

Mathematische
Schüler-
zeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

3



Mathematische Schülerzeitschrift



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Heft 3

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); O. K. Krüger (Bad Doberan); StK J. Lehmann (Leipzig); O. H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StK G. Schulze (Herzberg/Elster); O. H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle); OStR Dr. H. Weiß (Berlin)

Aufgabenrunde:

NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); O. Th. Scholl (Berlin); O. H. Schulze (Leipzig); Kl. 5 und 6; O. K. Krüger (Bad Doberan); Kl. 7 und 8; StK G. Schulze (Herzberg/Elster); Kl. 9 und 10

Gutachtergruppe:

NPT H. Kästner; R. Hofmann; O. H. Schulze (alle Leipzig)

Redaktion:

StK J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postcheckkonto: Berlin 132626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft 0,50 MDN).
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export-Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16.
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden.

Fotos: F. Weimer, Dresden (S. 78); J. Lehmann, Leipzig (S. 85, S. 88); Archiv Bezirksklub Jg. Mathematiker, Neubrandenburg (S. 89); Vignetten: H.-J. Jordan, Lpzg. (S. 82, Umschl. IV)

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Pressenetzes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Redaktionsschluss: 1. 4. 1967

Inhalt

- 65 - Mathematischer Mannschaftswettbewerb (10)*
Oberlehrer M. Mäthner, Rat des Bezirks Cottbus
Studentenrat G. Schulze, Fachberater Mathematik des Kreises Herzberg/Elster
- 68 Tag des Lehrers 1967 (5)
Verdiente Lehrer des Volkes stellen Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb
- 69 Beweise durch vollständige Induktion 2. Teil (7)
W. Stoye, Institut für Schulmathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 74 Wir untersuchen Abbildungen;
Mengenlehre 3. Teil (5)
Dr. habil. W. Walsch,
Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg
- 78 Schwankt der Fernsehturm? (9)
Prof. Dr.-Ing. habil. W. Zill, Technische Universität Dresden
- 80 Der Berliner Fernsehturm (5)
Prof. Dr.-Ing. habil. W. Zill und
Ministerium für Post- und Fernmeldewesen
- 81 Berufsbild
Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium (10)
Prof. Dr.-Ing. habil. W. Zill
- 82 Eine Aufgabe von Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (9)
Hochschule für Bauwesen, Leipzig
- 83 VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR 1967
DDR-Olympiade (10)
Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker
- 86 Mathematische Wettbewerbe in England (8)
- 88 5. Spezialistenlager Junger Mathematiker (5)
- 89 *alpha*-Wettbewerb (5)
Bezirksklub Jg. Mathematiker, Neubrandenburg
- 90 Lösungen (5)
- 94 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
H. Pätzold, OS Waren/Müritz
- Umschlag: Mathematische Schülerbücherei (5)

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Mathematischer Mannschaftswettbewerb



In allen Bereichen unseres gesellschaftlichen Lebens, ob in der Produktion, der Forschung oder der Verwaltung, gewinnt die sozialistische Gemeinschaftsarbeit mehr und mehr an Bedeutung. Deshalb orientieren die Sozialistische Einheitspartei Deutschlands und unsere Regierung in zunehmendem Maße auf eine kollektive Bearbeitung der immer komplizierter werdenden Probleme, eben weil der einzelne unter den Bedingungen der technischen Revolution kaum noch in der Lage ist, komplexe Aufgaben zu lösen. Kann die Schule diese objektiv notwendige Entwicklung unbeachtet lassen? Im Unterricht, im Zirkel oder in der Arbeitsgemeinschaft helfen sich die Schüler gegenseitig bei der Lösung schwieriger Probleme unter dem Motto:

Als Kollektiv sind wir stärker.

Wo der eine Schwächen aufweist, setzt der andere seine guten Kenntnisse zum Wohle der Gemeinschaft ein. Echter Erfahrungsaustausch bringt alle besser voran. Der Gebende wird sicherer, gewandter; der Nehmende gewinnt Selbstvertrauen und versucht, seine Leistungen zu verbessern. Wer seine Mitschüler gut beobachtet, wird schnell herausfinden, wer zum Beispiel in Geometrie stark, wer ein guter Rechner ist, wem das Denken leicht fällt, wer durch gute Lernergebnisse aus dem Kollektiv herausragt.

Das Bezirkskomitee Cottbus der Olympiaden Junger Mathematiker nutzte die genannten Erkenntnisse. Es empfahl, im Kreis Herzberg neben das System der Mathematikolympiaden, das als ja klassische Form eines Einzelwettbewerbs zu betrachten ist, einen Mannschaftswettbewerb durchzuführen.

Im Oktober 1966 war es so weit. Jeweils drei Schüler einer 10. Klasse einer Schule bildeten eine Mannschaft. Zum Wettbewerb traten insgesamt vierzehn Mannschaften an, aus dem Kreis Herzberg acht und aus den Nachbarkreisen Jessen, Liebenwerda und Luckau je zwei. Unter ihnen befanden sich auch sechs Mannschaften aus den erweiterten Oberschulen.

In vier Stunden waren von jeder Mannschaft zwei Aufgaben, jeweils in sechs Teilaufgaben untergliedert, zu lösen. Die Jury stellte die Teilaufgaben so, daß für die folgenden die vorhergehenden nicht unbedingt gelöst sein mußten. Überall wurde eifrig und gewissenhaft gearbeitet. In jeder Mannschaft übernahm ein Mädchen oder ein Junge die Rolle des Mannschaftskapitäns. Die Mannschaften wurden mit der neuen zum Teil ungewohnten Arbeitsweise sehr unterschiedlich fertig. Die Kollektive, die eine geschickte Arbeitsteilung vornahmen, waren im Vorteil. Im Durchschnitt wurde 15 Minuten beraten und dann mit der Lösung der Aufgaben begonnen. Einige „Kapitäne“ verstanden es recht gut, jedes Mitglied der Mannschaft so einzusetzen, daß es in der Lage war, seinen Kenntnissen und Neigungen entsprechend zu arbeiten. Es zeigte sich deutlich: Die Fähigkeiten, straff zu planen, gezielt zu diskutieren, Anregungen geschickt aufzugreifen, zu verarbeiten und in das gemeinsame Vorhaben einzuplanen, entwickeln sich nicht im Selbstlauf, sondern müssen systematisch geübt werden. Eine vielseitige Sicherung der Ergebnisse will auch organisiert sein. Bei den Mannschaften, die das geschickt machten, traten kaum Fehler auf.

Jeder Schüler ging mit dem Gefühl nach Hause: „Heute habe ich etwas geschafft, zum Erfolg des Kollektivs beigetragen! Allerdings muß ich, um das nächste Mal noch besser

und rascher voranzukommen, verschiedene Stoffgebiete noch einmal gründlich durcharbeiten.“ Vielleicht können im Unterricht oder in der Arbeitsgemeinschaft ähnliche Wettbewerbe gestartet werden? Die guten Erfahrungen veranlaßten das Bezirkskomitee Cottbus, noch in diesem Jahre einen zweiten Mannschaftswettbewerb im Kreis Herzberg durchzuführen, allerdings mit Schülern der 8. Klassen. Diesem Beispiel sollen möglichst alle Kreise des Bezirks im November 1967 folgen. Im Rahmen der Bezirksolympiade Junger Mathematiker (Januar 1968) soll dann neben dem Einzelwettbewerb der erste Mannschaftswettbewerb des Bezirks durchgeführt werden.

M. Mäthner, G. Schulze

Den drei Schülern R. Glorius, W. Meyer und F.-J. Seybold aus der Klasse 10 B₂ der Erweiterten Oberschule Herzberg wurde zur Eröffnungsveranstaltung der Kreisolympiade die folgende Siegerurkunde im Auftrage des Bezirksschulrates Oberstudienrat Weidhase überreicht.

Liebe Jugendfreunde!

Erstmals in der Deutschen Demokratischen Republik führten wir zwischen vier Kreisen unseres Bezirkes am 25. Oktober 1966 einen mathematischen Mannschaftswettbewerb durch. Ihr habt dabei durch Eure Leistungen gezeigt, daß sich das individuelle Wissen nach gemeinsamer Beratung und zweckmäßiger Arbeitsteilung gut in die Lösung einer komplexen Aufgabe einfügen läßt. Es wurde ein erstes Mal bestätigt, daß auch die Schulmathematik einen vorbereitenden Beitrag zur Durchsetzung der sozialistischen Gemeinschaftsarbeit in vielen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis leisten kann. Eure Mannschaft aus der 10. Klasse der Erweiterten Oberschule Herzberg errang den 1. PLATZ.

Wir gratulieren zu diesem Ergebnis und wünschen für die weitere Arbeit innerhalb und außerhalb der Schule viel Freude und Erfolg.

Cottbus, den 5. 12. 1966

Freundschaft!

Aufgaben des Mannschaftswettbewerbs

1. Gegeben ist die Funktion mit dem analytischen Ausdruck

$$f(x) = x^2 + (a + 2)x + 2a + 1, \quad \text{wobei } a \text{ eine beliebige reelle Zahl ist.}$$

(1) Zeichnen Sie die Kurven der Funktion für $a_1 = 3$ und für $a_2 = -3$! Machen Sie Aussagen über die Nullstellen der beiden Funktionen!

(2) Für welche Werte von a liegt der Scheitel der Parabel auf der x -Achse? Zeichnen Sie die zu diesen a -Werten gehörenden Kurven!

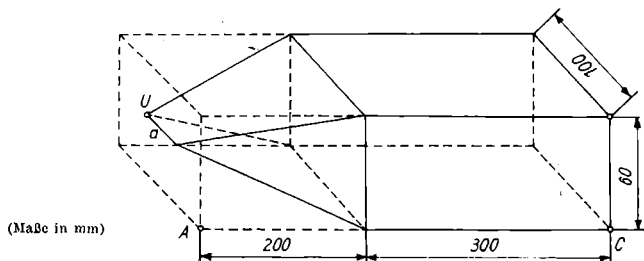
(3) Für welche Werte von a existieren zwei reelle Nullstellen, für welche Werte von a existieren keine reellen Nullstellen des quadratischen Polynoms?

(4) Die Scheitelpunkte der Parabeln von (1) sind anzugeben. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T der Verbindungsgeraden der Scheitelpunkte mit der x -Achse!

(5) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Scheitelpunkte aus (4) und der Koordinatenursprung sind!

(6) Spiegeln Sie die durch $a_1 = 3$ beschriebene Parabel an der Geraden, die durch ihren Scheitel geht und parallel zur Abszissenachse ist. In welchen Punkten schneidet die gespiegelte Parabel die x -Achse, in welchem Punkte die y -Achse?

2. Die Skizze (nicht maßstabgerecht) zeigt einen Quader, der an einer Seite keilförmig angespitzt ist. a ist die Länge der Schneide des Keils. A , C und U bezeichnen drei Punkte.



- (1) Man berechne das Volumen des Körpers, wenn
 - 1.1) $a = 10$; 1.2) $a = 4$; 1.3) $a = 0$ ist (Maße in Zentimetern)!
- (2) Man gebe das Volumen V als Funktion von a an. Diese Funktion ist graphisch darzustellen.
- (3) V_1 und V_2 bezeichnen die Maßzahlen der zu 1.1) bzw. 1.3) gehörenden Volumina. Um wieviel Prozent ist V_2 kleiner als V_1 , um wieviel Prozent ist V_1 größer als V_2 ?
- (4) Die Oberfläche O des Körpers ist als Funktion von a anzugeben.
- (5) Die Länge von \overline{UC} ist zu berechnen.
- (6) Grundriß und Aufriß des Körpers sind für $a = 4$ zu zeichnen, wobei die langen Kanten parallel zur Grundrißebene verlaufen und mit der Bildachse einen Winkel von 45° bilden.

Keine Kraft macht den Menschen

so groß und weise

wie die Kraft der kollektiven, kameradschaftlichen Arbeit.

MAXIM GORKI

Anstatt den Studenten einen unverdaulichen Wust

von abstrakten Kenntnissen einzupacken,

muß echte Wissenschaftlichkeit

in der „Entfaltung des jugendlichen Geistes“,

der „Selbsttätigkeit des Denkens“, bestehen.

Aus ADOLPH DIESTERWEG

von H. Siebert

Tag des Lehrers 1967

Verdiente Lehrer des Volkes stellen Aufgaben für den alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 15. August

Adolph Diesterweg
(1790 bis 1866)



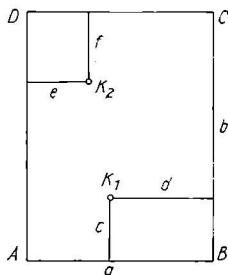
W(5)68 Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 42 cm. Wie lang ist jede der drei Seiten des Dreiecks? Begründe deine Antwort! Oberlehrer Hans Herzog, 22. OS Leipzig

W(6)69 Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC . Lege auf der Seite \overline{BC} einen Punkt A' , auf der Seite \overline{CA} einen Punkt B' und auf der Seite \overline{AB} einen Punkt C' so fest, daß die Strecken $\overline{BA'}$, $\overline{CB'}$ und $\overline{AC'}$ gleich lang sind! Beweise, daß das Dreieck $A'B'C'$ ebenfalls gleichseitig ist! Studienrat Johannes Lehmann, 20. OS Leipzig

W(7)70 Zeichne in einen Kreis vom Radius $r = 3$ cm zunächst ein Quadrat so, daß die Eckpunkte des Quadrats auf der Kreislinie liegen! Konstruiere danach ein zweites Quadrat, dessen Seiten Tangenten an den Kreis sind! Berechne die Flächeninhalte beider Quadrate! In welchem Verhältnis stehen sie zueinander? Studienrat Margarete Grattenauer, OS Altenwillershagen, Bez. Rostock

W(8)71 Einem gleichschenkligen Dreieck ABC , dessen Grundseite \overline{AB} die Länge c und dessen Höhe \overline{CM} die Länge h hat, ist ein Rechteck von möglichst großem Flächeninhalt so einzubeschreiben, daß eine Rechteckseite auf der Grundseite des Dreiecks liegt. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks? Oberlehrer Erwin Wenzel, Rat des Bezirks Cottbus, Abteilung Volksbildung

W(9)72 Das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ stellt die Spielfläche eines Billardtisches dar. Die Punkte K_1 und K_2 symbolisieren zwei auf der Spielfläche ruhende Kugeln, deren Abstände c , d , e und f von der Bande des Tisches bekannt sind. In welchem Punkt P von \overline{BC} muß die Kugel K_1 auftreffen, um nach dem Berühren der Bande die Kugel K_2 zu treffen? Die Aufgabe ist a) zeichnerisch durch die Konstruktion des Punktes P zu lösen; b) numerisch durch Berechnung der Strecke \overline{BP} zu lösen.



