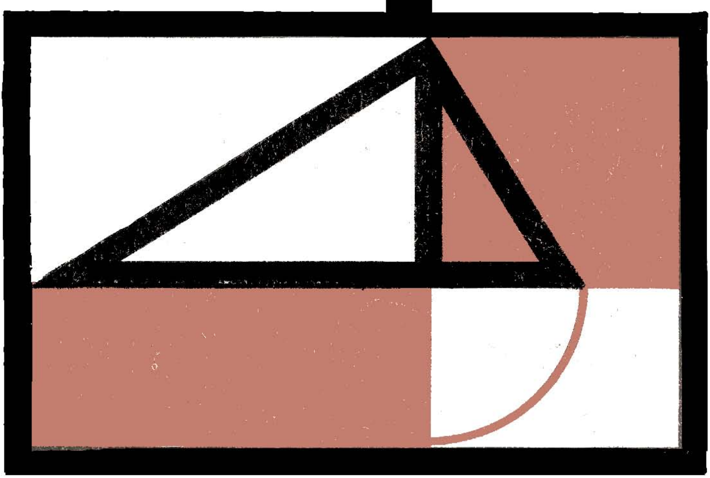
Mathematische Schüler-
zeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Heft 2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement halbjährlich (3 Hefte) 1,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post und den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH. 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: ADN (S. 33); Archiv Staatlich Math.-Phys. Salon, Dresden (S. 34); Archiv Karl-Sudhoff-Institut, Leipzig (S. 36); D. Harasim, Leipzig (S. 47); Vignetten: H.-J. Jordan (Leipzig)

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG. 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Redaktionsschluß: 11. 1. 1967

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Gottfried Wilhelm Leibniz als Mathematiker

Aus Anlaß des 250. Todestages

Am 14. November 1966 jährte sich zum 250. Male der Todestag von G. W. Leibniz. Die Wissenschaftsgeschichte nennt ihn den letzten wahrhaft umfassend gebildeten Gelehrten, der alle Wissenschaften seiner Zeit beherrschte. Heute ist die Spezialisierung der einzelnen Disziplinen so weit fortgeschritten, daß z. B. große Mathematiker selbst nur einen Teil des Gesamtgebäudes der Mathematik überblicken können.

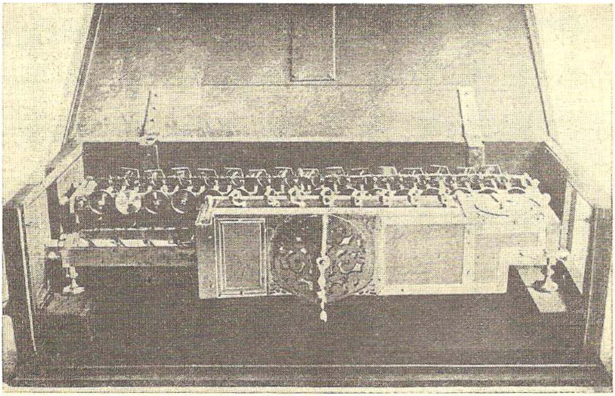
G. W. Leibniz wurde am 1. Juli 1646 als Sohn eines Professors der Rechte in Leipzig geboren. Der frühreife Knabe lernte ohne fremde Hilfe Latein und las bereits mit acht Jahren die römischen Klassiker aus der Bibliothek seines frühzeitig verstorbenen Vaters. Mit fünfzehn Jahren bezog er die Leipziger Universität. Er studierte Rechtswissenschaft und Philosophie, unterbrochen durch ein Semester Mathematik bei Erhard Weigel in Jena. Weigel kannte nicht die Probleme, an denen die führenden Mathematiker in England und Frankreich arbeiteten, und so konnte Leibniz bei ihm nicht viel lernen. Trotzdem erhielt in Jena der Traum seiner Kindheit neue Nahrung, mit Hilfe der Mathematik, insbesondere der Kombinatorik, neue Wahrheiten in allen Wissenschaften zu entdecken.

Kaum zwanzigjährig wollte er den Doktorgrad in Leipzig erwerben, wurde aber wegen seiner Jugend abgewiesen. Er ging deshalb nach Altdorf bei Nürnberg. Dort promovierte er mit so großem Erfolg, daß man ihm sofort eine Professur antrug. Er lehnte ab und trat wenig später in die Dienste des Fürsten Johann Phillipp von Schönborn. Eine entscheidende Wende in seinem Leben bedeutete der Auftrag des Fürsten, als Diplomat nach Paris zu gehen. Nun konnte er die deutschen Kleinstaaten, die auch wissenschaftlich durch den dreißigjährigen Krieg weit zurückgeworfen waren, endlich hinter sich lassen und sich in eines der damals größten wissenschaftlichen Zentren Europas begeben.

Als Leibniz 1672 nach Paris kommt, ist er seinen eigenen Worten nach ein Anfänger in der Mathematik. Er beschäftigt sich zunächst mit der Summation unendlicher Reihen, löst hier erneut ein von Christiaan Huygens bereits gelöstes Problem und wird mit diesem großen Mathematiker und Physiker näher bekannt.

Leibniz beschäftigte sich auch Zeit seines Lebens mit praktischen Dingen. So konstruierte er eine Rechenmaschine für alle vier Grundrechenoperationen. Er führte sie 1673 in einer Sitzung der Royal Society, der englischen königlichen Akademie (London) vor. Obwohl die Maschine unvollkommen war, wurde er durch Vermittlung H. Oldenburgs, des Sekretärs der Royal Society, als Mitglied aufgenommen.

Zwei große Problemkreise waren es in der Hauptsache, die die Größten der Mathematik des 17. Jahrhunderts beschäftigten, das Tangentenproblem und das Flächeninhaltsproblem. Das Tangentenproblem besteht darin, die Tangente an eine beliebig gestaltete glatte Kurve zu finden. Beim Flächeninhaltsproblem geht es darum, den Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Flächenstückes zu ermitteln. Hat man dafür eine allgemeine Methode, so ist man in der Lage, die Länge von Kurven, ferner Trägheitsmomente, Schwerpunkte und vieles andere mehr zu berechnen. Das Tangentenproblem ist die Grundaufgabe der Differentialrechnung, das Flächeninhaltsproblem die der Integralrechnung. Differentialrechnung, Reihenlehre, Integralrech-

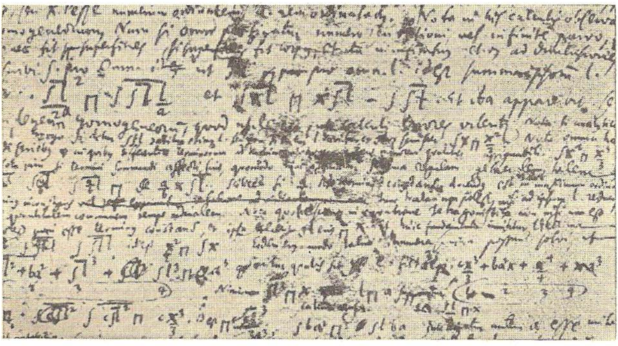


Die von Leibniz konstruierte Rechenmaschine

nung und alle damit zusammenhängenden Gebiete faßt man unter dem Begriff „Infinitesimalrechnung" zusammen.
Leibniz studierte die infinitesimalen Methoden seiner Vorgänger sehr gründlich, machte bald neue Entdeckungen, z. B. die unendliche Reihe für π, und gehörte bereits ein Jahr später zu den führenden Mathematikern Europas. Inzwischen arbeitete er auch an seiner Rechenmaschine weiter, die er durch die Erfindung der Staffelwalze 1674 zum Funktionieren brachte. Die Staffelwalze ist heute noch das Grundelement der mechanischen und elektromechanischen Rechenmaschinen.
Er erkannte die Notwendigkeit, für die infinitesimale Mathematik eine allgemeine Methode zu finden. Nur Genies konnten sich vor Leibniz mit Problemen des Infinitesimalen befassen. Es gab keine umfassende Methode, keinen allgemeinen Kalkül mit geeigneten Bezeichnungen, in dem man hätte nach festen Rechenregeln rechnen und Ergebnisse erzielen können. Jedes Einzelproblem mußte vielmehr immer wieder neu durchdacht werden, wozu nur wenige in der Lage waren.
Im Herbst 1675 gelingt ihm die Erfindung des „Calculus", und damit war jener lang gesuchte allgemeine Kalkül zur Behandlung des Tangenten- und des Flächeninhaltsproblems gefunden. Auch die von Barrow, dem Lehrer Newtons, entdeckte Beziehung zwischen diesen beiden Grundproblemen, die wir heute den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nennen, wurde in diesem neuen Kalkül erst richtig klar. Leibniz benutzte auf einem kleinen Zettel, der das Datum 29. Okt. 1675 trägt, das Differential- und das Integralzeichen zum ersten Male. Mit den Leibnizschen Bezeichnungen wurde die Infinitesimalrechnung von Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, dem Marquise de l'Hospital, Euler und vielen anderen Mathematikern des 18. und 19. Jahrhunderts weiter ausgebaut. Die Infinitesimalrechnung hat sich zu einem riesigen Lehrgebäude der modernen Analysis entwickelt. Mit Hilfe der Analysis können sehr viele Aufgaben der Naturwissenschaften gelöst werden. Ob elektrische Schwingungen, ob das Wachsen von Bäumen oder Bakterien, das Schwappen von Wasser in einem Eimer, die Bewegung eines Pendels, der Lauf der Gestirne, der Flug von Raketen, der Bau der

Atome; all das und noch viel mehr kann mit den exakten Methoden der Analysis berechnet und erforscht werden.
Es dauerte einige Zeit, bis sich Leibniz' Ideen und Bezeichnungen allgemein durchgesetzt hatten. Zunächst fand er nicht die gebührende Anerkennung. Er konnte weder am Hof Ludwigs XIV. noch in der Akademie der Wissenschaften zu Paris festen Fuß fassen, auch die Hoffnung auf eine Professur an der Pariser Universität zerschlug sich. Nach dem Tode J. Phillipps von Schönborn blieben die Gelder aus Deutschland aus. Leibniz mußte sich um eine feste Stellung bemühen und nahm das Angebot des Herzogs von Hannover an, als Bibliothekar in seine Dienste zu treten.
Leibniz verließ sehr ungern Paris, jene Stadt, der er so viele geistige Anregungen verdankte. Er reiste über London und die Niederlande nach Hannover. Dort wurde er als Hofrat zu vielerlei Dingen herangezogen; er verwaltete die Bibliothek, erfüllte diplomatische Aufträge, beschäftige sich mit der Verbesserung des Steuer- und Gerichtswesens, führte Verhandlungen über die Vereinigung der christlichen Konfessionen und befaßte sich mit der Wasserregulierung in den Bergwerken des Harzes durch Windkraft. Daneben arbeitete er unermüdlich an seinen philosophischen und mathematischen Forschungen. Am meisten fehlte ihm in Hannover das Gespräch mit führenden Gelehrten seiner Zeit. Deshalb unterhielt er einen ausgedehnten Briefwechsel mit insgesamt 1063 Persönlichkeiten, mit Mathematikern, Philosophen, Ärzten, Sprachwissenschaftlern, Theologen, Historikern und anderen Fachleuten, mit Künstlern, Fürsten und Diplomaten. Unter seinen Korespondenten sind besonders zu nennen: die Gebrüder Bernoulli, Graf E. W. von Tschirnhaus, Isaac Newton, Huygens, Goldbach und de l'Hospital.
Leibniz legte in der neugegründeten Zeitschrift „Acta eruditorum" das Wesen seiner Infinitesimalrechnung dar und behandelte in einer Folge von Abhandlungen (ab 1682) mehrere Einzelprobleme, u. a. Quadraturen, das optische Brechungsgesetz, den freien Fall im zähen Medium. Die Lösung zahlreicher weiterer Einzelfragen hat er an andere Mathematiker brieflich mitgeteilt. Außerdem gingen vielerlei Anregungen für den weiteren Ausbau der Infinitesimalrechnung von ihm aus.
Am Hof war seine Stellung schlechter geworden, besonders nach dem Tod des alten Herzogs. Da erbot sich Leibniz, die Geschichte des Fürstenhauses der Welfen zu schreiben. Er unternahm eine große Reise über München, Wien nach Rom, Florenz

Handschrift von Leibniz, in der das Integralzeichen das erte Mal verwendet wird



und Venedig, um entsprechende Quellen zu studieren. Leibniz war der erste, der klar erkannte und sich danach richtete, daß am Anfang jeder historischen Arbeit ein gründliches Quellenstudium stehen muß. Er ist damit auch zum Begründer der exakten Geschichtswissenschaft geworden.

Aber die Welfengeschichte wird immer mehr zu einer Fessel für den universellen Gelehrten, der es einfach nicht fertig bringt, nur eine einzige Aufgabe, die ihn nicht sonderlich interessiert, zu bearbeiten. Außerdem wirft der Prioritätsstreit mit Newton um die Erfindung der Differential- und Integralrechnung Schatten auf sein auch von Krankheit gezeichnetes Alter. 1712 wird er von der Royal Society öffentlich des geistigen Diebstahls an Newtons Ideen beschuldigt. Heute ist auf Grund des Studiums der Briefe und anderer Quellen eindeutig nachgewiesen, daß Leibniz Newtons entscheidende Manuskripte nie gesehen hat, daß also Newton und Leibniz unabhängig voneinander die Differential- und Integralrechnung entdeckt haben. Trotz der tiefen Einsicht von Newton in das Wesen der Infinitesimalrechnung waren seine Bezeichnungen sehr viel weniger durchgebildet als die von Leibniz sorgfältig durchdachten Symbole, so daß die spätere Entwicklung auf dem Kontinent ausschließlich auf Leibniz fußt. Ja, es ist sogar zu bemerken, daß in England, wo man zunächst noch an Newtons Bezeichnungen festhielt, eine merkliche Stockung in der Entwicklung der infinitesimalen Mathematik gegenüber dem Kontinent eintrat.

In Leibniz' Hannoversche Zeit fallen auch seine Bemühungen, das wissenschaftliche Leben zu organisieren. Er gründete 1700 die Berliner Societät der Wissenschaften, aus der die heutige Deutsche Akademie der Wissenschaften hervorging und wurde ihr erster Präsident. Andere Pläne zur Gründung weiterer Akademien in Deutschland zerschlugen sich; dagegen konnte Leibniz noch wichtige Vorarbeiten zur Gründung einer Akademie in Petersburg leisten, wie überhaupt der russische Zar Peter der Große als einziger unter Europas Monarchen die volle Bedeutung von Leibniz erkannte.

