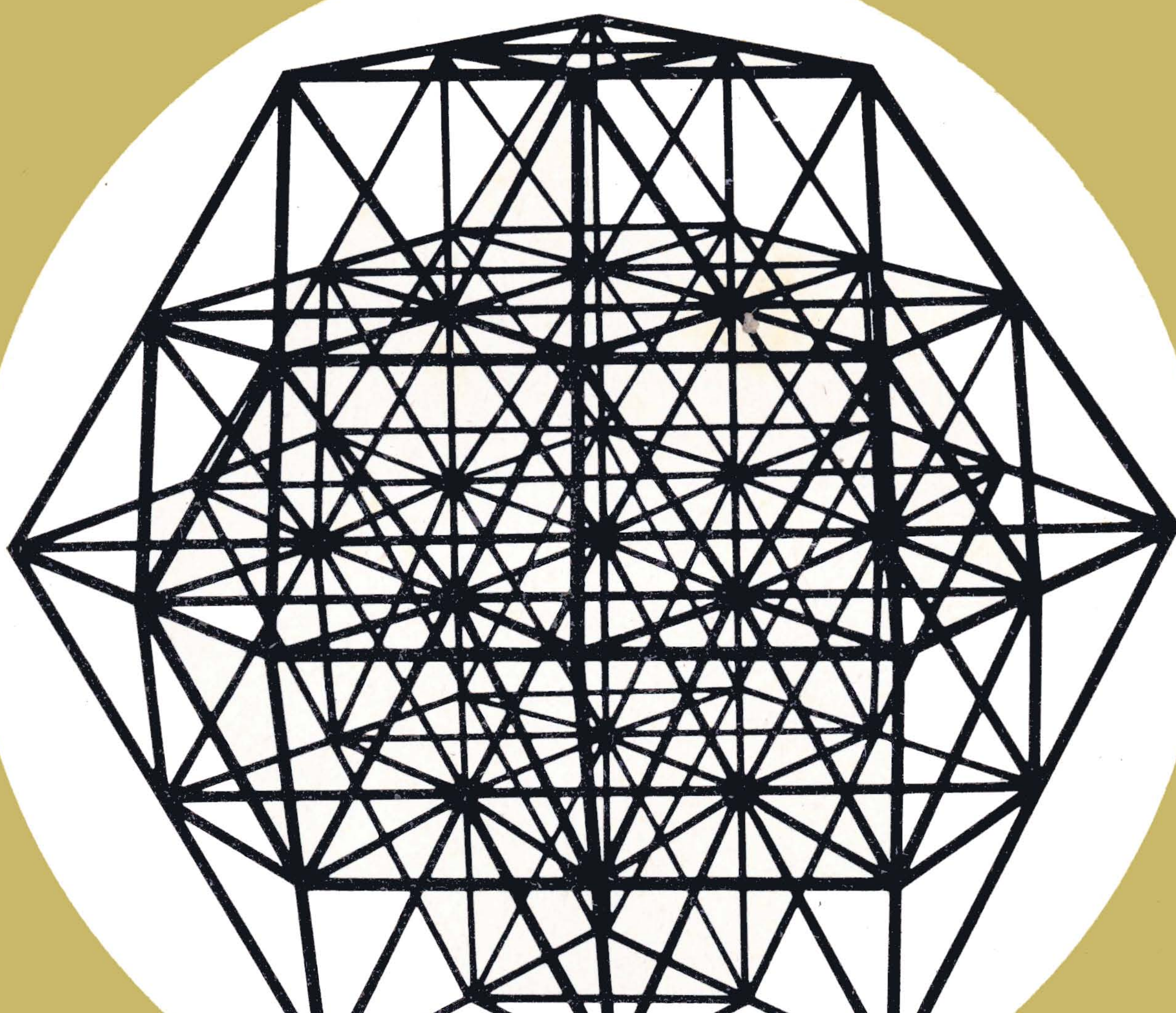
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Mathematica, Sofia (S. 103); J. Lehmann, Leipzig (S. 103 und S. 106); Vignetten: H. J. Guckuk (S. 107); Foto aus „Guter Rat“, UdSSR-Sonderheft (S. 108); Foto Wiekers, Halle (S. 109); R. Schulz, Rotta (IV. U-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 20. Juli 1975

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

97 Der Inhalt von Polygonflächen [9]*
Prof. P. R. Kantor/Sh. M. Rabbot, aus „Quant“ 2/72 (Moskau)

99 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Pelageja Jakowlewna Kótschina [10]
Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

100 Zufall und Wahrscheinlichkeit Teil 1 [9]
Mathematikfachlehrer P. Henkel, Päd. Kreiskabinett Teterow / Dipl.-Math. G. Schmidt, Sektion Mathematik an der Karl-Marx-Universität Leipzig

102 XVII. Internationale Mathematikolympiade
Burgas/Sofia, 5. bis 16. Juli 1975 [5]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig

104 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben und Wettbewerbsbedingungen
Zusammenstellung: OStR Dr. R. Lüders/StR Th. Scholl (beide Berlin)/ StR. J. Lehmann, VLdV (Leipzig)

107 Kämpfen, suchen, finden und verteidigen [6]
Über die Möglichkeiten zur Beschäftigung mit der Mathematik für interessierte Schüler in der Sowjetunion – Dr. D. Hetsch, Arbeiter- und Bauernfakultät *Walter Ulbricht* Halle

108 Mathematikaufgaben aus Freundesland [6]
Aufgaben aus der Sowjetunion
alpha-Wandzeitung · *Zusammenstellung:* Dr. D. Hetsch, Halle

110 Wahr oder falsch – Wie kann man das beweisen? [5]
Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin

112 In freien Stunden *alpha*-heiter [5]
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz

114 XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
Lösungen zu den Aufgaben der Bezirks- und DDR-Olympiade

118 Aufgaben der Qualifizierungsrunde der schwedischen Mathematik-Olympiade 1974 [10]
überreicht durch Arne Meurman, Säffle (Schweden) – IMO-Teilnehmer 1974, bearbeitet von OStR Dr. R. Lüders, Berlin

119 Übung macht den Meister [8]
Aufgaben aus Abschlußprüfungen der 10. Klasse der Oberschulen der DDR – *Zusammenstellung:* StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig

119 Kleines Mathematik-Sprachlexikon, Teil 5 [8]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV

III. Umschlagseite: Bücher mit Mathe aus dem Fachbuchverlag [7]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV

IV. Umschlagseite: Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Zusammenstellung: Ein FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Inhalt von Polygonflächen

Im folgenden sind einige Aufgaben zusammengestellt, bei denen der Begriff „Inhalt einer Polygonfläche" von grundlegender Bedeutung ist. Durch eine Aufstellung der von uns benötigten und voneinander unabhängigen Eigenschaften dieses Begriffes soll eine *axiomatische* Definition des Inhalts einer Polygonfläche gegeben werden.

A 1. Der Inhalt einer Polygonfläche ist eine positive Zahl.

A 2. Die Inhalte von gleichen (kongruenten) Polygonflächen sind gleich.

A 3. Wenn eine Polygonfläche in mehrere Teilflächen zerlegt wird, so ist ihr Inhalt gleich der Summe der Inhalte dieser Teilflächen.

A 4. Der Inhalt einer Dreiecksfläche ist gleich dem halben Produkt von der Länge einer Grundlinie mit der Länge der dieser Grundlinie zugeordneten Höhe.

Bemerkung: Die Maßeinheit wird als gegeben angesehen. Es läßt sich leicht zeigen, daß das Produkt unabhängig davon ist, welche der Dreieckseiten als Grundlinie angenommen wird. Zur Bezeichnung der Sätze wurde der Buchstabe *A* gewählt, da das Wort „Axiom" damit beginnt.

Aus den oben angeführten vier Eigenschaften (Axiomen) ergeben sich alle Sätze über die Inhalte von Vielecksflächen, die in der Schulmathematik gelehrt werden. Sehr viel schwieriger ist der Beweis dafür zu führen, daß man jeder ebenen Vielecksfläche $A_1A_2 \ldots A_n$ genau eine positive Zahl $I_{A_1A_2 \ldots A_n}$, nämlich ihren Inhalt, zuordnen kann, so daß dabei die Eigenschaften *A* 1, *A* 2, *A* 3 und *A* 4 gewahrt sind. Im Lehrprogramm der Schulen verzichtet man auf diesen Beweis und nimmt den Satz als offensichtlich geltend an.

An Stelle von *A*4 kann auch die folgende Grundeigenschaft gesetzt werden, aus der sich *A* 4 folgern läßt: *A* 4'. Der Inhalt einer Quadratfläche mit den Seiten der Länge 1 ist gleich 1.

Beispiele:

a) Der Inhalt einer Parallelogrammfläche ist gleich dem Produkt aus den Längen von Grundlinie und Höhe.

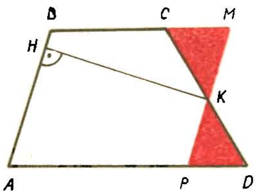
b) Der Inhalt einer Trapezfläche ist gleich dem Produkt der halben Summe der Längen der Grundlinien und der Länge der Höhe.

Macht euch einmal Gedanken darüber, wie man diese Behauptungen mit Hilfe der Axiome *A* 1 bis *A* 4 beweisen kann. Wir beginnen die Aufgabenserie damit, eine andere Formel für den Inhalt der Trapezfläche zu beweisen.

▲1▲ Der Inhalt einer Trapezfläche ist gleich dem Produkt von der Länge einer der beiden Seiten des nichtparallelen Seitenpaares und der Länge des Lotes aus der Mitte der anderen Seite auf die gegenüberliegende Seite.

Beweis: In der gegebenen Trapezfläche *ABCD* seien $AD \parallel BC$, *K* ist die Mitte der Seite *CD* und *KH* das Lot von *K* auf die Gerade $g(AB)$. Wir legen durch den Punkt *K* eine Gerade $h \parallel g$. *M* und *P* seien die Schnittpunkte von *h* mit den Geraden $a(BC)$ bzw. $b(AD)$ (Bild 1).

Bild 1



Die Parallelogrammfläche *ABMP* ist inhaltsgleich mit der gegebenen Trapezfläche *ABCD*, da die Fünfeckfläche *ABCKP* Teilfläche der beiden anderen Flächen ist und die beiden Dreiecksflächen *CMK* und *KPD* inhaltsgleich sind; d. h. Trapezfläche und Parallelogrammfläche sind aus inhaltgleichen Teilflächen zusammengesetzt. Da der Inhalt der Parallelogrammfläche gleich dem Produkt der Längen ihrer Grundlinie $|AB|$ und Höhe $|KH|$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

Den letzten Absatz des Beweises kann man formal wie folgt schreiben:

$I_{ABMP} = I_{ABCKP} + I_{CMK}$	nach *A* 3
$I_{ABCD} = I_{ABCKP} + I_{KPD}$	nach *A* 3 und Konstruktion
$I_{KPD} = I_{CMK}$	nach Kongruenzsatz „eine Seite und zwei anliegende Winkel" und nach *A* 2
$I_{ABCD} = I_{ABMP}$	nach *A* 3

Wir empfehlen euch, die nun folgenden Aufgaben in ähnlicher Weise zu lösen. Sie sind im Wesentlichen so geordnet, daß die Lösung der vorangegangenen Aufgabe eine Hilfe für das Lösen der folgenden bietet. Einige dieser Aufgaben sind auch mit Lösungen versehen, wie z. B. Aufgabe 1, die wir oben betrachteten. Es ist jedoch nicht erforderlich, sich nach diesem Hinweis zu richten. Die Aufgaben lassen auch andere Lösungswege zu, die nicht schlechter als die hier vorgeschlagenen sind.

▲2▲ In der Trapezfläche *ABCD* ($BC \parallel AD$) ist der Punkt *K* (Mittelpunkt von *AB*) mit den Eckpunkten *C* und *D* verbunden. Es ist das Verhältnis des Inhaltes der Dreieckfläche *KCD* zum Inhalt der Trapezfläche *ABCD* zu bestimmen.

▲3▲ Durch einen inneren Punkt *X* der Diagonalen *AC* der Parallelogrammfläche *ABCD* sind Parallelen zu den Seiten der Fläche gelegt. Hierdurch wird die gegebene Parallelogrammfläche in vier Parallelogrammflächen unterteilt, wobei zwei Teilflächen von der Diagonalen *AC* geschnitten werden. Beweist, daß die beiden anderen Parallelogrammflächen inhaltsgleich sind.

Hinweis: Benutzt die Tatsache, daß eine Parallelogrammfläche durch eine Diagonale in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt wird.

▲4▲ Durch jeden Eckpunkt einer konvexen Viereckfläche wird eine Gerade gelegt, die parallel zu jener Diagonalen des Vierecks ist, die nicht durch diesen Eckpunkt geht (Bild 2).

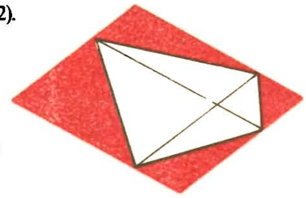


Bild 2

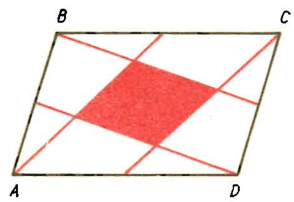
Beweist, daß die sich so ergebende Parallelogrammfläche den doppelten Inhalt der konvexen Viereckfläche besitzt.

▲5▲ Beweist, daß zwei konvexe Viereckflächen inhaltsgleich sind, wenn ihre Diagonalen entsprechend gleiche Länge haben und sich außerdem unter gleichen Winkeln schneiden.

▲6▲ In die Parallelogrammfläche *ABCD* sind vier Strecken eingezeichnet. Die Ecke *B* ist mit dem Mittelpunkt der Seite *DC*, die Ecke *A* mit dem Mittelpunkt der Seite *BC*, die Ecke *D* mit dem Mittelpunkt der Seite *AB* und die Ecke *C* mit dem Mittelpunkt der Seite *AD* verbunden.

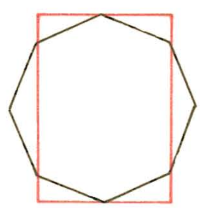
Beweist, daß die durch diese vier Verbindungsstrecken umschlossene Viereckfläche eine Parallelogrammfläche ist und daß deren Inhalt fünfmal kleiner als der Inhalt der Parallelogrammfläche *ABCD* (Bild 3).

Bild 3



▲7▲ Beweist, daß der Inhalt einer regelmäßigen Achteckfläche gleich dem Produkt der Längen der größten und kleinsten ihrer Diagonalen ist. *Hinweis:* Betrachtet das Bild 4.

Bild 4



▲8▲ Beweist, daß der Inhalt einer Vieleckfläche, deren Seiten durch einen Kreis von innen berührt werden, gleich dem Produkt der Länge des Kreisradius und dem halben Umfang des Vielecks ist.

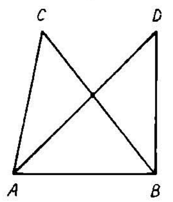
In den folgenden Aufgaben kommt man ohne das Verfahren der *Zerlegung und Addition* aus. Wir wollen festhalten, daß dieses Verfahren im Prinzip immer dann anwendbar ist, wenn die Inhaltsgleichheit zweier Vielecke zu beweisen ist.

Es gilt das folgende Theorem: *Wenn zwei Vieleckflächen inhaltsgleich sind, so kann man eine von ihnen derart in Teilflächen zerlegen, daß sich daraus die andere Vieleckfläche zusammensetzen läßt.*

Der Beweis dieses Theorems ist nicht schwierig. Um aber die Inhaltsgleichheit zweier Flächen nachzuweisen, oder das Verhältnis der Inhalte zweier Flächen zu ermitteln, ist es im konkreten Fall durchaus nicht immer notwendig, *zu zerlegen oder zu addieren.* So ist es z. B. vielfach vorteilhaft, die Inhalte zweier Dreieckflächen mit Hilfe des Axioms A 4 zu vergleichen. Aus diesem resultieren sofort die folgenden Aussagen über die Verhältnisse der Inhalte von Dreieckflächen:

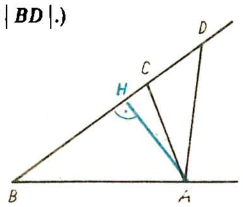
Wenn man den Eckpunkt einer Dreieckfläche längs einer durch diesen Punkt gehenden Geraden verschiebt, die parallel zu der nicht durch diesen Punkt gehenden Dreieckseite liegt, so verändert sich der Inhalt der Dreieckfläche nicht. (In Bild 5 sind die Dreieckflächen ABC und ADB flächengleich, da die Längen der Grundlinien und Höhen übereinstimmen.)

Bild 5



Bei k-facher Vergrößerung einer Seite von einer durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegebenen Dreieckfläche vergrößert sich auch der Inhalt der Dreieckfläche k-mal. (Vergleiche Bild 6; die Dreieckflächen ABC und ABD haben die gleiche Höhe AH. Deshalb ist das Verhältnis der Inhalte ihrer Flächen gleich dem Verhältnis der Längen der Basisstrecken: $I_{ABC}:I_{ABD}=|BC|:|BD|$.)

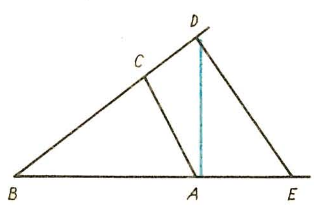
Bild 6



Hieraus lassen sich folgende Verallgemeinerungen ableiten:

Wenn zwei Dreieckflächen in einem Winkel übereinstimmen, so ist das Verhältnis der Inhalte beider Dreieckflächen gleich dem Verhältnis der Produkte aus den Längen der diese Winkel einschließenden Seitenpaare (Bild 7; $I_{ABC}:I_{ABD}=|BC|:|BD|$, $I_{ABD}:I_{EBD}=|AB|:|EB|$; daher ist auch $I_{ABC}:I_{EBD}=(|AB|\cdot|BC|):(|EB|\cdot|BD|)$.

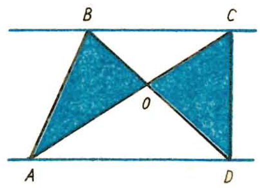
Bild 7



Sind insbesondere zwei Dreieckflächen ähnlich und stehen die Längen sich entsprechender Seiten der beiden Flächen im Verhältnis $k:1$, so verhalten sich deren Inhalte wie $k^2:1$.

In den folgenden Aufgaben können gerade derartige Überlegungen zur Lösung angewandt werden, nämlich Vergleiche der Inhalte von Dreieckflächen, bei denen Basisstrecken, Höhen oder Winkel gleiche Größe besitzen.

Bild 8



▲9▲ O sei der Schnittpunkt der Strecken AC und BD (Bild 8). Notwendig und hinreichend dafür, daß die Inhalte der Dreieckflächen AOB und DOC übereinstimmen, ist, daß die Geraden $a(BC)$ und $b(AD)$ parallel sind. Beweist dies!

Zur vollständigen Lösung gehört der Beweis, von zwei Behauptungen:

(1) Wenn die Inhalte der Dreieckflächen AOB und DOC übereinstimmen, so sind die Geraden $a(BC)$ und $b(AD)$ parallel.

(2) Wenn die Geraden $a(BC)$ und $b(AD)$ parallel sind, so sind die Inhalte der Dreieckflächen AOB und DOC gleich.

▲10▲ Beweist, daß jede konvexe Viereckfläche dann und nur dann eine Parallelogrammfläche ist, wenn jede ihrer Diagonalen den Inhalt der Fläche halbiert. Auch in dieser Aufgabe sind, wie in Aufgabe 9, zwei Theoreme zu beweisen: das direkte und das inverse.

▲11▲ In der Dreieckfläche ABC teilt eine durch den Eckpunkt A gehende Gerade die Seitenhalbierende aus dem Eckpunkt B im Verhältnis $1:2$ von B aus gerechnet. Ferner schneidet sie die Seite BC im Punkt K.

Bestimmt das Verhältnis der Inhalte der Dreieckflächen ABK und ABC.

Hinweis: Legt durch den Punkt C eine zu AK parallele Gerade und bestimmt mit ihrer Hilfe das Verhältnis $|BK|:|BC|$.

▲12▲ Bestimmt in der Verlängerung der Seite BC einer konvexen *Viereckfläche* $ABCD$ einen Punkt O derart, daß der Inhalt der Viereckfläche $ABCD$ gleich dem Inhalt der Dreieckfläche ABO ist.

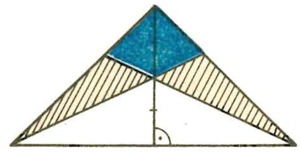
Hinweis: Legt durch den Punkt D eine zur Diagonalen AC parallele Gerade. Ist die Aufgabe 12 immer lösbar? Ist die Lösung immer eindeutig?

Die Lösung der Aufgabe demonstriert zugleich einen Weg, wie eine beliebige konvexe Vieleckfläche in eine inhaltsgleiche mit geringerer Seitenzahl verwandelt werden kann.

▲13▲ Vom Mittelpunkt der Symmetrielinie einer gleichschenkligen Dreieckfläche sind die Verbindungsgeraden nach den auf der Basis liegenden Eckpunkten gezogen (Bild 9).

Wie verhalten sich die Inhalte der durch die beiden Geraden ausgeschnittenen vier Teilflächen zum Inhalt der Dreieckfläche?

Bild 9



▲14▲ Gegeben ist die Dreieckfläche ABC. Durch Abtragen der Strecke AB auf $g(AB)$ über B hinaus ergibt sich der Punkt P; durch Abtragen der Strecke BC auf $g(BC)$ über C hinaus ergibt sich der Punkt K; durch Abtragen der Strecke CA auf der Geraden $g(CA)$ über A hinaus ergibt sich der Punkt M.

Wie verhält sich der Inhalt der Dreieckfläche ABC zum Inhalt der Dreieckfläche PKM?

Hinweis: Die Punkte M und B, P und C, sowie A und K sind durch je eine Gerade miteinander zu verbinden.

▲15▲ Formuliert und löst eine analoge Aufgabenstellung für eine Viereckfläche. Folgert aus ihr das Resultat der Aufgabe 6.

▲16▲ Auf den Seiten der konvexen Viereckfläche $ABCD$ sind die Punkte M, P, H, K derart festgelegt, daß $|AM|:|MB|=3:5$, $|BP|:|PC|=1:3$, $|CK|:|KD|=4:5$ und $|DH|:|HA|=1:8$ gilt.