Oberstudienrat Karl-Heinz Lehmann,
8. OS, Berlin-Lichtenberg

W(10)73 Konstruiere aus den gegebenen Strecken a und b die Strecke

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}!$$

Beschreibe und begründe die Konstruktion! Studienrat Dr. Walter Schramm, EOS A. v. Humboldt, Berlin-Köpenick

alpha-Wettbewerb [W(5) bis W(10)]

Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe ist aus dem Beitrag: „Spezialistenlager Mathematik des Bezirks Neubrandenburg“ je nach Neigung auszuwählen, zu lösen und an die Redaktion einzusenden (siehe Seite 89).

Beweise durch vollständige Induktion

Gilt für jede
natürliche Zahl n ?
 $2^n > n$!

2. Teil*

Wir wollen nun einige Sätze durch vollständige Induktion beweisen.

a) Zunächst wenden wir uns dem anfangs erwähnten Satz zu:

Für jede natürliche Zahl n ist $2^n > n$.

Wir wissen nun, daß dieser Satz völlig bewiesen ist, wenn wir den Induktionsanfang und den Induktionsschritt ausgeführt haben.

(1) *Induktionsanfang:*

Für $n = 0$ erhält man die Behauptung $2^0 > 0$.

2^0 hatten wir anfangs durch $2^0 = 1$ erklärt. Da $1 > 0$ ist, ist der Satz für $n = 0$ wahr.

(2) *Induktionsschritt:*

Wir wollen noch einmal überlegen, was wir hier zu beweisen haben. Wir müssen zeigen: Wenn der Satz für eine beliebige natürliche Zahl wahr ist, dann ist er auch für die nachfolgende natürliche Zahl wahr. Sei m eine beliebige (d. h. irgendeine) natürliche Zahl. Wir nehmen an: Für die Zahl m gilt der Satz. Wir zeigen: Unter dieser Voraussetzung ist der Satz auch für $m + 1$ (dem Nachfolger von m) wahr, d. h.

$$2^{m+1} > m + 1 \text{ ist wahr.}$$

Beweis: Wir nehmen also an, daß der betrachtete Satz für m richtig ist, d. h., $2^m > m$.

Sicher ist $2^m > m$ (1)

$$2^m \geq 1. \quad (2)$$

Die linke Seite der Ungleichung (2) addieren wir zur linken Seite der Ungleichung (1). Ebenso verfahren wir mit den rechten Seiten. Dann bleibt die Ungleichung weiterhin richtig, und wir erhalten

$$2^m + 2^m > m + 1.$$

Nun ist aber $2^m + 2^m = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$. So erreichen wir schließlich unser Ziel:

$$2^{m+1} > m + 1.$$

Wir wollen nicht vergessen, daß wir von der Gültigkeit der Ungleichung $2^m > m$ ausgegangen sind. Wir haben also bewiesen: Wenn für irgendeine natürliche Zahl m die Ungleichung $2^m > m$ gilt, so gilt auch $2^{m+1} > m + 1$, d. h., dann gilt die Ungleichung auch für den Nachfolger von m . Damit ist außer dem Induktionsanfang auch der Induktionsschritt gezeigt. Folglich gilt der Satz für jede natürliche Zahl.

b) Eine Aufgabe der diesjährigen Mathematikolympiade für die 7. Klasse lautete: *In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und zu 5 Lei. Beweise, daß jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, unter alleiniger Verwendung von Drei- und Fünfleischnein zusammengestellt werden kann, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind.*

* Der erste Teil wurde im Heft 2 veröffentlicht (d. Red.).

Das ist ebenfalls ein Satz über natürliche Zahlen. Jedoch wird hier nur über alle natürlichen Zahlen, die *größer als 7* sind, etwas ausgesagt. Dennoch kann der Beweis mit vollständiger Induktion geführt werden. *Wir fangen statt bei 0 erst bei der Zahl 8 an.* Alles andere wird wie bisher ausgeführt.

Induktionsanfang: Wir müssen zeigen, daß der Satz für $n = 8$ gilt. Ein Geldbetrag von 8 Lei kann aber gerade aus einem Drei- und einem Fünfleischein zusammengestellt werden.

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen: *Falls* ein Geldbetrag von m Lei aus Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt werden kann, so kann auch ein Geldbetrag von $m + 1$ Lei aus Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt werden. Dabei verlangen wir allerdings, daß $m > 7$ ist.

Sei also ein Geldbetrag von m Lei aus Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt. Wir müssen nun *zwei Fälle* unterscheiden.

1. *Fall:* In dieser Zusammenstellung kommt *ein Fünfleischein* vor.

2. *Fall:* In dieser Zusammenstellung kommt *kein Fünfleischein* vor.

Im 1. Fall ersetzen wir *einen Fünfleischein* durch *zwei Dreileischeine*. Dadurch wird der Gesamtbetrag von m Lei *um 1 Leu** erhöht. Wir haben dann auch $m + 1$ Lei in der verlangten Art dargestellt. Im 2. Fall kommen in der Zusammenstellung mindestens drei Dreileischeine vor, denn m soll größer sein als 7, also mindestens 8. Für $m = 8$ kommt aber ein Fünfleischein vor. Folglich muß im 2. Fall m mindestens 9 sein. Wir nehmen nun *drei Dreileischeine* weg und ersetzen sie durch *zwei Fünfleischeine*. Dadurch *erhöht* sich der Gesamtbetrag *ebenfalls um 1 Leu*. Wir erhalten auch in diesem Fall eine verlangte Zusammenstellung von $m + 1$ Lei. Damit ist der Beweis vollständig geführt.

c) Wir betrachten ein ebenes *konvexes* n -Eck, $n > 3$, (natürlich und im folgenden nur konvexe Vierecke). Das ist eine *geradlinig begrenzte Figur mit n Ecken*, deren *Diagonalen* alle im Innern der Figur verlaufen. Beispiele für solche Figuren sind Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, regelmäßige Sechsecke (Abb. 1).

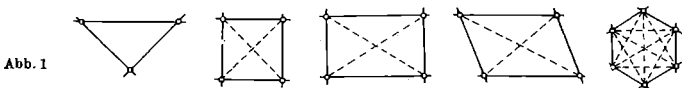


Abb. 1

Figuren der Art wie in Abb. 2 sind nicht konvex, da die Diagonale $\overline{P_1 P_3}$ nicht im Innern der Figur verläuft.

Aus dem Mathematikunterricht des 6. Schuljahres ist uns bekannt, daß *die Summe der Innenwinkel in jedem ebenen Dreieck 180° beträgt.*

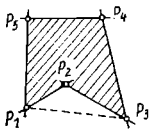


Abb. 2

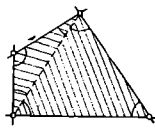


Abb. 3

Die Summe der Innenwinkel in Vierecken beträgt 360° ; denn ein Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen (Abb. 3). Dabei ist die Summe der Innenwinkel beider Dreiecke gerade gleich der Summe der Innenwinkel des Vierecks.

*) Es heißt: Der Leu, Plural: Lei (Währungseinheit der in SE Rumänien; grch \rightarrow lat \rightarrow rumän, 'Löwe').

Anzahl der Ecken n	Winkelsumme $w(n)$	Im Fünfeck beträgt die Summe der Innenwinkel 540° , wie man leicht durch Zerlegen des Fünfecks in entsprechende Dreiecke finden kann. In allen drei untersuchten Fällen erhalten wir für die Winkelsumme Vielfache von 180° .
3	$1 \cdot 180^\circ$	
4	$2 \cdot 180^\circ$	
5	$3 \cdot 180^\circ$	

Es liegt die Vermutung nahe, daß dieser Sachverhalt bei allen konvexen n -Ecken vorliegt, d. h., daß man die Summe der Innenwinkel erhält, wenn man 180° mit der um 2 verminderten Anzahl der Ecken multipliziert. Kürzen wir die Winkelsumme des n -Ecks mit $w(n)$ (lies: w von n) ab, so vermuten wir

$$w(n) = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Wir sprechen hier ausdrücklich von *Vermutung*, da wir den Sachverhalt nur für $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$ überprüft haben. Wir werden nun durch vollständige Induktion beweisen, daß *dieser Satz für alle $n \geq 3$ (für alle natürlichen Zahlen, die größer oder gleich 3 sind) richtig ist*. Dabei müssen wir wieder beachten, daß wir nicht bei 0, sondern erst bei 3 beginnen. Für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ ist der Satz nicht sinnvoll, da wir für eine Figur der oben besprochenen Art wenigstens drei Punkte benötigen.

Induktionsanfang: Wir haben uns schon davon überzeugt, daß der Satz für $n = 3$ (Dreieck) richtig ist:

$$w(3) = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$$

Induktionsschritt: Wir gehen davon aus, daß der Satz für eine natürliche Zahl m , die größer als 2 ist, richtig sein möge und zeigen, daß er dann auch für den Nachfolger $m + 1$ dieser Zahl gilt. Sei ein $(m + 1)$ -Eck gegeben. Die Eckpunkte der Figur denken wir uns in der Reihenfolge numeriert, in der sie durchlaufen werden, wenn man die Figur mit dem Finger nachzeichnet. Da es sich um $m + 1$ Eckpunkte handelt, erhalten wir $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{m-1}, P_m, P_{m+1}$ (Abb. 4).

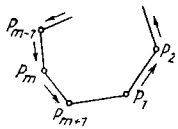


Abb. 4

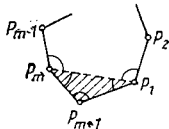


Abb. 5

Nun decken wir den Punkt P_{m+1} ab und verbinden P_m mit P_1 (Abb. 5). Wir erhalten so ein m -Eck. Nehmen wir jetzt den Punkt P_{m+1} wieder hinzu und betrachten das $(m + 1)$ -Eck, so vergrößert sich die Winkelsumme der Figur gerade um die Winkelsumme des Dreiecks $\triangle P_m P_{m+1} P_1$, also um 180° . Infolgedessen ist

$$w(m + 1) = w(m) + 180^\circ,$$

in Worten ausgedrückt: Die Winkelsumme des $(m + 1)$ -Ecks ist gleich der Winkelsumme des m -Ecks zuzüglich 180° . Für die Zahl m hatten wir den Satz als richtig vorausgesetzt, also

$$w(m) = (m - 2) \cdot 180^\circ.$$

Demzufolge ist

$$w(m + 1) = (m - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ,$$

also $w(m + 1) = (m - 1) \cdot 180^\circ$.

Unter der Voraussetzung, daß der Satz für m richtig ist, erhalten wir die Winkelsumme des $(m + 1)$ -Ecks, wenn wir 180° mit der um 2 verminderten Anzahl der Eckpunkte multiplizieren; denn

$$(m + 1) - 2 = m - 1.$$

Mit anderen Worten: Wenn der Satz für m richtig ist, so ist er auch für $m + 1$ richtig. Damit ist der Beweis gelungen. Unser Satz gilt für alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind.

d) Auf ähnliche Weise wie bei Beispiel c) gewinnt man auch *einen Satz über die Anzahl der Diagonalen im n -Eck*. Jeder Punkt des n -Ecks ist mit zwei weiteren Punkten des n -Ecks durch Seiten der Figur verbunden. Alle übrigen Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten des n -Ecks, die nicht Seiten sind, heißen *Diagonalen*.

Wir bezeichnen die Anzahl der Diagonalen des n -Ecks mit $d(n)$. Nun behaupten wir, daß für jede natürliche Zahl n , die größer als 2 ist,

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} \text{ gilt.}$$

Im Dreieck ($n = 3$) gibt es keine Diagonalen. Auch unsere Formel liefert

$$d(3) = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0.$$

Für $n = 4$ (Viereck) liefert die Formel

$$d(4) = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2.$$

Tatsächlich gibt es im Viereck zwei Diagonalen.

Aufgabe: Beweise durch vollständige Induktion, daß dieser Satz für alle $n \geq 3$ richtig ist!

e) Wir bilden *die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen*. Für $n = 2$ bedeutet das: Wir addieren 1 und 3. Bezeichnen wir die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen mit $s(n)$, so ist also

$$s(2) = 1 + 3; \quad s(2) = 4$$

Weiter ist:

$$s(3) = 1 + 3 + 5;$$

$$s(5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9;$$

$$s(4) = 1 + 3 + 5 + 7;$$

$$s(6) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$$

Rechnen wir die Summe jeweils aus, so erhalten wir:

Anzahl der ersten ungeraden natürlichen Zahlen n	Summe dieser Zahlen $s(n)$
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Hier liegt die Vermutung nahe, daß die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen immer gleich n^2 ist, d. h. gleich dem Quadrat der Anzahl der Summanden.

