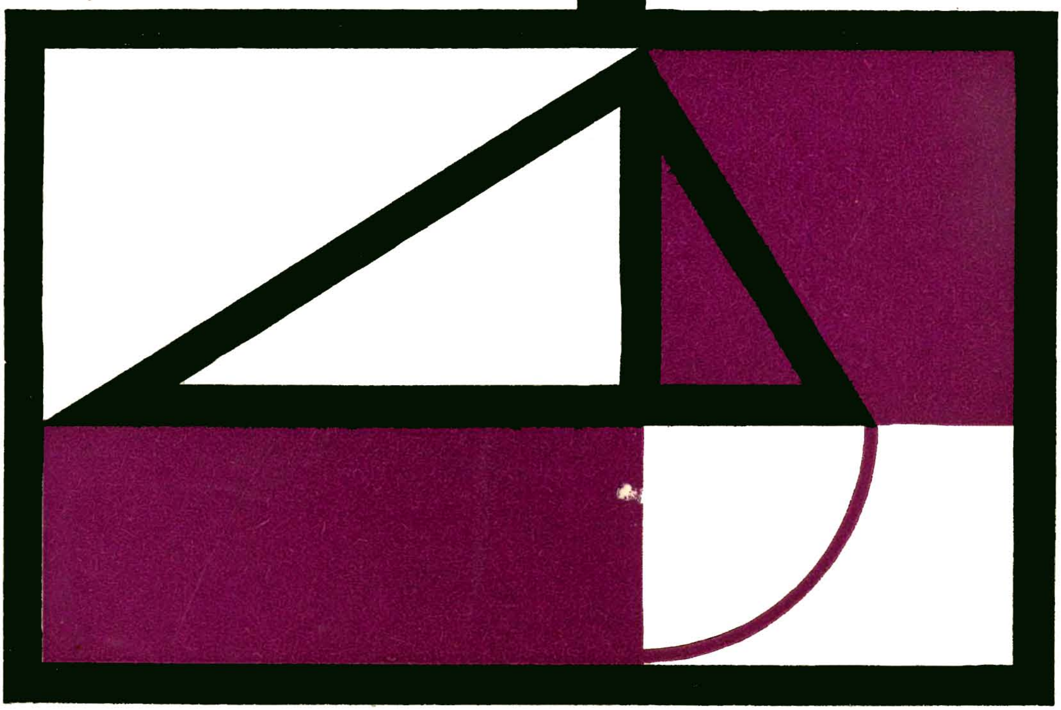
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967 Heft 6

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Zentralbild/Tass, Berlin (S. 162): Postkarten: Montenegroturist, Titograd (S. 165); H. Büchel, Tansania (S. 171); Archiv: Inst. f. Ernährung, Potsdam-Rehbrücke (S. 179); Archiv: OS Effelder (S. 192); Vignetten: Loff, Leipzig (III. Umschlagseite)
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG. 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß: 1. 10. 1967

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Als Diplommathematiker in Dubna

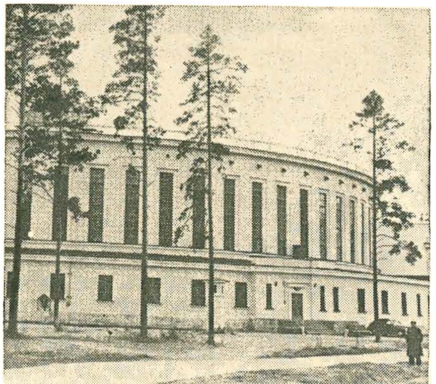
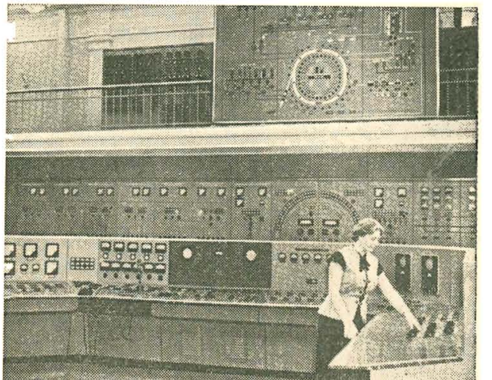
Das *Vereinigte Institut für Kernforschung* in Dubna wurde 1956 gegründet. Es wird von zehn sozialistischen Ländern Europas und Asiens gemeinsam betrieben. Wissenschaftler aus diesen Ländern arbeiten für kürzere oder längere Zeit in Dubna. Ein Teil des heutigen vereinigten Institutes bestand schon früher als sowjetisches Institut.

Das *Vereinigte Institut für Kernforschung* besteht aus einer Reihe von Laboratorien, z. B. dem Laboratorium für Hohe Energien, zu dem der große Beschleuniger für Protonen gehört, dem Laboratorium für Kernprobleme, dem Laboratorium für theoretische Physik, in dem ich arbeite, u. a. Dubna ist eine kleine Stadt, ungefähr 150 km nördlich von Moskau gelegen, genau dort, wo der bekannte Moskau-Kanal am Moskauer Meer endet und die Wolga das Moskauer Meer wieder verläßt. Da um die Stadt herum noch der Fluß Dubna fließt, der in die Wolga mündet, und andererseits unter dem Moskau-Kanal hindurchführt, könnte man auch sagen, daß Dubna auf einer Insel liegt.

Ein Teil der Stadt Dubna, in dem die Wissenschaftler und das technische Personal wohnen, der sogenannte Institutsteil der Stadt, ist erst mit dem Institut gebaut worden, mitten im Wald am Ufer der Wolga. Es wurde nur soviel Areal abgeholzt, wie unbedingt nötig war, um Platz für Häuser und Straßen zu schaffen. Kleinere asphaltierte Wege führen einfach zwischen den Bäumen hindurch, manchmal sogar um sie herum. Diese ideale Gestaltung des Wohngebietes und der künstlich errichtete Strand an der Wolga bieten in der Freizeit gute Erholungsmöglichkeiten. Die Laboratorien des Institutes liegen unmittelbar neben dem Wohngebiet, so daß man in fünf bis fünfundzwanzig Minuten zur Arbeitsstelle gelangt. Nur der große Beschleuniger liegt etwas tiefer im Wald, auch aus Sicherheitsgründen. Wir sind im Sommer 1966 nach Dubna gekommen. Meine Frau arbeitet als Physikerin im Institut. Unser kleiner Junge geht hier in die Tageskrippe und der große besuchte bisher den Kindergarten. Jetzt kommt er hier in die Schule. Natürlich wird überall nur Russisch gesprochen, so daß unsere Kinder diese Sprache nach einem Jahr schon gut beherrschen. Im letzten Jahr im Kindergarten lernen die Kinder übrigens auch schon Englisch. Ich habe von 1959 bis 1963 in Leipzig Mathematik studiert und dann dort auch promoviert (den Doktorgrad erworben). Hier arbeite ich als Mathematiker im Laboratorium für theoretische Physik. Gemeinsam mit einem sowjetischen Physiker habe ich ein Zimmer mit zwei Schreibtischen, einer Wandtafel und zwei Wandschränken. Die Arbeitszeit beginnt 8.45 Uhr. In den ersten Stunden am Vormittag beschäftigt man sich meistens mit Problemen, die man gerade in Arbeit hat. Wenn das Gehirn noch ausgeruht ist, ist die Wahrscheinlichkeit natürlich am größten, neue Lösungen zu finden. Dieser Teil der täglichen Arbeit kann als die eigentliche Forschungsarbeit bezeichnet werden, weil man da versucht, mit seinem Wissen neue Resultate zu erzielen. In unserem Arbeitskreis arbeiten wir mit an der Entwicklung einer Theorie, die die Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen erklärt. Zu den Elementarteilchen gehören die bekannten Bausteine des Atoms, das Proton, das Neutron und das Elektron, aber auch noch viele andere Teilchen, z. B. die sogenannten Mesonen oder Hyperonen. Obwohl schon viele wichtige Ergebnisse von Wissenschaftlern aus der ganzen Welt erzielt wurden, konnte

noch keine vollständige *Theorie der Elementarteilchen* entwickelt werden. Vielleicht liegt es daran, daß erst noch geeignete mathematische Methoden entwickelt werden müssen. Sicher wird manch einer von euch jungen Lesern dieser Zeitschrift in wenigen Jahren als Mathematiker oder Physiker bei der Lösung dieser interessanten Probleme mitarbeiten.
Die zweite Tageshälfte nutzt man meistens dazu, sich weitere Kenntnisse anzueignen. In einer großen Bibliothek findet man die dazu geeignete Literatur. Benötigt man ein Buch, das noch nicht in Dubna ist, so braucht man es nur zu bestellen. Wöchentlich einmal werden diese Bücher aus den großen Bibliotheken Moskaus geholt. Täglich kommen mehrere neue Arbeiten von Wissenschaftlern aus der ganzen Welt in Dubna an, die dann in der Bibliothek ausliegen und die man natürlich aufmerksam verfolgen muß.
Ihr wißt ja selbst, wie schnell beim Lösen von Aufgaben die Zeit vergeht. Um deshalb an jedem Tag das nötige Pensum zu schaffen, muß man sich die Arbeit genau einteilen und mit größter Disziplin an die Arbeit gehen. Je gewissenhafter man sich schon von der Schule her gerade diese Arbeitsdisziplin antrainiert, desto mehr wird man dann als Wissenschaftler leisten können. Das ist genau so wie bei einem Leistungssportler.
Mehrere Male in der Woche kommen die Wissenschaftler in Gruppen in Seminaren zusammen. Sie berichten über ihre neuesten Forschungsergebnisse oder auch über Forschungsergebnisse anderer Wissenschaftler. Gesprochen wird dabei russisch. Außerdem kann man von Dubna aus einmal in der Woche bei einem der weltbekannten sowjetischen Mathematiker, die in Moskau arbeiten, Vorlesungen oder Seminare besuchen. Bisher habe ich wöchentlich an einem Seminar im Steklow-Institut, dem Mathematischen Institut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, teilgenommen.
Ein- oder zweimal in der Woche ist abends Russischunterricht. Alles was man in russisch schon kann, ist einem sofort von Nutzen, ob im täglichen Leben, etwa beim Einkaufen, oder in den wissenschaftlichen Diskussionen. Alles was man noch nicht kann oder vergessen hat, muß man sich hier genau so mühevoll erlernen wie in der Schule. Gerade auch denjenigen, die einmal Mathematiker oder Physiker werden möchten, kann man nur raten, Fremdsprachen gründlich zu lernen, weil man später doch mit Wissenschaftlern aus vielen Ländern zusammenarbeiten muß. Das beginnt schon bei den Betreuern und Teilnehmern internationaler Mathematikolympiaden.
Soviel für heute aus Dubna, dem Zentrum der Kernforschung der sozialistischen Länder.

G. Laßner

Hauptgebäude und zentrale Schaltanlage des Synchrophasotrons

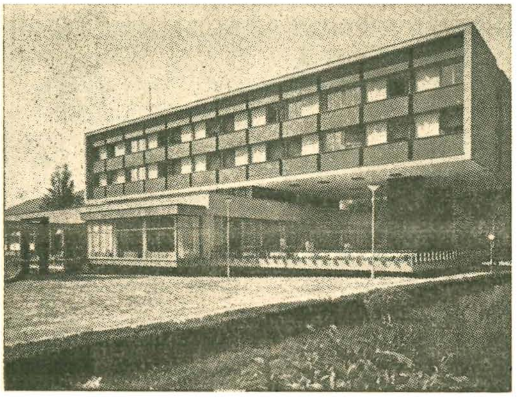
Heiße Tage in Cetinje

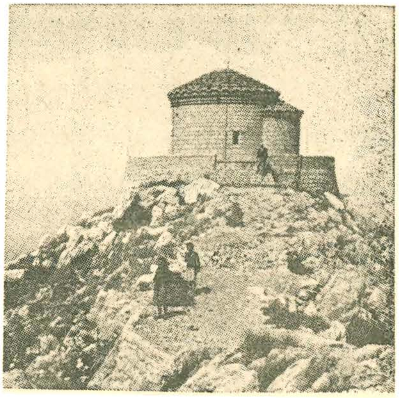
Bericht über die IX. Internationale Mathematikolympiade 1967

IX. IMO
3.-12. VII 1967
JUGOSLAVIJA

Wir hatten uns vierzehn Tage gemeinsam in Berlin intensiv auf den Wettbewerb vorbereitet. Nun wurden die acht Mitglieder der DDR-Mannschaft feierlich in Berlin-Schönefeld verabschiedet. Eine IL-18 der Interflug trug uns über Zagreb nach Beograd, der Hauptstadt der SFR Jugoslawien. Hier erwarteten uns Vertreter der DDR-Botschaft. Der vierstündige Aufenthalt wurde mit einer Stadtrundfahrt ausgefüllt. Der Blick von der alten Burg auf das Häusermeer und den Zusammenfluß von Save und Donau wird uns lange im Gedächtnis bleiben. In Cetinje — einer Kleinstadt von 11000 Einwohnern, in über 600 m Höhe gelegen — kamen wir lange nach Mitternacht an. Vom Flugplatz in Dubrovnik wurden wir mit einem Autobus abgeholt. Es war ein schönes Zeichen der Gastfreundschaft, daß wir nach fünfstündiger Fahrt im Hotel ein warmes Abendbrot erhielten. Zu unserer großen Freude wohnten wir in modernen Zweibettzimmern, jeweils mit kleinem Vorraum und Bad. Am nächsten Tag galt es, sich für den bevorstehenden Wettbewerb auszuruhen. Trotzdem fanden wir noch Zeit, uns in der von Karstgebirgen umgebenen ehemaligen Hauptstadt Montenegros umzusehen. Sie war zu Ehren der Olympiade mit Fahnen bunt geschmückt. Die Einwohner dieses idyllischen Städtchens hatten auf vielfältige Weise für eine rechte Stimmung für den Wettbewerb gesorgt, der am 5. und 6. Juli im Rathaus ausgetragen wurde. 99 Teilnehmer aus 13 Ländern wurden in je einer vierstündigen Klausur (an jedem der beiden Tage) vor drei wirklich schwere Aufgaben gestellt. Man mußte alle Kraft und alle Fähigkeiten einsetzen, um die „harten Nüsse“ zu knacken.
An den darauffolgenden Tagen wurden wir mit Autobussen zum herrlichen Strand der Adria gefahren. Während wir uns in den Wellen tummelten, Freundschaften mit den Jungen Mathematikern der Teilnehmerländer schlossen, eifrig mathematische Aufgaben und politische Probleme diskutierten, hatten Delegationsleiter und Betreuer oft bis in die Nacht hinein mit der Korrektur unserer Arbeiten zu tun. Erst nach der (zweistündigen) Abschlußsitzung der Jury konnten Betreuer und Mannschaften gemeinsame Fahrten durch das herrliche Montenegro und Dalmatien unternehmen. An einem Tage ging es durch ein Flußtal, manchmal dicht an Abhängen mehrerer hundert Meter hoher Berge entlang, zum Biograder See. An einem anderen Tage fuhren wir in den bekannten Badeort Dubrovnik, den einer der Olympiadeteilnehmer als ein *lebendiges Museum* bezeichnet hat. Man kann den Reiz und die Schönheit dieser alten, von starken Mauern umgebenen Adriastadt kaum beschreiben.
Am 12. Juli versammelten sich die Teilnehmer der IMO, unter denen eine überaus herzliche und freundschaftliche Atmosphäre herrschte, noch einmal zu einem Empfang, den der Volksbildungsminister der SFR Jugoslawiens gab. Bei der anschließenden Siegerehrung im Rathaus von Cetinje konnten wir die Urkunden entgegennehmen. Die Freude war groß, als wir drei erste, drei zweite und einen dritten Preis bekamen. Das war wohl Grund genug, am Abend beim *Ball der Jugend* fröhlich zu feiern.
Die Tage in Cetinje haben allen gut gefallen, auch den Schweden, Engländern, Franzosen und Italienern, die das erste Mal an der Olympiade teilnahmen. Sie haben versprochen, bei der X. IMO wieder dabei zu sein. So konnten bei der Abreise viele sagen: „Auf Wiedersehen in Moskau zur X. IMO!“

R. Höppner, EOS Elsterwerda





Cetinje, Hotel Park — Unterkunft für die Delegationsleitungen und einige Mannschaften (darunter die DDR-Mannschaft)

Der Berg Lovčen mit dem Grabmal von Njegoš — ein Ausflugsziel im bizarren Karstgebirge

Fakten - Fakten - Fakten - Fakten ...

