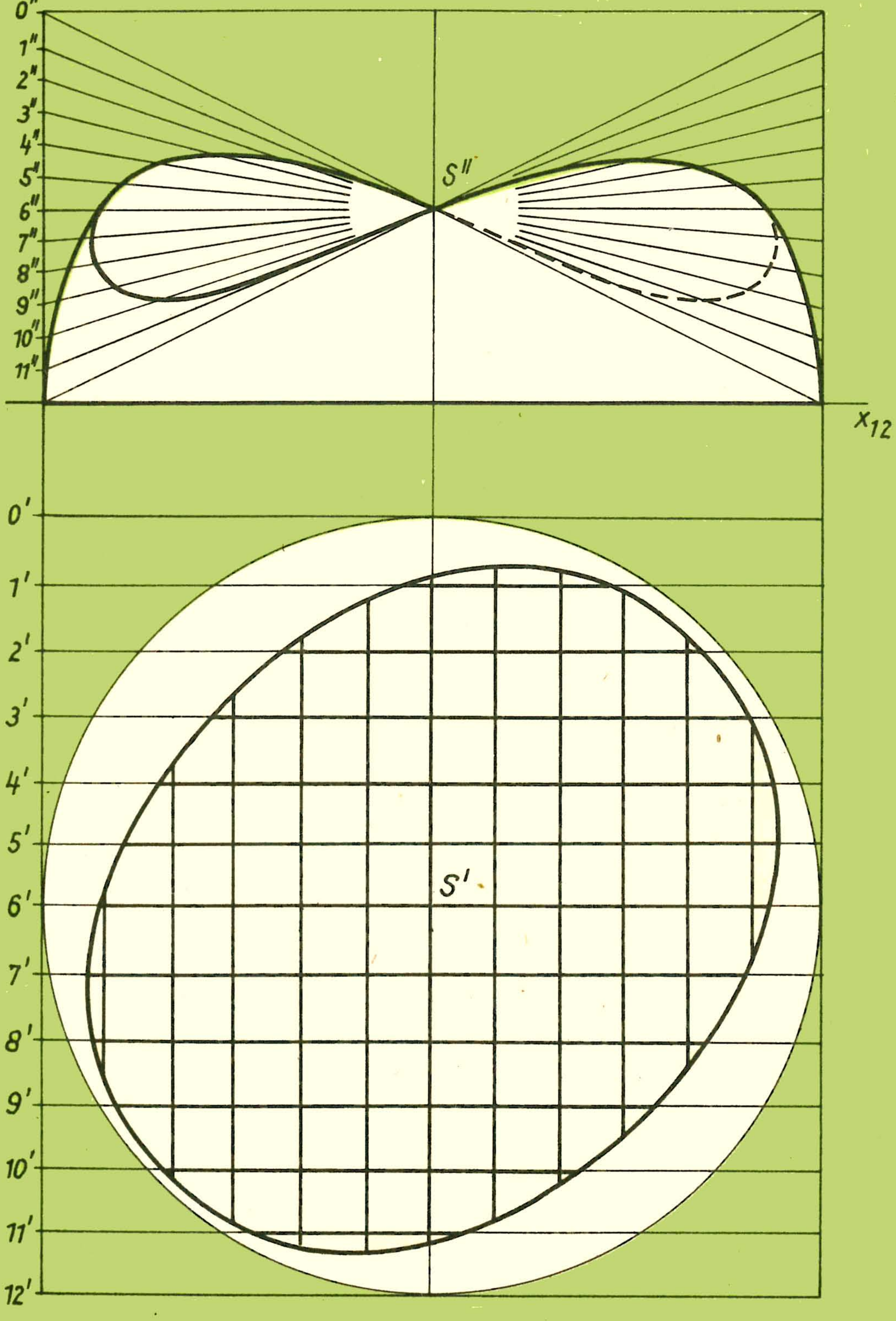
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: LVZ, Repro, Leipzig (S. 99); Zoran Jovanovič, Novi Sad, SFR Jugoslawien (S. 102, S. 110); J. Lehmann, Leipzig (S. 103, S. 113); H. Büttner, Berlin (S. 111); Jiří Slíva, Praha (S. 112); Bild und Heimat, Reichenbach (S. 113); Thomas Schleusing, Gruppe 4 (S. 116, 117);
Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach einer Vorlage des Autors des Artikels S. 97/99)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 1. Juli 1981

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Von der zweiten in die dritte Dimension

Obwohl sich unser Leben und Wirken im dreidimensionalen Raum abspielt und wir fast ausschließlich mit dreidimensionalen Objekten umgehen, fällt es uns schwer, räumliche Vorgänge oder Lagebeziehungen vorstellungsmäßig zu erfassen und durch eine abstrakte Beschreibung in der Ebene zu charakterisieren. Dies soll hier durch ein Beispiel belegt werden. Aus der Erfahrung und aus dem Schulunterricht ist uns die Parabel eine bekannte Kurve. Wirft man einen Stein schräg nach oben, so stellt seine Flugbahn eine Kurve dar, die durch eine Parabel sehr gut angenähert wird. Diese Wurfparabel liegt in einer Ebene, welche auf der Erdoberfläche senkrecht steht. Man kann diese Kurve durch eine planimetrische Definition erfassen. Hierzu sind ein Punkt F und eine Gerade l in einer Ebene π vorzugeben. Dabei darf l den Punkt F nicht enthalten. Mit diesen Festlegungen lautet die Definition der Parabel: Die Gesamtheit aller Punkte der Ebene π, deren Abstände von einem festen Punkt F und einer festen Geraden l gleich groß sind, ist eine Parabel. F ist der Brennpunkt und l die Leitgerade dieser Parabel.

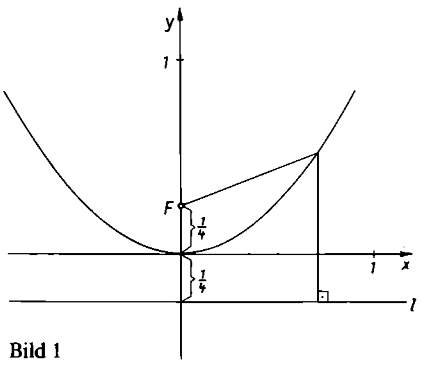


Bild 1
Parabel mit Brennpunkt und Leitgerade

Haben F und l die nach Bild 1 vorgegebenen Lagen bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, so lautet die Gleichung der zugehörigen Parabel

$$y=x^2, \tag{1}$$

Mit unserer Definition haben wir also eine eindimensionale Punktmannigfaltigkeit (Kurve) in der zweidimensionalen Zeichenebene erfaßt. Der Schritt von der zweiten in die dritte Dimension läßt sich leicht durch Einführung einer Drehung um eine in der Zeichenebene liegende Achse bewerkstelligen. Rotiert z. B. die Parabel um ihre Achse (y-Achse), so entsteht ein Drehparaboloid. Die Fokaleigenschaft der Parabel überträgt sich dann automatisch auf die Drehfläche. F ist der Brennpunkt des Paraboloides. Liegt in F eine Lichtquelle, so werden alle von F ausgehenden Strahlen durch die auf der Innenseite spiegelnde Parabolfläche parallel zur Achse dieses Paraboloides reflektiert. Umgekehrt werden alle zur Achse der Fläche parallel einfallenden Strahlen so reflektiert, daß sie sich in F schneiden. Daraus resultieren wichtige Anwendungen dieser Fläche in der Praxis. Drehparaboloide finden in der Optik als Spiegel und in der Nachrichtentechnik und Astrophysik als Richtantennen zum Zwecke des Sendens und Empfangens energieschwacher Signale Verwendung.

Wir wollen uns den Schritt in den dreidimensionalen Raum jetzt etwas schwerer machen und geben zunächst zwei sich senkrecht kreuzende Geraden g und h vor. Das Wort „kreuzen" ist keineswegs mit dem Wort „schneiden" gleichzusetzen. Wir denken hierbei an eine Autobahnkreuzung, bei der eine Ampelregelung zur Vermeidung von Unfällen nicht erforderlich ist. Zwei Geraden g und h im Raum heißen windschiefe oder sich kreuzende Geraden, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben und auch nicht zueinander parallel sind. Der Kreuzungswinkel zweier windschiefer Geraden ist gleich dem Schnittwinkel zweier dazu paralleler, sich schneidender Geraden. Bei zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden schneiden sich entsprechende Parallelen unter einem rechten Winkel. Wir können dabei etwa an das Hermsdorfer Kreuz denken.

Nun soll uns folgende Frage beschäftigen: Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Punkte, deren Abstände von zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden g und h einander gleich sind?

Bemerkung: Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Geraden g versteht man die Länge des von P auf g gefällten Lotes. Dieses Lot läßt sich stets eindeutig fällen (Bild 2).

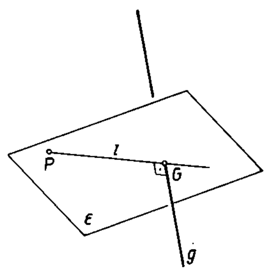


Bild 2 Lot von P auf g

Wir wollen die hier aufgeworfene Frage analytisch behandeln. Durch anschauliche Überlegungen ist leicht einzusehen, daß das gesuchte geometrische Objekt eine Fläche im Raum darstellt. Diese Fläche hat weder mit g noch mit h einen gemeinsamen Punkt. Weiterhin folgt aus der oben angeführten Parabeldefinition, daß eine Ebene α durch h senkrecht zu g diese Fläche nach einer Parabel schneidet. h ist die Leitgerade, und der Durchstoßpunkt Q von g durch α ist der Brennpunkt dieser Parabel. Entsprechendes gilt für die in der Ebene β durch g senkrecht zu h liegenden Schnittkurve.

Ein Schrägbild des dreidimensionalen Sachverhaltes in der zweidimensionalen Zeichenebene soll uns einen leichteren Zugang zu einem analytischen Ansatz eröffnen. Wir gehen von dem Schrägriß eines orthogonalen Achsendreibeins aus. Die x-Achse zeige im Raum nach vorn, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben. Auf jeder Achse werde, vom Ursprung 0 ausgehend, eine kartesische Skala mit gemeinsamer Längeneinheit abgetragen. Die Gerade g liege parallel zur x-Achse und gehe durch den Punkt $Q(0, 0, a)$. Die Gerade h liege parallel zur y-Achse und gehe durch den Punkt R $(0, 0, -a)$. Damit ist gesichert, daß sich die Geraden g und h im Abstand $2a$ senkrecht kreuzen (Bild 3).

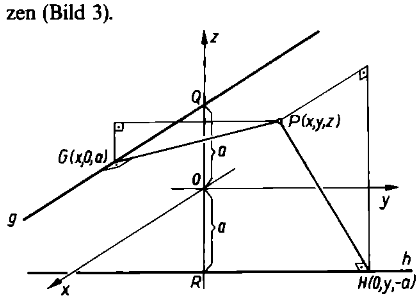


Bild 3
Schrägbild der sich rechtwinklig kreuzenden Geraden g und h

Von dem im Raum liegenden Punkt $P(x, y, z)$ werden angenommen, daß er die eingangs gestellten Forderungen erfüllt. Wir fällen die Lote von P auf g und h und erhalten die Lotfußpunkte $G(x, 0, a)$ bzw. $H(0, y, -a)$. Da P ein Punkt der im Raum ausgezeichneten Menge ist, muß gelten

$$m(PG)=m(PH). \tag{2}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras bestehen die Gleichungen

$$m(PG)=\sqrt{y^2+(z-a)^2},$$
$$m(PH)=\sqrt{x^2+(z+a)^2}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\sqrt{x^2+(z+a)^2}=\sqrt{y^2+(z-a)^2}. \tag{4}$$

Durch Quadrieren und Umordnen findet man weiter

$$4az=y^2-x^2. \tag{5}$$

Das durch Gleichung (5) beschriebene geometrische Gebilde stellt eine Fläche zweiter Ordnung dar. Eine anschauliche Vorstellung von dieser Fläche Φ im Raum können wir uns dadurch verschaffen, daß verschiedene ebene Schnitte gelegt werden.

1. Schnitt von Φ mit der yz-Ebene: Setze in Gleichung (5) $x=0$.

Man erhält $4az = y^2$ (6). Aus dem Vergleich von (6) mit (1) folgt, daß die Schnittkurve eine nach oben offene Parabel ist.

2. Schnitt von Φ mit der xz-Ebene: Setze in Gleichung (5) $y=0$.

Man erhält $4az = -x^2$ (7). Die Schnittkurve ist eine nach unten offene Parabel.

3. Schnitt von Φ mit der xy-Ebene: Setze in Gleichung (5) $z=0$.

Man erhält $y^2 - x^2 = 0$ (8). Die linke Seite von Gleichung (8) kann als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden, nämlich

$$(y-x)(y+x)=0. \qquad (9)$$

Ein Produkt verschwindet, wenn einer seiner Faktoren zu Null wird. Aus (9) folgen daher die beiden Gleichungen

$$y=x \text{ und } y=-x. \qquad (10)$$

Durch Gleichung (10) werden die Winkelhalbierenden der x- und y-Achse beschrieben. Wir sagen: Die Schnittkurve von Φ mit der xy-Ebene zerfällt in zwei Geraden mit den Gleichungen $y=x$ und $y=-x$.

4. Schnitt von Φ mit einer zur yz-Ebene parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $x=k$. Man erhält $4az = y^2 - k^2$ (11). Die Schnittkurve ist eine nach oben offene Parabel. Aus dem Vergleich von (11) mit (6) folgt, daß sie auch durch Parallelverschiebung der in der Ebene α liegenden Parabel erzeugt werden kann.

5. Schnitt von Φ mit einer zur xz-Ebene parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $y=k$. Man erhält $4az = k^2 - x^2$ (12). Die Schnittkurve ist eine nach unten offene Parabel. Aus dem Vergleich von (12) mit (7) folgt, daß sie auch durch Parallelverschiebung der in der Ebene β liegenden Parabel erzeugt werden kann.

Folgerungen: Auf der Fläche Φ liegen zwei Scharen kongruenter Parabeln. Die Parabeln je einer Schar gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor. Die Fläche Φ läßt sich auch dadurch erzeugen, daß man die in der xz-Ebene liegende Parabel längs der in der yz-Ebene liegenden Parabel parallel verschiebt, wobei der Scheitelpunkt der ersten Parabel auf der zweiten Parabel zu führen ist. Flächen, die sich in der hier angegebenen Weise erzeugen lassen, nennt man Schiebflächen. Die erste Parabel ist die erzeugende Kurve und die zweite Parabel ist die Leitkurve dieser Fläche. Wie leicht zu überschauen ist, können beide Parabeln ihre Rollen vertauschen. Schiebflächen haben wegen der besonderen Art ihrer Erzeugung für die Praxis eine vielfältige Bedeutung (Bild 4).

Mit den von uns bisher geführten ebenen Schnitten haben wir die Besonderheiten der Fläche Φ noch nicht voll ausgeschöpft.

6. Schnitt von Φ mit einer zu xy-Ebene parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $z=k$. Man erhält $y^2 - x^2 = 4ak$. (13)

Durch Gleichung (13) wird eine Hyperbel beschrieben. Ist $k>0$, liegen die Scheitel der Hyperbel in der yz-Ebene. Ist $k<0$, liegen die Scheitel der Hyperbel in der xz-Ebene. Setzt man $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$, so erhält man eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln. Diese sind Höhenlinien oder Schichtenlinien unserer Fläche, da die Schnittebenen parallel zur horizontal angenommenen xy-Ebene liegen. Sie vermitteln uns eine anschauliche Vorstellung von Φ.

Folgerungen: Projiziert man die Schichtenlinien senkrecht auf die xy-Ebene, ergibt sich der Schichtenplan der Fläche Φ. Dieser Schichtenplan wird von einer Schar von Hyperbeln mit den Geraden $y=x$ und $y=-x$ als Asymptoten gebildet. Es liegt also ein Berührungsbüschel von Hyperbeln vor. Auch die beiden Asymptoten gehören dem Schichtenplan an. Nach den Regeln der kotierten Eintafelprojektion ist diesen Geraden die Kote Null zuzuordnen. Die Schichtenlinien mit $k>0$ schneiden die y-Achse senkrecht. Die Schichtenlinien mit $k<0$ schneiden die x-Achse senkrecht (Bild 5).

Würden wir einen Pferdesattel mit einer Schar gleichabständiger Ebenen schneiden, so ergäbe sich ein ähnlicher Schichtenplan. Deshalb wird die hier gefundene Fläche auch Sattelfläche genannt. Der im Ursprung 0 liegende Scheitelpunkt von Φ heißt Sattelpunkt. Beim genaueren Studium von Karten mit eingezeichneten Höhenlinien kann man derartige Sattelpunkte finden. Sie zeichnen

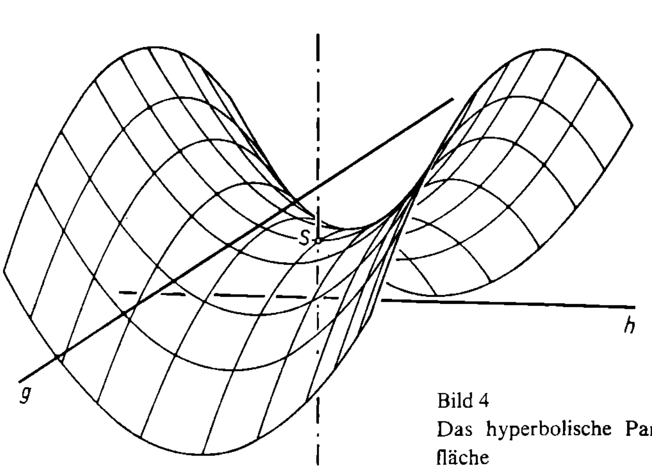


Bild 4
Das hyperbolische Paraboloid als Schiebfläche

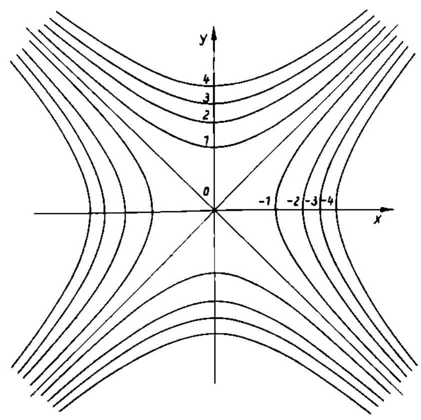


Bild 5
Schichtenplan des hyperbolischen Paraboloides

sich dadurch aus, daß dort die betreffende Höhenlinie einen Knotenpunkt aufweist. Paßstraßen führen vorzugsweise über Sattelpunkte des zugehörigen Gebirgszuges.

Für unsere Fläche Φ ist die xy-Ebene Tangentialebene in ihrem Sattelpunkt. Die Tangentialebene τ_0 berührt Φ im Sattelpunkt nicht einseitig, sondern durchsetzend. In jeder noch so kleinen Umgebung von 0 befinden sich Punkte von Φ, die oberhalb und andere, die unterhalb der xy-Ebene liegen.

Die Achse der Fläche Φ geht durch den Scheitelpunkt 0 und steht senkrecht auf τ_0. Die Achse von Φ ist hier identisch mit der z-Achse. Da alle ebenen Schnitte von Φ parallel zur xz-Ebene und yz-Ebene Parabeln ergeben, stellt Φ ein Paraboloid dar. Dieses muß jedoch noch genauer klassifiziert werden. Wie dem Schichtenplan leicht zu entnehmen ist, liegt keine Drehfläche vor. Da der Schichtenplan der Fläche Φ ein Berührbüschel von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten bildet, nennt man die hier konstruierte Fläche ein *hyperbolisches Paraboloid.*

Das hyperbolische Paraboloid hat eine weitere wichtige geometrische Eigenschaft, die diese Fläche für vielfältige Anwendungen zum Beispiel im Bauwesen interessant macht.

7. Schnitt von Φ mit einer zur Ebene $y=x$ parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $y=x+k$. Man erhält $2kx + k^2 = 4az$. (14)

Mit (14) hat man eine in x und z lineare Gleichung. Daraus ist zu folgern, daß die Ebenen der Schar $y=x+k$ mit $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ die Fläche Φ nach einer Schar von Geraden schneiden. Völlig analog verläuft die Rechnung, wenn die Fläche Φ durch die Schar von Ebenen mit der Gleichung $y=-x+k$ geschnitten wird.

Folgerungen: Aus Gleichung (14) folgt, daß auf dem hyperbolischen Paraboloid Φ zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden liegen. Je eine Schar von Erzeugenden liegt parallel zu einer Ebene, die von der Flächenachse (z-Achse) und einer der beiden Erzeugenden von Φ durch den Scheitelpunkt 0 aufgespannt wird. Gekrümmte Flächen, auf denen wenigstens eine Schar von geradlinigen Erzeugenden liegt, nennt man Regelflächen. Flächen dieser Art finden im modernen Bauwesen vorwiegend zur Überdachung von Gesellschafts- oder Industriebauten Verwendung. Wird die Überdachung des Bauwerkes in Spannbeton ausgeführt, können geradlinige Stützelemente (z. B. Bretter) für die Verschalung verwendet werden. Bei geeigneter Wahl des Grundrisses ergeben sich für die TraufIinien der Überdachung geschwungene Linien, die auch aus ästhetischer Sicht eine ansprechende Wirkung hervorrufen können. Vielfach wird – etwas phantasielos – ein windschiefes Viereck im Raum vorgegeben. In dieses räumliche Viereck wird dann das hyperbolische Paraboloid – von Baupraktikern „Hyparschale" genannt – eingepaßt (Bild 6).

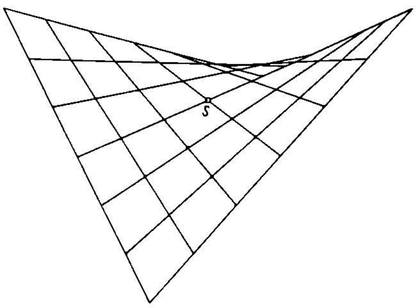


Bild 6
Das hyperbolische Paraboloid als Regelfläche

Für uns ist von Interesse, ob diese Fläche durch Vorgabe eines windschiefen Vierecks, dessen Seiten dann Erzeugende dieser Fläche sind, eindeutig bestimmt ist. Hierzu ist vorauszuschicken, daß die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung 9 wesentliche Konstante enthält. Zur Festlegung einer solchen Fläche im Raum benötigt man also 9 geometrische Vorgaben. Dies können zum Beispiel Punkte der Fläche oder Tangentialebenen sein. Macht man jedoch die Einschränkung, daß die zu verwendende Fläche ein Paraboloid ist, so muß eine bestimmte algebraische Beziehung zwischen den Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung erfüllt sein. Für die Festlegung eines hyperbolischen Paraboloides im Raum hat man damit nur 8 freie Parameter. In der Tat ist die Vorgabe des windschiefen Vierecks im Raum äquivalent mit der Festlegung von 8 Bestimmungsstücken der Fläche. Die Eckpunkte des Vierecks sind offensichtlich Punkte der Fläche. Weiterhin ist die von zwei in einem Punkt zusammenlaufenden Viereckseiten aufgespannte Ebene eine Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloides mit dem entsprechenden Eckpunkt als Berührungspunkt. Durch ein windschiefes Viereck sind daher vier Punkte der Fläche mit den zugehörigen Tangentialebenen festgelegt. Mit diesen 8 Vorgaben ist das hyperbolische Paraboloid bezüglich Lage und Gestalt eindeutig bestimmt (vgl. Bild 6).

