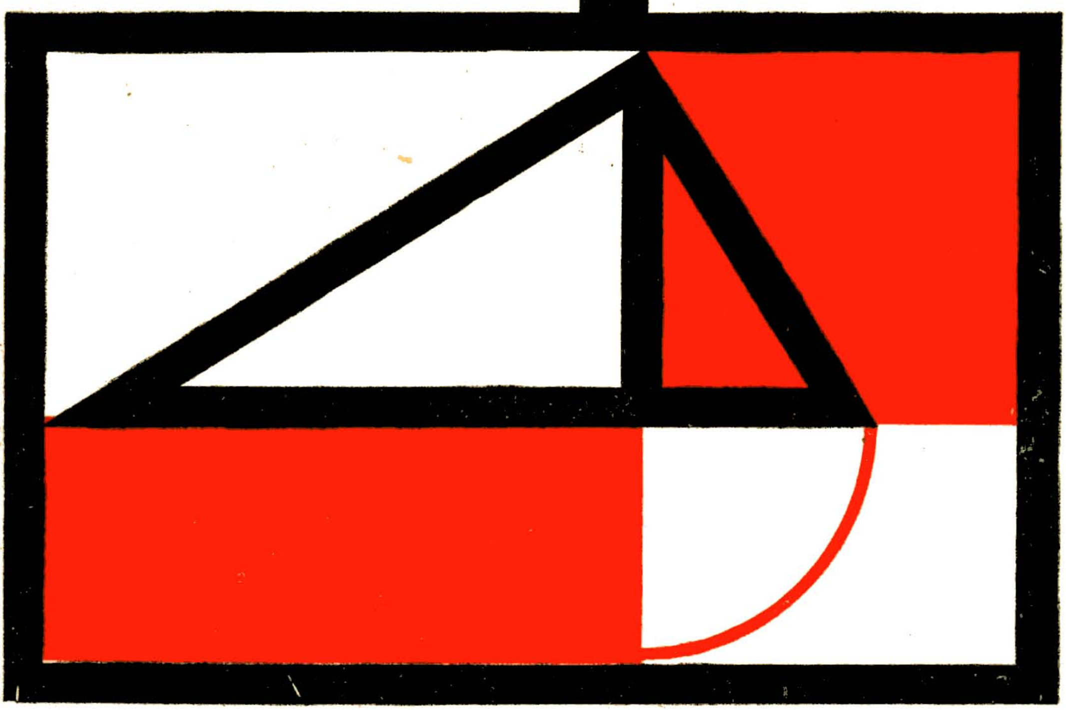
# alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

# Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967 Heft 5

**Redaktionskollegium:**
Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger (Bad Doberan); StR J. Lehmann (Leipzig); OL H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle); OStR Dr. H. Weiß (Berlin)
**Aufgabengruppe:**
NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig): Kl. 5 und 6; OL K. Krüger (Bad Doberan): Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster): Kl. 9 und 10
**Gutachtergruppe:**
NPT H. Kästner; R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)
**Redaktion:**
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)
**Anschrift der Redaktion:**
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
**Anschrift des Verlags:**
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 2005 41
Postscheckkonto: Berlin 132626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Archiv Karl-Sudhoff-Institut, Leipzig (S. 129); Oberschule Kondrowo (S. 131); Zentralbild (S. 142, S. 143); Dr. W. Schramm, Berlin (S. 142, rechts unten); Bildred. Nowosti, Berlin (S. 145); Vignette nach W. Miroschin aus „Die Sowjetunion" S. (150)
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR
Redaktionsschluß: 1. 8. 1967

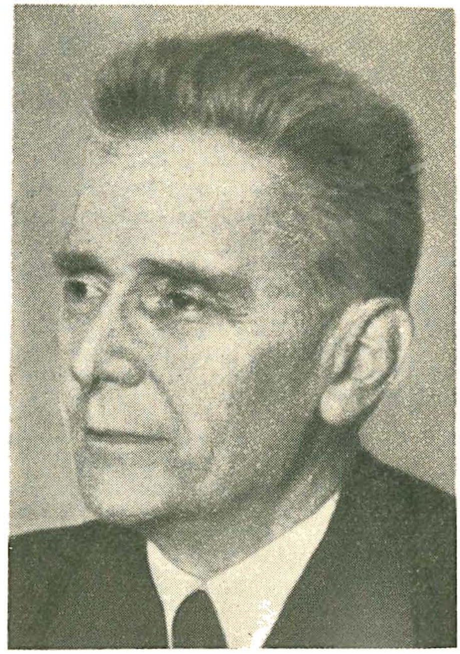
# Inhalt

**Dieses Heft wurde zu Ehren des Roten Oktober gestaltet.**



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

# A. J. Chintschin



Am 18. November 1959 vollendete sich das Lebenswerk eines der bedeutendsten sowjetischen Mathematiker, Alexander Jakowlewitsch Chintschin. Mit seinen fundamentalen Untersuchungen auf dem Gebiet der Funktionentheorie, der Zahlentheorie und als Mitbegründer der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung trug er in hohem Maße dazu bei, daß die sowjetische Wissenschaft, insbesondere die Mathematik, Weltgeltung erlangte.
A. J. Chintschin wurde am 19. 7. 1894 in dem Dorf Kondrowo des Bezirkes Kalushskaja als Sohn eines Ingenieurs geboren. 1911 begann er sein Studium an der Physikalisch-Mathematischen Fakultät der Moskauer Universität, an der er sich bald dem Kreis junger Mathematiker um den bedeutenden Funktionentheoretiker N. N. Lusin anschloß.
1916, ein Jahr vor der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution, beendete er das Studium, verblieb aber an der Universität, um eine Hochschullehrerlaufbahn einzuschlagen. Nach kurzer pädagogischer Tätigkeit an einem Moskauer Polytechnikum wurde Chintschin bereits 1919 Professor und Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät des Polytechnischen Instituts in Iwanowo-Wosnesensk, an dem ebenfalls eine Reihe hervorragende Gelehrte arbeiteten. Als 1922 die junge Sowjetmacht an der Moskauer Staatlichen Universität das wissenschaftliche Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik gründete, wurde Chintschin sofort wissenschaftlicher Mitarbeiter. Fünf Jahre später folgte dann seine Berufung zum Professor.
Zu dieser Zeit hatte Chintschin sein wissenschaftliches Interesse zwei für die Moskauer Universität neuen mathematischen Gebieten zugewandt: der Zahlentheorie, die er u. a. um neue Sätze der Maßtheorie der Kettenbrüche bereicherte, sowie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu tiefgreifenden Resultaten gelangte er vor allem in der Theorie der Grenzwertsätze sowie der Theorie der stationären Zufallsprozesse, für die er überhaupt erst die Grundlagen schuf, die von zahlreichen Wissenschaftlern in und außerhalb der UdSSR bis in die Gegenwart ausgebaut und weiterentwickelt worden sind und werden. Die Beschäftigung Chintschins mit stationären Prozessen war eng mit Problemen der Praxis verbunden; sie betrafen die Theorie der automatischen Telefonverbindungen und das Studium der zeitlichen Auslastung von Werkzeugmaschinen bei Bedienung mehrerer Maschinen des gleichen Typs durch einen Arbeiter. Diese Untersuchungen besaßen nicht nur theoretisches Interesse, sondern führten zu echten technischen Fortschritten.
Die Anwendung seiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden und Resultate auf die statistische Physik ermöglichte ihm auch hier bedeutende Beiträge.
A. J. Chintschin war Autor von etwa 150 wissenschaftlichen Publikationen in internationalen Zeitschriften, dazu treten wertvolle, teilweise in andere Sprachen über-

setzte Monographien, vortreffliche populärwissenschaftliche Darstellungen aus seinem Fachgebiet und nicht zuletzt Darlegungen zu Problemen der Organisation und Methoden des Mathematikunterrichts, denen er seit Beginn seiner Hochschullehrtätigkeit lebhaftes Interesse entgegenbrachte. 1939 wurde er korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften und 1944 Mitglied der Akademie der pädagogischen Wissenschaften der UdSSR. Seine Tätigkeit als Deputierter des Moskauer Stadtsowjets von 1939 an weist den Mathematiker Chintschin als einen am gesellschaftlichen Leben teilnehmenden Gelehrten aus.
Die Sowjetregierung schätzte seine wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Verdienste hoch ein. Sie verlieh ihm den Staatspreis, den Leninorden und erkannte ihm zweimal den Rotbannerorden und andere ehrende Auszeichnungen zu.

H. Bernhardt

Wir empfehlen das soeben in siebenter Auflage erschienene Buch (in deutscher Sprache): Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung von B. W. Gnedenko und A. J. Chintschin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, MDN 4,50

---

● Ein mathematisches Werk guten Stils duldet keinerlei „Wasser", keinerlei ausschmückendes, die logische Spannung verminderndes Geschwätz, keine Abschweifungen. Die äußerste Knappheit, die „trockene" Strenge des Gedankens und seiner Darlegung stellen einen unabdingbaren Charakterzug des mathematischen Denkens dar. Dieser Zug ist nicht nur für eine mathematische, sondern auch für jede andere ernsthafte Überlegung sehr wertvoll; die lakonische Kürze, das Bestreben, nichts Überflüssiges zuzulassen, helfen sowohl dem Denkenden selbst als auch seinem Leser oder Hörer, sich völlig auf den gegebenen Gedankengang zu konzentrieren, ohne sich durch nebensächliche Vorstellungen ablenken und den unmittelbaren Kontakt mit der Grundlinie der Überlegung zu verlieren.

● Wer einmal die erhabene Freude der schöpferischen Leistung erfahren hat, wird niemals die Anstrengungen scheuen, um diese von neuem zu erleben. Keine Schwierigkeiten werden ihn aufhalten, die Kraft seines Elans und Strebens, sein Fleiß und die Ausdauer bei der Überwindung von Hindernissen werden mit jedem neuen Erfolg wachsen. Mißerfolgen, Fehlern, zeitweiligem Scheitern und Niederlagen aber wird er so begegnen lernen, wie es einem wahren Kämpfer gebührt — er wird ihretwegen nicht untätig, sondern schöpft in ihnen wie aus einer Quelle den Anreiz für immer neue und neue Anspannungen des Gedankens und des Willens.

A. J. Chintschin

Aus: Probleme des Mathematikunterrichts — Diskussionsbeiträge sowjetischer Wissenschaftler. Volk und Wissen, Nr. 002105, MDN 12,—

---

## Aus der Jugend Chintchins

A. J. Chintschin wurde 1894 in der Stadt Kondrowo geboren. Sein Vater, J. G. Chintschin, leitete damals die Papierfabriken von Kondrowo und Troizkoje.
Schura (Rufname Chintschins, d. Red.) war ein lebhafter und geselliger Junge. Seine Altersgenossen achteten ihn. Er beteiligte sich gern an Unterhaltungen und war Initiator fröhlicher Spiele. Schura gründete eine Laienspielgruppe, deren Mitglieder gleichaltrige Kinder waren. Er schuf die Bühnenbilder und führte gern Regie. Oft improvisierte er Stücke. Später wurde die häusliche Laienspielgruppe in ein Liebhabertheater umgewandelt, das auf der Bühne der Schule von Kondrowo Stücke von Ostrowski, Tolstoi, Molière u. a. aufführte. Mit dem Erlös der Theatereinnahmen wurden für die Mitglieder des Liebhabertheaters Ausflüge nach Moskau unternommen, dort verschiedene Theater besucht und die Arbeit ihrer Darsteller studiert.

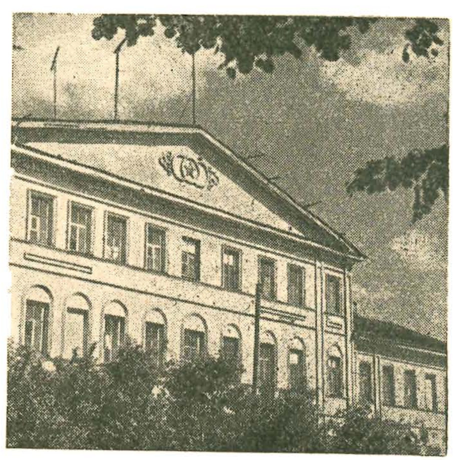
In seiner Jugend las Schura sehr viel. Er liebte Gedichte und schrieb selbst welche. Die besten wurden veröffentlicht. Bei ihm zeigte sich auch frühzeitig die Neigung zu pädagogischer Betätigung. So half er den Freundinnen seiner Schwester, wenn irgendeine in ihren Leistungen zurückblieb. Er spielte gern Schach. Schon sehr früh zeigten sich bei ihm außergewöhnliche mathematische Fähigkeiten. Seine Schwester erinnert sich an folgende Begebenheit: Als Schura 12 Jahre alt war, lernte er die Fahrpläne aller Züge aus den Kursbüchern Rußlands auswendig. Seine Lieblingsbeschäftigung bestand im Lösen von Bilderrätseln und mathematischen Scharaden. Bis 1905 ging Schura in das Realgymnasium der Stadt Kaluga, von 1906 bis 1907 besuchte er in Zürich (Schweiz) eine Privatschule, nach seiner Rückkehr ein Realgymnasium in Moskau. Mit 16 Jahren nahm Schura das Studium an der mathematischen Fakultät der Lomonossow-Universität auf. Mit 21 Jahren schloß er sein Studium ab und war bereits mit 25 Jahren Professor.

E. Muromzewa / A. Artisow

Schura mit seiner Schwester (1901)

Schura als Student (1914)

Schura mit seiner Schwester (1900)



Schule von Kondrowo

# Mathematikolympiaden in der UdSSR

Anfang der dreißiger Jahre wirkte in der Leningrader Universität der erfahrene und energische Wissenschaftler Prof. Dr. B. N. Delone. Er war begeistert für die mathematische Forschungsarbeit. Bei seinen Hörern weckte er die Liebe zur Mathematik. Im Schuljahr 1933/34 wurde auf seine Initiative als erste in der Sowjetunion an der Leningrader Universität eine Stadtolympiade für Schüler ausgerichtet. Ein Jahr darauf begann die Moskauer Universität, Mathematikolympiaden durchzuführen. Seit dem Jahre 1946 haben sich dieser Form der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik viele Universitäten und pädagogische Hochschulen angeschlossen. Den Olympiaden ging jeweils eine umfassende Zirkeltätigkeit unter Anleitung von Aspiranten und den besten Studenten voraus. Daneben wurden Vorträge von Professoren und Mitgliedern der Akademien gehalten. Die Themen wählten die Zirkelleiter entsprechend den Interessen zusammen mit den Schülern aus.
Im Schuljahr 1959/60 führte der Minister für Volksbildung der RSFSR zusammen mit der Moskauer Universität die erste Mathematikolympiade mit den Siegern der verschiedenen Republiken durch. Diese Initiative hat wesentlich dazu beigetragen, daß in der Mehrzahl der Schulen der Sowjetunion Mathematikzirkel eingerichtet wurden.
Die Olympiaden werden in vier Etappen durchgeführt: Teilnehmer der *Schulstufe* sind Schüler der 5. bis 10. Klasse; in einigen Bezirken werden Schüler der 4. Klasse mit einbezogen. Der Inhalt und die Form der Schulwettbewerbe sind sehr verschieden (traditionelle Wettbewerbe durch Lösen von Aufgaben, lebendige theoretische Wettbewerbe oder mathematische Abende). Die Sieger der Schulolympiaden werden zur *Kreisolympiade* delegiert. Die aus ihr hervorgehenden Sieger der Klassen 7 bis 10 nehmen an den Bezirksolympiaden bzw. *Republikolympiaden* teil. Den Abschluß bildet die vierte Etappe, die *Allunionsolympiade* (siehe nächste Seite, d. Red.).
Außer diesem System der Olympiaden wird eine *Allunions-Fernolympiade* durchgeführt. Die Aufgaben werden in der zentralen Jugendzeitung *Komsomolskaja Prawda* und den lokalen Jugendzeitungen veröffentlicht. Die erfolgreichsten Teilnehmer können an den Bezirks- bzw. Republikolympiaden teilnehmen und sich somit auch für die Allunionsolympiade qualifizieren. Außerdem führt der Fernsehfunk seit einigen Jahren Mathematikolympiaden durch.
Vorsitzender der Jury der Allunionsolympiaden ist Prof. Dr. G. W. Tschelidse (Universität Tbilissi). Die Jury setzt sich aus Wissenschaftlern zahlreicher in der außerunterrichtlichen Arbeit aktiver Universitäten und Hochschulen zusammen. Ein Teil von ihnen war in der Jugend selbst begeisterter und erfolgreicher Teilnehmer der Mathematikolympiaden.

