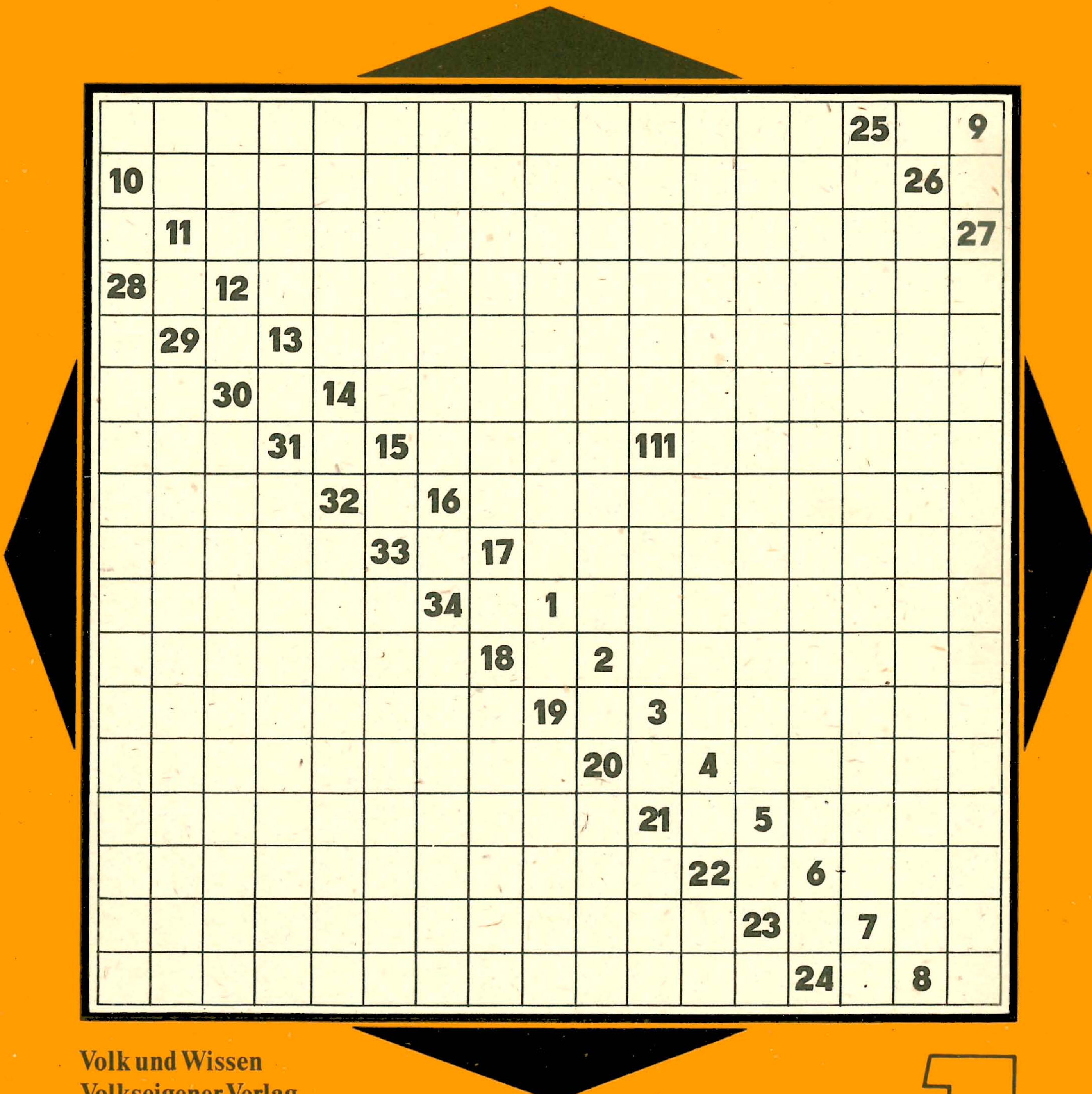
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

1

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Studiendirektor Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.
Fotos: H.-J. Kühne (S. 7); Abt. Museen/Sammlungen d. Staatl. Schlösser und Gärten Wörlitz · Oranienbaum · Luisium (S. 8); J. Weiß (S. 12, 13); Staatl. Math.-Phys. Salon Dresden (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (S. 17)
Techn. Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von St. Hochmuth, Karl-Marx-Stadt
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 17. Oktober 1988
Auslieferungstermin: 13. Februar 1989

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin

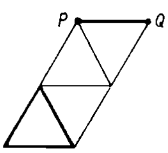
Dreiecks-geometrie

„alpha“ freut sich immer, wenn sie ihre Leser zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen kann. Noch mehr freuen wir uns, wenn ihr uns eure Überlegungen mitteilt. Schließlich ist meist die Diskussion über die eigenen Gedanken mit anderen der Prüfstein für ihre Richtigkeit. Vielleicht regt euch Ralphs Arbeit zu einem solchen Meinungsstreit an.

Alphons

Im Heft 2/1986 der *alpha* wurde eine *Taxi-Geometrie* vorgestellt. Dadurch kam ich auf die Idee für eine andere Geometrie, die ich *Dreiecksgeometrie* (kurz: *D-Geometrie*) nannte.
Ich gehe von einer Ebene aus, die – wie bei einem Halma-Spiel – von einem Netz aus zueinander kongruenten Dreiecken bedeckt ist *(D-Ebene)*. Jedes dieser Dreiecke nenne ich *Elementardreieck* (Bild 1).

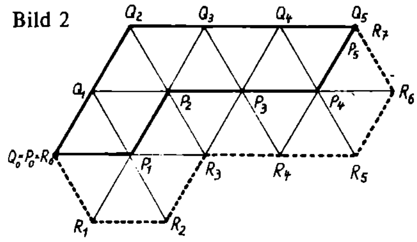
Bild 1



D-Geraden sind die Geraden des Dreiecksgitters. Die Gitterpunkte des Dreiecksgitters sollen die *D-Punkte* sein. In jedem D-Punkt schneiden sich genau drei D-Geraden. Auf jeder D-Geraden liegen mindestens zwei Punkte (sogar unendlich viele), aber zu zwei voneinander verschiedenen D-Punkten muß es nicht unbedingt eine D-Gerade geben, auf der diese beiden Punkte liegen.
Vor allem die letztgenannte Eigenschaft ist der Grund dafür, daß die D-Geometrie zum Teil erhebliche Unterschiede zur gewöhnlichen Geometrie aufweist.
Beispielsweise kann man den Begriff *Strecke* nicht wie sonst üblich definieren. Wir wollen unter einer *Elementarstrecke* ein Paar (P, Q) von Eckpunkten ein und desselben Elementardreiecks verstehen. (Anschaulich können wir uns unter einer Elementarstrecke eine Seite eines Elementardreiecks vorstellen, jedoch enthält eine Elementarstrecke außer ihren beiden Endpunkten keine weiteren D-Punkte.) (Bild 1)
Eine Folge $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ von D-Punkten, bei der jedes Paar (P_i, P_{i+1}) eine Elementarstrecke ist, nennen wir *Weg von P_0 nach P_n*. Die Anzahl n der auf dem Weg von P_0 nach P_n durchlaufenen Elementarstrecken nennen wir *Länge des Weges $P_0P_1...P_n$*.

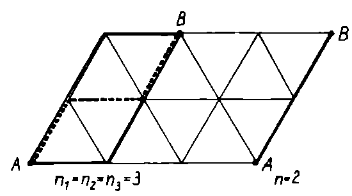
Ist $P_0P_1...P_n$ ein Weg der Länge n und gilt für jeden Weg $Q_0Q_1...Q_m$ mit $Q_0 = P_0$ und $Q_m = P_n$ die Beziehung $m \geqq n$, so nennen wir $P_0P_1...P_n$ *direkten Weg von P_0 nach P_n*. (Bild 2)

Bild 2



Sind A und B zwei voneinander verschiedene D-Punkte, so ist der direkte Weg von A nach B nur dann eindeutig bestimmt, wenn A und B auf ein und derselben D-Geraden liegen. (In diesem Fall könnte man den direkten Weg von A nach B auch als *Strecke AB* bezeichnen.) Andernfalls gibt es mehrere direkte Wege von A nach B, die jedoch alle gleich lang sind. Die Länge eines direkten Weges von A nach B $(A \neq B)$ nennen wir *D-Abstand von A und B*. Jeder Punkt habe von sich selbst den Abstand 0. (Bild 3)

Bild 3



Ein *D-Vieleck* besteht aus k D-Punkten $A_1, A_2, ..., A_k$ (Eckpunkte) und je einem direkten Weg von A_1 nach A_2, von A_2 nach A_3, ..., von A_{k-1} nach A_k und schließlich von A_k nach A_1 (k Seiten). Dabei sollen keine drei aufeinanderfolgenden Eckpunkte auf ein und derselben Geraden liegen.
Solche D-Vielecke wollen wir nun etwas näher untersuchen.
Zunächst betrachten wir eine Figur, die wir aus der gewöhnlichen Geometrie nicht kennen: Das Zweieck.

Bild 4a

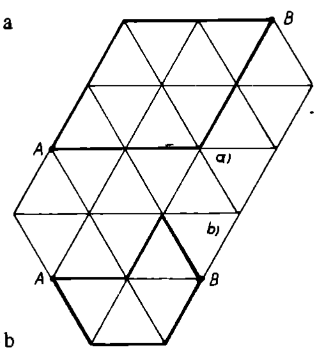


Bild 4b

Bild 4a zeigt ein *D-Zweieck* mit den Eckpunkten A und B. Im Bild 4b liegt dagegen kein Zweieck vor, da A und B nicht durch *direkte* Wege verbunden sind. Wir stellen fest: Die beiden Eckpunkte eines D-Zweiecks können nicht auf ein und derselben D-Geraden liegen.
Kommen wir jetzt zum *D-Dreieck*, wobei wir uns hier auf gleichseitige D-Dreiecke beschränken. Bild 5 zeigt zwei gleichseitige D-Dreiecke. Zweifelsohne ist das Dreieck a) das interessantere.

Bild 5a

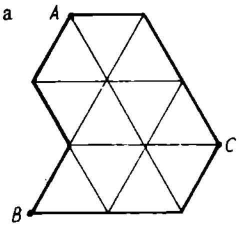
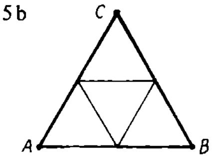


Bild 5b



Bei ihm befindet sich jeder der drei Eckpunkte A, B, C auf einer anderen D-Geraden. Das Dreieck b) unterscheidet sich nicht von einem gewöhnlichen gleichseitigen Dreieck. Ein gewöhnliches gleichseitiges Dreieck erhält man übrigens auch, wenn man die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks a) als Punkte einer gewöhnlichen Ebene auffaßt und durch gewöhnliche Geraden verbindet.

▲1▲ Zeichnet weitere gleichseitige D-Dreiecke und überprüft, ob ihre Eckpunkte auch in der gewöhnlichen Geometrie Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind! Läßt sich eine allgemeine Aussage formulieren und beweisen?

Unter einem *D-Rhombus* verstehen wir ein D-Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind (Bild 6).

Bild 6a

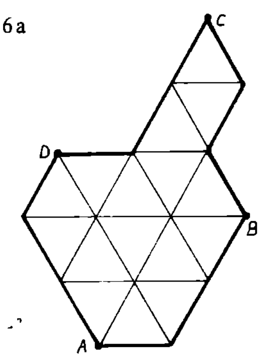
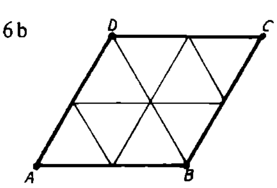


Bild 6b



▲2▲ Welche Figuren erhält man, wenn man die Eckpunkte der D-Rhomben im Bild 6 jeweils in eine gewöhnliche Ebene überträgt und durch gewöhnliche Geraden verbindet? Ist das bei allen D-Rhomben so?

Wenden wir uns nun der interessantesten Figur in der D-Geometrie zu, dem *D-Kreis*. Wir definieren: Ein D-Kreis ist die Menge aller D-Punkte, die von einem gegebenen

D-Punkt M, dem Mittelpunkt des D-Kreises, den gleichen Abstand r ($r \in N$, $r > 0$) haben.
Bild 7 zeigt zwei D-Kreise. Ihr Umfang (Länge des Weges *ABCDEFA* bzw. *ABCDEFGHIJKLA*) beträgt 6 bzw. 12, ihr Durchmesser 2 bzw. 4. Der Quotient *Umfang: Durchmesser* ist bei beiden Kreisen 3 (in der gewöhnlichen Geometrie: $\pi = 3{,}14\ldots$).

Bild 7a

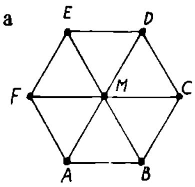
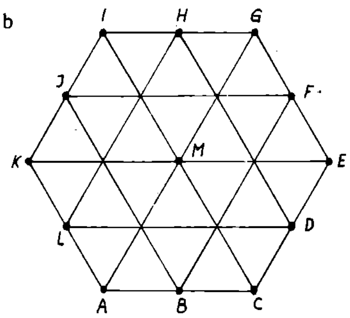


Bild 7b



▲3▲ Überprüft, ob dies bei allen D-Kreisen so ist!

Das waren nun die Dinge aus der D-Geometrie, die mir am interessantesten erschienen. Man kann noch viel mehr untersuchen, so z. B. in D-Dreiecken die Innenwinkelsumme, die nicht in jedem D-Dreieck dieselbe ist, oder auch Höhen, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende usw. Jeder kann in dieser Geometrie leicht neue Sätze und Besonderheiten erkennen.
Und wenn jemand nach dem Nutzen fragt: Vor allem, glaube ich, macht das Erfinden einer *anderen* Geometrie und das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten in ihr Spaß, und man versteht einige Zusammenhänge in der gewöhnlichen Geometrie besser.

R. Schlosser

Aufgabe zum Titelblatt – Ein anspruchsvolles Magisches Quadrat

In ein Quadrat aus 17×17 Feldern sind die Zahlen 1 bis 289 so einzutragen, daß sich sowohl in allen waagerechten Zeilen, in allen senkrechten Spalten als auch in den beiden Diagonalen stets die gleiche Summe ergibt.
Zur Erleichterung der Lösung sind in das Bild die Zahlen 1 bis 34 und die Zahl 111 bereits eingetragen.

Schüler St. Hochmuth, J.-Dieckmann-OS, Kl. 6a

Leontij Magnickij (1669 bis 1739) und seine „Arithmetik" (1703)

Die *Arithmetik* von Magnickij, die 1703 in Moskau mit einer für die damalige Zeit ungewöhnlich hohen Auflage von 2400 Exemplaren erschien, blieb in Rußland weiter ein grundlegendes Lehrbuch, obwohl 1740 die *Universale Arithmetik* von Euler ins Russische übersetzt worden war. Michail Lomonossow nannte es *eine Pforte zu seiner Gelehrsamkeit*. Außer den Rechenregeln und den Grundrechenarten, *die die Kaufleute, Handwerker, Beamten und überhaupt alle brauchen* – so stand es im Buch – enthielt es auch Kapitel über Algebra, Geometrie, Astronomie, Navigation u. a. m.
Peter I. erkannte, daß gegen den Analphabetismus des 18. Jahrhunderts die Entwicklung der Wissenschaften allgemein und der mathematischen im besonderen für den Schiffbau, für die Navigation, das Bauwesen, den Handel, die Ökonomie und das Militärwesen notwendig waren. Per Erlaß gründete er 1701 eine Schule der mathematischen und der Navigationswissenschaften in Moskau. Leontij Magnickij wurde zusammen mit dem Engländer Farguharson und zwei weiteren Ausländern an diese Schule berufen.
In einem Geschichtsbuch, das in Rußland im Jahre 1831 erschien, wird folgendes berichtet: Magnickij hatte selbständig die Mathematik erlernt und sprach deutsch, niederländisch, lateinisch und italienisch. Peter I. *unterhielt sich mit ihm über mathematische Probleme, und war von seinen Kenntnissen so entzückt, daß er ihn als seinen „Magneten" bezeichnete und anordnete, ihn Magnickij zu nennen. Welchen Familiennamen er bis dahin hatte, ist unbekannt ...*
Die *Arithmetik* von Magnickij entsprach einem wichtigen gesellschaftlichen Zeitbedürfnis. Es blieb bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts in Gebrauch, wie Prof. Juschkewic, einer der führenden Mathematikhistoriker der Sowjetunion, in seinem Buch *Die Geschichte der Mathematik in Rußland* festgestellt hat.

Wir stellen einige Aufgaben aus seiner *Arithmetik* vor:

▲1▲ Jemand ging Spielzeug einkaufen. Für das erste Spielzeug bezahlte er $\frac{1}{5}$ seines Geldes, für ein zweites $\frac{3}{7}$ des Restes und für ein drittes $\frac{3}{5}$ des ihm verbliebenen Geldes. Danach hatte er noch 1 Rubel und 92 Kopeken. Wieviel Geld hatte er ursprünglich, und wieviel kostete jedes Spielzeug?

▲2▲ „Wieviel Schüler hast du?" wollte ein Bauer von einem Lehrer wissen. „Einstweilen einige" antwortete der Lehrer. „Wenn aber noch einmal soviel kommen und noch die Hälfte und noch ein Viertel dieser Zahl und auch dein Sohn, dann sind es 100."
Wieviel Schüler hatte der Lehrer?

▲3▲ Ein Bauer stellt einen Knecht für ein Jahr ein und versprach ihm, 12 Rubel und einen Schafspelz als Lohn zu geben. Der Knecht diente aber nur 7 Monate. Der Herr bezahlte dafür 5 Rubel und gab ihm den Schafspelz. Bestimme den Preis des Pelzes!

▲4▲ Ein Wanderer benötigte für den Weg von einer Stadt in ein Dorf 30 Tage. Ein anderer ging aus diesem Dorf in diese Stadt und brauchte nur 20 Tage. Nach wieviel Tagen treffen sie sich, wenn sie gleichzeitig losgingen?

▲5▲ Ein Mann und eine Frau pflegten ein Fäßchen in 10 Tagen zu trinken. Der Mann trank dieses Fäßchen allein in 14 Tagen leer. In wieviel Tagen schafft dies die Frau?

▲6▲ Jemand hinterließ seiner Frau, seiner Tochter und seinen drei Söhnen 48000 Rubel als Erbschaft: der Frau ein Achtel der ganzen Summe, jedem Sohn zweimal mehr als der Tochter.
Wieviel Geld erhielt jeder?

Hier noch eine anspruchsvollere Aufgabe aus dem Kapitel *Reihen:*

▲7▲ Ein Verkäufer möchte für ein Pferd 156 Rubel haben. Ein Käufer meint, daß dieser Preis wesentlich zu hoch ist. „Dann kaufe nur die Nägel in jedem Hufeisen (jedes Hufeisen hat 6 Nägel)", schlägt der Verkäufer vor. „Für den ersten Nagel zahle mir $\frac{1}{4}$ Kopeke, für den folgenden $\frac{1}{2}$ Kopeke, danach 1 Kopeke, dann 2 Kopeken usw. Das Pferd gebe ich dir als Zugabe zu den Nägeln kostenlos." Der Käufer stimmte erfreut zu und hoffte, nicht mehr als 10 Rubel bezahlen zu müssen. Wieviel hätte er tatsächlich zahlen müssen?

A. Halameisär/J. Lehmann/W. Moldenhauer

Lösen von Extremwertaufgaben mit elementaren Mitteln

Die Mitglieder der Mathematischen Schülergesellschaft der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Klasse 9, beschäftigten sich in einem Kurs mit Extremwertaufgaben, dabei spielten außerdem Näherungsmethoden auf Kleincomputern eine Rolle. Eine Kurzfassung des behandelten Stoffes teilen sie euch hier mit.

Im täglichen Leben stehen wir sehr oft vor der Aufgabe, aus vorhandenen Mitteln (in einem jeweils noch zu präzisierenden Sinne) das Beste zu machen oder ein gestelltes Ziel mit möglichst geringem Aufwand zu erreichen. In konkreten Fällen kann es z. B. darum gehen, einen möglichst hohen Exportgewinn zu erzielen oder eine möglichst große Produktionsleistung zu erreichen. Häufig ist mit möglichst wenig Material oder mit möglichst wenig Energie eine vorgegebene Aufgabe zu erfüllen. Prinz Epsilon (siehe alpha Heft 2/1988) muß überlegen, wie ein gegebenes Stück Pappe zu einer (oben offenen) Kiste mit möglichst großem Volumen gefaltet werden kann. Ein anderes Problem besteht z. B. darin, eine Kiste mit einem bestimmten festen Volumen so zu bauen, daß dazu möglichst wenig Material benötigt wird.

Derartige Probleme nennt man *Optimierungsprobleme* oder *Extremwertaufgaben*. Zu ihrer Lösung ist ein mathematisches Modell aufzustellen. Das sind meist Formeln oder Algorithmen zur Beschreibung des (technischen, physikalischen, ökonomischen, ...) Sachverhaltes. Zahlreiche mathematisch formulierte Extremwertaufgaben können mit Methoden der höheren Mathematik (Differentialrechnung) gelöst werden. Es gibt auch Probleme, bei denen die Unbekannten Funktionen sind. Aufgaben dieses Typs werden in der Variationsrechnung und in der Theorie der optimalen Steuerung untersucht. Von diskreten Problemen spricht man, wenn die Variablen nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen können, auch dafür sind spezielle Lösungsmethoden entwickelt worden.

Differentialrechnung und Optimierungsaufgaben werden im Mathematikunterricht der OS nicht behandelt. Trotzdem müssen wir nicht von vornherein passen. Manchmal lassen sich nämlich Extremwertaufgaben auch mit relativ elementaren Hilfsmitteln lösen. Als ein solches Hilfsmittel wollen wir hier Ungleichungen benutzen.

1. Einige Ungleichungen

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann heißt

$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$

das „arithmetische Mittel" und

$G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$

das „geometrische Mittel" der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel besteht stets die Beziehung:

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leqq A(x_1, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

Dabei gilt

$G(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$

dann und nur dann, wenn

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ist.

Diese Ungleichung wurde von dem französischen Mathematiker A. L. Cauchy (1789 bis 1857) bewiesen. Einen elementaren Beweis dieser Ungleichung findet der interessierte Leser in [2].

Aus (1) folgt

Satz 1: Für beliebige nichtnegative Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leqq x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n. \qquad (2)$$

Bei positiven Zahlen ist Gleichheit genau dann erfüllt, falls $x_1 = \ldots = x_n$ ist.

Beweis: Nach Formel (1) ist

$G(x_1^n, \ldots, x_n^n) \leqq A(x_1^n, \ldots, x_n^n)$, d. h.

$\sqrt[n]{x_1^n \cdot \ldots \cdot x_n^n} \leqq \frac{1}{n}(x_1^n + \ldots + x_n^n)$,

hieraus folgt (2).

Auch die folgende Ungleichung kann für die Lösung einiger Extremwertaufgaben mit Erfolg ausgenutzt werden. Sie wird nach Jacob Bernoulli (1654 bis 1705) als Bernoullische Ungleichung bezeichnet. Für $x \geqq 0$ und $n \in N$ folgt sie aus der bekannten binomischen Formel:

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx. \qquad (3)$$

Wir zeigen nun, daß analoge Ungleichungen auch für allgemeinere Fälle richtig sind.

Satz 2: Es sei x eine reelle und α eine rationale Zahl mit $x \geqq -1$ und $\alpha \geqq 1$. Dann gilt

$$(1 + x)^\alpha \geqq 1 + \alpha x. \qquad (4)$$

Im Fall $0 < \alpha < 1$, $x \geqq -1$ besteht die Ungleichung

$$(1 + x)^\alpha \leqq 1 + \alpha x, \qquad (5)$$

für $\alpha \neq 1$ ist Gleichheit nur bei $x = 0$ erfüllt.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $0 < \alpha < 1$. Da α rational ist, existieren natürliche Zahlen m, n mit $1 \leqq m < n$, so daß $\alpha = \frac{m}{n}$ geschrieben werden kann.

Es ist $1 + x \geqq 0$ und folglich

$(1 + x)^\alpha = (1 + x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1 + x)^m}$

$= \sqrt[n]{(1 + x) \cdot \ldots \cdot (1 + x) \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}$.

Dabei wurde der Radikand um $(n - m)$ Faktoren 1 ergänzt, so daß unter dem Wurzelzeichen formal n Faktoren stehen.

Nach Ungleichung (1) ist daher

$(1 + x)^\alpha \leqq \frac{m(1 + x) + (n - m) \cdot 1}{n}$

$= \frac{m + mx + n - m}{n} = \frac{mx + n}{n} = 1 + \alpha x.$

Weil in (1) das Gleichheitszeichen nur für „$x_1 = \ldots = x_n$" steht, gilt

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$ genau dann, wenn $1 + x = 1$ ist, d. h. nur für $x = 0$.

Es sei jetzt $\alpha > 1$. Falls $1 + \alpha x < 0$ ist, gilt natürlich $(1 + x)^\alpha \geqq 0 > 1 + \alpha x$. Also bleibt noch $\alpha > 1$, $1 + \alpha x \geqq 0$ zu diskutieren. In diesem Fall ist $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, und gemäß der schon bewiesenen Formel (5) ist

$(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq 1 + \frac{1}{\alpha}\alpha x = 1 + x.$

Weil die Potenzfunktion für $\alpha > 1$ monoton ist, muß

$1 + \alpha x = \left((1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \leqq (1 + x)^\alpha$ sein.

Bemerkung: Für $\alpha \neq 1$ steht in den Formeln (4) und (5) das Gleichheitszeichen nur für $x = 0$.

Satz 3: Die Bernoullische Ungleichung (4) gilt auch für x reell, α rational und $x \geqq -1$, $\alpha < 0$.