In ein vorgegebenes windschiefes Viereck läßt sich genau ein hyperbolisches Paraboloid einpassen. Liegt dieses Viereck beliebig im Raum, dann steht die Achse dieser Fläche auch nicht senkrecht im physikalischen Sinn. Das Auffinden des Scheitels dieser Fläche und seiner Achse bei Vorgabe eines windschiefen Vierecks von Erzeugenden erfordert einen größeren konstruktiven Aufwand, der nur mit den Mitteln der projektiven Geometrie erschließbar ist. Außerdem haben wir in unserem Beispiel einen Sonderfall, bei dem sich die Scheitelerzeugenden senkrecht schneiden. In diesem Fall lassen sich die Schnittlinien des Paraboloides mit anderen gekrümmten Flächen besonders leicht mit Hilfe zugeordneter Normalrisse konstruieren. Durch Bild (7) wird gezeigt, wie man die Schnittlinie eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides mit einem Drehzylinder konstruieren kann. Hier fällt die Achse des Paraboloides mit einer Erzeugenden des Zylinders zusammen. Das Paraboloid ist so gelegt, daß die eine Schar seiner Erzeugenden Frontlinien sind. Dadurch vereinfacht sind die Konstruktion der Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Zylinder. Weitere Abbildungen zeigen Entwürfe und vollendete Bauwerke mit der von uns hier untersuchten Fläche als Bauelement.

E. Schröder

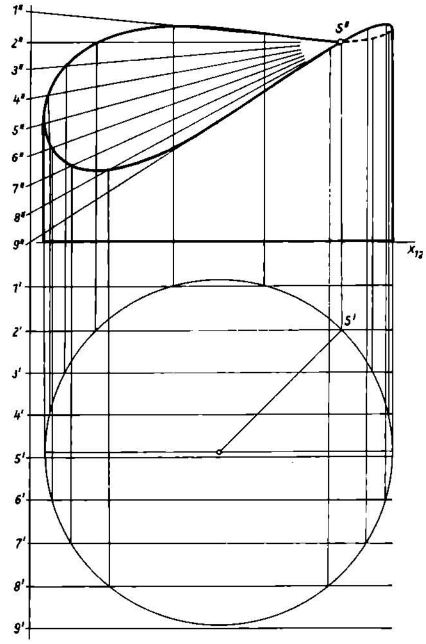


Bild 7
Schnitt von Drehzylinder und hyperbolischem Paraboloid. Die Mantellinie des Drehzylinders durch S ist zugleich Achse des hyperbolischen Paraboloides mit S als Scheitelpunkt.

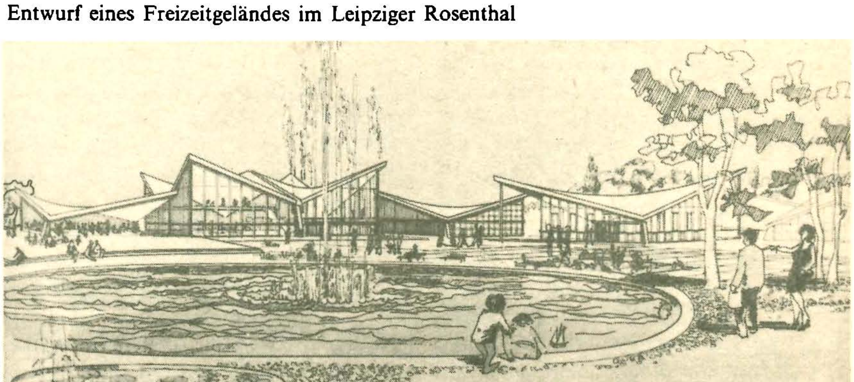
Bild 8 (siehe Titelseite)
Schnitt von Halbkugel und hyperbolischem Paraboloid. Die Drehachse der Halbkugel fällt mit der Achse des hyperbolischen Paraboloides zusammen. Der Scheitel S des hyperbolischen Paraboloides liegt daher auf der Achse der Halbkugel.

Weitere Aufgabenstellung

Die eingangs vorgelegte Aufgabe läßt sich in eine allgemeinere Aufgabenstellung einbetten. Die neue Aufgabe lautet:
Man untersuche, was für ein geometrisches Objekt von der Menge jener Punkte erzeugt wird, für welches das Abstandsverhältnis von zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden g und h, nämlich $m(GP) : m(HP) = 1 : K$ mit $K > 1$ ist (vgl. Bild 3).

Ein zu (2), (3) und (4) analoger rechnerischer Ansatz führt auf die Gleichung eines einschaligen Hyperboloides, dessen Achse parallel zu g liegt. Die Kehlellipse dieser Fläche liegt in der yz-Ebene. Der Spurpunkt Q von g in der yz-Ebene ist ein Brennpunkt dieser Ellipse. Auf dieser Fläche existieren gleichfalls zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden.

Bild 9
Entwurf eines Freizeitgeländes im Leipziger Rosenthal



Einige mathematische Modelle und ihre Verwendung im Schiffbau

Seit der Aufnahme des serienmäßigen Schiffbaus in der DDR im Jahre 1946 wurden durch unsere Werften bis zum Jahresende 1978 3800 Schiffe mit einer Vermessungstonnage von ca. 6,5 Millionen BRT (Brutto-Registertonnen) fertiggestellt. Eine Registertonne entspricht einer Raumgröße von 2,83 m³. Die Entwicklung ist in Bild 1 dargestellt.
Die Produktionsstätten sind u. a.
VEB Warnowwerft Warnemünde, *VEB Schiffswerft Neptun* Rostock, *VEB Matthias-Thesen-Werft* Wismar und *VEB Volkswerft* Stralsund.

Hauptauftraggeber der DDR-Schiffbauindustrie ist die UdSSR, deren Reedereien bis zum Jahresende 1978 rund 3000 unserer gebauten Schiffe mit insgesamt 3,7 Millionen BRT in Dienst stellten.
Bei der Vielzahl der anstehenden Aufgaben trifft man auch auf mathematische Fragestellungen. Wir wollen im nachfolgenden ein Beispiel dafür geben.
Zeichnungen werden mit numerisch gesteuerten Zeichenmaschinen erzeugt. Mittels eines Programms wird dabei aus einer gegebenen Punktfolge eine Kreisbogenapproximation mit einem Rechner ermittelt, d. h., es wird eine Folge von Kreisbögen errechnet, die gezeichnet eine Kurve ergeben, die die gegebene Punktfolge näherungsweise darstellt. Hierfür ist eine genügend dichte Punktfolge erforderlich. Praktisch kann dies bedeuten, daß die vorgegebene Punktfolge zu verdichten ist, indem man neue sinnvolle Zwischenpunkte ermittelt (man nennt diesen Vorgang *Interpolation*). Im nachfolgenden werden verschiedene Möglichkeiten für sinnvolle Punktverdichtungen diskutiert.
Ein Spant ist die Schnittkurve der Schiffsaußenhaut mit einer zur Schiffsachse senkrecht stehenden Ebene. Aus Symmetriegründen wird nur die eine Hälfte eines Spantes dargestellt. Eine konkrete Darstellung des Spantes in der Form $y=f(z)$ ist in der Regel nicht gegeben. Statt dessen hat man eine Punktfolge aufgemessen, deren Punkte in geordneter Reihenfolge auf dem Spant liegen. Gesucht ist nun eine Darstellung der Form $y=f(z)$, weil wir dann beliebige Zwischenpunkte errechnen können. Dazu gibt es z. B. folgende Möglichkeiten:
1. Durch die $n+1$ gegebenen Punkte wird ein Polynom n-ten Grades (mit $n+1$ Koeffizienten) gelegt. Dieses Polynom nennt man *Lagrange-Interpolationspolynom.*
2. Man ermittelt ein Polynom p-ten Grades (p ist vom Anwender vorgegeben), das von der vorgegebenen Punktmenge einen minimalen (in welchem Sinne, siehe weiter unten) Abstand hat.
3. Man setzt die Kurve stückweise aus Polynomstücken zusammen, deren Grad vom Nutzer vorgegeben ist.
Neben diesen drei aufgezählten Varianten existieren noch weitere.
Der Schiffbauer hat nun die Aufgabe, eine Methode derart auszuwählen, daß sein Ergebnis den praktischen Forderungen genügt.

Wenden wir uns einem konkreten Beispiel zu. Für den in Bild 2 dargestellten Spant wurden 29 Punkte $P_i(z_i, y_i)$, $i=1, 2, \ldots, 29$, aufgemessen. Wir betrachten das Polynom

$$y_{28}(z)=a_{28}z^{28}+a_{27}z^{27}+\ldots+a_1z+a_0=P_{28}. \quad (1)$$

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten erhalten wir 29 Gleichungen

$$y_i=a_{28}z_i^{28}+a_{27}z_i^{27}+\ldots+a_1z_i+a_0, \quad i=1(1)\,29 \quad (2)$$

und können aus diesen die Koeffizienten a_0, $a_1, \ldots, a_{28}$ bestimmen.
Nun wird kein mathematisch Gebildeter versuchen, dieses Gleichungssystem exakt zu lösen, obwohl das natürlich theoretisch möglich ist. Statt dessen wird er zu Näherungsverfahren greifen und dabei die Ergebnisse und in einem derart aufwendigen Fall auch die Zwischenergebnisse runden. Diese wiederholten Rundungsfehler können das Endergebnis erheblich verderben.

In Bild 2 wurde $p^7{}_{28}$ dargestellt. (Die 7 gibt die Anzahl der gültigen Ziffern in der Rechnung an.) Das Ergebnis ist unbefriedigend. Auch $p^{16}{}_{28}$ ist unbrauchbar. Durch gewisse numerische Manipulationen (zunächst wird das y-Intervall auf $[0, 1]$ und anschließend das z-Intervall auf $[0, 1]$ transformiert) kann man aus $p^{16}{}_{28}$ noch $\tilde{p}^{16}_{28}$ und $\tilde{\tilde{p}}^{16}_{28}$ erhalten, aber auch diese Funktionen stellen den Spant ungenügend dar. Alle Rechnungen wurden mit einem elektronischen Rechner EC 1040 ausgeführt.

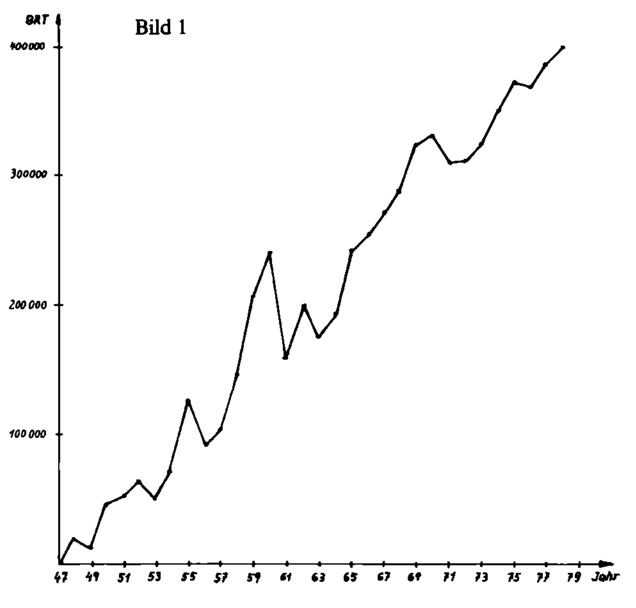


Bild 1

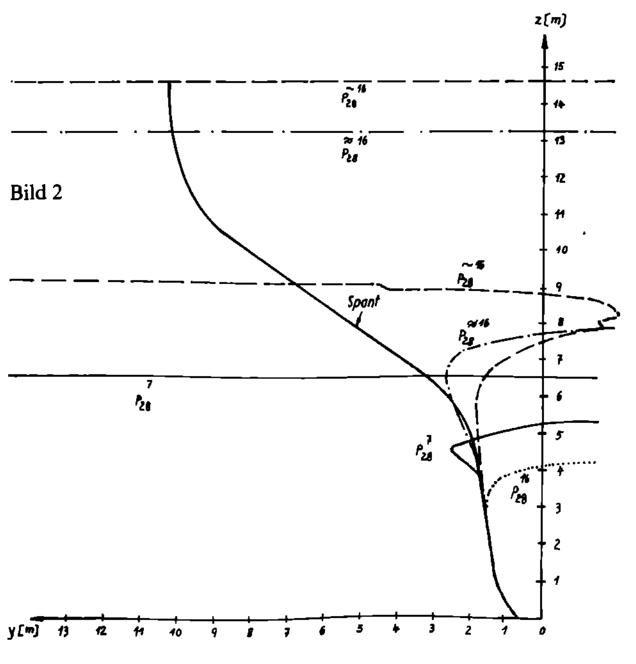


Bild 2

Bild 3

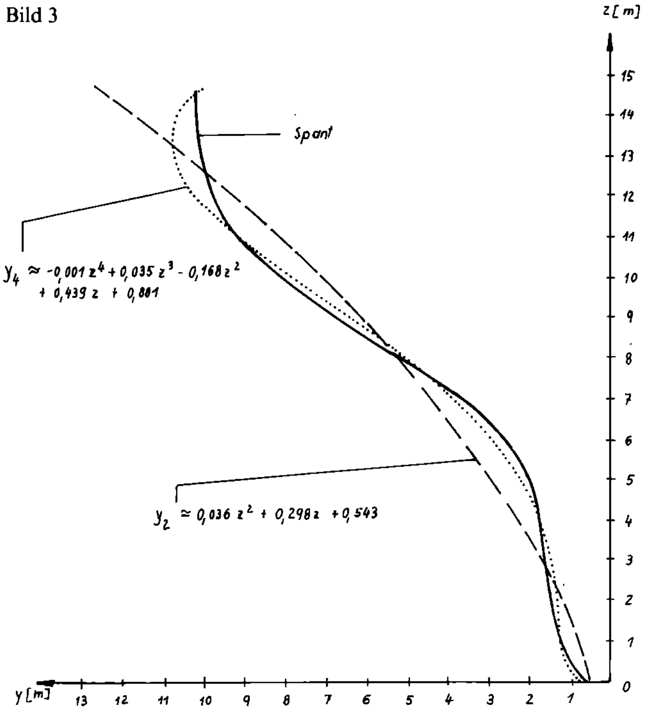
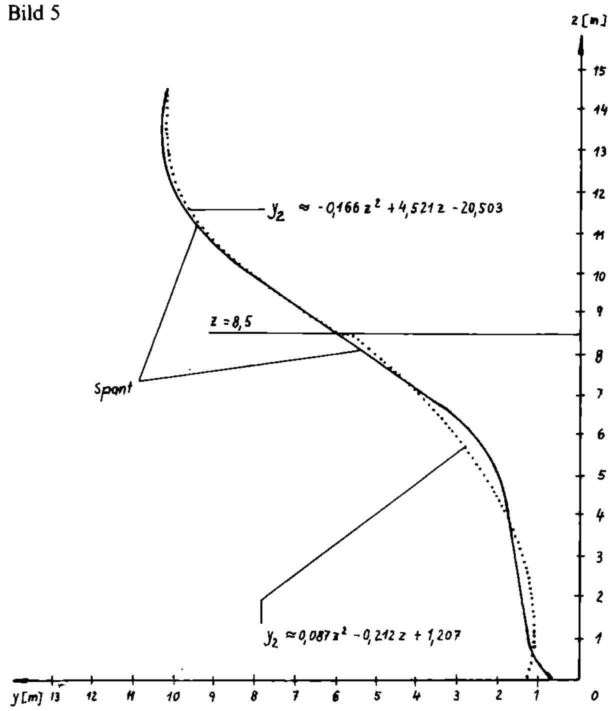


Bild 5



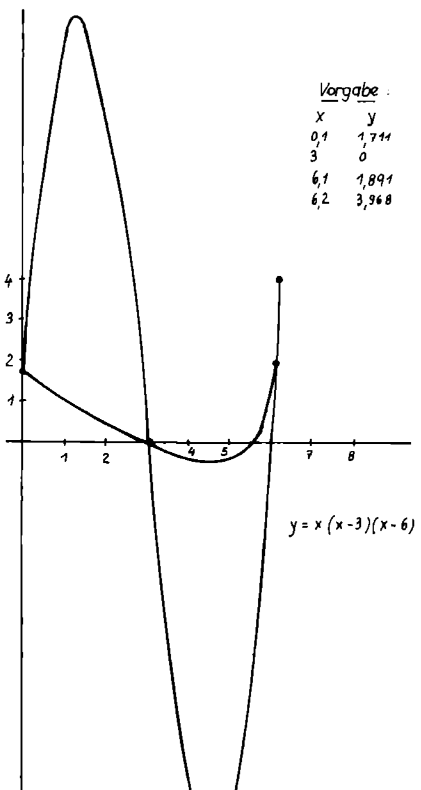


Bild 4

Der Grund für diese schlechten Ergebnisse ist darin zu suchen, daß die Koeffizienten des Gleichungssystems (2) für $a_0, \ldots, a_{28}$ in dem Bereich $4{,}06 \cdot 10^{32}$ bis $1{,}39 \cdot 10^{-17}$ variieren. Diese Variationsbreite erfaßt auch keine 16-stellige Genauigkeit des Rechners und die Rundungsfehler verderben das Ergebnis. (Die Determinante des Gleichungssystems (2) hat den Wert $1{,}09 \cdot 10^{209}$!)

Ein zweiter Lösungsversuch wird in Bild 3 dargestellt. Die Koeffizienten des Polynoms $p_2 = az^2 + bz + c$ sind so ermittelt worden, daß die Funktion

$f(a, b, c) = (y_1 - az_1^2 - bz_1 - c)^2 + \ldots + (y_{29} - az_{29}^2 - bz_{29} - c)^2$

ihr Minimum annimmt. Diese Funktion stellt die Summe der Abweichungsquadrate zwischen dem Polynom an der Stelle z_i und dem gegebenen y_i-Wert dar. Dies ist die sogenannte *Gaußsche Fehlerquadratmethode*. Analog haben wir die Koeffizienten a, b, c, d, e des Polynoms

$p_4 = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ durch Minimisierung des Ausdrucks

$f(a, b, c, d, e) = (y_1 - az_1^4 - bz_1^3 - cz_1^2 - dz_1 - e)^2 + \ldots + (y_{29} - az_{29}^4 - bz_{29}^3 - cz_{29}^2 - dz_{29} - e)^2$

erhalten. Beide Resultate wurden mit dem programmierbaren Tischrechner K 1002 ermittelt und sind in Bild 3 dargestellt. Eine hier anknüpfende Möglichkeit besteht in der Erhöhung des Polynomgrades. Hier tritt ein neuer unliebsamer Effekt auf. Z. B. ergibt sich für $n = 13$ bis $y = 12$ eine recht gute Übereinstimmung zwischen dem Spant und der Näherungsdarstellung, aber es gilt (vergl. Bild 3) $y(12) = 9{,}967$, $y(12{,}3) = 10{,}017$, $y(12{,}5) = 9{,}968$, $y(14{,}05) = 7{,}538$, $y(14{,}608) = 10{,}205$, d. h., das ermittelte Polynom schwingt im Endbereich, ist also ebenfalls nicht brauchbar. Noch deutlicher wird dieser Effekt in Bild 4 dargestellt. Die vier vorgegebenen Punkte beschreiben (schlecht) die dargestellte Kurve. Legt man durch diese vier Punkte ein Polynom 3. Grades, so erhält man

$y = x(x-3)(x-6)$.

An dieser Stelle muß einiges zu den Genauigkeitsanforderungen gesagt werden: In den Bildern sind höchstens Abweichungen von 0,1 mm bis maximal 0,2 mm gestattet. Diese scheinbar extremen Forderungen sind dadurch begründet, daß bei dem verwendeten Maßstab Fehler im Millimeterbereich bereits Abweichungen von 5 cm bis 10 cm in der Praxis am Schiff bewirken. Derartige Verformungen einer Platte zum Ausgleich derartiger Abweichungen sind beim Einbau im Nachherein aber nicht möglich.

Der nächste Schritt besteht in der Unterteilung der aufgemessenen Punkte in zwei Teilmengen, und man erhält eine stückweise Darstellung $y = f(z)$. Ein Beispiel für eine solche Unterteilung an der Stelle $z = 8{,}5$ zeigt Bild 5. Die dort dargestellten Polynome sind mit der Gaußschen Fehlerquadratmethode ermittelt worden.

Dieser Weg zeigt zwei Nachteile. An der Trennstelle beider Polynome (vgl. Bild 5) kann ein Sprung entstehen. Eine weitere Fehlermöglichkeit besteht darin, daß sich an dieser Stelle ein Knick ausbildet. Beide Fehlerquellen sind für die Praxis nicht akzeptabel.

Die bisher erörterten Wege zeigen deutlich:

- Es gibt theoretische Wege, die sich für die Lösung praktischer Probleme nicht eignen.
- Für eine Lösung, die für die Praxis akzeptabel ist, bietet sich folgender Weg an:

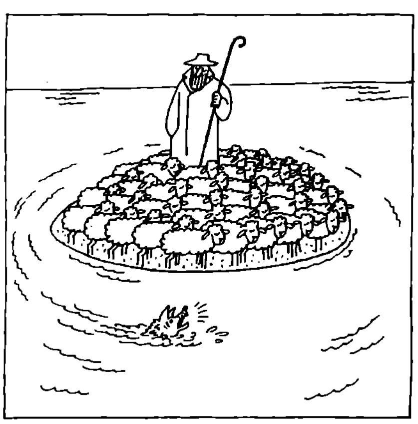
Wir konstruieren nur auf jeweils wenigen Punkten mit aufeinanderfolgenden Abszissen ein niedriggradiges Polynom und benutzen für jeden weiteren Abszissenbereich neue niedriggradige Polynome.

Der denkbar einfachste Weg wäre dadurch gegeben, daß wir je zwei Punkte gradlinig verbinden, also einen Polygonzug erhalten. Dieser hat den Nachteil, daß Knicke auftreten, die Kurve also nicht glatt ist („glatt“ ist ein typischer Begriff der Mathematik. Hier genügt die Anschaulichkeit.)

Zur Lösung definieren wir:
$s(z)$ heißt kubischer Spline (gesprochen: Splein) genau dann, wenn
a) $s(z)$ in jedem Interval $(-\infty, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_{n-1}, z_n), (z_n, \infty)$ ein Polynom höchstens 3. Grades darstellt und
b) $s(z)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Die Funktion $s(z)$ läßt sich also in jedem der 28 Intervalle $[z_k, z_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, 28$ als $f_k(z) = A_k(z - z_k)^3 + B_k(z - z_k)^2 + C_k(z - z_k) + D_k$ darstellen. Damit nun diese zusammengesetzte Funktion unsere Punktmenge darstellt, müssen wir $s(z_k) = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, 29$ fordern, d.h., die Funktion $s(z)$ verläuft durch die Punkte. Die Bedingung b) bedeutet, daß an den Stellen z_k, an denen die Funktion $s(z)$ zusammengesetzt ist, keine Knicke auftreten. Als mechanisches Modell für diese Spline-Interpolation kann man sich ein durch die Punkte gelegtes elastisches Lineal (englisch spline) vorstellen.
Wir müssen in jedem der $n-1$ Intervalle die Koeffizienten A_k, B_k, C_k und D_k bestimmen. Auf die konkrete Bestimmung dieser Koeffizienten soll hier nicht näher eingegangen werden, da als Hilfsmittel die 1. und 2. Ableitung der Funktion f_k benutzt werden und aufwendige Rechnungen darzustellen wären. (Für den Interessenten verweisen wir auf Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., *Taschenbuch der Mathematik*, 19. Auflage Verlag Nauka, Moskau, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979)
Diese Rechnungen wurden mit dem EC 1040 ausgeführt. Die numerischen Ergebnisse stimmen ausreichend mit dem ursprünglichen Spant überein, so daß eine akzeptable Lösung des Problems erzielt wurde.

W. Moldenhauer

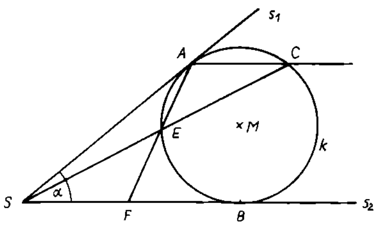
Harri Parschau



Alles dreht sich um den Kreis

(10 Aufgaben für Schüler der Klassen 7 bis 10)

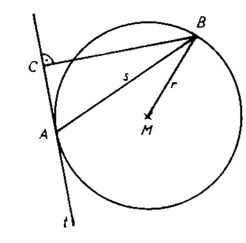
▲1▲ Das Bild stellt einen spitzen Winkel α mit seinem Scheitelpunkt S dar. Ein Kreis k berührt die Schenkel des Winkels α in den Punkten A und B. Die Parallele zu s_2 durch A schneide k in C. Die Gerade CS schneide k in E, und die Gerade AE schneide s_2 in F.
Es ist nachzuweisen, daß der Punkt F die Strecke $\overline{BS}$ halbiert.