J. Petrakow

Aus einem Brief an die Red. *alpha*

*Welche Wissenschaft ihr auch studiert, in welche Hochschule ihr auch eintretet, auf welchem Gebiet ihr auch arbeitet, überall braucht ihr mathematische Kenntnisse, wenn ihr auch nur die geringste Spur eures Wirkens hinterlassen wollt.*

M. I. Kalinin

# Allunionsolympiade Mathematik
# Tbilissi 1967

In diesem Jahre fand die Allunionsolympiade Mathematik in Tbilissi, der Hauptstadt der Grusinischen SSR, statt. Sie ist gegenwärtig ein Teil der wissenschaftlichen Allunionsolympiaden, zu der noch Physik und Chemie gehören.

An der Mathematikolympiade nahmen 386 Sieger der Bezirks- und Republikolympiaden teil:

| | Teilnehmer | davon Mädchen |
|---|---|---|
| 8. Klasse: | 70 | 9 |
| 9. Klasse: | 117 | 15 |
| 10. Klasse: | 189 | 19 |

Zehn Schüler aus der 7. Klasse beteiligten sich am Wettbewerb der 8. Klassen. Die Jury vergab zwei erste, drei zweite, elf dritte Preise und 124 Urkunden sowie Mathematik-Bibliotheken für die Sieger. Die Abschlußfeier fand im Sitzungssaal des Obersten Sowjets der Grusinischen SSR statt. Markanteste Gäste waren Akademiemitglied G. S. Dsozenugse, Vorsitzender des Obersten Sowjets der Grusinischen SSR, und T. W. Laschkaraschwili, Präsident der Akademie der Wissenschaften der Grusinischen SSR. Im Anschluß an den Wettbewerb unternahmen alle Teilnehmer eine Exkursion durch die gastgebende Republik und lernten ihre Sehenswürdigkeiten kennen.

J. Petrakow

Aus einem Brief an die Red. *alpha*

Задачи всесоюзной математической олимпиады школьников

Восьмой класс

1. В остроугольном треугольнике ABC высота AH, наибольшая из высот, равна медиане BM. Доказать, что угол ABC меньше 60°.

2. В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Доказать, что сумма полученного числа с исходным не равна $\underbrace{999\ldots9}_{1967\text{ цифр}}$.

3. Прожектор освещает угол 90°. Доказать, что расположенные в четырёх произвольных точках прожектора можно направить так, чтобы осветить всю плоскость.

4. Можно ли на окружности расположить числа 0,1,2,. . .9 так, чтобы любые два соседних отличались на 3,4 или 5?

5. Доказать, что существует число, делящееся на $5^{1000}$ и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

Девятый класс

1. Можно ли на окружности расположить часла 1,2,3,. . .13 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3,4 или 5?

2. Смотри задачу 3 восьмого класса.

3. Цифры некоторого числа переставили и сложили полученное число с исходным. Доказать, что если сумма равна $10^{10}$, то исходное число делилось на 10.

4. В треугольнике АВС высота СК равна медиане ВЕ и равна биссектрисе АД. Доказать, что треугольник АВС правильный.

5. Найти все пары целых чисел Х и У, удовлетворяющих уравнению:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

## Десятый класс

1. В последовательности целых положительных чисел каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих.
Какое наибольшее число членов может иметь такая последовательность, если каждый её член не превосходит 1967?

2. В каждой из восьми точек пространства стоит прожектор, который освещает октант (трёхгранный угол со взаимно-перпендикулярными рёбрами) с вершиной в этой точке. Доказать, что можно направить прожектора так, чтобы они осветили всё пространство.

3. «Король-Самоубийца». На шахматной доске размером 1000 × 1000 стоит чёрный король и 499 белых ладей. Доказать что при произвольном начальном расположении фигур король может стать под удар белой ладьи, как бы не играли белые. (Ходы делаются так же, как и в обычных шахматах).

4. Три последовательные вершины ромба лежат, соответственно, на сторонах АВ, ВС, СД данного квадрата со стороной I. Найти площадь фигуры, которую заполняют четвёртые вершины таких ромбов.

5. Натуральное число К обладает таким свойством: если М делится на К, то и число, записываемое теми же цифрами, что и М, в обратном порядке, делится на К. Доказать, что К — делитель числа 99.

**Sowjetische Städte, die in diesem Heft genannt werden:**


1 Archangelsk
2 Astrachan
3 Bratsk
4 Charkow
5 Gorki
6 Irkutsk
7 Ishewsk
8 Iwanowo
9 Kaluga
10 Kiew
11 Kasan
12 Kondrowo
13 Krasnojarsk
14 Leningrad
15 Lwow
16 Moskau
17 Nowosibirsk
18 Rjasan
19 Saratow
20 Tartu
21 Tbilissi
22 Troizkoje
23 Ufa
24 Wladimir
25 Wladiwostok

# НОВОСИБИРСК

**Nowosibirsk**

zählt zu den jungen Städten, die in erstaunlich raschem Tempo errichtet wurden. Moskau brauchte 750 Jahre, ehe es zu einer Millionenstadt wurde, New York 200 Jahre, Kiew 700 Jahre, aber Nowosibirsk nur 60 Jahre. Dieser Stadt wurde nach der Oktoberrevolution die Rolle eines großen Industriezentrums zugedacht. Waren mit der Aufschrift „Hergestellt in Nowosibirsk" werden nach mehr als 40 Ländern exportiert. Die Werktätigen dieser Stadt in der Taiga produzieren jetzt an einem Tage mehr als 1940 in einem Monat. Als W. J. Lenin im Jahre 1897 auf dem Wege in die Verbannung durch die Siedlung Nowonikljewsk kam, hatte sie 8000 Einwohner. Heute beherbergt Nowosibirsk 1,2 Millionen Menschen. Und wer noch mehr Zahlen wissen möchte: Hier gibt es u. a. 14 Hochschulen (mit 120000 Studenten), 170 Mittelschulen, 6 Theater, 500 Bibliotheken, 50 Forschungsinstitute.

**Akademgorod** — das Akademieviertel — liegt 40 Kilometer von Nowosibirsk entfernt und wurde vor sieben Jahren inmitten von Buchen-, Birken- und Kiefernwäldern errichtet. Es hat heute 35000 Einwohner und umfaßt 15 Institute. In ihnen sind 12 ordentliche Mitglieder der Akademie der Wissenschaften, 34 korrespondierende Mitglieder, 80 Doktoren, 700 Kandidaten der Wissenschaften und 6000 Wissenschaftler, Techniker und Ingenieure, insgesamt 14000 Menschen in Forschungs- und Produktionsstätten tätig. Das Durchschnittsalter der Wissenschaftler liegt bei 31 Jahren.

**Matsch-Phys-Schkole** ist die Internatsspezialschule für Mathematik, Physik und Chemie. Sie steht unter Leitung des Physikers Dr. habil. Bytschenkow, der hier 12 Stunden unterrichtet. Er wird von über 60 Hochschullehrern unterstützt. Fünf Tage in der Woche sind sie in ihren wissenschaftlichen Einrichtungen tätig, einen sechsten stehen sie für den Unterricht in der Schule zur Verfügung unter dem Motto: *Kein Wissenschaftler ohne Schüler.*

Das Lehrprogramm für diese Schule stellen die Wissenschaftler zusammen. Dabei steht der Unterricht in Mathematik und Physik an erster Stelle. Bei acht Wochenstunden in Physik (9. und 10. Klasse) werden beispielsweise zwei bis drei Vorlesungen gehalten. Die anderen Stunden sind Seminaren und Übungen (meist in den Labors der Institute der Akademie) vorbehalten. Nach jeder Vorlesung werden Aufgaben gestellt. Für einen Zeitraum von vier Wochen geben die Dozenten 30 bis 40 fakultative (freiwillige) Hausaufgaben aus. In Klassenarbeiten sind stets eine Reihe fakultativer Aufgaben eingebaut. Bei der Lösung aller Aufgaben kommt es besonders auf die Originalität und Eleganz an.

In dieser Spezialschule gibt es 30 Arbeitsgemeinschaften, u. a. Mathematische Logik, Kybernetik, Astronomie, Radiotechnik, experimentelle Hydromechanik, Kernphysik. Wer in einem Fach die Schuljahresprüfung nicht besteht, geht zurück an seine Heimatschule. Mit Recht werdet ihr, liebe Leser fragen, wie man Schüler dieser weit über die Grenzen der Sowjetunion bekannten Schule werden kann?

**Sommerschule.** Drei Wege gibt es, einer der rund 1000 Teilnehmer an dem von der Akademie in Nowosibirsk durchgeführten vierwöchigen Sommerlager zu werden: Der

Schulleiter schlägt einen Schüler vor, der sich im Unterricht und der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik und Physik besonders bewährt. Jeder Schüler kann sich am Fernstudium der Internatsspezialschule für Mathematik, Physik und Chemie beteiligen. Er erhält (siehe unten) einen Brief mit Aufgaben. Im April jedes Jahres werden die vom Direktor vorgeschlagenen bzw. erfolgreichsten Teilnehmer am Fernstudium in drei bis vier Orten Sibiriens zusammengefaßt. Wissenschaftler der Akademie lernen sie dabei persönlich kennen und führen mit ihnen eine schwierige, mündliche Olympiade durch, die den Charakter eines strengen Examens hat. Wer sich bewährt, erhält gleichberechtigt mit den Siegern der Rayonolympiaden Sibiriens eine Einladung nach Nowosibirsk. Die Jungen Mathematiker und Physiker (Alter: 12 bis 16 Jahre) hören während ihres Aufenthalts Vorlesungen, arbeiten in kleinen Zirkeln, in Seminaren und Altersgruppen unter Anleitung von Wissenschaftlern der Akademie. In ihrer Freizeit — es sind Sommerferien — tummeln sie sich in den herrlichen Wäldern am Strand des 216 km langen und 24 km breiten Ob-Meeres oder haben Gelegenheit, mit namhaften Persönlichkeiten zu sprechen. An jeweils fünf Tagen werden folgende Vorlesungen gehalten: 6 Stunden Mathematik, 6 Stunden Physik, 2 Stunden Chemie, 1 Stunde Biologie, dazu entsprechende Übungen. Nach harten Klausuren und allseitiger Bewährung während des Sommerlagers übernimmt die Internatsspezialschule die 250 bis 300 Besten.

W. Friedrich

## Fernstudium für Schüler

Lieber Freund!

Wenn Sie den Wunsch haben, Ihre Kenntnisse in Mathematik und Physik zu vertiefen und interessante und komplizierte Aufgaben lösen lernen wollen, schlagen wir Ihnen vor, ein Fernstudium an der Internatsspezialschule der Nowosibirsker Universität aufzunehmen. Es gibt zwei Kurse: Für den ersten Kurs werden bevorzugt Schüler aufgenommen, die zur Zeit die 8. Klasse besuchen. Wir legen Ihnen die Aufgaben der Eignungsprüfung vor. Schüler, die in unsere Schule eintreten wollen, möchten die Ergebnisse dieser Aufgaben bis spätestens 11. 11. 1966 einsenden. Es ist nicht unbedingt notwendig, sämtliche Aufgaben zu lösen. Wählen Sie die Aufgaben aus, deren Lösungen Ihrer Meinung nach interessant, originell, elegant sind. Die Arbeit muß auf kariertem Papier in einem Heft angefertigt sein. Wir bitten, das Heft beim Einsenden nicht einzurollen.

### Mathematikaufgaben

1. Es sei der Bruch $\frac{2x+3}{5x+7}$ gegeben. Für welche ganzzahligen $x$-Werte kann dieser Bruch gekürzt werden?

2. Gegeben sei ein Dreieck $ABC$. Die Längen der Seiten $AB$, $BC$ und $AC$ mögen 3 cm, 4 cm bzw. 4 cm betragen. Über der Seite $AC$ sei ein Quadrat errichtet, dessen Mittelpunkt $M$ mit dem Eckpunkt $B$ verbunden werde. Man beweise, daß $MB$ Winkelhalbierende des Winkels bei $B$ ist.

3. Man löse die Gleichung

$$x + y + z = xyz$$

in ganzen Zahlen.

4. Von den Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... 98 99 100 sind 10 Ziffern so wegzustreichen, daß die übrigbleibende Zahl möglichst groß ist.

5. Man beweise, daß die Gleichung

$$15\,x^2 - 7\,y^2 = 9$$

keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

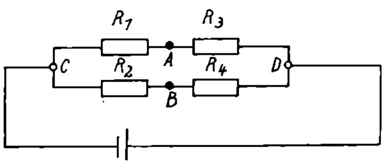
6. Man beweise, daß man von 52 Zahlen zwei so auswählen kann, daß entweder ihre Summe oder ihre Differenz durch 100 teilbar ist.

7. In einem Dreieck mögen die von ein und demselben Eckpunkt ausgehende Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Höhe den Winkel in vier gleiche Teile teilen. Man bestimme die Winkel des Dreiecks.

**Physikaufgaben** (Auswahl)

5. An welchem Widerstand der Schaltung (siehe Abb.) wird in einer Stunde die größte und an welchem die kleinste Wärmemenge freigesetzt? In welchem Verhältnis steht die eine zu der anderen?

Bekannt sei $R_1 = 1\,\Omega$ $\quad R_3 = 10\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$ $\quad R_4 = 20\,\Omega$




6. Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten $A$ und $B$ der Schaltung (vgl. die vorstehende Aufgabe), wenn bekannt ist, daß die Spannung an $CD$ 10 V beträgt?

**Mathematikprogramm** (Entwurf)

9. Klasse, Internatsspezialschule, Nowosibirsk

I *Analysis*: (Thema 1) Elemente der Mengenlehre, Element und Menge, Untermengen, geordnete Mengen, Operationen mit Mengen. Prädikatenlogik. (2) Kombinatorik, Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Permutationen, Kombinationen, Variationen mit und ohne Wiederholungen. Alphabete und Wörter. Definition der Wahrscheinlichkeit und ihre Eigenschaften. Bedingte Wahrscheinlichkeit. (3) Reelle Zahlen, Koordinaten. Zahlenkongruenzen, Zahlenfolgen. Grenzwertberechnungen. Reihen von Zahlen und Funktionen. Begriff der Rechengenauigkeit. Arbeiten mit dem Rechenstab und der Rechenmaschine. (4) Funktionen und ihre graphische Darstellung. Die Tangente. Die Ableitung. Geschwindigkeit. Der Inhalt von durch Kurven begrenzter Flächen. Definition des Integrals, sein Zusammenhang mit der Ableitung. Ermitteln des Weg-Zeit-Zusammenhangs aus dem Geschw.-Zeit-Zusammenhang. Ableitungen und Integrale in Aufgaben der Physik, der Chemie und der Technik. (5) Trigonometrische Funktionen. Vektoren und ihre Projektionen. Addition von Vektoren, Multiplikation mit einem Skalar. Projektionen von Vektoren. Definition des Sinus und des Kosinus mit Hilfe der Projektion des Einheitsvektors. Grafische Darstellung des Sinus und Kosinus. Additionstheoreme und Folgerungen aus ihnen. Ableitungen von trig. Funktionen. Funktionen mit dem Argument $(ax + b)$. Gleichung der ungedämpften Pendelschwingungen. Begriff der „mittelbaren" Funktion. Ableitungen mittelbarer Funktionen. Inverse Funktion. Umkehrfunktionen der trig. Funktionen, ihre Ableitungen und die mit ihnen verbundenen einfachsten Integrale. Bestimmte und unbestimmte Integration. (6) Die Potenzfunktion, die logarithmische und die Exponentialfunktion. Integration und Differentiation von Potenzfunktionen mit ganzen und gebrochenen Exponenten. Eigenschaften der Logarithmen, Umkehrfunktionen. Ableitungen, Integrationen. Mittelbare Funktionen. Differentialgleichung der Exponentialfunktionen. Integration mittels Substitution.

II *Geometrie* (Thema 1) Koordinaten auf der Geraden und in der Ebene. Vektorrechnung. Die Zahlengerade. Der Abstand zweier Punkte. Streckenteilung in gegebenem Verhältnis. Vektoren: Addition und Subtraktion von Vektoren. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Das Koordinatensystem in der Ebene. Vektoren in der Ebene. Projektion von Vektoren. Das skalare Produkt von Einheitsvektoren. Komponentendarstellung von Vektoren. Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren. Entfernung zwischen Punkten in der Ebene. (2) Metrische Verhältnisse für Dreiecke, Vielecke und Polyeder. (3) Polarkoordinatensystem. Umrechnung in kartesische Koordinaten. (4) Geraden und ihre Gleichungen. Zwei sich schneidende Geraden. Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden. Parallelität, Orthogonalität. Bestimmungsgleichungen zweiten und dritten Grades. Gleichung eines Geradenbüschels. Allgemeine Gleichung und Hessesche Normalform der Geraden. Entfernung eines Punktes von einer Geraden. Zusammenfassende Untersuchung der Gleichungen zweier Geraden. (5) Kurven zweiter Ordnung. Geometrische Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung: Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel. Die Ellipse als Projektion des Kreises. Tangentenprobleme.