In seinen letzten Lebensjahren in Hannover vereinsamte er immer mehr. Bei Hofe fiel er zunehmend in Ungnade, da es offensichtlich wurde, daß er die Welfengeschichte nie würde vollenden können. Am 14. November 1716 nahm ihm der Tod die Feder für immer aus der Hand. Leibniz, von dem der große französische Enzyklopädist D. Diderot sagte „Dieser Mann hat allein Deutschland soviel Ruhm gebracht wie Platon, Aristoteles und Archimedes zusammen Griechenland", wurde nach dem Zeugnis eines Zeitgenossen nicht viel besser begraben als ein Straßenräuber. Nicht ein einziges Mitglied des Hofes war zur Beerdigung erschienen.

W. Purkert

Die Titelvignette zeigt die Gedenkmünze, die auf Beschluß des Ministerrates der DDR von der Deutschen Notenbank zu Ehren von G. W. Leibniz herausgegeben wurde

Mathematiker, die zur Zeit Leibniz' lebten

Erhard Weigel (1625 bis 1699)
Christian Huygens (1629 bis 1695)
Blaise Pascal (1623 bis 1662)
René Descartes (1596 bis 1650)
John Wallis (1616 bis 1703)
Jacob Bernoulli (1655 bis 1705)
Johann Bernoulli (1667 bis 1748)
Marquise de l'Hospital (1661 bis 1704)
Leonard Euler (1707 bis 1783)
Graf E. W. von Tschirnhaus (1651—1708)
Isaac Newton (1643 bis 1727)
Christian Goldbach (1690 bis 1764)

Beweise durch vollständige Induktion

1. Teil

Gilt für jede natürliche Zahl n $2^n > n$?

In der Mathematik sind auf Schritt und Tritt Beweise zu führen: man schließt von richtigen Sätzen auf neue richtige Sätze. Oft stößt man dabei auf Sätze, in denen behauptet wird, daß eine Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Beispielsweise ist „Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Eckes gleich $(n - 2) \cdot 180°$" eine solche Aussage. In diesem Beitrag wird eine Methode zum Beweis solcher Sätze erläutert.

I.

Wir wollen folgenden Satz betrachten: Das Quadrat von 2 ist größer als 2.
Unter Verwendung der bekannten mathematischen Zeichen kann dieser Satz auch kürzer ausgedrückt werden: $2^2 > 2$.
Ohne Schwierigkeiten werden wir feststellen, daß dieser Satz etwas richtiges aussagt. Wir brauchen nur das Quadrat von 2 auszurechnen und mit 2 zu vergleichen. Wir sagen: *Der Satz ist wahr.*
Als nächstes betrachten wir den Satz: Die dritte Potenz von 2 ist größer als 3, oder kurz: $2^3 > 3$.
Wieder brauchen wir 2^3 nur auszurechnen und mit 3 zu vergleichen ($2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $8 > 3$), um zu bestätigen, daß dieser Satz wahr ist.
Durch das gleiche Verfahren können wir auch *entscheiden*, ob $2^4 > 4$, $2^5 > 5$, $2^6 > 6$ usw. *wahr* oder *falsch* ist.
Wir finden, daß die Sätze $2^2 > 2$, $2^3 > 3$, $2^4 > 4$, $2^5 > 5$, usw. *wahr* sind. Für die natürliche Zahl 1 wollen wir noch den Satz $2^1 > 1$ und für die natürliche Zahl 0 den Satz $2^0 > 0$ hinzunehmen. Dabei meinen wir mit 2^1 die Zahl 2 und mit 2^0 die Zahl 1, d. h., wir legen die Bedeutung von 2^1 bzw. 2^0 fest durch $2^1 = 2$ und $2^0 = 1$. Damit gehört dann zu *jeder* natürlichen Zahl n die Ungleichung $2^n > n$.
Eine Tabelle macht uns das besonders deutlich:

natürliche Zahl	zugeordneter Satz
0	$2^0 > 0$
1	$2^1 > 1$
2	$2^2 > 2$
3	$2^3 > 3$
.	.
	.
	.

Wollen wir nun die Wahrheit aller dieser Sätze behaupten, so können wir einfacher sagen:

Für jede natürliche Zahl n gilt $2^n > n$.

Diese letzte Behauptung ist wahr, wenn der Satz für $n = 0$ wahr ist *und* wenn der Satz für $n = 1$ wahr ist *und* wenn der Satz für $n = 2$ wahr ist *und* wenn der Satz für $n = 3$ wahr ist usw. Dabei schreiben wir „usw." nicht etwa aus Bequemlichkeit, sondern weil es unmöglich ist, alle einzelnen Sätze aufzuschreiben. Wir schreiben „usw." weil jeder von uns weiß, wie die Aufzählung fortgesetzt werden muß. Ist nun für jede natürliche Zahl n tatsächlich $2^n > n$?
Die Antwort auf diese Frage fänden wir nicht, wenn wir das *für jede einzelne* natürliche Zahl durch Ausrechnen und Vergleichen überprüfen wollten, da unser Nachprüfen dann kein Ende haben würde. Würden wir den Satz für $n = 4$, $n = 5$ usw. bis $n = 100$ nachprüfen, so würden wir feststellen, daß er auch für diese natürlichen Zahlen gilt. Aber wir kennen dann die Gültigkeit des Satzes eben nur für die Zahlen, für die wir den Satz überprüft haben.
Andererseits wäre es leichtfertig, würden wir aus der Gültigkeit des Satzes für $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ ohne Nachprüfung schließen, daß der Satz für alle natürlichen Zahlen wahr ist.
Dazu wollen wir ein Beispiel angeben. L. Euler, ein bedeutender Mathematiker des 18. Jahrhunderts, hat folgende Summe untersucht:

$$n^2 + n + 41.$$

Um uns bequemer auszudrücken, wollen wir die Summe mit $f(n)$ (lies: f von n) abkürzen:

$$f(n) = n^2 + n + 41.$$

Für $n = 0$ erhalten wir $f(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$,
für $n = 1$ ergibt sich $f(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$.
Wir setzen für n der Reihe nach die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ein. Wir stellen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

n	$f(n)$
0	41
1	43
.	.
.	.
.	.

Wie schon für $n = 0$ und $n = 1$ erhalten wir auch für die weiteren natürlichen Zahlen bis 10 im Ergebnis stets Primzahlen. Aber wir dürfen daraus *nicht* den Schluß ziehen, daß $f(n)$ für *jede* natürliche Zahl eine Primzahl liefert. Zwar erhält man für die weiteren natürlichen Zahlen bis 39 ebenfalls Primzahlen, aber für $n = 40$ bekommen wir:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41.$$

Mit Hilfe einer binomischen Formel finden wir:

$$f(40) = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = (40 + 1)^2 = 41^2.$$

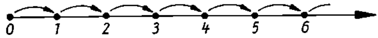
Eine Quadratzahl kann natürlich keine Primzahl sein.

II.

Durch Nachprüfen können wir auch die Gültigkeit des folgenden Satzes immer nur für *endlich viele* natürliche Zahlen feststellen: „Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Eckes gleich $(n - 2) \cdot 180°$."
Wie überzeugen wir uns nun von der Gültigkeit des Satzes für *alle* natürlichen Zahlen? Hier helfen uns die Eigenschaften der natürlichen Zahlen weiter.
Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, können wir sie weder alle aufzählen noch auf-

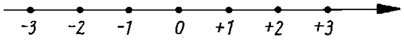
schreiben. Dennoch sind wir in der Lage, uns auf einfache Weise einen Überblick über alle natürlichen Zahlen zu verschaffen. Beginnen wir mit 0 und zählen immer um 1 weiter, so können wir zu *jeder* natürlichen Zahl gelangen, d. h., jede natürliche Zahl ist auf diese Weise erreichbar. Nennt uns jemand eine natürliche Zahl, so können wir, indem wir mit 0 beginnen und immer um 1 weiterzählen, bis zur genannten Zahl zählen. Auf *jede* natürliche Zahl *folgt* unmittelbar *eine bestimmte* natürliche Zahl, auf 0 folgt 1, auf 1 folgt 2 usw. (Abb. 1).

Abb. 1



Jede natürliche Zahl, *ausgenommen die Zahl* 0, hat einen *eindeutig bestimmten Vorgänger*. Die Zahl 0 hat *keine* natürliche Zahl als Vorgänger, d. h. sie folgt auf keine natürliche Zahl. 1 hat den Vorgänger 0, 2 hat den Vorgänger 1 usw.
Sind uns irgendwelche natürlichen Zahlen gegeben, so gibt es unter diesen stets eine *kleinste Zahl*. Z. B. ist von den Zahlen 247, 31776, 56, 321 offensichtlich 56 die kleinste Zahl. Von allen geraden natürlichen Zahlen ist 0 die kleinste. Von allen Primzahlen ist 2 die kleinste Zahl. Auch die Menge aller natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl, nämlich die Zahl 0.
Jede Menge von irgendwelchen natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl.
Diese und auch die vorher genannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen wollen wir hier ohne Begründung als bekannt voraussetzen und aus ihnen eine Beweismethode gewinnen.
Zunächst aber werden wir uns noch davon überzeugen, daß die *genannten Eigenschaften nicht jeder Zahlenmenge zukommen.* Betrachten wir zum Beispiel die *Menge der ganzen Zahlen* (0, + 1, — 1, + 2, — 2, . . .), so hat dort auch die Zahl 0 einen Vorgänger, nämlich die Zahl — 1. Auch enthält diese Menge keine kleinste Zahl. Das können wir uns leicht überlegen. Dazu betrachten wir die Zahlengerade mit den ganzen Zahlen (Abb. 2).

Abb. 2



Gäbe es eine kleinste ganze Zahl, so dürfte links von ihr keine ganze Zahl liegen. Aber links von jeder ganzen Zahl liegen sogar unendlich viele ganze Zahlen. Auch gibt es *Mengen von gebrochenen Zahlen*, die keine kleinste Zahl enthalten, z. B. die durch Brüche mit dem Zähler 1 dargestellten Zahlen:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

In der Reihenfolge, wie die gebrochenen Zahlen hier aufgeschrieben sind, folgt auf jede gebrochene Zahl eine noch kleinere gebrochene Zahl. Folglich kann keine von ihnen kleinste Zahl dieser Menge sein.
Bei den genannten Eigenschaften handelt es sich also um besondere Eigenschaften der natürlichen Zahlen. Wir stellen sie noch einmal zusammen:

> Jede natürliche Zahl hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger.
> Jede natürliche Zahl, die verschieden von 0 ist, hat einen eindeutig bestimmten Vorgänger.
> Die Zahl 0 hat keinen Vorgänger.
> Jede Menge irgendwelcher natürlicher Zahlen enthält eine kleinste natürliche Zahl.

III.

Wir können nun das Beweisverfahren angeben und begründen.

Wollen wir einen Satz über alle natürlichen Zahlen beweisen, so brauchen wir *nur*

(1) zu zeigen: Der Satz ist für die Zahl 0 wahr, und

(2) zu zeigen: *Wenn* der Satz für eine beliebige natürliche Zahl wahr ist, *so* ist er auch für den Nachfolger dieser Zahl wahr.

Haben wir die Punkte (1) und (2) nachgewiesen, so können wir sicher sein, daß der Satz *für alle natürlichen Zahlen* gilt.

Das werden wir nun mit Hilfe der oben zusammengestellten Eigenschaften der natürlichen Zahlen begründen.

Wir nehmen dazu an, daß wir für einen Satz über natürliche Zahlen diese beiden Aussagen bewiesen haben. Wegen Punkt (2) wissen wir dann: *Falls* der Satz für eine beliebige natürliche Zahl gilt, *so* gilt er auch für die nachfolgende Zahl. Damit können wir natürlich nur etwas anfangen, wenn wir von einer bestimmten Zahl wissen, daß der Satz für sie gilt. Hier hilft uns Punkt (1) weiter; denn dieser sichert uns die Gültigkeit des Satzes für *die Zahl* 0. Wegen Punkt (2) gilt der Satz dann auch für die Zahl 1; denn (2) besagt: *Wenn* der Satz für die Zahl 0 gilt, *so* gilt er auch für den Nachfolger von 0. Nun gilt der Satz aber für 0, also gilt er auch für 1. *Da* der Satz nun auch *für* die *Zahl* 1 gilt, *so* gilt er (wieder nach Punkt (2)) *auch für die Zahl* 2 usw. (Abb. 3).

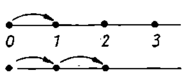


Abb. 3

Punkt (1) sichert uns eine Anfangszahl, für die der Satz gilt, und Punkt (2) besagt, daß sich die Gültigkeit des Satzes von einer Zahl auf die nachfolgende vererbt.

Wir sind aber wieder genötigt, „usw." zu gebrauchen. Könnte nicht doch an irgendeiner Stelle, vielleicht bei 1000000 oder bei einer noch größeren Zahl, das „Unglück" eintreten, daß der Satz dort nicht gilt?

Nehmen wir einmal an, *es gibt* solche natürlichen Zahlen, für die der Satz *nicht* gilt. Wie wir wissen, gibt es dann *unter diesen Zahlen* auch eine *kleinste Zahl.* Wir wollen sie m nennen. Also ist m die kleinste natürliche Zahl, für die der Satz nicht gilt, falsch ist. Die Zahl m kann nicht 0 sein; denn für 0 gilt der Satz wegen Punkt (1). Außer 0 hat aber jede natürliche Zahl einen *Vorgänger*. Also hat unsere kleinste Zahl m einen Vorgänger $m - 1$. *Für diesen Vorgänger* ist unser Satz aber *wahr*; denn die kleinste Zahl, für die der Satz nicht gilt, kommt ja erst danach. Aus Punkt (2) folgt aber: *Wenn* der Satz für $m - 1$ wahr ist, *so* ist er auch für den Nachfolger von $m - 1$ wahr. Dieser Nachfolger ist m. Nun ist der Satz für $m - 1$ tatsächlich wahr. Also ist er *auch für m wahr*. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, er sei für m nicht wahr. Also muß die gemachte Annahme falsch sein!

