-Neubauer-OS Ranis; OS Rheinsberg; J.-Gagarin-OS Ribnitz-Damgarten; E.-Thälmann-OS Riesa; Herder-OS Rostock; OS Rotta; F.-Weinert-OS Rottleben; OS Ründnitz; St. Jg. Naturforscher und Techniker Sanitz; OS Schernberg; H.-Danz-OS Schmalkalden; EOS Schmalkalden; J.-Gagarin-OS Schmalkalden; K.-Marx-OS Schmalkalden; J.-R.-Becher-OS Schneeberg; EOS B.-Brecht, Schwarzenberg; OS Schwepnitz; OS Sachsendorf; F.-Reuter-OS, Siedenbollentin; AG Geschw.-Scholl-OS Sondershausen; A.-Becker-OS Spremberg; E.-Thälmann-OS Spremberg; A.-Diesterweg-OS Spremberg; OS Steinbach-Hallenberg; OS Stolpen; Diesterweg-OS Stralsund; W.-Heinze-OS Stralsund; OS Struth-Helmershof; EOS Karl-Marx-OS Tangerhütte; OS Teistungen; OS I und OS II Teterow; OS Treben; W.-Pieck-OS Trusetal; OS Viernau; OS Vitte; OS Wedendorf; OS Werneuchen; OS Wernshausen; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; K.-Marx-OS Wilkau-Haßlau; OS Wingerode; Lenin-OS Wolgast; EOS Worbis; OS Wurzbach; H.-Eisler-OS Wusterhausen; Grete-Walter-OS Wustrow; Geschw.-Scholl-OS Zaatze; H.-Jacobi-OS Zella-Mehlis; F.-Schiller-OS Zella-Mehlis; OS Ziegelheim; 5. OS Zittau; Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS Zittau; OS Zörnigall; OS Zschornowitz; OS Zurow

● Die Korrektur der 58 000 eingegangenen Lösungen erfolgte durch OStR G. Schulze (EOS Herzberg) und StR J. Lehmann, VLdV (29. OS Leipzig/Chefred. *alpha*).

● Unser besonderer Dank gilt unseren beiden langjährigen ehrenamtlichen Mitarbeitern NPT OStR Dr. R. Lüders und StR Th. Scholl (beide Berlin). Sie sichteten und bearbeiteten die eingegangenen Aufgaben, fügten zahlreiche selbst hinzu und erstellten die oft nicht leichten Lösungen (1 300 Aufgaben in 8 Jahren).



Domenico Fetti: Archimedes



D. Fetti (um 1589 bis 1624) ist ein Wegbereiter der italienischen Barockmalerei. Zwei Städte haben sein Schaffen beeinflusst: Rom, der Geburtsort, und Venedig, wo er starb. Ist es in Rom der Naturalismus der *Caravaggio-Schule* mit den starken Licht- und Schatteneffekten, so wird seine Kunst durch Venedig malerischer. In der mittleren Schaffenszeit, in Mantua, scheint unser Bild entstanden zu sein.

Archimedes (um 287 bis 212 v. u. Z.), der griechische Physiker und Mathematiker, sitzt nachdenklich an einem Tisch, auf dem sich Arbeitsutensilien befinden – sogar ein Globus, eine für diese Epoche seltene Wiedergabe. Es ist die Zeit der Gegenreformation, in der die klerikalen Kräfte zusammen mit dem Absolutismus ihre während der Renaissance und der Reformation geschwächte Macht durch den Kampf gegen das aufstrebende Bürgertum wiederzugewinnen versuchten. Nachdem der Humanismus in der Renaissance einen Triumph gefeiert hat, werden jetzt freie Meinung und Geist als gefährliche antikirchliche Regungen angegriffen. Religionskriege verwüsten die Länder. All das, was das herrschende kirchliche Weltbild untergräbt, wird zu beseitigen versucht. 1592 verbrennt man *Giordano Bruno*, einen Verfechter des koper-

nikanischen Weltsystems, als Ketzer. Auch *Fettis* Zeitgenosse, der italienische Philosoph *Thomas Campanella*, Autor des „Sonnestaates“, eines sozial-utopischen Romans, wird wegen seiner freiheitlichen Gesinnung und des Widerstands gegen die spanische Fremdherrschaft 27 Jahre eingekerkert. Der Katholizismus muß jedoch der Entwicklung der Wissenschaften Rechnung tragen. Kontinente waren inzwischen entdeckt und neue Handelswege entstanden. Man vervollkommnete die Technik, besonders im Schiffbau. Die ersten einfachen Hochöfen wurden errichtet.

Italien, obwohl seit der zweiten Hälfte des 16. Jh. wirtschaftlich und politisch ruiniert, behält trotz allem für lange Zeit die geistige Vorrangstellung. Es ist deshalb auch Italien, das den Naturwissenschaftler Archimedes erstmalig würdigt. 1543 gibt man sein Werk heraus, auf das sich die Wissenschaftler des Barocks stützen.

Fetti mag durch seine römische Heimat, die ihn zu einem nüchternen Realismus erzog, vielleicht aber auch durch das Amt als Hofmaler beim Fürsten von Mantua, der sich mit der Pflege von Kultur und Kunst über seinen eigenen Machtniedergang hinwegtäuschen wollte, zu dem Gemälde angeregt worden

sein. Die Art der Darstellung ist barock. *Archimedes* ist kräftig und muskulös dargestellt. Der nach vorn geneigte, leicht gedrehte Oberkörper deutet – verstärkt durch den nach hinten gerichteten Ellbogen – den Raum an. Die Komposition des Bildes, die Verschiebung des Schwergewichtes nach der Seite, ist typisch für die Auffassung des Barocks. Man liebt nicht mehr die Ruhe und die harmonische Ausgewogenheit. Doch das Gleichgewicht fehlt in den Werken des Barocks nur scheinbar. So ist z. B. als Gegengewicht zum beleuchteten Kopf, dem geistigen Mittelpunkt des Bildes, der ebenfalls beleuchtete Globus zu betrachten. Das weißlich-gelbe Licht, das auf das Wichtigste konzentriert ist, durchbricht hart den graubraunen Gesamtton. Der Maler gibt keinen Idealmenschen, sondern einen einfachen alten Mann wieder, wenn auch die Darstellung nicht frei von barockem Pathos, von der großen Gebärde ist. Trotz der Wuchtigkeit wirkt das Gemälde außerordentlich dynamisch (durch Modellierung der Falten, des Körpers, durch die gesetzten Lichtakzente). Worüber denkt der Alte nach? Natürlich über seine Forschungen, die mathematischen Lehrsätze, den Bau von Maschinen. Jedoch liest man in dem Bild noch mehr: das Lob auf die Wissenschaft, die sich auch in Zeiten der Unterdrückung behauptet. Deshalb wird *Archimedes* mit einem Lorbeerkranz dargestellt. Das Werk des von roher Soldateska erschlagenen Gelehrten lebte weiter, so wie das Werk der gefolterten Verfechter des Humanismus und der Wissenschaften in jener Zeit bestehen blieb.

Ruth Richter



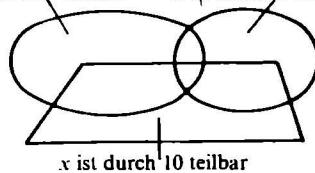
Linolschnitt, erarbeitet im Kunsterziehungsunterricht. Neben dem Selbstporträt stellte unser langjähriger *alpha*-Leser, erfolgreicher Olympiade-Teilnehmer, diese mit „sehr gut“ bewertete und einem ausführlichen Text versehene Arbeit zur Verfügung. *Wolfram Ulrich*, ehem. Schüler der *Thomas-EOS* Leipzig (Kl. 12) beginnt jetzt das Medizinstudium und schreibt: „*alpha* wird mir stets eine Brücke zu einem meiner Lieblingsfächer sein.“



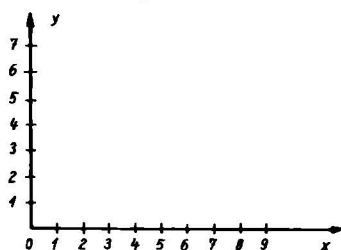
Im vergangenen Jahr nahm *Dipl.-Ing. M. Walter*, Meiningen, durch die *Urania* an einer zweiwöchigen Studienreise durch die Ungarische Volksrepublik teil. Die dortige Gesellschaft zur Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse (T. I. T.) führt in den Schulen von der 3. Klasse an Mathematikzirkel durch. Viele tausend Schüler werden so auf die Olympiaden vorbereitet. Unseren jüngsten Lesern geben wir mit diesem Arbeitsblatt einen kleinen Einblick in die gestellten Aufgaben und wünschen beim Knobeln viel Freude und Erfolg.