# Aufgaben aus Mathematiklehrbüchern der Estnischen SSR

5 **118** Zwei Kraftfahrer hatten den Auftrag, mit ihren Lastkraftwagen 170 t Konsumgüter vom Bahnhof ins Auslieferungslager zu transportieren. Der erste Fahrer, dessen Lkw jedes Mal mit 4 t Ware beladen wurde, machte zwanzig Fahrten. Wieviel Fahrten entfielen auf den zweiten Fahrer, wenn dessen Lkw stets mit 5 t Ware beladen wurde?

**119** Ein Kolchos hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt. Welches von den beiden Feldern ist das größere? Um wieviel Hektar unterscheiden sich ihre Flächen?

**120** Die Oberfläche eines hölzernen Quaders mit den Kantenlängen 3 dm, 4 dm und 5 dm wurde rot gefärbt. Dann wurde der Quader zu Würfeln von je 1 $dm^3$ Rauminhalt zersägt. Ermittle, bei wieviel Würfeln drei, zwei bzw. nur eine quadratische Fläche gefärbt war! Bei wieviel Würfeln war die Oberfläche ungefärbt?

**121** In einem rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel doppelt so groß wie der andere. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

**122** Berechne:

$107 \cdot \{700 - [96 : 2 - (45 + 27) : 9] \cdot 5 - 495\} - 135.$

6 **123** Einem Speiselokal wurde Fleisch zum Zubereiten der Gerichte in zwei Frischhaltebehältern angeliefert. Das Bruttogewicht des ersten Behälters betrug 12,5 kg, das Bruttogewicht des zweiten war um $\frac{3}{4}$ kg kleiner als das des ersten. Jeder Behälter wog leer $2\frac{3}{8}$ kg. Das Fleisch aus beiden Behältern reichte genau für zwei Tage zur Versorgung der Gäste. Am ersten Tag wurden vom Koch $9\frac{4}{5}$ kg Fleisch verbraucht. Wieviel kg Fleisch standen dem Koch am zweiten Tag zur Verfügung?

**124** Ein Betrieb erzeugte $\frac{3}{200}$ der laut Plan vorgesehenen Waren nicht. Diese Planschulden beliefen sich auf den Betrag von 0,3 Millionen Rubeln. Für wieviele Rubel hätte der Betrieb Waren produziert, wenn der Plan erfüllt worden wäre?

**125** Ein Zelt hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Wieviel $m^2$ Stoff wurden zum Anfertigen des Zeltes benötigt, wenn die Grundseite einer Dreiecksbahn 3,8 m und ihre Höhe 2,8 m betragen? Das Zelt wurde ohne Leinwandboden gefertigt; der Stoffverschnitt und die Säume sollen unberücksichtigt bleiben.

**126** Berechne!

$$\frac{4\frac{7}{8} \cdot 4\frac{4}{5}}{5\frac{1}{5} + 6\frac{1}{2}} + \frac{5\frac{5}{8} : 3\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{10}}$$

**127** Ein zylindrisches Glasgefäß hat die 7
lichte Weite von 2,82 dm. Es werden 12 l Wasser in das Gefäß gefüllt. Ermittle die Höhe des Wasserspiegels über der Grundfläche des Gefäßes!

**128** Der Umfang eines 4 m hohen kegelförmigen Schotterhaufens beträgt am Boden 25 m. Es soll eine sechs Meter breite Straße asphaltiert werden. Dazu benötigt man auf 100 $m^2$ Straßenfläche 3,5 t Schotter; ein Kubikmeter Schotter wiegt 1,8 t. Wieviel Meter Straßenlänge können mit dem vorrätigen Schotter asphaltiert werden?

**129** In zwei Getreidespeichern lagerten zusammen $p$ Tonnen Korn. Aus dem ersten Speicher wurden täglich $a$ Tonnen, aus dem zweiten $b$ Tonnen Korn entnommen. Nach $t$ Tagen lagerten in beiden Speichern die gleichen Mengen Korn. Wieviel Tonnen Korn lagerten ursprünglich in jedem Speicher?

**130** Die Spritzflüssigkeit zum Kalken von Obstbäumen enthält Kalk, Roggenmehl und Öl im Verhältnis 3 : 2 : 2. Wieviel kg muß man von jedem dieser Bestandteile verwenden, um 2,8 kg dieser Mischung herzustellen?

# Wer löst mit?

# alpha – Wettbewerb

*letzter Einsendetermin 30. 12. 1967**


**Aufgaben aus sowjetischen Mathematiklehrbüchern**

5

**131** In einem Klassenraum sind sechs Lampen. Die Schüler, die den Raum verließen, vergaßen, das Licht auszuschalten, und es wurde erst nach 15 Minuten ausgeschaltet. Dieses Versäumnis kostete die Schule zwei Kopeken. Welche Mehrausgabe ergäbe sich im Monat (30 Tage), wenn in der Schule 210 solcher Lampen sind und diese täglich fünf Minuten unnötig brennen?

**132** Wenn man alle Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl der Größe nach mit 1 beginnend und mit der gegebenen Zahl endend anordnet, so ist das Produkt von Teilern, die gleich weit von den Enden entfernt sind, gleich der gegebenen Zahl. Überprüft das für die Zahl 84!

**133** Um die Wassermenge zu bestimmen, die eine Quelle hergibt, stellen Touristen fest, daß eine Büchse mit zwei Liter Fassungsvermögen in vier Sekunden gefüllt war. Wieviel Liter Wasser gibt die Quelle in 24 Stunden?

**134** Eine Eule vertilgt während eines Sommers etwa 1000 Feldmäuse. Diese Mäuse sind Feldschädlinge, denn durch eine Maus geht ungefähr 1 kg Korn verloren. Stelle fest, wieviel Korn in 15 Jahren von 80 Eulen erhalten wird?

**W(5)135** Der Kremlhügel liegt 30 m, die Leninberge liegen 78 m über dem Spiegel der Moskwa. Die Höhe des höchsten Gebäudes auf dem Kremlhügel, des Glockenturms Iwan des Großen, der im Jahre 1600 erbaut wurde, beträgt 20 m mehr als das Doppelte der Höhe des Kremlhügels. Das höchste Gebäude auf den Leninbergen, die Moskauer Universität, ist dreimal so hoch wie der Glockenturm; sie wurde im Jahre 1953 gebaut. Wieviel Meter erheben sich beide Gebäude über dem Spiegel der Moskwa?

**W(5)136** Aus Moskau und Saratow fahren gleichzeitig zwei Güterzüge einander entgegen. Der erste Zug legt 31 km in der Stunde zurück, der zweite 37 km in der Stunde. In welcher Entfernung voneinander befinden sich diese beiden Züge nach 9 Stunden, wenn bekannt ist, daß es von Moskau nach Saratow 892 km sind?

**137** Eine Holzfällerbrigade stellte in drei Tagen 184 $m^3$ Holz bereit. Dabei wurde von der Brigade der Tagesplan am ersten Tag mit 14 $m^3$ übererfüllt; am zweiten Tag lag die Brigade mit 2 $m^3$ unter der Planaufgabe, und am dritten Tag stellte sie 16 $m^3$ über den Plan bereit. Wieviel $m^3$ Holz mußte die Brigade täglich nach dem Plan bereitstellen?

**138** Beweise, daß die Summe aus einer zweistelligen natürlichen Zahl und einer Zahl, die man durch Vertauschen der beiden Ziffern erhält, stets durch 11 teilbar ist.

**139** Bestimme zwei Zahlen, deren Summe 132 ist, wobei $\frac{1}{5}$ der einen Zahl gleich $\frac{1}{6}$ der anderen ist!

**140** Der Fernzug Moskau — Wladiwostok trifft 28 Tage nach seiner Abfahrt aus Moskau dort wieder ein; der Fernzug Moskau — Irkutsk trifft 16 Tage nach seiner Abfahrt wieder in Moskau ein; der Fernzug Moskau — Lwow kehrt in 12 Tagen wieder nach Moskau zurück. Am Dienstag fahren alle Züge in Moskau ab. Nach wieviel Tagen und an welchem Wochentag treffen sich alle wieder in Moskau?

**W(6)141** Ein Fahrgastschiff der Linie Moskau—Astrachan—Moskau führt seine Fahrt in 16 Tagen durch. Für die Linie Moskau—Ufa—Moskau benötigt es 18 Tage. Nach wieviel Tagen können sich Fahrgastschiffe der beiden Linien, die gleichzeitig von Moskau abfahren, wieder in Moskau treffen? Wann begegnen sich die Fahrgastschiffe in Moskau, wenn sie am 15. April abfahren?

**W(6)142** Ermittle diejenige gebrochene Zahl, welche gleich $\frac{4}{7}$ ist, und deren Differenz aus ihrem Nenner und ihrem Zähler 21 beträgt!

---

* Mit Heft 5 endet der *alpha*-Wettbewerb des Jahres 1967, d. Red.

7 **143** Zwei Brigaden begannen gleichzeitig mit dem Bau eines Metrotunnels. Sie bewegten sich von zwei Punkten aus aufeinander zu, deren Entfernung 1695 m betrug. Im Verlaufe der ersten 25 Tage trieb die erste Brigade ihren Stollen im Durchschnitt täglich um 2,8 m vorwärts, die zweite Brigade um 2,6 m. Danach erhöhten beide Brigaden ihre Arbeitsproduktivität und begegneten sich 225 Tage nach Beginn der Arbeit, wobei die erste Brigade insgesamt 45 m mehr als die zweite zurückgelegt hatte. Um wieviel Meter (Prozent)* erhöhte jede Brigade durchschnittlich ihre Tagesleistung?

**144** In einer Stadt-Mathematikolympiade wurden $\frac{7}{20}$ (35%)* der Teilnehmer der ersten Stufe zur zweiten zugelassen. $\frac{2}{9}$ aller Teilnehmer der zweiten Stufe wurde mit Preisen und Belobigungsurkunden ausgezeichnet. Den ersten Preis erhielt ein Schüler, einen zweiten Preis erhielten zwei Schüler, einen dritten Preisfünf Schüler, und zwanzig Schüler erhielten Belobigungsurkunden. Wieviel Schüler nahmen an der ersten Stufe teil?

**145** Ein Wärmekraftwerk stellte sich von Donezkohle auf örtlich anfallende um. Die Donezkohle ist durch einen weiteren Transportweg teurer. Um den wievielten Teil (wieviel Prozent)* verringern sich die Kosten für das Brennmaterial, wenn 3 t Donezkohle so viel Wärme geben wie 7 t örtlich anfallende Kohle und die Kosten für Förderung und Transport des Brennmaterials sich wie 28 : 3 verhalten?

**146** Eine Gruppe Geologen war 4 Tage und 14 Stunden unterwegs. Ein Drittel des Weges fuhren die Geologen mit dem Zug, ein weiteres Drittel des Weges legten sie mit dem Dampfer zurück und das letzte Drittel zu Pferde. Wie lange benutzten die Geologen die verschiedenen Beförderungsmittel, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Pferde den achten Teil der Geschwindigkeit des Zuges und den vierten Teil der Dampfergeschwindigkeit betrug?

**W(7)147** Pioniere sammelten 27,2 t Metallschrott. Ein Achtel (12,5%)* des gesamten Schrotts wurde mit 4 Rubel je Tonne taxiert. Der übrige Schrott wurde in zwei Teile aussortiert, deren Verhältnis 3 : 4 betrug und die mit 12,5 Rubel bzw. 15 Rubel je Tonne taxiert wurden. Wieviel war der ganze Schrott wert?

**W(7)148** Der Minutenzeiger einer Uhr ist 2 cm lang, der Stundenzeiger 1,5 cm. Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers im Vergleich zur Geschwindigkeit der Spitze des Stundenzeigers?

**149** Im Meer schwimmt ein Eisberg, bei dem das Volumen des aus dem Wasser herausragenden Teils 2000 m³ beträgt. Berechne angenähert das Volumen des gesamten Eisbergs, wenn die Dichte des Meerwassers $1{,}03\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und die Dichte des Eises $0{,}9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ beträgt! 8

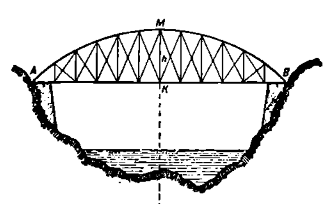
**150** Ein vertikal aufgestellter zylindrischer Behälter, dessen Außendurchmesser 78 cm und dessen Gewicht 752 kp beträgt, hat am Boden eine kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser 36 cm. Der Behälter lastet mit seiner ganzen Bodenfläche auf einem Fundament. Es ist der Druck $\left(\text{in } \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}\right)$ zu berechnen, den der Behälter infolge seines Gewichtes auf das Fundament ausübt.

**151** Gegeben sei ein Dreieck $ABC$ mit dem Winkel $\sphericalangle CAB = 30°$. Es ist zu beweisen, daß die Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks ebenso lang ist wie der Radius $r$ des Umkreises.

**W(8)152** Zwei Bagger heben in 24 Tagen eine Baugrube für die auf einem Kolchos vorgesehene Elektrozentrale aus. Der erste Bagger könnte diese Arbeit allein eineinhalbmal so schnell ausführen wie der zweite Bagger allein. In wieviel Tagen könnte jeder Bagger diese Arbeit ausführen?

**W(8)153** Die Geschwindigkeit der Fahrstühle in den Hochhäusern der Stadt Moskau ist zweimal so groß wie die Geschwindigkeit der Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden. Deshalb ist die Fahrzeit bis zum zwanzigsten Stockwerk, das in einer Höhe von 81 m liegt, nur 5 Sekunden länger als bis zum achten Stockwerk eines gewöhnlichen Gebäudes, das in 33 m Höhe liegt. Berechne die Geschwindigkeit jedes Fahrstuhls!

**154** Der Träger einer Brücke wird durch einen Kreisbogen $AMB$ begrenzt, dessen 9

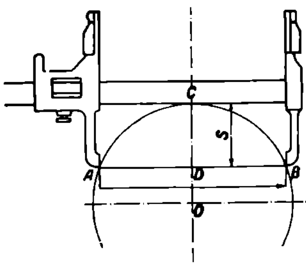


* Mitte des Schuljahres können die vorliegenden Aufgaben auch im Rahmen der Prozentrechnung noch einmal gerechnet und damit vertieft werden.

Höhe $\overline{MK} = h = 3$ m und dessen Radius $\overline{OM} = r = 8{,}5$ m beträgt. Die Spannweite $\overline{AB}$ der Brücke ist zu berechnen.

**155** Einem Kreis sei ein gleichschenkliges Trapez so umschrieben, daß alle Trapezseiten den Kreis berühren. Es ist zu beweisen, daß dann die Maßzahl $\varrho$ des Radius des Kreises die mittlere Proportionale zu den Maßzahlen $a$ und $b$ der halben Grundseiten des Trapezes ist: $a : \varrho = \varrho : b$.

**156** Um den Durchmesser einer größeren Scheibe zu messen, wurde ein Meßschieber so eingestellt, wie es die beigefügte Abbildung zeigt. Die Länge der Meßschnäbel betrug $s = 25$ mm, der Abstand zwischen den Enden der Meßschnäbel $l = \overline{AB} = 200$ mm.

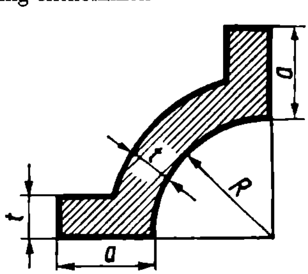



a) Der Durchmesser der Scheibe ist zu berechnen.

b) Es ist eine Formel aufzustellen, die die Abhängigkeit des Durchmessers von $s$ und $l$ angibt.

**157** Ein Flugzeug fliegt von Moskau nach Kiew und kehrt sofort wieder zurück. Unter welchen Bedingungen wird der Hin- und Rückflug schneller zurückgelegt, bei Windstille oder bei einem mit konstanter Stärke in der Richtung Moskau—Kiew wehenden Wind?

**W(9)158** Es ist angenähert der Flächeninhalt des Querschnitts sines Werkstückes zu bestimmen, dessen Maße der beigefügten Zeichnung entnommen werden können.




**W(9)159** Gegeben sind ein gerader Kreiszylinder, ein gerader Kreiskegel und eine Kugel. Die Radien der Grundflächen des Zylinders und des Kegels und der Radius der Kugel sind gleich lang. Die Höhen des Zylinders und des Kegels sowie der Durchmesser der Kugel sind ebenfalls gleich lang. Es ist zu beweisen, daß unter diesen Bedingungen das Volumen des Zylinders gleich der Summe der Volumina des Kegels und der Kugel ist.

**160** Das Motorschiff *Rakete* mit Unterwasserflügeln hat eine Geschwindigkeit, die um $50 \text{ km} \cdot h^{-1}$ größer ist als die Geschwindigkeit eines Dampfschiffes. Für eine Strecke von 210 km benötigt die *Rakete* 7,5 Stunden weniger als das Dampfschiff. Ermittle die Geschwindigkeit der *Rakete*!

**161** Ohne Benutzung einer Tafel soll entschieden werden, welche der beiden folgenden Zahlen größer ist: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ oder $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

**162** Gegeben: $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.
Bestimme $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ !

**163** Es ist zu beweisen, daß für alle Winkel $\alpha$, für die $0 < \alpha < 90°$ und $\alpha \neq 45°$ ist, gilt

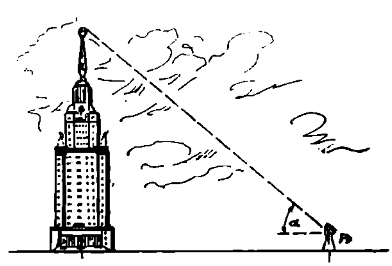
$$\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1 + \cot^2\alpha}{1 - \cot^2\alpha}.$$

**W(10)164** Für welche reellen Werte von $a$ haben die Gleichungen

$$x^2 + ax + 1 = 0$$
und $$x^2 + x + a = 0$$

mindestens eine gemeinsame Lösung?

**W(10)165** Um die Höhe des Turmes des Hauptgebäudes der Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität zu berechnen, bestimmt man mit einem Winkelmeßgerät aus der Entfernung $a$ den Erhebungswinkel $\alpha$ (Abb.). Berechne den Näherungswert der zu bestimmenden Höhe, wenn die Höhe des Meßgerätes $h$ ist




($\alpha \approx 53°$, $a \approx 180$ m, $h \approx 1{,}2$ m)!

Zusammengestellt von Dr. R. Lüders und Th. Scholl (beide Berlin)

# Aus der Sowjetunion berichtet

## Leninpreis für Mathematik

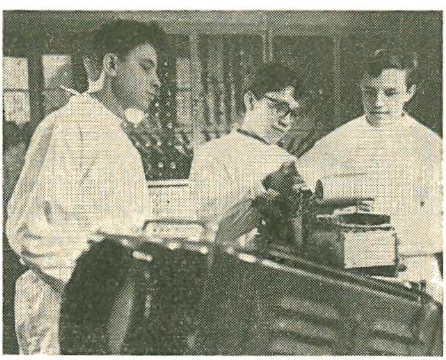
Drei sowjetische Mathematiker — Juri Shurawljow, Leg Lupanow und Sergej Jablonski — wurden für ihren Beitrag zur mathematischen Kybernetik mit dem Leninpreis 1966 ausgezeichnet. Ihre Arbeit ist von großer Bedeutung für die Volkswirtschaft. Zu den für mathematische Forschungsarbeiten im Jahre 1967 Ausgezeichneten gehört der 30jährige Doktor der Wissenschaften Juri Manin und der 29jährige Sergej Nowikow, korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

## Keplers Werke erscheinen in Leningrad

Die Werke des Astronomen Johannes Kepler (1571 bis 1630) sollen in Leningrad neu herausgegeben werden. Die zweibändige Ausgabe wird u. a. einige bisher nicht veröffentlichte Arbeiten Keplers über Mathematik und Himmelsmechanik enthalten. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Herausgeber bilden 18 in Leder gebundene Folianten mit Manuskripten Keplers, die im Jahre 1774 von Katharina II. erworben wurden und sich heute im Archiv der Akademie der Wissenschaften in Leningrad befinden.

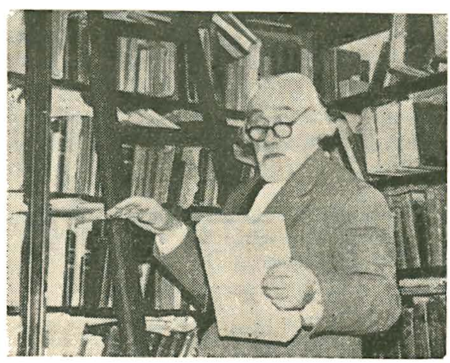
## Aufgaben eines Nachhilfelehrers

verrichtet *Alfa* 5, eine von Wissenschaftlern der Polytechnischen Hochschule in Lwow entwickelte elektronische Anlage. Sie legt den Studenten Texte und Kontrollfragen vor und gibt nur nach Angabe der richtigen Antworten neuen Lehrstoff vor. War die Antwort der Studenten nicht zufriedenstellend, erläutert *Alfa* 5 die betreffende Frage. Die Maschine ist im sowjetischen Pavillon auf der Weltausstellung in Montreal zu sehen.



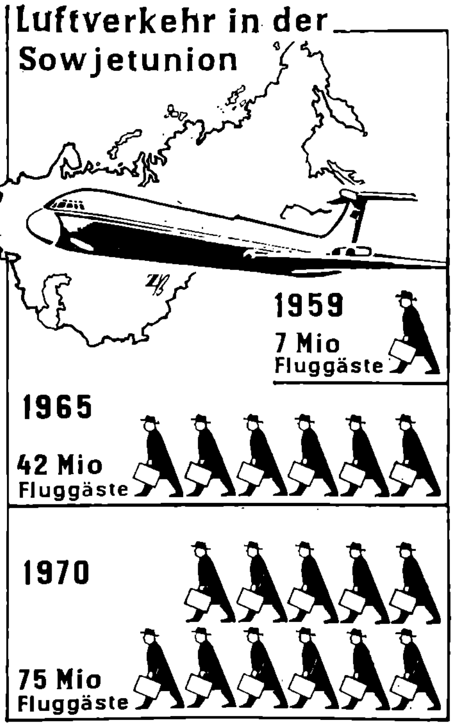
Schüler rechnen mit Elektronenmaschinen

Die 10. Mittelschule in Ishewsk bildet Junge Mathematiker aus. In der 10. Klasse lernen die Schüler mit Elektronenrechenmaschinen umzugehen. Nach Beendigung der Schule nahmen im Herbst 120 Schüler das Mathematikstudium auf. Unser Bild zeigt Schüler der 10. Klasse im Rechenzentrum der Schule.

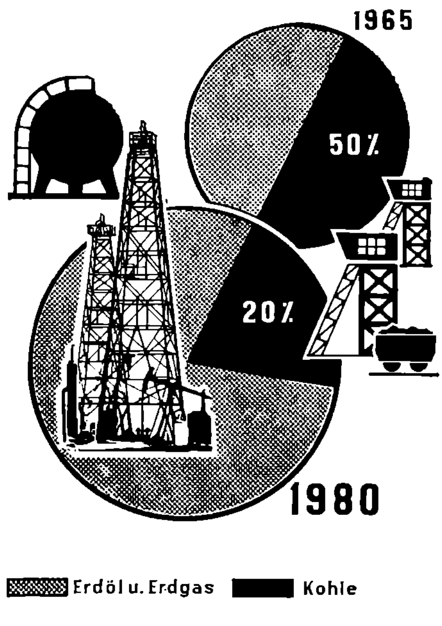


Prof. Dr. Andronow

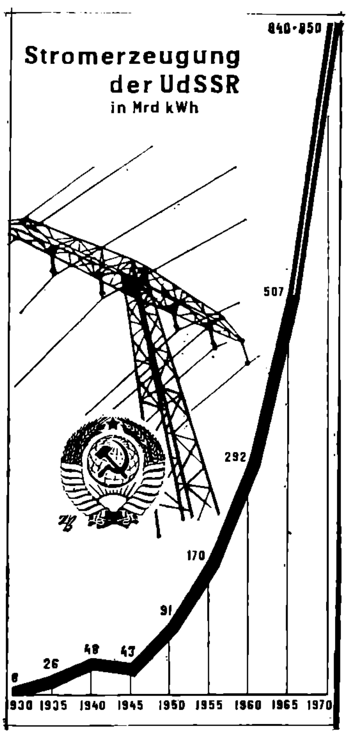
ist ein Kampfgefährte Lenins. Er hat seine ganze Kraft eingesetzt, während und nach der Oktoberrevolution viele Gelehrte, insbesondere Mathematiker, für die Ideen der Revolution zu gewinnen. Unser Bild zeigt den Gelehrten in seiner in der Sowjetunion einmaligen Privatbibliothek, die rund 10000 mathematische Bücher umfaßt.

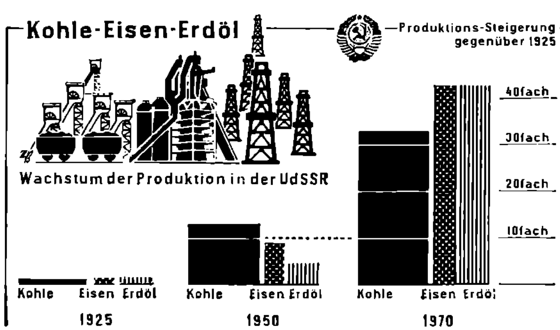


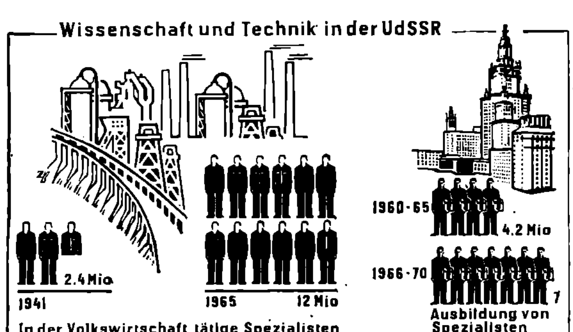

## Erdöl-Gas-Kohle
### Brennstoffbilanz der UdSSR




# Porträt in Zahlen



# Erfahrungsaustausch mit sowjetischen Wissenschaftlern

Im Oktober 1965 weilte ich als Gast an der Hochschule für Ingenieure der Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie in Moskau zu einem Erfahrungsaustausch mit sowjetischen Fachkollegen. Dabei bildeten Forschungsaufgaben auf dem Gebiet der Angewandten Geodäsie (Ingenieurvermessung) den Schwerpunkt. Hier wiederum bewegten uns besondere Probleme der Talsperrenmeßtechnik.

Die *Talsperrenmeßtechnik* ist eine noch sehr junge, aber selbständige Fachdisziplin, die hauptsächlich von Vermessungsingenieuren, aber auch Bauingenieuren, vertreten wird. Eine Staumauer aus Beton verhält sich keineswegs starr, wie es zunächst vielleicht scheinen mag. Äußere Einflüsse wie z. B. unterschiedliche Temperaturen an Luft- und Wasserseite der Mauer infolge Sonneneinstrahlung, der horizontale Druck des angestauten Wassers gegen die Staumauer, ihr Eigengewicht und der vertikale Wasserdruck sowie felsmechanische Vorgänge im Gründungsbereich bewirken vielmehr Änderungen der räumlichen Lage der Staumauer sowie Verformung derselben. Je nach Größe und Typ der Mauer können diese Deformationen Größen zwischen einigen Millimetern bis zu ca. 6 cm . . . 8 cm annehmen, ohne daß die Mauer dadurch Schaden leiden muß. Die Deformationen sind teils elastisch, teils plastisch, wobei letztere besonders gefährlich sein können. Elastische Verformungen, vor allem Auslenkungen der Staumauerkrone zur Luft- und Wasserseite, treten meist in einem für die betreffende Staumauer typischen, langperiodischen (Jahreszeiten!) Verlauf in Erscheinung.

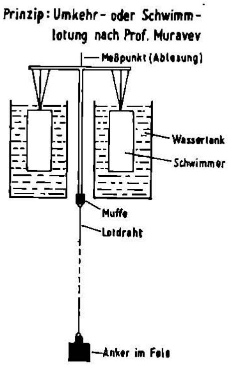
Die Aufgabe der Talsperrenmeßtechnik ist einmal in der Überwachung der Bauwerke zur Wahrung der öffentlichen Sicherheit zu sehen. Dazu vergleicht man mathematisch vorausermittelte Deformationsgrößen mit den aus Messungen erhaltenen, um Gefahren rechtzeitig zu erkennen. Weiterhin dienen die Messungsergebnisse der Überprüfung und Vereinfachung statischer Berechnungsverfahren, die von zahlreichen Annahmen und Vereinfachungen ausgehen müssen.

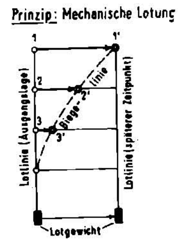
Um das Verhalten einer Staumauer (Kippung, Verschiebung, Durchbiegung, Verdrehung, Setzung) kontrollieren zu können, gelangen zahlreiche Messungsverfahren zur Anwendung. Dazu sind nach genauer Überlegung Meßpunkte auf Krone, am Fuß, auf der Luftseite und in den vertikalen Schächten und horizontalen Gängen im Mauerinnern angeordnet. Wir wollen uns kurz ein erstmalig in der Sowjetunion entwickeltes und in der Staumauer Bratsk erprobtes Verfahren anschauen, worüber mir ausführlich der Erfinder, Professor Muravev, berichtete.

### Umkehrlotverfahren in der Staumauer Bratsk

Zur Ermittlung der Durchbiegung (Biegelinie) einer Staumauer verwendet man seit 40 Jahren die mechanische Lotung. In Kronennähe wird ein Draht befestigt, der in einem vertikalen Schacht hängt und am unteren Ende mit einem Gewicht von etwa 20 kp beschwert ist. Mit speziellen Ablesegeräten bestimmt man an den Meßpunkten die Abstände zum vertikalen Draht und ermittelt daraus die gesuchte Auslenkung der Punkte gegenüber der Ausgangslage der Lotlinie. Beim Umkehr- oder Schwimmlot erfolgen Messungen und Auswertungen in der eben beschriebenen Weise, nur wird ein anderes Prinzip zur Vertikalstellung der Lotlinie angewendet.

Am unteren Ende der Lotlinie, im Felsuntergrund, ist der Lotdraht im Bezugspunkt fest verankert. Das obere Drahtende ist mit einem Schwimmkörper verbunden, der sich in einem wassergefüllten Behälter unter der Auftriebswirkung in die Lotgerade durch den Bezugs-Ankerpunkt einstellt. Verschiebungen des Bauwerkes (Wassertank) gegenüber dem als unveränderlich angenommenen Bezugspunkt werden am Schwimmer abgelesen.

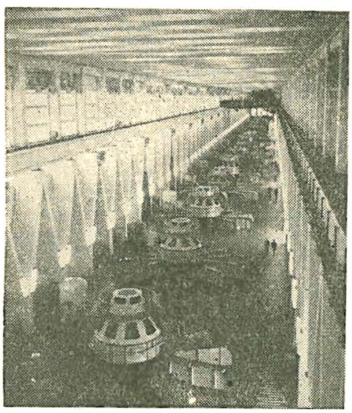


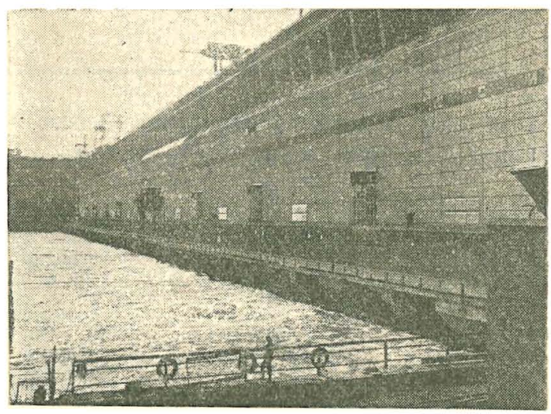




Der besondere Vorteil dieses Verfahrens ist, daß die Lotmessungen in der Mauer an einen Festpunkt, 20 m bis 50 m tief im Felsen, angeschlossen werden können.

Die kurzen Ausführungen lassen deutlich erkennen, wie wichtig die mathematisch-physikalische Ausbildung an unseren Oberschulen ist, um die erworbenen Kenntnisse im Beruf des Vermessungsingenieurs sicher anwenden zu können.

H. Werner





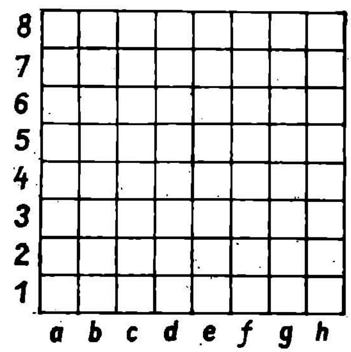
Mitten in der sibirischen Taiga, dort, wo sich noch vor elf Jahren die Bären tummelten, steht heute Bratsk, eine Großstadt mit 160000 Einwohnern. In ihrer Nähe befindet sich das zur Zeit größte Kraftwerk der Erde mit einer Kapazität von 4,5 Millionen kW. (Unsere Fotos zeigen das Maschinenhaus von außen sowie seine 20 Turbinen zu je 225000 kW, die ein Werk in Nowosibirsk lieferte.) Ein Staudamm von 5120 m Länge (davon 806 m Stahlbeton-Hochdamm), hinter dem ein künstliches Meer mit 12,2 Milliarden Kubikmetern Wasser liegt, sind seine technischen Merkmale. Bratsk verdrängte die Kraftwerkriesen an der Wolga und das amerikanische Grand Coulee auf die Plätze zwei, drei und vier. Bratsk ist das Glied einer Kette von Kraftwerken. Mit 5 Millionen kW und 6 Millionen kW wird vom 50. Jahr der Oktoberrevolution an das Kraftwerk von Krasnojarsk mit seinen 500000 kW Turbosätzen vorübergehend an die Weltspitze treten, bevor es von größeren sibirischen Brüdern verdrängt wird. — Im Jahre 1970 soll die Stromerzeugung der Sowjetunion 830 Milliarden Kilowattstunden betragen. In dieser Entwicklung nimmt die Energiewirtschaft Sibiriens einen hervorragenden Platz ein.