Schirmherr der IX. IMO: Josip Broz Tito, Präsident der SFR Jugoslawien — Vorsitzender der Jury: Frau Prof. Ilič-Dajovič (Beograd), — Einziges Mädchen der IX. IMO: D. Staneva, VR Bulgarien — Durchführung eines Symposiums (wissenschaftliche Tagung) unter dem Thema: Probleme der Förderung mathematischen Nachwuchses — Einladung an weitere Länder für die X. IMO: Belgien, Dänemark, Finnland, Norwegen und Österreich — Auftrag der Jury an das Ministerium für Volksbildung der UdSSR: Ausarbeitung eines Entwurfs des Statuts der Internationalen Mathematikolympiaden

DDR-Mannschaft — IX. IMO 1967

Christoph Bandt EOS Greifswald (Kl. 11)	1. Preis
Stefan Heinrich EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 10)	1. Preis
Reinhard Höppner EOS Elsterwerda (Kl. 12)	1. Preis
Wolfgang Burmeister 55. OS Dresden (Kl. 8)	2. Preis
Gert Siebert EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 12)	2. Preis
Ulrich Zähle ABF Walter Ulbricht, Halle (Kl. 11)	2. Preis
Joachim Fritz EOS Cottbus (Kl. 11)	3. Preis
Werner Vogt EOS Ilmenau (Kl. 12)	

Urteil des Fachmannes

Allgemein ist zu den Aufgaben zu sagen, daß ihr Schwierigkeitsgrad beträchtlich über dem des Vorjahres lag. Erfreulicherweise ist man damit zum gewohnten Niveau der IMO zurückgekehrt. Ein höherer Schwierigkeitsgrad bietet zumindest zwei Vorteile: Erstens empfindet der Schüler eine größere Befriedigung, wenn er sich an schwierigen Aufgaben bewährt hat, und zweitens können die Leistungen der Schüler exakter beurteilt werden. Das führt letzten Endes zu einer gerechteren Verteilung der Preise. Da sicher angenommen werden kann, daß der Leistungsstand der diesjährigen Olympiadeteilnehmer im Durchschnitt nicht unter dem des Vorjahres lag, wird der höhere Schwierigkeitsgrad auch aus folgendem ersichtlich: Im diesem Jahr konnten nur 53% aller erreichbaren Punkte vergeben werden, während es im vorigen Jahr 75% waren. In diesem Jahr wurde nur fünfmal die volle Punktzahl (42 Punkte) erreicht, 1966 (bei nur 72 Teilnehmern) elfmal. Wir freuen uns besonders, daß zwei dieser fünf Schüler unserer Mannschaft angehörten. Wir können mit dem Abschneiden unserer Mannschaft sehr zufrieden sein. Auch in diesem Jahre mußten wir jedoch wieder feststellen, daß viele ganz elementare Fehler gemacht wurden. Insbesondere gab es diesmal Schwierigkeiten im Umgang mit einfachen Ungleichungen. Zum Teil sind diese Fehler mit Zeitnot zu erklären. In Zukunft muß außerdem noch mehr auf eine mathematisch einwandfreie und saubere Darstellung des Lösungsweges geachtet werden.

H. Bausch

Aufgaben

Erster Klausurtag

1. In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\overline{AB} = a$ die Länge der Seite AB, $\overline{AD} = 1$ die Länge der Seite AD und α das Maß des Winkels $\sphericalangle DAB$. Das Dreieck ABD sei spitzwinklig.
Man beweise: Die vier Kreise K_A, K_B, K_C, K_D vom Radius 1, deren Mittelpunkte die Eckpunkte A, B, C, D sind, überdecken das Parallelogramm dann und nur dann, wenn

$$a \leqq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \text{ gilt.}$$

(6 P., ∅ 3,59 P. ≙ 60 %)*

2. In einem Tetraeder habe genau eine Kante eine Länge, die größer als 1 ist. Man zeige, daß dann für das Volumen des Tetraeders $V \leqq \frac{1}{8}$ gilt. (7 P., ∅ 3,93 P. ≙ 56 %)*

3. Es seien k, m und n positive ganze Zahlen, wobei $m + k + 1$ eine Primzahl größer als $n + 1$ ist. Wir führen die Bezeichnung $c_s = s(s + 1)$ ein. Man beweise, daß das Produkt

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \cdots (c_{m+n} - c_k)$$

durch das Produkt $c_1 c_2 \cdots c_n$ teilbar ist. (8 P., ∅ 3,03 P. ≙ 38 %)*

Zweiter Klausurtag

4. Es seien zwei spitzwinklige Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A'B'C'$ gegeben. Man konstruiere ein Dreieck ABC, welches dem Dreieck $A'B'C'$ ähnlich (wobei die Punkte A, B, C den Punkten A', B', C' in der angegebenen Reihenfolge entsprechen) und dem Dreieck $A_0B_0C_0$ umschrieben (wobei AB durch C_0, BC durch A_0 und CA durch B_0 verläuft) ist. Anschließend konstruiere man von allen Dreiecken dieser Art dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.
(6 P., ∅ 4,14 P. ≙ 69 %)*

5. Man betrachte die Folge $\{c_n\}$

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\ &\vdots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ &\cdot \end{aligned}$$

wobei $a_1, \ldots, a_8$ reelle Zahlen sind, von denen wenigstens eine verschieden von 0 ist. Es sei bekannt, daß unendlich viele Glieder c_n dieser Folge gleich 0 sind. Unter dieser Voraussetzung bestimme man alle n, für die $c_n = 0$ gilt! (7 P., ∅ 3,13 P. ≙ 45 %)*

6. Bei einem Sportwettkampf wurden m Medaillen im Laufe von n Tagen ($n > 1$) verliehen. Am 1. Tage wurden 1 Medaille und $\frac{1}{7}$ der übrigen $m - 1$, am 2. Tage 2 Medaillen und $\frac{1}{7}$ des nun verbliebenen Restes verliehen usw. Schließlich wurden am $n$ten Tage gerade n Medaillen vergeben, ohne daß noch welche übrig blieben. Wieviel Tage dauerte der Wettkampf und wieviel Medaillen wurden insgesamt verliehen? (8 P., ∅ 4,48 P. 56 %)*

* bedeutet: erreichbare Punkte: 6; erreichte Durchschnittspunktzahl (in Bezug auf alle Teilnehmer): 3,59 (absolut), 60 (in Prozent)
(Die Lösungen dieser Aufgaben findet der interessierte Leser in Heft 1/68 der Zeitschrift „Mathematik in der Schule", d. Red.)

	VIII. IMO				IX. IMO					
Preise:	1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Sonderpr.	1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Diplom	Gesamtpktz.	[+]
VR Bulgarien	—	1	3	—	1	—	1	1	159	47,3
CSSR	—	1	2	—	—	1	3	—	159	47,3
DDR	3	3	—	—	3	3	1	—	257	76,5
Frankreich	nicht teilgen.				—	—	—	—	41	39,0[++]
Großbritannien	nicht teilgen.				1	2	4	1	231	68,8
Italien	nicht teilgen.				—	1	1	—	110	43,7[+++]
SFR Jugoslawien	—	2	1	—	—	—	3	—	136	40,5
Mongolische VR	—	—	—	1	—	—	1	—	87	25,9
VR Polen	1	4	1	—	—	—	1	—	101	30,1
SR Rumänien	1	1	2	—	1	1	4	—	214	63,7
Schweden	nicht teilgen.				—	—	2	—	135	40,2
UdSSR	5	1	1	—	3	3	2	1	275	81,8
Ungarische VR	3	2	1	—	2	3	3	—	251	74,7

[+] Verhältnis der erreichten Punkte zu den erreichbaren (in Prozent)

[++] Die französische Mannschaft bestand nur aus fünf Schülern. Diesen konnten wegen verspäteter Anreise nur die Aufgaben des zweiten Wettbewerbstages gestellt werden.

[+++] Die italienische Mannschaft bestand nur aus sechs Schülern.

Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen

In Heft 4 wurden einfachste Konstruktions- und Ergänzungsaufgaben in zugeordneten Normalrissen gestellt, ohne die theoretischen Grundlagen hierfür vorauszuschicken. Die Lösung dieser Aufgaben ist gewiß nicht schwer gefallen, weil die dargestellten Werkstücke anschaulich leicht vorstellbar sind. Um aber auch bei weniger anschaulichen Aufgaben nicht zu versagen, soll nun dargelegt werden, wie man zur zeichnerischen Darstellung eines räumlichen Gebildes mittels zweier in einer Ebene liegender Risse (Grund- und Aufriß) gelangt.

Man geht dazu von einer *horizontalen Bildebene* $\underline{\pi}_1$ und einer *vertikalen Bildebene* π_2 aus. Die beiden Bildebenen stehen also senkrecht aufeinander. Sie schneiden sich in einer waagerecht liegenden Geraden, die als *Rißachse* x_{12} bezeichnet wird. Die so eingeführten Bildebenen teilen den Raum in vier *Quadranten* ein. Im allgemeinen bringt man das darzustellende Objekt K in den ersten Quadranten; d. h. es liegt über $\underline{\pi}_1$ und vor π_2. Nun projiziert man K senkrecht auf $\underline{\pi}_1$ und senkrecht auf π_2. Die Projektionsstrahlen als *Abbildungsmittel* stehen also in beiden Fällen senkrecht (normal) auf den zugehörigen Bildebenen. Die Art der hier vorliegenden Abbildungen bezeichnet man deshalb auch als *Normalprojektion.* Da bei einer Normalprojektion die Projektionsstrahlen sämtlich untereinander parallel sind, ist sie ein Sonderfall der *Parallelprojektion.* Nach diesem Vorgang erhält man zwei Bilder von K, nämlich den *Grundriß* $\underline{K}'$ in $\underline{\pi}_1$ und den *Aufriß* K'' in π_2. Durch Aufklappen der beiden Rißtafeln in die Zeichenebene bei festgehaltener Rißachse erhält man ein verebnetes Bildpaar von K, an dem sich nun mit Zirkel, Winkel und Lineal weitere Konstruktionen durchführen lassen. Um der natürlichen Anschauung entgegenzukommen, wird die Rißachse auch in der Zeichenebene waagerecht gelegt. Ferner fällt bei der für K vorausgesetzten Lage der Grundriß unter und der Aufriß über die Rißachse. (Bild 1)

Weiterhin ist hervorzuheben, daß nach dem Aufklappen der Bildebene in die Zeichenebene die Bilder P' und P'' eines Punktes P auf einer Senkrechten zur Rißachse x_{12} liegen. Man sagt: P' und P'' befinden sich in *Monge'scher Lage.* Die als Konstruktionshilfe unentbehrliche Verbindungsgerade von P' und P'' bezeichnet man als die zu P gehörige *Ordnungslinie.*

Die Entfernung von P'' bis zur Rißachse gibt den *ersten Tafelabstand* und die Entfernung von P' bis zur Rißachse den *zweiten Tafelabstand* von P an. Liegt P im ersten Quadranten, so erscheint in der Zeichenebene der Aufriß P'' von P oberhalb der Rißachse und der Grundriß P' von P unterhalb der Rißachse. Im Verlaufe einer Konstruktion kann es vorkommen, daß Punkte aus anderen Quadranten mit herangezogen werden müssen. Dann darf man sich nicht irritieren lassen, wenn z. B. einmal der Aufriß eines solchen Punktes in der Zeichenebene unterhalb der Rißachse und der Grundriß oberhalb der Rißachse liegen. Es muß stets Klarheit darüber bestehen, daß sich in der Zeichenebene zwei Bildebenen überdecken. Durch eine konsequente Bezeichnungsweise der Bildpunkte lassen sich Fehler weitgehend vermeiden.

Gibt man sich die Lage von zwei Punkten A und B durch ihre Grund- und Aufrisse vor, so lassen sich diese durch eine Gerade g miteinander verbinden. Auch von dieser Geraden g gibt es zwei Bilder, nämlich den Grundriß g' und den Aufriß g''. Mit Hilfe zweier Pappstücke, die — aufeinander senkrecht gestellt — die Bildebenen $\underline{\pi}_1$ und π_2 darstellen, veranschauliche man sich die Lage von g bezüglich der Bildebenen gemäß den vorgegebenen Rissen. (Bild 2)

Für weitere Konstruktionsaufgaben sind zwei Punkte ausgezeichneter Lage der Geraden g von Bedeutung; dies sind die Schnittpunkte von g mit $\underline{\pi}_1$ und π_2. Man bezeichnet sie auch als *Spurpunkte* $\underline{G}_1$ bzw. G_2 von g. Um sie konstruktiv zu finden, muß man sich zunächst klar darüber sein, daß der Aufriß sämtlicher Punkte von $\underline{\pi}_1$ wie auch der Grundriß sämtlicher Punkte von π_2 in die Rißachse fällt. Im Schnittpunkt von g'' mit der Rißachse liegt also der Aufriß $\underline{G}_1''$ des Punktes $\underline{G}_1 = [g\ \underline{\pi}_1]$ (lies $\underline{G}_1$ ist gleich dem Schnittpunkt von g mit $\underline{\pi}_1$). (Bild 3) Der Grundriß des ersten Spurpunktes liegt im Schnittpunkt von g' mit der Ordnungslinie durch $\underline{G}_1''$. Völlig analog verfährt man bei Bestimmung des zweiten Spurpunktes G_2 von g. Im Schnittpunkt von g' mit der Rißachse liegt G_2. Der Aufriß von G'_2 liegt im Schnittpunkt von g'' mit der Ordnungslinie durch G'_2. Da der Aufriß von G_2 und auch der Grundriß von G_1 jeweils mit den Originalpunkten zusammenfallen, gilt $G_1 = G_1'$ und $G_2'' = G_2$.

E. Schröder

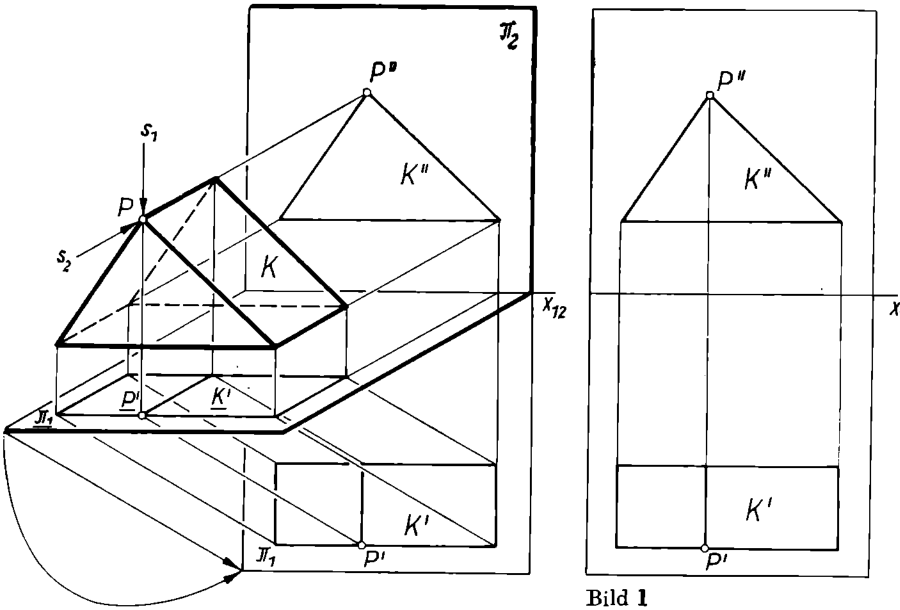


Bild 1

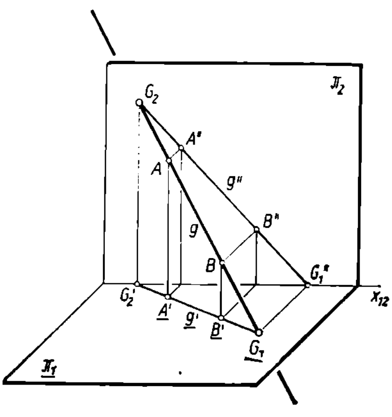


Bild 2 Darstellung der Bildebenen π_1 und $\underline{\pi}_2$ sowie der Geraden g in einem Schrägriß

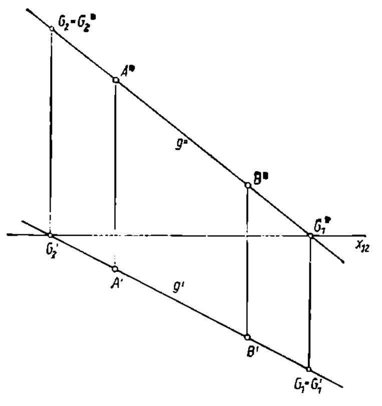
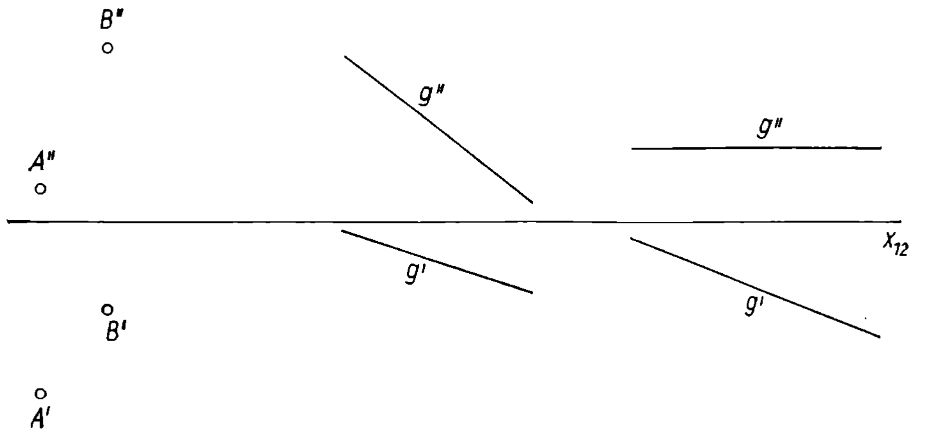


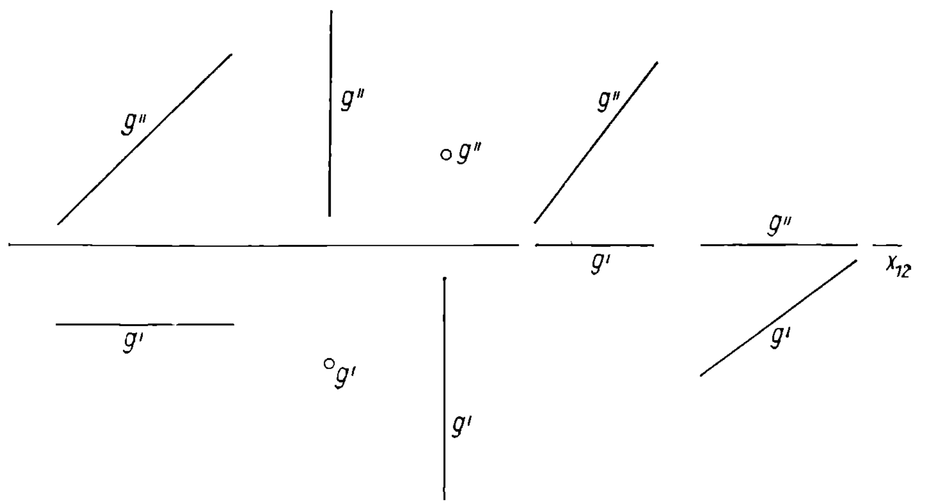
Bild 3 Darstellung der Geraden $g = [AB]$ in zugeordneten Normalrissen

Aufgaben zur Darstellenden Geometrie

... Zeichne Grund- und Aufriß der die Punkte A und B verbindenden Geraden g ein! Konstruiere den ersten und zweiten Spurpunkt von g!