1 Ermittle alle Lösungen von $6 < (x+2) : 2 < 30$, und trage sie in die entsprechenden Felder ein ($x \in \mathbb{N}$)!

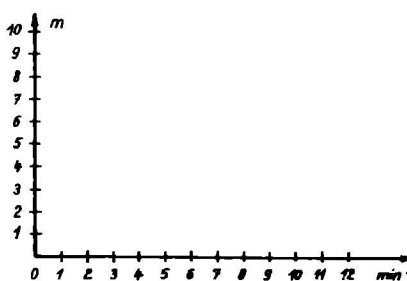
x ist durch 3 teilbar x ist durch 5 teilbar



2 Gib alle Zahlenpaare x, y an, für die gilt $x+y=7$ ($x, y \in \mathbb{N}$) und markiere die entsprechenden Punkte!

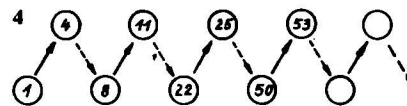


3 Zwei Spinnen – eine grüne Spinne und eine Kreuzspinne – krabbeln eine 10 m hohe Burgmauer empor. Die grüne Spinne stieg 1 m in einer Minute. Die Kreuzspinne startete 3 Minuten später; sie stieg in einer Minute



2 m. Sie erhöhten ihr Tempo nicht und stiegen so lange, bis sie oben waren.

- a) Welche von ihnen ist eher oben?
b) Nach wieviel Minuten erreicht die Kreuzspinne die kleinere grüne Spinne?



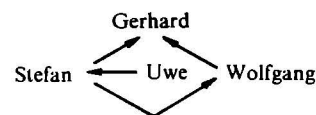
Was bedeutet hier der Pfeil \rightarrow ?
Was bedeutet hier der Pfeil \dashrightarrow ?

5 Ulla hat mehrere Spielgeld-Münzen zu 1 Pf, 3 Pf, 9 Pf, 27 Pf

Wie kann sie die folgenden Beträge mit möglichst wenig Münzen bezahlen? Schreibe es in der Tabelle auf!

	27 Pf	9 Pf	3 Pf	1 Pf
2				
3				
4				
8				
25				
33				
52				
80				
91				

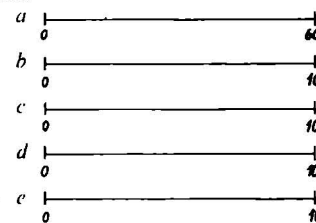
6 Vier Schüler – Gerhard, Stefan, Uwe und Wolfgang – liefen bei einem Wettkampf durchs Ziel. Jeder von ihnen hat dem schnelleren Läufer gratuliert. In welcher Reihenfolge liefen sie durchs Ziel, wenn die Pfeile in der Abbildung auf den Namen des Schülers zeigen, dem gratuliert wurde? Trage die noch fehlenden Pfeile ein!



7 Für welche natürlichen Zahlen erhältst du wahre Aussagen? Schreibe sie zwischen die Klammern!

a	$5 < a < 60$	{ }
b	$(x+3) \cdot 4 = 4 \cdot x + 12$	{ }
c	$(5 \cdot y) + y \cdot 4 = y \cdot 9$	{ }
d	$30 - (z \cdot z) = z$	{ }
e	$3 \cdot (b+1) < 10$	{ }

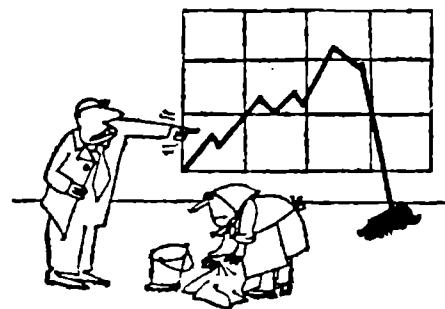
Markiere die Lösungen auf den Zahlenstrahlen!



In freien Stunden **alpha** heiter

Sofort nehmen Sie
den Besen da weg!

Aus: LVZ



Mathemagisches

Der weltberühmte Zauberünstler *Alphabino* fordert mich auf, eine Zahl zu nennen, die größer als zehn, aber kleiner als zwanzig ist.

Ich sage ihm, was mir gerade einfällt: „Dreizehn“. Er nimmt sein Skatspiel und zählt davon dreizehn Karten einzeln übereinander auf den Tisch. Die restlichen neunzehn Karten steckt er ein. Er fragt mich nach der Quersumme meiner Zahl. Ich antworte: „Vier“.

Er nimmt das Kartenpäckchen auf und wirft drei Karten auf den Tisch. Die vierte darf ich mir ansehen.

Alphabino hebt theatralisch die Arme und blickt mich durchdringend an. „Denke konzentriert an die Karte! Es ist Herz As, stimmt's?“

Ich nicke verblüfft. Ich möchte gern wissen, ob er Gedanken erraten kann. „Gedankenleserei?“ Er schüttelt lächelnd den Kopf. „Das gibt es nicht. Ich weiß immer im voraus, welche Karte mir genannt wird. Mehr will ich aber nicht verraten.“ *Alphabino* verabschiedet sich von mir mit einem herzlichen *Simsalabim* und schreitet stolz davon.

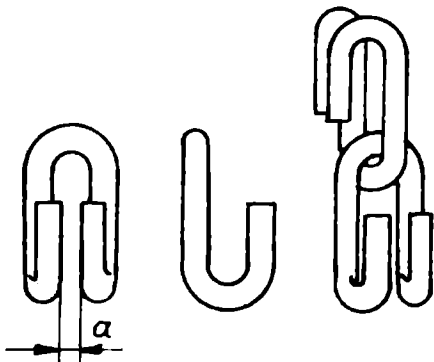
Nun frage ich euch, wie hat er das Zauberkunststück zustande gebracht?

Nachrichtening. Bottke, Lölpin

Die Teufelsklammern

Mit ein wenig Geschick könnt ihr euch aus 3 bis 5 mm starkem Draht leicht folgendes Spiel herstellen!

Die Abbildung zeigt die Klammern von vorn, von der Seite und zwei, die zusammengehängt wurden.



Der Abstand a zwischen den Drahtenden soll weniger betragen als der Durchmesser d des Drahtes. Wir empfehlen $a = \frac{d}{2}$.

Das Problem besteht nun darin, zwei solche Klammern zusammenzuhängen und wieder voneinander zu trennen. Da $a < d$ ist, können die Klammern nicht ohne weiteres vereinigt bzw. getrennt werden. Die Lösung des Problems soll ohne jede Anwendung von Gewalt, also ohne Auseinanderbiegen der Drahtenden, lediglich durch geeignete Drehungen und Wendungen erfolgen!

Wir wünschen euch viel Erfolg bei dieser Knochelei und stellen anschließend folgende Aufgabe:

Wie klein kann man bei gegebenem Durchmesser d den Abstand a wählen, damit sich die Klammern gerade noch vereinigen bzw. trennen lassen?

Diplomlehrer für Mathematik U. Sonnemann, Grabow



W. P. Rosanzew, Moskau

„Ich liebe Dich!“

Was passiert, wenn ein Mann seiner Frau, die Mathematiklehrerin ist, sagt: „Ich liebe Dich!“?