## Eine Aufgabe von

# Prof. Dr. habil. N. Tschaikowski

*Mechanische — Mathematische Fakultät*
*der Iwan-Franko-Universität Lwow*

**166** Die nebenstehende Zeichnung stellt ein Schachbrett dar. Es besitzt bekanntlich 64 Felder. Jedes Feld stellt ein Quadrat dar. Nun bilden z. B. die vier Felder (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) oder die neun Felder (3, b), (3, c), (3, d), (4, b), (4, c), (4, d), (5, b) (5, c), (5, d) ebenfalls Quadrate, usw. Wieviel Quadrate dieser Art gibt es auf dem Schachbrett?




**Russische Mathematiker / Naturwissenschaftler — durch die sowjetische Briefmarke gewürdigt**

Nr. 2568
(Lipsia-Katalog)


1583


2911

1615

1964

Michail Wassiljewitsch Lomonossow
(geb. 19. 11. 1711 in Mischaninskaja, Gouvernement Archangelsk, gest. 15. 4. 1765 in Petersburg), begründete 1755 die erste russische Universität in Moskau; ein Denker und Forscher, der auf den verschiedenen Gebieten der Wissenschaft, besonders der Naturwissenschaften, neue Wege einschlug.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski
(geb. 1. 12. 1792, gest. 24. 2. 1856), wirkte in Kasan. Bahnbrechende Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie.

Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski
(geb. 17. 9. 1857, gest. 19. 9. 1935). Während seiner Tätigkeit als Mathematik- und Physiklehrer in Kaluga legte er 1903 die Grundlagen der Theorie der Raketenbewegung und der wissenschaftlichen Astronautik.

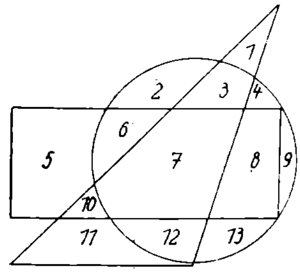
Michail Wassiljewitsch Ostrogradski
(geb. 24. 9. 1801, gest. 1. 1. 1862), wirkte in Petersburg. Arbeitsgebiete: Integralrechnuug, Variationsrechnung, Theorie der Wärmeleitung, Elastomechanik.

Alexander Michailowitsch Ljapunow
(geb. 6. 6. 1857, gest. 3. 11. 1918), wirkte in Charkow und Petersburg. Richtungweisende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen und Hydrodynamik.

Zusammengestellt für Junge Philatelisten von Arbeitsgemeinschaftsleiter W. Unze, Sonderschule für Körperbehinderte, Leipzig.

# Prof. Dr. habil. Lew Itelson empfiehlt:

**Gut konzentrieren — gewissenhaft einprägen — umsichtig kombinieren — mathematisch denken**




**Welche Zahl** (siehe Abbildung rechts oben) befindet sich

- in dem Gebiet, das sowohl dem Rechteck als auch dem Dreieck, jedoch nicht dem Kreis angehört;
- in derselben Figur oder denselben Figuren wie die Zahl 6. Wieviel Gebiete gibt es, der gleichzeitig zwei und nur zwei Figuren angehören?

**Ohne Kommentar**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | .. | 64 | |
| 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | .. | 5 |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | .. | |
| 3 | 4 | 6 | 10 | .. | 34 | 66 | |

**Sucht nach Synonymen!**
Exponent — Verhältnis — Logarithmus — Tetraeder — Quotient — Konstante — Vierflächner — feststehender Wert — zweigliedriger Ausdruck

**Richtige Aussage**
Mit welchem Wort muß die folgende Aussage beginnen? ..... die vier Seiten eines Rechtecks gleichlang sind, ist es ein Quadrat.
*obgleich — wenn — insofern — da — angenommen, daß*

**Ergänzt die folgenden Sätze!**

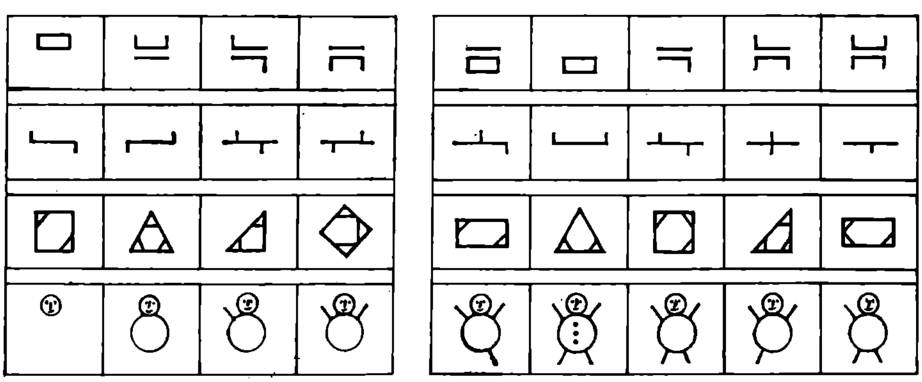
- Eine allgemeine Beziehung, Regel oder ein allgemeines Prinzip heißt, in mathematischer Sprache ausgedrückt: ......
- Die Behauptung der Gleichheit zweier Ausdrücke wie z. B. $x + y = 5$ heißt: ......
*Binom — Gleichung — Formel — Funktion — keines dieser Worte*
- Eine Größe, die im Verlauf derselben Untersuchung verschiedene Werte annehmen kann, heißt .......
- Das Verhältnis zweier Zahlen heißt.......
*Koeffizient — Logarithmus — Quotient — Konstante — Variable — Resultat*

**Wenn** die beiden ersten Aussagen wahr sind, so ist die dritte ......
*wahr — falsch — unbestimmt*

Franz ist jünger als Kurt.
Fritz ist jünger als Franz.
Kurt ist älter als Fritz.

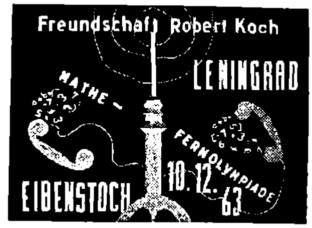
Es ist Beharrlichkeit nötig, um Mathematiker zu werden.
Kurt ist beharrlich.
Er wird ein guter Mathematiker.

**Gib auf der rechten Seite eine Figur an, die die linke Folge fortsetzt!**



Lösung für dieses Beispiel

# Mathematischer Wettbewerb



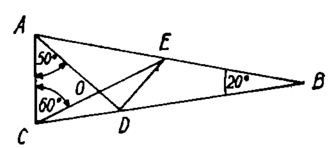

Oktober 1962 — Unsere Schule (OSI Eibenstock/Erzgeb.) hatte den Versuch unternommen, mit der 127. Schule in Leningrad in Erfahrungsaustausch über mathematische Probleme zu treten. Es war vereinbart worden, daß uns die sowjetischen Freunde in unseren Anstrengungen um die Verbesserung der Leistungen im Fach Mathematik durch Austausch von Aufgaben unterstützen. Höhepunkte dieser Arbeit sollten jährliche Fernolympiaden sein.
Obwohl in unserer Schule schon seit 1961 Zirkel und Kurse in Mathematik bestanden, war der Anfang nicht leicht. Die von Leningrad zur 1. Fernolympiade zwischen beiden Schulen gestellten Aufgaben verlangten hohes mathematisches Wissen und Können. Es wurde allen klar, daß nur eine noch bessere außerunterrichtliche und unterrichtliche Arbeit unsere kleinen Erfolge verbessern würde. Allein ein dritter und drei erste Plätze in den Kreisolympiaden Junger Mathematiker der DDR zeigen, daß wir vorangekommen sind.
Dieses Jahr stehen wir nun zum fünften Male im mathematischen Wettbewerb, der zu Ehren des 50. Jahrestages der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution stattfindet und ein besonderer Höhepunkt werden soll.

W. Werner

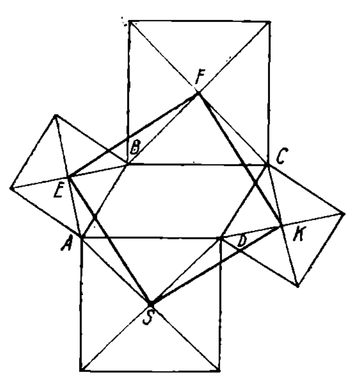
Ablauf der Wettbewerbe: Eröffnungsappell zu gleicher Zeit in beiden Schulen, anschließend Wettbewerb für die ca. 50 besten Jungen Mathematiker der Klassenstufen 5 bis 10 (Klausurdauer: 150 Minuten für 3 Aufgaben), Siegerehrung (Auszeichnung mit Urkunden und Preisen), Austausch der Wettbewerbsergebnisse; die Aufgaben werden im Wechsel von einer der beiden Schulen vorgeschlagen.

Задачи дла 7 класса

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен 20°. Из первой вершины угла при основании проведена прямая, отсекающая угол в 60° при основании. Из второй вершины угла при основании проведена прямая, образующая с основанием угол в 50°.
При продолжении, прямые пересекают равные стороны в точках Д и Е. При соединении точек Д и Е получаем треугольник ЕДО.
Найти углы треугольника.




2. На сторонах параллелограмма построены квадраты. При соединении $4^{x}$ точек, образованных пересечением диагоналей квадратов, получается $4^{x}$ четырехугольник. Доказать, что это квадрат.




3. Разложить на множители:

$$X^4 - X^2(A^2 + 1) + A^2$$

# Eine vorbildliche Jahresarbeit

Sehr geehrter Herr Chefredakteur!

Vielen Dank für Ihren Brief. Ich bin gern bereit, die von Ihnen an mich gerichteten Fragen zu beantworten:
Ich beschäftige mich schon seit langer Zeit außerschulisch mit mathematischen Problemen und war somit ständig auf der Suche nach neuen interessanten Aufgaben.
Bei der Internationalen Mathematikolympiade in Sofia (1966) bekamen wir von den sowjetischen Teilnehmern Aufgabensammlungen, die interessante und zum Teil schwierige Aufgaben enthielten. Da ich die russische Sprache gern habe, machte mir nicht nur das Lösen der Aufgaben, sondern auch das Übersetzen Freude. Anfangs habe ich oft ein mathematisches Wörterbuch zu Hilfe nehmen müssen, Später, als ich mir die im Text häufig vorkommenden Fachausdrücke eingeprägt hatte, ging das Übersetzen schneller. Wenn man regelmäßig alle neuen Vokabeln lernt, gelingt das Übersetzen bald ohne Wörterbuch. (Das würde ich jedem empfehlen!)
Die Lehrer unserer Schule baten mich nun, die Aufgaben und dazu von mir angefertigte Lösungen in einer Jahresarbeit zusammenzufassen. Hier habe ich besonders das mathematisch exakte Niederschreiben geübt.
In meiner Klasse haben noch drei weitere Schüler Jahresarbeiten geschrieben. Alle übersetzten Fachtexte aus dem Russischen. (Mathematikaufgaben aus der Analysis, Mathematikolympiade-Aufgaben, Physikolympiade-Aufgaben).
Die Auswertung der Übersetzungen ist meiner Ansicht nach noch nicht ausreichend. Zwar wurden einige Aufgaben im Mathematikzirkel besprochen; aber es gibt sicherlich noch viele, die sich für die Aufgaben interessieren.
Vielleicht ist es Ihnen aufgefallen, daß die Aufgabe 65 der Jahresarbeit fehlt. Mir ist zu dieser scheinbar so leichten Aufgabe bis heute noch kein elementarer Lösungsweg (ohne Differentialrechnung) eingefallen. Vielleicht findet ein Leser von *alpha* eine Lösung dazu? Ich würde mich freuen, diese zu erfahren.
*Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Winkels ist eine Gerade so zu legen, daß die durch die Schnittpunkte der Geraden mit den Schenkeln des Winkels begrenzte Strecke möglichst klein ist.*
Vielleicht können Sie diese Aufgabe mit veröffentlichen!? . . .

Hochachtungsvoll

Ihr Reinhard Höppner

(EOS Elsterwerda)*

8

× Es ist zu beweisen, daß in einem gleichschenkligen Dreieck die Summe der Abstände eines Punktes der Basis von den Schenkeln konstant ist.

× Vorhanden sind 13 Wägestücke, von denen jedes eine ganzzahlige Masse (in Gramm) hat. Es ist bekannt, daß man beliebige 12 von ihnen so auf die Schalen einer Waage legen kann — und zwar 6 auf jede Schale —, daß das Gleichgewicht eintritt. Es soll bewiesen werden, daß alle 13 Wägestücke dieselbe Masse haben.

9

× Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen $x$, $y$, $z$ gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + xz\,.$$

× Es ist zu beweisen, daß der Rest, der bei der Division einer Primzahl durch 30 entsteht, stets entweder gleich 1 oder wieder eine Primzahl ist.

10

× Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn das Orthozentrum eines spitzwinkligen Dreiecks (d. i. der Schnittpunkt der drei Höhen) die drei Höhen in ein und demselben Verhältnis teilt, so ist das Dreieck gleichseitig.

× Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind, die folgende Ungleichung erfüllt ist:

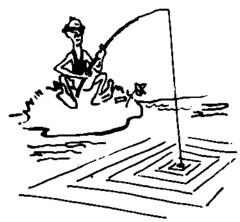
$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}\,.$$

Auswahl der Aufgaben: Dr. R. Lüders

* R. Höppner war Teilnehmer der VIII. und IX. Internationalen Mathematikolympiade (d. Red.).

# In freien Stunden

# alpha heiter



Er denkt gradlinig

### Knifflige Fragen

□ Welches Zeichen muß man zwischen die Zahlen 4 und 5 setzen, um eine Zahl zu erhalten, die größer als 4, aber kleiner als 5 ist?

□ In einer Familie sind 5 Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wieviel Kinder sind im ganzen in der Familie?

□ Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte. Wie lang war der Balken?

□ Aus zwei Zweien und einem Zeichen soll eine Zahl gebildet werden, die gleich $\frac{11}{5}$ ist.

P. J. Germanowitsch

Aus: Aufgaben für mathematische Schülerwettstreite, Verlag Volk und Wissen, Nr. 00042-2, MDN 1,25

○ Max schrieb auf einem Zettel die Zahl 86 und sagte zu Moritz: „Ohne irgendetwas zu schreiben, vergrößere diese Zahl um 12 und zeige mir die Antwort!“

○ Was ist größer: die Summe aller Ziffern oder ihr Produkt?

○ Es sind alle zehn Ziffern der Reihe nach geschrieben:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Welche Rechenzeichen muß man dazwischen setzen, um 100 zu erhalten?

○ Für die Numerierung der Seiten eines Wörterbuches verwendeten die Setzer 6869 Ziffern. Wieviel Seiten enthält das Buch?

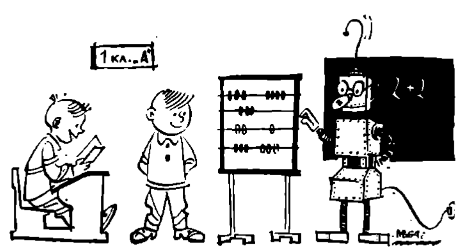
### „Bum!“

Die Teilnehmer setzen sich in eine Runde und beginnen zu zählen: 1, 2, 3, 4, .... Wer eine Zahl erreicht, die entweder durch 7 teilbar ist oder 7 zur Endziffer hat, ruft: „Bum!“ und sein Nachbar zählt weiter. Wer sein „Bum!“ verpaßt, oder sein „Bum!“ nicht sofort herausplatzt, zahlt eine Strafe, gibt ein Pfand. Aber wir wünschen, daß ihr nicht nur eine sinnvolle Unterhaltung habt, sondern auch einmal nachdenkt:

○ Wievielmal wird sich das „Bum!“ beim Zählen bis 1000 wiederholen?

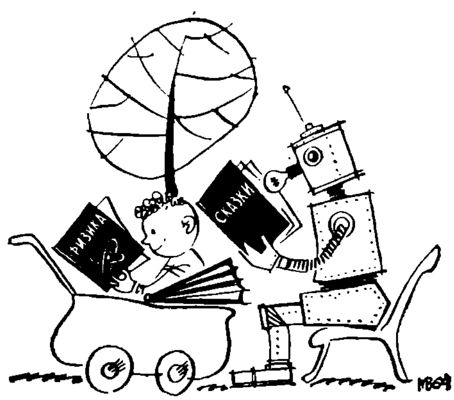
○ Wievielmal wird das „Bum!“ zweimal hintereinander auftreten?