Beweis: Wir führen die Aussage auf Satz 2 zurück. Sollte $1 + \alpha x < 0$ sein, ist (4) offensichtlich. Im anderen Fall ist $\alpha x \geqq -1$. Wegen $-\alpha > 0$ gilt für $p \in N$, $p > -\alpha$ die Ungleichung $0 < -\frac{\alpha}{p} < 1$ und daher ist nach (5)

$$(1 + x)^{-\frac{\alpha}{p}} \leqq 1 - \frac{\alpha}{p}x \qquad (6)$$

bzw. $(1 + x)^{\frac{\alpha}{p}} \geqq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{p}x}$. Wegen

$1 \geqq 1 - \left(\frac{\alpha}{p}x\right)^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{p}x\right)\left(1 + \frac{\alpha}{p}x\right)$

ergibt sich

$(1 + x)^{\frac{\alpha}{p}} \geqq 1 + \frac{\alpha}{p}x$ und folglich

$(1 + x)^\alpha \geqq \left(1 + \frac{\alpha}{p}x\right)^p.$

Da $\alpha x \geqq -1$ ist, gilt $\frac{\alpha}{p}x \geqq -\frac{1}{p} \geqq -1$.

Wegen $p \in N$ folgt dann

$(1 + x)^\alpha \geqq 1 + p\frac{\alpha}{p}x$ aus dem schon bekannten Satz.

Bemerkungen: Aus den Ungleichungen des Beweises folgt, daß

$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$

für $x \neq 0$ $(x \geqq -1, \alpha < 0)$ ist.

Durch Grenzwertbildung kann man Potenzen x^α auch für $x \geqq 0$ und beliebige reelle Zahlen α definieren. Es läßt sich dann zeigen, daß die Sätze 2 und 3 richtig bleiben, wenn dort für α irrationale Zahlen (mit der Fallunterscheidung $\alpha < 0$, $\alpha > 1$ bzw. $0 < \alpha < 1$) eingesetzt werden.

2. Maxima und Minima

Untersuchung von Funktionen des Typs $x^\alpha - ax$

Von Funktionen dieses Typs soll uns interessieren, ob sie über der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $M = \{x \in R \mid x \geqq 0\}$ oder über gewissen Intervallen kleinste oder größte Funktionswerte besitzen, und wenn ja, wo diese angenommen werden.

Satz 4: Es sei $a > 0$, $\alpha > 1$. Dann hat die Funktion $f(x) = x^\alpha - ax$ bezüglich $x \geqq 0$ ihren kleinsten Wert im Punkt

$$\underline{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$ und dieser Wert ist

$$f(\underline{x}) = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Beweis: Wegen $\alpha > 1$ ist für alle $z \geqq -1$ nach (4) $(1+z)^\alpha \geqq 1 + \alpha z$. Setze $y = 1 + z$, also $z = y - 1$, so ergibt sich $y^\alpha \geqq 1 + \alpha(y-1)$ und daher $y^\alpha - \alpha y \geqq 1 - \alpha$. Dabei ist $y \geqq 0$ beliebig, die Ungleichung gilt für alle $y \geqq 0$ und das Gleichheitszeichen steht nur für $z = 0$, d. h. für $y = 1$. Multiplikation mit dem positiven Faktor $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ liefert

$$\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}y\right)^\alpha - \alpha\frac{a}{\alpha}\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}y\right) \geqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Wir setzen nun $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y$. Weil $y \geqq 0$ beliebig ist, durchläuft auch x alle nichtnegativen reellen Zahlen. Die Ungleichung hat jetzt die Gestalt

$$x^\alpha - ax \geqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Für $x \neq \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ steht „>" und für $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ steht „=".

Definition: Es sei M eine Teilmenge der reellen Zahlen R und f eine auf M definierte reellwertige Funktion. Wenn es ein $\underline{x} \in M$ (bzw. ein $\bar{x} \in M$) gibt, so daß $f(\underline{x}) \leqq f(x)$ bzw. $f(x) \leqq f(\bar{x})$ für alle $x \in M$ gilt, so nennt man $f(\underline{x})$ das (globale) Minimum und $f(\bar{x})$ das (globale) Maximum von f auf M. $\underline{x}$ heißt (globale) Minimumstelle und $\bar{x}$ (globale) Maximumstelle von f auf M.

Der höchste Berg (Punkt) der DDR ist der Fichtelberg. Nennt den höchsten Berg in Thüringen und den höchsten Berg im Bezirk Neubrandenburg! Im Kleinen (Lokalen) können offenbar ganz andere Maxima und Minima als im Großen (Globalen) auftreten. Man betrachtet daher neben den globalen Extremwerten (Minimum oder Maximum) auch lokale Extrema. Für den Fall $M = R$ sind diese exakt so definiert: f hat bei $x_0 \in R$ ein lokales Maximum, falls es ein Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gibt, so daß $f(x_0) \geqq f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ist. Das bedeutet, daß $f(x)$ das globale Maximum von f auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ darstellt.

Entsprechend ist das lokale Minimum zu verstehen.

Wenn f nur auf $M \subseteqq R$ definiert ist, wird die Definition wie folgt abgeändert: Man sagt, f hat bei $x_0 \in M$ ein lokales Maximum auf M, wenn es ein Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gibt, so daß $f(x_0) \geqq f(x)$ für alle $x \in M \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gilt.

In diesem Beitrag sind nur globale Extrema von Interesse.

Daher vereinbaren wir, nur von Maximum und Minimum zu sprechen.

Aufgabe: Maximum oder Minimum von einer Funktion f auf einer Menge M existieren nicht immer. Wenn sie existieren, sind Minimum oder Maximum eindeutig bestimmt. Es kann jedoch mehrere Minimum- oder Maximumstellen geben. Illustriere dies an Beispielen!

Die Aussage von Satz 4 kann jetzt so formuliert werden: Es sei $a > 0$, $\alpha > 1$ und $M = \{x \mid x \in R, x \geqq 0\}$.

Dann nimmt die Funktion $f(x) = x^\alpha - ax$ ihr Minimum auf M an der Stelle

$$\underline{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$ und nur an dieser Stelle an, das Minimum ist

$$f(\underline{x}) = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Satz 5: Es seien $\beta, \gamma \in R$, $\gamma < 0 < \beta$ und M eine Teilmenge von R. Wenn f das Minimum (Maximum) auf M im Punkt $\underline{x}$ (bzw. $\bar{x}$) annimmt, so hat die Funktion βf dort ebenfalls ein Minimum (bzw. Maximum) auf M, γf hat in $\underline{x}$ ein Maximum.

Beweis: Es ist $f(x) \geqq f(\underline{x})$ und wegen $\gamma < 0$ dann $\gamma f(x) \leqq \gamma \cdot f(\underline{x})$ für alle $x \in M$. Also nimmt $\gamma \cdot f$ das Maximum auf M bei $\underline{x}$ an. Die anderen Aussagen erhält man analog.

Folgerung: Die Funktion $g(x) = ax - x^\alpha$ mit $a > 0, \alpha > 1$ nimmt das Maximum auf $M = \{x \mid x \in R, x \geqq 0\}$ im Punkt

$$\bar{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$ an. Es gibt genau eine Maximumstelle auf M und der Wert des Maximums ist $(\alpha - 1)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Wir wollen den Verlauf einiger Funktionen für den Spezialfall $a = 1$ skizzieren:

Bild 1

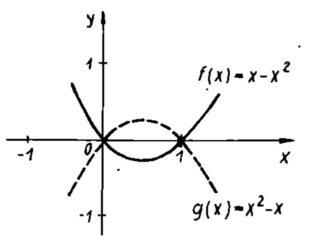


Bild 2

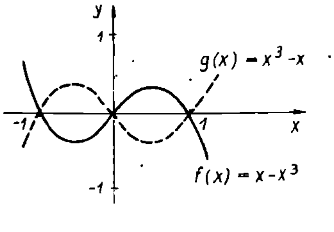


Bild 3

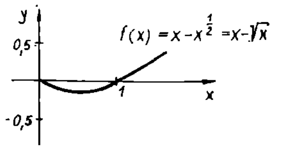


Bild 4

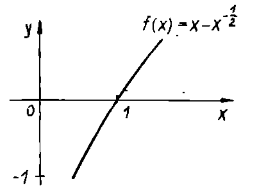
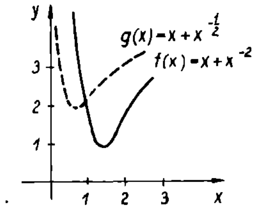


Bild 5



Die Skizzen motivieren uns zu Aussagen über Minima der Funktionen $f(x) = ax - x^\alpha$ für $\alpha > 0, 0 < \alpha < 1$ und der Funktionen $g(x) = x^\alpha + ax$ für $a > 0, \alpha < 0$ auf $M = \{x \mid x \geqq 0\}$.

Satz 6: Wenn $0 < \alpha < 1$ und $a > 0$ ist, so nimmt die Funktion $g(x) = x^\alpha - ax$. ihr Maximum auf $M = \{x \mid x \geqq 0\}$ im Punkt $\bar{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ an.

Andere Maxima gibt es nicht! Die Funktion $f(x) = ax - x^\alpha$ besitzt dann im Punkt $\bar{x}$ ein Minimum auf M.

Beweis: Nach (5) ist $(1+z)^\alpha \leqq 1 + \alpha z$ für alle $z \geqq -1$. Mit $y = 1 + z$ findet man $y^\alpha \leqq 1 + \alpha(y-1)$ für alle $y \geqq 0$. Multipliziert man diese Ungleichung wieder mit $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, so ist

$$\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}y\right)^\alpha - \alpha\left(\frac{a}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}y\right) \leqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Setzt man $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y$, folgt

$$x^\alpha - ax \leqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $z = 0$, also $y = 1$ bzw. $\bar{x} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$

Satz 7: Wenn $\alpha < 0$ und $a > 0$ ist, nimmt die Funktion $g(x) = x^\alpha + ax$ ihr Minimum auf $M = \{x \mid x > 0\}$ im Punkt

$$\underline{x} = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$ an, andere Minimumstellen gibt es in M nicht!

Beweis: Aus der Bernoullischen Ungleichung erhält man $(1+z)^\alpha \geqq 1 + \alpha z$ für alle $z > -1$, was mit $y = 1 + z$ als $y^\alpha \geqq 1 + \alpha(y-1)$ geschrieben werden kann. Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit der positiven Zahl $\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ erhält man mit der Definition $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} y$ die Beziehung

$x^\alpha + ax \geqq (1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, die für alle $x > 0$ gilt, weil y alle positiven reellen Zahlen durchläuft. Das Gleichheitszeichen steht wieder genau dann, wenn $y = 1$, also wenn $\underline{x} = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ ist.

Satz 8: Es sei $\bar{x}$ Maximumstelle von f auf M, und es gelte $M' \subseteqq M, \bar{x} \in M'$. Dann nimmt f auch auf M' das Maximum in $\bar{x}$ an. Entsprechendes gilt für das Minimum. Der Beweis ergibt sich aus der Definition von Maximum bzw. Minimum und der Inklusion $M' \subseteqq M$.

Es seien nun I und M Teilmengen von R. Auf M sei eine Funktion f und auf I eine Funktion g definiert. Es gelte $g(z) \in M$ für alle $z \in I$ und zu jedem $x \in M$ gebe es ein $z \in I$ mit $g(z) = x$. (Man nennt g eine Abbildung von I auf M.) Außerdem sei g so beschaffen, daß zu verschiedenen Argumenten auch verschiedene Bildpunkte gehören, d. h. $g(z) \neq g(\tilde{z})$ für alle $z \neq \tilde{z}, \tilde{z} \in I$. (Man nennt dann g eine eineindeutige Funktion.)

Es werde nun eine Funktion h auf I definiert durch die Vorschrift
$h(z) = f(g(z)), z \in I$.

Satz 9: Die obigen Voraussetzungen seien erfüllt. Die Funktion h nehme im Punkt $\underline{z} \in I$ ihr Minimum (Maximum) auf I an. Dann ist $\underline{x} = g(\underline{z})$ eine Minimumstelle (Maximumstelle) von f auf M.

Wenn $\underline{z}$ eindeutig bestimmt und g eineindeutig ist, so nimmt f das Minimum (Maximum) auch nur in $\underline{x}$ an.

Beweis: Es ist $h(\underline{z}) \leqq h(z)$ für alle $z \in I$. Daher ist $f(\underline{x}) \leqq f(g(z))$ für alle $z \in I$. Weil jedes $x \in M$ Bild von g eines Punktes $z \in I$ ist, folgt $f(\underline{x}) \leqq f(x)$ für alle $x \in M$. Sei nun $h(\underline{z}) < h(z)$ für alle $z \in I$, $z \neq \underline{z}$. Wir nehmen an, daß ein $\tilde{x} \neq \underline{x}$ mit $f(\tilde{x}) = f(\underline{x})$ existiert. Da g eineindeutig ist, existiert ein $\tilde{z} \neq \underline{z}$ mit $g(\tilde{z}) = \tilde{x}$. Dann wäre $h(\tilde{z}) = h(\underline{z})$ und $\tilde{z} \neq \underline{z}$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Im Fall eines Maximums argumentiert man entsprechend.

3. Beispiele für Extremwertaufgaben

Beispiel 1: Es ist mit einem Faden der Länge l ein Rechteck so abzustecken, daß die Fläche des Rechtecks möglichst groß wird.

Lösung: Die Seiten des Rechtecks sollen mit x und y bezeichnet werden. Dann gilt $2x + 2y = l$, also $y = \frac{1}{2}l - x$, dabei kann x eine beliebige Zahl zwischen 0 und $\frac{l}{2}$ sein. Für den Flächeninhalt $F = xy$ findet man demnach $F = \frac{1}{2}lx - x^2$. Wir bestimmen zuerst das Maximum von F auf $M = \{x \mid x \geqq 0\}$. Mit $\alpha = 2$ und $a = \frac{1}{2}l$ ergibt sich aus den Sätzen 4 und 5, daß der größtmögliche Wert von F für $\bar{x} = \left(\frac{l}{4}\right)^{\frac{1}{2-1}} = \frac{l}{4}$ angenommen wird.

Wegen $\frac{l}{4} \in \left\{x \mid 0 \leqq \bar{x} = \frac{l}{2}\right\}$ ist nach Satz 8 $\bar{x}$ auch Maximumstelle von F auf $\left\{x \mid 0 \leqq x \leqq \frac{l}{2}\right\}$. Es folgt $\bar{y} = \frac{l}{2} - \frac{l}{4} = \bar{x}$.

Das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ist das Quadrat der Seitenlänge $\frac{l}{4}$.

Die Aufgabe erinnert etwas an eine Episode aus L. Tolstois Erzählung „Wieviel Erde braucht der Mensch", siehe [1]. In dieser Erzählung will Pachom von den Baschkiren Land kaufen. Er soll für 1000 Rubel soviel Land erhalten, wie er an einem Tag zu Fuß umgehen kann, wobei Endpunkt und Ausgangspunkt zusammenfallen müssen. Pachom schreitet ein Viereck ab (aber kein Rechteck!).

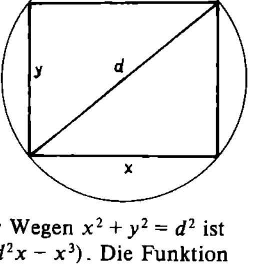
Da er seine Kräfte nicht richtig einschätzt, gelangt er nur mit derartigen Anstrengungen vor Sonnenuntergang am Startpunkt an, daß er verstirbt. Die Aufgabe L. Tolstois ist weit allgemeiner als unser Problem, weil die Klasse der zulässigen Figuren (Vergleichselemente) viel größer ist als die Klasse der Rechtecke. Sein Land kann auch krummlinig begrenzt sein, was in Beispiel 1 ausgeschlossen ist. Es könnte in der Erzählung auch die Gestalt eines Dreiecks, Trapezes oder Fünfecks haben.

Aufgabe: Gesucht ist ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt, wenn die Summe von drei Seiten dieses Rechtecks 100 m beträgt.

Lösung: Den größten Flächeninhalt erhält man, wenn die Seiten 25 m und 50 m lang sind, er beträgt 1250 m².

Beispiel 2: Der Querschnitt eines Baumes sei (idealisiert) überall ein Kreis vom Durchmesser d. Aus dem Baum soll ein Balken möglichst großer Festigkeit ausgesägt werden. Die Festigkeit F ist direkt proportional zum Produkt aus der Breite und dem Quadrat der Höhe des Balkens. Die physikalische Erkenntnis läßt sich so formulieren: Es gibt eine Materialkonstante $k > 0$, so daß $F = k \cdot x \cdot y^2$ ist.

Bild 6



Lösung: Wegen $x^2 + y^2 = d^2$ ist $F = k(d^2x - x^3)$. Die Funktion $f(x) = d^2x - x^3$ nimmt ihr Maximum auf $\{x \mid x \geqq 0\}$ bei $\bar{x} = \left(\frac{d^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ an, es ist $\bar{x} = \frac{d}{3}\sqrt{3}$, und an dieser Stelle nimmt F auch das Maximum auf $\{x \mid x \geqq 0\}$ und folglich auch auf $\{x \mid 0 \leqq x \leqq d\}$ an.

Aufgabe: In ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und spitzen Winkeln α, β soll ein Rechteck mit Seiten x, y eingezeichnet werden, dessen eine Seite auf der Dreiecksseite c liegt und von dem zwei Eckpunkte die Seiten a bzw. b berühren. h bezeichne die Höhe auf c. Die Zeichnung ist so auszuführen, daß ein Rechteck größter Fläche entsteht!

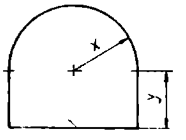
Lösung: Das flächenmäßig größte Rechteck wird bei $\bar{x} = \frac{c}{2}$, $\bar{y} = \frac{h}{2}$ erreicht. Die Analyse des Problems liefert zugleich eine Konstruktionsvorschrift.

Beispiel 3: Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang U dieser Figur sei vorgegeben. Bei welchem Radius x wird die Fläche am größten? (Größte Fläche bei konstantem Materialeinsatz für die Tunnelwandung.)

Lösung: Es ist $F = \frac{\pi}{2}x^2 + 2xy$ und $U = 2x + 2y + \pi x$. Es folgt $F = xU - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x^2$. Die Einschränkungen für x sind $0 \leqq x \leqq \frac{U}{2+\pi}$.

Eine Scheitelpunktbestimmung der quadratischen Funktion zeigt bereits, daß die Tunnelfläche für $\bar{x} = \bar{y} = \frac{U}{4+\pi}$ bei gegebenem Umfang am größten wird.

Bild 7

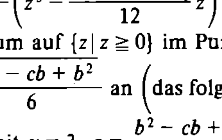


Beispiel 4: Jetzt sind wir gerüstet, um unserem Phantasiehelden Epsilon helfen zu können. Es ging ihm um die Bestimmung des Maximums der Funktion

$$V(x) = 4\left(x^3 - \frac{c+b}{2}x^2 + \frac{cb}{4}x\right)$$

bezüglich $0 \leqq x \leqq \min\left\{\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right\}$.

Bild 8



Lösung: Durch eine geeignete Substitution kann man den quadratischen Term beseitigen und unsere Sätze anwenden. Das führt zu der folgenden Betrachtung. Die Funktion

$h(z) = -\left(z^3 - \frac{c^2 - cb + b^2}{12}z\right)$ nimmt ihr Maximum auf $\{z \mid z \geqq 0\}$ im Punkt

$\bar{z} = \frac{\sqrt{c^2 - cb + b^2}}{6}$ an $\left(\text{das folgt aus Satz 4 mit } \alpha = 3,\ a = \frac{b^2 - cb + c^2}{12} > 0\right)$.

Nun überlegen wir uns anhand des Funktionsverlaufes von h (siehe Bild 2), daß $h(z) \leqq 0$ für

$0 \geqq z \geqq -\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{12}}$ und

$h(\bar{z}) = \frac{b^2 - bc + c^2}{12} > 0$ ist.

Also nimmt h auch das Maximum auf

$$I = \left\{ z \mid z \geqq -\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{12}} \right\}$$

im Punkt $\bar{z}$ und nur im Punkt $\bar{z}$ an.

Setze $x = \frac{b+c}{6} - z$, dadurch ist eine Funktion g mit $x = g(z)$ erklärt. g ist eine eineindeutige Abbildung von I auf die Menge

$$M = \left\{ x \mid x \leqq \frac{b+c}{6} + \sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{12}} \right\}.$$

Betrachte nun

$$f(x) = x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + \frac{bc}{4}x.$$

Offenbar ist $h(z) = f(g(z))$.

Wir zeigen jetzt, daß

$M \supseteq \left\{ x \mid 0 \leqq x \leqq \frac{c}{2} \right\}$ gilt, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \geqq c$ voraussetzen. Es ist dann nämlich

$0 \geqq c^2 - b^2 \geqq c^2 - cb - 2b^2$, also

$\frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}bc - \frac{2}{3}b^2 \leqq 0$ und

$b^2 - bc + c^2 \geqq \frac{4c^2 - 4bc + b^2}{3}$. Es folgt

$\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqq \frac{|2c - b|}{\sqrt{3}}$ und

$\frac{\sqrt{b^2 - bc + c^2}}{2 \cdot \sqrt{3}} \geqq \frac{|2c - b|}{6}$ sowie

$$\frac{b+c}{6} + \sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{12}} \geqq \frac{2c - b}{6} + \frac{b+c}{6} = \frac{c}{2}.$$

Nach Satz 9 nimmt f das Maximum auf M in $\bar{x} = \frac{b+c}{6} - \bar{z}$ an. Man erhält

$6\bar{x} = b + c - \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ und überzeugt sich von der Beziehung $0 < \bar{x} < \frac{c}{2}$.

Folglich ist $\bar{x}$ auch die (einzige) Maximumstelle von V auf $\left\{ x \mid 0 \leqq x \leqq \frac{c}{2} \right\}$.

Spezialfälle:

$b = c \quad \bar{x} = \frac{1}{6}(2b - \sqrt{b^2}) = \frac{b}{6}$, d. h.

$\bar{x} = (2 - \sqrt{1}) \cdot \frac{c}{6}$

$b = 2c \quad \bar{x} = (3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{c}{6}$

$b = 3c \quad \bar{x} = (4 - \sqrt{7}) \cdot \frac{c}{6}$

$b = 4c \quad \bar{x} = (5 - \sqrt{13}) \cdot \frac{c}{6}$

$b = 5c \quad \bar{x} = (6 - \sqrt{21}) \cdot \frac{c}{6}$

$b = 6c \quad \bar{x} = (7 - \sqrt{31}) \cdot \frac{c}{6}$

Ist insbesondere $b = 14$ und $c = 7$ (siehe *alpha* 2/1988), so erhält man mit dem SR 1 den Zahlenwert $x = 1{,}479\,274\,1$.

Beispiel 5: Man gebe die Maße eines oben offenen Bassins mit quadratischer Bodenfläche (und senkrecht stehenden Wänden) an, so daß bei vorgegebenem Volumen V die Gesamtfläche der Wände und des Bodens möglichst klein wird (minimaler Materialverbrauch!).

Lösung: Die Seitenlänge des Quadrates sei b und die Höhe des Bassins h. Dann gilt für das Volumen $V = b^2h$ und für die Fläche $F = 4bh + b^2$. Ersetze $h = \frac{V}{b^2}$ in der Formel für F und substituiere $z = b^2$. Man erhält

$F = 4V\left(z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4V}z\right)$. Nach Satz 7 besitzt F genau eine Minimumstelle auf $I = \{z \mid z \geqq 0\}$, nämlich

$\underline{z} = \left(\frac{2}{4V}\right)^{-\frac{2}{3}}$. Mit $g(z) = \sqrt{z}$ (eineindeutig von I auf $M = I$) folgt gemäß Satz 9, daß

$\underline{b} = \left(\frac{1}{2V}\right)^{-\frac{1}{3}}$ die (einzige) Minimumstelle von V auf I ist. Folglich wird die Gesamtfläche der Wände und des Bodens minimal für $\underline{b} = \sqrt[3]{2V}$ und $\underline{h} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

Aufgabe: Durch einen Punkt mit den Koordinaten $b > 0$, $c > 0$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Gerade so zu legen, daß aus dem positiven Quadranten ein Dreieck kleinstmöglicher Fläche herausgeschnitten wird!

Lösung: Die gesuchte Dreiecksfläche ist

$F = \frac{b}{2} \cdot \frac{x^2}{x - c}$, man setze $z = \frac{1}{x - c}$ bzw. $x = c + z^{-1}$ und $g(z) = c + x^{-1}$.

Transformiere $f(x) = \frac{x^2}{x - c}$ in $h(z) = 2c + z^{-1} + c^2 \cdot z$ und wende unsere Sätze an! Die Gerade ist durch die Punkte $(2c, 0)$ und $(0, 2b)$ zu zeichnen!

Aufgabe: In einen geraden Kreiskegel vom Radius R und der Höhe h ist ein auf der Grundfläche stehender Zylinder mit größtem Volumen einbeschrieben.
Welche Maße hat er?

Aufgabe: Aus einem Kreissektor vom Radius R soll ein Trichter gebaut werden. Bei welchem Zentralwinkel γ des Sektors hat er das größte Volumen?

Lösung: Man verwende die Substitution $z^2 = 4\pi^2 - \gamma^2$, der gesuchte Zentralwinkel ist $\bar{\gamma} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$.

Aufgabe: Bestimme den größten Wert der Funktion $y(x) = \sin x \cdot \sin 2x$.

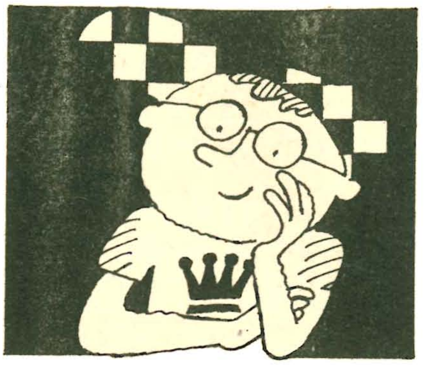
Lösung: Beachte $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ersetze $z = \cos x$ auf einem geeignetem Intervall und überprüfe die Anwendbarkeit der Sätze. Eine Minimumstelle ist durch $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gekennzeichnet.