Die Frau geht zum Gericht und klagt auf Scheidung wegen Untreue. Er hätte nämlich sagen müssen: „Ich liebe Dich und nur Dich!“

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

alpha – sehr heiter

Aus den Silben

be – ber – chen – e – flucht – ga – gel – grund –
haupt – ke – kel – klas – kung – li – man – mes –
ne – ni – o – on – pe – ra – re – reich – rest – riß –
schlag – schräg – se – ser – strek – tel – ti – tiv – ü –
wert – win

sind 11 mathematische Begriffe zu bilden, deren Bedeutung im folgenden scherzhaft umschrieben ist. Reiht man die jeweils zweiten Buchstaben dieser Wörter (bei 1. und 9. die ersten Buchstaben) aneinander, wobei „ch“ als ein Buchstabe gilt, so erhält man *ein Teilgebiet der Mathematik*, das sich mit einer Bewegung befaßt.

1. gymnastische Übung
2. schiefe Trennungslinie
3. ungerades Schneidewerkzeug
4. chirurgischer Eingriff an einer Harke
5. Salto
6. Umkehrbild
7. Rückzugsweg
8. zurückgebliebene Schülergruppe
9. Kopfpfeil
10. Gebiet des Meeresbodens
11. Bekleidung eines Sportgeräts

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Hast Du genug Phantasie?

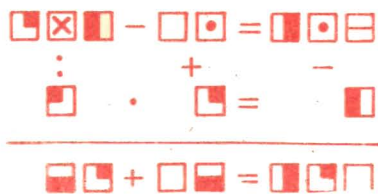
Versuche, in den Symbolen eine Gesetzmäßigkeit zu finden und die Reihe entsprechend fortzusetzen!



Aus: „Wurzel“ 1/74, Jena

Kryptarithmetik

Setze die Ziffern 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7 und 8 so ein, daß eine sinnvolle Aufgabe entsteht. (Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern.)

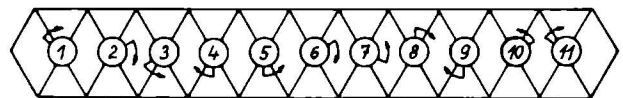


Sabine Wiczorek, OS Wörmnitz (Kl. 9)

Wabenrätsel

1. Größenangabe, die Flächen wie Quadraten, Kreisen usw. zugeordnet ist
2. bestimmte Menge von Punkten, die auf einer Geraden liegen

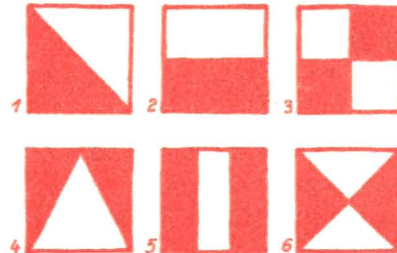
3. griechischer Mathematiker, nach dem ein Satz über rechte Winkel benannt ist
4. einer der Wahrheitswerte einer Aussage
5. eine der Beziehungen, die zwischen zwei Zahlen oder Größenangaben bestehen kann
6. Name für eine natürliche Zahl in bezug auf eine zweite, falls die zweite ein Vielfaches der ersten ist
7. bestimmter Teil der Oberfläche gewisser Körper
8. spezieller Körper
9. kennzeichnende Eigenschaft einer der beiden Arten von Proportionalität
10. eine der beiden Zahlen, durch die ein Produkt bestimmt ist
11. Differenz zwischen geschätztem Wert und richtigem Wert



*Mathematikfachlehrer W. Träger,
Schloßberg-OS Döbeln*

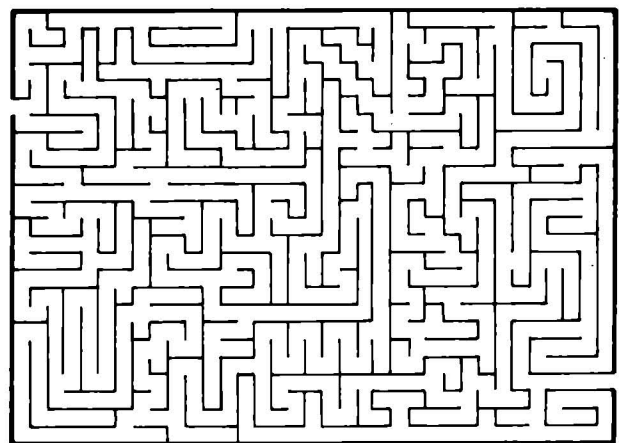
Logik

Welche der sechs Figuren gehört nicht in diese Gruppe?
Warum?



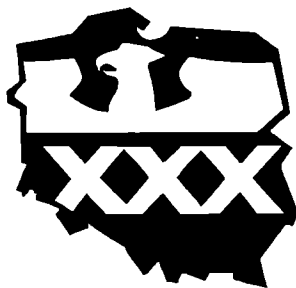
Aus: Kniffel/Knobel

Irrgarten



Aus: Füles, Budapest

30 Jahre VR Polen



Zu Ehren des 30. Jahrestages der Gründung der VR Polen laden wir unsere Leser zu einem **alpha-Sonderwettbewerb** ein. Das Polnische Informationszentrum Leipzig, mit dem die Redaktion *alpha* seit Jahren eng zusammenarbeitet, stellte eine große Zahl von Preisen, insbesondere Bücher, zur Verfügung. Wir wünschen allen Teilnehmern viel Freude und Erfolg!

Wettbewerb für Schüler der Klassen 5, 6 und 7

Auf dieser Seite haben wir Zahlen und Fakten aus dem Statistischen Jahrbuch der VR Polen (1973) zusammengestellt.

Ihr sollt Euch ein Problem (oder mehrere Probleme) herausgreifen, eine Aufgabe dazu formulieren und die Lösung dazu erarbeiten. (Ihr könnt Euch auch am Wettbewerb der Klassen 8 bis 12 beteiligen.)

Wettbewerb für Schüler der Klassen 8 bis 12 sowie Erwachsene

Sucht aus Zeitungen, Zeitschriften und Büchern Material heraus, und stellt Aufgaben (dazu Lösungen) zusammen, welche

- den Aufbau der VR Polen in den letzten 30 Jahren oder
- die Leistungen der polnischen Werktätigen in den letzten Jahren auf wirtschaftlichem, industriellem, landwirtschaftlichem Gebiet oder
- die Wechselbeziehungen zwischen der VR Polen und der DDR darstellt.

Zu jeder Aufgabe ist der Lösungsweg mit einzusenden.

Beispiel: Bei Zawiercie in der Wojewodschaft Katowice entsteht eine Baumwollspinnerei, deren Baukosten von der DDR und der Volksrepublik Polen zu gleichen Teilen getragen werden. Diese Baumwollspinnerei, die den Namen „Freundschaft - Przyjazn“ trägt, ist mit einer Jahresproduktion von 12 500 Tonnen Baumwollgarn projektiert. Jedes der beiden Länder wird die Hälfte der Produktion erhalten. Wieviel Blusen mit langen Ärmeln lassen sich aus dem Jahresanteil der DDR an Baumwollgarn in jedem Monat herstellen, wenn die Auslieferung kontinuierlich erfolgt, wenn für eine Bluse 1,40 m Stoff von 130 cm Breite benötigt wird und wenn aus einer Tonne Baumwollgarn 2 400 m² Baumwollgewebe hergestellt werden können?

Die Namen der Preisträger und vorbildlichen Aufgaben werden in Heft 2/75 veröffentlicht.

Alle Einsendungen sind unter dem Kennwort : 30 Jahre VR Polen einzusenden unter Angabe von Name, Vorname, Schule, Klasse, Privatanschrift an
Redaktion alpha
7027 Leipzig
PSF 14

Letzter Einsendetermin : 30. Januar 1975

Die VR Polen liegt im Zentrum des europäischen Kontinents.