Zusammengestellt von Prof. Dr. Tschaikowski, Lwow



Reportage aus der Zukunft

Aus: „Utschitelskaja gaseta“

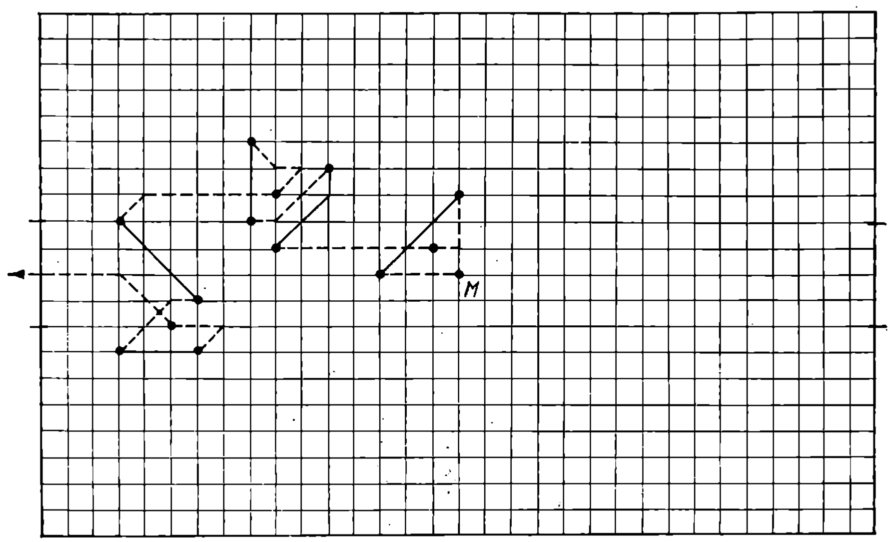



Aus: „Deutsche Lehrerzeitung“

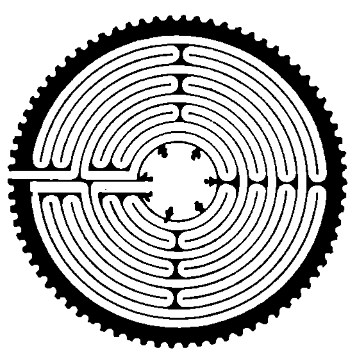
## Football

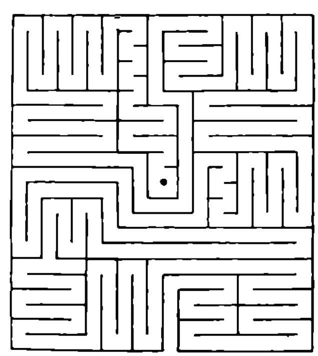
Günstige Spielfeldgröße: 32 Kästchen lang, 20 Kästchen breit, Tore 4 Kästchen breit. Jeder Spieler muß 3 Züge machen (ein Zug ist entweder eine Seitenlänge eines Kästchens oder eine Kästchendiagonale). Begonnen wird in der Mitte des Spielfeldes (*M*). Die Feldbegrenzung darf nicht berührt werden. Bereits gezogene Linien dürfen im Normalfall weder berührt noch gekreuzt werden. Gelingt es einem Spieler, an einem Gitterpunkt zu enden, von dem aus der Gegner, ohne die Regeln zu verletzen, nicht weiterspielen kann, darf er 6 Züge machen. Hierbei dürfen schon vorhandene Linien berührt oder gekreuzt werden. Sieger ist, wer die Torlinie seines Gegners überschreitet (Berühren zählt nicht als Tor!). Verwendet verschiedene Farben! Die Abbildung zeigt einen Sieg des Spielers, der mit gestrichelter Linie spielte.

(Unterhaltungsspiel,
von sowj. Teilnehmern an der VIII. IMO, Sofia 1966, vorgeführt)




## Irrgärten





Lösungen: Komma (4,5); 6 Kinder; 2 m; 2,2; die Zahl 86 wird umgedreht, wir lesen 98 ab; das Produkt aller Ziffern ist Null. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$; 1994 Seiten, $142 + 100 - 14 = 228$.

# VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## Lösungen zu den Aufgaben der Bezirksolympiade (21./22.1.1967)

**Klassenstufe 7**

1. *Lösungsweg* 1: (1) Sind $p$, $q$ natürliche Zahlen $\geqq 1$, wobei $p$ durch $q$ teilbar ist, so ist $p$ das kgV von $p$, $q$. (2) Bei gleichen Voraussetzungen ist $q$ der ggT von $p$, $q$. (3) Das kgV von $a$, $b$, $c$ ist das kgV von $a$ und dem kgV von $b$, $c$. Also ist es nach (1) das kgV von $a$ und $b$. Nochmals nach (1) folgt, daß es $a$ ist. (4) Der ggT von $a$, $b$, $c$ ist der ggT von $c$ und dem ggT von $a$, $b$. Also ist er nach (2) der ggT von $c$ und $b$. Nochmals nach (2) folgt, daß er $c$ ist.

*Lösungsweg* 2: Es gilt (1) $a = bm$ mit ganzem $m$, (2) $b = cn$ mit ganzem $n$, also (3) $a = cnm$, und $mn$ ist ganz. Aus $a = a \cdot 1$, (1), (3) folgt: $a$ ist gemeinsames Vielfaches von $a$, $b$, $c$. Jedes gemeinsame Vielfache von $a$, $b$, $c$ ist Vielfaches von $a$. Also ist $a$ das kgV von $a$, $b$, $c$. Aus (3), (2), $c = c \cdot 1$ folgt: $c$ ist gemeinsamer Teiler von $a$, $b$, $c$. Jeder Teiler von $a$, $b$, $c$ ist Teiler von $c$. Also ist $c$ der ggT von $a$, $b$, $c$.

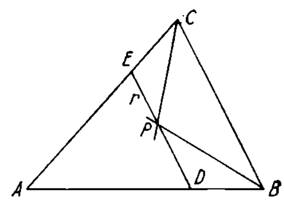
2.* Die 54 Fuchsschritte holt der Hund mit 216 Hundeschritten auf.

3. I. Angenommen, $p$ sei eine Parallele der geforderten Art. Dann gibt es auf der Strecke $DE$ einen Punkt $P$, so daß $\overline{BD} = \overline{DP}$ und $\overline{CE} = \overline{EP}$ gilt. Daraus folgt $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und $\sphericalangle DPB \cong \sphericalangle CBP$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also ist $BP$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$. Entsprechend folgt, daß $CP$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist. Daher kann eine Gerade $p$ höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sein, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ACB$ und ziehe durch ihren Schnittpunkt $P$ die Parallele $p$ zu $BC$.
III. Ist eine Gerade $p$ wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele.

*Beweis:* Nach Konstruktion ist $\sphericalangle DBP \cong \sphericalangle CBP$ (da $\sphericalangle ABC$ durch $BP$ halbiert wird) und $\sphericalangle CBP \cong \sphericalangle DPB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also ist $\triangle BPD$ gleichschenklig, und zwar ist $\overline{BD} = \overline{DP}$. Ebenso folgt $\overline{CE} = \overline{EP}$ und daher $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$. Außerdem liegt $P$ im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, also schneidet $p$ die Strecken $AB$ und $AC$.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden,




ihr Schnittpunkt $P$ und die Parallele durch $P$ zu $BC$ existieren stets und sind eindeutig bestimmt. Nach III gibt es daher stets eine Parallele $p$ der geforderten Art und nach I auch nur eine solche.

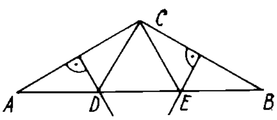
4. I.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ kann z. B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{15}$.

II.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n} = \frac{a(m+n)}{mn}$ kann z. B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$.

III.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$ kann (zugleich mit den übrigen Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15$, $a = 8$ erreicht werden: $\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}$.

5. *Lösungsweg* 1: Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a + b$ mit ganzen Zahlen $a$ und $b$, für die $0 < a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$. Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man:
$10a + b + a - b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar, w. z. b. w.
*Lösungsweg* 2: Laut Aufgabe werden zu der zweistelligen Zahl soviel Einer addiert, wie sie Zehner besitzt, und soviel Einer subtrahiert, wie sie Einer besitzt. Es entsteht daher eine zweistellige Zahl, bei der die Anzahl der Zehner gleich der der Einer ist. Alle derartigen Zahlen (11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99) sind durch 11 teilbar.

6. Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ muß $AB$ sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ABC$ (Gradmaß 30°). Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten $AC$ und $BC$ mit der Seite $AB$ seien $D$ bzw. $E$. Dann ist

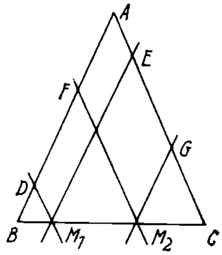



(1) $\overline{AD} = \overline{CD}$ (da $D$ auf der Mittelsenkrechten von $AC$ liegt), also $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BAC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck $ACD$) (Gradmaß 30). Daher hat der Winkel $\sphericalangle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck $\triangle ACD$). Ebenso zeigt man (2) $\overline{BE} = \overline{CE}$ und $\mu$ ($\sphericalangle CED$) = 60°. Also ist $\triangle CDE$ gleichseitig, und es folgt
(3) $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{CE}$. Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BE}$.

**Klassenstufe 8**

1. Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien $O_1$ bzw $O_2$, die Rauminhalte $V_1$ bzw. $V_2$. Dann gilt:
$a_1 : a_2 = 2 : 6 = 1 : 3$
$O_1 : O_2 = 6a_1^2 : 6a_2^2 : = 24 : 216 = 1 : 9$
$V_1 : V_2 = a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27.$

2. Es gilt $\triangle DBM_1 \sim \triangle ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck $\triangle M_1DB$ gleichschenklig und es gilt:
$\overline{BD} = \overline{M_1D}$. (1) Weiterhin gilt: (2)
$\overline{M_1E} = \overline{AD}$, da $M_1EAD$ laut Konstruktion ein Parallelogramm ist. Aus (1) und (2) folgt, daß der halbe Umfang des Parallelogramms $M_1EAD$ gleich der Länge des Schenkels $AB$ ist. Entsprechend zeigt man, daß der halbe



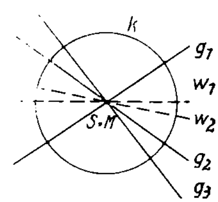

Umfang des Parallelogramms $M_2GAF$ gleich der Länge des Schenkels $AC$ ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, daß die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

3.* Die Lösung ist 9prozentig.

4.* Die kleinste Probenzahl ist 9, die größte 45.

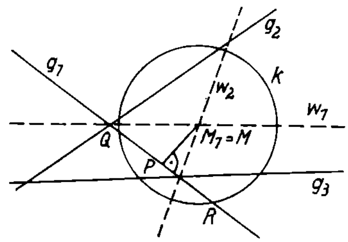
5. I. Angenommen, $M$ sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise $k$. Die Sehnen, die $k$ von $g_1$, $g_2$, $g_3$ abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von $M$ entfernt. Daher liegt $M$ auf einer Winkelhalbierenden $w_1$ von $g_1$, $g_2$ und auf einer Winkelhalbierenden $w_2$ von $g_1$, $g_3$.

a) Haben $g_1$, $g_2$, $g_3$ einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt $S$ gemeinsam, so gehen $w_1$ und $w_2$ durch $S$; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte $\sphericalangle (w, g_3) \cong \sphericalangle (g_1, w) \cong \sphericalangle (w, g_2)$, also $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$.
Somit ergibt sich $M = S$.




b) Haben $g_1$, $g_2$, $g_3$ keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck $D$, und es folgt: $M$ ist einer der 4 Schnittpunkte $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von $D$.
Daher kann ein Kreis $k$ höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. (a) Man schlage den Kreis $k$ um $S$ mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$. (b) Man wähle als $M$ einen der 4 Punkte $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$. Von $M$ fälle man das Lot $MP$ auf $g_1$. Um $P$ schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet $g_1$ in zwei Punkten $Q$, $R$. Dann schlage man den Kreis $k$ um $M$ durch $Q$.




III. Ist ein Kreis $k$ wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.
*Beweis:* Er schneidet von $g_1$ nach Konstruktion eine Strecke der Länge $s$ ab und von $g_2$, $g_3$ je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von $g_1$, $g_2$, $g_3$, gleichweit entfernt ist.
IV. Die Konstruktion II ergibt (a) genau einen Kreis, (b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

6. a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl, mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5.
b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte $31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$ zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form $(a - b)(a + b)$ mit $a = 40$ und $1 \leq b \leq 9$ und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als 2000 ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als $2000^5$. Nun ist aber $2000^5 = 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 =$ $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 32 \cdot 1000000000000000$ eine 17-stellige Zahl. Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18stellige Zahl sein.

**Klassenstufe 9**

1. Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$. Also gilt $p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1)$. Da jede Primzahl $> 3$ eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar. Ferner sind $p_2$, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2$ $(= p_1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist. Da aber $p_1$ und $p_2$ Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist $p_2 + 1$ durch 3 teilbar und damit $p_1 + p_2 = 2\ (p_2 + 1)$ durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Es seien $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{CD} = z$ die Längen der Tetraederkanten. Dann gilt laut Aufgabe, wenn man den Umfang mit $u$ bezeichnet:
(1) $a + b + c = u$ ($\triangle\ ABC$)
(2) $a + y + z = u$ ($\triangle\ DCB$)
(3) $x + b + z = u$ ($\triangle\ CDA$)
(4) $x + y + c = u$ ($\triangle\ BAD$).
Nach Addition dieser vier Gleichungen erhält man:
(5) $a + b + c + x + y + z = 2u$. Addiert man nun (1) und (2) und subtrahiert (5), so erhält man $a = x$. Entsprechend folgt aus (1), (3) und (5) $b = y$ und aus (1), (4) und (5) $c = z$.
Da die vier Dreiecke $\triangle\ ABC$, $\triangle\ DCB$, $\triangle\ CDA$ und $\triangle\ BAD$ mithin in ihren Seiten übereinstimmen, sind sie untereinander kongruent.

3. Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit $a$, $b$ bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit $c$. Dann ist $(a - b)^2$ als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2 \geqq \frac{1}{2}(a + b)^2$. Wegen $c > 0$ und $a + b > 0$ folgt hieraus die Behauptung $c \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$.

4. Angenommen, $p$ sei eine Primzahl, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist. Dann gilt $2p + 1 = z^3$, wobei $z$ eine natürliche Zahl ist.
Da $2p + 1$ ungerade ist, ist auch $z$ ungerade. Es gilt daher $z = 2n + 1$ ($n$ eine nicht negative ganze Zahl). Also gilt $2p + 1 =$ $= (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$ und damit $2p = 2n\ (4n^2 + 6n + 3)$ und $p = n\ (4n^2 + 6n + 3)$.
Da $p$ Primzahl ist und der Faktor $4n^2 + 6n + 3$ eine natürliche Zahl größer als 2 ist, folgt für den anderen Faktor $n = 1$. Für $n = 1$ ist $p = 1 \cdot (4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3) = 13$ Primzahl und $2 \cdot 13 + 1 = 27$ tatsächlich Kubikzahl. Die einzige Primzahl $p$, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist, ist daher die Zahl 13.

5. a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $v_1 > v_2$. Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von $B$ bezüglich $A$ durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also $\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24}$ m $= 280$ m. Das ist die Länge des Kreisumfanges.

b) Nach dem Gesagten ist

$$v_1 + v_2 = \frac{14}{24}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 35\,\frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von $B$ bezüglich $A$ durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit $v_2$ von $v_1$. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit

$$v_1 - v_2 = \frac{280}{56}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

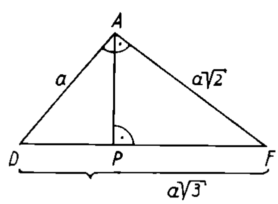
Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also

$$v_1 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ und } v_2 = 15\,\frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

6. Auf diese Lösung muß aus Platzgründen verzichtet werden (d. Red.).

**Klassenstufe 10**

1. Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge $a$, $a \cdot \sqrt{2}$, $a \cdot \sqrt{3}$ auf der letztgenannten




ten Seite errichteten Höhe. Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa $\triangle ADF$. Es ist bei $A$ rechtwinklig, da $AD$ auf der Ebene $\varepsilon_{ABEF}$ senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe $AP$ ist daher, wie aus $\triangle ADP \sim \triangle DFA$ folgt,

$$h = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}\,.$$

2. Wegen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ gilt
$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \geqq 0$, d. h.
$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6abc \geqq 0$.
Nach Addition von $9abc$ erhält man
$(bc + ac + ab)(a + b + c) \geqq 9abc$.
Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc\,(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

3. Es ist $\overline{EA} + \overline{AF} + \overline{FD} + \overline{DC}$
$= 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = \overline{EC}$.
Daraus folgt, daß die Orte $E, A, F, D, C$ in dieser Reihenfolge auf ein und derselben Geraden liegen. $A, B, F$ sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\sphericalangle ABF$. Dies folgt wegen $\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = \overline{AF}^2$ aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras. Es sei $Q$ der Fußpunkt des Lotes von $B$ auf $AF$. Wegen $\triangle BFQ \sim \triangle AFB$ ist dann

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24 \text{ und}$$

$$\overline{QF} = \frac{\overline{BF}^2}{\overline{AF}} = \frac{40^2}{50} = 32. \text{ Also ist}$$

$$\overline{QD} = \overline{QF} + \overline{FD} = 32 + 38 = 70.$$

Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle BQD$ nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{BD}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{QD}^2 = 24^2 + 70^2$$
$$= 4\,(12^2 + 35^2) = 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit $\overline{BD} = 74$. Die Entfernung von $B$ nach $D$ beträgt also 74 km.