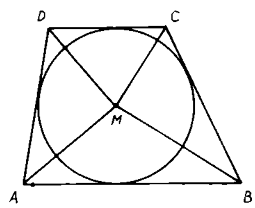
▲2▲ Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Innenwinkel $\sphericalangle\, BAC = \alpha = 30°$.
Es ist zu beweisen, daß die Länge der Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks gleich der Länge des Radius des Umkreises dieses Dreiecks ist.

▲3▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dem zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ mit $\overline{AB} = \overline{BC}$ so eingezeichnet seien, daß Winkel $\sphericalangle\, ABC = 120°$ gilt. Beweise, daß die Länge jeder der Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich der Länge des Radius r des Kreises k ist!

▲4▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dem eine Sehne $\overline{AB} = s$ mit $s < 2r$ eingezeichnet wurde. Die im Punkt A an den Kreis k gelegte Tangente t schneide die durch B zu t gezogene Senkrechte in C.
Beweise, daß die Gerade AB den Winkel $\sphericalangle\, CBM$ halbiert!



▲5▲ Die abgebildete Figur stellt ein Trapez $ABCD$ und einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M dar, der jede der vier Trapezseiten zur Tangente hat.
Beweise, daß die Winkel $\sphericalangle\, AMD$ und $\sphericalangle\, BMC$ beide rechte Winkel sind!



▲6▲ Es sei Dreieck ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck, D, E und F seien Fußpunkte der Dreieckshöhen h_a, h_b, h_c.
Es ist zu beweisen, daß die Höhen des Dreiecks ABC gleichzeitig Winkelhalbierende des Dreiecks DEF sind.

▲7▲ Ist es möglich, aus einer quadratischen Platte mit der Seitenlänge a (in mm) eine kreisförmige Scheibe herauszuschneiden, die einen Durchmesser d (in mm) besitzt, wenn
(1) $53 \leq a \leq 55$ und $49 \leq d \leq 51$,
(2) $53 \leq a \leq 55$ und $52 \leq d \leq 54$ gilt?
Die Antwort ist zu begründen.

▲8▲ Gegeben seien drei Punkte A, B und C einer Ebene, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen. Jede der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sei kleiner als 3 cm. Eine Kreisscheibe möge die drei Punkte überdecken.
Gib für alle möglichen Fälle die Grenzen des Intervalls an, in welchem die Maßzahl des Flächeninhalts (gemessen in cm^2) des Kreises liegen muß!

▲9▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r und auf diesem Kreis ein Punkt P, ferner eine Gerade g, die mit dem Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat.
Es ist ein zweiter Kreis k' zu konstruieren, der den Kreis k von außen im Punkte P berührt und die Gerade g zur Tangente hat.

▲10▲ Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $r_1 < r_2$, die sich in den Punkten P und Q schneiden. Auf k_1 ist ein Punkt A, auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Gerade AB durch P geht und $\overline{AP} = \overline{BP}$ gilt.

(Lösungen siehe Heft 6/81)

Th. Scholl

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Preisträger

Einen ersten Platz erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Volkmar Liebscher, EOS Goethe-Schule, Ilmenau (1); Matthias Hübner (Kl. 9), Humboldt-EOS Leipzig (2); Jens Pönisch (Kl. 9), Karl-Marx-OS, Karl-Marx-Stadt (3)

In Olympiadeklasse 11/12: Detlef Horbach, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (4); Jens Galley (Kl. 11), EOS Heinrich Hertz, Berlin (5)

Einen zweiten Platz erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Klaus Mohnke, Erich-Weinert-OS, Lübbenau; Torsten Fimmel, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Bernd Schmutzler, EOS Artur Becker, Wilkau-Haßlau; Jörg Stahnke (Kl. 9), EOS Willi Sänger, Pasewalk; Oliver Geupel (Kl. 9), EOS Romain Rolland, Dresden; Birgit Thomas, EOS Zittau; Karl-Heinz-Fandrey (Kl. 9), EOS Puschkin, Prenzlau

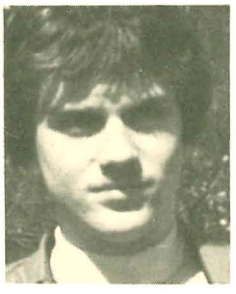
In Olympiadeklasse 11/12: Peter Zienicke (Kl. 11), Spezialschule für Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin; Jürgen Gräfenstein und Michael Giesecke, beide Spezialschule für Elektronische Industrie M. A. Nexö, Dresden; Jörg Pietschmann, EOS Johann Joachim Winkelmann, Stendal; Steffen Zahn (Kl. 11), Spezialschule für Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin; Bodo Heise (Kl. 11), Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; John Matzke (Kl. 11), EOS G. E. Lessing, Erfurt; Ralf Hortig (Kl. 11), I. EOS Cottbus

25 Schüler erhielten einen 3. Preis, 39 Schüler eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen. An der XX. OJM nahmen 171 Schüler, davon 19 Mädchen teil. 38 Schüler waren Frühstarter, d. h., starteten in einer höheren Klassenstufe. 20 über viele Jahre bewährte Wissenschaftler und Lehrer erhielten aus Anlaß dieser XX. OJM hohe Auszeichnungen.

Die Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklasse 10 sowie die Aufgaben zur Olympiadeklasse 11/12 veröffentlichen wir in Heft 6/81; die Lösungen zu Olympiadeklasse 11/12 erscheinen in „Mathematik in der Schule“.

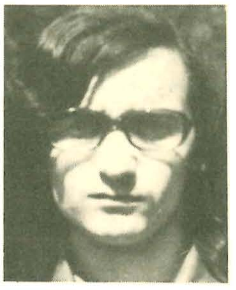
1

2

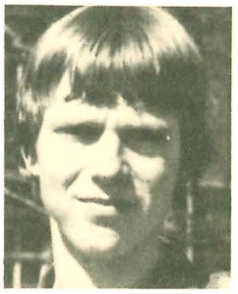


3

4



5



Grußadresse des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen Prof. Dr. Böhme

An die Teilnehmer der XX. Mathematik-Olympiade der DDR

Die 1981 zum zwanzigsten Male durchgeführte *Olympiade Junger Mathematiker* nehme ich zum Anlaß, allen Teilnehmern, aber auch den Verantwortlichen und Organisatoren die herzlichsten Glückwünsche auszusprechen.

Die Förderung aller Talente und Begabungen der Jugend ist ein grundlegendes Prinzip unserer sozialistischen Bildungspolitik. In zunehmenden Maße erfordert die Erkenntnis und die Beherrschung der gesetzmäßigen Zusammenhänge in Natur und Gesellschaft einen hohen Stand der mathematischen Theorie und ihrer schöpferischen Anwendung.

Die Mathematik ist zu einem wichtigen Kettenglied bei der Beschleunigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts geworden.

Deshalb kommt der vertieften Beschäftigung der interessierten und talentierten Schüler mit mathematischen Problemen, wie sie durch die traditionsreiche Olympiade-Bewegung in bester Weise realisiert und gefördert wird, große und wachsende Bedeutung zu.

Sie, als Teilnehmer an der XX. Olympiade Junger Mathematiker 1981 in Erfurt, haben sich als die Besten in ihren Altersgruppen erwiesen, und ich möchte allen hohe Anerkennung für die gezeigten Leistungen aussprechen.

Zweifellos werden viele Jugendfreunde, die sich in den Mathematik-Olympiaden bewährt haben, später an den Universitäten und Hochschulen unseres Landes durch das Studium der Mathematik oder anderer mathematisch anspruchsvoller Studienrichtungen ihre Liebe zur Mathematik weiterentwickeln und für unsere ganze Gesellschaft fruchtbringend wirksam werden lassen. Dabei wünsche ich Ihnen viel Erfolg.

Die Olympiade-Bewegung auf dem Gebiet der Mathematik möge auch im 3. Jahrzehnt ihres Bestehens – getragen vom Engagement vieler Lehrer und Wissenschaftler – ihre große Popularität behalten und die teilnehmenden Schüler zu hohen Leistungen beflügeln.

Mathematik-prüfungen in Äthiopien

In Äthiopien verläßt man die 12. Klasse der *HIGHER SECONDARY SCHOOL* (höhere Schule), wenn man die *ETHIOPIAN SCHOOL LEAVING CERTIFICATE EXAMINATION* (Prüfung für das äthiopische Schulentlassungszeugnis) auch im Fach Mathematik bestanden hat.
Es ist sicher interessant zu wissen, welche Anforderungen in einer solchen Prüfung in einem afrikanischen Land gestellt werden und auf welche Weise diese Prüfungen durchgeführt werden.
Man sollte sehr vorsichtig sein, wenn man etwa Art, Inhalt und Schwierigkeitsgrad dieser Prüfungen beurteilen bzw. bewerten will, weil man dazu die konkrete Situation des Landes kennen muß. Wir möchten natürlich dazu auffordern, die Aufgaben zu lösen.

Die Prüfung besteht aus drei Teilen:

Teil A: Grundlagen der Mathematik (z. B. Mengenlehre, Arbeit mit Variablen, Gleichungen und Ungleichungen, Gleichungssysteme, Funktionen, Zahlenfolgen, Logarithmen, Restklassen u. a.) Den Teil A *muß* jeder Prüfling bearbeiten; es sind 70 Fra :en.

Teil B: Geometrie

Teil C: Commercial Mathematics (etwa: Angewandte Mathematik im Handel). Dieser Teil enthält vorwiegend Proportionen, Mischungsaufgaben, Prozentrechnung usw., wobei es sich um Sachaufgaben handelt.

Der Prüfling wählt entweder Teil B oder Teil C mit je 20 Fragen bzw. Aufgaben. Jeder Prüfling muß sich in der vorgegebenen Zeit von drei Stunden mit 90 Problemen befassen. Zu jeder Frage sind fünf Antworten vorgegeben (vier falsche und eine richtige). Der Prüfling soll die richtige Antwort ankreuzen.

Diese in unseren Prüfungen nicht übliche Methode wird in afrikanischen und auch in einigen anderen Staaten praktiziert.
Wir stellen nun einige Inhalte der einzelnen Prüfungsteile dar. Wir sind der Auffassung, den Teil A recht ausführlich zu behandeln, da es sich hierbei um grundlegendes Wissen handelt.

Auswahl aus Teil A

▲1▲ Welche der Aussagen ist wahr?
A. $0=\{0\}$ B. $0\in\emptyset$ C. $\{0\}=\emptyset$ D. $0\subset\{0;1\}$
E. $0\in\{0\}$

▲2▲ Wenn $A=\{0,\frac{1}{2},2\}$;
$B=\{x;\,2x^2-5x+2=0\}$ und
$C=\{x;\,2x^2-5x+2x=0\}$,
welche der Aussagen ist wahr?
A. $A=B$ B. $B\subset A$ C. $C\subset A$ D. $A\subset B$
E. $A\cap C=\emptyset$

▲3▲ Wenn $a+b=c+d$ und $b<d$, welche der Aussagen ist wahr?
A. $a=c$ B. $a<c$ C. $a>c$ D. $a-c=0$
E. keine der Aussagen von A. bis D.

▲4▲ Wenn $\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$, welche der Aussagen ist falsch?
A. $xq=py$ B. $\frac{x+y}{y}=\frac{p+q}{q}$
C. $\frac{x-y}{y}=\frac{p-q}{q}$ D. $\frac{x+p}{y+q}=\frac{x}{y}$
E. keine der Aussagen A. bis D.

▲5▲ Bestimme die beste Näherung für
$\frac{0{,}00388\cdot 3163000}{21200}$
A. 8 B. 6 C. 0,8 D. 0,6 E. 0,06

▲6▲ Welches der folgenden Polynome hat den Faktor $(x-1)$?
A. x^2+5x+6 B. x^3-1 C. x^3+1
D. x^3+3x+2
E. keines der Polynome A. bis D.

▲7▲ Für welches geordnete Paar $[x;\,y]$ ist die Funktion $f(x;y)=\frac{xy}{x-y}$ nicht definiert?
A. $[1;0]$ B. $[1;-1]$ C. $[-1;1]$
D. $[1;1]$ E. $[0;1]$

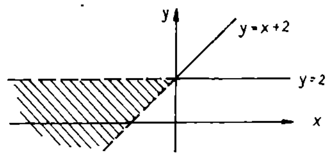
▲8▲ Wenn $f(x;y)=x^2y^3$, welche der Aussagen ist wahr?
A. $f(x;-y)=x^2y^3$ B. $f(-x;-y)=-x^2y^3$
C. $f(-x;y)=-x^2y^3$ D. $f(1;0)=-1$
E. keine der Aussagen von A. bis D.

▲9▲ Welche Aussage ist wahr?
A. $\log_2\frac{16}{3}=4+\log_2 3$
B. $\log_3\frac{16}{3}=\log_3 16-1$
C. $\log_3 60=15\cdot\log_3 4$
D. $\log_2\frac{1}{3}=1-\log_2 3$
E. keine der Aussagen A. bis D.

▲10▲ Welche der Geraden hat keinen gemeinsamen Punkt mit der Geraden $x-y=3$?
A. $x+y=3$ B. $x-y=-3$ C. $x+y=-3$
D. $-y-x=3$ E. keine der Geraden A. bis D.

▲11▲ Welche der Geraden schneidet die Kurve der Funktion $y=2^x$?
A. $y=-1$ B. $y=x$ C. $y=-0{,}003$
D. $y=-x$ E. $y=x-8$

▲12▲ Welche der Mengen beschreibt die schraffierte Fläche?
A. $\{[x;y]:y<x+2$ und $y<2\}$
B. $\{[x;y]:y>x+2$ und $y<2\}$
C. $\{[x;y]:y<x+2$ und $y>2\}$
D. $\{[x;y]:y>x+2$ und $y>2\}$
E. $\{[x;y]:y\leqq x+2$ und $y\geqq 2\}$



▲13▲ Die Lösungsmenge der Gleichung $2^{2x+1}=2^x$ ist
A. $\{0\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{1\}$ D. $\{1;0\}$
E. keine der Mengen A. bis D.

▲14▲ Welches der Gleichungssysteme hat *nicht* die Lösungsmenge $\{[-1;2]\}$?
A. $x+y=1$, $2x+y=0$ B. $2x-y=-4$, $x+2y=3$
C. $x+y=1$, $2x-y=-4$ D. $2x+y=0$, $x+2y=3$
E. $x+y=1$, $x-y=3$

▲15▲ Ein leerer quaderförmiger Wassertank hat eine quadratische Grundfläche (Kantenlänge 10 m) und ist 9 m hoch.
Wie lange dauert die Füllung unter folgenden Bedingungen? Während der ersten Stunde fließt $1\,m^3$ pro Minute ein, während der zweiten Stunde $2\,m^3$ pro Minute, in der dritten Stunde $3\,m^3$ pro Minute, während der vierten Stunde $4\,m^3$ pro Minute und darüber hinaus bis zur vollständigen Füllung.
A. 6 Stunden B. $6\frac{1}{4}$ Stunden
C. 5 Stunden D. 15 Stunden
E. keine der Zeitangaben A. bis D.

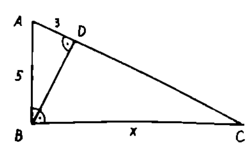
▲16▲ Das 6. Glied einer arithmetischen Folge ist 0, das 7. Glied ist -2. Welche der Aussagen ist wahr?
A. Die Differenz der Folge ist 2.
B. Das Anfangsglied ist -10.
C. Die Summe des 5. und 7. Gliedes ist 0.
D. Das 11. Glied ist 10.
E. Keine der Aussagen A. bis D.

▲17▲ Es sei $|x|\leqq|y|$ und $|y|=0$. Dann gilt
A. $x>0$ B. $x<0$ C. x kann nicht bestimmt werden D. $x=0$
E. keine der Angaben A. bis D.

Auswahl aus Teil B (Geometrie)

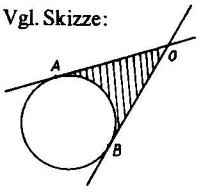
▲1▲ x und y sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks; d ist der Durchmesser des Umkreises. Dann gilt
A. $d=x+y$ B. $d>x+y$
C. $d<x+y$ D. $d=x$ oder $d=y$
E. keine der Aussagen A. bis D.

▲2▲ Vgl. Skizze:



Die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ADB$ sind 90°. $\overline{AB}=5$, $\overline{AD}=3$, $\overline{BC}=x$. x ist dann
A. $\frac{23}{6}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{3}{5}$
E. keiner der Werte A. bis D.

▲3▲ Vgl. Skizze:

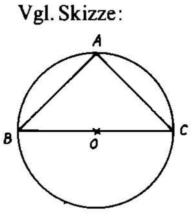


Der Winkel $\sphericalangle ACB$ ist $\frac{\pi}{3}$. Der Kreis mit dem Radius 1 tangiert die Geraden in A bzw. in B. Die schraffierte Fläche ist
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ D. $2\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}$
E. keiner der in A. bis D. angegebenen Werte.

▲4▲ *ABCD* sei ein gleichseitiges Parallelogramm (Seitenlänge 1). Die maximale Fläche, die *ABCD* haben kann, ist
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
E. keine der Angaben A. bis D.

▲5▲ Ein Drahtstück (Länge 100 cm) wird zu einem Viertelkreis gebogen. Welche Länge hat der Radius?
A. $\frac{200}{\pi+2}$ B. $\frac{200}{\pi+4}$ C. $\frac{100}{\pi+4}$
D. $-8+\sqrt{16+1600\pi}$
E. keiner der Werte A. bis D.

▲6▲ Vgl. Skizze:



0 ist der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius 6; $\overline{AB}=\overline{AC}$. Die Länge $\overline{AB}$ ist
A. 12 B. $3\cdot\sqrt{2}$ C. $6\cdot\sqrt{2}$ D. 72
E. keiner der Werte A. bis D.

Auswahl aus Teil C
(Commercial Mathematics)

▲1▲ Wieviel Liter einer 60%igen Lösung müssen 10 Liter einer 20%igen Lösung zugeführt werden, um eine 45%ige Lösung zu erhalten?
A. 6 B. $\frac{86}{3}$ C. $\frac{50}{3}$ D. 125
E. keine der Angaben A. bis D.

▲2▲ Wieviel Kaffee der Güteklasse 5 BIRR/kg (BIRR ist die äthiopische Währungseinheit) muß 50 kg der Güteklasse 6 BIRR/kg beigegeben werden, damit eine Mischung der Güteklasse 5,60 BIRR/kg entsteht?
A. $33\frac{1}{3}$ kg B. $\frac{1}{3}$ kg C. 60 kg
D. nicht zu berechnen
E. keine der Angaben A. bis D.

▲3▲ *Abebe* und *Getachew* (äthiopische männliche Personennamen) eröffnen eine Reparaturwerkstatt. *Abebe* investiert 6000 *BIRR*, *Getachew* 5000 *BIRR*. Der monatliche Gewinn macht 13% der Gesamtinvestition aus. Welchen Anteil erhält *Abebe*?
A. 1716 *BIRR* B. 650 *BIRR*
C. 390 *BIRR* D. 780 *BIRR*
E. keine der Angaben A. bis D.

Wir haben an den Formulierungen nichts geändert. Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgangen sein, daß zwischen *Strecke* und *Länge einer Strecke*, *Winkel* und *Größe eines Winkels*, *Aussage* und *Aussageform* nicht immer unterschieden wird. Das zieht natürlich auch Konsequenzen in der Anwendung der Symbolik nach sich.

H. Büchel/W. Fregin

Lösungen:

Teil A
1. E.; 2. B; 3. C.; 4. E.; 5. D; 6. B.; 7. D.; 8. B.; 9. B.; 10. B.; 11. D.; 12. B.; 13. B.; 14. E.; 15. E.; 16. C.; 17. D.

Teil B
1. C.; 2. C.; 3. C.; 4. D.; 5. D.; 6. C.;

Teil C
1. C.; 2. A.; 3. D.

Bernard Bolzano

Am 5. Oktober 1981 jährt sich zum 200. Male der Geburtstag des bedeutenden böhmischen Mathematikers, Logikers, Sozialethikers und Philosophen *Bernard Bolzano*. Die UNESCO hat empfohlen, dieses fortschrittlichen Mannes im Jahre 1981 ausführlich zu gedenken. So wird die *Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften* aus Anlaß dieses Jubiläums im September 1981 ein festliches internationales wissenschaftliches Symposion veranstalten, das der Entwicklung der Wissenschaften in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts und Bolzanos wissenschaftlichem Werk gewidmet ist. Auf dem *Mathematikerkongreß der DDR* im September 1981 wird einer der vier Plenarvorträge die revolutionäre mathematische Leistung von Bolzano behandeln.

Die Postverwaltung der ČSSR hat zur Würdigung von B. Bolzano am 10. März 1981 eine Briefmarke mit einem Porträt des Gelehrten herausgegeben.

Der aus einer Prager Kaufmannsfamilie stammende Bolzano hat in seiner Heimatstadt Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften sowie Theologie studiert und wurde nach seiner Priesterweihe im Jahre 1807 an der Prager Universität zum Professor der Religionswissenschaft berufen. In seinen Vorlesungen und Predigten stellte sich Bolzano auf die Seite einer aufgeklärten Religionsphilosophie und gelangte schließlich zu utopisch-sozialistischen Ideen, nach denen alle Menschen gleich seien und daher alle sozialen Unterschiede beseitigt werden müßten. Nach vielerlei Verwarnungen und Bedrohungen wurde Bolzano schließlich im Jahre 1819 vom damaligen österreichischen Kaiser seines Amtes enthoben. Nur mit Mühe konnte er seine Freiheit bewahren, wurde aber der Universität verwiesen und erhielt lebenslanges Publikations- und Redeverbot. Auf dem Landgut seiner Freunde in Těchobuz (Südböhmen) bis 1842 lebend, ist Bolzano unermüdlich wissenschaftlich tätig gewesen; große Teile seiner Schriften sind auch heute noch nicht aus dem Nachlaß herausgegeben worden. Bolzano starb einsam und an Tuberkulose leidend am 18. Dezember 1848 in Prag.

Bolzano gehört zweifellos zu den scharfsinnigsten Mathematikern aller Zeiten. Insbesondere hat er Bleibendes für die begriffliche Grundlegung der Analysis geleistet, manches sogar zeitlich noch vor *A. L. Cauchy*. Freilich ist dies erst im 20. Jahrhundert beim Studium des Nachlasses bekannt geworden, weil Bolzano durch das Publikationsverbot der direkte Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik seiner Zeit weitgehend versagt bleiben mußte.

Bolzano verdankt man eine erste scharfe Definition der *Stetigkeit einer Funktion* und des *Grenzwertbegriffes*. Von ihm stammt das auf dem Gebrauch von Partialsummen beruhende, später nach Cauchy benannte *notwendige und hinreichende Konvergenzkriterium für unendliche Reihen*. Es war eine mathematikhistorische Sensation, als man 1930 im Nachlaß von Bolzano entdeckte, daß er als erster, rund 40 Jahre vor *K. Weierstraß*, ein Beispiel einer in einem ganzen Intervall stetigen, aber dort nirgends differenzierbaren Funktion konstruiert hatte. Und schließlich gehört Bolzano auch zu den Wegbereitern der Mengenlehre, wie später G. Cantor zu würdigen wußte.