... Konstruiere in den folgenden Bildern den ersten und zweiten Spurpunkt von g und bestimme Grund- und Aufriß jenes Punktes, für den der erste und zweite Tafelabstand gleich groß sind! Gib eine Erklärung für besondere Lösungen!

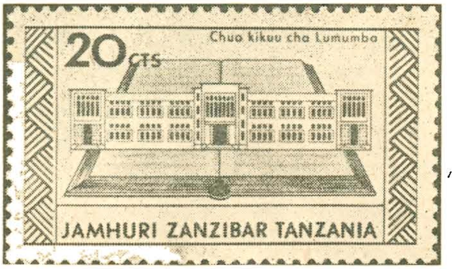




Als Mathematiklehrer in Tansania

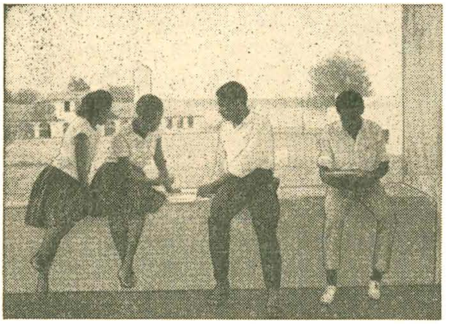
Seit Januar 1967 bin ich als Fachlehrer für Mathematik und *General Science* am Lehrerbildungsinstitut in Sansibar tätig. Voraussichtlich wird sich mein Einsatz über drei Jahre erstrecken. Alle meine Kollegen aus der DDR, die in Sansibar oder Tansania Mainland unterrichten, sind Naturwissenschaftler bzw. Mathematiker. Diesen Fächern widmet man hier größte Aufmerksamkeit und greift gern auf die Kenntnisse und Erfahrungen unserer Lehrer zurück. Ausbildungsziel am *Teacher Training College* ist: Lehrer für die Klassen 1 bis 8 der sogenannten Primary Schools. Durch das Fach *General Science*, das erst seit Ende 1965 in den neu entworfenen Lehrplan aufgenommen wurde, erhalten die Lehrerstudenten Grundkenntnisse in allen naturwissenschaftlichen Fächern (im Überblick). Besonders betont werden die Fächer Biologie — entsprechend der Bedeutung dieses Faches für die Landwirtschaft als wichtigsten Wirtschaftszweig der Insel — Physik, Chemie, Mineralogie, Astronomie und physische Geographie.
Der Mathematikunterricht hier am Institut und in den Schulen ist noch nicht so modern gestaltet wie in der DDR. Auf Grund umfangreicher Versuche einer Gruppe interessierter Lehrer ist aber zu erwarten, daß man bereits im nächsten Schuljahr bestimmte Ergebnisse verallgemeinern und beispielsweise mengentheoretische Begriffsbildungen in den unteren Klassen der Schulen einführen wird, die dann schrittweise ausgebaut werden sollen. Wöchentlich führe ich (fakultativ) eine Mathematikstunde mit Olympiadeaufgaben oder mit Material aus *alpha* durch. 50 Prozent meiner Studenten beteiligen sich. Die Tätigkeit mathematischer Arbeitsgemeinschaften und die Durchführung von Leistungsvergleichen steckt noch in den Kinderschuhen. Wir können nicht sagen, daß unsere Arbeit einfach ist. Man muß sich zum Beispiel daran gewöhnen, ausschließlich englisch zu sprechen. Es erfordert besonders im Unterricht Konzentration. Aber die Freundlichkeit der Menschen, mit denen wir Umgang haben, läßt vieles überwinden. Es ist eine Tatsache, daß alle Afrikaner, mit denen wir zusammen kommen, sehr stolz auf ihre Sprache — Kiswaheli — sind. Es wird alles versucht, um ihr weiteste Verbreitung zu sichern.
Die klimatischen Bedingungen werden von den meisten von uns besser ertragen als ich erwartet hatte. Auch die harten tropischen Regenfälle während der Regenzeit haben uns nicht umgeworfen. Die Temperaturen ermöglichen immer das Baden im Indischen Ozean. Wenn es die Zeit erlaubt, machen wir Gebrauch davon. Sportlicher Ausgleich gehört zum Aufenthalt in den Tropen. Ich spiele nebenbei gern Tischtennis und finde auch unter den Studenten gute Gegner. Mit unseren sowjetischen Freunden vereinen uns auch sportliche Wettkämpfe (z. B. Volleyball, Schach und Tischtennis).
Bunt und abwechslungsreich, fremdartig und ungewöhnlich sind die Erlebnisse und die Eindrücke, die man immer wieder hat — aber das ist wohl nicht überraschend, wenn man sich vergegenwärtigt, daß man etwa 8000 Kilometer von zu Hause entfernt ist, jenseits des Äquators, daß man in den Tropen unter den dazugehörigen Bedingungen lebt. — Allen Lesern von *alpha* sende ich von hier viele herzliche Grüße. Ich wünsche ihnen Freude an ihrer Zeitschrift, Erfolge beim Lösen der mathematischen Probleme, weitere Fortschritte in der Beschäftigung mit unserem Fach.

H. Büchel



Marke Sansibars mit einem Bild vom Lumumba-College, der wohl bekanntesten Secondary School der Insel und einem geöffneten Buch — ein Motiv, das die Bedeutung der Volksbildung und des Lernens überhaupt für die Entwicklung des Landes zum Ausdruck bringt.

Die Fußballmannschaft des Teacher Training College; die Ausrüstung der Sportler ist ein Geschenk aus der DDR und hat bei der Übergabe große Freude hervorgerufen.



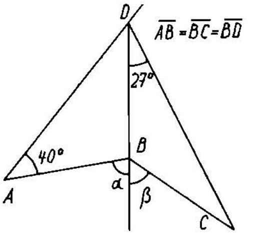
Vier Studenten des Autors bei Vorbereitungen auf die Mathematikprüfungen

Aufgaben

5 1. Eine rechteckige Rasenfläche, die 80 m lang und 32 m breit ist, wird von einem gepflasterten Gehweg umgeben, der überall 2 m breit ist. Berechne den Flächeninhalt der gepflasterten Fläche!

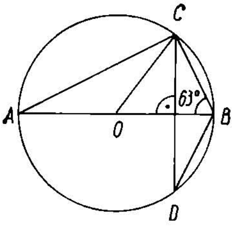
2. Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist gleich 6422. Zwei der Zahlen sind 19 und 26. Wie heißt die dritte Zahl?

3. Bestimme die Winkel α und β in der Skizze! 6
Beachte dabei, daß $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD}$ gilt.



4. Bestätige die Richtigkeit der Feststellung aus dem alten ägyptischen *Rechenbuch des Ahmes* (ungefähr 1800 v. d. Z.), daß $\frac{5}{21}$ gleich der Summe der Brüche $\frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{42}$ und $\frac{2}{29}$ gleich der Summe der Brüche $\frac{1}{24}, \frac{1}{58}, \frac{1}{174}, \frac{1}{232}$ ist!

5. $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Kreises mit dem Mittelpunkt O; $\overline{CD}$ ist eine Sehne dieses Kreises, die senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Berechne die Winkel CAB, CDB und COB, wenn $\sphericalangle\, ABC = 63°$ beträgt! 7



6. Ein Kollege des Autors, Mr. M. A. Bashraheil, ein begeisterter Pionier auf dem Gebiete der modernen Schulmathematik und Methodik, stellte die nachfolgende Aufgabe in seiner Sprache — Kiswaheli — zur Verfügung, um den Lesern einen Eindruck von ihr zu vermitteln:

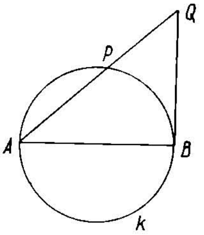
Jahazi imetweka kwenda meli 10 *Kaskazini, halafu meli* 18 *Mashariki kwa mkato wa digirii* 45°, *halafu meli* 23 *Kusini.*
Kwa vipimo vya Scale, tafuta masafa ya jahazi ilipo na ilipoanza.

Die überarbeitete, unserem Sprachgebrauch angeglichene Übersetzung lautet:

Sportler segeln mit ihrem Boot vom Standort aus zunächst 10 Seemeilen nach Norden, danach 18 sm in südöstlicher Richtung und schließlich 23 sm nach Süden. Bestimme mit Hilfe einer maßstabgerechten Zeichnung die Entfernung des Bootes vom Standort!

8 7. Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser, die Gerade BQ eine Tangente des Kreises k; die Punkte A, P und Q liegen auf einer Geraden.

a) Es ist der Kreis k, der durch A, P und B geht, zu konstruieren, wenn $\overline{BQ} = 3$ cm und $\overline{PQ} = 1$ cm gilt!



b) Die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AP}$ sind rechnerisch zu bestimmen!

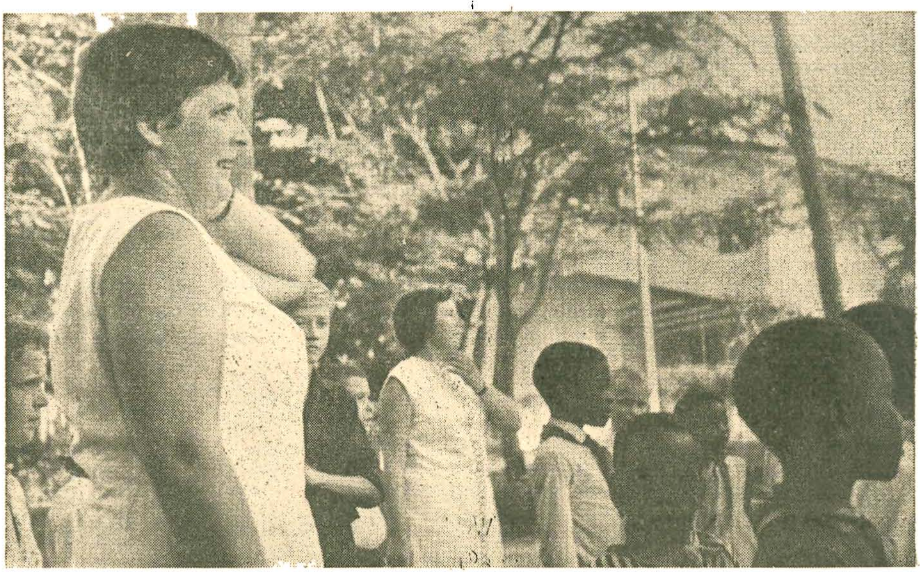
8. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $AB = c = 6$ cm, $\sphericalangle CAB = \alpha = 48°$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 56°$. Lege danach einen inneren Punkt P des Dreiecks ABC fest und verbinde ihn mit A, B und C. Schließlich sind ein innerer Punkt X der Strecke $\overline{AP}$, ein innerer Punkt Y der Strecke $\overline{BP}$ und ein innerer Punkt Z der Strecke $\overline{CP}$ so zu konstruieren, daß die fortlaufende Proportion $\overline{PX} : \overline{XA} = \overline{PY} : \overline{YB} = \overline{PZ} : \overline{ZC} = 1 : 2$ gilt. Die Punkte X, Y und Z legen ein Dreieck XYZ fest. Die Innenwinkel des Dreiecks ABC sind mit denen des Dreiecks XYZ zu vergleichen. Zu welcher Vermutung kommst du auf Grund des Vergleiches? Kannst du die Richtigkeit deiner Vermutung beweisen?

9. Welche Werte müssen a und b haben, damit das Polynom $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ sowohl durch $x - 2$ als auch durch $x + 1$ teilbar ist? 9

10. Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser $\overline{AB}$; es seien ferner P und Q zwei voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf $\overline{PQ}$ errichteten Lote schneiden den Durchmesser $\overline{AB}$ in den Punkten M bzw. N. Beweise, daß $\overline{OM} = \overline{ON}$ gilt!

11. Ermittle drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: 10
Das Quadrat der Summe dieser drei Zahlen ist um 484 größer als die Summe der Quadrate dieser Zahlen.

12. Gegeben ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Grundkante 6 cm und deren Höhe 10 cm beträgt. Eine Ebene schneidet die Seitenkanten $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ bzw. $\overline{CS}$ der Pyramide in den Punkten P, Q bzw. R so, daß $\overline{AP} = 2$ cm, $\overline{BQ} = 3$ cm bzw. $\overline{CR} = 4$ cm gilt. Es ist die wahre Größe der Schnittfläche dieser Ebene mit der Pyramide zu konstruieren.



Kindertag 1967 in Sansibar — Die Schulleiterin begrüßt neben den 40 Schülern der Konsulatsschule der DDR auch afrikanische Pioniere, die zu Besuch weilten, Geschenke austauschten und gemeinsam mit deutschen Pionieren frohe Stunden bei Spiel, Gesang und Tanz verbrachten. (Foto: Christa Büchel, Ehefrau des Autors)

Einige Aufgaben über Folgen

aus den Schriften des Altertums

PASCAL „Dieser Gegenstand der Mathematik ist derart wichtig,
daß man es nicht versäumen darf,
diese Teile ein wenig interessanter zu gestalten."

Es hat einen eigentümlichen Reiz, Nachforschungen über die Anfänge der verschiedenen Gebiete der Mathematik und über die gesellschaftlichen Notwendigkeiten und Voraussetzungen zu ihrer Entwicklung zu betreiben. Stellen wir uns beispielsweise die Aufgabe, nach den Anfängen und dem Entstehungsort der *Lehre von den Folgen und Reihen* zu forschen, so müssen wir zur Beantwortung viele Seiten im Buch der Geschichte zurückschlagen, bis wir in die ältesten Epochen der Ägypter und Assyrer kommen.

Vor ungefähr siebzig Jahren fand der Engländer Rhind bei Ausgrabungen in Ägypten einen Papyrus, dessen Alter auf Grund der Form der Schriftzeichen auf etwa 4000 Jahre geschätzt wird. Die Entzifferung der altägyptischen Schriftzeichen, der Hieroglyphen, bereitete lange Zeit große Schwierigkeiten. Der *Papyrus Rhind,* wie dieses Schriftstück nun genannt wird, offenbarte sich bei seiner Entzifferung als das bisher älteste Rechenbuch der Welt. Es enthält eine Anzahl mathematischer Aufgaben, von denen einige auf die Kenntnis einzelner Folgen schließen lassen.

Sehen wir uns eine dieser Aufgaben näher an:

„Mag dir gesagt werden: Teile zehn Maß Gerste so unter zehn Menschen, daß der Unterschied zwischen jedem Menschen und seinem Nachbarn $\overline{8}$ $\left(\text{d. h. } \frac{1}{8}\right)$ Maß Gerste beträgt."

Zum besseren Verständnis wollen wir den Text dieser Aufgabe in unsere Ausdrucksweise bringen: „10 Maß Gerste sind unter 10 Personen derart zu teilen, daß die Anteile jeder Person den Gliedern einer arithmetischen Folge mit der Differenz $\frac{1}{8}$ Maß entsprechen."

Im erwähnten Papyrus werden neben dem Text der Aufgabe auch die Regeln zur Berechnung der Anteile für die erste und die letzte Person angegeben. In die heute gebräuchliche Formelsprache übertragen lautet diese Regel:

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n-1). \qquad (1)$$

Wenn wir uns diese Formel näher ansehen, können wir feststellen, daß wir sie leicht durch einfache arithmetische Umformungen aus der bekannten Summenformel für die Glieder einer arithmetischen Folge erhalten.