Fläche	312 700 km ²
Bevölkerung	33,2 Mill.
davon Frauen	17,1 Mill.
Anteil der Stadtbevölkerung	53 %
Anteil der von der Landwirtschaft lebenden Bevölkerung	30 %
Länge der Grenzen	3 538 km
Länge der Grenze zur DDR	1 912 km
höchster Berg (Karpaten)	Rysy 2 499 m

Hinsichtlich der Bevölkerungszahl nimmt Polen den 7. Platz in Europa, den 21. Platz in der Welt ein. Die Bevölkerungsdichte pro km² ist größer als der Durchschnitt in Europa.

Die Zahl der Städte mit mehr als 100 000 Einwohnern beträgt 24.

Die größten Städte sind (der Reihenfolge nach):

Warszawa	1 355 900	Poznań	485 800
Łódź	774 200	Gdańsk	378 300
Kraków	610 000	Szczecin	350 100
Wrocław	541 600	Katowice	308 700

Das durchschnittliche Lebensalter beträgt für Männer 66,8 Jahre und für Frauen 72,8 Jahre.

Polen ist ein verhältnismäßig junges Volk:

- 2,6 Mill. Kinder im Alter bis zu 4 Jahren,
- 7,9 Mill. Jugendliche im Alter von 5 bis 17 Jahre,
- 18,3 Mill. Einwohner im Arbeitsalter (d. h. Frauen im Alter von 18 bis 59 und Männer im Alter von 18 bis 64 Jahren)
- 3,6 Mill. Einwohner im Rentenalter.

Das Polen des Jahres 1971 gehört hinsichtlich des Produktionsvolumens bei den wichtigsten Industrieerzeugnissen zu den ersten 15 Ländern der Welt. Das wird durch folgende Angaben klar:

	Produktion			Platz	
	1965	1970	1972	Europa	Welt
Elektroenergie in Mrd. KWh	43,8	64,5	76,5	7	11
Steinkohle in Mio t	119	140	151	3	5
Rohstahl in Mio t	9,1	11,8	13,5	7	10
Zink- und Bleierze in Mio t	2,7	3,6	4,0	2	8
Schwefelsäure (100 %) in Mio t	1,1	1,9	2,6	7	10
Zement in Mio t	9,6	12,2	14,0	7	10
Baumwollgarn u. ä. in 1 000 t	187	208	212	4 (1969)	9 (1969)
Wollgarn u. ä. in 1 000 t	65,5	84,4	87,7	6 (1969)	8 (1969)
Kunststoffe in Mio Zl	-	9,3	13,0	9	12
Zellulose	351	470	534	8	12
Rohzucker in Mio t	1,4	1,4	1,7	4	13
Stickstoffdünger in 1 000 t	394	1 030	1 147	5	8
Weizen in Mio t	2,4	4,6	5,2	8	16
Roggen in Mio t	7,7	5,4	8,2	2	2
Hafer in Mio t	2,5	3,2	3,2	3	4
Kartoffeln in Mio t	42,7	50,3	48,7	2	2
Zuckerrüben in Mio t	12,3	12,7	14,3	3	4
Raps in 1 000 t	504	566	427	1	4
Fleisch in 1 000 t	2 015	2 207	2 477	5	10
Milch in Mrd. l	12,9	14,5	15,3	4	6
Eier in Mrd. St.	6,3	6,9	7,5	7	11

Lösungen



XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade

5. Wegen $|x| = |-x|$ und $|y| = |-y|$ ist die zur Veranschaulichung gesuchte Punktmenge achsensymmetrisch bezüglich beider Koordinatenachsen. Daher nehmen wir zunächst $x \geq 0$ und $y \geq 0$ an. Für diese Punkte hat die gegebene Gleichung die Form

$$|x + |y - 3| - 3| = 1.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$x + |y - 3| - 3 = 1 \quad (1)$$

oder $x + |y - 3| - 3 = -1$ gilt. (2)

Gleichung (1) gilt genau dann, wenn

$$x + y - 3 - 3 = 1 \quad (1.1)$$

oder $x - (y - 3) - 3 = 1$ ist. (1.2)

Gleichung (2) gilt genau dann, wenn

$$x + y - 3 - 3 = -1 \quad (2.1)$$

oder $x - (y - 3) - 3 = -1$ ist. (2.2)

Von allen Punkten (x, y) mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$ erfüllen genau diejenigen die Bedingung (1.1), für die $y = -x + 7$ und $0 \leq x \leq 4$ ist.

Die Bedingung (1.2) wird erfüllt von allen Punkten (x, y) mit

$$y = x - 1 \text{ und } 1 \leq x \leq 4.$$

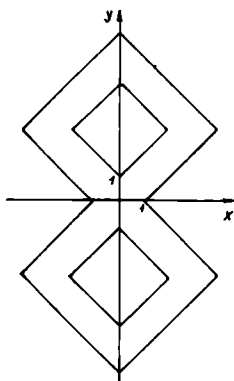
Die Bedingung (2.1) erfüllt genau die Punkte (x, y) , für die

$$y = -x + 5 \text{ und } 0 = x = 2 \text{ ist.}$$

Schließlich wird die Bedingung (2.2) erfüllt von allen Punkten (x, y) mit

$$y = x + 1 \text{ und } 0 \leq x \leq 2.$$

Die Abbildung stellt für jede der durch (1.1), (1.2), (2.1) und (2.2) definierten Funktionen den Graphen in den angegebenen Intervallen dar. Die Vereinigungsmenge M dieser Graphen spiegeln wir zunächst an der x -Achse und erhalten die Menge M' . Spiegelung



von $M \cup M'$ an der y -Achse liefert M'' . Die Menge $M \cup M' \cup M''$ ist die gesuchte Veranschaulichung.

Bemerkung: Alle 99 in Klassenstufe 10 gestarteten Schüler bearbeiteten diese Aufgabe und nur 2 konnten keinen Punkt erreichen. 34 Schüler erreichten die volle Punktzahl, die Aufgabe war also relativ leicht. Dennoch traten einige Unkorrektheiten häufig auf:

1. *Unvollständige Falluntersuchung:* Bei der Untersuchung von $|x|$ wird $x > 0$ und $x < 0$ angenommen, während $x = 0$ nicht betrachtet wird. Dadurch gehen in der gesuchten Veranschaulichung die Punkte auf der y -Achse verloren.

2. *Definitionsbereich.* Zu den in (1.1), (1.2), (1.3) und (1.4) gefundenen linearen Funktionen werden die Graphen gezeichnet, ohne dabei auf die einschränkenden Bedingungen für den Definitionsbereich zu achten.

Mitunter treten auch andere als die oben angegebenen Intervalle als Definitionsbereiche auf. Eine Ursache dafür ist darin zu suchen, daß die Symmetrie des absoluten Betrages nicht erkannt wurde. Dann konnte keine Spiegelung an den Achsen durchgeführt werden. Statt dessen mußten die 4 Fälle $x \geq 0, y \geq 0$; $x \geq 0, y \leq 0$; $x \leq 0, y \geq 0$; $x \leq 0, y \leq 0$

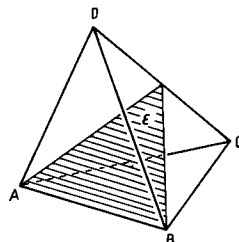
behandelt werden. Das führte insgesamt auf 16 lineare Funktionen. Diese Fülle gereichte öfters der Übersichtlichkeit zum Nachteil.

Ergebnisspiegel

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Schüler	2	2	8	8	13	18	14	34

Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische Hochschule
Dr. Theodor Neubauer, Erfurt, Mühlhausen

6. Es sei ϵ die mittelsenkrechte Ebene von CD . (vgl. die Abb.)



Diese Ebene besteht aus allen Punkten P , die von C und von D gleich weit entfernt sind, für die also $\overline{PC} = \overline{PD}$ gilt. Wegen $\overline{AC} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{BD}$ gehören demnach A und B zu ϵ . Also ist ϵ diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.