H. Wußing

Interessante Koordinaten

1. Wege und Netze

Der Bär und andere Tiere leben im Märchenwald. Jedes von ihnen hat seine eigene Hütte. Der Knabe *Christopher Robin* ist ihr gemeinsamer Freund. Das Bild 1 zeigt euch, wie man vom Haus des *Christopher Robin* zu den Hütten des Bären, des Ferkels, des Kaninchens, des Esels, der Eule und des Känguruhs gelangen kann. Um zur Hütte des Bären zu kommen, muß man vom Haus des Knaben aus zunächst nach Süden gehen, sich dann nach Osten wenden und schließlich wieder die Südrichtung einschlagen.

Wir bezeichnen eine Bewegung (von Kreuzungspunkt zu Kreuzungspunkt) nach Süden mit „S", eine Bewegung nach Osten mit „O", nach Westen mit „W" und nach Norden mit „N". Dann wird der Weg vom Haus des Knaben zur Hütte des Bären durch „SOS" beschrieben.

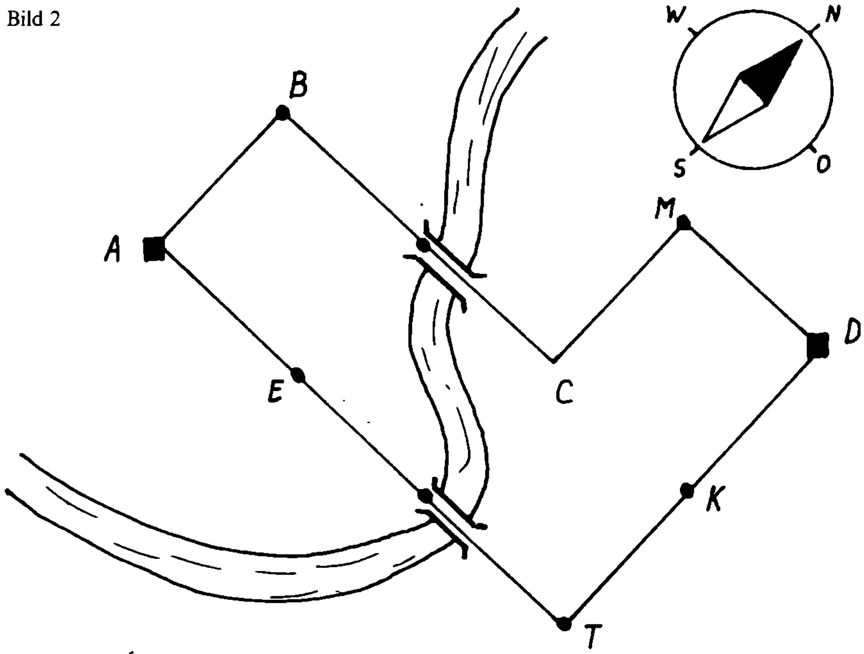
Wie ist der Weg zur Hütte des Känguruhs zu beschreiben?

Wie der zur Hütte des Ferkels?

Wohin führt der Weg „OON"?

Auf welchen Wegen kann *Christopher* in den Wald gelangen? (Bild 1)

Bild 2



Im Bild 2 ist ein Straßennetz dargestellt. Kann man von der Stadt A zur Stadt D fahren?

Benutzt den auf der Zeichnung angegebenen Kompaß, und bezeichnet die Teilstücke des Straßennetzes mit N, O, S bzw. W!

Wie kann der Weg von A nach D „chiffriert" werden? Wie der von D nach A? Worin unterscheiden sich die Beschreibungen beider Wege?

Die alte Brücke zwischen den Orten B und C stürzt ein.

Wie kann man jetzt von A nach D fahren?

Aber nun wird auch noch die Brücke zwischen den Orten E und T wegen einer Reparatur gesperrt.

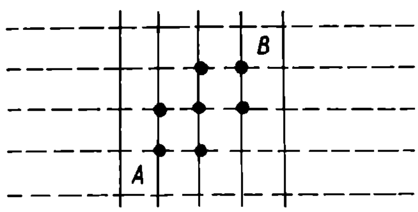
Kann man jetzt von A nach D fahren?

Nennt die Städte, in die man jetzt von A aus fahren kann, und die, die von D aus erreichbar sind! Bezeichnet die entsprechenden Wege!

Im Bild 3 sind nur Bewegungen von Damestein zu Damestein, und zwar nur in „Einzelschritten" auf den eingezeichneten Linien, möglich.

Wie kann man vom Punkt A zum Punkt B gelangen?

Bild 3



„Chiffriert" diese Wege, indem ihr die Schritte auf gestrichelten Linien mit „g" und die auf durchgezogenen Linien mit „d" bezeichnet!

Welchen Damestein muß man entfernen, damit man nicht mehr von A nach B gelangen kann?

Wo muß im Bild 4 ein Damestein eingefügt werden, damit man nach obigen Regeln vom Stein im Punkt A zum Stein im Punkt B gelangen kann? Wie viele Möglichkeiten gibt es? Beschreibt alle möglichen Wege wie in der vorhergehenden Aufgabe!

Bild 4

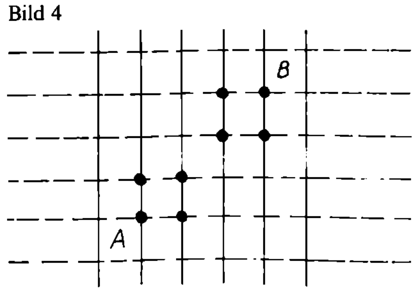
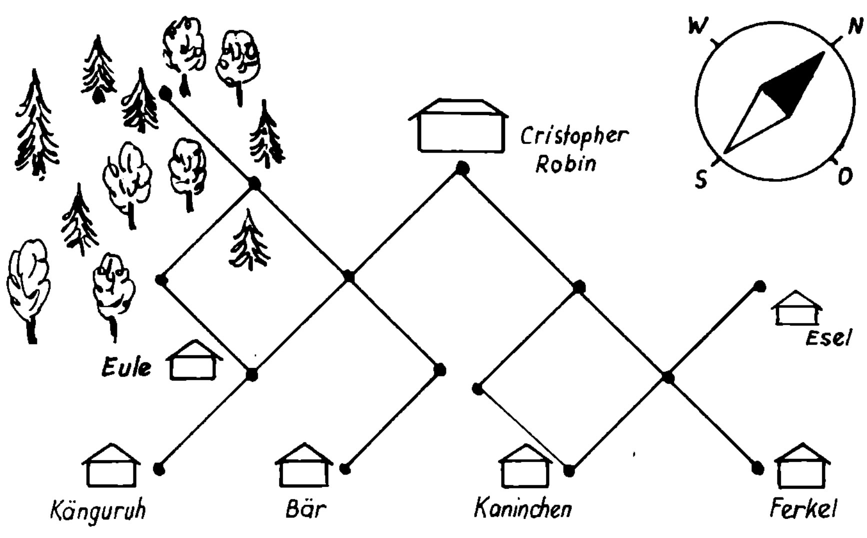


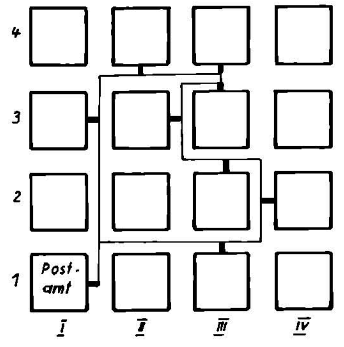
Bild 1



2. Koordinaten

Der Zustellbezirk eines Briefträgers soll sehr einfach aussehen: Er besteht aus vier zueinander parallelen Straßen, in jeder dieser Straßen stehen genau vier Häuser.

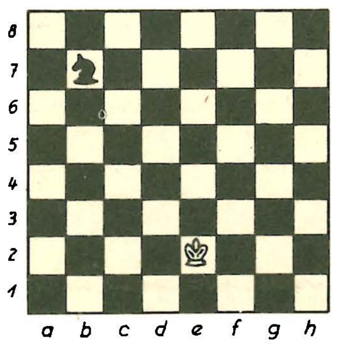
Bild 5



Das Postamt befindet sich im ersten Haus der ersten Straße. Seine Lage kann man wie folgt beschreiben: (I; 1).
Vom Postamt aus geht der Briefträger zum dritten Haus in der ersten Straße. Wir bezeichnen dieses Haus mit (I; 3). An die erste Stelle schreiben wir die Nummer der Straße, an die zweite die Nummer des Hauses in dieser Straße.
Dann bringt er einen Brief in das Haus (II; 4). Seinen weiteren Weg könnt ihr leicht selbst beschreiben.

Die Schachspieler bezeichnen die Felder ihres Spielbrettes schon von alters her mit Hilfe von Buchstaben und Zahlen. Die Senkrechten auf dem Schachbrett bezeichnen sie mit Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h und die Waagerechten mit Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. In Bild 6 steht der weiße König auf dem Feld e2 und der schwarze Springer auf dem Feld b7.

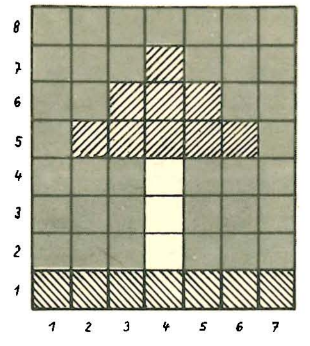
Bild 6



Der französische Mathematiker *René Descartes* kam zu Beginn des 17. Jahrhunderts auf die Idee, auf diese Art auch die Punkte einer Ebene zu beschreiben. Diese bemerkenswerte Erfindung der Koordinaten erlaubte es, das Lösen von geometrischen Aufgaben auf das Lösen von Gleichungen zurückzuführen. Auch im täglichen Leben benutzen wir Koordinaten, z. B. wenn der Platz im Kino durch zwei Zahlen – Nummer der Reihe und Nummer des Sitzes in dieser Reihe – beschrieben wird.

Mit einem Fernschreiber kann man Buchstaben und Ziffern übermitteln, aber farbige Bilder kann man mit ihm nicht übertragen. Wie könnte man mit einem Fernschreiber das Bild 7 doch in eine andere Stadt übermitteln?

Bild 7



Den folgenden Bildern liegt jeweils eine Gesetzmäßigkeit zugrunde. Findet sie, und füllt die leeren Felder!

Viel Erfolg und Freude beim Lösen der Aufgaben wünschen

N. K. Golubkowa und N. I. Wilenkin

3. Lustige Knobeleien

Bild 8

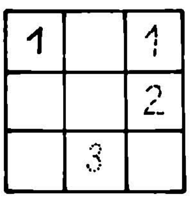


Bild 9

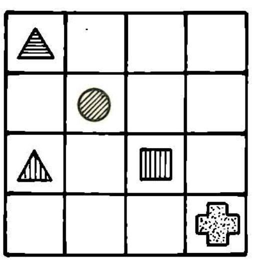


Bild 10

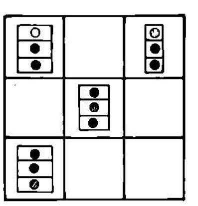


Bild 11

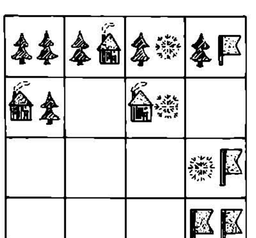


Bild 12

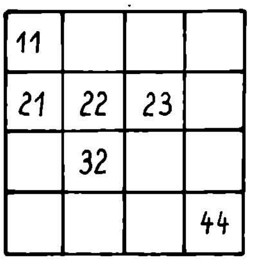


Bild 13

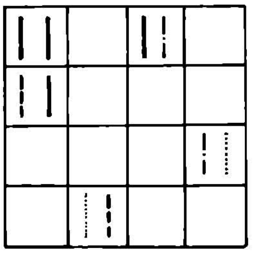


Bild 14

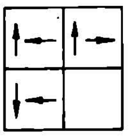


Bild 15

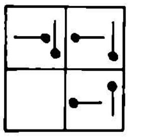


Bild 16

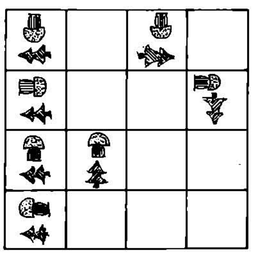


Bild 17

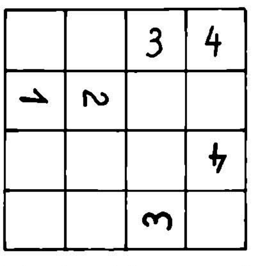


Bild 18

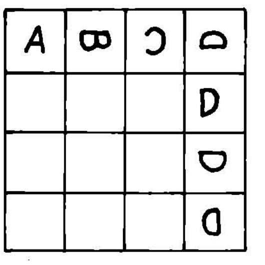
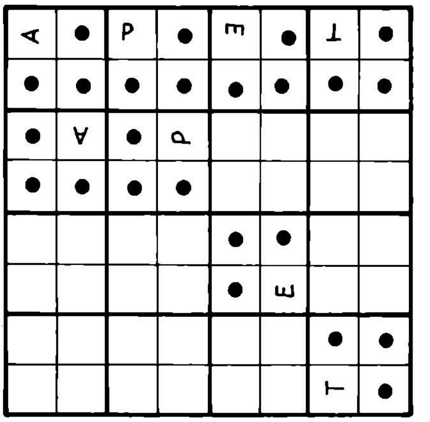
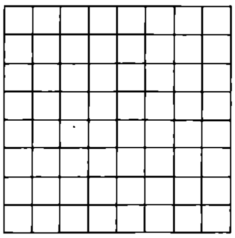


Bild 19



Eine Aufgabe von Prof. Dr.
Naum J. Wilenkin

▲2123▲ Schreibt auf die Felder eines Schachbretts jeweils genau eine der Zahlen 1 und -1 so, daß folgende Bedingung erfüllt ist:



Zu je zwei Zeilen gibt es stets eine dritte (von den ersten beiden nicht notwendig verschiedene), deren Felder genau mit den Produkten der auf den entsprechenden Feldern dieser beiden Zeilen stehenden Zahlen besetzt sind.

(Bezeichnet man die in der i-ten Zeile und j-ten Spalte stehende Zahl mit a_{ij} ($i=1, \ldots, 8$; $j=1, \ldots 8$), so kann man diese Bedingung auch wie folgt formulieren:

Zu gegebenen Zeilen Nr. r und s gibt es stets eine Zeile Nr. t, so daß für alle $j=1, \ldots, 8$ gilt: $a_{tj}=a_{rj}\cdot a_{sj}\cdot$)

Zeigt, daß für die aufgeschriebenen Zahlen gilt:

a) Zu je zwei Spalten gibt es stets eine dritte (von den ersten beiden nicht notwendig verschiedene), deren Felder genau mit den Produkten der auf den entsprechenden Feldern dieser beiden Spalten stehenden Zahlen besetzt sind.

(M. a. W.: Zu gegebenen Spalten Nr. k und l gibt es stets eine Spalte Nr. m, so daß für alle $i=1, \ldots, 8$ gilt: $a_{im}=a_{ik}\cdot a_{il}\cdot$)

b) Genau eine der Zeilen und eine der Spalten ist nur mit Einsen besetzt; in jeder anderen Zeile (bzw. in jeder anderen Spalte) stehen jeweils zur Hälfte die Zahlen 1 und -1.

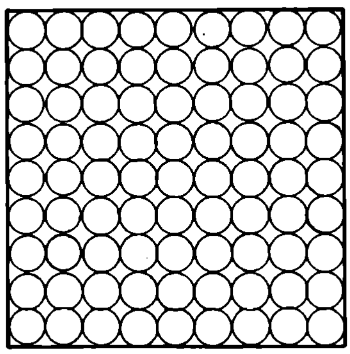
Versucht auch zu zeigen, daß *jede* Beschriftung des Schachbretts mit den Zahlen 1 und -1, die der obigen Bedingung genügt, die Eigenschaften a) und b) hat!

Наум Виленкин

Pädagogische Fernhochschule Moskau, Physikalisch-mathematische Fakultät

Über einige häufig vorkommende Summen

Im Schaufenster eines Sportartikelgeschäftes sind Tennisbälle aufgeschichtet. Die Bälle der unteren Schicht (siehe Bild) liegen in Form eines Quadrates, wobei längs jeder Quadratseite jeweils 9 Bälle hintereinander liegen. Die Bälle der unteren Schicht berühren sich gegenseitig und werden durch Leisten am Wegrollen gehindert.



Die Bälle der folgenden Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunterliegenden Schicht. Während in der unteren Schicht 9^2 Bälle liegen, sind in der zweiten Schicht 8^2, in der dritten Schicht 7^2 usf. Bälle enthalten. Diese Pyramide besteht demnach aus $9^2+8^2+7^2+\ldots+1^2$ Bällen.

Diese Anzahl von Bällen läßt sich durch Berechnen der Quadratzahlen von 1 bis 9 und anschließendes Addieren ermitteln. Eleganter ist wohl die Berechnung dieser Summe mittels der auf Seite 43 unseres Nachschlagewerkes „Tabellen und Formeln“ in der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen“ angegebenen Formel

$$(1)\qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 =\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

In unserem Falle haben wir für n 9 einzusetzen:

$$\sum_{k=1}^{9} k^2=\frac{9\cdot(9+1)\cdot(2\cdot 9+1)}{6} =\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}=3\cdot 5\cdot 19=285.$$

Auch bei den übrigen Formeln der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen“ sind die jeweils angegebenen Summen auch in abkürzender Schreibweise mittels Summenzeichen $\sum$ aufgeschrieben worden. So sind z. B. die Summanden von $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ auffaßbar als der nacheinander mit den natürlichen Zahlen $k=1, 2, 3, \ldots, n$ belegte Term k^3. Durch das vor diesen Term gestellte Summenzeichen wird zum Ausdruck gebracht, daß dieser Term nacheinander mit aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen anstelle der Variablen k zu belegen ist und daß die Summe der so entstandenen Zahlen zu bilden ist. Der Zusatz $k=1$ unter dem Summenzeichen bestimmt die kleinste natürliche Zahl, die anstelle der Variablen k einzusetzen ist und der Zusatz n über dem Summenzeichen gibt die größte anstelle k einzusetzende Zahl an:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Zunächst wollen wir aus den in der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen“ angegebenen Formeln weitere Formeln herleiten. Als zweite Vorbereitung sollen dazu die rechten Seiten von drei Formeln der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen“ durch Auflösen der Klammern umgeformt werden:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Analog ergibt sich:

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n}{2}(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Nach dieser Vorbereitung wollen wir gemeinsam eine Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n}(3k+2)^2$ herleiten, d. h. eine geschlossene Darstellung für diese Summe. Mittels der binomischen Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ können wir den Term $(3k+2)^2$ schreiben:

$$(3k+2)^2=(3k)^2+2\cdot(3k)\cdot 2+2^2 = 9k^2+12k+4$$

Also gilt zunächst:

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\sum_{k=1}^{n}(9k^2+12k+4).$$

Da die Addition kommutativ und assoziativ ist, folgt hieraus:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\sum_{k=1}^{n}9k^2+\sum_{k=1}^{n}12k+\sum_{k=1}^{n}4.$$

Durch Anwenden des Distributionsgesetzes ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2$$
$$=9\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+12\cdot\sum_{k=1}^{n}k+4\cdot\sum_{k=1}^{n}1.$$

Wegen $\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\ldots+1=n}_{n \text{ mal}}$

ergibt sich unter Benutzung der Formeln (2) und (3)

$$(3k+2)^2$$
$$=9\cdot\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)+12\cdot\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)+4n.$$

Durch Auflösen der Klammern und Zusammenfassen erhalten wir

(6) $$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=3n^3+\frac{21}{2}n^2+\frac{23}{2}n.$$

Damit lautet die gesuchte geschlossene Darstellung

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\frac{n}{2}(6n^2+21n+23).$$

Selbständig lösen wir die folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1: Leite unter Benutzung der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" eine geschlossene Darstellung für

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+1) \text{ her!}$$

Aufgabe 2: Berechne $\sum_{k=1}^{100}(4k+1)$!

Aufgabe 3: Leite unter Benutzung der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" eine geschlossene Darstellung für

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) \text{ her!}$$

Aufgabe 4: Berechne $\sum_{k=1}^{50}k(k+1)(k+2)$!

Aus dem bisherigen Teil dieses Beitrages wollen wir eine Vermutung ablesen. Diese läßt sich mit dem Begriff des Polynoms ansprechend formulieren. In Anlehnung an die rechten Seiten von (2), (3), (4) und anderen Formeln wird definiert:

Definition: Ist g eine natürliche Zahl, sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{g-1}, a_g$ rationale Zahlen, und ist x eine Variable, so heißt die Summe $P_g(x) = a_gx^g+a_{g-1}x^{g-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ein Polynom in x. Ist $a_g\neq 0$, so heißt die natürliche Zahl g der Grad des Polynoms. Die in Formel (5) betrachtete Summe läßt sich mittels des Polynoms 2. Grades in x $P_2(x)=9x^2+12x+4$ schreiben als

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\sum_{k=1}^{n}P_2(k).$$

Nach der Formel (6) ist die zugehörige geschlossene Darstellung ebenfalls ein Polynom in n, und zwar vom 3. Grade. Mit der Abkürzung $Q_3(x)=3x^3+\frac{21}{2}x^2+\frac{23}{2}x$ gilt gemäß Formeln (5) und (6)

$$\sum_{k=1}^{n}P_2(k)=Q_3(n).$$

Auf Grund unserer Betrachtungen scheint allgemein zu gelten:

Vermutung: Ist $P_g(x)$ ein Polynom in x vom Grade g (g natürliche Zahl), so gibt es stets ein Polynom $Q_{g+1}(x)$ in x vom Grade $g+1$, so daß für jede natürliche Zahl n mit $n\geqq 1$ gilt:

$$P_g(1)+P_g(2)+P_g(3)+\ldots+P_g(n)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}P_g(k)=Q_{g+1}(n)$$

Diese Vermutung ist wahr! Es ist nach dem Durcharbeiten dieses Beitrages für den Leser eine nützliche Übung, diese Aussage für ein spezielles g, z. B. $g=4$ zu beweisen. Wer mehr Erfahrungen im Führen von Beweisen hat, kann diese Aussage auch für eine beliebige natürliche Zahl g beweisen. Im Rahmen dieses Beitrages wird diese Vermutung uns einen brauchbaren Ansatz zum Auffinden geschlossener Darstellungen für Summen liefern. Dies soll am folgenden Beispiel gezeigt werden:

Wir wollen eine geschlossene Darstellung für $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ herleiten. Wegen $x(x+1)=x^2+x=P_2(x)$ machen wir gemäß unserer Vermutung den Ansatz

(7) $$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=Q_3(n)$$
$$=a_3n^3+a_2n^2+a_1n+a_0.$$

Dabei sind a_3, a_2, a_1 und a_0 in dieser Formel noch zu bestimmende rationale Zahlen. Die Formel (7) wollen wir durch vollständige Induktion beweisen. Beiläufig werden durch diesen Beweis die Konstanten a_3, a_2, a_1 und a_0 mitbestimmt. In Abweichung vom üblichen Vorgehen beim Beweis durch vollständige Induktion 2) wollen wir zunächst den Induktionsschritt und danach erst den Induktionsanfang führen.

Induktionsschritt: Die Formel (7) sei für $n=m$ wahr, d. h. es gelte:

(8) $$\sum_{k=1}^{m}k(k+1)=a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0.$$

Es ist zu zeigen, daß mit dieser Annahme auch die Gleichung (7) für $n=m+1$ gilt:

Die linke Seite von Formel (7) für $n=m+1$ lautet, sofern der letzte Summand getrennt aufgeschrieben wird:

$$\sum_{k=1}^{m+1}k(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}k(k+1)+(m+1)[(m+1)+1]$$
$$=\sum_{k=1}^{m}k(k+1)+(m+1)(m+2)$$
$$=(a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0)+m^2+3m+2.$$

Hierbei wurde zur letzten Umformung die Annahme (8) benutzt. Für die rechte Seite von Formel (7) für $n=m+1$ gilt:

$$a_3(m+1)^3+a_2(m+1)^2+a_1(m+1)+a_0$$
$$=a_3(m^3+3m^2+3m+1)+a_2(m^2+2m+1)$$
$$+a_1(m+1)+a_0$$
$$=(a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0)+3a_3m^2$$
$$+(3a_3+2a_2)m+(a_3+a_2+a_1).$$

Jetzt wurde zur Umformung die binomische Formel für die Exponenten 2 und 3 (siehe „Tabellen und Formeln", S. 42, Tabelle „Binomialkoeffizienten; Binomischer Satz") benutzt.