Wie verhält sich der Inhalt der Sechseckfläche $MBPKDH$ zum Inhalt der Viereckfläche $ABCD$? Überlegt, ob man die Aufgabe auch allgemein bei beliebiger Vorgabe der Verhältnisse $|AM|:|MB|$, $|BP|:|PC|$, $|CK|:|KD|$, $|DH|:|HA|$ lösen kann.

Hinweis: Zeichnet die Diagonale BD ein und benutzt die Eigenschaft A 3.

▲17▲ In einer konvexen Viereckfläche sind die Mittelpunkte benachbarter Seiten miteinander verbunden.

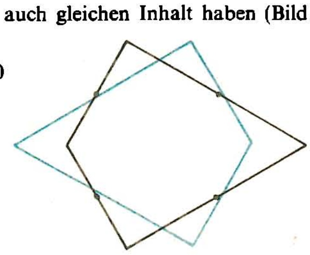
Von welcher Art ist die von den eingezeichneten Verbindungslinien bestimmte Viereckfläche?

Wie verhält sich der Inhalt der gegebenen zum Inhalt der eingezeichneten Viereckfläche?

Hinweis: Zieht die Diagonalen in der gegebenen Viereckfläche und benutzt eine Eigenschaft der Mittellinie bei Dreieckflächen.

▲18▲ Beweist, daß zwei Viereckflächen mit zusammenfallenden Mittelpunkten ihrer Seiten auch gleichen Inhalt haben (Bild 10).

Bild 10

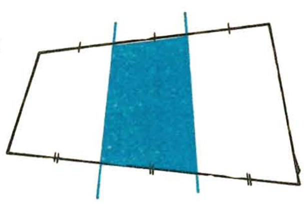


▲19▲ Eine Gerade g, die zur Diagonalen AC der Viereckfläche $ABCD$ parallel ist und die Diagonale BD halbiert, soll die Seite AD in einem Punkt E schneiden. Beweist, daß die Viereckfläche $ABCD$ von der Geraden $h(CE)$ halbiert wird.
Hinweis: Zeichnet die Seitenhalbierenden bezüglich der Dreieckfläche BCD durch C und bezüglich der Dreieckfläche BAD durch A ein.

▲20▲ Durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen einer konvexen Viereckfläche ist je eine zur anderen Diagonalen parallele Gerade gezeichnet. Der Schnittpunkt O dieser Geraden ist mit den Mittelpunkten der Viereckseiten verbunden.
Beweist, daß diese vier Verbindungslinien die Viereckfläche in vier Teilflächen gleichen Inhaltes zerschneiden.
Hinweis: Macht eine große Skizze und bezeichnet darin die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA entsprechend mit M, T, P und K und den Mittelpunkt der Diagonalen AC mit H. Um z. B. zu zeigen, daß der Inhalt der Viereckfläche $MOKA$ ein Viertel des Inhaltes der Viereckfläche $ABCD$ ist, hilft die Feststellung, daß die Viereckflächen $MOKA$ und $MHKA$ *inhaltgleich sind.*

▲21▲ Zwei sich gegenüberliegende Seiten einer konvexen Viereckfläche werden von zwei Geraden g und h derart geschnitten, daß die Seiten in drei Strecken gleicher Länge zerlegt werden. Dabei besitzen g und h im Innern der Viereckfläche keinen gemeinsamen Punkt (Bild 11). Beweist, daß der Inhalt der von g und h ausgeschnittenen Teilfläche ein Drittel des Inhaltes der gegebenen Viereckfläche ist.

Bild 11



▲22▲ Die Punkte K und L seien die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. CD der konvexen Viereckfläche $ABCD$. Die Strecken DK und AL schneiden sich im Punkt P und die Strecken CK und BL im Punkt Q.
Beweist die Behauptung, daß die Summe der Inhalte der Dreieckflächen APD und BQC gleich dem Inhalt der Viereckfläche $PKQL$ ist (Bild 12).

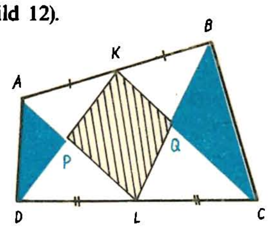
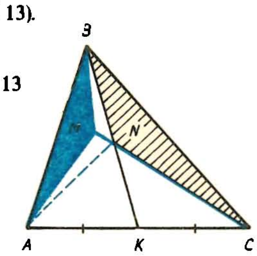


Bild 12

In den bisherigen Aufgaben war die Inhaltsgleichheit von Polygonflächen zu beweisen oder das Verhältnis der Inhalte solcher Flächen zu bestimmen. Nun folgen einige Aufgaben, bei denen Ungleichungen über die Inhalte von Flächen Verwendung finden.

▲23▲ Der Punkt M liege innerhalb der Dreieckfläche ABC.
Beweist, daß die Inhalte der Dreieckflächen ABM und CBM dann und nur dann gleich sind, wenn M auf der Seitenhalbierenden BK (mit K als Mittelpunkt der Strecke AC) liegt (Bild 13).

Bild 13



Lösung: Wenn der Punkt M auf der Seitenhalbierenden BK liegt, so gilt $I_{ABK}=I_{CBK}$, $I_{AMK}=I_{CMK}$ und daher $I_{ABM}=I_{CBM}$. Damit ist die Behauptung der Aufgabe in einer Richtung bewiesen. Noch unbewiesen ist die Umkehrung: wenn $I_{ABM}=I_{CBM}$ gilt, so liegt der Punkt M auf der Seitenhalbierenden durch B.
Wir gehen von der Annahme aus, daß M nicht auf der Seitenhalbierenden BK liegt. Dann hat genau eine der Strecken MA oder MC mit der Seitenhalbierenden BK einen Punkt gemeinsam. Die Strecken MC und BK mögen den Punkt N als gemeinsamen Punkt haben. Dann gilt $I_{ABM}<I_{ABN}$, da die Dreiecksfläche ABM innerhalb der Dreieckfläche ABN liegt. Ferner gilt $I_{CBM}>I_{CBN}$, da die Dreieckfläche CBN innerhalb der Dreieckfläche ABM innerhalb der Drei- $I_{ABN}=I_{CBN}$, da N auf der Seitenhalbierenden BK liegt. Wegen
$I_{ABM}<I_{ABN}=I_{CBN}<I_{CBM}$ gilt $I_{ABM}<I_{CBM}$.
Wir waren von der Annahme ausgegangen, daß $I_{ABM}=I_{CBM}$ gilt. Der Widerspruch zeigt, daß das Gleichheitszeichen nicht gelten kann, wenn M nicht auf der Seitenhalbierenden BK liegt. Für den Fall, daß die Strecken MA und BK einen gemeinsamen Punkt haben, verläuft die Beweisführung analog. Die Aufgabe ist damit vollständig gelöst.
Zur Lösung der folgenden Aufgabe, die eine gewisse Ähnlichkeit mit Aufgabe 20 hat, lassen sich die gleichen Hilfsmittel wie oben anwenden.

▲24▲ Je zwei sich gegenüberliegende Seiten einer Sechseckfläche $ABCDEF$ sind zueinander parallel.
Beweist, daß der Inhalt der Dreieckfläche ACE nicht kleiner als die Hälfte des Inhaltes der Sechseckfläche sein kann.

P. R. Kantor/Sh. M. Rabbot
aus: „Quant" 2/72

Wir danken Herrn Doz. Dr. Schröder, TU Dresden, für die Bearbeitung des sowjetischen Beitrags für die Leser der Schülerzeitschrift *alpha*.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. P. J. Kótschina

Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

▲1387■ Die Oberfläche des Luftschiffes *Komsomolskaja Prawda* bestand aus drei Teilen: dem Vorderteil, einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen 16 m und 5 m, dem Mittelteil – auch einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen 30 m und 5 m und dem Schwanzteil – einem Kreiskonus, dessen Spitze genau 1 m vom Ende des Mittelteils entfernt war; dieser Kreiskonus war an das Ende des Mittelteils aufgesteckt.
a) Skizzieren Sie den Achsenschnitt des Luftschiffes!
b) Schreiben Sie die drei Gleichungen der drei Teile des Achsenschnittes auf (die x-Achse – als Symmetrieachse, die y-Achse – durch die Schnittpunkte der beiden Ellipsen)!
c) Schreiben Sie die drei Gleichungen der Rotationskörper auf!
d) Berechnen Sie das Volumen des mit Wasserstoff gefüllten Luftschiffes (Kreiskonus vernachlässigen)!

Kurzbiographie: Frau Prof. Dr. Pelageja Jakowlewna Kótschina, geboren im Jahre 1899, ist Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Für ihre hervorrgenden wissenschaftlichen Leistungen wurde sie mit dem Titel „Held der sozialistischen Arbeit" ausgezeichnet. Die Gelehrte von Weltruf arbeitet im Bereich der Mathematik, der Mechanik, der Hydrodynamik und besonders in der Filtrationslehre sowie der Filtrationsberechnung. Eine Reihe von Werken *P. J. Kótschinas* ist dem Leben und Wirken der Mathematikerin *Sofia Kowalewskaja* gewidmet. Viele Jahre unterrichtete sie Mathematik an verschiedenen Hochschulen. Trotz ihres hohen Alters ist sie bis heute aktiv am *Institut für Probleme der Mechanik* der Akademie der Wissenschaften der UdSSR tätig.
Die uns übersandte Aufgabe ist dem Gebiet der *Analytischen Geometrie* entnommen. Solche Aufgaben galt es bei der Projektierung von Luftschiffen zu lösen. In Heft 1/76 bringen wir dazu eine kleinen Beitrag aus der Feder von *P. J. Kótschina*, der Einblick in ihre frühere Tätigkeit auf dem Gebiete der Berechnung und Projektierung von Luftschiffen gibt.

A. Halameisär, Moskau

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Teil 1

1. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

„So ein Zufall, daß wir uns hier treffen!" – „Das stimmt, aber wahrscheinlich komme ich morgen noch einmal her. Möglicherweise sehen wir uns dann wieder." – „Sicher, denn ich werde morgen auch hier sein."

Ein Dialog, wie er uns täglich begegnen könnte. In ihm wimmelt es von Begriffen wie „Zufall", „wahrscheinlich", „möglicherweise", „sicher", die wir in der Umgangssprache häufig gebrauchen, ohne über ihre genaue Bedeutung recht nachzudenken.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt sich u. a. damit, diese Begriffe so zu fassen, daß man mit ihnen rechnen, aus ihnen gültige Aussagen gewinnen kann. Mit einigen Grundlagen dieser mathematischen Disziplin wird sich unser Beitrag befassen. Zunächst wollen wir die Begriffe klären, die wir immer wieder benötigen.

Als *zufälligen Versuch* bezeichnen wir einen Vorgang, dessen Ergebnis ungewiß ist. Er muß unter den ihn bestimmenden Bedingungen (zumindest gedanklich) beliebig oft wiederholbar sein. Die möglichen Ausgänge eines zufälligen Versuches heißen *Elementarereignisse*. Unter einem *zufälligen Ereignis* (häufig auch nur „Ereignis" genannt) verstehen wir eine Untermenge der Menge aller Elementarereignisse. Zufällige Ereignisse wollen wir mit großen lateinischen Buchstaben, eventuell mit Indizes versehen, bezeichnen. Dazu einige Beispiele:

(1) Zufälliger Versuch: Einmaliges Würfeln
Elementarereignisse: A_1 (eine 1 würfeln), A_2 (eine 2 würfeln) ..., A_6 (eine 6 würfeln).
Weitere zufällige Ereignisse sind z. B.: G (eine gerade Zahl würfeln), Z (eine Zahl größer als 2 würfeln), P (eine positive Zahl würfeln).

(2) Zufälliger Versuch: Dreimaliges Würfeln
Elementarereignisse: A_3 (3 Augen in der Summe würfeln), A_4, A_5, ..., A_{17}, A_{18}. Weitere Ereignisse sind A (zwischen 12 und 15 würfeln), B (eine Primzahl würfeln), C (mehr als 20 würfeln).

(3) Zufälliger Versuch: Niederschlag am 7. 10. 1975 in Leipzig
Elementarereignisse sind z. B. N_0 (kein Niederschlag), N_{10} (10 mm Niederschlag), $N_{12,3}$ (12,3 mm Niederschlag). Weitere Ereignisse sind A (Niederschlagsmenge zwischen 8 und 15 mm), B (weniger als 1 000 mm Niederschlag).

Wir wollen im folgenden an unsere zufälligen Versuche 2 einschränkende Bedingungen stellen:
1. Es sollen nur endlich viele Elementarereignisse möglich sein.
2. Wenn man den zufälligen Versuch genügend oft wiederholt, soll im Mittel jedes Elementarereignis gleich oft auftreten.

Beispiel (1) erfüllt die beiden Bedingungen, während Beispiel (2) der Bedingung 2. nicht genügt (Augensumme 3 tritt z. B. seltener auf als Augensumme 10). Wir können aber auch den zufälligen Versuch aus Beispiel (2) unseren Bedingungen anpassen, wenn wir als Elementarereignisse A_{111} (dreimal 1 würfeln), A_{112} (bei den ersten beiden Würfen 1, beim dritten 2 würfeln), A_{121} (beim ersten und dritten Wurf 1, beim zweiten 2 würfeln), ..., A_{666} (dreimal 6 würfeln) auffassen.

■ Übung 1: Man begründe, warum Beispiel (3) den Bedingungen 1. und 2. nicht genügt!

Wir fragen jetzt danach, ob es ein Maß dafür gibt, „wie zufällig" ein bestimmtes Ereignis A ist. Grenzfälle für zufällige Ereignisse sind offensichtlich das *sichere Ereignis* S, das bei einem zufälligen Versuch stets auftritt (Ereignis P aus Beispiel (1) und B aus (3)), und das *unmögliche Ereignis*, das bei einem zufälligen Versuch nicht auftreten kann (Ereignis C aus Beispiel (2)).

Das gesuchte Maß für den Zufall, die Wahrscheinlichkeit, kann unter den Bedingungen 1. und 2. (klassischer Fall) auf folgende Art definiert werden:

Wahrscheinlichkeit für das zufällige Ereignis A

$$= \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Gesamtzahl der Elementarereignisse}}$$

in Formeln: $P(A) = \frac{g(A)}{m}$.

Dabei heißt ein Elementarereignis E für das zufällige Ereignis A günstig, wenn aus dem Auftreten von E das Auftreten von A folgt. Die so definierte Wahrscheinlichkeit hat die Eigenschaften:

a) $0 \leqq P(A) \leqq 1$ für alle zufälligen Ereignisse A
b) $P(S) = 1$
c) $P(U) = 0$
d) $P(E) = \frac{1}{m}$ für Elementarereignisse E
e) Die *Vereinigung* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ von n Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist ein Ereignis, das genau dann auftritt, wenn mindestens eines der Ereignisse A_1, A_2, ..., A_n auftritt. Sind A_1, A_2, ..., A_n Elementarereignisse, so gilt

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \frac{n}{m}.$$

Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *schließen einander aus*, wenn bei jedem Versuchsausgang höchstens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auftreten kann.

■ Übung 2: Man beweise, daß für beliebige, einander ausschließende Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$!

2. Würfeln und Wahrscheinlichkeit

Die *Wahrscheinlichkeitsdefinition* wollen wir jetzt auf einige Beispiele anwenden, die sich auf das Würfeln beziehen. Dabei müssen wir uns vor Augen halten, daß aus $P(A) = \frac{1}{6}$ nicht folgt, daß bei jeweils 6 Würfen das Ereignis A unbedingt genau einmal auftreten muß (Analog: Jedes 4. Los gewinnt!). Eine „strenge" Gesetzmäßigkeit, wie wir sie sonst von der Mathematik gewohnt sind, tritt hier nicht auf. $P(A) = \frac{1}{6}$ bedeutet lediglich, daß A bei 6 Würfen im Mittel genau einmal auftritt. Würfelt man also sehr lange, so werden sich für das Verhältnis

$$\frac{\text{Versuche, bei denen } A \text{ auftrat}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}$$

Werte einstellen, die sich von $\frac{1}{6}$ nur wenig unterscheiden.

Beim einmaligen Würfeln sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse leicht überschaubar. Die Gesamtzahl m der Elementarereignisse ist 6. Die Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis E demzufolge $P(E) = \frac{1}{6}$. Die Anzahl der für ein beliebiges zufälliges Ereignis A günstigen Fälle $g(A)$ kann man durch Auszählen leicht ermitteln. So ist etwa in Beispiel (1) $P(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, denn für G sind die Elementarereignisse A_2, A_4 und A_6 günstig, oder $P(Z) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, da für Z die Elementarereignisse A_3, A_4, A_5 und A_6 günstig sind.

Etwas komplizierter wird es beim mehrmaligen Würfeln. Zunächst überlegen wir uns, daß die Anzahl der Elementarereignisse beim n-maligen Würfeln „6" beträgt: Bei jedem Wurf gibt es genau 6 mögliche Ausgänge, unabhängig davon, wie die anderen Würfe ausgegangen sind. Also ist die Gesamtzahl $6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 6^n$.

(Wir müssen wegen Bedingung 2. die möglichen Versuchsausgänge „zuerst 1, dann 2" und „zuerst 2, dann 1" als verschieden ansehen.)

Betrachten wir einige konkrete Beispiele:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim zweimaligen Würfeln eine durch 5 teilbare Augensumme zu erzielen?

Lösung: Wir führen folgende Bezeichnungen für Ereignisse ein:

B Augenzahl durch 5 teilbar
C Augenzahl 5
D Augenzahl 10
A_{ik} zuerst i, dann k würfeln (Elementarereignisse)

Nach Übung 2 gilt

$$P(B) = P(C \cup D) = P(C) + P(D)$$

und nach Eigenschaft e)

$$P(C) = P(A_{14}) + P(A_{23}) + P(A_{32}) + P(A_{41}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(D) = P(A_{46}) + P(A_{55}) + P(A_{64}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Damit ist $P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36}$.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Würfeln mindestens eine 6 zu erzielen?

Lösung: Wir führen zunächst den Begriff des *Komplementärereignisses* ein. Ein Ereignis $\bar{A}$ heißt zum Ereignis A *komplementär*, falls es genau dann auftritt, wenn A nicht auftritt. Offensichtlich gilt $A \cup \bar{A} = S$ und $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Das zum in der Aufgabe beschriebenen Ergebnis A komplementäre $\bar{A}$ ist:

„Bei n-maligem Würfeln keine 6 erzielen".

Wie oben überlegt man sich, daß $g(\bar{A}) = 5^n$ ist. Also gilt

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

■ Übung 3: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zweimaligem Würfeln die Augensumme a) 8, b) 11 zu erzielen?

■ Übung 4: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei n-maligem Würfeln insgesamt weniger als $(n+4)$ Augen zu erzielen?

Zuletzt ein Beispiel, bei dem unsere Wahrscheinlichkeitsrechnung zu versagen scheint:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zweimaligem Würfeln eine gerade Augensumme oder insgesamt weniger als 8 Augen zu erzielen?

■ Übung 5: Wo steckt der Fehler in folgender „Lösung"?

Ereignis A: Augensumme gerade Zahl
Ereignis B: Augensumme 8

Offensichtlich ist in der Aufgabenstellung nach $P(A \cup B)$ gefragt. Günstig für A sind die 18 Elementarereignisse $A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{31}, \ldots, A_{66}$; günstig für B die 21 Elementarereignisse $A_{61}, A_{52}, A_{43}, A_{34}, A_{25}, A_{16}, \ldots, A_{11}$. Daraus folgt:

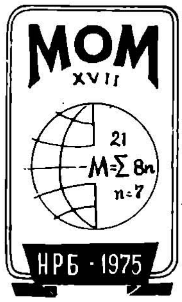
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{18}{36} + \frac{21}{36} = \frac{13}{12}. \quad \left(\text{Aber: } \frac{13}{12} > 1\right)$$

Im nächsten Heft setzen wir den Beitrag mit der Auflösung dieses „Widerspruchs" zur Wahrscheinlichkeitsdefinition fort, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ihn ein aufmerksamer *alpha*-Leser selbst entdeckt, nahe bei 1 liegt.

P. Henkel/G. Schmidt

XVII. Internationale Mathematikolympiade

Burgas/Sofia, Juli 1975



Aufgaben **1. Tag**

1. Es seien x_i, y_i $(i=1, \ldots, n)$ reelle Zahlen und es gelte:
$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n$ und $y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n$.
Es sei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgend eine Anordnung der Zahlen $y_1, \ldots, y_n$. Man beweise:
$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqq \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$. (CSSR, 6 Punkte)

2. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ irgend eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen so, daß für alle $k \geqq 1$ gilt: $a_k < a_{k+1}$. Man zeige, daß unendlich viele a_m dieser Folge in der Form
$a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q$
mit geeigneten positiven ganzen Zahlen x, y geschrieben werden können. Dabei ist $p \neq q$.
(England, 7 Punkte)

3. Über den Seiten eines beliebigen Dreieckes ABC sind nach außen die Dreiecke BPC, CQA und ARB so konstruiert, daß
$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45°$,
$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30°$ und
$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15°$
gilt. Man beweise:
1. $\sphericalangle QRP = 90°$ und
2. $\overline{QR} = \overline{RP}$. (Niederlande, 7 Punkte)

In Sofia fand der feierliche Abschluß der XVII. IMO statt.