Als regelmäßiges Tetraeder hat $ABCD$ einen Umkugelmittelpunkt S mit $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$; dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d. h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit Verbindungs-

ebenen von je einer Tetraederkante und S überein. Jede der an S angrenzenden Seitenflächen der Pyramide $ABCS$ liegt somit in einer der Schnittebenen. Entsprechendes gilt für die Pyramiden $ABDS, ACDS, BCDS$. Die gesuchte Zerlegung von $ABCD$ kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Pyramiden $ABCS, ACDS, ABDS, BCDS$ (in die man $ABCD$ zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

Zum weiteren Zerlegen von $ABCS$ geben genau diejenigen Schnittebenen Anlaß, die (außer durch S) durch innere Punkte von $ABCS$ gehen. Das sind genau diejenigen, die durch D , eine der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen. Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in 6 flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen. Demnach wird die Pyramide $ABCS$ in genau 6 volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu $ABCS$ kongruenten Pyramiden $ABDS, ACDS, BCDS$. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Teilkörper. Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_k = \frac{1}{24} V_T$, wobei V_T das Volumen

$$\text{des Tetraeders } ABCD \text{ ist. Wegen } V_T = \frac{a^3}{12} \sqrt{2} \text{ gilt also } V_k = \frac{a^3}{288} \sqrt{2}.$$

Bemerkungen: Ein entscheidender Schritt bei der Lösung der Aufgabe, der häufig Ursache für unvollständige Beweise und damit für Punktabzüge war, ist der Nachweis, daß sich alle Schnittebenen in einem Punkt schneiden und somit kein „in der Mitte liegender Hohlraum“ entsteht. Dieser Nachweis ist hier geführt mit Hilfe des Umkugelmittelpunktes. Viele Schüler bewiesen den genannten Sachverhalt, indem sie zeigten, daß sich je zwei der Schnittebenen in einer Höhe des Tetraeders schneiden und daß somit der Höhenschnittpunkt (der hier natürlich gleich dem Umkugelmittelpunkt ist) in jeder Schnittebene liegt.

Einige Schüler versuchten die Aufgabe zu lösen, indem sie die Schnittebenen gedanklich nacheinander mit dem Tetraeder zum Schnitt brachten. Sie betrachteten zunächst die drei Schnittebenen, die D enthalten. Diese zerlegen das Tetraeder in sechs kongruente Teilkörper. Jede weitere Schnittebene, z. B. die, die durch A und B verläuft, zerlegt diese Teilkörper in zwei neue Teile. Bei der Einführung der letzten beiden Schnittebenen verloren die meisten dieser Schüler jedoch die Übersicht über die entstehenden Teile und gelangten zu falschen Anzahlen. Wesentlich andere Lösungsversuche traten nicht auf.

Erreichte Punktzahlen:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Schüler	15	6	12	6	11	11	14	23

Keinerlei Lösungsversuche: 2

Dr. Uwe Küchler,
Technische Universität, Dresden

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. Mögling, PH Erfurt

▲ 1228 ▲ Elementargeometrischer Beweis: Die Umkreise der Dreiecke SAD und $TC D$ schneiden außer in D in einem weiteren Punkt P (Bild 2). (Es ist stets $P \neq D$, denn $P = D$ führt zur Parallelität von SA und TC und damit zur Verletzung der Voraussetzung, wie etwa mit Hilfe einer zentralen Streckung gezeigt werden kann.) Der Beweis ist erbracht, wenn gezeigt wird, daß die Vierecke $SBCP$ und $TBAP$ Sehnenvierecke sind, d. h. wenn $\sphericalangle SPC + \beta = 2R$ bzw. $\sphericalangle TPA + \beta = 2R$ gilt. Berechnet wird zunächst der Winkel SPC .

$$\sphericalangle SPC = \sphericalangle SPD + \sphericalangle DPC$$

Nach dem Satz über Sehnenvierecke ist

$$\sphericalangle SPD = 2R - \sphericalangle SAD = \alpha,$$

und wegen des Peripheriewinkelsatzes und des Winkelsummensatzes für Dreiecke gilt

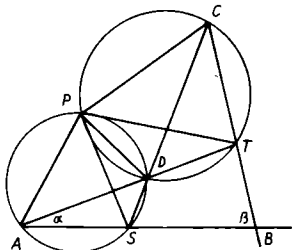
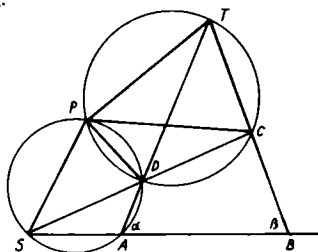
$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle DTC = 2R - \alpha - \beta.$$

Demnach ist

$$\sphericalangle SPC + \beta = \alpha + 2R - \alpha - \beta + \beta = 2R,$$

und damit ist Viereck $SBCP$ ein Sehnenviereck.

Für das Viereck $TBAP$ verläuft der Beweis analog.



Jetzt soll untersucht werden, ob der Sachverhalt auch für das nichtkonvexe Viereck $ABCD$ gilt, in dem $\sphericalangle ADC = \delta$ der überstumpfe Winkel sei (Bild 3).

P ist wiederum der zweite Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke SAD und $TC D$, und auch hier ist zu zeigen, daß die Vierecke $SBCP$ und $TBAP$ Sehnenvierecke sind.

Auch hier gilt

$$\sphericalangle SPC = \sphericalangle SPD + \sphericalangle DPC.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist

$$\sphericalangle SPD = \alpha,$$

und nach dem Satz über Sehnenvierecke und dem Winkelsummensatz für Dreiecke gilt

$$\sphericalangle DPC = 2R - \sphericalangle DTC = 2R - \alpha - \beta.$$

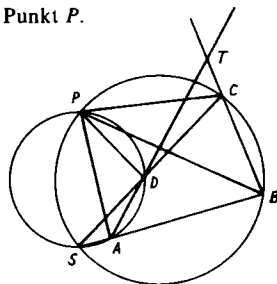
Somit ist

$$\sphericalangle SPC + \beta = \alpha + 2R - \alpha - \beta + \beta = 2R,$$

und damit ist das Viereck $SBCP$ ein Sehnenviereck.

Analog beweist man, daß auch das Viereck $TBAP$ ein Sehnenviereck ist. Damit schneiden

sich auch in diesem Fall die vier Umkreise in einem Punkt P .



Ein anderer Beweis kann unter Verwendung von ähnlichen Dreiecken von Schülern ab Klasse 9 geführt werden (Bild 4):

Die Umkreise der Dreiecke SAD und SBC schneiden einander außer in S im Punkt P . Dann sind die Dreiecke ABP und CDP gleichsinnig ähnlich, denn es ist nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle SBP = \sphericalangle SCP \text{ und } \sphericalangle SAP = \sphericalangle SDP,$$

und damit sind auch die Winkel BAP und CDP als Nebenwinkel der beiden letzten Winkel gleich.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABP und CDP folgt, daß auch die Dreiecke ADP und BCP ähnlich sind, denn es gilt

$$\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PB} : \overline{PC} \text{ sowie nach dem Peripheriewinkelsatz}$$

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = \sphericalangle BPC.$$

Die Dreiecke ADP und BCP stimmen demnach im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind daher ähnlich. Hieraus folgt, daß $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBC$ bzw. $\sphericalangle PAT = \sphericalangle PBT$ ist, d. h. P, A, B und T liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis. Weiterhin folgt $\sphericalangle ADP = \sphericalangle BCP$

und demnach gilt auch für die Nebenwinkel

$$\sphericalangle TDP = \sphericalangle TCP.$$

Damit liegen auch die Punkte P, D, C, T nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis, und die Behauptung ist bewiesen. Durch den letzten Beweis kann der auf den ersten Anblick merkwürdig erscheinende Sachverhalt, der durch die Aufgabe gegeben wurde, mit Hilfe von Transformationen näher erklärt werden.

P ist nämlich Fixpunkt sowohl derjenigen gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformation (Drehstreckung), durch die A auf D und B auf C abgebildet wird, als auch derjenigen Drehstreckung, durch die A auf B und D auf C abgebildet wird. Eine Drehstreckung ist bekanntlich eindeutig durch die Vorgabe zweier Originalpunkte A und B und der ihnen zugeordneten Bildpunkte D und C gegeben. Ihren Fixpunkt P erhält man nach den vorangegangenen Überlegungen als Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke SAD und SBC . Die durch A und D als Originalpunkte und B und C als zugeordnete Bildpunkte gegebene Drehstreckung besitzt damit denselben Fixpunkt P , der sich in diesem Fall als Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke ABT und DCT ergibt.