Linke und rechte Seite der Formel (7) für $n=m+1$ sind einander gleich, falls gilt

$$m^2+\quad 3m+\quad 2$$
$$=3a_3m^2+(3a_3+2a_2)m+(a_3+a_2+a_1).$$

Diese Gleichung ist für alle natürliche Zahlen m sicher dann erfüllt, wenn a_3, a_2 und a_1 den folgenden drei Gleichungen genügen:

I	$3a_3$	$=1$
II	$3a_3+2a_2$	$=3$
III	$a_3+\ a_2+a_1$	$=2.$

Dieses Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $a_3=\frac{1}{3}$, $a_2=1$ und $a_1=\frac{2}{3}$. Bei dieser Wahl von a_3, a_2 und a_1 im Ansatz (7) wird der Induktionsschritt gültig!

Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, daß die Formel (7) für $n=1$ gilt. Für $n=1$ lautet die linke Seite von (7):

$$\sum_{k=1}^{1}k(k+1)=1\cdot(1+1)=1\cdot 2=2.$$

Die rechte Seite von (7) lautet für $n=1$, sofern wir die getroffene Wahl $a_3=\frac{1}{3}$, $a_2=1$ und $a_1=\frac{2}{3}$ berücksichtigen:

$$\frac{1}{3}\cdot 1^3+1^2+\frac{2}{3}\cdot 1+a_0=2+a_0.$$

Die Formel (7) ist also für $n=1$ genau dann gültig, wenn wir $a_0=0$ setzen.

Durch Induktionsanfang und Induktionsschritt ist die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$$

für jede natürliche Zahl n mit $n\geqq 1$ bewiesen. Nachträglich formen wir die rechte Seite um zu:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n^2+3n+2)}{3}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Durch analoges Vorgehen wie bei diesem Beispiel können die Formeln der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" und auch andere hergeleitet und bewiesen werden. Zur Übung lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

Aufgabe 5: Leite ohne Benutzung der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" eine geschlossene Darstellung für

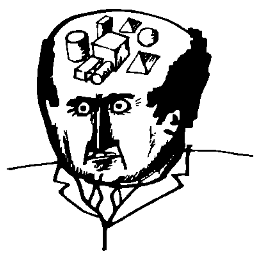
$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

her und beweise sie!

Aufgabe 6: Gib eine geschlossene Darstellung für $\sum_{k=1}^{n}k^4$ an und beweise sie!

W. Träger

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1982

Mathematik

Ma5 ■2124 In dem Schema

1 ✱2 ✱3 ✱4 ✱5 ✱6 ✱7 ✱8 = 100 ist jedes der sieben Sternchen entweder durch ein Multiplikationszeichen (·) oder durch ein Additionszeichen (+) so zu ersetzen, daß man eine wahre Gleichheitsaussage erhält. (Klammern dürfen nicht gesetzt werden.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma5 ■2125 Astrid, Beate, Cordula und Dorothea sammelten zusammen 43 kg Altpapier. Astrid sammelte dreimal soviel wie Dorothea. Beate und Cordula gaben zusammen 19 kg ab. Beate sammelte 4 kg mehr als Dorothea. Wieviel Kilogramm Altpapier konnte jede von ihnen dem Altstoffhandel zuführen?

Schülerin Barbara Schütze, Weißenfels (Kl. 7)

Ma5 ■2126 Berechne das Produkt aus fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Summe 25 beträgt!

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma5 ■2127 Eine rechteckige Rasenfläche, die doppelt so lang wie breit ist, wird von einem 1 m breiten Fußweg umgeben, der einen äußeren Umfang von 248 m hat. Es ist der Inhalt der Rasenfläche zu berechnen!

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma5 ■2128 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die folgendes gilt: Vertauscht man die Ziffern einer solchen Zahl, so ist die entstandene Zahl um 27 größer als die ursprüngliche.

Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard (Kl. 8)

Ma5 ■2129 Beim Hans-Beimler-Wettbewerb im Luftgewehrschießen erreichte die Klasse 8a zehn Ringe mehr als die Klasse 8b, diese aber fünfzehn Ringe mehr als die Klasse 8c. Alle drei Klassen erreichten zusammen 901 Ringe. Wieviel Ringe erreichte jede dieser drei Klassen?

Schülerin Beatrix Rost, Riesa (Kl. 7)

Ma6 ■2130 Klaus fragte seine Schwester Anna, die gerade vom Einkaufen kam, wieviel Äpfel sie mitgebracht habe. Sie antwortete: „Addiert man zur dreifachen Anzahl der von mir gekauften Äpfel noch 5, multipliziert man danach die so erhaltene Summe mit 3, so erhält man die zehnfache Anzahl der mitgebrachten Äpfel." Wieviel Äpfel hat Anna gekauft?

Schülerin Simone Hartwich, Hagenow (Kl. 8)

Ma6 ■2131 Auf welche Ziffer endet der Wert des Terms

$$17^7 + 12^3 + 15^2 - 16^4?$$

Schülerin Kerstin Lettau, Neustadt (Kl. 5)

Ma6 ■2132 Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen z zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:

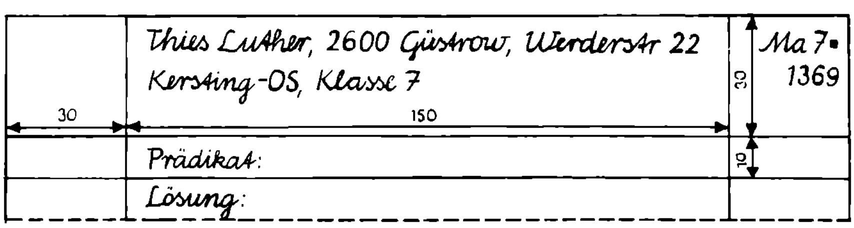
(1) Jede dieser Zahlen z ist durch 8 teilbar.

(2) Die Zahlen, die den Ziffern einer solchen Zahl z entsprechen, sind paarweise voneinander verschiedene Primzahlen.

Schüler Daniel Hammer, Berlin (Kl. 7)

Ma6 ■2133 Frau Heller verbrauchte von ihrem Kohlenbestand aus dem Keller bisher den fünften Teil zum Beheizen des Zimmers eines Untermieters, den zehnten Teil zum Beheizen des Badeofens, die Hälfte zum Beheizen ihrer übrigen Wohnräume. Nun sind noch 120 kg Kohlen im Keller. Wieviel Säcke mit je 50 kg Kohle waren zuvor im Keller?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. **Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.**

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma6 ▪2134 Frau Meier kaufte in einem Backwarengeschäft 3 Pfannkuchen mehr als Frau Schulze und 5 Spritzkuchen mehr als Frau Lehmann. Frau Winkler kaufte 2 Streuselkuchen mehr als Frau Schulze. Die Anzahl der von Frau Schulze gekauften Pfannkuchen ist kleiner als die Anzahl der von Frau Lehmann gekauften Spritzkuchen, und diese ist kleiner als die Anzahl der von Frau Schulze gekauften Streuselkuchen. Wieviel Stück Kuchen jeder Sorte kaufte jede dieser vier Frauen, wenn es zusammen 22 Stück Kuchen waren? *Schülerin Kathrin Müller, Legde (Kl. 6)*

Ma7 ▪2135 Holger fordert Peter auf, sich vier von Null verschiedene natürlichen Zahlen zu denken. Dann soll Peter zunächst die ersten drei der gedachten Zahlen, danach die letzten drei, danach die erste, dritte und vierte, schließlich die erste, zweite und vierte jeweils addieren und die Ergebnisse der vier errechneten Summen nennen. Peter errechnete die Summe 13, 17, 14 und 16. Welche Zahlen hat sich Peter gedacht?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

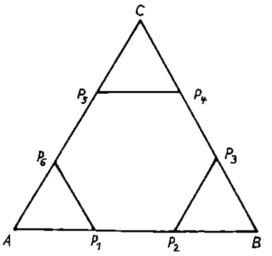
Ma7 ▪2136 Jürgen spielt Tele-Lotto. Als ihn sein Freund fragt, welche fünf Zahlen er diese Woche getippt habe, antwortet er: „Die Summe aus den fünf getippten Zahlen beträgt 78. Die Summe aus den beiden größten Zahlen ist doppelt so groß wie die Summe aus den drei übrigen Zahlen. Die Summe aus den beiden kleinsten Zahlen ist gleich der drittgrößten Zahl. Die kleinste Zahl ist um 5 kleiner als die nächste größere. Die beiden größten Zahlen verhalten sich wie 5:8." Welche Zahlen hat Jürgen getippt?

Schüler Rainer Mielke, Gr. Bademeusel (Kl. 7)

Ma7 ▪2137 Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl beträgt 9. Multipliziert man diese Zahl mit 3, subtrahiert man vom Produkt 9, so erhält man als Ergebnis eine zweistellige natürliche Zahl, die mit den gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge geschrieben wird. Wie heißt diese Zahl?

Schülerin Kerstin Graf, Plauen (Kl. 7)

Ma7 ▪2138 Einem gleichseitigen Dreieck ABC wurde ein regelmäßiges Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ einbeschrieben. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des Dreiecks beträgt der Flächeninhalt des Sechsecks?



Schüler Lutz Andrews, Rostock (Kl. 10)

Ma8 ▪2139 Bernd addiert vier natürliche Zahlen richtig und erhält 47. Als er diese vier Zahlen miteinander multipliziert, erhält er 23615. Es ist zu zeigen, daß dieses Ergebnis falsch ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ▪2140 Es ist zu beweisen, daß für beliebige drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen a, b, c die Differenz b^2-a^2 stets um 2 kleiner ist als die Differenz c^2-b^2!

Schüler Thomas Jez, Herzberg (Kl. 7)

Ma8 ▪2141 Es ist zu beweisen, daß der Term $19^{2n}-7^{3n}$ für alle natürlichen Zahlen n durch 18 teilbar ist!

Schülerin Birgit Arndt, Loitz (Kl. 8)

Ma8 ▪2142 Es ist zu beweisen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck die Seitenhalbierende der Hypotenuse halb so lang ist wie diese.

Schüler Rolf Kamieth, Kakerbeck (Kl. 12)

Ma9 ▪2143 Es sind zwei natürliche Zahlen x und y zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Summe ihrer Quadratwurzeln ist 42.

(2) Die Differenz ihrer Quadratwurzeln ist 12.

Schüler Andreas Gedat, Bad Liebenstein

Ma9 ▪2144 Es ist zu beweisen, daß der Term 9^n-1 für alle natürlichen Zahlen n durch 8 teilbar ist.

Schüler Ulf Lange, Berlin (Kl. 7)

Ma9 ▪2145 Durch einen Würfel kann ein ebener Schnitt so geführt werden, daß sich als Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck ergibt. Der Mittelpunkt des Würfels fällt mit dem des Sechsecks zusammen; die Ecken des Sechsecks fallen mit Mittelpunkten von Würfelkanten zusammen.

a) Zeichnen Sie ein Kantenmodell eines Würfels mit dieser Schnittfigur!

b) Drücken Sie den Flächeninhalt dieses Sechsecks durch die Länge a der Würfelkante aus!

Schüler Andreas Löffler, Halle-Neustadt (Kl. 8)

Ma9 ▪2146 Jede sechsstellige Zahl der Form $\overline{abcabc}$ in dekadischer Darstellung ist durch drei verschiedene Primzahlen teilbar, deren Summe wieder eine Primzahl ist. Es sind diese drei Primzahlen zu finden.

Schülerin Ingrid Wolf, Berlin (Kl. 10)

Ma10/12 ▪2147 In welchem Zahlensystem ist die Gleichung $15^2=321$ eine wahre Aussage?

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma10/12 ▪2148 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten der Länge a bzw. b und der Hypotenuse der Länge c. Außerdem gelte $\cos(\gamma-\beta)-\sin\alpha=0$. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist durch die Kathetenlänge a auszudrücken.

Peter Braumüller, Wiener Neustadt (Österreich)

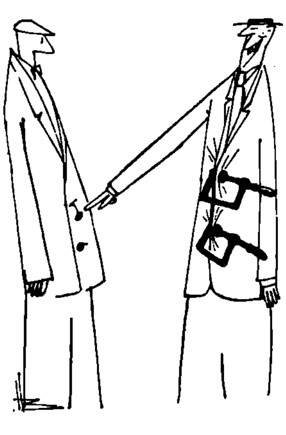
Ma10/12 ▪2149 Beweisen Sie folgenden Satz!

Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der Längen derjenigen Seiten, die diesen Winkel einschließen.

Andreas Günther, Altenburg

Ma10/12 ▪2150 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$, dessen Umfang 68 cm und dessen Flächeninhalt 112,5 cm² betragen. Die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ sei 30°. Es sind die Längen der Parallelogrammseiten zu berechnen.

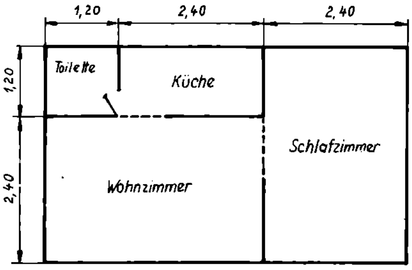
Math. Arbeitsgemeinschaft, Fritz-Heckert-OS Milkau



Physik

Hinweis: In den Physikaufgaben wird das seit 1. Januar 1980 in der DDR verbindliche *Internationale Einheitssystem* (SI) verwendet. Da für den Bereich der Volksbildung die Einführung des Einheiten-Standards in unserer Schule nur schrittweise erfolgt und die Anpassung an das SI mit planmäßiger Überarbeitung bzw. Neuentwicklung von Unterrichtsmitteln verbunden ist, werden im Physik-Wettbewerb der *alpha* die Angaben in alten Einheiten in Klammern gesetzt. Die Lösungen sind dann ebenfalls mit den Angaben der alten Einheiten versehen, um dem Schüler den gewohnten Weg zu zeigen.

Ph6 ▪101 Das Wochenendhaus A 20 des VEB Holzbaukombinat, Werk Wernigerode, hat die in der Skizze angegebenen Maße. Die lichte Raumhöhe beträgt 2,40 m. Berechne die Wohnflächen der einzelnen Zimmer und das Volumen aller Räume zusammen!



Skizze nicht maßstabgerecht. Alle Maßangaben sind in Meter und gerundet.

Ph7 ▪102 Beim Umräumen muß ein großer Schrank um 1,25 m verschoben werden. Er drückt mit einer Gewichtskraft von 1648 N (168 kp) auf den hölzernen Fußboden. Berechne die Kraft und die Verschiebungsarbeit während des Schiebens, wenn der Schrank Holzfüße hat!

Ph8 ▪103 Eine Ramme bzw. Rammbär wird zum Eintreiben von Pfählen oder zum Verfestigen des Bodens verwendet. Durch das Anheben wird in der Ramme mechanische Energie gespeichert. Eine solche Ramme habe eine Masse von 1500 kg, das entspricht einer Gewichtskraft von 14715 N (1500 kp), und soll aus einer Höhe von 1,5 m herabfallen. Dabei werden 25% der Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Um wieviel °C könnte man damit 1 l Wasser erwärmen?

Ph9 ▪104 Ein elektrischer Lötkolben für eine Spannung von 220 V und eine Leistungsaufnahme von 120 W wird irrtümlich an 110 V angeschlossen. Wie groß ist dann die Leistungsaufnahme?

Steffen Lausch, Grimma, BS Borsdorf

Ph10/12 ▪105 Eine Fahrzeugkolonne der NVA erhält den Befehl, mit Höchstgeschwindigkeit einen 120 km entfernten Punkt zu erreichen. Durch Erhöhung ihrer Geschwindigkeit um $10\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ gelangt sie 1 h früher an den angegebenen Punkt, als wenn sie ihre ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten hätte. In welcher Zeit erreicht die Kolonne das angegebene Ziel, wenn man voraussetzt, daß die Bewegung gleichförmig erfolgt?

Steffen Lausch, Grimma, BS Borsdorf

Chemie

Ch7 ▪81 Eine Sauerstoffanlage verbraucht täglich $1560000\,\mathrm{m}^3$ Luft zur Erzeugung von Sauerstoff. Ein Mensch atmet in einer Minute etwa 30 l Luft. Wie lange könnte ein Mensch leben, ehe die Tagesleistung verbraucht ist?

Ch8 ▪82 Zur Erhöhung der Bodenfruchtbarkeit setzt eine LPG 90 kg Kalksteinmehl, das 90% Kalziumkarbonat enthält, ein. Da noch Vorräte von Kalziumhydroxid am Lager vorhanden sind, will die LPG diese aufbrauchen.

a) Wieviel Kilogramm Kalziumoxid enthält das Kalksteinmehl?

b) Wieviel Kilogramm Kalziumhydroxid müssen eingesetzt werden, um den Boden mit der gleichen Menge Kalziumoxid zu düngen, die im Kalksteinmehl enthalten ist?

Ch9 ▪83 Wieviel Gramm Chlor sind in 8,2 kg einer 7%igen Kaliumchloridlösung enthalten?

Ch10/12 ▪84 28,2 kg Natriumhydroxid und 35,2 kg Schwefelsäure werden zur Reaktion gebracht. Dabei sollen 50 kg Natriumsulfat mit einem Reinheitsgrad von 95% entstehen. Wie groß ist die Menge der Ausgangsstoffe, die im Überschuß eingesetzt wird? Berechne den Überschuß prozentual!

Jiří Slíva

„Hab ich doch gleich gesagt, einundsechzig."

Kurt Koppe, Berlin

Fünf und dreyßigste Belustigung.

Wenn drey Paar Eheleute von einem Schiffmann über ein Wasser in einem kleinen Kahne, in welchem auf einmal nicht mehr als zwey seyn können, geführt werden sollen, doch so, daß niemals ein Mann bey der andern zwey Weibern allein, und kein Weib anders als bey ihrem Manne bleibe, wie solches anzustellen.

Auflösung.

Es seyen die drey Männer Sempronius, Titus und Sixtus, und des Sempronii Weib heiße Anna, des Titi, Rosina, und des Sixti, Ursula. Um dieser Forderung nun ein Genüge zu thun, nimmt der Schiffmann zuerst zwey Weiber, Anna nnd Rosina. Die Rosina führet er wieder mit sich herüber, und holet das dritte Weib Ursula. Hierauf nimmt er diese letzte wieder mit sich zurück, die sodann bey ihrem Manne Sixto bleibet. Hingegen führet er die andern beyden Männer, den Sempronius und Titus zu ihren Weibern, Anna und Rosina, hinüber, und zuletzt holet er auch die Ursula nebst ihrem Manne Sixto ab, und führet sie zu den andern. Und solchergestalt können alle übergeführet werden, so daß niemals ein Mann bey den andern zweyen Weibern allein gelassen werde, und kein Weib bey einem andern, als bey ihrem Manne bleiben dürfe.

Denksportaufgabe aus dem 18. Jahrhundert. „Neue physikalische und mathematische Belustigungen oder Sammlung von neuen Kunststücken zum Vergnügen". Guyot, Augsburg 1777

alpha stellt vor:
Tilo Schaarschmidt
Bad Lauchstädt

Im vergangenen *alpha*-Wettbewerb erwarben 3660 Schüler eine Urkunde und das *alpha*-Abzeichen in Silber, weiteren 1353 Schülern wurde das Abzeichen in Gold verliehen, 108 Schülern konnte ein Buchpreis überreicht werden. Dies zeigt den unermüdlichen Fleiß, mit dem Tausende von *alpha*-Lesern ihr Wissen und Können einsetzten, um ihre Leistungen in Mathematik zu verbessern.
Bei der Auswertung des Wettbewerbs – es gingen 90000 Lösungen ein – fiel uns ein Schüler besonders auf. Wir möchten ihn vorstellen: *Tilo Schaarschmidt.*

Tilo Schaarschmidt, geb. in Bad Lauchstädt, Schüler der Klasse 7a der Goethe-Oberschule Bad Lauchstädt.
Er erhielt in allen Fächern die Note 1 und in Sport die Note 2.
Hobbys: Tilo spielt Fußball in einer Mannschaft der BSG Chemie Bad Lauchstädt (2. Kreisklasse). Regelmäßig besucht er den Filmzirkel des Klubzentrums. Begriffe wie Studiotechnik, Synchronisation, Kameratechnik sind für ihn inhaltlich klar. Er ist stets aktiv bei der weiteren Ausrüstung des Studios. So baut und repariert er z. B. Verstärkeranlagen.

Beruf des Vaters: Landschaftsgestalter
Beruf der Mutter: Gärtnerin
Berufswunsch: Mathematikstudium in Verbindung mit Elektronik
Erfolge als Junger Mathematiker:
Kreisolympiade Klassenstufe 7: 1. Preis
Klassenstufe 8: 1. Preis
Bezirksolympiade Klassenstufe 8: 1. Preis (38 Punkte).

Urteil des Mathematiklehrers: Tilo hat seit Jahren in Mathematik den Klassendurchschnitt 1,0. Für das Lösen mathematischer Probleme verwendet er einen beträchtlichen Teil seiner Freizeit. Bereits in der 5. Klasse erhielt er in der Kreisolympiade einen 1. Preis. Auch in anderen Fächern besitzt er ein umfangreiches Wissen. Während des Mathematikunterrichts löst Tilo Aufgaben höherer Klassenstufen der Kreis- und Bezirksolympiaden. Im Unterricht kommt es wiederholt vor, daß Tilo an der Tafel seinen Mitschülern recht gut erläutert.

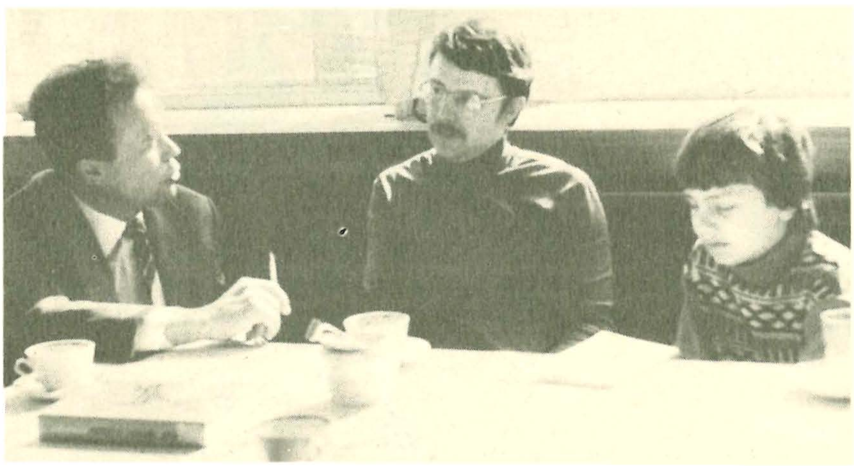
Tilo schreibt an die Redaktion alpha:

...Ich lese die *alpha* seit der 6. Klasse. Sie hat mir geholfen, meine schulischen Leistungen stark zu verbessern. Es ist schon so: Übung macht den Meister! Die zahlreichen *alpha*-Aufgaben, mit denen ich mich beschäftige, sind ein unwahrscheinlich gutes mathematisches Training. Ich verweile nicht nur bei den Aufgaben meiner Klassenstufe, sondern versuche mich auch an Aufgaben höherer Klassenstufen. *alpha* bietet zahlreiche Möglichkeiten der aktiven Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden, bei denen ich bisher recht gut abgeschnitten habe. ...