4. Die gegebene Gleichung ist genau dann in $x$ quadratisch, wenn $k \neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$(1)\quad x^2 + \frac{1}{1-k}\,x + \frac{3-5k}{1-k} = 0.$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanden nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}}$$
$$= \frac{1}{(2k-1)} \pm \sqrt{\frac{1-4(3-5k)(1-k)}{4(1-k)^2}}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{-20k^2 + 32k - 11}}{2(k-1)} \quad *)$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2 + 32k - 11 = 0, \quad \text{das heißt,}$$
$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0 \quad \text{ist.}$$

Das ist für $k = \frac{11}{10}$ und für $k = \frac{1}{2}$ und nur für diese $k$ der Fall.

b) Für $k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0$, $k \neq 1$, hat (1) zwei voneinander verschiedene reelle Wurzeln. Das ist der Fall für $\frac{1}{2} < k < 1$ und $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese $k$.

*) NB: Damit die letzte Gleichung richtig ist, hat man in ihr das Doppelvorzeichen passend zu wählen.

5. Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x-9>0$ und $2x-1>0$ gilt. Dies ist genau für $x>9$ der Fall. Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lg(2x-1)+\frac{1}{2}\lg(x-9) &> 1\\
\lg(2x-1)(x-9) &> 2\\
\lg(2x^2-19x+9) &> \lg 100.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
(2x^2-19x+9) &> 100 \quad \text{d. h.,}\\
2x^2-19x-91 &> 0 \quad \text{oder}\\
x^2-\frac{19}{2}x-\frac{91}{2} &> 0 \quad \text{gilt.}
\end{aligned}$$

Wegen $(x-13)\left(x+\frac{7}{2}\right)=x^2-\frac{19}{2}x-\frac{91}{2}$ ist die letzte Ungleichung äquivalent mit

$$(1)\quad (x-13)\left(x+\frac{7}{2}\right) > 0.$$

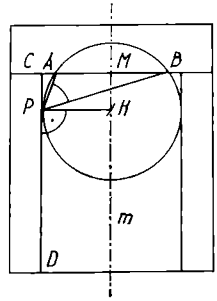
Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn

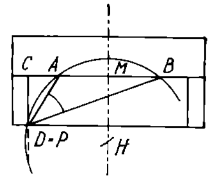
entweder (2) $x-13>0$ und $x+\frac{7}{2}>0$

oder (3) $x-13<0$ und $x+\frac{7}{2}<0$.

Aus (2) folgt $x>13$ und umgekehrt; aus (3) folgt $x<-\frac{7}{2}$ und umgekehrt. Davon ist wegen $x-9>0$ nur $x>13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x>13$ und nur für diese erfüllt.

6. Alle Winkel $\sphericalangle APB$ mit $P$ auf $CD$ können als Peripheriewinkel über der Sehne $AB$ aufgefaßt werden. Die Mittelpunkte $H_1$ der entsprechenden Kreise liegen auf der Mittelsenkrechten $m$ von $AB$. Da jeder Peripheriewinkel halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel, ist der Punkt $H$ auf $m$ zu finden, der (1) Mittelpunkt eines durch $A$ und $B$ gehenden und $CD$ schneidenden oder berührenden Kreises ist und der (2) den unter diesen Umständen größten Zentriwinkel $\sphericalangle AHB$ ergibt. Der Winkel $\sphericalangle AHB$ ist um so größer, je kleiner die Länge $r$ des Radius des $CD$ berührenden oder schneidenden Kreises um $H$ durch $A$ und $B$ ist. Wegen $r \geqq \overline{CM}$ ($M$ sei der Mittelpunkt von $AB$) ist $\sphericalangle AHB$ genau dann am größten, wenn $r=\overline{CM}$ ist und wenn der zugehörige Kreis die Strecke $CD$ berührt. In diesem Falle ist der gesuchte Punkt $P$ der Berührungspunkt. Berührt




dieser Kreis aber die $CD$ enthaltende Gerade außerhalb der Strecke $CD$, so ist $r$ am kleinsten und damit $\sphericalangle AHB$ am größten, wenn $H$ Mittelpunkt des Kreises durch $A$, $B$, $D$ ist. In diesem Falle ist $P=D$. In beiden Fällen ist $P$ eindeutig bestimmt.

# Lösungen

**Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. U. Pirl:**

1 Im Fall II. ist das eben erläuterte Verfahren nicht durchführbar: $t_{21}$ würde negativ ausfallen. Das Fahrrad kann jetzt bei keiner Einteilung in der Zeit $T_0$ von $A$ bis $B$ gelangen, sondern frühestens nach $\frac{S}{v_2}$ ($>T_0$) Stunden in $B$ ankommen.

Wir betrachten wieder eine beliebige Einteilung und setzen $T'=T_0+\delta$, dann ist $\delta>0$, weil jetzt in (3) nicht das Gleichheitszeichen stehen kann. Dabei gelange das Fahrrad bis zum Punkte $C$ der Strecke $AB$. Die Länge der Strecke $AC$ werde mit $L$ bezeichnet. Dann gilt für die Summe der Zeiten, die die drei Freunde unterwegs sind

$$3(T_0+\delta) \geqq T_1+T_2+T_3 \geqq \frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_3}+\frac{L}{v_2}+\frac{S-L}{v_1}; \tag{4}$$

denn die nicht mit dem Fahrrad zurückgelegte Strecke $CB$ der Länge $S-L$ muß mindestens zweimal zu Fuß bewältigt werden. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$3\delta \geqq (S-L)\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right), \text{ d. h.,}$$

$$S-L \leqq \frac{3\delta v_1 v_2}{v_2-v_1}. \tag{5}$$

Derjenige, der in $C$ vom Fahrrad steigt, braucht bis $B$ noch mindestens $\frac{S-L}{v_3}$ Std.; denn er kann diese Strecke nicht schneller als mit Mopedgeschwindigkeit zurücklegen. Da er nicht früher als zur Zeit $\frac{L}{v_2}$ in $C$ absteigen kann — das Fahrrad kann nicht eher in $C$ sein — gilt

$$T_0 + \delta \geqq \frac{L}{v_2} + \frac{S-L}{v_3}$$
$$= \frac{S}{v_2} - (S-L)\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right). \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$T_0 + \delta \geqq \frac{S}{v_2} - \frac{3\,\delta\, v_1 v_2}{v_2 - v_1}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right) \text{ und hieraus}$$

$$\delta \geqq \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{(S - T_0 v_2)(v_2 - v_1)}{v_2 v_3 + 2 v_1 v_3 - 3 v_1 v_2} \underset{\text{df}}{\equiv} \delta_0 > 0. \quad (7)$$

Daß $S_0 > 0$ ist, erkennt man daraus, daß $S - T_0 v_2 > 0$ wegen $v_2 < H$ gilt und der Nenner wegen $v_1 < v_2 < v_3$ positiv ist. In (7) steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (5) und (6) gleichzeitig steht.

Im Falle II. ist die gesuchte Minimalzeit $T_0 + \delta_0$. Um dies zu beweisen, genügt es wie im Falle I, eine Realisierung dieser Zeit anzugeben.

Ist $\delta = \delta_0$, so erhält man für $L$ aus (6) und (7) mit dem Gleichheitszeichen den Wert $L_0$

$$L_0 = \frac{T_0 v_3 - S}{v_3 - v_2} v_2 + \delta_0 \frac{v_2 v_3}{v_3 - v_2} > 0$$

und aus (5) und (7), wenn dort die Gleichheitszeichen stehen,

$$L_0 = S - \frac{3\,\delta_0 v_1 v_2}{v_2 - v_1} < S.$$

Bezeichnet man noch mit $C_0$ denjenigen Punkt der Strecke $AB$, für den die Strecke $AC_0$ die Länge $L_0$ hat, so legt jeder der drei Freunde die Strecke $AB$ in der Zeit $T_0 + \delta_0$ zurück, wenn folgendermaßen verfahren wird:

1. $F_2$ fährt von $A$ bis $C_0$ mit dem Fahrrad und danach bis $B$ mit dem Moped. Dabei legt er die Strecke $AB$ wegen (6) und (7) mit den Gleichheitszeichen in der Zeit $T_0 + \delta_0$ zurück. Das Verfahren ist genau dann durchführbar, wenn er nach der Zeit $\frac{L_0}{v_2}$ in $C_0$ das Moped vorfindet.
2. $F_3$ fährt die erste Hälfte der Strecke $AC_0$ mit dem Moped und läuft dann bis $B$ zu Fuß. Das ist unabhängig von den beiden anderen sicher durchführbar.
3. $F_1$ geht die erste Hälfte der Strecke $AC_0$ zu Fuß, fährt dann mit dem Moped bis $C_0$ und läuft das letzte Stück bis $B$ zu Fuß. Dies ist durchführbar, da $F_3$ mit dem Moped die Mitte von $AC_0$ eher erreicht als $F_1$ zu Fuß.

$F_1$ und $F_3$ kommen dabei gleichzeitig in $C_0$ und zwar nach $\frac{L_0}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right)$ Std. an. Das ist, weil der Fall II vorliegt, früher als $F_2$, so daß sich $F_2$ wie beschrieben verhalten kann. Für $L = L_0$ und $\delta = \delta_0$ stehen in (5) und (6) die Gleichheitszeichen, folglich stehen dann auch in (4) beide Gleichheitszeichen. Da das linke nur dann steht, wenn alle drei Freunde gleichzeitig in $B$ ankommen, erreichen bei der angegebenen Einteilung alle drei $B$ gleichzeitig. Dabei kommt auch das Moped in $B$ an, während das Fahrrad an der Stelle $C_0$ stehen bleibt. Wegen (6) ist $\frac{S}{v_2} > T_0 + \delta_0$, so daß das Fahrrad nicht in der Zeit $T_0 + \delta_0$ von $A$ bis $B$ gelangen kann, d. h., wenn die Freunde möglichst schnell von $A$ nach $B$ kommen wollen, müssen sie das Fahrrad unterwegs stehen lassen.

Eine Realisierung des Falles II. wäre folgendermaßen denkbar: $v_1 = 15$ km/h (Langstreckenläufer), $v_2 = 20$ km/h, $v_3 = 50$ km/h. Dann ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right) = \frac{10+3}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{13}{300} < \frac{1}{20} = \frac{1}{v_2}.$$

**47 Planetarische Lebewesen**
**Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Karl:**

Der Schüler Hans Dietrich Gronau, EOS „Friedrich Engels“, Klassenstufe 10, Neubrandenburg, sandte uns die vorbildliche Lösung zu der Aufgabe von Herrn Prof. Dr. H. Karl, die wir nachstehend original wiedergeben:

Zur Lösung führe ich folgende Bezeichnungen ein:

| | |
|---|---|
| | $x_1 \triangleq a, b, c$ von $K_1$ |
| $a$-Beine (Anzahl) | $x_2 \triangleq a, b, c$ von $K_2$ |
| $b$-Flügel (Anzahl) | $x_3 \triangleq a, b, c$ von $K_3$ |
| $c$-Fühler (Anzahl) | $x_4 \triangleq a, b, c$ von $K_4$ |

$\rightarrow a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4 \quad b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$
$c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$

$$\begin{array}{llll} a_1 > a_4; & b_2 > b_3; & c_3 > c_1 & \\ a_2 > b_2 & b_1 \geqq a_1 & b_3 \geqq a_3 & b_4 \geqq a_4 \\ b_4 > c_4 & c_1 \geqq b_1 & c_2 \geqq b_2 & c_3 \geqq b_3 \end{array} \quad (1)$$

Aus den Ungleichungen von (1) folgt:

$$c_3 > c_1 \geqq b_1 \geqq a_1 > a_4 \quad (2)$$
$$a_2 > b_2 > b_3 \geqq a_3. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt, daß $b_4 = 8$, denn
$b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$ und
$b_1 < 8; \quad b_2 < 8; \quad b_3 < 8.$

$\rightarrow$ 1. Fall: $b_1 = 4$ (4)

$\rightarrow$ aus (4) und (3) folgt:
$b_2 = 6 \quad b_3 = 2 \rightarrow a_3 = 2$
aus (2) und (4) folgt: $a_1 = 4 \quad a_4 = 2.$
$a_3$ und $a_4$ stehen in Widerspruch.

$\rightarrow$ 2. Fall: $b_1 = 6$ (5)

$\rightarrow$ aus (5) und (3) folgt:
$b_2 = 4; \quad b_3 = 2; \quad a_3 = 2$
$\rightarrow$ aus (2) und (5) folgt: $c_1 = 6; \quad c_3 = 8$
aus (2) und (3) folgt:
$a_1 < c_3 \leqq 8; \; a_4 < a_1 < 8; \; a_3 < b_2 = 4$
$\rightarrow a_2 = 8;$ da $a_4 < a_1 \rightarrow a_1 = 6; \; a_4 = 4.$
Da $c_2 \geqq b_2$ (1) und $c_2 \neq c_1 \neq c_3 \rightarrow c_2 \leqq 4$
$b_2 = 4 \rightarrow c_2 = 4$
$c_4 = 2$

Es ergibt sich dann folgende Zusammenstellung:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | Beine | 6 | Flügel | 6 | Fühler | 6 |
| $K_2$ | „ | 8 | „ | 4 | „ | 4 |
| $K_3$ | „ | 2 | „ | 2 | „ | 8 |
| $K_4$ | „ | 4 | „ | 8 | „ | 2 |

Das Vergleichen dieser Lösungen mit den Aussagen bestätigt die Richtigkeit dieser Lösung.

Prof. Dr. H. Karl spricht dem „prächtigen Jungen" für diese Leistung seine Anerkennung aus und schreibt an die Redaktion: „Die vorstehende Lösung ist in allen durchgeführten Schlüssen richtig und bedarf in dieser Hinsicht keiner Korrektur. Lediglich die formale Wiedergabe der in der Aufgabe formulierten Bedingungen ist nicht ganz einwandfrei, denn aus

$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ folgt noch nicht, daß auch die Ungleichungen $a_1 \neq a_3$, $a_2 \neq a_4$ und $a_1 \neq a_4$ gelten. Will man dies berichtigen, so kann entweder die zweite Ungleichungskette $a_2 \neq a_4 \neq a_1 \neq a_3$ hinzugefügt werden oder aber statt der beiden eine andere Art der Formulierung gewählt werden, z. B. folgende, die zugleich berücksichtigt, daß entsprechend mit den $b$- und $c$-Werten zu verfahren ist. Zur Lösung führt man zweckmäßig folgende Bezeichnungen ein: $a_\nu$, $b_\nu$ bzw. $c_\nu$ seien die Anzahlen der Beine, Flügel bzw. Fühler der Käferart $K_\nu$, ($\nu = 1, 2, 3, 4$). Dann gilt auf Grund der Aufgabenstellung $a_\nu \neq a_\mu$, $b_\nu \neq b_\mu$ und $c_\nu \neq c_\mu$ für $\nu \neq \mu$, ($\nu, \mu = 1, 2, 3, 4$). Die weiteren Bedingungen lauten dann $a_1 > a_4$, $b_2 > b_3$ usw. wie im Lösungstext."