Folglich kann es keine kleinste Zahl geben, für die der Satz nicht gilt, und deshalb kann es überhaupt *keine natürliche Zahl geben, für die der Satz nicht gilt.* Also gilt der Satz tatsächlich für alle natürlichen Zahlen.

Wir haben zur Begründung der Beweismethode von den im Abschnitt II genannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen Gebrauch gemacht. Deshalb können wir mit dieser Methode auch *nur* Sätze wie beispielsweise: „Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Eckes gleich $(n - 2) \cdot 180°$" beweisen.

Die Beweismethode heißt *vollständige Induktion*[1]. Dabei nennt man Punkt (1) den *Induktionsanfang* und (2) den *Induktionsschritt.*

Im nächsten Heft werden einige Sätze durch vollständige Induktion bewiesen.

W. Stoye

[1] Das ist ein Fachausdruck der Mathematik, auf den hier nicht näher eingegangen werden kann.

Wir operieren mit Mengen

Teil 2

$M \subseteq G \quad V \cap Z = \{h, k, l\}$

$a \in \overline{M} \quad E \cup Z \quad S \cap E = \emptyset$

1. Die Bedeutung des Grundbereichs bei Mengenbildungen

Wie wir wissen, werden Mengen häufig dadurch gebildet, daß man Elemente zusammenfaßt, die irgendeine bestimmte *Eigenschaft* oder ein bestimmtes *Merkmal* gemeinsam haben. So können wir z. B. die Menge der Bezirkshauptstädte der DDR bilden — nennen wir sie hier einmal B oder die Menge der Thälmann-Pioniere einer Klasse — wir bezeichnen sie etwa mit P oder die Oberliga-Mannschaft des FC Karl-Marx-Stadt — diese Menge soll mit F bezeichnet werden usw.
Wäre es vielleicht auch möglich, eine Menge dadurch festzulegen, daß man angibt, welche Eigenschaft (welches Merkmal) ihre Elemente *nicht* haben sollen? Probieren wir es einmal an einem Beispiel! Wir wollen versuchen, eine Menge B^* zu bilden, deren Elemente *nicht* die Eigenschaft haben sollen, Bezirkshauptstadt der DDR zu sein. Überlegen wir uns, welche Elemente zu B^* gehören würden: Da fallen uns vielleicht Stralsund, Weißenfels und Senftenberg ein. Diese Städte sind keine Bezirkshauptstädte der DDR, sie würden also zu B^* gehören. Wären auch Warschau, Kairo oder Tokio Elemente von B^*? Anscheinend ja; denn auch sie sind keine Bezirkshauptstädte der DDR. Man könnte aber einwenden, daß Warschau, Kairo und Tokio gar nicht in der DDR liegen und deshalb vielleicht doch nicht zu B^* gezählt werden sollten? Wie ist es dann mit der Insel Rügen? Oder mit dem Müggelsee? Oder mit dem Leipziger Opernhaus? Weder Rügen noch der Müggelsee noch das Leipziger Opernhaus sind Bezirkshauptstädte der DDR, wir müßten also alle diese Dinge als Elemente von B^* ansehen. Aber viele werden dagegen schon protestieren und darauf hinweisen, daß dieser Weg ins Uferlose führt — schließlich würden so z. B. auch alle Leser von *alpha* zu B^* gehören usw. Es ist offenbar notwendig, bei der Bildung von B^* bestimmte Einschränkungen zu machen. Wir müssen genau abgrenzen, aus welchem *Grundbereich* die Elemente überhaupt nur entnommen werden sollen. Im vorliegenden Fall käme als Grundbereich am ehesten die Gesamtheit aller Städte der DDR in Frage. Dieser Grundbereich ist selbst eine Menge — wir wollen sie S nennen. Wenn wir *jetzt* — innerhalb unserer Grundmenge S — die Menge aller Elemente bilden, die *nicht* zu B gehören, so geraten wir nicht mehr in Schwierigkeiten: Stralsund, Weißenfels, Senftenberg und viele andere Städte der DDR gehören zu dieser Menge, Warschau, Kairo und Tokio dagegen *nicht*, weil diese Städte gar nicht dem gewählten Grundbereich angehören und dadurch sozusagen *außerhalb* unserer gegenwärtigen Betrachtungen liegen — von der Insel Rügen, dem Müggelsee und dem Leipziger Opernhaus ganz zu schweigen.
Unser Versuch, eine Menge durch Festlegung eines Merkmals anzugeben, das ihre Elemente *nicht* besitzen sollen, hat also erst Erfolg gehabt, nachdem wir uns auf einen klar abgegrenzten Grundbereich bezogen haben. Bei unseren sonstigen Mengenbildungen schien dagegen die Vorgabe einer Grundmenge nicht notwendig gewesen zu sein. Aber das *schien* eben nur so — in Wirklichkeit haben wir doch mehr oder weniger unbewußt an bestimmte Grundbereiche gedacht, sonst wären die von uns betrachteten Mengen unter Umständen gar nicht genau bestimmt gewesen. Nehmen wir z. B. die

Menge der Einwohner Leipzigs. Als Grundbereich denkt man dabei wohl an die Menge aller in der DDR lebenden Menschen. Wenn jemand aber in diesem Zusammenhang die Menge aller in der DDR existierenden warmblütigen Lebewesen als Grundbereich wählt, so gehören zur Menge der Einwohner Leipzigs nicht nur Menschen, sondern auch die dort lebenden Papageien, Meerschweinchen, Katzen usw.
Halten wir also fest: Bei *allen* Mengenbildungen geht man von bestimmten Grundbereichen aus. Allerdings wird die jeweilige Grundmenge nicht immer extra genannt — teils, weil es nicht unbedingt notwendig ist, teils, weil sie aus dem Zusammenhang heraus ersichtlich ist.

2. Komplementäre Mengen

Verfolgen wir nun unsere erste Fragestellung weiter! Wir hatten im Rahmen des Grundbereichs S die Menge B aller Bezirkshauptstädte betrachtet und daneben die Menge aller Elemente, die *nicht* Bezirkshauptstadt sind. Diese zweite Menge nennt man die zu B bezüglich des Grundbereichs S *komplementäre* Menge und bezeichnet sie mit $\overline{B}$. Ganz entsprechend können wir nun auch komplementäre Mengen zu P bzw. zu F bilden, sobald wir uns über den jeweiligen Grundbereich geeinigt haben. (Der Grundbereich kann natürlich unterschiedlich gewählt werden.) Am naheliegendsten wäre es, unter $\overline{P}$ die Menge der Schüler *unserer Klasse* zu verstehen, die *keine* Thälmannpioniere sind. Dann wäre der Grundbereich G die Menge aller Schüler dieser Klasse. Und $\overline{F}$? Als Grundbereich könnte man die Menge aller Oberligafußballer der DDR heranziehen. Zu $\overline{F}$ würden dann alle Oberligafußballspieler gehören, die *nicht* Mitglied des FC Karl-Marx-Stadt sind. Aber natürlich wäre auch ein anderer Grundbereich denkbar. Überlegt selbst, welche Möglichkeiten man noch ins Auge fassen könnte!
Fassen wir zusammen: Wir sind in unseren Beispielen immer von einer gewissen Grundmenge G und einer darin enthaltenen Menge M ausgegangen (d. h., es war $M \subseteq G$). Unter $\overline{M}$ verstanden wir dann die Menge aller Elemente aus G, die *nicht* zu M gehören, kurz:

$$a \in \overline{M} \text{ genau dann, wenn } a \notin M \text{ ist.}$$

$\overline{M}$ heißt die bezüglich G komplementäre Menge zu M oder kurz *Komplementärmenge* von M.
Zur Veranschaulichung von Zusammenhängen zwischen Mengen bedient man sich häufig einfacher ebener Figuren: Alle im Inneren eines geschlossenen Kurvenzuges liegenden Punkte werden als zur selben Punktmenge M gehörig aufgefaßt; ob man die Punkte des Randes zu M oder zur Komplementärmenge $\overline{M}$ von M zählt, geht aus dem Zusammenhang hervor, oder man trifft eine Verabredung darüber. In Abb. 1 stellt die gesamte Rechtecksfläche eine Grundmenge G dar, die Kreisfläche veranschaulicht eine Menge M und der schraffierte Teil der Rechtecksfläche veranschaulicht die Menge $\overline{M}$. Die Randpunkte, d. h. die Punkte der Kreisperipherie, mögen hier zu M gehören.

Abb. 1

Damit wir mit dem neuen Begriff noch etwas vertrauter werden, wollen wir einige einfache Beispiele untersuchen.
(1) Gegeben sei die Menge $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ als Grundbereich und die Menge $A = \{2, 3, 5, 7\}$.
Wie jeder leicht finden wird, ist $\overline{A} = \{0, 1, 4, 6\}$.
(2) Als Grundbereich wählen wir nun die Menge N aller natürlichen Zahlen. (Bekanntlich gibt es unendlich viele natürliche Zahlen, wir können sie also nicht alle hinschrei-

ben.) Teilmengen von N sind die Menge G der geraden Zahlen und die Menge U der ungeraden Zahlen. Wir können feststellen: $\overline{G} = U$ oder auch $\overline{U} = G$.
(3) Wir nehmen als Grundbereich wieder die Menge N. Eine Teilmenge von N ist die Menge P aller Primzahlen, eine andere Teilmenge ist die Menge Z der zusammengesetzten Zahlen. Gilt hier $\overline{P} = Z$, d. h., ist jede natürliche Zahl, die keine Primzahl ist, eine zusammengesetzte Zahl? Das ist nicht der Fall! Die Zahlen 0 und 1 sind keine Primzahlen, sie gehören aber auch nicht zur Menge Z der zusammengesetzten Zahlen. Also ist $\overline{P} \neq Z$.
(4) Diesmal sei die Menge aller Dreiecke unser Grundbereich. Wir greifen die Menge aller *gleichseitigen* Dreiecke heraus und bezeichnen sie mit G. Was ist die Komplementärmenge zu G? Ist es die Menge aller *ungleichseitigen* Dreiecke? Nein, zu $\overline{G}$ gehören außer den ungleichseitigen Dreiecken auch alle gleichschenkligen, die nicht gleichseitig sind!
Die Beispiele zeigen, daß der Begriff der Komplementärmenge zwar im Grunde recht einfach ist, daß man manchmal aber doch aufpassen muß, um keine Elemente zu vergessen.

3. Vereinigung und Durchschnitt von Mengen

Für unsere folgenden Überlegungen denken wir uns als Grundbereich eine Schulklasse K gegeben. Die Elemente von K sind also Schüler, die wir durch den jeweiligen Anfangsbuchstaben ihres Familiennamens kennzeichnen wollen. (Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß jeder Buchstabe des Alphabets höchstens einmal als Anfang eines Familiennamens in der Klasse vorkommt.) Wir wollen annehmen, daß wir einige Teilmengen von K kennen: (1) Den Schachklub der Klasse: $S = \{a, b, c, d\}$. (2) Die Menge der Schüler, die am Englischunterricht teilnehmen: $E = \{e, f, g\}$. (3) Die Volleyballmannschaft: $V = \{c, d, h, i, k, l\}$. (4) Die Menge der Schüler, die an einem Zirkel im Fach Mathematik teilnehmen: $Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$.
Eines Tages gibt der Klassenlehrer bekannt: „Alle Schüler, die zum Schachklub oder zur Volleyballmannschaft gehören, treffen sich nach dem Unterricht im FDJ-Zimmer!" Welche Schüler sind damit gemeint? Sicher die Schüler a und b; denn sie gehören zum Schachklub, und ebenso die Schüler h, i, k und l; denn sie gehören zur Volleyballmannschaft. Wie steht es aber mit c und d? Diese Schüler müssen natürlich ebenfalls hingehen; denn sie gehören ja sogar zu *beiden* Mengen! Nach dem Unterricht versammelt sich also im FDJ-Zimmer eine Menge, die durch *Vereinigung* der beiden Mengen S und V entstanden ist. Man schreibt dafür $S \cup V$ (gelesen: „S vereinigt mit V" oder „Vereinigung von S und V"), und es ist in unserem Falle

$$S \cup V = \{a, b, c, d, h, i, k, l\}.$$

Wir merken uns allgemein: Ein Element x gehört zur *Vereinigungsmenge* der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M *oder* zu N gehört. In kurzer Schreibweise:

$$x \in M \cup N \text{ genau dann, wenn } x \in M \textit{ oder } x \in N \text{ ist.}$$

In der Abbildung 2 ist die Vereinigung zweier Mengen veranschaulicht. Die Vereinigungsmenge ist schraffiert dargestellt.

Abb. 2

An einem anderen Tag heißt es in unserer Klasse: „Alle Schüler, die zur Volleyballmannschaft und auch zum Mathematikzirkel gehören, melden sich beim Klassenlehrer!" Wer ist gemeint? Nur die Schüler h, k und l; denn nur diese gehören *sowohl* zur Volleyballmannschaft *als auch* zum Mathematikzirkel. Die Schüler h, k und l bilden ebenfalls eine Menge, die man den

Durchschnitt der Mengen V und Z nennt. Man schreibt dafür $V \cap Z$ (gelesen: „V geschnitten mit Z“ oder „Durchschnitt von V und Z“), und es ist also:

$$V \cap Z = \{h, k, l\}$$

Wir merken uns hier: Ein Element x gehört zum *Durchschnitt* der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M *und* zu N gehört:

$x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ *und* $x \in N$ ist.

Abb. 3

In Abbildung 3 ist der Durchschnitt der Mengen M und N wieder schraffiert dargestellt.

Auch die Begriffe Durchschnitt und Vereinigung sind nicht sehr schwierig, das werden wir an den folgenden Beispielen, in denen wir mit unseren Mengen S, E, V und Z arbeiten wollen, gleich sehen.

Bilden wir einmal $S \cup E$ (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind oder Englisch lernen). Wie jeder sicher leicht findet, ist $S \cup E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. (Dem entspricht die in Abbildung 4 dargestellte Situation. Die Vereinigungsmenge ist wieder schraffiert gezeichnet.)

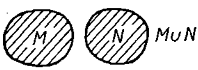


Abb. 4

Abb. 5

Was gibt $E \cup Z$? Ganz einfach: $E \cup Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$, d. h. $E \cup Z = Z$. Wie kommt das? Ihr habt es sicher schon gemerkt: E ist eine *Teilmenge* von Z, es kommt also beim Bilden der Vereinigungsmenge gar kein neues Element zu Z hinzu. (Siehe auch Abbildung 5!).