Die durch die Vorgabe eines Vierecks $ABCD$ auf die beschriebene Weise einander zugeordneten Drehstreckungen besitzen demnach den gleichen Fixpunkt.

Lösung der Aufgabe von stud. math. W. Burmeister

▲ 1075 ▲ Wir nehmen zuerst an, daß uns nur die Seitenlängen a und b des Parallelogramms gegeben sind und überlegen, zwischen welchen größten und kleinsten Werten die Längen e und f der Diagonalen liegen können. Die Diagonale AC bildet mit den Seiten AB und BC des Parallelogramms ein Dreieck, daher gilt nach der Dreiecksungleichung

$$a - b < e < a + b,$$

d. h. die Länge der Diagonalen AC ist stets zwischen $a - b$ und $a + b$ eingeschlossen. Dieselbe Ungleichung gilt für die Diagonale f , und daher haben wir die Ungleichung

$$(a - b)^2 < ef < (a + b)^2.$$

Man überlegt sich leicht, daß aus dieser Ungleichung nichts über die Gültigkeit der Ausgangsungleichung $(a : b) (a - b) < ef$ gefolgert werden kann. Wir versuchen daher, die Dreiecksungleichung auf andere Weise anzuwenden. Dazu nehmen wir an, daß uns die Längen der Diagonalen e und f gegeben sind. Die Diagonalen mögen sich im Punkt S schneiden. Nach einem bekannten Satz werden durch den Punkt S beide Diagonalen halbiert, es gilt also

$$\overline{AS} = \overline{SC} = \frac{e}{2}, \quad \overline{DS} = \overline{SB} = \frac{f}{2}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung können wir nun Schranken für die Seitenlängen a und b ableiten. Nach der Dreiecksungleichung im Dreieck ABC gilt

$$\frac{|e - f|}{2} < a < \frac{e + f}{2}, \quad (1)$$

ebenso gilt im Dreieck ASD

$$\frac{|e - f|}{2} < b < \frac{e + f}{2}. \quad (2)$$

Wir haben zu zeigen, daß gilt:

$$(a \cdot b) (a - b) \geq a^2 - b^2 < ef.$$

Für a^2 gilt wegen (1) $a^2 < \frac{(e - f)^2}{4}$,

analog ist nach (2)

$$b^2 > \frac{(e - f)^2}{4}; \quad -b^2 < \frac{(e - f)^2}{4}.$$

Durch Addition der entsprechenden Ungleichungen ergibt sich nun

$$a^2 - b^2 < \frac{(e + f)^2}{4} - \frac{(e - f)^2}{4} = \frac{e^2 + 2ef + f^2 - e^2 + 2ef - f^2}{4} = ef.$$

Das ist die zu beweisende Ungleichung.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. E. Trost, Zürich

▲ 810 ▲ Wir betrachten eine feste Parabel mit dem Brennpunkt F und der Leitlinie l . C sei der Schnittpunkt des Durchmessers durch B mit l . Nach einer bekannten Parabeleigenschaft liegt S auf l . $SCBF$ ist ein Sehn-

viereck, dessen Umkreis den Durchmesser $t = SB$ hat. Es sei $\alpha = \angle SCF = \angle CFS$. Aus dem Sinussatz folgt jetzt $t = FC/\sin 2\alpha$. Ferner ist $FC = p/\sin \alpha$. Wir haben also das Maximum von $y = \sin \alpha \sin 2\alpha$ zu bestimmen.

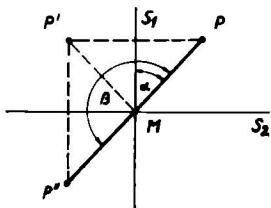
Der in der Aufgabe erwähnte Zusammenhang mit einem kubischen Polynom ergibt sich durch Betrachtung eines dem Einheitskreis eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks. Es sei h die Höhe, a eine Kathete, α der Gegenwinkel und x der zugehörige Hypotenusenabschnitt.

Man hat $a = 2 \sin \alpha$, $h = \sin 2\alpha$, $a^2 = 2x$, $h^2 = x(2-x)$. Hieraus folgt $2y^2 = x^2(2-x)$. Das Maximum wird für $x = 4/3$ erreicht. Eine einfache Rechnung ergibt jetzt $l_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{4} p$.

Bemerkung: Die analoge Aufgabe für die Ellipse, bei der es neben der kleinsten auch eine größte Distanz gibt, wurde früher behandelt.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. Matzke, Weimar

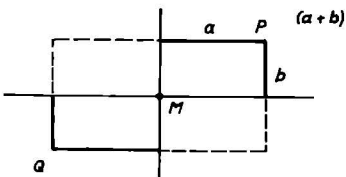
▲ 929 ▲ a) Die Kurve möge zwei orthogonale Symmetrieachsen besitzen. Sie seien S_1 und S_2 . Spiegelt man einen Punkt P der Kurve an S_1 , so erhält man einen Punkt P' der Kurve, wobei $MP = MP'$ ist (wegen der Invarianz der Streckenlängen bei Spiegelung).



Spiegelt man P' an S_2 , so erhält man einen Punkt P'' der Kurve, wobei $MP' = MP'' = MP$ ist. Der Winkel zwischen MP und S_1 sei α .

Dann ist der Winkel zwischen MP und MP'' $\beta = 2\alpha + 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ$.

Also müssen MP und MP'' auf einer Geraden liegen und gleich lang sein. Daher folgt also aus dem Vorhandensein der beiden orthogonalen Symmetrieachsen, daß die Kurve Mittelpunktskurve ist.



b) Die Eigenschaft „Mittelpunktskurve sein“ ist äquivalent mit der Eigenschaft, „Bei Drehung um 180° in sich selbst überzugehen“. Man kann nun leicht Kurven angeben, die bei Drehung um 180° in sich selbst übergehen und keine Symmetrieachse besitzen. Zum Beispiel läßt man bei einem Rechteck je zwei „halbe Seiten“ so weg, wie es die

Abbildung zeigt, so ist die übriggebliebene Figur eine Mittelpunktskurve, da sie offensichtlich bei Drehung um 180° in sich selbst geht. Diese Kurve besitzt nicht zwei orthogonale Symmetrieachsen, die sich in M schneiden.

Begründung: Beide Symmetrieachsen können nicht so verlaufen, daß sie keinen Schnittpunkt mit der Kurve haben, da dann der Winkel zwischen beiden Symmetrieachsen kleiner als 90° sein müßte. Wenn aber eine Symmetrieachse die Kurve schneidet, muß sie sie senkrecht schneiden.

Sollte die Gerade durch P und Q Symmetrieachse sein, müßte sie die Winkel bei diesen Punkten halbieren. Das ist jedoch nicht der Fall. Außer den eingezeichneten Geraden, die keine Symmetrieachsen sind, gibt es jedoch keine Gerade durch M , die die Kurve senkrecht schneidet. Daher besitzt die Kurve keine zwei orthogonalen Symmetrieachsen.

Gesamtergebnis: Wenn eine Kurve zwei orthogonale Symmetrieachsen besitzt, ist sie Mittelpunktskurve. M ist daher der Schnittpunkt der Symmetrieachsen. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da es Mittelpunktskurven gibt, die nicht zwei sich in M schneidende orthogonale Symmetrieachsen besitzen.

Blaise Pascal – Fortsetzung

Im Zustand der Ekstase schreibt *Pascal* auf einen Fetzen Papier die Gedanken nieder, die in seinem Kopf herumgehen. Später überträgt er diese Aufzeichnungen auf Pergament; nach seinem Tode hat man diese und andere in sein Wams eingnäht entdeckt. Dieses Ereignis heißt die „zweite Bekehrung“ *Pascals*.

