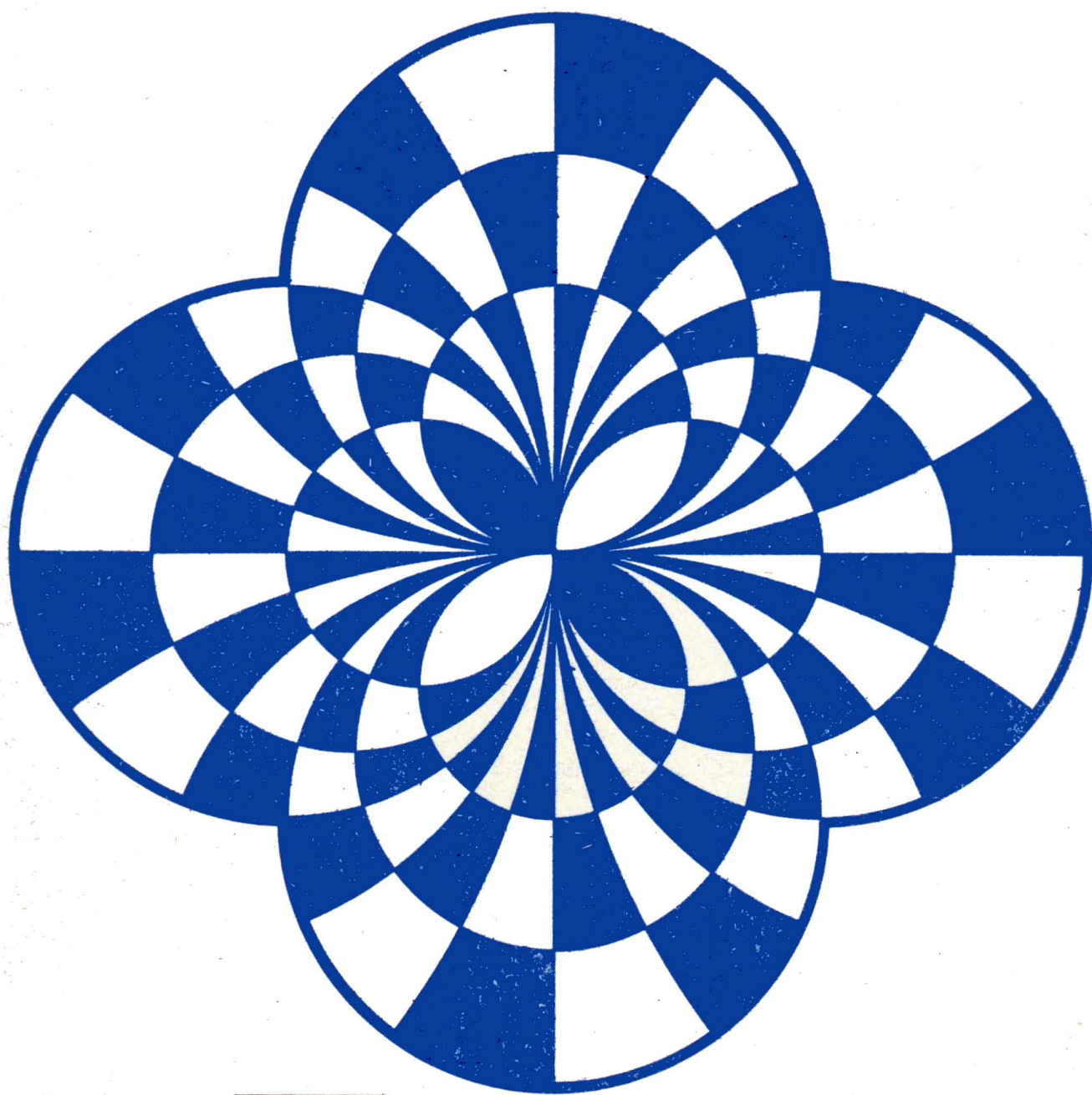
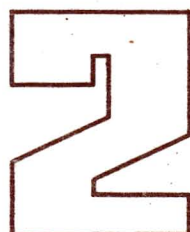


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059**



Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gro-
nitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Ha-
meister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin);
Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl
(Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner
(Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter
Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studien-
rat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes
(Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig);
Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lü-
ders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/
Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin);
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H.
Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Trä-
ger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Dr. habil.
W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
0,50 M, im Abonnement zweimonatlich
(1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder
den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland
und Westberlin durch den Buchhandel, für
das Ausland durch Deutscher Buch-Export
und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte
kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Reproduktion W. I. Lenin, Kurzer
biographischer Abriß, Dietz Verlag Berlin
(S. 25); A. Nitzsche, Erfurt (S. 27); Foto
Zentralbild (S. 31); Vignetten: H. Stügel-
meier, Berlin (S. 34); aus Frösi-Knobelma-
gazin (S. 35); Zeichnungen: E. Berger, Döbeln
(S. 34/35); Technische Zeichnungen: G. Grub,
Leipzig

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des Mini-
sterrates der Deutschen Demokratischen Re-
publik

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei

der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollensetdruck)

Redaktionsschluß: 27. Januar 1970

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Mathematik in der Familie W. I. Lenins (5)*
G. N. Wolkow, Moskau
- 27 Eine Aufgabe von Prof. Dr. phil. et rer. nat. habil. Theo Glocke (7)
Pädagogische Hochschule Dr.-Theodor-Neubauer, Erfurt/Mühlhausen
- 27 Berufsbild: Diplomlehrer für Mathematik (8)
R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 28 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 8 (7)
J. Frommann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow
- 29 Rechnen mit Resten Teil 6 (5)
Dr. G. Lorenz, Sektion Mathematik, Bereich Schulmathematik und Methodik,
Humboldt-Universität, Berlin
- 30 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (9)
Oberstudienrat H. Titze, Ministerium für Volksbildung, Berlin
- 32 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
- 33 Mathematikolympiaden in der ČSSR (8)
St. Horák, Redakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy*,
Prag/Fachschuldozent O. Lange, Döbeln
- 34 Logisch denken — spielend erlernt
G. Scholz, Berlin
- 35 Frösi-Knobelmagazin (5)
(speziell für Klasse 5 und 6)
- 36 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (6)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule Döbeln
- 38 IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (7)
Aufgaben der Bezirksolympiade (7./8. 1970)
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 39 VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (10)
Lösungen der Aufgaben 3 bis 6 der DDR-Olympiade (1969)
- 41 Lösungen (5)
- 46 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig; Oberlehrer H. Pätzold, OS Waren/Müritz
- 48 Mathematik-Kalender Mai/Juni 1970 (5)
W. Heinig, Hohenstein-Ernstthal; Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig
- III. Umschlagseite: Literatur (5)
- IV. Umschlagseite: Leser schreiben an *alpha* (5) Kreis und Vieleck (5)
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V. Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik in der Familie W. I. Lenins

Wladimir Iljitsch Lenin zeigte in seinem gesamten Leben ein lebhaftes Interesse an der Mathematik. Seit seiner frühesten Jugend befand er sich unter Menschen, die die Mathematik gut kannten und ihn dafür begeisterten. Seine Mutter, *Maria Alexandrowna*¹, bestand im Jahre 1863 erfolgreich das erste Volksschullehrerexamen. Sie war sehr an der Musik interessiert und spielte gut Klavier. Dabei machte sie bereits den fünf- bis sechsjährigen *Lenin* mit einfachen Brüchen bekannt, indem sie ihm ganze und halbe Noten sowie Viertelnoten und andere vorspielte.

Unter der Leitung seines Vaters, *Ilja Nikolajewitsch*², beschäftigte sich *Lenin* erstmals ernsthaft mit der Mathematik. Durch ihn erfuhr er von *Lobatschewski*. Sein Vater machte ihn auch mit dem tschuwaschischen³ Mathematiker *Ochotnikow* und mit dem Mathematiker *Jakowlew* bekannt.

Im Jahre 1853 verteidigte *Ilja Nikolajewitsch* erfolgreich seine Dissertation „Die Methode von Olbers und ihre Anwendung zur Bahnbestimmung eines Kometen von Klinkerfues“. Dafür wurde ihm der wissenschaftliche Grad eines Kandidaten der mathematischen Wissenschaften verliehen. *Ilja Nikolajewitsch* lehrte danach etwa 15 Jahre in den Fächern Mathematik und Physik am Adelsinstitut in Pensa und im Knabengymnasium von Nishni-Nowgorod (seit 1932 Gorki); 17 Jahre arbeitete er als Volksschulinspektor. Vor den Augen des jungen *Lenin* vollzog sich die aufopferungsvolle Bildungsarbeit des Vaters im Simbirsker Gouvernement. Nach zahlreichen Besuchen in tschuwaschischen Schulen hatte *Ilja Nikolajewitsch* regelmäßig Berichte zu verfassen, in denen er auf wesentliche Mängel im damaligen Arithmetikunterricht hinwies, z. B.: Die Schüler „werden nur oberflächlich mit den Längenmaßen bekannt

gemacht und können nur schlecht arithmetische Berechnungen im Kopf durchführen; sehr schlecht steht es um die Entwicklung von Fertigkeiten bei den einzelnen Rechentätigkeiten; es existieren unklare Vorstellungen über die „Desjatine“⁴, sowie allgemein über Flächenmaße; es gibt Lücken in den notwendigen Rechenfertigkeiten.“ *Ilja Nikolajewitsch* kritisierte, daß einige Lehrer im Arithmetikunterricht „die Schüler das selbständige Lösen von zusammengesetzten Aufgaben nur wenig üben lassen und die Kinder auch nicht an die schriftliche Fixierung des Lösungsweges arithmetischer Aufgaben gewöhnen.“

Ilja Nikolajewitsch empfahl, beim Vermitteln der Grundbegriffe der Geometrie von geometrischen Figuren auszugehen, die aus Papier oder Pappe modelliert werden können, damit die Schüler alle räumlichen Begriffe möglichst konkret erlernen können. Er half den Lehrern bei der Auswahl von Lehrbüchern und Aufgabensammlungen; er versorgte sie mit Anschauungsmitteln und mit Geräten.



Familie Uljanow, Foto 1879 (rechts vorn, sitzend: *Wladimir*)

Ein enger Freund der Familie *Uljanow* wurde der Mathematiklehrer *Jakowlew*. Er unterrichtete, wenn man von kleineren Unterbrechungen absieht, von 1868 bis 1922 Mathematik, Logik und Pädagogik.

¹ *Maria Alexandrowna Uljanowna* (1835 bis 1916) stammte aus einer Petersburger Arztfamilie.

² *Ilja Nikolajewitsch Uljanow* (1831 bis 1886) war tätig als Pädagoge, Inspektor und Direktor von Volksschulen im Simbirsker Gouvernement.

³ Die Tschuwaschische ASSR (Autonome Sozialistische Sowjetrepublik) liegt am Mittellauf der Wolga.

⁴ Die „Desjatine“ ist ein altes russisches Flächenmaß. Die Größe dieses Maßes änderte sich im Laufe der Jahrhunderte und war auch örtlich verschieden. Das am weitesten verbreitete Maß der Desjatine entsprach 1,0925 ha.

Ilja Nikolajewitsch besprach ständig seine Berichte mit *Jakowlew*. *Lenin* hörte mehrmals die hitzigen Gespräche der beiden Lehrer über die Verbesserung des Arithmetikunterrichts, wenn sie von den gemeinsamen Inspektionsreisen durch die Schulen des Gouvernements zurückgekehrt waren.

In dieser Zeit verfolgte der Vater bei seinen Kindern aufmerksam die mathematische Entwicklung, die er durch zusätzliche mathematische Beschäftigungen förderte.

Der ältere Bruder und die jüngere Schwester von *Lenin*, *Alexander* und *Anna*, trieben leidenschaftlich Mathematik. Von den gemeinsamen mathematischen Interessen des Vaters und der beiden Söhne zeugt auch folgender Auszug aus einem Brief *Alexanders*: „Ich schickte Vater die Broschüre ‚Mathematische Sophismen‘, die er sich sehr wünschte. Ich denke, sie kann auch für *Wolodja* (Rufname für *Wladimir*) sehr nützlich sein, wenn er diese Sophismen selbständig untersucht.“ *Lenins* Cousin und Freund aus der Kindheit, *N. Weretennikow*, teilte mit ihm das Interesse für Mathematik. Später wurde er Lehrer für die Fächer Mathematik und Physik. Manchmal gab es in Kokuschkino (heute Lenino) zwischen *Lenin* und *Weretennikow* regelrechte „Mathematische Wettstreite“, bei denen die Aufgaben vom Vater in einer faßlichen und verständlichen Form gestellt wurden. *Ilja Nikolajewitsch* benutzte bei seinem Sohn das Dorf, den Wald, den Fluß, das Feld sowie das ganze bäuerliche Leben zur Entwicklung der Fähigkeit, das tägliche Leben durch eine „mathematische Brille“ zu sehen, wie *N. K. Krupskaja*⁵ es einmal formulierte.

Während sich *Jakowlew* mit *Lenin* unterhielt, lehrte er ihn das Zählen, stellte einfache Scherzaufgaben und vertrieb die Zeit mit solchen Sätzen wie „Ein Fisch und ein halber Fisch kosten anderthalb Kopeken. Wie teuer sind drei Fische?“

Später erinnerte sich *Jakowlew*: „Vom Vater erbte *Wladimir* unter anderem auch die mathematische Begabung.“

Lenin war der beste Schüler in seiner Klasse; besonders erfolgreich war er in Mathematik.

M. F. Kusnezow, der mit *Lenin* dieselbe Klasse besuchte, erzählte später, daß es *Lenin* liebte, sich mit mathematischen Problemen zu beschäftigen. Mit Vergnügen half er seinen Klassenkameraden und konnte ohne Schwierigkeiten Aufgaben aus der Aufgabensammlung für die Reifeprüfung lösen. Interessant ist auch noch folgende Stelle aus den Erinnerungen *Kusnezows*: „Auf Initiative von *Wladimir Iljitsch* entstand ein Mathematikzirkel, der eine erfolgreiche

Arbeit leistete. Unser Mathematiklehrer *Fedotschenko* verstand es nicht, uns durch seine passive Unterrichtsmethode für sein Fach zu interessieren. Er handelte eine Theorie ab, ohne auch entsprechende Aufgaben lösen zu lassen. Unter der Leitung *Wolodjas* wurde eine große Anzahl schwieriger Aufgaben gelöst.“

Lenin liebte es, seinen Schulkameraden untypische und etwas ausgefallene Aufgaben zu stellen. Er erfand sie selbst oder suchte sie aus den Büchern seines Vaters zusammen. Seine Aufgaben werden in den genannten Erinnerungen als interessant bezeichnet.

Solche Aufgaben findet man heute vom Aufbau her in Aufgabensammlungen zum Geometrieunterricht. In jener Zeit waren sie aber den Kindern unbekannt. Interessant ist das folgende Beispiel, das *Weretennikow* anführt:

„*Wolodja* wies ... darauf hin, wie man das Quadrieren einer auf 5 endenden Zahl vereinfachen kann. Er gab zwei Beispiele, überließ es aber mir selbst, diese Regel abzuleiten und allgemein zu beweisen:

$$(1) \quad 65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25;$$

$$(2) \quad 105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25.$$

Heute kann man diese Überlegungen in einem elementaren Lehrbuch finden. Damals waren sie nicht so verbreitet. Wenn ich sie anführe, so deshalb, weil an unserem Gymnasium mit ihnen große Erfolge errungen wurden.“

Lenin hatte nicht nur vorzügliche Kenntnisse auf dem Gebiet der Mathematik. Er beschäftigte sich nicht nur begeistert mit ihr. Er zeigte auch ein ständiges Interesse für Lehrpläne in Mathematik. Er sorgte dafür, daß Lehrbücher ausgearbeitet wurden und empfahl die Verbesserung und Vervollkommnung der Lehrmethoden. In ihren Erinnerungen beschreibt *Krupskaja*, wie sich *Lenin* einmal mit Schülern unterhielt. Er fragte sie, was sie in der Schule machen. „Was hattet ihr in der ersten Stunde?“ — „Arithmetik. Wir behandelten die Multiplikation von Dezimalbrüchen.“ „Und danach?“, fragte *Lenin* weiter. Er fragte solange, bis ihm die Schüler auch über die letzte Unterrichtsstunde des Tages erzählten. Auf der Grundlage solcher Gespräche bildete er sich eine Meinung darüber, welche Probleme es in der neuen sowjetischen Schule gibt. Als Zeugnis dafür, daß sich *Lenin* auch beständig und aufmerksam um die Verbesserung der Lehrpläne und der Schulbücher für Mathematik kümmerte, kann auch die Tatsache angesehen werden, daß in seiner persönlichen Bibliothek außer den ersten Auflagen der Mathematiklehrbücher auch die berichtigten und überarbeiteten Auflagen standen. *Lenins* mathematischen Studien zeugen von jenem Niveau der harmonischen Entwicklung der Persönlichkeit, das Bestandteil des Antlitzes der heutigen und der zukünftigen Generationen ist und sein wird.

⁵ *Nadeschda Konstantinowna Krupskaja* (1869 bis 1939) war die Lebens- und Kampfgefährtin *Lenins*.

G. N. Wolkow, (gekürzt aus: *Matematik w schkole*)

Eine Aufgabe von
Prof. Dr. phil. et rer. nat.
habil.

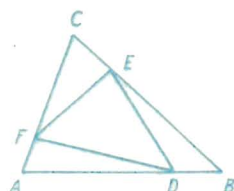
Theo Glocke

1. Prorektor der Pädagogischen Hochschule
„Dr. Theodor Neubauer“ Erfurt/Mühlhausen

▲ 509 Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ des
Dreiecks $\triangle ABC$ seien die Punkte D , E , F
so konstruiert, daß gilt:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA}.$$

Zeige: Der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle DEF$
fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks
 $\triangle ABC$ zusammen.



1953 wurden wie in einigen anderen Städten
auch in Erfurt und Mühlhausen Pädagogische
Institute gegründet. Sie bildeten in zwei-
jährigem, später in drei- und vierjährigem
Studium Fachlehrer für die Klassen 5 bis 10
der allgemeinbildenden Oberschulen aus. Auf
Grund des hohen Niveaus der Ausbildung,
der Entwicklung der wissenschaftlichen Qua-
lifikation des Lehrkörpers und der materiell-
technischen Voraussetzungen des Studiums
konnte am 1. 9. 1969 dem Pädagogischen
Institut Erfurt der Status einer Pädagogischen

Berufsbild: Diplomlehrer für Mathematik

Liebe Freunde!

Wir möchten Euch den Beruf eines *Diplom-
lehrers für Mathematik* (und ein Zweitfach)
an der allgemeinbildenden Oberschule vor-
stellen.

Es gehört wohl zu den schönsten und inter-
essantesten Aufgaben, unsere Jugend auf die
Meisterung der Wissenschaft und Technik
von morgen vorzubereiten. Neuartige Ener-
giequellen, vollautomatische Betriebe, Welt-
raumstationen gewaltigen Ausmaßes u.a.m.
werden unser sozialistisches Leben im Jahr
2000 bestimmen. Wie bekannt, ist gerade
die Mathematik eine entscheidende Grund-
lage für solch gewaltige Leistungen. Sie findet
in zunehmendem Maße in allen Bereichen
von Wissenschaft und Technik Anwendung
und ist schon heute zu einer unmittelbaren
Produktivkraft geworden. Im Zuge unseres
weiteren sozialistischen Aufbaues und der
technischen Revolution brauchen wir deshalb
eine Vielzahl von Lehrern gerade für Mathe-
matik, die ihre Aufgabe darin sehen, bei
ihren Schülern das Interesse an der Mathe-

Hochschule verliehen und das Pädagogische
Institut Mühlhausen mit der neuen Hoch-
schule vereinigt werden.

In diesem Studienjahr erhalten hier ungefähr
700 künftige Lehrer eine Ausbildung im Fach
Mathematik.

matik und die Liebe zur Mathematik zu
wecken, und sie zu lebensfrohen und tüch-
tigen Menschen unserer sozialistischen Ge-
meinschaft zu erziehen.

Wenn Ihr, liebe Freunde, Euch heute begei-
stert der Mathematik widmet, so verdankt
Ihr das nicht zuletzt Eurem Mathematik-
lehrer. In den meisten Fällen war er es, der
Euch den Weg zu dieser Wissenschaft wies
und ebnete, der Eure Begabung entdeckte
und förderte. Bei ihm habt Ihr gelernt, Eure
Umwelt mathematisch zu erfassen, um sie
dadurch besser verstehen und verändern zu
können. Der Mathematiklehrer ist es, der
durch seine Arbeit wesentliche Vorausset-
zungen für ein Studium mathematisch-natur-
wissenschaftlicher, technischer und ökonomischer
Disziplinen schafft. Er ist es, der
seine Schüler befähigt, daß sie in ihrer künf-
tigen verantwortungsvollen Tätigkeit in der
Gesellschaft Probleme und Zusammenhänge
erkennen, deren Lösung die Anwendung
mathematischer Gesetzmäßigkeiten erforder-
t. Gerade in den nächsten Jahren und
Jahrzehnten steht vor dem Mathematiklehrer
eine vielseitige, interessante und schöne Auf-
gabe, die inhaltliche und methodische Neu-
gestaltung des Mathematikunterrichts ent-
sprechend den Forderungen unserer sozial-
istischen Praxis, die Realisierung der neuen
Lehrpläne und die Mitarbeit an ihrer stän-
digen Verbesserung.

