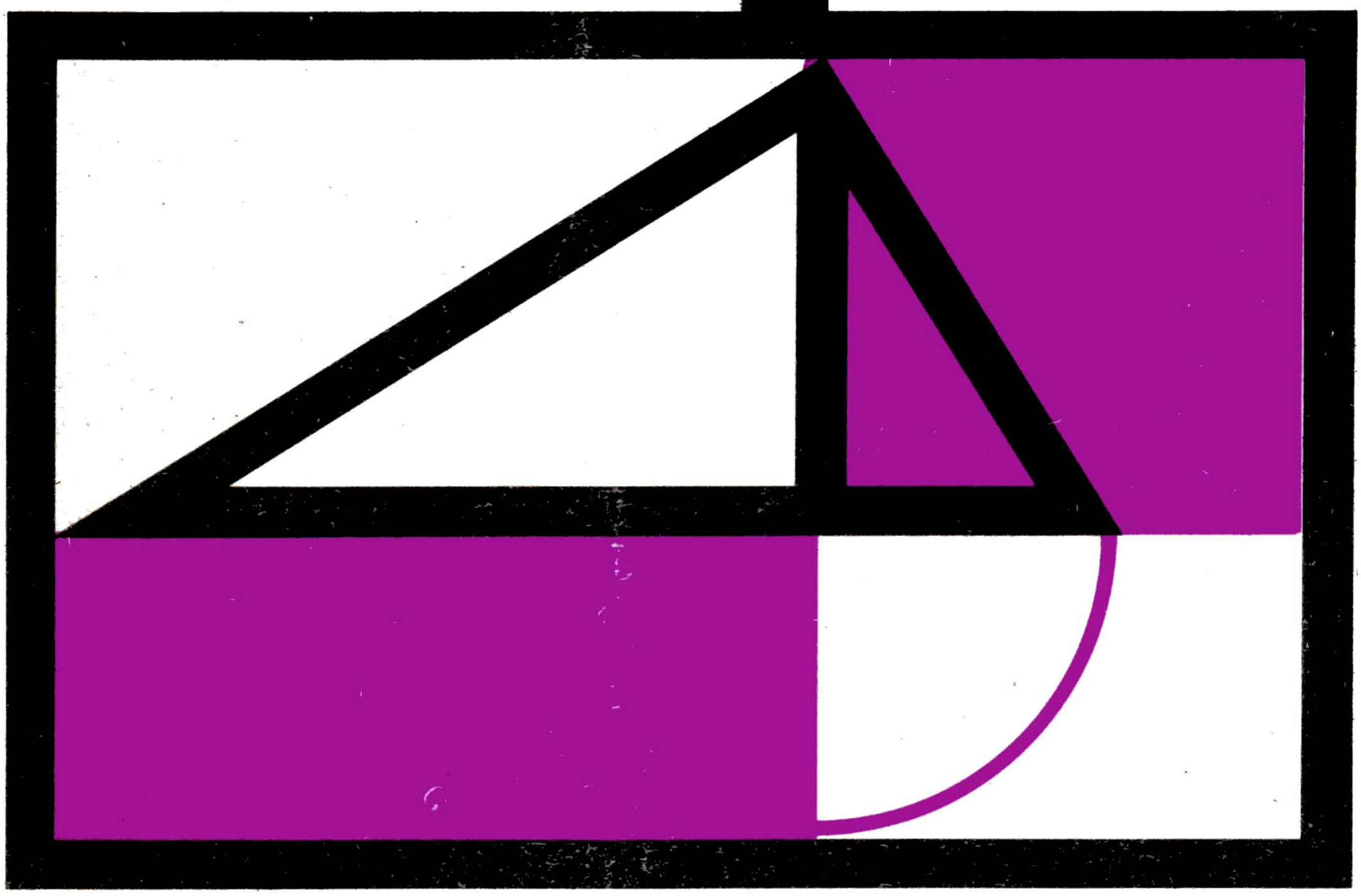
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Schwarz, Jena (S. 122); Faksimiles: Staatsarchiv Weimar (S. 121/122); Naumann, Leipzig (S. 128); Schach-Vignetten aus: Rund um das Schachbrett, W. de Gruyter, Berlin (S. 133); Vignetten H.-J. Jordan, Leipzig (S. 142/143)
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 1. Oktober 1969

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

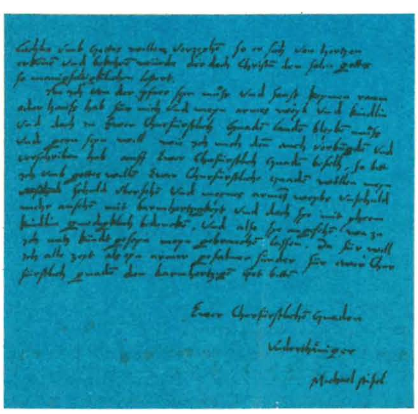
Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Michael Stifel

Schicksal eines Mathematikers vor 400 Jahren

Im Spätsommer des Jahres 1533 lief ein Gerücht durch Mitteldeutschland: Ein Pfarrer *Stifel* aus Lochau bei Wittenberg habe ein Buch verfaßt und darin durch eine Berechnung und 21 andere Gründe nachgewiesen, daß das Ende der Welt am Montag, dem 19. 10. 1533, morgens um 8 Uhr kommen würde. Viele lachten darüber, aber manche glaubten daran, besonders die Lochauer. Auf verschiedene Weise bereiteten sie sich auf das Ende der Welt vor. Einige verbrachten die Tage unter Klagen und Gebeten, andere hielten sich nur noch im Wirtshaus auf. Die Felder wurden nicht mehr bestellt. Hab und Gut verkaufte und verschleuderte man, um sich vor dem Weltuntergang noch etwas zugute zu tun. Am 19. Oktober hielt *Stifel* von früher Stunde an Gottesdienst, zu welchem er durch das Horn des Kuhhirten, von manchen für die Posaune des Jüngsten Gerichts gehalten, wecken ließ. „Die letzte Stunde ist nahe!" rief er den Gläubigen zu. Großes Wehklagen, besonders unter den Frauen, erhob sich. Die angesagte Stunde näherte sich und ging vorüber, ohne daß die Vorhersage eintraf. *Stifel* selbst fing an, unruhig zu werden. Ein heraufziehendes Unwetter erklärte er als Vorboten des Jüngsten Gerichts. Blitz und Donner gingen vorüber, der Regen hörte auf, man wartete weiter. Als schließlich in den Nachbardörfern die Mittagsglocken läuteten, war es auch dem letzten klar, daß sie zu gutgläubig gewesen waren. Nun änderte sich die Szene. Die bisher frommen, andächtigen, jetzt aber enttäuschten Bauern schmähten ihren Pfarrer, rissen ihn von der Kanzel, banden ihn mit Stricken und schleppten ihn nach Wittenberg vor Gericht. Die Obrigkeit besänftigte die Bauern, Stifel aber wurde seines Postens enthoben.



Wer war nun dieser *Stifel*? Ein Narr, ein Betrüger? Nein, weder das eine noch das andere. Er war ein Gelehrter, ein Mathematiker, sogar einer der bedeutendsten jenes Jahrhunderts. Er war aber auch ein Kind seiner Zeit, angefüllt mit den Gedanken der Mystik und der Renaissance. Sein Lebensweg zeigt ihn als eine kraftvolle Persönlichkeit. Mutig und unerschrocken vertritt er seine Überzeugung, Rückschläge können ihn nicht erschüttern, Anfeindungen bietet er trotzig die Stirn.

1487 in Eßlingen geboren, tritt er in jungen Jahren in die dortige Niederlassung des Augustinerordens ein. Mit Berechnungen der kirchlichen Feiertage beauftragt, entdeckt er seine Liebe zur Mathematik, der er sein ganzes Leben lang treu bleibt. Als Luthers revolutionäre Gedanken in sein Kloster dringen, verschreibt er sich ihnen mit Feuereifer. 1519 veröffentlicht er eine Streitschrift zur Unterstützung der neuen Lehre, der bald weitere folgen. Weil er sich auch weigert, von Beichtenden den „Sündzoll" zu verlangen, muß er das Kloster verlassen. Die nächsten Jahre verbringt er als Prediger der neuen Lehre in Kronberg/Taunus, beim Grafen von Mansfeld und in Oberösterreich. 1528 verschafft ihm Luther eine Pfarrstelle in Lochau, wo er ihn mit der Witwe seines Vorgängers traut. Über die Lochauer Zeit berichtet *Stifel* später: „Da ich ein müsiges leben füret, bracht mich fürwitz darein, so heftig, das ich davon ein büchlein lies ausgehen. Und rechnet ungeschickt und ungereimet Ding, so lang, bis ich die Zalen Danielis misbrauchet, zu erforschen Tag und stund der letzten Zeit." Wie das Ganze 1533 ausging, wissen wir. In Wittenberg hatte *Stifel* nun Zeit, seine Torheit zu bereuen. Gleichzeitig benutzte er die günstige Gelegenheit, an der dortigen Universität mathematische Studien zu treiben. 1534 verschafft ihm Melanchthon eine neue Stelle: er wird Pfarrer in Holzdorf bei Falkenberg/Elster, wo er sich noch besser steht als zuvor.

Hier setzt er in seinen freien Stunden das Studium der Mathematik fort. Die Resultate seines Fleißes waren 3 Werke: „arithmetica integra", sein Hauptwerk, erschien 1544, „Deutsche Arithmetica", ein Buch für Laien, erschien 1545, „Rechenbuch von der wälschen und deutschen Practic", erschien 1546. 1547 unterlag das Heer der protestantischen Fürsten den Kaiserlichen bei Mühlberg. Dadurch wurde eine weitere fruchtbare Entwicklung unterbrochen. *Stifel* und die Seinen wurden vertrieben, wieder beginnt ein unstetes Wanderleben. Die erste Zuflucht findet er in Frankfurt/Oder. 1548 bis 1550 soll er in Jena am Pädagogikum, einer Art Vorstudienanstalt, Mathematik unterrichtet haben. 1551 ist ein Aufenthalt in Holzdorf bezeugt. Ab 1552 weilt er in Ostpreußen, erst in Memel, dann in Eichholz und zuletzt in Haberstro als Pfarrer. Befreit von materiellen Sorgen kann er sich wieder mit Mathematik beschäftigen. Er arbeitet an einer Neu-Herausgabe der „Coß" von Rudolff, die 1553 beendet werden kann. Er bereitet eine zweite Auflage vor, die als Anhang seine „Geistliche Arithmetik" enthält. Seine Neigung zu mystischen Zahlenspielereien erwacht wieder, ohne allerdings das Lochauer Format zu erreichen. Dafür wird er aber in Glaubensstreitigkeiten verwickelt, die ihm den Aufenthalt in Ostpreußen verleiden. Er kehrt nach Sachsen-Anhalt zurück. 1557 finden wir ihn als Pfarrer in Brück bei Belzig. Von dort wird er als Professor der Mathematik 1558 nach Jena berufen. Hier hält er Vorlesungen über die „Elemente" des Euklid und über Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen. Wieder wird er in Glaubensstreitigkeiten verwickelt. Vier Professoren der Theologie spielen sich hier als Religionswächter auf, jeder, der es nicht mit ihnen hielt, wurde verketzert, verfolgt und von der Kanzel aus geschmäht. So auch *Michael Stifel*. Die Unruhe legte sich erst, als die Flacianer Jena verlassen mußten. Die Ruhe konnte *Stifel* nicht lange genießen. 1564 trat er in den wohlverdienten Ruhestand, und am 19. 4. 1567 starb er in Jena, auf den Tag genau 80 Jahre alt.

Über die Bedeutung Michael Stifels: Der Anfang des 16. Jh. war für die Entwicklung der Mathematik sehr günstig. Die Renaissance mit ihrer Wiederbelebung des klassischen Altertums, die Erfindung des Bücherdrucks, die Entdeckungen ferner Länder und das Aufblühen von Handel und Verkehr, das alles waren günstige Faktoren. Die „Rechenmeister" befriedigten ein wirklich vorhandenes Bedürfnis, als sie Rechenbücher in deutscher Sprache erscheinen ließen. Natürlich berücksichtigten sie darin hauptsächlich kaufmännische und häusliche Rechnungen.

Das einmalige Verdienst *Michael Stifels* besteht nun darin, daß er neben einer gründlichen Behandlung der „Rechenkunst" auch Gebiete der theoretischen Mathematik erfolgreich bearbeitete, während der andere große „Rechenmeister“ jener Zeit, *Adam Ries*, nur Bekanntes in verständlichere Form brachte. Schöpferisch stellte und löste er Aufgaben, die bis dahin so gut wie unberührt waren. Er gilt als der erste große Zahlentheoretiker. Daß er auch für das praktische Rechnen Verbesserungen fand, ist allgemein bekannt. So räumte er unter dem Althergebrachten kräftig auf: Das *Duplieren* und *Medieren* (Verdoppeln und Halbieren) wertet er nicht wie die meisten seiner Zeitgenossen als besondere Rechenarten, sondern als Spezialfälle des Multiplizierens und Dividierens. Die zahllosen einzelnen Regeln der Coß-Rechnung bezeichnete er als „Menschenquälerei“ und ersetzte sie durch eine einzige Vorschrift. Er beschäftigte sich als erster Europäer mit negativen Zahlen. Für die Division eines Bruches durch einen Bruch schlug er die Multiplikation mit dem Kehrwert vor, bisher wurden derartige Aufgaben umständlich über gleichnamig gemachte Brüche gelöst.

Bemerkenswert ist *Stifels* Tabelle der Binomialkoeffizienten:

1					
2					
3	3				
4	6				
5	10	10			
6	15	20			
7	21	35	35		
8	28	56	70		
9	36	84	126	126	
10	45	120	210	252	usw.

in der „arithmetica integra“ fortgesetzt bis 17 136 680 2380 61868 12376 19448 24310

In seinem Hauptwerk „a. i.“ beschäftigt sich *Stifel* ausführlich mit den Progressionen (Zahlenfolgen und Reihen). Dabei gelang ihm seine wertvollste Entdeckung:

Die Gegenüberstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Zahlenfolge

. . . 0 1 2 3 4 5 6 . . .

. . . 1 2 4 8 16 32 64 . . .

enthält den Kern einer Logarithmentafel zur Basis 2. *Stifel* war sich der Bedeutung dieser Entdeckung bewußt. Er sagte dazu: „Es könnte hier ein ganzes Buch über die Wunder der Zahlen geschrieben werden. Aber ich muß mich bescheiden und mit geschlossenen Augen davon gehen. Ich will aber eins über das Vorhergehende wiederholen, damit man nicht sagen kann, ich hätte mich vergeblich auf diesem Gebiete betätigt. Was in der geometrischen Reihe irgendwie durch Multiplikation und Division geschieht, das wird entsprechend durch Addition und Subtraktion in der arithmetischen Reihe vorgenommen.“

Zahlenbeispiele ($64 \cdot \frac{1}{8}$ sowie $64 : \frac{1}{8}$) verdeutlichen das Gesagte.

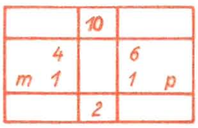
Interessant sind *Stifels* Erkenntnisse über figurierte Zahlen (Näheres über diese Zahlen in Kordemskis „Köpfchen, Köpfchen“). Er beschäftigte sich mit Dreieckszahlen und verwendete sie zur Deutung von Bibelsprüchen.

Eine etwas größere Bedeutung hat eine weitere Spielerei *Stifels*, die Beschäftigung mit sogenannten Zauberquadraten. Die Herstellung eines solchen Quadrats besteht darin, die Zahlen von 1 bis n^2 in die Zellen eines Quadrates mit n Zellen an der Seite so zu verteilen, daß alle Reihen von oben nach unten, von links nach rechts und in der Richtung der Diagonalen ein und dieselbe Summe geben. *Stifel* stellte nicht nur selbst viele solcher Quadrate zusammen, dabei eins mit $n = 16$, er entwickelte sogar einen Schlüssel für die Verteilung der Zahlen sowohl für ein gerades wie ein ungerades n.

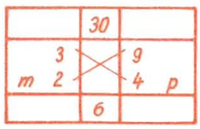
Amüsiert verfolgen wir die Art und Weise, wie *Stifel* mit Hilfe der „regula falsi“ Aufgaben löst, die heute von einem Schüler in wenigen Zeilen erledigt werden.

1. Beispiel: Es soll die Zahl gesucht werden, die um 2 vermindert 3 als Rest gibt.

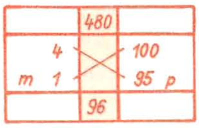
Stifels Weg: Gesetzt, man nähme an Stelle jener unbekannten Zahl 4 an, so bliebe als Rest 2 statt 3, also 1 zu wenig. Nähme man 6 an, so bliebe als Rest 4, also 1 zuviel (siehe Figur 1). Die gesuchte Zahl würde man dann erhalten, wenn man die Summe der genannten Zahlen durch die Summe der Fehler, von denen der eine positiv, der andere negativ ist, dividiert. Ergebnis 10 : 2 = 5.



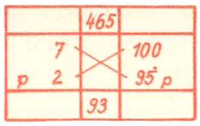
Figur 1



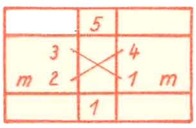
Figur 2



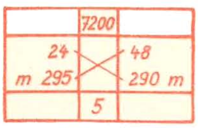
Figur 3



Figur 4



Figur 5

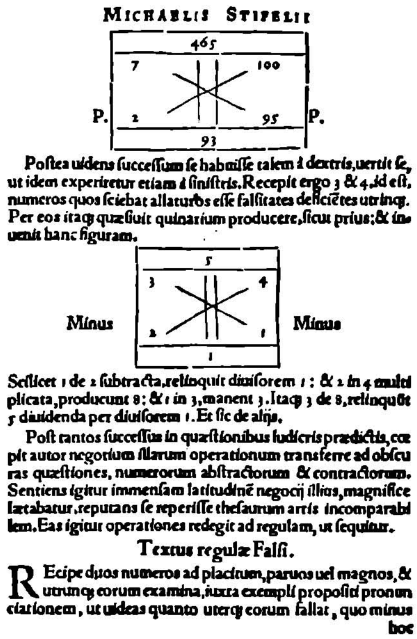


Figur 6

Würden die beiden Zahlen 3 und 9 als „numeri falsi“ angenommen, so würde durch die Division der Summe dieser Zahlen durch die Summe der erhaltenen Fehler nicht die richtige Zahl gefunden, wohl aber durch die Division der Summe aus den Produkten der übers Kreuz multiplizierten angenommenen Zahlen durch die Summe der Fehler (Figur 2). *Stifel* erkannte nicht, daß die erste Regel überflüssig ist!

Das gleiche Ergebnis bringen die „numeri falsi“ 4 und 100 (Figur 3).

In den bisherigen Fällen war die eine angenommene Zahl kleiner, die andere größer als die gesuchte. Werden beide Zahlen größer (oder kleiner) angenommen als die gesuchte, so sind beide Fehler positiv (bzw. negativ),


MICHAELIS STIFELII

Postea uidens successum se habuisse talem à dextris, uertit se, ut idem experiretur etiam à sinistris. Recepit ergo 3 & 4, id est, numeros quos sciebat allaturos esse falsitates deficiẽtes utrinq;. Per eos itaq; quæsiuit quinarium producere, sicut prius; & inuenit hanc figuram.

Scilicet 1 de 2 subtracta, relinquit diuisorem 1: & 2 in 4 multiplicata, producunt 8; & 1 in 3, manent 3. Itaq; 3 de 8, relinquűt 5 diuidenda per diuisorem 1. Et sic de alijs.

Post tantos successus in quæstionibus ludicris prædictis, cœpit autor negotium illarum operationum transferre ad obscuras quæstiones, numerorum abstractorum & contractorum. Sentiens igitur immensam latitudinẽ negocij illius, magnifice lætabatur, reputans se reperisse thesaurum artis incomparabilem. Eas igitur operationes redegit ad regulam, ut sequitur.

Textus regulæ Falsi.

Recipe duos numeros ad placitum, paruos uel magnos, & utrunq; eorum examina, iuxta exempli propositi pronunciationem, ut uideas quanto uterq; eorum fallat, quo minus

hoc

und die gesuchte Zahl findet man durch die Division der Differenz jener Produkte durch die Differenz der Fehler (siehe Figur 4 und 5).

Einem Schüler der 8. Klasse müßte es möglich sein, die hier verwendete Gesetzmäßigkeit aufzuspüren!

Du glaubst, die „regula falsi“ hälfe nur bei so einfachen Aufgaben? Was meinst du zu dem folgenden Problem:

2. Beispiel: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte, vermindert um ein Drittel und ein Viertel derselben, gleich 300 ist. Die Figur 6 zeigt *Stifels* Lösung. Kommst du zurecht?

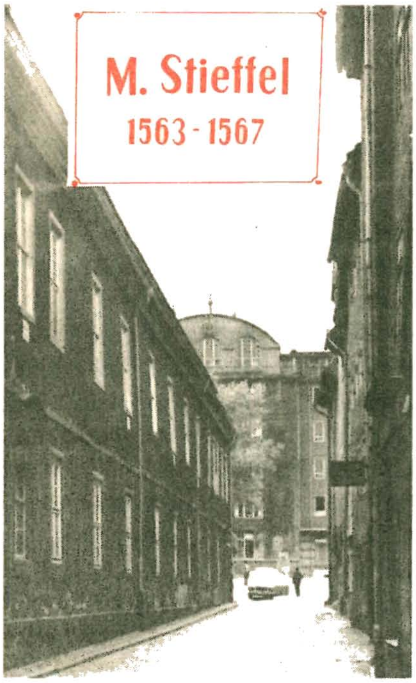
3. Beispiel: Es werden 3 Zahlen gesucht nach den Bestimmungen:

$$x + 73 = 2(y + z)$$
$$y + 73 = 3(x + z)$$
$$z + 73 = 4(x + y)$$

4. Beispiel: Gesucht sind 2 Zahlen. Ihr Verhältnis ist $1\frac{1}{2}$, miteinander multipliziert geben sie 864.

Jetzt streike ich aber; die Lösung nach *Stifel* ist derart umständlich, daß ich lieber meine Kenntnisse aus der 9. Klasse hervorkrame und die beiden letzten Aufgaben fast im Handumdrehen gelöst habe.

Die Leistung *Stifels* ist um so höher zu werten, als er Autodidakt war, der sein Wissen nur aus den damaligen Lehrbüchern gewonnen hatte. Während die Bücher von *Adam Ries* bis zu 30 Auflagen erlebten, fanden die Werke *Stifels* nur geringe Verbreitung und nur eine schlichte Tafel zeugt von seinem Wirken in Jena (vgl. Abb.). Zeugnis für diese geringe Wertschätzung sind auch verschiedene Anekdoten, die über sein Wirken in Jena kursieren. So soll der Professor der Mathematik in Jena auf der Straße vor seinen Studenten höflich das Käppchen gezogen haben. Sicherlich scheinen seine finanziellen Umstände die Ursache für diese Höflichkeit gewesen sein, erhielt er doch jährlich ein Gehalt von nur 60 Gulden. Er war also auf die Hörergebühren angewiesen. Die gleiche Veranlassung mag ihn auch bewogen haben, am Ende jeder Vorlesung die anwesenden Studenten zu fragen,



ob er auch am nächsten Tag mit ihrem Besuch rechnen dürfe. Eine Respektsperson scheint er nicht gewesen zu sein, man hat ihn wegen seiner Lochauer Prophezeihung immer etwas über die Schulter angesehen und belächelt. Wittenberger Studenten waren die Schöpfer und Jenaer Studenten willige Interpreten des seither bekannten Liedes:

Stifel muß sterben, ist noch so jung, jung, jung,
Stifel muß sterben, ist noch so jung.
Wenn das der Absatz wüßt, daß Stifel sterben muß,
er tät sich grämen bis in den Tod.

J. Schwarz

Quellen: Krbek: „Eingefangenes Unendlich“,
Giesing: „Stifels arithmetica integra“,
Treutlein: „Das Rechnen im 16. Jh.“,
Strobel: „Nachricht von M. Stifels Leben und Schriften“,
Fricke: Manuskript über „Entwicklung der Math. in Jena“,
ADB (Allgemeine Deutsche Biographien),
Stier: Manuskript „Lebensskizzen der Professoren an der Univ. Jena“

Alexander Ossipowitsch Gelfond

Alexander Ossipowitsch Gelfond wurde am 24. (11.) Oktober 1906 als Sohn eines Arztes zu Petersburg geboren und starb am 7. November 1968 in Moskau. Er begann sein Studium an der Moskauer Universität im Jahre 1924 und beendete es 1927. Seine Aspirantur war 1930 beendet; seit 1931 arbeitete er als Professor an der Moskauer Universität, seit 1933 auch am Steklow-Institut (Mathematischen Institut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR).

Der wissenschaftliche Grad eines Doktors der physikalisch-mathematischen Wissenschaften wurde Gelfond 1935 verliehen. 1939 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR gewählt. Seit 1968 war er korrespondierendes Mitglied der Union Internationale d'Histoire des Sciences in Paris.

Gelfond war außerdem verantwortlicher Redakteur des Sammelbandes von Übersetzungen „Matematika“ und Redaktionsmitglied der internationalen Zeitschrift über Zahlentheorie „Acta arithmetica“. A. O. Gelfond wurde ausgezeichnet mit dem Leninorden, mit drei Rot-Banner-Orden und mit Medaillen.

Die Mathematik hat einen schweren Verlust erlitten. Im Alter von 62 Jahren, noch auf der Höhe seiner Schaffenskraft, verstarb Alexander Ossipowitsch Gelfond, einer der hervorragendsten und originellsten Mathematiker unserer Zeit, Autor von mehr als hundert Zeitschriftenartikeln und mehreren Büchern über Zahlentheorie und Analysis.

Das hervorragende Talent Alexander Ossipowitschs zeigte sich schon bei seinen ersten Schritten auf dem Gebiet der Mathematik. Nachdem er sein Studium an der Moskauer Universität im Jahre 1927 beendet hatte, machte er sich schon 1934 durch seine Lösung des 7. Hilbertschen Problems in der ganzen Welt einen Namen. Sein mathematisches Talent bestach vor allem durch seine Originalität. Viele hervorragende Mathematiker denken beispielsweise in denselben ausgefahrenen Bahnen wie die weniger hervorragenden Mathematiker, nur schneller und zielstrebiger. Aber A. O. Gelfond dachte stets auf seine Art. Sein Geist fand ungewöhnliche, völlig neue Wege. Gerade deshalb werden seine bedeutenden Arbeiten noch auf lange Zeit Gegenstand aufmerksamen Studiums bleiben. Die von Gelfond an der Moskauer Universität durchgeführten Seminare zeichneten sich durch große wissenschaftliche Fruchtbarkeit aus. Bei der Arbeit der Seminare über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (1935—1937 zusammen mit W. L. Gontscharow, 1945 bis 1946 zusammen mit M. W. Keldysch) entstand eine neue Richtung — die Interpolation ganzer Funktionen. Das Seminar am Lehrstuhl für Zahlentheorie, den Gelfond mehr als 30 Jahre innehatte, wurde zu einem Zentrum der Zahlentheorie in der SU, zu dem Wissenschaftler aus der ganzen SU und anderen Ländern mit Vorträgen kamen.

Viel Zeit und Kraft widmete A. O. der Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses, wobei er Takt und Güte offenbarte. Selbst von hervorragender Individualität, schätzte er die Individualität seiner Schüler. Er zwang niemandem seine Ansichten und seinen Geschmack auf, und er verstand es, ihnen seine Treue zur Wissenschaft weiterzugeben.

Die Begabung Gelfonds äußerte sich nicht nur in der Mathematik. Er war ein ausgezeichneter Kenner des Schachspiels, der Literatur, der Mineralogie und der Geschichte der Naturwissenschaften. Der persönliche Umgang mit ihm war sehr interessant, und er gewann schnell die Freundschaft und das Vertrauen seiner Mitmenschen. Hätte er seine Memoiren geschrieben, sie wären ein interessantes historisches Dokument gewesen. Aber er erreichte nicht das Alter, in dem man Memoiren schreibt.

Sowohl seine Schüler als auch seine Freunde werden sich ihr ganzes Leben lang an diesen talentierten, klugen und bezaubernden Menschen erinnern. Er bleibt für sie stets das Vorbild des modernen Wissenschaftlers. Die Arbeiten Gelfonds werden immer einen würdigen Platz unter den Werken des mathematischen Geistesschaffens einnehmen.

M. A. Ewgrafow
N. M. Korobow
J. W. Linnik
I. I. Pjatezki-Schapiro
N. I. Feldmann

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

Teil 6

1.6. Das Rechenkomma

Bisher haben wir vorwiegend von ganzen Zahlen gesprochen und nur gelegentlich auf Brüche, zum Beispiel Dezimalbrüche, hingewiesen. Das darf nicht so verstanden werden, daß etwa in der Rechenpraxis die Brüche eine geringe Rolle spielen. Im Gegenteil: die meisten praktischen Probleme führen auf nichtganzzahlige Rechengrößen, so daß den Brüchen — im Falle direktverschlüsselter Dezimalzahlen den Dezimalbrüchen — eine hohe Bedeutung zukommt. Daraus ergibt sich die Frage, wie das Komma einer Zahl rechentechnisch zu realisieren und zu berücksichtigen ist.