W. Schmidt

Literatur:

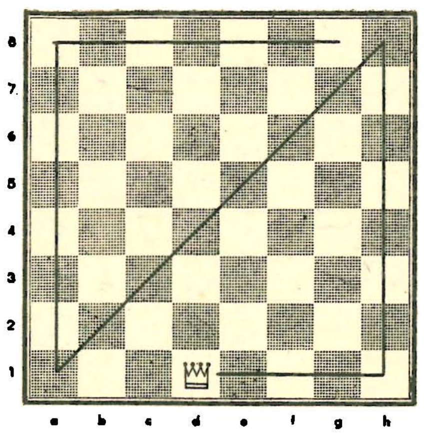
[1] J. I. Perelman.
Unterhaltsame Geometrie.
Volk und Wissen Berlin. 1963

[2] П. П. Коровкин. Неравенства. Популярные лекции по математике. Москва 1974



Fünfzügige Damenwanderung

Beim Schachspiel kann die Dame von ihrem Standfeld aus waagerecht, senkrecht oder diagonal beliebig weit über alle unbesetzten Felder ziehen. Aufgrund ihrer großen Beweglichkeit ist sie neben dem König die wertvollste Figur auf dem Schachbrett und Ausgangspunkt für eine Fülle von schachmathematischen Knobeleien. Aus der Vielfalt solcher Knobelaufgaben sei eine Aufgabe des englischen Rätselautors Henry E. Dudeney zu lösen. Die Dame soll in 5 Zügen vom Ausgangsfeld d1 einen möglichst langen Weg auf dem Schachbrett zurücklegen, ohne ein Feld zweimal berührt zu haben. Das abgebildete Diagramm zeigt eine sehr gute Lösung.



1. Zug:	Dd1-h1	4 Felder
2. Zug:	Dh1-h8	7 Felder
3. Zug:	Dh8-a1	$7 \cdot \sqrt{2}$ Felder
4. Zug:	Da1-a8	7 Felder
5. Zug:	Da8-g8	6 Felder
		$\approx 33{,}898$

Die Seitenlänge eines quadratischen Schachbrettfeldes wird mit 1 angenommen. Für ein diagonal überquertes Feld ergibt sich dabei die zurückgelegte Strecke aus Seitenlänge $\cdot \sqrt{2}$, also ein gerundeter Wert von 1,414. Fünf diagonal überquerte Felder bilden dadurch eine größere Wegstrecke als sieben waagerecht oder senkrecht überquerte Felder.

$5 \cdot 1{,}414 = 7{,}07 > 7 \cdot 1 = 7$

Die gezeigte Lösung ist noch nicht optimal. Wie muß der Weg der Dame verlaufen, damit die Gesamtlänge der 5 Züge ein Maximum ist?

H. Rüdiger

Die Art, wie der vatikanische Obelisk transportiert wurde

Beim Verlag für Bauwesen, Berlin, erschien 1987 in einer dem behandelten Thema entsprechend würdigen Aufmachung als fotomechanischer Nachdruck die zweibändige Erstauflage der von Domenico Fontana 1590 verfaßten Originalschrift „Die Art, wie der vatikanische Obelisk transportiert wurde“ als Teilereprint (Band 1) mit dazugehöriger Übersetzung sowie Kommentar (Band 2).
(Bestell-Nr.: 562 376 2, Preis: 120,– M)
Dargestellt wird die herausragende technische Glanzleistung des von 1543 bis 1607 in der Amtszeit des Papstes Sixtus V. schaffenden Baumeisters und Architekten Domenico Fontana, auf den die Hebung eines Obelisken (vierkantiger, freistehender Eckpfeiler, der sich nach oben hin stark verjüngt) aus neun Metern Tiefe (Aufschüttungen der Jahrhunderte), dessen Transport vom ursprünglichen Standort (südlich der Peterskirche) zum heutigen und seine Errichtung auf dem Petersplatz in Rom im Jahre 1586 zurückzuführen sind.
In der Übersetzung und in den Kommentaren des 2. Bandes machen namhafte Kunsthistoriker sowie Technikwissenschaftler deutlich, daß Fontanas Verdienst nicht allein nur darin besteht, ein solches Unternehmen der Errichtung dieses kolossalen Monuments gewagt und erfolgreich beendet zu haben, das etwa 1 200 Jahre zuvor nicht mehr ausgeführt worden war und welches ein gerüttelt Maß an Mut und Zuversicht verlangte, weil ein Fehlschlag für die kirchlichen Auftraggeber unverzeihlich und für den Bauherren verhängnisvoll gewesen wäre. Ihm zum Ruhm gereicht vielmehr die Tatsache, eine Methode entwickelt zu haben, die es gestattete, den verschütteten Obelisken zur damaligen Zeit bereits annähernd exakt zu messen und zu wägen sowie bei Auswahl und Dimensionierung der erforderlichen Hebe- und Transportzeuge (einschließlich Bau einer entsprechenden Transporteinrichtung) sich nicht allein auf seine praktischen Erfahrungen verlassen zu haben, sondern z. B. die über jeden der eingesetzten Göpel wirkenden realen Lasten und Kräfte rechnerisch bestimmt zu haben. D. Fontana bewies darüber hinaus ein außergewöhnliches statisches Gespür und zeichnete sich des weiteren bei der Koordinierung und Synchronisation der Muskelkraft von über 900 eingesetzten Menschen sowie 140 Pferden als Antrieb für die 40 Göpel als ein hervorragender Organisator aus. Seine Methode zur Hebung und zum Transport des Obelisken war der damaligen Zeit bereits weit voraus und wurde als eine beispielgebende technische Leistung geachtet und noch über 200 Jahre später nahezu unverändert zur Anwendung gebracht. Nachfolgende Abbildung soll einen Eindruck vom Ausmaß des gigantischen Unternehmens vermitteln.
Erst durch die Herstellung von Stahl als Werkstoff und die Nutzbarmachung anderer Energiequellen und neuer Erkenntnisse der sich entwickelnden Ingenieurwissenschaften gehörte sie schließlich der Vergangenheit an. Dennoch gilt sie auch heute noch als Beweis für die unerschöpfliche Vielfalt, Flexibilität und Kreativität der geistigen Leistungsfähigkeit der Menschen bei der Nutzung von Wissen, Erfahrungen und Ausnutzung von Naturgesetzmäßigkeiten. Auffallend an der Art und Weise der Beschreibung seiner Methode ist auch, daß Fontana großen Wert auf die Verwendung von eindeutigen Technikbegriffen legte und auf die Benutzung des ansonsten in dieser Zeit gebräuchlichen Latein verzichtete, um dadurch eine breitere Leserschaft zu erreichen. Beschrieben wird der technische Sachverhalt insgesamt in zeitgemäßer Form. In allen Einzelheiten erläutert werden die notwendigen Arbeitsgänge und auszuführenden Arbeitsschritte zur Hebung der verschütteten Gugliá (noch heute gebräuchliche volkstümliche Bezeichnung für den Obelisken) mit einem für die damalige Zeit kolossalem Gewicht von 327 Tonnen und zum Transport dieses obendrein sehr zerbrechlichen Körpers über eine Entfernung von 256,83 m sowie zur Errichtung und Justierung des Obelisken auf dem Petersplatz in Rom am 27. 09. 1586.

▲1▲ Bei der Errichtung des vatikanischen Obelisken in Rom im Jahre 1586 wurden über 900 Menschen, 140 Pferde, 40 Göpel sowie fünf 3,50 m lange Hebel eingesetzt, um die verschüttete Guglia zu heben und 256,83 m weit zu ihrem Standort auf dem Petersplatz zu transportieren.
Ein Göpel war dabei durchschnittlich mit je 3 Pferden und 16 Männern besetzt und brachte eine Zugkraft von 70 kN auf. Berechne die Größe der beim Transport insgesamt zu verrichtenden mechanischen Arbeit unter Berücksichtigung eines an jeder Winde anfallenden Reibungsverlustes von 30 %!

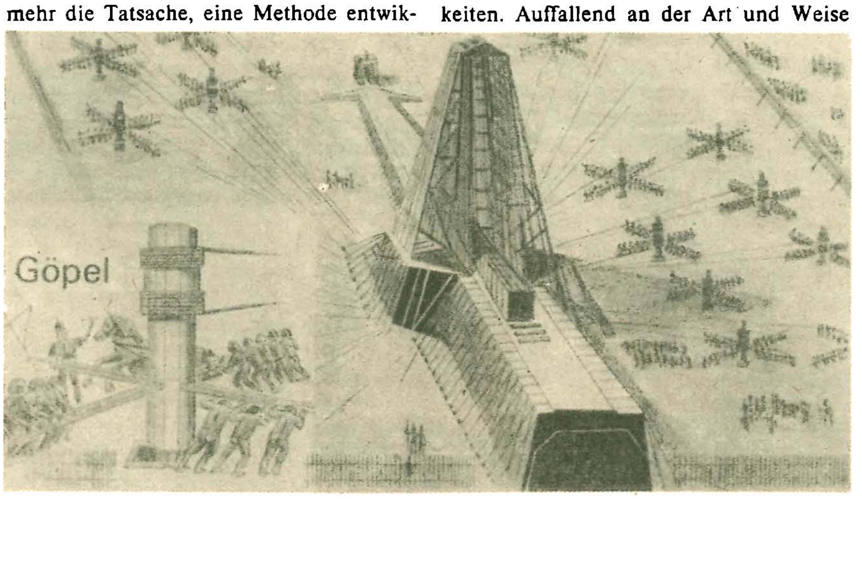
▲2▲ Für den Bau einer geeigneten Transporteinrichtung mußte Fontana den Obelisken (einen pyramidenförmigen Körper mit quadratischer Grundfläche) exakt bemessen und wägen. Durch die Messung erhielt er die folgenden Angaben:

	(Original-Maße)	(SI-Einheiten)
Breite am Fuß	$12\frac{1}{12}$ palmi	2,70 m
Breite am Ansatz der Pyramidenspitze	$8\frac{1}{12}$ palmi	1,80 m
Höhe des Obelisken (Stumpf + Spitze)	$113\frac{1}{2}$ palmi	25,35 m

Ermittle das Volumen dieses Pyramidenstumpfes!

▲3▲ Hinzu kam noch die Spitze der Guglia, die ein Volumen von 130 und $\frac{49}{72}$ palmi cubi (1 palmo cubo entspricht nach dem SI-Einheitensystem 0,011 138 m³) besaß.
D. Fontana entnahm des weiteren der verschüttgegangenen Guglia vor ihrer Hebung einen Probewürfel, bestimmte dessen Dichte von $\frac{86\ \text{Libro}}{1\ \text{palmo cubi}}$ (entspricht nach dem SI-Einheitensystem $256\,\frac{\text{Tonnen}}{\text{m}^3}$) und schloß daraus auf die Gesamtmasse des Obelisken.
Berechne die Gesamtmasse des Obelisken!

H.-J. Kühne



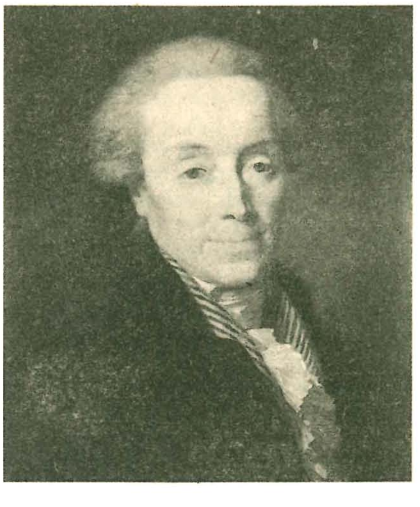
Hebegerüst zur Bergung des Obelisken

Friedrich Wilhelm von Erdmannsdorff, der Baumeister von Wörlitz

Mit diesem Beitrag möchten wir auch im Jahr 1989 unsere Serie „Auf den Spuren von Mathematikern" fortsetzen, die wir im Heft 1/84 begannen.
Dr. Schmidt und Dr. Schreiber aus Greifswald, euch sicher gut bekannt, arbeiten an einem Buchprojekt darüber. Schön wäre, wenn ihr weiter helfen würdet. Schaut euch doch in eurem Heimatbezirk genauer nach „Spuren von Mathematikern" um und vergeßt dabei nicht, daß die Mathematik vielfältig mit anderen Wissenschaften verbunden ist. Wir warten auf eure Post

Alphons

Im Jahre 1986 begingen wir den 250. Geburtstag von F. W. v. Erdmannsdorff, der am 18. Mai 1736 in Dresden geboren wurde.
Er war der Sohn eines königlichen Hausmarschalls (Vorsteher der Dienerschaft eines Hauses), verwaiste aber schon in jungen Jahren. Seine Kindheit verbrachte Friedrich Wilhelm in Dresden und nahm die spätbarocke Kultur in sich auf. Ab 1750 besuchte er hier die Ritterakademie. An dieser Ausbildungsstätte für junge Adlige wurden auch ingenieurtechnische Fähigkeiten geschult. Diese beiden Quellen erster Bildung bestimmten wohl die Wahl des jungen Studenten (ab 1754 in Wittenberg) für die Studienfächer Mathematik und Geschichte, aber auch andere, u. a. philosophische Vorlesungen besuchte er. Er erweiterte insbesondere sein theoretisches Wissen und erkannte die besondere Rolle der Mathematik zur Lösung vielfältigster praktischer Aufgaben.



Etwa im Jahre 1757 lernte F. W. v. Erdmannsdorff den Fürsten Franz von Anhalt-Dessau kennen, der den Ideen des „aufgeklärten Absolutismus", also der Verbindung von Fürstenregierung und bürgerlichen Reformen, folgte. Zu diesem Projekt fanden sich der Fürst und v. Erdmannsdorff zusammen. In den ersten Jahren wurden Pläne geschmiedet, über Kunst und Wissenschaft debattiert, Möglichkeiten der Verbesserung des Lebens der Untertanen erwogen. Dazu wurden auch mehrere Reisen unternommen.
Insbesondere zu Architekturstudien fuhr v. Erdmannsdorff 1761 nach Italien; 1763 besuchten er und der Fürst England und die Niederlande und lernten dort den „Englischen Garten" kennen, einen der Natur nachgebildeten Park, der mit dem „Französischen Garten" nichts mehr gemein hatte. Der „Englische Garten" entsprach den Ideen der bürgerlichen Aufklärung im Gegensatz zu den Ziergärten der Monarchen und zeigte das soziale Engagement seiner Schöpfer. Er brach mit der „unnatürlichen" Regelmäßigkeit und Geometrie des „Französischen Gartens". In England lernten sie auch Beispiele des englischen Klassizismus kennen. Dieser entsprach dem selbstbewußten Auftreten des englischen Bürgertums, seinen progressiven Ideen und seiner sozialen Kraft. Hier fanden sie Vorbilder für ihr Schaffen und Wirken und v. Erdmannsdorff auch die Aufgaben, zu deren Lösung sein mathematisch-naturwissenschaftliches Wissen und seine aufklärerischen Ideen einzusetzen waren.
Mit dem Jahre 1765 begann das Schaffen F. W. v. Erdmannsdorffs als Architekt. Der „Wörlitzer Park" wurde entworfen und begonnen zu bauen (beendet 1810). Ab 1765 entstanden verschiedene Bauten im Park (fast alle sind von v. Erdmannsdorff) wie auch die erste Eisenbrücke auf dem europäischen Festland. Der Wörlitzer Park fand Widerhall in ganz Europa, er bildet mit seinen Bauten eine Wende der Architekturentwicklung in Europa.
1769 begann der Bau des Wörlitzer Schlosses (beendet 1773). Dieses Schloß ist ein zweigeschossiger Backsteinbau in streng geometrischer Ausführung. Mit dieser Architektur der einfachen Formen und Proportionen der Bauelemente zueinander nach klassischem Vorbild wurde v. Erdmannsdorff zum Begründer eines neuen

Stils, des Klassizismus. Größter Wert wurde darauf gelegt, daß alles streng und einfach, aber gleichzeitig auch fein und vornehm ist. v. Erdmannsdorff berechnete die Verhältnisse der Elemente zueinander mit größter Sorgfalt. Selbst in den Einzelheiten bewies er sicheres Gefühl für Maß und Form. (Auch bei anderen Gebäuden sind neben dem ästhetischen Wert die Verhältnisse von Baukörper und Dach, Fläche und Öffnung des Mauerwerks, wie auch die Proportionen in Höhe, Breite und Tiefe zu beachten. Gleiches ist in der Lage der Achsen und Blickwinkel wie auch in der Anlage der Wege und der Verteilung der Einzelobjekte des Wörlitzer Parks zu finden.) 1786 gestaltete er Räume von Sanssouci und des Berliner Schlosses, kehrte aber nach Dessau zurück, baute 1793 die Orangerie und 1798 das Theater in Dessau (1855 abgebrannt). Dazwischen wurde 1794 das Magdeburger Theater nach seinen Plänen gebaut.
Am 9. 3. 1800 starb Friedrich Wilhelm von Erdmannsdorff in Dessau und wurde auf dem von ihm geschaffenen Friedhof begraben.
Auf der Grundlage mathematisch-naturwissenschaftlicher und aufklärerisch-humanistischer Bildung bemühte er sich um die Veränderung des menschlichen Lebens. Er hatte aktiven Anteil an der Entwicklung von Theater, Musik und Kunst. Die Landwirtschaft wurde reformiert, die Buch- und Zeitschriftenproduktion erreichte eine Blüte, die Steuern wurden gemindert. Vor allem aber wurde das Schulwesen reformiert und vorbildlich für Deutschland; neben der Einheitsschule gab es Lehrerseminare, auf der Grundlage einer von v. Erdmannsdorff erbauten Volkssportstätte wurde die Turnkunst begründet. So erblühte in Dessau-Wörlitz ein Kulturzentrum des 18. Jahrhunderts, woran Friedrich Wilhelm von Erdmannsdorff entscheidenden Anteil hatte.

D. Bauke

Aufgaben zu Erdmannsdorff

▲1▲ In einem Park sollen n Bauwerke errichtet werden.
a) Wie viele Wege sind zu planen, wenn alle Bauwerke durch verschiedene Wege verbunden sein sollen?
b) Mit wieviel Kreuzungen kommt man bei $n = 4$; 5; 6 bzw. 7 Bauwerken aus?

▲2▲ (E. I. Ignatjew) Lege aus Stäbchen einen griechischen Tempel! Aufgabe: Lege 4 Stäbchen so um, daß 15 Quadrate entstehen!

▲3▲ Ein Garten (konvexe Fläche) wird durch n Wege (Geraden), die nicht zusammenfallen, in mindestens $n + 1$ Teilflächen zerlegt. In wieviel Teilflächen kann die Ausgangsfläche maximal zerlegt werden?

Knifflige Sachen per Post

▲1▲ Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft (SSG) an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der SSG.
Berechnet, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

▲2▲ In der Zahl ∗378∗ sind anstelle der beiden ∗ Ziffern zu setzen, so daß die entstandene Zahl durch 72 teilbar ist.
Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

▲3▲ Ein Klempner fertigt einen würfelförmigen, oben offenen Blechbehälter an, der 50 l Wasser faßt.
Wieviel m^2 Blech werden zur Anfertigung gebraucht? (Von Überlappungen und Verschnitt soll abgesehen werden.)

▲4▲ Beweise, daß der halbe Umfang eines beliebigen Dreiecks stets größer ist als jede seiner Seiten!

▲5▲ Die bei der Trocknung der Weintrauben erhaltenen Rosinen stellen 32 % der Trauben dar. Aus welcher Masse Trauben erhält man 2 kg Rosinen?

▲6▲ Untersuche, ob die Zahlen
2 438 195 760
3 785 942 160
4 753 869 120
4 876 391 520
durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 oder 18 ohne Rest teilbar sind!

▲7▲ Gibt es eine Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 1 ergibt, bei der Division durch 4 den Rest 2, bei der Division durch 5 den Rest 3, bei der Division durch 6 den Rest 4?

▲8▲ Berechne!

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0{,}228$$
$$:\left[\left(1{,}5291-\frac{14{,}53662}{3-0{,}095}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right]$$

▲9▲ Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.
Berechne das jeweilige Verhältnis der Kantenlängen, der Oberflächen und der Rauminhalte dieser beiden Würfel!
Verallgemeinere!

▲10▲ Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge 4 cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers!

Diese Aufgaben stammen aus dem Arbeitsmaterial des Bezirksklubs Junger Mathematiker Halle. Thomas Miehe, ein Mitglied, sandte sie ein. Wir baten ihn, über seine Tätigkeit im Klub zu berichten.

Ich bin seit der 7. Klasse Mitglied des Bezirksklubs Junger Mathematiker. Dieser Klub hat seinen Sitz in der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Der Bezirksklub ist ein Korrespondenzzirkel, dessen Arbeit wie folgt läuft:
Gemeinsam mit anderen Schülern des Bezirkes wurde ich vom Klub ausgewählt, mit dem Ziel, unsere mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Ich erhielt am Schulbeginn der 7. Klasse einen Brief, in dem ich zum Mitglied des Klubs ernannt wurde und noch Arbeitsmaterial. Es umfaßt 100 Aufgaben, unterteilt in sechs Komplexe. Jeden Monat mußte ich dann mindestens drei Aufgaben lösen, jedesmal aus einem anderen Komplex und die Lösungen dem Bezirksklub schicken. Die Aufgaben sind verschiedenartig, so z. B. sind Logik-Aufgaben, Aufgaben der elementaren Zahlentheorie sowie Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Planimetrie enthalten.
Die Lösungen werden in Halle kontrolliert, eventuell berichtigt und dem Schüler mit einem Vermerk zurückgeschickt. Ich konnte schon sehr gute Ergebnisse vorweisen. Haben wir alle Aufgaben gelöst, treffen wir uns alle im Mai zu einer Auswertung. Dort besprechen wir unsere erreichten Ergebnisse. Außerdem lernen wir dort weitere mathematische Probleme kennen und beschäftigen uns auch mit dem Computer.

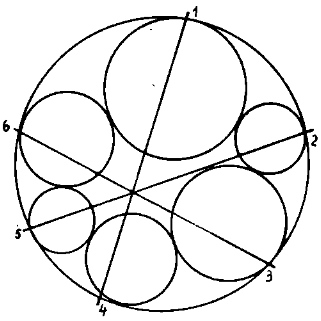
Dieses Jahr geht es weiter und ich hoffe, daß ich wieder so viel Freude am Lösen der Aufgaben habe wie voriges Jahr.

Th. Miehe

Eine Eigenschaft von sieben Kreisen

Erkennst du nur durch Betrachten des Bildes 1, von welcher geometrischen Eigenschaft hier ein Beispiel gegeben wird?

Bild 1

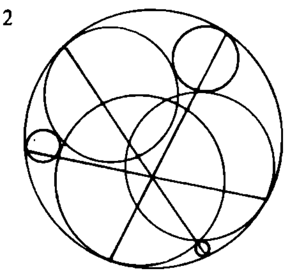


Einer der sieben Kreise spielt eine besondere Rolle. Wir nennen ihn den Hauptkreis. Die anderen sechs berühren alle den Hauptkreis, außerdem bilden die sechs eine geschlossene Kette von sechs aufeinanderfolgenden, sich berührenden Kreisen. Numerieren wir die Berührungspunkte mit dem Hauptkreis von 1 bis 6, und ziehen wir die Geraden 1–4, 2–5 und 3–6, dann gehen diese drei Strecken alle durch den gleichen Punkt!
Wir finden, daß das eine beachtenswerte Eigenschaft ist. Das Überraschendste daran ist vielleicht noch der Fakt, daß diese Eigenschaft erst 1971 zum erstenmal erkannt wurde (C. J. A. Evelyn/G. B. Money-Coutts/J. A. Tyrell: Die Sieben-Kreise-Theorie und andere neue Theorien; 1974).
Und das, obwohl diese Art einfacher Planimetrie doch schon Tausende Jahre durch sehr viele untersucht wurde. Sollte es dann vielleicht doch noch mehr nicht entdeckte Eigenschaften geben, Eigenschaften, die ein Laie mehr oder weniger zufällig finden könnte?

Ein Beispiel wovon?

Das Bild 1 stellt nur ein Beispiel der beschriebenen Eigenschaft dar, es gibt auch andere Fälle. Wenn man jetzt die anderen Figuren betrachtet, bekommt man eine Vorstellung davon, was noch alles möglich ist.
Bild 1 ist die einfachste, weil die sechs „Ketten-Kreise" sich nur berühren und nirgends überschneiden. Daß Überschneidungen auch vorkommen können, sieht man in Bild 2. Die Kette von sechs sich berührenden Kreisen fällt nicht sofort ins Auge, ist aber bei näherer Betrachtung deutlich zu sehen.

Bild 2



Außerhalb des Hauptkreises

Die Kreiskette kann ebensogut die Außenseite des Hauptkreises berühren (Bild 3) und gemischte Varianten sind in den Bildern 4, 5 und 6 abgebildet.

Bild 3

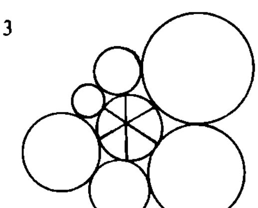


Bild 4

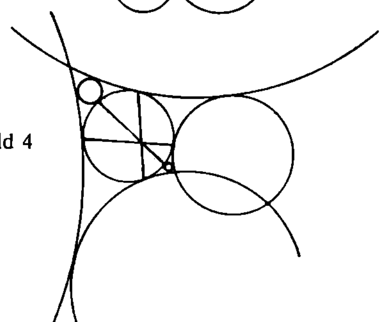


Bild 5

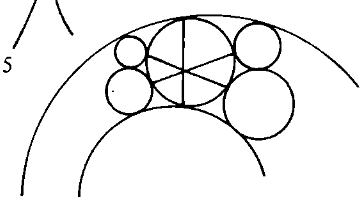
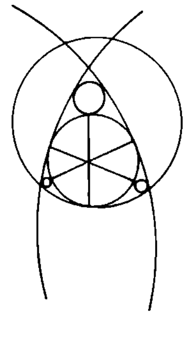


Bild 6



Die größten Kreise sind nur teilweise gezeichnet. Einige sind so groß geworden, daß sie bald den Grenzfall der Geraden erreicht haben. (Kreisdurchmesser wird unendlich groß, daraus folgt, daß der Kreisumfang zur Geraden wird.) Sie liegen dann mit der Kreisfläche vom Hauptkreis sowohl nach innen als auch nach außen gekehrt, um den Hauptkreis. Auch der Grenzfall selbst, in dem der Mittelpunkt des Kreises „im Unendlichen" liegt, und der Umfang eine Gerade ist, darf nicht fehlen (Bild 7).