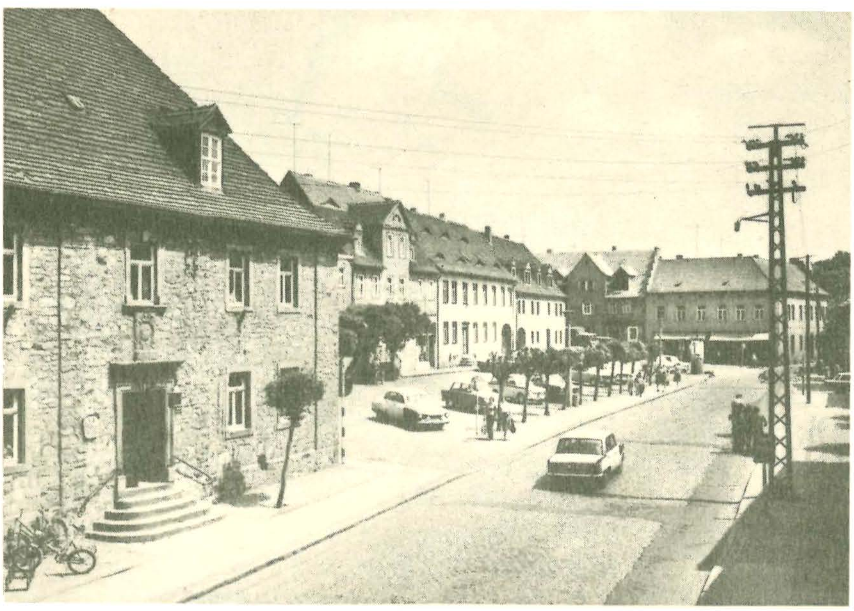
Resultat einer Aussprache: Im Rahmen einer Aussprache an der Sektion Mathematik und Rechentechnik der Technischen Hochschule für Chemie *Carl Schorlemmer* Leuna-Merseburg wurden Inhalt und Form einer individuellen Betreuung Tilo Schaarschmidts abgesprochen.

Tilos Mutter bei der Arbeit im Gewächshaus

Aussprache an der TH in Leuna-Merseburg



Der Markt von Bad Lauchstädt, an dem Tilo wohnt



7 Aufgaben von Tilo

▲1▲ Ermittle alle Quadratzahlen, deren Vorgänger Primzahlen sind!

▲2▲ Rolf geht einkaufen. Er hat genau 15 Geldstücke bei sich, und zwar 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Stücke. Rolf kauft für 4 Mark Waren und geht mit 60 Pf wieder nach Hause. Dabei überlegt er sich: Hätte er statt der 10-Pf-Stücke 2-M-Stücke, statt der 20-Pf-Stücke 20-M-Stücke und statt der 50-Pf-Stücke 5-M-Stücke gehabt, so würde er 101 Mark zurückbringen.
Ermittle, wieviel Münzen von jeder Sorte Rolf bei sich hatte!

▲3▲ Beweise, daß das Produkt der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 13824 teilbar ist, wenn die erste der drei Zahlen gerade und die mittlere durch drei teilbar ist!

▲4▲ a) Löse die Gleichung
$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin^2\alpha=\sqrt{2}$ für $0\leqq\alpha\leqq 360°$!
b) Zeige, daß die Ungleichung
$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin^2\alpha>\sqrt{2}$
keine Lösung hat!

Der Aufforderung, einige Aufgaben aus dem Betrieb der Mutter, beschäftigt beim Forschungszentrum für Bodenfruchtbarkeit Müncheberg, Außenstelle Bad Lauchstädt, (Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR) zu beschaffen, kam Tilo umgehend nach.

Stud. math. Uwe Quasthoff, Karl-Marx-Universität Leipzig (ehem. erfolgreicher IMO-Teilnehmer) wählte aus der Vielzahl theoretischer (siehe oben) wie praktischer (siehe unten) Aufgaben aus und bearbeitete die gestellten Probleme.

▲5▲ Von einer Fläche von $13{,}9\,\text{m}^2$ erntet man 10,85 kg Weizen. Die Trockenmasse der Körner beträgt 81,7%.
Wieviel dt Weizen wurden pro Hektar auf einer anderen Fläche geerntet, wenn die Trockenmasse 86% betrug und die Reinausbeute (d. h. Trockengewicht pro Fläche) gleich war?

▲6▲ Ein Rübenacker soll mit Stickstoff gedüngt werden. Als Stickstoffdünger wird Kalkammonsalpeter verwendet, sein Anteil an reinem Stickstoff beträgt 25,72%. Die auszubringende Menge Reinstickstoff beträgt 180 kg.
Wieviel kg Kalkammonsalpeter sind dazu auszubringen?

▲7▲ Ein Problem zur Unterhaltungsmathematik: Der Erfinder des Schachspiels dachte sich für sich folgende Belohnung aus: Er wollte für das erste der 64 Felder des Schachbretts ein Korn Weizen, für das zweite Feld zwei Körner, für das dritte Feld vier Körner usw., d. h. für jedes weitere Feld die doppelte Anzahl von Körnern. 1000 Körner der Weizensorte „Alcedo" wiegen 42,2 g, in der DDR wurden 1980 9600000 t Weizen geerntet. Das Wievielfache dieser Ernte hat der „bescheidene" Erfinder verlangt, wenn nur „Alcedo" angebaut wird?

In freien Stunden · alpha-heiter

Die „verrückten“ Kommas

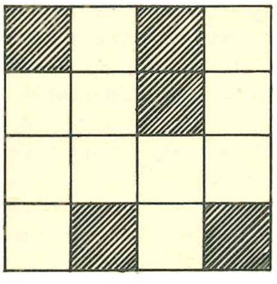
Bernd hat erfolgreich an der Kreisolympiade teilgenommen. Sein Mathematiklehrer bittet ihn deshalb, in einem Pioniernachmittag der 4. Klasse über die Olympiade zu berichten. Da Bernd nicht nur für die Mathematik, sondern auch für den Humor etwas übrig hat, schreibt er vor Beginn des Pioniernachmittags folgenden heiteren Text an die Tafel:

Auf meinem Tisch ein unbeschriebenes Blatt Papier in der Colaflasche,
nur noch wenig Flüssigkeit in meinem Gehirn,
eine Lösungsidee in meiner Hand,
ein stumpfer Bleistift in der Frühstücksbüchse,
eine weiche Birne in meinem Kopf,
noch kluge Gedanken im Patronenfüller,
fast keine Tinte mehr im Tafelwerk,
nirgends etwas Brauchbares zu finden.

Nach einem heftigen Gelächter über den sinnlosen Text haben die Pioniere der 4. Klasse natürlich schnell herausgefunden, daß Bernd die Kommas an die falschen Stellen gesetzt hat.
Wo müssen die Kommas stehen, damit aus dem Sinnlosen etwas Sinnvolles wird?

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Primzahlzwillinge



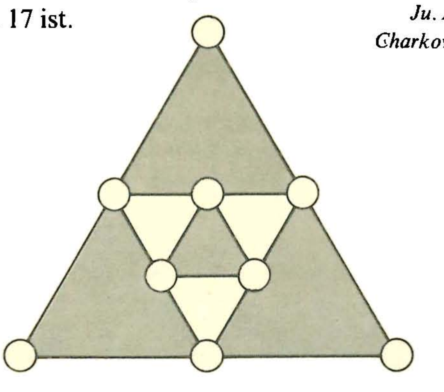
Trage die Summe von Primzahlzwillingen so in die leeren Felder des nebenstehenden Quadrates ein, daß die Summe aller Primzahlen in den einzelnen Spalten bzw. Zeilen, aber auch in einer Diagonalen jeweils 120 beträgt!
Hinweis: Zwei Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, heißen Primzahlzwillinge.

Mathematikfachlehrer G. Stolz, Königs Wusterhausen

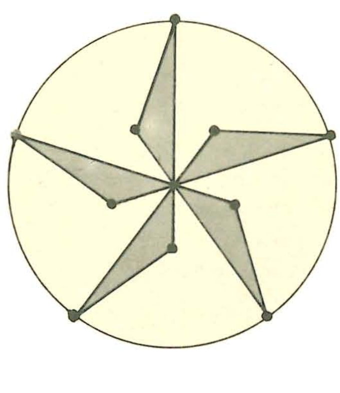
Summe gesucht

Es sind die Zahlen 1 bis 9 so in die Kreise der abgebildeten Figur einzutragen, daß die Summe der Zahlen längs des Randes eines jeden der schraffierten Dreiecke gleich 17 ist.

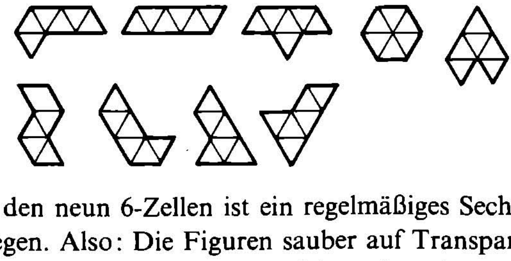
Ju. A. Alenkow, Charkow (UdSSR)



An Stelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 11 so einzutragen, daß die Summe am Rande jedes Dreiecks und des Umfangs stets gleich ist. *Dirigent J. Pěnčik, Praha*



Magisches Sechseck



Aus den neun 6-Zellen ist ein regelmäßiges Sechseck zu legen. Also: Die Figuren sauber auf Transparentpapier übertragen und dann viel Spaß und Geschick beim Legen. Wer ist der Schnellste?

Catherine Le Boëté, Gisors (Frankreich)

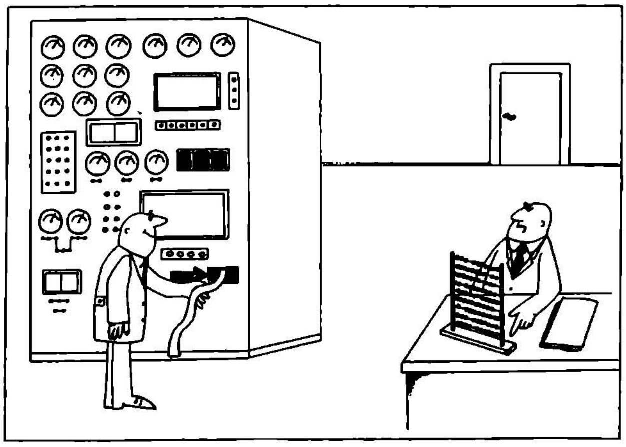
Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r}
\mathrm{EINS}\\
\mathrm{EINS}\\
\mathrm{EINS}\\
+\mathrm{EINS}\\
\hline
\mathrm{VIER}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\mathrm{PLUS}\\
\mathrm{PLUS}\\
\mathrm{PLUS}\\
+\mathrm{PLUS}\\
\hline
\mathrm{MATHE}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
e \cdot g &=& dc\\
: \quad : && :\\
a \cdot b &=& b\\
\hline
e \cdot b &=& af
\end{array}$$

Schülerin Sylvia Günther, Dresden (Kl. 11)
Dirigent J. Pěnčik, Praha
Katrin Fink, Neustrelitz (Kl. 5)

$$\begin{array}{rcl}
abc \cdot b &=& cadb\\
+ \quad - && +\\
ceea \cdot e &=& e\\
\hline
cade + b &=& cadb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
AC + DE &=& ED\\
- \quad - && -\\
AB + DE &=& FE\\
\hline
C + B &=& C
\end{array}$$

Jacqueline Dick, Stolpen (Kl. 7)
Axel Richter, Ludwigsfelde (Kl. 5)

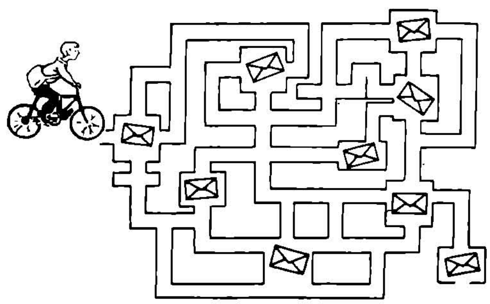


„Stimmt" *E. Neumann*

Der Bote und die neun Pakete

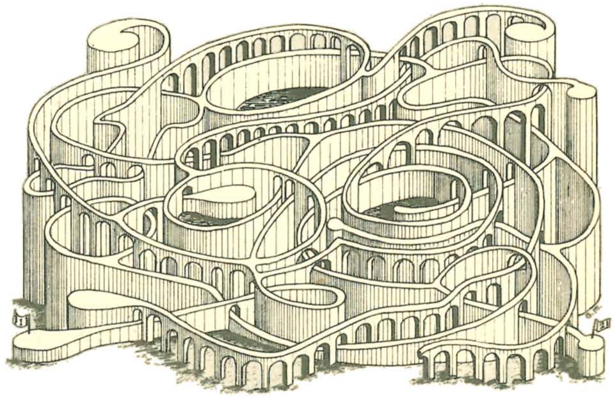
Neun Pakete müssen eilig zugestellt werden. Der Bote sieht sich den Stadtplan an und weiß bald, wie er fahren muß. Er liefert alle Pakete ab, ohne ein Stück des Weges zweimal zurückzulegen. Wie verlief seine Route?

Aus: Sputnik, Moskau



Irrgarten

Wer findet am schnellsten den Weg von Fahne Nr. 1 zu Fahne Nr. 2?



Aus: Füles, Budapest

Spiel mit Hölzchen

Gegeben sei folgende durch Hölzchen gelegte Gleichung.

$$\frac{XVIII}{VII} + \frac{IV}{VII} = II$$

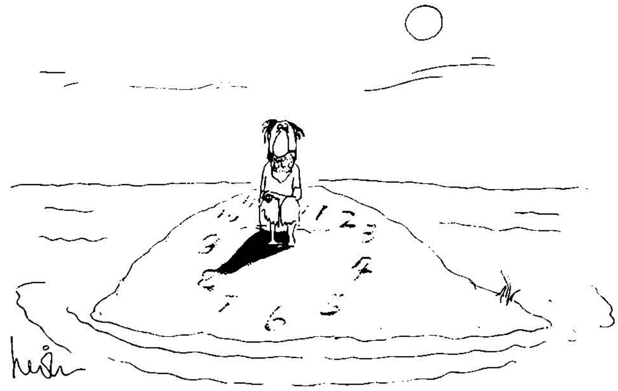
Sie ist natürlich falsch, denn $\frac{18}{7} + \frac{4}{7} \neq 2$. Man nehme ein Hölzchen weg, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

Andreas Fittke, Berlin

Ist das möglich?

Der Großvater eines Jungen ist nur sechs Jahre älter als der Vater des Jungen. Es gab keine Wiederverheiratung, Adoption oder ähnliches.

Aus: Math. LOG, Oklahoma



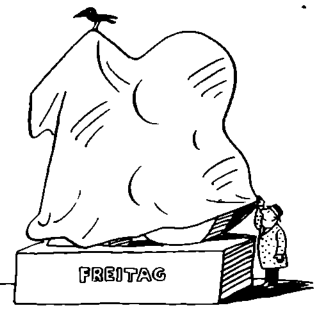
Aus: The New Yorker

Weisheiten

- „Um etwas richtig zu machen, muß man herausfinden, was man dazu nicht braucht." *James Watt*
- Was soll die Relativitätstheorie, wenn der Wecker nicht tickt?
- Wer eine Eins ist, wird von Nullen und Kommas bedrängt.

Freitag, der Dreizehnte

Auf der Spur rabenschwarzer Unglückstage

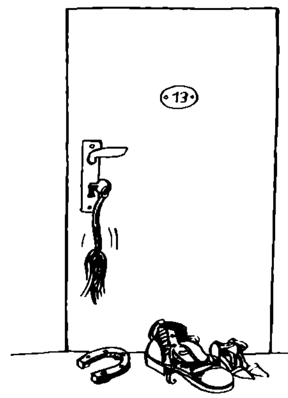


Am vierzehnten Januar vor fünfzig Jahren warnte die „Leipziger Volkszeitung": „Für Abergläubische ist es notwendig zu wissen, daß das Jahr 1931 drei Freitage bringt, die zugleich die Unglückszahl 13 tragen – und zwar im Februar, März und November. Und nun kann das Gruseln losgehen. . . !"
Bekanntlich hatte zu dieser Zeit sowohl das politische als auch das wirtschaftliche Gruseln längst begonnen, ohne sich nach irgendwelchen Unglücksdaten zu richten.
In der wissenschaftlich gefestigten Überzeugung, daß die Scheu vor einem Freitag, dem Dreizehnten, nur Leute beherrsche, die nicht denken, aber glauben, warf ich einen Blick aufs einundachtziger Kalendarium. Das darf doch nicht wahr sein! erschrak ich und klopfte vorsichtshalber dreimal auf den Schreibtisch, völlig im unklaren darüber, ob kunststoffbeschichtete Preßspanplatten die gleiche unglückabwendende Wirkung wie echtes Holz aufweisen: Nach einem halben Jahrhundert tragen wiederum drei Freitage, und zwar gleichermaßen im Februar, März und November, die Unglückszahl Dreizehn. Da für die Dinge zwischen Himmel und Erde meines Wissens eine Sternwarte zuständig ist, fuhr ich (sicherheitshalber an einem Dienstag, dem Zwanzigsten) nach Babelsberg.

Diplom-Mathematiker Dr. Hans-Joachim Felber ist der Mann, der in der DDR Mond und Sonne auf- und untergehen läßt sowie Ostern, Himmelfahrt oder Pfingsten bewegt, und das alles wenigstens zwei Jahre im voraus, damit die Kalenderhersteller, vor allem Hermes in Halle, rechtzeitig die Druckvorlagen anfertigen können. Seit neun Jahren hat dieser Wissenschaftler das Monopol inne, das der Sternwarte seit siebzehnhundert zusteht. Damals nämlich führten die protestantischen Staaten des Heiligen Römischen Reichs die gregorianische Datierung ein, die der Berechnung des Papstes Gregor XIII. (des Dreizehnten!) von fünfzehnhundertzweiundachtzig zugrunde lag. Um allen Glaubensquerelen endgültig aus dem Weg zu gehen, verordnete Preußenkönig Friedrich Zwo ab siebzehnhundertsechsundsiebzig den Allgemeinen Reichskalender, der mit Gregors Werk praktisch identisch war.

Das Kalenderprivileg der Sternwarte, die sich damals inmitten Berlins in der Dorotheenstraße (heute Clara-Zetkin-Straße) befand, hatte übrigens noch einen höchst irdischen Nebennutzen: Von den Zahlungen der Bezieher des Grundkalendariums honorierte der brandenburgisch-preußische Staat unter anderem den Präsidenten und die Sekretare der Akademie der Wissenschaften. Heute können die Herren froh sein, daß wir nur den Reichskalender, nicht aber die Gehaltsregelung beibehalten haben.

„Was denn", staunt der Republiks-Kalendermacher, „drei schwarze Freitage in einem Jahr? Jahrelang befasse ich mich mit diesen Dingen und komme nicht mal auf solch eine Idee. Kurios, kurios! Da tippt man also das Unglück rein automatisch ins Kalendermanuskript... Nun schlägt's aber doch dreizehn!"
Spricht's, greift nach seinen Tabellen und stellt sogleich fest, daß derartige Pechsträhnen nicht einmal so selten auftreten (siehe Randtext), wie man für gewöhnlich anzunehmen geneigt ist. „Die häufigste Dreierkombination tritt in den Monaten Februar/März/November auf. In Schaltjahren können die Unglückstage aber auch auf drei andere Monate fallen, wie beispielsweise neunzehnhundertvierundachtzig (Januar/April/Juli). Nicht jedes Schaltjahr hat jedoch drei schwarze Freitage, wie man an neunzehnhundertachtzig und -achtundachtzig sehen kann. Das ist ja 'ne ganz boshafte Geschichte!"
Dann rutschen wir gemeinsam forschend mit den Zeigefingern die Zahlenkolonnen entlang und fällen kraft des staatlichen Kalenderprivilegs der Babelsberger Sternwarte die für alle Abergläubischen beachtenswerte Entscheidung, daß drei auf einen Dreizehnten fallende Freitage pro Jahr das Unglücksmaximum darstellen, einer dagegen als Minimum gelten darf. Solch ein Glücksumstand steht uns übernächstes Jahr mit dem Mai ins Haus. „Kein Freitag, der Dreizehnte", sagt der Mathematiker, „das darf nicht sein. Zahlentheoretisch ist das gar nicht drin."
So wissen wir's denn aus berufenem Mund: Mit wenigstens einem schwarzen Freitag müssen wir in jedem Jahr leben. Und wenn das Pech, Gregor XIII., Friedrich II. und Dr. Felber es so fügen, dann auch mit zweien oder dreien.
Unglücksbeweise für solche Termine scheinen aber mehr als rar zu sein. Nach aufwendigem Suchen fand ich schließlich heraus, daß der Philosoph Ludwig Feuerbach an einem derartigen Tag verstarb und Lessings „Emilia Galotti" am Freitag, dem dreizehnten März siebzehnhundertzweiundsiebzig in Braunschweig uraufgeführt wurde, dabei aber vorerst dem Unverstand deutscher Philister zum Opfer fiel. Ein wahres Trauerspiel, zumal wenn man berücksichtigt, daß der Dichter in seinem Stück die prophetischen Worte schrieb: „Nichts unter der Sonne ist Zufall!"
Anzufügen bliebe ein Erlebnis Dr. Felbers: „Am dreizehnten April fünfundvierzig rückten die Amerikaner auf meine Heimatstadt Chemnitz zu. Der Geistliche, der mit uns in die Panzerlöcher vorkommandiert wurde, sagte sarkastisch-ergeben: ‚Ausgerechnet an einem Freitag, dem Dreizehnten! Christliche Seefahrer mieden solche Tage!'"



Christen und Heiden haben gleichermaßen Legenden des Unheils sowohl um unseren heutigen fünften Wochentag als auch um die Zahl Dreizehn gewoben. Der Katholizismus heiligt zwar den Freitag durch Fasten, erblickt in ihm aber gleichzeitig ein Unglück, rechnet er doch als Todestag Jesu. Dem Tod voraus ging das österliche Abendmahl, an dem dreizehn Personen teilnahmen. Da sorgte Judas Ischariot um den Sold von dreißig Silberstücken dafür, daß einer von der Tafelrunde ums Leben kam. „Seither", erklärt Dr. Felber, „bittet man ungern dreizehn Personen zu Tisch. Im ganzen Mittelalter diskutierte und kommentierte man die Schrekkensziffer."
Blicken wir noch etwas hinter das Abendmahl zurück, kommt Philipp von Makedonien auf uns zu, der in seinen Prozessionen immer zwölf goldene Götterbilder zur Schau trug. In einer personenkultischen Anwandlung ließ er sich plötzlich selbst in Gold modellieren und eines Tages beim Umzug mit durch die Stadt führen. Und genau in diesem Moment wurde der etwa Siebenundvierzigjährige von einem Hauptmann seiner Leibwache aus Privatrache ermordet.

Die älteste bekannte Version um die Unglücksdreizehn datiert aus babylonischen Zeiten, in denen man nach Mondjahren rechnete und, um diese den Sonnenjahren anzugleichen, jeweils einen dreizehnten, einen Unglücksmonat, einschob. Als Tierkreiszeichen wurde ihm ein Sternbild des südlichen Himmelsäquators zugeordnet: der Rabe. Doch welch gegenwärtiger Unglücksvogel oder -rabe denkt schon bei seinen mißlichen Verhältnissen ausgerechnet ans babylonische Heidenreich.

So verehren denn unsere Uraltvordern sicherheitshalber lieber die heilige Zwölfzahl, was sowohl an der Menge der Apostel als auch der der römischen, griechischen und ägyptischen Hauptgötter nachprüfbar ist. Selbst das altrömische Recht ward auf zwölf Gesetzestafeln verzeichnet. Welch merkwürdiger Umstand, daß das ehemalige deutsche Strafgesetzbuch, das in der DDR vor dreizehn Jahren außer Kraft gesetzt wurde, ausgerechnet in seinem Paragraphen dreizehn die – Todesstrafe behandelte!