1.6.1. Die kommafreie Darstellung einer Zahl

Beim Arbeiten mit dem Rechenstab sind wir daran gewöhnt, zunächst nur die Ziffernfolge der verwendeten Zahlen und nicht deren Komma zu berücksichtigen, so daß die Einstellung am Rechenstab zum Beispiel bei den Aufgaben 17,3 · 0,246 und 1730 · 24,6 genau die gleiche ist. Die Stellung des Kommas im Ergebnis wird gesondert durch einen Überschlag ermittelt. Ebenso, also *kommafrei*, arbeiten Handrechenmaschinen und auch elektronische Tischrechner, so daß man die Stellung des Kommas während des Rechnens gesondert zu überwachen, gewissermaßen das Komma in Gedanken zu markieren hat.

Bei der kommafreien Darstellung einer Zahl legt man sich zweckmäßig je nach Umfang der Rechenanlage auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen fest. Im Falle einer achtstelligen Darstellung sieht das dann so aus:

473,015	00473015
8261,4987	82614987
0,00023	00000023.

Die letzte Stelle rechts ist also — ohne Rücksicht auf das Komma — zugleich die letzte von 0 verschiedenen Ziffer der Dezimalzahl. Die Überwachung des Kommas beim Rechnen mit derartigen Ziffernfolgen ist bei der Multiplikation und Division leicht. Bei der Addition und Subtraktion muß man aber — entsprechend der Forderung „Komma unter Komma" — die Zahlen gegeneinander verschieben, wodurch eventuell der verfügbare Stellenbereich rechts oder links überschritten wird und Rundungen nötig sind. Bei umfangreicheren Programmen wird es oft schwierig, den Einfluß des Kommas auf das Rechenergebnis richtig einzuschätzen, so daß man bei größeren Anlagen das Komma gleich in den rechentechnischen Ablauf einbezieht.

1.6.2. Die Festkommadarstellung

Bei einem im Festkommabetrieb arbeitenden Automaten ist das Komma an einer bestimmten Stelle in der Maschine fest installiert. Dabei sind im wesentlichen — je nach dem Typ des Rechners — zwei verschiedene Festlegungen üblich:

Entweder: (1) Man setzt das Komma *vor die höchste Stelle*, so daß nur Zahlen, deren Betrag kleiner als 1 ist, dargestellt werden können. Beispiel:

$$0{,}07352711 \longrightarrow 07352711$$

Oder: (2) Man setzt das Komma *hinter die niedrigste Stelle*, kann also nur ganze Zahlen darstellen. Dann stellt die gleiche Ziffernfolge wie oben einen völlig anderen Zahlenwert dar:

$$7352711 \longrightarrow 07352711.$$

(In beiden Fällen wurde ein achtstellig arbeitender Automat vorausgesetzt.)

Festkommadarstellungen haben den Nachteil, daß beim Programmieren durch Wahl eines geeigneten *Maßstabes*, das heißt durch Multiplikation mit einem Faktor, alle an der Rechnung beteiligten Zahlen in den zulässigen Bereich gebracht werden müssen.

Beispiel: Die Aufgabe

$$\begin{array}{r} 4720{,}00 \\ +\ \ 17{,}85 \\ \hline 4737{,}85 \end{array}$$

würde bei (1) den Maßstabsfaktor $k_1 = 0{,}0001$ erfordern.

$$\begin{array}{r} 0{,}472000 \\ +0{,}001785 \\ \hline 0{,}473785 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 47200000 \\ +00178500 \\ \hline 47378500 \end{array}$$

Das Automatenergebnis ist dann von Hand mit $\frac{1}{k_1} = 10000$ zu multiplizieren. Bei einem Rechner des Typs (2) wäre $k_2 = 100$.

$$\begin{array}{r} 472000 \\ +\ \ 1785 \\ \hline 473785 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 00472000 \\ +00001785 \\ \hline 00473785. \end{array}$$

Der Korrekturfaktor ist hier $\frac{1}{k_2} = 0{,}01$.

Mit einer Aufgabe wollen wir diesen Beitrag schließen:

▲ Aufgabe: Welche Ziffernfolgen erscheinen bei beiden Automatentypen (achtstelliger Betrieb) bei der Subtraktion

$$0{,}40017 - 139{,}204\ ?$$

J. Frormann

alpha berichtet

Meuselwitz Vorbildliche Jahresarbeit
Die Schüler *R. Raupach* und *Th. Weber*, EOS „Friedrich Engels", bildeten ein Redaktionskollektiv, welches sich verpflichtete, monatlich eine Mathematikwandzeitung herzustellen.
Themen: Rechenmaschinen — Entwicklung der Zahl π — Mathematische Größen — Berühmte Mathematiker — Ferienknobeleien — Hohe Leistungen zu Ehren der DDR.
Gleichzeitig veröffentlichten sie „Eine Aufgabe des Monats". Ihre in einem Jahr gesammelten Erfahrungen faßten sie in einer Mappe zusammen unter dem Motto: „Gestaltung einer Mathematikwandzeitung".

Berlin Erfolgreiche Junge Physiker
In der Zeit vom 22. 6. bis 2. 7. 1969 nahm eine DDR-Mannschaft unter Leitung von Dozent Dr. *J. Wendt* an der III. Internationalen Physikolympiade in Brno teil. An der Olympiade waren 8 Länder mit jeweils fünf Schülern beteiligt. Die DDR-Teilnehmer schnitten im XX. Jahr der DDR erfolgreich ab:
Wolfgang Pilz (12. Kl.), EOS „M. A. Nexö" Dresden,
I. Preis 48/48 Pkt.
Klemens Müller (12. Kl.), EOS „H. Hertz" Berlin,
II. Preis 44/48 Pkt.
Joachim Loose (12. Kl.), EOS Kleinmachnow,
III. Preis 37/48 Pkt.
Joachim Bergmann (12. Kl.), EOS Jena,
III. Preis 36/48 Pkt.
Michael Josch (11. Kl.), EOS Kleinmachnow,
Belobigung 30/48 Pkt.
Es wurden 5 Aufgaben gestellt:
1. Tag (5 Stunden Arbeitszeit): 4 Aufgaben
2. Tag (5 Stunden Arbeitszeit): Laboraufgabe
Die Mannschaft der DDR war auf einem Trainingslehrgang im Mai 1969 in der Sektion Mathematik-Physik des Pädagogischen Instituts Güstrow ausgewählt worden.
Interessierte Schüler können sich zur weiteren Förderung unter Angabe ihrer Adresse, Klassenstufe, Schule und Adresse des betreuenden Physiklehrers an die Sektion Mathematik-Physik, Päd. Institut Güstrow, 26 Güstrow, Goldberger Straße 12, wenden. Ihnen wird außerdem der Bezug der physikalischen Schülerzeitschrift *Impuls* empfohlen (Physikalisches Institut der Universität Jena, 69 Jena, Max-Wien-Platz 1, Redaktion *Impuls*).

Im Bezirk Gera werden in den Winter- und Sommerferien regelmäßig Mathematiklager durchgeführt. Sie wurden auf Initiative einiger Mathematikstudenten der Universität Jena ins Leben gerufen. Ziel ist, begabte und interessierte Schüler an neue Gebiete der Mathematik heranzuführen und ihnen damit eine Grundlage für selbständige Arbeit zu geben. Das fachliche Programm hat in jedem Lager einen anderen Inhalt.
Die traditionellen Lagerolympiaden beweisen immer wieder, daß die Schüler den Stoff recht gut verstanden haben.
Allen Teilnehmern soll auch geholfen werden, sich auf das Mathematikstudium vorzubereiten. Dazu werden in den Lagern Gespräche über Inhalt und Ablauf eines Mathematik-Lehrer bzw. Mathematik-Diplom-Studiums geführt. Prominente Gäste aus der Sektion der Universität helfen dabei und finden stets interessierte Zuhörer.
Von den etwa 70 teilnehmenden Schülern können wir viele als Stammgäste begrüßen. In unserem Betreuerkollektiv sind nicht wenige Studenten, die schon als Schüler in den Lagern weilten. Schüler und Studenten sind stets gemeinsam bei der Sache, wenn es gilt, interessante Veranstaltungen zu organisieren. Natürlich stehen auch Sportwettkämpfe, Wanderungen und Aussprachen über aktuelle Probleme auf unserem Programm. Daß Junge Mathematiker auch gern tanzen und sogar dichterische Fähigkeiten haben, bewiesen unsere Schüler an den Abschlußabenden, wo in netten Versen kritische und lobende Worte ausgesprochen wurden.
Mit diesem Beitrag wollten wir die Leser von *alpha* nicht nur informieren, sondern er soll auch Anregung sein, uns zu schreiben, welche Erfahrungen in anderen Bezirken bei der Gestaltung von Mathematiklagern gesammelt wurden. „Wurzel"-Kollektiv

Sektion Mathematik d. Friedrich-Schiller-Universität, Jena (69 Jena, Helmholtzweg 1)

alpha-Wettbewerb 1969 — Einsendungen von Lösungen

Klassenstufe 5

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	346	178	190	368	(—5)
	347	232	234	466	(—11)
2	370	230	236	466	(—10)
	371	188	171	359	(—8)
3	397	137	102	239	(—4)
	398	94	71	165	(—43)
zus.		1059	1004	2063	

Klassenstufe 6

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	350	251	281	532	(—3)
	351	159	154	313	(—8)
2	375	358	371	729	(—10)
	376	222	252	474	(—174)
3	400	203	169	372	(—10)
	401	153	131	284	(—14)
zus.		1346	1358	2704	

Klassenstufe 7

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	354	345	266	611	(—126)
	355	282	260	542	(—31)
2	380	234	202	436	(—49)
	381	249	206	455	(—25)
3	402	172	124	296	(—66)
	403	129	95	224	(—36)
zus.		1411	1153	2564	

Klassenstufe 8

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	358	204	173	377	(—239)
	359	186	169	355	(—194)
2	384	248	201	449	(—164)
	385	376	292	668	(—110)
3	404	147	78	225	(—21)
	405	83	47	130	(—76)
zus.		1244	960	2204	

Klassenstufe 9

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	362	182	108	290	(—11)
	363	128	63	191	(—13)
2	389	322	273	595	(—7)
	390	185	91	276	(—41)
3	406	72	24	96	(—1)
	407	95	24	119	(—37)
zus.		984	583	1567	

Klassenstufe 10/12

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
1	365	253	79	332	(—40)
	266	217	59	276	(—62)
2	393	51	17	68	(—36)
	394	172	44	216	(—46)
3	408	96	21	117	(—3)
	409	124	28	152	(—18)
zus.		913	248	1161	

Rechnen mit Resten Teil 4

Am Ende des vorigen Beitrags hatten wir uns die Frage nach der Ausführbarkeit der Division in Restklassenringen vorgelegt.

Im Restklassenring modulo 7 z. B. ist die Division durch eine von $\bar{0}$ verschiedene Restklasse immer ausführbar. An der Multiplikationstabelle (siehe Heft 5/69) kann man das daran ablesen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Restklasse genau einmal auftritt.

Diese Eigenschaft der (bis auf die bewußte Ausnahme $\bar{0}$) unbeschränkten und eindeutigen Umkehrbarkeit der Multiplikation hat aber nicht nur der Restklassenring modulo 7, sondern jeder Restklassenring, sofern nur sein Modul m eine Primzahl ist. Diese Restklassenringe mit Primzahlmodul sind also „noch etwas Besseres“ als der Ring der ganzen Zahlen, denn mit ganzen Zahlen ist ja die Division durchaus nicht immer ausführbar — das erreichen wir erst mit den rationalen Zahlen. Erst die rationalen Zahlen bilden nicht nur einen Ring, sondern sogar einen *Körper* — so nennt man nämlich Bereiche, in denen nicht nur die Ringgesetze gelten, die vielmehr außerdem noch die uneingeschränkte und eindeutige Umkehrung der Division gestatten (außer der Division durch das Nullelement freilich). Solche Körper sind also auch unsere Restklassenringe nach einem Primzahlmodul, und der „kleinste“ gewissermaßen ist der Restklassenring — oder Restklassenkörper, wie wir jetzt ja auch sagen können — modulo 2. Dieser winzige Bereich mit nur zwei Elementen kann also in gewissem Sinne als ein verkleinertes Modell des Körpers der rationalen Zahlen angesehen werden.

Warum ist nun diese Körpereigenschaft auf Restklassenringe mit Primzahlmoduln beschränkt? Dazu schauen wir uns am besten einen von den anderen Restklassenringen an, etwa den modulo 6. Sehen wir hier die Multiplikationstabelle durch (Aufg. A 6), so fällt uns zunächst auf, daß das Nullelement $\bar{0}$ nicht nur in der ersten Zeile bzw. Spalte auftritt. Es ist ja $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{0}$ und auch $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$. Das ist aber sogar schon ein wesentlicher Unterschied zum Ring der ganzen Zahlen, denn in ihm läßt sich ja daraus, daß ein Produkt $a \cdot b = 0$ ist, schließen, daß mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist. Im Gegensatz zum Ring der ganzen Zahlen ist also der Restklassenring modulo 6 „nicht nullteilfrei“. Es ist offensichtlich, daß die Eigenschaft der Nullteilerfreiheit auch den anderen Restklassenringen mit zusammengesetztem Modul m nicht zukommt. Denn ist etwa $m = m_1 \cdot m_2$, so ergibt immer $\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2 = \bar{0}$. Wer der Anregung der Aufgabe A 6 gefolgt ist und sich auch Multiplikationstabellen für $m = 10$ und $m = 24$ angelegt hat, der möge das an diesen Tabellen einmal untersuchen!

Damit ist nun aber auch klar, daß in den Zeilen bzw. Spalten der Tabelle, in denen gewissermaßen „zusätzlich“ $\bar{0}$ als Produkt auftritt, nun nicht mehr alle Restklassen vertreten sein können. Das heißt aber, daß die Division nicht unbeschränkt ausführbar sein kann. So sind beispielsweise im Restklassenring modulo 6 folgende Divisionen nicht ausführbar: $\bar{1} : \bar{2}$, $\bar{3} : \bar{2}$, $\bar{5} : \bar{2}$, $\bar{1} : \bar{3}$, $\bar{2} : \bar{3}$, $\bar{4} : \bar{3}$, $\bar{5} : \bar{3}$, $\bar{1} : \bar{4}$, $\bar{3} : \bar{4}$ und $\bar{5} : \bar{4}$. Wer Lust hat zu weiteren vergleichenden Betrachtungen, der versuche es doch einmal mit den folgenden Aufgaben:

▲ A 9 Im Ring der ganzen Zahlen wird die Zahl 1 oft auch als „neutrales Element der Multiplikation“ bezeichnet. Warum wohl? Gibt es auch in den Restklassenringen ein Element (d. h. eine Restklasse), das diese Rolle spielt?

▲ A 10 Der Ring der ganzen Zahlen wird „durch die Kleiner-Beziehung geordnet“. Diese Ordnung ist beispielsweise mit der Addition durch ein sogenanntes Monotoniegesetz verbunden, das besagt:
Aus $a < b$ folgt stets $a + c < b + c$ für alle c.
Ist es auch in einem Restklassenring möglich (beispielsweise im Restklassenring modulo 7), eine solche „mit der Addition verträgliche Ordnung“ einzuführen?

▲ A 11 Man stelle einmal die Divisionsaufgaben zusammen, die im Restklassenring modulo 10 (modulo 24) nicht lösbar sind.

5. Zur Sicherheit ——— und Schnelligkeit

Nach dem Bisherigen wird nun vielleicht mancher sagen: „Das Rechnen mit Kongruenzen und gar mit Restklassen mag ja für den Mathematiker recht interessant sein — hat es denn aber auch für das gewöhnliche Rechnen irgendeine Bedeutung?“ Diese Frage muß unbedingt bejaht werden. Zunächst einmal sind hier die sogenannten Teilbarkeitsregeln zu nennen, deren Bedeutung für das praktische Rechnen — etwa für das Kürzen von Brüchen — wohl niemand bestreiten wird. Diese Teilbarkeitsregeln ergeben sich aber aus den Sätzen über das Rechnen mit Kongruenzen.

Eine solche Teilbarkeitsregel sagt uns ja z. B., daß eine Zahl genau dann durch 4 teilbar ist, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden.

Diese Regel ergibt sich durch folgende Überlegung:

▲ B 9 Die Zahl, deren Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen ist, sei etwa $7834 = 78 \cdot 100 + 34$. Nach den Sätzen über das Rechnen mit Kongruenzen ist $78 \cdot 100 \equiv 0\,(4)$ wegen $100 \equiv 0\,(4)$; ferner ist $34 \equiv 2\,(4)$, also $7834 \equiv 0 + 2\,(4)$. 7834 ist also nicht durch 4 teilbar, läßt vielmehr bei Division durch 4 den Rest 2.

Wie man sieht, lassen sich diese Überlegungen sofort auf beliebige Zahlen a übertragen. Wenn die ziffernmäßige Darstellung der Zahl a in unserer üblichen Zahlenschreibweise, dem Dezimalsystem, $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ lautet (a also n-stellig ist), so bedeutet das ja

$a = a_n 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Dafür können wir aber auch schreiben

$$a = (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 100 + 1 a_1 \cdot 10 + a_0).$$

Wegen $100 \equiv 0\,(4)$ kommt es für die Teilbarkeit von a durch 4 aber allein auf das Restverhalten von $a_1 \cdot 10 + a_0$ an.

Wir sehen, daß wir auf diese Weise sogar eine noch „schärfere" Aussage als die oben formulierte Teilbarkeitsregel erhalten, nämlich:

Jede Zahl läßt bei Division durch 4 denselben Rest wie die von ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl.

In gleicher Weise erhalten wir durch Ausnutzen der Sätze über das Rechnen mit Kongruenzen auch die Teilbarkeitsregeln für 2 und 8, 5, 25 und 125, und auch diese Teilbarkeitsregeln lassen sich so wie die Teilbarkeitsregeln für 4 „verschärfen". Dasselbe gilt für die — allerdings ein klein wenig anders herzuleitenden — Teilbarkeitsregeln für 3 und 9. Bei 9 lautet die schärfere Aussage z. B.:

Jede Zahl läßt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme.

Zur Herleitung dieses Satzes ist lediglich noch zu beachten, daß für alle Potenzen von 10 wegen $10 \equiv 1\,(9)$ gilt $10^n \equiv 1\,(9)$. Für die Teilbarkeit durch 11 muß beachtet werden, daß $10 \equiv -1\,(11)$ gilt. Mithin ist für alle geraden Potenzen $10^{2k} \equiv 1\,(11)$, für alle ungeraden $10^{2k+1} \equiv -1\,(11)$. Ein Beispiel soll verdeutlichen, wie man demnach bei der Untersuchung der Teilbarkeit durch 11 verfahren muß:

▲ B 10 2683 ist auf Teilbarkeit durch 11 zu untersuchen.

$2683 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$

Wegen $3 \equiv 3\,(11)$, $8 \cdot 10 \equiv -8\,(11)$,

$6 \cdot 10^2 \equiv 6\,(11)$ und $2 \cdot 10^3 \equiv -2\,(11)$ gilt

$2683 \equiv 3 - 8 + 6 - 2\,(11)$

2683 ist also nicht durch 11 teilbar, läßt vielmehr denselben Rest wie -1, also 10.

Man spricht hier aus naheliegenden Gründen von der „alternierenden Quersumme" oder auch von der „Querdifferenz". Beachtet man, daß die Einerstelle positiv genommen wird, so kann man formulieren:

Jede Zahl läßt bei der Division durch 11 denselben Rest wie ihre Querdifferenz. Insbesondere ist sie dann und nur dann durch 11 teilbar, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar ist.

Betrachten wir noch ein Beispiel für das bequeme Ermitteln der Querdifferenz:

▲ B 11 Welchen Elferrest hat 74 653 854 928?

Summe 38

$\dot{7}\ \underset{\cdot}{4}\ \dot{6}\ \underset{\cdot}{5}\ \dot{3}\ \underset{\cdot}{8}\ \dot{5}\ \underset{\cdot}{4}\ \dot{9}\ \underset{\cdot}{2}\ \dot{8} \qquad 38 - 23 = 15$

Summe 23

74 653 854 928 hat also denselben Elferrest wie 15, nämlich 4 (= 5 — 1).

Nun braucht man zwar für das Herleiten der Teilbarkeitsregeln das Rechnen mit Kongruenzen bzw. Restklassen, nicht aber für ihre Anwendung. Etwas anders ist das schon bei den Rechenproben. Es geht dabei um das schnelle Überprüfen von einfachen Rechnungen — Additionen, Subtraktionen oder Multiplikationen. Eine Möglichkeit, solche Rechnungen zu überprüfen, besteht ja darin, sie einfach zu wiederholen. Dabei läuft man allerdings Gefahr, einen schon einmal gemachten Fehler zu wiederholen. Besser ist es schon, wenn man den Rechengang etwas verändert, etwa bei einer schriftlichen Addition von oben nach unten fortschreitend addiert, wenn man beim ersten Mal von unten nach oben vorgegangen ist. Freilich — ist die Anzahl der Summanden groß, so dauert das ziemlich lange, ebenso lange wie die ursprüngliche Rechnung. Eine andere Möglichkeit der Überprüfung besteht nun im Rechnen mit Restklassen. Was dabei vor sich geht, werden wir uns am Anfang unseres nächsten Beitrags anhand eines Beispiels klarmachen.

G. Lorenz

Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich ... nicht von der Wahrheit, sondern es kommt ihr näher. Die Abstraktion der Materie, des Naturgesetzes, die Abstraktion des Wertes usw., mit einem Wort alle wissenschaftlichen ... Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, genauer, vollständiger wider.

Lenin: Aus dem philosophischen Nachla

Mitglieder des *alpha*-Clubs der 29. OS überreichten der Kosmonautin V. Tereschkowa in Leipzig (13. 10. 1969) eine Grußadresse

Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen

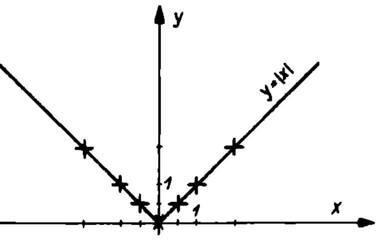


Abb. 1

Wir wiederholen:
Im Mathematikunterricht der Klasse 7 lernen wir:

Definition 1: Der absolute Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a ist für $a \geqq 0$[1] erklärt als $|a| = a$ und für $a \leqq 0$[1] erklärt als $|a| = -a$.

Welche Zahl stellt nach Definition 1 $|x-2|$ dar, wenn x eine reelle Zahl ist? Für $|x-2| \geqq 0$[2] gilt $|x-2| = x-2$ und für $x-2<0$[2] gilt $|x-2| = -(x-2) = -x+2$.

Aus dem Mathematikunterricht der Klasse 8 sind uns die Begriffe Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich sowie Funktionsgleichung bekannt. Wir wissen insbesondere: *Eine Funktion ist eindeutig bestimmt durch das Angeben der (expliziten) Funktionsgleichung und des Definitionsbereiches*[3]. So ist z. B. durch die Funktionsgleichung $y = |x|$ und der Menge Re der reellen Zahlen als Definitionsbereich eine Funktion erklärt. Für diese Funktion sollen zu einigen Zahlen des Definitionsbereiches die zugehörigen Zahlen des Wertebereiches in einer sogenannten Wertetabelle zusammengestellt werden:

x	y
0	$\|0\| = 0$
2	$\|2\| = 2$
-2	$\|-2\| = 2$
0,5	$\|0{,}5\| = 0{,}5$
$-0{,}5$	$\|-0{,}5\| = 0{,}5$
.	.
.	.

Mittels dieser Wertetabelle und der folgenden Definition können wir in einer mit einem kartesischen Koordinatensystem ausgestatteten Ebene einzelne Punkte des kartesischen Bildes von $y = |x|$ finden:

Definition 2: Das kartesische Bild einer Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ und dem Definitionsbereich $D \subsetneqq Re$ besteht aus allen Punkten der Ebene, deren kartesische Koordinaten $(x;\, y)$ der Funktionsgleichung $y = f(x)$ und der Bedingung $x \in D$ genügen.

Durch Ergänzen der Wertetabelle und Markieren der zugehörigen Punkte gelangen wir zu der Vermutung, daß das Bild von $y = |x|$ aus den beiden gezeichneten Strahlen besteht. Diese Vermutung läßt sich mit den anschließend vermittelten Kenntnissen leicht bestätigen. (siehe Abb. 1)

Zunächst soll hier noch ein Lehrsatz bereitgestellt werden, den wir im Mathematikunterricht der Klasse 8 kennenlernen:

Lehrsatz 1: Das kartesische Bild einer Funktion mit linearer Funktionsgleichung $y = mx + n$, wobei m und n jeweils festgewählte reelle Zahlen sind[3]*, ist eine Gerade.*

Wir wissen, daß auf Grund von Satz 1 das kartesische Bild von $y = \frac{3}{4}x - 2$ eine Gerade ist. Um diese Gerade zu zeichnen, genügt es, zwei ihrer Punkte zu kennen. Wir berechnen also zunächst mittels Funktionsgleichung die Koordinaten zweier Punkte der Geraden, wobei wir die Abszissen (x-Werte) zweckmäßig wählen:

x	y
0	$\frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$
4	$\frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$

Nunmehr haben wir noch die diesen Koordinatenpaaren entsprechenden Punkte in einer mit einem kartesischen Koordinatensystem ausgestatteten Ebene zu markieren und schließlich die Gerade durch beide Punkte zu zeichnen:

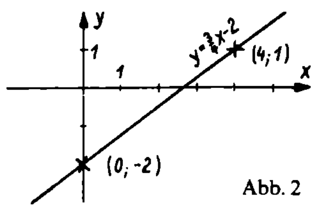


Abb. 2

Wir arbeiten gemeinsam: *Zu Funktionen mit gegebenen Funktionsgleichungen sind die kartesischen Bilder zu zeichnen.*

▲ Aufgabe 1: Zeichne das kartesische Bild der durch $y = |x+1| + \frac{x}{2} - 2$ erklärten Funktion![3]

Statt mit einer Wertetabelle zu operieren, mittels der wir ohnehin vom gesuchten kartesischen Bild nur endlich viele Punkte erhalten können, wollen wir durch Benutzen der Definition 1 und des Satzes 1 exakt den Gesamtverlauf des gesuchten kartesischen Bildes überblicken: Um für unsere Funktion eine Funktionsgleichung, in der kein Betragszeichen mehr vorkommt, zu erhalten, unterscheiden wir in Hinblick auf Definition 1 die Fälle $x + 1 \geqq 0$ und $x + 1 < 0$, d. h. $x \geqq -1$ und $x < -1$[4].

1. Fall:	2. Fall:
Es gelte $x \geqq -1$.	Es gelte $x < -1$.

Gemäß Definition 1 gilt ...

$\|x+1\| = x+1$.	$\|x+1\| = -(x+1)$.

Für die Gleichung unserer Funktion ergibt sich damit schrittweise:

$y = \|x+1\| + \frac{x}{2} - 2$	$y = \|x+1\| + \frac{x}{2} - 2$
$y = x+1 + \frac{x}{2} - 2$	$y = -(x+1) + \frac{x}{2} - 2$
$y = \frac{3}{2}x - 1$	$y = -\frac{x}{2} - 3$

Das kartesische Bild der durch $y = \frac{3}{2}x - 1$ für alle reellen Zahlen x erklärten Funktion ist gemäß Satz 1 eine Gerade. Da diese Funktionsgleichung jetzt nur für alle der Bedingungen $x \geqq -1$ genügenden reellen Zahlen zutreffend ist, gehört zum kartesischen Bild von $y = |x+1| + \frac{x}{2} - 2$ ein auf der zu $y = \frac{3}{2}x - 1$ gehörigen Geraden

[1] Das Gleichheitszeichen braucht nur in einem der beiden Fälle gesetzt zu werden.

[2] Die Ungleichung $x-2 \geqq 0$ ist äquivalent mit $x \geqq 2$ und $x-2<0$ ist äquivalent mit $x<2$. Dabei bedeutet „äquivalent", daß beide Ungleichungen beim Einsetzen einer reellen Zahl anstelle der Variablen x entweder gleichzeitig wahre oder gleichzeitig falsche Aussagen entstehen lassen. U. a. mittels der folgenden Umformungsregel kann die eine Ungleichung in die zu ihr äquivalente umgeformt werden: „Für beliebige reelle Zahlen a, b und c gilt: Aus $a<b$ folgt $a+c<b+c$."