Bild 7

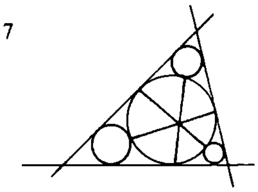
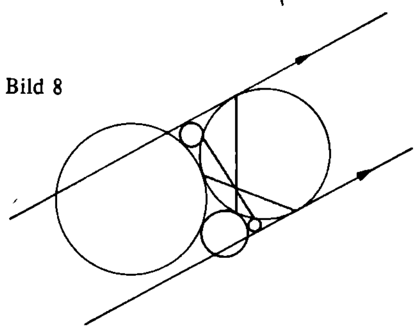


Bild 8



Bei Bild 8 ist es noch ausgefallener. Dort berühren sich zwei solcher Geraden-Kreise. Wir können aber diesen Berührungspunkt selbst nicht zeichnen, da er auch unendlich weit weg liegt. Die Eigenschaft der drei Verbindungslinien um Hauptkreis gilt noch immer!

Noch verwickelter

Auch in den Bildern 9, 10 und 11 ist noch immer die Sprache von einer Kette von sechs Kreisen, jeder berührt zwei Nachbarn und den Hauptkreis. Es wird deutlich, daß der gemeinsame Schnittpunkt der drei Verbindungslinien auch einmal außerhalb des Hauptkreises liegen kann.

Bild 9

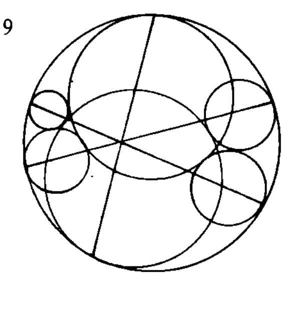


Bild 10

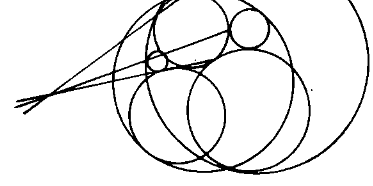


Bild 11

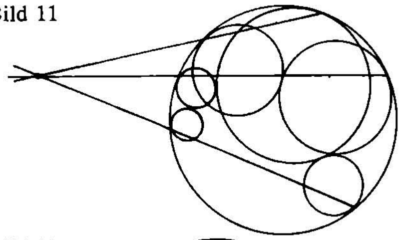
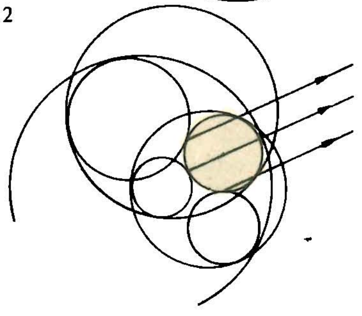


Bild 12



Im Fall von Bild 12, wo die Verbindungslinien zu drei Parallelen geworden sind, liegt dieser Schnittpunkt im Unendlichen.

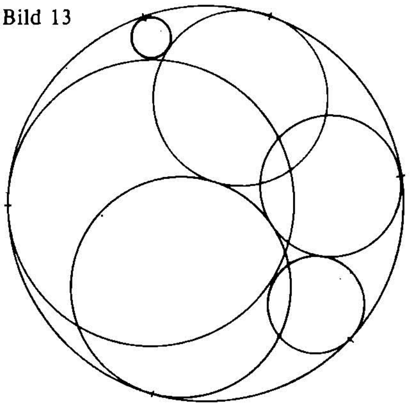
Hat es Sinn, nach einem Beweis zu suchen?

Ich kann mich den Lesern anschließen, die auf diese Frage reagieren mit: Ist das jetzt nötig? Die Eigenschaft selbst ist beachtenswert und fesselnd; alle Varianten lassen deutlich erkennen, daß es tatsächlich immer zutrifft. Schon zwölf mal! Verzichten wir also an dieser Stelle darauf.

Oder ... trifft Bild 13 nicht zu?

Zum Schluß eine kleine Zeichenaufgabe. Betrachte Bild 13.

Bild 13



Du siehst dort wieder einen Hauptkreis mit sechs darin befindlichen Ketten-Kreisen, wobei jeder Kreis zwei andere berührt und alle sechs den Hauptkreis. Numeriere die Berührungspunkte mit dem Hauptkreis von 1 bis 6, übereinstimmend mit der Reihenfolge der Kreise in der Kette. Wo du mit 1 beginnst, und in welcher Richtung, tut nichts zur Sache (das war auch in den vorangegangenen Figuren nicht wichtig). Verbinde jetzt wieder 1 mit 4, 2 mit 5 und 3 mit 6 und suche den gemeinsamen Schnittpunkt... Probier das auch mit den Bildern 14 und 15.

Bild 14

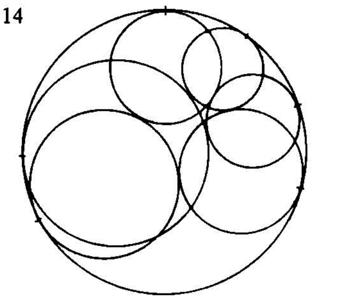
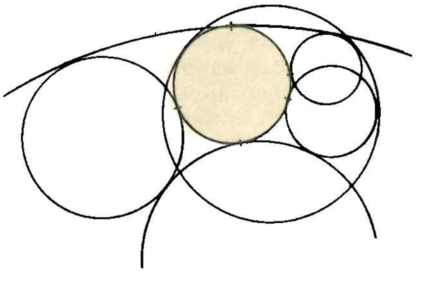


Bild 15



H. Pot

Eine Übersetzung aus der Niederländischen Mathematischen Schülerzeitschrift „Pythagoras".

Rund um die Zahl 1989

▲1▲ In einem Quader mit den Grundkanten 432 mm und 1701 mm mißt die Raumdiagonale 1989 mm. Wie hoch ist der Quader?

▲2▲ Um von der Schule zum Sportplatz zu gelangen, ist zuerst ein gerader Weg von 1836 m bis zu einer Brücke und nochmals ein gerader Weg im rechten Winkel dazu über die Brücke von 765 m zurückzulegen. Durch eine neue Brücke soll eine Direktverbindung hergestellt werden. Wie lang ist dieser neue Weg? Wieviel Meter Ersparnis ergeben sich?

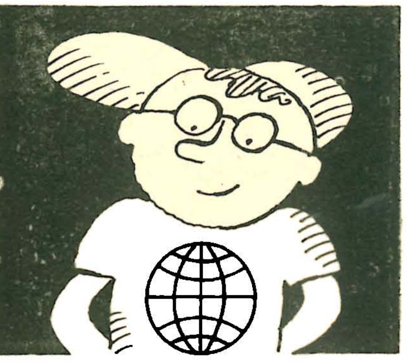
▲3▲ Wie viele verschiedene Quader mit ganzzahligen von 1 verschiedenen Kantenlängen gibt es, deren Rauminhalt 1988 cm^3 ausmacht?
Gib alle Möglichkeiten an!

▲4▲ Stelle die Jahreszahl 1989
a) als Summe von zwei,
b) als Summe von drei,
c) als Summe von sechs,
d) als Summe von 9 natürlichen aufeinanderfolgenden Zahlen dar!

▲5▲ Die Mutter einer Familie stellt fest, daß die Summe der ganzzahligen Lebensalter ihrer vier Kinder ihrem eigenen Alter entspricht. Der Vater sagt dazu: „Wenn man die vier ganzzahligen Lebensalter der Kinder miteinander multipliziert, erhält man die Jahreszahl 1989." Wie alt ist die Mutter? Wie alt sind die Kinder?

▲6▲ Wie viele vierziffrige verschiedene Zahlen lassen sich aus den Ziffern der Jahreszahl 1989 bilden? Wie heißen sie?

H. Förg, Schwaz (Österreich)



▲1▲ We place in a box, 1987 white marbles and 7891 black marbles.
We also have 1000 black marbles outside the box. We remove two marbles from the box. If they have different colours, we put the white one back in the box. If they have the same colour, we put a black marble into the box. We continue doing this until only one marble is left. What is its colour?

aus: Parabola, Kensington

▲2▲ Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.)

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Le compteur d'une voiture indique 126 km lorsque la distance réellement parcourue est 118 km. Quelle est la distance réellement parcourue lorsque le compteur marque 550 km?

H.

▲4▲ Коля купил в буфете 3 пакетика ирисок. Витя – 2 пакетика. Когда пришел в буфет Алеша, ирисок уже не было. Друзья разделили купленные ириски поровну. Выяснилось, что Алеша должен друзьям 25 копеек. Сколько стоил пакетик ирисок и сколько Алеша должен Коле, а сколько – Вите?

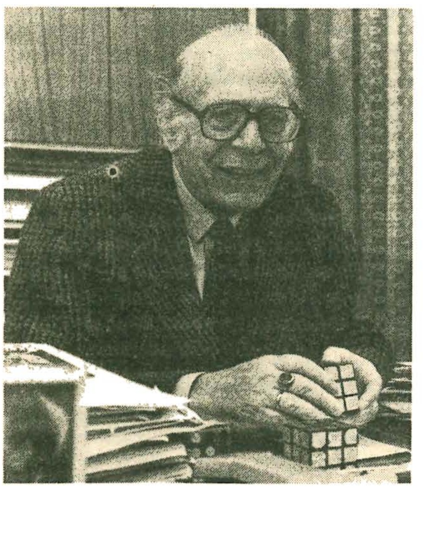
aus: Quant, Moskau

Zehnter Band im „Teubner-Archiv zur Mathematik"

Im Sommer 1860 begann der Berliner Mathematikprofessor Ernst Eduard Kummer seine berühmte Gedächtnisrede auf den verstorbenen Peter Gustav Lejeune Dirichlet mit den Worten: „Es ist nicht zehn Jahre her, daß die drei Männer, denen unser deutsches Vaterland eine neue Blüthenperiode der mathematischen Wissenschaften verdankt, Gauß, Jacobi und Dirichlet noch lebten und noch thätig arbeiteten ... Unsere Akademie hatte damals das Glück, zwei dieser hervorragenden Männer als aktive Mitglieder zu besitzen, Jacobi und Dirichlet ...". Dirichlet war 1855 als Nachfolger von Gauß nach Göttingen berufen worden. Seinen frei werdenden Berliner Lehrstuhl hatte er aber noch mit dem Kandidaten seiner Wahl besetzen können, nämlich mit Kummer. Ebenfalls 1855 war Kummers Schüler Leopold Kronecker in die preußische Metropole übergesiedelt, und schon ein Jahr später bewirkte Kummer, daß auch der talentierte Karl Weierstraß in Berlin lehren konnte. Vom erfolgreichen Wirken der drei Mathematiker Kummer, Kronecker, Weierstraß sind wesentliche Impulse für die Wissenschaftsentwicklung ausgegangen, und der heutige Leser findet authentische Informationen über den Wissenschaftsbetrieb der damaligen Zeit in dem soeben veröffentlichten Buch „Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts". Dieser zehnte Band des in Leipzig erscheinenden „Teubner-Archivs zur Mathematik" enthält fotomechanische Nachdrucke der klassischen Gedächtnisreden auf Jacobi von Dirichlet, auf Dirichlet von Kummer, auf Kummer von Hensel, auf Kronecker von Frobenius und auf Weierstraß von Hilbert. Herausgeber ist NPT Prof. Dr. H. Reichardt, Berlin. Als langjähriger Direktor an den Mathematischen Instituten der Humboldt-Universität sowie der Akademie ist Professor Reichardt der berufene Herausgeber solch eines Buches, das jedoch keineswegs nur Nachdrucke enthält. Fotos, Register und Faksimiles bisher unveröffentlichter Archivalien komplettieren die Edition. Beispielsweise kommt aus dem Berliner Universitätsarchiv Jacobis handschriftlicher Antrag aus dem Jahre 1825 auf Zulassung zur Habilitation zum Abdruck. Aus dem Akademiearchiv werden ein Brief von Dirichlet an Kummer und ein vierseitiges Schreiben von Weierstraß an Schwarz publiziert. Das Archiv der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle (Saale) stellte freundlicherweise einen von Kronecker 1884 handschriftlich ausgefüllten Fragebogen zur Verfügung, auf dem sowohl wichtige biographische Daten als auch umfangreiche Angaben zu Kroneckers Schriften vermerkt sind. Übrigens erwähnt Professor Reichardt im Vorwort zu diesem Band, daß er während seiner Berliner Semester 1928 bis 1931 wesentliche Anregungen aus den zahlentheoretischen Vorlesungen von I. Schur, dem großen Schüler und Nachfolger von G. Frobenius, empfangen hat. Bereits 1957 gab Professor Reichardt im Teubner-Verlag Leipzig einen großformatigen Gauß-Gedenkband heraus, und so ist es sicher nicht verwunderlich, daß er an dem 1984 begründeten „Teubner-Archiv zur Mathematik" von Beginn an maßgeblich mitwirkt:

„Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt" hieß der erste Titel der neuen Reihe. Diese Schrift wird vom renommierten „Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete", einer international führenden Rezensionszeitschrift, in der regelmäßig Neuerscheinungen aus aller Welt besprochen werden, als ein Buch charakterisiert, welches „in hervorragender Weise zur Rückbesinnung auf die Quellen der modernen Mathematik anregt". Die „Internationalen Mathematischen Nachrichten" aus Wien sprechen von einer Edition, die „in keiner wissenschaftlichen Bibliothek fehlen sollte". „wissenschaft und fortschritt" hebt hervor, daß im neuverfaßten kommentierenden Anhang klassische Arbeiten „historisch eingeordnet und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Geometrie gewürdigt werden". Thematisch eng verwandt mit diesen differentialgeometrischen Beiträgen von Gauß, Riemann und Minkowski sind die im vierten Archiv-Band zusammengestellten klassischen Stücke zur nicht-euklidischen Geometrie. Hierbei handelt es sich um heute nur noch in wenigen Bibliotheken einsehbare Texte aus dem 19. Jahrhundert. Das Buch enthält zusätzlich einen vollständigen Wiederabdruck von H. Reichardts erfolgreicher Schrift „Gauß und die nicht-euklidische Geometrie", die seit Jahren im Buchhandel vergriffen war, Fotos und unveröffentlichte Archivalien. „Eine spannende Präsentation, bereichert durch Originalarbeiten", schreibt der „Wissenschaftliche Literaturanzeiger", und nach Einschätzung des oben schon zitierten „Zentralblatts für Mathematik und ihre Grenzgebiete" ist die Publikation „für jeden geometrisch Interessierten, besonders auch für jeden Studenten der Mathematik, eine zugleich mit hohen Belehrungen und Genüssen verbundene Lektüre".

NPT Prof. Dr. Hans Reichardt, Berlin (geb. am 2. April 1908 in Altenburg)



Betrachtet man das *nachstehende* Verzeichnis aller seit 1984 erschienenen Bände, dann wird deutlich, daß auch die Herausgabe unveröffentlichter mathematischer Texte von Anfang an ein Grundanliegen der Reihe ist: G. Herglotz' oft zitierte, bisher jedoch noch nicht gedruckte Göttinger Vorlesung über die Mechanik der Kontinua konnte dadurch erstmals 1985 in Leipzig erscheinen. Es folgte die Vorlesung „Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise", mit der F. Klein 1880 seine Leipziger Lehrtätigkeit begonnen hatte, und schließlich K. Weierstraß' „Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre", gehalten im Sommersemester 1886 an der Berliner Universität.

Vielleicht wird sich mancher Leser verwundert fragen, ob unveröffentlichte Manuskripte aus dem vorigen Jahrhundert denn heute überhaupt noch von wissenschaftlichem Interesse sind und auf welchen Wegen sie letztendlich zur Publikation gelangen. Allgemeingültige Antworten gibt es naturgemäß nicht, aber beispielsweise wurden G. Herglotz' Vorlesungen der Jahre 1926 und 1931 dem Teubner-Verlag von amerikanischen Mathematikern angeboten. Einer der beiden Herausgeber war früher selbst Assistent bei Herglotz gewesen. Vom technisch schwierig zu bewältigenden, weil sehr viele Formeln enthaltenden Manuskript ließ der Verlag dann eine maschinenschriftliche Fassung anfertigen – seinerzeit übrigens in Prag –, und nach Abschluß aller Korrekturen dienten diese zweihundertfünfzig reproduktionsfähigen Seiten als Vorlage für den Offsetdruck. Zweieinhalb Jahre nach seinem Erscheinen war der Band bereits vergriffen, und Rezensenten internationaler Fachzeitschriften bescheinigen, daß das Buch „auch heute noch Anregungen für die Forschung" gibt, daß der Leser erstaunt sein wird „über die Informationsdichte" und es sehr zu begrüßen sei, „daß die berühmten Vorlesungen über die Mechanik der Kontinua von Gustav Herglotz jetzt erschienen sind".

Hingegen lagen der Edition von F. Kleins Funktionentheorie zwei handschriftlich verfaßte Hefte zugrunde, die in der Bibliothek der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig erhalten geblieben sind. Durch Verwendung weiterer Archivalien, nicht zuletzt auch der in Göttingen aufbewahrten eigenhändigen Vorlesungsvorbereitung Kleins, war es dem Herausgeber möglich, den Text zu rekonstruieren und erstmals eine umfassende Publika-

tion dieser Vorlesung vorzulegen (vgl. „alpha" 21 (1987) 3, S. 72).
Doch auch zu wichtigen Jubiläen erscheinen Titel im „Teubner-Archiv zur Mathematik". 1884 druckte Teubner den letzten Teil von G. Cantors grundlegender Abhandlung „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten". Genau einhundert Jahre später sind jene Arbeiten, mit denen Cantor zum Begründer der Mengenlehre und der mengentheoretischen Topologie wurde, wieder allgemein zugänglich: als fotomechanische Nachdrucke der Originalausgaben, herausgegeben und kommentiert von Prof. Dr. G. Asser.
Dem 175jährigen Firmenjubiläum des traditionsreichen Leipziger Wissenschaftsverlages (vgl. „alpha" 20 (1986) 2, S. 42 bis 43) ist die Neuherausgabe von F. Kleins Vorlesung „Riemannsche Flächen" gewidmet, während das Doppeljubiläum einer relativ jungen mathematischen Disziplin der äußere Anlaß für die Konzipierung, Erarbeitung und Edition des sechsten Archiv-Bandes 1986 war. Dieser enthält zwei Graphentheorie-„Klassiker": Leonhard Eulers Beitrag über das Königsberger Brückenproblem (1736), die erste Arbeit über eine graphentheoretische Frage, und das erste Buch zur Graphentheorie, nämlich Dénes Königs „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (1936). Herausgeber und Verfasser des aktuellen kommentierenden Anhangs ist Prof. Dr. H. Sachs. Ein glücklicher Umstand war es, daß sogar ein früherer Schüler Königs als Autor für einen biographischen Beitrag über den Begründer der Graphentheorie gewonnen werden konnte, und zwar der Budapester Mathematiker Prof. Dr. T. Gallai. Das Buch komplettieren bisher unveröffentlichte Auszüge aus einem von D. König handschriftlich angefertigten und in der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erhaltenen Notizheftes vom Wintersemester 1904/05.
Auch diese Jubiläumsedition legte der Verlag termingerecht vor, d. h. genau fünfzig Jahre nach Königs Buch und zweihundertfünfzig Jahre nach Eulers Arbeit.
Weitere Titel sind bereits in der Produktion oder in Vorbereitung: Abhandlungen von D. Hilbert, E. Schmidt, G. Peano und 1989 auch ein Band mit ausgewählten Arbeiten H. Minkowskis, gewidmet dem 125. Geburtstag dieses großen Forschers.
Neben originalgetreuen Nachdrucken klassischer, heute schwer zugänglicher Beiträge und der Herausgabe unveröffentlichter Vorlesungen ist für die 90er Jahre erstmals die Edition von Briefen namhafter Mathematiker vorgesehen. Stets werden jedoch nicht nur Texte aus früherer Zeit gedruckt, sondern – in Abhängigkeit vom jeweiligen Thema – auch neuverfaßte einleitende Bemerkungen, Ergänzungen bzw. Kommentare, kurze biographische Anmerkungen, Übersetzungen ins Deutsche, Fotos, Autographen, Dokumente, Abbildungen historischer Titelseiten, Namen- und Sachverzeichnis.
Dies alles erfordert enge, langfristig angelegte Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern, Bibliotheken und Archiven. So entstammen beispielsweise die mehr als einhundert Fotos der ersten zehn Bände wissenschaftlichen Einrichtungen oder privaten Sammlungen aus Berlin, Budapest, Bukarest, Djursholm, Düsseldorf, Erlangen, Göttingen, Greifswald, Halle, Jena, Leipzig, Montréal, Oberwolfach.
Abschließend sei hier auf zwei umfangreiche Buchprojekte verwiesen, die der Teubner-Verlag zusätzlich zu den regelmäßig erscheinenden Archiv-Bänden vorlegen wird: In Vorbereitung ist die etwa neunhundert Druckseiten umfassende Edition „Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge", herausgegeben von Prof. Dr. R. Narasimhan, Chicago. Und anläßlich des 500. Geburtstages von Adam Ries 1992 wird die noch immer unveröffentlichte, vom Annaberger Rechenmeister handschriftlich verfaßte „Coß" erstmals gedruckt, ergänzt durch einen Kommentarband, den zur Zeit die beiden Herausgeber Prof. Dr. H. Wußing, Leipzig, und Prof. Dr. W. Kaunzner, Regensburg, erarbeiten. Darüber wird „alpha" später noch ausführlicher berichten.
Zu Beginn unseres Jahrhunderts war Teubner der international führende Mathematikverlag. Seit 1984 ist zur Herausgabe aktueller Monographien, bewährter Hochschullehrbücher sowie populärwissenschaftlicher Schriften die Edition klassischer mathematischer Texte hinzugekommen. Das Leipziger Verlagshaus setzt mit dieser thematischen Erweiterung des Mathematikprogramms eigene positive Traditionen fort, leistet zugleich aber auch einen Beitrag zur Erschließung, Pflege und Nutzung wissenschaftlichen Erbes.

J. Weiß

1984, Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von J. Böhm, Jena, und H. Reichardt, Berlin

Band 2: G. Cantor
Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten
Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872 bis 1884
1984; Herausgegeben und kommentiert von G. Asser, Greifswald

Band 3: G. Herglotz
Vorlesungen über die Mechanik der Kontinua
1985; Ausarbeitung von R. B. Guenther, Corvallis, und H. Schwerdtfeger, Montréal, mit einem Geleitwort von H. Beckert, Leipzig

Band 4: H. Reichardt
Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie
1985; Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein

Band 5: F. Klein
Riemannsche Flächen
Vorlesungen, gehalten in Göttingen 1891/92
1986; Herausgegeben und kommentiert von G. Eisenreich, Leipzig, und W. Purkert, Leipzig

Band 6: D. König
Theorie der endlichen und unendlichen Graphen
Mit einer Abhandlung von L. Euler
1986; Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von H. Sachs, Ilmenau, mit einem biographischen Anhang von T. Gallai, Budapest; mit einem Geleitwort von P. Erdös, Budapest

Band 7: F. Klein
Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise
Vorlesung, gehalten in Leipzig 1880/81
1987; Herausgegeben, bearbeitet und kommentiert von F. König, Leipzig; mit einem Geleitwort von F. Hirzebruch, Bonn

Band 8: C. Neumann, F. Klein, S. Lie, F. Engel, F. Hausdorff, H. Liebmann, W. Blaschke, L. Lichtenstein
Leipziger mathematische Antrittsvorlesungen
Auswahl aus den Jahren 1869 bis 1922
1987; Herausgegeben und mit einem Anhang versehen von H. Beckert, Leipzig, und W. Purkert, Leipzig

Band 9: K. Weierstraß
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre
Vorlesung, gehalten in Berlin 1886
Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstraß aus den Jahren 1870 bis 1880/86
1988; Herausgegeben, kommentiert und mit einem Anhang versehen von R. Siegmund-Schultze, Berlin; mit einem Geleitwort von K.-R. Biermann, Berlin

Band 10:
Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts
C. G. J. Jacobi, P. G. L. Dirichlet, E. E. Kummer, L. Kronecker, K. Weierstraß
Mit Fotos, Dokumenten und Archivalien
1988; Herausgegeben von H. Reichardt, Berlin

Master Mind – beliebtes Spiel bei jung und alt

1. Einführung

Das Spiel „Master Mind“ wurde von dem Angestellten der israelischen Post, Mordeachi Meirovich, erfunden und erstmals 1971 auf der Spielzeugmesse in Nürnberg ausgestellt. Dort entdeckte es ein Mitarbeiter von „Invicta Plastic“, ein Unternehmen der Spielzeugindustrie in Leicester. Invicta Plastic kaufte dann auch die Idee und brachte verschiedene Varianten dieses Spiels auf den Markt, u. a. Master Mind, Mini Master Mind, Super Master Mind und Word Master Mind.

Das Spiel wurde ein enormer Verkaufserfolg. Schon 1973 verkaufte man in Großbritannien 150000 Spiele.

Im Frühjahr 1975 wurde Master Mind in die USA eingeführt und noch im selben Jahr über eine Million Stück verkauft. In der DDR wird es unter dem Namen „Supercode“ im Handel angeboten (siehe S. 15).

Inzwischen ist Master Mind eines der beliebtesten und meist gekauften Spiele geworden. Warum ist es so beliebt bei groß und klein? Das Spielen von Master Mind unterstützt die Entwicklung des logischen Denkens, ist aber auch sehr lehrreich für das Erkennen eigener Fehler, welche auf Grund nicht entsprechender Logik entstehen können. Weiterhin kann das Spiel sowohl einen lehrreichen Anstoß für interessante Probleme der Kombinatorik geben als auch ein guter Lehrer beim Finden geeigneter Probleme für kleinere Forschungsaufgaben sein. Ebenso könnte es eine Bereicherung für den Mathematikunterricht sein.