Wir wollen diesen Satz nun für alle $n \geq 2$ beweisen. Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir uns noch überlegen, wie die n -te ungerade Zahl aussieht.

n	die n -te ungerade natürliche Zahl
1	$1 = 2 \cdot 1 - 1$
2	$3 = 2 \cdot 2 - 1$
3	$5 = 2 \cdot 3 - 1$
4	$7 = 2 \cdot 4 - 1$
5	$9 = 2 \cdot 5 - 1$
6	$11 = 2 \cdot 6 - 1$
7	$13 = 2 \cdot 7 - 1$
.	.
.	.
.	.

Die erste ungerade natürliche Zahl ist die Zahl 1, die zweite ist die Zahl 3, die dritte ist die Zahl 5 usw. Ohne Schwierigkeiten läßt sich ebenfalls durch vollständige Induktion bestätigen, daß für jedes $n \geq 1$ die n -te ungerade natürliche Zahl $2n - 1$ ist. Diesen Beweis möchten wir dem Leser überlassen. (Zu beachten ist dabei die Tatsache, daß sich zwei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen jeweils um 2 unterscheiden.) Nun kommen wir zum Beweis des Satzes über die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen:

Induktionsanfang: Für $n = 2$ ist der Satz wahr (siehe oben): $s(2) = 2^2 = 4$.

Induktionsschritt: Wir haben zu zeigen: Wenn der Satz für eine natürliche Zahl m gilt, so gilt er auch für die Zahl $m + 1$, mit anderen Worten: Wenn $s(m) = m^2$ ist, so ist $s(m + 1) = (m + 1)^2$. $s(m + 1)$ ist die Summe der ersten $m + 1$ ungeraden natürlichen Zahlen. Die Summe der ersten m ungeraden Zahlen ist $s(m)$. Die $(m + 1)$ -te ungerade Zahl ist $2m + 1$.

Folglich ist $s(m + 1) = s(m) + 2m + 1$.

Wir hatten vorausgesetzt, daß der Satz für m gilt. Also ist $s(m) = m^2$.

$$s(m + 1) = m^2 + 2m + 1.$$

Wenden wir eine binomische Formel an, so erhalten wir

$$s(m + 1) = (m + 1)^2. \text{ Damit ist der Beweis geführt.}$$

W. Stoye

Aufgaben

74 Es ist die Summe S_n der folgenden Produkte zu ermitteln:

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1).$$

75 Es ist zu beweisen, daß für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

76 Es ist zu beweisen, daß die Zahl $4^n + 15n - 1$ für alle natürlichen Zahlen bis $n \geq 1$ durch 9 teilbar ist.

77 Es gibt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ Möglichkeiten, n Gegenstände in verschiedener Reihenfolge anzuordnen.

78 In der Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... erhält man (vom dritten Glied an) jede Zahl als Summe der beiden vorhergehenden. Es ist zu beweisen, daß jede vierte Zahl dieser Folge durch 3 teilbar ist.

79 Mit Hilfe der Wägestücke 1 g, 2 g, 4 g, ..., 2^n g kann man jede Masse von 1 g bis $(2^n - 1)$ g zusammenstellen.

Diese Aufgaben wurden aus folgenden Büchern entnommen, die weiteres Material zum Selbststudium enthalten: Sominski, J. S.: Die Methode der vollständigen Induktion. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Kolosow, A. A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag; Autorenkollektiv: Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen. VEB Fachbuchverlag; Manuskriptdruck: Sammlung vorbereitender Aufgaben der allrussischen Olympiade Junger Mathematiker. (russ.).

Wir untersuchen Abbildungen

Teil 3*

$$\begin{aligned} P &= \{g, n, r, u\} \\ N &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ M &\cong N \quad G \subset N \end{aligned}$$

1. Beispiele für Abbildungen

Ich will zuerst einiges über einen Tag im Leben von sechs Schülern berichten, die miteinander befreundet sind. Sie heißen Achim, Bernd, Christine, Detlef, Elke und Frank. Diese Schüler erlebten an jenem Tag unter anderem folgendes:

(1) Im Mathematikunterricht fand eine Leistungskontrolle statt. Wie wir wissen, kann man dabei eine Eins, eine Zwei, eine Drei, eine Vier oder auch eine Fünf bekommen. Nun, Detlef bekam eine Drei, Achim und Elke eine Zwei und Christine eine Eins. Bernd und Frank wurden nicht geprüft.

(2) Im Sportunterricht wurde die Gründung einer Sportgemeinschaft beraten. Zur Auswahl standen die Sportarten Handball, Judo, Volleyball und Wasserball. Die Schüler sollten aufschreiben, welche dieser Sportarten sie gern betreiben würden. Unsere sechs Freunde entschieden sich so: Achim für Handball, Bernd für Handball und Volleyball, Christine für Handball, Detlef für Handball, Judo und Volleyball, Elke für Volleyball und Frank auch für Volleyball.

(3) Am Nachmittag gab es bei Frank eine Geburtstagsfeier, zu der unsere Freunde wieder beisammen waren. Sie konnten wählen, was sie trinken wollten: Kakao, Limonade, Milch, Selter, Tee oder Zitrone. Nachdem Franks Mutter alle befragt hatte, wußte sie: Achim möchte Limonade, Bernd ist für Kakao, Christine mag am liebsten Milch, Detlef bittet um Zitrone, Elke wünscht sich Tee und Frank will Selter.

(4) Im Laufe der Geburtstagsfeier wurde auch ein Pfänderspiel durchgeführt. Zum Schluß lagen folgende Gegenstände als Pfänder auf dem Tisch: ein Groschen, ein Notizbuch, ein Ring und eine Uhr. Dabei stammte von Detlef der Groschen und das Notizbuch, von Elke der Ring und von Frank die Uhr.

Was hat das alles mit *Abbildungen* zu tun? Nun, sehen wir uns die Erlebnisse (1) bis (4) einmal genauer an. Wir erkennen als erstes, daß verschiedene *Mengen* vorkommen: Da ist zunächst einmal die Menge der *Schüler*. Wir wollen sie mit S bezeichnen und die Schüler der Kürze wegen mit dem klein geschriebenen Anfangsbuchstaben ihres Namens. Wir haben also: $S = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dann tritt die Menge der *Zensuren* auf, die in der Schule gegeben werden können. Wir bezeichnen diese Menge mit Z und können dann schreiben: $Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ferner kommt eine Menge von *Sportarten* vor. Nennen wir diese Menge hier A . Wenn wir die Sportarten selbst wieder durch ihren Anfangsbuchstaben kennzeichnen, so haben wir: $A = \{h, j, v, w\}$. Außerdem spielt eine Menge von *Getränken* eine Rolle: $G = \{k, l, m, s, t, z\}$. Und schließlich muß noch die Menge der *Pfänder* genannt werden: $P = \{g, n, r, u\}$.

Wie wir weiter bemerken, kommen bei jeder der geschilderten Begebenheiten (1) bis (4) jeweils genau *zwei* Mengen vor, die außerdem immer irgendwie miteinander zusammenhängen: Elementen der *ersten* Menge — das ist jedesmal die Menge S — sind immer gewisse Elemente der *zweiten* Menge *zugeordnet*. Zum Beispiel ist Detlef durch die Leistungskontrolle die Zensur 3 zugeordnet worden, Christine entschied sich bei

* Der Lehrgang *Mengenlehre* begann mit Teil 1 in Heft 1 (S. 11) und Teil 2 (S. 41) (d. Red.).

den Sportarten für Handball, Elke erhielt am Nachmittag wunschgemäß Tee zugeteilt usw. Man sagt in solchen und ähnlichen Fällen ganz allgemein, daß eine *Zuordnung* oder *Abbildung* vorliegt. (Das Wort „Abbildung“ wird hier in demselben Sinne gebraucht wie das Wort „Zuordnung“. Wir wollen also nicht an die Bedeutung denken, die das Wort „Abbildung“ in der Umgangssprache hat. Dort versteht man zum Beispiel eine Fotografie oder eine Zeichnung darunter. Für uns bedeutet „Abbildung“ aber dasselbe wie „Zuordnung“.)

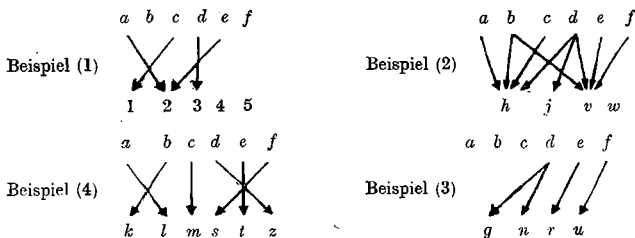
Oft gibt man auch gleich mit an, welche Mengen bei der Abbildung vorkommen. Zu unserem Beispiel (1) würde man dann sagen, daß es eine *Abbildung aus S in Z* ist. Halten wir also fest: Sind Mengen M und N gegeben, wobei Elementen aus M Elemente aus N zugeordnet sind, so sprechen wir von einer *Abbildung aus M in N* .

2. Darstellung von Abbildungen

Damit wir die in den Beispielen (1) bis (4) angegebenen Abbildungen etwas besser überblicken können, wollen wir überlegen, wie man sie übersichtlich darstellen könnte.

(a) Eine erste Möglichkeit besteht darin, die Elemente beider Mengen aufzuschreiben und durch Pfeile deutlich zu machen, welche Elemente der zweiten Menge Elementen der ersten Menge zugeordnet sind. Für unser Beispiel (1) könnte das so aussehen, wie es hier dargestellt ist. (Natürlich darf man die Buchstaben oder Zahlen auch anders anordnen.)

Entsprechend ergeben sich die Darstellungen für die Beispiele (2), (3) und (4):



Überprüft noch einmal an Hand des Textes, ob alle Pfeile richtig eingezeichnet sind! Man kann dabei jetzt auch von den Pfeildarstellungen ausgehen, etwa so: Beim Beispiel (2) führen von d aus Pfeile nach h , nach j und nach v . Das bedeutet, daß Detlef die Sportarten Handball, Judo und Volleyball zugeordnet sind, und das sind tatsächlich gerade die, die er gewählt hatte.

Die Darstellung mit Hilfe der Pfeile kann allerdings auch unübersichtlich werden, vor allem dann, wenn viele Pfeile gezeichnet werden müssen.

(b) Eine zweite Möglichkeit, unsere Abbildungen darzustellen, ist die Anlage einer Tabelle. In die linke Spalte schreiben wir die Elemente der ersten Menge, und neben jedes dieser Elemente schreiben wir die zugeordneten Elemente der zweiten Menge. Das sieht dann so aus:

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Beispiel 4
a	2	a	l
b	—	b	k
c	1	c	m
d	3	d	z
e	2	e	t
f	—	f	s
			h
			j, v
			g, n
			r
			u

Es gibt zwar noch mehr Methoden, wie man Abbildungen darstellen kann, für uns reichen die beiden hier angegebenen Möglichkeiten aber vorläufig aus.

3. Eigenschaften von Abbildungen

Wir wollen unsere vier Beispiele nun noch etwas genauer untersuchen. Dabei stoßen wir auf interessante Unterschiede.

(a) Wenn wir unsere Pfeildarstellungen betrachten, so fällt auf, daß in den Beispielen (2) und (3) von *allen* Elementen der Menge S wenigstens ein Pfeil ausgeht. Man drückt diesen Sachverhalt sprachlich durch die Redeweise „Abbildung von $S \dots$ “ aus. Bei den Beispielen (1) und (4) geht dagegen *nicht* von jedem Element der Menge S ein Pfeil aus. (Genau genommen gehen die Pfeile natürlich überhaupt nicht von *Elementen* von S aus – also von den Schülern – sondern von den *Zeichen* für diese Elemente, von den Buchstaben. Um uns nicht gar zu umständlich ausdrücken zu müssen, wollen wir es mit dieser Unterscheidung aber nicht so genau nehmen.)

Andererseits können wir feststellen, daß in den Beispielen (3) und (4) zu *allen* Elementen der Mengen G bzw. P wenigstens ein Pfeil hinweist. Hier sprechen wir von einer „Abbildung ... auf G “ bzw. „... auf P “. In den Beispielen (1) und (2) ist das *nicht* der Fall.

Wenn wir unsere Beispiele (1) bis (4) jetzt mit Hilfe der neuen Ausdrucksweise beschreiben wollen, so können wir sagen:

Beispiel (1) ist eine Abbildung *aus* S *in* Z ;

Beispiel (2) ist eine Abbildung *von* S *in* A ;

Beispiel (3) ist eine Abbildung *von* S *auf* G ;

Beispiel (4) ist eine Abbildung *aus* S *auf* P .

Fassen wir zusammen:

Sind Elementen einer Menge M Elemente einer Menge N zugeordnet, so sprechen wir von einer *Abbildung aus* M *in* N .

Wenn man weiß, daß *allen* Elementen von M wenigstens ein Element von N zugeordnet ist, so kann man von einer Abbildung *von* M *in* N sprechen.

Weiß man, daß *alle* Elemente von N als zugeordnete Elemente bei der Abbildung vorkommen, so kann man von einer Abbildung *aus* M *auf* N sprechen.

(b) Sehen wir uns unsere Abbildungen nun noch von einem anderen Gesichtspunkt aus an.

In den Pfeildarstellungen der Beispiele (1) und (3) geht von jedem Element der Menge S *höchstens* ein Pfeil aus, in den Beispielen (2) und (4) gibt es dagegen Elemente in der Menge S , von denen *mehrere* Pfeile ausgehen.