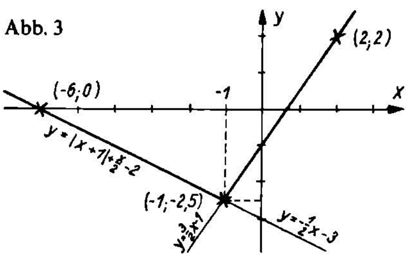
$x-2<0 \quad \mid +2$	$x<2 \quad \mid +(-2)$
$x-2+2<0+2$	$x+(-2)<2+(-2)$
$x<2$	$x-2<0$

[3] Ist der Definitionsbereich D einer Funktion mit der Funktionsgleichung $y=f(x)$ gleich der Menge Re aller reellen Zahlen x, so ist die Angabe des Definitionsbereiches D entbehrlich.

[4] Wir beachten Fußnote 2!

gelegener Strahl, dessen Anfangspunkt die Abszisse -1 hat. Außerdem gehört zum kartesischen Bild von $y = |x+1| + \frac{x}{2} - 2$ noch der Teil der zu $y = -\frac{x}{2} - 3$ gehörigen Geraden, dessen Punkte der Bedingung $x < -1$ genügende Abszissen haben:

Abb. 3



Aus der Zeichnung entnehmen wir, daß der Wertebereich dieser Funktion offenbar aus allen der Bedingungen $y \geqq -2{,}5$ genügenden reellen Zahlen besteht.

▲ Aufgabe 2: Zeichne das kartesische Bild der durch

$$y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1$$

erklärten Funktion![3)]

Auch für die Untersuchung des Verlaufs dieser Funktion wird es wieder vorteilhaft sein, eine Funktionsgleichung zu besitzen, in der kein Betragszeichen vorkommt. Dazu überlegen wir uns, daß für ...

$x+2 \geqq 0$,	$x+2<0$,
..., d. h. für ...	
$x \geqq -2$,	$x<-2$,
$\lvert x+2\rvert = x+2$	$\lvert x+2\rvert = -(x+2)$

... gilt.

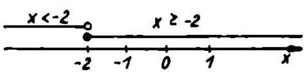


Abb. 4

Analog gilt für ...

$x-1 \geqq 0$,	$x-1<0$,
..., d. h. für ...	
$x \geqq 1$,	$x<1$,
$\lvert x-1\rvert = x-1$.	$\lvert x-1\rvert = -(x-1)$.

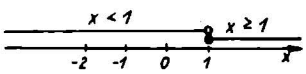


Abb. 5

Hiernach ist es naheliegend, den Definitionsbereich durch die Fallunterscheidung $x \geqq 1$, $-2 \leqq x < 1$ und $x < -2$ geeignet in paarweise elementfremden Teilmengen zu zerlegen.

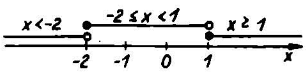


Abb. 6

Für $x \geqq 1$ gilt sowohl $|x+2| = x+2$ als auch $|x-1| = x-1$.

Hingegen gilt für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leqq x < 1$ zwar $x \mid x+2 \mid = x+2$ zwar $|x+2| = x+2$, aber $|x-1| = -(x-1)$.

Für $x < -2$ schließlich ist $|x+2| = -(x-2)$ und $|x-1| = -(x-1)$.

Damit ergibt sich aus

$$y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1$$

$$= -\frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(x-1) + x - 1 = x - \frac{5}{2}$$

für $-2 \leqq x < 1$

$$y = -\frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(x-1) + x - 1 = -\frac{3}{2}$$

und für $x < -2$

$$y = +\frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(x-1) + x - 1 = x + \frac{1}{2}.$$

Das kartesische Bild der Funktion

$$y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1^{3)}$$

besteht also aus drei Geradenstücken, die in den Punkten mit den Abszissen -2 und 1 „aneinandergeheftet" sind. Analog zum Vorgehen bei Aufgabe 1 kann die Aufgabe 2 ebenfalls vollständig gelöst werden.

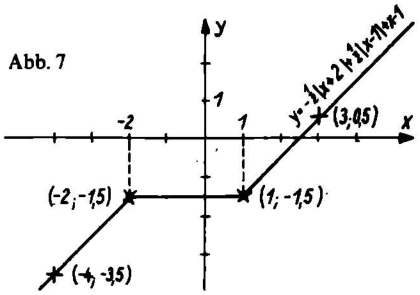
Wir wollen das Bild unserer Funktion jedoch auf einem anderen Weg gewinnen: Mit einiger Übung wird man von vornherein überblicken, daß das kartesische Bild der durch $y = -\frac{1}{2}|x+2| + \frac{1}{2}|x-1| + x - 1$ definierten Funktion[3)] aus drei Geradenstücken mit zwei Eckpunkten besteht, wobei die Abszissen der Eckpunkte -2 und 1 sind. Wer ganz exakt vorgehen will, beweist die folgende Aussage:

Lehrsatz 2: Die durch $y = a|x-x_1| + b|x-x_2| + cx + d$, *wobei* a, b, c, x_1 *und* x_2 *festgewählte reelle Zahlen sind, erklärte Funktion*[3)] *besitzt für* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *und* $x_1 \neq x_2$ *als kartesisches Bild einen aus drei Geradenstücken bestehenden Linienzug, dessen Eckpunkte die Abszissen* x_1 *und* x_2 *haben.*

Indem wir uns auf Satz 1 stützen, genügt zum Zeichnen des gesuchten kartesischen Bildes das Aufstellen einer Wertetabelle, in die neben den Abszissen der Eckpunkte noch zwei weitere Abszissen aufgenommen sind, deren eine größer und deren andere kleiner als die Abszissen der Eckpunkte ist.

x	y
-4	$-\frac{1}{2}\lvert -4+2\rvert + \frac{1}{2}\lvert -4-1\rvert + (-4) - 1 = -3{,}5$
-2	$-\frac{1}{2}\lvert -2+2\rvert + \frac{1}{2}\lvert -2-1\rvert + (-2) - 1 = -1{,}5$
1	$-\frac{1}{2}\lvert 1+2\rvert + \frac{1}{2}\lvert 1-1\rvert + 1 - 1 = -1{,}5$
3	$-\frac{1}{2}\lvert 3+2\rvert + \frac{1}{2}\lvert 3-1\rvert + 3 - 1 = 0{,}5$

Abb. 7



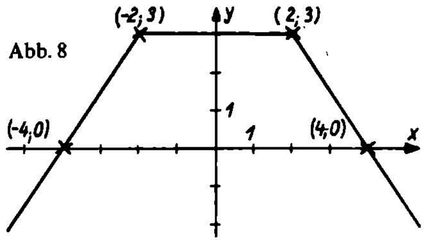
Die zu diesen Koordinaten gehörigen Punkte werden gezeichnet und in dieser Reihenfolge durch Geradenstücke verbunden. (Abb. 7) Am kartesischen Bild lesen wir ab, daß der Wertebereich dieser Funktion offenbar die Menge der reellen Zahlen ist.

Wir arbeiten selbständig:

▲ Aufgabe 3 (Klasse 8): Zeichne das kartesische Bild der durch $y = -|x+4| + \frac{1}{2}|x| + \frac{x}{2} + 1$ erklärten Funktion![3)]

▲ Aufgabe 4 (Klasse 9): Bestimme die Konstanten a, b, c, x_1 und x_2 in $y = a|x-x_1| + b|x-x_2| + cx + d$ so, daß die hierdurch erklärte Funktion[3)] das in der Zeichnung dargestellte kartesische Bild besitzt:

Abb. 8



Durch einen weiteren Beitrag werden wir Kenntnisse „Über Gleichungen mit absoluten Beträgen" erwerben. *W. Träger*

Wer schreibt für unsere Zeitschrift über die Möglichkeiten einer interessanten Gestaltung außerunterrichtlicher Arbeit im Mathematik-Fachkabinett seiner Schule? *alpha* erwartet zahlreiche Erfahrungsberichte.

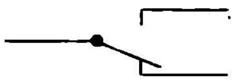
interscola

Unser Foto: Der Chefredakteur von *alpha* (im Bild rechts) beim Erfahrungsaustausch im Fachkabinett Mathematik der *interscola*, Herbstmesse 1969

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil.
Hans Rohleder

Direktor der Sektion
Rechentechnik und Datenverarbeitung
der Karl-Marx-Universität Leipzig

▲ 479 Ein Wechselschalter —

Symbol 

leitet einen von links kommenden elektrischen Strom je nach Schalterstellung zu einem der beiden nach rechts abgehenden Ausgänge. Handelsübliche Drehschalter für Treppenhausbeleuchtungen tragen 2 Wechselschalter, die gleichzeitig umgeschaltet werden (man zeichne diese jeweils übereinander).
Gesucht ist eine Schaltung zur Beleuchtung eines Treppenhauses mit 2 Polen, welche immer, wenn ein beliebiger Schalter umgeschaltet wird, ihre elektrische Eigenschaft (zwischen den Polen leitend bzw. nicht leitend zu sein) ändert. War sie also elektrisch leitend, so unterbricht sie durch Umschalten den Strom und umgekehrt.
Lest die folgende Hilfestellung nur, wenn ihr nach längerem Überlegen keine Lösung gefunden habt!

Hilfestellung: Man entwerfe eine Schaltung mit einem Eingang und zwei Ausgängen. Der eine Ausgang erhält den Strom zugeführt, wenn eine gerade Anzahl von Schaltern eingeschaltet ist. Ist eine ungerade Anzahl von Schaltern eingeschaltet, wird der Strom zum anderen Ausgang geleitet.
Die Sektion *Rechentechnik und Datenverarbeitung* unterstützt die Sektion *Mathematik* bei der Ausbildung von zukünftigen Diplom-Mathematikern, insbesondere ist sie für die Fach- und Spezialausbildung in der Fachrichtung Mathematische Kybernetik und Rechentechnik zuständig. Darüber hinaus führt sie die Ausbildung *aller* Studenten der KMU in EDV durch. Neben weiteren umfangreichen Aufgaben in der Forschung der nichtnumerischen Informationsverarbeitung unterstützt sie Praktiker vor allem in EDV sowie andere Sektionen der KMU und weiterer Einrichtungen in der Anwendung der Maschinellen Rechentechnik.

Berufsbild: Diplom-Mathematiker

Wir wollen uns heute in der Reihe der Berufsbilder mit den Voraussetzungen, dem Studiengang und den Einsatzmöglichkeiten eines Mathematikers beschäftigen, der an der ältesten Universität der DDR ausgebildet wird, an der *alma mater lipsiensis,* die sich unter dem verpflichtenden Namen Karl-Marx-Universität Leipzig zu einer der modernsten Bildungseinrichtungen unseres Hochschulwesens entwickelt hat.

Wer soll Mathematik studieren?

Ein Leser der Zeitschrift *alpha*, dem das Lösen mathematischer Aufgaben zu einem Bedürfnis geworden ist, der ständig an neuen Problemstellungen interessiert ist und mit Beharrlichkeit und Ausdauer auch kompliziertere Aufgaben zu meistern sucht, selbst wenn keine Prämiierung winkt, wer also den „lebendigen Drang nach Erkenntnis" in sich fühlt, mitgestalten möchte und nicht nur nach dem ansprechenden Gehalt und der angesehenen Stellung eines Mathematikers schielt, dem sei empfohlen, ein Mathematikstudium aufzunehmen.

Wer darf Mathematik studieren?

Jeder, der die Hochschulreife besitzt und gute Abiturnoten aufweisen kann.

Wo und woran arbeiten Mathematiker?

Noch vor 30 Jahren hätte man hierauf nur antworten können: in der Industrie an der Lösung ingenieurtechnischer Aufgaben und in Banken sowie Versicherungsanstalten an Renten- bzw. Versicherungssätzen.
Mathematiker findet man heute überall dort, wo Information erfaßt, gespeichert und verarbeitet wird, d.h. in allen Bereichen der modernen Gesellschaft. In der Industrie sitzen Mathematiker nicht mehr nur in den Büros für Forschung und Entwicklung, sondern arbeiten in zunehmendem Maße auch an technologischen und betriebswirtschaftlichen Aufgaben. Die Landwirtschaft ist das Feld des Agrarstatistikers. Optimale Erträge im Ackerbau und bei der Tierzucht erfordern die lenkende Hand des Mathematikers. In der Verwaltung und im Handel sind für die wissenschaftliche Vorbereitung von Leitungsentscheidungen Mathematiker unentbehrlich.
Darüber hinaus müssen die eigenständigen Bereiche genannt werden. Mathematiker arbeiten an der Aus- und Weiterbildung von Mathematikern und mathematikintensiven Berufsgruppen an Universitäten, Hoch- und Fachschulen sowie Betriebsakademien. Mathematiker bilden den wissenschaftlichen Stamm bei der Konstruktion und Entwicklung von Großrechenanlagen sowie beim Einsatz in Rechenzentren, wobei sie sowohl maschinen- als auch problemorientierte Aufgaben zu lösen haben.
Rechenzentren von Großbetrieben, VVB, der NVA usw. bilden Konzentrationspunkte von Mathematikern; ihre Anzahl und ihre Bedeutung wird in den nächsten Jahren in der DDR enorm wachsen.

Welche Spezialrichtungen gibt es in Leipzig?

a) Analysis
Die traditionelle Ausbildungsrichtung Analysis wird von denen gewählt, die später an technisch-physikalischen Problemen arbeiten wollen.
Nebenfach: Theoretische Physik

b) Mathematische Methoden der Operationsforschung
Diese Richtung ist für Spezialisten der Organisationswissenschaft bestimmt. Einsatzbereich: Industrie, Verkehr, Verwaltung.
Nebenfach: Ökonomie

c) Mathematische Kybernetik und Rechentechnik
Wer sich für Rechenautomaten interessiert und an ihrer Entwicklung mitarbeiten will, findet hier die sachgemäße Ausbildung.
Nebenfach: Technische Physik.

Wie ist der Studiengang?

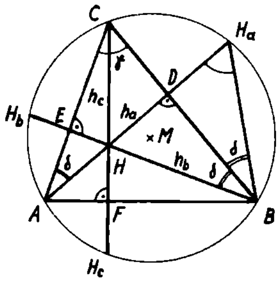
Ein zweijähriges einheitliches Grundstudium vermittelt Grundkenntnisse in Analysis, Algebra und Geometrie, Rechentechnik, numerische Mathematik, Operationsforschung und Kybernetik. Danach erfolgt eine wiederum zweijährige Spezialausbildung entsprechend den o.g. drei Richtungen, die mit einer allgemeinen praxisbezogenen Diplomarbeit abschließt.

Wann wurde das vierjährige Mathematikstudium in Leipzig eingeführt?

Am 1. 9. 1969.

H.-J. Girlich

Kleine „geometrische“ Exkursion



Wir laden euch heute zu einer kleinen „geometrischen“ Exkursion ein und hoffen, daß ihr recht zahlreich unseren interessanten, aber nicht unbeschwerlichen Wegen folgen werdet. Zum erfolgreichen Gelingen dieser Exkursion benötigt ihr die entsprechende Ausrüstung; sie besteht aus Bleistift, Zeichenpapier, Lineal, Zirkel und Zeichendreieck. So ausgerüstet wollen wir nun gemeinsam mit Schwung und Optimismus auf Entdeckungsreise gehen.

Arbeitsauftrag: Zeichnet ein spitzwinkliges Dreieck ABC, konstruiert die drei Höhen dieses Dreiecks, benennt die Fußpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c in dieser Reihenfolge mit D, E und F und den Höhenschnittpunkt mit H. Spiegelt nun den Höhenschnittpunkt H an den drei Seiten a, b und c des Dreiecks ABC, benennt die erhaltenen Bildpunkte in dieser Reihenfolge mit H_a, H_b und H_c. Konstruiert schließlich den Umkreis des Dreiecks ABC; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius r.

Wer den Arbeitsauftrag richtig verstanden und sauber gezeichnet hat, wird eine geometrische Entdeckung machen; wir wollen sie formulieren.

Der Umkreis des Dreiecks ABC geht genau durch die drei Bildpunkte H_a, H_b und H_c des an den Dreiecksseiten gespiegelten Höhenschnittpunktes H (siehe Abb. rechts oben).

Diese Feststellung muß selbstverständlich noch bewiesen werden, und wir wollen uns nun an den Beweis wagen.

Wir verbinden B mit H_a. Auf Grund der ausgeführten Konstruktion gilt:

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC = 90°$, $\overline{HD} = \overline{DH_a}$ und

$\sphericalangle CBE = \sphericalangle CBH_a$.

Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt

$\sphericalangle CAD = 90° - \gamma = \delta$;

im rechtwinkligen Dreieck BCE gilt

$\sphericalangle CBE = 90° - \gamma = \delta$.

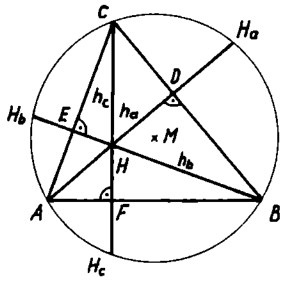
Daraus folgt $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBH_a = \delta$.

Für das rechtwinklige Dreieck DBH_a gilt somit $\sphericalangle DH_aB = 90° - \delta = \gamma$,

also $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AH_aB$.

Die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle AH_aB$ stehen über derselben Sehne $\overline{AB}$, sie sind außerdem gleich groß; ihre Scheitelpunkte C und H_a müssen folglich auf demselben zur Sehne $\overline{AB}$ gehörenden Kreis, nämlich dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen.

In analoger Weise läßt sich nachweisen, daß die Punkte H_b und H_c ebenfalls auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen. Diesen Beweis werdet ihr sicher allein ausführen können.



Es bleibt euch nun überlassen, nachzuweisen, ob der entdeckte geometrische Sachverhalt auch für ein rechtwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck zutrifft, das heißt, ob er allgemein gültig ist. Nach einer kurzen Verschnaufpause wollen wir indessen weiter auf Entdeckungsreise gehen.

Arbeitsauftrag: Zeichnet ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruiert seinen Umkreis. Von einem Punkt P des Umkreises, der nicht mit einem Eckpunkt des Dreiecks zusammenfällt, sind die Lote auf die drei Seiten a, b und c des Dreiecks bzw. auf ihre Verlängerungen zu fällen; die Fußpunkte der Lote sind in dieser Reihenfolge mit P_a, P_b und P_c zu benennen. Schließlich ist P_a mit P_b und P_b mit P_c zu verbinden.

Welche neue Entdeckung habt ihr gemacht? Versucht, eure Feststellung zu formulieren!

Die Fußpunkte der von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks auf die Dreieckseiten bzw. ihre Verlängerungen gefällten Lote liegen auf einer Geraden.

Bevor wir den etwas beschwerlichen Weg des Beweisens dieser Aussage gehen, wollen wir unser Gedächtnis auffrischen:

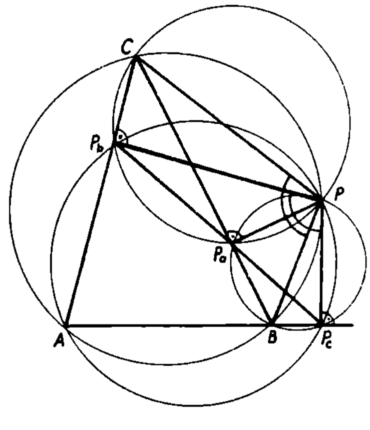
(1) Satz: Die Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises, deren Scheitel mit dem Mittelpunkt auf der gleichen Seite der Sehne liegen, sind untereinander kongruent.

(2) Definition: Liegen die vier Eckpunkte eines konvexen Vierecks auf einem Kreis, so nennt man es Sehnenviereck.

(3) Satz: Im Sehnenviereck ergänzen sich die einander gegenüberliegenden Winkel zu 180°.

(4) Umkehrung dieses Satzes: Ergänzen sich in einem Viereck die einander gegenüberliegenden Winkel zu 180°, so ist dieses Viereck ein Sehnenviereck.

Nun schaut euch gründlich eure angefertigten Zeichnungen an; wer aufmerksam ist, wird vier Sehnenvierecke entdecken.



Das Viereck $ABPC$ ist auf Grund der Konstruktion ein Sehnenviereck. Im Viereck AP_cPP_b ergänzen sich die einander gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle AP_cP$ und $\sphericalangle AP_bP$ zu 180°; somit ist dieses Viereck ein Sehnenviereck.

Gleiche Überlegungen treffen auf das Viereck BP_cPP_a zu, und es ist deshalb ebenfalls ein Sehnenviereck.

Im Viereck PCP_bP_a sind die Winkel $\sphericalangle PP_aC$ und $\sphericalangle PP_bC$ nach Konstruktion rechte Winkel, und sie stehen beide über derselben Sehne $\overline{PC}$. Folglich läßt sich über $\overline{PC}$ als Durchmesser der Thaleskreis konstruieren, und Viereck PCP_bP_a ist ein Sehnenviereck.

Unsere Beweisführung ist abgeschlossen, wenn es uns gelingt, nachzuweisen, daß die Winkel $\sphericalangle CP_aP_b$ und $\sphericalangle BP_aP_c$ untereinander kongruent sind. (Warum? Was folgt daraus?)

Und nun gehen wir unsere letzte Wegstrecke.

Da Viereck $ABPC$ ein Sehnenviereck ist, gilt wegen (3) $\sphericalangle CPB = 180° - \alpha$. Da Viereck AP_cPP_b ein Sehnenviereck ist, gilt wegen (3) $\sphericalangle P_bPP_c = 180° - \alpha$.

Daraus folgt	$\sphericalangle P_bPP_c = \sphericalangle CPB$ und		
somit auch	$\sphericalangle CPP_b = \sphericalangle BPP_c$.	(5)
Wegen (1) gilt	$\sphericalangle BPP_c = \sphericalangle BP_aP_c$	(6)
und	$\sphericalangle CPP_b = \sphericalangle CP_aP_b$.	(7)

Aus (5), (6) und (7) folgt schließlich $\sphericalangle CP_aP_b = \sphericalangle BP_aP_c$. Da die Punkte B, P_a und C nach Konstruktion auf einer Geraden liegen, die Winkel $\sphericalangle CP_aP_b$ und $\sphericalangle BP_aP_c$ der Lage nach Scheitelwinkel sind, liegen auch die Punkte P_a, P_b und P_c auf einer Geraden.

Damit haben wir das Ziel unserer gemeinsamen „geometrischen“ Exkursion erreicht. Wir hoffen, daß ihr durchgehalten und voller Eifer mitgemacht habt.

Th. Scholl

Prüfungsaufgaben aus Island, Teil 1

Mittelschulprüfung Frühjahr 1969
Landesprüfung Abschluß 9. Klasse

Für jede der Aufgaben 1 bis 7 sind einige Lösungen vorgegeben. Die richtige Lösung jeder Aufgabe ist durch ein Kreuz in der Klammer (×) hinter der zutreffenden Lösung kenntlich zu machen.

▲ 1 $(-40)\cdot(-2{,}5)\cdot(-0{,}5)=$
$50(\ )$; $-50(\ )$; $5(\ )$; $-5(\ )$; $0{,}5(\ )$; $-0{,}5(\ )$.

▲ 2 x sei eine ganze Zahl, die bei Division durch 6 den Rest 5 läßt. Welchen Rest läßt dann die Zahl $x+3$ bei Division durch 6?
0( ); 1( ); 2( ); 3( ); 4( ); 5( ).

▲ 3 Wie schreibt man die Zahl „einhundertundeins" im Dualsystem? 101 ( ); 101 101 ( ); 110 101 ( ); 1 100 101 ( ); 1 010 101 ( ).*

▲ 4 Einer im Dualsystem geschriebenen Zahl wird rechts eine Null angefügt. Wie ändert sich dadurch die ursprüngliche Zahl? Sie wird um 10 vergrößert ( ); sie bleibt unverändert ( ); sie wird zehnmal so groß ( ); sie wird um 2 größer ( ); sie wird zweimal so groß ( ).

▲ 5 $(-6x^3y^2z)\cdot(-5x^2y^2)=$
$30x^5y^4z\ (\ )$; $-30x^5y^4z\ (\ )$; $30x^6y^4z\ (\ )$; $-30x^6y^4z\ (\ )$;
eine nicht angeführte Lösung ( ).

▲ 6 Die Variablen x und y seien proportional zueinander. Für $x=7$ gilt $y=12$. Welchen Wert nimmt y dann für $x=3$ an?
$5\frac{1}{7}(\ )$; $8(\ )$; $1\frac{3}{4}(\ )$; $28(\ )$; $3(\ )$.

▲ 7 $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$
$A \cup B \cap C(\ )$; $A \cup (B \cap C)(\ )$; $(A \cup B) \cap C(\ )$; $(A \cap B) \cup C\ (\ )$; $A \cap (B \cup C)\ (\ )$.

Für jede der Aufgaben 8 und 9 sind einige Aussagen angegeben. In jede hinter einer wahren Aussage stehenden Klammer ist ein W, in jede hinter einer falschen Aussage stehenden Klammer ein F zu setzen.

▲ 8 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
$B = \{x \mid x^2 = -1 \wedge x \in \Delta\}$;
$C = \{x \mid x$ ist Primzahl kleiner als $16\}$;
$D = \{x \mid x$ ist Teiler von $12 \wedge x \in N\}$;
$E = \emptyset$.

Welche der folgenden Aussagen über die fünf vorgegebenen Mengen A, B, C, D und E sind wahr, welche falsch?
$A=D\ (\ )$; $A\sim D\ (\ )$; $A=C\ (\ )$; $A\sim C\ (\ )$; $A=E\ (\ )$; $A\sim E\ (\ )$; $C=D\ (\ )$; $C\sim D\ (\ )$; $E=B\ (\ )$; $E\sim B\ (\ )$.

▲ 9 Gegeben sei die Menge $A=\{0, 3, 5\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
$3 \in A\ (\ )$; $\{5\} \in A\ (\ )$; $5 \subset A\ (\ )$; $0 \in \emptyset\ (\ )$; $\{5\} \subset A\ (\ )$.

Bei den folgenden Aufgaben sind die Lösungen in die im Aufgabenvordruck freigehaltenen Stellen einzutragen.

▲ 10 Ergänze die geometrische Zahlenfolge 2, 4, 8, 16, ..., ... durch ihre nächsten beiden Glieder.

▲ 11 Das nächste Glied der Zahlenfolge 2, 4, 8, 16 ist in gleicher Weise wie dargestellt als Summe zu schreiben.

$2=1+1$
$4=1+2+1$
$8=1+3+3+1$
$16=1+4+6+4+1$
$\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_$

▲ 12 Dividiert man 23 076 103 durch 8, so bleibt der Rest ____.

▲ 13 Multipliziere $3{,}2 \cdot 10^7$ mit $4 \cdot 10^{-4}$ und schreibe das Produkt in der gleichen Weise. Lösung: ________

▲ 14 Es ist die Differenz der im Dualsystem dargestellten beiden Zahlen zu ermitteln.

```
          10010
        −   111
Lösung: ________
```

▲ 15 Die Zahlen der folgenden Aufgaben sind im Dreiersystem dargestellt.
a) Fülle die Additionstabelle aus:

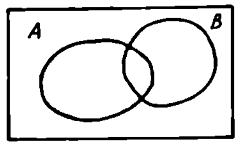
+	0	1	2
0			
1			
2			

b) Fülle die Multiplikationstabelle aus:

·	0	1	2
0			
1			
2			

c) Multipliziere im Dreiersystem
1221 · 12 = ________
d) Dividiere im Dreiersystem
221 : 12 = ________

▲ 16 Schraffiere den Flächenteil des nachstehend abgebildeten Venndiagrammes, der der Vereinigungsmenge $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ entspricht.



▲ 17 Gegeben sei der Grundbereich $U=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und die Mengen $A=\{4, 6, 7\}$ und $B=\{4, 5, 6, 8\}$. Tragen Sie die Elemente der folgenden Mengen ein:
a) $A \cup B=\{\ \ \}$; b) $A \cap B=\{\ \ \}$;
c) $\overline{B}=\{\ \ \}$; d) $\overline{U}=\{\ \ \}$; e) $A \setminus B=\{\ \ \}$.

▲ 18 Jeder der beiden Linearfaktoren ist durch ein Glied so zu ergänzen, daß die nachfolgende Gleichung allgemeingültig ist.
$3x^2-2x-16=(3x\qquad)\cdot(\qquad 2)$

▲ 19 Auf beiden Seiten der nachstehenden Gleichung ist je ein Glied so zu ergänzen, daß die Gleichung eine Identität darstellt.
genden Menge auf.
$x^2-6x\qquad=(x\qquad)^2$

▲ 20 Welche reelle Zahl p erfüllt die Gleichung $101^2-99^2=2p$? Lösung: $p=$________

▲ 21 Welche reelle Zahl a erfüllt die Gleichung $5ax+4=19$, wenn $x=\frac{1}{2}$ ist?
Lösung: $a=$________

▲ 22 Schreibe die Elemente der nachfolgenden Menge auf.
$\{x \mid (x-1)\cdot(x-2)=0\} = \{\qquad\qquad\}$

▲ 23 Löse das lineare Gleichungssystem
$2x-3y=23\qquad x=$______
$x+y\ =44\qquad y=$______

▲ 24 Kürze und vereinfache den nachstehenden Term so weit wie möglich.
$$\frac{x^2+8x-20}{2x^2-8}\cdot(4x+8)$$

▲ 25 Reduziere den nachfolgenden Term auf eine möglichst einfache Form!**
$$\frac{x+5}{5-x}+\frac{x+4}{x+5}+\frac{10}{25-x^2}$$

Eingesandt von Mathematikfachlehrer Gestur O. Gestsson, Reykjavik

Lösungen siehe in diesem Heft S. 140!