Die Ausbildung von Diplomlehrern für die
allgemeinbildende Oberschule erstreckt sich
über 4 Jahre. Sie umfaßt neben der Aus-
bildung im ersten und zweiten Unterrichts-
fach auch Marxismus/Leninismus, Pädago-
gik/Psychologie, Methodik, Sport und einige
andere Fächer. Das Studium gliedert sich in
Grund- und Fachstudium. Das Grundstu-
dium umfaßt die beiden ersten Studienjahre.
In den Hauptdisziplinen der Mathematik, so
u. a. in Analysis, Algebra und Arithmetik,
Geometrie und in numerischer Mathematik,
wird ein gut fundiertes Grundlagenwissen
vermittelt, und es werden spezifische Arbeits-
methoden und Verfahren der Mathematik
deutlich gemacht. Das Grundstudium soll
wesentliche Voraussetzungen für die Ertei-
lung eines wissenschaftlich einwandfreien
Mathematikunterrichtes schaffen.

Das Fachstudium, das im dritten und vierten
Studienjahr absolviert wird, gibt die Mög-
lichkeit, sich in einer spezifischen Disziplin
der Mathematik vertiefte Kenntnisse zu erar-
beiten und aktuelle Forschungsprobleme ken-
nenzulernen, vielleicht sogar an ihrer Lösung
mitzuarbeiten.

In den letzten beiden Studienjahren erhält der
Student auch eine fachmethodische Ausbil-
dung, die ihn in Verbindung mit den anderen
Ausbildungsdisziplinen befähigen soll, die
heutigen und die künftigen Anforderungen
an einen niveauvollen wissenschaftlich ein-
wandfreien modernen Mathematikunterricht
zu erfüllen.

R. Mildner



Einführung in die Elektronische Daten- verarbeitung

Teil 8

Als Ergänzung der im vorigen Teil behandelten Gleitkommadarstellung einer Zahl sollen jetzt noch einige Regeln — wie bereits angekündigt — aufgeschrieben werden.

Multiplikation und Division

Zwei Gleitkommazahlen werden multipliziert (dividiert), indem man die Mantissen multipliziert (dividiert) und die Exponenten addiert (subtrahiert).

Geht eine Division nicht ganzzahlig auf, so rechnet der Automat über das Komma hinaus bis zu einer festgesetzten Dezimalstelle weiter, wobei jeder Überlauf über das Maschinenkomma eine Verschiebung nach links, verbunden mit einer Verminderung des Exponenten um 1, nach sich zieht. Bei der Divisionsaufgabe

$12 : 7 = 1,714$ würden also die Teilergebnisse, jedes wieder als Ziffernfolge geschrieben, der Reihe nach so aussehen:

$$\begin{array}{r} 100 \\ 170 \overline{)1} \\ 1710 \overline{)2} \\ 17140 \overline{)3} \end{array}$$

Addition und Subtraktion:

Zwei Gleitkommazahlen werden addiert (subtrahiert), indem man zunächst gleiche Exponenten schafft (Gleichnamigmachen): Man vermindert den größeren Exponenten und verschiebt gleichzeitig die Mantisse um die nötige Stellenzahl nach links. Dann werden die Mantissen addiert (subtrahiert), und der Exponent wird beibehalten. Beispiel:

$$\begin{array}{r} 263603 + 97815470\bar{2} \\ \downarrow \text{Verschiebung um 5 Stellen} \\ 263600000\bar{2} \\ + 97815470\bar{2} \\ \hline = 2733815470\bar{2} \end{array}$$

Bei allen Rechenoperationen müssen noch

1. die Vorzeichen berücksichtigt,
 2. eventuell nötige Rundungen durchgeführt werden.
- Darauf wollen wir aber nicht weiter eingehen.

2. Schaltfunktionen — Funktionsschaltungen

2.0. Vorbetrachtung

Aus dem Mathematikunterricht ist uns der *Funktionsbegriff* bekannt. Wir denken dabei an Funktionen wie

$y=3x+4$, $y=6x^2$, die älteren Schüler vielleicht auch an $y=\sin x$ oder $y=\log x$ usw. In der Rechentechnik kommen neben diesen Funktionen noch andere vor. Um diese näher kennenzulernen, sollen zunächst einige Merkmale aufgezählt werden, durch die sich diese Funktionen von denen des Schulunterrichts unterscheiden:

1. Während bei den schulischen Funktionen sowohl die unabhängige Veränderliche (unabhängige Variable) x als auch die abhängige Variable y gewöhnlich unendlich viele Werte annehmen können, ist bei den hier zu besprechenden Funktionen jede Variable nur zweier Werte fähig, nämlich 0 und 1. Also: entweder $x=0$ oder $x=1$ und andererseits entweder $y=0$ oder $y=1$.

2. In der Schule werden meistens nur Funktionen von einer (unabhängigen) Veränderlichen betrachtet, allgemein mit $y=f(x)$ (lies: $y=f$ von x) bezeichnet. Jetzt treten auch Funktionen mit zwei und mehr unabhängigen Variablen auf, also $y=f(x_1, x_2)$ beziehungsweise $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. Die Funktionen des Schulunterrichts werden — wie bei den obigen Beispielen — im allgemeinen durch eine Funktionsgleichung dargestellt, wobei der Funktionswert y aus dem jeweiligen Wert der unabhängigen Variablen mit Hilfe von arithmetischen Operationen berechnet wird. Jetzt werden wir Funktionen durch *Tabellen* definieren.

2.1. Konjunktion, Diskonjunktion und Negation

Die in diesem und in den nächsten Abschnitten beschriebenen Funktionen heißen *Schaltfunktionen* oder *logistische Funktionen*. Eine dieser Funktionen haben wir bereits im Abschnitt 1.4. kennengelernt, und zwar in Form des dualen Einmaleins:

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Wie man sieht, ist es eine Funktion mit den oben beschriebenen Merkmalen, nämlich eine Funktion von zwei Veränderlichen x_1 und x_2 , die durch die Tabelle

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
y	0	0	0	1

definiert werden kann. Die Veränderlichen dieser Schaltfunktion sind die Multiplikandenziffer x_1 und die Multiplikatorziffer x_2 . Wir können auch schreiben: $f(x_1, x_2)=1$, wenn $x_1=1$ und $x_2=1$, sonst 0.

Wir nennen diese Funktion *Konjunktion*, auf deutsch UND-Funktion. Die UND-Funktion läßt sich auf drei und mehr unabhängige Variable ausdehnen. Allgemein definieren wir:

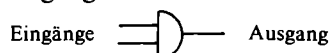
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=1$, wenn $x_1=x_2=\dots=x_n=1$, sonst 0.

Wir verwenden für die Konjunktion auch das Zeichen $\wedge$, schreiben also zum Beispiel $0 \wedge 1 = 0$.

Der durch eine Schaltfunktion dargestellte theo-

retische Sachverhalt muß nun im Automaten praktisch realisiert werden. Dies geschieht durch eine geeignete Verdrahtung von Schaltelementen zu einer sogenannten Funktionsschaltung. Woraus diese im einzelnen besteht (Relais, Röhren, Transistoren, Kondensatoren, Spulen, Ferritkerne ... — je nach Automatentyp verschieden) und welche elektrischen, magnetischen oder mechanischen Vorgänge sich darin abspielen, möge die Physiker und Techniker interessieren. Uns genügt folgendes:

Jede Funktionsschaltung hat einen oder mehrere *Eingänge* $E_1, E_2, \dots, E_n$ für die unabhängigen Variablen und genau einen *Ausgang* A für die abhängige Variable, also für den Funktionswert. Eingänge und Ausgang sind die bereits besprochenen bistabilen Schaltelemente, deren Zustände (Wertbelegungen) O und L man sich etwa durch zwei verschiedene Spannungen — zum Beispiel L positiv und O negativ — realisiert denken kann. Die Konjunktionsschaltung, auch UND-Glied genannt, symbolisieren wir für zwei Eingänge so:



Den mathematischen Sachverhalt schreiben wir

$$A = E_1 \wedge E_2$$

oder mit den anderen Bezeichnungen

$$y = x_1 \wedge x_2.$$

Eine weitere grundlegende Schaltfunktion ist die *Disjunktion*, auch ODER-Funktion genannt. Zeichen: $\vee$.

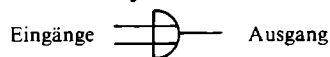
Wir tabellieren sie für zwei Variable:

x_1	O	O	L	L
x_2	O	L	O	L
$y = x_1 \vee x_2$	O	L	L	L

Es ist also diesmal $f(x_1, x_2) = L$, wenn $x_1 = L$ oder* $x_2 = L$, sonst O, allgemein:

$f(x_1, x_2 \dots x_n) = L$, wenn ein $x_i = L$ existiert, sonst O.

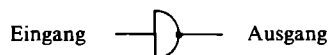
Hier das Schaltsymbol für zwei Eingänge:



Als drittes führen wir die *Negation*, auch NEIN-Funktion genannt, ein. Es ist eine Funktion von nur einer Veränderlichen. Sie kehrt jeden Wert in den anderen um. Wir kennzeichnen diese Funktion durch einen Querstrich, also:

x	O	L
$y = \bar{x}$	L	O

Hier noch das Schaltsymbol:



J. Frommann

* In der Mathematik unterscheidet man zwischen dem einfachen *oder*, bei dem auch beide Bedingungen zugleich erfüllt sein dürfen, und dem strengeren *entweder* — *oder*, wo immer nur genau eines gelten soll. Hier ist es das einfache *oder*.

Rechnen mit Resten

Teil 6

▲ B 18 Zu bestimmen ist $z = \sqrt[3]{35\,287\,552}$. Zunächst sehen wir, daß es sich bei z um eine dreistellige Zahl handeln muß, weil der Radikand zwischen $100^3 = 1\,000\,000$ und $1\,000^3$ liegt. Die letzte Ziffer von z muß 8 sein, und die erste ist offensichtlich 3 wegen $3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3$.

Die Elferreste benutzen wir nun, um die mittlere Ziffer zu bestimmen. Schreiben wir für diese noch zu ermittelnde Ziffer zunächst x , so würde die Darstellung der Zahl z im Dezimalsystem lauten 3×8 . Dafür ergäbe sich der Elferrest $11 - x$. Der Elferrest des Radikanden ist aber 3 wegen

$(2+5+8+5) - (5+7+2+3) = 3$, und dieser Rest ist nach unserer Tabelle die dritte Potenz des Restes 9. Also muß auch die gesuchte Zahl 3×8 bei Division durch 11 den Rest 9 lassen:

$11 - x = 9$, also $x = 2$. Demzufolge ist $z = 328$.

Es liegt auf der Hand, daß all diese Rechnungen ohne Schwierigkeiten im Kopf auszuführen sind — bis auf die Ermittlung des Elferrestes des Radikanden. Aber das Publikum gestattet uns gewiß, den Radikanden zu notieren — schließlich fehlt uns das phänomenale Gedächtnis der berufsmäßigen Rechenkünstler. Pech haben wir allerdings mit unserer Vorführung, wenn das Publikum, das die Aufgaben stellt, sich bei der Berechnung der Kubikzahlen oder fünften Potenzen verrechnet hat. Peinlich ist es, wenn man dann beispielsweise dazu kommt, für

$z = \sqrt[3]{423\,473\,625}$ anzugeben 735, obwohl doch z eine Irrationalzahl ist, beginnend mit 750,94 ... Der Aufgabensteller wollte sicherlich $\sqrt[3]{413\,493\,625} = 745$ bestimmen lassen. Man empfehle daher dem Publikum, vor Stellen der Aufgabe Neuner- und Elferprobe anzuwenden, um eventuelle Rechenfehler vorher aufzudecken. Zum Abschluß noch eine Aufgabe, mit der man sich auf das erste „öffentliche Auftreten“ präparieren kann:

▲ A 12 Man versuche, folgende Wurzeln im Kopf zu bestimmen: $a = \sqrt[3]{39\,304}$ $c = \sqrt[3]{205\,962\,976}$
 $b = \sqrt[3]{493\,039}$ $d = \sqrt[3]{99\,252\,847}$.

Weitere drei Aufgaben mit Lösungen sowie auch die Lösungen zu den anderen in dieser Artikelserie gestellten Aufgaben findet der Leser im nächsten Heft.

G. Lorenz

Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe?

Bei mathematischen Wettbewerben findet man oft Aufgaben, bei denen die Konstruktion einer geometrischen Figur aus gegebenen Stücken unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal verlangt wird. Im folgenden soll an dem Beispiel der von vielen Teilnehmern als recht schwer lösbar bezeichneten Aufgabe 6, Olympiadeklasse 10, VII. OJM, 3. Stufe, gezeigt werden, wie man etwa an die Lösung eines solchen Problems herangehen kann und welche Schritte zu einer vollständigen und exakten Lösung gehören.

Die Aufgabe lautet:

6. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3 \text{ cm}$; $b - c = 3,5 \text{ cm}$ und $a = 8 \text{ cm}$! Dabei sei h_c die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC , b die der Seite AC und c die der Seite AB und es sei $a < b$.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Man beginnt am besten mit einer Planfigur, die nach Möglichkeit die gegebenen Stücke enthalten soll. Hierbei handelt es sich noch um keine Konstruktion, doch muß man bestimmte Besonderheiten der Aufgabe beachten. So muß in unserem Falle z. B. $h_c > h_b$ und $b > c$ sein. Außerdem ist wegen $a < b$ der $\sphericalangle CAB$ spitz. Damit erhält man etwa folgendes Bild:

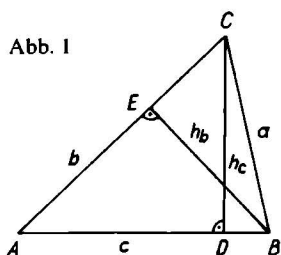


Abb. 1

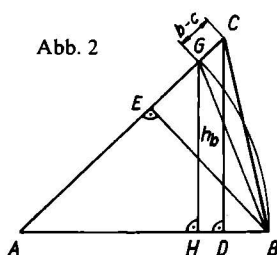


Abb. 2

In dieser Planfigur ist nur a gegeben. Die Differenzen $b - c$ bzw. $h_c - h_b$ sind nicht enthalten. Es kommt also jetzt darauf an, solche Hilfslinien einzuzichnen, daß man ein Teildreieck mit den gegebenen Stücken erhält. Es liegt nun nahe, von A aus auf AC die Strecke AB abzutragen. Wegen $AB < AC$ liegt der Endpunkt G zwischen A und C . Laut Konstruktion ist also

$\overline{AG} = \overline{AB} = c$. Damit ist aber $\triangle ABG$ gleichschenkelig und das von G auf AB gefällte Lot (mit dem Fußpunkt H) hat die Länge h_b .

Es fehlt uns jetzt nur noch eine Strecke von der Länge $h_c - h_b$. Man erhält sie leicht, indem man von G das Lot auf CD (Fußpunkt sei F) fällt. Damit ist aber ein Teildreieck gefunden, nämlich $\triangle CGF$, das sich aus zwei Seiten und dem rechten Winkel bei F eindeutig konstruieren läßt. Gleichzeitig haben wir mit $\sphericalangle CGF$ einen Winkel erhalten, der genau so groß ist wie $\sphericalangle CAB$. Es gilt also: $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CAB^*$.

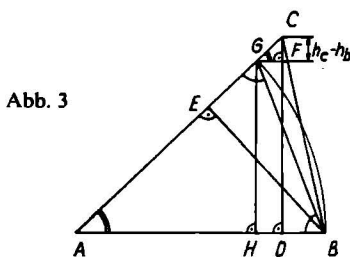


Abb. 3

Nun suchen wir nach einer Konstruktionsmöglichkeit für den Punkt B . Er liegt auf dem Kreis mit a um Punkt C . Es fehlt aber noch eine zweite Angabe. Ein Blick auf die Figur zeigt, daß er außerdem auf der Geraden durch G und B liegen muß. Für diese Gerade läßt sich aber die Richtung konstruieren, denn offensichtlich ist GB Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FGA$. Jetzt können wir den 1. Teil der Lösung formulieren:

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck der geforderten Art (Abb. 3) mit $\overline{CD} = h_c$ und $\overline{BE} = h_b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$. Auf AC trage man von A aus c mit dem Endpunkt G ab. Dann ist $\triangle ABG$ gleichschenkelig mit $\overline{AB} = \overline{AG} = c$ (1) und

$\sphericalangle ABG = \sphericalangle AGB = R - \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$ und es gilt:

$\overline{CG} = b - c$.

Das von G auf AB gefällte Lot schneide AB in H . Dann gilt: $\overline{GH} = \overline{BE} = h_b$.

Das von G auf CD gefällte Lot schneide CD in F . Dann gilt: $\overline{CF} = h_c - h_b$ ($HDFG$ ist ein Rechteck) und $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CAB = \alpha$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Da ferner $\sphericalangle FGA = 180^\circ - \alpha$ ist, ist GB Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FGA$.

Das ist der erste Teil unserer Lösung; die *Analyse des Problems*. Nun folgt der zweite Teil, die *Konstruktionsbeschreibung*. Sie beginnt mit einer wichtigen Feststellung. Wir sind natürlich nicht in der Lage, sämtliche Konstruktionsmöglichkeiten zu analysieren, wir können aber feststellen, daß sich unser gesuchtes Dreieck nur dann konstruieren läßt, wenn das mit Hilfe unserer Konstruktionsbeschreibung möglich ist. Damit ist nicht gesagt, daß es nicht auch

* $\sphericalangle ABC$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

anders ginge. Wir sind aber sicher, daß es überhaupt keine Konstruktion gibt, wenn es auf die angegebene Art nicht geht. Darum formulieren wir:

„(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ höchstens dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Teildreieck $\triangle FGC$ wird aus $b-c$, h_c-h_b und dem rechten Winkel bei F konstruiert, und das Teildreieck $\triangle CGB$ danach aus a , $b-c$ und

$$\angle CGB = \angle CGF + \frac{1}{2} \angle FGA : (\text{Abb. 4})$$

Man zeichnet $\overline{CF} = h_c - h_b$. Punkt G liegt:

1. Auf dem Kreisbogen mit $b-c$ um C ,
2. auf der Senkrechten, errichtet auf CF in F .

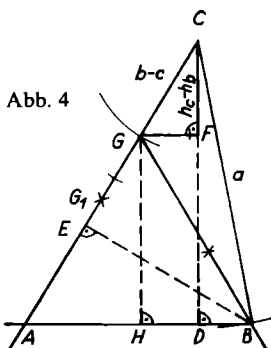
Punkt B liegt:

1. Auf dem Kreisbogen mit a um C ,
2. auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle G_1GF$, wobei G_1 ein Punkt auf der Verlängerung von CG über G hinaus ist. (Der Punkt A ist ja noch nicht konstruiert.)

Punkt A liegt:

1. auf der Verlängerung von CG über G hinaus
2. auf der Parallelen durch B zu GF .

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung gegeben. Nun muß der *Beweis* geführt werden, daß ein so konstruiertes Dreieck $\triangle ABC$ auch wirklich die gegebenen Stücke enthält. Es folgt also der dritte Teil der Lösung:



(III) Weiter gilt: Wird ein Dreieck $\triangle ABC$ durch diese Konstruktion gewonnen, so entspricht es den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{CB} = a$. Ferner ist $\angle AGB = \angle BGF$ (nach Konstruktion) = $\angle ABG$ (Wechselwinkel), also $\triangle ABG$ gleichschenkelig mit (1); daher ist $\overline{CG} = b - c$. Aus dem gleichen Grunde ist $\overline{BE} = \overline{GH} = h_b$. Das Viereck $GHDF$ ist nach Konstruktion ein Rechteck, und daher ist auch $\overline{GH} = \overline{FD} = h_b$. Also ist $\overline{CF} = h_c - h_b$.

Als letzter Teil unserer Lösung muß schließlich noch untersucht werden, ob mit den gegebenen Größen die Konstruktion durchführbar ist, ob sie ein eindeutiges Ergebnis liefert bzw. welche Bedingungen bei den gegebenen Stücken eingehalten werden müssen. Da

in unserem Falle die einzelnen Stücke auch zahlenmäßig gegeben wurden, ist die *Diskussion der Lösung* verhältnismäßig einfach. Wir schreiben:

(IV) Durch die gegebenen Stücke ist das Dreieck $\triangle ABC$ eindeutig (bis auf Kongruenz) bestimmt, da die gegebenen Stücke die Bedingungen $b-c > h_c - h_b$ und $a > b-c$ erfüllen. Ist (mindestens) eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein Dreieck $\triangle ABC$, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.*

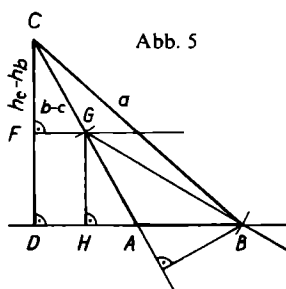
Damit ist die vollständige Lösung der Aufgabe gefunden. Man sieht, daß man auch schwierige Probleme lösen kann, wenn man systematisch herangeht und konsequent Schritt für Schritt durchdenkt. Den prinzipiellen Aufbau der hier dargelegten Lösung wollen wir uns einprägen:

1. Schritt: Analyse (Skizze, Bezeichnungen, Hilfslinien)
2. Schritt: Konstruktion mit Beschreibung
3. Schritt: Beweis
4. Schritt: Diskussion (Lösbarkeit, Eindeutigkeit).