**80 Lösung der Aufgabe von**
**Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens:**

1. *Lösungsweg:* Die Anwendung des Sinussatzes auf das mit den Seiten $S_1$, $S_2$ und $L$ gebildete Dreieck (Abb. 4) liefert

$$\frac{S_1}{L} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$S_1 = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot L.$$

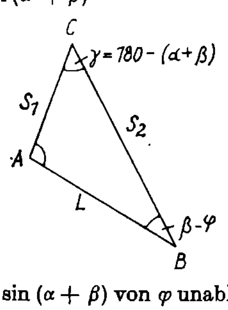



Abb. 4

Da nun $\sin(\alpha + \beta)$ von $\varphi$ unabhängig ist, gilt

a) $S_1$ hat ein positives Maximum $S_1^{(1)}$, wenn $\sin(\beta - \varphi_1) = 1$

b) $S_1 = S_1^{(2)}$ ist gleich Null, wenn $\sin(\beta - \varphi_2) = 0$

c) $S_1$ hat ein negatives Maximum $S_1^{(3)}$, wenn $\sin(\beta - \varphi_3) = -1$, somit folgt aus

a) $\sin(\beta - \varphi_1) = 1$ die Bedingung $\beta - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, also $\varphi_1 = \beta - \frac{\pi}{2}$,

b$_1$) $\sin(\beta - \varphi_2) = 0$ die Bedingung $\beta - \varphi_2 = 0$, also $\varphi_2 = \beta$

b$_2$) $\sin(\beta - \bar{\varphi}_2) = 0$ die Bedingung $\beta - \bar{\varphi}_2 = \pi$, also $\bar{\varphi}_2 = \beta - \pi$

c) $\sin(\beta - \varphi_3) = -1$ die Bedingung $\beta - \varphi_3 = \frac{3}{2}\pi$, also $\varphi_3 = \beta - \frac{3}{2}\pi$, das heißt,

a) $S_1$ erreicht als Zugkraft das Maximum, wenn $L$ senkrecht auf dem Stab 2 steht und nach oben zeigt (Abb. 5a). Es ist dann

$$S_1^{(1)} = \frac{L}{\sin(\alpha + \beta)}$$

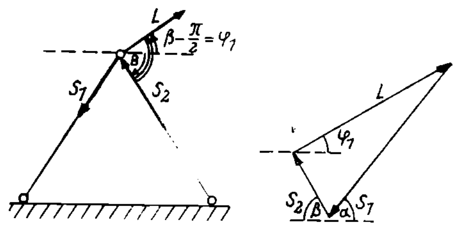



Abb. 5a Lageplan Kräfteplan

b) $S_1$ ist gleich Null, wenn $L$ in die Richtung des Stabes 2 zeigt. Es gibt zwei um 180° verschiedene Lagen, einmal ist $S_2$ ein Druckstab (Abb. 5b$_1$) und einmal ist $S_2$ ein Zugstab (Abb. 5b$_2$).

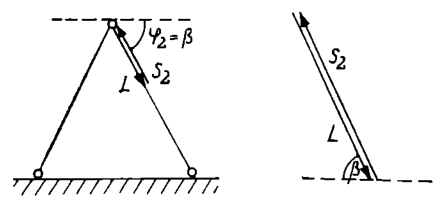



Abb. 5b$_1$ Lageplan Kräfteplan

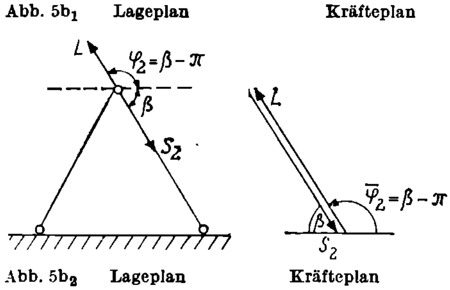



Abb. 5b$_2$ Lageplan Kräfteplan

c) $S_1$ erreicht als Druckkraft das Maximum, wenn $L$ senkrecht auf dem Stab 2 steht und nach unten zeigt (Abb. 5c). Es ist dann

$$S_1^{(3)} = \frac{L}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

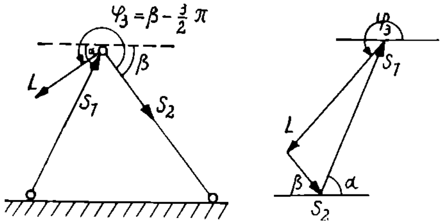



Abb. 5c Lageplan Kräfteplan

2. *Lösungsweg* (rein geometrische Lösung): In geometrischer Deutung verlangt die Aufgabe, ein Dreieck $ABC$ (das Krafteck) zu zeichnen (Abb. 4), bei dem der Winkel $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ und die Seite $\overline{AB} = L$ gegeben sind und in dem eine der Seiten $\overline{AC} = S_1$ bzw. $\overline{BC} = S_2$ einen Extremwert annimmt. Zur Lösung wird der Peripheriewinkelsatz benutzt. Beachtet man, daß die größte Sehne eines Kreises der Durchmesser ist, so ist damit aus der Schar der unendlich vielen Dreiecke mit gegebenem $\gamma$ und $L$ dasjenige Dreieck bestimmt, das der Aufgabenstellung entspricht. Die Konstruktion der Seiten des Kraftecks ist in Abb. 6 durchgeführt.

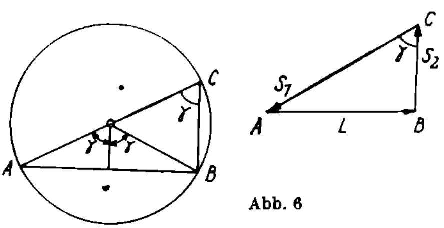



Abb. 6

3. *Lösungsweg:* Da die in Abb. 3 eingezeichneten Kräfte im Gleichgewicht stehen, gilt die Vektorgleichung

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{L} = 0,$$

der die beiden skalaren Gleichungen

$$-S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + L \cos\varphi = 0$$
$$S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta + L \sin\varphi = 0$$

entsprechen.

Dieses System hat die Lösung

$$S_1 = \frac{-(\cos\alpha \sin\beta - \sin\varphi \cdot \cos\beta)}{-(\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta)} \cdot L$$
$$= \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot L$$
$$S_2 = \frac{\cos\alpha \sin\varphi + \sin\alpha \cos\varphi}{-(\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta)} \cdot L$$
$$= -\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot L$$

und liefert somit die schon auf dem ersten Lösungsweg gefundene Formel.

**alpha - heiter (1/67)**

Silbenrätsel: Außenwinkel, Radius, Cantor, Hektoliter, Inkreis, Mittelpunkt, Exponent, Durchmesser, Ebene, Sekante (Setzfehler: Li-mes statt lim-es) —*Archimedes.* — Es gibt mindestens 3 Schüler und höchstens 720 Schüler dieser Schule, die am gleichen Tag Geburtstag haben. 731 — 11 = 720; 730 : 365 = 2 und 2 + 1 = 3. —

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 17 | 7 |
| 13 | 9 | 5 |
| 11 | 1 | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $\frac{7}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ |
| $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{5}$ |

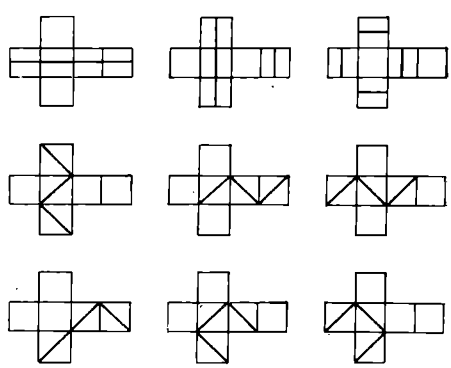
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 320 = 135$$

Im Gefäß bleiben 135 g der Substanz. — 250 g (ein Stück) Markenbutter kosten 2,50 MDN; für 870 g sind demnach 8,70 MDN zu zahlen. — Unter 150001 Menschen gibt es wenigstens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Kopfhaaren besitzen. Moskau hat über 6 Millionen Einwohner. 39 · 150001 = 5850039. Aus 5850039 < 6000000 folgt die Richtigkeit der Behauptung. — Scherzfragen: Schachtel; Kreisdurchmesser; Summe; Stammbruch.

**alpha - heiter (2/67)**

Wortschatz im Sechseck: Sieben, Lambda, Kepler, Faktor, Radius, Minute, Sektor, Klasse, Winkel. — $a = 0$; $b = 1$; $c = 2$; $d = 4$; $e = 6$; $f = 5$; $g = 9$.

Nicht im Netz verfitzen:



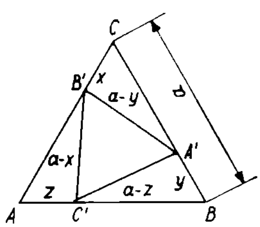
Die unvermutete Pointe: $20x = 25(x - 12)$; $x = 60$; $V = 1200$ Liter. — Folgende Kombinationen sind möglich: 10 ($A$); 0 ($B$); 0 ($C$) — 7; 1; 1 — 5; 4; 0 — 4; 2; 2 — 3; 0; 4 — 2; 5; 1 — 1; 3; 3 — 0; 8; 0 — 0; 1; 5 —

In der ersten Schale waren $n$ Äpfel ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$); in der zweiten und dritten Schale lagen je $n + 3$ Äpfel. Die Aufgabe besitzt beliebig viele Lösungen. —

**W(10)67** Aus 8) folgt: Nach Stralsund fährt entweder der Physiker oder der Mathematiker.
Aus 5) und 6) folgt: Der Physiker fährt nach Stralsund.
*Zwischenergebnis:* Der Chemiker fährt nach Schwedt, der Mathematiker nach Greifswald, der Physiker nach Stralsund.
Aus 5) folgt: Der Physiker ist 30 Jahre alt.
Aus 6) und 7) folgt: Herr Neumann ist Chemiker.
*Zwischenergebnis:* Der Chemiker ist 39 Jahre alt, der Mathematiker ist 43 Jahre alt, der Physiker ist 30 Jahre alt.
Aus 7) folgt: Der 39jährige Chemiker heißt Neumann.
Aus 4) und 9) folgt: Der Physiker heißt Müller.

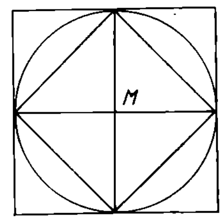
**W(5)68** Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, welche die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks sind, lassen sich durch $n - 1$, $n$ und $n + 1$ symbolisieren. Die Summe dieser drei Zahlen beträgt $3n$.
Aus $3n = 42$ folgt $n = 14$. Die Längen der Dreieckseiten sind demnach 13 cm, 14 cm und 15 cm.

**W(6)69** Aus der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen: $\triangle\, BA'C' \cong \triangle\, CB'A' \cong \triangle\, AC'B'$ (sws).




Jedes dieser Dreiecke besitzt einen Winkel von 60°; nach Konstruktion gilt $\overline{AC'} = \overline{BA'} = \overline{CB'}$; aus $\overline{AB'} = a - x$, $\overline{CA'} = a - y$ und $\overline{BC'} = a - z$ folgt wegen $x = y = z$, daß die Strecken $\overline{AB'}$, $\overline{CA'}$ und $\overline{BC'}$ ebenfalls gleich lang sind. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$. Das Dreieck $A'B'C'$ ist somit ebenfalls gleichseitig.

**W(7)70** Wir zeichnen einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r = 3$ cm. Danach ziehen wir durch $M$ zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser; ihre Schnittpunkte mit der Kreislinie sind die Eckpunkte

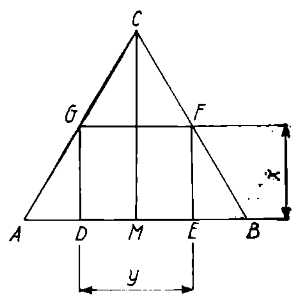



des ersten Quadrates. Durch jeden Eckpunkt zeichnen wir eine Gerade, die jeweils senkrecht zu einem bereits gezeichneten Durchmesser steht. Die Schnittpunkte dieser vier Geraden sind die Eckpunkte des zweiten Quadrates.

$$A_1 = 4 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2}\ \text{cm}^2 = 18\ \text{cm}^2;$$

$$A_2 = 6 \cdot 6\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2; \quad A_1 : A_2 = 1 : 2.$$

**W(8)71** Es sei $DEFG$ das einbeschriebene Rechteck mit den Seiten $\overline{EF} = \overline{GD} = x$ und $\overline{DE} = \overline{FG} = y$.




Dann folgt nach dem Strahlensatz

$$y : c = (h - x) : h,$$

also $y = \dfrac{c\,(h - x)}{h}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ gilt daher:

$$\begin{aligned} A = xy &= \frac{x\,c\,(h-x)}{h} = \frac{c}{h}\,[hx - x^2] \\ &= \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} + hx - x^2\right] \\ &= \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h^2}{4} - h\,x + x^2\right)\right] \\ &= \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - x\right)^2\right] \leqq \frac{c}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{c\,h}{4}. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt hat also genau dann den größten Wert, wenn $\frac{h}{2} - x = 0$, d. h. $x = \frac{h}{2}$ und $y = \frac{c}{2}$ ist.

# Lebendige Mathematik

Auf den folgenden 2 Seiten stellen wir interessante Bücher aus der Sowjetunion vor, deren Inhalt für Euch und Euer Steckenpferd, die Mathematik, das richtige „Futter" ist.

Schachno, K. U.

**Sammlung von Aufgaben aus der Elementarmathematik mit erhöhter Schwierigkeit**

(Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности.)

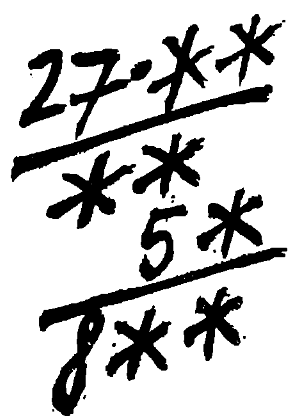
3., verb. Aufl. Minsk 1966. 478 Seiten mit 259 Abb.
Halbleinen. 4,75 MDN
Bestellnummer VII A-1688
In russischer Sprache.

Nagibin, F. F.

**Mathematische Schatulle**

(Математическая шкатулка.)

2. Aufl. Moskau 1961. 166 Seiten. Illustr.
Halbleinen. 1,55 MDN
Bestellnummer III-3344a
In russischer Sprache.

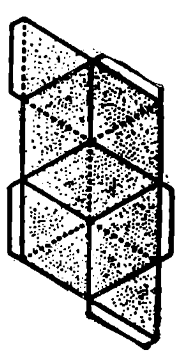



Poswjanski, A. D. u. N. N. Ryshow

**Aufgabensammlung zur darstellenden Geometrie**

(Сборник задач по начертательной геометрии.)

3. Aufl. Moskau 1966. 280 Seiten. Illustr.
Halbleinen. 2,55 MDN
Bestellnummer VII-A 1719
In russischer Sprache.



Ostrowski, A. I.

**75 Aufgaben der Elementarmathematik — einfach, aber . . .**

(75 задач по элементарной математике — простых, но . . . .)

Moskau 1966. 132 Seiten. Illustr.
Broschiert. —,75 MDN
Bestellnummer VII A-1599
Die Formulierung der Aufgaben ist fast immer überaus einfach, aber sie sind interessant wegen der Originalität des Lösungsweges.
In russischer Sprache.

… из одной вершины, …

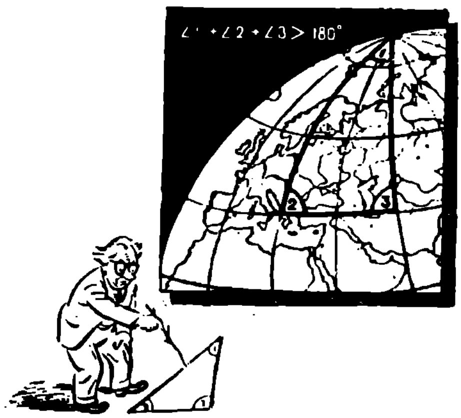
2. Дописать к 523 ... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

… $A$, $B$, $C$, $D$ — последователь-

**Aufgabensammlung von Moskauer Mathematik-Olympiaden**
(Сборник задач по Московских Олимпиад.)
Moskau 1965. 384 Seiten mit 66 Abb.
Halbleinen. 3,05 MDN
Bestellnummer VII A-1516

Die Aufgaben dieses Buches sind sowohl in bezug auf den Reichtum des theoretischen Inhalts als auch in bezug auf ihre Lösungen sehr interessant. Es enthält etwa 500 Aufgaben, die auf Moskauer Mathematik-Olympiaden gestellt worden sind.
In russischer Sprache.

Landau, L. und J. Rumer
**Was ist die Relativitätstheorie?**
(What is the theory of relativity)
3. Aufl. Moskau 1965. 68 Seiten. Illustr.
Broschiert. 1,25 MDN
Bestellnummer En 1257.
In englischer Sprache.




Perelman, J.
**Zahlen zum Zeitvertreib**
(Figures for Fun)
Moskau o. J. 152 Seiten. Illustr.
Halbleinen. 2,75 MDN
Bestellnummer En 1014

Ein unterhaltsamer Unterricht in Mathematik, wobei dem Leser mit mathematischen Rätseln, mathematischen Problemen und praktischen Aufgaben geholfen wird, sich ein Grundwissen in Mathematik anzueignen.
In englischer Sprache.

Perelman, J.
**Unterhaltsame Physik.** 1. Buch.
(Physique récréative)
Moskau o. J. 232 Seiten. Illustr.
Halbleinen. 5,50 MDN
Bestellnummer Fr 530/1

Der Verfasser, der schon durch mehrere populärwissenschaftliche Bücher einen guten Namen hat, veranschaulicht dem Leser in diesem Werk physikalische Erscheinungen, die jedem täglich begegnen.
In französischer Sprache.

Perelman, J.
**Lebendige Mathematik** (Живая математика.)
Mathematische Erzählungen und Rätsel. 8. Aufl. Moskau 1967. 160 Seiten. Illustr.
Broschiert. 1,15 MDN
Bestellnummer VII A-1760
In russischer Sprache.

**Diese und andere interessante Mathematikbücher erhaltet Ihr in jeder Buchhandlung mit Fremdsprachensortiment.**

LKG Leipziger Kommissions- und Großbuchhandel


Index 31059