In den Tabellen macht sich dieser Unterschied auch bemerkbar: Bei den Beispielen (1) und (3) steht neben jedem Element der Menge S *höchstens* ein zugeordnetes Element, bei den Beispielen (2) und (4) kommt es dagegen auch vor, daß neben einem Element der Menge S *mehrere* zugeordnete Elemente stehen.

Abbildungen der ersten Art nennt man *eindeutig*, Abbildungen der zweiten Art *nicht eindeutig*.

Ein besonderer Fall liegt beim Beispiel (3) vor. Dort geht in der Pfeildarstellung nicht nur von jedem Element der Menge S höchstens ein Pfeil aus, sondern es kommt auch bei jedem Element der Menge G höchstens ein Pfeil an. Eine solche Abbildung nennt man *eineindeutig* oder *umkehrbar eindeutig*. (Man spricht hier aus folgendem Grund von „umkehrbar eindeutig“: Wenn man alle Pfeile *umkehren* würde, so wäre die damit gegebene *neue* Abbildung ebenfalls eindeutig.)

Halten wir fest: Ist bei einer Abbildung aus M in N jedem Element von M *höchstens* ein Element von N zugeordnet, so nennt man die Abbildung *eindeutig*. Tritt darüber hinaus jedes Element von N *höchstens einmal* als zugeordnetes Element auf, so nennt man die Abbildung *umkehrbar eindeutig* oder *eineindeutig*.

4. Anwendungen des Abbildungsbegriffes

Durch die nähere Untersuchung der zu Beginn geschilderten Zuordnungen (1) bis (4) haben wir allerlei über Abbildungen erfahren. Wir wollen nun noch ein wenig sehen, was wir mit den neuen Begriffen anfangen können.

Da ist zunächst einmal festzuhalten, daß wir im täglichen Leben häufig mit Abbildungen zu tun haben:

Zum Beispiel ist jedem Schüler einer Klasse ein Wohnhaus zugeordnet (nämlich das Haus, in dem er wohnt). Diese Abbildung ist eindeutig (kein Schüler wohnt in zwei oder mehr Häusern zugleich), aber nicht immer umkehrbar eindeutig (es kann vorkommen, daß mehrere Schüler im gleichen Haus wohnen).

Eine andere Abbildung ist dadurch gegeben, daß Kraftfahrzeugen in der DDR ein polizeiliches Kennzeichen zugeordnet ist. Wir haben es hier mit einer *umkehrbar eindeutigen* Abbildung aus der Menge der Kraftfahrzeuge in die Menge der möglichen Kennzeichen zu tun; denn erstens gehört zu jedem Kraftfahrzeug *höchstens ein* Kennzeichen und kein Kennzeichen wird öfter als einmal vergeben, zweitens besitzen *nicht alle* Kraftfahrzeuge ein Kennzeichen, sondern nur die, die polizeilich zugelassen sind, und drittens sind vorläufig noch *nicht alle* Kennzeichen, die man aus zwei Buchstaben und vier Ziffern bilden kann, im Gebrauch. Sicher kann jeder selbst noch eine Fülle weiterer Abbildungen finden, die im täglichen Leben auftreten.

Von besonderer Bedeutung ist der Abbildungsbegriff aber innerhalb der Mathematik. Wir wollen uns das wenigstens an einem Beispiel noch ansehen.

Wie kann man eigentlich feststellen, ob zwei Mengen gleich viele Elemente besitzen? Das ist ganz einfach, wird mancher sagen, man zählt erst die Elemente der einen Menge und dann die Elemente der anderen Menge und stellt so fest, ob es gleich viele sind. Nun, wenn wir annehmen, daß beide Mengen nur *endlich* viele Elemente enthalten, sodaß man sie wirklich *zählen* kann, dann ist diese Methode im Prinzip anwendbar. Aber *muß* man denn überhaupt zählen?

Wenn man zum Beispiel wissen will, ob in einer Gesellschaft genau so viele Herren anwesend sind wie Damen, braucht man keine dieser beiden Mengen (nennen wir sie H und D) abzuzählen, sondern nur *alle* zum Tanzen aufzufordern. Dann versucht jeder Herr, eine Dame zu finden, und so entsteht eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung aus H in D . Wenn dabei weder Herren noch Damen übrigbleiben — wenn also eine *eindeutige* Abbildung von H auf D vorliegt — dann weiß man, daß H *genau so viele* Elemente enthält wie D . Man sagt dafür auch, H ist *gleichmächtig* zu D .

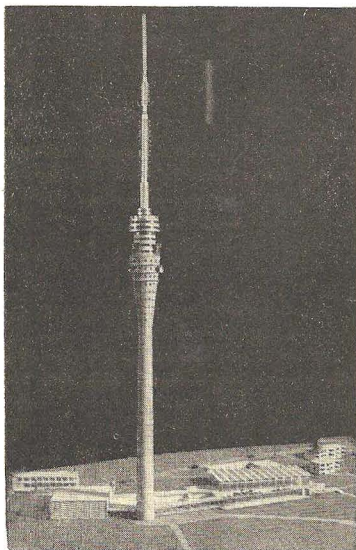
Wir können also festhalten: Mengen M und N sind genau dann gleichmächtig (geschrieben: $M \sim N$), wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf N gibt.

Solange wir nur endliche Mengen untersuchen, führt der Begriff *gleichmächtig* zu keinen Überraschungen. Das wird ganz anders, wenn die betrachteten Mengen *unendlich* viele Elemente besitzen. Sei zum Beispiel $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und $G = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ die Menge aller geraden Zahlen. Wie jeder sofort sieht, gilt $G \subset N$ (G ist eine *echte* Teilmenge von N). Man könnte also meinen, daß G „weniger“ Elemente enthält als N . Das ist aber nicht der Fall. Wenn wir jeder natürlichen Zahl ihr Produkt mit 2 zuordnen, so erhalten wir eine Abbildung, die durch die untenstehende Tabelle angedeutet wird. Wie wir sehen, ist diese Abbildung

0	1	2	3	4	⋯
0	2	4	6	8	⋯

erstens umkehrbar eindeutig, und zweitens wird *allen* natürlichen Zahlen eine gerade Zahl zugeordnet und alle geraden Zahlen treten als zugeordnete Elemente auf. Es liegt also eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung von N auf G vor. Das heißt aber, daß N und G *gleichmächtig* sind.

Schwankt der Fernsehturm?



Gegenwärtig werden zur Verbesserung der Fernsehübertragung in der DDR eine Reihe von Fernsehtürmen gebaut, die oft gleichzeitig als Aussichtspunkt mit in der Höhe eingebaute Gaststätte dienen. Bei solchen Bauwerken ist erfahrungsgemäß mit einer hohen Besucherzahl zu rechnen, so daß nicht nur im Hinblick auf die technischen Einrichtungen, sondern auch zum Schutz der Besucher die Standfestigkeit und Sicherheit des Bauwerkes ständig gewährleistet sein müssen. Dies wird natürlich durch die Konstruktion, die sorgfältige statische Berechnung mit entsprechender Sicherheit und die Wahl der Baustoffe erreicht. Erfüllt dann die Bauausführung die genau vorgeschriebenen Qualitätsanforderungen, so ist die Sicherheit des Bauwerkes nach menschlichem Ermessen gewährleistet. Trotzdem wirken auf jedes Bauwerk Kräfte ein, die zu einer Veränderung seiner Lage und Form führen können. Das sind bei hohen Türmen hauptsächlich das Eigengewicht, das zu Setzungen infolge Zusammendrückung des Baugrundes führt, die ungleichmäßige Erwärmung der Außenflächen durch Sonnenbestrahlung, wodurch eine verschiedene Ausdehnung der Sonnenseite gegenüber der Schattenseite erfolgt und damit eine Verbiegung des Turmes bewirkt, und schließlich der Winddruck, der bei starkem Wind und Sturm eine kurzperiodische Schwingung des Turmes verursacht. Es ist nun die Aufgabe des Vermessungsingenieurs, alle diese Veränderungen ihrer Größe nach zu bestimmen. Da es sich hierbei um relativ kleine Beträge (mm bzw. cm) handelt, sind die dazu erforderlichen Messungen mit größter Sorgfalt auszuführen.

Für die Bestimmung von Setzungen von Bauwerken gibt es hauptsächlich zwei Vermessungsverfahren:

1. Das geodätische Präzisionsnivellment

Man braucht dazu ein Präzisionsnivellierinstrument auf Stativ und zwei Nivellierlatten mit Teilung auf Invarband. Aus den Ablesungen an den beiden im gleichen Abstand (bis 25 m) vom Instrument senkrecht aufgestellten Latten kann der Höhenunterschied der Lattenaufsetzpunkte auf etwa $\pm 0,2$ mm genau ermittelt werden. Zur Feststellung von Setzungen werden mehrere Höhenbolzen etwa 40 cm über dem Erdboden in das Bauwerk einzementiert. Die Höhenunterschiede dieser Bolzen gegenüber einem unveränderlichen Höhenfestpunkt sind nach dem beschriebenen Verfahren zu bestimmen. Die Wiederholung der Messung in verschiedenen Zeitabständen führt zur Ermittlung der Größe der Setzungen.

2. Die Präzisionssschlauchwaage

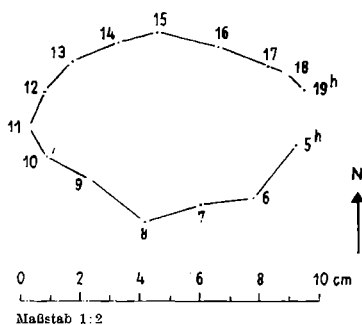
Zur Bestimmung relativer Höhenveränderungen von Bauwerkspunkten, besonders im Inneren von Bauwerken, kann die Höhenmessung mit der Präzisionssschlauchwaage

benutzt werden. Die Meßanordnung besteht aus zwei in etwa gleicher Höhe vertikal aufgehängten Glaszylindern, die durch einen 20 m bis 40 m langen Schlauch miteinander verbunden sind. Das System wird mit Wasser gefüllt, und nach dem Gesetz der kommunizierenden Röhren steht der Wasserspiegel in beiden Zylindern gleich hoch. Mittels einer auf die Wasseroberfläche aufsetzbaren Meßspitze mit elektrischer Anzeige kann der Höhenunterschied der beiden Aufhängepunkte der Zylinder auf $\pm 0,02$ mm genau bestimmt werden. Das Verfahren ist demnach für besonders genaue Neigungsbestimmungen zu verwenden.

Beim Fernsehturm Dresden ergab sich bei einer Bauhöhe von 167 m des Betonschaftes eine Senkung am äußeren Turmfuß von rund 3 mm, während die inneren Fundamente eine gegenseitige relative Neigung von 0,8 mm nach der Hangseite zu zeigten.

Die senkrechte Stellung der Turmachse kann am besten mit einer Lotvorrichtung überprüft werden. Ein einfaches Schnurlot ist jedoch für solche Höhen zu ungenau. Man verwendet deshalb besser ein optisches Lot, z. B. das Präzisionszenitlot vom VEB Carl Zeiss Jena. Stellt man das Instrument im Inneren des Turmes im Zentrum auf, so kann man die Achse in 250 m Höhe mit einer Abweichung von ± 2 mm aus der Senkrechten angeben. Das Gerät wird deshalb auch zur Absteckung der Vertikalachse während des Baues benutzt. Da jedoch die Achse des Turmes nach seinem Ausbau meist nicht mehr zugänglich ist, wird für spätere Beobachtungen und zur Kontrolle der vorgenommenen Lotung sowie zur Ermittlung eventueller horizontaler Verschiebungen noch eine Bestimmung der Lage des Turmes von Punkten außerhalb des Bauwerkes aus durchgeführt. Dazu werden zweckmäßig etwa in den vier Haupthimmelsrichtungen feste Pfeiler einbetoniert, deren Entfernung das eineinhalb- bis zweifache der Turmhöhe betragen sollte. Auf der Pfeileroberfläche, die sich etwa 1,30 m über dem Boden befindet, wird eine Vorrichtung zur Zwangszentrierung eines Instrumentes für genaue Messung von Winkeln (Theodolit) angebracht. Unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit dieser Festpunkte werden mit diesem Theodolit die Winkel zwischen feststehenden Orientierungszielpunkten und an der Außenseite des Turmes angebrachten speziellen Zielmarken gemessen. Verwendet man den Theodolit Theo 010 vom VEB Carl Zeiss Jena, so kann man diese Winkel auf $\pm 1''$ (Bogensekunde) genau messen und damit ebenfalls die Abweichung der Turmachse aus der Vertikalen bzw. auch eine Horizontalverschiebung oder eine Verdrehung des Turmes auf einige Millimeter genau ermitteln.

Um den Einfluß der Sonnenbestrahlung festzustellen, wurden am Fernsehturm Dresden bei einer Bauhöhe von 167 m am 17. 5. 1966 die Veränderungen der Turmachse von 5 Uhr morgens bis 19 Uhr abends zu jeder Stunde bestimmt. Es ergab sich die in der nebenstehenden Abbildung dargestellte ellipsenförmige Bewegung mit einer großen Halbachse von rund 10 cm. Die durch Windeinfluß bisher festgestellten Schwankungen sind geringer als erwartet und betragen bei mittlerer Windstärke etwa 4 cm mit einer Schwingungsdauer von einigen Sekunden. Es sind jedoch noch weitere Messungen bei größerer Windstärke auszuführen. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß zwar geringe Veränderungen an solch hohen Stahlbetontürmen besonders durch Temperatureinfluß auftreten, von einer spürbaren Schwankung kann jedoch keine Rede sein.