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \qquad S = a_1 n + \frac{d}{2}(n-1)n$$

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$$

Haben wir aber erst den ersten der zehn Werte, so ist es mit Hilfe der Formel (1) leicht, auch die übrigen neun Werte $a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ zu errechnen, denn dann ist:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d; \quad \ldots; \quad a_{10} = a_9 + d; \quad \text{mit } d = -\frac{1}{8}.$$

Besonders müssen wir darüber erstaunt sein, wie die altägyptischen Mathematiker die Formel (1) ausdrückten. Sie kannten ja noch keine ausgearbeitete Theorie der Reihen, und auch der Umgang mit Formeln war ihnen fremd.
Über die Frage nach der Herleitung der Formel (1) geben die Werke zur Geschichte der Mathematik unterschiedliche Auskünfte. Offensichtlich scheint bei der ursprünglichen Lösung dieser Aufgabe die „Methode des systematischen Probierens“ eine große Rolle gespielt zu haben. Zumindest wird diese Ansicht von den Wissenschaftlern W. W. Babinina und M. J. Bygodskow vertreten. Es kann aber auch folgender Weg eingeschlagen worden sein, der mit seinen Überlegungen ebenfalls zur Lösung der aufgeworfenen Frage führt:
Wir gehen davon aus, daß erst einmal jede der zehn beteiligten Personen den gleichen Anteil a erhält:

$$a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a.$$

Damit sich bei einem Vergleich der Anteile der ersten beiden Personen eine Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß Gerste ergibt, kann man vom Anteil der zweiten Person $\frac{1}{16}$ Maß Gerste wegnehmen und zum Anteil der ersten hinzufügen:

$$a+\frac{1}{16} \quad a-\frac{1}{16} \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a.$$

Da aber die zweite Person $\frac{1}{8}$ Maß mehr haben soll als die dritte, muß man der dritten $2 \cdot \frac{1}{16}$ Maß fortnehmen. Nun gibt man $\frac{1}{16}$ Maß der zweiten Person, die damit wirklich $\frac{1}{8}$ Maß mehr hat als die dritte, und $\frac{1}{16}$ Maß der ersten Person, damit auch hier die Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß zum Anteil der zweiten erhalten bleibt.

$$a+\frac{2}{16} \quad a \quad a-\frac{2}{16} \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a.$$

Führt man nun diese Überlegungen analog weiter, so kommt man zu der Verteilungsregel, die bereits den ägyptischen Mathematikern bekannt war und die durch die Formel (1) ausgedrückt wird:

$$\begin{array}{cccccccccc}
a+\frac{3}{16} & a+\frac{1}{16} & a-\frac{1}{16} & a-\frac{3}{16} & a & a & a & a & a & a \\
a+\frac{4}{16} & a+\frac{2}{16} & a & a-\frac{2}{16} & a-\frac{4}{16} & a & a & a & a & a \\
a+\frac{5}{16} & a+\frac{3}{16} & a+\frac{1}{16} & a-\frac{1}{16} & a-\frac{3}{16} & a-\frac{5}{16} & a & a & a & a \\
a+\frac{6}{16} & a+\frac{4}{16} & a+\frac{2}{16} & a & a-\frac{2}{16} & a-\frac{4}{16} & a-\frac{6}{16} & a & a & a \\
a+\frac{7}{16} & a+\frac{5}{16} & a+\frac{3}{16} & a+\frac{1}{16} & a-\frac{1}{16} & a-\frac{3}{16} & a-\frac{5}{16} & a-\frac{7}{16} & a & a \\
a+\frac{8}{16} & a+\frac{6}{16} & a+\frac{4}{16} & a+\frac{2}{16} & a & a-\frac{2}{16} & a-\frac{4}{16} & a-\frac{6}{16} & a-\frac{8}{16} & a \\
a+\frac{9}{16} & a+\frac{7}{16} & a+\frac{5}{16} & a+\frac{3}{16} & a+\frac{1}{16} & a-\frac{1}{16} & a-\frac{3}{16} & a-\frac{5}{16} & a-\frac{7}{16} & a-\frac{9}{16}
\end{array}$$

Dies läßt sich auch folgendermaßen darstellen. Man teilt 10 Maß Gerste erst einmal in 10 gleiche Teile. Jeder erhält damit 1 Maß. Danach nimmt man von allen mit Ausnahme des ersten die Hälfte der verlangten Differenz (d. h. je $\frac{1}{16}$ Maß) und gibt dies dem ersten, der damit seinen Anteil erhalten hat. Nun nimmt man von allen mit Ausnahme der ersten zwei wiederum die Hälfte der Differenz (also erneut $\frac{1}{16}$ Maß) und gibt das dem zweiten, der damit ebenfalls seinen Anteil erhalten hat.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1+\frac{9}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$
$1+\frac{9}{16}$	$1-\frac{1}{16}+\frac{8}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$

Wir wollen uns davon überzeugen, ob zwischen den Anteilen der ersten beiden Personen auch wirklich die geforderte Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß besteht:

$$a_1 - a_2 = \left(1 + \frac{9}{16}\right) - \left(1 - \frac{1}{16} + \frac{8}{16}\right) = \frac{25-23}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Setzt man nun die Aufteilung in der angeführten Reihenfolge fort, so erhält man den Anteil des Dritten:

$$a_3 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = 1 + \frac{5}{16}.$$

Die Differenz zwischen der zweiten und der dritten Person ist wiederum gleich $\frac{1}{8}$ Maß. Diesen Prozeß kann man entsprechend der angeführten Verteilung fortsetzen und erhält dann die bereits in der vorigen Aufstellung angegebenen Ergebnisse.
Wir können annehmen, daß dieses praktische Lösungsverfahren den ägyptischen Mathematikern bekannt war. In verallgemeinerter Form ging es dann sinngemäß nach Formel (1) in den *Papyrus Rhind* ein. Bei der Lösung derartiger Aufgaben wurde also zuerst ein Durchschnittsanteil berechnet $\left(\frac{S}{n} = 1 \text{ Maß}\right)$. Dann halbierte man die Differenz $\left(\frac{d}{2} = \frac{1}{16} \text{ Maß}\right)$, multiplizierte diese mit $n-1$ und erhielt mit dem Produkt den Betrag, der zum Durchschnittsanteil hinzuzufügen bzw. abzuziehen war $\left(\frac{d}{2}(n-1)\right)$. Auf diese Weise erhielt man den ersten Anteil. Die weiteren Anteile errechnete man durch $a_1 + d = a_2$; $a_2 + d = a_3$ und so weiter $\left(d = -\frac{1}{8}\right)$.
Im *Papyrus Rhind* finden wir auch Aufgaben über geometrische Folgen. Einer Aufgabe zum Beispiel liegt die Folge der Potenzen mit der Basis 7 zugrunde: $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \ldots$ Interessant ist die Darstellung dieser Potenzen durch Hieroglyphen. Sie entsprechen der Reihe nach den Darstellungen für Haus, Katze, Maus, Gerste Maß. Hieraus können wir uns eine Entschlüsselung dieser Hieroglyphen wie folgt denken:

Jemand hat sieben Häuser. In jedem Haus gibt es sieben Katzen. Jede Katze verschlingt sieben Mäuse. Jede Maus frißt sieben Gerstenähren und jede Ähre ergibt, wenn man die Körner aussät, sieben Maß Gerste. Man ermittle die Summe aller Häuser, Katzen, Mäuse, Ähren und Maß Gerste.

In dem Papyrus werden zwei Lösungen für die Aufgabe angegeben. Erstens eine Lösung mit Hilfe der direkten Multiplikation und anschließender Addition der Glieder $(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5)$ und zweitens eine Lösung durch Multiplikation der Zahl 2801 mit 7. Die Zahl 2801 erhält man als Ergebnis der Summierung von $1+7+7^2+7^3+7^4$.

Die allgemeine Summenformel für die Glieder einer geometrischen Folge haben die Ägypter anscheinend selbst für den einfachen Fall $b_1 = q$ noch nicht gekannt.
Diese Aufgabe über eine geometrische Reihe finden wir mit unwesentlichen textlichen Abänderungen in den alten Schriften verschiedener Völker, so auch in der altrussischen Literatur. Dort hat die Aufgabe etwa folgenden Wortlaut: „Es gibt sieben Greise. Jeder Greis hat sieben Stöcke. An jedem Stock sind sieben Äste. An jedem Ast hängen sieben Beutel. In jedem Beutel stecken sieben Spatzen. Jeder Spatz hat sieben Mägen. Wieviel Dinge sind das zusammen?"
Auch die Erforschung der in babylonischer Keilschrift geschriebenen Texte aus der Hammurapischen Epoche (XVIII. Jahrhundert v. u. Z.) ergab, daß schon im alten Babylon einige ökonomische und wissenschaftliche Probleme mit Hilfe arithmetischer und geometrischer Reihen gelöst wurden. ... Man fand Tontafeln mit Keilschrifttext und übersetzte sie aus dem Assyrischen in das Englische. In einem Text wurde dargelegt, wieviel Teile der Mondscheibe an jedem der 15 Tage vom Neumond bis zum Vollmond von der Sonne beleuchtet werden. Danach verläuft die Zunahme des beleuchteten Teiles der Mondscheibe in den ersten fünf Tagen gesetzmäßig nach einer geometrischen Folge mit dem Quotienten 2 und folgt dann in den darauffolgenden 10 Tagen den Gesetzen der arithmetischen Folge mit der Differenz 16. Hieraus können wir ersehen, mit welch großem Interesse die Babylonier die Astronomie betrieben haben.
Aus einer Reihe historischer Aufgaben über Folgen und Reihen können wir das Erstaunen der damaligen Menschen über das starke Anwachsen der Glieder einer geometrischen Folge, deren Quotient größer als 1 ist, erkennen. Besonders fiel ihnen dieses Anwachsen auf, wenn zwei Folgen, eine arithmetische und eine geometrische, nebeneinander untersucht wurden.
Wenden wir uns in diesem Zusammenhang der bekannten indischen Aufgabe über das Schachbrett zu. Nach einer Sage war der indische Prinz Siram über die Scharfsinnigkeit und über die Vielfalt der möglichen Stellungen des Schachspiels entzückt. Er rief den Erfinder, den Gelehrten Seta, zu sich und sagte zu ihm: „Ich will Dich, Seta, für das wunderbare Spiel, das Du erdacht hast, würdig belohnen. Ich bin reich genug, jeden Deiner Wünsche zu erfüllen." „O Gebieter", antwortete Seta, „befiel, mir für das erste Feld des Schachbrettes ein Weizenkorn zu übergeben; für das zweite Feld dann zwei Weizenkörner; für das dritte Feld vier Körner und für jedes weitere Feld doppelt soviel Körner wie für das vorangegangene." „Du sollst Deine Körner erhalten", erwiderte der Prinz, „aber wisse, daß Du eine meiner Freigebigkeit unwürdige Bitte getan hast. Mein Diener Stupai wird Dir Deine Säcke mit Weizen hinaustragen."
Am nächsten Tag erschien der Hofmathematiker beim Prinzen. „Wir haben die Menge des Kornes, die Seta zu erhalten hat, gewissenhaft ausgerechnet", sagte er zum Prinzen. „Diese Zahl ist aber derart groß, daß das Korn aus Euren Speichern nicht ausreicht, auch das aus allen Speichern Eures Kaiserreiches, ja nicht einmal das Korn, das auf der ganzen Erde geerntet wird."
Mit Erstaunen vernahm der Prinz die Worte des Gelehrten, „Nenne mir diese ungeheuerliche Zahl!" befahl er. „Sie lautet 18446744073709551615", entgegnete der Mathematiker.
Überprüfe diese Zahl, indem Du in die Formel $S = b\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $b = 1$, $q = 2$ und $n = 64$ einsetzt!
Im alten Griechenland zur Zeit des Euklid und des Archimedes (3. Jahrh. v. u. Z.) beschäftigte man sich mit den Eigenschaften der Reihen und Folgen nicht nur zum Zwecke der Lösung praktischer Aufgaben, sondern darüber hinaus im Zusammenhang mit theoretischen Untersuchungen. . .

Dieser Artikel wurde — leicht gekürzt — dem Buch „Kreuz und quer durch die Mathematik" von A. A. Kolosow, Volk und Wissen Verlag, Berlin 1963, Best. Nr. 08001, MDN 6,75 entnommen.

In einem der nächsten Hefte wird der Leser (in Form einer modernen Betrachtungsweise) in die *Grundbegriffe elementarer Folgen* eingeführt, d. Red.

Ernährung und Leistungsfähigkeit

Auch der Mensch ist kein Perpetuum mobile, er kann ohne Energiezufuhr nicht leben!

Der euch vom Physikunterricht her bekannte *Satz von der Erhaltung der Energie* trifft auch auf den Menschen zu. Im Gegensatz zur Maschine braucht unser Organismus im Ruhezustand (Schlaf) zur Aufrechterhaltung seiner wichtigsten Funktionen, wie Atmung, Herztätigkeit usw., eine bestimmte Menge Energie. Diesen für den Ruhezustand benötigten Energiebedarf nennt man Grundumsatz. Jedem wird einleuchten, daß außer dieser Energiemenge zusätzliche Energie für die Arbeitsleistung notwendig ist, die je nach der zu verrichtenden Arbeit unterschiedlich hoch ist. Zur Verrichtung körperlicher Arbeit werden wesentlich mehr Kalorien* verbraucht als bei geistiger Tätigkeit. Eine Unterernährung ist für die körperliche und geistige Leistungsfähigkeit von großem Nachteil, doch darf uns das nicht zu der Annahme verleiten, daß eine erhöhte Kalorienzufuhr die Leistungsfähigkeit in jedem Fall steigert. Wird der Kalorienbedarf überschritten, so kommt es zu einer Ablagerung von Depotfett im Körper — zur Fettleibigkeit.
Folgende Aufstellung soll euch über den Energiebedarf verschiedener Alters- und Berufsgruppen Auskunft geben:

Altersgruppen	Kalorienbedarf
Kinder von 9 bis 12 Jahren	2500 kcal
Jugendliche von 12 bis 15 Jahren	
männlich	3000 kcal
weiblich	2600 kcal
Jugendliche von 15 bis 18 Jahren	
männlich	3200 bis 3600 kcal
weiblich	2600 bis 2800 kcal

Arbeitsschwere (Erwachsene)	
ohne körperliche Anstrengung	2000 bis 2400 kcal
bei mäßiger körperlicher Anstrengung	2500 bis 3000 kcal
Mittelschwer -und Schwerarbeiter	3000 bis 3600 kcal
Schwerstarbeiter	4200 kcal

Doch wollen wir bei unseren Ernährungsbetrachtungen das Kalorienproblem nicht in den Vordergrund stellen, sondern uns einem weitaus bedeutsameren Faktor, der richtigen und vollwertigen Ernährung, zuwenden. Bekanntlich hat ja die Ernährung nicht nur die Aufgabe, uns satt zu machen; vor allem muß sie unserem Körper sämtliche Stoffe zuführen, die er benötigt.

* Eine Kilokalorie (im Volksmund Kalorie genannt) ist die Einheit der Wärmemenge. Es ist die Wärmemenge (bzw. Energiemenge), die benötigt wird, um 1 Liter Wasser von 14,5 °C auf 15,5 °C zu erwärmen.
(1000 cal $\triangleq$ 1 kcal)

Was braucht unser Körper?

Eiweiß als wichtigster Vertreter der *Baustoffe* nimmt eine vorrangige Stellung ein, denn ohne Eiweiß ist jegliches Leben undenkbar. In der Jugend brauchen wir zum Aufbau unseres Körpers viel mehr Eiweiß als später zu seiner Erhaltung. Die tägliche Mindesteiweißmenge beträgt für Kinder und Jugendliche 2,0 g bis 1,5 g Eiweiß pro Kilogramm Körpergewicht. Etwa die Hälfte dieser Menge soll tierischen Ursprungs (Fleisch, Fisch, Milch), der Rest pflanzlicher Herkunft sein (Getreideerzeugnisse, Kartoffeln, Gemüse). Zur Sicherstellung des *Energiebedarfs* dienen hauptsächlich *Fette* und *Kohlenhydrate*, gelegentlich auch Eiweiße. Der Brennwert beträgt bei Fetten 9,3 kcal/g, bei Kohlenhydraten und Eiweißen 4,1 kcal/g. Wichtigster Kalorienlieferant ist das Fett, das in unserer Kost leider allzureichlich enthalten ist. Da das Körpergewicht bei älteren, aber auch jungen Menschen, heute zu hoch ist, ist es für uns wichtig, gerade mit dem Fett sparsam umzugehen. 1 Gramm Fett pro kg Körpergewicht ist durchaus ausreichend, keinesfalls sollten aber mehr als 30 kcal %** an Fett in der Tageskost enthalten sein. Den größten Anteil der gesamten Nahrungsaufnahme machen die Kohlenhydrate mit ca. 60 kcal % aus. Kohlenhydratträger, die viel Kalorien enthalten und leicht verdaulich sind, wie z. B. Traubenzucker, Honig, Schokolade, sind ideale Energiespender für sportliche Dauerleistungen, fördern jedoch bei reichlichem Genuß leider auch den Fettansatz. In diesem Zusammenhang möchte ich noch auf die weit verbreitete Unsitte hinweisen, Schleckereien (Süßigkeiten, Kuchen) zwischen den Mahlzeiten zu essen bzw. als Ersatz für eine Mahlzeit anzusehen. Das wollen wir doch besser bleibenlassen, denn diese kohlenhydratreichen Nahrungsmittel sind arm an Wirkstoffen. Reich an Wirkstoffen (Mineralstoffen, Spurenelementen und Vitaminen) und daher für die Ernährung günstiger sind Obst und Gemüse. Die Mineralstoffe sind teilweise (Calcium, Phosphor) auch am Aufbau unseres Organismus beteiligt, doch dienen sie darüber hinaus zur Regelung wichtiger Lebensvorgänge. So kommt ihnen, wie auch den Spurenelementen, als Wirkstoff eine große Bedeutung zu. Die Vitamine, die zu Recht als Schutzstoffe bezeichnet werden, sorgen für einen reibungslosen Stoffwechselablauf und garantieren dadurch eine optimale Leistungsfähigkeit. Außerdem stärken sie das Widerstandsvermögen unseres Körpers gegenüber Infektionskrankheiten. Eine aus reichende Versorgung mit Wirk- und Schutzstoffen ist besonders wichtig bei überdurchschnittlicher geistiger und körperlicher Belastung. Der Bedarf ist am sichersten durch eine abwechslungsreiche Kost, besonders aber durch reichlichen Verzehr von pflanzlichen Erzeugnissen, wie Gemüse, Obst und Vollkornprodukten, zu decken. Gleichzeitig wird damit der für die Verdauung so wichtige Rohfaserbedarf gedeckt, der einer Stuhlverstopfung entgegenwirkt. Eine richtige Zusammenstellung der Nahrung ist ausschlaggebend für die Erhaltung der Gesundheit, die Leistungsfähigkeit und das Wachstum.

Wie soll sich der Schüler, der ja überwiegend geistig beansprucht ist, ernähren?

1. Er muß genügend Eiweiß (1,5 bis 2,0 g Eiweiß pro kg Körpergewicht und Tag) aufnehmen. Der tägliche Genuß von einem halben Liter Milch trägt schon wesentlich dazu bei und ist eine der Grundforderungen, die gestellt wird.

2. Es dürfen nicht zu viel und nicht zu wenig Kalorien aufgenommen werden, d. h., wenn ihr lange Zeit auf der Schulbank sitzt, müßt ihr weniger essen, als wenn ihr in den Ferien herumtobt oder kleine Arbeiten verrichtet.

3. Vitamine und Mineralstoffe müssen immer reichlich zugeführt werden.

** kcal % gibt den prozentualen Anteil der gesamten Kalorienmenge an, z. B.: Eine Tageskost enthält 2000 kcal, 30 kcal % sind dann 600 kcal. Wollen wir wissen, wieviel g eines Nährstoffes diesen 600 kcal entsprechen, so dividieren wir die 600 durch den entsprechenden Brennwert. 30 kcal % Fett einer Kost mit insgesamt 2000 kcal entsprechen also 64,516 g Fett.

4. Die Kost soll leicht verdaulich und blähungsarm sein; darum hütet euch davor, z. B. vor der Mathematikolympiade ein kräftiges Hülsenfruchtgericht zu essen.