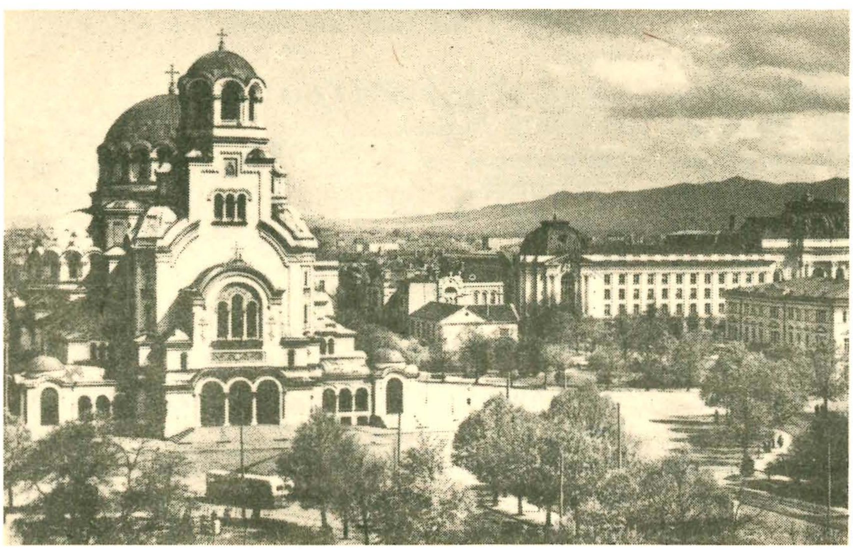
2. Tag

4. Es sei A die Summe der Ziffern der im dekadischen Zahlensystem dargestellten Zahl 4444^{4444}.
Es sei B die Summe der Ziffern von A. Man berechne die Summe der Ziffern von B. (Alle Zahlen sind im dekadischen Zahlensystem dargestellt.) (UdSSR, 6 Punkte)

5. Entscheide durch einen Beweis, ob es möglich ist, auf der Kreislinie eines Kreises (Radius 1) 1975 Punkte derart zu wählen, daß der (geradlinige) Abstand beliebiger zweier dieser Punkte eine rationale Zahl ist.
(UdSSR, 6 Punkte)

6. Man bestimme alle Polynome P in zwei Variablen, die den folgenden Bedingungen genügen:
1. P ist homogen vom Grade n, d. h., für alle reellen Zahlen t, x, y gilt:
$P(t \cdot x, t \cdot y) = t^n \cdot P(x, y)$
(n ist eine positive ganze Zahl),
2. für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:
$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$
und
3. $P(1, 0) = 1$. (England, 8 Punkte)

● Punktspiegel: 40 bis 39 Punkte 1. Preis – 38 bis 32 Punkte 2. Preis – 31 bis 23 Punkte 3. Preis



● Die DDR-Mannschaft hatte mit allen Mannschaften engen Kontakt. In alter Tradition übergab jede der 17 Mannschaften eine Aufgabe an die DDR-Mannschaft für die Leser der Zeitschrift *alpha*, die wir in 3/76 veröffentlichen. Darüber hinaus trug die DDR-Mannschaft beim Gedankenaustausch weitere 40 Aufgaben zusammen, welche zum Training in Clubs, Spezialklassen und der *alpha* geeignet sind. *Uwe Quasthoff* bearbeitet sie und stellt sie *alpha* zur Verfügung.

● Die amerikanische Mannschaft informierte *alpha*, daß an der ersten Stufe der Olympiade (mit halbprogrammiertem Material) rund 350000 Schüler der Abschlußklassen in den USA teilnahmen. Die 100 Besten nahmen an einer Landesolympiade in New York teil.

● Gastgeber der XVIII. IMO wird Österreich sein. Die XIX. IMO findet in der SFR Jugoslawien statt. Voraussichtlich wird das Gründerland der IMO's, die SR Rumänien, zur XX. IMO einladen.

● Jeder IMO-Teilnehmer erhielt ein Abzeichen (siehe oben links). Die bulgarischen Freunde zeigen damit die weltweite Bedeutung dieser internationalen Veranstaltung (Erdkugel). $M = \sum 8n$ bedeutet: jede Mannschaft besteht aus 8 Schülern; $n=7$: An der I. IMO nahmen sieben (sozialistische) Länder teil. $\sum\limits^{21}$: Das bulgarische Ministerium für Volksbildung lud 21 Länder ein. Die Mannschaften der Rep. Kuba, Rep. Finnland, Italiens und der Türkei reisten nicht an.

● Die Auszeichnung der Preisträger nahmen drei Mathematiker vor: Der stellv. Minister für Volksbildung der VR Bulgarien, der 37jährige Rektor der Universität Sofia und der Vorsitzende der Mathematischen Gesellschaft der VR Bulgarien.

● Zwischen den Chefredakteuren der mathematischen Schülerzeitschriften „Matematika“ (Sofia) und der „alpha“ fand während der IMO ein Erfahrungsaustausch statt. Es wurde insbesondere ein Austausch von Artikeln und von Aufgaben der Olympiaden (1. und 2. Stufe) vereinbart.

Altes bulg. Stadtwappen

● Der Delegationsleiter der österreichischen Mannschaft dankte in aller Namen für die herzliche Gastfreundschaft der bulgarischen Freunde. Die Mitglieder der Jury sowie aller Mannschaften lernten kennen: Burgas und den Sonnenstrand des Schwarzen Meeres. Warna und den Goldenen Strand (Nessebar) sowie auf einer Rundfahrt den Schipka-Paß (Balkangebirge), die Städte Sliven, Stara Zagora, Kasanlak, Gabrowo, Plewen und Sofia (mit Witoschagebirge).

- *alpha* stellt die DDR-Mannschaft vor: 1. *Klaus Altmann,* EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 12) 36 Punkte, 2. Preis – 2. *Ralph Lehmann,* EOS „Diesterweg“, Strausberg (Kl. 12) 33 Punkte, 2. Preis – 3. *Michael Marczinek,* EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 10) 26 Punkte, 3. Preis – 4. *Udo Matte,* Weißenfels, Spezialklasse Math.-Ph. der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Kl. 12) 29 Punkte, 3. Preis – 5. *Uwe Quasthoff,* Leipzig, Spezialklasse Math.-Ph. der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Kl. 12) 34 Punkte, 2. Preis – 6. *Harry Reimann,* EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 12) 34 Punkte, 2. Preis – 7. *Uwe Risch,* EOS „Geschw. Scholl“, Burg (Kl. 11) 27 Punkte, 3. Preis – 8. *Helmut Roßmann,* EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg (Kl. 12) 30 Punkte, 3. Preis
- Alle Mitglieder der DDR-Mannschaft sind *alpha*-Leser. Das *alpha*-Abzeichen in Gold erhielten: *Ralph Lehmann* (7jährige Teilnahme), *Uwe Quasthoff* (4 Jahre), *Uwe Risch* (4 Jahre), *Harry Reimann* (3 Jahre), Abzeichen in Silber: *Klaus Altmann* (1 Jahr).

links: DDR-Mannschaft;
rechts: griechische Mannschaft

$$(-1)^n(a^n+b^n+c^n)\quad(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)-(1+\alpha_3)=0$$

$$P_n(x,y)=(x+y)P_{n-1}(x,y)=(x+y)^2P_{n-2}\qquad \alpha_1=-1.$$

$$=(x+y)^{n-1}P_1(x,y).$$

$$P_1(x,y)=x-2y$$

$$(x+y)^{n-1}(x-2y)$$

Der Rektor der Universität zeichnet aus

- In diesem Jahr nahm erstmals eine Mannschaft aus Griechenland an der IMO teil. In Griechenland werden Olympiaden für die Abschlußklassen (entspricht unserer Klasse 12) in zwei Stufen durchgeführt.

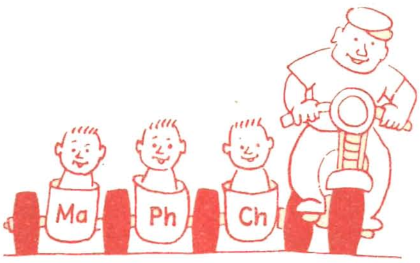
Wettbewerbsatmosphäre

* Ein Schüler der Mannschaft der DRV erkrankte am Tage der Anreise und konnte an den beiden Klausuren nicht teilnehmen.
** Drei Diplome wurden für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erteilt.

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	Teilnehmer 1	2	3	4	5	6	7	8	∑	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom**
Volksrepublik Bulgarien	13	16	33	14	25	27	30	28	186	—	1	4	—
Deutsche Demokratische Republik	36	33	26	29	34	34	27	30	249	—	4	4	—
Republik Frankreich	40	19	27	14	35	11	20	10	176	1	1	1	—
Republik Griechenland	8	20	7	10	4	11	2	33	95	—	1	—	—
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	24	36	23	40	40	32	19	27	241	2	2	3	—
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	36	18	20	26	13	11	22	17	163	—	1	1	—
Mongolische Volksrepublik	13	3	7	2	2	12	26	10	75	—	—	1	—
Königreich Niederlande	9	8	29	4	0	8	6	3	67	—	—	1	—
Republik Österreich	34	39	13	28	20	17	23	18	192	1	1	2	—
Volksrepublik Polen	4	13	11	16	16	4	27	23	124	—		2	—
Sozialistische Republik Rumänien	35	27	19	16	14	18	28	23	180	—	1	3	2
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	32	25	25	34	40	26	28	36	246	1	3	4	—
Königreich Schweden	13	22	16	17	11	34	37	10	160	—	2	—	—
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	18	13	16	18	27	20	30	20	162	—	—	2	—
Ungarische Volksrepublik	27	34	37	23	28	35	37	37	258	—	5	3	—
Vereinigte Staaten von Amerika	29	40	28	40	32	11	28	39	247	3	1	3	1
Demokratische Republik Vietnam	36	25	26	20	21	17	30	*	175	—	1	3	—

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



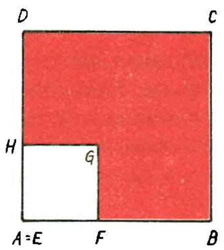
Letzter Einsendetermin: 20. Januar 1976

Ma 5 ■ 1387 Katja erhielt von ihrer Mutter 3,80 M zum Einkauf von Kuchen. Katja kaufte Butterkuchen zu 25 Pf je Stück, Pflaumenkuchen zu 35 Pf je Stück und Törtchen zu 70 Pf je Stück. Sie kaufte von einer Sorte genau 2 Stück, von einer weiteren Sorte genau 3 Stück und von der verbleibenden Sorte genau 4 Stück. Von welcher Sorte hat Katja zwei, drei bzw. vier Stückchen Kuchen eingekauft, wenn sie das Geld restlos ausgegeben hat?

Anett Rabe, Pestalozzi-OS Oberlungwitz, Kl. 6

Ma 5 ■ 1388 In ein Quadrat *ABCD* mit dem Umfang von 108 cm wurde, wie aus der Abbildung ersichtlich, ein kleineres Quadrat *EFGH* so eingezeichnet, daß die schraffierte Fläche genau 648 cm² beträgt. Wie lang ist der Umfang des Quadrates *EFGH*?

Iris Böhme, OS Spora, Kl. 6



Ma 5 ■ 1389 Die *Jungen Pioniere* einer 5. Klasse fertigen eine Wimpelkette an. Ihnen steht eine 267 m lange Schnur zur Verfügung. An beiden Enden der Schnur sollen je 52 cm zum Befestigen freibleiben. Auf die Schnur werden 15 cm breite Wimpel gezogen, zwischen denen ein Abstand von 4 cm bleibt. Der zehnte Teil der Anzahl dieser Wimpel ist von roter, der siebente von blauer Farbe. An der Schnur befinden sich dreimal so viel gelbe wie rote Wimpel; die restlichen Wimpel sind weiß. Wieviel Wimpel sind von weißer Farbe?

Birgit Weyh, OS Fambach, Kl. 7

Ma 5 ■ 1390 Eine Sekretärin erhielt den Auftrag, ein Manuskript von 126 Seiten innerhalb von sechs Arbeitstagen abzuschreiben. Statt täglich gleichviel Seiten, wollte die Sekretärin im ersten Drittel der zur Verfügung stehenden Arbeitszeit täglich 7 Seiten mehr, während der restlichen Tage täglich 7 Seiten weniger abschreiben, als das tägliche Soll vorsah. Konnte die Sekretärin bei dieser Arbeitsaufteilung ihren Auftrag termingerecht erfüllen? *Sch.*

Ma 5 ■ 1391 Peter und Karin sammeln Briefmarken, Peter besitzt gegenwärtig dreimal soviel Briefmarken wie Karin. Hätten Peter 130 Briefmarken weniger und Karin 10 Briefmarken weniger gesammelt, so würden beide gleichviel Briefmarken besitzen. Wieviel Briefmarken hat Peter, wieviel Karin gegenwärtig gesammelt? *Wolfgang Bauer, OS II Bad Langensalza, Kl. 5*

Ma 5 ■ 1392 Zu einer Familie gehören Großvater, Vater und Sohn. Addiert man das Lebensalter (in ganzen Zahlen) des Vaters und das des Sohnes, so erhält man 41 Jahre. Die Summe aus dem Lebensalter des Vaters und dem des Großvaters beträgt 96 Jahre. Die Summe aus dem Lebensalter von Großvater, Vater und Sohn beträgt 100 Jahre. Wie alt ist jeder von ihnen?

Schüler Ralf Schicke, Lochau

Ma 6 ■ 1393 Während der *30. Nordischen Skiweltmeisterschaften* in Falun errangen die Sportler aus der DDR fünf 1. Plätze, sechs 2. Plätze, zwei 4. Plätze, zwei 5. Plätze und einen 6. Platz.
Für diese Plätze wurden nach der inoffiziellen Länderwertung, bei der die DDR von allen beteiligten Ländern am besten abschnitt, insgesamt 76 Punkte vergeben. Dabei wurden in jeder ausgetragenen Disziplin für jeden der Plätze 1 bis 6 jeweils die gleichen Punktzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ mit $p_1 > p_2 > p_3 >$

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

$p_4 > p_5 > p_6 > 0$ vergeben. Es ist zu ermitteln, wieviel Punkte es jeweils für einen 1., 2., 3., ..., 6. Platz gibt. *T.*

Ma 6 ■ 1394 Jörg, der an der Mathematik-Olympiade seines Bezirkes teilgenommen hatte, wurde gefragt, welchen Platz er erreicht habe. Jörg antwortete: „Addiert man zu der Zahl der von mir erreichten Platznummer 5, dividiert man diese Summe durch 10, addiert man zu dem erhaltenen Quotienten 3 und multipliziert man schließlich die nun erhaltene Summe mit 5, so erhält man eine Zahl, die um 10 größer ist als die Zahl meiner Platznummer.“ Welchen Platz hat Jörg belegt? *Carola Senft, Wingerode*

Ma 6 ■ 1395 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die bei Division durch 2, 3, 5, 7 oder 11 stets den Rest 1 läßt. *Carola Kunze, Kl. 7 Callenberg*

Ma 6 ■ 1396 Auf einem Orientierungsmarsch vom Orte A nach dem Orte B hatten die teilnehmenden Kameraden der GST drei Kontrollpunkte anzulaufen. Nachdem sie 1 km weniger als den dritten Teil der gesamten Marschstrecke zurückgelegt hatten, trafen sie am ersten Kontrollpunkt ein. Nach weiteren 5 km Marschweg hatten sie den zweiten Kontrollpunkt erreicht und damit bereits $\frac{3}{5}$ der gesamten Marschstrecke zurückgelegt. Der dritte Kontrollpunkt lag genau in der Mitte der Wegstrecke zwischen dem zweiten Kontrollpunkt und dem Ziel. Wieviel Kilometer waren vom dritten Kontrollpunkt bis zum Ziel noch zu marschieren? *Ingrid Wolf, Berlin*

Ma 6 ■ 1397 Es ist folgender Satz zu beweisen:
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den spitzen Innenwinkeln von 30° und 60° ist die Hypotenuse doppelt so lang wie die dem Winkel von 30° gegenüberliegende Kathete. *Thomas Apel, Reichenbach*

Ph 6 ■ 1398 Zwischen einem Blitz und dem darauffolgenden Donner wird eine Zeit von $5\frac{1}{3}$ s gemessen.
Wie weit ist das Gewitter entfernt?
(Die Schallgeschwindigkeit beträgt rund 1198,8 km pro Stunde.) *L. L.*

Ma 7 ■ 1399 Uwe kaufte zu Beginn des Schuljahres einige Schreibhefte zu 8 Pf und einige zu 15 Pf das Stück. Er gab dafür den Betrag von 1,31 M aus. Wieviel Hefte jeder Preislage hatte er gekauft? *Holger Brodmann, OS P.-Herrmann, Kl. 8, Hettstedt*

Ma 7 ■ 1400 Addiert man zur Anzahl der Schüler unserer Klasse die Zahl 1 und dividiert man diese Summe durch 3, so erhält man die Anzahl der Mädchen unserer Klasse. Subtrahiert man von der Anzahl der Schüler unserer Klasse hingegen 10 und dividiert man diese Differenz durch 2, so erhält man ebenfalls die Anzahl der Mädchen unserer Klasse. Wieviel Jungen gehören dieser Klasse an? *Heidrun Thiel, OS Ponitz, Kl. 9*

Ma 7 ■ 1401 Welches konvexe Vieleck besitzt genau 35 Diagonalen? *Holger Brodmann, Hettstedt*

Ma 7 ■ 1402 Ein Korb mit Äpfeln wurde wie folgt aufgeteilt:
Achim erhielt die Hälfte der im Korb befindlichen Äpfel und noch einen halben Apfel. Von den verbleibenden Äpfeln erhielt Bruno wiederum die Hälfte und einen halben Apfel. Von den nunmehr noch im Korb vorhandenen Äpfeln erhielt Claus ebenfalls die Hälfte und einen halben Apfel. Auf die gleiche Weise wurde die Verteilung mit Dieter, dann mit Ernst fortgesetzt, der schließlich genau einen Apfel erhielt. Wieviel Äpfel befanden sich in dem Korb? *Holger Brodmann, Hettstedt*

Ph 7 ■ 1403 Zu berechnen ist die Dichte des Stoffes, aus dem ein fester Körper besteht. Der Körper hat eine Masse von 4,2 kg und sein Volumen beträgt 21 dm³. Welcher Stoff hat diese Dichte?

Ch 7 ■ 1404 Ein mit Schwefelsäure von der Dichte 1,315 g/ml gefüllter Glasballon hat eine Masse von 100 kg. Die Masse des leeren Ballons beträgt 13,8 kg. Wieviel Liter Schwefelsäure befinden sich in dem Ballon?

Ma 8 ■ 1405 Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden. *H. Kampe, Fachlehrer für Mathematik, Neuseddin*

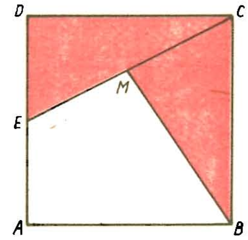
Ma 8 ■ 1406 a) Es sei ABC ein Dreieck, bei dem sich die Größen der drei Winkel wie 3 : 4 : 11 verhalten. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?
b) Gibt es auch ein Dreieck, bei dem sich die Größen der drei Winkel wie 1 : 10 : 100 verhalten? Bejahendenfalls sind die Größen der drei Winkel zu berechnen. *Dieter Knape, Fachlehrer, Jessen*

Ma 8 ■ 1407 Es seien a und c mit $a < c$ zwei positive reelle Zahlen. Man gebe alle positiven reellen Zahlen x an, für die die Gleichung

$$\frac{a+x}{1+\frac{ax}{c^2}} = c$$

erfüllt ist. *Herwig Gratias, Sömmerda*

Ma 8 ■ 1408 Es seien $ABCD$ ein Quadrat und E der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$. Ferner sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EC}$ (vgl. das Bild). Man entscheide, ob der Flächeninhalt des in der Abbildung weiß gefärbten Vierecks $ABME$ größer, kleiner oder gleich dem Flächeninhalt des in der Abbildung grau gefärbten Fünfecks $EMBCD$ ist. Erst schätzen, dann die Flächeninhalte berechnen! *L.*



Ph 8 ■ 1409 a) Welchen Druck übt ein stehender Mensch mit einem Gewicht von 60 kp auf den Fußboden aus, wenn die Fläche einer Fußsohle 150 cm² beträgt?
b) Welchen Druck übt derselbe Mensch beim Skilaufen auf die Schneedecke aus, wenn die Länge eines Skis 2 m und die durchschnittliche Breite 10 cm beträgt?
c) Gib für beide Drucke das kleinste ganzzahlige Verhältnis an! *L. L.*

Ch 8 ■ 1410 1000 g 25%ige Salzsäure sollen mit Wasser auf den Gehalt von 10% verdünnt werden. Wieviel Wasser ist hierzu erforderlich?

Ma 9 ■ 1411 Es seien a und b zwei reelle Zahlen.
a) Man beweise, daß dann stets die Ungleichung $a^2 - ab + b^2 \geqq 0$ erfüllt ist. (1)
b) Man beweise ferner, daß das Gleichheitszeichen in (1) nur dann gilt, wenn $a = b = 0$ ist. *Thomas Maiwald, EOS Zittau, Kl. 10*

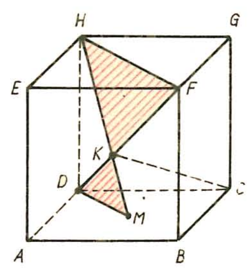
Ma 9 ■ 1412 Eine gerade quadratische Pyramide habe den Oberflächeninhalt $A_0 = 1536$ cm². Die Summe der Flächeninhalte der vier Seitenflächen (auch „Mantel“ genannt) betrage $M = 960$ cm². Man berechne das Volumen V dieser Pyramide. *Dieter Knape, Jessen*

Ma 9 ■ 1413 Es ist zu beweisen, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, vermehrt um 1, stets eine Quadratzahl ergibt, daß also

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = a^2$$

ist, wobei a eine natürliche Zahl ist. *Holger Brodmann, Hettstedt*

Ma 9 ■ 1414 Es seien $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge a, M der Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche $ABCD$ und $\overline{DF}$ eine Raumdiagonale dieses Würfels (vgl. das Bild). Diese Raumdiagonale möge die Verbindungsstrecke $\overline{HM}$ in einem Punkt



K schneiden, was stets zutrifft, weil die Punkte D, M, B, F und H in einer Ebene liegen.

a) Man berechne die Flächeninhalte der Dreiecke KDM und KFH.

b) Man berechne den Abstand des Punktes K von dem Eckpunkt C des Würfels.

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Ph 9 ■ 1415 Zum Antrieb einer Seilwinde an einem Turmdrehkran wird ein Motor mit einer Leistung von 20 kW benutzt. Die Seilwinde hebt einen 60 kp schweren Kübel in 4 s 20 m hoch. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Anlage? *L. L.*

Ch 9 ■ 1416 Nach dem Kontaktverfahren wird aus Gips ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$) Schwefelsäure hergestellt. Wieviel 96%ige Schwefelsäure erhält man aus 100 t Gips?