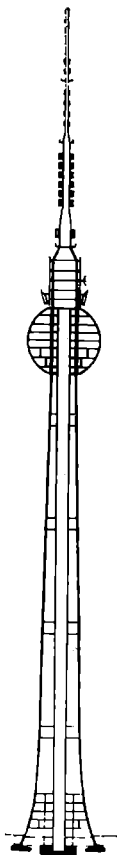


Der Berliner Fernsehturm

Im Jahre 1965 wurde im Berliner Stadtzentrum in der Nähe des Alexanderplatzes mit dem Bau eines Fernseh- und UKW-Turmes begonnen. Er wird nach seiner Fertigstellung mit 361,5 m Höhe das höchste Bauwerk der DDR sein und als neues Wahrzeichen Berlins Zeugnis für den hohen Stand der technischen Entwicklung ablegen.

Die drei Hauptteile des Turmes sind das Fundament, der Stahlbetonschaft mit Turmkopf und der stählerne Antennenträger. Das Fundament besteht aus zwei Teilen, dem ringförmigen eigentlichen Fundament für den Turmmantel von etwa 21 m äußerem Radius, einer Breite von etwa 8,5 m und dem inneren Fundament für die Stahlkonstruktion des Aufzugschachtes. Der Radius des Schaftes beträgt an der Ansatzstelle etwa 16 m, in 24 m Höhe etwa 8,75 m und in 200 m Höhe etwa 4,25 m.

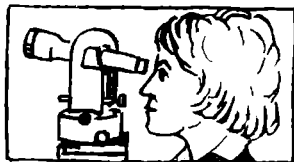
In seinem unteren Teil hat der Stahlbetonschaft die Form eines Rotationshyperboloids. Bis zur Höhe von etwa 24 m ist diese Gestalt deutlich ausgeprägt; mit zunehmender Höhe ähnelt sie mehr einem Kegelstumpf. Ab 200 m Höhe schließt sich ein zylindrischer Schaft an, um den eine Kugelkonstruktion (Turmkopf) von 32 m Durchmesser angebracht ist. Im unteren Teil der Kugel befindet sich das Turmcafé in einer Höhe von 207 m. Die Dicke des Stahlbetonmantels beträgt 50 cm bzw. 45 cm. Der 111,5 m hohe Antennenträger ist eine reine Stahlkonstruktion. Er besteht abwechselnd aus zylindrischen und konischen Teilen. Im Inneren des Turmes befindet sich die Stahlkonstruktion des Aufzugschachtes mit drei Fahrstühlen und einem Treppenaufgang. Zwischen Aufzugschacht und Betonmantel werden in Abständen von je 45 m Höhe Zwischenböden für die Wartung der Flugwarnbeleuchtung sowie im Turmfuß und Turmkopf mehrere Etagen mit Arbeitsräumen eingebaut. Die Einmeßarbeiten für die Lotrechtstellung des Turmschaftes einschließlich der Stahlkonstruktion werden von Ingenieuren des VEB Ingenieur-Vermessungswesen Groß-Berlin durchgeführt. Eventuell notwendig werdende Korrekturen zur festgestellten Abweichung von der Lotrechten erfolgen durch Ausrichten der Kletterschalung, die direkt über dem Kopf- mit dem Schachtgerüst in Verbindung steht.



Prinzipdarstellung

Berufsbild

Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium



Die Hauptaufgaben der Geodäsie (Vermessungskunde) sind die Bestimmung der Figur der Erde und ihres äußeren Gravitationsfeldes sowie die Vermessung und Abbildung der Erdoberfläche bzw. ihrer Teile.

Für die planmäßige Entwicklung der Volkswirtschaft sind die erforderlichen geodätischen Grundlagen rechtzeitig und mit der notwendigen Genauigkeit zu schaffen. Dazu gehört:

1. Die Schaffung und Erhaltung der staatlichen Lagenetze (trigonometrische Netze), Höhenetze (Nivellementsnetze) und gravimetrischen Netze (Bestimmung der Schwerkraft).
2. Die Herstellung und Laufendhaltung der staatlichen Kartenwerke (topographische und geographische Karten).
3. Die Herstellung von Karten und Plänen für alle Zwecke der Volkswirtschaft sowie die ingenieurgeodätischen Arbeiten (z. B. Vermessungsarbeiten bei der Errichtung von Bauwerken).
4. Die Durchführung von Forschungs- und Entwicklungsaufgaben, um den wissenschaftlichen Vorlauf der praktischen Arbeiten zu gewährleisten.

Die dazu notwendigen technischen Arbeiten werden von zwei Berufsgruppen durchgeführt, den Geodäten oder Vermessungsingenieuren, die Messungen im Gelände vornehmen, und den Kartographen, die Messungsergebnisse in Karten und Plänen darstellen und bis zum fertigen Druck bearbeiten. In beiden Berufsgruppen gibt es die Ausbildungsstufen: Facharbeiter, Fachschulingenieur und Hochschulingenieur. Die Ausbildung als Diplom-Ingenieur des Vermessungswesens erfolgt in einem 10-semesterigen Studium an der Technischen Universität Dresden in der Fachrichtung Geodäsie (Fakultät für Bauwesen). Nach erfolgreichem Abschluß des Studiums wird der Absolvent in Betrieben, Dienststellen und Einrichtungen für verantwortungsvolle leitende Tätigkeit bei der Durchführung geodätischer, photogrammetrischer und ingenieurgeodätischer Arbeiten sowie für die wissenschaftliche Tätigkeit und in der Lehre eingesetzt. Vor Beginn des Studiums ist eine einjährige praktische Arbeit in einem Betrieb des Vermessungswesens zu empfehlen, um die notwendigen Grundkenntnisse des Berufs zu erwerben. Wegen der umfangreichen Arbeiten im Außendienst ist ein guter Gesundheitszustand Voraussetzung für die Wahl des Berufes. Da im Innendienst ebenfalls eine Reihe von Arbeiten anfallen, ist der Beruf auch für Mädchen mit technischem Verständnis gut geeignet. Gute Leistungen werden besonders in den Fächern Mathematik, Physik und Geographie verlangt.

Eine Aufgabe von Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens

Leiter des Lehrstuhls für Technische Mechanik und Statik
Prorektor für den wissenschaftlichen Nachwuchs
Hochschule für Bauwesen, Leipzig

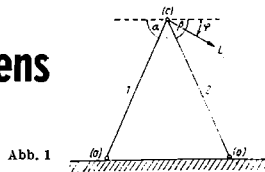


Abb. 1

80 Die beiden Stäbe 1 und 2 stützen das Lager (c). In (c) greift eine Kraft L (Zugkraft) an, deren Richtung zur Horizontalen durch den Winkel φ bestimmt ist (Abb. 1). Bei gegebener Größe von L und gegebenen Winkeln α und β sind diejenigen Stellungen der Last L gesucht, für die die Stützkraft S_1 im Stab 1

- ein Maximum an Zugkraft,
- gleich Null,
- ein Maximum an Druckkraft ist.



Lösungshinweis: Man denke sich die Stäbe 1 und 2 durchschnitten und an den Schnittstellen die unbekanntes Stabkräfte S_1 und S_2 angebracht. Diese Kräfte haben zu den Stabachsen parallele Richtungen und müssen mit L im Gleichgewicht stehen. Ein aus L , S_1 und S_2 gezeichnetes Kräfteck muß daher für jede Lage von L geschlossen sein (Abb. 2).

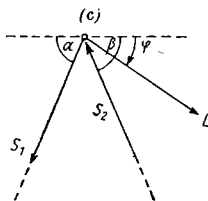
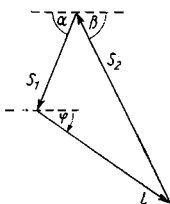


Abb. 2 Lageplan



Kräfteplan

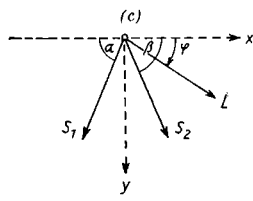


Abb. 3

Aus der Vielzahl der möglichen Kräftecke ist dasjenige zu bestimmen, bei dem bei gegebenem L und gegebenem Winkel $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ die Seite S_1 entweder ein Maximum hat oder gleich Null ist. (Im Kräfteck entspricht die Länge der Seite AB dem Betrag der Kraft.) Die Richtung von S_1 (Zug oder Druck) wird aus dem Kräfteck abgelesen (gleicher Umlaufsinn für alle Kräfte). Die Lösung kann analytisch oder rein geometrisch erfolgen. Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht in der unmittelbaren Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen $\sum K_x = 0$ und $\sum K_y = 0$ auf die Kräfte am Punkt (c). In diesem Falle müssen die unbekanntes Kräfte unabhängig vom wirklichen Richtungssinn zunächst als Zugkräfte angenommen werden (Abb. 3). Ergibt die Rechnung eine Kraft mit negativem Vorzeichen, so ist die zugehörige Kraft eine Druckkraft.

VI. Olympiade

Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der DDR-Olympiade (29. 3. bis 1. 4. 1967)

Klassenstufe 10

1. Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl $m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$ durch 30 teilbar.
2. Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1 . Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I(\triangle ABC)$ eines Dreiecks $\triangle ABC$, das in der Ebene ε liegt. Die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$. Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_1(\triangle A_1B_1C_1)$?
3. In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt: Gegeben ist ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle PQR$ so, daß P innerer Punkt der Strecke BC , Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist. Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert: Anita glaubt, daß die Aufgabe nicht für jedes Dreieck $\triangle ABC$ lösbar ist. Berthold ist der Meinung, daß es für jedes Dreieck $\triangle ABC$ genau eine Lösung gibt. Claus nimmt an, für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke $\triangle PQR$, die Lösung sind, sind einander kongruent. Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck $\triangle ABC$ mit der Eigenschaft, daß nicht alle Dreiecke $\triangle PQR$, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind. Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!
4. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$; wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\sphericalangle ABC$. Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos \gamma|$ beträgt!
5. Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x , die der Gleichung $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$ genügen!
6. Geben Sie die Anzahl aller ganzzahligen Lösungen (x, y) der Ungleichung $|x| + |y| \leq 100$ an!

Dabei gelten zwei Lösungen (x_1, y_1) , (x_2, y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist. (Die Lösung (x, y) heißt ganzzahlig, wenn sowohl x als auch y ganzzahlig sind.)

Klassenstufe 11/12

1. In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegener Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates. Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ε , für die das Dreieck $\triangle PQR$ gleichseitig ist!
2. Es seien n eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine „ F_n “ genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen z_1, \dots, z_n existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen z_1, \dots, z_n .

(2) Jede der Zahlen z_1, \dots, z_n kommt mindestens einmal in der Folge vor.
 (3) Je zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.

(Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oder $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots\}$ oder $\{x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_l}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$).

Beantworten Sie folgende Fragen: (a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n ? (b) Wenn Frage (a) zu verneinen ist: Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine F_n haben kann?

3. Man beweise folgenden Satz: Ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, sind a_1, \dots, a_n positive reelle Zahlen und wird $\sum_{i=1}^n a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4. Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Es sei $V = P_1 P_2 \dots P_n$ ein ebenes regelmäßiges n -Eck.

Geben Sie die Anzahl aller stumpfwinkligen Dreiecke $\triangle P_k P_l P_m$ an (bei denen P_k, P_l, P_m Ecken von V sind) an!

5. Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$!

(Die Lösung (x, y, z) heißt ganzzahlig nichtnegativ, wenn jede der Zahlen x, y, z ganzzahlig und nichtnegativ ist.)

6. Man beweise folgenden Satz:

Liegen die n paarweise voneinander verschiedenen Punkte $P_i, i = 1, 2, \dots, n; n \geq 2$, so im dreidimensionalen Raum, daß jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i , dann ist $n < 15$.

LOSUNG DER VI. OJM:

Zu Ehren des VII. Parteitag

hohe mathematische Leistungen für unser sozialistisches Vaterland

Die Jury vergab 39 Preise, 2 Diplome für ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe, 28 Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen. An der OJM nahmen 20 Wissenschaftler und 60 bewährte Mathematikfachlehrer als Koordinatoren, Korrektoren oder Betreuer teil. Aus dem Programm: Feierlicher Fahnenappell in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck“, zwei Klausuren zu je vier Stunden (für je 3 Aufgaben), Sport, Aussprache mit Vertretern des Zentralrates der FDJ, vierstündige Diskussion mit Prof. Dr. Thiele (Jena) über Kybernetik und Berufsperspektive, Lichtbilder über die VIII. IMO, Besichtigung der Hauptstadt der DDR, Theaterbesuch: Tucholsky-Abend, Abschluffeier in der Ernst-Wildangl-OS Berlin.

Teilnehmer (nach Schultyp)	Erw. Oberschulen	155
	Betriebsberufsschulen	35
	Spezialklassen	27
	Oberschulen	17
	Berufsschulen	4
	Volkshochschulen	1
	gesamt	239
	davon Mädchen	18
Teilnehmer (nach Klassen)	aus 7. Klassen	1
	aus 8. Klassen	4
	aus 9. Klassen	10
	aus 10. Klassen	95
	aus 11. Klassen	57
	aus 12. Klassen	72
	gesamt	239

Preisträger der VI. OJM

Erste Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an:



Ingrid Schiemann,
EOS Cottbus



Gottfried Jetschke,
EOS Lichtenstein



Dieter Kupke,
EOS Spremberg



Andreas Felgenhauer,
EOS Zerst (aus Kl. 9)

In Olympiadeklasse 11/12 an:



Jürgen Gärtner,
BBS Rafena-Werke,
Radeberg (1. Lj., Kl. 10)



Gert Siebert,
EOS H. Hertz, Berlin
(aus Kl. 12)



Stephan Heinrich,
EOS H. Hertz, Berlin
(aus Kl. 10)



Christoph Bandt,
EOS Greifswald
(aus Kl. 11)

Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Hermann Haase (aus Kl. 8), OS Jarmen; Georg Bartholomäus, EOS F. L. Jahn, Greifswald; Bernd-Michael Friedrich, EOS F. Schiller, Weimar; Hartwig Eckner, EOS Dr. K. Duden, Schleiz; Marlen Müller, EOS Grimma; Ingrid Slota, EOS H. Hertz, Spezialkl., Berlin.