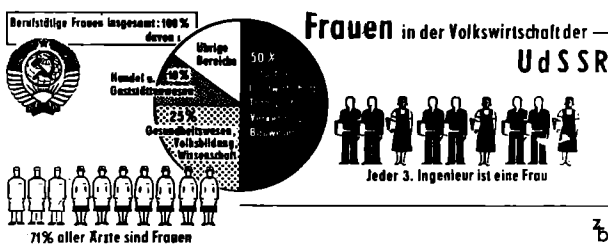
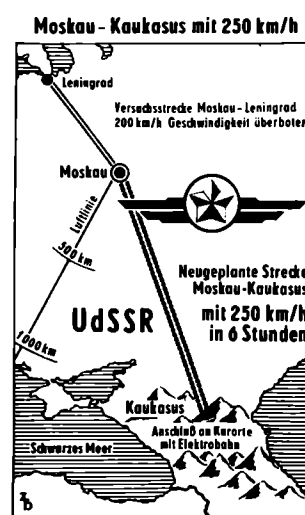
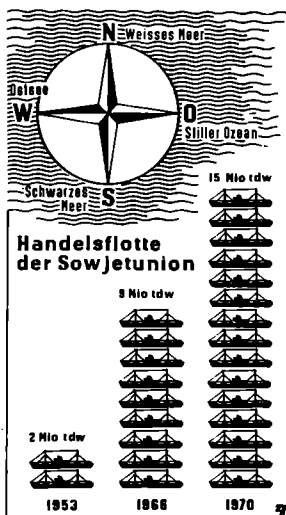
Das kann uns bei der Lösung entsprechender Aufgaben sehr nützlich sein.

H. Titze

* Verzichtet man auf die Bedingung $a < b$, dann lassen sich mit den gegebenen Stücken zwei verschiedene Dreiecke (mit $\angle CAB$ spitz bzw. $\angle CAB$ stumpf) konstruieren. Die Überlegungen laufen dabei analog (Abb. 5).



Lenins Vermächtnis wird erfüllt



Wer löst mit? **alpha**-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 4. Juli 1970

5 ▲ 509 Ein Würfel wird so in kleinere Würfel zerschnitten, daß die Kantenlänge jedes kleineren Würfels den vierten Teil der Kantenlänge des größeren Würfels beträgt. Wieviel kleinere Würfel erhält man aus dem großen Würfel? Vergleiche die Summe der Oberflächen aller kleinen Würfel mit der Oberfläche des großen Würfels! *P.*

5 ▲ 510 Addiert man die ganzen Zahlen, die das Lebensalter eines Vaters und dessen Sohnes angeben, so erhält man 41. Addiert man hingegen die des Vaters und des Großvaters, so erhält man 96. Addiert man schließlich alle drei Zahlen, so erhält man 100. Wie alt ist jeder? *P.*

W 5 ■ 511 Hans hat beim Einkauf von Schreibheften 2,55 M ausgegeben. Er hat nur Hefte zum gleichen Preis gekauft. Wieviel Hefte können es gewesen sein, und wieviel Pfennig hat ein Heft gekostet, wenn es nur Hefte gibt, die mehr als 4 Pf und weniger als 20 Pf das Stück kosten? *P.*

W 5 ■ 512 Auf einem Campingplatz haben insgesamt 140 Personen ihre Zelte aufgebaut. Unter diesen Erholungssuchenden sind 38 Erwachsene mehr als Kinder und 7 Männer mehr als Frauen. Wieviel Frauen, Männer und Kinder waren es? *Sch.*

6 ▲ 513 Es sind alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Zahl $z = \frac{n+17}{n-3}$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist. *Sch.*

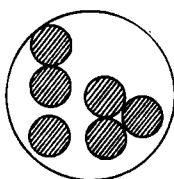
6 ▲ 514 In einem Dreieck ABC mit den Winkeln α , β und γ sind die drei Winkelhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ eingezeichnet. In A wurde auf $\overline{AD}$, in B auf $\overline{BE}$ und in C auf $\overline{CF}$ jeweils die Senkrechte errichtet. Diese drei Senkrechten bestimmen ein Dreieck $A'B'C'$. Die Winkel α' , β' und γ' des Dreiecks $A'B'C'$ sind formelmäßig durch die Winkel α , β und γ des Dreiecks ABC auszudrücken! *T.*

W 6 ■ 515 An einer Geburtstagsfeier nahmen genau sieben Ehepaare teil. Die Nachnamen der Männer waren: Anders, Bauer, Conrad, Dahlke, Ebert, Frey und Göbel. Die Frauen hießen mit Vornamen Hilde, Inge, Karin, Luise, Maria, Nora und Olga.

Im Verlaufe des Abends tanzte Herr Anders mit Inge und Luise, Herr Frey mit Maria und Luise, Herr Göbel mit Inge und Nora, Herr Conrad mit Inge, Herr Dahlke mit Luise und Herr Ebert mit Nora. Später wurde zu viert Domino gespielt. Zuerst beteiligten sich Herr Conrad, Herr Anders, Nora und Olga am Spiel. Die beiden männlichen Mitspieler wurden nach einer Weile von den Herren Dahlke und Frey abgelöst. Zum Schluß lösten Hilde und Inge die beiden Frauen vom Spiel ab. Merkwürdigerweise hat kein Ehemann mit seiner Frau getanzt oder am Dominotisch gegessen. Es ist herauszufinden, wer mit wem verheiratet ist. *Sch.*

W 6 ■ 516 An mehrere Schüler wurden 100 Murmeln so verteilt, daß jeder folgende Schüler eine Murmel mehr erhielt als sein Vorgänger. Wieviel Schüler können es gewesen sein, wenn jeder Schüler mindestens eine Murmel erhalten hat? *P.*

7 ▲ 517 Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $R = 1$ km. Im Innern dieses Kreises befinden sich n kongruente Kreisscheiben mit dem Radius $r = 1$ cm, die sich gegenseitig nicht „überlappen“, das heißt, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Es ist eine obere Schranke N für die Anzahl n dieser Kreisscheiben anzugeben, das heißt, eine Zahl N , für die sicher $N \geq n$ gilt. *T.*



7 ▲ 518 Die Afrikanischen Strauße, die größten lebenden, flugunfähigen Vögel, machen im schnellen Lauf Schritte von 4 m Länge und erreichen bei großer Gefahr die Fluchtgeschwindigkeit $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wieviel 4 m

lange Schritte macht bei großer Gefahr ein Strauß in der Sekunde? *T.*

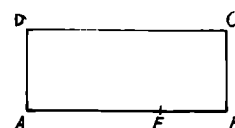
W 7 ■ 519 Von drei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a , b und c sind die größten gemeinsamen Teiler je zweier dieser Zahlen bekannt:

$(a, b) = 4$; (lies: der g. g. T. der Zahlen a und b)
 $(a, c) = 6$; und b ist 4)
 $(b, c) = 10$.

Welche kleinsten von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a , b und c genügen diesen Bedingungen? *T.*

W 7 ■ 520 Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist fünfmal so groß wie die Summe aus diesen Zahlen. Dabei ist die Differenz aus der zweiten und der ersten dieser Zahlen nicht negativ und gleich der Differenz aus der dritten und der zweiten Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich? Hat die Aufgabe mehr als eine Lösung? *Sch.*

8 ▲ 521 Das abgebildete Rechteck $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite gleich der eingezeichneten Strecke $\overline{AE}$ ist.



Wie kann man die andere Seite des gesuchten Rechtecks allein mit dem Bleistift und dem Lineal konstruieren?

Dr. E. Schröder, TU Dresden

8 ▲ 522 Es seien m und n zwei verschiedene teilerfremde ganze Zahlen. Ferner sei p eine Primzahl, die sowohl Teiler der Summe $m+n$ als auch Teiler der Differenz $m-n$ dieser beiden ganzen Zahlen ist. Es ist zu beweisen, daß dann $p = 2$ gilt. *T.*

W 8 ■ 523 In einem alten Rechenbuch finden wir die folgende Aufgabe: Fünf volle, elf halbvolle und acht leere Weinfässer der gleichen Art und Größe sollen so an drei Brüder verteilt werden, daß jeder von ihnen die gleiche Menge Wein und die gleiche Anzahl von Fässern erhält. Beim Aufteilen darf der Wein nicht aus einem Faß in ein anderes gegossen werden.

Wie kann die Verteilung erfolgen?

Es sollen alle Möglichkeiten der Verteilung angegeben werden. *P.*

W 8 ■ 524 Einem Kreis k sei ein Rechteck $ABCD$ einbeschrieben. Die Mitten E , F , G , H der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ dieses Rechtecks bilden ein Viereck $EFGH$. Es ist zu beweisen, daß der Umfang dieses Vierecks für alle dem Kreis einbeschriebenen Rechtecke gleich ist; ferner ist der Umfang des Vierecks $EFGH$ aus dem Durchmesser d des Kreises k zu berechnen. *Sch.*

9 ▲ 525 Es sind alle Primzahlen p anzugeben, für die die Zahl

$$z = p^6 + 3p^2 - 3p^4 - 1$$

nicht durch 13824 teilbar ist.

Ekkehard Kuhrt, EOS Zella-Mehlis, Kl. 10

W 9 ■ 526 Bei den Europa-Leichtathletikmeisterschaften in Athen im September 1969

erhielten die DDR, die UdSSR, Großbritannien, Frankreich und Polen zusammen 31 Goldmedaillen. Jedes dieser Länder erhielt mehr Goldmedaillen als jedes der in der angegebenen Reihenfolge folgenden Länder. Die DDR erhielt ebensoviel Goldmedaillen wie Großbritannien, Frankreich und Polen zusammen. Die UdSSR erhielt ebensoviel Goldmedaillen wie Großbritannien und Frankreich zusammen. Großbritannien erhielt doppelt so viel Goldmedaillen wie Frankreich.

Wieviele Goldmedaillen erhielt jedes der angegebenen Länder? *L.*

W9 ■ 527 Es sei $ABCD$ ein beliebiges konvexes Viereck, und es seien M_1, M_2, M_3, M_4 die Mitten der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. Es ist zu beweisen, daß dann die Strecken $\overline{M_1M_3}$ und $\overline{M_2M_4}$, die sogenannten Mittellinien des Vierecks $ABCD$, einander halbieren, d. h., daß $\overline{M_1S} = \overline{SM_3}$ und $\overline{M_2S} = \overline{SM_4}$ gilt, wobei S der Schnittpunkt dieser Mittellinien $\overline{M_1M_3}$ und $\overline{M_2M_4}$ ist. *Sch.*

10/12 ▲ 528 Ein Punkt P im Innern eines Quadrates $ABCD$ habe von den Eckpunkten A, B und C dieses Quadrates die Abstände $\overline{PA} = 1$ cm, $\overline{PB} = 2$ cm, $\overline{PC} = 3$ cm.

Es ist die Seite $\overline{AB}$ dieses Quadrates

- zu konstruieren,
- aus den gegebenen Abständen $\overline{PA}, \overline{PB}$ und $\overline{PC}$ zu berechnen. *L.*

10/12 ▲ 529 Es sind alle ungeraden natürlichen Zahlen a und b mit $a < b$ zu bestimmen, für die die folgende Eigenschaft erfüllt ist: Die Summe aller natürlichen Zahlen, die größer als a und kleiner als b sind, ist gleich 1000. (Falls es nur eine solche Zahl gibt, ist unter der Summe diese Zahl selbst zu verstehen.)

Hans-Dietrich Gronau, stud. math.

Träger eines 3. Preises bei der IMO 1969

W10 ■ 530 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x + \sqrt{2x}} + \sqrt{x - \sqrt{2x}} = x \quad \text{zu ermitteln.}$$

Prof. Tschajkowsky, Lwow, UdSSR

W10 ■ 531 Es sei $ABCD$ ein Rhombus. Ferner seien E, F, G, H die Mitten der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. Die vier Geraden $\overline{AF}, \overline{BG}, \overline{CH}, \overline{DE}$ mögen sich in den Punkten P, Q, R, S schneiden. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$, wenn der Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$ gleich A ist? *L.*

Merke!

Jede Lösung auf ein Blatt für sich! —

Postleitzahl nicht vergessen! —

Die Lösung nicht erst kurz vor dem letzten Einsendetermin absenden!

(Das bringt der Post und der Redaktion technische Schwierigkeiten, verzögert außerdem den Beginn der Korrektur.)

Redaktion alpha

Mathematik-Olympiaden in der ČSSR

Im Jahre 1951 wurden in unserem Lande erstmals Mathematikolympiaden durchgeführt. Mit Beginn des XIX. Jahrgangs ist das System der Olympiaden (MO) in einigen Punkten geändert worden. Darüber wollen wir berichten.

Für die Teilnehmer an der MO gibt es drei Kategorien (A, B, Z) sowie beim Ablauf drei Runden. Zur Kategorie A gehören die Schüler der Klassenstufe 3 und 4 der Mittelschulen bzw. Gymnasien, diese entsprechen den Klassenstufen 11/12 der Erweiterten Oberschulen in der DDR. Zur Kategorie B gehören die Schüler der Klassenstufen 1 und 2 (entspricht den Kl. 9/10 der EOS in der DDR). Die Kategorie Z ist für Schüler der Klassenstufe 9 der 9klassigen Grundschule (entspricht der 9. Klasse der Oberschulen in der DDR) bestimmt. Es ist möglich, daß jüngere Schüler auch in höheren Klassenstufen (Kategorien) teilnehmen können. Nach Beginn eines neuen Schuljahres werden in den Schulen zunächst die sogenannten *Vorbereitungsaufgaben* ausgegeben. Diese Aufgaben sind von den Bewerbern für die MO durchzuarbeiten und die Lösungen beim Fachlehrer für Mathematik abzugeben; sie werden korrigiert, mit den Teilnehmern ausgewertet, aber nicht benotet.

Die Aufgaben der 1. Runde der MO (Schul ausscheid) sind bei allen Kategorien von den Schülern im Selbststudium zu bearbeiten und die Lösungen termingerecht bei dem Beauftragten für MO an den Schulen abzugeben. In der Kategorie Z wird gefordert, daß von vier vorgelegten Aufgaben mindestens drei (im wesentlichen) richtig gelöst werden, d. h. daß der Schüler die Note 1 oder 2 erhält. Bei der Kategorie A und B wird verlangt, daß aus den vorgelegten zwei Gruppen von Aufgaben (1, 2, 3; 4, 5, 6) mindestens vier vom Schüler selbst ausgewählte Aufgaben (je zwei aus beiden Gruppen) bearbeitet werden. Ein Schüler hat die 1. Runde bestanden, wenn er mindestens drei Aufgaben (im wesentlichen) richtig gelöst hat.

Die 2. Runde wird als Kreisausscheid für Schüler der Grundschulen (Kategorie Z) bzw. als Bezirksausscheid für die Schüler der Mittelschulen und Gymnasien (Kategorie A und B) als Klausur durchgeführt. Die 3. Runde findet nur in der Kategorie A statt und wird

in Prag ausgetragen. An ihr nehmen die besten Schüler aus der ganzen Republik teil.

St. Horák

Vorbereitungsaufgaben

Kategorie Z

■ 1 ■ Zdeněk hat folgende Brüche wie angeführt gekürzt:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}; \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \quad \frac{199}{995} = \frac{1}{5}.$$

Dem Lehrer gefällt diese Art natürlich nicht, aber Zdeněk verteidigt sein Verfahren damit, daß alle Ergebnisse richtig sind. Bestimme alle Brüche

- mit 2ziffrigen Zählern und Nennern,
 - mit 3ziffrigen Zählern und Nennern,
- die — auf diese Art gekürzt — ein richtiges Ergebnis liefern!

■ 2 ■ Mit einem Lastauto sollen m Tonnen Baustoffe über eine Entfernung von d km auf einer nahezu waagerechten Straße befördert werden. Das Lastauto hat eine Masse von m_0 Tonnen. Bei gleichbleibender Motorleistung ist die Fahrzeuggeschwindigkeit umgekehrt proportional der Gesamtmasse des Fahrzeugs bzw. der Lademasse. Die annähernd gleiche Belade- bzw. Entladezeit ist direkt proportional der zu befördernden Lademasse. Die vorhandene Baustoffmenge kann nicht auf einmal aufgeladen werden, sondern es muß mehrmals gefahren werden. Entscheide durch Berechnung, was zeitgünstiger ist:

entweder jeweils kleinere Mengen aufzuladen, dafür schneller (aber öfter) zu fahren, oder jeweils größere Mengen aufzuladen und dafür langsamer (aber weniger oft) zu fahren! (Die Anfahr- und Bremszeit ist bei der Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

■ 3 ■ Es sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 10$ cm gegeben. Jede der beiden Seiten $\overline{BC}, \overline{CD}$ werde durch 9 Punkte in 10 kongruente Strecken unterteilt. Der Mittelpunkt K der Seite $\overline{AB}$ und irgendein Teilpunkt X der auf der Seite $\overline{BC}$ festgelegten Teilpunkte bestimmen eine Gerade. Der Eckpunkt B und irgendein Teilpunkt Y der auf der Seite $\overline{CD}$ festgelegten Teilpunkte bestimmen eine weitere Gerade. Welche Teilpunkte X, Y muß man auswählen, damit die Geraden KX und BY aufeinander senkrecht stehen?

■ 4 ■ Es sei ein Rechteck $ABCD$ gegeben, dessen Seitenlängen sich wie 2:1 verhalten. Diesem Rechteck wurde ein Halbkreis k über der größeren Seite $\overline{AB}$ als Durchmesser eingeschrieben. Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden k in dieser Reihenfolge in den Punkten E und F .

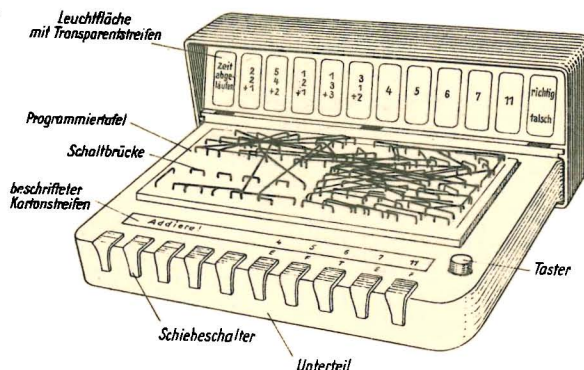
Bestimme den Flächeninhalt der durch den Kreisbogen $\overline{EF}$ und die Strecken $\overline{EC}, \overline{CD}, \overline{DF}$ begrenzten Figur!

aus: *Matematika ve škole* Jg. 68/69, H. 10 und 69/70, H. 1

Bearbeitete Übersetzung: O. Langer

Logisch denken — spielend erlernt

PIKO dat — eine Kombination von Rechenautomat und Lernmaschine



Zur vorjährigen Herbstmesse in Leipzig fand im Messehaus *Petershof* ein Erzeugnis den ungeteilten Beifall von Einkäufern und Besuchern: „der Spielzeugcomputer PIKO dat“ aus dem VEB PIKO Sonneberg. Es ist der Beginn unserer traditionsreichen Spielwarenindustrie, verstärkt Computerspielzeug und Elektronikbaukästen zu entwickeln und zu produzieren.

„PIKO dat“, eine Kombination von Rechenautomat und Lernmaschine in Baukastenform, wurde in sieben Monaten von Pädagogen, Wissenschaftlern, Ingenieuren und Technikern gemeinsam entwickelt. Dieses Spielzeug, das unserer Zeit entspricht, regt zum schöpferischen Spielen an und vermittelt Erkenntnisse der naturwissenschaftlichen und gesellschaftlichen Entwicklung. Der „Spielzeugcomputer PIKO dat“ ist in der Lage,

- die grundsätzliche Wirkungsweise eines Elektronenrechners zu vermitteln,
- erste Einsichten in die vielen Anwendungsbereiche der elektronischen Datenverarbeitung zu zeigen,
- bei der Überprüfung und Wiederholung von Kenntnissen zu helfen
- und als Unterhalter zu dienen.

„PIKO dat“ ist ein Spielzeug, das auf vorhandene Kenntnisse aufbaut und mit dem neues Wissen im Spiel erworben wird. Bereits durch den Zusammenbau lernt der Besitzer den Mechanismus des Gerätes kennen. Im beigelegten Anleitungsbuch werden dem Monteur durch Text und Zeichnungen die einzelnen Schritte erläutert. Nach einem Schaltplan muß er das Gerät selbst verdrahten

und anschließend alle Schiebe- und Festkontakte überprüfen. Als Energiequelle dienen entweder eine 4,5-V-Flachbatterie oder drei Monozellen zu je 1,5 V.

Der Vorderrand des Gehäuses trägt 10 Schiebeschalter, die von 0 bis 9 numeriert sind. Rechts davon befindet sich der Taster, ein roter Knopf. Den hinteren Teil des Gehäuses begrenzt das Lampenfeld mit 13 Leuchtfeldern. In der Mitte ist die Programmiertafel angeordnet: Sie besteht aus 110 rechteckigen Tastenfeldern, von denen 100 mit zwei Ziffern beschriftet sind (die erste bezeichnet die Zeile, die zweite die Spalte des jeweiligen Feldes). 10 Tastenfelder der obersten Reihe tragen eine Buchstaben-Zahlen-Kombination. Am rechten und linken Rand jedes Feldes befinden sich je drei Löcher, die die Programmierdrähte aufnehmen.