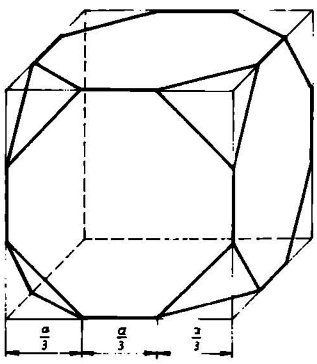
G. Brandes

Ma 10/12 ■ 1417 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung

$$\left|\frac{2x-9}{x+1}\right| \leq 1 \text{ erfüllt ist.}$$ *L.*

Ma 10/12 ■ 1418 Gegeben sei ein Würfel, dessen Kanten jeweils in drei gleiche Teile geteilt worden sind. Durch je drei Teilpunkte, die auf den drei von einem Eckpunkt des Würfels ausgehenden Kanten liegen und die diesen Eckpunkten benachbart liegen, sei eine Ebene gelegt. Durch diese acht Ebenen seien nun acht Teilkörper abgeschnitten, die die Form von dreiseitigen Pyramiden (Tetraeder) haben, so daß ein Restkörper entsteht, der durch sechs einander kongruente Achtecke und durch acht gleichseitige Dreiecke begrenzt ist (vgl. das Bild). Wie verhält sich das Volumen V_0 des Restkörpers zu dem Volumen V_1 des Würfels?

Mathematikfachlehrer Alois Weninger, Knittelfeld, Österreich



Ma 10/12 ■ 1419 Das Volumen eines Baumstamms, der die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes hat, kann nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$V=\frac{\pi h}{12}(d_1^2+d_1d_2+d_2^2).$$

Dabei ist h die Höhe,
d_1 der untere Durchmesser,
d_2 der obere Durchmesser des Baumstamms.

In der Praxis rechnet man aber meistens mit der folgenden Näherungsformel (der sog. „Försterformel"):

$$V'=\frac{\pi}{4}hd^2,$$

wobei $d=\frac{d_1+d_2}{2}$ der mittlere Durchmesser des Baumstamms ist.

a) Man berechne das Volumen eines Baumstamms nach der genauen Formel und nach der Näherungsformel, wenn

$$h=10\text{ m},\ d_1=30\text{ cm},\ d_2=20\text{ cm}.$$

b) Wie groß sind dabei der Betrag des absoluten Fehlers und der Betrag des prozentualen Fehlers?

c) Man stelle eine allgemeine Formel für $V-V'$ und für $\frac{V-V'}{V'}$ auf, indem man $d_1=d+\delta$ und $d_2=d-\delta$ setzt.

Werner Gundlach, Fachlehrer f. Mathematik i. R., Schwarz

Ma 10/12 ■ 1420 Man ermittle alle Funktionswerte der Funktion

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$$ im Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ und im Intervall $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

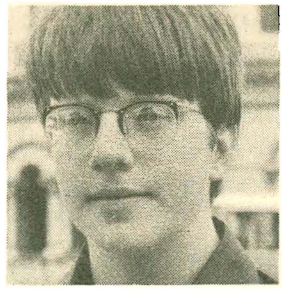
Peter Surjan, Budapest, Ungarische VR

Ph 10/12 ■ 1421 Der Ausleger eines Turmdrehkranes ist am Rohrmast in einer Höhe von 28,4 m befestigt. Bei der höchsten Stellung des Auslegerendpunktes von 52 m beträgt die Ausladung 10 m und die Tragkraft 4000 kp. Wie lang ist der Ausleger? Ermittle zeichnerisch oder rechnerisch die Belastung des Auslegers! *L. L.*

Ch 10/12 ■ 1422 Eine Natronlauge benötigt zur Neutralisation 50 ml einer 0,1 normalen Schwefelsäure. Wieviel Gramm NaOH enthält die Lauge? *G. Brandes*

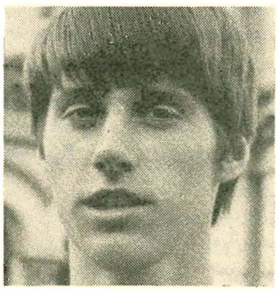
alpha stellt vor: Preisträger der XVIII. IMO

Einen 1. Preis erhielten:

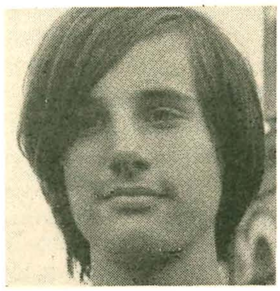


John Rickard
City of London School
London, England

Jonathan Hitchcock
Kingston Grammar School
Kingston, England



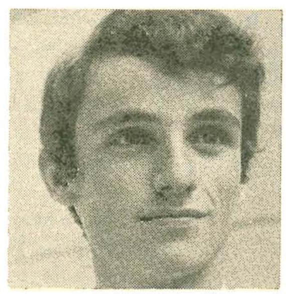
Paul Herdey
Hamilton-Wenham Regional High School
South-Hamilton, USA



Miller Puckette
Sewanee Academy
Sewanee Tennesea, USA

Paul Vojta
Southwest Secondary School
Minneapolis, USA

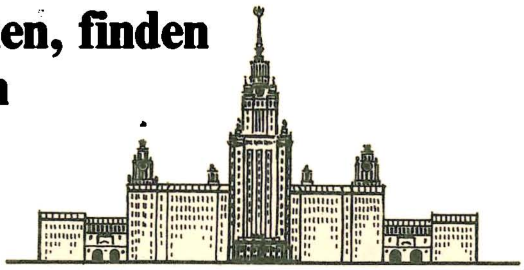
Wilfrid Pascher
II. Bundesgymnasium Graz
Graz, Österreich



Jean-Claude Sikoraw
Lycée Louis le Grand Paris
Paris, Frankreich

Boris Yousin
180. Schule Moskau
Moskau, UdSSR

Kämpfen, suchen, finden und verteidigen



Über die Möglichkeiten zur Beschäftigung mit der Mathematik für interessierte Schüler in der Sowjetunion

Ich hatte Gelegenheit, mehrere Jahre recht gründlich einige Probleme des Mathematikunterrichts in sowjetischen Schulen zu untersuchen. Häufig werde ich in diesem Zusammenhang gefragt, worin die Ursachen zu suchen sind, daß die sowjetischen Schüler auf mathematischem Gebiet so große Erfolge aufweisen können. Ich will versuchen, diese Frage kurz zu beantworten.

Unter den sowjetischen Schülern gibt es – wie auch in der DDR – sehr viele, für die die Beschäftigung mit der Mathematik mehr als nur eine notwendige Pflicht ist, die mit viel Enthusiasmus und Liebe, vor allem aber mit großem Fleiß ihrem Hobby, besonders dem Lösen interessanter Aufgaben, nachgehen.

Mehr noch als bei uns werden durch Fernsehen und Presse den Interessenten Aufgaben gestellt. Viele sowjetische Schüler beteiligen sich aktiv an *Fernsehschulen*. An den Zeitungskiosken der UdSSR bietet man populärwissenschaftliche mathematische Literatur ebenso wie andere Zeitschriften an, vor allem – man kauft sie auch. Für viele sowjetische Schüler ist die Beschäftigung mit der Mathematik zum Bedürfnis geworden, mathematisches Wissen ist wichtiger Bestandteil der Allgemeinbildung.

Hauptsächlich beschäftigen sich die sowjetischen Schüler natürlich im Unterricht mit der Mathematik. Zur Zeit werden an den Schulen der UdSSR neue Lehrpläne in diesem Fach eingeführt, die eine weitere Erhöhung des Unterrichtsniveaus mit sich bringen werden. Danach lernen bereits die Schüler der 7. Klasse den Wurzelbegriff, quadratische Gleichungen, Vektoren u. a. m. kennen, Schüler der 9. und 10. Klassen – die Anfänge der Differential- und Integralrechnung, ein Gebiet, welches bei uns Stoff der EOS ist. Viele Aufgaben, vor allem zum Beweisen, zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen und Aufgaben aus der Geometrie sind schwerer als die bei uns üblichen. Besonders hohe Anforderungen werden an die Schüler gestellt, die sich für die Aufnahme an eine Hochschule bewerben. In mathematischen Fachrichtungen gibt es für einen Studienplatz zwei, drei oder noch mehr Bewerber. Sie alle müssen eine Aufnahmeprüfung absolvieren. *alpha* wird in einem der nächsten Hefte einige Varianten solcher Kontrollarbeiten veröffentlichen.

Eine besonders günstige Möglichkeit zur zusätzlichen Beschäftigung mit dem Lieblingsfach bietet den sowjetischen Schülern der *fakultative Unterricht*. Dafür stehen in den Klassen 7 und 8 je zwei Wochenstunden und in den Klassen 9 und 10 je vier Wochenstunden zur Verfügung. Über ein Drittel der Teilnehmer am fakultativen Unterricht haben sich für die Mathematik entschieden. So können Schüler der 7. und 8. Klassen sich gründlicher als dies im Unterricht geschehen kann, mit den Teilbarkeitsregeln, mit der Symmetrie, der Parallelverschiebung und der Drehung, mit Elementen der Mengentheorie, mit Funktionen und ihren Graphen beschäftigen. Sie können zusätzlich Aufgaben aus den verschiedenen Stoffgebieten lösen. In den 9. und 10. Klassen haben die Schüler außer dem Kurs *Ergänzende Kapitel und Fragen des systematischen Mathematiklehrgangs* noch die Möglichkeit einen Lehrgang in *Numerischer Mathematik*, *Programmierung* oder einer anderen angewandten Richtung zu belegen.

Wie an unseren Schulen, so bestehen auch an sowjetischen Schulen eine Vielzahl *mathematischer Arbeitsgemeinschaften*. An erster Stelle steht in diesen Arbeitsgemeinschaften das Lösen interessanter Aufgaben zur Vorbereitung auf Olympiaden. Eine Auswahl solcher Aufgaben findet ihr auf der *alpha*-Wandzeitung. Die Schüler arbeiten selbständig populärwissenschaftliche Literatur durch und halten Kurzvorträge im Zirkel oder in einer wissenschaftlichen *Schülergesellschaft*. An den Schulen werden häufig spezielle mathematische Wettbewerbe und Wettkämpfe im mündlichen Lösen von Denkaufgaben veranstaltet. Besonders intensiv beschäftigen sich die sowjetischen Schüler mit den Biographien bedeutender Mathematiker.

Für alle interessierten Schüler der UdSSR besteht die Möglichkeit, an einer *Schule mit verstärktem Mathematikunterricht* zu lernen oder Teilnehmer einer mathematischen Fernschule zu werden. An den Schulen mit verstärktem Mathematikunterricht erhalten die Schüler auch eine berufsorientierende Ausbildung als *Programmierer/Technischer Rechner*. An diesen Schulen wird nur unwesentlich mehr Unterrichtsstoff im Vergleich zu den übrigen Schulen vermittelt, dafür wird der Stoff besonders gründlich behandelt. Es werden viele schwierige Aufgaben gelöst.

Verständlicherweise spielt die Mathematik auch in der außerunterrichtlichen Arbeit eine entscheidende Rolle. Ich hatte Gelegenheit, an einem Treffen von Schülern sowjetischer Mathematikschulen teilzunehmen, welches durch die 239. Leningrader Mittelschule organisiert wurde. Es nahmen Schüler aus 19 Städten teil. Die notwendigen Mittel für Exkursionen und Verpflegung erarbeiteten die Leningrader Schüler, sie organisierten selbst einen Teil der Veranstaltungen, die Unterkunft und Betreuung der Gäste. Es gab einen *Tag der Mathematik*, einen *Tag der Physik*, einen *Tag der Geschichte und Literatur*. Der Tag der Mathematik begann mit Kurzvorträgen bedeutender Wissenschaftler der Leningrader Universität. Nach einer kleinen Mathematikolympiade wurde in Sektionen gearbeitet. Die Schüler hielten Kurzvorträge, die oft im Kollektiv erarbeitet worden waren.

Schüler der mathematischen *Fernschulen* erhalten regelmäßig Lehrmaterialien und Übungsaufgaben zugeschickt. Studenten der Pädagogischen Hochschulen bzw. Universitäten korrigieren die eingereichten Lösungen. An solchen Schulen beteiligen sich tausende Schüler (an Fernschulen der Moskauer Universität allein über 10000). Vor allem durch die Fernschulen und die oft damit eng verbundenen Arbeitsgemeinschaften wird erreicht, daß ein beachtlicher Teil der sowjetischen Schüler sich regelmäßig und mit großem Fleiß über den Unterricht hinaus mit der Mathematik beschäftigt. Das ist die Grundlage aller Erfolge.

D. Hetsch

Absolventen zahlreicher sowj. Schulen erhalten ein spezielles Abzeichen, z. B. das der Ph.-Math.-Internatsschule bei der Moskauer Lomonossow-Universität.

Mathematikaufgaben aus Freundesland

Aufgaben aus der Sowjetunion

alpha-Wandzeitung

Klasse 6

▲1▲ Wieviel Teiler hat die Zahl $3^6 \cdot 5^4$?

▲2▲ Von 100 Würfeln haben 80 eine rote Seitenfläche, 85 – eine blaue, 75 – eine grüne. Wie groß ist die kleinstmögliche Zahl von Würfeln, die Seitenflächen aller 3 Farben haben müssen?

▲3▲ Die Arbeiter A und B führen gemeinsam eine bestimmte Tätigkeit in 4 Tagen aus, A und C würden dazu 3 Tage benötigen, B und C 2,4 Tage. In welcher Zeit würde jeder der drei Arbeiter die Tätigkeit allein ausführen?

▲4▲ Die Pionierleiterin verteilt in ihrer Pioniergruppe Ansichtskarten. Der erste Pionier erhält 1 Karte und $\frac{1}{10}$ des Rests, der zweite – 2 Karten und $\frac{1}{10}$ des verbliebenen Rests, der dritte – 3 Karten und $\frac{1}{10}$ des verbliebenen Rests usw.
Wieviel Pioniere waren in der Gruppe, wenn alle die gleiche Anzahl von Karten erhielten?

▲5▲ Es ist die zweistellige Zahl zu bestimmen, deren Quersumme 13 ist und bei der die Differenz zwischen der ursprünglichen Zahl und der Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern entsteht, auf 7 endet.

▲6▲ Es ist der unkürzbare Bruch zu bestimmen, dessen Wert sich beim Hinzufügen des Nenners zu Nenner und Zähler verdoppelt.

▲7▲ Es ist zu beweisen, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

▲8▲ Es ist zu beweisen, daß zwei Zahlen, die ungerade sind und deren Differenz 64 ist, immer relativ prim zueinander sind!

▲9▲ Es ist zu beweisen, daß man eine beliebige Rubelsumme, die größer als 7 ist, mit Banknoten im Werte von 3 und 5 Rubel bezahlen kann, ohne daß Wechselgeld herausgegeben werden muß.

▲10▲ Um 5 gegebene Zahlen zu addieren, die nicht durch 5 teilbar sind, rundet ein Schüler jeweils auf eine durch 5 teilbare Zahl. Die gefundene Summe erwies sich als richtig.
Welcher Fehler hätte auftreten können, wenn er jeweils nur die nächstkleineren, durch 5 teilbaren Zahlen addiert hätte?

▲11▲ Es ist die kleinste ganze Zahl zu bestimmen, die mit der Ziffer 1 beginnt und die sich verdreifacht, wenn man die Ziffer 1 vorn streicht und hinten hinzusetzt.

▲12▲ Eine bestimmte Zahl endet auf die Ziffer 6. Wenn man diese Ziffer am Ende streicht und sie vorn an die Zahl setzt, so hat die neue Zahl den doppelten Wert der ursprünglichen Zahl.
Wie groß ist sie? Welche weiteren Zahlen haben diese Eigenschaft?

▲13▲ Die Mengen A, B, C seien nicht leer und es gelte: A ist Untermenge von $B \cup C$, B ist Untermenge von $A \cup C$, C ist Untermenge von $A \cup B$. Kann man daraus schließen, daß $A = B = C$ ist?

▲14▲ Gegeben seien drei Mengen A_1, A_2, A_3 und für jedes $n \geqq 4$ wird eine Menge $A_n = A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup A_{n-3})$ definiert.
Es ist die Menge A_{10} zu bestimmen!

▲15▲ Es ist zu beweisen, daß die Länge der Seitenhalbierenden des Dreiecks kleiner als die halbe Summe der Längen der Seiten ist, zwischen denen sie liegt, aber größer als die Differenz zwischen dieser halben Summe und der Hälfte der Länge der dritten Seite!

▲16▲ Es ist zu beweisen, daß im ungleichseitigen rechtwinkligen Dreieck die Winkelhalbierende des rechten Winkels auch den Winkel zwischen Höhe und Seitenhalbierender der Hypotenuse halbiert!

Arbeitsatmosphäre in der Ph.-Math.-Internatsschule der Moskauer Univ.

Klasse 7

▲1▲ 7 Äpfel sind auf 12 Personen gleichmäßig aufzuteilen, ohne einen Apfel dabei in 12 gleiche Teile zu teilen.

▲2▲ Mit welcher kleinsten Anzahl von Gewichten kann man auf einer Balkenwaage eine beliebige Masse ganzzahlig von 1 g bis 40 g wiegen, wenn man die Gewichte auf beide Seiten der Waage legen darf?

▲3▲ Es ist zu beweisen, daß man unter 12 beliebigen natürlichen Zahlen immer 2 Zahlen auswählen kann, so daß deren Summe oder deren Differenz durch 20 teilbar ist.

▲4▲ Es sind solche Zahlen zu finden, die bei der Division durch 2 den Rest 1, bei der Division durch 3 den Rest 2, bei der Division durch 4 den Rest 3, bei der Division durch 5 den Rest 4 und bei der Division durch 6 den Rest 5 lassen.

▲5▲ P und $(8P^2+1)$ seien Primzahlen. Es ist P zu bestimmen!

▲6▲ Es ist für a, b, $c > 0$ zu beweisen:
Wenn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, so
$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}.$$

▲7▲ Es ist zu beweisen: Wenn $a+b+c=0$, so $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

▲8▲ Es ist zu beweisen: Wenn $a+b+c=0$, so $(a^2+b^2+c^2)^2 = 2 \cdot (a^4+b^4+c^4)$.

▲9▲ Es ist zu beweisen: Wenn $a+b+c$ durch 6 teilbar ist, so ist auch $a^3+b^3+c^3$ durch 6 teilbar.

▲10▲ Gegeben ist ein konvexes n-Eck, dessen Innenwinkel alle stumpf sind. Es ist zu beweisen, daß die Summe der Längen der Diagonalen größer als die Summe der Seitenlängen ist!

▲11▲ Es ist zu beweisen, daß im Trapez die Halbierungspunkte der Diagonalen und die Halbierungspunkte der nichtparallelen Seiten auf einer Geraden liegen!

▲12▲ Es ist zu beweisen: Wenn man die Seitenmitten eines Vierecks verbindet, so erhält man ein Parallelogramm.

▲13▲ Es ist zu beweisen, daß die Summe der Abstände jedes inneren Punktes von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks gleich der Höhe des Dreiecks ist!

▲14▲ Es ist ein ebenes, konvexes Viereck aus 3 Seiten und den beiden Winkeln zu konstruieren, die die fehlende vierte Seite mit der ersten und der dritten bildet.

Klasse 8

▲1▲ a und b sind teilerfremd. Wie groß kann der größte gemeinsame Teiler von $a+b$ und $a-b$ werden?

▲2▲ a und b seien ganze Zahlen. Es ist zu beweisen: Wenn a^2+b^2 durch 21 teilbar ist, so ist auch a^2+b^2 durch 441 teilbar.

▲3▲ Es ist zu beweisen, daß für jede beliebige natürliche Zahl n eine solche Zahl N existiert, so daß keine der Zahlen $N+1$, $N+2, \ldots, N+n$ Primzahl ist.

▲4▲ Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ sind $n+1$ Zahlen ausgewählt. Es ist zu beweisen, daß man unter den ausgewählten immer zwei finden kann, von denen eine die andere teilt.

▲5▲ Es ist zu beweisen, daß die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ für kein einziges $n \in N$ zu einer ganzen Zahl wird.

▲6▲ Man beweise:

Wenn $x+\frac{1}{x}=1$, so $x^5+\frac{1}{x^5}=1$.

▲7▲ Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen $n>1$ gilt:

$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n < n^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

▲8▲ Es ist die Ungleichung $x^2+y^2+z^2 \geqq xy+xz+yz$ zu beweisen!

▲9▲ Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b mit $a+b=2$ gilt:

$$a^4+b^4 \geqq 2.$$

▲10▲ Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } x_1 &+x_2 +x_3=0\\ x_2 &+x_3 +x_4=0\\ &\vdots\\ x_{99} &+x_{100}+x_1=0\\ x_{100} &+x_1 +x_2=0, \text{ so gilt}\\ x_1 &=x_2=\ldots=x_{100}=0. \end{aligned}$$

▲11▲ Man löse die Gleichungssysteme

a) $y^3=5x+y$, $x^3=5y+x$ b) $x^3=5x+y$, $y^3=5y+x$

▲12▲ Unter welchen Bedingungen hat das Gleichungssystem

$$xyz+z=a$$
$$xyz^2+z=b$$
$$x^2+y^2+z^2=4 \text{ genau eine Lösung?}$$

▲13▲ Auf den Seiten eines konvexen Vierecks $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 1 werden folgende Punkte festgelegt: K auf AB, L auf BC, M auf CD, N auf AD. Dabei soll gelten

$$\frac{l(\overline{AK})}{l(\overline{KB})}=2,\ \frac{l(\overline{BL})}{l(\overline{LC})}=\frac{1}{3},\ \frac{l(\overline{CM})}{l(\overline{MD})}=1,\ \frac{l(\overline{DN})}{l(\overline{NA})}=\frac{1}{5}.$$

Es ist der Flächeninhalt des Sechsecks $AKLCMN$ zu bestimmen!

▲14▲ Es ist ein Quadrat zu konstruieren, von dem ein Eckpunkt und der Mittelpunkt einer nichtanliegenden Seite gegeben ist.

Die sprachliche Vorbereitung auf das Auslandsstudium erfolgt durch Gastdozenten aus den einzelnen sozialistischen Ländern in modernen Phonokabinetten

Bei Freunden studieren

Liebe *alpha*-Leser!

Viele von Euch wissen sicher schon recht gut, welchen Beruf sie einmal ergreifen wollen. Einer wird Facharbeiter, der andere möchte erst ein Studium absolvieren, ehe er in seinem Beruf tätig wird.

Aber Hand aufs Herz! Habt Ihr Euch schon einmal überlegt, wo Ihr studieren wollt? Kennt ihr alle Möglichkeiten?