2. Spielregeln

Es ist ein Zweipersonenspiel. Ein „Kodierer“ konstruiert einen verborgenen Code und der „Dekodierer“ soll ihn enthüllen. Ein Code ist in der kommerziellen Version eine Reihe von Farbstiften, welche verdeckt in Löchern stecken. Der Dekodierer soll diesen Code erraten und für jede Vermutung erhält er vom Kodierer die Information wie viele Farbstifte richtig plaziert und wie viele Stifte zwar die richtige Farbe haben, aber nicht auf dem richtigen Platz sind. Für den Dekodierer gilt es, den Code mit so wenig wie möglich Vermutungen zu enthüllen. Der Kodierer kann das Spiel nach Wahl des Codes nicht mehr beeinflussen. Falsche Informationen an den Dekodierer sind nicht gestattet. Bei der üblichen Spielversion gibt es spezielle „Schlüsselstifte“, schwarze und weiße, welche an der Seite neben dem vermuteten Code plaziert werden. Die Anzahl der schwarzen Stifte gibt die Anzahl der Übereinstimmungen von Farbe und Platz, die Anzahl der weißen Stifte die Anzahl der richtigen Farben bei den übrigen Stiften zwischen Code und Vermutung an.

Das Spiel Master Mind kann man auch mit Bleistift und Papier spielen. Statt „Farbstifte“ kann man z. B. Zahlen nehmen. Ein Code kann dann 3231 sein. Nehmen wir an, der Dekodierer vermutet 4332. Es gibt eine Übereinstimmung mit Zahl und Platz, dies ist die „3“ in Position 3. Zwei weitere Zahlen sind noch richtig, aber auf dem falschen Platz, dies ist die „3“ in Position 2 und die „2“ in Position 4. Die Antwort auf eine Vermutung kann man als Zahlenpaar (i,j) angeben. Die Zahl i für die Anzahl der Übereinstimmungen in Zahl und Platz, die Zahl j für die Anzahl der übrigen richtigen Farben. In unserem Beispiel wäre die Antwort (1,2).

Eine Variante des Spiels ist, daß man in dem verdeckten Code eine Position nicht mit einer Farbe belegt, sondern frei läßt. Um die Komplexität der Aufgabe zu vermindern, kann man sich auch auf eine andere Variante des Spiels einigen, jede Farbe darf nur genau einmal vorkommen und jede Position muß besetzt sein.

3. Zur Spielstrategie

Bei dem Spiel Master Mind mit 4 Löchern und 6 Farben sind die Chancen sehr klein, den richtigen Code mit der ersten Vermutung zu erraten (1 zu 1296).

Die folgende Vermutung muß auf die Antworten der vorhergehenden Vermutungen angepaßt werden. Eine Spielstrategie ist ein Plan, durch den man unter Berücksichtigung der jeweiligen Antworten den richtigen Code erraten kann. Man möchte natürlich eine gute Strategie haben, d. h. die Anzahl der Vermutungen soll so klein wie möglich sein.

Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden. Dazu wählen wir das Spiel „Simple Mind“ mit 2 Löchern und 4 Farben. Hier ist eine Spielstrategie:

V1	A1	V2	A2	V3	A3	V4	A4
12	(2,0)						
	(1,0)	13	(2,0)				
			(1,0)	14	(2,0)		
					(1,0)	11	(2,0)
			(0,1)	32	(2,0)		

V1	A1	V2	A2	V3	A3	V4	A4
			(0,0)	22	(2,0)		
					(1,0)	42	(2,0)
	(0,2)	21	(2,0)				
	(0,1)	13	(1,0)	23	(2,0)		
			(0,2)	31	(2,0)		
			(0,1)	41	(2,0)		
			(0,0)	24	(2,0)		
	(0,0)	34	(2,0)				
			(1,0)	33	(2,0)		
					(0,0)	44	(2,0)
			(0,2)	43	(2,0)		

Nehmen wir an, daß der verborgene Code 44 ist. Die Antwort A1 auf die erste Vermutung V1 12 ist dann (0,0). Die nächste Vermutung V2 in Übereinstimmung mit der Strategie ist 34. Die Antwort A2 ist (1,0) und Vermutung V3 ist 33. Es ergibt sich die Antwort A3 (0,0) und Vermutung V4 ist in diesem Fall 44, welches der verborgene Code ist. Die Antwort A4 ist folglich (2,0).

Nach dieser Strategie benötigt man maximal 4 Vermutungen. Es ergibt sich die Frage, ob es eine bessere Strategie mit einer kleineren Maximalzahl g von Vermutungen gibt?

Die Anzahl der Antwortmöglichkeiten ist 5. Unter diesen hat (2,0) eine Sonderstellung: „Das Spiel ist zu Ende“.

Nehmen wir an, wir haben eine Strategie mit minimaler Maximalzahl g von Vermutungen. Wie viele verdeckte Codes können wir dann mit genau x Vermutungen erkennen?

Für jede Antwort, außer der letzten, haben wir höchstens 4 Möglichkeiten. Dann gibt es höchstens 4^{x-1} verborgene Codes, welche man mit genau x Vermutungen erkennen kann. Da x variiert zwischen 1 und g haben wir

$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{g-1} = (4^g - 1)/3$

als obere Grenze für die Anzahl der verborgenen Codes, welche $4^2 = 16$ bei Simple Mind ist. Also gilt:

$16 \leqq (4^g - 1)/3$ und daraus folgt $g \geqq 3$.

Diese Ungleichung kann zu $g \geqq 4$ durch folgende Überlegung verbessert werden. Nehmen wir o. B. d. A. an, daß eine erste Vermutung 12 ist. Unter allen möglichen Antworten gibt es für die Antwort (1,0) die Maximalanzahl (6) möglicher Codes. Diesen kann man durch weitere $g - 1$ Vermutungen bestimmen, woraus

$6 \leqq (4^{g-1} - 1)/3$ (vgl. oben) folgt,

und daraus $g \geqq 4$.

Wenn die erste Vermutung vom Typ 11 ist, erhält man für die Antwort (0,0) die Maximalanzahl (9) von möglichen Codes; und damit auch $g \geqq 4$.

Optimale Strategien gibt es für Master Mind mit 4 Löchern und 6 Farben ($g = 5$) wie auch für ein Spiel mit 4 Löchern und 4 Farben ($g = 4$). Der interessierte Leser könnte sich zur Übung eine Strategie für „Semi Simple Mind“, 3 Löcher und 4 Farben, mit $g = 4$ überlegen.

Gilt $g \geqq 4$ für alle Semi Simple Mind Strategien?

Ein anderes interessantes Problem ist, wie gut oder schlecht ist eine „Konstante Strategie“. Mit konstanter Strategie meinen wir eine Strategie, deren Vermutungen nicht in Abhängigkeit von den Antworten vari-

iert. Eine konstante Strategie für Simple Mind ist 12, 23, 34, 41. Für jeden Code bekommen wir dann eine Folge von Antworten und verschiedene Codes ergeben verschiedene Folgen. Man könnte daraus vermuten, daß 123, 234, 341, 412 eine konstante Strategie für Semi Simple Mind ist. Jedoch gilt dies nicht! Die Codes 132 und 213 erhalten beide dieselbe Folge von Antworten: (1,2) (1,1) (0,2) (1,1).
Eine nicht-konstante Strategie nennen wir verzweigt. Wahrscheinlich sind verzweigte Strategien besser als konstante.
Kann der Leser dies beweisen?
Wir sind noch nicht auf eine eventuelle Strategie für den Kodierer eingegangen. Der Kodierer möchte es dem Dekodierer so schwer wie möglich machen.
Bei Master Mind zeigt die Erfahrung, daß Codes, bei denen alle Stifte gleichfarbig sind, am einfachsten zu dekodieren sind und Codes mit 3 Farben, d. h. eine Farbe kommt doppelt vor, die meisten Probleme bereiten. Der Kodierer sollte folglich seinen Code zufällig innerhalb dieses Codetyps wählen, da die Kenntnis von Favoriten bei Farben und Mustern des Kodierers dem Dekodierer die Entschlüsselung erleichtern kann.

Dem Leser sei zum Abschluß noch eine kleine Aufgabe zur Übung gestellt:
Man bestimme den Code bei Master Mind (4 Löcher, 6 Farben) bei Kenntnis folgender Fragen und Antworten:
a) keine Farben kommen doppelt vor
b) Farben können doppelt vorkommen

	Vermutung	Antwort
a)	6214	(1,2)
	5631	(0,3)
	4365	(2,1)
	2456	(0,2)
b)	Vermutung	Antwort
	1123	(2,1)
	4125	(2,0)
	4323	(2,0)
	3156	(1,1)

N. Grünwald

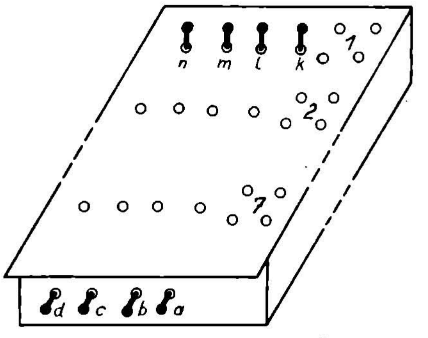
Minicode

Die Spielregeln des attraktiven, jung und alt fesselnden Spieles „Supercode" lassen sich auf verschiedene Weise abändern, wobei das Spielgerät von Supercode beibehalten wird.
Eine mögliche, relativ einfache Variante, „Minicode" genannt, soll hier vorgestellt werden:

Spielregeln

- Spieler A sitzt an der gelochten Stirnseite des Spielgerätes. Spieler B sitzt ihm gegenüber. Zum Spiel werden nur weiße Anzeigestifte sowie Farbstecker in genau vier Farben, etwa rot, gelb, grün und blau, benutzt.
- A steckt je einen roten, gelben, grünen und blauen Stecker in die Stirnseitenlöcher. B sieht diese Stecker an der Stirnseite bis zum Partieende nicht.
- B soll mit möglichst wenig Versuchen die von A gewählte Anordnung (Permutation) der Farbstecker herausfinden. Als ersten Versuch steckt B ebenfalls vier verschiedenfarbige Stecker in die Reihe 1 am gegenüberliegenden Spielbrettende. Danach steckt A in die vier Löcher neben Reihe 1 entweder 4, 3, 2, 1 oder 0 weiße Anzeigestifte. Er gibt damit bekannt, um wieviel Plätze insgesamt die Farbstecker der Reihe 1 verrückt werden müssen, damit sie die gleiche Anordnung wie die an der Stirnseite steckenden haben. Dabei bedeuten 4, 3, 2, 1 bzw. 0 weiße Anzeigestifte die Gesamtabweichung um 8, 6, 4, 2 bzw. 0 Plätze.
- Dieser Spielvorgang wiederholt sich, wobei nacheinander die Reihen 1, 2, 3, ... besetzt werden, bis entweder A erstmals neben die Farbstecker einer Reihe keinen weißen Anzeigestift steckt oder bis zur letzten, der 7. Reihe.
- A erhält abschließend für die Partie soviel Punkte zugesprochen wie B Reihen mit seinen Farbsteckern besetzt hat.
- Von Partie zu Partie wechseln A und B die Spielerrollen.

Im folgenden wird die von A für die Stirnseite gewählte Anordnung der Farbstifte mit abcd, die von B für Reihe 1 mit klmn bezeichnet.



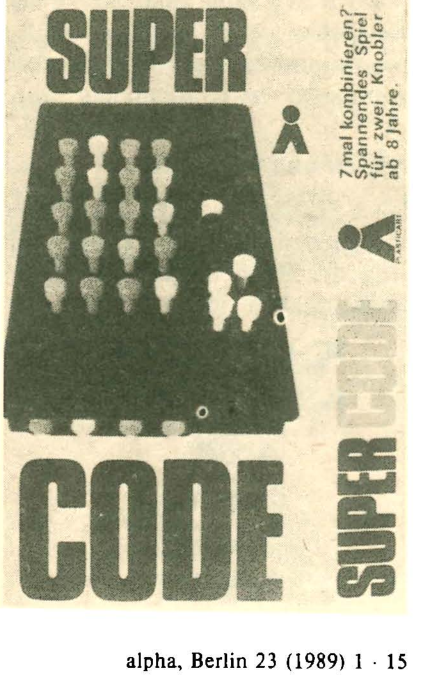
Zur Erläuterung: Wären z. B. a und m rote, b und l grüne, c und n blaue und d und k gelbe Stecker, so hätte A neben die Farbstecker der Reihe 1 $(2+0+1+3):2=3$ weiße Anzeigestifte zu stecken.

Zur Strategie: Spieler A hat insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten für das Anbringen seiner Farbstecker an der Stirnseite. Spieler B kann stets mit höchstens vier Versuchen die von A gewählte Anordnung herausfinden: Steckt A neben die Farbstecker der Reihe 1 keinen weißen Anzeigestift, so hat B bereits mit dem 1. Versuch die Anordnung auf der Stirnseite erraten. Steckt A neben die Farbstecker der Reihe 1 drei weiße Anzeigestifte, so erkennt B hieraus, daß seine Anordnung klmn der Farbstecker in Reihe 1 übereinstimmt mit einer der neun Anordnungen bcda, bdca, bdac, cbda, cadb, dbca, dacb, dbac und dabc. B wählt dann für die 2. Reihe die Anordnung lmnk der Farbstekker (siehe Tabelle).
In dieser Tabelle wurde neben jeder Anordnung der Farbstecker die zugehörige Zahl der weißen Anzeigestifte angegeben. Steckt A neben die Farbstecker lmnk der 2. Reihe

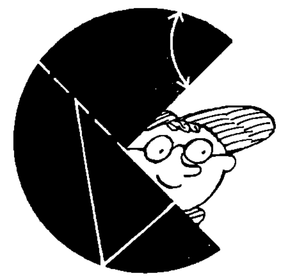
1. Reihe		2. Reihe	
klmn	3	lmnk	4, 3, 2, 1 oder 0
bcda	3	cdab	4
bdca	3	dcab	4
bdac	3	dacb	3
cbda	3	bdac	3
cadb	3	adbc	2
dbca	3	bcad	2
dacb	3	acbd	1
dbac	3	bacd	1
dabc	3	abcd	0

4 weiße Anzeigestifte, so stimmt lmnk laut Tabelle entweder mit cdab oder dcab überein. B weiß also, daß die Anordnung an der Stirnseite entweder nklm oder nkml ist. Damit findet er die richtige Anordnung bereits mit dem 3. oder spätestens mit dem 4. Versuch. Auch wenn A neben die Farbstecker der 2. Reihe 3, 2 oder 1 weiße Anzeigestifte steckt, kann B die Partie mit seinem 3. oder 4. Versuch beenden. Steckt A hingegen neben die Farbstecker der 2. Reihe keinen weißen Anzeigestift, so hat B die Partie bereits mit dem 2. Versuch beendet.
Bei vier weißen Anzeigestiften neben Reihe 1 wählt B für Reihe 2 die Anordnung nmlk, bei zwei weißen Anzeigestiften lmkn und bei einem weißen Anzeigestift ebenfalls lmkn. Im letzten Fall kann B die Partie stets mit dem 3. Versuch beenden.
Das Aufstellen der zugehörigen Tabellen sei dem Leser überlassen.
Die optimale Strategie von Minicode wurde damit zwar weitgehend angegeben. Doch diese sich einzuprägen und gedächtnismäßig (ohne Tabellen!) anzuwenden, ist dennoch eine ansprechende Leistung.
Wer das Spielgerät Supercode nicht besitzt, kann behelfsmäßig mit einem gefalteten Blatt Papier, zwei Bleistiften und einem Partner diese Spielweise ausprobieren.

W. Träger



In freien Stunden · alpha-heiter



Vom Kern zum Wort

Unabhängig von ihrer Reihenfolge sind die bereits eingetragenen Buchstaben zu Begriffen nachstehender Bedeutung zu ergänzen. Richtig gelöst ergeben die Anfangsbuchstaben ein Teilgebiet der Mathematik.

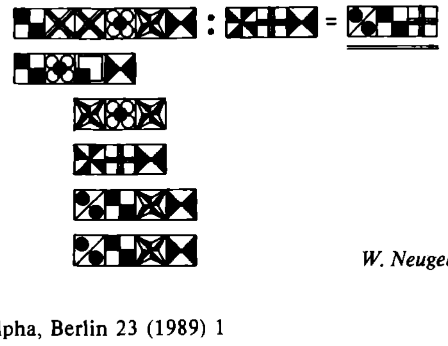
			M	A	L		
		G	E	N			
	O	L	D				
	L	E	M				
			R	I	F		
	A	D	I				
			L	O	G		

1. Übereinstimmung von Erscheinungen in wesentlichen Merkmalen,
2. Zahl, aus der die Wurzel gezogen wird,
3. Abweichung, Unregelmäßigkeit, Regelwidrigkeit,
4. Französischer Mathematiker (1752 bis 1833),
5. Objekte einer Menge,
6. Ergebnisse der gedanklichen Widerspiegelung von Dingen, Eigenschaften, Relationen,
7. Deutscher Mathematiker (1690 bis 1764), bekannt durch eine nach ihm benannte Vermutung, die bisher weder bewiesen noch widerlegt werden konnte und die besagt, daß jede gerade Zahl $n \geqq 6$ Summe von zwei ungeraden Primzahlen ist.

OL K. Koch, Schmalkalden

Wissen und Rechnen

Jedes Zeichen bedeutet eine Ziffer und gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen. Finde unter Beachtung der Rechenregeln die Ziffern, die die Divisionsaufgaben richtig lösen.

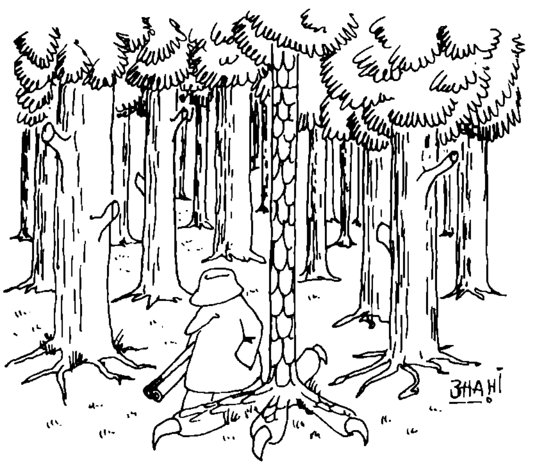


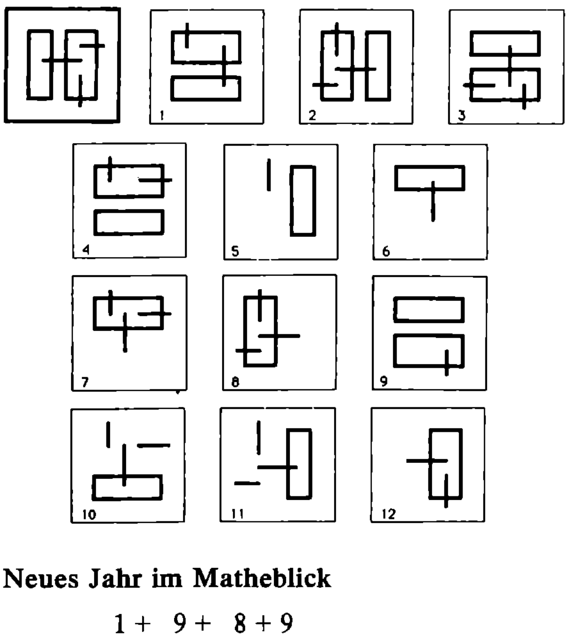
W. Neugebauer, Berlin

Tarnung

Die abgebildete Figur, die aus zusammengesetzten Linien besteht, verbirgt sich mitunter auch nur teilweise in 10 der anderen 12 Figuren. Finde die zwei Figuren heraus, die nicht dazugehören.

aus: Eleusis, Paris





Neues Jahr im Matheblick

$$\begin{array}{r} 1+\ 9+\ 8+9 \\ +\ \ 1+\ 9+\ 8+9 \\ +\ \ 1+\ 9+\ 8+9 \\ +\ \ 1+\ 9+\ 8+9 \\ +\ \ 1+\ 9+\ 8+9 \\ \hline =19+89=98+9+1 \end{array}$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Beständige Gleichheit

Aus der gelegten wahren Hölzchengleichung entsteht durch geeignetes Umlegen von a) einem Holz, b) zwei, c) drei und d) vier Hölzern jeweils wieder eine wahre Gleichung.

$$84+65=149$$

Ebenso entsteht durch geeignetes Wegnehmen von e) zwei, f) vier und g) fünf Hölzern jeweils wieder eine wahre Gleichung. *W. Träger, Döbeln*

Verdecktes Kartenspiel

Über vier verdeckte Karten ist folgendes bekannt:
1. Der „Bube“ liegt links vom „Herz“,
2. Eine „Sechs“ liegt rechts von „Pik“,
3. Ein „Karo“ liegt rechts neben dem „König“ und
4. „Kreuz“ liegt nicht neben „Herz“, sondern links vom „As“.

Welche Spielkarte verbirgt sich hinter A, B, C und D? *K. Petzold, Ebersbrunn*

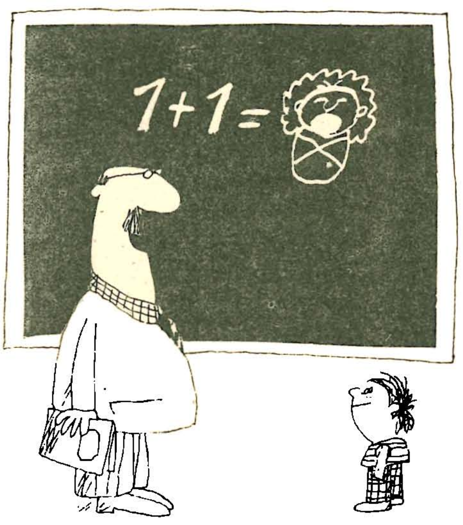
Ziel: Gleichheit

Setze die fehlenden Zeichen für die Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division ein, so daß Gleichungen entstehen!

A ·	9	2	12	5	=	67
B ·	13	15	2	14	=	56
C ·	10	6	6	11	=	20
D ·	18	12	2	14	=	34
E ·	7	5	13	10	=	38

Beachte, daß beim Rechnen Multiplikation und Division vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden müssen! Klammern treten nicht auf. Vergleiche die beiden vorgegebenen Beispiele!

aus: Maximath, Paris



„In Biologie bist du schon ganz gut!“

Die Hemden des Junggesellen

Ein Junggeselle zieht jeden Tag ein frisches Hemd an. Jeden Montag bringt ihm die Wäscherei seine sauberen Hemden und nimmt die schmutzigen gleich mit.
Wieviel Hemden hat er mindestens?

aus: Pythagoras, Amsterdam

Mathematik und Phantasie

Der Mathematiker David Hilbert, den Max v. Laue „das größte wissenschaftliche Genie“ nannte, wurde eines Tages nach dem Schicksal eines seiner Schüler befragt. Er dachte lange nach, bevor er antwortete: „Ach ja, der ist unter die Dichter gegangen – für die Mathematik hatte er nicht genügend Phantasie.“

nach Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Die Entlarvung des Orakels

Vor langer Zeit gab es in einem fernen Land ein berühmtes Orakel. Im Unterschied zu gewöhnlichen Orakeln vernahm man durch seinen Mund nicht nur eine Gottheit, sondern drei: den Gott der Wahrheit, den Gott der Lüge und den Gott der Diplomatie. Diese Gottheiten wurden durch vollkommen gleiche Figuren dargestellt, die sich in einer Reihe hinter dem Altar befanden. Die Götter antworteten immer gern auf die Fragen der Ratsuchenden. Da sie aber einander so ähnlich waren, konnte niemand erkennen, ob nun der Gott der Wahrheit, dem man glauben muß, oder der Gott der Lüge, der immer die Unwahrheit spricht, oder der Gott der Diplomatie, der entweder lügen oder die Wahrheit sagen kann, geantwortet hat. Einmal fand sich ein verwegener Neugieriger, der sich vorgenommen hatte, das zu vollbringen, was den größten Weisen nicht gelungen war. Er beschloß, jeden der Götter zu erkennen.
Der Kühne betrat den Tempel und fragte den links stehenden Gott: „Wer steht neben dir?“ „Der Gott der Wahrheit“, war die Antwort. Da fragte der Kühne den Gott in der Mitte: „Wer bist du?“ „Der Gott der Diplomatie“, war die Antwort. Die letzte Frage stellte der Kühne dem rechts stehenden Gott: „Wer steht neben dir?“ „Der Gott der Lüge“, war die Antwort. „Jetzt ist alles klar“, sagte der Kühne zufrieden.
Wie konnte er das aus den Antworten der Götter herausfinden?

aus: „Spaß für freie Stunden“ Verl. MIR · Moskau/ Verlag für die Frau · Leipzig eingesandt von M. Kschiwan, Batow

ÜBRIGENS trösten sich damit, daß Einstein ein schlechter Schüler war, immer die falschen.

H. D. Schütt, aus Eulenspiegel, Berlin

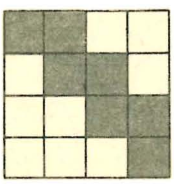
Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1989

Ma 5 ■ 2978 Anke, Birgit und Claudia sind (in anderer Reihenfolge) Schülerinnen der Klassen 4, 5 bzw. 6. Ihre Zeugnisnoten im Fach Mathematik sind 1, 2 bzw. 3. Nun weiß man folgendes:
(1) Birgit hat nicht die Zeugnisnote 1.
(2) Claudia hat die Zeugnisnote 3.
(3) Die Schülerin aus Klasse 4 hat die Zeugnisnote 2.
(4) Anke ist Schülerin der Klasse 5.
Gib Name, Klasse und Zeugnisnote jeder der drei Schülerinnen an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2979 Das abgebildete Quadrat besteht aus 16 gleichgroßen, kleineren Quadraten, deren Seiten 5 mm lang sind. Das Bild zeigt eine schraffiert dargestellte zusammenhängende Fläche, die aus sieben dieser kleineren Quadrate besteht.



a) Bestimme die Länge des Umfangs dieser schraffierten Fläche!
Zeichne noch zweimal ein solches Quadrat und schraffiere eine zusammenhängende Fläche, die jetzt aus
b) acht Quadraten besteht und einen Umfang von 70 mm hat,
c) neun Quadraten besteht und einen Umfang von 60 mm hat!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2980 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccccc} rs & + & mn & = & xyz \\ : & & - & & + \\ xz & - & n & = & xs \\ \hline a & \cdot & my & = & xsy \end{array}$$

Sch.

Ma 5 ■ 2981 Am Rande einer Landstraße stehen in regelmäßigen Abständen Telegrafenmasten. Vom ersten bis zum fünften Mast beträgt die Entfernung genau 250 m. Wie viele Meter stehen der erste und der zehnte Mast auseinander?