Die wichtigsten Funktionselemente des „PIKO dat“ sind die Schiebeschalter, die die Stellungen *A* und *E* einnehmen können. Die Schaltkontakte (jeder Schalter hat fünf) verbinden jeweils die linke mit der rechten Dreierkombination jedes Tastfeldes. In der Schalterstellung *A* sind die Dreierkombinationen der Tastenfelder mit geraden Ziffern überbrückt (00; 20; 40), in der Schalterstellung *E* sind die Tastenfelder einer Spalte überbrückt, die ungerade Ziffern tragen (10; 30; 50). Hat man sich für ein Programm entschieden, wird es — vorerst noch nach Vorlage — gesteckt.

Die mathematische Grundlage für den elektrotechnischen Ablauf der Programme ist die Schaltalgebra, die Teile der Logik auf Schalt-

systeme anwendet. Bekanntlich beschäftigt sich die Wissenschaft von der Logik mit dem folgerichtigen Denken, mit der Wahrheit oder Falschheit von Aussagen. Der „PIKO dat“ hat ein solches Schaltsystem, das zwischen den beiden Werten „wahr“ oder „falsch“ unterscheidet. Diesen beiden Werten werden die Dualzahlen *L* und *O* zugeordnet, mit denen die Schaltungen berechnet werden können. Schritt für Schritt werden die grundlegenden logischen Schaltungen (Konjunktion, Disjunktion, Negation, Antivalenz) vermittelt.

Nach diesen Grundkenntnissen über logische Schaltungen ist es möglich, Daten zu verarbeiten, d. h. das Rechnen mit den Rechenhilfsmitteln unserer Zeit, den Datenverarbeitungsanlagen, nachzugestalten. Programmgesteuerte Ziffernrechenautomaten rechnen nach einem vorgegebenen Programm mit Zahlen, die verschlüsselt sind. Die Ziffern von 0 bis 9 des Dezimalsystems werden dual verschlüsselt (durch die Ziffern *L* (=1) und *O*). So wie im Dezimalsystem eine Zahl aus Zehnerpotenzen zusammengesetzt wird, wird sie im Dualsystem durch die Addition von Zweierpotenzen zusammengesetzt. Mit Hilfe des Sonneberger Rechenautomaten kann das dezimale Addieren und Subtrahieren, die Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen sowie die duale Addition und Subtraktion geübt werden.

Auch für den Einsatz des Sonneberger Erzeugnisses als Lernmaschine sollen die vorbereiteten Programme als Anregung gelten, selbständig Fragenkomplexe zu programmieren. Für den Anfang stehen 350 Fragen aus den Wissensgebieten Mathematik, Geographie, Physik/Chemie, Literatur/Musik/Sport und Straßenverkehr zur Verfügung. Das Wechseln der Programme bereitet keine großen Schwierigkeiten.

Weiterhin besteht die Möglichkeit, das moderne Spielzeug aus Sonneberg für Unterhaltungsspiele zu benutzen.

Mit dem „Spielzeugcomputer PIKO dat“ ist ein Gerät entstanden, das den internationalen Vergleich mit ähnlichen Erzeugnissen nicht zu scheuen braucht.

G. Scholz, Berlin
stark gekürzt aus: *Urania* 12/69

L0	Z1	L1	Z2	L2	Z3	E	L4	L5	R	L6	F	L7	TA	L8	TE	L9
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09							
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19							
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29							
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39							
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49							
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59							
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69							
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79							
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89							
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99							

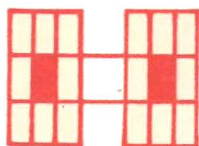
Frösi-Knobelmagazin

Wie groß ist das Grundstück?

Um ein Schulgrundstück einzuzäunen, wurde eine Anzahl Pfähle besorgt. Wählt man die Entfernung zwischen zwei benachbarten Pfählen 5 m lang, fehlen sieben Pfähle, wenn man die benachbarten Pfähle jeweils im Abstand von 6 m setzt, reichen die gekauften Pfähle aus. Welchen Umfang hat das einzuzäunende Grundstück?

Zahlenrätsel

Die Zahlen 1 bis 17 sollst du derart in die leeren Felder einsetzen, daß die Summe jeder waagerechten und senkrechten Reihe 26 ergibt.



Stimmt das?

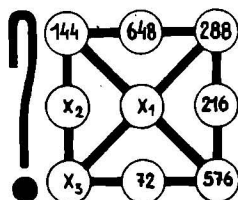
Karin und Bernd wollen von Klimpelhausen nach Rätselhagen. Von Klimpelhausen nach Rätselhagen sind es genau 40 Kilometer. Bernd hat ein Fahrrad. Großzügig bietet er Karin an, das Fahrrad zu schieben und mit ihr zu Fuß zu gehen.

Karin aber macht einen anderen Vorschlag. Sie schlägt Bernd vor, daß er eine Stunde lang fährt, dann das Fahrrad in einer Raststätte unterstellt und zu Fuß weitergeht. Nachher wollte sie das Rad nehmen und eine Stunde fahren. So wollten sie sich ablösen, bis sie am Ziel seien. Karin behauptet sogar, sie wären viel eher am Ziel.

Stimmt das? (Ein Fußgänger legt 5 km in der Stunde, ein Radfahrer 10 km zurück.)

Magische Zahlenspieler

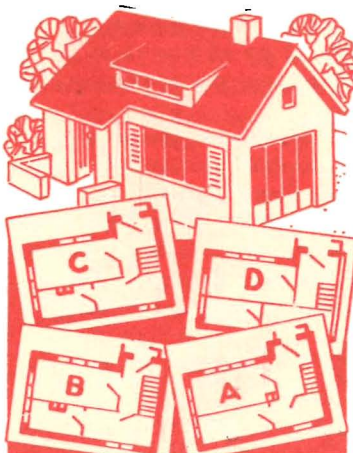
Ersetzt x durch natürliche Zahlen. In den waagerechten, senkrechten und diagonalen Linien muß jeweils die gleiche Summe ent-



stehen. Wie groß sind x_1 , x_2 , x_3 und wie groß ist die Summe? Wer ein bißchen nachdenkt, findet bald eine Lösung.

Hallo, Baumeister!

Ein Haus wird zuerst auf dem Reißbrett gebaut, d. h. es werden viele Zeichnungen angefertigt. Nach diesen Zeichnungen errichten Maurer und Zimmerleute das Haus. Eine von den Zeichnungen auf dem Bild stellt den Grundriß des Häuschens dar. Welche ist es?



Tiefste Tiefe

Die größte Tiefe des Atlantischen Ozeans beträgt 8,5 km, die größte Tiefe des Stillen Ozeans 2,3 km mehr als die des Atlantischen Ozeans. Die größte Tiefe des Nördlichen Eismers ist die Hälfte der Tiefe des Stillen Ozeans. Welche größte Tiefe hat das Nördliche Eismeer?

Krawuttke kombinierte richtig

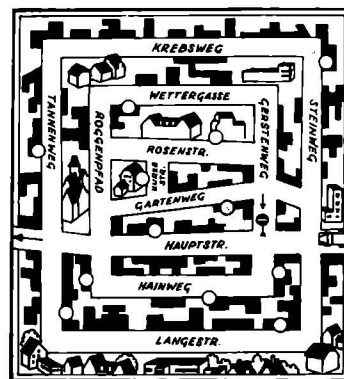
Herr Müller schlägt im Zug einen Denksportwettbewerb vor: „Von den vier schwarzen



und drei weißen Federn stecke ich jedem un-gesehen eine Feder ins Haar. Zwei Federn kommen wieder in die Tasche. Wer kann mir nun sagen, welche Farbe die Feder hat, die er in seinem Haar trägt?“ Oberleutnant Krawuttke überlegt nicht lange und sagt: „Meine Feder ist weiß!“ Woher wußte Oberleutnant Krawuttke, daß seine Feder weiß war?

Kein Problem

Hier siehst du einen Ausschnitt des Stadtteils, den ein Kraftfahrer der Molkerei täglich mit seinem Milchauto zu fahren hat. An den mit einem Punkt gekennzeichneten Stellen befinden sich Milchverkaufsstellen, die er beliefern muß. Im Laufe der Zeit hat er sich natürlich den kürzesten Fahrweg ausgeknobelt, denn er muß ja noch andere Verkaufsstellen beliefern. Er durchfährt keine Straße zweimal. Besonders beachtet er, daß der Gerstenweg Einbahnstraße ist und nur in einer Richtung befahren werden darf (Pfeilrichtung). Welchen Weg fährt er täglich?



Wie hoch ist die Produktivität?

In einer Abteilung standen 36 Maschinen. Bei Rekonstruktion der Abteilung wurden die Maschinen so aufgestellt, daß jede Maschine einen Platz von 6 m² statt der früheren 8 m² einnahm. Auf der frei gewordenen Fläche wurden neue Maschinen aufgestellt. Wieviel Maschinen stellte man nach der Rekonstruktion in der Abteilung auf? (Um wieviel Prozent erhöhte sich dadurch die Produktivität der Abteilung?)

Wie dick ist die Seite?

Ein Frösi-Sonderheft hatte 120 Seiten, einschließlich Umschlag. Wenn nun ein Stoß von 400 solchen Heften 1,80 m hoch ist, wie dick ist das Papier einer Seite?

Die 10 Probleme wurden aus dem Frösi-Knobelmagazin, Verlag Junge Welt, Berlin 1969, 157 Seiten, Preis: 3,50 M, ausgewählt. Von den im Magazin gebotenen 163 Problemen sind ca. ein Drittel für Arbeitsgemeinschaftsnachmittage (Klasse 4 bis 7), Ring-frei-Veranstaltungen und Wandzeitungen geeignet.

Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

Teil I:

Wir erfahren, was ein Nomogramm ist

Wir orientieren uns zunächst an einem Beispiel: Da wir ab Klasse 7 Berechnungen nach der Formel $A = \frac{\pi}{4} d^2$ für den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser d oft auszuführen haben, lohnt es sich, über diese Berechnung nachzudenken. Um zu gezeichneten Kreisen den Flächeninhalt zu ermitteln, muß zunächst durch geeignetes Anlegen eines Zentimetermaßes sein Durchmesser gemessen werden:

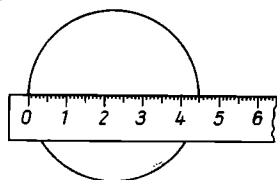


Abb. 1

Anschließend ist jeweils zu den gemessenen Werten der Durchmesser der Flächeninhalt zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnungen können wir durch geeignetes Einstellen des Rechenstabes schnell und mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit ablesen. Zu diesem Zweck ermitteln wir zunächst mittels Stab den bei jeder Kreisflächenberechnung unveränderlichen Faktor $\frac{\pi}{4}$, indem wir unter die Kote π der Skale A die Kote 4 der Skale B stellen. Mit dieser Stabeinstellung wäre auf der Skale A über der Kote 1 der Skale B genähert der Wert $\frac{\pi}{4}$ abzulesen, der in der Abbildung 2 durch einen Pfeil markiert ist:

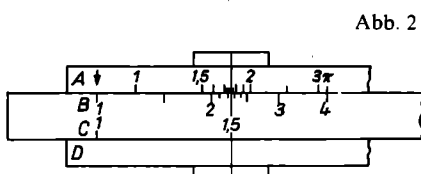


Abb. 2

Wir lesen den Wert $\frac{\pi}{4}$ am Stab nicht ab, verschieben aber bei unserem Rechenstab auch nicht mehr die Zunge gegenüber dem Stabkörper. Die gewünschten Ergebnisse werden wir nunmehr allein durch jeweiliges geeignetes Stellen des Läufers ablesen: Auf

der Skale C wird die Maßzahl des jeweiligen Durchmessers aufgesucht und der Strich des Läufers auf diese Kote (1,5 in Abbildung 2) gestellt. Auf Skale A wird nunmehr auf dem Läuferstrich die zugehörige Maßzahl (1,77 in Abbildung 2) des Flächeninhaltes abgelesen. Zur Begründung dieses Verfahrens genügt es festzustellen, daß bei der gewählten Läuferstellung auf Skale B die Maßzahl (2,25 in Abbildung 2) des Quadrates des Kreisdurchmessers auf dem Läuferstrich steht. Die anfangs hergestellte gegenseitige Stellung der Skalen A und B garantiert, daß auf der Skale A der Läuferstrich die Maßzahl des Flächeninhaltes des zugehörigen Kreises markiert.

Mit der gleichen Einstellung des Rechenstabes werden auch umgekehrt zu gegebenen Werten des Flächeninhaltes die zugehörigen Werte der Kreisdurchmesser ermittelt. So gehört z. B. zu $A = 5 \text{ cm}^2$ $d = 2,25 \text{ cm}$. In dieser Weise abgelesene Wertepaare werden in einer Tabelle zusammengestellt:

A in cm ²	1	2	3	4	5	...
d in cm	1,13	1,60	1,95	2,26	2,52	...

...	40	45	50	...
...	7,14	7,57	7,98	...

Abb. 3

Die Berechnungen der zu gegebener Maßzahl A des Flächeninhaltes gehörigen Maßzahl d des Kreisdurchmessers hätte nach der Formel zu erfolgen, die durch Umstellen von

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 \text{ nach } d \text{ erhalten wird:}$$

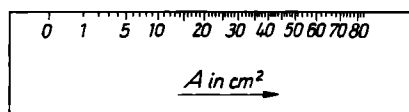
$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} d^2 & \cdot \frac{4}{\pi} \\ d^2 &= \frac{4A}{\pi} & \text{Radizieren} \\ d &= \sqrt{\frac{4A}{\pi}} & * \end{aligned}$$

Die bisherigen Betrachtungen legen es nahe, ein einfaches zeichnerisches Hilfsmittel zum Lösen derartiger Aufgaben anzufertigen: Auf

* $\sqrt{x}$ (gelesen: Wurzel aus x) ist die nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert, x ergibt: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. Für jede nichtnegative reelle Zahl x existiert stets $\sqrt{x}$.

dem gemäß Abbildung 1 benutzten Lineal mit Zentimereinteilung, mit dem ja die Werte der Kreisdurchmesser abgelesen wurden, könnten anstelle der einzelnen Werte der Kreisdurchmesser die zugehörigen Werte der Flächeninhalte der entsprechenden Kreise angeschrieben werden. So wäre z. B. laut Tabelle der Abbildung 3 die Kote 5 jetzt anzuschreiben an der Stelle, an der bisher 2,52 zu stehen hätte. Durch ein derartiges Umkotieren entsteht der folgende Anlegestreifen, mit dem durch Anlegen gemäß Abbildung 1 der Flächeninhalt eines jeweils gezeichneten Kreises unmittelbar abgelesen werden kann.

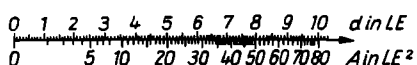
Abb. 4



Mit diesem Anlegestreifen, der Berechnungen durch Ablesen zu ersetzen gestattet und den sich jeder Schüler aus einem Pappstreifen anfertigen sollte, haben wir das erste Nomogramm kennengelernt.

Das Nomogramm der Abbildung 4 leidet noch an einem Nachteil: Es kann nur benutzt werden zur Ermittlung von Flächeninhalten gezeichneter Kreise. Oftmals ist jedoch der Kreis, dessen Fläche ermittelt werden soll, nicht gezeichnet, sondern nur sein Durchmesser gegeben. Dieser Mangel unseres Nomogrammes wird sofort aufgehoben, wenn wir neben den Anlegestreifen der Abbildung 4 einen Streifen mit Zentimereinteilung legen, wie es die folgende Abbildung zeigt:

Abb. 5



Natürlich lohnt es sich, diese Doppelskala neu zu zeichnen. Dabei dürfen nachträglich die Benennungen cm und cm² gleichzeitig ersetzt werden durch LE (Längeneinheit) und LE².

Zwei Anwendungsbeispiele des Nomogrammes der Abbildung 5 sollen noch angegeben werden: Laut diesem Nomogramm besitzt ein Kreis mit dem Durchmesser $d = 7,5 \text{ cm}$ den Flächeninhalt $A = 44 \text{ cm}^2$ und ein Kreis mit dem Flächeninhalt $A = 3,8 \text{ km}^2$ besitzt den Durchmesser $d = 2,2 \text{ km}$.

Bevor wir weitere Nomogramme kennenlernen, müssen der Begriff Nomogramm wir künftighin Funktionsleiter) und Funktion definiert werden.

Die Tabelle der Abbildung 3 bringt zum Ausdruck, daß jeder positiven Zahl A als Maßzahl des Flächeninhaltes eines Kreises eine positive Zahl d als Maßzahl des zugehörigen Kreisdurchmessers zugeordnet ist.

Die Tabelle der Abbildung 3 enthält natürlich nur einige der durch diese Zuordnung bestimmten Zahlenpaare $(A; d)$ wie $(1; 1,13)$, $(2; 1,60)$ usw. Bei diesen Zahlenpaaren steht an erster Stelle die Maßzahl des Flächeninhaltes, an zweiter Stelle die Maßzahl des zugehörigen Kreisdurchmessers. Beim Vertauschen der beiden zu einem solchen Paar gehörigen Zahlen trifft im allgemeinen diese Deutung der beiden Zahlen nicht mehr zu. Zahlenpaare wie diese, bei denen es auf die Reihenfolge ankommt, nennt man geordnete Zahlenpaare.

Definition: Zahlenpaare, bei denen die Reihenfolge der zu einem Paar gehörigen Zahlen festgelegt ist, heißen *geordnete Zahlenpaare*.

Die Menge der geordneten Zahlenpaare $(A; d)$, wobei A eine beliebige positive reelle Zahl ist und d die zugehörige, durch die Rechenvorschrift $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$ bestimmte ebenfalls positive reelle Zahl ist, hat eine für uns wichtige Eigenschaft: Da alle Kreise mit gleichem Flächeninhalt kongruent sind, ist bei gegebenem Flächeninhalt der Kreisdurchmesser eindeutig bestimmt. Also haben von den geordneten Zahlenpaaren $(A; d)$ keine zwei die erste Zahl gemeinsam.

Definition: Eine Menge geordneter Zahlenpaare $(x; y)$, von denen keine zwei Paare in der ersten Zahl übereinstimmen, heißt *Funktion***: Die Menge der Zahlen x , die bei diesen Paaren an erster Stelle stehen, heißt *Definitionsbereich*. Die Menge der Zahlen y , die bei diesen Paaren an zweiter Stelle stehen, heißt *Wertebereich*.

Gemäß dieser Definition bilden die Zahlenpaare $(A; d)$, bei denen A die Maßzahl des in LE^2 gemessenen Flächeninhaltes und d die Maßzahl des in LE gemessenen zugehörigen Kreisdurchmessers bedeuten, eine Funktion: Die Maßzahl d des Kreisdurchmessers ist eine Funktion der Maßzahl A des Flächeninhaltes. Als Zahlen A kommen alle nichtnegativen reellen Zahlen in Frage, also ist der Definitionsbereich dieser Funktion die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Als Zahlen d kommen ebenfalls alle nichtnegativen reellen Zahlen in Frage, also ist bei dieser Funktion der Wertebereich wiederum die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.

Die Rechenvorschrift $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$, kurz Formel genannt, nach der zu gegebenem A das zugehörige d berechnet wird, nennt man die Gleichung dieser Funktion.

Definition: Eine Formel der Gestalt $y=f(x)$ [gelesen: y ist gleich f von x], deren rechte Seite ein die Variable x enthaltender Rechenausdruck (Term) ist und der alle geordneten Zahlenpaare $(x; y)$ einer Funktion genügen, heißt *Gleichung der Funktion*.

Um den Begriff der Funktionsleiter einzuführen, betrachten wir nochmals das Zeichnen der Abbildung 4: Zunächst muß eine Gerade gewählt werden. Diese Gerade muß orientiert werden. Weiterhin muß auf ihr der Bezugspunkt B gewählt werden. Schließlich haben wir als Längeneinheit 1 cm gewählt.

Um mittels dieser Festsetzungen zur Funktion mit der Gleichung $y = \sqrt{\frac{4x}{\pi}}$, von der die Tabelle der Abbildung 3 einige geordnete Zahlenpaare wie $(5; 2,52)$ angibt, eine Skale zu zeichnen, wird die Zahl $x=5$ im Abstand $y \text{ cm} = 2,52 \text{ cm}$ vom Bezugspunkt auf der orientierten Geraden 'angeschrieben'. Entsprechend ist (siehe Abbildung 3) die Zahl $x=40$ im Abstand $y \text{ cm} = 7,14 \text{ cm}$ vom Bezugspunkt auf der orientierten Geraden anzuschreiben. Allgemein ist die positive Zahl x im Abstand $y \text{ cm} = \sqrt{\frac{4x}{\pi}}$ cm vom Bezugspunkt B an die orientierte Gerade anzuschreiben.

Abb. 6

Abb. 7

Definition: Eine Funktionsleiter zur Funktion mit der Gleichung $y=f(x)$ entsteht, wenn auf einer gewählten, orientierten Geraden mit Bezugspunkt B und gewählter Längeneinheit 1 LE jeweils der dem Definitionsbereich von $y=f(x)$ entnommene x -Wert dem Punkt P der gewählten Geraden zugeordnet wird, für den gilt: $\overline{BP} = f(x) \text{ LE}$.