Einer kürzlichen statistischen Umfrage in einer Reihe europäischer Länder zufolge führt ausnahmslos jedes alteingesessene Hotel, das auf sich hält, die Zimmernummern zwölf, zwölf a und vierzehn. Nur die modernen Inter- und sonstigen Riesenhotels kämpfen erfolgreich gegen vorchristlichen und mittelalterlichen Spuk an: Sie beginnen die Numerierung ihrer Gästezimmer erst mit hundert.

Unter Begriffen wie Welt- oder UNO-Kalender hatte in den vergangenen Jahrzehnten erneut eine Reformbewegung an Boden gewonnen. Ein stabiler, immerwährender Kalender wurde gefordert, bei dem jedes Jahr und jedes Quartal mit einem Sonntag beginnen sowie jedes Vierteljahr aus dreizehn Wochen mit einundneunzig Tagen bestehen sollte. Im Gemeinjahr müßte der dreihundertfünfundsechzigste Tag dadurch herbeigezaubert werden, daß zwischen dem dreißigsten Dezember und dem ersten Januar ein undatierter und wochentagloser Welt(feier)tag eingeschoben würde. Gleiches müßte in Schaltjahren zusätzlich zwischen dem dreißigsten Juni und ersten Juli geschehen. Ostern und Pfingsten hätten dann ebenso ihren ständigen festen Platz, wie jedes beliebige Datum in jedem Jahr auf den gleichen Wochentag fiele. Abgesehen davon, daß die Dogmen bedeutender Weltreligionen solchen Reformgedanken unüberbrückbare Hindernisse in den Weg legen, haben inzwischen auch jene Wissenschaftler den Rückzug angetreten, die anfangs im Weltkalender große Planungsvorteile zu erkennen glaubten. Moderne Computer mit ihrem mikroelektronischen Innenleben können heute in Sekundenschnelle mohammedanische in hebräische und diese in christliche beziehungsweise weltliche Zeitberechnungen umsetzen.

Ein reibungsloses Einführen des Weltkalenders wäre nur in solchen Jahren möglich, in denen nach bisheriger Rechnung der erste Januar auf einen Sonntag fällt. Das war zuletzt neunzehnhundertachtundsiebzig der Fall. Die nächste theoretische Chance bestünde neunzehnhundertvierundachtzig – Schreckensgedanke aller Schwarzseher, da ausgerechnet in jenem Jahr drei Freitage auf einen Dreizehnten fallen und uns damit auf ewig erhalten würden. Doch bleibt diese Dauermöglichkeit dreier schwarzer Freitage graue Theorie, weil Dr. Felber und seine Kollegen in aller Welt mit den entsprechenden Berechnungen herkömmlicher Art schon so gut wie fertig sind. Überhaupt bietet sich eine derart finstere Variante in diesem Jahrtausend nicht mehr an, denn auch neunzehnhundertneunundachtzig und -fünfundneunzig verfügen nur über je zwei Freitage, den Dreizehnten, und selbst noch zweitausendsechs verschont die Abergläubischen auf gleiche Weise.

Abschließend bitte ich meine Leser, mir vorsichtshalber dreimal über die Schulter zu spucken, damit dieser zahlenreiche Beitrag ohne Denk- und Druckfehler unter ihre Augen gerät. Denn das Unglück will's, daß er ausgerechnet an einem Freitag, dem Dreizehnten, erscheint! *R. Pfeiffer*

Auskünfte über Kalendermachenschaften gab dem Wochenpostreporter (für W. 7/81) R. Pfeiffer der promovierte Mathematiker Dr. H.-J. Felber vom Zentralinstitut für Astrophysik in Potsdam-Babelsberg, einziger Musterkalendermacher der DDR, Chefredakteur der *Astronomischen Nachrichten*, die als älteste Zeitschrift ihrer Art in der Welt gilt.

Aberglaubwürdig: Dieses Jahrhundert verzeichnet fünfzehnmal den Vorgang, daß in einem Jahr je drei Freitage auf einen Monatsdreizehnten fielen bzw. noch fallen, und zwar:
1903, 1908, 1914, 1925, 1928,
1931, 1942, 1953, 1956, 1959,
1970, 1981, 1984, 1987 und 1998.
Das erste derartige Jahr im neuen Jahrtausend wird 2009 sein.

Personenkennzeichen und -ziffern: Papst Gregor VIII. (7. 1. 1502 bis 10. 4. 1585), vorher Ugo Buoncompagno, Papst seit 1572, Reformer des bis dahin geltenden julianischen Kalenders (nach Julius Cäsar); feierte die blutige Pariser Bartholomäusnacht mit einem Dankfest in der Peterskirche.

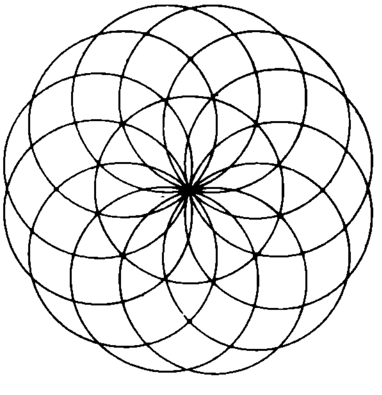
Philipp II. von Makedonien (um 383 bis 336 v. u. Z.), Vater Alexanders des Großen, König seit 359, besiegte 338 die verbündeten Griechen und errang damit über sie die Vorherrschaft.

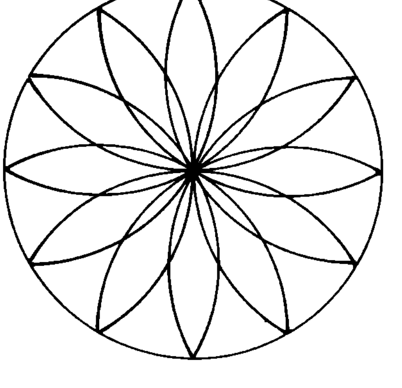
Ludwig Feuerbach (28. 7. 1804 bis 13. 9. 1872), einer der bedeutendsten vormarxistischen Philosophen. Seine Theorien bereiteten die bürgerliche Revolution vor.

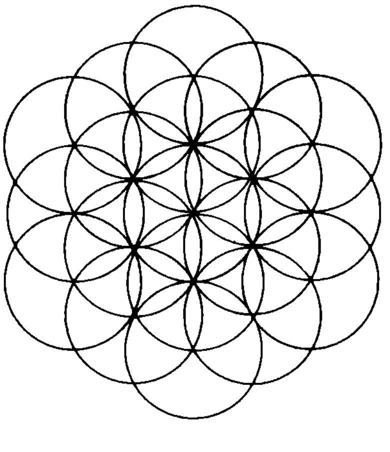
Unglücksjahr-Worte: Was die Menschen Schicksal nennen, sind meistens nur ihre eigenen dummen Streiche. (Schopenhauer)

Illustrationen: Thomas Schleusing, Gruppe 4

Mit Zirkel und Farbstift



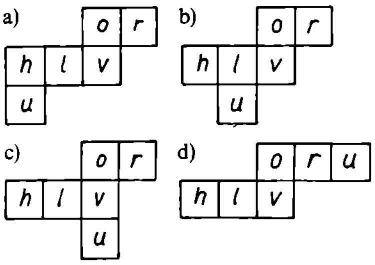




Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 2/81:

Ma5 ■2092 Es lassen sich aus der begonnenen Zeichnung folgende Würfelnetze zeichnen:



Ma5 ■2093 Da nur ungerade natürliche Zahlen dargestellt werden sollen, kann die fünfte Grundziffer von links nur 5 oder 7 oder 9 sein.
Da im Falle a) die Zahl möglichst klein, aber nicht kleiner als 69000 sein soll, muß die erste Ziffer 7, die zweite Ziffer 5 lauten. Somit muß die letzte Ziffer 9 sein. Da die Ziffern 5 und 6 nicht nebeneinander stehen dürfen, muß die dritte Ziffer 8, die vierte Ziffer 6 lauten. Wir erhalten 75869.
Da im Falle b) die Zahl möglichst groß, aber nicht größer als 70000 sein soll, muß die erste Ziffer 6, die zweite Ziffer 8 lauten. Da die Ziffern 8 und 7 nicht nebeneinander stehen dürfen, muß die dritte Ziffer 5, die vierte Ziffer 9 und die fünfte Ziffer 7 lauten. Wir erhalten 68597.

Ma5 ■2094 Für den Flächeninhalt des Schulgartens gilt $a \cdot 3b - b \cdot c = 1275\,\text{m}^2$. Ferner gilt $6 \cdot c = a$, also $c = a:6 = 30\text{m}:6 = 5\,\text{m}$. Daraus folgt weiter $(30 \cdot 3b - b \cdot 5)\text{m}^2 = 1275\text{m}^2$, $85 \cdot b\,\text{m}^2 = 1275\,\text{m}^2$, also $b = 15\,\text{m}$.
Daraus folgt weiter für den Umfang des Schulgartens
$u = 2a + 6b + 2c = (2 \cdot 30 + 6 \cdot 15 + 2 \cdot 5)\text{m} = 160\,\text{m}$.
Es müssen 160 m Maschendraht angeschafft werden.

Ma5 ■2095 Aus (1) folgt: Axel sammelt keine Ansichtskarten. Aus (2) folgt: Jan sammelt keine Ansichtskarten.
Deshalb sammelt Bert Ansichtskarten. Aus (2) folgt: Jan sammelt auch keine Abzeichen. Deshalb ist Jan der Briefmarkensammler. Folglich sammelt Axel Abzeichen.

Ma5 ■2096 Da es sich um ungerade natürliche Zahlen handelt, könnten die Zahlen b wegen (2) gleich 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 sein. Aus (1) folgt $a = 3 \cdot b$. Wegen $10 < a < 100$ gilt weiter $a_1 = 3 \cdot 15 = 45$, $a_2 = 3 \cdot 25 = 75$, $a_3 = 3 \cdot 35 = 105 > 100$. Somit existieren genau zwei Lösungen; sie lauten $a_1 = 45$, $b_1 = 15$ und $a_2 = 75$, $b_2 = 25$.

Ma5 ■2097 Mannschaft A erzielte $6 \cdot 3 = 18$ Treffer. Folglich erzielte die Mannschaft C genau $41 - 18 = 23$ Treffer. Nun könnte Mannschaft B entweder 18 oder 23 Treffer erzielt haben, da zwei Mannschaften gleichviel Treffer erzielten. Damit gilt entweder $18 + 18 + 23 = 59$ oder $18 + 23 + 23 = 64$. Da 64 keine Primzahl, 59 hingegen eine Primzahl ist, entfällt die zweite Möglichkeit. Mannschaft A erzielte somit 18, Mannschaft B ebenfalls 18 und Mannschaft C genau 23 Treffer.

Ma6 ■2098 Angenommen, x Schüler erhielten die Note 4; dann erhielten $2x$ Schüler die Note 1 und $3 \cdot 2x = 6x$ Schüler die Note 3. Außerdem erhielten y Schüler die Note 2. Nun gilt

$$x + 2x + 6x + y = 25,$$
$$9x + y = 25.$$

Nur die natürlichen Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und somit $y_1 = 16$ und $y_2 = 7$ erfüllen diese Gleichung.
Aus $\dfrac{2 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{25} = 2{,}24 \neq 2{,}48$
folgt, daß $x_1 = 1$ als Lösung entfällt.
In der Klassenarbeit erhielten vier Schüler die Note 1, sieben Schüler die Note 2, zwölf Schüler die Note 3, zwei Schüler die Note 4.
Es gilt $\dfrac{4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{25} = 2{,}48$.

Ma6 ■2099

Name	Laufzeit (in s)
Andrea	x
Anette	$x - 2$
Simone	$x - 1{,}2$
Dorothea	$x - 2{,}7$
Jana	$x - 2{,}8$
Silvia	$x - 2{,}4$
Daniela	$x - 1{,}4$
	$7x - 12{,}5$

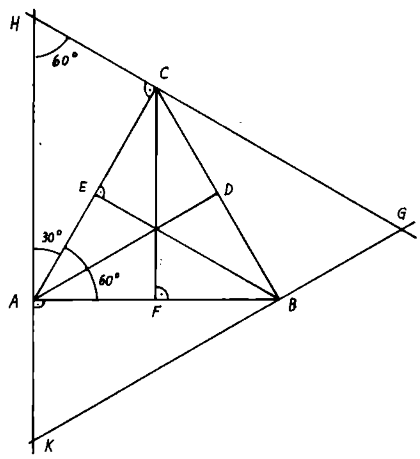
Nun gilt $7x - 12{,}5 = 104{,}4$,
$7x = 116{,}9$,
$x = 16{,}7$.
Andrea benötigte 16,7 s, Anette 14,7 s, Simone 15,5 s, Dorothea 14,0 s, Jana 13,9 s, Silvia 14,3 s und Daniela 15,3 s zum Durchlaufen der 100-m-Strecke.

Ma6 ■2101 Entscheidend für die Anzahl der Nullen ist die Anzahl der im Produkt vorkommenden Primfaktoren 5 und 2. In den Zahlen 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45 kommt der Primfaktor 5 je einmal vor. In den Zahlen 25 und 50 kommt der Primfaktor 5 je zweimal vor. Insgesamt kommt in dem Produkt der Primfaktor 5 genau 12mal vor. Der Primfaktor 2 kommt in dem Produkt mehr als 12mal vor. Deshalb endet die Ziffer, die das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 50 darstellt, auf genau 12 Nullen.

Ma6 ■2102 Da A, C, T, Z einstellige Primzahlen darstellen, gilt wegen $C < Z < A < T$ somit $C = 2$, $Z = 3$, $A = 5$, $T = 7$. Da $\overline{JJ}$ Primzahl ist, gilt $J = 1$. Daraus folgt zunächst $12 + 11 + P3 + 1SS + 2S + 2 + 3X + 15 + BX + B57 = RRP$, $40 + P3 + 1SS + 2S + 3X + BX + B57 = RRP$.
Nun gilt $B = 6$ oder $B = 9$. Wegen $B57 + 1SS > 1000$ für $B = 9$, gilt $B = 6$ und somit $R = 9$. Daraus folgt
$40 + P3 + 1SS + 2S + 3X + 6X + 657 = 99P$,
$697 + P3 + 1SS + 2S + 3X + 6X = 99P$.
Wegen $S < A$ kann $S = 0$ oder $S = 4$ sein.
Für $S = 4$ wäre $X = 0$ und $P = 8$; dann wäre die Summe $RRP > 1000$, was nicht möglich ist. Folglich gilt $S = 0$, und es gilt $817 + P3 + 3X + 6X = 99P$. Für $X = 8$ müßte $P = 6$ sein, was nicht möglich ist. Folglich gilt $X = 4$ und somit $P = 8$. Die Aufgabe lautet $12 + 11 + 83 + 100 + 20 + 2 + 34 + 15 + 64 + 657 = 998$.

Ma6 ■2103 In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen größer als die Länge der dritten Seite. Danach gilt $\overline{CE} + \overline{CD} > \overline{ED}$. Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt: $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{CE} + \overline{BD} + \overline{CD}$; für den Umfang des Vierecks $ABDE$ gilt: $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{BD} + \overline{ED}$. Folglich ist der Umfang des Dreiecks ABC größer als der des Vierecks $ABDE$.

Ma7 ■2104 Aus $\sphericalangle BAC = 60°$ und $\sphericalangle BAK = \sphericalangle AFC = 90°$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt
$\sphericalangle CAH = 180° - 60° - 90° = 30°$.
Aus $\sphericalangle ACH = \sphericalangle CEB = 90°$ und $\sphericalangle CAH = 30°$ folgt $\sphericalangle AHC = 60°$. Analog dazu gilt $\sphericalangle HKG = \sphericalangle KGH = 60°$.
Das Dreieck GHK ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig.



Ma7 ■2105 Aus $a \cdot b + 8 = c$ und $a + b + c = 100$ erhalten wir durch Einsetzen

$$a + b + ab + 8 = 100,$$
$$a + b + ab = 92,$$
$$a(b+1) + b = 92,$$
$$a = \frac{92 - b}{b + 1},$$
$$a = 92 - \frac{3 \cdot 31 \cdot b}{b + 1}.$$

Nur für $b=0$, $b=2$, $b=30$ und $b=92$ erhalten wir für a auch natürliche Zahlen. Folgende geordneten Zahlentripel erfüllen die gestellten Bedingungen: [92, 0, 8], [30, 2, 68], [2, 30, 68], [0, 92, 8].

Ma7 ▪2106 Wir setzen $987\,654\,321=a$ und $98\,765\,432=b$; dann erhalten wir

$$a\cdot b<n<b\cdot(a+2),$$
$$a\cdot b<n<a\cdot b+2b.$$

Aus $(ab+2b)-ab=2b$ folgt, daß $2b-1$ natürliche Zahlen die gegebenen Ungleichungen erfüllen; das sind $2\cdot 98765432-1=197\,530\,863$ natürliche Zahlen.

Ma7 ▪2107 Aus $z=100a+10b+c$ und $c=a+b$ folgt durch Einsetzen

$$z=100a+10b+a+b,$$
$$z=101a+11b \text{ für } 0<a\leqq 9 \text{ und } 0\leqq b\leqq 9.$$

Für a können also die Zahlen von 1 bis 9, für b die Zahlen von 0 bis 9 eingesetzt werden. Das ergibt $9\cdot 10=90$ Möglichkeiten. Wegen $a+b=b+a$ reduziert sich diese Anzahl auf die Hälfte. Somit gibt es $90:2=45$ dreistellige natürliche Zahlen dieser Art.

Ma8 ▪2108 Es seien n^2 und $(n+1)^2$ zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen. $(n\in N)$
Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

$$(n+1)^2-n^2=33,$$
$$n^2+2n+1-n^2=33,$$
$$2n+1=33,$$
$$2n=32,$$
$$n=16.$$

Es folgt $n^2=256$ und $(n+1)^2=289$.
256 und 289 sind die beiden einzigen Quadratzahlen, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen. $(289-256=33)$

Ma8 ▪2109 Es sind $a=40$, also $b=10$ die kleinstmöglichen und $a=96$, also $b=24$ die größtmöglichen Zahlenpaare, die in Betracht kommen. Da a durch 4 teilbar ist, kann die Quersumme q_1 von a höchstens 16 sein, also $4\leqq q_1\leqq 16$. Wegen $10\leqq b\leqq 24$ kann q_2 höchstens 10 sein, also $1\leqq q_2\leqq 10$. Nun gilt $q_1\cdot q=64=4\cdot 16=8\cdot 8=16\cdot 4$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) Wegen $q_2\leqq 10$ entfällt $q_2=16$.
(2) Für $q_2=8$ existiert nur $b=17$, also $a=68$. Wegen $q_1\cdot q_2=14\cdot 8\neq 64$ entfällt $q_2=8$.
(3) Für $q_2=4$ wäre $b=13$ oder $b=22$, also $a=52$ oder $a=88$. Wegen $q_1=7\neq 16$ entfällt $a=52$.
Es existiert genau eine Lösung; das gesuchte geordnete Paar lautet [88; 22].

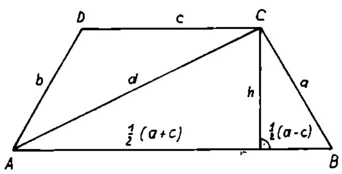
Ma8 ▪2110 Es gilt $A_{WTX}=A_{UWTS}-A_{UWXS}$. Bezeichnen wir die Länge der Quadratseite mit a, so erhalten wir

$$A_{WTX}=\frac{\frac{a}{3}+a}{2}\cdot\frac{a}{3}-\frac{\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}}{2}\cdot\frac{a}{3};$$
$$A_{WTX}=\frac{2a^2}{9}-\frac{a^2}{6};$$
$$A_{WTX}=\frac{a^2}{18}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks WTX nimmt den 18. Teil des Flächeninhaltes des Quadrats $ABCD$ ein.

Ma8 ▪2111 Es sei d die Länge der Diagonale $\overline{AC}$, h die Länge der Höhe $\overline{EC}$. Die Länge der Strecke $\overline{AE}$ beträgt dann $\frac{1}{2}(a+c)$, die Länge der Strecke $\overline{EB}$ beträgt $\frac{1}{2}(a-c)$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h^2=d^2-\frac{1}{4}(a+c)^2$ und $h^2=b^2-\frac{1}{4}(a-c)^2$.
Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$d^2-\frac{1}{4}(a^2+2ac+c^2)=b^2-\frac{1}{4}(a^2-2ac+c^2),$$
$$4d^2-a^2-2ac-c^2=4b^2-a^2+2ac-c^2,$$
$$4d^2=4b^2+4ac,$$
$$d^2=b^2+ac.$$



Ma9 ▪2112 Nach (1) gilt $a^3+b^3=26048$, und nach (2) gilt $a+b=44$ bzw. $b=44-a$.
Durch Einsetzen erhalten wir

$$a^3+(44-a)^3=26048,$$
$$a^3+85\,184-5808a+132a^2-a^3=26048,$$
$$59\,136-5808a+132a^2=0,$$
$$448-44a+a^2=0.$$
$$a_{1,2}=22\pm\sqrt{22^2-448},$$
$$a_{1,2}=22\pm 6,$$
$$a_1=28;\ a_2=16.$$

Die zwei gesuchten Zahlen sind 28 und 16.
Probe: Das arithmetische Mittel von 28 und 16 ist $\frac{28+16}{2}=22$; die Summe der Kuben 28^3+16^3 beträgt $21\,952+4096=26048$.

Ma9 ▪2113 Aus dem gegebenen Term folgt schrittweise durch Umformen

$$n^3+n^3+3n^2+3n+1+n^3+6n^2+12n+8$$
$$=3n^3+9n^2+15n+9$$
$$=3n(n^2+3n+5)+9$$
$$=3n[(n+1)(n+2)+3]+9.$$

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) Es sei n durch 3 teilbar; dann ist $3n$ und somit auch die Summe durch 9 teilbar.
(2) Es sei n nicht durch 3 teilbar; dann ist entweder $n+1$ oder $n+2$ durch 3 teilbar; damit ist das Produkt und somit auch die Summe durch 9 teilbar.

Ma9 ▪2114 Es sind die Teilflächen II und III.
Begründung: II und III bilden zusammen eine Trapezfläche. Für deren Flächeninhalt gilt $A=\frac{b+d}{2}\cdot\frac{h}{2}$, und wegen $\frac{b+d}{2}=c=\frac{a}{2}$ gilt weiter

$$A=\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{ah}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt

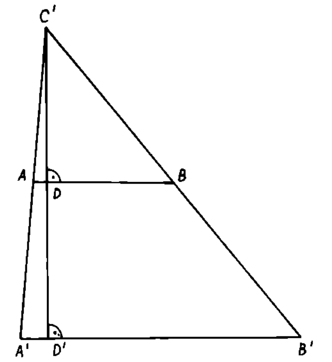
$$A_D=\frac{ah}{2}.$$

Ma9 ▪2115 Aus $A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b$ folgt

$$a:b=h_b:h_a=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}.$$

Aus $A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$ folgt

$$b:c=h_c:h_b=\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$



Daraus folgt weiter

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6},$$
$$a:b:c=\frac{15}{60}:\frac{12}{60}:\frac{10}{60}=15:12:10.$$

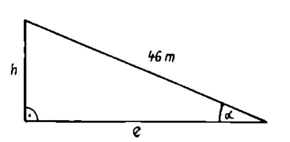
Wir konstruieren ein dem gesuchten Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ aus $a'=15$ cm, $b'=12$ cm, $c'=10$ cm. Wir konstruieren danach eine Höhe, etwa h_c', schlagen um C' einen Kreisbogen mit dem Radius $h_c=6$ cm, der h_c' in D schneidet. Wir konstruieren die Parallele zu $\overline{A'B'}$ durch D; sie schneide $\overline{A'C'}$ in A und $\overline{B'C'}$ in B. Dann ist Dreieck ABC' das gesuchte Dreieck.