Schüler R. Holke, Leipzig

Ma 5 ■ 2982 Hanna sagt: „Wenn ich den Vorgänger und den Nachfolger einer natürlichen Zahl addiere, so erhalte ich als Summe mein Geburtsjahr 1978. Wenn ich aber statt 1978 das Jahr 1989 setze, dann finde ich keine solche natürliche Zahl." Begründe, warum dies Hanna nicht gelingen kann! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 2983 Zum Transport von Mauersteinen hätte ein LKW mit 6 t Ladefähigkeit genau 35 Fuhren durchführen müssen. Nach 19 Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 8 t Ladefähigkeit abgelöst, der nun den Rest transportierte. Wie viele Fuhren wurden dadurch eingespart?

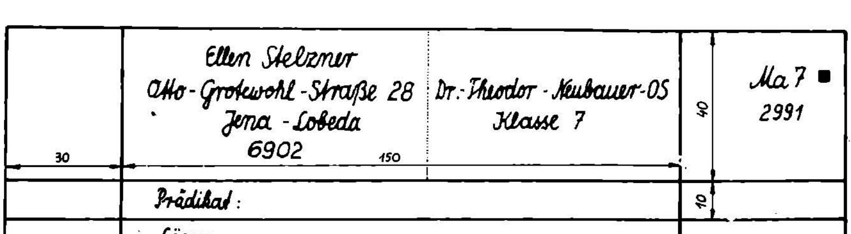
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2984 Ein ganz mit einer Farbe angestrichener Würfel wurde in lauter gleichgroße kleinere Würfel zersägt. Es stellte sich heraus, daß genau an acht dieser kleineren Würfel keine Farbe war. Gib die Anzahl aller Würfel an, an denen Farbe war!
Begründe deine Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2985 Wie viele Teiler hat die Zahl 1001?
Gib alle Teiler dieser Zahl an! *Sch.*

Ma 6 ■ 2986 In dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC wurde die Höhe $\overline{CD}$ zur Hypotenuse $\overline{AB}$ und die Winkel-



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

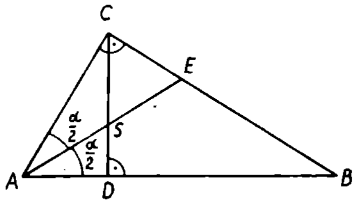
Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

halbierende $\overline{AE}$ des Winkels $\sphericalangle BAC$ gezeichnet, die sich im Punkte S schneiden. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck ECS gleichschenklig ist! *Sch.*



Ma 6 ■ 2987 Weise nach, daß die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen niemals durch 4, ihr Produkt aber stets durch 8 teilbar ist! *Sch.*

Ma 6 ■ 2988 Erwin sagt: „Meine Schwester ist zwei Jahre jünger als ich; ich selbst bin drei Jahre jünger als mein Bruder. Zusammen sind wir 40 Jahre alt." Wie alt ist jedes der drei Geschwister? *Sch.*

Ma 6 ■ 2989 Die Maßzahlen der drei Seitenlängen eines Dreiecks (gemessen in cm), dessen Umfang weniger als 30 cm beträgt, sind sämtlich paarweise verschiedene Primzahlen. Welche Möglichkeiten gibt es für die Seitenlängen? *Sch.*

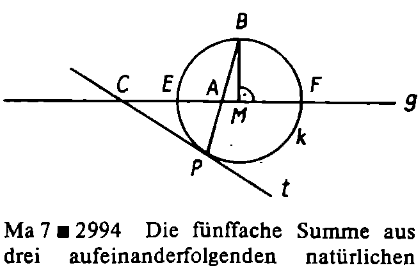
Ma 6 ■ 2990 Die Maßzahl des Umfangs eines Dreiecks (gemessen in cm) sei eine natürliche Zahl. Für zwei Seitenlängen gelte $a = 3$ cm und $b = 1$ cm. Es sind die Länge c der Seite $\overline{AB}$ und der Umfang u des Dreiecks zu berechnen! *Sch.*

Na/Te 6 ■ 443 Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 10 cm besteht aus Stahl. Wie groß ist seine Gewichtskraft? *R.*

Ma 7 ■ 2991 Eine Mutter ist heute viermal so alt wie ihre Tochter. In 16 Jahren wird die Mutter nur doppelt so alt sein wie ihre Tochter.
Wie alt sind beide heute? *Sch.*

Ma 7 ■ 2992 Ein Hotel hat zusammen 82 Ein- und Zweibettzimmer mit insgesamt 132 Betten. Wie viele Ein- bzw. Zweibettzimmer hat dieses Hotel? *Sch.*

Ma 7 ■ 2993 Durch den Mittelpunkt M des abgebildeten Kreises k wurde die Gerade g gezeichnet, die den Kreis in den Punkten E und F schneidet. In M wurde die Senkrechte zur Geraden g errichtet, die k in B schneidet. Durch einen inneren Punkt A des Radius $\overline{ME}$ wurde die Gerade AB gezeichnet, die k in P schneidet. Im Punkte P wurde die Tangente t an den Kreis k gelegt, die die Gerade g in C schneidet. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck CPA gleichschenklig ist! *Sch.*



Ma 7 ■ 2994 Die fünffache Summe aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich? *Sch.*

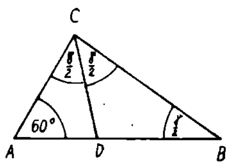
Ma 7 ■ 2995 Beweise: Die Differenz der Quadrate von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen. (Benutze die Terme n und $n + 1$.)
Beispiel: $7^2 - 6^2 = 7 + 6$ *Sch.*

Na/Te 7 ■ 444 In drei zylindrische Flaschen (Grundfläche 10 cm²) werden je 100 g Wasser, Benzin und Öl gefüllt.
Wie hoch stehen die Flüssigkeiten in den Flaschen? *R.*

Na/Te 7 ■ 445 Über eine feste Rolle ist ein Seil gelegt. An den Enden des Seiles hängt je ein Körper mit einer Masse von 1 kg. Mit welcher Kraft wird das Seil gedehnt? *R.*

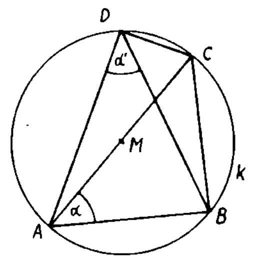
Ma 8 ■ 2996 Man zeige, daß die natürliche Zahl $z = p^4 - 1$ für jede Primzahl $p > 5$ stets durch 240 teilbar ist. *Sch.*

Ma 8 ■ 2997 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle CAB = 60°$. Dabei schneidet die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ die Seite $\overline{AB}$ in D so, daß $\overline{CD} \cong \overline{BD}$ gilt. Berechne die Größe der anderen beiden Innenwinkel dieses Dreiecks und begründe deine Aussagen!
aus der Kreisolympiade Kl. 8, Kreis Löbau, Fachlehrer J. Kreusch



Skizze (nicht maßstabgerecht!)

Ma 8 ■ 2998 Gegeben sei ein Kreis k, auf dem die Punkte A, B, C, D so liegen, daß die Diagonale $\overline{AC}$ des Sehnenvierecks $ABCD$ durch den Mittelpunkt von k geht. Unter welcher Bedingung ist der Winkel $\sphericalangle MAB$ genau so groß wie der Winkel $\sphericalangle ADB$? *Schülerin G. Berthold, Dresden*



Ma 8 ■ 2999 Wie groß ist der Inhalt derjenigen Fläche in einer Ebene, die von einem Quadrat umschlossen wird, das einen Umfang von 1 km Länge hat? Um wieviel Prozent größer ist der Inhalt der Fläche, die von einem Kreis mit dem gleichen Umfang umschlossen wird? Der Flächeninhalt ist gerundet in ha anzugeben!
Fachlehrer Bucher, POS Gerstungen

Ma 8 ■ 3000 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. An $\overline{CA}$ soll in C ein rechter Winkel so angetragen werden, daß sein freier Schenkel die Gerade, auf der $\overline{AB}$ liegt, in D schneidet. Es ist zu beweisen, daß dann $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ ist!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 8 ■ 446 Mit einem Tauchsieder für eine Spannung von 220 V und einer Stromstärke von 2,7 A werden 2 Liter Wasser innerhalb von 24 min von 20° C bis zum Sieden erhitzt. Wie groß ist der Wirkungsgrad? *aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen Berlin*

Na/Te 8 ■ 447 Die Entfernung Sonne – Erde beträgt rund 150 Millionen Kilometer. Das Licht legt in 1 s eine Strecke von 300 000 Kilometer zurück.
Wie lange braucht es für die Strecke Sonne – Erde? *R.*

Ma 9 ■ 3001 Das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger einer natürlichen Zahl n, vermindert um das Dreifache dieser natürlichen Zahl, beträgt 39. Wie heißt die natürliche Zahl n?
Petra Hahn, Nordhausen

Ma 9 ■ 3002 Es ist zu beweisen, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c stets gilt:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}!$$
Schüler O. Karger, Wittenberge

Ma 9 ■ 3003 Zeichnen Sie einen Kreis $k(M; r)$ mit zwei Durchmessern, die senkrecht zueinander sind. Bezeichnen Sie die Begrenzungspunkte im mathematisch positiven Drehsinn mit A, B, C, D. Legen Sie auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ einen Punkt P fest ($P \neq A, P \neq B$) und verbinden Sie ihn mit C. Zeichnen Sie in P die Tangente an k mit ihrem Berührungsradius ein und verlängern Sie $\overline{AC}$ über A hinaus, so daß diese Verlängerung die Tangente in E schneidet. Verlängern Sie $\overline{BD}$ über B hinaus, und bezeichnen Sie den Schnittpunkt dieser Verlängerung mit der Tangente mit F!
Beweisen Sie, daß gilt:
$\sphericalangle ACP + \sphericalangle CPM + \sphericalangle MFP + \sphericalangle PMB$
$+ \sphericalangle PEM = 180°$
(die einzelnen Summanden wollen wir als Winkelgröße auffassen)!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3004 Es ist die Basis x desjenigen Zahlensystems zu ermitteln, in dem die Gleichung
$$[(689)_x - (511)_x] \cdot (11)_x = (1948)_x$$
mit $x \in N$ eine wahre Aussage darstellt.
Christian Bittner, Mühlhausen

Ma 9 ■ 3005 Welche natürliche Zahl ist gleich dem fünften Teil der Summe aller vorhergehenden natürlichen Zahlen außer der Zahl Null? *Sch.*

Na/Te 9 ■ 448 Ein Schleifkontakt eines Spannungsteilers teilt einen Gesamtwiderstand von 600 Ohm im Verhältnis 1 : 2 ($R_1 : R_2$) auf. Parallel zu R_1 wird ein Widerstand von 600 Ohm angeschlossen. Wie groß ist die Klemmenspannung am angeschlossenen Widerstand, wenn am Spannungsteiler eine Spannung von 240 V liegt? *R.*

Na/Te 9 ■ 449 In einem Haushalt (Nennspannung 220 V) ist ein Warmwasserbereiter mit einer Leistung von 1,8 kW in Betrieb. Überprüfen Sie, ob in dem gleichen Stromkreis noch ein Bügeleisen mit einer Leistung von 750 W eingeschaltet werden kann, wenn der Sicherungsautomat eine Gesamtstromstärke von 10 A zuläßt?

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

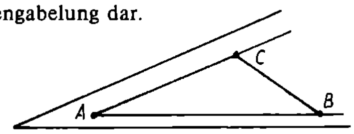
Ma 10/12 ■ 3006 Für welche reellen Zahlen x stellt die Gleichung

$$25^{1+x} - 25^{1-x} = 120$$

eine wahre Aussage dar?

Christian Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 3007 Das Bild stellt eine Straßengabelung dar.



$\overline{AB}$ ist 53,9 m lang, $\overline{AC}$ ist 34,6 m lang.
Wegen einer günstigeren Grenzziehung soll das dreieckige Grundstück ABC so verändert werden, daß $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ist. Das neue Grundstück ABC muß den gleichen Flächeninhalt haben wie das alte.
Wie lang sind $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ nach der neuen Grenzziehung? *Rainer Struwe, Halberstadt*

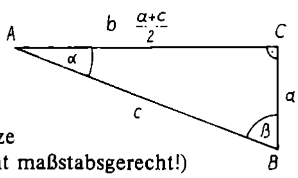
Ma 10/12 ■ 3008 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x gilt

$$-\sin x \cdot \cos x < 0{,}5!$$

Christian Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 3009 In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der einen Kathete genau so groß wie das arithmetische Mittel aus den Längen der zweiten Kathete und der Hypotenuse. Es sind die Innenwinkel dieses Dreiecks zu berechnen.

in einem slowakischen Mathematikbuch gefunden von St. Rudolf, Halberstadt



Skizze
(nicht maßstabsgerecht!)

Ma 10/12 ■ 3010 Aus einem Brief:
Lieber Opi! Zu Deinem 62. Geburtstag wünschen wir Dir alles Gute. – Addierst Du übrigens zum Quadrat des Nachfolgers von uns den Nachfolger des Quadrates von uns, so erhältst Du Dein Alter in Jahren. Unter „von uns" meinen wir die Anzahl der Personen unserer Familie.

Dein Matthias.

Aus wieviel Personen bestand die Familie?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 10/12 ■ 450 Ein Widerstand von 100 Ohm und ein Kondensator von 4 µF werden hintereinander geschaltet und an eine Wechselspannung (50 Hz) von 220 V gelegt. Welcher Strom fließt durch die Anordnung? *R.*

Na/Te 10/12 ■ 451 Wie lang ist ein Sekundenpendel in Meereshöhe am Pol und am Äquator? *R.*

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1987/88

E.-Mäder-OS, Fr.-Engels-OS, beide Altenburg; Stadtklub Jg. Math. Altentreptow; Dr.-Th.-Neubauer-Schule II, Apolda; W.-Seelenbinder-OS, Arneburg; OS VI Arnstadt; E.-Weinert-OS, Arnstadt; OS Dr. R. Sorge, Asbach; OS W. Lamberz, Bad Berka; OS H. Duncker, Bad Kleinen; E.-Weinert-OS, Bad Klosterlausnitz; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; E.-Thälmann-OS, Bad Langensalza; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; W.-Pieck-OS, EOS E. Thälmann, Th.-Neubauer-OS, A.-Saefkow-OS, O.-Grotewohl-OS, Stat. Jg. Techn. u. Naturf., OS VI, OS II M. Poser, alle Bad Salzungen; OS H. Beimler, Bärenklau; OS Bandelin; OS Cl. Zetkin, Barby; H.-Heine-OS, Barchfeld; Liebknecht-OS, Barth; K.-Schweitzer-OS, Basdorf; H.-Belz-OS, Behrenhoff; O.-Nowack-OS, Bentwisch; Stadtmatheklub 6. POS V, Bergen; 4. OS Marschall Budjonny, 25. OS W. Prochno, 44. OS Fr. Espenbeck, 26. OS L. Reum, 33. OS L. Grundig, 8. OS, 41. OS L. Weiskopf-Henrich, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; C.-Fugger-OS, Bernau; G.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Bernterode; OS Beuren; W.-Seelenbinder-OS, Bismark; Cl.-Zetkin-OS, Bischoferode; OS Blankenberg; W.-Pieck-OS, OS Fr. Schiller, beide Bleicherode; Fr.-Weinert-OS, Blumberg; G.-Ewald-OS, Blumenthal; OS Bokkau; K.-Wagner-OS, Böhrigen; A.-Bebel-OS, H.-Matern-OS, beide Boizenburg; OS J. Schehr, Born; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; B.-Brecht-OS, Brehme; W.-Pieck-OS, Breitenworbis; OS H. Beimler, W.-Seelenbinder-OS, beide Breitungen; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Burg; W.-Pieck-OS, Burow; OS II Burg Stargard; W.-Estel-OS, Buttlar; W.-Seelenbinder-OS, Buttstädt; 2. OS O. Grotewohl, EOS G. Schumann, Kreismatheklub, alle Calau; Stat. Prof. Dr. G. Hertz, Calbe; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; OS A. Einstein, Caputh; Haus der JP, K.-Marx-OS, W.-Pieck-OS, alle Coswig; 5. OS C. Blechen, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Cottbus; R.-Schneider-OS, Crottendorf; OS Br. Kühn, Dambeck; Kreisklub Jg. Math., Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; 13. OS A. Hennecke, Dessau; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; OS Fr. Reuter, Dömitz; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast W. Ulbricht, 100. OS P. Neruda, M.-A.-Nexö-OS, alle Dresden; OS Dürröhrsdorf; W.-Pieck-OS Eberswalde; EOS, Kreiszirkel Math., beide Egeln; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS Eishausen; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arndt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Ernstthal; Th.-Müntzer-OS, Fambach; OS 3 O. Benario-Prestes, Falkenberg; 5. OS G. Dimitroff, Finsterwalde; E.-Weinert-OS., Flessau; K.-Marx-OS, Flöha; B.-Brecht-OS, Floh; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., 19. OS Dr.-Th.-Neubauer-OS, beide Frankfurt (Oder); E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS Cl. Zetkin, Freiberg; OS I, Friedland; OS W. Seelenbinder, Fünfeichen; OS V H. Günther, Fürstenwalde; E.-Thälmann-OS, Freital; Haus d. JP E. Hörnle, Gadebusch; Th.-Müntzer-Schule, Gehren; R.-Arnstadt-OS, Geisa; E.-Hörnle-OS, Geismar; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; 5. OS J. Gagarin, Görlitz; R.-Schulz-OS, Golzow; 7. OS Görlitz; J.-Brinckmann-OS, Goldberg; OS A. Schweitzer, Fr.-Engels-Schule, OS R. Luxemburg, alle Gotha; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Gransee; OS Gernrode; E.-Thälmann-OS, K.-Marx-OS, beide Greifswald; OS H. Beimler, OS K. Marx, beide Greußen; Math.-Kreisklub Grevesmühlen; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS E. Weinert, Gröningen; S.-Jähn-OS, Gröditz; A.-Frank-OS, Grimma; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS A. Kuntz, E.-Hartsch-OS, beide Großbodungen; alpha-Klub Großrückerswalde; OS N. Ostrowski, Großdeuben; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Gützkow; OS H. Günther, Hachelbich; M.-Gorki-OS, Hainichen; M.-Engels-Schule, Halberstadt; Kreisklub Math. Halle-Süd; OS Hammerbrücke; Kreisklub Math. Harzgerode; Fr.-Wolf-OS, IMOS, EPOS, alle Havelberg; OS B. Koenen, Hedersleben; Th.-Storm-OS, EOS W. Pieck, beide Heiligenstadt; Schule d. DSF Heiligengrabe; 2. OS, Herzberg; M.-Gorki-OS, Hillersleben; Cl.-Zetkin-OS, Hohenstein-E.; 21. OS, Hoyerswerda; OS E. Egert, Hundeshagen; OS Hunshagen; OS A. Waszkiewicz, Hoyerswerda; OS Fr. Zielasko, Iden; OS W. Seelenbinder; OS N. Mandela, Ilmenau; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; H.-Beimler-OS, Karbow; OS f. Körperbehinderte Dr. Fr. Wolf, A.-S.-Makarenko-OS, K.-Liebknecht-OS, E.-Schneller-OS, H.-Menzel-OS, E.-Thälmann-OS, Fr.-Heckert-OS, M.-Saupe-OS, Wl.-Komarow-OS, Fr.-Metschke-OS, P.-Tschaikowski-OS, Stadtbezirkspionierhaus, alle Karl-Marx-Stadt; E.-Boberg-OS, Karlsburg; J.-Warnke-OS, Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS E. Schneller, Kirchberg; OS Kirchworbis; H.-Matern-OS, Klietz; OS H. Matern, Klockow; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; Goethe-Schule, Königsee; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; Kreisklub Königs Wusterhausen; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Köthen; K.-Marx-OS, Kranichfeld; OS M. Burwitz, Kritzmow; OS Küllstedt; OS Cl. Zetkin, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goethe-schule Lauscha; Pestalozzi-OS, Leegebruch; OS E. Weinert, Legefeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Dr.-S.-Allende-OS, OS IV, OS R. Luxemburg, K.-Liebknecht-OS, E.-Thälmann-OS, EOS K. Marx, alle Leinefelde; OS Br. Plache, Haus d. JP A. Saefkow, beide Leipzig; H.-Beimler-OS, Leisnig; G.-E.-Lessing-OS, Lengenfeld; M.-Poser-OS, Lengfeld; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. M. Schneider, beide Lichtenstein; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; H.-Günther-OS, Lohsa; E.-Weinert-OS, Loitz; 1. OS, Lommatzsch; OS Löcknitz; Haus d. JP Th. Körner, OS H. Schuldt, beide Ludwigslust; Kreismatheklub Lübbenau; W.-Bredel-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Lübz; F.-Dzierzynski-OS, Magdala; A.-Becker-OS, Kaßner-OS, Matheklub des SB, alle Magdeburg; Haus d. JP F. Siemon, Markkleeberg; R.-Luxemburg-OS, Markneukirchen; Dr.-Th.-Neubauer-OS, 7. OS M. I. Kalinin, beide Meiningen; A.-Kuntz-OS, Mellingen; A.-Dürer-OS II, Merseburg; OS H. Rau, Mieste; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fučik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; M.-Burwitz-OS, Neuenkirchen; F.-Dzierzynski-OS, K.-Marx-OS, Förderzirkel Math. d. Kreises, alle Neuhaus; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Neuruppin; OS Neverin; H.-Beimler-OS, Neustadt; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Niederorschel; K.-Schlosser-OS, Niederschöna; OS Fr. Engels, OS W. I. Lenin, Pionierhaus H. Matern, OS J. Gagarin; alle Nordhausen; H.-Beimler-OS, Oberhermsdorf; OS E. Weinert, Oberschönau; Fr.-Fröbel-OS, Oberweißbach; OS der DSF, Oebisfelde; E.-Weinert-OS, Ohrdruf; OS Olbersdorf; Haus der JP H. Coppi, Oranienburg; OS W. Korobkow, Ortrand; EOS K. Marx, Oschersleben; OS P. Kmiec, Osternienburg; O.-Eichler-OS, Oschatz; OS H. Matern, OS W. Pieck, beide Osterwieck; Th.-Müntzer-OS, Osthausen; Haus d JP E. Weinert, Pasewalk; Haus d. JP P. Göring, Parchim; Oberschulbereich J. Fučik, Pfaffroda; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; Spezialistenlager Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; Herbart-OS, Plauen; OS E. Schneller, Polleben; OS 50, Potsdam; W.-Pieck-OS, Premnitz; OS Pritzerbe; W.-Pieck-OS, Goethe-Schule II, beide Pritzwalk; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; OS Fr. Weineck, Radegast; B.-H.-Bürgel-Schule, Rathenow; E.-Thälmann-OS, Remda; Steinhauer-OS, J.-Gagarin-OS, beide Ribnitz; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. E. Hoernle, Richtenberg; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; H.-Matern-Schule, Rochlitz; Pestalozzischule, Rodewisch; J.-Curie-OS, Röbel; E.-Thälmann-OS, Röcknitz; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Haus d. JP, 37. OS K. Meseberg, 1. OS W. Schröder, alle Rostock; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; Schillerschule, Rudolstadt; OS Th. Müntzer, Rüssen; OS K. Niederkirchner, Saal; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. E. Thälmann, Salzwedel; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS Th. Müntzer, Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Pappenheim, OS H. Danz, OS J. G. Seume, OS K. Marx, alle Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schmiedefeld; Schule d. DSF, Schneidlingen; K.-Liebknecht-OS, Schönbrunn; OS K. Liebknecht, Schönebeck; Mathe-Kreisklub Schönberg; H.-Beimler-OS, Schönhausen; Schule d. DSF, Schorssow; E.-Weinert-OS, Schollene; OS Fr. Engels, Schwallungen; Lenin-OS, Schwarzenberg; OS Schweina; Kreispionierhaus M. Böhme, Sebnitz; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS H. Warnke, Sielow; OS Th. Müntzer, Silkerode; Kreisförderzirkel d. Pestalozzi-OS, Sömmerda; G.-Hauptmann-OS, Sohland; OS Glückauf, OS A. Saefkow, beide Sondershausen; OS Sonneberg; OS H. A. Eckelmann, Sponholz; OS A. Becker, Spremberg; OS I J. H. Pestalozzi, 2. OS E. Wölk, beide Stadtroda; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Stahnsdorf; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; J.-Fučik-OS, Steinbach; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; K.-Marx-OS, Stralsund; Haus d. JP Fr. Weineck, Strausberg; OS E. Lasker, Ströbeck; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; OS E. Weinert, Sundhausen; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Tangerhütte; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Templin; J.-Gagarin-OS, Teistungen; OS G. Eisler, Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; W.-Seelenbinder-OS, Thoßfeld; OS Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; Pestalozzischule, Torgelow; OS W. Pieck, Trusetal; OS Dr. S. Allende, Uebigau; A.-Nitz-OS, E.-Welk-OS, Goetheschule, Kreisklub Jg. Math., alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-H.-OS, Untermaßfeld; OS W. Seelenbinder, Unterpörlitz; OS Unterweißbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS III, Velten; OS Vitte; alpha-Klub Vitzenburg; OS Völkershausen; A.-Bebel-OS, Vogelsang; OS Wachow; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Goethe-Schule, Kreisklub Jg. Math., beide Waren; OS Wasserthaleben; OS Wechmar; OS Weißenborn-L.; Kreisklub Jg. Math. Weißwasser; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; J.-Harder-OS, Wesenberg; OS O. Grotewohl, Westerengel; Friedensschule, Wismar; E.-Thälmann-OS, Wittstock; Fr.-Engels-OS, Wittstock; Karl-Marx-OS, Wilkau-Haßlau; OS H. Matern, Wippersdorf; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Wittenberg; OS DSF, Wolgast; O.-Buchwitz-OS, Wolkenburg; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; Dr.-R.-Sorge-OS, Wollin; OS I H. Werner, Lenin-OS, beide Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; OS H. Heine, Wörmlitz; Schillerschule, Lutherschule, beide Zella-Mehlis; W.-Seng-OS, Zepernick; Fr.-Schiller-OS, Zeulenroda; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; 9. OS, Zittau

Ein Dankeschön an unsere Verlage

Die Redaktion *alpha* konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbs 1987/88 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellen uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

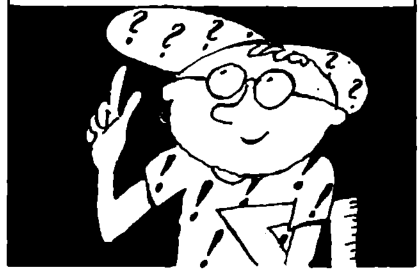
Aufbauverlag, Berlin;
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig;
VEB Domowina Verlag, Bautzen;
VEB Fachbuchverlag, Leipzig;
Der Kinderbuchverlag, Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Buchverlag Der Morgen, Berlin;
Verlag Neues Leben, Berlin;
VEB Postreiter-Verlag, Halle;
Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin;
VE Verlag Technik Berlin;
Urania-Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VE Verlag der Wissenschaften, Berlin

Energieeinsparung – nur ein Prozent?