Abb. 8

Bei einer Funktionsleiter nennt man die Zahlen x des Definitionsbereiches der zur Leiter gehörigen Funktion, die der gewählten Geraden zugeordnet sind, *Koten*. (Singular: die Kote)

Abb. 8

Abb. 8

Abb. 8

Das Nomogramm der Abbildung 5 ist eine zeichnerische Darstellung des durch die Formel $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$ festgelegten Zusammenhanges zwischen den Variablen d und A , der durch diese Gleichung definierten Funktion. Es gestattet Berechnungen nach dieser Formel durch einfaches Ablesen der Ergebnisse zu ersetzen.

Definition: Ein *Nomogramm* ist die zeichnerische Darstellung des durch eine Formel definierten funktionalen Zusammenhanges zwischen den in der Formel vorkommenden Variablen. Es gestattet, Berechnungen nach der Formel zu ersetzen durch unmittelbares Ablesen der Ergebnisse am Nomogramm.

Wir wollen im folgenden lernen, warum gewisse Nomogramme Rechenprozesse nach bestimmten Formeln zeichnerisch zu lösen gestatten und wie solche Nomogramme anzufertigen sind. Es leuchtet ein, daß der Aufwand zum Anfertigen eines Nomogrammes sich für solche Rechenprozesse lohnt, die von uns Schülern oft auszuführen sind. Denn mittels Nomogramm wird die Lösung dann viel schneller und einfacher gefunden mit einer für die Praxis meist ausreichenden Genauigkeit. Unsere Mathematiklehrer werden uns natürlich im allgemeinen nicht erlassen können, Berechnungen nach einer bestimmten Formel auszuführen, weil wir diese Rechenprozesse ja auch beherrschen müssen. Sie werden aber sehr erfreut sein, wenn wir unsere Berechnungen mittels Nomogramm kontrollieren. Daraus ergibt sich, daß wir dann, wenn ein wichtiger Rechenprozeß im Unterricht geübt wird, bereits ein zugehöriges Nomogramm besitzen sollten.

W. Träger

Aus drucktechnischen Gründen konnten die Abb. 4, 5 und 7 nur in einem Maßstab, der kleiner als 1 ist, gedruckt werden.

Für Leser, welche sich intensiver mit *Nomogrammen* beschäftigen wollen, empfehlen wir folgende Literatur:

- Ostrowski/Kordemski
zeichnen hilft rechnen
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1964, 8,50 M
- Kolosow
kreuz und quer durch die Mathematik
Verlag Volk und Wissen, Berlin 1964, 6,75 M
- Stamberger
Nomogramme
VEB Verlag Technik, Berlin 1966, 18,50 M

** Die Funktion kann auch als eindeutige Abbildung erklärt werden. Über den Begriff der Abbildung, insbesondere den der eindeutigen Abbildung, orientieren wir uns im Artikel „Wir untersuchen Abbildungen“ in alpha 4/1967.

*** Jetzt wurde A durch x und d durch y ersetzt.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (7./8. 2. 1970)

Klassenstufe 7

1. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben. Ermittle die Anzahl der Ziffern 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müßten!

2. Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen
(I) $a + b = 38$, (II) $b + c = 46$,
(III) $a + c = 42$ erfüllen.

Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen

- a) die Maßzahl jeder der Seitenlängen!
- b) Weise nach, daß ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt! (Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

3. Beweise folgenden Satz:

Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen.

4. Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.

- a) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
- b) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

5. Beweise folgenden Satz: Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

6. Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\angle BAD = 110^\circ$ und $AC + BD = 15 \text{ cm}$! ($\angle BAD$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle BAD$)

Klassenstufe 8

1. Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie — Vater, Mutter und ihre zwei leiblichen Kinder — haben folgende Eigenschaften: Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist

2 Jahre älter als die Mutter. Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

2. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, daß die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind. Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

3. Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel: Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist!

Beispiel: 37528 ist zu untersuchen

$$52 + 4 = 56 \text{ ist durch 4 teilbar, also ist } 37528 \text{ durch 8 teilbar.}$$

4. Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 = r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \text{ gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisinge!

5. Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden. Ermittle die dafür genau benötigten Massen! (Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.)

6. Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechtecksfläche führe ein Kreisbogen von A nach B , dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$). Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne daß bei Durchführung der Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

Klassenstufe 9

1. Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet,

deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind. Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, daß keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

2. Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus $s_a = 9,6 \text{ cm}$, $s_b = 12,6 \text{ cm}$ und $s_c = 11,1 \text{ cm}$!

Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.

Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

3. Für eine bestimmte Arbeit benötigt A eine genau m mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n mal so lange wie C und A zusammen und C genau p mal so lange wie A und B zusammen. Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n !

4. Beweisen Sie: Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, daß die Zahl $11a + 2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a + 5b$ durch 19 teilbar.

5. Die Fläche des Dreiecks ΔABC werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

6. Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion $f(x) = \frac{(x-1)x}{2}$. Ferner sei x_0 eine

beliebig gegebene von 0 verschiedene reelle Zahl.

Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_0 + 1$ und $x_0 + 2$ mit $f(x_0 + 1)$ bzw. mit $f(x_0 + 2)$ bezeichnet. Beweisen Sie, daß dann $f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2)f(x_0 + 1)}{x_0}$ gilt!

Klassenstufe 10

1. Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

2. Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, daß ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratischen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt. Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

3. Geben Sie a) eine notwendige und hinreichende, b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie c) eine hinreichende und nicht notwendige Bedingung dafür an, daß $\sqrt{1 - |\log_2 |5 - x||} > 0$ gilt!

Die anzugebenden Bedingungen sind dabei jeweils so zu formulieren, daß sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

4. Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

5. Gegeben seien ein Dreieck $\triangle ABC$ und auf AB ein Punkt D . Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, daß DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

6. Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet. Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c , für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

Klassenstufe 11/12

1. a) Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$z = \frac{65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3}{32765 \cdot 32766 + 32767 \cdot 32768 + 65537^3 + 65538^3 + 65539^3 + 32768 \cdot 32769 + 32770 \cdot 32771}$$

ganzrational ist!

b) Die Zahl z ist zu berechnen!

(Bruchstrich wurde aus drucktechnischen Gründen getrennt.)

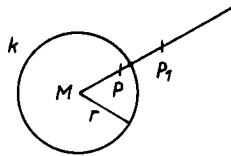
2. Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot! Sie einigten sich, daß jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

- Für den Fall, daß Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
- Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
- Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollten, wollte Bodo als Zweiter fahren.
- Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
- Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so daß diese Wünsche erfüllt sind!

3. Gegeben sei in der Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M . Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punktes P ($P \neq M$) bezüglich k , wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $\overline{MP} \cdot \overline{MP_1} = r^2$ ist.

Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε , der k orthogonal schneidet, d. h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander. Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k ?



4. Beweisen Sie, daß das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdots \frac{2499}{2500}$$

(n natürliche Zahl)

kleiner als 0,02 ist!

5. Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, daß die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.

Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

6. a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d. h. alle diejenigen y , zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!

b) Zeigen Sie, daß es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt:

Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

Lösungen



Fortsetzung: VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der DDR-Olympiade Zu Aufgabe 2:

Bemerkung: Auf die Voraussetzung $a \neq b$ kann man verzichten, für $a = b$ ist $s = 1$.

Weitere sehr klare Lösungen lieferten die Schüler Reinhard Wobst, 22. OS Dresden, Kl. 10, Dietmar Soyka, EOS „Karl Marx“, Spremberg, Kl. 9, und Dietmar Müller, EOS Herzberg, Kl. 10. Die volle Punktzahl erreichten 13 von 110 Teilnehmern. Die meisten Schüler führten die Fallunterscheidung überhaupt nicht oder nur unvollständig

durch. Häufig war zu beobachten, daß mit Ungleichungen nicht einwandfrei gearbeitet wurde.

Aufgabe 3

Für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt: c_i und c_{n-i+1} haben beide den Durchmesser $d_i = i \cdot \frac{2r}{n}$. Der Flächeninhalt der von je einem dieser Halbkreise und dem zugehörigen Durchmesserabschnitt begrenzten Fläche ist daher $A_i = \frac{\pi}{2} i^2 \frac{r^2}{n^2}$.

Setzt man noch $A_0 = 0$, so sind die gesuchten Flächeninhalte

$$\begin{aligned} F_i &= A_i - A_{i-1} + A_{n-(i-1)} - A_{n-i} \\ &= \frac{\pi r^2}{2n^2} [i^2 - (i-1)^2 + \{n - (i-1)\}^2 - (n-i)^2] \\ &= \frac{\pi r^2}{2n^2} [2i - 1 + 2(n-i) + 1] \\ &= \frac{\pi r^2}{2n^2} \cdot 2n = \frac{1}{n} \pi r^2 \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte sind also untereinander gleich.

III. Auswertung

a) Ergebnisse: Von 6 möglichen Punkten wurden erreicht: 6 bzw. 5, 4, 3, 2 und nicht mehr als ein Punkt von 22 bzw. 46, 9, 9, 11 und 13 Schülern. Dabei wurde bewußt auch bzgl. Kleinigkeiten ein strenger Maßstab angelegt. Das begründet, warum so viele Schüler einen Abzug von einem Punkt erhielten.

b) Besondere Fälle.

1. Man glaubt, einen induktiven Beweis zu führen, obwohl in Wirklichkeit direkt bewiesen wird.

2. Viele Schüler haben nur Spezialfälle betrachtet, d. h. nur die ersten und letzten Flächenstücke berechnet.

3. Zum Teil wurde das Problem überhaupt nicht erfaßt (0 und 1 Punkt).

4. Man griff eine i -te Teilfläche heraus, ohne genauer zu sagen, in welchen Grenzen i variiert.

5. Einige Schüler verwendeten eine falsche Formel für den Inhalt eines Halbkreises.

6. Es gab relativ viele Flüchtigkeitsfehler.

Dr. G. Buros, Universität Rostock

Aufgabe 4:

Lösung in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission: Für jede natürliche Zahl n treffen wir folgende Wahl der Parallelen und Lote:

Auf AD trage man von A aus eine Strecke der Länge $\frac{a}{2n}$ ab, sodann $(n-1)$ -mal hintereinander Strecken der Länge $\frac{a}{n}$ und daran anschließend erneut eine Strecke der Länge $\frac{a}{2n}$. Der Endpunkt dieser letzten Teilstrecke fällt mit D zusammen, denn es ist

$$\frac{a}{2n} + (n-1) \frac{a}{n} + \frac{a}{2n} = a.$$

Durch die zwischen A und D liegenden Teilpunkte ziehe man Parallelen zu AB .

Sodann fälle man von jedem der 288 Punkte das Lot auf diejenige Parallele, von der er den kleinsten Abstand hat, bzw. falls er genau in der Mitte zwischen 2 Parallelen liegt, auf eine der beiden. Bei der angegebenen Wahl der Parallelen und Lote kann keines dieser Lote länger als $\frac{a}{2n}$ sein.

Für die Summe der Längen dieser Lote gilt also $L_1 \leq 288 \cdot \frac{a}{2n} = \frac{144a}{n}$.

Das Gleichheitszeichen wird genau dann realisiert, wenn jedes der Lote die Länge $\frac{a}{2n}$ hat.

Da die Summe der Längen der Parallelstrecken im Inneren des Quadrates

$$L_2 = n \cdot a$$

beträgt, erhält man

$$\begin{aligned} L = L_1 + L_2 &\leq \frac{144a}{n} + n \cdot a = \frac{a}{n}(n^2 + 144) = \\ &= \frac{a}{n}(n^2 - 24n + 144 + 24n) = \\ &= a \left[\frac{(n-12)^2}{n} + 24 \right] \end{aligned}$$

Ist nun $n=12$, so folgt

$$L \leq 24a.$$

Wenn hierbei sogar $L < 24a$ gilt, so ist die angegebene Verteilung der Parallelen und Lote von der in der Aufgabenstellung geforderten Art.

Gilt dagegen $L = 24a$, so liegt jeder der 288 Punkte genau in der Mitte zwischen 2 Parallelstrecken, so daß auf die erste und letzte keine Lote gefällt zu werden brauchen. Entfernt man nun diese beiden Parallelstrecken aus der angegebenen Verteilung, so wird $L_2 = 10a$ und damit erneut $L < 24a$.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen:

Etwa ein Viertel aller Schüler löste die Aufgabe vollständig. Bei den meisten anderen Schülern fehlte die Diskussion des Falles, daß alle 288 Punkte genau in der Mitte zwischen zwei der angegebenen Parallelstrecken liegen.

Andere Schüler schränkten die Allgemeingültigkeit ihrer Beweise dadurch ein, daß AD in gleichgroße Strecken unterteilt oder eine ganz spezielle Verteilung der Punkte angenommen wurde. Zur Ermittlung der Anzahl der zu ziehenden Parallelstrecken benutzten einige Schüler eine Extremwertuntersuchung der Funktion

$$f(x) = a \cdot x + \frac{144a}{x} \text{ mit Hilfe der Differentialrechnung.}$$

Dr. M. Müller,

Humboldt-Universität zu Berlin

Aufgabe 5:

Im wesentlichen wurde der von der Aufgabenkommission vorgesehene Lösungsweg beschritten, der auch im folgenden dargestellt wird.

Falls eine Lösung existiert, muß

$$(2) \quad x > 0 \text{ sein,}$$

da sonst $\log_4 x$ nicht erklärt ist. Wegen

$$(3) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1)$$

wird aus der Gleichung (1)

$$\begin{aligned} \frac{4}{\log_x 4} + 3 &= 2 \log_x 2 \quad \text{und mit} \\ \log_x 4 &= 2 \log_x 2 \quad \text{schließlich} \\ \frac{2}{\log_x 2} + 3 &= 2 \log_x 2. \end{aligned}$$

Setzt man $u = \log_x 2$, so erfüllt u die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} u^2 - \frac{3}{2}u - 1 &= 0 \quad \text{mit den Lösungen} \\ u_1 &= 2, \quad u_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aus $u = \log_x 2$ folgt $x^u = 2$. Mit den soeben ermittelten Werten für u bekommt man

$$x^2 = 2 \quad \text{und hieraus } x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad \text{bzw.}$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{und hieraus } x_3 = \frac{1}{4}. \quad \text{Wegen (2) ist}$$

x_2 keine Lösung der gegebenen Gleichung. Die Proben mit x_1 und x_3 zeigen, daß x_1 und x_3 die Gleichung (1) erfüllen.

Häufig wird der Lösungsweg etwas variiert. Man setze $z = \log_4 x$, d. h.

$$(4) \quad 4^z = x$$

Wegen $\log_x 2 = \frac{1}{2 \log_4 x}$

geht die Gleichung (1) in eine quadratische Gleichung für z über:

$$4z^2 + 3z - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$z_1 = \frac{1}{4}, \quad z_2 = -1, \quad \text{d. h. mit (4)}$$

$$x_1 = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}, \quad x_2 = 4^{-1} = \frac{1}{4}.$$

Bemerkungen: Vollständige Lösungen lieferten 43 Teilnehmer, in besonders übersichtlicher Darstellung die Schüler Günter Schwalbe, EOS Brand-Erbisdorf, Kl. 10 und Thomas Jentsch, EOS „August Hermann Francke“, Halle, Kl. 10. Die Lösungswege unterscheiden sich im wesentlichen nur durch die Wahl der Basen der Logarithmen. Viele Schüler verwarfen richtige Lösungen mit der Begründung, daß die Logarithmusfunktion keine negativen Werte annehmen könne. Hier wurde offensichtlich Definitionsbereich und Wertevorrat verwechselt.

Die hohe Zahl vollständiger Lösungen spricht dafür, daß diese Aufgabe doch recht einfach war. Dr. K. Zacharias, Deutsche Akademie der Wissenschaft zu Berlin

Aufgabe 6:

Lösung des Schülers Thomas Jentsch, EOS „August Hermann Francke“, Halle, Kl. 10

I. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} V_W &= a^3 \\ \text{und } V_R &= V_W - 3V_Q + 2V_{Wi} \\ &= a^3 - 3ax^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

(V_W ... Volumen des Würfels W)

V_R ... Volumen des Restkörpers

V_Q ... Volumen eines der drei herausgeschnittenen Quader

V_{Wi} ... Volumen des Würfels im Innern von W , den die drei Quader gemeinsam haben).

$$\text{Nun soll } V_R = \frac{V_W}{2},$$

$$\text{d. h. } a^3 - 3ax^2 + 2x^3 = \frac{a^3}{2} \text{ sein.}$$

II. Es gilt, diese Gleichung zu lösen. Eine Äquivalenzumformung ergibt

$$x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4} = 0.$$

Dieser Gleichung ist folgende äquivalent, wie man sich leicht durch Ausmultiplizieren überzeugt:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x - (1 + \sqrt{3}) \frac{a}{2}\right) \left(x - (1 - \sqrt{3}) \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Nun ist ein Produkt genau dann Null, wenn es mindestens einer der Faktoren ist. Daher sind

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = (1 + \sqrt{3}) \frac{a}{2}, \quad x_3 = (1 - \sqrt{3}) \frac{a}{2}$$

die Lösungen dieser Gleichung, und damit der Ausgangsgleichung. Die Lösungen x_2 und x_3 liefern keine Lösung der gestellten Aufgabe, da der geometrische Sachverhalt Werte für x , die größer als a bzw. kleiner als 0 sind, verbietet.

Ergebnis: Für $x = \frac{a}{2}$ und nur für diesen

Wert von x hat der Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels.

Ergänzung zu dieser Lösung:

Will man die Lösungen der Gleichung

$$(1) \quad x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4} = 0$$

bestimmen, so wird man (auf Grund der Aufgabenstellung) probieren, ob $x = \frac{a}{2}$ eine

Lösung ist. Man stellt fest, daß dies der Fall ist, und erhält wegen

$$\left(x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4}\right) : \left(x - \frac{a}{2}\right) = x^2 - ax - \frac{a^2}{2}$$

die übrigen Lösungen von (1) in den Lösungen von

$$x^2 - ax - \frac{a^2}{2} = 0. \quad \text{Auf diesem Wege}$$

gelangt man auch zu der Zerlegung

$$x^3 - \frac{3ax^2}{2} + \frac{a^3}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x - (1 + \sqrt{3}) \frac{a}{2}\right)$$

$$\left(x - (1 - \sqrt{3}) \frac{a}{2}\right),$$

die von Schüler Thomas Jentsch, EOS „August Hermann Francke“, Halle, Kl. 10 angegeben wurde.

Ein Schüler weist auf folgendes hin:

Kommt man nicht sofort darauf, zu probieren ob $x = \frac{a}{2}$ eine Lösung von (1) ist,

dann sollte man so vorgehen:

Durch die Substitution

$$x = z - \frac{p}{3}$$

in der kubischen Gleichung

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

entsteht eine kubische Gleichung in z , welche

die Potenz z^2 nicht enthält. Das wende man hier an, setze also

$$x = z + \frac{a}{2}$$

in (1) ein, und man erhält die Gleichung

$$z^3 - \frac{3a^2z}{4} = 0, \text{ d. h. } z \left(z^2 - \frac{3a^2}{4} \right) = 0,$$

aus der man sofort die Lösungen

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ablesen kann. Lösungen von (1) müssen daher

$$x_1 = z_1 + \frac{a}{2}, \quad x_2 = z_2 + \frac{a}{2}, \quad x_3 = z_3 + \frac{a}{2} \text{ sein.}$$

Allgemeine Bemerkungen:

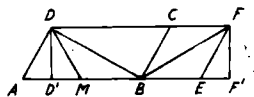
Die kubische Gleichung (1), die gelöst werden muß, wurde von etwa 90% der Schüler aufgestellt. Zum Teil geschah dies jedoch ohne jegliche erläuternde Bemerkung. Über diesen

Abschnitt kamen dann aber $\frac{1}{3}$ der Schüler nicht hinaus. Von den übrigen erreichten etwa $\frac{1}{3}$ (genau 20 Schüler) die volle Punktzahl 6.

Bei vielen anderen fehlte zur Vollständigkeit die Betrachtung der beiden von $x = \frac{a}{2}$ verschiedenen Lösungen der Gleichung (1).

Dipl.-Math. K.-D. Drews, Universität Rostock

W 8 ■ 439 Es scheint zunächst, daß die Strecke $\overline{BD}$ länger als die Strecke $\overline{BF}$ ist. Die geometrische Untersuchung führt aber zu dem folgenden Ergebnis:



Es seien D' und F' die Fußpunkte der von D und F auf die Gerade AB gefällten Lote. Ferner sei M die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Die Länge der Seite $\overline{AD}$ sei gleich a . Dann gilt nach Voraussetzung

$$\overline{AM} = \overline{MB} = a, \quad \overline{BE} = a, \quad \overline{BC} = \overline{EF} = a.$$

Aus $\overline{DD'} = \overline{FF'}$ folgt daher $\triangle AD'D \cong \triangle EF'F$, also $\overline{AD'} = \overline{EF'}$. Ferner ist wegen

$\angle DAM = 60^\circ$ und $\overline{AD} = \overline{AM}$ das Dreieck AMD gleichseitig, also $\overline{AD'} = \overline{D'M}$. Daraus folgt $\overline{D'B} = \overline{D'M} + \overline{MB} = \overline{EF'} + \overline{BE} = \overline{BF'}$.

Daher gilt $\triangle DD'B \cong \triangle FF'B$, also $\overline{BD} = \overline{BF}$. Damit haben wir bewiesen, daß die Diagonale $\overline{BD}$ des Parallelogramms $ABCD$ ebenso lang ist wie die Diagonale $\overline{BF}$ des Rhombus $BEFC$.