Von diesem Tag an fühlt *Pascal* nach den Worten *Jaquelines* „eine gewaltige Verachtung der Welt und eine fast unüberwindliche Abwendung von allen zu ihr gehörenden Dingen“. Er hört mit dem Studium auf, läßt sich von Anfang 1655 an im Kloster Port-Royal nieder und führt freiwillig ein



Leben wie ein Mönch. Zu dieser Zeit schreibt *Pascal* seine „Lettres à un Provincial“, eines der größten Erzeugnisse der französischen Literatur. Die „Briefe“ enthielten eine Kritik der Jesuiten. Sie wurden in einzelnen Hefen – „Briefen“ – vom 23. Januar 1656 an bis zum 23. März 1657 herausgegeben (insgesamt 18 Briefe). Der Autor – „ein Freund in der Provinz“ – wurde *Louis de Montalte* genannt. Das Wort „Berg“ in diesem Pseudonym (*la montagne*) hängt sicherlich mit der Erinnerung an die Versuche auf dem Puy de Dôme zusammen.

7. Amos Dettonville

„Ich habe viel Zeit mit dem Studium abstrakter Wissenschaften zugebracht; die Mängel der durch sie vermittelten Kenntnisse haben mir die Lust an ihnen verdorben. Als ich mit dem Studium des Menschen begann, erkannte ich, daß ihm diese Abstraktionen fremd sind und daß ich, indem ich mich in sie vertiefte, noch mehr verwirrt wurde als andere, die sie nicht kennen“. Diese Worte *Pascals* charakterisieren seine Stimmung in den letzten Jahren seines Lebens. Und dabei hat er sich anderthalb Jahre von ihnen mit Mathematik beschäftigt ... Dies begann im Frühjahr 1658 zu einer Nacht, als sich *Pascal* während eines schrecklich tobenden Zahnschmerzes an eine ungelöste Aufgabe von *Mersenne* über die Zykloide erinnerte. Er bemerkt, daß er durch das angespannte Nachdenken von dem Schmerz abgelenkt worden ist. Gegen Morgen hatte er bereits eine ganze Reihe von Resultaten über die Zykloide bewiesen und ... war von dem Zahnschmerz geheilt. Anfangs sieht sich *Pascal* von der Sünde getroffen an und ist nicht bereit, die erhaltenen Ergebnisse aufzuschreiben. Später änderte er unter dem Einfluß des *Duc de Roannez* seine Entscheidung ab; im Verlauf von acht Tagen „tat er nichts anderes als schreiben, solange die Hand schreiben konnte“ (*Gilberte Périer*). Und danach im Juni 1658 veranstaltete *Pascal*, wie dies damals häufig geschah, ein Preisausschreiben, in dem er den größten Mathematikern sechs Aufgaben über die Zykloide zur Lösung vorschlug. Die größten Erfolge erzielten *Huygens* (1629 bis 1695), der vier Aufgaben löste, und *Wallis* (1616 bis 1703), von dem mit gewissen Lücken zwei Aufgaben gelöst wurden. Als beste Arbeit wurde aber die des unbekanntenen *Amos Dettonville* anerkannt. Wir bemerken, daß „Amos Dettonville“ aus denselben Buchstaben besteht wie „Louis de Montalte“. So wurde ein neues Pseudonym *Pascals* erdacht. Mit dem Preis von 60 Pistolen wurden die Werke von *Dettonville* herausgegeben.

Nach Mitte 1653 kehrte *Pascal* nicht mehr zur Physik oder zur Mathematik zurück. Er verbrachte die letzten Jahre seines Lebens

mit dem Versuch, den höchsten Kardinalfragen des menschlichen Lebens auf den Grund zu gehen. An der Titanenarbeit zerbrach *Pascal*. Er starb am 19. August 1662; so blieb das Hauptbuch seines Lebens ungeschrieben. Die verbliebenen Materialien wurden posthum unter der Bezeichnung „Pensées“ (Gedanken) herausgegeben.

S. G. Gindikin

Lösungen zu alpha-heiter 6/74

Mathemagisches

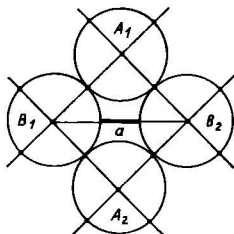
Die Lösung ist einfach. Betrachtet die folgende Tabelle!

Zahl, die der Zuschauer nennt	Quersumme der Zahl	Genannte Zahl	Quersumme
11	2	9	
12	3	9	
13	4	9	
...			
19	10	9	

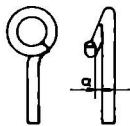
Aus der Tabelle und dem Text der Aufgabe können wir logisch schlußfolgern, daß Alpha-bino schon vor dem Zaubern die zehnte Karte von oben kannte. Er zählt dreizehn Karten einzeln übereinander zu einem Päckchen auf den Tisch. In diesem Päckchen lag die gemerkte Karte an vierter Stelle von oben. Diese vierte Karte erhielt ich.

Die Teufelsklammern

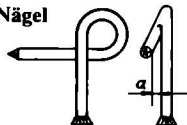
Für alle, die Freude an den *Teufelsklammern* gefunden haben, geben wir noch zwei weitere interessante Spiele mit gleicher Problemstellung an. Als Voraussetzung gilt wieder $a < d$.



Die Hexenschlüssel



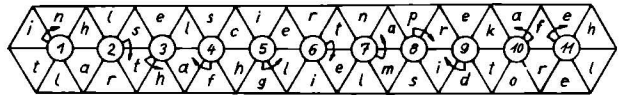
Die verflixten Nägel



Um die Teufelsklammern vereinigen oder trennen zu können, müssen die Drahtenden der Klammer *A* und der Klammer *B* folgende Lage zueinander haben. In dem rechtwinkligen Dreieck $A_1B_1B_2$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 + A_1B_2^2 &= B_1B_2^2 \\ (2r)^2 + (2r)^2 &= (2r+a)^2 \\ 4r^2 + 4r^2 &= (2r+a)^2 \\ 8r^2 &= (2r+a)^2 \\ 2r \cdot 2 &= 2r+a \end{aligned}$$

Wabenrätzel



$$\begin{aligned} a &= 2r \cdot \sqrt{2} - 2r \\ a &= 2r \cdot (\sqrt{2} - 1) \\ a &= d \cdot (\sqrt{2} - 1) \\ a &\approx d \cdot 0,414 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich als Bedingung $a > d \cdot (\sqrt{2} - 1)$.

alpha - sehr heiter

1. Streckung, 2. Schrägriß, 3. Winkelmesser,
 4. Rechenoperation, 5. Überschlag,
 6. Negativ, 7. Fluchtlinie, 8. Restklasse,
 9. Hauptwert, 10. Grundbereich,
 11. Kegelmantel
- Schiebelehre

Hast Du genug Phantasie?

Es sind die Ziffern 1, 2, 3, ... spiegelbildlich gezeichnet und aneinandergestellt.

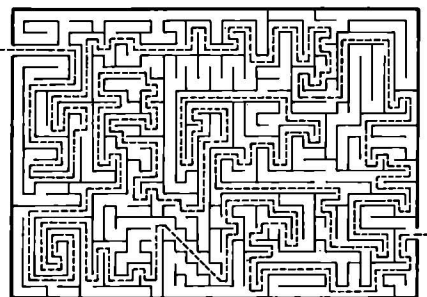
Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} 208 - 73 = 135 \\ : + - \\ 4 \cdot 2 \quad 8 \\ \hline 52 + 75 = 127 \end{array}$$

Logik

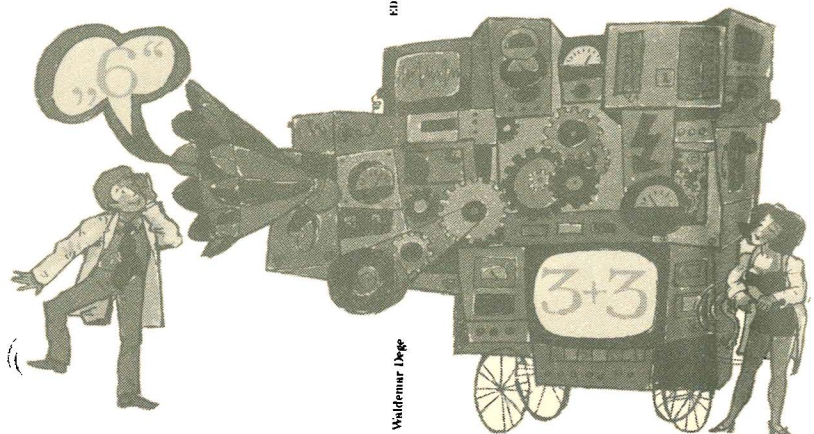
Figur 5 gehört nicht in diese Reihe. Sie wird zu Zweidrittel mit schwarz bedeckt, alle anderen Figuren je zur Hälfte.