Ein Prozent mutet wenig an: konkret betrachtet, ist es aber eine beachtliche Größe. Bei der Stadtgaserzeugung z. B.: 1 % der jährlich rd. 7,2 Mrd. m³ produzierten Menge reicht, um beispielsweise 90 000 t Behältergas herzustellen oder um den Bedarf der Betriebe des Ministeriums für Leichtindustrie zu decken. Aus 1 % der geförderten Rohbraunkohle läßt sich eine Menge von Briketts herstellen, mit der man 382 000 Haushalte ein Jahr lang versorgen kann. Und 1 % der jährlichen Elektroenergie entspricht dem Verbrauch von 500 000 Haushalten. – In der volkswirtschaftlichen Bilanz schlägt also jedes eingesparte Prozent zu Buche.
Deshalb lohnt es sich, um die Einsparung jeder Tonne Rohbraunkohle, jeder Kilowattstunde Elektroenergie, jedes Kubikmeters Gas zu ringen. Die Einsparung von Energie ist für unsere Volkswirtschaft nach wie vor der effektivste Weg zur Deckung des Energiebedarfs.

aus: Urania, Berlin

Lösungen



Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Geise
Heft 4/88

Die Sehne AB teilt die Kreisfläche in zwei Teilflächen (Bild 1). Es sei $F1$ der Flächeninhalt jenes Teils, der den Mittelpunkt M des Kreises k nicht enthält. Er ist gleich der Differenz der Flächeninhalte des Kreisausschnitts mit dem Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ und des Dreiecks $\triangle AMB$. Die Größe des Winkels $\overline{\sphericalangle AMB} = 2\alpha$ ist in Bogenmaß anzugeben bzw. aus Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen. Das Bogenmaß ist der Quotient aus Länge des Kreisbogens, der durch den Mittelpunktswinkel bestimmt ist, und Radius. Es ist $2\alpha[\mathrm{rad}] = (\pi/180)\cdot 2\alpha[°]$ die Umrechnungsformel. Daher hat man

$$F1 = \alpha\cdot r^2 - (r\cdot\cos\alpha)\cdot(r\cdot\sin\alpha) = \frac{1}{2}r^2\cdot(2\alpha-\sin 2\alpha).$$

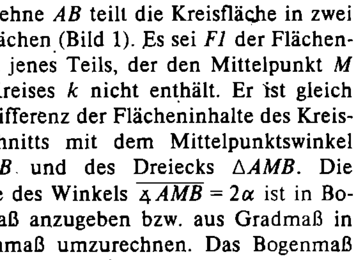
Wegen $F1 + F2 = \pi\cdot r^2$ ergibt sich

$$F2 = \frac{1}{2}r^2\cdot(2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha).$$

Aus der Forderung $F1 : F2 = m : n$ erhält man folgende Bedingungsgleichung für $2\alpha[\mathrm{rad}]$:

$$\frac{n}{m+n}\cdot 2\pi = 2\alpha - \sin 2\alpha \quad (0<\alpha<\pi) \quad (1)$$

Bild 1



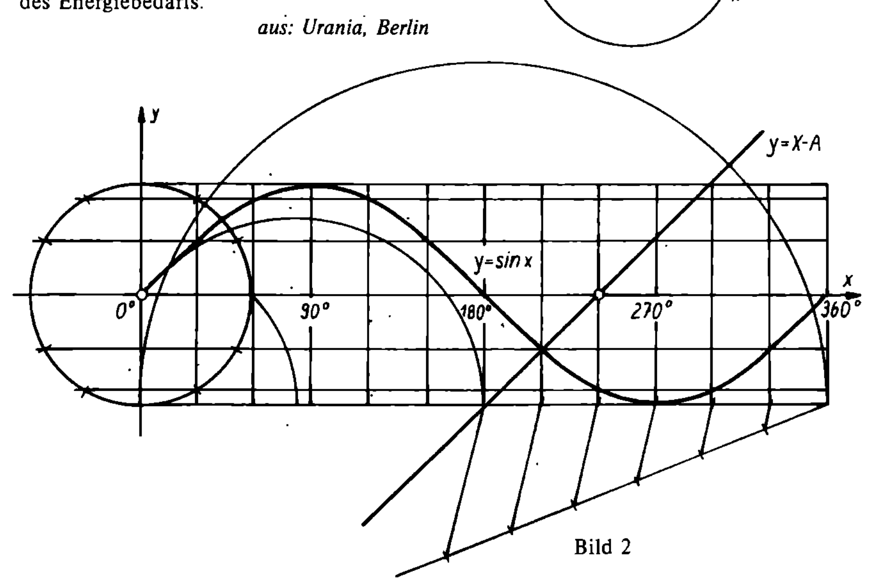


Bild 2

Der Radius r spielt also keine Rolle – erwartungsgemäß, denn eine Lösung der Aufgabe muß gegen zentrische Ähnlichkeiten mit dem Zentrum M (und überhaupt gegen Ähnlichkeiten) unempfindlich (man sagt: invariant) sein.
Die Gleichung (1) trägt einen berühmten Namen. Sie ist eine sogenannte *Keplersche* Gleichung. Sie kommt in der Form

$$M = E - e \cdot \sin E \qquad (2)$$

für Ellipsen mit der numerischen Exzentrizität e vor, wobei Ellipse für Planetenbahn steht. Es ist eine Aufgabe der praktischen Astronomie, für jeden Planeten zu einer recht dichten Folge von Zeitpunkten (grob: für jeden Tag eines Jahres) seine astronomischen Koordinaten im voraus zu bestimmen (Ephemeridenrechnung). Dabei ist jedesmal eine Gleichung der Art (2) zu lösen.
Das besorgen heutzutage natürlich Rechenautomaten, mußte aber vor gar nicht all zu langer Zeit ohne solche Unterstützung bewältigt werden. In beiden Fällen sind schnelle und genügend gute Näherungsverfahren gefragt.
Die Gleichung (1) ist ein Musterbeispiel für eine sogenannte transzendente Gleichung. Sie läßt sich zwar mit beliebiger Genauigkeit lösen, dies aber – wie schon in der Aufgabe erwähnt – nur auf iterativem Wege. Kein Wunder, daß uns diese naheliegende Aufgabe über die Zerlegung einer Kreisfläche noch nicht unter den Olympiadeaufgaben begegnet ist!
Wenden wir uns nun der Aufgabe zu, auf graphisch-konstruktivem Wege eine Näherungslösung zu ermitteln. (Natürlich kann man auch ‚rein numerisch' zu Näherungen kommen, indem man α eine (einfachheitshalber gleichabständige) Folge von Werten des Intervalls $0 < \alpha < \pi$ durchlaufen läßt und die Funktion

$$f(\alpha) = \frac{n}{m+n} \cdot 2\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha$$

nach dem betragsmäßig kleinsten Wert befragt. Aber solch ein Verfahren erlaubt nicht, Vorstellungen oder Erwartungen über die Lösung zu erzeugen.)
Wir setzen $2\alpha = x$ und $\frac{n}{m+n} \cdot 2\pi = A$ und schreiben (1) um in

$$x - A = \sin x \qquad (0 < x < 2\pi) \qquad (3)$$

Diese Gleichung kann interpretiert werden als die Frage nach gemeinsamen Punkten der in einer Ebene mit kartesischem xy-Koordinatensystem dargestellten Kurven

(a) $y = x - A$ und
(b) $y = \sin x$ $\qquad (0 < x < 2\pi) \qquad (4)$

Die Kurve (a) ist eine Strecke, die unter 45° gegen die positive x-Achse geneigt ist. Um sie zeichnen zu können, muß eine Strecke der Länge A konstruiert werden. Die Kurve (b) ist eine Sinuslinie. Sie braucht nur ein einziges Mal konstruiert zu werden, um bei jeder Wahl von m und n und damit zu jedem resultierenden A verwendet werden zu können – das ist der Kern der Idee, die Gleichung (3) in das Gleichungssystem (4) umzuschreiben!
Für $m = 1$, $n = 2$ ergibt sich $A = \frac{2}{3} \cdot 2\pi$.
Bild 2 gibt eine Konstruktion an. Sie verwendet die Näherungskonstruktion $2\pi \cdot r \approx 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot r$. Der Kreisumfang ist in 12 gleiche Teile (zu Mittelpunktswinkel 30° gehörend) zerlegt worden, was mit dem Kreisradius im Zirkel sehr schnell geht. Die Abwicklung des Kreises wurde mit Hilfe des Strahlensatzes in 12 gleiche Teile zerlegt. Die Strecke (a) ist nur zu einem Teil gezeichnet worden. Einige Abszissen sind in dem uns vertrauteren Gradmaß angegeben. Man liest ab: $2\alpha \approx 210°$.
Berechnet man
$f(2\alpha) = A - 2\alpha + \sin 2\alpha$ für $2\alpha = 210°$ und $2\alpha = 211°$, so erhält man $f(210°) = 0{,}0236\ldots$ und $f(211°) = -0{,}008\ldots$
Die graphisch erhaltene Lösung ist also eine recht brauchbare Näherung.

Lösungen zu: Ganz in Familie
Heft 6/88

1. $x + 6 = 2(x - 6)$; $x = 18$.
Annerose ist 18 Jahre alt.
2. $28 + x = 3(4 + x)$; $x = 8$. In acht Jahren ist der Vater zweimal älter als sein Sohn, denn $28 + 8 = 36$ und $4 + 8 = 12$; $36 = 12 + 2 \cdot 12$.
3. $a + b = 19$; $a = b + 3$;
also: $2b + 3 = 19$; $b = 8$; $a = 11$.
Der eine Junge ist 8 Jahre, der andere 11 Jahre alt.
4. $2a + 2 = 100 + b$; $b = 100 - a$;
$2a + 2 = 200 - a$; also $a = 66$.
A ist 66 Jahre alt.
5. $V + S = 48 \qquad (1)$

$$\left(\frac{V}{3}\right)^2 = (S + 2)^2 + 48 \qquad (2)$$

aus (1) folgt: $S = 48 - V$; also
$S + 2 = 50 - V$; in (2) eingesetzt
ergibt $\frac{V^2}{9} = 2548 - 100V + V^2$;
$\frac{8}{9}V^2 - 100V = -2548$ und hieraus
$V = \frac{9 \cdot 25}{4} \pm \frac{3 \cdot 23}{4}$. Die Probe zeigt,
daß nur $V = \frac{9 \cdot 25 - 3 \cdot 23}{4}$ sinnvoll ist. Der Vater ist 39 und der Sohn 9 Jahre alt.
6. $M = 4T$; $M + 16 = 2(T + 16)$, also $T = 8$; $M = 32$. Die Mutter ist 32 Jahre und die Tochter 8 Jahre alt.
7. $M + J = 7$; $M = 2(J - 1)$; also $J = 3$ und $M = 4$. Der Vater hat vier Mädchen und drei Jungen.
8. $4x = 100 - x$; also $x = 20$.
Armin ist 20 Jahre alt.
9. Wir bezeichnen die Anzahl der Personen in jeder Familie mit A, B, C, D, die Anzahl der Kinder in jeder Familie mit a, b, c, d. Es gilt:
$A + B + C + D = 24$; $K = a + b + c + d$,
wobei $a = b + d$, $c = \frac{a}{2}$ und $d = b + 2$;

$$K = (b + d) + b + \frac{a}{2} + (b + 2)$$
$$= 3b + \frac{b + d}{2} + 2 + d; \; K = 5b + 5$$
$$= 5(b + 1).$$

Die Anzahl der Erwachsenen ist:
$E = 24 - K$ und die Anzahl der Eltern
$F - E - 1 = 23 - K$, bei vier Familien ist $4 \leq F \leq 8$, also $4 \leq 23 - K \leq 8$,
hieraus $15 \leq K \leq 19$, also auch:
$15 \leq 5(b + 1) \leq 19$, oder
$3 \leq b + 1 \leq 3{,}8$, also $b + 1 = 3$,
deshalb $b = 2$, daraus folgt
$d = 4$, $a = 6$, $c = 3$, $K = 15$.
Personen in jeder Familie:
A = 2 Erwachsene und 6 Kinder,
B = 3 Erwachsene und 2 Kinder,
C = 2 Erwachsene und 3 Kinder,
D = 2 Erwachsene und 4 Kinder.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 5/88

Ma 5 ■ 2911 Wir rechnen $22 \cdot 2 = 44$;
$44 + (44 - 8) = 44 + 36 = 80$.
Im Faß waren anfangs 80 kg Gurken.

Ma 5 ■ 2912 Die gesuchten Zahlen lauten 334, 344, 354, 434, 444, 454, 534, 544, 554; ihre Summe beträgt 3996; ihre halbe Summe beträgt 1998. Das Ergebnis lautet somit $1998 - 10 = 1988$.

Ma 5 ■ 2913 Es gilt
$157{,}5° = 90° + 45° + 22{,}5°$.
Es sind zwei Winkel von 90° zu konstruieren, die einen Schenkel gemeinsam haben. Einer der beiden Winkel ist zu halbieren (45°), davon einer nochmals (22,5°).

Ma 5 ■ 2914 Von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste gerade ist, sind drei Zahlen gerade und zwei ungerade. Die Summe aus zwei ungeraden Zahlen ist stets gerade.
Die Summe aus lauter geraden Zahlen ist stets gerade.

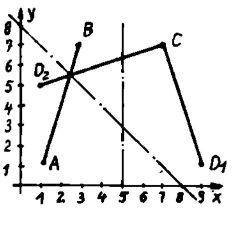
Ma 5 ■ 2915 Lebensalter in Jahren des

	Sohnes	Vaters	
in 5 Jahren	23	57	$2 \cdot 23 = 46 < 57$
in 10 Jahren	28	62	$2 \cdot 28 = 56 < 62$
in 15 Jahren	33	67	$2 \cdot 33 = 66 < 67$
in 16 Jahren	34	68	$2 \cdot 34 = 68$

In 16 Jahren wird der Vater doppelt so alt sein wie der Sohn.

Ma 5 ■ 2916 Angenommen, Axel ist gegenwärtig x Jahre alt;
dann gilt $4 \cdot x + x = 100$, $5 \cdot x = 100$,
$x = 20$. Axel ist gegenwärtig 20 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2917 Der Punkt C kann Bild des Punktes A, aber auch Bild des Punktes B bei einer Spiegelung sein. Ist C Bild von B, so ist die Gerade, die durch den Punkt (5;0) geht und senkrecht zur x-Achse steht, die Spiegelachse, und A hat den Bildpunkt D_1 (9;1). Ist C jedoch Bild von A, so ist die Gerade durch die Punkte (0;8) und (8;0) die Spiegelachse, und B hat den Bildpunkt D_2 (1;5). Die Punkte D_1 und D_2 sind alle möglichen Punkte D, für die die Strecke $\overline{CD}$ das Bild der Strecke $\overline{AB}$ bei einer Spiegelung ist.



Ma 6 ■ 2918 Es sei $z = \overline{abcd}$ eine vierstellige natürliche Zahl in Dezimalschreibweise; dann gilt
$1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b, c, d \leqq 9$.
Ferner gilt $a + b + c + d = 14$ und
$a \cdot d = a + d = b$. Aus $a \cdot d = a + d$
folgt $a = 2$ und $d = 2$, also $b = 4$ und
somit $c = 6$.
Es handelt sich um die Zahl 2462.

Ma 6 ■ 2919 Die erste Seite ist 18 m, die zweite 28 m lang. Die dritte Seite könnte 9 m oder 14 m lang sein. Wegen $9 + 18 = 27$ und $27 < 28$ ist die dritte Seite 14 m lang. Der Zaun ist deshalb $(28 + 18 + 14 - 1)$ m = 59 m lang.

Ma 6 ■ 2920 Wir rechnen
$3700 : (70 + 4) = 3700 : 74 = 50$;
$2 \cdot (72 + 48) = 2 \cdot 120 = 240$. Es ist
eine 240 m lange Strecke zurückzulegen.

Ma 6 ■ 2921 Aus $a \cdot b = 10$ und
$a \cdot b \cdot c = 70$ folgt $10 \cdot c = 70$,
also $c = 7$. Aus $a \cdot c = 14$ und $c = 7$
folgt $a \cdot 7 = 14$, also $a = 2$.
Aus $a \cdot b = 10$ und $a = 2$ folgt
$2 \cdot b = 10$, also $b = 5$.

Ma 6 ■ 2922 Wegen $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ gilt für die Quersumme q der Zahl n
$1 \leqq q \leqq 36$. Für die Zahl n gilt deshalb
$2012 - 36 \leqq n \leqq 2012 - 1$, also
$1976 \leqq n \leqq 2011$. Es existieren genau
zwei Lösungen, nämlich
$1987 + 25 = 2012$ und $2005 + 7 = 2012$.

Ma 6 ■ 2923 Angenommen, Doris hat x Briefmarken; dann hat Bernd $3 \cdot x$ Briefmarken und Frank $(3 \cdot x - 50)$ Briefmarken. Das sind zusammen $(7 \cdot x - 50)$ Briefmarken, und es gilt
$7 \cdot x - 50 = 370$, $7 \cdot x = 420$, $x = 60$.
Somit besitzt Doris 60, Bernd 180 und Frank 130 Briefmarken.

Na/Te 6 ■ 425 In einer Stunde legt das Fahrzeug 45 km zurück. 12 min ist der 5. Teil einer Stunde, demzufolge beträgt der zurückgelegte Weg 9 km.

Ma 7 ■ 2924 Angenommen, Bettina ist x Jahre alt; dann ist Elke $4x$ Jahre, Doris $(4x - 2)$ Jahre, Christian $(x + 2)$ Jahre, Anton $3 \cdot (x + 2) = (3x + 6)$ Jahre, Gisela $(3x + 3)$ Jahre, Frank $2x$ Jahre und Hans $(4x + 1)$ Jahre alt. Das sind zusammen $(22x + 10)$ Jahre, und es gilt
$22x + 10 = 76$, $22x = 66$, $x = 3$.
Bettina ist 3, Elke 12, Doris 10, Christian 5, Anton 15, Gisela 12, Frank 6 und Hans 13 Jahre alt.

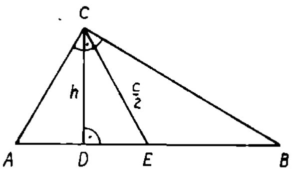
Ma 7 ■ 2925 Aus $a \cdot (b + c) = b \cdot (a + c)$
folgt $ab + ac = ab + bc$, $ac = bc$, $a = b$,
also $b = 9$.
(1) $c = 10$; $(b; c) = (9; 10)$
(2) $c = 8$; $(b; c) = (9; 8)$

Ma 7 ■ 2926 Ein mögliches Beispiel wäre das folgende:

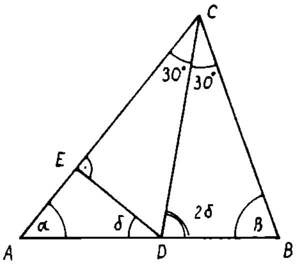
1	8	9
2	5	7
3	4	6

$1 \cdot 8 \cdot 9 = 72$
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$
$3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$
214

Ma 7 ■ 2927 Es sei D Fußpunkt der Höhe $\overline{CD}$. Nach dem Satz des Thales gilt $\overline{EA} = \overline{EB} = \overline{EC}$, wobei E der Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist. Für das rechtwinklige Dreieck DEC gilt somit $\overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot c$. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die längste Seite.
Deshalb gilt $\overline{CD} < \overline{CE}$ bzw. $h < \frac{1}{2} \cdot c$.



Ma 7 ■ 2928 Nach Voraussetzung hat Winkel $\sphericalangle ACD$ die Größe 30°. Deshalb hat Winkel $\sphericalangle CDE$ die Größe $90° - 30° = 60°$. Winkel $\sphericalangle ADE$ habe die Größe δ. Für den gestreckten Winkel $\sphericalangle ADB$ gilt dann
$\delta + 60° + 2 \cdot \delta = 180°$, also $\delta = 40°$.
Daraus folgt weiter $\alpha = 90° - 40° = 50°$
und $\beta = 180° - 30° - 80° = 70°$.



Na/Te 7 ■ 426 Der Körper hat ein Volumen von 30 cm³ (1 ml = 1 cm³). Die Art der Flüssigkeit spielt keine Rolle. Aus der Gleichung zur Berechnung der Dichte ergibt sich: Dichte

$$\text{eines Stoffes} = \frac{\text{Masse des Körpers}}{\text{Volumen des Körpers}}$$

$$\text{Dichte} = \frac{234\,\text{g}}{30\,\text{cm}^3} = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Der Körper könnte aus Stahl bestehen.

Na/Te 7 ■ 427 Unter Verwendung der Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeit benötigt der

$$1.\ \text{Fahrer}\quad t_1 = \frac{100\,\text{km}}{50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2\,\text{h};\ \text{der zweite}$$

$$\text{Fahrer}\ t_2 = \frac{50\,\text{km}}{40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{50\,\text{km}}{60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

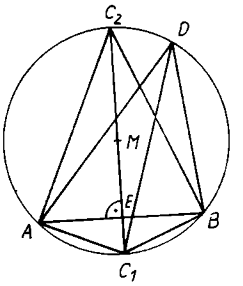
$= 2{,}083$ h, also mehr Zeit.
Der zweite Fahrer müßte den 2. Teil der Strecke in 0,75 h durchfahren.
Das bedeutet:

$$v_2 = \frac{50\,\text{km}}{0{,}75\,\text{h}} = 66{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ \text{d. h. mit}\ 67\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ma 8 ■ 2929 Nach Aufgabenstellung soll
$\frac{4a - x}{5} + 2 > 0$ sein. Wir formen äquivalent um und erhalten
$4a - x + 10 > 0$, $a > \frac{x - 10}{4}$.
Nun soll $\frac{x - 10}{4} = -\frac{3}{4}$ sein.
Das ist nur für $x = 7$ der Fall.
Für alle reellen Zahlen a mit $a > -\frac{3}{4}$ ist $\frac{4a - 7}{5} + 2 > 0$, wie die Probe bestätigt, die wir dem Leser überlassen.

Ma 8 ■ 2930 Es sei $100a + 10b + c$ eine solche Zahl. Aus $a + b + c = 9$ folgt
$c = 9 - a - b$. Nun gilt
$100a + 10b + (9 - a - b) + 135$
$= 100(9 - a - b) + 10a + b$,
$189a + 108b = 756$, $7a + 4b = 28$.
Wegen $a \neq 0$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 4$ und somit $b = 0$, also $c = 5$. Die Zahl lautet 405, und es gilt $540 = 405 + 135$.

Ma 8 ■ 2931 Der auf $\overline{AB}$ senkrecht stehende Durchmesser halbiert sowohl die Sehne $\overline{AB}$ als auch den zu $\overline{AB}$ gehörenden Bogen und seinen entgegengesetzten Bogen. Es sind also die Dreiecke AC_1E und C_1BE kongruent, ebenso die Dreiecke AEC_2 und EBC_2.



Es sei D ein beliebiger Punkt des Kreises k. Dann sind die Peripheriewinkel $\sphericalangle ADC_1$ und $\sphericalangle C_1DB$ kongruent, da sie über Bögen gleicher Länge stehen. Daraus folgt, daß $\overline{DC_1}$ Winkelhalbierende des Peripheriewinkels $\sphericalangle ADB$ ist. Entsprechendes gilt für C_2, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 2932 Nach den Bedingungen der Aufgabe kann man vier Fälle unterscheiden. Die Anzahl der fehlenden Kugeln in den 10 Fächern kann wie folgt verteilt sein:

(1)	3	1	4	4	4	4	0	0	0	0
(2)	3	3	1	1	4	4	4	0	0	0
(3)	3	3	3	1	1	1	4	4	0	0
(4)	3	3	3	3	1	1	1	1	4	0

In jedem Falle fehlen 20 Kugeln; es sind also noch 80 Kugeln in der Schachtel.

Ma 8 ■ 2933 Für die Farben der Rosen in Christas und Daniellas Haar gibt es nur drei verschiedene Möglichkeiten:
(1) beide weiß, (2) eine weiß, eine rot und (3) beide rot.
Im Fall (1) hätte Annette in den Haaren ihrer Freundinnen zwei weiße Rosen gesehen und geantwortet: „Ich habe eine rote Rose im Haar." In Fall (2) hätte Beate ebenso wie Annette in den Haaren ihrer Freundinnen Christa und Daniella eine weiße und eine rote Rose gesehen. Aus Annettes Antwort: „Ich weiß nicht, welche Farbe die Rose in meinem Haar hat", hätte Beate erkannt, daß sie eine rote Rose im Haar hat, und sie hätte nicht geantwortet: „Ich weiß es auch nicht." Es kann also nur der Fall (3) vorliegen: Christa und Daniella haben beide eine rote Rose im Haar.

Na/Te 8 ■ 428 Gesucht: v_2 in $\frac{m}{s}$

Gegeben: $v_1 = 10\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

$$A_1 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$A_2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^2$$

Aus $A_1 : A_2 = v_2 : v_1$ ergibt sich $v_2 = 4v_1$. Die Strömungsgeschwindigkeit im engeren Teil beträgt $40\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Na/Te 8 ■ 429 Dichte von Kork:

$\varrho_K = 0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;

Dichte von Wasser: $\varrho_W = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;

Volumen V des Ringes:

$V = \frac{m}{\varrho_K} = 3600\,\text{g} \cdot \frac{\text{cm}^3}{0{,}2\,\text{g}} = 18\,000\,\text{cm}^3$

Auftriebskraft F_A des vollständig eingetauchten Ringes aus der Masse des verdrängten Wassers m_W:

$m_W = \varrho_W \cdot V$; $m_W = 18\,000\,\text{g}$.