* In der rechnerischen Praxis schreibt man gewöhnlich statt der Ziffer 1 den Buchstaben L, zum Beispiel LOL, LOLLOL usw.
** Die vorliegenden Aufgaben sind eine repräsentative Auswahl der insgesamt 50 gestellten Prüfungsaufgaben, d. Red.

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade

Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

1. Eine Lösungsmöglichkeit ist z. B. die in der Abb. dargestellte.

			×		
×					
				×	
	×				
					×
		×			

2. Es gilt:
85000 kg = 85 t und 5000 kg = 5 t.
Wenn nach der Entnahme von 85 t Weizen aus dem ersten und 5 t aus dem zweiten die Bestände in den beiden Lagerräumen gleich sind, befanden sich im ersten Lagerraum 80 t mehr als im zweiten; denn 85 t — 5 t = 80 t.
Da im ersten Lagerraum der Bestand anfangs dreimal so groß wie im zweiten war und nach der Entnahme in beiden die Bestände gleich sind, muß anfangs der Überschuß des ersten Raumes zweimal so groß wie der Bestand des zweiten Raumes gewesen sein. Also befanden sich im zweiten Raum die Hälfte von 80 t, das sind 40 t, und im ersten 120 t Weizen; denn 40 t · 3 = 120 t.
Als Probe gilt: 40 t — 5 t = 35 t
und 120 t — 85 t = 35 t.

3. Da Gerd mehr als doppelt so alt ist wie seine Schwester und seine Schwester viermal so alt ist wie ihr Bruder, so muß Gerd mehr als achtmal so alt sein wie sein Bruder. Wäre sein Bruder zwei oder mehr Jahre alt, dann müßte Gerd mehr als 16 Jahre alt sein. Das widerspräche der Angabe, daß die Summe der Jahre 17 beträgt.
Also ist der Bruder 1 Jahr alt, die Schwester demnach 4 Jahre, und wegen 17 — 1 — 4 = 12 muß Gerd 12 Jahre alt sein.
Wegen 4 · 4 > 12 ist auch die Bedingung erfüllt, daß Gerd weniger als viermal so alt ist wie seine Schwester. Die angegebene Lösung genügt damit allen Bedingungen und ist zugleich die einzig mögliche.

4. Die Zahl 180 läßt sich nur auf die folgenden Weisen in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a, b) zerlegen:

$$\begin{aligned} 180 &= 180 \cdot 1 = 90 \cdot 2 = 60 \cdot 3 = 45 \cdot 4 \\ &= 36 \cdot 5 = 30 \cdot 6 = 20 \cdot 9 = 18 \cdot 10 \\ &= 15 \cdot 12 \end{aligned}$$

Dabei ist wegen $15 - 12 = 3$ nur für $a = 15$ und $b = 12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Olympiadeklasse 6

1. Die Gesamtschülerzahl n muß ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu.
$\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.
Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3; denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

2. Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.
Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$.
Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.
Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g,$$

dann ergibt sich:

$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g;$$

daraus folgt $\frac{1}{70}g = 4$

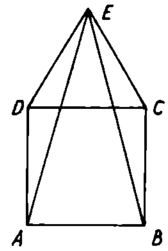
demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.
Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m. In der Tat ergibt sich als Probe

$$72 + 64 = 136, \qquad 72 = 64 + 8,$$

$$84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60),$$

$$60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60).$$

3. Im Dreieck $\Delta\, AED$ gilt: (siehe Abb.)
$\overline{AD} = \overline{DE}$ (nach Konstruktion)
(1) Daraus folgt $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\overline{\sphericalangle EDA} = \overline{\sphericalangle EDC} + \overline{\sphericalangle CDA} = 150°$;
($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.) denn $\overline{\sphericalangle EDC} = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\overline{\sphericalangle CDE} = 90°$ (Winkel im Quadrat).



Aus (1), (2), und
$\overline{\sphericalangle AED} + \overline{\sphericalangle EDA} + \overline{\sphericalangle DAE} = 180°$
(nach Winkelsummensatz)
folgt $\overline{\sphericalangle AED} = 15°$.
Entsprechend ist $\overline{\sphericalangle BEC} = 15°$, also
$\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle DEC} - \overline{\sphericalangle AED} - \overline{\sphericalangle BEC} = 30°$

4. a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen.
Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das k. g. V. von 300, 225 und 180 beträgt 900; und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.
b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

Olympiadeklasse 7

1. Wegen des Gesamtbetrages muß Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.
Da 4 M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben. Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z. B. 3 M; 2,50 M; 2,40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:

Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke
oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

2. a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:

$ab + x = a^2$, woraus man
$x = a^2 - ab$ erhält.

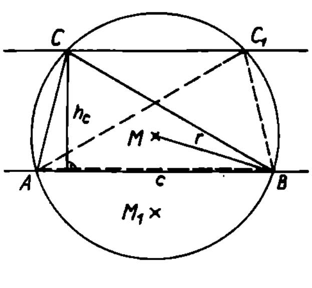
Also kann höchstens die Zahl
$x = a^2 - ab = a(a - b)$ Lösung sein.
Tatsächlich ist
$a \cdot b + a(a - b) = ab + a^2 - ab = a^2$.

b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:

$ab - y = b^2$, woraus man
$y = ab - b^2$ erhält.

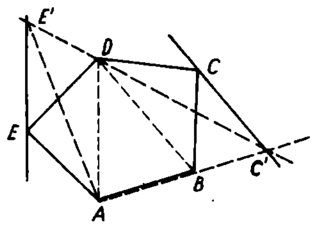
Also kann höchstens die Zahl
$y = ab - b^2 = b(a - b)$ Lösung sein.
Tatsächlich ist
$a \cdot b - b(a - b) = ab - ab + b^2 = b^2$.

3. (I) Angenommen, $\Delta\ ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks $\Delta\ ABC$ im Abstand h_c von AB.



(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\Delta\ ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt. Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c. Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht. Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1. Die Dreiecke $\Delta\ ABC$ bzw. ABC_1 entsprechen den Bedingungen.
(III) Der Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck $\Delta\ ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

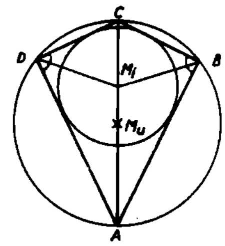
4. Das Fünfeck $ABCDE$ läßt sich in die Teildreiecke $\Delta\ ADE$, $\Delta\ ABD$ und $\Delta\ BCD$ zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'. Dann ist das Dreieck $\Delta\ BC'D$ flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\Delta\ BCD$; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein. Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und



verlängert $C'D$ über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\Delta\ ADE'$ ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\Delta\ ADE$. Daher ist das aus den Teildreiecken $\Delta\ ADE'$, $\Delta\ ABD$ und $\Delta\ BC'D$ bestehende Dreieck $\Delta\ AC'E'$ flächeninhaltsgleich dem Fünfeck $ABCDE$.

Olympiadeklasse 8

1. a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis.
Beweis: Hat ein Drachenviereck $ABCD$ etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\Delta\ ABC$ und $\Delta\ ACD$ kongruent (*sss*). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i. Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks $ABCD$. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand. Wegen der Konvexität von $ABCD$ fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks $ABCD$.
Für ein Drachenviereck $ABCD$ mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:
1. Fall: $\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ADC} = 90°$. ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.)
In diesem Fall hat das Drachenviereck $ABCD$ als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.
2. Fall: $\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle BCD} = 90°$.
In diesem Fall folgt aus $\overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle ADC}$ $= 360° - (\overline{\sphericalangle BAD} + \overline{\sphericalangle BCD}) = 180°$
und $\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ADC}$
(dies wegen $\Delta\ ABC \cong \Delta\ ADC$),
daß $\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle ADC} = 90°$ gilt,
also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.
b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, daß er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\Delta\ ABC$). Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B.
(*Bemerkung:* Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Vierecksseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden.)



c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\Delta\ ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d. h. M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

2. Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als $100a + 10b + c$ und die zweite Zahl z_2 als $100c + 10b + a$ darstellbar. Für die Differenz $d = z_1 - z_2$ ergibt sich
$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$
$d = 99a - 99c$
$d = 99 \cdot (a - c)$.
Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:
(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d. s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,
(2) alle natürlichen Teiler von $|a - c|$,
(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.
*) Ausführliche Aufzählung:
Für $|a-c|$ kommen (wegen $0 < a \leqq 9$; $0 < c \leqq 9$; a, c ganzzahlig) nur die Werte 0, ..., 8 in Frage; man erhält:

$\|a - c\|$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3,6,9,11,18,22,33,66,99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3,4,6,9,11,12,18,22,33,36,44,66,99,132,198,396
5	1,3,5,9,11,15,33,45,55,99,165,495
6	1,2,3,6,9,11,18,22,27,33,54,66,99,198,297,594,
7	1,3,7,9,11,21,33,63,77,99,231,693
8	1,2,3,4,6,8,9,11,12,18,22,24,33,36,44,66,72,88,99,132,198,264,396,792

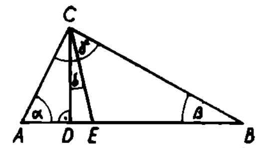
3. Es sei o. B. d. A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\Delta\ ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben. Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0°$ und die Behauptung daher richtig. Sei nun $\alpha \neq \beta$,

etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\sphericalangle DEC \cong \sphericalangle AEC$, d.h.

$90° - \delta = 180° - (\alpha + \frac{\gamma}{2})$, also

$\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90° = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) - 90°$

$= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, w. z. b. w.



4. In der Zeit $t_1 = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x + 25) \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann:

$$x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}.$$

Daraus erhält man

$$x = \frac{5 \cdot 55}{6} = 45\frac{5}{6}.$$

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Wegen $\frac{5 \cdot 55}{6} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64{,}9$ beträgt die durchfahrene Wegstrecke

$s = 64\,\frac{67}{72}$ km $\approx 64{,}9$ km.

Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt: In 85 min durchfährt der LKW mit seiner Geschwindigkeit $45\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Strecke $\frac{85}{60} \cdot \frac{275}{6}$ km $= \frac{5 \cdot 55 \cdot 85}{6 \cdot 60}$ km $= s$; die Geschwindigkeit $70\frac{5}{6}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ des PKW ist um $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer als die des LKW, und mit ihr durchfährt er in $(85 - 30)$ min $= 55$ min die Strecke

$\frac{55}{60} \cdot \frac{425}{6}$ km $= \frac{5 \cdot 55 \cdot 85}{6 \cdot 60}$ km $= s$.

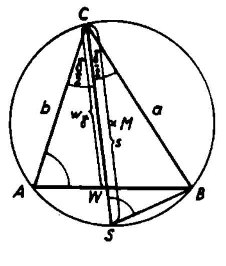
Olympiadeklasse 9

1. b) Angenommen, man hat fünf Zahlen der gesuchten Art. Dann hat die kleinste von ihnen, da sie größer als 2 ist, die Form $2 + k$ mit einer ganzen Zahl $k \geqq 1$. Die fünf Zahlen lauten demnach $2 + k, 3 + k, \ldots, 6 + k$. Da sie in dieser Reihenfolge durch $2, 3, \ldots, 6$ teilbar sind, so ergibt sich der Reihe nach, daß k Vielfaches von $2, 3, \ldots, 6$, also auch Vielfaches des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen 60 von $2, 3, \ldots, 6$, sein muß.

Umgekehrt: Für jedes positive Vielfache $60n$ von 60 sind (1) $2 + 60n, 3 + 60n, \ldots, 6 + 60n$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen größer als 2, die in dieser Reihenfolge durch $2, 3, \ldots, 6$ teilbar sind. Man erhält alle Lösungen der Aufgabe in der Form (1) (mit ganzem $n \geqq 1$). Insbesondere führt $n = 1$ auf die Lösung

a) 62, 63, ..., 66.

2. Es seien a, b die Längen der Seiten BC und AC des Dreiecks $\Delta\, ABC$, w_γ die Länge der Winkelhalbierenden CW und schließlich s die gesuchte Länge der Sehne CS (siehe Abb.).



Nach dem Satz über Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen ($\overline{BC}$) gilt dann

$\overline{\sphericalangle CAW} = \overline{\sphericalangle CSB}$ ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$). Nach Definition der Winkelhalbierenden gilt weiter

$\overline{\sphericalangle ACW} = \overline{\sphericalangle SCB}$.

Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\Delta\, ACW \sim \Delta\, SCB$ und damit

$b : w_\gamma = s : a$

$w_\gamma \cdot s = a \cdot b$

$s = \frac{a \cdot b}{w_\gamma}$

3. Angenommen, (x, y) ist ein solches Zahlenpaar,

dann gilt $x^3 > y^3$, also

$x > y$, also

$x = y + d$ (d natürliche Zahl). (1)

Ferner gilt:

$y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3 - y^3 = 999$,

also $d(3y^2 + 3yd + d^2) = 999$. (2)

Daraus folgt $d | 999$.

Wegen $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ hat 999 außer 1, 3 und 9 als positive Teiler nur Zahlen $\geqq 27$. Wegen $27^3 > 999$ und (2) scheiden die letzteren als Werte für d aus, d.h. es kann höchstens $d = 1$ oder $d = 3$ oder $d = 9$ sein.

Es sei $d = 1$. Dann folgt aus (2)

$3y^2 + 3y + 1 = 999$

$y^2 + y - \frac{998}{3} = 0.$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind keine natürlichen Zahlen.

Es sei $d = 3$. Dann folgt aus (2)

$3y^2 + 9y + 9 = 333$

$y^2 + 3y - 108 = 0$, also

$y_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 432}$,

woraus sich wegen $y > 0$ also $y = 9$ und wegen (1) $x = 12$ ergibt.

Tatsächlich ist wegen

$12^3 - 9^3 = 1728 - 729 = 999$ hiermit eine Lösung, und zwar die einzige mit $d = 3$ gefunden.

Es sei $d = 9$. Dann folgt aus (2)

$3y^2 + 27y + 81 = 111$

$y^2 + 9y - 10 = 0$, also

$y_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{81 + 40}$, woraus sich $y = 1$ und wegen (1) $x = 10$ ergibt.

Tatsächlich ist auch dies wegen $10^3 - 1^3 = 999$ eine Lösung, und zwar die einzige mit $d = 9$.

Die einzigen Zahlenpaare (x, y), die im Bereich der natürlichen Zahlen die gegebene Gleichung erfüllen, sind also

(10, 1) und (12, 9).

4. Wäre die Angabe D_2 wahr, würde also gelten $100 \leqq x$, dann wären auch D_1 und D_3 wahr. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß D mindestens eine falsche Angabe macht.

Also gilt (a) $x < 100$.

Wäre Angabe D_3 falsch, also $x < 10$, dann wären auch D_1 und D_2 falsch. Das widerspräche der Voraussetzung, nach der D mindestens eine wahre Angabe zu machen hat.

Also gilt (b) $x \geqq 10$.

Alle drei Angaben von B enthalten die Aussage, daß x eine ganze Zahl ist. Da mindestens eine dieser Angaben richtig sein muß, gilt

(c) x ist eine ganze Zahl.

Wegen (b) ist C_2 falsch und wegen (c) ist C_1 falsch. Also muß C_3 richtig sein, und es folgt

(d) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

Wegen (b) ist A_1 falsch, und wegen (b) ist auch A_3 falsch.

Also ist A_2 wahr, und es gilt

(e) die gesuchte Zahl enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.

Danach kommen nun noch höchstens alle diejenigen Quadratzahlen x mit $10 \leqq x < 100$ in Frage, in deren dekadischer Darstellung keine 6 auftritt.

Das sind die Zahlen 25, 49 und 81 und nur diese.

Da damit B_1 und B_2 falsch sind, muß B_3 richtig sein. Die gesuchte Zahl kann also höchstens die Zahl 25 sein.

Um umgekehrt zu zeigen, daß 25 tatsächlich die gesuchte Zahl ist, werden für $x = 25$ die Wahrheitswerte der einzelnen Angaben überprüft. Man erhält in der angegebenen Reihenfolge:

bei a: *FWF*, bei B: *FFW*, bei C: *FFW*, bei D: *WFW*

Daher ist in jedem Falle mindestens eine wahre und eine falsche Angabe vorhanden, wie zu zeigen war.

x ist die Zahl 25.

Olympiadeklasse 10

1. Angenommen, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ sei eine Folge der gesuchten Art. Dann ergibt sich aus der Forderung an S_n für $n = 1$ und $n = 2$:

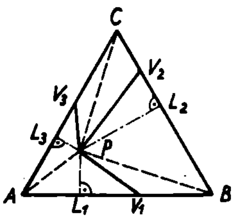
$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 = 1 + 5 = 6 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 4 + 10 = 14 \end{array}\right\} \text{also}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = 6 \\ a_2 = 14 - 6 = 8 \end{array}\right.$$

Daher muß das Anfangslied $a_1 = 6$ und die (für alle $n = 1, 2, \ldots$ gleichlautende) Differenz $d = a_{n+1} - a_n = 2$ sein.
Umgekehrt, für die arithmetische Folge mit $a_1 = 6$ und $d = 2$ gilt
$a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$,
also in der Tat
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(6 + 2n + 4) = \frac{n}{2}(2n + 10)$$
$= n^2 + 5n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. Genügt x der geforderten Bedingung, so setzen wir
$\log_2 (\log_2 x) = a$ und erhalten
$\log_2 a = 0$
Das bedeutet $2^0 = a$, also $a = 1$.
Damit ist $\log_2 (\log_2 x) = 1$.
Wir setzen $\log_2 x = b$ und erhalten
$\log_2 b = 1$.
Das bedeutet $2^1 = b$, also $b = 2$.
Damit ist $\log_2 x = 2$. Das bedeutet $2^2 = x$, also muß $x = 4$ sein, wenn es der geforderten Bedingung genügen soll.
Probe:
Wegen $\log_2 4 = 2$ und
$\log_2 2 = 1$ und
$\log_2 1 = 0$ folgt
$\log_2 (\log_2 (\log_2 4)) = \log_2 (\log_2 2)$
$= \log_2 1$
$= 0$, so daß $x = 4$ tatsächlich Lösung der Aufgabe, und zwar die einzige, ist.

3. *Beweis*: P sei ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks ΔABC, und V_1, V_2, V_3 seien drei Punkte, in dieser Reihenfolge auf den Dreiecksseiten AB, BC, CA gelegen.
Wir setzen $\overline{PV_n} = v_n$ $(n = 1, 2, 3)$.
Fällt man von P auf die 3 Dreiecksseiten die Lote, deren Fußpunkte L_1, L_2, L_3, seien, und bezeichnet man die Längen dieser Lote mit l_1, l_2, l_3, so gilt $v_n \geqq l_n$ $\quad (n = 1, 2, 3)$,
also $\quad v_1 + v_2 + v_3 \geqq l_1 + l_2 + l_3$. $\quad$ (1)



Sind ferner F, F_1, F_2, F_3 die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABC, ΔAPB, ΔBPC, ΔCPA, so gilt $F = F_1 + F_2 + F_3$.
d. h., wenn s die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks und h die Höhenlänge sind,
$$\frac{1}{2} s \cdot h = \frac{1}{2} s \cdot l_1 + \frac{1}{2} s \cdot l_2 + \frac{1}{2} s \cdot l_3.$$
Hieraus folgt $h = l_1 + l_2 + l_3$. $\quad$ (2)
Durch (1) und (2) ist die Aussage
$h \leqq v_1 + v_2 + v_3$ bewiesen.

4. I. Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 seien v_1, v_2; die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2. Dann gilt (1) $210 = v_1 t_1 = v_2 t_2$.

Ferner ist sowohl $(t_1 - 2)$h als auch $(t_2 - \frac{9}{8})$h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so daß
(2) $t_1 = t_2 + \frac{7}{8}$
gelten muß. Schließlich ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1 \cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2 \cdot \frac{9}{8})$ km, woraus
(3) $v_1 \cdot 2 + v_2 \cdot \frac{9}{8} = 210$
folgt. Zur Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) multipliziere man etwa (3) mit $t_1 t_2$ und berücksichtige anschließend (1) und (2). Es ergibt sich
$$210 \cdot t_2 \cdot 2 + 210 \cdot (t_2 + \frac{7}{8}) \cdot \frac{9}{8}$$
$$= 210 \cdot (t_2 + \frac{7}{8}) \cdot t_2,$$
also $\quad t_2^2 - \frac{9}{4} t_2 - \frac{63}{64} = 0$, woraus man
$t_{2_{1;2}} = \frac{9}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{81 + 63} = \frac{9}{8} \pm \frac{12}{8}$ $\quad$ erhält.
Davon ist allein $t_2 = \frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2 > 0$ gilt.
Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter
$$t_1 = \frac{21}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7}{2},$$
$$v_1 = \frac{210 \cdot 2}{7} = 60, \quad v_2 = \frac{210 \cdot 8}{21} = 80.$$
II. In der Tat erfüllen diese Werte die Bedingungen der Aufgabe: Nach der Zeit
$(t_1 - 2)$ h $= (t_2 - \frac{9}{8})$ h $= \frac{3}{2}$ h
hat K_1 eine Strecke von $60 \cdot \frac{3}{2}$ km $= 90$ km zurückgelegt, K_2 eine von $80 \cdot \frac{3}{2}$ km $= 120$ km; wegen $(90 + 120)$ km $= 210$ km begegnen sich K_1 und K_2 also zu diesem Zeitpunkt. Danach braucht K_1 für die restlichen 120 km eine Zeit von $\frac{120}{60}$ h $= 2$ h sowie K_2 für die restlichen 90 km eine Zeit von $\frac{90}{80}$ h $= \frac{9}{8}$ h.
Die Geschwindigkeiten der Kraftwagen betragen somit $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. a) Die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 lassen, beginnt: 4; 11; 18; 25; 32; 39; 46; 53; 60; 67; 74; 81; 88; 95; ...
Von diesen Zahlen lassen bei der Division durch 4 den Rest 3 genau die Zahlen: 11; 39; 67; 95; ... (ab 11 jede vierte Zahl der vorigen Folge).
Die kleinste unter diesen Zahlen, die auch noch bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, ist die Zahl 67.

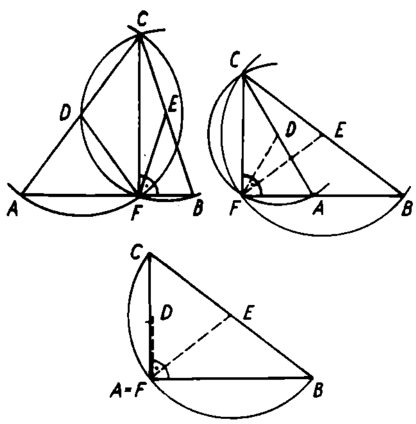
b) Weitere, den Bedingungen entsprechende natürliche Zahlen erhält man, indem man zu 67 gemeinsame Vielfache von 3, 4 und 7 addiert. Insbesondere erhält man die nächstgrößeren derartigen Zahlen, wenn man wiederholt das k. g. V. von 3, 4 und 7 (d. i., da 3, 4, 7 paarweise teilerfremd sind, die Zahl $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$) zu 67 addiert. Die nächsten so entstehenden Zahlen sind: 151; 235; 319; ...

2. a), b) Die sämtlichen genannten Darstellungen sind:

$7 = 1 + 6$	$10 = 1 + 9$
$7 = 2 + 5$	$10 = 2 + 8$
$7 = 3 + 4$,	$10 = 3 + 7$
	$10 = 4 + 6$,

ihre Anzahl beträgt 3 bzw. 4.
c) Ist n ungerade, so treten in den sämtlichen genannten Darstellungen genau die Zahlen $1, \ldots, n-1$ als Summanden auf, und zwar jede genau einmal. Da hierbei in jeder Darstellung genau zwei dieser Summanden vorkommen, ist die Anzahl der Darstellungen folglich $\frac{n-1}{2}$.
Ist n gerade, so treten dagegen nur die Zahlen $1, \ldots, n-1$ mit Ausnahme der Zahl $\frac{n}{2}$ auf.
Diese Ausnahme rührt daher, daß in einer Darstellung von n mit einem Summanden $\frac{n}{2}$ der zweite Summand ebenfalls $\frac{n}{2}$ lauten müßte, also nicht von dem ersten verschieden wäre. Daher beträgt nun die gesuchte Anzahl $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$.

3. Es sei o. B. d. A. der Punkt C der Eckpunkt, von dem aus das Lot auf die Gerade durch A und B gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes sei F, der Mittelpunkt von AC sei D, der von BC sei E.



Dann sind die Dreiecke ΔAFC und ΔCFB rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F (eventuell ist eines dieser Dreiecke ausgeartet, falls nämlich bei A bzw. B ein rechter Winkel liegt. Die Betrachtungen gelten aber auch in diesem Falle, da dann $A = F$ bzw. $B = F$ ist) und die Punkte A, F, C bzw. C, F, B liegen nach Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AC bzw. BC.

Da D Mittelpunkt von AC bzw. E Mittelpunkt von BC ist, ist

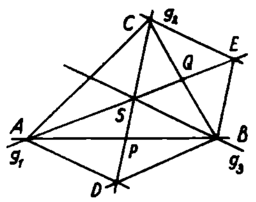
$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DF} \text{ bzw.}$$
$$\overline{CE} = \overline{BE} = \overline{EF} \text{ als Radien in}$$

den Thaleskreisen. Mithin gilt

$$\overline{DF} + \overline{EF} = \overline{AD} + \overline{EB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BC})$$

4. Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben. Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt.
Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen. Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.

5. I. Angenommen, es gibt ein Dreieck ΔABC (siehe Abb.), das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Mittelpunkt von AB sei P, der Mittelpunkt von BC sei Q. Dann liegt P auf der Seitenhalbierenden s_c und damit auf g_2 und Q auf s_a und damit auf g_1. Verlängert man nun SP bzw. SQ über P bzw. Q hinaus um sich selbst (die so entstehenden Punkte seien D und E), so sind die Vierecke $ADBS$ bzw. $BECS$ Parallelogramme, da sich ihre Diagonalen halbieren.



II. Ein Dreieck ΔABC kann daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man zieht durch A die Parallele zu g_3. Sie schneide g_2 im Punkt D. Dann halbiert man SD (Halbierungspunkt sei P) und zieht die Gerade durch A und P. Sie schneide g_3 im Punkt B. Nun zieht man durch B die Parallele zu g_2, die g_1 in E schneide. Man halbiert SE (Halbierungspunkt sei Q) und zieht die Gerade durch B und Q, die g_2 in C schneide.
III. Wenn sich das Dreieck ΔABC so konstruieren läßt, dann entspricht es den Bedingungen.
Beweis: Laut Konstruktion sind die Dreiecke ΔADP und ΔBSP sowie ΔBEQ und ΔCSQ kongruent; denn sie stimmen in einer Seite und den Winkeln überein. Also sind die Vierecke $ADBS$ und $BECS$ Parallelogramme, und es gilt $\overline{AP} = \overline{PB}$ sowie $\overline{BQ} = \overline{QC}$. Daher sind CP und AQ Seitenhalbierende im Dreieck ΔABC. Ihr Schnittpunkt S muß auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegen, die damit auf g_3 liegt.
IV. Die Konstruktion ist stets ausführbar und eindeutig. Denn von den Geraden g_1, g_2, g_3 sind keine zwei parallel, so daß also die Schnittpunkte D, B, E und C stets existieren und eindeutig bestimmt sind. Da weder B noch C mit S zusammenfällt, kann weder B (als Punkt von g_3) noch C (als Punkt von g_2) mit dem Punkt A von g_1 zusammenfallen.

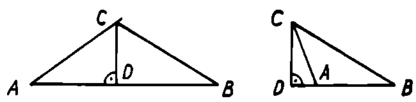
6. Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar

45 Jahre zu 366 Tagen und
145 Jahre zu 365 Tagen.

In den 45 Jahren rückte der Wochentag um 90 Wochentage vor,
in den 145 Jahren um 145 Wochentage.
Das sind zusammen 235 Wochentage,
d. h. 33mal eine Woche und 4 Wochentage.
Daher war der 30. 4. 1777 ein Mittwoch.

Olympiadeklasse 8

1. Es genügt zu beweisen, daß in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreieckseite liegt. Das trifft für den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu.



Beweis: Ein größter Winkel des Dreiecks ΔABC liege o. B. d. A. bei C. Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes sei D. Würde D nicht zwischen A und B, sondern auf der Geraden durch diese Punkte außerhalb der Seite AB oder in A oder in B liegen, so wäre der Winkel $\sphericalangle BAC$ (bzw. $\sphericalangle ABC$) als Außenwinkel im Dreieck ΔDCA (bzw. ΔDBC) oder als rechter Winkel $\sphericalangle BDC$ (bzw. $\sphericalangle ADC$) nicht spitz.
Laut Voraussetzung ist aber keiner dieser Winkel größer als der Winkel bei C, also kann auch keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht, die Behauptung also bewiesen.

2. Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt:
Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 \ldots K_5$. Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit GL. und nicht Gleichgewicht mit n. GL. symbolisiert):

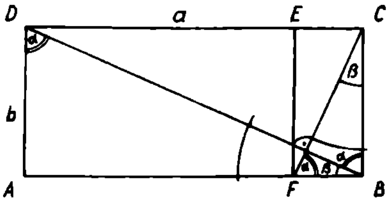
	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andersfalls sind es K_1 und K_2.
Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnumerierung auf einander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b). Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4. Es werde z. B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gesuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.
Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o. B. d. A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o. B. d. A. K_3 leichter als K_4. Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

3. Die Zahlen 1, 10, 100, 1000 ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000..., die sich als 1 + 1, 10 + 10, 100 + 100 ... schreiben lassen, ergaben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300 ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800 ... den Rest 8, und 9, 90, 900 .... schließlich den Rest 0.
Nun läßt sich jede natürliche Zahl z in der Form
$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^n$ schreiben (mit ganzen Zahlen a: für die $0 \leqq a_i \leqq 9$ gilt).
Die Quersumme dieser Zahl lautet dann
$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.
Bei Division durch 9 läßt nach dem Obigen $a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0, $a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie $a_1, \ldots, a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wie a_n.
Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ läßt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.

4. I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele (siehe Abb.).
Dann gilt: $ABCD \sim BCEF$
und damit auch: $\Delta ABD \sim \Delta BCF$. Daraus folgt: $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BCF$.

II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion: Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.



III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Die Dreiecke ΔABD und ΔBCF sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt

$\overline{AD} : \overline{BF} = \overline{AB} : \overline{BC}$ und mithin

$ABCD \sim BCEF$.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ zwischen 0° und 90° liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck ΔCFB.

Wegen (III) gilt $\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{a}{b} > 1$, also $\overline{BC} > \overline{BF}$,

und F liegt zwischen A und B.

5. a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$

Er rechnete: $(z - 5)(z + 5) = z^2 - 25$.

Sein Weg ist also falsch.

b) Der absolute Fehler beträgt in *jedem* Falle: -25. Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

6. Wegen (1) gilt $b + d > b + c$,

und weil $a + d < b + c$ ist, findet man $a + d < b + d$ und daraus $a < b$ (4)

Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):

$$d - b < b - d, \text{ also } 2d < 2b$$

(5) $d < b$

Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.

Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.

Olympiadeklasse 9

1. Es sei y eine natürliche Zahl, für die $25 < y \leqq 50$ gilt.

Die Ergänzung dieser Zahl bis 50 ist

$x = 50 - y$, und es gilt

$$\begin{aligned} y^2 &= (50 - x)^2 \\ &= 2500 - 100x + x^2 \\ &= 100(25 - x) + x^2, \end{aligned}$$

also wegen $x = 50 - y$

$$\begin{aligned} y^2 &= 100(25 - 50 + y) + x^2 \\ &= 100(y - 25) + x^2. \end{aligned}$$

Das heißt: Zu dem Quadrat x^2 der Ergänzung der gewählten Zahl y bis 50 ist das Hundertfache der Differenz $(y - 25)$ aus der gewählten Zahl und 25 zu addieren. Andererseits führt die von Marlies genannte Regel auf die Summe aus x^2 und dem Produkt von $(y - 25)$ mit derjenigen Zehnerpotenz, die der Stellenzahl des Quadrates x^2 entspricht. Daher ist diese Regel genau dann richtig, wenn das Quadrat x^2 eine zweistellige Zahl ergibt.

a) Für $41 \leqq y \leqq 46$ ist dies der Fall, dagegen nicht

b) für $26 \leqq y \leqq 40$ und

c) für $47 \leqq y \leqq 50$.

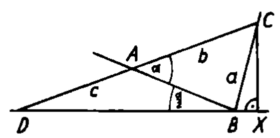
(Im Fall c) entsteht eine richtige Regel, wenn man in der durch Hintereinanderschreiben von $(y - 25)$ und x^2 gebildeten Zahl vor die letzte Stelle eine Ziffer 0 einschiebt, im Fall b), wenn man aus der gebildeten Zahl durch Addition der dritt- und viertletzten Stelle eine neue Zahl bildet, wobei eventuell auftretende Zehnerüberschreitungen wie üblich als Zehnerübertragung auf die vorangehende Stelle weiterwirken.)

2. I. Angenommen, es gibt ein Dreieck ΔABC, das den genannten Bedingungen entspricht.

Der Punkt D liege

1. auf der Verlängerung von CA über A hinaus,
2. auf dem Kreis mit c um A.

Dann ist ΔDBA gleichschenklig.



Hiernach und nach dem Satz über die Außenwinkel im Dreieck (angewandt auf Dreieck ΔDBA) gilt

$\sphericalangle BDA = \sphericalangle ABD = \frac{\alpha}{2}$. ($\sphericalangle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

II. Ein Dreieck ΔABC entspricht daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man konstruiert ein Dreieck $\Delta\ CDB$ aus $\overline{CD} = b + c$, $\overline{BC} = a$ und $\sphericalangle CDB = \frac{\alpha}{2}$. Im Punkte B trägt man an DB nach der Seite hin, auf der C liegt, den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, dessen freier Schenkel die Seite CD im Punkte A schneide.

III. Das Dreieck ΔABC entspricht den Bedingungen.

Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{BC} = a$. Ferner ist laut Konstruktion $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBA = \frac{\alpha}{2}$, also nach dem Außenwinkelsatz $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Schließlich folgt, daß ΔADB gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AB}$ ist und daß somit, da nach Konstruktion $\overline{CD} = b + c$ gilt, auch die Summe $\overline{AC} + \overline{AB}$ den vorgeschriebenen Wert $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{CD} = a + c$ hat.

IV. Die Konstruktion ist nicht möglich, wenn eine der Bedingungen

$0^0 < \alpha < 180°$ und $b + c > a$ verletzt ist.

Seien nun beide Bedingungen erfüllt. Da dann das Dreieck $\Delta\ CDB$ aus zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren gegenüberliegt, konstruiert wird, enthält man entweder überhaupt kein Dreieck oder genau ein Dreieck oder genau zwei verschiedene Dreiecke.

Die Bedingungen dafür können von den Schülern dieser Klasse in etwa folgender Form angegeben werden: Man konstruiere das (bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte) Dreieck $\Delta\ CDX$ mit $\overline{CD} = b + c$,

$\sphericalangle CDX = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle CXD = 90°$.

Dann ist die Konstruktion des gesuchten Dreiecks $\Delta\ ABC$ — nicht durchführbar, wenn

$a < \overline{CX}$,

— bis auf Kongruenz — eindeutig durchführbar, wenn

$a = \overline{CX}$ gilt. — bis auf Kongruenz genau zweideutig durchführbar, wenn $a > \overline{CX}$ gilt.

3. Angenommen, es gibt ein solches Zahlentripel. Dann gilt: (1) Durch Addition erhält man aus den vier Gleichungen:

$4a = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 10$. Damit ist

$$a = \frac{5}{2}.$$

(2) Durch Subtraktion erhält man aus der ersten und zweiten bzw. dritten und vierten Gleichung:

$2c = s_1 - s_2$ und $2c = s_3 - s_4$,

also $s_1 - s_2 = s_3 - s_4$.

Von den Gleichheitsaussagen dieser Form, in denen für s_1, s_2, s_3, s_4 bis auf die Reihenfolge genau die Zahlen 1, 2, 3, 4 stehen, sind (abgesehen von Seitenvertauschung) nur die folgenden wahr:

$$\begin{aligned} 1 - 2 &= 3 - 4 \\ 1 - 3 &= 2 - 4 \\ 2 - 1 &= 4 - 3 \\ 3 - 1 &= 4 - 2 \end{aligned}$$

Daher kommen für $2c$ nur die Werte -1, -2, 1 und 2 in Frage, und c kann nur $-\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ und 1 sein.

(3) Aus der ersten und dritten bzw. zweiten und vierten Gleichung folgt wie in (2)

$$\begin{aligned} 2b &= s_1 - s_3 \\ 2b &= s_2 - s_4, \end{aligned}$$

und b kann ebenfalls nur die Werte $-\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ und 1 annehmen.

(4) Da $a = \frac{5}{2}$ ist, können b und c nicht gleichzeitig ganze Zahlen sein; sonst wären die linken Seiten der gegebenen Gleichungen nicht ganzzahlig.

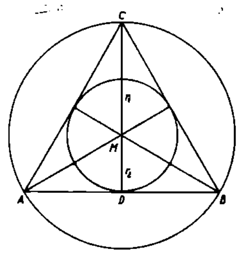
(5) Ferner können b und c nicht gleichzeitig je einer der angegebenen Brüche sein; sonst wäre die linke Seite einer der gegebenen Gleichungen die Summe $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, also nicht ganzzahlig.

Durch Kombination der gefundenen Werte von b und c und unter Berücksichtigung von (4) und (5) können höchstens die folgenden Zahlentripel Lösung sein:

$\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$,
$\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$
$\left(\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

Durch Einsetzen überzeugt man sich, daß sie tatsächlich Lösungen sind.

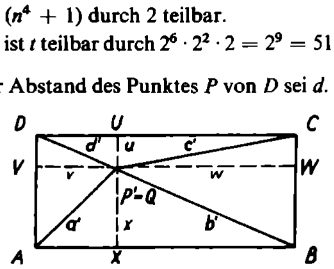
4. In jedem gleichseitigen Dreieck fallen die Mittelpunkte von Inkreis (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) und Umkreis (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) zusammen. Dieser Mittelpunkt M ist zugleich auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\Delta\ ABC$.
Deshalb gilt (1)
$\overline{MC} : \overline{MD} = 2 : 1$.
$\overline{MC} = r_1$ ist der Radius des Umkreises,
$\overline{MD} = r_2$ ist der Radius des Inkreises.



Nach (1) ist damit $r_1 = 2r_2$.
Für die Inhalte F_1 der Umkreisfläche und F_2 der Inkreisfläche gilt dann
$F_1 = {r_1}^2 \cdot \pi$
und $F_2 = {r_2}^2 \cdot \pi$
Wegen $r_1 = 2r_2$ folgt daraus
$F_1 = 4F_2$
Die Inhalte von In- und Umkreisfläche verhalten sich beim gleichseitigen Dreieck wie 1 : 4.

5. Die zu untersuchende Zahl ist
$t = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1)$
$= (n^8 - 1)(n^4 - 1)$
$= (n + 1)^2 (n - 1)^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1)$
$= [(n + 1)(n - 1)]^2 \cdot (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1)$.
Da n ungerade ist, so sind die zu n benachbarten Zahlen $(n + 1)$ und $(n - 1)$ beide gerade, und eine von ihnen ist durch 4 teilbar. Demnach ist $(n + 1)(n - 1)$ durch 8 und das Quadrat dieser Zahl durch 64 teilbar.
n^2 und n^4 sind als Potenzen einer ungeraden Zahl ebenfalls ungerade, also ist
$(n^2 + 1)$ durch 2,
$(n^2 + 1)^2$ durch 4 und
$(n^4 + 1)$ durch 2 teilbar.
Damit ist t teilbar durch $2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.

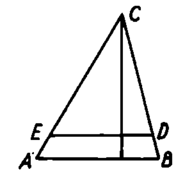
6. Der Abstand des Punktes P von D sei d.



Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks. Die Parallele durch Q zu $\genfrac{}{}{0pt}{}{(AD)}{(AB)}$ schneide die Gerade $\genfrac{}{}{0pt}{}{(AB)}{(AD)}$ in $\genfrac{}{}{0pt}{}{(X)}{(V)}$, die Gerade $\genfrac{}{}{0pt}{}{(DC)}{(BC)}$ in $\genfrac{}{}{0pt}{}{(U)}{(W)}$. Es sei
$\overline{PQ} = h$, $\overline{QX} = x$, $\overline{QU} = u$, $\overline{QV} = v$, $\overline{QW} = w$.
Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:
$a^2 = v^2 + x^2 + h^2$
$b^2 = w^2 + x^2 + h^2$
$c^2 = u^2 + w^2 + h^2$
$d^2 = u^2 + v^2 + h^2$
Daraus folgt (nach Addition)
$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$ und
$b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$.
Somit gilt
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit
$d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geq b^2$).
Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich
$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}.$$

Olympiadeklasse 10

1. Die Dreiecke $\Delta\ ABC$ und $\Delta\ EDC$ sind ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen. Das Dreieck ΔEDC hat den Flächeninhalt
$$F_3 = F_1 - \frac{1}{3} F_1, \text{ also gilt } \frac{F_3}{F_1} = \frac{2}{3}$$



Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate homologer Seiten verhalten, folgt hieraus
$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, also $\overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 18\,\text{cm}$
$= 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

2. b) I) Angenommen, es gebe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n, x - n + 1, \ldots, x, \ldots, x + n$ und erfüllen die Gleichung
(1) $(x - n)^2 + \ldots + (x - 1)^2 + x^2$
$= (x + 1)^2 + \ldots + (x + n)^2$.
Wegen $(x + k)^2 - (x - k)^2 = 4kx\ (k = 1, \ldots, n)$ folgt aus (1)
$$x^2 = 4(1 + \ldots + n)x = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot x, \text{ also}$$
(2) $x(x - 2n(n + 1)) = 0$.
Daher muß $x = 0$ oder
$x = 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$ sein, d. h. es kommen nur die Zusammenstellungen
(3) $-n, -n + 1, \ldots, 0, \ldots, n$
(4) $2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, \ldots, 2n^2 + 2n, \ldots, 2n^2 + 3n$ als Lösungen in Frage.
II) In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n + 1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie in I) auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$ ein, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen 10, ..., 14, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, \ldots, 2$.

3. Aus $a^2 + b^2 = 6ab$ folgt
$a^2 + 2ab + b^2 = 8ab$
$(a + b)^2 = (\sqrt{8ab})^2$, also,
da wegen
$a, b > 0$ sicher $a + b > 0$ ist,
$a + b = \sqrt{8ab}$
Aus $a^2 + b^2 = 6ab$ folgt
$a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$
$(a - b)^2 = 4ab$, also, da wegen
$a > b$ sicher $a - b > 0$ ist,
$a - b = \sqrt{4ab}$.
Also ist
$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{8ab}{4ab}} = \sqrt{2}.$$
Durch Logarithmieren erhält man
$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2}\lg 2.$$
Damit ist die Behauptung bewiesen.

4. I. S_y ist genau dann ein Punkt der entstehenden Parabel, wenn seine Koordinaten deren Gleichung erfüllen. Hierfür ist $8 = q$ notwendig und hinreichend.
II. Sei nunmehr $q = 8$ vorausgesetzt.
Die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + 8 = 0$.
Für sie erhält man
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32}$$
$$\text{und } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32}$$
(vorausgesetzt, daß $|p| \geq 4\sqrt{2}$ ist; anderenfalls hat die Parabel keinen Punkt auf der x-Achse).
Die Bedingung $x_1 - x_2 = 7$ ist somit gleichbedeutend mit
$\sqrt{p^2 - 32} = 7$, dies mit
$p^2 - 32 = 49$, d. h. mit $p^2 = 81$,
und dies damit, daß entweder $p = 9$ oder $p = -9$ gilt.
Hat man statt der bisher genannten logischen Äquivalenzen nur in einer Richtung (zu $q = 8$ und zu $p = 9$ oder $p = -9$ hin) führende Schlüsse geschrieben, so eignet sich zum dann erforderlichen Nachweis der Umkehrung auch folgende
Probe: Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8)$ schneidet die x-Achse in den Punkten $S_1(8; 0)$ und $S_2(1; 0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0; 8)$.
Das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2 + 9x + 8 = (x + 1) \cdot (x + 8)$ schneidet die x-Achse in den Punkten $S_3(-1; 0)$ und $S_4(-8; 0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0; 8)$.

5. Es gilt der Satz:
Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen dieses Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so daß G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.
Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist
$\overline{\sphericalangle KGH} + \overline{\sphericalangle GHL} = 90°$. ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

6. Es gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen r und s:
$p = 2r + 1 \qquad q = 2s + 1.$
Daraus folgt:
$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 4(r-s)(r+s+1)$
Von den Zahlen $r - s$ und $r + s + 1$ ist genau eine durch 2 teilbar, da ihre Summe ungerade ist.
Daher ist
$p^2 - q^2$ durch 8 teilbar.
Andererseits gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen x und y
$p = 3x + 1$ oder $p = 3x - 1$ und
$q = 3y + 1$ oder $q = 3y - 1$.
Es gibt daher genau die folgenden Möglichkeiten:
(1) $p = 3x + 1$ und $q = 3y + 1$
(2) $p = 3x - 1$ und $q = 3y - 1$
(3) $p = 3x + 1$ und $q = 3y - 1$
(4) $p = 3x - 1$ und $q = 3y + 1$
Für (1) und (2) gilt: $p - q = 3(x - y)$
Für (3) und (4) gilt: $p + q = 3(x - y)$.
Da $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ gilt, ist somit in jedem Falle $p^2 - q^2$ durch 3 teilbar.
Wegen $(8, 3) = 1$ ist folglich $p^2 - q^2$ auch stets durch 24 teilbar.
2. Lösungsweg:
Mit geeigneten natürlichen Zahlen m, n ist $p = 6m \pm 1$ und $q = 6n \pm 1$ (wobei für p und q voneinander unabhängig je eines der Vorzeichen gilt), also
(5) $p^2 - q^2 = 12\, m(3m \pm 1) - n(3n + 1)$
ist für $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerades}}{\text{ungerades}}$ m bzw. n der $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{erste}}{\text{zweite}}$ Faktor gerade; daher sind diese Produkte stets gerade, also auch ihre Differenz. Hiernach folgt aus (5) die Behauptung.

DDR-Olympiade

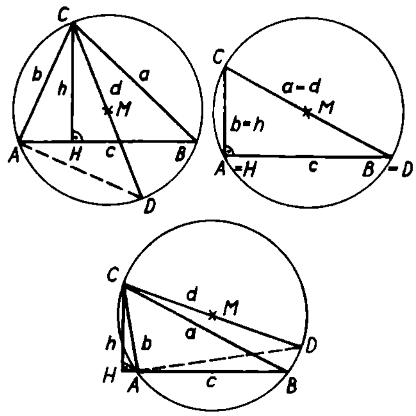
Olympiadeklasse 10

1. Aufgabe
Lösung 1 in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission
a) Im Dreieck ΔABC sei H der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B. Der durch C gehende Durchmesser des Umkreises schneide diesen im Punkt D.
Es bezeichne $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{CH} = h$, $\overline{CD} = d$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\sphericalangle ABC < 90°$ vorausgesetzt werden. Daraus folgt $D \neq A$ und $H \neq B$, so daß die beiden Dreiecke ΔADC und ΔHBC nicht entartet sind. Außerdem liegen B und D über demselben Bogen $\overset{\frown}{AC}$. Der Peripheriewinkelsatz liefert dann

$\sphericalangle HBC = \sphericalangle ADC.$

Ferner ist nach Definition der Höhe und nach dem Satz des Thales

$\sphericalangle CHB = \sphericalangle CAD = 90°.$



Aus diesen beiden Winkelbeziehungen resultiert nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\Delta ADC \sim \Delta HBC$ und damit

$a : h = d : b$, also $ab = hd$.

Die angestellten Überlegungen sind unabhängig davon, ob ΔABC ein spitz-, recht- oder stumpfwinkliges Dreieck ist (vgl. Abb.).
b) Für die Fläche F des Dreiecks ΔABC gilt die Formel

$$F = \frac{1}{2} h \cdot c.$$

Setzt man hier die aus a) folgende Beziehung $h = \frac{ab}{d}$ ein, so ergibt sich

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{d}.$$

Lösung 2
a) Es werden dieselben Bezeichnungen wie in Lösung 1 benutzt. Ferner seien α, β, γ die Winkel bei A, B, C.
Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = d,$$

speziell also

$\sin\alpha = \frac{a}{d}$. Außerdem ist stets

$\sin\alpha = \frac{h}{b}$,

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen:
Der von mehreren Schülern beschrittene Lösungsweg 2 ist wesentlich kürzer und einfacher als der 1. Lösungsweg. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß in der angegebenen Formulierung des Sinussatzes die Überlegungen aus Lösung 1 implizit enthalten sind.
Viele Schüler gaben keine ausreichende Rechtfertigung für die Anwendbarkeit des Peripheriewinkelsatzes. Es fehlte der Hinweis, daß B und D über demselben Bogen $\overset{\frown}{AC}$ liegen.
Zahlreiche Schüler fertigten eine Skizze an und führten ihren Beweis für den damit herausgegriffenen Spezialfall (meistens spitzwinkliges Dreieck). Sie überzeugten sich nicht von der Allgemeingültigkeit der Aussage für jedes beliebige Dreieck. Einige wenige Schüler hatten Schwierigkeiten bei dem Aufbau des Beweises. Sie setzten die Behauptung als bekannt voraus. *Dr. M. Müller*
Humboldt-Universität zu Berlin

Aufgabe 2
Es wird im folgenden mit geringfügigen Änderungen die Lösung der Schülerin Ursula Tyl, EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Kl. 10 angegeben.
a) Beweis der Existenz von s: Es genügt zu zeigen, daß
(1) $x - 1 \geqq 0$ bzw. $x \geqq 1$ ist.
Dann existiert $\sqrt{x-1}$ und wegen $x + 1 > x - 1$ auch $\sqrt{x+1}$; wegen $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$ ist der Nenner von s nicht 0 und damit s vorhanden. Zum Beweis von (1) bilde man

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{(a-b)^2}{2ab} + 1.$$

Da $(a - b)^2 > 0$ (weil $a \neq b$) und $ab > 0$, gilt somit sogar $x > 1$.
b) Vereinfachung von s:

$$s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)}$$
$$= x + \sqrt{(x+1)(x-1)}.$$

Mit $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ folgt

$$s = \frac{a^2 + b^2}{2ab} + \frac{|a^2 - b^2|}{2ab}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: $|a| > |b|$, also $a^2 > b^2$
und folglich $s = \frac{a}{b}$.
2. Fall: $|b| > |a|$, also $b^2 > a^2$
und folglich $s = \frac{b}{a}$.
Ein etwas anderer Lösungsweg verwendet

$$\sqrt{x+1} = \frac{|a+b|}{\sqrt{2ab}},\ \sqrt{x-1} = \frac{|a-b|}{\sqrt{2ab}},$$

demzufolge

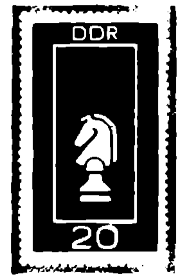
$$s = \frac{\frac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} + \frac{|a-b|}{\sqrt{2ab}}}{\frac{|a+b|}{\sqrt{2ab}} - \frac{|a-b|}{\sqrt{2ab}}} = \frac{|a+b| + |a-b|}{|a-b| - |a-b|}.$$

Nunmehr sind wegen $a \neq b$, $ab > 0$ die folgenden Fälle möglich:
1. $0 < a < b$: $s = \frac{a+b+b-a}{a+b-b+a} = \frac{b}{a}$.
2. $0 < b < a$: $s = \frac{a+b+a-b}{a+b-a+b} = \frac{a}{b}$.
3. $b < a < 0$: $s = \frac{-a-b+b-a}{-a-b-a+b} = \frac{b}{a}$.
4. $a < b < 0$: $s = \frac{-a-b+b-a}{-a-b-b+a} = \frac{a}{b}$.

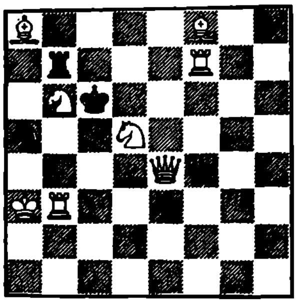
Dr. K. Zacharias, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

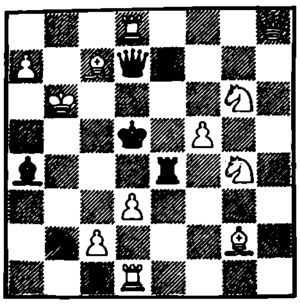
Die Lösungen der Aufgaben 3 bis 5 veröffentlichen wir im Heft 7/70, d. Red.

Rund um das Schachbrett



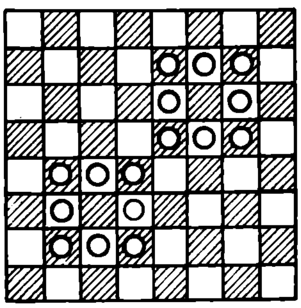
1 Matt in einem Zug, (J. Perkins, *Chess* 11/1950)





2 (T. P. Madely, *Chess* 11/1950)

3 Stellt ein weißes Pferd auf irgendein von euch ausgewähltes freies Feld so auf, daß mit diesem Pferd alle Bauern in einer möglichst geringen Anzahl von Zügen geschlagen werden können.

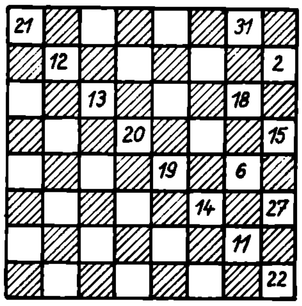


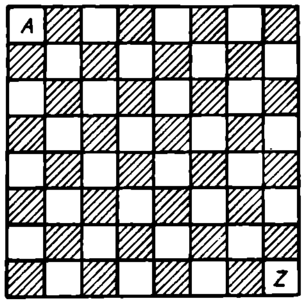
4a Es sind mit einer Mindestzahl von Königen alle Felder eines Schachbretts zu beherrschen. Das Standfeld des Königs soll als „beherrscht" gelten.

4b Wieviel Züge kann ein Springer auf einem leeren Schachbrett ausführen?

Die Briefmarke wurde zu Ehren der XVI. Mannschaftsmeisterschaft der Studenten im Schach 1969 (in Dresden) herausgegeben. (Vignette rechts oben) In der DDR-Mannschaft (6 Teilnehmer) standen die beiden Mathematikstudenten *Lutz Espig* (Halle) und *Manfred Schöneberg* (Leipzig). Die DDR belegte den 6. Platz.

5 Die Zahlen 1 bis 32 sind so in die weißen Felder zu verteilen, daß in jeder Reihe und Spalte die Summe 66 beträgt. (Zur Erleichterung der Lösung sind einige Zahlen vorgegeben.)





6a Stelle in die obere linke Ecke (A) des Schachbretts einen Stein. Er soll senkrecht oder waagerecht (nicht diagonal) zum gegenüberliegenden Eckfeld (Z) ziehen und dabei jedes Feld einmal durchlaufen.

6b Setze auf das mit A gekennzeichnete Feld einen Läufer. Er soll auf das mit Z bezeichnete Feld gezogen werden und zwar so, daß dabei alle weißen (also keine schwarzen) Felder des Brettes berührt werden. Die Kreuzung von Zuglinien ist gestattet. Kein Weg darf zweimal beschritten werden.

Unser Schach-Experte, Mathematikfachlehrer *K. Kannenberg*, Staßfurt, stellte Probleme zusammen:

7 Ist es möglich, einen Springer, der auf dem Feld a8 steht, so auf das Feld h1 zu bringen, daß er jedes Feld berührt, aber jedes Feld nur einmal?

8 Matt in 4 Zügen von *Dr. E. Zepler* (Urdruck in der „Schwalbe", Juli 1929):
Weiß: Ke5 Dc7 Th7
Schwarz: Ke8 Ta8 Lb5 Bb6 Bd7 Be4 Bf2

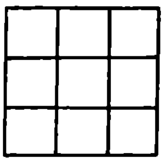
9 Weiß zieht und setzt mit demselben Zug beide Könige matt! Wie ist das möglich?
Weiß: Kd4 Sh6 Bd8 Bg2
Schwarz: Kf4 Sb2 Bb4 Bc6 Bg3

10 Beide Parteien haben außer ihrem König nur Springer auf dem Brett.
Weiß: Ka1 Sa6 b5 d1 d3
Schwarz: Kd5 Sc4 c6 e4 e6 Matt in 2 Zügen!

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 1. 3. 1970

5 ▲ 452 In die Felder des nachstehend abgebildeten Quadrates sind die Vielfachen der Zahl 5 (5, 10, 15, ..., 45) so einzutragen, daß die Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonale 75 beträgt.



Schülerin Cordula Saueressig, Mellensee

▲ 453 Peter kauft sich Hefte zu 7 Pf und zu 10 Pf das Stück; er hat für diese Hefte insgesamt 2,61 M zu zahlen. Wieviel Hefte zum Preise von 7 Pf das Stück sind dabei? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? P.