Irrgarten



EDV MASCHINELLES RECHNEN

EDV MASCHINELLES RECHNEN



Ein Streifzug durch die Rechentechnik und Datenverarbeitung

240 S., farbige Zeichnungen Preis: 12.00 M Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin

Über die Bedeutung der elektronischen Datenverarbeitung muß an dieser Stelle nichts mehr gesagt werden. Vielleicht sind Ihnen sogar einige Grundrechenzüge der maschinellen Rechentechnik bekannt?

Auch *Waldemar Dege* beschreibt in dieser Einführung in die Datenverarbeitung die Wirkungsweise der Elektronenrechner und deren Einsatzmöglichkeiten. Aber dem Autor gelingt mehr. Er weiß sein Wissen mit Leben zu erfüllen. Er findet eine Fülle von interes-

santen Beispielen, die uns in Erstaunen setzen, und vermag selbst den strengeren mathematisch-logischen Stoff in unterhaltender Form darzustellen.

Bei der Lektüre dieses Buches erfassen Sie mühelos das Einmaleins mit der Eins, handeln mit der unsichtbaren Ware Information, rechnen ohne Zahlen, sezieren ein Elektronenhirn, unterhalten sich mit einer Maschine, durchschauen einen ganzen Betrieb, erleben Alltag und Sonntag der Rechenautomaten.

Waldemar Dege zeigt, daß sich der Mensch mit der Datenverarbeitung ein mächtiges und dringend erforderliches Mittel zur Bewältigung algorithmisch faßbarer geistiger Arbeit geschaffen hat.



M. Rehm

Zahl, Menge, Gleichung

ein kleines Lexikon für Schüler ab Kl. 4, 96 S., zahlreiche Illustrationen v. R. Schultz-Debowski, kartoniert, Preis: 5,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

T. Varga

Mathematische Logik für Anfänger

Band 2 – Prädikatenlogik 256 S. mit 209 Abb., Pappeinband mit Folie, Preis: 9,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Solodownikow

Lineare Ungleichungssysteme

99 S., 51 Abb., Broschur, Preis: 5,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

L. I. Golowina/I. M. Jaglow

Vollständige Induktion in der Geometrie

144 S. mit 82 Abb., Broschur, Preis: 6,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

J. Vysin

Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

(Übersetzung aus dem Tschechischen) 146 S., mit 41 Abb., kartoniert, Preis: 9,60 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Lohse/Ludwig

Statistik für Forschung und Beruf

Erfassung, Aufbereitung und Darstellung statistischer Daten 327 S., 185 z. T. farbige Bilder, 3 Selbstleistungskontrollen und mit einem 40seitigen Beiheft als Wissenspeicher, Halbgewebe, Preis: 22,00 M
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Autorenkollektiv

Lehrgang der Elementarmathematik

zur Vorbereitung auf die Fachschulreife 583 S. mit 523 Bildern und 856 Aufgaben mit Lösungen, Halbleinen, Preis 12,50 M
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

G. Maibaum

Wahrscheinlichkeitsrechnung

224 S., 48 Abb., Pappeinband, Preis: 7,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Stahl/Wenzel

Elektronische Datenverarbeitung für Arbeitsgemeinschaften

etwa 96 S., etwa 65 Abb., broschiert, Preis: 2,70 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Autorenkollektiv

Tabellenbuch Chemie

485 S., 2 Bilder, Halbleinen, Preis: 16,20 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

Autorenkollektiv

Kleine Enzyklopädie – Natur

780 S., 1 000 Textabb. und Tabellen, 96 Tafeln, davon 34 in Farbe, Festeinband, Preis: 12,00 M
VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig

Autorenkollektiv

Schiffe und Schifffahrt von morgen

240 S., 205 Bilder, 7 Tafeln, Halbleinen, Preis: 25,00 M
VEB Verlag Technik, Berlin

G. Trost

Die Modelleisenbahn

158 S., zahlreiche techn. Zeichnungen und Abb., zellophanisiert, Preis: 19,80 M
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

U. Becher

Auf kleinen Spuren

Die Anfänge der Modelleisenbahn 254 S., zahlreiche techn. Zeichnungen und Abb., zellophanisiert, Preis: 18,80 M
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

Autorenkollektiv

Zukunft im Blickfeld

Perspektiven – Hypothesen – Probleme 240 S., 4 Grafiken, Ganzgewebe, Preis: 9,80 M
Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin

H. Fiedler

Chemisches Rechnen

auf elementarer Grundlage in Form einer Aufgabensammlung 367 S., 27 Bilder, 400 Aufgaben mit entwickeltem Lösungsgang, 218 Aufgaben zum Selbststudium, Halbleinen, Preis: 13,00 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

I. Wisliceng

Grundbegriffe der Mathematik

II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen, mit einem historischen Anhang von H. Wussing 170 S., 19 Abb., Broschur, Preis: 10,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Heinz A. F. Schmidt

Flugzeuge aus aller Welt (IV)

196 S., zahlr. Abb. mit techn. Daten, Halbleinen, Preis: 12,00 M
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

H. Schnera

Keine Angst vor Langeweile

zahlreiche Spiele für die Freizeit 186 S., zahlr. Abb., Pappband mit Folie, Preis: 4,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Autorenkollektiv

Brockhaus ABC Chemie

VEB F. A. Brockhaus Verlag Leipzig 2 Bände Preis: 72,00 M

Arndt

Kleines Formellexikon

560 S., 270 Abb., Plasteinband, Preis: 8,20 M
VEB Verlag Technik Berlin

Klaus/Liebscher

Systeme – Informationen – Strategien

etwa 400 S., 84 Abb., 32 Tafeln, Leinen, Preis: etwa 22,50 M
VEB Verlag Technik Berlin

J. Churgin

Formeln – und was dann?

Gespräche eines Mathematikers mit Biologen und Nachrichtentechnikern, Ärzten und Technologen, Geologen und Ökonomen, mit Menschen verschiedener Fachgebiete und Interessen über die Mathematik und ihre Beziehungen zu anderen Wissenschaften. 251 S., zahlreiche Bilder Preis: 9,00 M
VEB Verlag Technik Berlin



GLÆDELIG JUL OG GODT NYTÅR

HYVÄÄ JOULUA JA ONNELLISTA UUTTA VUOTTA

A PEACEFUL AND PROSPEROUS NEW YEAR!

MEILLEURS VŒUX DE NOUVEL AN

PLEJ FELIĀN NOVJARON

- كل عام ولدت خير -

MIT DEN BESTEN NEUJAHRSWÜNSCHEN

FELIZ AÑO NUEVO

ŠĀSTLIVÝ NOVÝ ROK!

ŠĀSTNÝ NOVÝ ROK!

С НОВЫМ ГОДОМ!

GOD JUL OCH GOTT NYTT ÅR

FELICE ANNO NUOVO



Mit dieser Seite grüßen wir all unsere 54 000 Leser aus der DDR und unsere 4 000 ausländischen Leser.

Wir stellen die mathematischen Schülerzeitschriften der sozialistischen Länder vor, mit denen wir im Sinne einer umfassenden Integration seit Jahren zusammenarbeiten.

Allen ein erfolgreiches 1975!