In Olympiadeklasse 11 an: Ulrich Zähle, ABF Halle, Spezialkl.

In Olympiadeklasse 12 an: Wolfgang Strübing ABF Halle, Spezialkl.; Ludwig Grader, BBS Leunawerke „Walter Ulbricht“ (3. Lehrjahr).

Dritte Preise wurden vergeben:

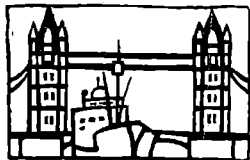
In Olympiadeklasse 10 an: Harald Englisch (aus Kl. 7), G. F. Leibniz-OS, Leipzig; Siegfried Krüger, OS Bandelow; Klaus-Detlef Kürsten, EOS Grimma; Harald Fischer, Spezial-OS VEB C. Zeiss, Jena; Claus Neumann, EOS E. Schneller, Meißen; Jürgen

Bechstein, EOS J. W. v. Goethe, Meiningen; Manfred Krzikalla, Spezialschule f. Elektr., Frankfurt/Oder; Eberhard Richter, EOS MGO Schleusingen; Ralph Altmann, Bernd Martin, Manfred Zachb, alle EOS H. Hertz, Spezialkl., Berlin.

In Olympiadeklasse 11 an: Joachim Fritz, EOS Cottbus; Fred Nowack, EOS A. v. Humboldt, Erfurt; Wolfgang Kiefer, EOS Pößneck; Ludwig Arent, EOS F. Engels, Neubrandenburg; Wolfgang Burmeister (aus Kl. 8), 55. OS, Dresden; Uwe Köhler, Spezialklasse, TH Karl-Marx-Stadt.

In Olympiadeklasse 12 an: Werner Vogt, EOS Immenau; Reinhard Höppner, EOS Elsterwerda; Rainer Weber, EOS J. W. v. Goethe, Immenau; Hans-Peter Tuschik, Spezialkl. der Humboldt-Universität zu Berlin; Raimund Kosciolowicz, EOS H. Hertz, Spezialkl., Berlin; Michael Greiff (3. Lehrjahr), BBS Transformatoren- und Röntgenwerk Dresden.

Mathematische Wettbewerbe in England



In England gibt es keine Traditionen in mathematischen Wettbewerben, von Bemühungen kleinerer Interessengruppen abgesehen. Anlässlich einer Konferenz in Cambridge wurde im Jahre 1963 erstmals der Gedanke, einen nationalen Wettbewerb zu organisieren, geäußert. Hier sei nur erwähnt, daß zu diesem Zeitpunkt bereits die V. Internationale Mathematikolympiade der sozialistischen Länder durchgeführt wurde. Solche Länder wie Rumänien, Ungarn und die Sowjetunion konnten damals schon auf eine jahrzehntelange Förderung von Interesse und Talenten durch nationale Olympiaden zurückblicken.

Es ist in England sehr schwierig, von seiten der Regierung oder mathematischen Organisationen Unterstützung für Experimente zu erhalten, die noch im Anfangsstadium stehen. Mr. Watson, Keele-Universität, England, erhielt Kopien der Aufgaben, welche die Mathematischen Gesellschaften der Vereinigten Staaten von Amerika und der Südafrikanischen Union für Schulwettbewerbe in ihren Ländern verwendeten. Er leitete das Material aus eigener Initiative an Schulen weiter. Mit den Besten dieses Schulwettbewerbs wurde von einer Gruppe interessierter Mathematiklehrer 1965 die erste britische Olympiade durchgeführt (obere Altersgrenze: 17 Jahre). Dies erregte in der Presse, insbesondere in den technischen Zeitschriften, Aufmerksamkeit. Angeregt durch das wachsende öffentliche Interesse stieg die Anzahl der teilnehmenden Schulen von 109 im Jahre 1965 auf 252 im Jahre 1966. Am 13. Mai 1966 erhielten 64 Kandidaten, wiederum hervorgegangen aus der Schulstufe, die Aufgaben der zweiten britischen Mathematikolympiade, die wir nachfolgend veröffentlichen (reine Arbeitszeit: 180 Minuten). Der Minister für Erziehung überreichte Preise und Urkunden. Damit wurde privater Unternehmungsgeist und offizielle Anerkennung verbunden. Die ehrenamtlichen Organisatoren hoffen, daß sie in nächster Zukunft in der Lage sein werden, eine englische Mannschaft zur sowjetischen Olympiade senden zu können. Das Zentrale Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und die Redaktion *alpha* haben auf Wunsch interessierter englischer Wissenschaftler und Mathematiklehrer Material zur Anregung und zum Vergleich zur Verfügung gestellt.

Aufgaben der zweiten britischen Mathematikolympiade

1. Bestimmen Sie den kleinsten und größten Wert von

$$\frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2} \text{ für reelle Werte von } x!$$

2. Geben Sie alle Vorzeichenkombinationen an, unter denen alle Lösungen der Gleichung

$$\mp \sqrt{x-a} \mp \sqrt{x-b} \mp \sqrt{x-c} = 0$$

reell sind, wobei a, b, c verschiedene reelle Zahlen sind!

3. Wo liegen alle Punkte der x - y -Ebene, die der Bedingung

$$y^2 = x^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \text{ genügen ?}$$

Ermitteln Sie die Wendepunkte der dadurch beschriebene Kurve und ihr Verhalten, wenn x und y groß werden!

4. Die Punkte A, B, C, D sind aufeinanderfolgende Eckpunkte eines regelmäßigen Polygons und

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Wieviel Seiten hat das Polygon?

5. Eine quadratische Schraubenmutter mit der Seite a wird mittels eines Schraubenschlüssels, dessen Querschnitt aus einem regelmäßigen Sechseck mit der Seite b besteht, gedreht. Stellen Sie fest, unter welchen Bedingungen für a und b das möglich ist!

6. Finden Sie das größte Intervall der Werte für x , für die der Ausdruck

$$y = \sqrt{(x-1)} + \sqrt{[x+24-10\sqrt{(x-1)}]}$$

einen konstanten Wert hat, wobei \sqrt{t} für $t \geq 0$ definiert ist als die nichtnegative Zahl, deren Quadrat t ist!

7. Beweisen Sie, daß $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{5}$ nicht Terme ein und derselben arithmetischen Reihe sein können.

8. Die Seitenflächen eines Würfels sind mit sechs verschiedenen Farben so bemalt, daß jede Seite eine andere Farbe hat. Stellen Sie fest, wie viele Würfel von verschiedenem Aussehen auf diese Weise hergestellt werden können. Zeigen Sie ebenfalls, daß 1680 regelmäßige Oktaeder von verschiedenem Aussehen hergestellt werden können, indem die acht Seiten des regelmäßigen Oktaeders mit acht gegebenen Farben so bemalt werden, daß jede Seite eine andere Farbe aufweist!

9. Es seien α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind. Ermitteln Sie

a) den kleinsten möglichen Wert für

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2},$$

b) den größten möglichen Wert für

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} !$$

10. 100 Studenten verschiedener Größe sind in 10 Reihen zu je 10 Gliedern aufgestellt. In jeder Reihe wird der größte Student ausgesucht, und der kleinste dieser großen Studenten erhält die Marke A . In jedem Glied wird der kleinste Student ausgesucht, und der größte dieser kleinen Studenten erhält die Marke B . Wenn A und B verschiedene Personen sind, ermitteln Sie, welcher von ihnen der größere ist und weshalb?

11. a) Beweisen Sie, daß unter 52 beliebigen gegebenen ganzen Zahlen stets zwei existieren, deren Summe oder Differenz durch 100 teilbar ist!

b) Beweisen Sie, daß unter 100 beliebigen gegebenen ganzen Zahlen, von denen keine durch 100 teilbar ist, zwei oder mehr gefunden werden können, deren Summe durch 100 teilbar ist!

5. Spezialistenlager Junger Mathematiker

Ostseebad Ahlbeck



Telegramm (August 1966):

450 Junge Mathematiker der Kreisklubs des Bezirks Neubrandenburg für vierzehn Tage im Pionierlager „Boleslav Bierut“ — täglich neben fröhlichem Strand- und Lagerleben ca. drei Stunden Mathe — 26 Lehrer als „Trainer“ — Prof. Calda und 24 Schüler der EOS Praha 2 auf Gegenbesuch (siehe *alpha* 2/67) — englische Lehrerdelegation sowie Chefredakteur von *alpha* besichtigen unser Lager — Lichtbildervortrag über VIII. Internationale Mathematikolympiade — fröhliche Seefahrt zur Greifswalder Oie — übersenden Aufgaben des Lagerwettbewerbs — beim Knobeln viel Spaß und natürlich frohe Ferien — stop —



Siegerehrung: Lagerwettbewerb erfolgreich beendet!



Zeltgartenwettbewerb: Welche Zeltgemeinschaft baut das schönste mathematische Emblem?
1. Preis: eine Riesentorte!



alpha-Wettbewerb [W (5) bis W (10)]

Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe ist auf Seite 89 auszuwählen und an die Redaktion bis 15. August einzusenden (lt. Wettbewerbsbedingungen, siehe Heft 1/67).

Klasse 5:

W(5)81 Ein Gemüselöffel, ein Eßlöffel und eine Gabel wiegen insgesamt 240 p. Der Gemüselöffel und die Gabel wiegen zusammen dreimal soviel wie der Eßlöffel. Der Eßlöffel und die Gabel wiegen zusammen soviel wie der Gemüselöffel. Berechne das Gewicht des Gemüselöffels, des Eßlöffels und der Gabel!

W(5)82 Ein Tischler mußte eine quadratische Fläche von 144 cm^2 mit Holz verkleiden. Er verfügte über eine 16 cm lange und 9 cm breite Sperrholzplatte. Er zerschnitt diese Platte so in zwei Teile, daß mit ihnen die ganze quadratische Fläche lückenlos bedeckt werden konnte. Fertige eine Zeichnung an, aus der ersichtlich wird, wie der Tischler die Sperrholzplatte zerschnitt hatte!

W(5)83 Die Summe von acht ungeraden natürlichen Zahlen beträgt 20. Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es, wenn unter diesen acht Zahlen auch gleiche Summanden vorkommen dürfen?

Klasse 6:

W(6)84 Eine 6. Klasse umfaßt genau 37 Schüler. Könnte behauptet werden, daß in einem Monat wenigstens vier Schüler dieser Klasse Geburtstag haben? Könnten es sogar fünf Schüler dieser Klasse sein?

W(6)85 Das unten angeführte Beispiel einer Multiplikation ist zu entschlüsseln! Dabei entspricht jedem Buchstaben eine Ziffer. Die gefundenen Ziffern sind, mit der kleinsten beginnend, der Größe nach zu ordnen. Wird dann jeder der geordneten Ziffern der entsprechende Buchstabe zugeordnet, so erhält man als Lösungswort einen Begriff aus der Arithmetik.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{TDA} \cdot \text{URE} \\ \text{UANs} \\ \text{BEHA} \\ \hline \text{ANSHA} \end{array}$$

W(6)86 Durch einen gegebenen Pkt. P , der innerer Pkt. eines gegebenen spitzen Winkels α ist, soll eine Gerade g so konstruiert werden, daß sie von den Schenkeln des Winkels gleiche Strecken abschneidet. (Beweis!)

Klasse 7:

W(7)87 Konstruiere ein Dreieck aus folg. Stücken: $a = 5 \text{ cm}$, $h_c = 4 \text{ cm}$, $s_b = 4,5 \text{ cm}$!

W(7)88 Welcher der beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$, in denen a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, liegt auf der Zahlengeraden näher an der Zahl 1, wenn $a < b$ gilt?

W(7)89 Eine Stenotypistin schreibt auf der Maschine ohne Zwischenräume die Folge der natürlichen Zahlen $12345678910111213...$ Welche Ziffer wird sie mit dem tausendsten Anschlag schreiben?

Klasse 8:

W(8)90 Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5 \text{ cm}$, $b + c = 8 \text{ cm}$, $h_c = 4 \text{ cm}$!

W(8)91 Welcher der beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ liegt auf der Zahlengeraden näher an 1, wenn a und b von Null verschiedene ganze Zahlen sind und $a < b$ gilt?

W(8)92 Gegeben seien das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis \overline{AB} und sein Umkreis. Die Verlängerung der Höhe h_c schneidet den Kreis im Punkt D . Die Winkelhalbierende von α schneidet die Höhe in S . Beweise, daß das Dreieck ASD gleichschenkelig ist!

Klasse 9:

W(9)93 Zeichne ein Dreieck ABC ! Durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zeichne man eine Parallele zu BC , die AC in M und AB in N schneidet. Beweise, daß $\overline{MN} = \overline{CM} + \overline{BN}$ ist!

W(9)94 Es ist zu beweisen, daß die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ keine ganzzahligen Wurzeln hat, wenn p und q ungerade Zahlen sind.

W(9)95 Diskutiere die Funktion

$$y = \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x^2 + x - 6|}}$$

Klasse 10:

W(10)96 Bei welchen Werten des Koeffizienten p hat die Gleichung

$x^2 - px + 36 = 0$ Wurzeln x_1, x_2 , die die Bedingungen $x_1^2 + x_2^2 = 153$ erfüllen?