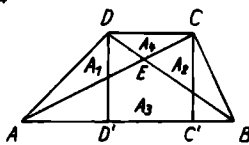
Es liegt hier also eine optische Täuschung vor, die Diagonale des „lang gestreckten“ Parallelogramms erscheint länger als die des Rhombus.

Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ und damit auch die Strecke $\overline{BF}$ läßt sich leicht berechnen:

$$\text{Es gilt nämlich } \overline{DD'} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und } \overline{D'B} = \frac{3}{2}a,$$

$$\text{also } \overline{BD} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

▲ 440 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, das durch die beiden Diagonalen in die Dreiecke AED , BCE , ABE und CDE zerlegt wird, deren Flächeninhalte wir mit A_1 , A_2 , A_3 bzw. A_4 bezeichnen wollen.



a) 1. Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Dann hat der Punkt D den gleichen Abstand von der Geraden AB wie der Punkt C , d. h. $\overline{DD'} = \overline{CC'}$.

Daraus folgt, daß die Dreiecke ABD und ABC flächengleich sind, also gilt

$A_1 + A_3 = A_2 + A_4$. Daraus folgt $A_1 = A_2$, d. h. zwei sich gegenüberliegende Dreiecke sind flächengleich.

2. Zwei sich gegenüberliegende Dreiecke seien flächengleich: $A_1 = A_2$. Dann gilt

$A_1 + A_3 = A_2 + A_4$, d. h. die Dreiecke ABD und ABC sind flächengleich. Da diese Dreiecke die gemeinsame Grundseite $\overline{AB}$ haben,

haben sie also auch gleichlange Höhen: $\overline{DD'} = \overline{CC'}$. Der Punkt D hat daher den gleichen Abstand von der Geraden AB wie

der Punkt C , d. h. $CD \parallel AB$. Das Viereck $ABCD$ ist daher ein Trapez.

b) 1. Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm.

Dann folgt aus a) 1. wegen $AB \parallel CD$ $A_1 = A_2$. Ferner folgt wegen $BC \parallel AD$ $A_3 = A_4$.

Da die Diagonalen im Parallelogramm sich halbieren, gilt aber auch $A_1 = A_3$. Also gilt $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$, d. h. die vier Dreiecke sind flächengleich.

2. Es sei $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$.

Aus $A_1 = A_2$ folgt wegen a) 2. $AB \parallel CD$.

Ferner folgt aus $A_3 = A_4$ $BC \parallel AD$.

Das Viereck $ABCD$ ist daher ein Parallelogramm.

▲ 441 Es seien c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse (in cm), b und a die der Katheten; dann gilt:

$$c - b = b - a, \quad (1)$$

$$\frac{a \cdot b}{2} = 294, \quad (2)$$

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (3)$$

Durch Substitution erhalten wir daraus

$$a^2 + b^2 = (2b - a)^2 \text{ bzw. } 3b^2 = 4ab,$$

Weiter erhalten wir

$$ab = 588 \quad \text{bzw.} \quad 4ab = 4 \cdot 588.$$

$$3b^2 = 4 \cdot 588, \text{ also } b = 28, \quad a = \frac{588}{b} = 21,$$

$$c = 2b - a = 35.$$

Die Längen der Seiten des Dreiecks betragen somit 21 cm, 28 cm und 35 cm.

W 9 ■ 442 Nimmt man an, daß sich in dem Raum x Bänke und y Personen befinden, so erhält man folgende Gleichungen:

$$6(x - 1) + 3 = y, \quad (1)$$

$$5x + 4 = y. \quad (2)$$

Man erhält aus (1) und (2) $6x - 6 + 3 = 5x + 4$, also $x = 7$ und danach aus (2) $y = 39$.

In dem Aufenthaltsraum befinden sich daher 39 Personen und 7 Bänke.

W 9 ■ 443 Es seien $n, n + 1, n + 2, n + 3$ die vier gesuchten natürlichen Zahlen; dann gilt $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 57120$,

$$\text{also } n^4 < 57120.$$

$$\text{Wegen } 239^2 = 57121$$

$$\text{folgt hieraus } n^2 \leq 239,$$

$$\text{ferner wegen } 15^2 = 225 \text{ und } 16^2 = 256$$

schließlich $n \leq 15$. Nun gilt

$$57120 = 10 \cdot 16 \cdot 357 = 10 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 21$$

$$= 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17, \text{ also ist } n = 14. \text{ Die}$$

vier gesuchten Zahlen sind 14, 15, 16 und 17.

▲ 444 Da die reellen Zahlen a, b, c, d von Null verschieden sind, gilt wegen $abcd = 1$

$$\frac{1}{ab} = cd, \quad \frac{1}{ac} = bd, \quad \frac{1}{ad} = bc. \text{ Nun gilt}$$

für alle positiven reellen Zahlen x

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0, \text{ also } x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0,$$

$$\text{d. h. } x + \frac{1}{x} \geq 2. \text{ Daher ergibt sich}$$

$$ab + cd = ab + \frac{1}{ab} \geq 2, \quad (1)$$

$$ac + bd = ac + \frac{1}{ac} \geq 2, \quad (2)$$

$$ad + bc = ad + \frac{1}{ad} \geq 2. \quad (3)$$

Außerdem gilt stets

$$(a - b)^2 \geq 0, \text{ also } a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$\text{d. h. } a^2 + b^2 \geq 2ab, \text{ ferner } c^2 + d^2 \geq 2cd.$$

Daraus folgt $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$$\geq 2(ab + cd) = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 4. \quad (4)$$

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt also

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 4 + 2 + 2 + 2 = 10, \text{ w. z. b. w.}$$

▲ 445 Durch Einzeichnen der Diagonalen in das Viereck erhält man zunächst das Bild des Mittelpunktes des Spielfeldes. Die Verlängerungen der beiden kürzeren Seiten des Spielfeldes schneiden sich in F_1 , dem Fluchtpunkt der beiden Seiten. Da die Mittellinie parallel zu den beiden kürzeren Seiten des Spielfeldes verläuft, haben ihre Bilder F_1 als gemeinsamen Fluchtpunkt. Daher ergibt die Verbindung von F_1 mit dem Bild des Mittelpunktes das gesuchte Bild der Mittellinie.



W 10/12 ■ 446 a) Da die in der Gleichung (1) auftretenden Radikanden nicht negativ sein dürfen, gilt für die Lösungen x dieser Gleichung

$$2x + 3 \geq 0, \text{ also } x \geq -\frac{3}{2}, \text{ und } 6 - x \geq 0,$$

$$\text{also } x \leq 6, \text{ d. h. } -\frac{3}{2} \leq x \leq 6. \quad (5)$$

$$\text{Wegen } \sqrt{2x + 3} = (2x + 3)^{\frac{1}{2}},$$

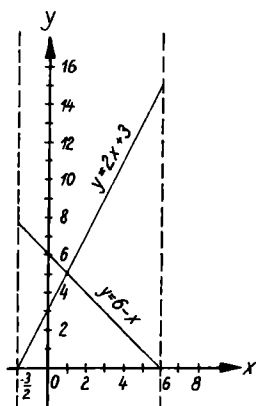
$\sqrt{2x + 3} = (2x + 3)^{\frac{1}{2}}$ usw. ist die Gleichung (1) genau dann erfüllt, wenn

$$(x+3)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} = (6-x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}},$$

$$\text{d. h. } (2x+3)^{\frac{15}{16}} = (6-x)^{\frac{15}{16}} \text{ gilt.} \quad (1^*)$$

Diese Gleichung ist aber nur dann erfüllt, wenn

$2x+3=6-x$, d. h. $x=1$ gilt. Da in diesem Fall die Bedingung (5) erfüllt ist, hat die Gleichung (1) *genau eine reelle Lösung*, nämlich $x=1$.



b) Analog erhält man aus der Gleichung (2)

$$(2x+3)^{\frac{15}{16}} = (2x+1)^{\frac{15}{16}}, \quad (2^*)$$

also $2x+3=2x+1$, d. h. $3=1$. Das ist aber eine falsche Aussage. Die Gleichung (2) hat daher *keine reelle Lösung*.

c) Die Gleichung (3) ist genau dann erfüllt, wenn

$$(2x+3)^{\frac{15}{16}} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{16}}. \quad (3^*)$$

Daraus folgt

$$2x+3=x+\frac{1}{2}, \text{ also } x=-\frac{5}{2}.$$

Nun müssen aber noch die Bedingungen

$$2x+3 \geq 0, \text{ d. h. } x \geq -\frac{3}{2} \text{ und } x+\frac{1}{2} \geq 0,$$

d. h. $x \geq -\frac{1}{2}$, erfüllt sein. Das ist aber für

$x=-\frac{5}{2}$ nicht der Fall; die Gleichung (3) hat

daher ebenfalls *keine reelle Lösung*.

d) Die Gleichung (4) ist genau dann erfüllt, wenn

$$(2x+3)^{\frac{15}{16}} = 2^{\frac{15}{16}} \left(x+\frac{3}{2}\right)^{\frac{15}{16}}. \quad (4^*)$$

Daraus folgt

$$2x+3=2\left(x+\frac{3}{2}\right), \text{ also } 2x+3=2x+3,$$

was für alle reellen Zahlen x zutrifft.

Außerdem muß aber die Bedingung $x \geq -\frac{3}{2}$

erfüllt sein, da sonst die Radikanden in (4) negativ sind.

Die Gleichung (4) ist daher für alle reellen Zahlen x mit $x \geq -\frac{3}{2}$ erfüllt.

Bemerkung: Man kann die obigen Gleichungen auch *graphisch* lösen.

Im Falle der Gleichung (1) stellt man z. B. die Funktionen

$$y=2x+3 \text{ und } y=6-x$$

mit dem Definitionsbereich $-\frac{3}{2} \leq x \leq 6$ durch

zwei Strecken graphisch dar und erhält den Schnittpunkt dieser Strecken mit den Koordinaten $x=1$, $y=5$ (vgl. die Abb.) in Übereinstimmung mit der oben rechnerisch erhaltenen Lösung.

Im Falle der Gleichung (2) sind die Geraden $y=2x+3$ und $y=2x+1$ parallel; man erhält keinen Schnittpunkt.

Im Falle der Gleichung (3) schneiden sich die Geraden $y=2x+3$ und $y=x+\frac{1}{2}$ außer-

halb des Definitionsbereiches $x \geq -\frac{1}{2}$.

Im Falle der Gleichung (4) fallen die Geraden zusammen.

W 10/12 ■ 447 Bezeichnet man die Länge des Radius des Grundkreises des Kegels mit R und die des Radius der Kugel mit r , so gilt

$$r^3 = R^2 h. \quad (1)$$

Aus dem Satz des Thales und dem Höhensatz erhält man (vgl. die Abb.)

$$R^2 = h(2r-h). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$r^3 - 2rh^2 + h^3 = 0. \quad (3)$$

Als erste Lösung erkennt man sofort $r_1 = h$, was bereits aus (1) zu erkennen war.

Spaltet man den Linearfaktor $r-h$ ab, so erhält man aus (3)

$$(r-h)(r^2+rh-h^2)=0,$$

also die weiteren Lösungen

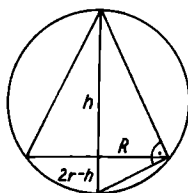
$$r_2 = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\sqrt{5}$$

und $r_3 = -\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\sqrt{5}$, von denen

wegen $r_2 > 0$ und $r_3 < 0$ nur die Lösung

$$r_2 = \frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)$$

den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Die Aufgabe hat also genau zwei Lösungen.

Im ersten Fall ist wegen $r_1 = h$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi h^3,$$

im zweiten Fall ist wegen $r_2 = \frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi h^3(\sqrt{5}-2).$$

▲ 452

20	15	40
45	25	5
10	35	30

▲ 453 Wir nehmen an, Peter habe m Hefte zu 7 Pf und n Hefte zu 10 Pf je Stück gekauft;

dann gilt $7 \cdot m + 10 \cdot n = 261$. Alle Vielfachen von 10 enden auf die Ziffer 0. Aus den Vielfachen der 7 sind diejenigen auszuwählen, die auf die Ziffer 1 enden. Alle Lösungsmöglichkeiten sind aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich.

m	n	$7 \cdot m$	$10 \cdot n$	$7 \cdot m + 10 \cdot n$
3	24	21	240	261
13	17	91	170	261
23	10	161	100	261
33	3	231	30	261

Unter den von Peter gekauften Hefen sind entweder 3 oder 13 oder 23 oder 33 zum Preise von 7 Pf das Stück.

▲ 454 Es sei a die Breite und b die Länge eines solchen Rechtecks; dann gilt

$2 \cdot (a+b) = a \cdot b$. Wir nehmen an, daß $a < b$ gilt, und erhalten die folgende Tabelle:

a	b	$a+b$	$2(a+b)$	$a \cdot b$
1	1	2	4	1
1	2	3	6	2
1	3	4	8	3
1	4	5	10	4
1	5	6	12	5
1	6	7	14	6
2	2	4	8	4
2	3	5	10	6
2	4	6	12	8
2	5	7	14	10
2	6	8	16	12
3	3	6	12	9
3	4	7	14	12
3	5	8	16	15
3	6	9	18	18
4	4	8	16	16
4	5	9	18	20
4	6	10	20	24
5	5	10	20	25
5	6	11	22	30
6	6	12	24	36

Der abgebildeten Tabelle ist zu entnehmen, daß es genau zwei verschiedene Rechtecke gibt, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

$$a_1 = 3 \text{ cm; } b_1 = 6 \text{ cm;}$$

$$a_2 = 4 \text{ cm; } b_2 = 4 \text{ cm.}$$

W 5 ■ 455 Aus $82-22=60$ und $60:3=20$ folgt, daß das billigste Stück Kuchen 20 Pf kostet. Aus $82+23=105$ und $105:3=35$ folgt, daß das teuerste Stück Kuchen 35 Pf kostet. Aus $82-20-35=27$ folgt, daß das dritte Stück Kuchen 27 Pf kostet.

W 5 ■ 456 Beim Frühstück verzehrten die drei Freunde $3 \cdot 2$ Stullen, also 6 Stullen. Dadurch verringerte sich die Anzahl der vorhandenen Stullen auf ein Drittel. Die Freunde hatten somit zwei Drittel aller Stullen verzehrt. Zwei Drittel waren 6 Stück, ein Drittel sind demnach 3 Stück. Folglich hatten Bernd und Dieter zusammen $3 \cdot 3$ Stullen, also 9 Stullen mitgebracht.

▲ 457 Da die Gerade AE den Winkel α halbiert, gilt $\angle EAB = \frac{\alpha}{2}$. Nach dem Außenwin-

kelsatz gilt $\frac{\alpha}{2} = \delta - \beta = 83^\circ - 60^\circ = 23^\circ$ und damit $\alpha = 46^\circ$. Aus $\alpha + \beta + \gamma = 46^\circ + 60^\circ + \gamma = 180^\circ$ folgt $\gamma = 74^\circ$. Für das Dreieck ADS gilt ferner $\frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \varphi = 180^\circ$, also $\varphi = 180^\circ - 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$.

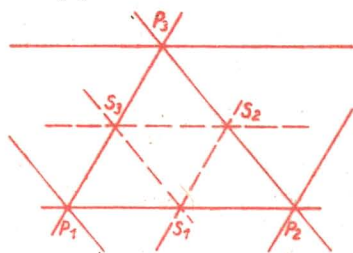
▲ 458 Da die gesuchte dreistellige Zahl durch 3, 4 und 5 teilbar sein soll, muß sie wegen $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ein Vielfaches von 60 sein, also 120, 180, 240, ..., 900, 960. Da die gesuchte Zahl nicht durch 9 teilbar ist, entfallen aus der angegebenen Zahlenfolge alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist; es entfallen also die Zahlen 180, 360, 540, 720 und 900. Von den verbleibenden Zahlen sind diejenigen zu streichen, die durch 25 teilbar sind; das sind die Zahlen 300 und 600. Die Zahl 780 ist durch 13 teilbar; sie ist ebenfalls zu streichen. Für die nunmehr verbleibenden Zahlen gilt:

$$\begin{aligned} 120 &= 11 \cdot 10 + 10, \\ 240 &= 11 \cdot 21 + 9, \\ 420 &= 11 \cdot 38 + 2, \\ 480 &= 11 \cdot 43 + 7, \\ 660 &= 11 \cdot 60 + 0, \\ 840 &= 11 \cdot 76 + 4, \\ 960 &= 11 \cdot 87 + 3. \end{aligned}$$

Die zu ermittelnde Zahl heißt 840.

▲ 459 Eine Gerade mit der geforderten Eigenschaft wird folgendermaßen konstruiert:

Wir zeichnen die Verbindungsgerade von zwei der gegebenen Punkte und zeichnen durch den dritten gegebenen Punkt die Parallele zu der Verbindungsgeraden. Die nun zu konstruierende Mittellinie zu den beiden gezeichneten parallelen Geraden erfüllt die geforderte Eigenschaft. Es gibt also genau drei solcher Geraden. Diese drei Geraden schneiden sich paarweise in den Punkten S_1 , S_2 und S_3 , die die Verbindungsstrecken der gegebenen Punkte halbieren.



W 6 ■ 460 Aus d) folgt unmittelbar: Der Tischler wohnt in Plauen. Aus e) folgt unmittelbar: Herr Fischer wohnt in Plauen. Folglich ist Herr Fischer von Beruf Tischler. Aus a) folgt unmittelbar: Der Ingenieur wohnt in Zwickau. Aus f) folgt: Der Kraftfahrer wohnt nicht in Aue.

Also wohnt der Kraftfahrer in Werdau; damit wohnt der Klempner in Aue.

Aus b) und c) folgt: Der Kraftfahrer heißt weder Conrad noch Fischer noch Meier. Der Kraftfahrer heißt demnach Lange.

Aus b) folgt: Der Ingenieur heißt nicht Conrad. Folglich heißt er Meier. Dann heißt der Klempner Conrad.

Name	Beruf	Wohnort
Fischer	Tischler	Plauen
Lange	Kraftfahrer	Werdau
Meier	Ingenieur	Zwickau
Conrad	Klempner	Aue

W 6 ■ 461 Alle gemeinen Brüche $\frac{n}{1024}$ mit $0 < n < 1024$ haben den Nenner $1024 = 2^{10}$. Durch Erweitern dieser Brüche mit 5^{10} gewinnen wir daraus Brüche von der Form $\frac{5^{10} \cdot n}{5^{10} \cdot 2^{10}} = \frac{5^{10} \cdot n}{10^{10}}$,

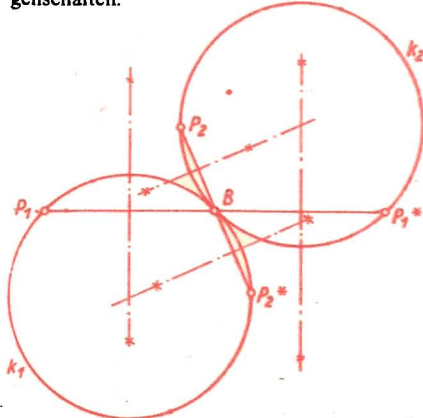
deren Nenner eine Zehnerpotenz ist und die sich deshalb stets als endlicher Dezimalbruch schreiben lassen.

Beispiel: Für $n=3$ erhalten wir

$$\frac{3}{1024} = \frac{5^{10} \cdot 3}{10^{10}} = \frac{9\,765\,625 \cdot 3}{10^{10}} = \frac{29\,296\,875}{10^{10}} = 0,0029296875.$$

▲ 462 Die einzige gerade Primzahl ist die Zahl 2; aus $p=2$ folgt $p+2=4$; das widerspricht der Bedingung, daß $p+2$ eine Primzahl sein soll. Aus $p=3$ folgt $p+2=5$ und $p+4=7$. Alle weiteren Primzahlen sind nicht durch 3 teilbar; sie sind also von der Form $3m+1$ oder $3m+2$, da sie bei der Division durch 3 den Rest 2 oder 1 lassen. Es sei $p=3m+1$ eine Primzahl; dann ist $p+2=3m+3$ keine Primzahl, da diese Zahl durch 3 teilbar ist. Es sei $p=3m+2$ eine Primzahl; dann ist $p+4=3m+6$ keine Primzahl, da diese Zahl durch 3 teilbar ist. Es gibt also genau einen sogenannten „Primzahl-drilling“, er besteht aus den Zahlen 3, 5 und 7.

▲ 463 Wir drehen den Punkt P_1 um B als Drehpunkt im positiven Sinn um 180° und erhalten bei dieser Drehung P_1^* als Bildpunkt von P_1 . Wir drehen ferner den Punkt P_2 um B als Drehpunkt im positiven Sinn um 180° und erhalten P_2^* als Bildpunkt von P_2 . Auf Grund der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (k_1 und k_2 sollen sich berühren und gleiche Radien besitzen) geht k_2 durch P_1^* und k_1 durch P_2^* . Es sind also nur die Umkreise der beiden Dreiecke $BP_1P_2^*$ und $P_2BP_1^*$ in der bekannten Weise zu konstruieren; diese besitzen die geforderten Eigenschaften.