▲ 454 Die Maßzahl des Umfangs eines Rechtecks (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl des Flächeninhalts dieses Rechtecks (gemessen in cm^2). Ermittle mit Hilfe einer Tabelle Länge und Breite aller Rechtecke, die diese Bedingung erfüllen und bei denen die Maßzahlen der Seitenlängen natürliche Zahlen kleiner als 7 sind.

Sch.

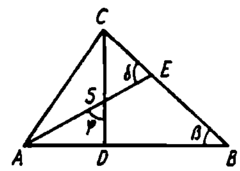
W 5 ■ 455 Heinz kauft sich drei Stück Kuchen, die alle unterschiedlich viel kosten; er hat dafür 0,82 M zu zahlen. Hätte er drei Stück des Kuchens mit dem niedrigsten Preis gekauft, so hätte er 0,22 M weniger ausgegeben. Hätte er dagegen drei Stück des Kuchens mit dem höchsten Preis genommen, so hätte er 0,23 M mehr zahlen müssen. Wieviel kostet jedes der drei von Heinz gekauften Stück Kuchen?

Sch.

W 5 ■ 456 Drei Freunde, Axel, Bernd und Dieter, unternahmen eine Radwanderung. Bei der ersten Rast stellte Axel fest, daß er seine Frühstücksstullen zu Hause hatte liegen lassen. Die drei Freunde teilten die von Bernd und Dieter mitgebrachten Stullen unter sich zu gleichen Teilen auf. Nachdem jeder zwei verzehrt hatte, besaßen sie zusammen noch soviel Stullen, wie jeder von ihnen bei der Aufteilung erhalten hatte. Wieviel Stullen hatten Bernd und Dieter zusammen mitgebracht?

Sch.

6 ▲ 457 In dem abgebildeten Dreieck ABC sind die Höhe $\overline{CD} = h_c$ und die Winkelhalbierende $\overline{AE} = w_\alpha$ eingezeichnet. Der Winkel $\sphericalangle ABC = \beta$ beträgt 60°, und der Winkel $\sphericalangle AEC = \delta$ beträgt 83°. Es ist die Größe der Dreieckswinkel α und γ und des Winkels $\sphericalangle ASD = \varphi$ zu bestimmen.



Schüler Rainer Zweck, Wismar, Kl. 7

▲ 458 Es ist die kleinste dreistellige natürliche Zahl zu finden, für die folgendes gilt:
a) Sie ist durch 3, 4 und 5 teilbar.
b) Sie ist weder durch 9 noch durch 13 noch durch 25 teilbar.
c) Sie läßt bei Division durch 11 den Rest 4.

Schüler Lutz Mängel, Berlin

▲ 459 Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte P_1, P_2 und P_3. Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen Abstand haben. Wie viele solcher Geraden gibt es? Welche Feststellung läßt sich nach Ausführung der Konstruktion bezüglich der erhaltenen Schnittpunkte machen?

Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig

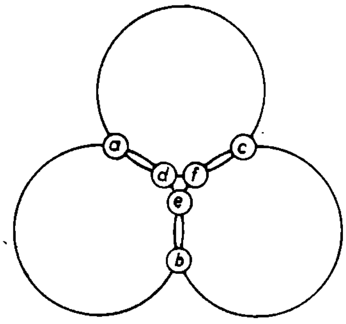
W 6 ■ 460 Vier Bekannte aus dem Bezirk Karl-Marx-Stadt, die ihren Urlaub an der Ostsee verbringen wollen, trafen sich zufällig in Rostock auf dem Bahnhof. Diese vier Urlauber mit den Familiennamen Meier, Conrad, Lange und Fischer wohnen in verschiedenen Städten, und zwar in Plauen, Zwickau, Werdau und Aue. Sie üben alle einen unterschiedlichen Beruf aus, und zwar den Beruf eines Klempners, Kraftfahrers, Ingenieurs und Tischlers. Von diesen vier Personen ist uns folgendes bekannt:
a) Der Ingenieur wohnt in Zwickau.
b) Der Kraftfahrer, der Ingenieur und Herr Conrad stehen untereinander im Briefwechsel.
c) Herr Fischer und Herr Meier lernten sich durch den Kraftfahrer kennen.
d) Der Tischler wohnt in Plauen und ist mit dem Herrn aus Zwickau verwandt.
e) Herr Fischer, der in seinem Wohnort Plauen in den Zug stieg, traf Herrn Lange in einem Abteil.
f) Der Kraftfahrer wohnt mit dem Herrn aus Aue während des Urlaubs im gleichen Hotel.
Den Familiennamen sind die richtigen Berufe und Wohnorte zuzuordnen.

Schüler Bernd Kutnik, Teterow, Kl. 7

W 6 ■ 461 Untersuche, ob der folgende Satz eine wahre oder eine falsche Aussage darstellt:
„Dividiert man eine natürliche Zahl, die größer als Null und kleiner als 1024 ist, durch 1024, so erhält man als Quotienten stets einen endlichen Dezimalbruch."
Begründe deine Feststellung!

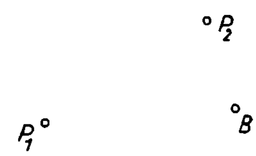
Schüler Th. Wolf, Schleiz

7 ▲ 462 Unter einem „Primzahldrilling" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p + 2$, $p + 4$ darstellen lassen. Beweise, daß es nur einen solchen „Primzahldrilling" gibt! Aus welchen Zahlen besteht er?



Schüler Pawel Kröger, Leipzig, Kl. 5

▲ 463 Gegeben sind die drei Punkte B, P_1 und P_2. Man konstruiere zwei gleich große, sich in B berührende Kreise k_1 und k_2 derart, daß k_1 durch P_1 und k_2 durch P_2 geht.



Dr. E. Schröder, TU Dresden

▲ 464 Zwei konvexe Vielecke besitzen zusammen 21 Seiten. Das zweite Vieleck hat doppelt so viele Diagonalen wie das erste. Wieviel Eckpunkte besitzt jedes der beiden Vielecke?

StR. D. Michels, Rostock

W 7 ■ 465 Eine vierstellige Kraftfahrzeugnummer weist folgende Besonderheiten auf:
a) Die erste ist gleich der zweiten und die dritte gleich der vierten Ziffer.
b) Die vierstellige Zahl ist eine Quadratzahl.
Wie lautet die Kraftfahrzeugnummer?

Mathematikfachlehrer Dieter Fischer, Plauen

W 7 ■ 466 Die unten abgebildete Figur stellt drei einander kongruente Kreise k_1, k_2 und k_3 dar, die sich paarweise in genau zwei

Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte sind durch kleinere Kreise markiert, in die die Buchstaben a, b, c, d, e und f eingetragen wurden. Diese Buchstaben sind durch sechs natürliche Zahlen, die paarweise voneinander verschieden sind, so zu ersetzen, daß die Produkte der jeweils auf einem Kreis liegenden Zahlen sämtlich gleich 144 sind.

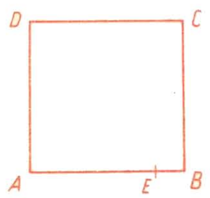
T.

8 ▲ 467 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist der Flächeninhalt dieses Vierecks gleich dem halben Produkt der Länge der Diagonalen: $A = \frac{ef}{2}$.

(Bemerkung: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn beide Diagonalen im Innern des Vierecks liegen.)

Sch.

▲ 468 Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Dieses Quadrat soll in ein flächengleiches Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite $\overline{AE}$ gegeben ist (vgl. die Abb.).



Man konstruiere die andere Rechteckseite und zeichne das flächengleiche Rechteck.

Dr. E. Schröder, TU Dresden

W 8 ■ 469 Seit Juni 1969 wird auch die Route Moskau—Tokio von der sowjetischen Fluggesellschaft *Aeroflot* regelmäßig im Nonstop-Flug beflogen.
Die IL 62 startet in Moskau um 20.25 Uhr Moskauer Zeit und trifft am nächsten Tag um 12.15 Uhr (Japanische Zeit) in Tokio ein.
Auf dem Rückflug startet die Maschine in Tokio um 8.20 Uhr (Japanische Zeit) und landet in Moskau an demselben Tag um 13.00 Uhr (Moskauer Zeit).
a) Es soll die Zeit für den Hin- bzw. Rückflug ermittelt werden. Dabei ist bekannt, daß die Differenz dieser beiden Zeiten kleiner ist als 1 h und daß die Differenz zwischen der Moskauer Zeit und der Japanischen Zeit eine ganze Anzahl von Stunden beträgt.
b) Es soll die mittlere Geschwindigkeit (Reisegeschwindigkeit) auf dem Hin- bzw. Rückflug berechnet werden. Die Flugstrecke beträgt rund 8000 km.

L.

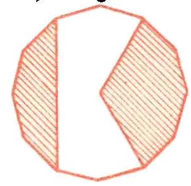
W 8 ■ 470 Von sechs äußerlich gleich aussehenden Kugeln sind vier schwerer als die beiden restlichen Kugeln. Die vier schwereren sowie die zwei leichteren Kugeln sind untereinander jeweils massegleich. Mit höchstens drei Wägungen mittels einer Tafelwaage (ohne Wägestücke) ist festzustellen, welche die schwereren und welche die leichteren Kugeln sind!

T.

9 ▲ 471 Es seien a und b zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler (g. g. T.) und m ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (k. g. V.). Ferner seien $r = ab - d$ die Differenz zwischen dem Produkt und dem g. g. T. dieser Zahlen und $q = \frac{m}{d}$ der Quotient aus dem k. g. V. und dem g. g. T. dieser Zahlen.
Es ist zu beweisen, daß dann die Zahl $1 + 4rq$ stets gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist, und es ist diese Zahl anzugeben.
Ferner soll diese Zahl für $a = 8$, $b = 6$ berechnet werden.

Dipl.-Math. Bernd Noack und Monika Noack, Berlin

▲ 472 Ein regelmäßiges Zwölfeck sei wie in der nebenstehenden Figur in drei Teilfiguren zerlegt worden.
Ist der Flächeninhalt der mittleren (weißen) Teilfigur größer oder kleiner als die Summe der Flächeninhalte der beiden äußeren (schwarzen) Teilfiguren?



Erst schätzen, dann berechnen! *L.*

W 9 ■ 473 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x + ay = 2, \quad (1)$$
$$y - a^2 z = 1, \quad (2)$$
$$x + az = 3, \quad (3)$$

wobei a eine reelle Zahl ist.
a) Das Gleichungssystem ist zu lösen, falls a von 0, 1 und -1 verschieden ist.
b) Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem, falls $a = 0$, $a = 1$ bzw. $a = -1$ ist?

Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Träger eines 3. Preises bei der IMO 1969

W 9 ■ 474 Gegeben seien in der Ebene 8 Punkte, von denen je drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Jeder dieser Punkte sei mit jedem anderen Punkt durch eine Gerade verbunden.
a) Wie viele Verbindungsgeraden gibt es in diesem Falle?
b) Wie viele Verbindungsgeraden erhält man, wenn genau n Punkte mit $n \geq 2$ gegeben sind?
c) Wie viele Punkte, von denen je drei nicht auf einer Geraden liegen, sind in der Ebene gegeben, wenn man genau 45 Verbindungsgeraden erhält? *S.-H.*

10 ▲ 475 Es sind alle positiven reellen Zahlen x mit $x \neq 1$ zu bestimmen, für die die Gleichung

$$\log_x 4 + \log_{x^2} 8 + \log_{x^3} 16 + \log_{x^4} 32 = \frac{73}{12}$$

erfüllt ist.

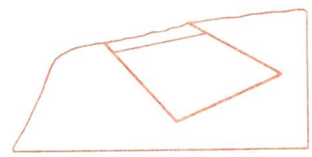
Gerhard Spens, Humboldt-Oberschule, Erfurt-Hochheim, Kl. 10d (V)

▲ 476 Es seien a, b und c reelle Zahlen mit $a + b + c \geq 1$.
Man beweise, daß dann stets die Ungleichung

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{1}{27} \text{ erfüllt ist.}$$

L.

W 10/12 ■ 477 Auf einer angerissenen Ansichtskarte ist nur noch ein Teil eines Fußballfeldes mit Mittellinie zu sehen. Fritz klebt die angerissene Karte auf Zeichenkarton und rekonstruiert mit Bleistift und Lineal das Bild des ganzen Fußballfeldes. Wie macht er das?



Dr. E. Schröder, TU Dresden

W 10/12 ■ 478 Zu berechnen ist der Term

$$z = \frac{38795689 \cdot 38795688 \cdot 38795687 \cdot 38795686}{38795688^2 + 38795686^2} - \frac{38795684 \cdot 38795683 \cdot 38795682 \cdot 38795681}{38795684^2 + 38795682^2}$$

Dabei soll ein unnötig hoher Rechenaufwand vermieden werden.
Anleitung: Man ersetzt eine geeignete Zahl durch eine Variable, drückt alle in dem obigen Term vorkommenden Zahlen durch diese Variable aus und berechnet den so erhaltenen Term.

Dozent L. M. Lopowok, Lugansk, UdSSR

Wir stellen die Aufgabengruppe der Zeitschrift *alpha* vor und teilen mit, daß wir ihre Namen abgekürzt in Anschluß an die von ihnen gestellten Aufgaben veröffentlichen.
Oberstudienrat Dr. *Rolf Lüders*, Institut für Lehrerbildung, Berlin — Oberlehrer *Theodor Scholl*, Hauptreferent im Ministerium für Volksbildung (beide Endredaktion) — Oberstudienrat *Gerhard Schulze*, Fachberater Mathematik und Lehrer an der EOS Herzberg/Elster (Klassenstufe 9/10) — Mathematikfachlehrer *Walter Träger*, Schloßberg-Oberschule, Döbeln (Klassenstufe 7/8) — Oberlehrer *Helmut Pätzold*, Fachberater Mathematik und Lehrer an der OS Waren/Müritz — Mathematikfachlehrer *Walter Unze*, Sonderschule für Körperbehinderte, Leipzig — Studienrat *Johannes Lehmann*, Verdienter Lehrer des Volkes, Chefredakteur und Lehrer an der 29. OS, Leipzig

Lüders — L.,	Schulze — S.-H.,
Pätzold — P.,	Lehmann — L.-L.,
Scholl — Sch.,	Träger — T.,
Unze — U.	

Preisträger

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5

Ole-André Strzalla 22 Greifswald; **Sigrun Geyer** 657 Zeulenroda; **Kerstin Bachmann** 402 Halle; **Jörg Lehnert** 2034 Tutow; **Sibille Rohrbeck** 2302 Franzburg; **Andreas Knopf** 7144 Schkeuditz; **Brigitte Hildenbrandt** 6316 Stützerbach; **Burkhard Schneider** 6081 Fambach; Heinz Hering 50 Erfurt; Annegret Kirsten 422 Leuna; Ute Wittat 9507 Ebersbrunn; Martina Römer 128 Bernau; Matthias Liehm 3702 Benneckenstein; Frank Kolwe 128 Bernau; Frank Lux 5801 Gräfenhain; Detlev Snaga 128 Bernau; Matthias und Joh. Chr. Albrecht 1281 Lobetal; Michael Schnelle 754 Calau; Eckhard Schadow 14 Oranienburg; Uta Heller 50 Erfurt; Barbara Wettengel 992 Oelsnitz; Birgit Bartels 2567 Neubukow; Elke Kantiem 1195 Berlin; Doris Siegmund 3561 Heidberg; Petra Dietzel 4271 Adendorf; Kirsten Helbig 1321 Schöneberg; Marlies Langner 2301 Devin/Stralsund; Janko Russev 50 Erfurt; Tobias Latwesen 63 Ilmenau; Bernd Lins 57 Mühlhausen; Matthias Neumann 60 Suhl; Sabine Anders, 75 Cottbus.

Klassenstufe 6

Bernd Zaddach 75 Cottbus; **Ralph Lehmann** 1273 Petershagen; **Christoph Scheurer** 9611 Glauchau-Gesau; **Bernd Mathiszik** 50 Erfurt; **Dirk Wiesener** 1055 Berlin; **Gisela Köhler** 926 Hainichen; Andreas Schlosser 95 Zwikkau; Ehrenfried Zschech 86 Bautzen; Karin Weyh 6081 Fambach; Angelika Kirchhoff 701 Leipzig; Jürgen Zabel 57 Mühlhausen; Uwe Quasthoff 7022 Leipzig; Jörg Hutschenreiter 8020 Dresden; Christian Hofmann 7404 Meuselwitz; Hans-Jürgen Förster 1532 Kleinmachnow; Manuela Terne 795 Bad Liebenwerda; Carmen Schneider 6081 Fambach; Clemens Schlechte 808 Dresden; Heike Jurack 8502 Burkau; Elke Schneider 50 Erfurt; Gerd Falk 1532 Kleinmachnow; Carola Wobst 8502 Burkau; Christina Feige 57 Mühlhausen; Angela Petzold 115 Berlin-Mahlsdorf; Siegfried Marg 1501 Neu-Töplitz; Rita Oswald 8291 Friedersdorf; Norbert Göttke 14 Oranienburg; Regina Hildenbrandt 6316 Stützerbach; Frank Heyne 8107 Liegau; Lutz Püffeld 1422 Hennigsdorf.

Klassenstufe 7

Albrecht Heß 8027 Dresden; **Cordula Gierth** 925 Mittweida; **Herwig Gratias** 523 Sömmerda; **Ulf Brüstel** 7401 Ziegelheim; **Hans-Gert Gräbe** 50 Erfurt; **Reinhard Schuster** 703 Leipzig; Gerwit Becker 9251 Lauenhain; Thomas Ortmann 57 Mühlhausen; Ute Winkler 153 Teltow-Seehof; Jürgen Heß 50 Erfurt; Stefan Schulze 5211 Oberwillingen; Eberhard Manske 6088 Steinbach-Hallenberg; Rainer Zweck 24 Wismar; Frank Ihlenburg 22 Greifswald; Angela Rohrbeck 2302 Franzburg; Claus-Detlev Bauermeister 8019 Dresden; Frank Baumgartl 9412 Schneeberg; Anita Paul 608 Schmalkalden; Sigrid Jankowski 205 Teterow; Dietlind Kobes 205 Teterow; Bernd Klipps 2051 Boddin; Monika Seiler 53 Weimar; Volkmar Krause 7261 Wiederoda.

Klassenstufe 8

Albrecht Böttcher 9314 Neudorf; **Viktoria Weise** 48 Naumburg; **Harald Herrmann** 9301 Hammerunterwiesenthal; **Andreas Juhl** 425 Eisleben; **Ursula Baier** 825 Meißen; **Ralf Hein** 9611 Remse; Jürgen Ast 1824 Niemegk; Beate Weise 48 Naumburg; Hans-Joachim Karl 612 Eisfeld; Detlef Hantke 183 Rathenow; Erdmute Kriebel 821 Freital; Peter Mathé 29 Wittenberge; Karen Nielsen 821 Freital; Wolfgang Herrmann 9306 Elterlein; Ulrich Tetzlaff 1553 Friesack; Sabine Dittrich 9402 Bernsbach; Manfred Bobeth 806 Dresden; Bettina Belitz 68 Saalfeld; Elke Wiemann 8245 Glashütte; Carmen Hauptmann 8245 Glashütte.

Klassenstufe 9

Konrad Schneider 95 Zwickau; **Dietmar Wegner** 3601 Dardesheim; **Jürgen Voigt** 9533 Wilkau-Haßlau; **Ekkehard Kührt** 606 Zella-Mehlis; **Thomas Schwan** 8019 Dresden; **Ilona Boenigk** 94 Aue; Rainer Staudte 9501 Culitzsch; Heinz Marbes 128 Bernau; Ulrike Weise 9274 Wüstenbrand; Frank Täubner 754 Calau; Rolf Haftmann 88 Zittau; Jürgen Ilse 1134 Berlin; Bernd Kruska 102 Berlin; Detlev Karl 602 Schmalkalden; Thomas Winkler 9933 Bad Elster; Ursula Gebauer 6404 Rauenstein; Hans-Jürgen Mehls 5603 Dingelstädt; Detlef Bage 3223 Seehausen; Wolfgang Riedel 90 Karl-Marx-Stadt; Petra Jauch 59 Eisenach.

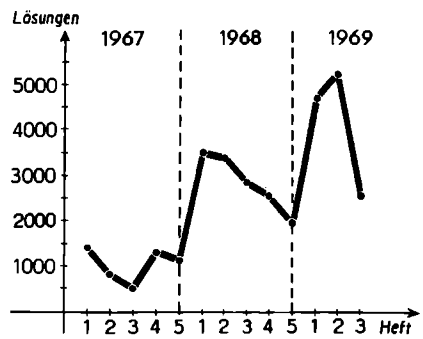
Klassenstufe 10/12

Hans-Peter Gronau 208 Neustrelitz; **Frank Müller** 798 Finsterwalde; **Bernd Kreutzer** 209 Templin; **Wolf Holowenko** 6532 Klosterlausnitz; **Rolf Dieckmann** 24 Wismar; **Gert Wanka** 73 Döbeln; Karl Paul 1544 Elstal; Klaus Schönefeld 53 Weimar; Wolfgang Wagner 402 Halle; Klaus Ditze 36 Halberstadt; Marlies Eberlein 8231 Niederfrauendorf; Ute Lange 1502 Potsdam-Babelsberg; Gernot Spiewok 22 Greifswald; Herbert Zinke 4371 Libehna; Bernd Hofmann 8808 Niederoderwitz; Stefan Ackermann 725 Wurzen; Rüdiger Nützmann 2031 Trittelwitz; Hans-Gert Leopold 69 Jena; Bernd Gossinger 6902 Jena-Lobeda; Detlev Schmidt 1631 Dabendorf; Jürgen Schmidt 757 Forst; Winfrid Helwig 3591 Jeetze.

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

Kollektive Beteiligung

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden (608); OS Mahlis (7261); Goetheschule (Schulkombinat-Oberschule Lauscha) Lauscha-Ernstthal (6426); OS Ebersbrunn (9507); EOS Worbis (562); OS Kuhfelde (3561); John-Brinckmann-OS Goldberg (2862); POS Gottleuba (8302); Klub Jg. Mathematiker Wismar (24); Mathematik-Spezialistenlager Berlin-Köpenick (117); OS Burkau (8502); Käthe-Kollwitz-OS, Weimar (53); OS Markersbach (9439); Clara-Zetkin-OS, Wiehe/Unstruttal (4736); EOS Karl-Marx, Tangerhütte (351); POS II Calau (754); Käthe-Kollwitz-OS, Wittenberg/Lutherstadt (46); AG Mathematik Großröhrsdorf (8512); POS IV Arnstadt (521); AG Mathematik, Kreis Altentreptow (202); OS Rüdnitz, Krs. Bernau (128); OS Andershof, Stralsund (23); POS Alt-Töplitz (1501); Dr.-Theodor-Neubauer-OS, Kieselbach/Werra (6201); OS Zaatzke (1931); Comenius-OS Burg (327); OS Parkentin (2561); EOS Kamenz (829).

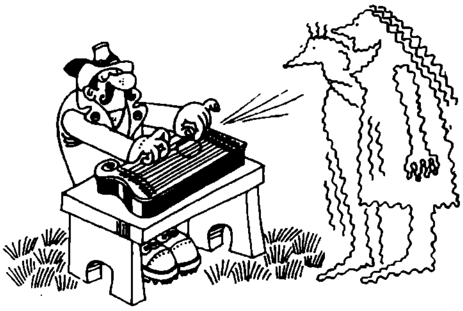


Rund 32000 Lösungen gingen in den letzten $2^1/_2$ Jahren zu den gestellten Wettbewerbsaufgaben 1967/69 ein. Wir sprechen allen *Jungen Mathematikern* unsere Hochachtung für den Fleiß und die Ausdauer aus, mit der sie die gestellten Probleme bearbeiteten. Unser Dank gilt dem Kollektiv der Lehrer (siehe S. 135), welches in unermüdlicher Kleinarbeit Aufgaben zusammenstellte und Lösungen erarbeitete. Unterstützt wurde es von zahlreichen Einsendern, ob jung oder alt. Das möge so bleiben.

Wer die Grafik analysiert, wird feststellen, daß in den Sommerferien wenig Neigung bestand, Lösungen einzusenden. Der Einsendeschluß für Heft 3/70 wird daher auf 15. September gelegt. Weiterhin schöne Erfolge beim *alpha*-Wettbewerb wünscht das

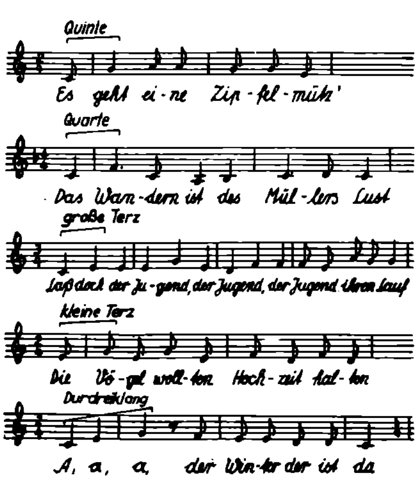
Redaktionskollegium

Mathematik und Musik



„Ein wahrer Künstler: Bei seinem Spiel geht man so richtig mit!"
Louis Rauwolf 28/69 Eulenspiegel

Was hat die Mathematik mit der Musik zu tun? Diese und ähnliche Fragen kann man vor allem dann hören, wenn sich bei der Auswertung von Mathematik-Olympiaden und anderen mathematischen Schülerwettbewerben herausstellt, daß hervorragende Ergebnisse von solchen Schülern erreicht wurden, die nicht nur mathematisch, sondern auch auf dem Gebiete der Musik besonders interessiert sind und dort ebenfalls besondere Leistungen hervorbringen.
So kann es nicht wundernehmen, wenn andererseits unter den Preisträgern bei musikalischen Wettbewerben — vor allem auf dem Gebiet der Instrumentalmusik — nicht selten auch besonders mathematisch Begabte anzutreffen sind.
Im allgemeinen sieht man in den beiden Fächern Mathematik und Musik eher mehr Unterschiede und vielleicht sogar Gegensätzlichkeiten als Gemeinsamkeiten. So ist es zweifellos richtig, daß die Mathematik in erster Linie den nüchternen Verstand, die Musik hingegen das Gefühl anspricht. Aber mit dieser Zuordnung kann sich nur eine oberflächliche Betrachtung zufriedengeben. Nicht nur die Musik, sondern auch die Mathematik weckt Freude und Begeisterung — vor allem dann, wenn eine knifflige Aufgabe erfolgreich gelöst werden konnte und wenn man erkennt, wie erworbenes mathematisches Wissen in zunehmendem Maße zu weiteren Erkenntnissen und Einsichten führt.
Die Musik wiederum ist keine nur gefühlsmäßige Angelegenheit. Zwar kann die Musik in hohem Maße Stimmungen und Gefühle ausdrücken, Gedanken und Handlungen verdeutlichen, aber bewußtes Musikhören setzt darüber hinaus vielfältige Kenntnisse voraus, die sich auf die Struktur der Musik (Melodie, Rhythmus, Harmonie) sowie auf Instrumentenkunde, Formenlehre und Musikgeschichte beziehen. Wer sich näher mit Musik beschäftigen will, weiß, daß er ohne Kenntnisse in der Notenschrift nicht weit kommt, und der Instrumentalspieler bedarf umfangreicher Übungen, um die Technik und die Ausdrucksmöglichkeiten seines Instruments zu bewältigen.
Da die Mathematik zu den Wissenschaften gehört, die Musik hingegen zu den Künsten, bleibt in dieser Einteilung meist völlig unbeachtet, daß auch die Musik auf wissenschaftlichen Grundlagen beruht. Sie finden sich in der Akustik, dem „klingenden" Teilgebiet der Physik. Bekanntlich ist die Physik sehr eng mit der Mathematik verbunden, viele ihrer Gesetze werden in mathematischen Formeln ausgedrückt. So liegt hier, in der naturwissenschaftlichen Sphäre, eine der unmittelbaren Beziehungen zwischen der Musik und der Mathematik.
Vom Altertum bis ins Mittelalter hinein galten die sogenannten *Sieben Freien Künste* als notwendiger Bestandteil der Bildung des „freien Mannes". Grammatik, Dialektik und Rhetorik waren im *Trivium* zusammengefaßt, während die vier „mathematischen" Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie das *Quadrivium* bildeten.
Es war kein Geringerer als *Pythagoras von Samos*, der die mathematischen Grundlagen der Musik erkannte. An einem selbst konstruierten Monochord, einem Instrument mit nur einer Saite, stellte er verschiedene Experimente an, die zu wichtigen Erkenntnissen führten. Sie werden heute von jedem Spieler eines Streich- oder Zupfinstruments angewandt, wenn er durch bestimmte Griffe die Länge der schwingenden Saiten seines Instruments verkürzt und damit die Tonhöhen verändert. Je kürzer die schwingende Saite ist, um so schneller folgen die Schwingungen aufeinander, um so höher wird der Ton. Läßt man nur noch die Hälfte der Länge einer Saite schwingen, so erklingt ein Ton, der genau eine Oktave höher liegt als der Ton der vollen Saitenlänge. Das ist der Klangunterschied, wie er (auch beim gemeinsamen Gesang) zwischen Kinder- und Männerstimmen besteht. Jedes Intervall, d.h., jeder Abstand zwischen zwei nacheinander oder gleichzeitig erklingenden Tönen ist so durch ein bestimmtes Verhältnis der Saitenlängen am Monochord bzw. der Schwingungszahlen gekennzeichnet. War es bei der Oktave das Verhältnis 1 : 2, so lautet es bei der Quinte (z. B. Liedanfang „Es geht eine Zipfelmütz'") 2 : 3, bei der Quarte (Liedanfang „Das Wandern ist des Müllers Lust") 3 : 4. Die große Terz („Laß doch der Jugend ihren Lauf") hat das Schwingungszahlverhältnis 4 : 5, die kleine Terz („Die Vögel wollten Hochzeit halten") 5 : 6. Der Durdreiklang („A, a, a, der Winter, der ist da") zeigt das Schwingungsverhältnis 4 : 5 : 6.