Nun betrachten wir den Durchschnitt von S und E (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind und außerdem auch noch Englisch lernen). Wie wir feststellen müssen, gibt es solche Schüler in unserer Klasse gar nicht, der Durchschnitt der Mengen S und E ist also leer: $S \cap E = \emptyset$. (Siehe auch Abbildung 6!)

Wie steht es mit $E \cap Z$? Prüft selbst nach, daß $E \cap Z = E$ gilt! (In Abbildung 7 ist wieder eine entsprechende Situation dargestellt.)

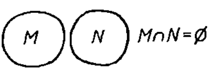


Abb. 6

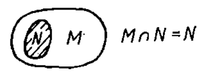


Abb. 7

Wir wollen das Bilden von Durchschnitten bzw. Vereinigungsmengen mit drei einfachen Beispielen aus der Mathematik abschließen:

(a) Die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ ist eine kurze Schreibweise für „$x + 3 < 8$ *oder* $x + 3 = 8$“. Die Menge X aller natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ erfüllen, ergibt sich somit als *Vereinigung* der Mengen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (das sind die natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 < 8$ erfüllen) und $B = \{5\}$ (die natürliche Zahl, die die Gleichung $x + 3 = 8$ erfüllt).

Es gilt also $X = A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$.

(b) Sei G die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, D die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen. Dann ist $G \cap D$ die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen — das sind nämlich diejenigen, die gerade *und* durch 3 teilbar sind.

(c) Sei R_1 die Menge aller Rechtecke und R_2 die Menge aller Rhomben. Dann ist $R_1 \cap R_2$ gleich der Menge Q aller Quadrate: $R_1 \cap R_2 = Q$.

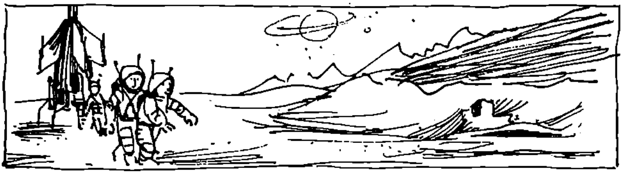
Wer bis zum nächstenmal etwas üben will, kann das an Hand der vorhin betrachteten Mengen S, E, V und Z tun. Zum Beispiel wäre noch zu untersuchen:
$S \cup Z, E \cup V, S \cap Z, S \cap V, E \cap V$.

W. Walsch

Eine Aufgabe von
Prof. Dr. Herbert Karl

Pädagogische Hochschule Potsdam, Institut für Mathematik
Leiter der Aufgabenkommission
des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

47 *Planetarische Lebewesen*
Als unsere Kosmonauten zum erstenmal einen fremden Planeten betreten hatten, fanden sie dort als höchstentwickelte Lebewesen vier Arten von käferartigen Tieren K_1, K_2, K_3, K_4 vor, die (in zunächst wenig übersichtlicher Weise) sämtlich mit Beinen, Flügeln und Fühlern ausgerüstet waren. Es zeigte sich aber bald, daß die Anzahl der genannten Gliedmaßen bei allen vier Arten nur einen der Werte 2, 4, 6 oder 8 hatte und daß es außerdem nicht zwei dieser Arten mit gleich viel Beinen oder gleich viel Flügeln oder gleich viel Fühlern gab. Weiterhin besaß die Art K_1 mehr Beine als die K_4, die Art K_2 mehr Flügel als die K_3, die Art K_3 mehr Fühler als die K_1, und schließlich zeigte sich noch, daß die Art K_2 als einzige mehr Beine als Flügel und die Art K_4 als einzige mehr Flügel als Fühler hatte.
Noch bevor weitere Angaben zur Erde gefunkt worden waren, konnte man hier schon eindeutig feststellen, mit wieviel Gliedmaßen die vier Arten der käferähnlichen Tiere jeweils ausgestattet waren. Wie verläuft eine systematische diesbezügliche Überlegung?



Erster bemannter Weltraumflug		Erster unbemannter Weltraumflug	
WOSTOK I		SPUTNIK I	
Oberst Juri Alexejewitsch Gagarin			
Geboren am 9. März 1934 in einem Dorf des Rayons Gshatsk (Gebiet Smolensk)			
Start:	12. 4. 1961 um 7.07 Uhr MEZ in Baikonur	Start:	4. 10. 1957
Landung:	14. 4. 1961 um 8.55 Uhr MEZ im Gebiet Saratow		
Perigäum:	181 Kilometer	Perigäum:	230 Kilometer
Apogäum:	327 Kilometer	Apogäum:	940 Kilometer
Bahnneigung:	65 Grad	Bahnneigung:	65,1 Grad
Umlaufzeit:	89,10 Minuten	Umlaufzeit:	96,17 Minuten
Umlaufmasse:	4725 kg	Umlaufmasse:	83,6 kg

alpha berichtet aus aller Welt

Moskau

Anläßlich des Internationalen Mathematikerkongresses 1966 wurde eine Sondermarke (6 Kopeken) herausgegeben. Sie zeigt ein Integral über der Erdkugel, das Symbol für eine unendliche Summe und das Symbol für die Vereinigungsmenge.

Widin (VR Bulgarien)

Zwei Mädchen nahmen an der VIII. Internationalen Mathematikolympiade in Sofia teil: eine mongolische Schülerin und Ljudmila Jordanova aus Bulgarien. Letztere erhielt einen 3. Preis. In Anerkennung ihrer guten Leistungen wurde sie vom Volksbildungsministerium ihres Landes zum Studium nach Moskau delegiert. Ihre hervorragenden Erfolge hat sie durch das Studium sowjetischer Olympiadeaufgaben und die Teilnahme an einem Korrespondentenzirkel der Universität Sofia, d. h. im kontinuierlichen Selbststudium, erzielt. Verbunden mit herzlichen Grüßen an die *alpha*-Leser übergab sie die folgende Aufgabe:

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ positive ganze Zahlen. Dabei ist $a_k < 1000$; ($k = 1,2,\ldots,n$) und das k.g.V. je zweier solcher Zahlen größer als 1000. Man beweise, daß

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2 \text{ ist.}$$

In eigener Sache

Am 4. April 1707 wurde Leonhard Euler in Basel geboren. In Heft 4 werden wir über Leben und Bedeutung dieses berühmten Wissenschaftlers berichten.

Bukarest

Vom 12. bis 17. September 1966 fand in Bukarest der vom Organisationskomitee der Balkanunion der Mathematiker einberufene III. Balkankongreß der Mathematiker statt. Mehr als 150 Mathematiker aus verschiedenen wissenschaftlichen Instituten Rumäniens, Bulgariens, Jugoslawiens, Griechenlands und der Türkei nahmen an der Arbeit dieses Kongresses teil. Akademiemitglied Octav Onicescu, Rumänien, hielt die feierliche Eröffnungsansprache. Darauf folgte der Vortrag von Prof. Gheorghe Mihoc, Präsident des Organisationskomitees und Rektor der Bukarester Universität. Er gab einen Überblick über die Zusammenarbeit von Mathematikern der Balkanländer seit der Gründung der Balkanunion. Er wies darauf hin, daß nach den ersten zwei Kongressen (1934: Athen; 1937: Bukarest) eine Reihe politischer und sozialer Veränderungen in den Staaten der Balkanhalbinsel die organisierte Zusammenarbeit der Wissenschaftler erschwerte. Aber aus den in der letzten Zeit sich immer rascher entwickelnden allseitigen Verbindungen zwischen den Völkern der Balkanländer, die sich für Frieden und gegenseitige Zusammenarbeit einsetzen, erwuchs von neuem die Notwendigkeit und Möglichkeit einer näheren Verbindung auch zwischen den Mathematikern dieser Länder.

Assja Peinerdjiewa, Universität Sofia

Budapest
Im November 1966 fand in der Ungarischen VR die erste Olympiade dieses Schuljahres statt. Teilnahmeberechtigt an dem sogenannten J.-Kürschàk-Memorial waren Schüler der Oberschulen und außerdem Jugendliche, die 1965 (oder später) das Abitur ablegten. Die Aufgaben lauteten:

1. Gibt es ein Fünfeck im Raum, dessen Seiten gleich lang sind und bei dem sich zwei benachbarte Seiten unter einem rechten Winkel schneiden?
2. Man beweise, daß in der Dezimalbruchentwicklung der Zahl $(5 + \sqrt{26})^n$ die ersten n Ziffern nach dem Komma gleich sind, wenn n eine natürliche Zahl ist.
3. Gibt es zwei aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehende unendliche Mengen A und B, so daß jede nichtnegative ganze Zahl auf genau eine Weise als Summe einer zu A gehörigen und einer zu B gehörigen Zahl hergestellt werden kann?

I. Reiman, Universität Budapest

London
Am 13. Mai 1966 wurde die zweite englische Mathematikolympiade durchgeführt.

Effelder (Krs. Sonneberg)
Seit Jahren schneiden die Schüler der Oberschule Effelder gut bzw. sehr gut in den Mathematikolympiaden ab. Das ist der Erfolg langfristiger, systematischer außerunterrichtlicher Arbeit im Fach Mathematik. Der Mathematikfachlehrer Georg Scheler-Eckstein ist der Aktivste an seiner Schule. Seine umfassende Dokumentation „Drei Jahre planmäßige, außerunterrichtliche Förderung der Talente im Fach Mathematik (in den Klassen 3 bis 10) an einer Landschule“ und „Wandzeitungen“ geben Aufschluß über Inhalt, Formen und Methoden der Tätigkeit der Arbeitsgemeinschaften.

Moskau
Eine Aufgabe, die für die Gebietsolympiaden 1966 in der Sowjetunion empfohlen wurde:
Разделить угол в 19° на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Leipzig
Pawel Kröger, Schüler eines 2. Schuljahres einer Leipziger Oberschule, erreichte mit 25 Punkten in der Kreisolympiade (d. i. Stadtolympiade) in Klassenstufe 7 einen hervorragenden 10. Platz (bei 150 teilnehmenden Schülern aus 59 Oberschulen). Er qualifizierte sich damit für die Bezirksolympiade und wurde in Klassenstufe 7 der Elfte von 25 Schülern.

Berlin
Vom 13. bis 18. Februar 1967 fand die Wissenschaftliche Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR statt. In der Sektion Unterricht und Ausbildung wurden Kurzvorträge zur Modernisierung des Mathematikunterrichts gehalten und Erfahrungsberichte über gute außerunterrichtliche Arbeit aus Annaberg-Buchholz, Dresden und Herzberg (Elster) geboten. Eine Aussprache ergab wertvolle Hinweise zur Ausbildung Technischer Rechner und Mathematisch-Technischer Assistenten.

New York
One problem from the Annual High School Contests of the Mathematical Association of America 1960: Two swimmers, at opposite ends of a 90-foot pool, start to swim the length of the pool, one at the rate of 3 feet per second, the other at 2 feet per second. They swim back and forth for 12 minutes. Allowing no loss of time at the turns, find the number of times they pass each other.

Wissen, wo . . .

Eine Anleitung zum Selbststudium

Liebe Leser und Freunde von *alpha*! Ihr haltet nun Heft 2 der Schülerzeitschrift in der Hand. Sie ist eine der zahlreichen Veröffentlichungen, die eine Folge des Anwachsens des Wissens unserer modernen Gesellschaft ist. Das beweisen z. B. folgende Fakten:

- Die Anzahl der Veröffentlichungen hat sich in den letzten zehn Jahren verdoppelt.
- Zur Zeit sind zwei Millionen Wissenschaftler dabei, unsere Welt zu erforschen, das sind 90% aller Wissenschaftler, die bisher gelebt haben.
- Das Verhältnis der Anzahl der Zeitschriften von heute und der von 1900 ist 10 : 1.
- Die Suche nach optimalen Möglichkeiten der Speicherung und Selektierung (des Aussuchens) der Dokumente der wissenschaftlichen Erkenntnisse ist ein neues reiches Arbeitsgebiet für Wissenschaftler.

Die Lektüre unserer Schülerzeitschrift stellt deren Charakter entsprechend keinen bloßen Zeitvertreib dar. Mit ihr soll vielmehr in einer der wissenschaftlichen Arbeitsweise nahekommenden Art gearbeitet werden. Dabei werden Euch wie auch jedem Wissenschaftler unserer Tage neben den Problemen „wissen, was . .“ und „wissen, wie . . .“ auch das immer mehr an Bedeutung gewinnende „wissen, wo . . .“ (d. h. wo man z. B. Ausführungen zu einem bestimmten Thema findet) begegnen. Ihr werdet Euch in geeigneter Form einen Überblick über die in *alpha* veröffentlichten Beiträge verschaffen müssen. Das wird besonders deutlich, wenn Ihr Euch vergegenwärtigt, daß noch nicht jeder Beitrag zu jedem Zeitpunkt für jeden Leser verständlich ist. Zu einem späteren Zeitpunkt aber wird mancher nach früher erschienenen Artikeln suchen. Dann kann er seine Kartei — das scheint die geeignetste Form zu sein — durchsehen und schnell finden, was er sucht.

Es empfiehlt sich die Anlage einer Kartei (Format A 5) mit Leitkarten, die mit Buchstaben des Alphabets versehen sind. Ihr legt Euch eine Schlagwortübersicht an, die es erleichtert, herauszufinden, welchem Schlagwort ein Artikel zugeordnet wurde oder zuzuordnen ist. Der Vorschlag für die Einrichtung der einzelnen Karten ist in der Abbildung erläutert. Die Kartei sollte nach Empfang eines jeden neues Heftes vervollständigt werden. Sie kann auch für die Auswertung anderer Zeitschriften (andersfarbige Karteikarten) erweitert werden. Schließlich ist es auch möglich, sich eine entsprechende Kartei (A 6) für Aufgabenstellungen und Lösungen von Aufgaben, insbesondere Olympiadeaufgaben, einzurichten.

Wir wünschen Euch viel Erfolg und sind interessiert daran zu erfahren, was Ihr zu diesem Vorschlag meint.