▲ 464 Jedes konvexe n -Eck besitzt $\frac{n(n-3)}{2}$

Diagonalen. Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen des ersten Vielecks mit

$$A = \frac{x(x-3)}{2}, \text{ so gilt für die des zweiten}$$

Vielecks

$$B = \frac{(21-x)(18-x)}{2}, \text{ und wir erhalten für}$$

$$x \leq 8: A \leq \frac{8 \cdot 5}{2} = 20, B \leq \frac{13 \cdot 10}{2} = 65;$$

$$x = 9: A = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27, B = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54;$$

$$x \geq 10: A \geq \frac{10 \cdot 7}{2} = 35, B \geq \frac{11 \cdot 8}{2} = 44.$$

Die Bedingung $2A=B$ ist daher nur für $x=9$ erfüllt; es handelt sich also um ein 9eck und wegen $21-9=12$ um ein 12eck.

W 7 ■ 465 Die erste Ziffer der vierstelligen Zahl sei a und die dritte b ; dann läßt sich die vierstellige Zahl wie folgt darstellen:

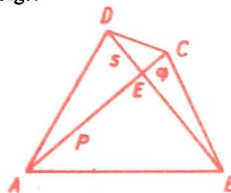
$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b). \text{ Da die Zahl eine Quadratzahl sein soll, muß sie durch } 11^2 \text{ teilbar sein. Das trifft zu, wenn } 11 \text{ Teiler von } 100a + b \text{ ist. Wegen } 100a + b = 99a + a + b \text{ ist diese Zahl durch } 11 \text{ teilbar, wenn } a + b \text{ durch } 11 \text{ teilbar ist.}$$

Wegen $0 < a < 10$ und $0 \leq b < 10$ ist dann aber $a+b=11$, also $11(100a+b)$

$$= 11(99a + 11) = 11^2(9a + 1), \text{ wobei } 9a + 1 \text{ eine Quadratzahl ist. Das trifft aber nur für } a=7 \text{ zu. Wir erhalten } b=4, \text{ also die Kraftfahrzeugnummer } 7744 = 88^2.$$

W 7 ■ 466 Aus $adfc = bef c$ folgt $ad = be$; aus $adeb = cf eb$ folgt $ad = cf$; es gilt demnach $ad = be = cf$. Aus $adbe = 144$ und $ad = be$ folgt $ad = be = cf = 12$. Die Zahl 12 läßt sich auf dreifache Weise als Produkt darstellen, nämlich durch $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$. Eine Lösung der Aufgabe ist somit durch $a=1, b=2, c=3, d=12, e=6$ und $f=4$ gegeben.

▲ 467 Es seien $ABCD$ das gegebene Viereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Wir bezeichnen die Längen der Diagonalen und der Abschnitte der Diagonalen wie folgt:



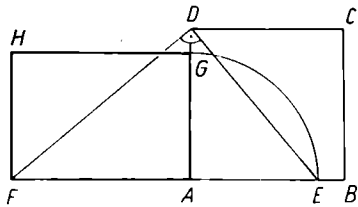
$$\overline{AC} = d, \quad \overline{AE} = p, \quad \overline{EC} = q, \quad \overline{BD} = f, \\ \overline{BE} = r, \quad \overline{ED} = s.$$

Durch die beiden Diagonalen wird das Viereck in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt (vgl. die Abb.). Daher beträgt der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$

$$A = \frac{pr}{2} + \frac{qr}{2} + \frac{ps}{2} + \frac{qs}{2} = \frac{p}{2}(r+s) + \frac{q}{2}(r+s) \\ = \frac{(p+q)(r+s)}{2}, \quad A = \frac{ef}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ ist also gleich dem halben Produkt der Längen der Diagonalen, w.z.b.w.

▲ 468 Wir verbinden D mit E und errichten in D auf $\overline{DE}$ die Senkrechte, die die Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus im Punkt F schneidet. Dann ist $\overline{AF}$ die gesuchte Rechteckseite.



Da das Dreieck FED rechtwinklig ist, gilt nämlich nach dem Höhensatz

$$\overline{AD}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AE};$$

das Quadrat $ABCD$ ist also dem in der Abbildung dargestellten Rechteck $AGHF$ mit den Seiten $\overline{AF}$ und $\overline{AG} = \overline{AE}$ flächengleich.

W 8 ■ 469 a) Bezeichnet man die Zeitdifferenz (in Stunden) zwischen der Moskauer Zeit und der Japanischen Zeit mit x , so gilt

$$\left| \left(15 \frac{50}{60} - x \right) - \left(4 \frac{40}{60} + x \right) \right| < 1,$$

$$\text{also } \left| 11 \frac{10}{60} - 2x \right| < 1,$$

$$\text{d.h. } 11 \frac{1}{6} - 2x < 1, \quad 2x > 10 \frac{1}{6}, \quad x > 5 \frac{1}{12}$$

$$\text{und } 11 \frac{1}{6} - 2x > -1, \quad 2x < 12 \frac{1}{6}, \quad x < 6 \frac{1}{12};$$

daraus folgt, weil x ganzzahlig ist, $x = 6$.

Die Zeitdifferenz zwischen der Moskauer und der Japanischen Zeit beträgt also 6 h.

Wir erhalten daher für die Zeit des Hinfluges wegen

$$15 \frac{50}{60} - 6 = 9 \frac{50}{60} \quad 9 \text{ h } 50 \text{ min}$$

und für die Zeit des Rückfluges wegen

$$4 \frac{40}{60} + 6 = 10 \frac{40}{60} \quad 10 \text{ h } 40 \text{ min.}$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt daher für den Hinflug

$$\frac{8000}{9 \frac{5}{6}} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{8000 \cdot 6}{59} \approx 814 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

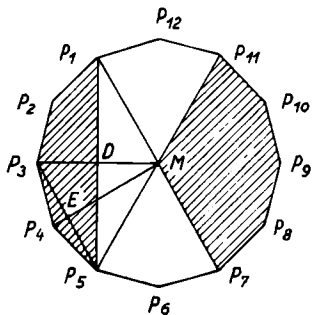
und für den Rückflug

$$\frac{8000}{10 \frac{2}{3}} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{8000 \cdot 3}{32} \approx 750 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1},$$

W 8 ■ 470 Bei der 1. und 2. Wägung werden auf jede Waagschale je eine von vier der sechs Kugeln gelegt, so daß jede dieser vier Kugeln nur einmal auf der Waage liegt:

1. Fall: Bei beiden Wägungen ist die Waage nicht im Gleichgewicht: Durch den Ausschlag der Waage wird bei jeder der beiden Wägungen je eine Kugel als leichtere erkannt. Da es laut Aufgabenstellung nur zwei leichtere Kugeln gibt, sind die vier übrigen Kugeln sämtlich die schwereren.

2. Fall: Nur bei einer der beiden Wägungen ist die Waage nicht im Gleichgewicht: Eine Kugel ist damit als schwerere und eine



andere als leichtere erkannt worden. Weiterhin sind zwei weitere Kugeln als Kugeln gleicher Masse erkannt worden. Die beiden Kugeln gleicher Masse können keine leichteren Kugeln sein, weil es sonst im Widerspruch zur Aufgabenstellung mindestens drei leichtere Kugeln gäbe. Die beiden bei der 1. und 2. Wägung noch nicht aufgelegten Kugeln sind eine leichtere und eine schwerere. Der Entscheid, welche von beiden die leichtere ist, wird mittels der 3. Wägung gefällt.

3. Fall: Bei beiden Wägungen ist die Waage im Gleichgewicht: Es sind damit zwei Paare von Kugeln mit jeweils gleicher Masse bekannt. Bei der dritten Wägung wird je eine Kugel beider Paare auf die Waage gelegt. Ist jetzt die Waage im Gleichgewicht, so haben alle vier Kugeln beider Paare gleiche Masse. Diese vier Kugeln sind damit die schwereren und die beiden übrigen Kugeln die leichteren. Ist bei der dritten Wägung die Waage nicht im Gleichgewicht, so wird durch den Ausschlag der Waage eine der aufgelegten Kugeln und damit gleichzeitig die mit ihr massegleiche als leichtere Kugel erkannt. Die übrigen vier Kugeln sind die schwereren.

$$\text{▲ 471 Wegen } r = ab - d \text{ und } q = \frac{m}{d}$$

erhält man

$$1 + 4rq = 1 + 4(ab - d) \frac{m}{d} = 1 + 4 \frac{ab}{d} m - 4m.$$

$$1 + 4rq = 1 + 4(ab - d) \frac{m}{d} = 1 + 4 \frac{ab}{d} m - 4m.$$

Nun ist aber $\frac{ab}{d} = m$; denn das Produkt zweier natürlicher Zahlen a und b ist gleich dem Produkt aus ihrem g.g.T. und ihrem k.g.V. Setzt man nämlich $a = da_1$ und $b = db_1$, so ist $m = da_1b_1$, und man erhält $ab = da_1db_1 = d(da_1b_1) = dm$. Man erhält daher weiter

$$1 + 4rq = 1 + 4m^2 - 4m = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2.$$

Damit ist bewiesen, daß die Zahl $1 + 4rq$ stets gleich dem Quadrat der natürlichen Zahl $2m - 1$ ist.

Für $a = 8$, $b = 6$ erhält man

$$d = 2, \quad m = 24, \quad r = 8 \cdot 6 - 2 = 46, \quad q = \frac{24}{2} = 12,$$

$$\text{also } 1 + 4rq = 1 + 4 \cdot 46 \cdot 12 = 2209 = 47^2.$$

▲ 472 Wir bezeichnen die Eckpunkte des regelmäßigen Zwölfecks mit $P_1, P_2, P_3, \dots,$

P_{12} , den Mittelpunkt seines Umkreises mit M und die Mitte der Strecke $\overline{P_3P_{11}}$ mit D . Ferner bezeichnen wir den Flächeninhalt des regelmäßigen Zwölfecks mit A und der linken Teilfigur $P_1P_2P_3P_4P_5$ mit A_1 , mittleren Teilfigur $P_1P_5P_6P_7MP_{11}P_{12}$ mit A_2 , rechten Teilfigur $MP_7P_8P_9P_{10}P_{11}$ mit A_3 . Den Radius des Umkreises bezeichnen wir mit r .

Dann ist wegen $\angle P_5MP_3 = 60^\circ$ und wegen $\overline{MP_5} = \overline{MP_3}$ das Dreieck P_5MP_3 gleichseitig mit den Seitenlängen r und der Höhe

$$\overline{P_3D} = \frac{r}{2} \sqrt{3}. \text{ Der Flächeninhalt des Dreiecks } MP_1P_5 \text{ beträgt also}$$

$$\frac{r^2}{4} \sqrt{3}.$$

Ferner ist, wenn man den Schnittpunkt der Strecken $\overline{MP_4}$ und $\overline{P_5P_3}$ mit E bezeichnet, $\overline{P_5E} = \frac{r}{2}$ und $\overline{MP_4} = r$, also der Flächeninhalt des Dreiecks MP_4P_5 und aller anderen elf gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis eine Zwölfeckseite ist und deren Spitze in M liegt, gleich $\frac{r^2}{4}$. Wir erhalten daher

$$A_1 = 4 \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \sqrt{3} = \frac{r^2}{4} (4 - \sqrt{3}) \approx 0,567 r^2,$$

$$A_2 = 4 \cdot \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} \sqrt{3} = \frac{r^2}{4} (4 + \sqrt{3}) \approx 1,433 r^2,$$

$$A_3 = 4 \cdot \frac{r^2}{4} = r^2.$$

Daraus folgt $A_1 + A_3 \approx 1,567 r^2$,

$$\text{also } A_1 + A_3 > A_2, \quad (1)$$

d. h. der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur ist etwas kleiner als die Summe der Flächeninhalte der beiden äußeren Teilfiguren. Dieses Ergebnis erscheint überraschend; denn die meisten Leser haben sicher zunächst angenommen, daß der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur größer ist. Es handelt sich um eine optische Täuschung, da der Flächeninhalt einer weißen Figur im allgemeinen größer erscheint als der Flächeninhalt einer flächengleichen schwarzen Figur.

Bemerkung: Die Ungleichung (1) läßt sich noch einfacher herleiten, wobei man nicht die Flächeninhalte der einzelnen Teilfiguren zu berechnen braucht.

Bezeichnet man nämlich den Flächeninhalt des Dreiecks MP_1P_5 mit A_4 , so gilt

$$A_1 > A_4,$$

$$A_2 = \frac{4A}{12} + A_4,$$

$$A_3 = \frac{4A}{12},$$

$$\text{also } A_1 + A_3 > A_4 + \frac{4A}{12} = A_2, \text{ w.z.b.w.}$$

W 9 ■ 473 a) Es sei $a \neq 0$, $a \neq 1$ und $a \neq -1$. Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann folgt aus (1)

$$ay = 2 - x, \text{ also wegen } a \neq 0 \quad y = \frac{2-x}{a}, \quad (4)$$

und aus (3)

$$az = 3 - x, \text{ also wegen } a \neq 0 \quad z = \frac{3-x}{a}. \quad (5)$$

Setzt man in (2) ein, so erhält man

$$\frac{2-x}{a} - \frac{a^2(3-x)}{a} = 1, \quad 2-x-3a^2+a^2x=a,$$

$$x(a^2-1)=3a^2+a-2. \quad (6)$$

Hieraus folgt wegen $a^2 \neq 1$

$$x = \frac{3a^2+a-2}{a^2-1} = \frac{3a^2+3a-2a-2}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{(3a-2)(a+1)}{(a+1)(a-1)},$$

$$x = \frac{3a-2}{a-1}. \quad (7)$$

Ferner erhält man aus (4) und (5)

$$y = \frac{2-x}{a} = \frac{1}{a} \left(2 - \frac{3a-2}{a-1} \right) = \frac{2a-2-3a+2}{a(a-1)}$$

$$= \frac{1}{1-a}, \quad (8)$$

$$z = \frac{3-x}{a} = \frac{1}{a} \left(3 - \frac{3a-2}{a-1} \right) = \frac{3a-3-3a+2}{a(a-1)}$$

$$= \frac{1}{a(1-a)}. \quad (9)$$

Setzt man die durch (7), (8) und (9) ermittelten Werte für x , y , z in (1), (2) und (3) ein, so stellt man fest, daß diese Gleichungen erfüllt sind.

Im Falle $a \neq 0$, $a \neq 1$ und $a \neq -1$ hat also das Gleichungssystem *genau eine Lösung*, nämlich

$$x = \frac{3a-2}{a-1}, \quad y = \frac{1}{1-a}, \quad z = \frac{1}{a(1-a)}.$$

b) Es sei $a=0$. Dann folgt aus (1) $x=2$ und aus (3) $x=3$. Das ist ein Widerspruch, das Gleichungssystem hat also in diesem Falle *keine Lösung*.

c) Es sei $a=1$. Dann folgt aus (6)

$$0=3+1-2=2;$$

das ist ebenfalls ein Widerspruch; das Gleichungssystem hat auch in diesem Falle *keine Lösung*.

d) Es sei $a=-1$. Dann ist $a^2-1=0$ und $3a^2+a-2=0$, d. h., die Gleichung (6) ist für alle reellen Zahlen x erfüllt. Das Gleichungssystem hat in diesem Falle unendlich viele Lösungen, nämlich

$$x=t, \quad \text{wo } t \text{ eine beliebige reelle Zahl ist,}$$

$$y=t-2,$$

$$z=t-3.$$

In diesem Fall sind nämlich die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt.

W 9 ■ 474 a) Von jedem der 8 Punkte kann man genau 7 Verbindungsgeraden ziehen, die diesen Punkt mit den übrigen 7 Punkten verbinden. Man erhält daher $8 \cdot 7 = 56$ solcher Geraden. Dabei ist aber jede dieser Geraden doppelt gezählt worden. Die Anzahl der Verbindungsgeraden beträgt daher in diesem Falle $\frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$.

b) In diesem Falle kann man von jedem der n Punkte $n-1$ Verbindungsgeraden ziehen, wobei jede Gerade wieder doppelt gezählt ist. Man erhält daher in diesem Falle

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ Verbindungsgeraden.}$$

c) In diesem Falle erhält man die Gleichung

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45, \text{ also } n(n-1) = 90.$$

Daraus folgt $n^2 > 90$, d. h. $n > 9$

und $(n-1)^2 < 90$, d. h. $n-1 \leq 9$, also $n \leq 10$. Also ist $n=10$. Es sind also genau 10 Punkte gegeben; denn man erhält

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ Verbindungsgeraden.}$$

Man kann aber auch die Gleichung

$n(n-1)=90$ mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen und erhält $n^2-n-90=0$,

$$n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 90} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{1+19}{2} = 10,$$

da nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösungen zu Arbeitsblattbeobachtung

1 Das einzuzäunende Grundstück hat einen Umfang von 210 m.

2	4	8	14	16	3	7
17		2	15	9		6
5	11	10		1	12	13

3 Karin hat recht. Wenn sie zu Fuß gingen, wäre sie erst nach 8 Stunden in Rätselfhagen. Wenn sie aber abwechselnd fahren und gehen, sind sie bereits nach sechs Stunden zusammen in Rätselfhagen, obwohl jeder von ihnen die Hälfte des Weges zu Fuß zurücklegt.

$$4 \quad x_1=360 \quad x_2=504 \quad x_3=432;$$

Die Summe beträgt 1080.

5 Das Haus wurde nach dem Bauplan (Grundriß) B gebaut.

6 Die größte Tiefe des Nördlichen Eismeers beträgt 5,4 km.

7 Krawuttke kombiniert folgendermaßen: Zwei Federn liegen wieder in der Tasche. Wenn nun zwei weiße Federn in der Tasche liegen, weiß Frau Schulze sofort, daß sie eine weiße Feder auf dem Kopf trägt, dann haben die restlichen Mitspieler eine schwarze Feder im Haar, und mehr als vier schwarze Federn sind ja nicht vorhanden. Da sich Frau Schulze ruhig verhielt, mußte Krawuttke annehmen, daß er eine weiße Feder im Haar trug.

8 Der Fahrer des Milchaautos fährt täglich folgende Route: Er kommt von der Molkerei rechts im Bild und biegt gleich zu Beginn der Hauptstraße, Ecke Steinweg, links in die Lange Straße. Hat er diese durchfahren, fährt er auf der Hauptstraße zurück und biegt rechts in den Hainweg ein. Danach überquert er die Hauptstraße und fährt in den Roggenpfad. Von hier ist es dann kein Problem mehr, den kürzesten Weg zu finden. Vergleicht: Wettergasse, Gerstenweg, Rosenstraße, Kurze Straße, Gartenweg, Krebsweg, Tannenweg und zurück zur Hauptstraße, wo es in Pfeilrichtung zum nächsten Stadtteil geht.

9 48 Maschinen wurden aufgestellt. (Die Produktion stieg um 33,3%)

10 Ein Blatt Papier ist 0,07 mm dick.

Lösungen zu alpha-leiter

Anglerglück

Jeder hat die Chance, 20 Karpfen zu fangen.

Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

Sinngemäße Übersetzung aus dem Niederländischen:

Wieviele Krüge müssen wir auf die rechte Waagschale der Waage (rechts unten) setzen, um zwischen beiden Waagschalen Gleichgewicht zu erhalten?

Antwort: Auf die Waagschale müssen 5 Krüge gestellt werden. (Op de schaal moeten 5 Kroezen worden gezet.)

Schwierige Sache

Eine der möglichen Lösungen:

$$139+4=143; \quad 86+57=143$$

Stimmt das?

$$\sqrt[n]{a + \frac{a}{a^n-1}} = \sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}} = \sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$$

Silbenrätsel

Mittel, Ober, Schnitt, Kreis, Ab, Un;

M O S K A U

Kartenfaltübungen

Abb. 1: man halte den Bogen mit der beschrifteten Seite nach unten:

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 6$$

$$1 \quad 8 \quad 7 \quad 4$$

Nun falte man die rechte Hälfte des Bogens nach links, so daß die 5 über 2, die 6 über 3, die 4 über der 1 und die 7 über der 8 liegt. Die untere Hälfte falte man nun nach oben, so daß die 4 über der 5 und die 7 über der 6 liegt. Anschließend falte man 4 und 5 zwischen 6 und 3 und falte 1 und 2 unter das Paket.

Abb. 2: Der zweite Bogen wird zuerst in der Mitte parallel zur längeren Seite so gefaltet, daß die Zahlen außen sind und so gehalten, daß 4 5 3 6 oben liegt. Dann falte man 4 auf 5. Das rechte Ende des Streifens (Quadrat 6 und 7) wird zwischen 1 und 4 gesteckt und dann um die gefaltete Kante von 4 umgelegt, so daß 6 und 7 zwischen 8 und 5 kommen und 3 und 2 zwischen 1 und 4.

Kleiner Begriffskatalog

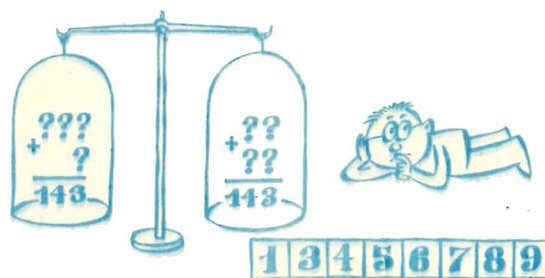
Äußeres Rechteck: Limes, Seite, eta, Route, Ellipse, elf, Funktion, Normale, Euklid, Dreieckswinkel, Limes, Seite;

Inneres Rechteck: Logarithmus, Summe, Exponent, Trapez, Zoll, Leibniz, Zahl.