Wie die bisher genannten Zahlen folgen auch die weiteren der sogenannten Naturtonreihe, die man auf einem Blasinstrument ohne Ventile (Signalhorn, Fanfare) hervorbringen kann. Die Schwingungszahlen dieser Töne verhalten sich wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 ...
Da es sich um Schwingungszahl*verhältnisse* handelt, gelten sie unabhängig von der Tonart und der Tonhöhe von jedem beliebigen Grundton aus. (Die Kürze des Artikels verbietet es, hier auf weitere Schwingungsprobleme einzugehen.)
Eine andere Tatsache ist, daß jeder bestimmte Ton durch eine nur ihm eigene Schwingungszahl bestimmt wird. Man stimmt die meisten Instrumente nach der Stimmgabel, die den Normstimmton = Kammerton a^1 (das „eingestrichene" A) erklingen läßt, wenn man sie in Schwingungen versetzt. Dieser Ton hat 440 Hz (Hertz, so benannt nach dem deutschen Physiker *Heinrich Hertz*), d.h., die Gabelenden schwingen in der Sekunde 440mal. Diese Schwingungsfrequenz kennzeichnet auch den Ton der A-Saite der Geige, während die um eine Oktave tiefer erklingende A-Saite des Cellos nach dem oben Gesagten entsprechend „nur" 220 Schwingungen in jeder Sekunde ausführt. Der tiefste Ton des Klaviers liegt um noch weitere drei Oktaven tiefer, d.h., man muß diese Schwingungszahl noch weitere dreimal halbieren. Das Ergebnis ist

27,5 Hz. Damit liegt dieser Ton schon in der Nähe der menschlichen Hörgrenze; denn Töne, die weniger als 20 Hz haben, nimmt man nicht mehr hörend wahr. Die obere Hörgrenze liegt bei etwa 16000 Hz. Der höchste Ton des Klaviers erreicht aber nur 4224 Hz, vom Kammerton aus gerechnet noch weitere drei Oktaven und eine kleine Terz höher — es ist das fünfgestrichene C (c^5).

Berechnungsgrundlage: $440 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{6}{5}$

Was bei den Saiteninstrumenten für die Beziehung zwischen Saitenlänge und Tonhöhe gilt, trifft sinngemäß bei den Blasinstrumenten (am besten sichtbar bei den Orgelpfeifen) auf die jeweilige Länge der schwingenden Luftsäule zu. Für unterschiedliche Tonlagen werden gleichartige Instrumente in verschiedenen Größen gebaut. So ist die Tenorblockflöte, deren Tonlage (bei jeweils gleichen Griffen) gegenüber der Sopranblockflöte eine Oktave tiefer liegt, mit 64 cm Länge genau doppelt so lang wie diese. Eine Veränderung der Tonhöhen in kleinen Schritten für das Melodiespiel wird durch das Auf- oder Abdecken der Grifflöcher erreicht, was eine entsprechende Verlängerung oder Verkürzung der schwingenden Luftsäule zur Folge hat. Darüber hinaus spielen Probleme des sogenannten Überblasens eine Rolle, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann.

Bei den Blechblasinstrumenten ist es nur die Zugposaune, die eine sichtbare Veränderung der Länge der schwingenden Luftsäule zeigt, wenn der Spieler den „Zug“ bewegt. Die anderen Blechblasinstrumente besitzen Ventile, durch deren Betätigung der Luftstrom in unterschiedlich lange Kanäle gelenkt wird.

Instrumentenbauer, aber auch Komponisten müssen also mit den akustischen Besonderheiten und Gesetzen vertraut sein.

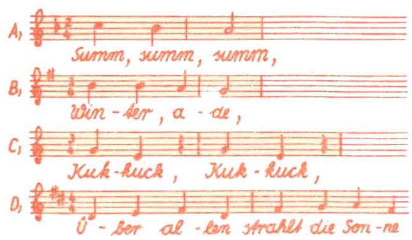
Die mathematischen Beziehungen der Musik beschränken sich aber nicht nur auf das Gebiet der Akustik.

Auch in den Bezeichnungen der Taktarten und der Notenwerte finden wir mathematische Begriffe. Abgesehen von der Ganzenote kommen wir bei allen anderen Notenwerten „in die Brüche“: Dreiviertelnote, Halbenote, Achtel-, Sechzehntel-, Zweiunddreißigstelnote usw. Dabei stellt keiner dieser Werte eine absolute Zeitgröße dar, aber in den gewählten Bezeichnungen drücken sich die Zeitwertverhältnisse aus: Eine Ganzenote symbolisiert einen Ton, der ebenso lang klingt wie zwei durch Halbenoten oder vier durch Viertelnoten gekennzeichnete Töne usw.

Die Taktarten werden nach den in jedem Takt enthaltenen Werten bezeichnet, und zwar auf einen einheitlichen Nenner bezogen. Dieser Nenner gibt den Grundzeitwert (Grundschlag, Taktschlag) an. Meistens ist es der Viertelwert, so daß wir — vor allem im Notenbild bekannter Lieder — am häufigsten den Zwei-, Drei- und Viervierteltakt antreffen. Manchmal wird auch die Halbenote oder die Achtelnote als Grundschlagwert gewählt. So finden wir z. B. den Dreiachteltakt und den Sechsachteltakt. Diese Taktbezeichnungen fallen dem Mathematiker durch zwei Besonderheiten auf: Erstens darf man den angegebenen Bruch nicht willkürlich kürzen. Sonst würde man ja den Wert des Grundschlages, der im Nenner ersichtlich ist (z. B. Viertel), verändern. So sind also der Dreiviertel- und der Sechsachteltakt trotz der mathematischen Gleichheit beider Brüche zwei grundverschiedene Taktarten. Sie haben zunächst unterschiedlich notierte Grundschlagwerte, aber auch unterschiedliche Betonungsverhältnisse im Takt und werden demzufolge verschieden taktiert. Das gleiche trifft für den Vierviertel- und den Zweihalbetakt zu.

Zweitens stellen nicht nur diese beiden letztgenannten Taktarten, die als Bruch die Zahl „1“ repräsentieren, ganze oder volle Takte dar. Jede Taktart gibt den Wert eines vollen Taktes an, auch wenn der Bruch von 1 abweicht. So darf man also den Sechsachteltakt nicht als unvollständig und den Dreihalbetakt nicht als übervoll ansehen. Jeder Takt eines Liedes oder Musikstücke ist vollständig, wenn die Summe seiner Noten- (und Pausen-)Werte mit der angegebenen Taktart übereinstimmt. —

Auch in den musikalischen Formen finden wir besonders seit der Klassik gefestigte mathematische Beziehungen wieder. Das Motiv, die kleinste musikalisch-gedankliche Sinneinheit, die für ein Lied oder Musikstück charakteristischen Aussagewert hat, umfaßt in der Regel zwei Takte, unabhängig von der Anzahl der Töne und der Taktart:



Die beiden letzten Beispiele zeigen eine (allerdings nicht häufige) Motivteilung: Der zweite Takt kann den ersten wiederholen (C) oder den Melodieablauf in eine andere Lage versetzen (D) (= „Sequenz“).

Die Weiterführung dieser Liedmotive — gewissermaßen ihre „Beantwortung“ — nimmt (wieder unabhängig von der Zahl der Töne bzw. der Textsilben) ebenfalls zwei Takte in Anspruch und führt zu einem relativen Anschluß des Gedankens:

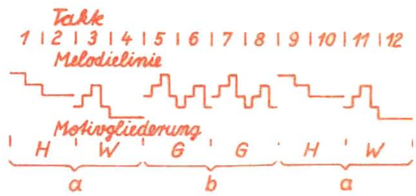
(A) Bienchen, summ herum.
(B) Scheiden tut weh.
(C) ruft's aus dem Wald.
(D) über allen in der Welt.

Einen solchen Viertakter bezeichnet man als „Satz“.

Im Beispiel B) entstand er durch Wiederholung des musikalischen Motivs. — Die Beispiele A), B) und C) erreichen am Satzende den Grundton, wodurch jeder dieser Sätze einen musikalischen Abschluß und so den Charakter eines selbständigen „Liedteils“ erhält. Ihm folgt in diesen Beispielen ein kontrastierender Mittelteil von ebenfalls vier Takten; danach wird der Anfangsteil entweder unverändert (A) oder mit geringen Abweichungen (B, C) wiederholt. Wir haben es hier mit einer dreiteiligen Liedform aus Anfangs-, Mittel- und Wiederholungsteil zu tun:

a — b — a (Beispiel A) bzw. a — b — a' (Beispiel B und C)

Das den Mittelteil einleitende „Gegenmotiv“ (so benannt, weil es einen Gegensatz zu dem „Hauptmotiv“ des Liedanfangs bildet) wird meist wiederholt (Beisp. A) oder sequenziert (Beisp. B, C), so daß der Mittelteil ebenso wie das gesamte Lied als Form leicht überschaubar und einprägsam ist. Zunächst das Lied „Summ, summ, summ“:



H Hauptmotiv, W Weiterführung von H
G Gegenmotiv
(Die Kleinbuchstaben kennzeichnen jeweils einen viertaktigen Satz.)

Gleiche Buchstaben weisen auf Gleichheit der Formbestandteile hin. Bei den folgenden Liedbeispielen tritt auch die Abwandlung als formbildendes Merkmal auf. H' bedeutet abgewandeltes Hauptmotiv, a' entsprechend geringfügig verändertes Klangbild des betreffenden Satzes. Unter Verzicht auf Abbildung der Melodielinie aus Platzgründen ergibt sich für das zweite Lied („Winter ade“):

B) $\underbrace{\text{H H}}_{\text{a}}$ $\underbrace{\text{G G'}}_{\text{b}}$ $\underbrace{\text{H' H}}_{\text{a'}}$

(Statt W tritt hier eine Wiederholung von H auf)

und für „Kuckuck, Kuckuck“:

C) $\underbrace{\text{H W}}_{\text{a}}$ $\underbrace{\text{G G'}}_{\text{b}}$ $\underbrace{\text{H' W'}}_{\text{a'}}$

Während die motivischen Beziehungen in allen drei Liedern Unterschiede aufweisen, handelt es sich jedesmal um eine aus drei Sätzen zu je vier Takten bestehende Liedform mit Wiederholung (oder wie bei den Beispielen B) und C) mit geringfügiger, die „Ähnlichkeit“ wahrender Abwandlung) des Anfangsteils im Schlußteil. Diese Dreiteiligkeit ist in entsprechend größeren Dimensionen auch in der Instrumentalmusik sehr verbreitet.

Anders liegt der Fall beim Lied „Über allen strahlt die Sonne“. Hier gibt es nur zwei viertaktige Sätze, die einander sehr ähnlich sind:

D) $\underbrace{\text{H W}}_{\text{a}}$ $\underbrace{\text{H W}'}_{\text{a}'}$

Dieser inneren Entsprechung wird die Bezeichnung der Sätze als „Vordersatz“ (a) und „Nachsatz“ (a') einer übergeordneten Formeinheit gerecht, die man als (achtaktige) „Periode“ bezeichnet. Hier ist der abschließende Grundton nicht bei W, sondern erst bei W' erreicht; daher liegt in diesem Beispiel keine zweiteilige, sondern „nur“ eine einteilige Liedform vor! Zweiteilig würde das Lied, wenn sich nun noch z. B. ein Kehrreim anschlösse („Heute wollen wir das Ränzlein schnüren“).

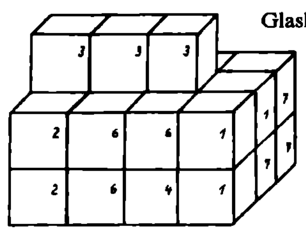
Wir haben gesehen, daß es vielfältige Beziehungen zwischen der Mathematik und der Musik gibt, von denen hier nur einige genannt werden konnten. Wenn man die starke gefühlsbildende Kraft der Musik der Schulung des Denkvermögens durch die Mathematik gegenüberstellen will, so kann man andererseits sagen, daß Mathematik und Musik einander wirkungsvoll ergänzen. Aber beide, das wissenschaftliche und das künstlerische Fach, regen gemeinsam die schöpferische Phantasie und das Vorstellungsvermögen an und vervollkommnen den Menschen, der sich intensiv mit ihnen beschäftigt.

Ch. Lange

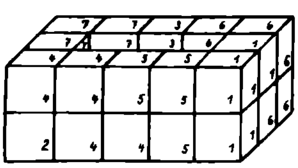
Soma-Würfel

Sonja Lammer, Berlin sandte uns drei Figuren (siehe auch 2/69, S. 40):

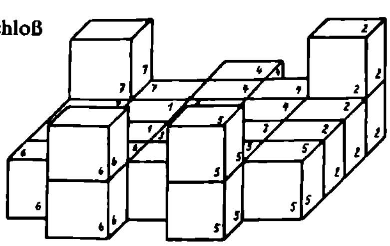
Glashaus



Bassin



Schloß



Lösungen

Lösungen zu Aufgaben aus der SR Rumänien

2. Teil der Aufgabe (Fortsetzung)

Nach Voraussetzung gilt $\overline{CM} = \overline{BM}$ und $\sphericalangle CAB = 90°$. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CP} = \overline{CM}$ und $\overline{BM} = \overline{BN}$; (1)

ferner gilt $\sphericalangle PCA = \sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ABN$. (2)

Aus der Voraussetzung $\sphericalangle CAB = 90°$ folgt $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 90°$. (3)

Aus (2) und (3) folgt $\sphericalangle PCB + \sphericalangle CBN = 180°$, also $\overline{PC} \parallel \overline{NB}$. Aus der Voraussetzung $\overline{CM} = \overline{BM}$ und aus (1) folgt $\overline{PC} = \overline{NB}$.

Im Viereck $NBCP$ sind die gegenüberliegenden Seiten $\overline{NB}$ und $\overline{PC}$ gleich lang und parallel, das Viereck ist ein Parallelogramm.

Klassenstufe 10

(1. Es seien $\tan x + \cot x = m$ und $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a) Es ist der Wertevorrat für m anzugeben.

b) Der Ausdruck $E(x)$

$\sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 x + \cos^4 x$

ist als Funktion von m darzustellen.

c) Es ist $E\left(\frac{\pi}{12}\right)$ zu berechnen.)

Lösung: a) Man erhält

$$m = \tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \qquad (1)$$

Daraus folgt wegen $0 < \sin 2x < 1$ $m \geqq 2$.

b) Man erhält

$\sin x + \cos x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x + \cos x)$

$= \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$,

also $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot$

$$\cdot \left(1 - \frac{\sin 2x}{2}\right), \qquad (2)$$

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x$

$+ 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{\sin^2 2x}{2}$, also

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}. \qquad (3)$$

Aus (1) folgt

$$\sin 2x = \frac{2}{m}, \quad 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{m}$$

$$\sin^2 x (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{m^2},$$

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{m^2} = 0. \qquad (4)$$

Aus (4) folgt *entweder*

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}\right)$$

und

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}\right)$$

oder

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}\right)$$

und

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}\right).$$

In jedem Falle gilt daher

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}}\right).$$

Daher ist

$$E(x) = \left(\sin x + \cos x\right)\left(2 - \frac{1}{m}\right) + 1 - \frac{2}{m^2}$$

$$= 1 - \frac{2}{m^2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{m}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{m}\sqrt{m^2 - 4}}\right).$$

c) Für $x = \frac{\pi}{12}$ wird $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

also $m = \frac{2}{\sin 2x} = 4$. Man erhält daher

$$E\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}\sqrt{12}} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sqrt{12}}\right)$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right).$$

Hieraus folgt wegen $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

und $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$E\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{6} = \frac{7}{8}\left(1 + \sqrt{6}\right) \approx 3{,}018.$$

2a) Beweis durch vollständige Induktion

Für $n = 1$ erhält man

$$s_1 = \frac{1 \cdot (5 \cdot 1 + 2)}{(5 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{7}{(1 \cdot 6)^2}.$$

Wir nehmen an, es gelte $s_k = \frac{k \cdot (5k+2)}{(5k+1)^2}$.

Wir zeigen, daß unter dieser Voraussetzung die Summenformel auch für s_{k+1} gilt.

Beweis: $$s_{k+1} = \frac{k(5k+2)}{(5k+1)^2} + \frac{10(k+1) - 3}{[5(k+1) - 4]^2 \cdot [5(k+1) + 1]^2}$$

$$s_{k+1} = \frac{k(5k+1)^3 + (11k+7)(5k+1)^2}{(5k+1)^2 \cdot (5k+6)^2}$$

$$= \frac{k(5k+1) + 11k + 7}{(5k+6)^2}$$

$$s_{k+1} = \frac{5k(k+1) + 7(k+1)}{[5(k+1)+1]^2} = \frac{(k+1)(5k+7)}{[5(k+1)+1]^2}$$

$$= \frac{(k+1)\,[5(k+1)+2]}{[5(k+1)+1]^2}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Summenformel für die natürliche Zahl k gilt, ist sie auch für $k+1$ richtig. Sie gilt daher für jede natürliche Zahl.

b) Durch Umformung erhalten wir aus

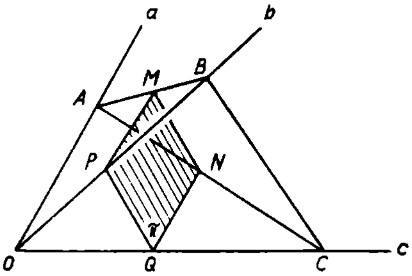
$$\frac{n(5n+2)}{(5n+1)^2} < \frac{1}{5}$$

$\frac{n(5n+2)}{(5n+1)^2 - 1 + 1} = \frac{n(5n+2)}{5n(5n+2)+1} < \frac{1}{5}$ und damit

$$\frac{5n(5n+2)+1}{n(5n+2)} = 5 + \frac{1}{n(5n+2)} > 5.$$

3a) Die Geraden MP und NQ liegen in der

Ebene π; die Gerade MP liegt zugleich in der Ebene AOB, die Gerade NQ liegt zugleich in der Ebene AOC, und die Gerade OA liegt parallel zur Ebene π.
Daraus folgt $\overline{OA} \parallel \overline{MP}$ und $\overline{OA} \parallel \overline{NQ}$ und damit $\overline{MP} \parallel \overline{NQ}$. Ferner gilt nach Voraussetzung $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ und deshalb
$\overline{MN} : \overline{BC} = \overline{AM} : \overline{AB} = \overline{OP} : \overline{OB} = \overline{OQ} : \overline{OC}$;
folglich gilt auch $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$, d. h. das Viereck $MNQP$ ist ein Parallelogramm.



b) Der Punkt M muß die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis $\overline{OA} : \overline{BC}$ teilen, damit das Parallelogramm $MNQP$ ein Rhombus ist.

Lösungen der Aufgaben
Mittelschulprüfung Island 1969

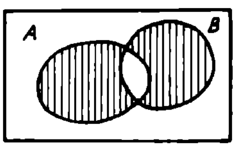
1. -50 2. 2 3. 1100101 4. Sie wird zweimal so groß 5. $30x^5y^4z$ 6. $5\frac{1}{7}$
7. $A \cap (B \cup C)$
8. Wahre Aussagen: $A = D$; $A \sim D$; $A \sim C$; $C \sim D$; $E = B$; $E \sim B$
Falsche Aussagen: $A = C$; $A = E$; $A \sim E$; $C = D$
9. Wahre Aussagen: $3 \in A$; $\{5\} \subset A$
Falsche Aussagen: $\{5\} \in A$; $5 \subset A$; $0 \in \varnothing$
10. 32, 64 11. $32 = 1+5+10+10+5+1$
12. Rest 7 13. $1{,}28 \cdot 10^4$ 14. 1011

15a)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	3	11

15b)

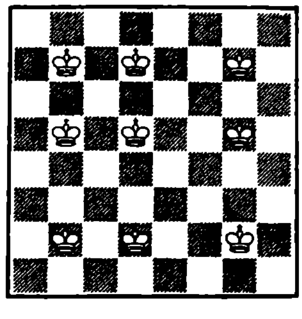
·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

15c) 100122 15d) 12
16.


17. a) $A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
b) $A \cap B = \{4, 6\}$
c) $B = \{3, 7, 9\}$ d) $U = \varnothing$
e) $A \setminus B = \{7\}$
18. $3x^2 - 2x - 16 = (3x-8)(x+2)$
19. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ 20. $p = 200$
21. $a = 6$ 22. $\{1,2\}$ 23. $x = 31, y = 13$
24. $2(x+10)$ für $x \neq \pm 2$
25. $\frac{11}{5-x}$ für $x \neq \pm 5$

Lösungen zu Rund um das Schachbrett

1 De8 ‡
2 S : e7 ‡
3 Es sind mindestens 16 Züge erforderlich. Als ersten kann man jeden beliebigen Bauern schlagen mit Ausnahme der Bauern c4, d3, d4, e5, e6, f5. Wenn das Pferd als ersten Bauern den Bauern c2 schlägt, folgt als nächster Bauer b4 und dann weiter d3, b2, c4, d2, b3, d4, e6, g7, f5, e7, g6, e5, f7, g5.
4a Bereits 9 Könige erfüllen die Bedingungen (siehe Graphik).



4b Man schreibt auf jedes Feld des Schachbretts eine Zahl, die angibt, wieviel Züge von da aus der Springer machen kann; man bekommt dann folgendes Quadratschema:

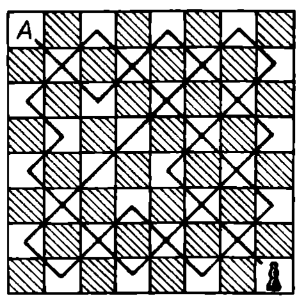
2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Die gesuchte Zahl der Züge wird durch die Summe aller Zahlen in diesem Schema ausgedrückt, d. h. durch die Zahl
$4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336$.
Der Springer kann im ganzen 336 Züge ausführen.

5

21		4		10		31	
	12		29		23		2
28		13		7		18	
	5		20		26		15
16		25		19		6	
	17		8		14		27
1		24		30		11	
	32		9		3		22

6a Die Aufgabe ist unter den gegebenen Bedingungen nicht lösbar. Sie wäre nur dann lösbar, wenn ein Feld zweimal berührt werden darf.

6b


7 Nein, es ist nicht möglich! *Begründung:* Der Springer wechselt bei jedem Zug die Feldfarbe, und 63 Züge muß er unter obigen Bedingungen ausführen.
8 1. Kd4!!, Ta4† 2. Ke5, Ta8 3. Dd6 nebst Matt beim 4. Zug von Weiß. Es handelt sich hier um ein scharfsinniges Rochadeproblem, das nur die Schüler lösen können, die mit Problemen dieser Art vertraut sind.
1. Dd6 würde bereits im 2. Zug zum Matt führen, wenn Schwarz nicht lang rochieren könnte. Schwarz kann aber rochieren, und ein Matt im 4. Zug ist dann nicht mehr möglich. Daher der glänzende Schlüsselzug 1. Kd4. Beim 2. Zug von Schwarz wird die Ausgangsstellung wieder erreicht, aber Schwarz kann nun nicht mehr rochieren!
9 Man nimmt für den weißen Bauern, der soeben noch d8 gezogen wurde, einen gemischtfarbigen Springer (linke Hälfte weiß, rechte Hälfte schwarz oder auch umgekehrt) und zieht ihn nach e6. Nun sind beide Könige matt! (aus: *„64 Schachscherze“*)
10 Ka1 – a2 (Ein Abwartezug), aus *chess* von *P. H. Williams*

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Sachs

▲ 410 1. Wir beweisen als erstes, daß zwischen der Anzahl k der Kanten und der Anzahl n der Knotenpunkte die Beziehung
(1) $k = 2n$
besteht. Zu diesem Zwecke denken wir uns jede Kante etwa in der Mitte zerschnitten und dadurch in zwei Halbkanten zerlegt. Dann ist die Anzahl h der Halbkanten einerseits gleich $2k$, denn jede Kante hat zwei Halbkanten, und andererseits gleich $4n$, denn von jedem Knotenpunkt gehen vier Halbkanten aus. Aus $h = 2k$ und $h = 4n$ folgt sofort (1).
2. Den Beweis der nächsten beiden Behauptungen wollen wir mittels vollständiger Induktion führen. Dazu ist es zweckmäßig, den Bereich der betrachteten Figuren etwas zu erweitern — es entspricht dies dem häufig beobachteten Sachverhalt, daß gewisse Sätze nur dadurch einem Induktionsbeweis zugänglich werden, daß man sie zugleich verallgemeinert, weil anderenfalls die Voraussetzungen für die Durchführung des Induktionsschlusses zu schwach sind. Die Figuren, die wir jetzt betrachten, mögen, wie in der Aufgabe angegeben, durch Zeichnen einer endlichen Anzahl geschlossener Kurven in die Ebene entstanden sein und den Bedingungen (II) und (III) genügen, auf die Bedingungen (I) und (IV) jedoch wollen wir verzichten. Damit lassen wir zu, daß eine Figur F in mehrere getrennte Teile zerfallen kann (diese Teile nennen wir die „Komponenten“ der Figur), unter denen insbesondere einfach geschlossene Kurven vorkommen dürfen, auf denen kein Schnittpunkt liegt.
Die Anzahl der Komponenten einer Figur F sei mit s bezeichnet. Dann wollen wir beweisen:
(A) F zerlegt die Ebene in
(2) $f = n + s + 1$ Gebiete;
(B) man kann die Gebiete so mit zwei Farben färben, daß je zwei längs eines Kurvenstückes benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.
Fortsetzung folgt in Heft 1/1970.

Zahlenrätsel — einmal anders (4/69)

Lösung von Prof. Dr. W. Renneberg, Leipzig

1.1. *Beweismethode:* Man konstruiert alle Belegungen der neun Variablen in den sechs Gleichungen über der Grundmenge 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aus drucktechnischen Gründen werden die Ringe durch Buchstaben ersetzt.

$$\begin{array}{ccccccl}
abc & - & deb & = & fg & & \text{G 1} \\
: & & + & & + & & \\
dg & \cdot & h & = & dib & & \text{G 2} \\
\hline
ia & + & dfa & = & acc & & \text{G 3} \\
\text{G 4} & & \text{G 5} & & \text{G 6} & &
\end{array}$$

1.2. *Beziehungen:* Aus den Gleichungen liest man die folgenden Beziehungen ab.

G 1 Einer: $g+b=\begin{cases} c \\ 10+c \end{cases}$ (1)

Zehner: $\left.\begin{matrix} f+e \\ f+e+1 \end{matrix}\right\} = 10+b$ (2)

Hunderter: $d+1=a$ (3)

G 3. Einer: $2\cdot a=\begin{cases} c \\ 10+c \end{cases}$ (4)

G 5. Einer: $b+h=10+a$ (5)

Zehner: $e+1=f$ (6)

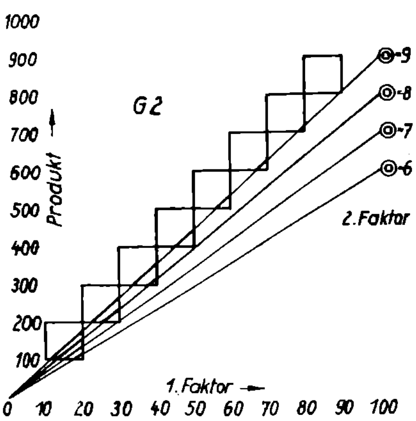
Aus (2) und (6) ergibt sich:

$2\cdot e=\begin{cases} 9+b \\ 8+b \end{cases}$ (7)

1.3. Zulässige Werte

1.3.1. $i \neq 0$ (als erste Ziffer)

1.3.2. In Gleichung G 2 soll der Zehner des ersten Faktors gleich dem Hunderter des Produktes sein. Diese Bedingung schränkt die Lösungsmöglichkeiten für G 2 ein. Als Lösungen kommen nur Zahlen in Betracht, deren Punkte innerhalb der Quadrate liegen (siehe Abb.).



Der Einer des ersten Faktors muß verschieden von Null sein, weil $g \neq h$ gilt.

1.3.3. h kann nicht kleiner als 7 sein.