W(10)97 In einem Rechteck mit den Seitenlängen a und b ($a < b$) sind von zwei gegenüberliegenden Ecken aus auf den Seiten gleiche Strecken von der Länge x mit $x < a$ abzutragen. a) Beweise, daß bei beliebiger Wahl der Strecke x durch Verbindung der Endpunkte dieser Strecken stets ein Parallelogramm entsteht. b) Bei welchem Wert von x entsteht ein Rhombus? c) Welche Bedingungen müssen an a und b gestellt werden, damit unter den gegebenen Voraussetzungen ein Rhombus entstehen kann?

W(10)98 Beweise:

$$\log_1 \frac{1}{a^n} x^2 = \log_a x!$$

W(8)32 Es sei $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ mit $b \neq 0, d \neq 0, a \neq b, c \neq d$. (1)

Da $\frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d} = 1$ ist, gilt auch

$$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} + \frac{c-d}{c-d}, \text{ also}$$

$$\frac{2a}{a-b} = \frac{2c}{c-d}, \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}. \quad (2)$$

Hieraus folgt, wenn $a \neq 0$ und $c \neq 0$ ist, $\frac{a-b}{a} = \frac{a}{a} = \frac{c-d}{c} = \frac{c}{c}, \frac{-b}{a} = \frac{-d}{c}$, also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ist aber $a = 0$, so ist wegen (2) auch $c = 0$, und es gilt wegen $b \neq 0, d \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Bemerkung: Noch schneller kommt man zum Ziel, wenn man

$a + b = x, a - b = y, c + d = u, c - d = v$ setzt. Dann gilt wegen (1) $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$, also auch

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{u+v}{u-v}, \text{ also auch}$$

$$\frac{a+b+a-b}{a+b-(a-b)} = \frac{c+d+c-d}{c+d-(c-d)}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{2c}{2d}, \text{ also } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

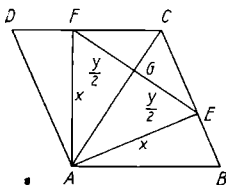
W(8)33 Es seien x die Anzahl der Tauben auf dem Baum und y die Anzahl der Tauben unter dem Baum. Dann gilt $y - 1 = \frac{x+y}{3}$.

Ferner gilt $x - 1 = y + 1$, also $x = y + 2$. Daraus folgt $(y - 1)3 = y + 2 + y$,

$3y - 3 = 2y + 2, y = 5$. Ferner ergibt sich $x = y + 2 = 7$.

7 Tauben waren auf dem Baum, 5 Tauben unter dem Baum. Die Probe bestätigt das Ergebnis: $5 - 1 = \frac{7+5}{3}, 7 - 1 = 5 + 1$.

W(9)38 Es sei $ABCD$ der gegebene Rhombus. Die Fußpunkte der von A gefällten Lote



seien E und F . G sei der Schnittpunkt der Geraden AC und EF . Die Gerade AC ist Symmetrieachse, daher gilt $\overline{AE} = \overline{AF} = x$. Die Punkte E und F liegen symmetrisch bezüglich der Geraden AC ; daher gilt $EF \perp AC$. Laut

Voraussetzung gilt $\overline{EF} = y$. Unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes finden

$$\text{wir } \overline{AG} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 - y^2}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACF und AGF folgt

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{x}{x} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{4x^2 - y^2}\right)}{\frac{2x^2}{\sqrt{4x^2 - y^2}}},$$

Nun können wir die Länge der Seite \overline{AB} des Rhombus leicht berechnen, da auch die Dreiecke ABC und AEF einander ähnlich sind:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x}{y}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC} \cdot x}{y} = \frac{2x^2}{y \sqrt{4x^2 - y^2}}.$$

Da die Höhe des Rhombus $ABCD$ die Länge x hat, erhält man den Flächeninhalt des Rhombus

$$A = \overline{AB} \cdot x = \frac{2x^4}{y \sqrt{4x^2 - y^2}}.$$

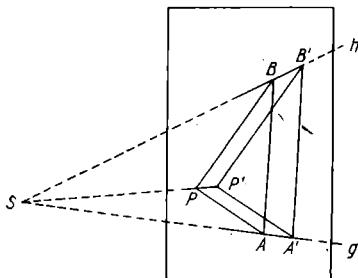
W(9)39 Das erste Gefäß enthält 300 g Alkohol und 500 g Wasser; von der Flüssigkeitsmenge sind daher $\frac{3}{8}$ Alkohol und $\frac{5}{8}$ Wasser. Gießt man jetzt x Gramm Flüssigkeit, d. h. $\frac{3}{8}x$ Gramm Alkohol und $\frac{5}{8}x$ Gramm Wasser, in das zweite Gefäß, so soll dieses genau so viel Alkohol wie Wasser enthalten; es gilt also

$$225 + \frac{3}{8}x = 100 + \frac{5}{8}x$$

$$\frac{2}{8}x = 125 \quad x = 500$$

Man muß also 500 Gramm der Flüssigkeit aus dem ersten Gefäß in das zweite Gefäß gießen.

W(10)45 In der nebenstehenden Abbildung sei S der außerhalb des Zeichenblattes



liegende Schnittpunkt der Geraden g und h . A und B seien innere Punkte der auf g bzw. h liegenden Strecken. Nun liegt die Verbindungsstrecke zweier innerer Punkte des Zeichenblattes stets ganz im Innern des Zeichenblattes. Daher liegen die Strecken \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{AB} im Innern des Zeichenblattes. Wir wählen jetzt zwei weitere innere Punkte A' und B' der auf g bzw. h liegenden Strecken derart, daß $A'B' \parallel AB$ ist und die durch A' zu AP sowie durch B' zu BP gezogenen Parallelen einander in dem inneren Punkt P' des Zeichenblattes schneiden. Dann liegt eine Ähnlichkeitsabbildung des Dreiecks ABP auf das Dreieck $A'B'P'$ mit dem Ähnlichkeitszentrum S vor. Daher liegt die Strecke $\overline{PP'}$ auf der Geraden SP .

W(10)46 Es ist für jede natürliche Zahl n , die größer als Null ist,

$$\begin{aligned} z &= 7^{2n} - 4^{2n} = 49^n - 16^n \\ &= (49 - 16)(49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 16 \\ &\quad + \dots + 16^{n-1}) \\ &= 33(49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 16 + \dots \\ &\quad + 16^{n-1}). \end{aligned}$$

Daher ist die Zahl z durch 33 teilbar.

Für $n = 0$ ist $z = 7^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ ebenfalls durch 33 teilbar.

Damit ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen n bewiesen.

I Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. U. Pirl: F_k erreiche bei irgendeiner Einteilung T_k Std., $k = 1, 2, 3$, nach dem gemeinsamen Start in A den Ort B . Für diese Einteilung sei $T' = \max(T_k)$. Dann gilt

$$3T' \geq T_1 + T_2 + T_3, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $T_1 = T_2 = T_3$ ist. Gleichzeitig ist $T_1 + T_2 + T_3$ die Summe der Zeiten, die bei dieser Einteilung Moped, Fahrrad und Fußgänger in Bewegung sind.

(Dabei wird 2., 3. und 5. der Voraussetzungen verwendet). Wegen $v_1 < v_2 \leq v_3$ gilt daher

$$T_1 + T_2 + T_3 \geq \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} + \frac{S}{v_3} \quad (2)$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn beide Fahrzeuge in B ankommen und sich alle drei Freunde stets vorwärts bewegen (vgl. die in 4. und 6. zugelassenen Möglichkeiten).

Um das einzusehen, beachte man, daß die Strecke mindestens einmal zu Fuß durchlaufen werden muß und diejenigen Teile dieser Strecke, die evtl. von einem der Fahr-

zeuge nicht durchfahren werden, an Stelle dessen zu Fuß zurückgelegt werden müssen. Aus (1) und (2) folgt

$$T' \geq \frac{S}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right) \equiv T_0 \quad (3)$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn alle drei Freunde und beide Fahrzeuge gleichzeitig, und zwar T_0 Std. nach dem Start in A , in B ankommen und sich jeder der Freunde stets vorwärts bewegt. Unter Benutzung des harmonischen Mittels

$$H = \frac{1}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right)}$$

der drei Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 bedeutet (3), daß die drei Freunde nicht in kürzerer Zeit als $T_0 = \frac{S}{H}$ von A nach B gelangen können.

Jetzt sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } v_2 \geq H, \text{ d. h., } \frac{1}{v_2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right),$$

$$\text{d. h., } \frac{1}{v_2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right);$$

v_2 ist nicht kleiner als das harmonische Mittel von v_1 und v_3 .

$$\text{II. } v_2 < H, \text{ d. h., } \frac{1}{v_2} > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right),$$

$$\text{d. h., } \frac{1}{v_2} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right);$$

v_2 ist kleiner als das harmonische Mittel von v_1 und v_3 , insbesondere ist $v_2 < v_3$.

Im Fall I. ist $T_0 = \frac{S}{H}$ tatsächlich die gesuchte Minimalzeit. Um das zu beweisen, genügt es, eine Einteilung anzugeben, bei der alle drei Freunde T_0 Std. nach dem gemeinsamen Start in A den Ort B erreichen.

1. F_2 fährt zuerst t_{22} Std. mit dem Rad und läuft dann t_{21} Std. bis B , so daß

$$t_{22}v_2 + t_{21}v_2 = S \quad t_{22} + t_{21} = T_0$$

gilt, also

$$t_{22} = \frac{S - T_0 v_1}{v_2 - v_1} > 0, \quad t_{21} = \frac{T_0 v_2 - S}{v_2 - v_1} \geq 0 \text{ ist.}$$

Das ist unabhängig von dem Verhalten der beiden anderen sicher realisierbar.

2. F_1 läuft zuerst t_{11} Std. und fährt dann t_{13} Std. mit dem Moped bis B , so daß

$$t_{11}v_1 + t_{13}v_3 = S$$

$$t_{11} + t_{13} = T_0 \text{ gilt, also}$$

$$t_{11} = \frac{T_0 v_3 - S}{v_3 - v_1} > 0, \quad t_{13} = \frac{S - T_0 v_1}{v_3 - v_1} > 0$$

ist.

Das ist realisierbar, wenn F_1 zur Zeit t_{11} an der betreffenden Stelle das Moped vorfindet.

3. F_3 fährt zuerst t_{33} Std. mit dem Moped, läuft dann t_{31} Std. und fährt danach das letzte Stück bis B in t_{32} Std. mit dem Rad, so daß

$$\begin{aligned} t_{33}v_3 + t_{31}v_1 + t_{32}v_2 &= S \\ t_{33} + t_{31} + t_{32} &= T_0 \\ t_{32}v_2 &= t_{21}v_1 \quad \text{gilt, also} \end{aligned}$$

$$t_{33} = \frac{T_0 v_3 - S}{v_3 - v_1} \cdot \frac{v_1}{v_3} > 0,$$

$$t_{32} = \frac{T_0 v_2 - S}{v_2 - v_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} \geq 0,$$

$$t_{31} = \frac{S - T_0 v_1}{v_2 - v_1} \cdot \frac{v_2 v_3 - v_1^2}{v_3 - v_1} \cdot \frac{1}{v_1} > 0 \text{ ist.}$$

Das ist realisierbar, wenn F_3 zur Zeit $t_{33} + t_{31}$ an der betreffenden Stelle das Fahrrad vorfindet.

Wegen $v_1 < v_2$ ist $t_{32} \leq t_{21}$ und daher $t_{33} + t_{31} = T_0 - t_{32} \geq T_0 - t_{21} = t_{22}$, so daß F_3 das Fahrrad an der betreffenden Stelle vorfindet und sich, wie unter 2. beschrieben, verhalten kann. Wegen $v_1 < v_3$

ist $t_{33} < t_{11}$, so daß F_1 das Moped vorfindet und sich, wie unter 2. beschrieben, verhalten kann.

Dies ist nicht die einzige Möglichkeit für die Freunde, die Strecke AB in der Zeit T_0 zu bewältigen. Sie könnten das Verfahren zunächst für die Hälfte der Strecke AB durchführen, sich nach der Zeit $\frac{1}{2} T_0$ in der Mitte treffen und die zweite Hälfte nach irgendeiner Vertauschung ihrer Rollen mit dem gleichen Verfahren in der Zeit $\frac{1}{2} T_0$ zurücklegen. Auch kann die Strecke AB in 4,5 oder allgemein n gleiche Teile zerlegt und jeder von diesen in der Zeit $\frac{T_0}{n}$ bewältigt werden.

Daher gibt es sicher unendlich viele Realisierungen und es erscheint angebracht, noch eine Zusatzbedingung zu stellen, etwa von der Art, daß möglichst wenig „umgestiegen“ wird. Diese Frage wird hier jedoch nicht weiter verfolgt.

Der Fall I ist für die Praxis der Regelfall; denn er tritt sicher ein, wenn die Fahrradgeschwindigkeit v_2 nicht unter dem doppelten der Fußgängergeschwindigkeit v_1 liegt. Dann gilt nämlich

$$\frac{1}{v_2} \leq \frac{1}{2v_1} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right).$$

Und wer findet die Lösung für den Fall II?

alpha-Wettbewerb

Um unseren neuen Lesern die Möglichkeit der Teilnahme am Wettbewerb zu geben, wird der letzte Einsendetermin für Lösungen zu Heft 2 auf 10. Juli 1967 festgelegt.