Seit zwei Jahrzehnten entscheiden sich jährlich Hunderte für ein besonders interessantes Studium, für ein Studium in der UdSSR oder in anderen sozialistischen Ländern. Welchen Mathematik-Anhänger reizt es nicht, an solchen berühmten Universitäten, wie der Moskauer, Leningrader, Charkower, Toruner, Krakower oder Budapester Universität sein Studium zu absolvieren?

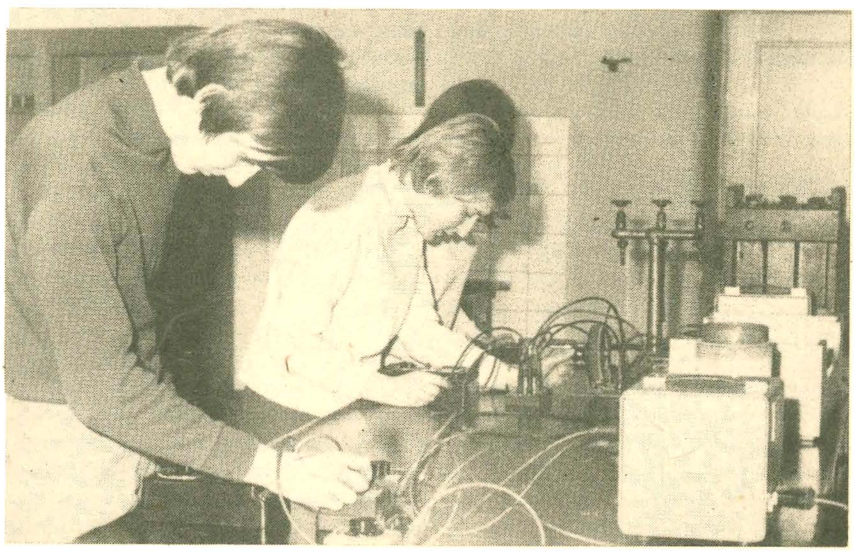
Ein Studium im Ausland ist eine ehrenvolle Auszeichnung. Durch hervorragende fachliche und gesellschaftliche Arbeit kann man erreichen, daß man von seiner EOS oder BBS zum Besuch der

ABF *Walter Ulbricht* Halle – Institut zur Vorbereitung auf das Auslandsstudium

delegiert wird. Ein Studium im sozialistischen Ausland verlangt viel Anstrengung, aber wer Fleiß und Mühe nicht scheut, dem bietet es reiche Möglichkeiten. Ein Studium in der UdSSR wird Euch Gelegenheit geben, aus erster Hand das Land kennenzulernen, das die Grundlagen der kommunistischen Gesellschaftsordnung errichtet. Ihr werdet Möglichkeiten haben, enge, freundschaftliche Kontakte zu Menschen anderer, mit uns brüderlich verbundener Staaten herzustellen. Nach erfolgreichem Abschluß des Studiums gehört Ihr zu denjenigen, die die sozialistische ökonomische Integration mitverwirklichen. Das ist eine schwere aber schöne Aufgabe, eine lohnende Perspektive.

D. Hetsch

Zur Ausbildung an der ABF gehört ein physikalisches Praktikum (aller 14 Tage 2 Stunden)



Wahr oder falsch – Wie kann man das beweisen?

Axel erledigt seine Hausaufgaben. Beim Addieren der Zahlen 35 und 21 fällt ihm dabei auf, daß beide Zahlen durch 7 teilbar sind und daß auch ihre Summe 56 durch 7 teilbar ist. Er überlegt, ob wohl in jedem Fall die Summe von zwei Zahlen, die durch 7 teilbar sind, eine Zahl ist, die ebenfalls durch 7 teilbar ist. Er fragt seine größere Schwester Beate und deren Freundin Christa danach.

Beate behauptet: „Immer wenn man zwei durch 7 teilbare natürliche Zahlen addiert, so erhält man als Summe wieder eine durch 7 teilbare natürliche Zahl." Christa ergänzt: „Und entsprechend ist es, wenn man zwei Zahlen addiert, die nicht durch 7 teilbar sind. Man erhält als Summe stets eine Zahl, die ebenfalls nicht durch 7 teilbar ist."

Haben Beate und Christa recht mit ihren Behauptungen? Beide begründen ihre Feststellungen, indem sie Zahlenbeispiele dafür angeben.

Beate:

Durch 7 teilbar	Durch 7 teilbar	Summe
42	14	$42+14=56$
21	28	$21+28=49$
14	7	$14+7=21$

„Die Summen 56, 49 und 21 sind durch 7 teilbare natürliche Zahlen. Also ist die Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen wieder stets durch 7 teilbar."

Christa:

Nicht durch 7 teilbar	Nicht durch 7 teilbar	Summe
25	30	$25+30=55$
36	23	$36+23=59$
15	10	$15+10=25$

„Die Summen 55, 59 und 25 sind nicht durch 7 teilbar. Also ist die Summe zweier nicht durch 7 teilbarer natürlicher Zahlen stets nicht durch 7 teilbar."

Axel überzeugen diese Begründungen nicht ganz. Nach einigem Nachdenken meint er dann sogar: „Christas Behauptung ist trotz der angegebenen Beispiele falsch. Die Zahlen 23 und 26 sind nicht durch 7 teilbar, ihre Summe $23+26=49$ ist aber dennoch durch 7 teilbar." Zu Beates Behauptung fällt ihm kein Gegenbeispiel ein. Ist Beates Aussage demzufolge also wahr? Das läßt sich gewiß nicht sagen, denn vielleicht hat Axel nicht genügend lange nach einem solchen Gegenbeispiel gesucht. Schließlich gibt es beliebig viele Fälle, über die Beate etwas aussagt.

Fassen wir zunächst einmal zusammen:

Eine Aussage, die sich auf mehr als einen Einzelfall bezieht, ist als falsch erkannt, wenn man nachweisen kann, daß sie auf einen in ihr erfaßten Fall nicht zutrifft, d. h. wenn man ein Gegenbeispiel angeben kann. Eine Aussage, die sich auf beliebig viele Einzelfälle bezieht und für die man kein Gegenbeispiel gefunden hat, muß nicht unbedingt wahr sein. Demzufolge können Aussagen, die sich auf beliebig viele Einzelfälle beziehen, nicht durch Überprüfen einer bestimmten Anzahl dieser Einzelfälle als wahr nachgewiesen werden.

Wie aber läßt sich die Wahrheit einer Aussage nachweisen?

Eine Aussage ist dann als wahr erkannt, wenn man nachweisen kann, daß sie auf jeden in ihr erfaßten Fall zutrifft. Dieser Nachweis ist verhältnismäßig einfach, wenn sich die Aussage nur auf eine bestimmte Anzahl von Einzelfällen bezieht. Soll man zum Beispiel nachweisen, daß die Aussage

(1) „Unter drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, die kleiner als 50 sind, befindet sich stets eine Primzahl"

wahr ist, so kann man einfach alle 23 Einzelfälle, beginnend bei (1, 3, 5) und endend bei (45, 47, 49), der Reihe daraufhin untersuchen, ob sich mindestens eine Primzahl unter den jeweils drei ungeraden Zahlen befindet. Da dies auf jeden dieser untersuchten Einzelfälle zutrifft, ist die obige Aussage wahr.

Beates Aussage läßt sich auf diese Weise nicht als wahr nachweisen, da man nicht beliebig viele Einzelfälle überprüfen kann. In diesem Fall bedient man sich zweckmäßigerweise der Variablen. Sie stehen anstelle von Zahlen, die man beliebig aus einem vorgegebenen Zahlbereich, zum Beispiel aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, wählen kann.

Wir wollen daher zunächst einmal Beates Aussage unter Verwendung von Variablen neu formulieren:

(2) „Wenn die natürlichen Zahlen a und b durch 7 teilbar sind, so ist ihre Summe $a+b$ durch 7 teilbar."

Um zum Ausdruck zu bringen, daß dieser Sachverhalt auf alle beliebig vielen möglichen Fälle zutrifft, wollen wir noch genauer formulieren:

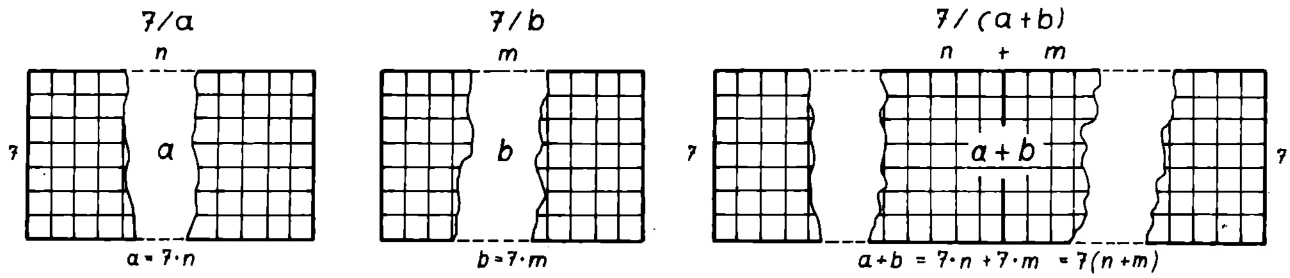
(3) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a und b durch 7 teilbar sind, so ist ihre Summe $a+b$ durch 7 teilbar."

Die „Buchstaben" a und b, die Variablen, erfassen gewissermaßen die beliebig vielen natürlichen Zahlen, die durch 7 teilbar sind, „mit einem Schlage". Will man die Wahrheit der obigen Aussage also nachweisen oder – wie man auch sagt – die Aussage beweisen, so muß man dabei selbstverständlich auch mit diesen beliebigen Zahlen a und b arbeiten und nicht mit speziellen Zahlen, die durch 7 teilbar sind.

Bei dem Beweis einer Aussage stützt man sich auf Aussagen, die bereits als wahr erkannt worden sind, und auf Definitionen von Begriffen, die in der zu beweisenden Aussage oder in den bereits bekannten Aussagen vorkommen. Man wird bei einem Beweis im allgemeinen von dem ausgehen, was man bereits über die in der Aussage enthaltenen Begriffe weiß. Fragen wie „Was wird vorausgesetzt?", „Was wird behauptet?", „Was ist über die vorkommenden Begriffe bekannt?" helfen oft beim Finden eines Beweises.

Versuchen wir also einmal, einen Beweis für die Aussage (3) zu finden und aufzuschreiben. Wir werden davon ausgehen, daß a und b beliebige natürliche Zahlen und durch 7 teilbar sind. Was bedeutet nun „eine Zahl a ist durch 7 teilbar"? Wir erinnern uns an die Definition der Teilbarkeit natürlicher Zahlen. (Vgl. zum Beispiel Lehrbuch für Klasse 6, Seite 8). „Die natürliche Zahl a bzw. b ist durch 7 teilbar" bedeutet: „Es gibt eine natürliche Zahl, die, mit 7 multipliziert, a bzw. b ergibt." Bezeichnet man diese Zahl bei der Zahl a mit n und bei der Zahl b mit m, so ist daher $a=7 \cdot n$ und $b=7 \cdot m$. Nachzuweisen ist, daß die Summe der Zahlen a und b durch 7 teilbar ist.

Bilden wir also die Summe: $a+b=7 \cdot n+7 \cdot m$. Wir wären fertig mit unserem Beweis, wüßten wir, ob es eine natürliche Zahl gibt, die mit 7 multipliziert, $a+b$ ergibt. Man müßte also versuchen, die Summe $7 \cdot n+7 \cdot m$ in ein Produkt umzuformen, von dem ein Faktor die Zahl 7 ist. Eine solche Umformung ist aber möglich auf Grund des bereits bekannten Distributivgesetzes. Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt nämlich: $7 \cdot n+7 \cdot m=7 \cdot (n+m)$. Also ist $a+b=7 \cdot (n+m)$. Da die Summe der Zahlen n und m wieder eine natürliche Zahl ist, – nennen wir sie k –, gibt es also eine Zahl, nämlich die Zahl $k=n+m$, die, mit 7 multipliziert, die Summe $a+b$ ergibt. Das wiederum bedeutet: Die Summe $a+b$ ist durch 7 teilbar. Da wir mit beliebigen Zahlen a und b gearbeitet haben, ist damit die Aussage (3) bewiesen. Beate hat also recht mit ihrer Aussage.



Wenn man den Beweis noch einmal Schritt für Schritt durchgeht, wird man feststellen, daß man ihn ebenso für die folgende allgemeinere Aussage führen könnte:

(4) „Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt: Wenn a und b durch c teilbar sind, so ist ihre Summe $a+b$ durch c teilbar."

Den Beweis dafür könnte man in der folgenden Form kurz aufschreiben:

Beweis:

a, b, c seien beliebige natürliche Zahlen; a und b seien teilbar durch c.

a ist teilbar durch c	b ist teilbar durch c	
Es gibt eine natürliche Zahl, die, mit c multipliziert, a ergibt.	Es gibt eine natürliche Zahl, die mit c multipliziert, b ergibt.	Definition
Diese Zahlen seien mit n und m bezeichnet. $a=c \cdot n$	$b=c \cdot m$	
$a+b=c \cdot n+c \cdot m$		Addition ist stets ausführbar im Bereich d. natürlichen Zahlen
$a+b=c \cdot (n+m)$		Distributivgesetz
Es sei $k=n+m$; k ist eine natürliche Zahl. $a+b=c \cdot k$		
Es gibt eine natürliche Zahl, die, mit c multipliziert, die Summe $a+b$ ergibt.		
$a+b$ ist teilbar durch c		Definition

Da a, b und c beliebige natürliche Zahlen sind, ist die Aussage bewiesen.

Fassen wir also zu sammen: Eine Aussage über Zahlen, aber auch über geometrische Begriffe, wie Dreiecke, Kreise usw. –, die sich auf unendlich viele Einzelfälle bezieht, läßt sich nicht beweisen, indem man einige spezielle Einzelfälle überprüft.

Der Beweis läßt sich nur erbringen, wenn man dabei mit beliebigen Zahlen (oder entsprechend Dreiecken, Kreisen usw.) arbeitet. Nur auf diese Weise läßt sich zeigen, daß eine solche Aussage, bezogen auf die unendlich vielen Einzelfälle, wahr ist. Eine Aussage, die sich auf endlich viele Einzelfälle bezieht, wie z. B. die Aussage (1), kann dagegen tatsächlich durch Überprüfen aller Einzelfälle bewiesen werden.

Für alle diejenigen, die auch selbständig üben möchten, um so ihre Kenntnisse zu vertiefen und ihre Fähigkeiten zu entwickeln, sei zum Abschluß noch eine Aufgabe angefügt.

Aufgabe: Folgende Aussagen sollen untersucht werden:

(5) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a und b gerade Zahlen sind, so ist ihre Summe $a+b$ eine gerade Zahl."

(6) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a eine zweistellige gerade Zahl und b eine zweistellige ungerade Zahl ist, so ist ihre Summe $a+b$ eine ungerade Zahl."

(7) „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a und b ungerade Zahlen sind, so ist ihre Summe $a+b$ eine gerade Zahl."

(8) „Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt: Wenn a, b und c aufeinanderfolgende Zahlen sind, so ist ihre Summe $a+b+c$ durch 3 teilbar."

(9) „Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn a eine dreistellige Zahl ist und wenn die letzte Grundziffer von a durch 2 teilbar ist, so ist a durch 2 teilbar."

(10) „Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n \cdot (n+1)+1$ ist eine Primzahl."

(11) „Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt: Wenn die Summe $a+b$ durch c teilbar ist, so sind a und b durch c teilbar."

(12) „Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: Wenn a, b, c aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen sind, so ist mindestens eine dieser Zahlen eine Primzahl."

(13) „Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn a eine einstellige Zahl ist, so ist $a \cdot (a+2)+1$ eine Quadratzahl."

(14) „Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn a eine Primzahl und $a \leq 10$ ist, so ist $a \cdot (a+3)+1$ eine Primzahl."

(a) Welche Aussagen sind falsche Aussagen, d. h. für welche dieser Aussagen läßt sich ein Gegenbeispiel angeben?

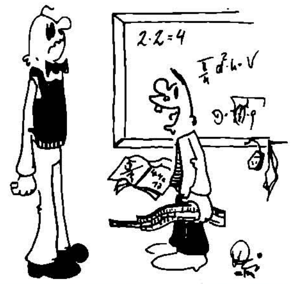
(b) Welche Aussagen sind wahre Aussagen? Welche dieser Aussagen lassen sich durch Überprüfen endlich vieler Einzelfälle beweisen?

Welche dieser Aussagen lassen sich auf diese Weise nicht beweisen?

(c) Gib für jede Aussage entweder ein Gegenbeispiel an, oder beweise sie!

M. Rehm

In freien Stunden alpha heiter



„Sie sagten doch,
Rechenstabgenauigkeit genügt!"
... Fink, TH Magdeburg

Es ist die 11. Karte

I. Gang: Der Mitspieler wird gebeten, sich eine Spielkarte zu merken, die ich in 4 Gängen finden will. 21 Spielkarten werden in 3 Stapeln zu 7 Karten ausgelegt, und der Mitspieler bezeichnet den Stapel mit seiner „gedachten" Karte. Dieser Stapel kommt in die Mitte der neu zusammengelegten 3 Stapel.

II. Gang: Beim zweiten Auslegen hat das eben bezeichnete Kartendrittel die umrandeten Plätze in der Anordnung, wie folgt:

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	
10	11	12	Mittelplätze
13	14	15	
16	17	18	
19	20	21	

III. Gang: Möglichkeit A: Mitspieler bezeichnet Reihe 1, falls 10 oder 13 die Gedachte ist. Nach richtigem Zusammenlegen und neuem Auslegen bekommt
10 den Platz 11., (7+4) 13 den Platz 12., (7+5)
Möglichkeit B: Mitspieler bezeichnet Reihe 2, falls 8, 11 oder 14 die Gedachte ist; dann bekommt
8 den Platz 10., (7+3)
11 den Platz 11., (7+4) 14 den Platz 12., (7+5).
Möglichkeit C: Mitspieler bezeichnet Reihe 3, falls 9 oder 12 die Gedachte ist; dann bekommt
9 den Platz 10., (7+3) 12 den Platz 11., (7+4).
Man sieht, nach dem III. Gang gibt es für die Gedachte nur noch die drei Mittelplätze 10., 11. oder 12. Nach letzter Reihenbezeichnung und entsprechendem Zusammenlegen wird jeder der drei Mittelplätze zum 11. wegen 7+4=11.

IV. Gang: Verdeckt hinzählen, 11. aufwerfen!

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27

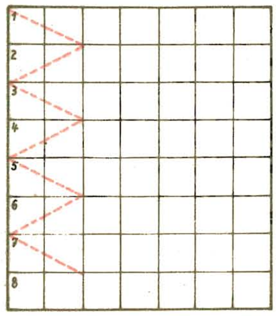
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Von 27 Karten wird es immer die 14., von 15 Karten die 8., von 9 Karten die 5. Karte.

S. Thum, Barth

Rätsel



Waagerecht:

1. Teilgebiet der Mathematik
2. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks bildet den Mittelpunkt für den ...
3. Begriff beim Rechnen mit Logarithmen
4. Name der Funktion $y=x^2$
5. Zahl
6. Zeiteinheit
7. Viereck
8. Land der Pyramiden

Reiht man die Buchstaben auf der gestrichelten Linie aneinander, so erhält man einen Wirkungsort des Mathematikers *Adam Ries.*

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

Kennst du sie?

Von 15 berühmten Mathematikern (*M*), Physikern (*P*) bzw. Chemikern (*C*) sind die Vornamen und Lebensdaten angegeben. Errate die Nachnamen; deren Anfangsbuchstaben ergeben den Namen eines Mathematikers, der im vorigen Jahrhundert lebte.
Daniel (1700 bis 1782 (M), Albert (1879 bis 1955) (P), Friedlieb Ferdinand (1795 bis 1867) (C), John (1550 bis 1617) (M), David (1862 bis 1943) (M), Niels Henrik (1802 bis 1829) (M), Wilhelm Conrad (1845 bis 1923) (P), Richard (1831 bis 1916) (M), Adam (1492 bis 1559) (M), Abram Fjodorowitsch (1880 bis 1960) (P), Leonhard (1707 bis 1783) (M), Dimitri Iwanowitsch (1834 bis 1907) (C), André Marie (1775 bis 1836) (P), John von (1903 bis 1957) (M), Emmy (1882 bis 1935) (M).

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Verrückte Sätze

Hier sind ein paar Rätselsätze. Könnt ihr sie lesen?
8 8er schwammen am 7gebirge vorbei.
7 Kinder 7 den Sand
4 Re4förster spielten 1st auf Re4 66.
4 W8eln l8en 3st. *Stephan Marzak, 11 Jahre, Köln*

Knobel mit

Die Buchstaben sind so durch Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

K · I + K = T
KN · I + N = TI
KNO · I + O = TIM
KNOB · I + B = TIML
KNOBE · I + E = TIMLE
KNOBEL · I + L = TIMLEB
KNOBELM · I + M = TIMLEBO
KNOBELMI · I + I = TIMLEBON
KNOBELMIT · I + T = TIMLEBONK

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kryptarithmetik

H. Oehl, München

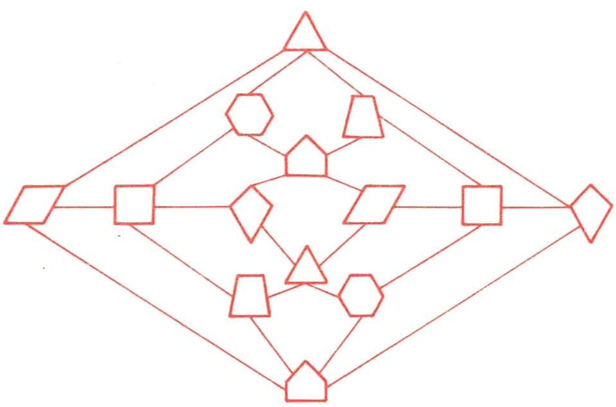
$$\begin{array}{r} \text{Mathe} \\ +\ \underline{\text{alpha}} \\ \text{Spass} \end{array}$$

(Keine Zahl beginnt mit Null.)