Der Ring erfährt eine Auftriebskraft F_A von 180 N (Archimedisches Gesetz). Damit der Ring noch schwimmt, muß gelten: Auftriebskraft (F_A) = Gewichtskraft des Ringes (F_R) + Gewichtskraft des Körpers (F_G). Es ergibt sich $F_G = 180\,\text{N} - 36\,\text{N} = 144\,\text{N}$. Die Gewichtskraft des Körpers darf höchstens 140 N betragen.

Ma 9 ■ 2934 Angenommen, der Korb enthielt n Äpfel. Das erste Kind erhielt

$1 + \frac{n-1}{7} = \frac{n+6}{7}$ Äpfel. Im Korb

verblieben $n - \frac{n+6}{7} = \frac{6n-6}{7}$ Äpfel.

Das zweite Kind erhielt

$2 + \frac{6n-6-14}{49} = \frac{6n+78}{49}$ Äpfel.

Nun gilt $\frac{n+6}{7} = \frac{6n+78}{49}$,

$7n + 42 = 6n + 78$, $n = 36$. Der Korb enthielt 36 Äpfel. Jedes Kind erhielt

$\frac{n+6}{7}$, also $\frac{36+6}{7} = 6$ Äpfel. Somit hat diese Mutter sechs Kinder.

Ma 9 ■ 2935 Setzt man den Text in Gleichungen um, so erhält man das folgende System von zwei Gleichungen mit genau zwei Variablen:

(1) $\frac{10x+y}{y} = 12 + \frac{2}{y}$; $y \neq 0$

(2) $\frac{10y+x}{x} = 9 + \frac{8}{x}$; $x \neq 0$

Die schrittweise Umformung ergibt

(1) $10x + y = 12y + 2$

(2) $10y + x = 9x + 8$

Es ergeben sich $y = 8$ und $x = 9$;

d. h.: $L = \{(9; 8)\}$.

Die gesuchte zweistellige Zahl ist 98.

Probe: $98 : 8 = 12 + \frac{2}{98}$

und $89 : 9 = 9 + \frac{8}{89}$.

Ma 9 ■ 2936 Wir teilen zwei benachbarte Quadratseiten in je vier gleiche Teile und zeichnen durch die Teilpunkte Strecken, die parallel zu den gegenüberliegenden Quadratseiten sind. Auf diese Weise zerlegen wir das Quadrat in 16 kleinere Quadrate, die sämtlich paarweise zueinander kongruent sind.

In einem der 16 Quadrate müssen drei dieser Punkte liegen, anderenfalls wäre die Anzahl der Punkte kleiner als 33.

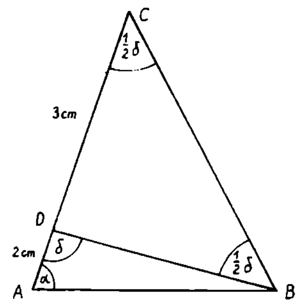
Der Umkreis dieses Quadrates hat nach dem Satz des Pythagoras einen Durchmesser von $d = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, also einen Radius $r = \frac{a}{8}\sqrt{2}$.

Nun gilt $\frac{a}{8}\sqrt{2} < \frac{a}{5}$, denn $\frac{2a^2}{64} < \frac{a^2}{25}$ bzw.

$\frac{a^2}{32} < \frac{a^2}{25}$ bzw. $\frac{1}{32} < \frac{1}{25}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen!

Ma 9 ■ 2937 Nach Umkehrung des Außenwinkelsatzes beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\delta$. Damit ist das Dreieck DBC gleichschenklig; die Länge von $\overline{DC}$ ist gleich der Länge von $\overline{DB}$.



Man konstruiert das Teildreieck ABD nach dem Kongruenzsatz ssw. $\overline{AD}$ ist über D hinaus zu verlängern, $\overline{DC}$ wird an $\overline{AD}$ angetragen. C ist mit B zu verbinden. Das Teildreieck ABD und der Punkt C sind eindeutig konstruierbar; somit ist es auch das Dreieck ABC.

Ma 9 ■ 2938 a) Es sei M der Mittelpunkt des Würfels, a dessen Kantenlänge und XYZ das zu untersuchende Dreieck.

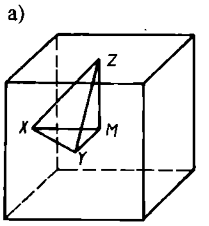
Es gilt

$\overline{MX} \cong \overline{MY} \cong \overline{MZ} = \frac{a}{2}$ und

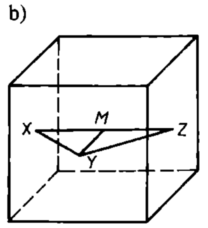
$\overline{MX} \perp \overline{MY} \perp \overline{MZ}$.

Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke MXY, MXZ und MYZ (sws). Daraus folgt $\overline{XY} \cong \overline{XZ} \cong \overline{ZY}$, w. z. b. w.

a)



b)



b) Wegen $\overline{MX} \cong \overline{MY} \cong \overline{MZ}$ liegen X, Y, Z auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $\overline{XZ}$. Nach dem Satz des Thales ist dann der Winkel $\sphericalangle XYZ$ ein Rechter und somit das Dreieck XYZ rechtwinklig, w. z. b. w.

Na/Te 9 ■ 430 Gegeben: Gesamtlänge der Leitung (Hin- und Rückleitung) $l = 70\,\text{m}$

Aus dem Zusammenhang zwischen U, I und R an einem Leiterstück und dem Widerstandsgesetz $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ ergibt sich:

$U = I \cdot l \cdot \frac{\varrho}{A}$;

$U = 12\,\text{A} \cdot 70\,\text{m} \cdot \frac{0{,}017\,\Omega \cdot \text{mm}^2}{2{,}5\,\text{mm}^2 \cdot \text{m}} = 5{,}71\,\text{V}$

Der Spannungsverlust beträgt rund 5,7 V.

Na/Te 9 ■ 431 Gegeben: Masse des Eises

$m = 2\,\text{kg}$

spezifische Schmelzwärme des Eises:

$q_s = 334\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

spezifische Wärme des Wassers

$c = 4{,}186\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot K}$

spezifische Verdampfungswärme des Wassers $q_v = 2260\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Das Eis muß geschmolzen, das Wasser auf 100 °C erhitzt und anschließend verdampft werden. Dazu ist die Wärme $Q = m(q_s + c \cdot 100\,K + q_v)$ notwendig.

$Q = 6025\,\text{kJ}$.

Es müssen mindestens $6 \cdot 10^3\,\text{kJ}$ zugeführt werden. (Es ist nicht berücksichtigt worden, daß auch zugeführte Wärme an die Umgebung abgegeben wird und das Gefäß auch erhitzt werden muß.)

Ma 10/12 ■ 2939 Es gilt sicher $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Wir dividieren durch $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ und erhalten

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Wir formen weiter um:

$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$ und somit

$(\tan\alpha + \cot\alpha)\sin 2\alpha = 2$, was zu zeigen war.

Ma 10/12 ■ 2940 1986 betrug die Anbaufläche für Getreide

$117 \cdot 10^6\,\text{dt} : 46{,}4\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}} = 2\,521\,552\,\text{ha}$.

Wenn die Anbaufläche um 10 000 ha zurückgehen soll, stehen noch 2 511 552 ha zur Verfügung.

Der durchschnittliche Hektarertrag für 12 Mio t Gesamternte müßte dann

$120 \cdot 10^6\,\text{dt} : 2\,511\,552\,\text{ha} = 47{,}78\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$

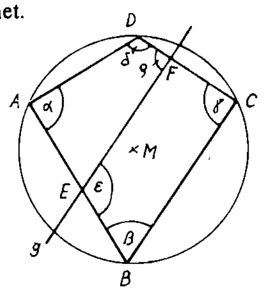
sein. Die Steigerung von

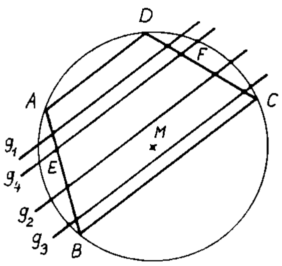
$46{,}4\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$ auf $47{,}78\,\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$ sind $\frac{47{,}78}{46{,}4} \approx 1{,}03$,

also etwa 3 %.

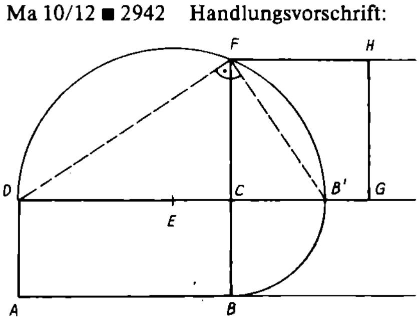
Ma 10/12 ■ 2941 Das Bild zeigt ein Sehnenviereck $ABCD$, und es gilt $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Es sei g eine Gerade mit der geforderten Eigenschaft. Dann schneidet g zwei gegenüberliegende Seiten von $ABCD$ in E und F, und die Vierecke $AEFD$ und $EBCF$ sind dann ebenfalls Sehnenvierecke. Dann muß auch gelten: $\alpha + \zeta = \gamma + \varepsilon = 180°$. Aus den angegebenen Gleichungen folgt $\zeta = \gamma$ und $\varepsilon = \alpha$. Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes gilt $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$. Da ζ und δ innere

entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen sind, muß $\zeta + \delta = 180°$ sein. Wegen $\alpha + \zeta = 180°$ ergibt sich $\alpha = \delta$. Das Sehnenviereck $ABCD$ muß also ein gleichschenkliges Trapez sein. Da umgekehrt jedes gleichschenklige Trapez auch Sehnenviereck ist, sind die gesuchten Vierecke alle gleichschenkligen Trapeze. Diese werden durch jede schneidende Gerade, die parallel zu den parallelen Seiten des gleichschenkligen Trapezes ist, in zwei ebensolche Trapeze zerlegt.
Als Beispiele wurden vier Geraden eingezeichnet.





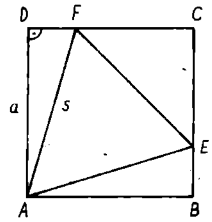
Ma 10/12 ■ 2942 Handlungsvorschrift:



1. Man zeichne ein beliebiges Rechteck $ABCD$; $ABCD$ sei kein Quadrat!
2. Man verlängere $\overline{DC}$ über C hinaus um $\overline{CB}$. Man erhält B'.
3. Um den Mittelpunkt E von $\overline{B'D}$ zeichne man den Thaleskreis!
4. Man verlängere $\overline{BC}$ über C hinaus und bezeichne den Schnittpunkt mit dem Thaleskreis mit F!
5. Das Quadrat mit der Seite $\overline{CF}$ ist nach dem Höhensatz flächengleich dem Rechteck $ABCD$; es gilt
$\overline{FC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{CB'}\,(\overline{CB'} = \overline{CB}!)$.
Man bezeichnet das Quadrat mit $CGHF$.

Ma 10/12 ■ 2943 Aus
$\overline{AE} \cong \overline{AF}, \overline{AB} \cong \overline{AD}$
und $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle ADF$ folgt nach bekanntem Kongruenzsatz $\triangle ABE \cong \triangle DAF$ und damit auch $\overline{BE} \cong \overline{DF}$ und $\overline{FC} \cong \overline{CE}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{DF} = \sqrt{s^2 - a^2}$. Es folgt $\overline{FC} = a - \sqrt{s^2 - a^2}$. Im Dreieck FEC gilt nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = 2(a - \sqrt{s^2 - a^2})^2$. Unter Beachtung von $2a^2 = \overline{AC} > s^2$ folgt nun schrittweise:

$$s^2 = 2(a^2 - 2a\sqrt{s^2 - a^2} + s^2 - a^2),$$
$$s^2 = 4a\sqrt{s^2 - a^2}, \; s^4 = 16a^2(s^2 - a^2),$$
$$16a^4 - 16a^2s^2 = -s^4,$$
$$(4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 2s^2 + (2s^2)^2 = 3s^4,$$
$$(4a^2 - 2s^2)^2 = 3s^4, \; 4a^2 - 2s^2 = \sqrt{3} \cdot s^2,$$
$$a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} s^2, \; a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} s.$$



Na/Te 10/12 ■ 432 Da sich der Körper beschleunigt bewegen soll, kann aus dem Weg-Zeit-Gesetz die Beschleunigung a berechnet werden. Diese Beschleunigung plus Fallbeschleunigung ist die Gesamtbeschleunigung, die auf den Körper einwirken muß. Die erforderliche Kraft ergibt sich aus dem Newtonschen Grundgesetz.

$$F = m \cdot \left(9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + a\right),$$
$$F = m \cdot \left(9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \left(2 \cdot \frac{s}{t^2}\right)\right).$$

Mit $m = 200$ kg, $s = 3$ m und $t = 5$ s ergibt sich $F = 2010$ N. Es ist eine Kraft von $2 \cdot 10^3$ N erforderlich.

Na/Te 10/12 ■ 433 Um das Fahrzeug auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, ist die Beschleunigungsarbeit
$W_{\text{Beschl.}} = 0{,}5 \cdot m \cdot v^2$ erforderlich.
Da der Beschleunigungsvorgang t dauert, muß der Motor eine Leistung

$$P = \frac{W_{\text{Beschl.}}}{t} \text{ aufbringen.}$$

$$P = 5625\,\text{N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5625\,W.$$

Die notwendige Leistung beträgt 5,6 kW.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Wir legen in eine Schachtel 1987 weiße und 7891 schwarze Kugeln. Außerhalb der Schachtel haben wir auch 1000 schwarze Kugeln. Wir nehmen zwei Kugeln aus der Schachtel. Wenn sie verschiedene Farben haben, legen wir die weiße zurück in die Schachtel. Haben sie dieselbe Farbe, legen wir eine schwarze Kugel in die Schachtel. Das führen wir fort, bis nur noch eine Kugel übrig ist. Welche Farbe hat sie?
Lösung: Bei jedem Schritt nimmt die Anzahl der Kugeln in der Schachtel um 1 ab und die Zahl der weißen Kugeln in der Schachtel bleibt entweder konstant oder verringert sich um 2. Da wir mit einer ungeraden Zahl weißer Kugeln begannen, müssen wir bei einer ungeraden Zahl enden – also ist die letzte Kugel weiß.

▲2▲ Kolja kauft am Büfett drei Tüten Sahnebonbon, Witja zwei Tüten. Als Aljoscha ans Büfett kam, waren die Bonbons schon alle. Die Freunde teilten die Bonbons gleichmäßig auf. Es ergab sich, daß Aljoscha 25 Kopeken an die Freunde zahlen mußte. Wieviel kostete eine Tüte Bonbons, und wieviel mußte Aljoscha an Kolja und wieviel an Witja zahlen?
Lösung: Da Aljoscha 25 Kopeken zu zahlen hatte, kosteten die fünf Tüten insgesamt $3 \cdot 25 = 75$ Kopeken. Eine Tüte kostete also 15 Kopeken. Kolja hatte drei Tüten für insgesamt 45 Kopeken gekauft. Er gab für 45 Kopeken − 25 Kopeken = 20 Kopeken Bonbons an Aljoscha. Witja, der zwei Tüten für insgesamt 30 Kopeken erworben hatte, gab davon für 30 Kopeken − 25 Kopeken = 5 Kopeken Bonbons an den Freund ab. Aljoscha hatte deshalb 20 Kopeken an Kolja und 5 Kopeken an Witja zu entrichten.

▲3▲ Der Kilometerzähler eines Fahrzeugs gibt 126 km an, wenn die tatsächlich zurückgelegte Strecke 118 km beträgt. Wie lang ist die tatsächlich zurückgelegte Strecke, wenn der Kilometerzähler 550 km anzeigt?
Lösung: $\frac{x}{550\,\text{km}} = \frac{118\,\text{km}}{126\,\text{km}}$; $x = 515$ km.
Die tatsächlich zurückgelegte Strecke beträgt dann 515 km. ▲

▲4▲ Löse das im Bild dargestellte Kryptogramm. (Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben – verschiedene Ziffern)
Lösung: 45 203 + 45 203 = 90 406

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Vom Kern zum Wort

A n o m a l i e
L e g e n d r e
G o l d b a c h
E l e m e n t e
B e g r i f f e
R a d i k a n d
A n a l o g i e

Wissen und Rechnen
155 490 : 730 = 213

Tarnung
Die Figuren der Bilder 1 und 5 gehören nicht dazu.

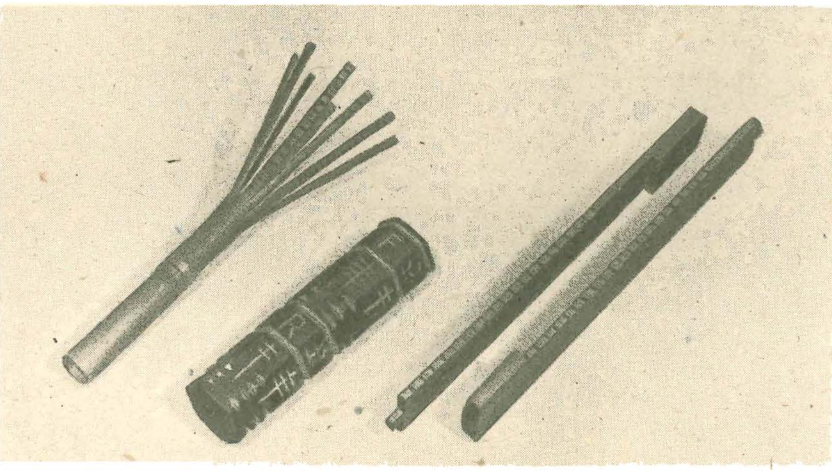
Beständige Gleichheit
a) 64 + 85 = 149; b) 84 + 56 = 140;
c) 85 + 55 = 140; d) 94 + 56 = 150;
e) 94 + 55 = 149; f) 64 + 55 = 119;
g) 84 − 65 = 19

Verdecktes Kartenspiel
A: Kreuz König; B: Karo As;
C: Pik Bube; D: Herz Sechs

Ziel: Gleichheit
a) $9 - 2 + 12 \cdot 5 = 67$;
b) $13 + 15 + 2 \cdot 14 = 56$;
c) $10 - 6 : 6 + 11 = 20$;
d) $18 - 12 + 2 \cdot 14 = 34$;
e) $7 \cdot 5 + 13 - 10 = 38$

Die Hemden des Junggesellen
7 + 7 + 1 = 15 Hemden

Die Entlarvung des Orakels
Links steht der Gott der Diplomatie, in der Mitte der Gott der Lüge, rechts der Gott der Wahrheit.



Drei verschiedene Kerbhölzer. Zählstock aus geschlitztem Bambus (beispielsweise zum Zählen von Kokosnüssen), Stiala de latg (Milchstab aus dem Bündner Oberland) und ein Doppelholz (von links nach rechts).

Am Anfang war die Kerbe

Das Zählen ist eine der wichtigsten abstrakten Tätigkeiten, die das menschliche Denken bereits in grauer Vorzeit entwikkelt hat. Die ältesten schriftlichen Denkmale für das Zählen finden wir bereits in der schriftlosen Zeit der Menschheit:
die Zahl wurde nämlich bereits vor dem Wort aufgeschrieben, genauer Striche wurden eingeritzt oder eingekerbt. Das älteste uns bekannte Zeugnis dieser Art ist ein mit 55 Kerben versehener Knochen, der in Mähren (ČSSR) gefunden wurde und der rund 30000 Jahre alt ist. Die Kerben sind einfach aneinander gereiht. Es ist ziemlich sicher, daß damals für die Zahl 55 noch gar kein Zahlwort in der Sprache unserer Vorfahren vorhanden war. Aber demjenigen, der die Kerben gemacht hatte, war klar, daß es eine – wie wir heute sagen – umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen seinen Kerben und einer (uns unbekannten) Menge von 55 Elementen, die er zählte, gibt. Noch heute ist diese alte Art des Zählens im Gebrauch, wenn mit Strichlisten die Anzahl von Dingen erfaßt wird (z. B. Getränke vom Ober in Gaststätten, Kartoffelsäcke beim Liefern in Haushalte). Der Übersichtlichkeit halber reihen wir die Striche nicht einfach, sondern „bündeln" sie. Die verbreitetste Form des Bündelns ist, jeden fünften Strich als Querstrich zu schreiben. Gezählt wird dann in Fünferschritten.
Die Striche sind für das Zählen lediglich eine Hilfsmenge. Es sind anstelle der Striche oder Kerben auch Stäbchen oder Steine benutzt worden und natürlich auch die stets vorhandene Hilfsmenge unserer 10 Finger.
Die ägyptischen oder römischen Ziffern konnten nur von Angehörigen der gebildeten Schichten gelesen werden; die Kerben waren und sind Ziffern, die dem Volk ohne Unterweisung verständlich sind. Auf Holzstöcken wurden die Kerben einfach aneinander gereiht oder durch verschiedene Formen gebündelt (quer eingeritzte Kerben, gekreuzte Kerben, breitere Kerben). Übrigens entwickelten sich die römischen Ziffern vermutlich aus den Kerben: I, II und III sind Kerben, und die fünfte bzw. zehnte Kerbe wurde in der Form V bzw. X gemacht (also die Reihung der Kerben mit dem Durchkreuzen zur Bündelung erhoben).
Es gab noch einen gewichtigen Grund, der dem Kerbholz im Volke eine weite Verbreitung sicherte. Papier gab es in Deutschland erst seit dem 14. Jahrhundert, und das seit der Antike gefertige Pergament war teuer. Das sicherte den leicht herstellbaren Kerbhölzern einen festen Platz im Rechnungswesen. Schuld wurde auf einfache Art aufgekerbt. Die Redewendung „etwas auf dem Kerbholz haben" ist in unserer Sprache noch erhalten. Das teilweise Löschen einer Schuld wurde durch Auskerben und das vollständige Löschen durch Vernichten der Kerbhölzer vollzogen. Auch hier ist noch eine Redewendung lebendig: „glatte Rechnung" meinte ursprünglich nämlich das ausgekerbte bzw. glatte Kerbholz.
Neben den einfachen Kerbhölzern mit Kerbe an Kerbe gab es auch Doppel- und Dreifachhölzer. Das sind Kerbhölzer, die längs in zwei oder drei Teile zerlegt wurden, so daß Schuldner und Gläubiger oder mehrere an einem Handel beteiligte Personen einen „Beleg" hatten, der nur gemeinsam bei Lieferung oder Leistung geändert wurde. Eine ganz leichte doppelte oder mehrfache Buchführung, die betrugsicher war. Der Code civil, die Napoleonische Gesetzgebung von 1804, akzeptierte Kerbhölzer als rechtsgültige Vertragsbestandteile. Das chinesische Zeichen für Vertrag enthält auch das Kerbholzsymbol. Die Wiener Schneeabfuhr benutzte noch vor einigen Jahrzehnten dreiteilige Kerbhölzer (Aufladeplatz, Fuhrmann, Abladeplatz), und in Schweizer Dorfgemeinschaften wird noch heute durch Milchstäbe über die gemolkene Milch Buch geführt.
Über den flämischen Maler Pieter Bruegel (16. Jahrhundert) wird uns folgende hübsche Geschichte berichtet: „Solange er in Antwerpen wohnte, hielt er mit einer Magd aus, die er auch geheiratet hätte, wenn ihm nicht mißfallen hätte, daß sie jederzeit zu lügen gewohnt war. Er machte mit ihr eine Absprechung oder einen Vertrag, daß er alle Lügen anmerken werde auf einem Kerbstock, wozu er einen redlich langen nahm, und wenn der Kerbstock mit der Zeit voll geworden sei, sollte es mit dem Heiraten ganz und gar aus sein, wie es denn geschah, ehe lange Zeit um war." In einem Frauenlexikon, das 1715 in Leipzig gedruckt wurde, heißt es, daß im städtischen Gebrauch „... ein langes schmales Hölzlein, gedoppelt ineinander gelegt, worauf das Gesind, so das Tischbier außer dem Hause zu holen pflegten, kannenweise eingekerbt und anschreiben läßt" üblich war.
Wir haben gesehen, daß das Kerbholz es mehrfach zu amtlichen Ehren gebracht hat. Beeindruckend ist seine Rolle im englischen Finanzwesen. Seit dem 12. Jahrhundert verbuchte die englische Staatsbank Gelder auf Kerbhölzern (sogenannten „Exchequer Tallies"), und sie gab damit auch Zahlungsanweisungen aus.
Der Bankkunde (der Kerbholzbesitzer – „the stock holder") verglich (engl. to chek) seinen Teil des Kerbholzes mit dem der Bank: Der Ursprung unseres Schecks als gesicherte Zahlungsanweisung. Die Kerbhölzer waren im traditionsbewußten Vereinigten Königreich bis ins 19. Jahrhundert hinein üblich – eine einmalige Art des bargeldlosen Verkehrs. 1834 verfügte man schließlich, die amtlichen Bestände an Kerbhölzern zu verbrennen, was so gründlich im Parlament besorgt wurde, daß dieses gleich selbst mit abbrannte.
Abschließend einige sprachliche Bemerkungen zum Kerbholz. „Talo" war die altgermanische Bezeichnung für die Einschnitte am Kerbholz. Hier wurzeln die englischen Wörter „to tell" und „to talk" (erzählen) oder „the tale" (Erzählung). Die Wendung „all told" (alles in allem) meint wörtlich „alles gezählt". Die französischen oder englischen Wörter für Kerbholz sind „taille" (die Einkerbung) und „tally". Mit dem Kerbholz einkaufen gehen, heißt auf französisch „achater à la taille" und bedeutet natürlich, daß man auf Pump kauft. Das Einritzen von Zahlen wird im Altgermanischen mit „writan" ausgedrückt, was sich heute im englischen „to write" (schreiben) findet. Den Übergang vom Einschneiden zum Rechnen läßt das Lateinische ausgezeichnet erkennen. Schneiden heißt dort „putare". Einschneiden oder anrechnen „imputare", rechnen „computare" (Computer!).

R. Thiele

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 1 · Seiten 1 bis 24