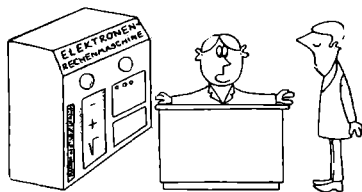
7. März Renate Beuth, Fr.-Schiller-OS, Kl. 7d, Zeulenroda, ist die erste Einsenderin einer Lösung.
13. März Harald English, Leibniz-OS, Kl. 7c, Leipzig, sendet als erster Schüler richtige Lösungen zu allen Wettbewerbsaufgaben ab seiner Klassenst. bis Klassenst. 10 ein.
15. April In der OS Berlingerode werden die Wettbewerbsaufgaben an der

- Schulwandzeitung veröffentlicht, um Interesse zu wecken und neue Leser zu werben.
20. April Harald Rudolph, Comenius-Sch., Kl. 7a, Bitterfeld, sendet die erste Wettbewerbslösung zu Heft 2.
1. Mai Sieben Arbeitsgemeinschaften u. zwei Klassen beteiligen sich als Kollektiv am alpha-Wettbewerb.
10. Mai Sabine Anders, 14. OS Cottbus, Kl. 3c, sowie Jörg Bergmann, 1. OS Dresden, Kl. 4, sind unsere jüngsten Wettbewerbsteilnehmer.
10. Mai Zu Heft 1 liegen 1235 Lösungen und zu Heft 2 150 Lösungen vor.

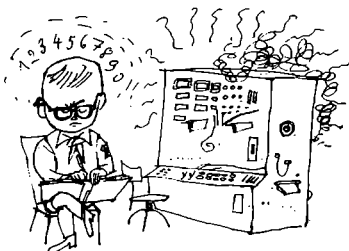
So muß der Kopf für jede Wettbewerbslösung aussehen!

30mm	150mm	30mm
Lorenz, Steffi 703 Leipzig, am Bogen 36		W(8)32
Ernst-Schneller-OS, Klasse 8a		
Prädikat:		m
<u>Lösung:</u>		

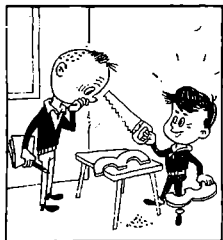
In freien Stunden alpha heiter



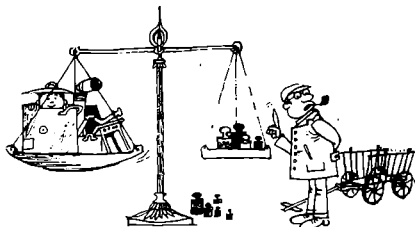
Wieviel ist 2×2 , Kollege Kovács? —
Ich weiß nicht, es ist Stromausfall!
Aus: „Ungarische Rundschau“



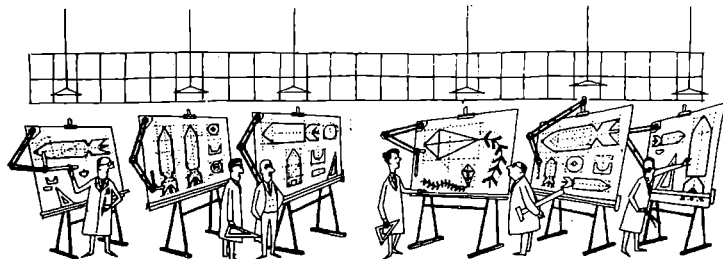
Der Sieger der Mathematikolympiade
im Wettkampf mit einem Elektronehirn
Aus: „Elternhaus und Schule“



„Na bitte, Langer, bei mir ist die Hälfte
von 8 niemals 4.“
Zeichnung: Fritz Berger.
Aus: „Leipziger Volkszeitung“



„Wo bist du denn geblieben, Kleiner?
Es sind 50 Kilo!“
Zeichnung: Vorderwerth.
Aus: „Die Trommel“



Tibor Kajan. Aus dem Buch: Circus Maximus. Eulenspiegelverlag Berlin

● 23. Schafarewitsch, T. R.: Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades. 2. Auflage. (ab Kl. 11).

≡ 24. Markuschewitsch, A. J., u. a.: Streifzüge durch die Mathematik, Bd. II. (ab Kl. 10).

● 25. Markuschewitsch, A. J.: Rekursive Folgen. (ab Kl. 12).

● 26. Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Auflage. (ab Kl. 11).

≡ 27. Steinhaus, H.: Einhundert Probleme der Elementarmathematik. (ab Kl. 10), noch nicht erschienen.

* 28. Perelman, A. J.: Unterhaltsame Geometrie. (ab Kl. 7).

* 29. Perelman, J. J.: Unterhaltsame Algebra. (ab Kl. 7).

* 30. Kolosow, A. A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. 2. Auflage. (ab Kl. 10).

* 31. Teplow, L.: Grundriß der Kybernetik. (ab Kl. 10).

Die vor dem Autor angegebenen Symbole bedeuten:

- VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- * Volk und Wissen Volkseigener Verlag
- B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
- ≡ Urania-Verlag

Liebe Leser!

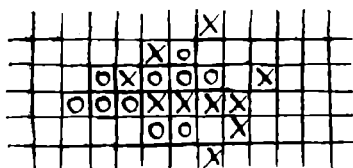
Ob im Feriencamp, dem Spezialistenlager junger Mathematiker oder auf Urlaub mit den Eltern, das mathematische Kinder- und Jugendbuch kann Freund und Helfer sein. Nicht immer ist während der Schulzeit die Möglichkeit, sich intensiv mit speziellen Stoffgebieten zu beschäftigen. Nutzt die Erfahrungen Eurer Lehrer, Arbeitsgemeinschaftsleiter und Bibliothekare! Festigt und erweitert Eure im Unterricht erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten!



Die Redaktion **alpha** wünscht Euch frohe Ferien!

Kreuz oder Kreis?

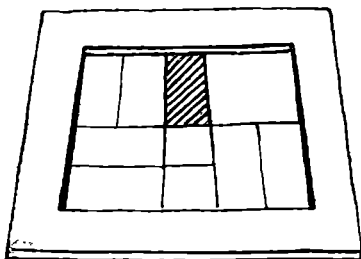
(sowjetisches Unterhaltungsspiel)



Zwei Spieler versuchen, auf kariertem Papier eine zusammenhängende Kette von vier Kästchen zu erreichen (waagrecht, senkrecht, oder diagonal). Jeder Spieler darf abwechselnd ein Kästchen markieren. Zur Unterscheidung genügt es, wenn ein Spieler ein Kreuz, der andere einen Kreis zeichnet. Sieger ist, wer zuerst eine Kette von vier Kästchen fertig hat. Die Abbildung zeigt eine Gewinnstellung für „Kreuz“.

Geschickt geschoben!

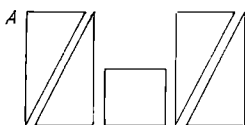
(ungarisches Unterhaltungsspiel)



Schneidet die in der Abbildung dargestellten Quadrate und Rechtecke aus (starke Pappe, dünnes Sperrholz oder ähnliches).

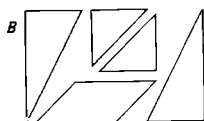
Dann ordnet die Teile so, wie es die Abbildung vorschreibt. Das schraffierte Feld bleibt frei. Nur durch Schieben in der Ebene soll das rechts oben liegende Quadrat in die linke untere Ecke gelangen.

Damit das Schieben leichter geht, schneidet einen Rahmen aus Pappe oder Sperrholz. Wer schafft es in weniger als 33 Zügen? Als ein Zug gilt, wenn ein Teil bewegt wird.



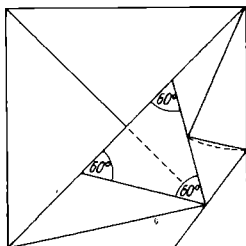
Schnell zusammensetzen!

Paust die Figuren von A und B auf Pappe und schneidet sie aus! Die fünf



Stücke von A ergeben richtig zusammengesetzt ein Quadrat. Die fünf Stücke von B ergeben ebenfalls ein Quadrat.

(Einsender: H. Pätzold, Lehrer, OS Waren/Müritz)



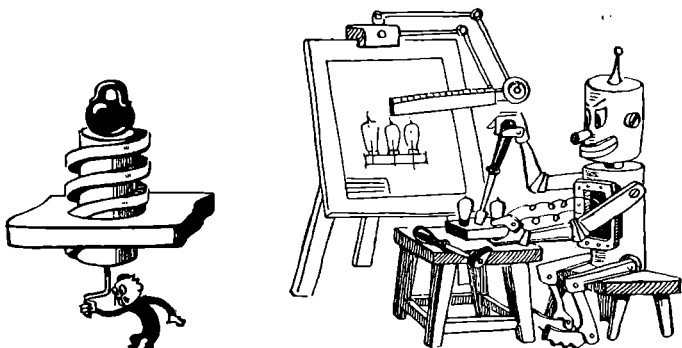
Neun Dreiecke — ein Quadrat?

Zeichnet nach nebenst. Muster neun Dreiecke in das vorgegebene Quadrat ein! Sicher habt Ihr gemerkt, daß alle Dreiecksarten mindestens einmal vertreten sind. Ausgeschnitten und gemischt gebt Ihr die ebenen Figuren Euren Freunden. Wer wird alle Dreiecke zuerst zu einer quadratischen Fläche zusammengefügt haben?

(Einsender: 29. OS Leipzig)

GRUNDRISS DER KYBERNETIK

L. P. TELOW



Reihe: Bücher für den Schüler von der 11. Klasse an.

432 Seiten mit Abbildungen, Halbleinen, Bestell-Nr. 001803, 11,50 MDN

Mit diesem Buch wird ein Überblick über das Forschungsgebiet und die Forschungsmethoden der Kybernetik gegeben. Es handelt sich hier um einen exakten wissenschaftlichen Bericht in populärwissenschaftlicher Darstellung, der den gegenwärtigen Stand widerspiegelt und der auch in den Abschnitten über die zukünftige Entwicklung auf diesem Gebiet von realen Einschätzungen ausgeht.

In der Natur der Kybernetik als Querschnittswissenschaft ist der Grund zu suchen, daß das Buch neben spezifischem Wissen aus der Kybernetik auch ein umfangreiches Allgemeinwissen vermittelt.

Das Buch ist beim Buchhandel oder bei den Vertriebsmitarbeitern erhältlich.



VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

Mathematische Schülerbücherei



Im Juni 1966 wurde die Arbeitsgemeinschaft Mathematische Schülerbücherei (MSB) gegründet. Diesem Kollektiv gehören Mitarbeiter von Verlagen, der Leiter der Literaturarbeitsgemeinschaft beim Ministerium für Kultur, Vertreter der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Jugendorganisationen, der Leiter der Zentralstelle für Kinder- und Jugendliteratur sowie in der Praxis stehende Mathematiklehrer an. Dieses Arbeitskollektiv ist für den Inhalt der MSB, für ihren Aufbau und ihre Weiterentwicklung verantwortlich. Leiter der MSB ist Dr. E. Hameister, Wiss. Mitarbeiter an der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg, Mitglied der Zentralen Staatlichen Kommission für Mathematik beim Ministerium für Volksbildung. Auf vielfachen Wunsch veröffentlichten wir die auf Grund entsprechender Gutachten in die MSB aufgenommenen und veröffentlichten Bände. Sie sind durch eine Vignette, die einen lesenden Schüler darstellt, gekennzeichnet.

● 1. Alexandroff, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie. 4. Auflage. (ab Kl. 10).

■ 2. Hasse, M.: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. 3. Auflage. (ab Kl. 12).

≡ 3. Markuschewitsch, A. I., u. a.: Streifzüge durch die Mathematik, Bd. I. (ab Kl. 10).

■ 4. Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise. 2. Auflage. (ab Kl. 7).

■ 5. Hameister, E.: Von Euklid bis Lobatschewski. Eine Einführung in die elementare nichteuklidische Geometrie. (ab Kl. 10), noch nicht erschienen.

■ 6. Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. 9. Auflage. (ab Kl. 8).

★ 7. Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger. 3. Aufl. (Aussagenlogik), (ab Kl. 8).

● 8. Sominski, I. S.: Die Methode der vollständigen Induktion. 7. Auflage. (ab Kl. 9).

● 9. Korowkin, P. P.: Ungleichungen. 5. Auflage. (ab Kl. 9).

● 10. Gnedenko, B. W., und A. I. Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 6. Auflage. (ab Kl. 9).

■ 11. Lietzmann, W.: Wo steckt der Fehler? 4. Auflage. (ab Kl. 8).

■ 12. Lietzmann, W.: Altes und Neues vom Kreis. 4. Auflage. (ab Kl. 7).

■ 13. Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. 7. Auflage. (ab Kl. 8).

■ 14. Miller, M.: Rechenvorteile. 3. Auflage. (ab Kl. 11).

● 15. Natanson, I. P.: Einfachste Maxima- und Minimaufgaben. 3. Auflage. (ab Kl. 9).

● 16. Natanson, I. P.: Summierung unendlich kleiner Größen. (ab Kl. 11).

● 17. Dubnow, J. S.: Fehler in geometrischen Beweisen. 2. Auflage. (ab Kl. 10).

● 18. Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Mehrfarbenprobleme. 2. Auflage. (ab Kl. 10).

● 19. Worobjew, N. N.: Die Fibonacci'schen Zahlen. (ab Kl. 11).

● 20. Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Aufgaben aus der Zahlentheorie. 2. Auflage. (ab Kl. 11).

● 21. Kurosch, A. G.: Algebraische Gleichungen beliebigen Grades. 3. Auflage. (ab Kl. 12).

● 22. Gelfond, A. O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen. 3. Auflage. (ab Kl. 11).