H. Herzog/J. Lehmann

Mengenlehre

1/67	*Mit Mengen fängt es an!*	*W. Walsch*
1/67	*Aufgaben zur Mengenlehre*	*H. Lohse*
2/67	*Wir operieren mit Mengen!*	*W. Walsch*
2/67	*Lösungen zu Aufgaben aus der Mengenlehre*	*H. Lohse*

Schlagwortübersicht

A	*alpha (Zeitschrift α)*	K	*Kombinatorik*	R	*Rechenhilfsmittel*
	alpha-Wettbewerb		*Kryptarithmetik*		*Relationen*
	Ähnlichkeitslehre		*Kybernetik*	S	*Sport und Mathematik*
	Astronautik	L	*Literatur*		*Statistik*
B	*Berichte*		*Logarithmen*		*Stereometrie*
	Berufe		*Logik*	T	*Trigonometrie*
	Beweise	M	*Mathematikunterricht*	U	*Ungleichungen*
	Biographien		*Mengenlehre*		*Unterhaltung*
D	*Determinanten*	N	*Nomographie*	V	*Vektorrechnung*
F	*Fernsehen*		*Normung*	W	*Wahrscheinlichkeitsrechnung*
	Funktionen	O	*Olympiade-Aufgaben*		*Wandzeitung*
G	*Geschichte der Mathematik*		*Optimierung*	Z	*Zahlbereiche*
	Geometrie, analytische	P	*Philosophie*		*Zahlenfolgen*
	Geometrie, darstellende		*Planimetrie*		*Zahlentheorie*
	Gleichungen		*Potenzen*		*Zeitschriften*
	Gruppentheorie		*Programmierung*		*Ziffernsysteme*
I	*Infinitesimalrechnung*		*Prüfungen*		*Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)*

Hand aufs Herz

Die Redaktion der Leipziger Volkszeitung stellte Studenten des ersten Studienjahrs der Karl-Marx-Universität folgende Frage: *Welche Probleme ergeben sich durch die Umstellung von der Oberschule zur Universität?*

Es ist wirklich eine Umstellung vom angeleiteten Arbeiten in der Oberschule zum selbständigen Arbeiten an der Universität. **Jutta Topfstädt**

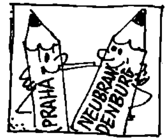
Nach den ersten Wochen weiß man kaum, wo man anfangen soll. Mir fällt es schwer, ohne Anleitung zu arbeiten. **Irmtraud Henschke**

Vorlesungen zu folgen, ist sehr anstrengend, und es kostet Mühe, immer aufzupassen und das Wichtigste zum Mitschreiben herauszufinden. **Bärbel Storch**

Es wird an der Universität bedeutend mehr verlangt als an der Oberschule, *schon zu wissen, wo etwas steht* und wie man die Literatur beschafft, scheint mir eine Kunst zu sein. **Elke Binnewies**

Ähnliche Probleme werden sich für jeden Schüler, der die Schule verläßt, ergeben. Wer schon in seiner Jugend selbständig lernt, wird sich in Lehre und Beruf schnell zurechtfinden und gut vorankommen. Die Werktätigen arbeiten nach einem fest umrissenen Zeit- und Organisationsplan. Der Arzt hat in seinem Schreibtisch eine Patientenkartei. In der Buchhaltung bewährt sich seit langem die Loseblatt-Ablage. In zahlreichen Betrieben geht man mehr und mehr zur Arbeit mit Lochkarten über. So sucht jeder seine vielfältige Tätigkeit durch moderne technische Hilfsmittel zu systematisieren und zu rationalisieren.
Und was tust Du, lieber junger Leser, um rechtzeitig diese Erfahrungswerte des praktischen Lebens zu nutzen?

Mathematischer Leistungsvergleich zwischen Praha und Neubrandenburg



Im Juni 1966 nahm ich an der Eröffnung eines mathematischen Leistungsvergleichs zwischen den Schülern der drei Spezialklassen Mathematik der erweiterten Oberschule Praha 2 und den Besten des Bezirksklubs Mathematik Neubrandenburg teil. Der Freundschaftsbesuch kam auf Vermittlung des Informationsbüros der ČSSR in Berlin zustande. 18 Schüler und vier Lehrer wurden mit vorbildlicher Gastfreundschaft aufgenommen. Die Neubrandenburger konnten in Klassenstufe 11/12 mithalten, in Klassenstufe 10 müssen sie noch tüchtig arbeiten, um an die Leistungen der Schüler aus Praha heranzukommen.
Mit Herrn Professor Emil Calda, einem der beiden Mathematiklehrer der EOS Praha 2, führte ich ein Gespräch, das sicher auch Euch interessieren wird:
Frage: Herr Professor (in der ČSSR werden alle Lehrer der erw. Oberschulen mit Professor angesprochen, d. Red.), wie kann man in der ČSSR Schüler einer erweiterten Oberschule werden?
Antwort: Jeder Schüler einer Abschlußklasse der Oberschule (9. Schuljahr) kann sich an einer erw. Oberschule bewerben. Er muß eine Aufnahmeprüfung in den Fächern Tschechisch (Diktat) und Mathematik machen. Das Abschneiden in diesen beiden Fächern entscheidet über Aufnahme oder Ablehnung.
Frage: Sie sind Klassenleiter einer Spezialklasse Mathematik. Wie kann man Schüler einer solchen werden? Gibt es für diese einen besonderen Lehrplan?
Antwort: Die Schüler, welche einen Aufnahmeantrag stellen, wissen, daß es in unserem Lande in Brno, Bratislava und Praha in jeder Klassenstufe je eine Spezialklasse gibt. Die etwa 36 Schüler, welche bei der Aufnahme im Fach Mathematik an unserer Schule am besten abschneiden, werden in diese Klasse übernommen. In der ersten und zweiten Klasse arbeiten wir nach dem gleichen Plan und mit der gleichen Stundenzahl wie alle Schüler des naturwissenschaftlichen Zuges der erw. Oberschulen der ČSSR. Da sehr gute Schüler in der Spezialklasse beisammensitzen, gelingt es uns natürlich, tiefer in die einzelnen Stoffgebiete vorzudringen. In der 3. Klasse (wir sagen 12. Klasse, d. Red.) haben wir auch den gleichen Plan, aber wöchentlich 8 Stunden Mathematik und 7 Stunden Physik, das sind je 3 Stunden mehr, als den Schülern anderer Klassen erteilt wird. In Aussicht ist gestellt, daß wir einen eigenen Lehrplan erhalten.
Frage: Was tun die Schüler der Spezialklassen außerhalb des Unterrichts zur Verbesserung und Vertiefung ihrer Kenntnisse?
Antwort: Die meisten nehmen an den einzelnen Stufen unserer Mathematik-Olympiaden teil. Wir schneiden meist gut ab. Einige Schüler unserer Schule drangen schon in die Endstufe (Landesolympiade) und sogar bis zu den Internationalen Olympiaden vor. Herr Prof. Dr. Vichin, Delegationsleiter der ČSSR-Mannschaft der letzten Internationalen Olympiaden, hat mit seinen Assistenten der Mathematisch-Physikalischen Fakultät der Karls-Universität an unserer Schule einen Klub eingerichtet, in dem die Besten unserer Stadt und Schule arbeiten können. Von meinen 36 Schülern nahmen 25 an der Mathematik-Olympiade und 11 an der Physik-Olympiade des Landes teil, einige an beiden Olympiaden. Viele unserer Schüler betreiben ein intensives Selbststudium. Sie beschäftigen sich vor allem mit der mathematischen

Literatur, die zur Vorbereitung auf Olympiaden und auf den Besuch unserer Fach- und Hochschulen herausgegeben wird.
Herr Professor Calda, wir wünschen Ihrer und der Neubrandenburger Mannschaft weiterhin viel Erfolg, einen kontinuierlichen Ausbau der geknüpften Beziehungen, vor allem aber Freude und Erholung beim Gegenbesuch Ihrer Mannschaft im Spezialistenlager des Bezirks Neubrandenburg im Seebad Ahlbeck. J. Lehmann

Aufgaben: *Aufnahmeprüfung an erweiterte Oberschulen der ČSSR, 1966*

1. Berechnen Sie
$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)!$$
Setzen Sie $a = 2$ und $b = -1$ und weisen Sie für diesen Fall nach, daß Ihre Umformung richtig ist!
Welche Werte dürfen wir für a und b nicht einsetzen?
2. Lösen Sie die folgende Gleichung und führen Sie die Probe durch:
$$\frac{3}{4}(x-1)-\frac{2}{3}(2x-1)=2-\frac{5}{6}(x+1)!$$
3. Es sind eine Gerade a und ein Strahl b gegeben, dessen Anfangspunkt auf der Geraden a liegt und der mit der Geraden einen Winkel $\alpha = 75°$ bildet. Konstruieren Sie alle Kreise k, die den Radius $r = 2$ cm haben und sowohl die Gerade a als auch den Strahl b berühren!
4. Von k Traktoristen wurde eine Verpflichtung übernommen, wonach jeder von ihnen bei der Frühjahrsbestellung m ha Boden bearbeiten wird. Kurz vor dem Beginn der Arbeiten mußten zwei Traktoristen eine andere wichtige Aufgabe übernehmen. Die übrigen Traktoristen vereinbarten jedoch, den Anteil der ausfallenden Kollegen mit zu übernehmen. a) Wieviel Hektar mußte jetzt jeder von den übrigen Traktoristen bearbeiten? b) Um wieviel Hektar mußte jeder von ihnen seine ursprüngliche Verpflichtung erhöhen? Formulieren Sie den Lösungsweg!
5. Die Höhe einer Seitenfläche der geraden quadratischen Pyramide $ABCDE$ hat die Länge $h' = 12{,}6$ cm. Diese Höhe schließt mit der Ebene der Grundfläche der Pyramide den Winkel $\gamma = 60°$ ein. Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

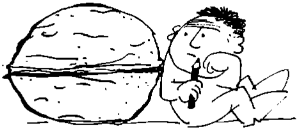
Aufgaben: *Wettbewerb Praha-Neubrandenburg, Juni 1966*

Klassenstufe 9 und 10:
1. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt:
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<1.$$
2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen m, für die das folgende Gleichungssystem reelle Lösungen hat:
$$x-y=m(1+xy)$$
$$2+x+y+xy=0.$$
3. Es sind ein Quadrat $ABCD$, eine Gerade p und ein Punkt S gegeben. Konstruieren Sie eine Strecke $\overline{XY}$, die die folgenden Eigenschaften hat: Ihr Mittelpunkt ist der Punkt S, ihr Endpunkt X liegt auf dem Umfang des Quadrates $ABCD$ und ihr Endpunkt Y liegt auf der Geraden p. Diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Zum Abschluß noch eine Aufgabe aus dem Wettbewerb der Klassenstufe 11/12:
1. Ein Gefäß, das die Form einer Halbkugel hat, ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Neigt man das Gefäß um 30°, so fließen 11 l Wasser heraus. Wieviel Liter Wasser verbleiben im Gefäß?

Wer löst mit?

alpha Wettbewerb



48 Welche natürlichen Zahlen kannst du für a einsetzen, damit die Ungleichungen 5
$48 < 8 \cdot a < 80$ erfüllt sind?
49 Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen: a) Die Differenz aus dem Zehner und dem Einer beträgt 4, wobei der Einer von Null verschieden sein soll; b) vertauscht man die Ziffern einer solchen Zahl, so erhält man eine neue zweistellige Zahl, die kleiner ist als der dritte Teil der ursprünglichen Zahl.
W(5)50 Hans und Günter, zwei begeisterte Briefmarkensammler, treffen sich, um Briefmarken, die sie doppelt besitzen, untereinander auszutauschen. Hans fragt Günter: „Wieviel Briefmarken hast du zum Tauschen mitgebracht?" Günter, ein kleiner Pfiffikus, antwortet: „Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken zum Tausch anzubieten, es sind insgesamt dreißig Stück. Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarische. Die Anzahl der bulgarische Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl der sowjetischen Marken." Wieviel sowjetische Briefmarken hat Günter zum Tauschen mitgebracht? Welche Aussagen kannst du über die Anzahl der polnischen bzw. bulgarische Briefmarken machen?
W(5)51 Die dreißig Schüler einer fünften Klasse befinden sich mit ihrem Klassenlehrer auf einer zweitägigen Exkursion; sie übernachten in einer Jugendherberge. Am Morgen des zweiten Tages wird jeder Schüler gefragt, wieviel frische Brötchen er vom Bäcker haben möchte. Mehr als drei Schüler möchten keine Brötchen, da sie noch ausreichend Verpflegung besitzen. Ebenso viele Schüler wie die, welche auf Brötchen verzichten, möchten je vier Brötchen haben. Davon die doppelte Anzahl von Schülern bestellt je drei, nochmals die gleiche Anzahl von Schülern aber bestellt nur je ein Brötchen. Für den Rest der Schüler sollen je zwei und für den Klassenlehrer genau drei Brötchen mitgebracht werden. Wieviel Brötchen müssen gekauft werden, damit jeder Wunsch berücksichtigt wird und kein Brötchen übrig bleibt?

52 In einem Dreieck ABC betrage der Winkel α genau 58°, und die Seite a sei größer 6
als die Seite c. Ordne die drei Dreieckseiten nach ihrer Größe, ohne das Dreieck zu konstruieren. Gib eine Begründung für dein Ergebnis an!
53 Welche von den nachstehend angeführten vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Die Antwort ist in jedem Falle zu begründen!
a) Jede durch 18 teilbare Zahl ist auch durch 9 teilbar.
b) Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 18 teilbar.
c) Nicht alle Zahlen, die durch 12 teilbar sind, lassen sich auch durch 6 dividieren.
d) Es gibt Zahlen, die durch 24, aber nicht durch 8 teilbar sind.
W(6)54 Bestimme die Menge aller natürlichen Zahlen a, für die die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden: a) $0 < a < 4000$; b) die Zahlen sind durch 4, durch 5 und auch durch 9 zugleich teilbar; c) 8, 25 und 27 sind nicht Teiler von a; d) subtrahiert man von den Zahlen a die Zahl 8, so ist diese Differenz durch 11 teilbar.
W(6)55 Die beiden Klassen 6a und 6b einer Schule hatten bei einem Leistungsvergleich dieselbe Mathematikarbeit geschrieben. Gerd wußte von seiner Klasse, der

6a, daß sie einen Zensurendurchschnitt von genau 2,6 erreicht hatte. Um zu erfahren, welche der beiden Klassen bessere Ergebnisse erzielte, befragte er seinen Freund Klaus, einen Schüler der Klasse 6b, nach dem Ergebnis der Arbeit in dessen Klasse. Klaus antwortete ihm: „Mehr als die Hälfte aller Schüler erhielt die Note ‚Drei‘. Die Note ‚Vier‘ kam häufiger vor als die Note ‚Eins‘, aber nicht so oft wie die Note ‚Zwei‘. Genau ein Neuntel der Gesamtzahl der Schüler meiner Klasse hat entweder eine ‚Eins‘ oder eine ‚Fünf‘ geschrieben. Die Note ‚Vier‘ haben doppelt soviel Schüler erhalten wie die Note ‚Eins‘. Die Anzahl der Noten ‚Eins‘ war größer als das Doppelte, aber kleiner als das Vierfache der Anzahl der Noten ‚Fünf‘. Alle 36 Schüler meiner Klasse haben die Klassenarbeit mitgeschrieben.“ Gerd freute sich daraufhin; denn seine Klasse hatte besser abgeschnitten. Weise nach, daß Gerd richtig gerechnet hatte!