Eindeutigkeit

$6+10-1=15$; allgemein: der x -te von links, der m -te von rechts; $x+m-1$ Schüler

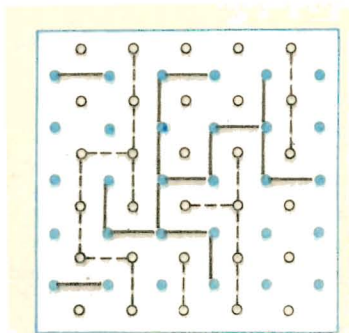
In freien Stunden **alpha** heiter



Punktverbindespiel

Der Mathematikprofessor *David Gale* (Brown-Universität) erfand folgendes Spiel:

Das Spielfeld besteht aus senkrechten Reihen von schwarzen Punkten, die sich mit ähnlichen Reihen von blauen Punkten abwechseln. Spieler *A* benutzt einen Schwarzstift, Spieler *B* einen Blaustift. Ist *A* an der Reihe, so verbindet er zwei benachbarte Punkte entweder durch eine waagerechte, oder durch eine senkrechte Linie. Sein Ziel ist ein zusammenhängender Linienzug, welcher die linke mit der rechten Seite des Feldes verbindet (*B* muß so spielen, daß er die obere mit der unteren Seite verbindet.) Die Spieler machen abwechselnd jedesmal eine Linie.



Sieger ist derjenige, der zuerst eine kontinuierliche Linie zwischen seinen beiden Seiten herstellt. (Die Abb. gibt ein Spiel wieder, bei dem Blau der Gewinner ist.) — Das Spiel kann auf beliebig großen Feldern gespielt werden.

Ging's in der Schule mal nicht gut,
macht *alpha*-heiter neuen Mut!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Anglerglück

An einem Teich sitzen vier Angler. Zwei von ihnen haben sogar zwei Angeln ausgelegt. Wieviel Karpfen kann jeder fangen, wenn 20 Karpfen im Teich sind?

Schüler Christian Engelmann, Limbach-Oberfr., Kl. 8 a

Einige kuriose Relationen

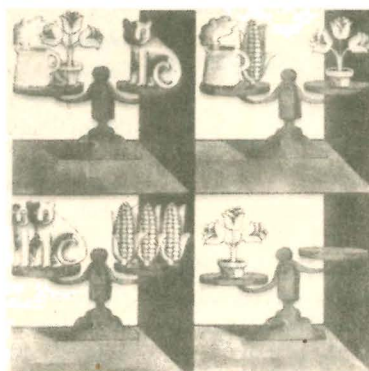
1. $\sin 1800^\circ + \sin 170^\circ = \sin 1970^\circ$
(Vergleiche $1800 + 170 = 1970$)
2. $5 \sin 360^\circ + \sin 170^\circ = \sin 1970^\circ$
(Vergleiche $5 \cdot 360 + 170 = 1970$)
3. $10 \tan 180^\circ + \tan 170^\circ = \tan 1970^\circ$
(Vergleiche $10 \cdot 180 + 170 = 1970$)
4. $2 \cos 720^\circ + 2 \cos 180^\circ + \cos 170^\circ = \cos 1970^\circ$
(Vergleiche $2 \cdot 720 + 2 \cdot 180 + 170 = 1970$)
5. $10 \cot 45^\circ + 10 \cot 135^\circ + \cot 170^\circ = \cot 1970^\circ$
(Vergleiche $10 \cdot 45 + 10 \cdot 135 + 170 = 1970$)

Wer findet ähnliche interessante Relationen? Sendet sie an die Redaktion *alpha*!

Mathematikfachlehrer S. Gottesmann Tschernowzy, UdSSR

Katten, kroezen, bloempotten en maiskolven

Hoeveel kroezen moeten we op de rechterschaal van de laatste weegschaal zetten om aan beide kanten hetzelfde gewicht te krijgen?



aus: Pythagoras 2/69—70 (Niederlande)

Arabisch

Ein Schüler der Klasse 5 soll die Zahl 25 an die Tafel schreiben. Er beginnt bei den Einern, schreibt also zuerst die Fünf. Daraufhin der Lehrer: „Wieso schreibst du denn von rechts nach links? Das tun doch nur die Araber.“

„Es sind ja auch arabische Ziffern“, verteidigte sich der Getadelte.

Friedrich Kaden, Großschirma, aus DLZ 27/66

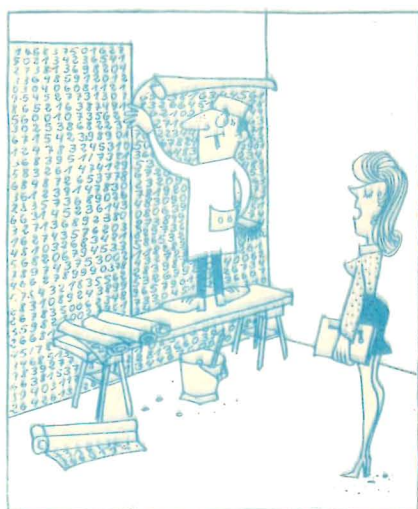
Denke nicht, wenn Du denkst, Du denkst!
Denn wenn Du denkst, Du denkst, dann denkst Du
nicht,
dann denkst Du nur, Du denkst!

Wolfgang Reichel, Rübeland/Harz, aus: Eulenspiegel 42/69

Schwierige Sache!

Setzt die unter der Zeichnung (neben der Überschrift) stehenden Ziffern statt der Fragezeichen ein. Das Ergebnis muß aber auf beiden Waagschalen gleich sein.

Horst Moese, aus: Trommel 59/60, 69



„Bei meinem Studium der Kybernetik möchte ich keinesfalls durch ein albernes Blumenmuster abgelenkt werden.“

Horst Alisch, aus: Resümee 2

Stimmt das?

$$\sqrt{5 \frac{5}{24}} = 5 \sqrt{\frac{5}{24}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{4 \frac{4}{63}} = 4 \sqrt[3]{\frac{4}{63}}$$

Wer findet eine allgemeine Beziehung?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz (nach Lietzmann)

Silbenrätsel

Die Wörter jeder Zeile werden durch Davorsetzen eines Wortes oder einer Silbe zu mathematischen Begriffen. Die Anfangsbuchstaben der davor gesetzten Wörter bzw. Silben ergeben den Namen einer Stadt, die die Heimat vieler bedeutender Mathematiker ist.

- -punkt, -senkrechte, -linie
- -fläche, -begriff, -menge
- -punkt, -fläche, -gerade
- -sektor, -tangente, -mittelpunkt
- -stand, -wicklung, -runden
- -endlich, -gleich, -regelmäßig

OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Kartenfaltübungen

Unterteile einen rechteckigen Bogen Papier in acht Quadrate und nummeriere diese auf einer Seite (siehe Abb. 1). Falte nun den Bogen so, daß die Quadrate in ihrer natürlichen Reihenfolge zu liegen kommen, wobei die 1 oben liegen soll.

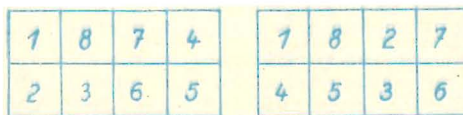


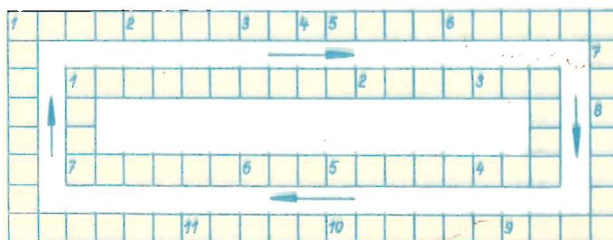
Abb. 1

Abb. 2

Wesentlich schwieriger ist es, das gleiche zu tun mit einem anderen Bogen, numeriert nach dem Muster der Abb. 2.

Kleiner Begriffskatalog

Äußeres Rechteck:	Inneres Rechteck:
1— 2 Grenzwert	1—2 besonderer Exponent
2— 3 Verbindungsstrecke	2—3 Ergebnis einer Addition
3— 4 griech. Buchstabe	3—4 Hochzahl
4— 5 Flächenmaß	4—5 Viereck
5— 6 Rhombus	5—6 engl. Längeneinheit (0,0254 m)
6— 7 Kegelschnitt	6—7 deutscher Mathematiker (1646 bis 1716)
7— 8 Zahl	7—1 grundlegender Begriff d. Mathematik
8— 9 Menge geordn. Paare	
9—10 besondere Form d. Geraden	
10—11 griech. Mathematiker	
11— 1 Bestimmungsgrößen eines Dreiecks	



Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz

Eindeutigkeit?

Bei der Preisverteilung nach einer Mathematikolympiade stehen alle Preisträger nebeneinander auf der Bühne.

Karl: „Der sechste von links hat als einziger Schüler seiner Klassenstufe die volle Punktzahl von 40 Punkten erreicht.“

Annerose: „Das stimmt, es ist genau der zehnte von rechts!“

Wieviel Preisträger waren es? Verallgemeinere!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Kundin: „Gestern habe ich meinen Sohn einkaufen geschickt. Er sollte $2\frac{1}{2}$ Kilogramm Äpfel kaufen.

Als ich die Tüte zu Hause abwog, waren nur 2 Kilogramm drin.“

Verkäuferin: „Vielleicht hätten Sie Ihren Sohn mal wiegen sollen!“

Aus NBI

Mathematik-Kalender

Mai 1970

Fr 1	Internationaler Kampf- und Feiertag der Werktätigen
Sa 2	
So 3	
Mo 4	
Di 5	† 1859 Peter Gustav Dirichlet. Wirkte in Deutschland. Richtungweisende Arbeiten zur Zahlentheorie (* 13. 2. 1805)
Mi 6	† 1961 Elie Cartan (* 9. 4. 1869)
Do 7	* 1832 Carl Neumann. Wirkte in Leipzig. († 27. 3. 1925)
Fr 8	† 1951 Gilbert Ames Bliss. Wirkte hauptsächlich in Chicago. Grundlegende Untersuchung zur Variationsrechnung (* 9. 5. 1876)
Sa 9	

So 10	
Mo 11	
Di 12	
Mi 13	
Do 14	† 1893 Ernst Eduard Kummer. Wirkte in Breslau und Berlin. Seine tiefangelegten zahlentheoretischen Untersuchungen zählen zu den glänzendsten Leistungen der mathem. Forschung (* 29. 1. 1810)
Fr 15	
Sa 16	† 1830 Joseph Fourier (* 21. 3. 1768) * 1821 Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff. Wirkte in Moskau und Petersburg. Begründer und bedeutender Vertreter der Petersburger mathematischen Schule († 8. 12. 1894)

So 17	
Mo 18	
Di 19	
Mi 20	
Do 21	* 1471 Albrecht Dürer († 6. 4. 1528)
Fr 22	
Sa 23	† 1857 Augustin Cauchy. Wirkte in Paris. Er ist einer der bedeutendsten Vertreter der Analysis (* 21. 8. 1789)

So 24	
Mo 25	
Di 26	
Mi 27	
Do 28	
Fr 29	* 1882 Henry Bateman. Wirkte in England. Grundlegende Beiträge zur Theorie der Transformationen (* 21. 1. 1856)

Sa 30

So 31 † 1832 Evariste Galois. Siehe *alpha* 1/69 (* 25. 10. 1811)

Juni 1970

Mo 1	Internationaler Tag des Kindes
Di 2	
Mi 3	
Do 4	
Fr 5	* 1819 John Couch Adams († 21. 1. 1892)
Sa 6	† 1892 Ossian Bonnet (* 22. 12. 1819) † 1928 Luigi Bianchi (* 18. 1. 1856) * 1857 Alexander Michailowitsch Ljapunow. Wirkte in Charkow und Petersburg. Richtungweisende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen († 3. 11. 1918)

So 7	
Mo 8	
Di 9	
Mi 10	† 1836 André-Marie Ampère. Wirkte in Paris. Von Haus aus Physiker, hat er von der mathematischen Physik her die Mathematik befruchtet. (* 22. 1. 1775)
Do 11	
Fr 12	Tag des Lehrers
Sa 13	

So 14 * 1856 Andrei Andrejewitsch Markow. Wirkte in Petersburg. Grundlegende Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung († 20. 7. 1922)

Mo 15	
Di 16	
Mi 17	* 1894 Alexander Jakowlewitsch Chintschin. Siehe <i>alpha</i> Heft 5/67 († 19. 11. 1959)
Do 18	
Fr 19	
Sa 20	

So 21	
Mo 22	† 1825 Felix Klein (* 25. 9. 1849)
Di 23	
Mi 24	
Do 25	
Fr 26	
Sa 27	

So 28
Mo 29
Di 30

Dieser Kalender wird bis Dezember 1970 fortgesetzt. Tragt eure AG-Nachmittage, Mathematik-Klassenarbeiten, Exkursionen, mathematische Fachaufträge usw. ein!

Literatur



D.-E. Mickleit

Magische Spielereien

167 S., zahlreiche Abb. 4,00 M (ab 10 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

Sammelband

Buntes Telejhrbuch

224 Seiten, 9,80 M (ab 10 Jahre)
Kinderbuchverlag Berlin 1970

Ernőné Lucács

Wie groß, wie spät, wie weit?

40 Seiten, 4,80 M (ab 10 Jahre)
Kinderbuchverlag 1970

Gyula Mackássy

Zwei plus zwei gleich vier

40 Seiten, 4,80 M (ab 8 Jahre)
Kinderbuchverlag Berlin 1970

Gerhard Niese

Spiele und Experimente

200 Seiten, 5,80 M (ab 12 Jahre)
Kinderbuchverlag Berlin 1969

Meyers Taschenlexikon

Raketentechnik — Raumfahrt

426 S., 48 Bildtafeln, 215 Abb., 15,00 M
(ab 14 Jahre)
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Autorenkollektiv

Wissenschaft und Menschheit

6. Band 1969, 391 S., zahlr. Abb., 18,00 M
(ab 15 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

Gilde/Altrichter

Die optimale Lösung

240 S., 6,80 M (ab 15 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

Meyers Taschenlexikon

Schiffbau — Schifffahrt

347 S., 85 Abb., 80 Fotos, 7,00 M
(ab 12 Jahre)
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Meyers Taschenlexikon

Luftfahrt

930 S., 20 Fototafeln, 105 Abb., 8,00 M
(ab 12 Jahre)
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Dr. R. Ogrissek

Geographie für jedermann

356 Seiten, 45 Farbfotos, Graphiken
16,80 M (ab 12 Jahre)
VEB Hermann Haack, Geographisch-kartographische Anstalt Gotha/Leipzig 1969

Dieter Stempell

Programmierte Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

160 Seiten, 10,00 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft Berlin 1969

Fachwörterbuch

Begriffe und Sinnbilder der Datenverarbeitung

196 Seiten, zahlr. Abb., 5,00 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1968

Dieter Stempell

Handbuch der Netzplantechnik

296 S., 12,80 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969

Wissensspeicher

Grundlagen der Datenverarbeitung

160 S., 59 graf. Darst., 5,00 M (ab 16 Jahre)
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969

W. Lietzmann

Wo steckt der Fehler?

Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen
192 S., 95 Abb., 4,80 M (ab 12 Jahre)
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969

H. Melcher

Relativitätstheorie

in elementarer Darstellung mit Aufgaben und
Lösungen, 237 S., 12,80 M (ab 16 Jahre)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin 1969

Autorenkollektiv

Kompendium der Mathematik

Bestell-Nr. 001807, 319 S., 7,50 M
(ab 12 Jahre)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Rudolf Dietze

Was spielen wir?

299 S., zahlr. Abb., 9,00 M (ab 10 Jahre)
Tribüne, Verlag und Druckereien des FDGB
Berlin 1969

Autorenkollektiv

Container-Taschenbuch

77 S., zahlr. Abb., 3,80 M (ab 14 Jahre)
Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen,
Berlin 1969

Arthur Suhle

Die Münze

von den Anfängen bis zur Europäischen Neuzeit
227 S., zahlr. Abb., 18,00 M (ab 14 Jahre)
Verlag Koehler und Amelang, Leipzig 1969

Heinz Joswig

Das Geld

188 S., zahlr. Bildtafeln, 12,00 M (ab 14 Jahre)
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1969

N. N. Vorobjoff

Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung

85 Seiten, 6,80 M (ab 16 Jahre)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin 1969

Jürgen Flachsmeier

Kombinatorik

Eine Einführung in die mengentheoretische
Denkweise
mit 45 Abb., 15,00 M (ab 16 Jahre)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin 1969

Institut für Datenverarbeitung Dresden

Lehrschau, Teil 1 bis 3 Maschinelle Datenverarbeitung

Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969/70
Die drei Mappen enthalten Anschauungstafeln
aus der EDV

Leser schreiben an alpha

- Sechs Mädchen und drei Jungen des 2. Lyzeums der Stadt Sighisoara (SR Rumänien) nehmen am *alpha*-Wettbewerb teil. Sie sind begeistert von der Vielseitigkeit von *alpha*. Besonderes Interesse fanden die Beiträge: EDV, Rechnen mit Resten und Berufsbild: Hochbauzeichner. *d. Red.*
- Seit über eineinhalb Jahren bin ich regelmäßiger Leser der Zeitschrift *alpha*. Ich glaube, daß sie mir viel geholfen hat. Ohne *alpha* wäre ich jetzt wahrscheinlich nicht zweimaliger Kreissieger der Mathematikolympiade, dafür Lob und Dank!
Yvonne Kruber, OS Stolpen, Kl. 8b
- Seit Heft 1/69 schreibt Ihr Artikel über elektronische Datenverarbeitung. Ich interessiere mich sehr für diesen Zweig der Industrie. Durch Eure Beiträge kann ich mein Wissen in der Schule gut anwenden.
Heike Busch, Greifswald
- *alpha* half mir schon in verschiedenen Fällen. So bekam ich z. B. einen Auftrag, einen mathematischen Gruppennachmittag zu gestalten. Da gefielen am meisten die Aufgaben aus „*alpha*-heiter“. Meine Mitschüler waren begeistert, sobald sie eine Aufgabe gelöst hatten...
Martin Baumgart, Zerbst
- Vielen, vielen Dank für die *alpha*-Aufgaben und auch für die fachlichen Beiträge... Ich versichere, daß ich auch 1970 aktiv am Wettbewerb teilnehme.
Bärbel Ortmann, Schiller-OS, Radebeul, Kl. 8
- ... Interessant fand ich die Beiträge über Mathematikolympiaden, über EDV und den Mathematisch-Physikalischen Salon. Doch vermisse ich bei Euch Erläuterungen zu schwierigen Begriffen...
*Euer eifriger alpha-Leser
Christine Adolph, Neugersdorf*
- ... Das Lösen der Wettbewerbsaufgaben macht mir sehr viel Spaß... Besonders begrüße ich, daß auch eine Antwort erfolgt, wenn die eingesandte Lösung falsch ist. Die Beiträge über EDV finde ich sehr interessant und vor allem für uns Schüler gut verständlich. Die *alpha*-Aufgaben sind auch als Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden sehr von Nutzen. Ein herzliches Dankeschön allen Mitarbeitern!
Erdmute Kriebel, Freital, Kl. 8
- Zwischen meiner Schulzeit und jetzt liegen bereits drei Jahre. Dennoch beziehe ich auch weiterhin *alpha*. Durch sie kann ich stets mein Gedächtnis auffrischen und mich überprüfen, ob ich noch allen Aufgaben gewachsen bin. Ihre Zeitschrift ist sehr interessant; machen Sie weiter so!
Frau Barbara Geißenhöner, Mühlhausen
- ... Vielleicht könnten Sie von Zeit zu Zeit einmal eine komplizierte Aufgabe ausführlich besprechen, überhaupt das Herangehen an solche „Brocken“.
Guido Bimberg, Halle/Saale
- Nicht nur der *alpha*-Wettbewerb macht mir viel Freude; der Abdruck der Aufgaben und Lösungen von Mathematik-Olympiaden gibt viele Anregungen. Die Berufsbilder helfen mir, mich für einen interessanten aber auch volkswirtschaftlich wichtigen Beruf zu entscheiden.
Klaus Schönefeld, Weimar, Kl. 11
- In diesem Jahr habe ich erstmalig am *alpha*-Wettbewerb teilgenommen und gestehe, daß mir die Beschäftigung einiges Kopfzerbrechen, aber auch viel Freude bereitet hat. Durch die Aufgaben wurde ich gezwungen, mich intensiv mit ganz bestimmten Problemen zu befassen.
Gert Wanka, Döbeln
- Ich bin seit zwei Jahren Leser Ihrer Zeitschrift, und freue mich jedesmal, wenn *alpha* erscheint. *alpha* hat mir viel Übungsmaterial geboten. Mit den Aufgaben bereitete ich mich auf die Kreis- und Bezirksolympiade vor und konnte dort gut abschneiden.
Jenny Tennert, Tutow
- Ich bin eifriger Leser der *alpha*. Mir gefällt an ihr natürlich der Wettbewerb, mir gefallen die Berichte aus aller Welt, *alpha*-heiter und die verschiedenen Mathematikzirkel. *alpha* sollte mehr Aufgaben aus dem Gebiet des Sports bringen!
Hendrike Meyer, Schmalkalden, Kl. 7
- Hiermit möchte ich mich recht herzlich bei Dir, liebe *alpha*, für die vielen Aufgaben bedanken sowie bei den Korrektoren für die viele aufgewandte Mühe beim Korrigieren der Lösungen... Besonders begrüße ich persönlich, daß auch die Olympiadaufgaben in den Wettbewerb einbezogen werden...
Wulf Holowenko, Bad Klosterlausnitz

Kreis und Vieleck