5. Ein altes Sprichwort sagt: *Ein voller Bauch studiert nicht gern!* Andrerseits ist aber bekannt, daß Hungergefühl die Konzentrationsfähigkeit ungünstig beeinflußt. Darum müssen wir der Verteilung der Mahlzeiten einige Beachtung schenken. Ein reichliches Frühstück belastet am wenigsten und erhält die Arbeitskraft für lange Zeit. Die Mittagsmahlzeit soll sich in normalen Grenzen bewegen, während sich eine knapp bemessene Abendmahlzeit etwa zwei Stunden vor dem Schlafengehen empfiehlt, um einen gesunden, erholsamen Schlaf zu gewährleisten. Um einen Leistungsabfall zwischen den Mahlzeiten sowie Ermüdungserscheinungen nach langandauernder geistiger Anstrengung zu vermeiden, empfiehlt es sich, Obst, Obstsäfte oder Milch, letztere ist besonders erfrischend, als Zwischenmahlzeit bei den Arbeitspausen einzunehmen.

6. Die Mahlzeiten sind in Ruhe einzunehmen, denn sie sollen nicht nur der Sättigung, sondern auch der Erholung dienen.

7. Nicht zu vergessen ist die körperliche Betätigung nach geistigen Anstrengungen zur Entspannung. Sie schafft den besten Ausgleich zum stundenlangen Stillsitzen.

W. Kraack

Aufgaben

5 1. Eine Tageskost enthält 2400 kcal. Wieviel Kalorien sind für die einzelnen Mahlzeiten zu veranschlagen, wenn zum

6 1. Frühstück 20 kcal% — 2. Frühstück 15 kcal% — Mittagessen 30 kcal% — Nachmittag 10 kcal% — Abendessen 25 kcal% gegeben werden sollen?

2. Eine Erhöhung des Kalorienverbrauches durch körperliche Arbeit führt zu einer Gewichtabnahme. Soll 1 kg abgenommen werden, so müssen 6000 kcal verbrannt werden.

a) Wieviel Stunden müßte man spazierengehen, um 1 kg an Gewicht abzunehmen (Verbrauch beim Spazierengehen 120 kcal pro Stunde)?

b) Wieviel Stunden müßte man schwimmen, um 1 kg an Gewicht abzunehmen (Verbrauch beim Schwimmen 200 kcal pro Stunde)?

7 3. Eine gesunde, optimale Ernährung soll die Grundnährstoffe in folgendem Verhältnis enthalten: Eiweiß 13 kcal%, Fett 27,5 kcal%, Kohlenhydrate 59,5 kcal%.

8 Wieviel g der Grundnährstoffe sind in einer Kost mit 2400 kcal enthalten? (Brennwerte: 1 g Eiweiß $\triangleq$ 4,1 kcal, 1 g Fett $\triangleq$ 9,3 kcal, 1 g Kohlenhydrate $\triangleq$ 4,1 kcal) Merke: Für Ernährungserhebungen werden nur *auf*gerundete Werte verwendet.

4. Der Kalorienbedarf eines Menschen beträgt 2500 kcal. Dieser wurde jedoch täglich um 15% überschritten und führte so zu einem Übergewicht. Nach wieviel Tagen hat die entsprechende Person 1 kg zugenommen, wenn 6000 kcal über den Bedarf (2500 kcal) zu einem Gewichtansatz von 1 kg führen?

5. a) Wieviel Kalorien sind in einer Kost enthalten, welche sich aus 82 g Eiweiß, 72 g Fett 9
und 302 g Kohlenhydrate zusammensetzt?

b) Wieviel kcal% der einzelnen Grundnährstoffe sind in dieser Kost enthalten? 10

6. Der Eiweißbedarf beträgt für Kinder 1,8 g pro kg Körpergewicht.

a) Wieviel g Eiweiß müßte ein 35 kg schwerer Junge aufnehmen, um seinen Bedarf voll zu decken?

b) Wieviel der unten aufgeführten Nahrungsmittel müßte er essen, wenn er ausschließlich dadurch seinen Bedarf decken sollte?

1	Ei	7,0 g Eiweiß
1	Liter Milch	34,0 g Eiweiß
100 g	Quark	17,6 g Eiweiß
100 g	Vollkornbrot	8,1 g Eiweiß
100 g	Kartoffeln	2,0 g Eiweiß

7. Wie Alkohol durch seinen hohen Kaloriengehalt das Übergewicht fördern kann, zeigt folgende Aufgabe: 1 g Alkohol enthält 7,1 kcal. Wieviel Kalorien sind demnach in 75 g 47%igem Schnaps enthalten?

(Lösungen siehe S. 189)

Weiteres umfassendes Material findet der interessierte Leser in zahlreichen populärwissenschaftlichen und fachbetonten Neuerscheinungen wie z. B. in „Unser Haushalt“ (Verlag für die Frau, Leipzig, 1966, S. 629 bis 678). Jede Bücherei wird beraten und helfen können.

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Siegfried Brehmer

Pädagogische Hochschule Potsdam
Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

Der berühmte Mathematiker *Gauß* hat in seinen grundlegenden Untersuchungen über gekrümmte Flächen im Raum gewisse Größen E, F, G sowie L, M, N eingeführt, die nach ihm als *Gaußsche Fundamentalgrößen* bezeichnet werden. Mit diesen Größen hat er unter anderem gezeigt, daß es auf jeder solchen Fläche zwei zueinander senkrechte Richtungen gibt, in denen die Fläche am stärksten gekrümmt ist. Hierbei spielen die folgenden Begriffsbildungen und Aufgaben eine Rolle, die eng mit der Lehre von den quadratischen Gleichungen verknüpft sind.
Sind A, B, C reelle Zahlen, so nennt man $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ eine *quadratische Form.* Gibt es vier reelle Zahlen P, Q, R, S, so daß

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (Px + Qy)\ (Rx + Sy)$$

für alle reellen Zahlen x, y ist, so sagt man, die quadratische Form lasse sich (im Reellen) in *Linearfaktoren* zerlegen.

167 a: Welche Bedingungen müssen die Zahlen A, B, C erfüllen, damit die quadratische Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ in Linearfaktoren zerlegt werden kann?

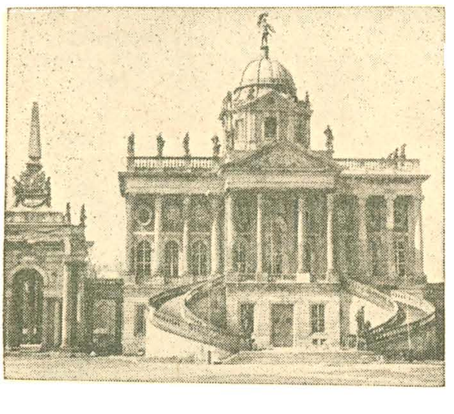
Anleitung: Man klammere im Falle $A \neq 0$, $y \neq 0$ den Faktor Ay^2 aus, setze $x/y = z$ und beachte den Satz von der Zerlegung quadratischer Gleichungen in Linearfaktoren.

167 b: Es sei $Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ eine quadratische Form, die sich nicht in Linearfaktoren zerlegen läßt. Man zeige, daß sich dann die quadratischen Formen $(EG - F^2)x^2 + (2FM - EN - GL)xy + (LN - M^2)\ y^2$, sowie $(EM - FL)\ x^2 + (EN - GL)\ xy + (FN - GM)y^2$ bei beliebiger Wahl der reellen Zahlen L, M, N in Linearfaktoren zerlegen lassen.

Anleitung: a) Man vergleiche die sich aus Aufgabe 167 a ergebende Bedingung für die beiden quadratischen Formen!

b) Man löse die Aufgabe zuerst im Spezialfall $F = 0$!

c) Im allgemeinen Fall drücke man M durch die Zahl $M' = M - \frac{FL}{E}$ aus!



Seit 1948 werden an der *Pädagogischen Hochschule Potsdam* Lehrer für die Schulen ausgebildet. Bisher haben 9413 Absolventen, darunter 5286 Fernstudenten, die Hochschule als Fachlehrer verlassen. Zur Zeit bereiten sich im Direktstudium 1764 Studenten auf den Lehrerberuf vor. Das Fach Mathematik studieren 213 Mädchen und 302 Jungen als Haupt- oder Nebenfach. (Das 2. Fach ist Physik oder Chemie.) 39 Professoren, 43 Dozenten, 317 Wissenschaftliche Mitarbeiter, 225 Technische Kräfte und 308 Verwaltungsangestellte betreuen die 9413 Studenten. Pro Student wurden im Jahre 1966 im Durchschnitt 6332 MDN ausgegeben. Der Haushaltplan der PH Potsdam belief sich im Jahre 1966 auf rund 19,8 Millionen MDN.

P. S. Den Status einer Hochschule und damit das Promotionsrecht erhielt am 1. September d. J. das bisherige, 1953 gegründete Pädagogische Institut „Karl Friedrich Wilhelm Wander", Dresden.

Wer löst mit?

alpha – Wettbewerb

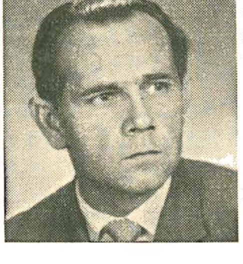
Mehrere tausend Lösungen sind zu unserem *alpha*-Wettbewerb eingegangen. Die Skala der Einsendungen reichte von der formalen Angabe des Ergebnisses über Antwortsatz bis hin zur sauberen, eleganten und ausführlichen Lösung. Wenn die Korrektoren vor unerwartet hohen Stößen von Arbeiten saßen, so schlug ihnen das Herz meist höher. Sie sahen den Fleiß und die Mühe, mit der ein Großteil der Leser die oft nicht einfachen Probleme, sei es allein oder im Kollektiv, bewältigte. Mit Heft 3 wurden die durch Nachauflagen sowie durch den Wunsch nach Verlängerung des Einsendetermins in der Redaktion entstandenen inhaltlichen wie technischen Fragen gelöst. In den Sommerferien konnten die ersten Antwortkarten ihren Weg zu den Einsendern nehmen. Mit Heft 5 wurde der Wettbewerb 1967 abgeschlossen. Am 5. Januar 1968 gehen die letzten Antwortkarten an die Teilnehmer, so daß jeder, der bis 31. 1. 68 seine bis dahin erhaltenen Karten geschlossen einsendet, von der Jury eingestuft wird. Die Namen der Preisträger und weiterer aktiver Teilnehmer veröffentlichen wir in Heft 2/68. Für das neue Jahr wünschen wir all unseren alten und neuen Lesern Freude und Erfolg beim zweiten *alpha*-Jahreswettbewerb.

Jury des alpha-Wettbewerbs

StR Johannes Lehmann
V. L. d. V. Chefredakteur
Fachlehrer f. Mathematik
29. OS. Leipzig
AG-Leiter Mathematik

NPT OStR Dr. Rolf Lüders
Fachlehrer f. Mathematik
Institut f. Lehrerbildung
Groß-Berlin

OL Theodor Scholl
Fachlehrer f. Mathematik
Hauptreferent im Ministerium
für Volksbildung Berlin



OL Harri Schulze Fachlehrer für Mathem.
62. OS Leipzig AG-Leiter Mathematik
an der Konsutationsschule
des Stadtbezirks Leipzig-Nordost

StR Gerhard Schulze Fachlehrer für Mathem.
EOS Herzberg/Elster
Fachberater f. Mathematik im Kreis Herzberg
Mitglied des Bezirksklubs
Junger Mathematiker Cottbus

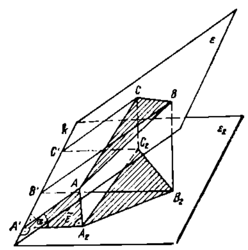
VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (29. 3. bis 1. 4. 1967)

Klassenstufe 10

1. Die zu untersuchende Zahl ist
$z = mn \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$.
(a) *Behauptung:* z ist durch 2 teilbar.
Beweis: Ist wenigstens eine der beiden Zahlen m, n gerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor $m - n$.
(b) *Behauptung:* z ist durch 3 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m, n durch 3 teilbar, so auch z. Lassen m, n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 3 teilbar. Läßt eine der Zahlen m, n bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist $m + n$, also auch z, durch 3 teilbar.
(c) *Behauptung:* z ist durch 5 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m, n durch 5 teilbar, so auch z. Lassen m, n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z durch 5 teilbar. Läßt eine der Zahlen m, n bei Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist $m + n$, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m, n den Rest 2, die andere den Rest 3 läßt. Läßt schließlich eine der Zahlen m, n bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4, die andere den Rest 2 oder 3, so läßt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$ und somit z durch 5 teilbar.
(d) *Behauptung:* z ist durch 30 teilbar.
Beweis: Wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt dies aus (a), (b), (c). Durch geeignete vorbereitende Umformungen lassen sich die Teilbarkeitsuntersuchungen vereinfachen.

2. Das Gradmaß des Neigungswinkels sei α genannt, der gegebene und gesuchte Flächeninhalt I ($\triangle\ ABC$) bzw. I_1 ($\triangle\ A_1B_1C_1$).
(a) Ist $\alpha = 0°$, so ist $\triangle\ A_1B_1C_1 \cong \triangle\ ABC$, also $I(\triangle\ ABC) = I_1(\triangle\ A_1B_1C_1)$.
(b) Ist $\alpha = 90°$, so liegen A_1, B_1, C_1 in einer Geraden (nämlich in der Schnittgeraden von ε und ε_1), also ist $I_1(\triangle\ A_1B_1C_1) = 0$.
(c) Sei nun $0° < \alpha < 90°$. Ist ε_2 irgendeine zu ε_1 parallele Ebene und sind A_2, B_2, C_2 die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_2, so



12

ist $\triangle\ A_2B_2C_2 \cong \triangle\ A_1B_1C_1$, also hat $\triangle\ A_2B_2C_2$ ebenfalls den gesuchten Flächeninhalt $I_1(\triangle\ A_1B_1C_1)$. Durch geeignete Wahl von ε_2 kann man erreichen, daß die Schnittgerade k von ε und ε_2 außerhalb des Dreiecks $\triangle\ ABC$ verläuft (Abb.).
Die zu k senkrechte Ebene $\tilde{\varepsilon}$ durch A steht auf ε_2 senkrecht, enthält also A_2. Ist ferner A' ihr Schnittpunkt mit k, so ist $A \neq A'$, $A \neq A_2$, $A' \neq A_2$, $g_{AA'} \perp k$ und $g_{AA'} \perp k$, somit $\mu(\sphericalangle\ A_2A'A) = \alpha$ und $\mu(\sphericalangle\ A'A_2A) = 90°$, also $\overline{A'A_2} = \overline{A'A} \cdot \cos\alpha$. Entsprechendes gilt für B und C.
Daraus folgt für die Flächeninhalte f, f_2 der (möglicherweise ausgearteten) Trapeze $A'B'BA$, $A'B'B_2A_2$ die Beziehung

$$f_2 = \overline{A'B'} \cdot \frac{1}{2}(\overline{A'A_2} + \overline{B'B_2})$$
$$= \overline{A'B'} \cdot \frac{1}{2}(\overline{A'A} + \overline{B'B}) \cdot \cos\alpha = f \cdot \cos\alpha.$$

Entsprechendes gilt für die Trapeze $B'C'CB$, $B'C'C_2B_2$ und $C'A'AC$, $C'A'A_2C_2$.
Da sich nun $I(\triangle\ ABC)$ in der gleichen Weise vermittels Addition und Subtraktion aus den Flächeninh. der Trapeze $A'B'BA$, $B'C'CB$, $C'A'AC$ gewinnen läßt wie $I_1(\triangle\ A_1B_1C_1)$ aus den Flächeninh. der Trapeze $A'B'B_2A_2$, $B'C'C_2B_2$, $C'A'A_2C_2$, so folgt schließlich $I_1(\triangle\ A_1B_1C_1) = I(\triangle\ ABC) \cdot \cos\alpha$.
Die Ergebnisse (a), (b), (c) lassen sich auch zusammenfassen, daß $I_1(\triangle\ A_1B_1C_1) = I(\triangle\ ABC) \cdot \cos\alpha$ für jedes $(0° \leq \alpha \leq 90°)$ gilt.

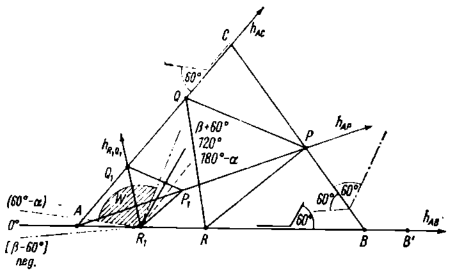
3. Wie üblich sei $\mu(\sphericalangle BAC) = \alpha$, $\mu(\sphericalangle ABC) = \beta$ genannt.

(I) Angenommen, $\triangle PQR$ sei eine Lösung der Aufgabe. Dann wähle man auf der Halbgeraden h_{AB} einen Punkt $R_1 \neq A$ beliebig und ziehe die Parallelen durch R_1 zu g_{RP} und zu g_{RQ}, die h_{AP} bzw. h_{AC} in P_1 bzw. in Q_1 schneiden. Es folgt

$$\overline{AP_1} : \overline{AP} = \overline{AR_1} : \overline{AR} = \overline{AQ_1} : \overline{AQ},$$

also $g_{P_1Q_1} \parallel g_{PQ}$; daher ist auch $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&0° < \mu(\sphericalangle ARQ)\\
&0° < \mu(\sphericalangle CQP) = \mu(\sphericalangle ARQ) + \alpha - 60°\\
&0° < \mu(\sphericalangle BPR) = \mu(\sphericalangle ARQ) + 60° - \beta\\
&0° < \mu(\sphericalangle BRP) = 120° - \mu(\sphericalangle ARQ)\\
&0° < \mu(\sphericalangle AQR) = 180° - \alpha - \mu(\sphericalangle ARQ)\\
&0° < \mu(\sphericalangle CPQ) = \beta + (120° - \mu(\sphericalangle ARQ)) - 60°, \qquad (1)
\end{aligned}$$



woraus der Reihe nach folgt:

$$\begin{aligned}
0° &< \mu(\sphericalangle ARQ) < 120°\\
60° - \alpha &< \mu(\sphericalangle ARQ) < 180° - \alpha \qquad (2)\\
\beta - 60° &< \mu(\sphericalangle ARQ) \sphericalangle \beta + 60°
\end{aligned}$$

Trägt man daher die nichtnegativen unter den Winkeln vom Gradmaß 0°, $60° - \alpha$, $\beta - 60°$; 120°, $180° - \alpha$, $\beta + 60°$ an h_{R_1A} an (und zwar nach derjenigen Seite hin, auf der C liegt), so liegt $h_{R_1Q_1}$ in dem Winkelraum W zwischen den zuletzt gezeichneten Schenkeln des größten der Winkel vom Gradmaß 0°, $60° - \alpha$, $\beta - 60°$ und des kleinsten der Winkel vom Gradmaß 120°, $180° - \alpha$, $\beta + 60°$. (Einfache Konstruktionsmöglichkeiten dieser Winkel sind in der Abb. angedeutet.)