Ma10/12 ▪2116 Durch schrittweises Umformen erhalten wir

$$(\sqrt{1979}+\sqrt{1980})^2$$
$$=1979+2\cdot\sqrt{1979\cdot 1980}+1980$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{(1979{,}5-0{,}5)(1979{,}5+0{,}5)}$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{1979{,}5^2-0{,}25} \text{ bzw.}$$
$$(\sqrt{1978}+\sqrt{1981})^2$$
$$=1978+2\cdot\sqrt{1978\cdot 1981}+1981$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{(1979{,}5-1{,}5)(1979{,}5+1{,}5)}$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{1979{,}5^2-2{,}25}$$

Da $1979{,}5^2-0{,}25>1979{,}5^2-2{,}25$, gilt $\sqrt{1979}+\sqrt{1980}>\sqrt{1978}+\sqrt{1981}$.

Ma10/12 ▪2117 Skizze (nicht maßstäblich)



Aus $b+c=66$ folgt $c=66-b$. (1)
Nach dem Kosinussatz gilt
$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos 60°$.
Wir setzen (1) ein und erhalten

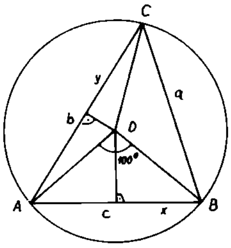
$$a^2=b^2+(66-b)^2-2b(66-b)\cdot\frac{1}{2}.$$

Wir formen weiter um:

$$39^2=b^2+4356-132b+b^2-66b+b^2,$$
$$1521=3b^2+4356-198b,$$
$$0=3b^2-198b+2835,$$
$$0=b^2-66b+945;$$
$$b_{1,2}=33\pm\sqrt{1089-945},$$

$b_{1,2}=33\pm\sqrt{144}$,
$b_{1,2}=33\pm 12$,
$b_1=45$,
$b_2=21$;
$c_1=66-45=21$; $c_2=66-21=45$.
Die gesuchten Seitenlängen sind entweder $b=45\,\text{m}$ und $c=21\,\text{m}$ oder $b=21\,\text{m}$ und $c=45\,\text{m}$.

Ma10/12 ▪2118 Skizze (nicht maßstäblich)



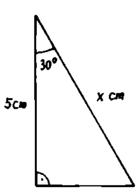
Wegen $\overline{AD}\cong\overline{BD}\cong\overline{CD}$ ist D Mittelpunkt des Umkreises von ABC. $\sphericalangle\, ACB$ hat die Größe $\gamma=50°$, weil er Peripheriewinkel auf dem gleichen Bogen wie der Zentriwinkel $\sphericalangle\, ADB$ ist. Wegen $\overline{AB}\cong\overline{BC}$ hat der Winkel $\sphericalangle\, CAB$ die Größe $\alpha=50°$. Daraus folgt für $\sphericalangle\, ABC$ die Größe $\beta=80°$ (Innenwinkelsatz).

Nun gilt: $\sin 50°=\frac{x}{4}$; $x=4\cdot\sin 50°$; $x\approx 3{,}06$; $c=a\approx 6{,}12\,\text{cm}$. $y=4\cdot\sin 80°$; $y\approx 3{,}94$; $b\approx 7{,}88\,\text{cm}$.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma,\ \sin 80°=\frac{y}{4};$$
$$A=\frac{1}{2}\cdot 6{,}12\cdot 7{,}88\cdot\sin 50°$$
$$A\approx 18{,}47\,\text{cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt etwa $18{,}47\,\text{cm}^2$.

Ma10/12 ▪2119 Die Schnittfläche ist die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 5 cm und x cm. Wir berechnen zuerst x.



Im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck gilt:
$\cos 30°=\frac{5}{x}$; $x=\frac{5}{\cos 30°}$; $x\approx 5{,}77$.
Der Flächeninhalt der Schnittfläche ist $5{,}77\cdot 5\,\text{cm}^2$, also etwa $28{,}85\,\text{cm}^2$. Verkleinert man den Neigungswinkel gegen die Grundfläche, so wird der angegebene Winkel um den gleichen Betrag vergrößert. Dann gilt:
$x=\frac{5}{\cos 40°}$; $x\approx 6{,}53$.
Der Flächeninhalt der Schnittfläche beträgt in diesem Falle $6{,}53\cdot 5\,\text{cm}^2\approx 32{,}65\,\text{cm}^2$. Die Schnittfläche wächst um etwa $3{,}8\,\text{cm}^2$.

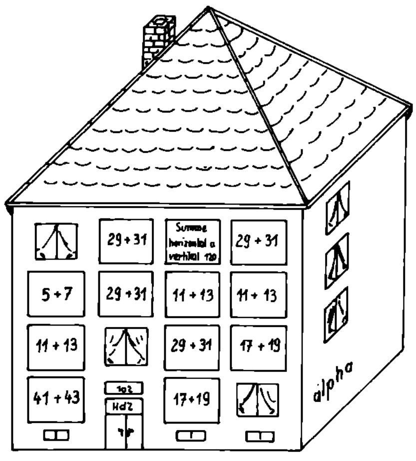
Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Die verrückten Kommas

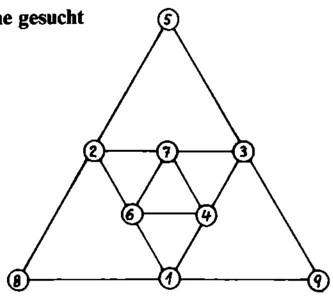
Auf meinem Tisch ein unbeschriebenes Blatt Papier, in der Colaflasche nur noch wenig Flüssigkeit, in meinem Gehirn eine Lösungsidee, in meiner Hand ein stumpfer Bleistift, in der Frühstücksbüchse eine weiche Birne, in meinem Kopf noch kluge Gedanken, im Patronenfüller fast keine Tinte mehr, im Tafelwerk nirgends etwas Brauchbares zu finden.

Primzahlzwillinge

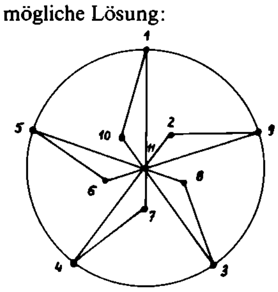
Idee von J.-P. Steinhöfel, Kl. 10c der OS Königs Wusterhausen



Summe gesucht

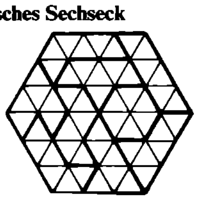


Eine mögliche Lösung:



Die Summe beträgt 22.

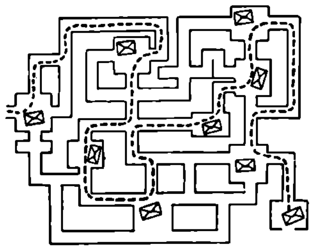
Magisches Sechseck



Kryptarithmetik

U. a. gibt es folgende Lösungen:
$1978+1978+1978+1978=7912$;
$2594+2594+2594+2594=10376$
$6\cdot 9=54$; $1\cdot 3=3$; $6\cdot 3=18$.
$753\cdot 5=3765$; $3007\cdot 0=0$; $3760+5=3765$.
$18+24=42$; $10+24=34$; $8+0=8$.

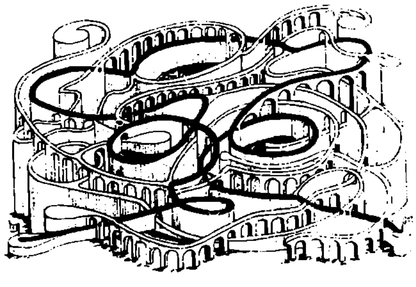
Der Bote und die neun Pakete



Spiel mit Hölzchen

$$\frac{XVIII}{VII}-\frac{IV}{VII}=II$$

Irrgarten



Ist das möglich?

Der Großvater ist der Vater der Mutter des Jungen.

Lösung zu:
Eine Aufgabe von Prof. Dr. N. I. Wilenkin,
Seite 108

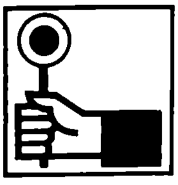
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

400 Sonnenuhren in der DDR registriert

Potsdam (ADN). Über 400 Sonnenuhren wurden durch die Mitglieder der *Sektion Gnomonik* des Kulturbundes in der DDR registriert. Damit ist die erste Phase der vor einem Jahr begonnenen Erfassung dieser besonderen Zeitmesser beendet. Damals waren aus der Literatur erst etwa 200 Sonnenuhren und ihre Standorte bekannt. Zu ihnen zählte die von Zacharias Scultetus 1550 für die Görlitzer Rathausapotheke geschaffene Uhr. Eines der interessantesten Exemplare ist die nahe der Römischen Bäder im Park von Sanssouci stehende *Polyederuhr* mit 45 kunstvollen Zifferblättern.

Aufgaben aus der Praxis

Betriebs- und Verkehrseisenbahner stellen Aufgaben



▲1▲ Es ist der Windungskoeffizient (W_K) der Eisenbahnstrecke Leipzig–Döbeln–Dresden zu ermitteln. Die tatsächliche Entfernung dieser Strecke (E) beträgt laut Kursbuch der DR 133,6 km. Die Luftlinie (E_L) beträgt auf der Kursbuchkarte mit dem Maßstab 1 : 1000000 genau 11 cm. Es gilt $W_K = \frac{E}{E_L}$.

▲2▲ In wieviel Minuten durchfährt ein 140 m langer Zug den Brandleite-Tunnel bei Oberhof, der eine Länge von 3038 m hat, wenn die mittlere Fahrgeschwindigkeit des Zuges $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt?

▲3▲ Wie lange dauert die Begegnung zweier Züge von 150 m und 120 m Länge, die mit den mittleren Geschwindigkeiten von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ aneinander vorbeifahren, und zwar in entgegengesetzten Richtungen?

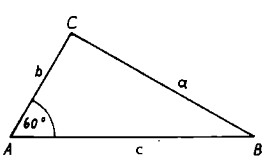
▲4▲ Das Ablaufgleis eines Rangierbahnhofes hat ein Gefälle von 1 : 35.

a) Mit welcher Beschleunigung rollt ein Waggon von 20 Mp Gewicht ab, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}004$ beträgt?

b) Mit welcher Endgeschwindigkeit verläßt der Waggon die 46 m lange Ablaufstrecke, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $v = 0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt?

c) In welcher Zeit durchläuft der Waggon die Ablaufstrecke?

d) Welchen Weg legt der Waggon auf dem anschließenden waagerechten Gleis noch zurück, wenn nicht zusätzlich gebremst wird?



▲5▲ Unsere Volkswirtschaft erfordert einen zuverlässigen und leistungsfähigen Gütertransport. Die Güterwaggons der DR befinden sich in einem ständigen Umlauf, der von der Beladung bis zur Wiederbeladung reicht. Die Umlaufzeit (Uw), gemessen in Tagen (d), wird ermittelt, indem der vorhandene Wagenpark (P), gemessen in Anzahl der Waggons (Wg), durch die Anzahl (b) der täglich beladenen Waggons, gemessen in $\frac{Wg}{d}$, dividiert wird.

a) Wie hoch war an einem Tag die durchschnittliche Umlaufzeit, wenn von 136500 Waggons, die sich im Streckennetz der DR befanden, 35000 Waggons beladen wurden?

b) Die Beschleunigung des Wagenumlaufs, die durch eine schnellere Be- und Entladung zu erreichen ist, stellt eine zentrale Aufgabe dar. Wie viele der 136500 Waggons könnten jährlich mehr beladen werden, wenn die derzeitige Umlaufzeit von 3,85 d auf 3,75 d gesenkt werden kann?

c) Welche Masse an Gütern könnte dann täglich mehr transportiert werden, wenn ein Güterwagen mit durchschnittlich 19,2 t beladen wird?

▲6▲ Eine Familie (2 Erwachsene und 2 Kinder im Alter von 3 und 5 Jahren) plant eine Tagesfahrt von Leipzig nach Gera (Tarifentfernung 74 km). Die Familie fährt 2. Klasse.

a) Berechne den Fahrpreis, den diese Familie für die Hin- und Rückfahrt zu zahlen hat, wenn ein Eilzug benutzt wird!

(Kinder unter 10 Jahren zahlen den halben Fahrpreis und den halben Zuschlag; Kinder unter 4 Jahren fahren im Beisein der Eltern kostenlos.) Der Eilzugzuschlag beträgt bei der angegebenen Entfernung 1,50 M pro Erwachsenen. Der Fahrpreis 2. Klasse beträgt 8 Pf je km. Die DR rundet Pf stets auf volle Zehn-Pf auf.

b) Wieviel Mark könnte diese Familie einsparen, wenn sie Sonntagsrückfahrkarten mit einer Fahrpreisermäßigung von $33\frac{1}{3}\,\%$ in Anspruch genommen hätte?

Berufsbild Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik

Die pünktliche und bedarfsgerechte Erfüllung der Transportleistungen im Reise- und Güterverkehr wird entscheidend durch die sichere Betriebsführung mitbestimmt.
Für diese wichtigen Aufgaben werden gut ausgebildete Facharbeiter gebraucht.
Bei einem erfolgreichen Abschluß der 10. Klasse der polytechnischen Oberschule kannst du in zwei Jahren

Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik

mit einer der Spezialisierungsrichtungen Reiseverkehr, Güterverkehr, Stellwerks- und Zugmeldedienst oder Rangiertechnik und Zugbegleitdienst werden.

Welche Anforderungen werden an Dich gestellt?

Der Transport bei der Deutschen Reichsbahn läuft rund um die Uhr, deshalb arbeitest du im Schichtdienst.
Erforderlich sind:
– Zuverlässigkeit und ein hohes Verantwortungsbewußtsein – Schnelles und sicheres Reaktionsvermögen – Aufmerksamkeit – Gutes Seh- und Hörvermögen – Farbtauglichkeit (im Betriebsdienst) – Widerstandsfähigkeit bei langzeitigen Belastungen – Keine Sprachstörungen.
Obwohl der Beruf hauptsächlich für Jungen geeignet ist, finden in ihm auch Mädchen interessante und ihrem physischen Leistungsvermögen angepaßte Tätigkeiten.

Welche Aufgaben hast Du als Facharbeiter zu erfüllen?

Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik bereiten den Transportprozeß vor, wirken bei der Durchführung mit und rechnen ihn ab. Sie tragen durch ihre Arbeit zum sicheren, pünktlichen und wirtschaftlichen Ablauf des Eisenbahntransports bei.

Welche Tätigkeiten übst du aus?

Im Betriebsdienst werden von dir in den Stellwerken die Sicherungs- und Fernmeldeanlagen bedient. Es werden Wagen und Züge rangiert, die Reisezüge begleitet und Fahrausweise kontrolliert.
Du bedienst Maschinen und Automaten zum Druck von Fahrausweisen und Platzkarten, schreibst sie aber auch selbst aus und bist für die ordnungsgemäße Abrechnung der Einnahmen verantwortlich. Reisegepäck und Expreßgut werden von dir angenommen und ausgegeben und mit modernen Umschlagmechanismen befördert.
Im Güterverkehr werden Frachtbriefe geprüft und gebucht sowie Stückgut, Paletten und Container mit Flurförderzeugen ein- und ausgeladen.
Die dir anvertrauten Anlagen und Einrichtungen mußt du auch pflegen, damit sie ständig einsatzbereit sind.

Welche Einsatz- und Entwicklungsmöglichkeiten hast du?

Nach erfolgreichem Abschluß der Ausbildung wirst du entsprechend deiner Spezialisierungsrichtung auf den Bahnhöfen im Fahrkartenverkauf, in der Auskunft oder als Aufsicht eingesetzt. Du kannst aber auch auf dem Stellwerk den Zugverkehr kontrollieren und regeln oder im Rangierdienst Züge nach Plänen zusammenstellen und abfertigen. Als Zugbegleiter oder Zugführer bist du mit den dir anvertrauten Zügen ständig auf Achse.
Wenn du als Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik gewissenhaft arbeitest, kannst du dich zum Leiter von Kollektiven sowie für die Übernahme von Funktionen der mittleren Leitungsebene und zum Dienststellenleiter qualifizieren. Bei guten gesellschaftlichen und fachlichen Voraussetzungen besteht die Möglichkeit für ein Studium an der Ingenieurschule für Verkehrstechnik Dresden oder an der Ingenieurschule für Transportbetriebstechnik Gotha sowie bei vorhandener Hochschulreife an der Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List" in Dresden, um dich für eine leitende Tätigkeit bei der Deutschen Reichsbahn zu qualifizieren.

Welcher Beruf?

KATI E. FARBREICHE IN BÜCHEN HAFENSTR.

Autor: D. Knape, Jessen

Mathematisches Spiel

Heute möchten wir euch ein Spiel vorstellen, bei dem ein Spieler durch die Anwendung einer sogenannten „symmetrischen Strategie“ den Sieg erreichen kann:

Zwei Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein (oder ein rechteckiges Kärtchen, eine Streichholzschachtel o. ä.) auf eine rechteckige Fläche. Dieser Stein darf keinen der bereits auf der Fläche befindlichen Steine überlappen und auch nicht über den Rand der Fläche hinausragen, ansonsten kann seine Lage beliebig gewählt werden. Verloren hat der Spieler, der als erster keinen Stein mehr auf der Spielfläche unterbringen kann. Wir wollen voraussetzen, daß genügend Dominosteine vorhanden sind, um die gesamte Fläche zu bedecken. Dadurch ist ein Remis bei diesem Spiel ausgeschlossen.

Nun ergibt sich die Frage, welcher Spieler den Sieg erzwingen kann und wie er zu diesem Zweck zu spielen hat. Es zeigt sich, daß für den Spieler, der den ersten Zug macht, eine überraschend einfache Gewinnstrategie existiert: Er legt seinen ersten Stein genau in die Mitte der Spielfläche (entscheidend hierbei ist nur, daß der Mittelpunkt des Dominosteins mit dem Mittelpunkt der Spielfläche zusammenfällt). Bei allen weiteren Zügen spielt er symmetrisch zu seinem Gegner, d. h., er postiert seinen Stein symmetrisch (in bezug auf den Mittelpunkt der Spielfläche) zu dem zuletzt vom Gegner gelegten Stein (Bild 1).

Durch diese Spielweise erreicht der erste Spieler, daß nach jedem seiner Züge (einschließlich dem ersten!) eine (punkt-)symmetrische Anordnung der Steine entsteht. Der zweite Spieler ist gezwungen, diese Symmetrie zu zerstören. Für den ersten Spieler ergibt sich damit jedesmal die Möglichkeit, seinen Stein wieder symmetrisch zum Stein des Gegners auf die Spielfläche zu legen. Falls also der zweite Spieler noch Platz für einen Stein findet, so gelingt dies dem ersten Spieler im folgenden Zug ebenfalls. Der erste Spieler kann auf diese Art und Weise nicht verlieren. Da es kein Remis gibt, erzwingt er damit den Sieg.

Nun wollen wir uns die Frage stellen, für welche anderen Formen von Spielsteinen und Spielfläche der anziehende Spieler ebenso gewinnen kann. Dabei soll auch zugelassen sein, daß Steine verschiedener Größe und Form benutzt werden, allerdings mögen beide Spieler von jeder Spielsteinsorte genügend viele Steine zur Verfügung haben. Wir haben festgestellt, daß der erste Spieler mit jedem seiner Züge eine symmetrische Situation herstellt. Insbesondere muß die Anordnung nach seinem ersten Zug (punkt-)symmetrisch sein. Daraus können wir die Forderung ableiten, daß sowohl die Spielfläche als auch der erste Stein des ersten Spielers punktsymmetrisch sein müssen, das heißt mit anderen Worten: Man muß sie durch Drehung um 180° in sich selbst überführen können. Geeignet sind also z. B. Rechtecke, Kreise, Ellipsen, aber auch Steine oder Spielflächen in +-, H-, N- oder S-Form.

Die Steine, die im folgenden Spielverlauf gelegt werden, brauchen nicht unbedingt von dieser Art zu sein. Allerdings müssen wir ausschließen, daß ein Stein des zweiten Spielers den ersten Stein des ersten Spielers „umfaßt“ und damit den zu sich symmetrischen Platz selbst belegt (Bild 2). Kreisringe oder Steine in U-Form dürfen also nicht erlaubt werden, falls sie so groß sind, daß sie andere Steine umschließen können. Ganz sicher würden wir gehen, wenn wir nur konvexe Spielsteine zuließen.

Man könnte dieses Spiel also z. B. auch auf einem runden Tisch mit Tellern, Tassen und komplettem Besteck spielen. Postkarten und Briefmarken könnten ebenfalls erlaubt werden, während man Hufeisen, Reifen und Bilderrahmen verbieten müßte, wenn der erste Spieler die Möglichkeit behalten soll, den Sieg auf die beschriebene Art und Weise zu erzwingen. Im Gegensatz zu anderen Spielen, bei denen die Kenntnis der richtigen Strategie schon den sicheren Sieg bedeutet, steht hier der anziehende Spieler natürlich vor der Aufgabe „seine große Chance“ durch etwas Geschick und gutes Augenmaß auch wirklich zu nutzen.

Als Aufgabe schlagen wir euch vor, Beispiele für Spielfläche und Spielsteine anzugeben, bei denen der erste Spieler den Sieg nicht erzwingen kann, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein sollen:

a) Die Spielfläche ist symmetrisch, die Spielsteine sind es nicht.

b) Die Spielsteine sind symmetrisch, die Spielfläche ist es nicht.

c) Die Spielfläche ist symmetrisch, beide Spieler verfügen sowohl über symmetrische als auch über unsymmetrische Steine, jedoch jeweils nur in begrenzter Anzahl.

(symmetrisch = punktsymmetrisch)

R. Lehmann/U. Quasthoff

Bild 1

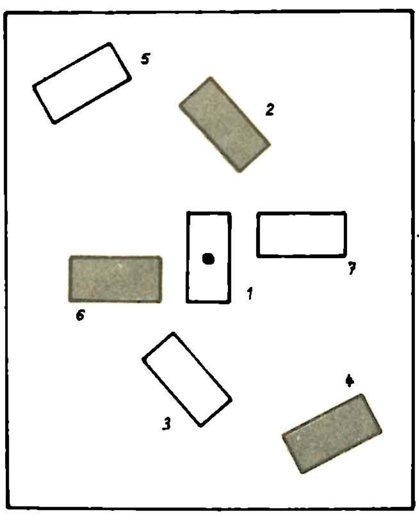
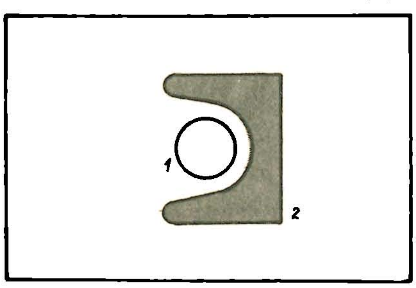
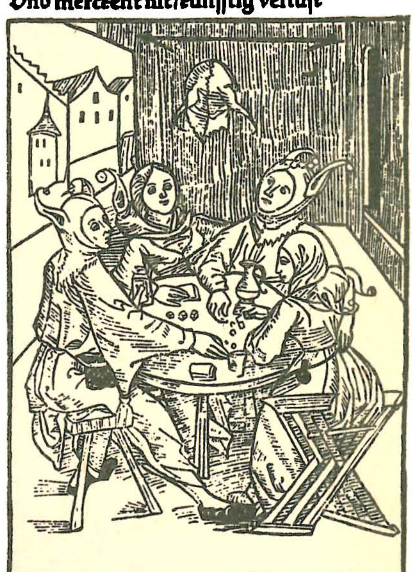


Bild 2



Vil hant zu spyl so grossen glust
Das sie keynr kurtzwil achten sust.
Vnd merckent nit/kunfftig verlust



Von Spylern.
Sunst fynd ich närrscher narren vil
Die all jr freüd hant jnn dem spyl
Meynend/sie möchten leben nit
Soltten sie nit vmbgon do mit

Spieler bei Wein, Würfeln und Karten. Holzschnitt aus Sebastian Brants „Narrenschiff“, 1494