$17\cdot 6 = 102$ (nicht wegen $i \neq 0$)

$18\cdot 6 = 108$ (nicht wegen $i \neq 0$)

$19\cdot 6 = 114$ (nicht wegen $d \neq i$)

1.3.4. d kann nicht 0 sein (als erste Ziffer) und nicht größer als 6.

$78\cdot 9 = 702$ (nicht wegen $i \neq 0$)

1.3.5. g kann nicht kleiner als 4 sein.

$\left.\begin{matrix} 12\cdot 9 = 108 \\ 13\cdot 8 = 104 \end{matrix}\right\}$ (nicht wegen $i \neq 0$)

$13\cdot 9 = 117$ (nicht wegen $d \neq i$)

$23\cdot 9 = 207$ (nicht wegen $i \neq 0$)

1.3.6. Aus (3) folgt in Verbindung mit 1.3.4., daß a weder 0 und 1 noch 8 und 9 sein kann.

1.3.7. Aus (4) folgt, daß c gerade ist.

1.3.8. Die zulässigen Werte für h, d, g, a und c sind also folgende.

h	*d*	*g*	*a*	*c*
7	1	4	2	0
8	2	5	3	2
9	3	6	4	4
	4	7	5	6
	5	8	6	8
	6	9	7	

1.4. Belegungen

	h	*a*	*b*	*c*	*g*	*d*	*e*
1.	7	2	5	4	9	1	**7**
2.	7	3	6	**6**	–	–	–
3.	7	4	**7**	–	–	–	–
4.	7	5	8	0	n.e.	–	–
5.	7	6	9	2	n.e.	–	–
6.	8	2	4	**4**	–	–	–
7.	8	3	5	6	n.e.	–	–
8.	8	4	6	**8**	–	–	–
9.	8	5	7	0	n.e.	–	–
10.	8	6	**8**	–	–	–	–
11.	8	7	9	4	5	6	**9**
12.	9	2	3	4	n.e.	–	–
13.	9	3	4	6	n.e.	–	–
14.	9	4	5	8	n.e.	–	–
15.	9	5	6	0	4	**4**	–
16.	9	6	7	2	5	**5**	–
17.	9	7	8	4	6	**6**	–
	(5)			(4)	(1)	(3)	(7)

Fettdruck: schon vorhandener Wert,
n.e.: nicht erfüllbar

Ergebnis: Es gibt keine Belegung der neun Variablen, die den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die Aufgabe hat keine Lösung.

2. Wir setzen im Einer der beiden Summanden in Gleichung G 3 die entsprechenden Ziffern ein und erhalten als Lösung

$$\begin{array}{ccccc}
360 & - & 276 & = & 84 \\
: & & + & & + \\
24 & \cdot & 9 & = & 216 \\
\hline
15 & + & 285 & = & 300
\end{array}$$

Das wunderbare Gedächtnis:

Der Zauberkünstler hat den Vorgang so gesteuert, daß er sich nur einen Satz zu merken brauchte, nämlich den Satz auf S. 136, Zeile 18 des Buches von Hermann Kant.

Zunächst hat er dieses Buch „forciert", wie es in der Sprache der Magier heißt. Hätte nämlich der erste Zuschauer dieses Buch, das in der Mitte lag, nicht gewählt, so hätte er den zweiten Zuschauer ein Buch wählen lassen und evtl. noch den dritten, bis das von ihm gewünschte Buch gewählt wird.

Welche Ziffern auch immer die drei Zuschauer entsprechend den Bedingungen wählen, stets hat die Differenz der beiden sechsstelligen Zahlen die Quersumme 36.

Das wollen wir jetzt nachweisen:

Es seien a, b, c die drei gewählten Ziffern, die paarweise von einander verschieden sind. O. B. d. A. können wir $0 < c < a < 10$ annehmen; denn im Falle $a < c$ wird später die erste Zahl von der zweiten subtrahiert.

Wir untersuchen jetzt nur die aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl $100a + 10b + c$ und erhalten die Differenz

$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$
$= 99a - 99c = 99(a - c)$.

Dabei gilt $0 < a - c < 9$.

Daher ist $99(a - c)$ gleich einer der Zahlen 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792. Alle diese Zahlen haben aber die Quersumme 18. Da bei den beiden sechsstelligen Zahlen die ersten drei Ziffern sich wiederholen, hat die Differenz dieser Zahlen die Quersumme 36.

Somit sind die Seite 136 und die Zeile 18 eindeutig bestimmt, welche Ziffern auch die Zuschauer jeweils auswählen.

Nächtlicher Spuk

hundert (... wach **und ertastete**...), acht, eins, tausend, elf, zwei, neun, sieben, zehn, drei.

Ein Kunstwerk

Funktionsgleichungen	Definitionsbereiche
$y=2$	$1 \leq x \leq 2$; $3 \leq x \leq 4$; $6 \leq x \leq 7$
$y=3$	$1 \leq x \leq 2$; $6 \leq x \leq 7$
$y=4$	$1 \leq x \leq 2$; $3 \leq x \leq 4$; $4{,}5 \leq x \leq 5{,}5$ $6 \leq x \leq 7$
$x=1$	$2 \leq y \leq 3$
$x=2$	$2 \leq y \leq 4$
$x=2{,}5$	$2 \leq y \leq 5$
$x=3$	$1 \leq y \leq 4$
$x=4$	$2 \leq y \leq 4$
$x=4{,}5$	$2 \leq y \leq 5$
$x=5{,}5$	$2 \leq y \leq 4$
$x=6$	$2 \leq y \leq 3$
$x=7$	$2 \leq y \leq 4$

Spieglein, Spieglein ...

$f_1(x)=y=x$ und $f_1(x)=y=-x$

$f_2(x)=y=x^2$ und $f_2(x)=y=-x^2$

$f_3(x)=y=x^{-1}$ und $f_3(x)=y=-x^{-1}$

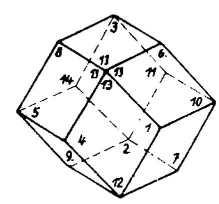
$f_4(x)=y=\sqrt{x}$ und $f_4(x)=y=-\sqrt{x}$

$f_5(x)=y=\sqrt{-x}$ und $f_5(x)=y=-\sqrt{-x}$

Bilderrätsel

Bezirksolympiade

Magischer Dodekaeder



In freien Stunden alpha heiter

aus: Eulenspiegel 29/69

Das wunderbare Gedächtnis

Ein Zauberkünstler behauptet, er habe ein wunderbares Gedächtnis. Er kenne den Inhalt vieler Romane auswendig und könne genau angeben, welche Worte in einer beliebigen Zeile auf einer beliebigen Seite eines Buches stehen.
Um das zu beweisen, legt er drei Bücher auf den Tisch, z. B. links „Pause für Wanzka" von *Alfred Wellm*, in der Mitte „Die Aula" von *Hermann Kant*, rechts „Das Klassentreffen" von *Wolfgang Joho*. Nun bittet er drei Zuschauer, nach vorn zu kommen. Der erste Zuschauer soll ein Buch auswählen. Er wählt z. B. das Buch von *Hermann Kant*.
Nun bittet er jeden der drei Zuschauer, eine der Ziffern von 1 bis 9 zu wählen; diese drei Ziffern sollen aber voneinander verschieden sein. Aus diesen Ziffern soll eine sechsstellige Zahl gebildet werden, wobei zunächst die drei gewählten Ziffern genannt und dann noch einmal wiederholt werden, z. B.

547 547.

Er bittet jetzt, die ersten drei Ziffern und auch die letzten drei Ziffern in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben, so daß die Zahl

745 745

entsteht. Ein Zuschauer wird gebeten, die kleinere der beiden sechsstelligen Zahlen von der größeren zu subtrahieren und das Ergebnis anzugeben z. B.

198 198.

Von dieser Zahl ist die Quersumme zu bilden, und es ist die Ziffer 1 vor die Quersumme zu setzen. Die von den Zuschauern bestimmte Seitenzahl ist also

136.

Die Zeile ist so zu bestimmen, daß die Quersumme der aus den ersten drei Ziffern der obigen Differenz gebildeten Zahl genommen wird, also

Zeile 18. Nun sagt der Zauberkünstler:

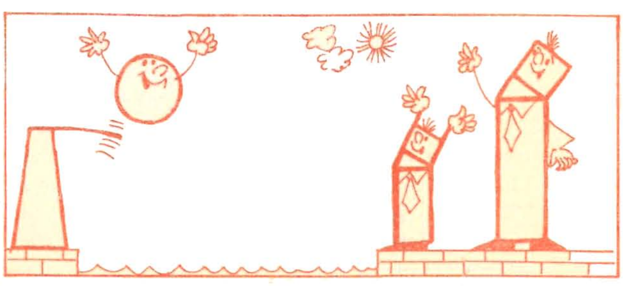
„Auf Seite 136 stehen in der Zeile 18 die folgenden Worte: *„Das war wohl nicht eingeplant", sagte er dabei, ...".*
Die drei Zuschauer schlagen das Buch von *Hermann Kant* auf, vergleichen und stellen zu ihrem größten Erstaunen fest, daß der Zauberkünstler die von ihnen gewählte Zeile richtig zitiert hat. Das vorliegende Kunststück ist in Anlehnung an einen ähnlichen Trick aus dem Werk „Das große Buch der Magie" von *Jochen Zmeck*, Berlin: Henschelverlag 1968, gestaltet worden. In diesem Buch finden wir noch viele weitere Kunststücke, die auf elementaren mathematischen Prinzipien beruhen.
Wer kann diesen Trick erklären? Was mußte der Zauberkünstler auswendig lernen?

OStR Dr. R. Lüders, Berlin

Nächtlicher Spuk

„... Plötzlich werde ich wach und ertaste den Knopf der Nachttischlampe. In Sekundenschnelle ist es hell. Doch gleich darauf geht das Licht aus. Endlich finde ich den Knopf der Lampe wieder. Nichts! Es bleibt dunkel. Fast verzweifelt suche ich meine unverwüstliche Taschenlampe. Erst gestern habe ich sie benutzt. Ich taste sogar mit dem Zeh nach ihr und reiße mir dabei einen Splitter ein. ..."
Im vorliegenden Text verbergen sich mehrere Zahlwörter. Wie lauten sie? Zur Kontrolle sei angegeben, daß die Summe der Zahlen, die sie darstellen, 1151 beträgt.

OStR K.-H. Lehmann, V.L.d.V., Berlin

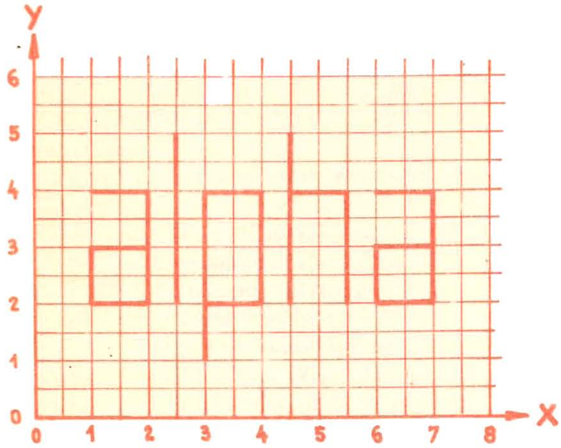


„Bei der Figur ist ein dreifacher Salto kein Kunststück!"

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

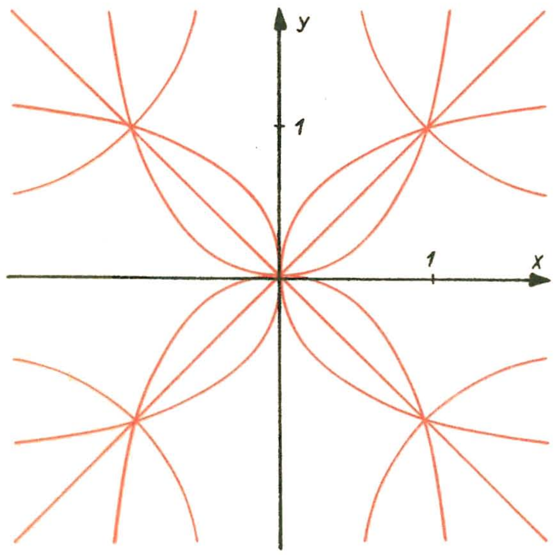
Ein Kunstwerk

Angeregt durch das „Kunstwerk" aus 1/69, S. 14 schlugen (unabhängig voneinander) *Monika Simon*, EOS „Erich Weinert" (Kl. 10), Flöha und Ing. *H. Decker*, Köln vor: Nenne alle Funktionsgleichungen und Definitionsbereiche!



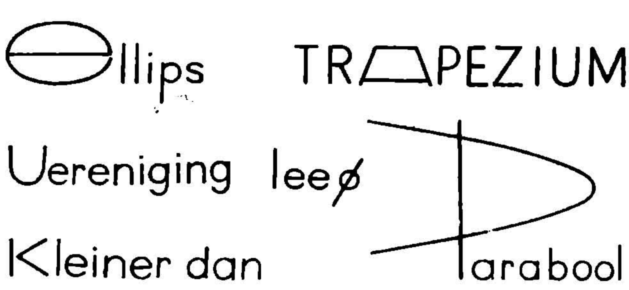
Spieglein, Spieglein ...

Welche 5 Funktionen und ihre 5 Spiegelungen an der Abszisse wurden in der Zeichnung dargestellt? Nenne die 10 Funktionsgleichungen!



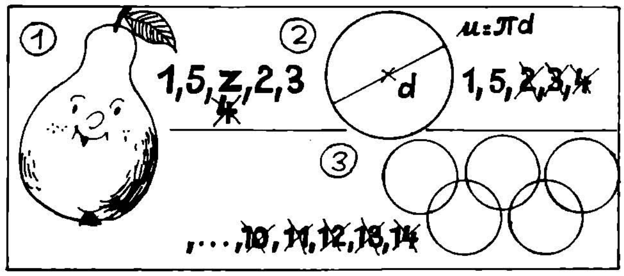
Wolfgang Riedel, EOS „Friedrich Engels" (Kl. 10), Karl-Marx-Stadt

Mathemadics



aus Pythagoras 6-68/69, Niederlande

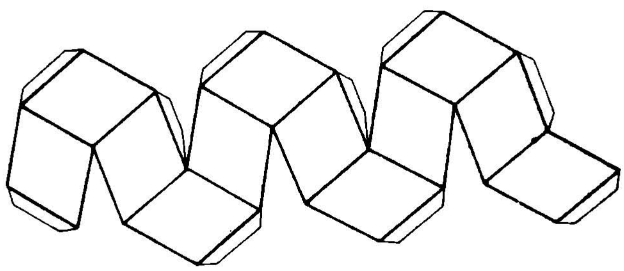
Bilderrätsel

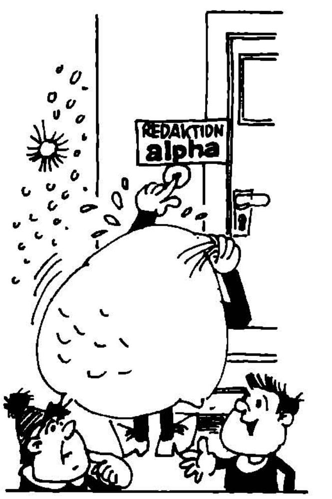


Ekkehard Paditz, Kl. 8 OS Lommatzsch

Magischer Dodekaeder

Unser Leser, Mathematikfachlehrer *Fritz Sandring*, Stendal, empfiehlt: Erst abpausen, dann kleben, dann knobeln! Verteile die Zahlen 1 bis 14 so auf die Ecken des Rhombendodekaeders, daß die Summe der Zahlen jeder Fläche 30 und die Summe der Zahlen je zwei im Dodekaeder gegenüberliegender Ecken gleich 15 ist!





Heinz: „Guten Tag, Weihnachtsmann!"
Fritz: „Psssst, das ist doch der Briefzusteller, welcher die Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb bringt. Im Sack hat er bestimmt auch einen Stoß neuer Ideen für 1970!"

Mit dieser Vignette wünscht *alpha* allen Lesern ein frohes 1970

Mathematik-Kalender

Januar 1970

Do 1 * 1667 Johann Bernoulli, wirkte in Genf, Paris, Groningen und Basel († 1728 in Basel)
Fr 2
Sa 3 * 1643 Sir Isaac Newton, geb. in Lincolnshire († 1727)

So 4
Mo 5
Di 6 † 1918 Georg Cantor, wirkte in Halle (* 3. 3. 1845)
* 1655 Jacob Bernoulli († 1705)
Mi 7
Do 8 * 1564 Galileo Galilei, wirkte in Pisa und Florenz († 1642)
Fr 9
Sa 10 * 1752 Marie Adrien Legendre, wirkte in Paris († 1833)

So 11
Mo 12 * 1601 Pierre de Fermat, wirkte in Toulouse († 1665)
Di 13
Mi 14 * 1876 Erhard Schmidt, wirkte in Berlin († 6. 12. 1959)
Do 15 * 1850 Sofja Wassiljewna Kowalewskaja, wirkte in Berlin, Stockholm, Petersburg, Moskau († 10. 2. 1891)
Fr 16
Sa 17

So 18
Mo 19
Di 20
Mi 21
Do 22
Fr 23 * 1862 David Hilbert, wirkte in Königsberg und Göttingen († 14. 2. 1943)
Sa 24

So 25 * 1736 Joseph Louis Lagrange, lehrte an der Artillerieschule in Turin, später ging er nach Berlin und Paris († 1813)
Mo 26 * 1561 Henry Briggs, wirkte in Oxford († 1613), schlägt die Berechnung dekadischer Logarithmen vor (1615)
Di 27
Mi 28
Do 29
Fr 30
Sa 31 * 1552 Jobst Bürgi, wirkte seit 1579 als Hofuhrmacher in Kassel, dazwischen 1603 bis 1622 in Prag, bedient sich der dezimalen Bruchschreibweise, benutzt allg. Potenzbezeichnungen († 1632)

Februar 1970

So 1
Mo 2 † 1950 Constantin Carathéodory, wirkte in Göttingen, Berlin, Smyrna, Athen und München (* 13. 9. 1873)
Di 3 * 1522 Ludvico Ferrari, war Cardanons Schüler († 1565)
Mi 4
Do 5
Fr 6
Sa 7 Bezirksolympiade Junger Mathematiker

So 8 Bezirksolympiade Junger Mathematiker
† 1957 John von Neumann, wirkte in Berlin, Hamburg, Princeton und Los Alamos (* 28. 12. 1903)
Mo 9 Beginn der Winterferien
Beginn der Tagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Berlin
* 1775 Wolfgang Bolyai, wirkte in Marosvásárhely (Ungarn) († 20. 11. 1856)
Di 10 † 1891 Sofja Wassiljewna Kowalewskaja (* 15. 1. 1850)
Mi 11 * 1596 René Descartes († 1650)
Do 12 † 1916 Richard Dedekind, wirkte in Göttingen und Braunschweig (* 6. 10. 1831)
Fr 13
Sa 14 Ende der Tagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR
† 1943 David Hilbert (* 23. 1. 1862)

So 15 * 1564 Galileo Galilei († 1642)
Mo 16
Di 17
Mi 18 † 1851 Carl Gustav Jacob Jacobi, wirkte in Königsberg und Berlin (* 10. 12. 1804)
† 1899 Sophus Lie, wirkte in Christiana und Leipzig (* 17. 12. 1842)
Do 19 † 1897 Karl Weierstraß, wirkte in Deutsch-Krone und Braunsberg als Oberschul- und ab 1856 in Berlin als Hochschullehrer (* 31. 10. 1815)
Fr 20
Sa 21

So 22
Mo 23 † 1855 Carl Friedrich Gauß, wirkte in Göttingen (* 30. 4. 1777)
Di 24
Mi 25
Do 26
Fr 27
Sa 28

Dieser Kalender wird bis Dezember 1970 fortgesetzt. Tragt eure AG-Nachmittage, Mathematik-Klassenarbeiten, Exkursionen, mathematischen Fachaufträge usf. ein!

Literatur

Gyula Mackássy

Zwei plus zwei gleich vier

Der Kinderbuchverlag 1969 · Aus dem Ungarischen übersetzt von Paul Karpati Mit zahlreichen humorvollen Illustrationen · Etwa 40 Seiten Pappband mit Folie · etwa 4,80 M Für Leser von 8 Jahren an

„Zwei plus zwei gleich vier" führt den jungen Leser durch mehrere Zehntausend Jahre Menschheitsgeschichte, in denen mit der Entwicklung der Kultur auch die Wissenschaft Mathematik geboren wurde. Die humorvollen Illustrationen in Verbindung mit einem knappen Text werden Freude und Interesse an der Mathematik wecken.

Ernöné Lucács

Wie groß, wie spät, wie weit?

Der Kinderbuchverlag 1969 · Aus dem Ungarischen übersetzt von Paul Karpati Illustrationen von Pal Szücs Etwa 40 Seiten · Pappband mit Folie etwa 4,80 M · Für Leser von 8 Jahren an

Groß, klein, viel, wenig? Diese Wörter verwenden wir, wenn wir ausdrücken wollen, daß uns zum Beispiel der Sportplatz groß vorkommt, daß viele Zuschauer einem Spiel zusehen. Doch sagen wir einfach nur „groß", dann weiß doch keiner genau, wie groß der Gegenstand nun eigentlich ist, den wir meinen.
Dieses Buch schildert frühgeschichtliche Versuche, zu messen und Maßstäbe zu finden, geht auf die Bedeutung des Meßwesens und seiner Vereinheitlichung ein. Auch Begriffe wie Tag, Stunde und Minute sowie das Messen von Wettererscheinungen stehen im Mittelpunkt der Betrachtungen.

Christa Johannsen

Leibniz
Roman seines Lebens

Union-Verlag, Berlin 1969 590 Seiten · mit 32 zeitgenössischen Stichen 13,80 M · Für Leser von 15 Jahren an

Der Roman über den großen deutschen Aufklärer *Gottfried Wilhelm Leibniz* schildert die Größe und die Tragik eines der schöpferischsten Menschen, die je gelebt haben. In diesem Werk begleiten wir Leibniz durch die Stationen seines Lebens. Vor dem farbigen Hintergrund der Epoche des Sonnenkönigs erleben wir die für Leibniz entscheidenden Begegnungen mit berühmten Zeitgenossen und erhalten einen umfassenden Einblick in das Denken und Wirken von Leibniz.

Deutsche Demokratische Republik Statistisches Taschenbuch 1969
192 Seiten, zahlreiche Graphiken · 3,80 M

Statistisches Jahrbuch 1969
520 S., 88 S. Anhang, 19 S. Fachregister 25,— M Staatsverlag der Deutschen Demokratischen Republik
Im statistischen Taschenbuch sowie im Statistischen Jahrbuch 1969 werden die ökonomischen Ergebnisse der DDR (1949 bis 1968) veröffentlicht. Aus Anlaß des 20. Jahrestages wurde der Tabellenteil wesentlich verstärkt. Aus dem Inhalt: Übersicht über Gebiet und Bevölkerung, Volkswirtschaftliche Übersichten, Industrie, Bauwirtschaft, Handwerk, Landwirtschaft und Nahrungsgüterwirtschaft, Verkehr, Binnenhandel, Außenwirtschaft, Finanzen, Arbeitseinkommen.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Übungen für Junge Mathematiker

Herausgegeben von Gerhard Kleinfeld

Teil 1: Zahlentheorie
159 S. mit 22 Abb. L7N. 1968 (Nr. 36)
Kartoniert 6,50 M

Teil 2: Elementargeometrie
Etwa 96 S. mit etwa 50 Abb. L7N. (Nr. 37)
Kartoniert etwa 4,50 M

Teil 3: Ungleichungen
Etwa 100 S. mit etwa 15 Abb. L7N. (Nr. 38)
Kartoniert etwa 5,00 M

Liebe Schüler!
Als wir vom Chefredakteur Eurer Zeitschrift, dem Verdienten Lehrer des Volkes, Herrn Studienrat *J. Lehmann*, gebeten wurden, über die Entstehung der oben angegebenen Bücher zu berichten, freute uns das sehr. Es entstand aber die Frage, wo dabei beginnen? Bei einer Rückschau auf die Entwicklung der Olympiaden Junger Mathematiker meinten wir, daß es Euch sicherlich interessieren wird, wie wir auf die Idee kamen, für Euch diese drei Aufgabensammlungen zusammenzustellen.
Als wir alle am 7. Oktober dieses Jahres den 20. Geburtstag unserer Republik feierten, feierten wir auch den 9. Geburtstag der Olympiaden Junger Mathematiker. Mitte 1960 wurde in Leipzig die erste Olympiade Junger Mathematiker (eine Stadtolympiade) durchgeführt, und seit dieser Zeit haben sich immer mehr Schüler der Mathematik verschrieben. Waren es in den ersten Jahren nur wenige, die sich auch außerhalb des Unterrichts mit mathematischen Problemen beschäftigten, so wuchs diese Zahl bis 1969 auf über eine Million Schüler an.
Seit dem Beginn der Olympiaden übernahmen wir neben unserer Arbeit als Lehrer oder als wissenschaftlicher Mitarbeiter die Leitung solcher mathematischer Zirkel, um Euch einerseits auf die Olympiaden Junger Mathematiker vorzubereiten, andererseits um Euch mit einigen Teilgebieten der Mathematik bekannt zu machen, die nicht Gegenstand des Schulstoffes waren, aber dazu dienten, das in der Schule Gelernte zu erweitern und zu vertiefen.
Nach dem 17. 12. 1962, dem Tag, an dem der Mathematikbeschluß verabschiedet wurde, setzte zusammen mit der Verbesserung und Präzisierung der Lehrpläne die verstärkte Förderung *Junger Mathematiker* an den Schulen und in den Kreisen ein. In den Zirkeln wurden mit den Schülern Aufgaben aus z.T. ausländischer Literatur (UdSSR, ČSSR, Ungarn und Rumänien) sowie Aufgaben aus unseren Olympiaden behandelt.
Für viele von Euch und einige Zirkelleiter war es problematisch, geeignete Aufgaben zu bestimmten Gebieten der Mathematik zu finden, da dazu das sehr zeitaufwendige Nachsuchen in der mannigfaltigsten Literatur notwendig war.
Gewisse Typen von Aufgaben traten bei den Olympiaden immer sehr häufig auf und fanden bei Euch besonderes Interesse, zugleich bereiteten diese Aufgaben aber auch große Schwierigkeiten. Die Lösungen bzw. Lösungsversuche waren umständlich, oft wurden die Aufgaben durch Probieren zu lösen versucht.
Diese Mängel, die wir bei unserer Arbeit in den Zirkeln immer wieder feststellen mußten, ließ in uns den Gedanken reifen, die von uns zur Vorbereitung auf die Bezirksolympiaden oder DDR-Olympiaden behandelten Aufgaben zu sammeln und nach Gebieten und Schwierigkeitsgrad geordnet zusammenzustellen.
Unser Anliegen, diese Aufgaben in drei Büchern für die Gebiete *Zahlentheorie, Geometrie* und *Ungleichungen* allen Schülern zugänglich zu machen, wurde vom Verlag B. G. Teubner in dankenswerter Weise unterstützt und ermöglicht. Diese drei Aufgabensammlungen erheben nicht den Anspruch, den Charakter von Lehrbüchern zu besitzen. Ihr sollt vielmehr mit Aufgaben aus diesen genannten Gebieten vertraut gemacht werden und bei der selbständigen Erarbeitung der Lösungen sowohl gewisse Fertigkeiten zu erreichen suchen als auch Eure Kenntnisse zu vertiefen und zu erweitern. Dabei dienen die ersten Aufgaben der jeweiligen Kapitel dazu, sich mit der Problematik vertraut zu machen. Durch den stetig anwachsenden Schwierigkeitsgrad wird Euch ein allmähliches Eindringen in das Gebiet ermöglicht.
Die Einleitungen verfolgen sowohl den Zweck, gewisse erforderliche Sätze und Begriffe bereitzustellen als auch den, diese oder jene beim Lösen aufgetretene Fragen klären zu helfen.
Allen Lesern von *alpha* wünschen wir weiterhin viel Freude bei der Beschäftigung mit mathematischen Aufgaben und Problemen.
Wir hoffen, daß unsere Aufgabensammlungen Freunde finden mögen und Anregungen vermitteln, sich mit weiteren Gebieten der Mathematik zu beschäftigen. Für Vorschläge und Hinweise sind wir jederzeit dankbar, und wir würden uns freuen, wenn Ihr uns Eure Meinung über diese drei Büchlein mitteilen würdet.

E. Lehmann

Eberhard Lehmann

Mathematikfachlehrer, BBS Wohnungsbaukombinat Rostock

Dr Günter Grosche

Dr. rer. nat. Günter Grosche

Dozent für Mathematische Kybernetik und Rechentechnik an der Karl-Marx-Universität Leipzig

G. Kleinfeld

Gerhard Kleinfeld

Päd. Mitarbeiter für Mathematik beim Bezirkskab. f. außerunterrichtliche Tätigkeit beim Rat des Bezirks Leipzig