7

56 In der Multiplikationsaufgabe $** \cdot 9* = ***$ ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Wieviel Möglichkeiten gibt es? Gib alle Möglichkeiten an!

57 Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ABC beträgt 14 cm. Eine der Seiten des Dreiecks ist dreimal so lang wie eine andere Seite. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks? Gibt es mehrere Lösungen dieser Aufgabe?

W(7)58 Gegeben sind drei Punkte B, C und D, die innere Punkte einer rechteckigen Zeichenfläche sind. Diese drei Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$, dessen vierter Eckpunkt A außerhalb der Zeichenfläche liegt und somit für die Konstruktion des Parallelogramms unzugänglich ist. Es ist eine Strecke zu konstruieren, die auf der Winkelhalbierenden des Winkels BAD mit dem unzugänglichen Scheitelpunkt A liegt.

W(7) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder einer höheren Klassenstufe!

8

59 Die sowjetische automatische Weltraumstation „Luna 10“ hatte am 30. Mai 1966 zum letztenmal Funkverbindung mit einer sowjetischen Erdstation. Die Meßergebnisse wiesen aus, daß an diesem Tage die kleinste Entfernung dieses künstlichen Mondsatelliten zur Mondoberfläche 379 km, die größte dagegen 985 km betrug. Die Umlaufzeit von „Luna 10“ um den Mond betrug 2 h 58 min 3 s. Es ist die mittlere Geschwindigkeit von „Luna 10“ (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ und in $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$) bei einer annähernd kreisförmigen Bahn um den Mond zu berechnen. Der Durchmesser des Mondes beträgt angenähert 3476 km.

60 In einer Ebene sind $m \cdot n$ Punkte so angeordnet, wie es die Abbildung zeigt.

$$\begin{array}{cccccc}
P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & \cdots & P_{1n} \\
P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & \cdots & P_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & P_{m4} & \cdots & P_{mn}
\end{array}$$

Durch je zwei dieser Punkte ist eine Strecke eindeutig festgelegt. Die Strecken $\overline{P_{ik} P_{mn}}$ und $\overline{P_{mn} P_{ik}}$ sind dabei als gleich anzusehen. Wieviel voneinander verschiedene Strecken sind durch die gegebenen Punkte bestimmt?

W(8)61 Denke dir eine (in dekadischer Darstellung) dreistellige natürliche Zahl, bei der der Hunderter um mindestens 2 größer als der Einer und der Einer größer als Null ist! Vertausche den Hunderter und den Einer miteinander und subtrahiere die so erhaltene Zahl von der gedachten Zahl! Addiere zu diesem Ergebnis diejenige Zahl, die du erhältst, wenn du in dem Ergebnis wieder den Hunderter mit dem Einer vertauschst! Du erhältst als Summe stets die Zahl 1089. Beweise das mit Hilfe von Variablen!

W(8) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder einer höheren Klassenstufe!

62 Aus der „Coß“ von Christoph Rudolff (1525): Ich habe drei Zahlen, die sich wie 9
$1:2:4$ verhalten. Die Summe ihrer Quadrate ist 189. Wie heißen die Zahlen?
Hat diese Aufgabe nur eine Lösung?

63 Man beweise den folgenden Satz: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck zwei Höhen dieses Dreiecks einander gleichlang sind, so ist das Dreieck gleichschenklig. Gilt dieser Satz auch für stumpfwinklige oder rechtwinklige Dreiecke? (Die Antwort ist zu begründen.)

W(9)64 Ein Bogen Papier, der die Form eines Rechteckes $ABCD$ hat, wird einmal so gefaltet, daß die Eckpunkte B und D aufeinander fallen. Das Rechteck habe die Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ mit $a > b$. Die Faltgerade schneide die Seite $\overline{AB}$ in E und die Seite $\overline{CD}$ in F. a) Es soll die Länge k der Strecke $\overline{EF}$ berechnet werden. b) Wie verhält sich k zu der Länge d der Diagonale des Rechtecks?

W(9) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder einer höheren Klassenstufe!

65 Man ermittle alle Lösungen der Gleichung 10

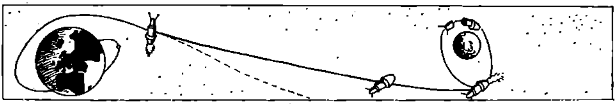
$$\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7 .$$

66 Das Objektiv der Fernsehkamera der sowjetischen automatischen Station „Luna 9“, mit der im Februar 1966 Aufnahmen von der Mondoberfläche gemacht wurden, befand sich in einer Höhe von 60 cm über der Mondoberfläche. a) Wie groß war die Sichtweite (in km) in dieser Höhe? b) Welcher Teil der Mondoberfläche (in km^2) konnte aus dieser Höhe überblickt werden? Dabei sollen etwaige Erhebungen auf der Mondoberfläche unberücksichtigt bleiben. Der Monddurchmesser beträgt 3476 km.

W(10)67 In einem Abteil eines Schnellzuges der Strecke Berlin-Stralsund sitzen drei Herren, die die Familiennamen Neumann, Müller bzw. Schulze tragen. Von diesen Fahrgästen ist uns bekannt: 1.) Einer von ihnen wohnt in Karl-Marx-Stadt, einer in Berlin und einer in Erfurt. 2.) Diese drei Reisenden haben ein unterschiedliches Hochschulstudium abgeschlossen, und zwar als Chemiker, Mathematiker bzw. Physiker. 3.) Ihre verschiedenen Reiseziele sind Stralsund, Greifswald und Schwedt. 4.) Der Physiker wohnt in Karl-Marx-Stadt. 5.) Der Fahrgast, der nach Stralsund fährt, ist 30 Jahre alt. 6.) Der Mathematiker ist bereits 43 Jahre alt. 7.) Das Lebensalter von Herrn Neumann beträgt 39 Jahre. 8.) Der Chemiker fährt nach Schwedt. 9.) Herr Schulze wohnt in Berlin.
Ermittele unter Angabe einer logischen Begründung den Familiennamen des Physikers!

P. Enskonatus, DDR-Teilnehmer an der VIII. IMO

W(10) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder der Klassenstufe 11/12!



Lösungen

(Einige Lösungen werden erst in den folgenden Heften veröffentlicht.)

2 Im Beispiel (2) und im Beispiel (3).

3 $4 \in M \quad 8 \notin M \quad 10 \in M \quad 0 \in M$

4 $P\{=\}2$. Diese Menge besteht also aus einem Element, nämlich der Zahl 2.

5 Ja, die unter (3) angegebene Menge ist leer.

6 Die Beziehung der Gleichheit. $Q = R$.

7 $\{e, m, u\}$; $\{e, m\}$; $\{e, u\}$; $\{m, u\}$; $\{e\}$; $\{m\}$; $\{u\}$; $\emptyset$.
Es sind $2^3 = 8$ Teilmengen. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

8 $(16 \cdot 6 + 24) : 6 - 7 = x$. Daher ist $x = 13$. Hans ist 13 Jahre alt.

9 Mit Hilfe folgender Gleichungen können wir die gesuchten Winkel leicht konstruieren:
$\alpha_1 = 45° + 30°$; $\alpha_2 = 45° - 30°$;
$\alpha_3 = 60° + 60° + 45°$ oder
$\alpha_3 = 90° + 30° + 45°$; $\alpha_4 = 60° + 45°$.

10 Aus $x < z$, $x < v$, $v < y$, $z < v$, $x < y$, $z < y$ folgt $x < z < v < y$.

11 Da das zweite Fahrzeug 400 km weniger als das erste zurücklegte, hätte es auf 400 km zurückgelegtem Weg 36 l Kraftstoff verbraucht, d. h. auf 100 km genau 9 l. Beide Fahrzeuge legten zusammen die Fahrstrecke von 2000 km zurück; sie verbrauchten also zusammen 180 l Kraftstoff.

14 Die Ungleichung allein betrachtet, wird von den Elementen der Menge
$\{343, 344, 345, \ldots, 353, 354, 355\}$ erfüllt.
Unter Beachtung der jeweils zusätzlich gestellten Bedingungen erhalten wir für:
a) $\{344, 346, 348, 350, 352, 354\}$; b) $\{345, 348, 351, 354\}$; c) $\{348, 354\}$; d) $\{344, 346, 350, 352\}$; e) $\{345, 351\}$; f) Es gibt keine Zahl, die die gestellten Beding. erfüllt, die Menge ist leer; g) $\{350\}$; h) $\{344, 345, 346, 350, 351, 352\}$; i) $\{344, 345, 346, 348, 350, 351, 352, 354\}$; k) $\{348\}$.

15 Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist. Aus $4 \mid 20$, $4 \mid 24$, $4 \mid 28$ folgt zunächst $52\square20$, $52\square24$, $52\square28$. Die Quersummen der noch unvollständigen Zahlen betragen (unter Auslassung der Leerstelle) 9, 13, 17. Also muß die erste Leerstelle mit 0 oder 9, die zweite mit 5, die dritte mit 1 belegt werden. Wir erhalten die Zahlen 52020, 52920, 52524, 52128.

16 Vor zwei Jahren beteiligten sich x Schüler, vor einem Jahr beteiligten sich $2x$ Schüler, in diesem Jahr beteiligten sich $6x$ Schüler. Es gilt $216 = 6x$, also $x = 36$. Vor zwei Jahren waren es nur 36, vor einem Jahr schon 72, in diesem Jahr aber 216 Teilnehmer.

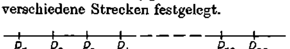
17 Scheitelwinkelpaare: $\sphericalangle AGF = \sphericalangle DGH$, $\sphericalangle AGD = \sphericalangle FGH$, $\sphericalangle GHF = \sphericalangle EHB$, $\sphericalangle GHE = \sphericalangle BHF$;
Nebenwinkelp.: $\sphericalangle AGF + \sphericalangle FGH = 180°$,
$\sphericalangle AGD + \sphericalangle AGF = 180°$,
$\sphericalangle AGD + \sphericalangle HGD = 180°$,
$\sphericalangle HGD + \sphericalangle HGF = 180°$,
$\sphericalangle GHF + \sphericalangle FHB = 180°$,
$\sphericalangle FHB + \sphericalangle BHE = 180°$,
$\sphericalangle BHE + \sphericalangle EHG = 180°$,
$\sphericalangle EHG + \sphericalangle GHF = 180°$;
Stufenwinkelpaare: $\sphericalangle GDE = \sphericalangle FGH$, $\sphericalangle DEH = \sphericalangle GHF$, $\sphericalangle CAG = \sphericalangle FGH$, $\sphericalangle HBC = \sphericalangle GHF$;
Wechselwinkelpaare: $\sphericalangle AGD = \sphericalangle GDE$, $\sphericalangle BHE = \sphericalangle DEH$, $\sphericalangle EHB = \sphericalangle HBC$, $\sphericalangle CAG = \sphericalangle AGD$;
Paare entgegengesetzt liegender Winkel: $\sphericalangle EDG + \sphericalangle HGD = 180°$, $\sphericalangle GHE + \sphericalangle DEH = 180°$, $\sphericalangle CAG + \sphericalangle AGF = 180°$, $\sphericalangle FHB + \sphericalangle HBC = 180°$.

20 Die ursprüngliche Zahl sei $7 \cdot 100000 + x$. Dann ist die neue Zahl $100 \cdot x + 70$.
Nach der Voraussetzung ist
$(7 \cdot 100000 + x)\,2 = 100x + 70$.
Daraus folgt

$$1400000 + 2x = 100x + 70,$$
$$98x = 1399930,$$
$$x = \frac{1399930}{98} = 14285.$$

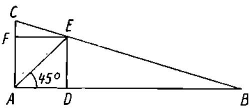
Die ursprüngliche Zahl ist also 714285. Streicht man die 7, hängt man sie hinten an und fügt noch die Ziffer 0 hinzu, so erhält man 1428570. Tatsächlich gilt
$714285 \cdot 2 = 1428570$.

21 Jeder Punkt P_i der Geraden g läßt sich mit den übrigen 19 Punkten verbinden; es entstehen so 19 Strecken. Insgesamt erhalten wir dann $20 \cdot 19$ Strecken, also 380 Strecken; dabei wurden alle Strecken doppelt gezählt, denn die Strecke $\overline{P_i P_k}$ ist gleich der Strecke $\overline{P_k P_i}$. Wir müssen unser Ergebnis also noch durch 2 dividieren. Durch die 20 Punkte werden auf der Geraden g genau 190 voneinander verschiedene Strecken festgelegt.



22 Auf Grund der Voraussetzung kann genau einer der folgenden Fälle eintreten:
1.) $a = 0$, 2.) $a < 0$, 3.) $a > 0$.
Zu 1. In diesem Falle wäre wegen $a = b^2(b^2 + c^2)$ auch $b = 0$, was der Voraussetzung widerspricht.
Zu 2. Dieser Fall ist wegen $b^2(b^2 + c^2) \geq 0$ nicht möglich.
Zu 3. Daher ist $a > 0$. Ferner ist $b \neq 0$, also $b < 0$. Daher ist $c = 0$.