(II) Wenn ein $\triangle PQR$ daher Lösung ist, so kann es nur ein solches sein, das durch folgende *Konstruktion* erhalten wird: Man wähle R_1 und konstruiere W wie in (I) beschrieben. Dann wähle man eine von R_1 ausgehende in W verlaufende Halbgerade. Schneidet sie h_{AC} in Q_1, so schlage man die Kreise um R_1 durch Q_1 und um Q_1 durch R_1. Derjenige ihrer Schnittpunkte, der nicht mit A in derselben durch $g_{R_1Q_1}$ bestimmten Halbebene liegt, sei P_1. Dann bringe man g_{AP_1} und g_{BC} zum Schnitt P und ziehe die Parallelen durch P zu $g_{P_1R_1}$ und zu $g_{P_1Q_1}$, die g_{AB} bzw. g_{AC} in R bzw. in Q schneiden.

(III) *Beweis* dafür, daß (II) auf eine Lösung führt: Nach Konstruktion ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig; ferner ist $g_{PQ} \parallel g_{P_1Q_1}$; $g_{PR} \parallel g_{P_1R_1}$; woraus $\overline{AQ} : \overline{AQ_1} = \overline{AP} : \overline{AP_1} = \overline{AR} : \overline{AR_1}$, also $g_{QR} \parallel g_{Q_1R_1}$ folgt, so daß auch $\triangle PQR$ gleichseitig ist. Nach Konstruktion liegen P auf g_{BC}, Q auf g_{AB}, R *auf* g_{AB}. Schließlich gilt (2); hieraus folgt (1)[1], und daraus ergibt sich, daß P, Q, R sogar innere Punkte der Strecken BC bzw. CA bzw. AB sind.

(IV) *Untersuchung von Existenz; Anzahl und Kongruenz der Lösungen:* Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gelten die neun Ungleichungen

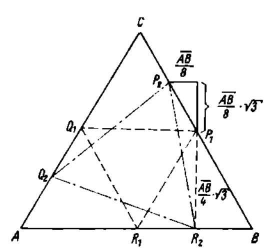
$$\left.\begin{matrix} 0° \\ 60° - \alpha \\ \beta - 60° \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} 120° \\ 180° - \alpha \\ \beta + 60°. \end{matrix}\right.$$

Daraus folgt, daß W der Winkelraum eines (positiven) Winkels ist. Also gibt es beliebig viele Möglichkeiten zur Wahl der Richtung von $h_{R_1Q_1}$. Die weitere Konstruktion (II) ist dann stets (sogar eindeutig) ausführbar, da wieder aus (2) bzw. (1) folgt, daß keines der Geradenpaare, die gemäß (II) zum Schnitt zu bringen sind, ein Parallelpaar ist. Die entstehenden Dreiecke $\triangle PQR$ sind auch paarweise verschieden, da ihre Seiten RQ paarweise verschiedene Richtungen haben. Um zu zeigen, daß auch inkongruente Dreiecke $\triangle PQR$ auftreten können, genügt ein Beispiel: Man zeichne $\triangle ABC$ gleichseitig (Abb. 3) und wähle der Reihe nach P_1, Q_1, R_1; P_2, Q_2, R_2 als Mittelpunkt von BC, CA, AB; P_1C, Q_1A, R_1B. Dann wird

$$\overline{Q_1R_1} = \overline{R_1P_1} = \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ und}$$

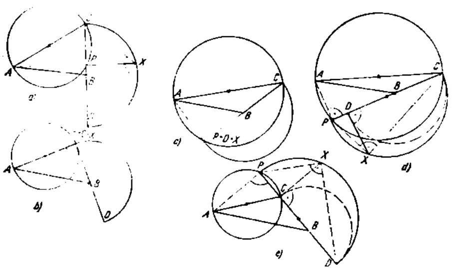
$$\overline{Q_2R_2} = \overline{R_2P_2} = \overline{P_2Q_2} = \overline{AB} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{4}\overline{AB} \cdot \sqrt{7}.$$

Die Meinung von Dagmar ist daher richtig; die anderen sind falsch.



[1] An dieser Stelle des Beweises muß man (1) teilweise anders formulieren. Solange man z. B. noch nicht aus der 5. Ungleichung von (1) geschlossen hat, daß B nicht zwischen A und R liegt, hat man die 2. Ungleichung von (1) in der Form $0° < \mu(\sphericalangle B'RP)$ zu schreiben mit einem auf h_{AB} gelegenen Punkt B', für den R zwischen A und B' liegt.

4. Man schlage den Kreis um B durch C; er schneidet g_{BC} in C und einem zweiten Punkt D (Abb.). Ferner schlage man den Kreis um den Mittelpunkt von AC durch C; er schneidet g_{BC} in C und einem Punkt P. Unter den drei Punkten C, P, D wähle man diejenigen beiden aus, zwischen denen der dritte liegt, schlage über der von ihnen gebildeten Strecke einen Halbkreis und bringe ihn zum Schnitt X mit der im dritten Punkt auf g_{BC} errichteten Senkrechten. (In den Fällen $P = C$ und $P = D$ setze man statt dessen sinngemäß $X = C$ bzw. $X = D$.) Dann hat das über CX errichtete Quadrat den geforderten Flächeninhalt (im Falle $P = C = X$ ist es zum Punkt entartet).



Beweis: Es wird $\overline{CP} = b \cdot |\cos\gamma|$ und $CX^2 = \overline{CD} \cdot CP = 2a \cdot b \cdot |\cos\gamma|$.

5. *1. Fall:* $a > 0$. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt $a + x - a = \sqrt{(2a + x)(a + x)}$, hieraus $x \geqq 0$ und $x^2 = 2a^2 + 3ax + x^2$, also $x = -\frac{2}{3}a < 0$. Dieser Widerspruch zeigt: Es gibt *keine reelle Zahl x*, die der Gleichung genügt.

2. Fall: $a = 0$. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt, da $\sqrt{0 + x}$ und $\frac{0^2}{0 + x}$ existieren, $x > 0$. Ist umgekehrt x irgendeine positive reelle Zahl, so gilt

$$\sqrt{0 + x} - \sqrt{\frac{0^2}{0 + x}} = \sqrt{x} = \sqrt{2 \cdot 0 + x},$$

d. h., die Gleichung ist erfüllt. Daher genügen *alle positiven reellen x und nur diese* der Gleichung.

3. Fall: $a < 0$. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt $a + x + a = \sqrt{(2a + x)(a + x)}$;
$(2a + x)^2 = (2a + x)(a + x)$;
$(2a + x)a = 0$, wegen $a \neq 0$ also $x = -2a$.
Ist umgekehrt $x = -2a$, so ist $a + x = -a > 0$ und $2a + x = 0$, also gilt

$$\sqrt{a + x} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0$$

$= \sqrt{2a + x}$, d. h., die Gleichung ist erfüllt. Daher genügt *die Zahl $x = -2a$ und nur diese* der Gleichung.

6. 1. Die Menge $\mathfrak{M}$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x > 0$, $y > 0$ ergibt sich durch folgende Aufzählung:

99 Zahlenpaare: $x = 1$; $y = 1, \ldots, 99$
98 Zahlenpaare: $x = 2$; $y = 1, \ldots, 98$
. . . .
2 Zahlenpaare: $x = 98$; $y = 1; 2$
1 Zahlenpaar: $x = 99$; $y = 1$

Die Anzahl dieser Zahlenpaare ist

$$1 + 2 + \cdots + 98 + 99 = \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100$$

2. Die Mengen $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x < 0$, $y > 0$ bzw. $x > 0$, $y < 0$ bzw. $x < 0$, $y < 0$ können jeweils eindeutig auf $\mathfrak{M}$ abgebildet werden, indem man je ein Zahlenpaar (a, b) aus $\mathfrak{M}$ dem Zahlenpaar $(-a, b)$ bzw. $(a, -b)$ bzw. $(-a, -b)$ zuordnet.

3. Die Mengen $\mathfrak{N}$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x = 0$, $y > 0$ enthält genau 100 Zahlenpaare: $x = 0$; $y = 1, \ldots, 100$.

4. Die Mengen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$ aller ganzzahligen Lösungen $(x;\ y)$ mit $x = 0$, $y < 0$ bzw. $x > 0$, $y = 0$ bzw. $x < 0$, $y = 0$ können jeweils eindeutig auf $\mathfrak{N}$ abgebildet werden, indem man je ein Zahlenpaar $(0, c)$ aus $\mathfrak{N}$ dem Zahlenpaar $(0, -c)$ bzw. $(c, 0)$ bzw. $(-c, 0)$ zuordnet.

5. Die Menge $\mathfrak{P}$ aller ganzzahligen Lösungen $(x;\ y)$ mit $x = 0$, $y = 0$ enthält genau 1 Zahlenpaar: $x = 0$, $y = 0$.

6. Die Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{P}$ sind zu je zweien elementfremd; ihre Vereinigungsmenge ist die Menge aller ganzzahligen Lösungen, deren Anzahl beträgt somit $2 \cdot 99 \cdot 100 + 4 \cdot 100 + 1 = 20201$.

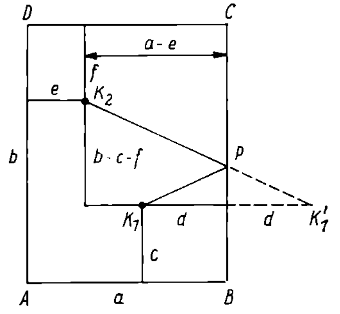
Die Aufgaben zur DDR-Olympiade befinden sich in *alpha*, Heft 3/67. Die Lösungen der Aufgaben der Klassenstufe 11/12 findet der interessierte Leser in der Zeitschrift *Mathematik in der Schule* (Heft 8/67, S. 618ff.), die sicher jeder Mathematikfachlehrer gern zur Verfügung stellt.

Allen Teilnehmern an der 3. Stufe (Bezirksolympiade am 21./22. 1. 1968) der VII. Olympiade Junger Mathematiker wünschen wir viel Erfolg. Die Aufgaben werden in Heft 2/68 und die Lösungen in Heft 5/68 veröffentlicht.

Redaktion *alpha*

Lösungen

W(9)72 Der Punkt K_1 ist an der Rechteckseite $\overline{BC}$ (Symmetrieachse) zu spiegeln; der Bildpunkt von K_1 sei K_1'. Die Strecke $\overline{K_2K_1'}$ schneidet die Rechteckseite $\overline{BC}$ im Punkte P. Der Streckenzug $\overline{K_1PK_2}$ stellt den Weg der Kugel K_1 dar. Auf Grund der Symmetrieverhältnisse ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel.



Aus der Abbildung wird ersichtlich:

$$x : (b - c - f) = d : (a - e + d)$$

(Anwendung des Strahlensatzes),

$$x = \frac{d\,(b - c - f)}{a - e + d}$$

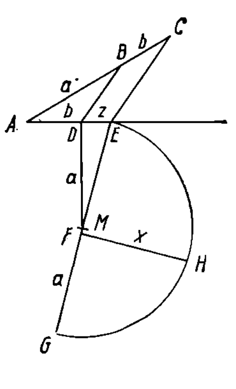
$$\overline{BP} = c + x = c + \frac{d\,(b - c - f)}{a - e + d} = \frac{c\,(a - e) + d\,(b - f)}{a - e + d}.$$

W(10)73 Es ist $x^2 = \sqrt{a^4 + b^4}$

$$= \sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)},$$

$$x^2 = a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

Man konstruiert daher zunächst die Strecke $\overline{DE} = z = \frac{b^2}{a}$ unter Benutzung der Proportion $z : b = b : a$ (vgl. die Abb.). Dann konstruiert man die Strecke $\overline{EF} = \sqrt{a^2 + z^2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\overline{DF} = a$ und $\overline{DE} = z$. Endlich erhält man die gesuchte Strecke $\overline{FH} = x$ als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks GHE mit den Hypotenusenabschnitten $\overline{FG} = a$ und $\overline{EF} = \sqrt{a^2 + z^2}$.



74 Zunächst müssen wir eine Vermutung über die zu ermittelnde Summe S_n aufstellen. Wir rechnen einige Werte S_n aus. Dabei beginnen wir bei $n = 1$, wie es durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist:

$$S_1 = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$$S_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$$

$$S_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3}.$$

Wir können also vermuten:

$$S_n = \frac{n\,(n + 1)\,(n + 2)}{3}.$$

Mit Hilfe der *Methode der vollständigen Induktion* zeigen wir, daß diese Vermutung wahr ist.

Induktionsanfang

Für $n = 1$ ist der Satz wahr (siehe oben).

Induktionsschritt

Wir haben zu zeigen: Wenn

$S_m = \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{3}$ ist, so ist

$$S_{m+1} = \frac{(m + 1)\,(m + 2)\,(m + 3)}{3}.$$

Nun ist aber $S_m = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m\,(m + 1)$

und $S_{m+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m\,(m + 1) + (m + 1)\,(m + 2)$,

also $S_{m+1} = S_m + (m + 1)\,(m + 2)$.

Wir haben aber vorausgesetzt, daß

$S_m = \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{3}$ ist, also ist

$$S_{m+1} = \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{3} + (m + 1)(m + 2)$$

$$= \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2) + 3\,(m + 1)\,(m + 2)}{3}$$

$$S_m = \frac{(m + 1)\,(m + 2)\,(m + 3)}{3}.$$

Damit ist der Beweis geführt.

75 *Induktionsanfang*

Mit *alle natürlichen Zahlen* sind hier offenbar die natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ gemeint. Für $n = 1$ ergibt sich $1 = 2 - 1$.

Der Satz ist also wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt
Wir zeigen: Wenn $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ ist, so ist $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m = 2^{m+1} - 1$.
Es ist aber $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m = 2^m - 1 + 2^m = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1$.
Also ist der Satz wahr.

76 *Induktionsanfang*
Der Satz ist für $n = 1$ wahr, denn $4^1 + 15 - 1 = 18$, und 18 ist durch 9 teilbar.
Induktionsschritt
Wir zeigen: Wenn $4^m + 15m - 1$ durch 9 teilbar ist, ist es auch $4^{m+1} + 15(m+1) - 1$.
Dazu führen wir folgende Umformungen durch:

$$4^{m+1} + 15(m+1) - 1$$
$$= 4 \cdot 4^m + 4 \cdot 15m - 4 - 3 \cdot 15m + 18$$
(davon kann man sich durch Nachrechnen überzeugen)
$$= 4 \cdot (4^m + 15m - 1) - 45m + 18$$
$$= 4 \cdot (4^m + 15m - 1) - 9(5m - 2).$$

Der erste Summand ist durch 9 teilbar, denn wir hatten angenommen, daß $(4^m + 15m - 1)$ durch 9 teilbar ist. Vom zweiten Summanden ist es klar, daß er durch 9 teilbar ist. Dann ist aber die Summe durch 9 teilbar. Der Satz ist damit bewiesen.

77 *Induktionsanfang*
Wir müssen offenbar bei $n = 2$ beginnen. Zwei Gegenstände a und b kann man auf zwei Möglichkeiten (ab und ba) anordnen. Da $1 \cdot 2 = 2$ ist, ist der Satz für $n = 2$ wahr.
Induktionsschritt
Wir zeigen: Wenn man m Gegenstände in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ Möglichkeiten anordnen kann, so kann man $m+1$ Gegenstände in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1)$ Möglichkeiten anordnen.
Dazu kürzen wir, wie es in der Mathematik üblich ist, das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ mit dem Symbol $m!$ (gelesen „m Fakultät") ab.
Wir nehmen die $m!$ Möglichkeiten für m Gegenstände als gegeben an und nehmen eine dieser Anordnungen her. Wie können wir den $(m+1)$ten Gegenstand einordnen?
Offenbar so:
Vor dem 1. Gegenstand,
zwischen dem 1. und dem 2. Gegenstand,
zwischen dem 2. und dem 3. Gegenstand,
....
zwischen dem $(m-1)$ten und dem m-ten Gegenstand,
nach dem m-ten Gegenstand.
Das sind zu dieser einen Anordnung von m Gegenständen $m + 1$ Anordnungen von $m+1$ Gegenständen. Da das für jede der $m!$ Anordnungen gilt, ist die Gesamtzahl also
$m!(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m(m+1) = (m+1)!$
Der Satz ist damit bewiesen.

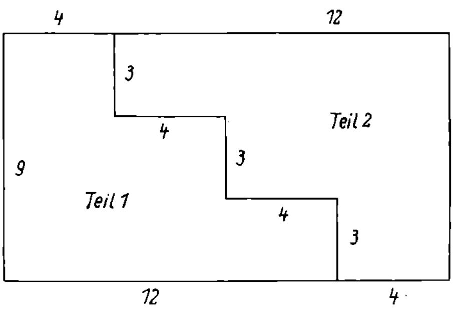
78 *Induktionsanfang*
Die Wahrheit des Satzes für die vierte Zahl ist ohne Rechnung zu sehen.
Induktionsschritt
Wir haben zu zeigen: Wenn die $4m$-te Zahl durch 3 teilbar ist, so ist es auch die $4(m+1)$-te Zahl. Wir nehmen also an, daß die $4m$-te Zahl durch 3 teilbar ist, dann können wir sie etwa $3k$ nennen. Die vorhergehende Zahl wollen wir x nennen. Dieser Teil der Folge sieht also so aus:
x, 3k, $3k + x$, $6k + x$, $9k + 2x$, $15k + 3x$.
Die $4(m+1)$te Zahl ist also $15k + 3x$ oder $3(5k + x)$. Sie ist also auch durch 3 teilbar.

79 *Induktionsanfang*
Für $n = 1$ lautet der Satz: Mit den Wägestücken $1g$ und $2g$ kann man die Masse von $1g$ zusammenstellen. Das ist offenbar wahr.
Induktionsschritt
Wir haben zu zeigen: Wenn man mit den Wägestücken $1g, 2g, \ldots, 2^m g$ jede Masse von $1g$ bis $(2^m - 1)g$ zusammenstellen kann, kann man mit den Wägestücken $1g, 2g, \ldots, 2^{m+1}g$ jede Masse von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen.
Wir nehmen also an, daß man mit den Wägestücken $1g, 2g, \ldots 2^m g$ die Massen $1g, 2g, \ldots, (2^m - 1)g$ zusammenstellen kann. Nehmen wir das Wägestück 2^{m+1} dazu, so bleiben die Zusammenstellungen $1g, \ldots, (2^m - 1)g$ natürlich erhalten.
Ferner kann man zusammenstellen:
$2^m g$ durch das Wägestück $2^m g$
$(2^m + 1)g$ durch die Wägestücke $2^m g$ und $1g$
$(2^m + 2)g$ durch die Wägestücke $2^m g$ und $2g$,
und da wir nach Voraussetzung alle Massen von $1g$ bis $(2^m - 1)g$ zusammenstellen können, ohne das Wägestück $2^m g$ zu verwenden, kann man nun alle Massen von $(2^m + 1)g$ bis $(2^m + 2^m - 1)g$ zusammenstellen.
Es ist aber $2^m + 2^m - 1 = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1$.
Also können wir nun alle Massen von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen. Aber bereits der Induktionsanfang läßt vermuten, daß wir mit unserer Aufgabe noch nicht alle Möglichkeiten ausschöpfen: Mit $1g$ und $2g$ kann man nicht nur $1g$, sondern auch $2g$ und $3g$ zusammenstellen, mit $1g$, $2g$ und $4g$ kann man offenbar $1g$, $2g$, $3g$, $4g$, $5g$, $6g$ und $7g$ zusammenstellen. Das gibt Veranlassung, den folgenden verschärften Satz zu vermuten:
Mit den Wägestücken $1g, 2g, 4g, \ldots 2^n g$ kann man jede Masse von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen. Der Beweis verläuft ähnlich wie oben, den *Induktionsanfang* haben wir bereits nachgerechnet.
Induktionsschritt
Wenn wir mit den Stücken $1g, 2g, 4g, \ldots,$

$2^m g$ alle Massen von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen können, so kann man durch Hinzufügen des Stückes $2^{m+1}\,g$ zusammenstellen: $2^{m+1}\,g$ selbst,
alle Massen von $(2^{m+1} + 1)g$ bis $(2^{m+1} + 2^{m+1} - 1)g = (2^{m+2} - 1)g$ durch die gleiche Überlegung wie oben.
Also ist auch dieser Satz bewiesen.

W(5)81 Der Eßlöffel wiege x Pond, dann wiegen der Gemüselöffel und die Gabel zusammen $3x$ Pond. Aus $3x + x = 240$ folgt $x = 60$, das heißt, der Eßlöffel wiegt 60 p. Die Gabel wiege y Pond; aus $y + 60 = 240:2$ folgt $y = 60$. Die Gabel wiegt ebenfalls 60 p, der Gemüselöffel wiegt dann 120 p.

W(5)82 Die Sperrholzplatte ist treppenförmig so in zwei Teile zu zerschneiden, wie es die Abbildung zeigt.



W(5)83 Es gibt genau die folgenden elf Möglichkeiten:

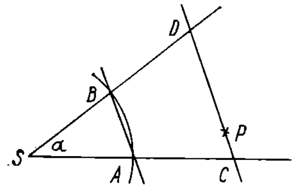
$$1+1+1+1+1+1+1+13=20,$$
$$1+1+1+1+1+1+3+11=20,$$
$$1+1+1+1+1+1+5+\ 9=20,$$
$$1+1+1+1+1+1+7+\ 7=20,$$
$$1+1+1+1+1+3+5+\ 7=20,$$
$$1+1+1+1+1+3+3+\ 9=20,$$
$$1+1+1+1+1+5+5+\ 5=20,$$
$$1+1+1+1+3+3+5+\ 5=20,$$
$$1+1+1+1+3+3+3+\ 7=20,$$
$$1+1+1+3+3+3+3+\ 5=20,$$
$$1+1+3+3+3+3+3+\ 3=20.$$

W(6)84 (1) Angenommen es gäbe keinen Monat, in dem wenigstens vier Schüler dieser Klasse Geburtstag haben, dann hätte die Klasse höchstens 36 Schüler $(3 \cdot 12 = 36)$. Die Klasse umfaßt aber genau 37 Schüler. Also gibt es einen weiteren Schüler, der in einem der 12 Monate Geburtstag hat. Somit gibt es (mindestens) einen Monat, in dem 4 Schüler Geburtstag haben.
(2) Aus (1) ergibt sich, daß die zweite Behauptung falsch ist (Bem.: Die Klasse müßte mindestens 49 Schüler $(4 \cdot 12 + 1)$ umfassen, wenn die Behauptung immer richtig sein soll.)

W(6)85 0123456789 Subtrahend

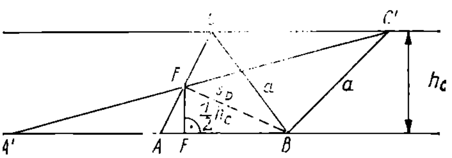
$$\begin{array}{r} 395 \cdot 147 \\ \hline 395 \\ 1580 \\ 2765 \\ \hline 58065 \end{array}$$

W(6)86 Es ist ein Kreis mit dem beliebigen Radius r um den Scheitel S des gegebenen spitzen Winkels α zu beschreiben; dieser Kreis schneide die Schenkel des Winkels α in den



Punkten A und B. Danach ist eine Parallele zur Geraden AB durch den gegebenen Punkt P zu konstruieren; sie schneide die Schenkel des Winkels α in den Punkten C und D. Es ist dann $\overline{SC} = \overline{SD}$.

W(7)87 Es ist zunächst ein rechter Winkel mit dem Scheitelpunkt F zu konstruieren; auf dessen einem freien Schenkel tragen wir $\frac{1}{2} h_c = 2$ cm von F bis E ab. Danach ist um E der Kreis mit dem Radius $s_b = 4{,}5$ cm zu zeichnen, der den anderen freien Schenkel des Rechten in B schneidet. Nun ist eine Parallele zu FB im Abstand $h_c = 4$ cm zu



zeichnen. Es ist schließlich um B der Kreis mit dem Radius $a = 5$ cm zu beschreiben; dieser Kreis schneidet die gezogene Parallele in den Punkten C und C'. Die durch die Punkte C und E bzw. C' und E zu ziehenden Geraden schneiden die verlängerte Strecke $\overline{BF}$ in den Punkten A bzw A'. Die Punkte C und C' sind ferner mit dem Punkte B zu verbinden. Als Lösung erhalten wir zwei Dreiecke, und zwar die Dreiecke ABC und $A'BC'$, die die Bedingungen erfüllen.

W(7)88 Aus $a < b$ folgt $\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$.
Wir vergleichen
$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ mit $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$;

die Brüche $\frac{b-a}{b}$ und $\frac{b-a}{a}$

haben den gleichen Zähler; der Nenner b des ersten Bruches ist größer als der Nenner a des zweiten Bruches. Wegen $b > a$ gilt also $\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{a}$; folglich liegt der Bruch $\frac{a}{b}$ auf der Zahlengeraden näher an der Zahl 1 als der Bruch $\frac{b}{a}$.

W(7)89 Es werden zum Tippen der Zahlen der Folge der natürlichen Zahlen

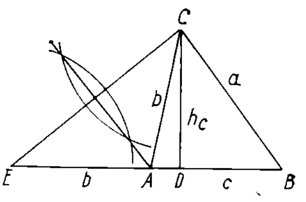
a) von 1 bis 9 genau 9 Anschläge,

b) von 10 bis 99 genau $2 \cdot 90 = 180$ Anschläge,

c) von 100 bis 369 genau $3 \cdot 270 = 810$ Anschläge gemacht.

Das sind insgesamt 999 Anschläge; mit dem tausendsten Anschlag wird die Ziffer 3 der Zahl 370 geschrieben.

W(8)90 Es sei ABC das verlangte Dreieck. Verlängert man die Strecke $\overline{BA}$ über A hinaus bis E, so daß $\overline{BE} = b + c$, d. h. $\overline{AE} = b$ wird, dann ist das Dreieck EAC gleichschenklig, und A liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EC}$. Aus dieser Überlegung ergibt sich die folgende Konstruktion: Man zeichnet die Strecke $\overline{CD} = h_c$ und errichtet auf ihr in D die Senkrechte. Dann schlägt man um C den Kreis mit dem Radius a,



der die Senkrechte in B (bzw. B') schneidet. Man verlängert $\overline{BD}$ über D hinaus bis E, so daß $\overline{BE} = b + c$ wird (bzw. $\overline{DB'}$ über B' hinaus bis E', so daß $\overline{B'E'} = b + c$ wird). Man errichtet auf $\overline{EC}$ (bzw. $\overline{E'C}$) die Mittelsenkrechte, die die Gerade $\overline{BE}$ (bzw. $\overline{B'E'}$) in A (bzw. A') schneidet. Das Dreieck ABC entspricht den gestellten Bedingungen. Man erhält noch eine zweite Lösung, nämlich das in der Figur nicht gezeichnete Dreieck $A'B'C$, das einen stumpfen Winkel bei A' hat, so daß die Höhe $\overline{CD}$ außerhalb des Dreiecks liegt.

Bemerkung: Unser Leser *Volker Schwandt*, 8. Klasse der Oberschule Seebach, sandte eine schöne *rechnerische Lösung* der Aufgabe ein. Er bezeichnete die Maßzahl der Strecke $\overline{DB}$ mit x, die Maßzahl der Strecke $\overline{AD}$ mit y und erhielt mit Hilfe des Satzes des Pythagoras: $x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, $x = 3$. Ferner ist wegen $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE} - \overline{DB} - \overline{AD}$ $= 8\text{ cm} - 3\text{ cm} - y\text{ cm} = (5 - y)\text{ cm}$ $(5-y)^2 = y^2 + 4^2$, also $25 - 10y + y^2$ $= y^2 + 16$, d. h., $10y = 9$, $y = 0{,}9$.

Daher wird $\overline{AB} = c = 3{,}9$ cm, $\overline{AC} = b = 4{,}1$ cm.

W(8)91 Da a und b von Null verschiedene ganze (also positive *oder* negative) Zahlen sind, muß man die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Fall: a positiv, b positiv; $a < b$.

Dann gilt $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$,

d. h., in diesem Falle liegt $\frac{a}{b}$ näher an 1, weil $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$.

2. Fall: a negativ, b negativ*;* $a < b$, also $|b| < |a|$.

Dann gilt

$$1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{|b|}{|a|} = \frac{|a| - |b|}{|a|} < \frac{|a| - |b|}{|b|}$$
$$= \frac{|a|}{|b|} - 1 = \frac{a}{b} - 1,$$

d. h., in diesem Fall liegt $\frac{b}{a}$ näher an 1, weil $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$.

3. Fall: a negativ, b positiv, also $a < b$.

Dann gilt $1 - \frac{a}{b} = 1 + \frac{|a|}{|b|}$ und $1 - \frac{b}{a} = 1 + \frac{|b|}{|a|}$.

In diesem Falle liegt daher $\frac{a}{b}$ näher an 1, wenn $|a| < |b|$ ist.

Dagegen liegt $\frac{b}{a}$ näher an 1, wenn $|b| < |a|$ ist.

Zur *Erläuterung* geben wir noch *drei Beispiele:*

1. Fall: $a = 2$, $b = 3$; $2 < 3$.

Wegen $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1$ liegt $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ näher an 1.

2. Fall: $a = -5$, $b = -4$; $-5 < -4$, $4 < 5$.

Wegen $1 - \frac{-4}{-5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ $= \frac{5-4}{4} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{-5}{-4} - 1$ liegt $\frac{b}{a} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$ näher an 1 als $\frac{a}{b} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$.

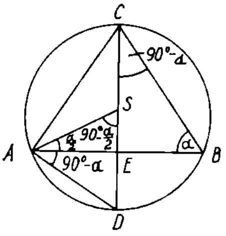
3. Fall: $a = -5$, $b = 4$; $-5 < 4$.

Wegen $1 - \frac{a}{b} = 1 + \frac{5}{4} = 2{,}25$

und $1 - \frac{b}{a} = 1 + \frac{4}{5} = 1{,}8$

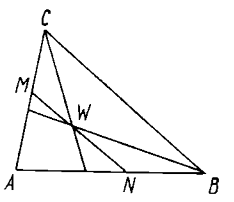
liegt in diesem Fall $\frac{b}{a} = -\frac{4}{5}$ näher an 1 als $\frac{a}{b} = -\frac{5}{4}$, was sich bereits aus $|b| = 4 < 5 < |a|$ ergibt.

W(8)92 Da nach Voraussetzung $\sphericalangle SAE = \frac{\alpha}{2}$ ist, folgt $\sphericalangle ASE = \sphericalangle ASD = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Ferner ist nach dem Peripheriewinkelsatz



$\sphericalangle BCD = 90° - \alpha = \sphericalangle EAD$, also
$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SAE + \sphericalangle EAD$
$= \frac{\alpha}{2} + 90° - \alpha = 90° - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle ASD.$
Daher ist das Dreieck ADS gleichschenklig, w. z. b. w.

W(9)93 Unser Leser *Bernd Oldenburger*, Klasse 8a der Pestalozzi-Oberschule Oschatz, sandte die folgende Lösung ein, die wir mit geringfügigen Veränderungen hier wiedergeben:
Aus $\sphericalangle CBW = \sphericalangle NBW$ (Winkelhalbierende) und $\sphericalangle CBW = \sphericalangle BWN$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\sphericalangle NBW = \sphericalangle BWN$; das Dreieck BNW ist also gleichschenklig; es gilt $\overline{BN} = \overline{NW}$. (1)



Analog beweist man, daß auch $\overline{CM} = \overline{MW}$ gilt. (2)
Aus (1) und (2) folgt
$$\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MW} + \overline{NW} = \overline{MN},$$
w. z. b. w.

W(9)94 Angenommen, x_1 wäre eine ganzzahlige Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wobei p und q ungerade ganze Zahlen sind, dann wäre $x_1^3 + px_1 + q = 0$. (1)
Wäre nun x_1 gerade, so wären x_1^3 und px_1 gerade, also $x_1^3 + px_1 + q$ ungerade, also verschieden von Null, was der Gleichung (1) widerspricht. Wäre x_1 ungerade, so wären x_1^3 und px_1 ungerade, also wieder $x_1^3 + px_1 + q$ ungerade, also verschieden von Null, was der Gleichung (1) widerspricht. Daher hat die gegebene Gleichung keine ganzzahlige Wurzel.

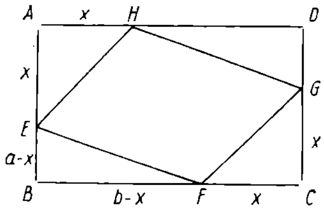
W(9)95 Die Funktion $y = \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2+x-6}{|x^2+x-6|}}$ ist nur für solche reellen x definiert, für die $x \neq 0$ und $x^2 + x - b > 0$ ist (da der Radikand nicht negativ sein darf). Nun ist
$$x^2 + x - 6 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{25}{4}$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)$$
$$= (x + 3)(x - 2) > 0$$
genau dann, wenn entweder $x < -3$ oder $x > 2$ ist.

Die vorliegende Funktion ist also definiert
a) für $x < -3$; in diesem Falle ist stets
$y = -1\sqrt{1} = -1,$
b) für $x > 2$; in diesem Falle ist stets
$y = 1\sqrt{1} = 1.$

W(10)96 Unser Leser *Elmar Busse*, Klasse 10k der Erweiterten Oberschule Heiligenstadt, hat diese Aufgabe wie folgt gelöst:
Aus $x_1 + x_2 = +p$ und $x_1x_2 = 36$ sowie $x_1^2 + x_2^2 = 153$
folgt wegen $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$
$$p^2 - 2 \cdot 36 = 153,$$
$$p^2 = 153 + 72$$
$$= 225,$$
also entweder $p = 15$ oder $p = -15$.

Durch die Lösung der beiden quadratischen Gleichungen
$x^2 - 15x + 36 = 0$ mit $x_1 = 12$,
$x_2 = 3$ und $x_1^2 + x_2^2 = 153$,
$x^2 + 15x + 36 = 0$ mit $x_1 = -3$,
$x_2 = -12$ und $x_1^2 + x_2^2 = 153$
stellt dann *Elmar Busse* fest, daß für $p = 15$ und $p = -15$ tatsächlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

W(10)97 a) Es seien E, F, G, H die Endpunkte der auf den Seiten des Rechtecks $ABCD$ abgetragenen Strecken, so daß $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{CF} = \overline{CG} = x$ ist. Daraus folgt, daß die rechtwinkligen Dreiecke AEH und CGF einander kongruent sind, daß also $\overline{EH} = \overline{FG}$ ist. Aus der Kongruenz der Dreiecke BFE und DHG folgt ferner $\overline{EF} = \overline{HG}$. Daher ist das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm.



b) Dieses Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn $\overline{EH} = \overline{EF}$ ist. Nun ist

$\overline{EH}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$,

$\overline{EF}^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2$,

also wegen $\overline{EH} = \overline{EF}$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= (a - x)^2 + (b - x)^2, \\ 2x^2 &= a^2 - 2ax + x^2 + b^2 \\ &\quad - 2bx + x^2, \\ 2x(a + b) &= a^2 + b^2, \\ x &= \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}. \end{aligned}$$

Das Viereck $EFGH$ ist also genau dann ein Rhombus, wenn $x = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}$ ist.

c) Unter den gegebenen Voraussetzungen kann aber ein Rhombus nur dann entstehen, wenn

$x = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)} < a$, also $a^2 + b^2 < 2a^2 + 2ab$, d. h., $(b - a)^2 < 2a^2$, d. h., $b - a < a\sqrt{2}$ bzw. $b < a(1 + \sqrt{2})$ ist.

W(10)98 Unsere Leserin *Ingrid Sünderhauf*, Erweiterte Oberschule *Adolf Diesterweg*, Plauen, stellt mit Recht fest, daß die Gleichung

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^2} = \log_a x \qquad (1)$$

nur dann erfüllt ist, wenn $n = 2$ ist.

Denn (1) gilt nur dann, wenn

$$\log_{a^n} x^2 = \log_a x = z,$$

also $(a^n)^z = x^2$ und $a^z = x$ ist; das ist aber nur für $n = 2$ der Fall.

Wir sprechen *Ingrid Sünderhauf* unsere Anerkennung dafür aus, daß sie die durch einen *Druckfehler* entstellte Aufg. *richtig* gelöst hat. Die Aufgabe selbst lautet richtig wie folgt (siehe auch Heft 4/67, S. 124):

Beweise, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n und für alle positiven reellen Zahlen a und x mit a $\neq 1$ *stets gilt:*

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^n} = \log_a x \,!$$

Der Beweis ist jetzt sehr einfach: Setzt man

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^n} = z_1 \text{ und } \log_a x = z_2,$$

so wird

$\left(\frac{1}{a^n}\right)^{z_1} = \frac{1}{x^n}$ und $a^{z_2} = x$, also

$a^{nz_1} = x^n$, d. h., $a^{z_1} = x$; daher ist $z_1 = z_2$, w. z. b. w.

Lösungen der Aufgaben von Euler

99 Wenn der dritte Sohn x Taler erhält, so erhält der zweite Sohn $x + 100$ Taler und der erste Sohn $x + 300$ Taler.

Daraus folgt $x + x + 100 + x + 300 = 1600$,

$$\begin{aligned} 3x + 400 &= 1600, \\ 3x &= 1200, \\ x &= 400. \end{aligned}$$

Es erhalten also der dritte Sohn 400 Taler, der zweite Sohn 500 Taler und der erste Sohn 700 Taler, d. s. zusammen 1600 Taler.

100 Ist der kleinere Summand gleich x, so ist der größere Summand gleich $49x$, und wir erhalten

$$x + 49x = 25, \quad 50x = 25, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Der kleinere Summand ist daher gleich $\frac{1}{2}$, der größere gleich $24\frac{1}{2}$.

101 Wir bezeichnen die gesuchte Zahl mit x und erhalten $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 24$, $x^2 = 144$.

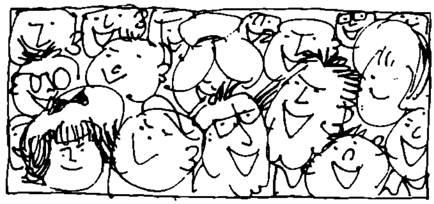
Diese Gleichung hat aber zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 12$ und $x_2 = -12$. Daher hat sowohl die Zahl 12 als auch die Zahl -12 die verlangte Eigenschaft.

Lösungen zu Aufgaben der Seite 178:

1. Für die einzelnen Mahlzeiten sind zu veranschlagen: 480 kcal, 360 kcal, 720 kcal, 240 kcal, 600 kcal. 2. Man müßte 50 Stunden spazierengehen oder 30 Stunden schwimmen. 3. In der Kost sind 76 g Eiweiß, 71 g Fett und 348 g Kohlehydrate enthalten. 4. Die entsprechende Person hat nach 16 Tagen 1 kg zugenommen. 5a. In der Kost sind 2244 kcal enthalten. 5b. In der Kost sind rund 15% Eiweiß, rund 30% Kohlehydrate enthalten. 6a. Der Junge müßte 63 g Eiweiß aufnehmen, um seinen Bedarf zu decken. 6b. Er müßte 9 Eier, 1,853 Liter Milch, 358 g Quark, 778 g Vollkornbrot oder 3150 g Kartoffeln essen. 7. In 75 g 47%igem Schnaps sind 250,3 kcal enthalten.

In freien Stunden

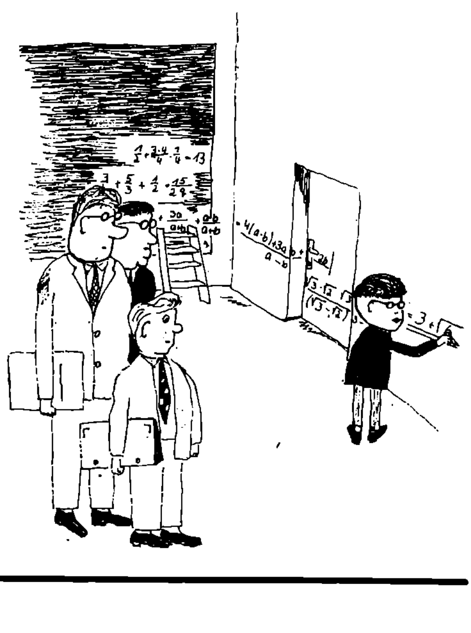
alpha heiter



Die 6 und die 8

Eine 6 und eine 8 stritten einmal um die Wette,
wer an Wert wohl und an Macht etwas mehr bekommen hätte.
Sprach die 8 voll Spöttelei: „Nun das wissen alle Leute,
daß ich ganz genau um 2 mehr als du seit je bedeute.
Zähle nur: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ich bitte,
du hältst zwischen 4 und mir, wie du hörst, genau die Mitte.“
„Lächerlich, du eitler Tropf,“ sagte drauf die 6 und stellte
sich ganz plötzlich auf den Kopf. „Weißt du jetzt, wieviel ich gelte?“
„Wie, du schweigst? Ei, sieh doch her, bin jetzt 9, du kecke Liese.
Ergo folglich um 1 mehr als die 8 — nach Adam Riese.
Mach mir‘s nach, du hast die Wahl. Sieh, du bleibst dieselbe immer.
Wenn du dich auch tausendmal auf den Kopf stellst, du wächst nimmer.“
Da, die 8 ließ ab vom Hohn, ging voll Kummer sachte in sich,
ob der klaren Subtraktion und der Wahrheit tief und binsig.
Und aus Kummer, Gram und Leid, die doch — ach! — so niederdrücken,
legte sie sich todbereit, bald zu sterben, auf den Rücken.
Kam ein Mathematiker, sprach zu ihr: „Ich bin erkenntlich,
schiebe deinen Kummer weg, ich erhöh dich zu unendlich.“

- Ein Platz, der die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat, soll so mit Bäumen bepflanzt werden, daß auf jeder der sechs Seiten drei Bäume stehen. Wieviel Möglichkeiten gibt es? (Spiegelungen und Drehungen bleiben unberücksichtigt.)
- Zwanzig Äpfel sind so an zwei Kinder zu verteilen, daß ein Kind einen Apfel mehr erhält.
- An einem See sitzen fünf Angler. Im See sind 60 Karpfen. Wieviel Karpfen kann jeder Angler fangen?
- Welche Zahl gibt, durch ihren fünften Teil dividert, gerade 5?
- Ein Tortenboden soll mit drei Schnitten in acht Teile zerlegt werden!



„Wenn das noch nicht für eine ‚Eins‘ reicht, kann ich Ihnen ja noch etwas vorsingen . . .“

Zeichnung: Wolfgang Testel, Kl. 9
Fritz-Reuter-OS, Waren/Müritz

Der Marsch durch die Wüste

Wieviel Gepäckträger muß ein Forscher, der einen sechstägigen Marsch durch die Wüste antreten will, bei sich haben, wenn jeder von ihnen nur einen Nahrungsvorrat und Wasser für vier Tage für eine Person mitführen kann?

Aus: K. A. Rupassow: „Mathematische Denkaufgaben", Verlag Volk und Wissen. Berlin 1965 Best.-Nr. 002103, MDN 1,60 (78 Aufgaben mit Lösungen)

△

Aus der Wandzeitungsarbeit der EOS Elsterwerda:
Werbung für mathematische Jugendliteratur

Auswahl: R. Höppner, Vignetten: D. Medicke

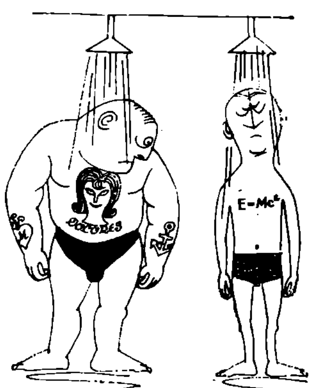
▽

Der Turm von Tampico

Auf dem Turm befinden sich drei Freunde A, B und C. Sie haben keine Möglichkeit, durch das Turminnere nach unten zu gelangen. Als Hilfsmittel stehen ihnen ein Seil, dessen Länge ungefähr der Turmhöhe entspricht, zwei Körbe und ein Stein mit dem Gewicht von 45 kp, zur Verfügung. Weiterhin können sie einen Balken so anbringen, daß man das Seil darüber nach unten lassen kann. Wie ist es ihnen mit diesen Hilfsmitteln möglich, in den am Seil befestigten Körben nach unten zu gleiten, wenn stets 5 kp Übergewicht notwendig sind, damit der schwerere Korb nach unten sinkt. Dabei wiegt A 50 kp, B 55 kp, und C 105 kp.

Nach: W. K. Schweikert: „Der Senor und die Punkte", VEB Hofmeister, Leipzig 1962, MDN 6,80 (Das unterhaltsame, im Erzählerstil geschriebene Buch kann in Büchereien ausgeliehen werden, d. Red.)

Zeichnung: Otto. Aus: „Freie Welt"



Zeichnung: joppy. Aus: „Wochenpost"

Mit diesem Foto wünschen Schüler der Zentralschule Effelder (Kreis Suhl) den Lesern von *alpha* ein frohes, gesundes und erfolgreiches Jahr

1968

Die Redaktion schließt sich diesen Wünschen an und dankt allen Mitarbeitern für ihre Hilfe beim Aufbau unserer jungen Schülerzeitschrift. Oberstudienrat Dr. R. Lüders, mit Oberlehrer Th. Scholl einer unserer Aktivsten, gibt mit dem nun folgenden Beitrag den Auftakt zum 2. Jahrgang:

Das Jahr 1968

Herr Schlottermann, ein sehr abergläubischer Herr, sagt am Silvesterabend des Jahres 1967 zu Herrn Windwebel: „Das Jahr 1968 wird für mich ein Unglücksjahr sein; denn es setzt sich ja aus lauter Zahlen 13 zusammen:

$$1968 = 13 \cdot 13 \cdot 13 - 13 \cdot 13 - 13 - 13 - 13 - 13 - 13 + 13:13 + 13:13 + 13:13 + 13:13 + 13:13.\text{“}$$

Darauf entgegnet Herr Windwebel: „Nein, das Jahr 1968 wird ein Glücksjahr sein; denn es läßt sich nur mit Hilfe der Zahl 7, die ja eine Glückszahl ist, schreiben:

$$1968 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 + 7 + 7:7.\text{“}$$

Herr Pfiffikus, der über einige mathematische Kenntnisse verfügt, bemerkt dazu: „Da sieht man einmal wieder, wohin der Aberglaube führt. Ihr beiden lebt wohl noch im Mittelalter und nicht im 20. Jahrhundert. Im übrigen läßt sich die Zahl 1968 wie auch jede andere natürliche Zahl mit Hilfe von beliebig vorgegebenen einander gleichen Zahlen schreiben; man benötigt nur noch außer diesen Zahlen die Operationszeichen für die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division; wenn man will, kann man noch die Potenzschreibweise benutzen, z. B.:

$$1968 = 2^2 \cdot (2^{2^2} \cdot 2^{2^2} \cdot 2 - 2^{2^2} - 2^2),$$

$$1968 = 3 \cdot (3^3 \cdot 3^3 - 3^3 \cdot 3 + 3 + 3 + 3:3 + 3:3),$$

$$1968 = 4 \cdot (4^4 + 4^4 - 4 \cdot 4 - 4),$$

$$1968 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 - 5 - 5:5 - 5:5$$

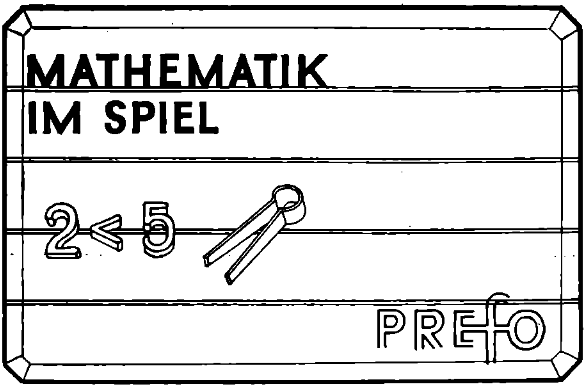
usw.

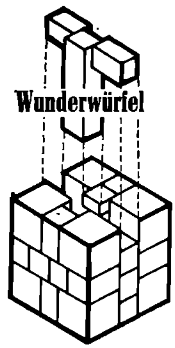
Im Zeitalter der elektronischen Rechenmaschinen würde ich aber lieber die Zahl 1968 in dualer Schreibweise darstellen:

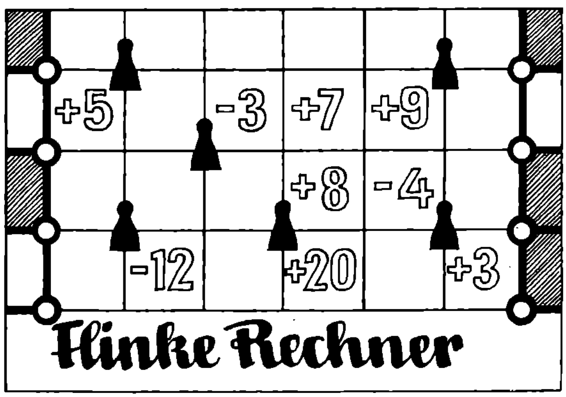
$$1968 \equiv \text{L L L L O L L O O O O};$$

denn es gilt

$$1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0$$
$$= 1024 + 512 + 256 + 128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1968.\text{“}$$







Die Arbeitsgemeinschaft Mathematik, 29. OS Leipzig (Klassenstufe 6/7), besitzt eine große Zahl selbst hergestellter oder gekaufter Gesellschaftsspiele, die Verbindung zur Mathematik schaffen. Sie haben nicht nur den AG-Teilnehmern, sondern auch in Gruppennachmittagen und im Familienkreis viel Freude gebracht. Hier zeigen wir (neben bereits in *alpha* vorgestellten selbstgebauten) einige gekaufte Spiele:

Spiele mit Zahlen: Unterhaltsames Quartettspiel. Hersteller: Helingsche Verlagsanstalt, Leipzig. Preis: 2,80 MDN

Mathematik im Spiel: Steckspiel, das Ziffern, mathematische Zeichen und Figuren enthält, die auf einer mit Nuten versehenen Plasteplatte angeordnet werden können. Hersteller: Prefo, Dresden. Preis: 5,45 MDN

Wunderwürfel: Nur mit Geduld, Konzentration und gutem räumlichem Vorstellungsvermögen wird es möglich sein, die einzelnen Holzteile (s. Skizze) zu einem Würfel zusammenzufügen. Hersteller: S. F. Fischer, Seiffen/Erzgeb. Preis: 2,00 MDN

Flinke Rechner: Würfelspiel mit einem Spielfeld und Plastesteinen (s. Skizze). Hersteller: Spiele-Fabrik, Karl-Marx-Stadt. Preis 3,45 MDN

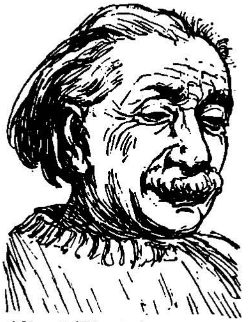
WISSENSCHAFT
TECHNIK
KULTUR
SPORT
UNTERHALTUNG

URANIA UNIVERSUM

BAND 13 • 512 Seiten • 48 Farbtafeln • 405 Abb. • MDN 15,—

In alle Bereiche unseres Lebens dringen heute Wissenschaft und Technik in immer stärkerem Maße ein. Überall bedienen wir uns ihrer, um die Arbeit zu erleichtern, um mehr zu produzieren, aber auch um unser Leben schöner zu gestalten. Oftmals wissen wir noch viel zu wenig von dieser immer rascher voranschreitenden Entwicklung.
Urania Universum, Band 13, will genau wie alle vorangegangenen auch dem jungen Menschen helfen, sein Allgemeinwissen zu erweitern. Es will durch fachspezifische Artikel zum Studium weiterer Literatur anregen, um vorhandene Spezialkenntnisse zu festigen oder neue zu erwerben.
Die Grundlagenwissenschaft Mathematik wird dem aufmerksamen Leser in fast allen Beiträgen begegnen, insbesondere in solchen wie: Information und Wissensspeicherung — Industrielle Elektronik — Moderne Meßverfahren — Laser — Mikro-Spektralanalyse — Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. (Ihre Begründer sind auf dieser Seite abgebildet.)

Isaak Newton
(1643 bis 1727)



Albert Einstein
(1879 bis 1955)

URANIA-VERLAG LEIPZIG · JENA · BERLIN

Index 31059