Magische Figur

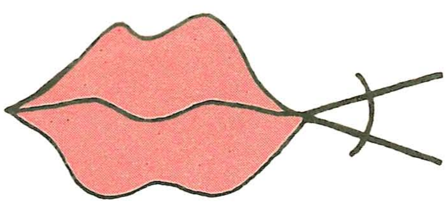
In der Figur sind die Zahlen von 1 bis 14 so einzutragen, daß die Summe der Zahlen in den gleichen Formen stets 15 ist. Je vier Formen sind zu einem Viereck verbunden. Die Summe der Zahlen in den Eckpunkten soll stets 30 betragen.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz



Mundwinkel

R. Schade, aus: Magazin 4/75



Silbenrätsel

Die Silben
a – a – a – ba – de – de – ent – ga – gam – ge – in – ir – ka – kom – kreis – kus – le – le – lich – lym – ma – ma – ma – me – me – mo – na – na – nal – o – o – o – pa – pi – pi – quo – ra – ra – ral – rith – te – te – ter – the – ti – ti – tik – tür
setze man zu 16 ein- oder mehrsilbigen Wörtern mit nachfolgender Bedeutung zusammen.
Anschließend entnehme man jedem Wort eine Silbe. Diese ergeben aneinandergereiht den Namen einer Veranstaltung, die 1974 in der DDR stattgefunden hat.
(evtl. Hinweis: Bei der Auswahl der Silben hat die Ziffernfolge 1 2 1 2 1 2 3 2 2 2 4 4 2 1 1 3 helfende Bedeutung.)

Die Wörter bedeuten:

1. Linie, die die Seiten eines Vielecks berührt
2. Einheit der Länge
3. Bezeichnung für die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ...
4. Ergebnis einer Division
5. letzter Buchstabe des griechischen Alphabets
6. Plural einer Zeiteinheit
7. Gerade, die zu einer anderen gleichen Abstand hat
8. griechischer Buchstabe
9. Seite eines rechtwinkligen Dreiecks
10. Bestandteil eines Dezimalbruchs
11. Teilgebiet der Mathematik
12. Bezeichnung für Zahlen, wie z. B. 2, , ...
13. sportlicher und mathematischer Wettbewerb
14. Name einer in der Kreislehre wichtigen Zahl
15. im Altertum benutztes Rechenbrett
16. Bezeichnung für die natürlichen Zahlen, die durch 2 teilbar sind.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Am Rechner

Dieter Christke, Leipzig

Neonlicht gleißt
haltlos
an weißfließenden Wänden.
Glattes Linoleum
wirft spiegelnd es
den Röhren zurück.
Hinter schirmendem Glas
zucken feinnervig
vielgliedrige Arme
erhalten der Bänder –
widersinnig scheint's –
unfaßbaren Tanz.
Lacknägel berühren
liebkosend
plastgestaltete Dendriten,
ratterndes Jauchzen
peripherer Geräte zeigt an –
berechnet ein neuer Gedanke.

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen · Fortsetzung

Bezirksolympiade

Klassenstufe 10

4. Laut Definition von f gilt

$(f(2))$

$=(a^2+b^2+(a+b)^2)=(2a^2+2ab+2b^2)^2=$

$=4(a^4+2a^3b+2a^2b^2+a^2b^2+2ab^3+b^4)=$

$=2(a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)=$

$=2(a^4+b^4+(a+b)^4)=2f(4)$, w.z.b.w.

5. Angenommen, n sei eine Zahl mit den verlangten Eigenschaften. Dann muß wegen $n^2+6n-187=(n-11)(n+17)$ mindestens einer dieser beiden Faktoren durch 19 teilbar sein, da 19 eine Primzahl ist.

Fall 1: Es gelte $n-11=m\cdot 19$ mit ganzzahligem m. Daraus folgt $n=19m+11$.

Für $m<0$ ist n keine natürliche Zahl.

Aus $m=0$ folgt $n=11$.

Aus $m=1$ folgt $n=30$.

Für $m\geqq 2$ ist $n>40$.

Fall 2: Es gelte $n+17=r\cdot 19$ mit ganzzahligem r. Daraus folgt $n=19r-17$.

Für $r\leqq 0$ ist n keine natürliche Zahl.

Aus $r=1$ folgt $n=2$.

Aus $r=2$ folgt $n=21$.

Für $r\geqq 3$ ist $n\geqq 40$.

Also können höchstens die Zahlen 11, 30, 2, 21 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Tatsächlich gilt:

$11^2+6\cdot 11-187=11(11+6-17)=0\cdot 19$

$30^2+6\cdot 30-187=30\cdot 36-187=$

$893=47\cdot 19$

$2^2+6\cdot 2-187=16-187=-9\cdot 19$

$21^2+6\cdot 21-187=21\cdot 27-187=$

$380=20\cdot 19$

Genau die Zahlen 11, 30, 2, 21 genügen daher den Bedingungen der Aufgabe.

6 (I.) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $\overline{OP}=a$, $\overline{OR}=b$, $\overline{PX}=x$, $\overline{RY}=y$ gesetzt wird:

$$\frac{y}{a}=\frac{b}{a+b}; \qquad (1)$$

denn wegen $\sphericalangle ROP\cong\sphericalangle YRQ$ und $\sphericalangle ORX\cong\sphericalangle RYQ$ ist $\triangle ORX\sim\triangle RYQ$.

Außerdem gilt $\frac{x}{b}=\frac{a}{b+y}$, (2)

weil wegen $\sphericalangle OPY\cong\sphericalangle OXQ$ und $\sphericalangle OYP\cong\sphericalangle PQX$ $\triangle OYP\sim\triangle PQX$ gilt.

Aus (1) und (2) folgt

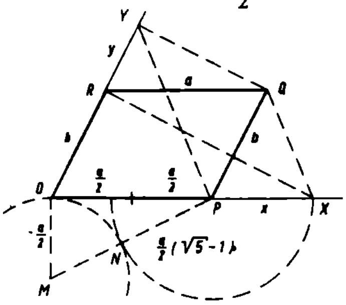
$$\frac{x}{b}=\frac{a}{b+\frac{ab}{a+x}}, \qquad (3)$$

$$x^2+ax-a^2=0 \qquad (4)$$

und hieraus wegen $x>0$

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten OP und $\overline{OM}=\frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius $\overline{PN}$, so ist $\overline{PX}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.



Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgabe, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:

(II) (α) Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s.

(β) Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.

(γ) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MO}$. Ist N der Schnittpunkt von k mit PM, dann

(δ) schlage man den Kreis k' um P mit dem Radius $\overline{PN}$. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und P ist der Punkt X.

(III) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt $\overline{MP}=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{OP}^2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Daher ist nach Konstruktion

$\overline{PX}=\overline{PN}=\overline{PM}-\overline{MN}=\overline{PM}-\overline{MO}=$

$\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Folglich gilt $x=\overline{PX}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ und damit (4) und (3). Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, daß $YQ\parallel RX$ ist, so gilt

$\triangle OYP\sim\triangle PQX$

und hieraus $\sphericalangle OPY\cong\sphericalangle PXQ$. Folglich ist

$\overline{\sphericalangle PXQ}+\overline{\sphericalangle YPX}=180°$.

Daher können die PY bzw. XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt haben, sind also parallel.

(IV) Die angegebene Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.

DDR-Olympiade

Olympiadeklasse 10

1. Wendet man auf die Faktoren des gegebenen Produktes eine der binomischen Formeln an, so erhält man $z=$

$$\frac{(1-2)\cdot(1+2)\cdot(3-2)\cdot(3+2)\cdot(5-2)\cdot(5+2)\cdot}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}$$

$$\frac{\ldots(197-2)\cdot(197+2)\cdot(199-2)\cdot(199+2)}{\ldots\cdot 197^2\cdot 199^2}$$

Da nun in allen Faktoren des Zählers von den ungeraden Zahlen die Zahl 2 subtrahiert wird bzw. zu den ungeraden Zahlen die Zahl 2 addiert wird, sind alle Faktoren des Zählers ungerade Zahlen. Dabei treten alle ungeraden Zahlen mit $3\leqq m\leqq 197$ genau zweimal als Faktoren auf, denn sie werden ein erstes Mal dadurch erzeugt, daß von der Zahl $m+2$ die Zahl 2 subtrahiert wird und ein zweites Mal dadurch, daß zu der Zahl $m-2$ die Zahl 2 addiert wird. Demnach kann man kürzen und erhält

$$z=\frac{(1-2)\cdot(3-2)\cdot(197+2)\cdot(199+2)}{1^2\cdot 199^2}$$

und schließlich

$z=\frac{-201}{199}$. Da 199 eine Primzahl ist, ist z damit in der verlangten Form angegeben.

Wir wollen hier noch angeben, wie man die die Lösung unter Verwendung des Produktzeichens Π aufschreiben kann.

$$z=\prod_{k=0}^{99}\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)$$

$$z=\frac{\prod\limits_{k=0}^{99}((2k+1)^2-2^2)}{\prod\limits_{k=0}^{99}(2k+1)^2}$$

$$z=\frac{\prod\limits_{k=0}^{99}((2k+1)-2)((2k+1)+2)}{\prod\limits_{k=0}^{99}(2k+1)^2}$$

$$z=\frac{\prod\limits_{k=0}^{99}(2k-1)\prod\limits_{k=0}^{99}(2k+3)}{\prod\limits_{k=0}^{99}(2k+1)\prod\limits_{k=0}^{99}(2k+1)}$$

Ersetzt man nun k durch $k-1$, so muß man natürlich k von 1 bis 100 laufen lassen. Wir nutzen das aus und erhalten damit

$$z=\frac{\prod_{k=0}^{99}(2k-1)\prod_{k=0}^{100}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{100}(2k-1)\prod_{k=0}^{99}(2k+1)}$$

Jetzt können wir kürzen, und von jedem dieser vier Produkte bleibt dann entweder der 0-te Faktor oder der 100-ste Faktor stehen: $z=\frac{-1\cdot 201}{199\cdot 1}$. Damit erhalten wir das Ergebnis wie oben.

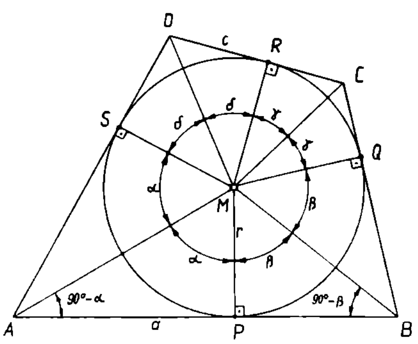
Bemerkungen: Diese Aufgabe muß im Rahmen der 4. Stufe der OJM als leicht bezeichnet werden und war damit als 1. Aufgabe am ersten Tag auch richtig platziert. Die meisten Schüler lösten die Aufgabe ohne ersichtliche Schwierigkeiten wie ganz oben angegeben. Kein Schüler benutzte die Produktschreibweise. (Wir möchten bei dieser Gelegenheit nur einmal auf diese Möglichkeit aufmerksam machen.) Die häufigsten Mängel traten bei Formulierungen auf, etwa 30 % wiesen im Antwortsatz nicht auf die Teilerfremdheit von 201 und 199 hin. Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Schüler	8	0	2	2	2	31	55

Dr. Hans-Jürgen Sprengel,
Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

2. I. Formelmäßige Erfassung der geometrischen Vorgaben (siehe Bild). Mit P, Q, R, S werden in dieser Reihenfolge die auf AB, BC, CD, DA liegenden Berührungspunkte des Inkreises mit dem Tangentenviereck bezeichnet. Es ist die Tatsache zu verwenden, daß ein Berührungsradius senkrecht auf der zugehörigen Tangente steht.

Weiterhin seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in dieser Reihenfolge die Größen der Winkel $\sphericalangle AMP$, $\sphericalangle BMQ$, $\sphericalangle CMR$, $\sphericalangle DMS$. Da die Tangenten aus A an den Inkreis symmetrisch bezüglich AM liegen, gilt $\sphericalangle AMP=\sphericalangle AMS$. Entsprechend folgt $\sphericalangle BMQ=\sphericalangle BMP$, $\sphericalangle CMR=\sphericalangle CMQ$, $\sphericalangle DMS=\sphericalangle DMR$.



Nach Konstruktionen sind die Winkel α, β, γ, δ spitz, und es gilt die Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi. \qquad (1)$$

Im Teildreieck $\triangle MAB$ bestehen folgende Beziehungen

$$\overline{AP}+\overline{BP}=a \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\sin\alpha,\ \frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}=\sin\beta \qquad (3)$$

$$\frac{r}{\overline{AM}}=\cos\alpha,\ \frac{r}{\overline{BM}}=\cos\beta. \qquad (4)$$

Auf Grund des Sinus-Satzes der ebenen Trigonometrie gilt weiterhin

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \qquad (5)$$

II. *Beweis*

Durch Einsetzen von (3) in (2) findet man

$$\overline{AM}\sin\alpha+\overline{BM}\sin\beta=a \qquad (6)$$

Verknüpft man (5) mit (6), ergibt sich

$$\overline{BM}\left(\frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha}+\sin\beta\right)=a$$

Die gefundene Gleichung wird mit $\cos\alpha$ durchmultipliziert.

$$\overline{BM}(\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta)=a\cos\alpha \qquad (7)$$

Die linke Seite von (7) läßt sich mit Hilfe eines Additionstheorems umformen. Durch Division mit $\overline{BM}$ und Einsetzen von (4) auf der rechten Seite von (7) ergibt sich

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{ar}{\overline{AM}\cdot\overline{BM}} \qquad (8)$$

Mittels zyklischer Vertauschung der Formeln 2 bis 5 von dem Dreieck $\triangle MAB$ auf das Dreieck $\triangle MCD$ und ein den Schritten 6 bis 8 analoges Vorgehen findet man

$$\sin(\gamma+\delta)=\frac{cr}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}} \qquad (9)$$

Wegen $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-(\alpha+\beta))$ folgt aus (1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma+\delta)$. (10)

Mit (10) führen (8) und (9) auf die Gleichung

$$\frac{ar}{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}=\frac{cr}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}}\ \text{oder}\ \frac{a}{c}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}} \qquad (11)$$

Ende des Beweises.

Bemerkungen: Die gestellte Aufgabe ist für die Klassenstufe 10 als angemessen zu bezeichnen. Bei Vorgabe von 7 Punkten für den vollständigen Beweis ergab die Korrektur folgenden Punktespiegel:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl d. Schüler	29	24	3	3	6	4	0	31

Der hohe Anteil von Schülern (53 %), die mit der Aufgabe so gut wie nichts anzufangen wußten, erklärt sich aus dem Fehlen eines Lösungsgedankens. Ein Lösungsgedanke besteht z. B. darin, die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle MAB$ und $\triangle MCD$ zueinander in Beziehung zu setzen. Wegen der gemeinsamen Höhe r muß das Verhältnis der Flächeninhalte gleich dem Verhältnis $a:c$ der Basen sein.

Auf alle Fälle ist die Bereitstellung geometrischer Grundbeziehungen an dem Viereck ein erster Schritt zur Durchführung des Beweises. In dem hier demonstrierten Fall erleichtert dies eine zielgerichtete identische Umformung der Ausgangsgleichung (2).

Dozent Dr. E. Schröder,
Technische Universität Dresden

3 A. *Lösung* (in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission):

Die Pyramide $ABCDS$ (Bild 1) wird längs AS aufgeschnitten. Ihre Mantelfläche wird in die Ebene abgewickelt, so daß die Figur von Bild 2 entsteht. Die Punkte der Kante AS werden dabei sowohl den Punkten der Strecke $A'S'$ als auch denen von $A''S'$ zugeordnet, z. B. hat P die beiden Bildpunkte P' und P''. Wegen $0°<\varphi<90°$ gilt $0°<\sphericalangle A'S'A''=4\varphi<360°$, so daß stets $A'\neq A''$ und $P'\neq P''$ sein muß. Betrachtet man einen beliebigen, aber festen Punkt P und dazu einen beliebigen geschlossenen Streckenzug $PQRTP$ von der in der Aufgabe genannten Art, so geht $PQRTP$ bei dieser Abbildung in einen gleichlangen (wegen $P'\neq P''$ nicht geschlossenen) Streckenzug $P'Q'R'TP''$ (Bild 2) über, der folgende Eigenschaften hat:

1. $\overline{P'S'}=\overline{P''S'}=\overline{PS}$;
2. P', Q', R', T' bzw. P'' sind innere Punkte der Strecken $A'S'$, $B'S'$, $C'S'$, $D'S'$ bzw. $A''S'$.

Bild 1

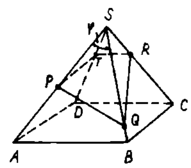
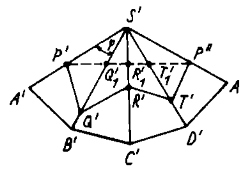


Bild 2



Streckenzüge in der Ebene mit diesen beiden Eigenschaften sollen zulässige Streckenzüge genannt werden. Jedem zulässigen Streckenzug entspricht umgekehrt ein geschlossener Streckenzug auf dem Mantel der Pyramide, der dieselbe Länge hat und die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Unter den geschlossenen Streckenzügen $PQRTP$ gibt es daher genau dann einen kürzesten, wenn es unter den zulässigen Streckenzügen $P'Q'R'T'P''$ einen kürzesten gibt. Das Bild 2 legt nahe, zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $0°<4\varphi<180°$. Das Polygon $A'B'C'D'A''S'$ ist ein konvexes Sechseck. Man erkennt leicht, daß die Strecke $P'P''$ dann jede der drei Strecken $B'S'$, $C'S'$, $D'S'$ in einem inneren Punkt schneiden muß. Daher ist die Strecke $P'P''=P'Q'_1R'_1T'_1P''$ (Bild 2) ein zulässiger Streckenzug, und zwar der kürzeste, da die Strecke die kürzeste Verbindung zwischen P' und P'' überhaupt ist. Ergebnis:

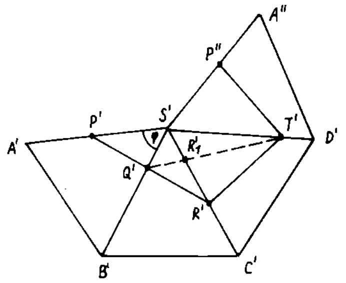
Die Winkelgrößen φ mit $0°<\varphi<45°$ gehören zu der gesuchten Menge.

2. $180°\leqq 4\varphi<360°$. Das Polygon $A'B'C'D'A''S'$ ist entweder ein Fünfeck ($\varphi=45°$) oder ein konkaves Sechseck mit einem Innenwinkel $\sphericalangle A'S'A''>180°$. In beiden Fällen ist die Strecke $P'P''$ sicher kein zulässiger Streckenzug, da sie keine inneren Punkte der Strecken $C'S'$, $B'S'$, $D'S'$ enthält. Das führt zu der Vermutung, daß in der Menge der zulässigen Streckenzüge kein kürzester existiert, wenn $45°\leqq\varphi<90°$ ist. Dies wird nun

dadurch bewiesen, daß gezeigt wird: Für $45° \leqq \varphi < 90°$ gibt es zu jedem zulässigen Streckenzug noch einen kürzeren zulässigen Streckenzug. Ist nämlich $P'Q'R'T'P''$ (Bild 3) irgendein zulässiger Streckenzug, so können nicht sämtliche der drei Streckenzüge $P'Q'R'$, $Q'R'T'$, $R'T'P''$ Strecken sein. Sonst wäre $P'Q'R'T'P''$ die Strecke $P'P''$, also im Widerspruch zur Voraussetzung kein zulässiger Streckenzug. Es sei $Q'R'T'$ ein Streckenzug, bei dem Q', R', T' nicht auf derselben Geraden liegen. Die Strecke $Q'T'$ muß wegen $\sphericalangle B'S'D' = 2\varphi < 180°$ die Strecke $C'S'$ in einem inneren Punkt R'_1 schneiden. Daher ist $P'Q'R'_1T'P''$ wieder ein zulässiger Streckenzug. Er ist aber kürzer als $P'Q'R'T'P''$, weil $\overline{Q'T'} < \overline{Q'R'} + \overline{R'T'}$ ist. Ergebnis: Die Winkelgrößen φ mit $45° \leqq \varphi < 90°$ gehören nicht zu der gesuchten Menge.

Die gesuchte Menge von Winkelgrößen φ ist daher mit $0° < \varphi < 45°$ gefunden.

Bild 3



Bemerkungen: Die Aufgabe wurde von nur 11 Schülern ausgewählt. Das zeigt, daß bei den Schülern im allgemeinen die Logik gegenüber der Geometrie den Vorzug genießt. Mängel traten vor allem bei der Behandlung des Falls $45° \leqq \varphi < 90°$ auf, wenn es darum ging, einen sauberen Nachweis dafür zu führen, daß es zu jedem zulässigen Streckenzug immer noch einen kürzeren gibt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl d. Schüler	1	2	0	0	0	1	6	1

Dr. G. Seifert, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik

3 B. *Lösung (nach einem bearbeiteten Lösungsvorschlag des Schülers Bernd Renner, Halle):* Uwes Aussage ist nur dann falsch, wenn gilt:

a) Peter hat den Zirkel nicht,

b) Klaus hat das Lineal.

Peters Aussage ist ebenfalls nur dann falsch, wenn a) und b) zutreffen. Das heißt, daß Uwes und Peters Aussagen entweder beide wahr oder beide falsch sind. Wären sie beide falsch, so wäre auch Monikas Aussage falsch – was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Daraus folgt, daß die Mitteilungen von Uwe, Peter und Monika wahr und die von Klaus und Ilona falsch sind. Da die Aussage von Klaus falsch ist, hat er selbst das Lineal, und Uwe hat den Bleistift nicht. Dann hat Peter den Zirkel (Peters Aussage). Ilona hat weder Füller noch Bleistift, also hat sie den Radiergummi. Da Uwe den Bleistift nicht hat, hat ihn Monika. Also hat Uwe den Füller. Mithin ergibt sich:

Uwe hat den Füller,
Monika hat den Bleistift,
Peter hat den Zirkel,
Klaus hat das Lineal,
Ilona hat den Radiergummi.

Bemerkungen: 89 % der Schüler wählten diese Aufgabe. Als typische Fehler traten falsche Wahrheitswerttabellen auf, insbesondere bei der Implikation. Oftmals wurden auch unvollständige bzw. unübersichtliche Fallunterscheidungen durchgeführt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl d. Schüler	13	13	3	14	5	13	1	27

Dr. Ingeborg Bartsch, Universität Rostock, Sektion Mathematik

4. *1. Lösungsmöglichkeit:* Wir nehmen an, daß eine rationale Zahl r die Gleichung (1) erfüllt. Dann folgt durch Quadrieren, da beide Seiten von (1) positiv sind,

$$(2+\sqrt{3})^r + 2(\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}})^r + (2-\sqrt{3})^r = 16, \text{ woraus sich}$$

$$(2+\sqrt{3})^r + (2-\sqrt{3})^r = 14 \qquad (2)$$

und die Erkenntnis

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1 \text{ ergibt.} \qquad (3)$$

Durch die Substitution $(2+\sqrt{3})^r = :z$ erhält man aus (2) unter Berücksichtigung von (3) die quadratische Gleichung $z^2 - 14z + 1 = 0$, deren Lösungen $z_1 = 7 + 4\sqrt{3}$ und $z_2 = 7 - 4\sqrt{3}$ sind. Daraus ergibt sich

$$(2+\sqrt{3})^{r_1} = 7 + 4\sqrt{3} \text{ bzw.}$$
$$(2+\sqrt{3})^{r_2} = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Wegen $7 \pm 4\sqrt{3} = 4 \pm 4\sqrt{3} + 3 = (2 \pm \sqrt{3})^2$ erhalten wir als mögliche Lösungen von (1) $r_1 = 2$ und $r_2 = -2$. Die rationalen Zahlen $r_1 = 2$ und $r_2 = -2$ sind tatsächlich Lösungen von (1), denn es gilt

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 =$$
$$= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \quad \text{und}$$
$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-2} =$$
$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4.$$

2. Lösungsmöglichkeit: Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x$ für alle reellen Zahlen x. Zunächst gilt stets

$$f(-x) = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-x} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-x}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x} + \frac{1}{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x}$$
$$= (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = f(x).$$

Also ist f eine gerade Funktion und es gilt $\sqrt{2+\sqrt{3}} = (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-1}$. Wir setzen $\sqrt{2+\sqrt{3}} = :a$ und erhalten $f(x) = a^x + a^{-x}$ mit $a > 1$. Für $x > 0$ untersuchen wir das Monotonieverhalten von f. Mit einer beliebigen positiven reellen Zahl α gilt:

$$f(x+\alpha) - f(x) = a^{x-\alpha} + \frac{1}{a^{x+\alpha}} - a^x - \frac{1}{a^x}.$$
$$= \frac{1}{a^{x+\alpha}}(a^{2x+2\alpha} + 1 - a^{2x+\alpha} - a^\alpha)$$
$$= \frac{1}{a^{x+\alpha}}(a^{2x+\alpha}(a^\alpha - 1) - (a^\alpha - 1))$$
$$= \frac{1}{a^{x+\alpha}}(a^{2x+\alpha} - 1)(a^\alpha - 1)$$

Wegen $\alpha > 0$ und $a > 1$ folgt $a^\alpha > 1$ und $a^{2x+\alpha} > 1$, also $f(x+\alpha) - f(x) > 0$ und damit $f(x+\alpha) > f(x)$. Im Intervall $(0, \infty)$ ist die Funktion f streng monoton wachsend und wegen $f(-x) = f(x)$ im Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend. Folglich können höchstens eine positive reelle Zahl r_1 und eine negative reelle Zahl r_2 existieren, die (1) erfüllen. Die Gleichung (1) läßt sich auch in der Form $(2+\sqrt{3})^{\frac{r}{2}} + (2-\sqrt{3})^{\frac{r}{2}} = 4$ schreiben, aus der man unmittelbar die Lösung $r_1 = 2$ ablesen kann. Daher sind $r_1 = 2$ und $r_2 = -r_1 = -2$ genau die Lösungen von (1).

Bemerkungen: Von den 100 Startern lösten 15 die Aufgabe vollständig (6 Punkte), 3 wiesen nur die Notwendigkeit nach, daß eine Lösung r Element der Menge $\{2, -2\}$ ist, unterließen aber den Hinweis, daß sowohl 2 als auch -2 tatsächlich Lösungen sind (5 Punkte), 32 konnten nur die „gesehene" Lösung $r_1 = 2$ angeben (1 Punkt) und 5 Starter erhielten keinen Punkt. 36 Schüler bemühten sich vergebens, mit Hilfe von Monotoniebetrachtungen die Vollständigkeit der Lösungsmenge $\{2, -2\}$ für Gleichung (1) zu zeigen. Die Beziehung $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3})^{-1}}$ haben nur etwa 20 Starter erkannt. Ein Schüler entwickelte eine interessante Lösungsvariante unter Benutzung der Tatsache, daß für von Null verschiedene reelle Zahlen x und y aus $xy \neq 1$ und $x \neq y$ stets $x^{-1} - y^{-1} \neq y - x$ folgt. Wegen der sehr unsauberen schriftlichen Darlegung seiner Gedanken gelangte er jedoch nicht ans Ziel. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung erscheint der Klassenstufe angemessen zu sein. *Dr. Hans-Jürgen Vogel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam*

5. Die Aussagen von Annemarie und Brigitte sind Allaussagen. Um eine solche zu widerlegen, reicht ein Gegenbeispiel aus. Nimmt man $f(x) = x$ $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, dann erhält man zwei Funktionen, die alle Voraussetzungen erfüllen:

1. Definitionsbereich von f = Definitionsbereich von g = Menge R der reellen Zahlen.

2. a) f ist auf R streng monoton wachsend, wie sich sofort aus der Monotoniedefinition in der Anmerkung ergibt.

b) g ist nicht auf ganz R streng monoton. Für $x_1 = -1 < 1 = x_2$ ergibt sich

$$g(x_1) = g(x_2) = \sqrt{2}.$$

3. $g^2(x) - f^2(x) = (\sqrt{x^2+1})^2 - x^2 = 1.$

Von Schülern angegebene Modifikationen des obigen Lösungsweges:

1. Andere Funktionen für g

a) $g(x) = -\sqrt{x^2+1}$

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{für rationale } x \\ -\sqrt{x^2+1} & \text{für irrationale } x \end{cases}$

2. Direkter Nachweis, daß $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ nicht streng monoton ist auf ganz R.

Fall 1: $x_1, x_2 \in (0, \infty)$

$x_1 < x_2 \rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2+1} = g(x_1) < \sqrt{x_2^2+1} = g(x_2)$; also ist g auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Fall 2: $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$
$x_1 < x_2 \to |x_1| > |x_2| \to |x_1|^2 = x_1^2 > |x_2|^2 = x_2^2 \to g(x_1) > g(x_2)$; also ist g auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend.

3. Zusätzliche Forderung an f: Es gebe $x_1, x_2 \in R$ mit $f(x_1) = -f(x_2)$.
Solche Funktionen sind z. B. $f(x)=x$, $f(x)=x^3$. Sei o. B. d. A. $x_1 < x_2$. Dann ist $g^2(x_1) = 1 + f^2(x_1) = 1 + f^2(x_2) = g^2(x_2)$ und damit $|g(x_1)| = |g(x_2)|$; also ist g nicht überall streng monoton.

Bemerkungen: Die meisten Schüler sahen nicht, daß nur ein Gegenbeispiel angegeben zu werden braucht, um die Aussagen von Annemarie und Brigitte zu widerlegen. Wer es aber erkannte, kam auch schnell auf das Beispiel

$$f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Bei dem Versuch eines „allgemeinen" Beweises wurden von den Schülern aufwendige Umformungen vorgenommen, die dann in den meisten Fällen nicht zum Ziel führten. Die Anmerkung zur Aufgabe glaubten einige Schüler benutzen zu müssen; sie versperrten sich damit die Idee des Gegenbeispieles.

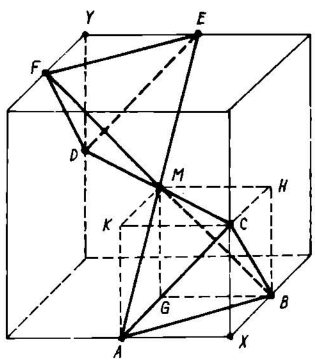
Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl d. Schüler	30	15	4	10	8	16	17

Der Punktedurchschnitt von 2,67 ist für diese doch leichte Aufgabe als zu gering zu bezeichnen.

Dipl.-Math. Peter Kobelt, Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg

6. *Lösung* (entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission):

a) I. Angenommen, es gibt eine Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und D, E, F mit den geforderten Eigenschaften. Wir bezeichnen mit A', B', C' die Punkte, die dabei A, B, C zugeordnet sind. Da AB Kante sein soll, muß AB mindestens zwei ebenen Seitenflächen angehören. Nach Voraussetzung gehen von A nur die Kanten AB, AC, AA' und von B nur die Kanten BA, BC, BB' aus. Folglich müssen AA' und BB' in einer gemeinsamen Ebene liegen, in der auch AB und $A'B'$ liegen.



Die Punkte A, B, E, F liegen in einer gemeinsamen Ebene ε, da der Mittelpunkt M des Würfels aus Symmetriegründen Mittelpunkt von AE und BF ist (siehe Bild). Da M auch Mittelpunkt von CD ist und M nicht in der Ebene durch A, B, C enthalten ist, gilt $D \notin \varepsilon$, und damit kann weder DE noch DF mit AB in einer gemeinsamen Ebene liegen. Folglich muß $A'B' = EF$ und damit $C' = D$ sein. Nun muß aus Symmetriegründen noch $A' = E$ und $B' = F$ sein.

II. Auf Grund der Mittelpunktslage von M ist andererseits einsichtig, daß diese Zuordnung tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt. Die gesuchte Figur besteht aus den beiden Tetraedern $ABCM$ und $DEFM$.

b) Die Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD haben sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Da AE, BF und CD die Länge $a\sqrt{2}$ besitzen, haben auch AM, BM, CM, EM, FM, DM sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Also sind beide Tetraeder regelmäßig und kongruent zueinander und haben nach einer bekannten Formel das Volumen $\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 \sqrt{2} = \frac{a^3}{24}$. Die gesamte Figur hat dann das Volumen $\frac{a^3}{12}$.

Bemerkungen: Die meisten Schüler gingen von den sechs möglichen eindeutigen Zuordnungen von $\{A, B, C\}$ auf $\{D, E, F\}$ aus. Die Begründungen dafür, daß fünf dieser Zuordnungen nicht die geforderten Eigenschaften besitzen, waren häufig unzureichend und zu sehr auf die Anschauung gestützt. (Bei der Korrektur wurde eine solche Behauptung, daß der Mittelpunkt M des Würfels auch Mittelpunkt von AE, BF und CD ist, der anschaulichen Richtigkeit wegen ohne weitere Begründung akzeptiert.)

Eine elegante elementare Berechnung des Volumens der Figur hat ein Schüler angegeben, wenn man die Volumenformel für das regelmäßige Tetraeder nicht parat hat. Sind G, H, K die Mitten derjenigen Seitenflächen des Würfels, die die Punkte A, B bzw. B, C bzw. C, A enthalten, so ist $AXBGKCHM$ ein Würfel mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$. Aus diesem Würfel entsteht das Tetraeder $ABCM$ dadurch, daß vier zu $AXBC$ kongruente Tetraeder abgeschnitten werden. Das Tetraeder $AXBC$ hat nun offensichtlich ein Sechstel des Volumens des Würfels (mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$). Also hat das Tetraeder $ABCM$ das Volumen $\frac{2}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{24}$. (Bei dieser Lösung ist nicht einmal die Kenntnis notwendig, daß das Tetraeder $ABCM$ regelmäßig ist.)

Die Aufgabe war angemessen. Die Schüler fanden (bis auf wenige Ausnahmen) einen Zugang und konnten wenigstens Teillösungen erzielen. Im Teil b) traten Fehler bei der Volumenberechnung auf, insbesondere bei der Berechnung der Höhe des Tetraeders. Bei richtiger Lösung wurden für den Teil a) 5 und für den Teil b) 3 Punkte vergeben.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anz. d. Schüler	7	4	7	5	19	11	19	21	13

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

Lösungen zu: Übung macht den Meister (Heft 4/75)

Textgleichungen

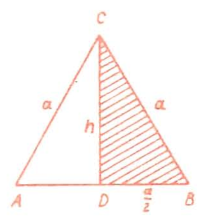
1968 a ist die Anzahl der Werkstücke und t die Zeit in Minuten, dann folgt für die
1. Maschine $t_1 = 20 + 14a$
2. Maschine $t_2 = 200 + 2a$.

a) Bei 100 Werkstücken gilt
$$t_1 = 20 + 14 \cdot 100 = 1420$$
$$t_2 = 200 + 2 \cdot 100 = 400$$
Die Einsparung berechnet man aus $t_1 - t_2 = 1020$. Durch die modernere Maschine werden 1020 Minuten eingespart.

b) Bei gleicher Zeit gilt $t_1 = t_2$.
$$20 + 14a = 200 + 2a$$
$$12a = 180$$
$$a = 15$$
Bei 15 Werkstücken brauchen beide Maschinen die gleiche Zeit.

(Kl. 9, Gleichungssysteme)

1969 Aus dem rechtwinkligen $\triangle DBC$ ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras:
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
(Kl. 8, Lehrsatz des Pythagoras)



1970 a) die 1. Klasse erhält x Mark, die 2. Klasse $(360 - x)$ Mark.
$$26 : 22 = x : (360 - x)$$
$$22x = 26 \cdot (360 - x)$$
$$22x = 360 \cdot 26 - 26x$$
$$48x = 360 \cdot 26$$
$$x = 195$$
Die 1. Klasse erhält 195 M und die 2. Klasse 165 M.

b) $360 : 195 = 100 : x$
$$x = \frac{19500}{360}$$
$$x = 54{,}2$$
Die Klasse mit 26 Schülern erhält 54,2% der Gesamtsumme.

(Kl. 8, Gleichungen, Kl. 7 Prozentrechnung)

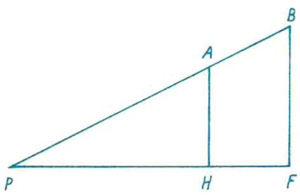
1971 Es sind vom 1. Typ x Waggons, vom 2. Typ $(33 - x)$ Waggons.
$$20x + (33 - x)24 = 720$$
$$20x + 792 - 24x = 720$$
$$4x = 72$$
$$x = 18$$
Vom 1. Typ wurden 18 Waggons und vom 2. Typ 15 Waggons eingesetzt.

(Kl. 8, Gleichungen)

1972
$$\begin{aligned} x+y&=4 \quad x=4-y\\ 3x-2y&=52 \quad x=12\\ 3(4-y)-2y&=52\\ 12-3y-2y&=52\\ y&=-8\end{aligned}$$
Die zwei Zahlen heißen 12 und -8.
(Kl. 9, Gleichungssysteme)

1973
$$\begin{aligned} x-y&=6 \quad x=6+y \quad x:y\in N\\ x\cdot y&=216\\ (6+y)y&=216\\ y^2+6y-216&=0\\ y_{1;2}&=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\\ y_{1;2}&=-3\pm\sqrt{9+216}\\ y_{1;2}&=-3\pm15\\ y_1&=12\\ y_2&=-18 \text{ (entfällt als Lösung, da } y\in N)\\ x&=6+y\\ x&=6+12\\ x&=18\end{aligned}$$
Die beiden natürlichen Zahlen heißen 12 und 18.
(Kl. 9, Quadratische Gleichungen)

1974
$$\begin{aligned}\overline{PH}&=200\text{ m}\\ \overline{PF}&=600\text{ m}\\ \overline{FB}&=360\text{ m}\\ x:200&=360:600\\ x&=120\end{aligned}$$
Die Höhe des Hotels beträgt 120 m
(Kl. 8, Ähnlichkeit, Strahlensatz)



1975 a) $80\,700:x=100:60$
$x=48\,420$
An Arbeiterfamilien wurden 48420 Wohnungen vergeben.
b) $69\,500:80\,700=100:x$
$x=116{,}2$
Die Anzahl der 1973 gebauten Wohnungen lag um 16,2% höher als 1972.
(Kl. 7, Prozentrechnung)

Lösungen zu alpha-heiter 5/75

Rätsel
1. Algebra, 2. Inkreis, 3. Numerus, 4. Parabel, 5. Billion, 6. Sekunde, 7. Rhombus, 8. Ägypten
Lösungswort: Annaberg

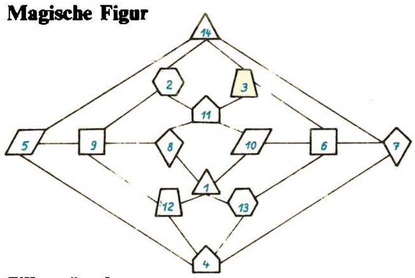
Kennst du sie?
Bernoulli, Einstein, Runge, Neper, Hilbert, Abel, Röntgen, Dedekind, Ries, Loffe, Euler, Mendelejew, Ampere, Neumann, Noether; Bernhard Riemann.

Verrückte Sätze
Acht Achter schwammen am Siebengebirge vorbei. Sieben Kinder sieben den Sand. Vier Revierförster spielten einst auf Revier sechsundsechzig. Vier Wachteln lachten dreist.

Knobel mit
$K=1$, $N=2$, $O=3$, $B=4$, $E=5$, $L=6$, $M=7$, $I=8$, $T=9$

Kryptarithmetik
Einige Lösungen:
$43\,295+37\,093=80\,388$;
$14\,082+49\,384=63\,466$;
$32\,084+29\,182=61\,266$;
$16\,592+64\,096=80\,688$

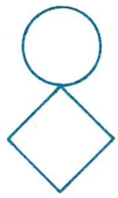
Magische Figur



Silbenrätsel
1. Inkreis, 2. Meter, 3. natürlich, 4. Quotient, 5. Omega, 6. Monate, 7. Parallele, 8. Gamma, 9. Kathete, 10. Komma, 11. Arithmetik, 12. irrational, 13. Olympiade, 14. Pi, 15. Abakus, 16. Gerade
Internationale Mathematikolympiade

Aufgaben der Qualifizierungsrunde der schwedischen Mathematik-Olympiade 1974

1. Aus einem Silberdraht soll ein Ohrgehänge angefertigt werden, das aus einem Kreis mit angelötetem Quadrat besteht (vgl. die Abb.). Wie verhält sich der Durchmesser des Kreises zu der Seitenlänge des Quadrats, wenn die Summe der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrats möglichst klein sein soll?



2. Fünf Gegenstände, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet seien, sollen so in drei Fächer A, B, C gelegt werden, daß sich in jedem Fach mindestens ein Gegenstand befindet. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür?

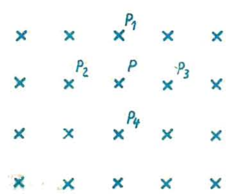
3. Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung
$$\sqrt[3]{60-x}+\sqrt[3]{x-11}=\sqrt[3]{4}$$
zu ermitteln.

Man beachte, daß in dieser Aufgabe die dritte Wurzel aus einer reellen Zahl auch dann definiert ist, wenn der Radikand negativ ist. Es gilt also für alle reellen Zahlen a und b
$$\sqrt[3]{a}=b \text{ genau dann, wenn } a=b^3.$$

4. Man beweise, daß für alle ganze Zahlen n die Zahlen
$$2n^2+n+1 \quad\text{und}\quad 8n^2+2n+1$$
keinen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.

5. Es seien p und q zwei voneinander verschiedene positive ganze Zahlen.
a) Man beweise, daß es dann eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, deren eine Lösung gleich $\frac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ ist.
b) Man untersuche ferner, welche zweite Lösung eine solche quadratische Gleichung haben kann.

6. Es sei M eine Menge von $m\cdot n$ Punkten ($m\geq 3$, $n\geq 3$), die in der Form eines Rechtecks angeordnet sind. Man unterscheidet in dieser Menge innere Punkte und Randpunkte. Dabei sei ein Punkt P innerer Punkt genannt, wenn er wie in der Abbildung von vier benachbarten Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 umgeben ist.



Nun seien Funktionen f definiert, bei denen jedem Punkt P der Menge M eine reelle Zahl $f(P)$ zugeordnet ist und für alle inneren Punkte P
$$f(P)=\frac{1}{4}\left(f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)+f(P_4)\right)$$
gilt.
f_1 und f_2 seien zwei solche Funktionen, wobei $f_1(R)=f_2(R)$ für alle Randpunkte R der Menge M gilt.
Man beweise, daß dann auch $f_1(P)=f_2(P)$ für alle inneren Punkte der Menge M gilt.

Übung macht den Meister

Arbeit mit Variablen

Aus Abschlußprüfungen der 10. Klasse der Oberschule

1975 Vereinfache den Term
$(m^2n^5)^3$
so weit wie möglich!

1974 Vereinfache folgenden Term so weit wie möglich!
$\sqrt[3]{a^6b^9}$ $(a \geqq 0;\ b \geqq 0;\ b \in P)$

1973 Gib den Wert für die Variable a an, für den der Term
$\frac{5}{6-3a}$
nicht definiert ist!

1972 Forme die Gleichung für das Volumen des Kegels
$V=\frac{1}{3}\pi r^2$
nach der Variablen r um!

1971 Forme die folgende Gleichung nach a um!
$A=\frac{a+c}{2}\cdot h$

1970 Vereinfache die folgende Summe so weit wie möglich!
$3m(m+0{,}6n-4n^2)+(m-5n)^2$

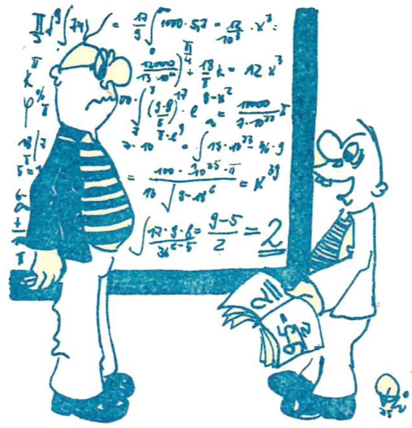
1969 Löse die folgende Gleichung nach a auf!
$\frac{1}{a}-\frac{1}{5a}=b$
$(a \neq 0, b \neq 0; a,b \text{ reell})$

1968 Löse die folgende Gleichung nach t auf!
$s=p+p\cdot k\cdot t$
$(p \neq 0,\ k \neq 0)$

1967 Berechne
$(6a+5b)\left(\frac{1}{2}a-2b\right)$!

1966 Löse nach c auf und vereinfache so weit wie möglich!
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$
$(a \neq b;\ b \neq 0;\ c \neq 0,\ a \neq -b)$

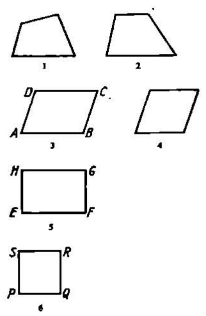
1965 Eine Seite eines Rechtecks sei 6 cm lang. Verlängert man diese Seite um 4 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so entsteht ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt.
Wie lang ist die andere Seite des ursprünglichen Rechtecks?



So wie Sie es gemacht haben geht es natürlich auch.

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 5

Vierecke
Четырёхугольники
Quadrangles (*or*: Quadrilaterals)
Quadrangles (Quadrilatères)



1 allgemeines Viereck
произвольный четырёхугольник
any quadrilateral
quadrangle quelconque

2 Trapez
трапеция (четырёхугольник, две стороны которого параллельны)
trapezium, trapezoid (quadrilateral with one pair of parallel sides)
trapèze (quadrangle avec une paire de côtés parallèles)

3 Parallelogramm (Viereck mit parallelen Gegenseiten)
параллелограмм (четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны)
parallelogram (quadrilateral whose opposite sides are parallel)
parallélogramme (quadrangle avec côtés parallèles opposés)

4 Rhombus
ромб (равносторонний четырёхугольник)
rhombus (equilateral quadrangle)
losange (quadrangle équilatéral)

5 Rechteck
прямоугольник (четырёхугольник с прямыми углами)
rectangle (quadrilateral with right angles)
rectangle (quadrangle qui a seulement des angles droits)

6 Quadrat
квадрат (равносторонний прямоугольник)
square (equilateral rectangle)
carré (rectangle équilatéral)

Regelmäßige Vielecke
правильные многоугольники
Regular Polygons · Polygones réguliers

Fünfeck · Sechseck · Achteck · Zwölfeck
пятиугольник, · шестиугольник · восьмиугольник · двенадцатиугольник
pentagon · hexagon · octagon · dodecagon
pentagone · hexagone · octogone · dodécagone

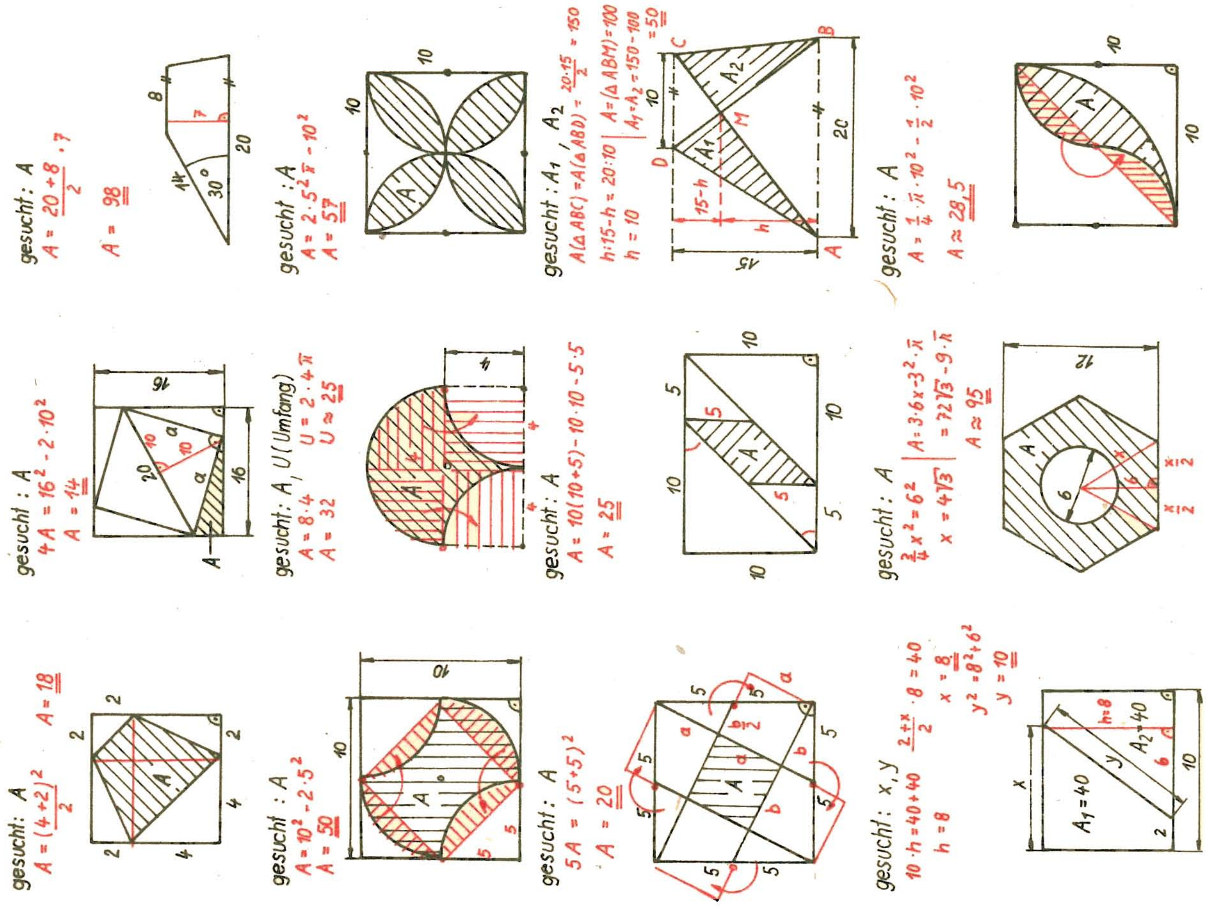
Der Kreis круг	The circle Le cercle

Kreis und Kreisteile

M Mittelpunkt центр centre centre	$A=\pi r^2$ Kreisfläche площадь круга area of the circle surface du cercle
r Radius радиус radius rayon	t Tangente касательная tangent tangente
d Durchmesser диаметр diameter diamètre	P_t Berührungspunkt точка касания point of tangency point de contact

$U=2\pi r$ Kreisumfang
длина окружности
circumference of the circle
périmètre du cercle (circonférence du cercle)

Lösung zu: Gut gedacht ist halb gelöst (4/75)



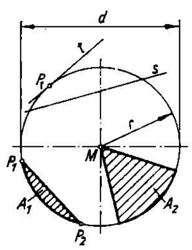
s Sekante
секущая
secant
sécante

$\overline{P_1P_2}$ Sehne
хорда
chord
corde

$\overset{\frown}{P_1P_2}$ Kreisbogen
дуга
circular arc
arc de cercle

A_1 Kreisabschnitt
круговой сегмент
circular segment
segment de cercle

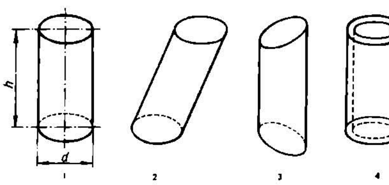
A_2 Kreisausschnitt
круговой сектор
circular sector
secteur de cercle



Kreiszylinder
круговые цилиндры
Circular cylinders
Cylindre circulaire

1 gerader Zylinder
прямой цилиндр
right cylinder
cylindre droit (cylindre de révolution)

h Höhe
высота
height
hauteur



d Durchmesser der Grundfläche
диаметр основания
diameter of the base
diamètre de base

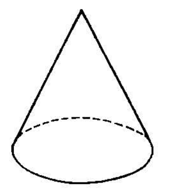
$A_M = dh$ Mantelfläche des geraden Zylinders
боковая поверхность прямого кругово цилиндра
curved surface of the right circular cylinder
surface latérale du cylindre droit circulair

2 schiefer Zylinder
наклонный цилиндр
oblique cylinder
cylindre oblique

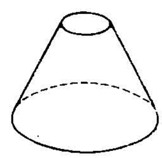
3 schief abgeschnittener Zylinder
наклонный отрезанный цилиндр
obliquely cut cylinder
cylindre tronqué

4 Hohlzylinder
полый цилиндр
hollow cylinder
cylindre creux

Gerader Kreiskegel
прямой круговой конус
Right circular cone
Cône droit circulaire



Kegelstumpf
усечённый конус
Frustum of a cone
Cône tronqué



Mit Heft 6/75 schließen wir unser kleines Lexikon ab. Wir würden uns freuen, von unseren Lesern Aufgaben in russischer, englischer oder französischer Sprache (Lösungsvorschläge in deutsch) zu erhalten.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem VEB Fachbuchverlag

S. Koch

Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben

136 S., 61 Abb. *Preis 7,80 M*

In diesem Buch sind aus dem Bereich des Mathematikunterrichts der Fach- und Oberschulen etwa 140 vollständig durchgerechnete Aufgaben enthalten, deren Lösung jeweils in Schritte unterteilt ist:

Teil A: Aufgabenstellung

Teil B: Erste Lösungsschritte, meist mit dem Lösungsplan, dem Ansatz und den notwendigen Überlegungen

Teil C: Durchführung der weiteren rechnerischen Operationen

Teil D: Fixierung des Ergebnisses, Kontrolle und Formulierung der Antwort. Hier werden auch Schlußfolgerungen gezogen, Verallgemeinerungen erwähnt und Hinweis auf Ergänzungen gegeben.

Aus dem Inhalt: Formelumstellungen · Aus der Mengenlehre · Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei unbekannten Variablen · Quadratische Gleichungen · Ungleichungen, Wurzelgleichungen, goniometrische Gleichungen · Folgen, Grenzwert, Stetigkeit · Funktionsuntersuchungen · Extremaufgaben · Flächenberechnung durch Integration · Volumenberechnung von Rotationskörpern

A. J. Kitaigorolski

Unwahrscheinliches – möglich oder unmöglich?

252 S., 38 Bilder *Preis 5,50 M*

In diesem Buch geht es um die Wahrscheinlichkeitstheorie. Anliegen des Autors ist es, den Lesern die Dialektik von Gesetzmäßigkeit und Zufall verständlich zu machen und Verhaltensweisen für gewisse Situationen in Beruf und Alltag zu erläutern.

Jiří Sedláček

Keine Angst vor Mathematik

167 S., 71 Bilder *Preis: 4,80 M*

Das Buch will zeigen, daß manche Aufgaben der Unterhaltungsmathematik kein bloßer Zeitvertreib sind, sondern daß sie zu ernsten, für die angewandte Mathematik wichtigen Problemen führen. Diese Schrift, deren Stoff höchstens das Wissen der Oberschule verlangt, wendet sich insbesondere an Schüler, die sich für Mathematik interessieren.

Kießling/Körner

Anleitung zum Lösen physikalischer Aufgaben

127 S., 56 Abb., 1 Beilage *Preis 5,00 M*

Die Verfasser dieses Buches haben sich die Aufgabe gestellt, die Selbststudienarbeit beim Lösen physikalischer Aufgaben bestmöglich anzuleiten. Dieses Buch ist kein Lehrbuch, sondern eine Übungsanleitung. Der Leser muß sich die physikalischen Grundlagen durch Anhören der Experimentalvorlesungen und Studium von Lehrbüchern erarbeitet haben. In dem Buch finden wir rund 100 vielseitig ausgewählte Beispiele (Teilprogrammierte Lösung von Aufgaben und Diskussion).

Dietrich/Stahl

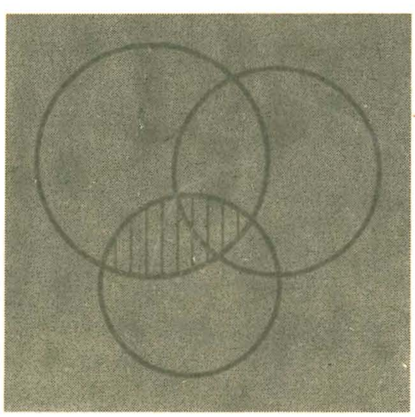
Grundzüge der Matrizenrechnung

313 S., 10 Bilder, 57 Kontrollfragen und Antworten, 66 Übungen und Lösungen
Preis 8,50 M

G. Choquet

Neue Elementargeometrie

VEB Fachbuchverlag Leipzig



144 S., 15 Bilder *Preis 16,80 M*

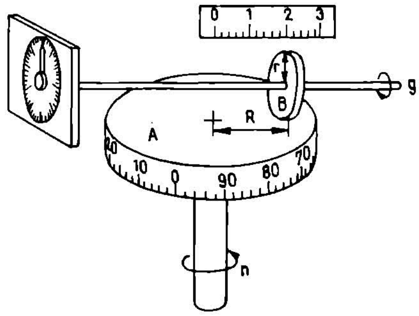
Mit diesem Buch legt der Verlag ein Werk eines wegen seiner mathematischen Leistungen hoch angesehenen französischen Wissenschaftlers vor, das auch einen method.-didaktischen Zweck verfolgt. Es enthält eine axiomatische Begründung der euklidischen Elementargeometrie, die, von anschaulichen Axiomen ausgehend, dennoch rasch die zugrunde liegenden algebraischen Strukturen hervortreten läßt. Nicht die Kongruenzbeziehungen von Dreiecken stehen im Vordergrund, sondern die durch das Parallelogramm gegebene Vektoraddition. Geschrieben ist das Ganze in einem modernen Stil, der das Vertrautsein mit solchen Begriffen wie Äquivalenz, Abbildungen, totale Ordnung – Begriffe, ohne die heute wohl kaum noch eine mathematische Theorie formuliert wird.

M. Kovács

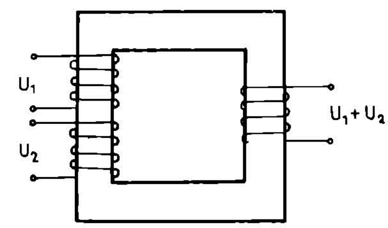
Rechenautomaten und logische Spiele

212 S., 114 Bilder *Preis 8,00 M*

Dieses Buch führt auf populärwissenschaftliche Weise einige Gedanken über die Beziehungen zwischen Mathematik, Logik, Physik und Kybernetik ein, und gleichzeitig regt es dazu an, einfache Geräte selbst zu bauen.



Mechanische Multiplizier-Dividier-Maschine



Addition mit Hilfe eines Transformators

Die Lösung mathematischer und logischer Aufgaben, die sonst mit Bleistift und Papier gerechnet werden, findet ihre Darstellung in physikalischen Zusammenhängen und kann so mit wenigen Mitteln, aber mit etwas Denkarbeit automatisiert werden. Neben Lesen, Lernen und Überlegen steht gleichzeitig das Basteln, zu dem das Buch anregt und so eine sinnvolle Verbindung zwischen Theorie und Praxis herstellt.

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mit diesem Beitrag eröffnen wir die *alpha*-Serie „Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt". Wir – das ist ein Kollektiv von FDJlern der *Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität* Leipzig. In unserer Serie wollen wir über „den mathematischen Alltag" an den Schulen berichten, über Zirkelnachmittage von Arbeitsgemeinschaften, Mathematikklubs, über die Arbeit mit der *alpha*, über Spezialistenlager und andere Aktivitäten *Junger Mathematiker.*
Natürlich wird dabei die Diskussion von interessanten Aufgaben, die euch, liebe *alpha*-Leser, beschäftigen, im Mittelpunkt stehen. Deshalb sind wir an euren Ideen interessiert. Helft mit bei der Gestaltung der neuen Serie! Richtet eure Beiträge an

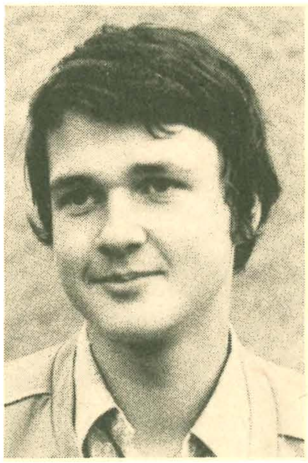
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14
„Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt".

Vergeßt nicht, Absender sowie Schule und Schuljahr anzugeben!

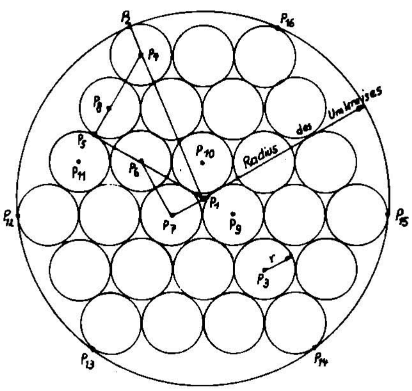
● Einen interessanten Beitrag zu einem Pionierfest leisteten die 11 Mitglieder der AG Mathematik der Klasse 6c der 1. Oberschule „Hans Beimler" aus Herzberg und ihre Zirkelleiterin, Frau *Gutsche*. Sie hatten Stände aufgebaut, an denen sie ihren Mitschülern Mathematikaufgaben, Scherzfragen und lustige Zeichenaufgaben vorlegten. So wurden z. B. Rechenaufgaben mit Streichhölzern oder Fragen wie „Welche Zahl hat ebenso viele Ziffern wie Buchstaben?" gestellt.

● Die folgende Aufgabe sandte uns Herr *Reinhard Schulz*, Fachlehrer für Mathematik an der OS Rotta und Leiter des *Kreisklubs Junger Mathematiker* Gräfenhainichen.
Aufgabe: 27 kongruente Kreise mit dem Radius r sind entsprechend der Zeichnung so angeordnet, daß jeder innere Kreis von genau 6 Kreisen berührt wird. Wie groß ist der Radius des zugehörigen Umkreises?
Die Aufgabe entstand übrigens bei der Kreisolympiade, als je 27 Bleistifte für die Teilnehmer auf diese Weise gebündelt waren. Auch Rohre, die auf der Ladefläche eines LKW so zusammengebunden waren, fand Herr *Schulz*.

Die Lösung stammt von seinem Klubmitglied *Thomas Kaatz*. Thomas (s. Foto) ist Schüler der 10. Klasse der EOS Gräfenhainichen und mehrfacher Sieger bei der Bezirksolympiade.



Lösung: (1) Der Schnittpunkt P_1 der Transversalen des gleichseitigen Dreiecks $P_7P_9P_{10}$ ist der Mittelpunkt des Umkreises, denn
$\triangle P_1P_7P_{12} \cong \triangle P_1P_7P_{13} \cong \triangle P_1P_9P_{14} \cong$
$\triangle P_1P_9P_{15} \cong \triangle P_1P_{10}P_{16} \cong \triangle P_1P_{10}P_2$
nach sws.



Also gilt $R = \overline{P_1P_2}$.
(2) $\overline{P_1P_7} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r = \frac{2}{3}$ Höhe im Dreieck $P_7P_9P_{10}$.
(3) $\sphericalangle P_6P_7P_1 = \sphericalangle P_6P_7P_{10} + \sphericalangle P_{10}P_7P_1 = 60° + 30° = 90°$, daraus folgt
$$\overline{P_1P_6} = \sqrt{\frac{4}{3}r^2 + 4r^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}r.$$
(4) $P_6P_5 = \sqrt{3}r =$ Höhe im gleichseitigen Dreieck $P_6P_8P_{11}$.
(5) Dreieck $P_5P_1P_4$ ist rechtwinklig mit den Katheten $\overline{P_1P_5} = \overline{P_1P_6} + \overline{P_6P_5} = \frac{7}{3}\sqrt{3}r$ und $\overline{P_4P_5} = 3r$. Daraus folgt
$$\overline{P_1P_4} = \sqrt{\frac{49}{3}r^2 + 9r^2} = \frac{2}{3}\sqrt{57}r.$$
(6) Der Kreis mit dem Radius r um P_4 berührt den Umkreis in P_2, folglich liegen P_1, P_4 und P_2 auf einer Geraden. Also ist
$$R = \overline{P_1P_4} + \overline{P_4P_2} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{57} + 1\right)r \approx 6{,}03r$$

● Zum Abschluß eine Aufgabe von Diplommathematiker *Gerold Schmidt*, dem Autor dieses Artikels:
Aufgabe: In der Aufstiegsrunde zur Fußball-Oberliga spielen die 5 Staffelsieger der Liga, wobei jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal auf eigenem und genau einmal auf gegnerischem Platz anzutreten hat. Für ein gewonnenes Spiel gibt es 2 Punkte, für ein unentschiedenes 1 und für ein verlorenes keinen.
Am Ende steigen die beiden Mannschaften mit den meisten Punkten in die Oberliga auf (bei Punktgleichheit entscheidet die Tordifferenz, d. h. die Differenz aus erzielten Toren und Gegentoren, über die Plazierung).
a) Man beweise, daß eine Mannschaft, die jedes Heimspiel gewinnt und jedes Auswärtsspiel unentschieden gestaltet, auf jeden Fall aufsteigt!
b) Man untersuche, ob diese Behauptung auch richtig ist, wenn 6 Mannschaften auf oben genannte Weise 2 Aufsteiger ermitteln!
Die Lösung findet ihr im nächsten Heft unter „Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt". Viel Spaß beim Knobeln! *G. Schmidt*

Leser fragen – alpha antwortet

Unser Leser *Wolfgang Noetzold* aus Zschokken versteht die folgende Aussage, auf die er beim Studium der *Kleinen Enzyklopädie* Mathematik stieß, nicht:
„... jeder abbrechende Dezimalbruch läßt sich als unendlicher Dezimalbruch mit unendlich vielen Nennern darstellen, z. B. $7{,}58 = 7{,}57999\ldots$" –

Unsere Antwort: Wir bezeichnen die Zahl, die durch den unendlichen Dezimalbruch $7{,}579\overline{9}\ldots$ dargestellt wird, mit x. Dann gilt
$10x = 75{,}79\overline{9}\ldots$ Subtrahieren wir
$x = 7{,}57\overline{9}\ldots$, so erhalten wir $9x = 68{,}22$ und nach Division durch 9 $x = 7{,}58$.
Da zwei Zahlen, die mit einer dritten übereinstimmen, untereinander gleich sind, gilt also $7{,}58 = 75799\overline{9}\ldots$
Dieses Verfahren ist auf jeden abbrechenden Dezimalbruch anwendbar, was den obigen Satz beweist.
Wir bemerken noch, daß man mit einer Verallgemeinerung des obigen Vorgehens, jeden periodischen Dezimalbruch in die Form $\frac{p}{q}$ (p und q ganze Zahlen) umwandeln kann.
Damit beweist man, daß jeder periodische Dezimalbruch Darstellung einer rationalen Zahl ist.
Übung: Verwandle die periodischen Dezimalbrüche
a) $1{,}44\overline{4}\ldots$ b) $107{,}\overline{107}\ldots$
in die Form $\frac{p}{q}$ (p und q ganz und unkürzbar)!