23 Die Figur zeigt das gegebene rechtwinklige Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{BC}$. Die Gerade AE sei die Winkelhalbierende des rechten Winkels mit dem Scheitelpunkt A. E ist der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit der Hypotenuse $\overline{BC}$. Jeder Punkt einer Winkelhalbierenden hat von den beiden Schenkeln des halbierten Winkels den gleichen Abstand. $\overline{ED}$ und $\overline{EF}$ seien die von E auf die Katheten gefällten Lote. Daher gilt $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle FAD = 90°$ und damit auch $\sphericalangle FED = 90°$. Das Viereck $ADEF$ ist demnach ein Rechteck, in dem die benachbarten Seiten $\overline{FE}$ und $\overline{ED}$ gleich lang sind, d. h. das Viereck $ADEF$ ist ein Quadrat. Aus dieser Analyse ergibt sich die Konstruktion des Quadrates $ADEF$.



26 Man benötigt zum Numerieren der Seiten 1 bis 9 genau 9 Ziffern, der Seiten 10 bis 99 genau $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern. Für die Buchseiten mit einer dreistelligen Zahl verbleiben uns noch $876 - 189 = 687$ Ziffern. Nun gilt $687 : 3 = 229$. Es verbleiben also noch 229 Seiten mit einer dreistelligen Zahl. Das Buch umfaßt demnach $99 + 229 = 328$ Seiten. Aus der nachstehenden Tabelle ist ersichtlich, wie oft die Ziffern 0 bis 9 beim Numerieren der Seiten auftreten.

Ziffer	Hunderter-stelle	Zehner-stelle	Einer-stelle	Insges.
0	—	30mal	32mal	62mal
1	100mal	40mal	33mal	173mal
2	100mal	39mal	33mal	172mal
3	29mal	30mal	33mal	92mal
4 bis 8	—	je 30mal	je 33mal	315mal
9	—	30mal	32mal	62mal
				876mal

27 Der erste Faktor sei gleich $10a + b$, wobei a und b natürliche Zahlen mit $1 \leqq a \leqq 9$ und $1 \leqq b \leqq 9$ sind. Dann ist der zweite Faktor gleich $10a + (10 - b)$, und man erhält

$$\begin{aligned}
&(10a + b)\ (10a + 10 - b) \\
&= 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2 \\
&= 100a^2 + 100a + 10b - b^2 \\
&= 100a\,(a + 1) + b\,(10 - b).
\end{aligned}$$

Für unser Beispiel gilt

$$83 \cdot 87 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 7221.$$

Man erhält also das Produkt, indem man den (gemeinsamen) Zehner mit dem um 1 vermehrten Zehner multipliziert und hinter dieses Ergebnis das Produkt der Einer schreibt. Ist das Produkt der Einer kleiner als 10, so muß noch die Ziffer 0 eingefügt werden, z. B. $83 \cdot 82 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 7206$.

28 Die beiden zu bestimmenden natürlichen Zahlen seien mit x und y bezeichnet. Die in der Aufgabe gestellten Bedingungen führen zu dem folgenden Gleichungssystem:

$$\frac{xy}{3} = x + y, \qquad \frac{xy}{6} = x - y.$$

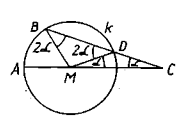
Durch Addition erhalten wir

$$\frac{xy}{3} + \frac{xy}{6} = x + y + x - y, \quad \frac{xy}{2} = 2x,$$

$$xy = 4x, \quad xy - 4x = 0, \quad x\,(y - 4) = 0.$$

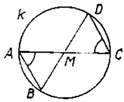
Die Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 0$ oder $y = 4$ ist.
Wir belegen die erste Gleichung unseres Systems
a) mit $x = 0$ und erhalten $y = 0$,
b) mit $y = 4$ und erhalten $x = 12$.
Die beiden geordneten Paare [0,0] und [12,4] erfüllen unser Gleichungssystem. Die Aufgabe hat also zwei Lösungen. Die Probe sei dem Leser überlassen.

29 Es sei $\sphericalangle ACB = \alpha$ und $\sphericalangle AMB = \delta$. Aus der Voraussetzung $\overline{MD} = \overline{CD}$ folgt, daß das Dreieck MCD gleichschenklig und damit $\sphericalangle DMC = \sphericalangle ACB = \alpha$ ist. $\sphericalangle MDB$ ist Außenwinkel des Dreiecks MCD, also $\sphericalangle MDB = 2\alpha$. Aus $\overline{BM} = \overline{DM} = r$ folgt, daß das Dreieck DBM gleichschenklig und damit $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MDB = 2\alpha$ ist. $\sphericalangle AMB$ ist Außenwinkel des Dreiecks MCB, also $\sphericalangle AMB = \delta = 3\alpha$.

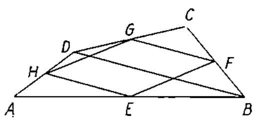


30 Es sei M der Mittelpunkt des Kreises k, und die Punkte A, M und C liegen auf einer Geraden. Dann folgt aus der Voraussetzung $AB \parallel CD$, daß $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACD$ als Wechselwinkel einander gleich sind. Ferner gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$, also sind die gleichschenkligen Dreiecke ABM und CDM einander kongruent. Aus der Kongruenz der

Dreiecke folgt $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$. Nun ist $\sphericalangle BMC$ Nebenwinkel zu $\sphericalangle AMB$. Aus $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$ folgt $\sphericalangle BMC + \sphericalangle DMC = 180°$. Die Punkte B, M und D liegen daher auf einer Geraden.



31 Wir ziehen die Diagonale $\overline{BD}$. Dann folgt aus der Umkehrung des Strahlensatzes: $FG \parallel BD$, $EH \parallel BD$, also $FG \parallel EH$.
Mit Hilfe der Diagonale $\overline{AC}$ beweist man analog $EF \parallel GH$.
Daher ist das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm.



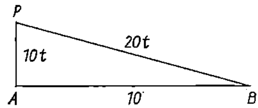
34 Es seien x die Anzahl der anwesenden Jungen und y die Anzahl der anwesenden Mädchen. Dann ist, wie der Lagerleiter festgestellt hat, $x - y = 6$. Daher sind die Zahlen x und y entweder beide gerade oder beide ungerade. Wäre nun die Meldung von Helga richtig, so hätte die Gruppe $(x + 2) + y = (x + y) + 2$ Teilnehmer. Diese Zahl ist aber in jedem Falle eine gerade Zahl; denn die Summe zweier gerader Zahlen, aber auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, wonach 27 Teilnehmer zur Gruppe gehören. Helga irrt sich also; der Lagerleiter hatte recht.
35 Es seien A und B die Standorte der beiden Boote um 10.30 Uhr und P der Treffpunkt nach t Stunden. Dann sind die Maßzahlen der Entfernungen (in Seemeilen) $\overline{AP} = 10t$, $\overline{BP} = 20t$, $\overline{AB} = 10$. Da das Dreieck ABP rechtwinklig ist, gilt

$$(20t)^2 = (10t)^2 + 10^2,$$
$$400t^2 = 100t^2 + 100,$$
$$300t^2 = 100, \quad t^2 = \frac{1}{3};$$

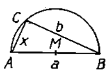
hieraus folgt wegen $t > 0$

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577.$$

Die beiden Küstenschutzboote treffen sich nach 0,577 h (das sind 34 min 37 s), also um $11^{\mathrm{h}}04^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}}$. Das erste Boot legt dabei die Entfernung von $10 \cdot 0{,}577$ sm $= 5{,}77$ sm, das zweite Boot die Entfernung von
$20 \cdot 0{,}577$ sm $= 11{,}54$ sm zurück.



36 Ist x die Länge des gesuchten Quadrates, so gilt $x^2 = a^2 - b^2$. Man zeichnet daher die Strecke $\overline{AB} = a$, konstruiert über $\overline{AB}$ den Thaleskreis und schlägt um B mit dem Radius b einen Kreis, der den Thaleskreis in C schneidet. Dann ist $\overline{AC} = x$ die Seite des gesuchten Quadrates.



37 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a \geqq b$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2 . \end{aligned}$$

Der Term $2a^2 + 2b^2$ läßt sich also als Summe der Quadrate der beiden natürlichen Zahlen $a + b$ und $a - b$ darstellen.
40 Die Anzahl der Teilnehmer sei x. Da jeder Teilnehmer genau eine Partie mit jedem der übrigen $x - 1$ Teilnehmer spielt und da 231 Partien gespielt werden, gilt

$$\frac{x(x-1)}{2} = 231, \tag{1}$$

also $x(x - 1) = 462.$ (2)

Die quadratische Gleichung
$x^2 - x - 462 = 0$ hat die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 462} = \frac{1}{2} + \frac{43}{2} = 22$$
und $$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{43}{2} = -21,$$

von denen nur die Lösung $x_1 = 22$ den Voraussetzungen entspricht. Das Turnier hat daher 22 Teilnehmer.
Bemerkung: Noch schneller kommt man zu

dem Ergebnis, wenn man berücksichtigt, daß wegen Gleichung (2) gilt

$$(x-1)^2 < x(x-1) = 462,$$

also $x - 1 < 22$, d. h. $x < 23$;

$$x^2 > x(x-1) = 462,$$

also $x > 21$.

Daraus folgt $x = 22$.

41 Es sei x die Maßzahl der Kantenlänge eines Würfels. Dann ist die Maßzahl der Länge einer Raumdiagonale dieses Würfels $x\sqrt{3}$, also die Maßzahl der Gesamthöhe der Würfelmontage $3x\sqrt{3}$. Nun ist nach Voraussetzung

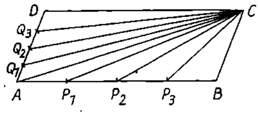
$$3x\sqrt{3} = 6, \text{ also } x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Daher ist die Maßzahl der Gesamtoberfläche der drei Würfel

$$A_o = 3 \cdot 6x^2 = 3 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = 24.$$

Es muß also Farbe für die Fläche von 24 m² bereitgestellt werden.

42 Man teilt die Strecke $\overline{AB}$ in vier gleiche Teile mit den Teilpunkten P_1, P_2, P_3 und die Strecke $\overline{AD}$ in vier gleiche Teile mit den Teilpunkten Q_1, Q_2, Q_3. Man verbindet den Punkt C mit den Punkten Q_3, Q_2, Q_1, A, P_1, P_2, P_3 und erhält eine Zerlegung des Parallelogramms $ABCD$ in acht Teildreiecke, die einander paarweise flächengleich sind. Da nämlich die Teildreiecke ABC und ACD einander kongruent sind, sind die Flächeninhalte dieser Dreiecke einander gleich und gleichen dem halben Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.



Die Teildreiecke ACQ_1, Q_1CQ_2, Q_2CQ_3, Q_3CD sind paarweise einander flächengleich, da sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen besitzen. Die Summe ihrer Flächeninhalte ist gleich dem halben Flächeninhalt des Parallelogramms. Die gleichen Überlegungen treffen auch auf die restlichen vier Teildreiecke zu. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also achtmal so groß wie der Flächeninhalt jedes der acht Teildreiecke.

43 Ist x eine Lösung der Ungleichung

$$\frac{2x-3}{1+5x} > 2,$$

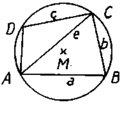
so gilt $\dfrac{2x-3}{1+5x} - 2 > 0$,

$$\frac{2x-3-2-10x}{1+5x} > 0,$$

$$\frac{-8x-5}{1+5x} > 0.$$

Der Term $\dfrac{-8x-5}{1+5x}$ soll also bei einer Belegung der Variablen x positiv werden; wir müssen daher zwei mögliche Fälle unterscheiden: a) $-8x - 5 > 0$ und $1 + 5x > 0$, d. h. $x < -\frac{5}{8}$ und $x > -\frac{1}{5}$. Beide Ungleichungen sollen erfüllt werden; die Lösungsmenge ist leer, d. h., es existieren keine reellen Zahlen, die beide Bedingungen zugleich erfüllen. b) $-8x - 5 < 0$ und $1 + 5x < 0$, d. h. $x > -\frac{5}{8}$ und $x < -\frac{1}{5}$. Beide Ungleichungen sollen erfüllt werden, d. h., genau diejenigen reellen Zahlen, für die $-\frac{5}{8} < x < -\frac{1}{5}$ gilt, erfüllten auch die geg. Ungleichung $\dfrac{2x-3}{1+5x} > 2$.

44 Von dem Sehnenviereck $ABCD$ sind gegeben die Längen der Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CD} = c$ sowie die Länge der Diagonale $\overline{AC} = e$. Man konstruiert daher zunächst das Teildreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und e, errichtet auf zwei Seiten die Mittelsenkrechten und erhält als ihren Schnittpunkt den Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$. Dann schlägt man um C einen Kreis mit dem Radius c, der den Umkreis (im allgemeinen) in zwei Punkten D und D' schneidet.



Die Sehnenvierecke $ABCD$ und $ABCD'$ haben die verlangten Eigenschaften.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (21./22.1.1967)

Klassenstufe 7

1. Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist. Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$!

2. In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe: Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

3. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$.
Beschreibe eine Konstruktion von p!
Untersuche, ob es stets genau eine solche Parallele p gibt!

4. Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ unkürzbar und keine ganzen Zahlen sind.
Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung, wobei
im 1. Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im 2. Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im 3. Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

5. Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz: Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

6. In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ habe $\sphericalangle ACB$ ein Gradmaß von 120°. Beweise, daß die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

Klassenstufe 8

1. Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm. Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

2. Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E. Die Parallelen durch M_2 schneiden AB in F und AC in G.
Beweise, daß der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

3. Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d. h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft so viel Wasser, daß genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleiben.
Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

4. Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln ist bekannt, daß jeder Schlüssel zu genau einem Koffer paßt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört. Jemand ermittelt dies durch Probieren, wobei jede Probe darin besteht, daß er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, daß für jeden einzelnen Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann

genau so viel Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.
Welches ist a) die kleinste, b) die größte Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, daß genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

5. In einer Ebene sind drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben. Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

6. Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18-stellige Zahl?

Klassenstufe 9

1. Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.
Beweisen Sie, daß für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

2. Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Sind bei einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

3. Beweisen Sie die folgende Behauptung!
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

4. Zeigen Sie, daß es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

5. Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1 \neq v_2$ ist. Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

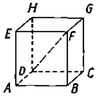
a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in $\mathrm{m \cdot min^{-1}}$)?

6. In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt! Man untersuche, wieviele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann!

Klassenstufe 10

1. Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$.



Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A, B, C, G, H, E von der Diagonalen DF!

2. Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c} \text{ gilt!}$$

3. Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:
$\overline{AB} = 30$, $\overline{AE} = 63$, $\overline{AF} = 50$, $\overline{BF} = 40$, $\overline{CD} = 49$, $\overline{CE} = 200$, $\overline{DF} = 38$.
Welche Entfernung haben B und D voneinander?

4. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung $x^2 + x + 3 = k(x^2 + 5)$ eine in x quadratische Gleichung ist, die

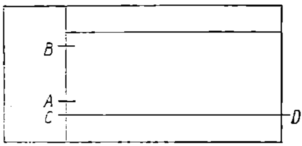
a) eine Doppellösung hat;

b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

5. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{1}{2}\lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} > 1$$

6. Die Abbildung stellt den Grundriß eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen. Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln,



von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\sphericalangle APB$ zu verstehen.
Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.
Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

Klassenstufe 11/12

1. In ein und derselben Ebene seien n-Punkte ($n \geqq 2$) so verteilt, daß es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können!

2. Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand zwischen den Geraden BC und AM?
(Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g, h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.)

3. Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist, und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist!
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

4. Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5} \text{ genügen!}$$

Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z. B. ist

$$\left[\frac{13}{2}\right] = 6,\ [-6{,}5] = -7 \text{ und } [6] = 6.$$

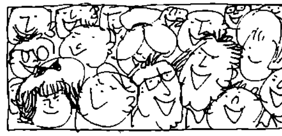
5. Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ nebeneinander aufgestellt. Ein Umordnungsbefehl bestehe darin, daß jeder entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt. Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, \ldots, n-1$ entsteht!

6. Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten.
Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln!

Aus dem Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962

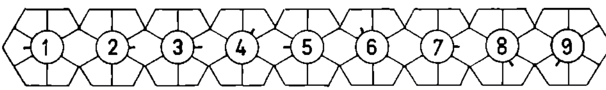
Die Förderung erfolgreicher Teilnehmer der mathematischen Olympiaden und anderer mathematisch befähigter Schüler ist eine gemeinsame Aufgabe der Schulen und Volksbildungsorgane, der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Wissenschaftler der Hoch- und Fachschulen, der wissenschaftlich-technischen Kader der Betriebe und Forschungsstätten sowie der gesellschaftlichen Organisationen.

In freien Stunden
alpha heiter



Wortschatz im Sechseck

Neun Wörter sind im mathematisch positiven Sinn einzutragen. Sie sollen jeweils in dem Feld mit dem Strich beginnen.



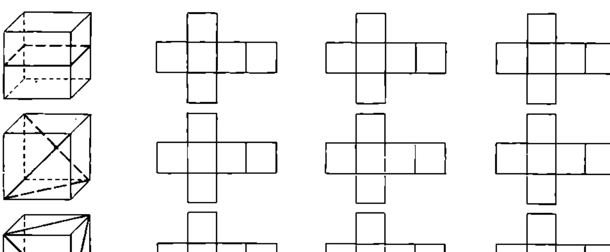
1. natürliche Zahl 2. griechischer Buchstabe 3. Astronom und Mathematiker 4. Zahl, die multipliziert werden soll 5. halber Durchmesser 6. Zeiteinheit 7. Kreisauschnitt 8. Lernkollektiv einer Schule 9. zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt.

Erst Buchstaben, dann Ziffern!

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, daß in den Zeilen und Spalten richtige Ergebnisse entstehen. Wieviel verschiedene Lösungen hat die Aufgabe?

$$\begin{array}{ccccc} ed & + & ce & = & ga \\ - & & - & & - \\ bd & + & ba & = & cd \\ \hline fa & + & be & = & ee \end{array}$$

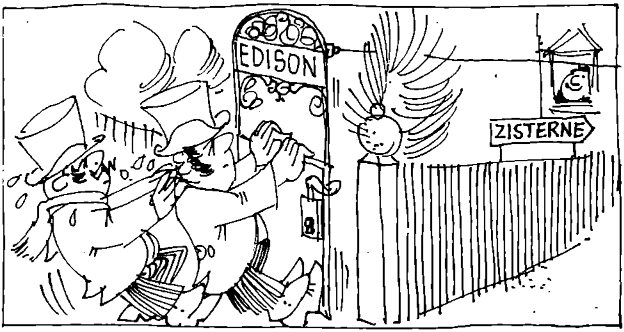
Nicht im Netz verfitzen



Tragt in die Würfelnetze (Abwicklungen) je drei verschiedene Möglichkeiten ein, wie die stark eingezeichneten Linien am Würfel in den Abwicklungen erscheinen können!

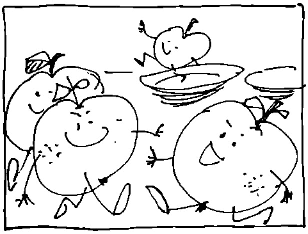
Die unvermutete Pointe

Edison (1847 bis 1931) hatte viel Sinn für geistreiche Späße. Seine zahlreichen Gäste wunderten sich oft, mit welcher Mühe sie das Gartentor vor seinem Haus aufmachen mußten. Schließlich sagte einer der Freunde zu dem großen Erfinder: „Ein solch technisches Genie wie du könnte doch ein Gartentor zustande bringen, das richtig funktioniert!“ Edison erwiderte lächelnd: „Mein Tor ist ganz vernünftig eingerichtet. Ich habe es an der Zisterne angeschlossen. Jeder, der zu mir kommt, pumpt mir 20 Liter Wasser in die Zisterne.“



● Als Edison statt eines 20 l-Gefäßes ein 25 l-Gefäß verwendete, waren 12 Besucher weniger nötig, um die Zisterne zu füllen. Wir groß war das Fassungsvermögen der Zisterne?

● Angenommen, Edison hätte 3 Eingänge A, B und C gehabt und die Zisterne faßte 200 l. Tor A wäre mit einem Gefäß verbunden, das 20 l in die Zisterne pumpt, Tor B 25 l und Tor C 35 l. Welche Kombinationsmöglichkeiten gibt es dann, die leere Zisterne zu füllen? Es sollen auch die Varianten erfaßt werden, bei denen ein oder zwei Tore nicht benutzt werden.



Auf dem Tisch stehen 3 Schalen mit Äpfeln. Legt man aus der 1. Schale einen Apfel in die 2. Schale, dann aus der 2. Schale zwei Äpfel in die 3. Schale und schließlich aus der 3. Schale drei Äpfel in die 1. Schale, so sind in allen Schalen gleichviel Äpfel.
Wieviel Äpfel waren in jeder Schale?
Ist die Lösung eindeutig?
Welches ist die Mindestzahl von Äpfeln, damit das Experiment gelingt?
Löse das Problem allgemein!

Und wer sendet an die Redaktion heitere Vignetten, Rätsel, Anektoden aus dem Mathematikunterricht, der Arbeitsgemeinschaft, der Freizeit?

ALFRÉD RÉNYI

Dialoge über Mathematik

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967 · etwa MDN 9,80
Für Arbeitsgemeinschaftsleiter, Lehrer und talentierte Schüler (unter Anleitung Erwachsener)

Dieses Taschenbuch in Glanzbroschur erscheint im zweiten Halbjahr 1967. Die drei fingierten Dialoge — zwischen Sokrates und Hippokrates, zwischen Archimedes und Heron, Galilei und seiner Wirtin Niccolini — entstammen Vorträgen, die der weit über die Grenzen seines Landes hinaus bekannte Mathematiker in Ungarn und in den USA gehalten hat. Es geht ihm darum, Wesen und Bedeutung seines Fachgebiets zu verdeutlichen. Nachfolgend veröffentlichen wir eine Leseprobe aus dem Buch:

Die Sprache des Buches der Natur

Frau Niccolini: ... Danach ist das ganze Weltall so, wie ein mächtiges Uhrwerk, in dem sich die Räder vom kleinsten bis zum größten nach genauen Gesetzen bewegen.
Galilei: Diese wunderbaren Regelmäßigkeiten bilden nur ein Kapitel aus dem Buch der Natur. In der Natur gibt es aber auch reichlich Zufall, Unregelmäßigkeit, Unberechenbarkeit!
Frau Niccolini: Wie verstehen Sie das?
Galilei: Denken Sie nur an die neuen Sterne, die von Zeit zu Zeit, wie etwa vor 60 Jahren, unerwartet am Himmel erscheinen, einige Jahre immer glänzender strahlen, nachher ebenso unerwartet, wie sie kamen, im Nichts verschwinden. Denken Sie an die Sonnenflecken, die sich nahe der Oberfläche der Sonne um die Sonne drehen, sich einmal vergrößern, sich dann wieder vermindern, auftauchen, sich zusammenballen und wieder verschwinden. Das Weltall ähnelt nicht in allem einem Uhrwerk, in vieler Hinsicht gleicht es eher einer unberechenbaren, launischen Frau.
Frau Niccolini: Aus dem, was Sie sagen, scheint zu folgen, daß es im Buch der Natur auch Kapitel gibt, die nicht in der Sprache der Mathematik geschrieben sind, weil sie, wie Sie sagen, unberechenbar sind.
Galilei: Sie irren sich, Signora, aber Ihr Irrtum ist verständlich; denn die mathematische Beschreibung der zufälligen Erscheinungen steckt noch in den Kinderschuhen; trotzdem ist sie möglich, wie ich vor kurzem an einem einfachen Beispiel gezeigt habe.
Frau Niccolini: Erzählen Sie mir von diesem Beispiel!
Galilei: Es handelt sich um das Würfelspiel, dieses uralte und auch heute noch populäre Glücksspiel. Wenn wir mit einem Würfel würfeln, hängt es ganz vom Zufall ab, welche seiner Seiten nach oben zeigt. Wenn diese Seiten wie gewöhnlich mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Augen bezeichnet sind und wir nur einmal würfeln, können wir nur behaupten, daß die gewürfelte Zahl irgendeine dieser sechs Zahlen sein wird. Wenn wir aber oft würfeln, kann man gewisse Gesetzmäßigkeiten beobachten: schreiben wir die Augenzahlen auf, so werden alle sechs nahezu ebenso oft vorkommen. Noch interessanter ist es aber, wenn wir mit zwei Würfeln zugleich würfeln und die Augenzahlen beider Würfel addieren. Welche Regelmäßigkeiten darf man bezüglich dieser Summe erwarten?
Frau Niccolini: Es ist klar, daß als Summe jede Zahl zwischen 2 und 12 auftreten kann.
Galilei: Das ist wahr, aber diese 11 Möglichkeiten werden nicht gleich oft vorkommen. Die 7 wird am meisten vorkommen, ungefähr in $\frac{1}{6}$ aller Fälle, dann 6 und 8, beide in angenähert $\frac{5}{36}$ der Fälle, 5 und 9 in je $\frac{1}{9}$ der Fälle, während die Summe in $\frac{1}{12}$ aller

Fälle 4 bzw. 10 sein wird, in $\frac{1}{18}$ Fälle wird sie 3 bzw. 11 sein, während schließlich 2 und 12 nur in $\frac{1}{36}$ aller Fälle vorkommen werden.

Frau Niccolini: Das klingt ja sehr geheimnisvoll. Was ist der Grund dafür?

Galilei: Es ist sehr einfach zu erklären! Beispielsweise können wir 4 auf drei Arten als Summe werfen, erstens so, daß der erste Würfel 1, der zweite 3 zeigt; zweitens, daß der erste Würfel 3 und der zweite 1 zeigt und drittens so, daß beide Würfel 2 zeigen. Dagegen können wir 12 nur auf eine einzige Art als Summe bekommen, nur dann nämlich, wenn wir mit beiden Würfeln eine 6 werfen. Deshalb wird unter den Summen 4 dreimal so oft vorkommen wie 12.

Frau Niccolini: Einmal werde ich im Würfelspiel dieses Gesetz der Mathematik des Zufalls ausprobieren. Glauben Sie, daß ich dadurch, daß ich es kenne, viel gewinnen könnte?

Galilei: Ein Spiel ist dann gerecht, wenn die Regeln so aufgestellt sind, daß kein Spieler in einer besseren Lage ist. Wenn man die Regeln schlecht aufstellt, dann kann natürlich einer der Spieler viel gewinnen, wenn er lange genug spielt und wenn er genug Geld hat, um so lange zu spielen, bis die Gesetze des Zufalls zur Geltung kommen.

Frau Niccolini: Ich dachte nie, daß auch im Glücksspiel Mathematik verborgen ist. Wie nennt man diesen Zweig der Mathematik?

Galilei: Er ist so neu, daß er noch keinen Namen hat.

Frau Niccolini: Wie ist es möglich, daß man sich nicht früher damit beschäftigt hat?

Galilei: Die Mathematiker, die gewohnt sind, sich mit Regelmäßigkeiten, mit genauen Zusammenhängen zu beschäftigen, schreckten bis vor Kurzem davor zurück, sich mit dem Zufall zu befassen, weil es auf den ersten Blick so scheint, als ob für sie nichts zu holen wäre. Auch hier hat sich die Autorität des Aristoteles hemmend ausgewirkt, nach dessen Meinung der Gegenstand der Mathematik das Unveränderliche ist. Was aber kann Veränderlicher sein als der launenhafte Zufall! Selbst noch viel ältere Vorurteile haben hier mitgewirkt. Seit uralten Zeiten hat man in zufälligen Erscheinungen, wie dem Würfelspiel, dem Vogelflug, den unregelmäßigen Linien in der Leber von Opfertieren usw. den Willen Gottes zu sehen geglaubt und sie mit ehrfürchtigem Schaudern betrachtet; man empfand es beinahe als Gotteslästerung, wenn jemand diese zufälligen — also göttlichen — Erscheinungen mit dem menschlichen Verstand zu erforschen wagte. Aber der Mensch hat seinen Verstand dazu, daß er ihn benutzt.

Frau Niccolini: An der Mathematik — soweit ich sie von Ihnen gelernt habe, denn mehr kenne ich nicht davon — gefällt mir, daß sie imstande ist, die verwickeltsten Sachen einfach zu machen, daß im Glanze ihres Lichtes Dinge, die vorher undurchsichtig und unverständlich waren, kristallklar und deutlich werden.

Az "alpha" fiatal olvasóinak sok sikert kívánok matematikai tanulmányaikhoz. Rényi Alfréd

Ich wünsche den jungen Lesern von „alpha" viel Erfolg bei ihren mathematischen Studien.

Rényi Alfréd

Mathematisches Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften