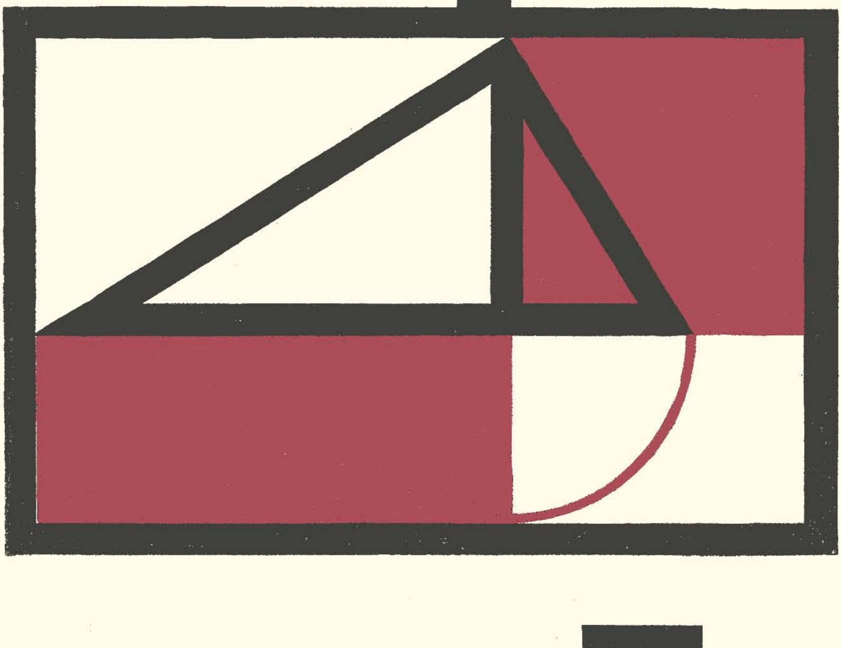
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968 Heft 2

Redaktionskollegium: Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger (Bad Doberan); StR J. Lehmann (Leipzig); OL H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle); OStR Dr. H. Weiß (Berlin)

Aufgabengruppe: NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig): Kl. 5 und 6; OL K. Krüger (Bad Doberan); Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster): Kl. 9 und 10

Gutachtergruppe: NPT H. Kästner; R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)

Redaktion: StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion: Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16

Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Naumann, Leipzig (S. 33, 34, 47); Archiv: Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald (S. 40); Foto-Brüggemann, Leipzig (S. 52); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig

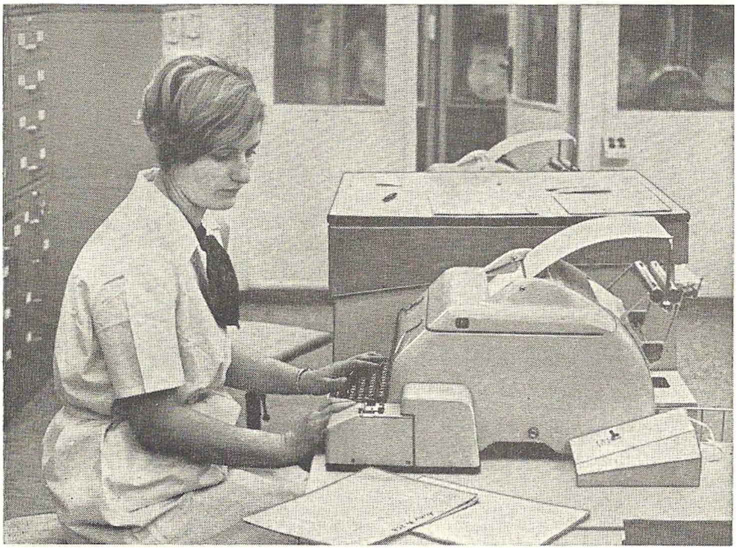
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1645 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 2. 2. 1968

Inhalt

(*) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Elektronische Datenverarbeitung – eine Perspektive



Operateur beim Bedienen einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage

Diplom-Wirtschaftler Wolfram Metzner (links) mit dem Chefredakteur von *alpha* bei der Vorbereitung der Artikelserie: Datenverarbeitung — eine Perspektive

Verkäuferin (Centrum-Warenhaus Leipzig) beim Bedienen einer Kasse mit Magnetbandanschluß

Tabelliererin bei der Arbeit

Wer morgen bestehen will, muß heute beginnen!

Die verstärkte Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung in der sozialistischen Volkswirtschaft zum Nutzen aller vorbereiten zu helfen, betrachtet die Schülerzeitschrift *alpha* als ihr Anliegen. Ab Heft 3/68 machen wir in einer Artikelserie unsere Leser mit einigen wichtigen Berufen auf dem Gebiet der Datenverarbeitung bekannt.

Joachim Große, Klasse 10, 7. Oberschule Leipzig, erlernt ab 1. September 1968 den Beruf: *Facharbeiter für Datenverarbeitung.* — Joachim ist begeisterter Leser von *alpha*

Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage!

Kürzlich hörte ich einen kleinen Streit zwischen Klaus und Jürgen. Klaus hatte von seinem Vater 50 Mark und die Erlaubnis erhalten, einen Fußball für sich zu kaufen. Auf dem Wege zum Geschäft meinte Jürgen: „Na, nun hast du ja das notwendige Kleingeld für den Ball." Darauf Klaus: „Was heißt notwendig! Notwendig sind 50 Mark nun gerade nicht, aber sie reichen aus. Notwendig wären höchstens 35 Mark, denn soviel kostet der Ball nämlich. Du verwechselst ja, was ausreichend ist und was notwendig!" Jürgen: „Das ist doch egal, ob notwendig oder nicht. So genau habe ich das doch nicht gemeint. Hauptsache ist, du kannst dir den Ball kaufen."
Nun, so egal ist das nicht, wie man sich ausdrückt. Man sollte sich stets bemühen, so genau wie möglich das zu formulieren, was man meint. Das gilt für die Umgangssprache, in viel höherem Maße aber für die Mathematik. Sie ist ohne eine festgelegte Bedeutung der verwendeten Wörter gar nicht denkbar. Auch der Mathematiker verwendet das Wort *notwendig*, aber nur in einem ganz bestimmten Sinn. Ebenso ist es mit *ausreichend*, das allerdings in der Mathematik nicht so gebräuchlich ist; man benutzt im allgemeinen an seiner Stelle das gleichbedeutende Wort *hinreichend*. Mir scheint, Klaus hat schon einmal etwas von der Verwendung dieser Worte in der Mathematik gehört.
Wir wollen uns an einigen Beispielen überlegen, wann der Mathematiker davon spricht, eine Eigenschaft ist hinreichend oder sie ist notwendig. Man sagt beispielsweise: Die Teilbarkeit einer Zahl durch 6 ist hinreichend für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.
Mit dieser Formulierung meint man: Die Eigenschaft einer Zahl, durch 6 teilbar zu sein, reicht dafür aus, daß diese Zahl auch durch 3 teilbar ist. Man kann inhaltlich dasselbe auch folgendermaßen, in der „Wenn . . . , so . . ."-Form angeben:

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, (A)
so ist diese Zahl durch 3 teilbar. (B)

Etwas allgemeiner könnte man also sagen: Die in der Voraussetzung angeführte Eigenschaft A ist hinreichend für die in der Behauptung angeführte Eigenschaft B.
In einem zweiten Beispiel wollen wir von einem Satz in der „Wenn-so"-Form ausgehen und danach den gegebenen Sachverhalt mit Hilfe von *hinreichend* neu formulieren.

(1a) Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, (A)
so sind diese Winkel gleich groß. (B)

Dafür kann man auch sagen:

(1b) Die Eigenschaft, daß zwei Winkel zueinander Scheitelwinkel sind (A), ist hinreichend dafür, daß die Winkel gleich groß sind (B).

Aus diesen Beispielen wird deutlich: Die Ausdrucksweise „Eine Eigenschaft A ist hinreichend für die Eigenschaft B" besagt genau das gleiche wie „Wenn die Eigenschaft A gilt, so gilt die Eigenschaft B". Statt „Eigenschaft" verwendet der Mathematiker in diesem Zusammenhang allerdings meistens das Wort „Bedingung".
Klaus hatte also vorhin ganz recht mit seinem Einwand. Da der Ball genau 35 Mark kostet, ist die Aussage „Wenn Klaus 50 Mark besitzt, so kann er sich einen Fußball kaufen" ganz bestimmt richtig. Und das bedeutet ja nichts anderes als: „Die Tatsache, daß Klaus 50 Mark besitzt, ist hinreichend dafür, daß er sich einen Fußball kaufen kann."

Überlegen wir nun, was der Mathematiker mit dem Wort *notwendig* ausdrücken will. Man sagt zum Beispiel:

(2c) Die Teilbarkeit einer Zahl durch 7 (A) ist notwendig für die Teilbarkeit der Zahl 14 (B).

Damit soll ausgedrückt werden:

(2a) Wenn eine Zahl durch 14 teilbar ist, (B)
so ist sie (notwendigerweise auch) durch 7 teilbar. (A)

Allgemein kann man sagen: „Eine Eigenschaft oder Bedingung A ist notwendig für eine Eigenschaft B" bedeutet also das gleiche wie „Wenn die Eigenschaft B gilt, so gilt die Eigenschaft A".

Wir wollen auch hierzu ein weiteres Beispiel untersuchen. Wir gehen wieder aus von der „Wenn-so"-Form und benutzen noch einmal den Satz (1a):

(1a) Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, (A)
so sind diese Winkel gleich groß. (B)

Inhaltlich dasselbe kann man auch mit Hilfe von *notwendig* ausdrücken, wenn man beachtet, daß die in der Behauptung angegebene Eigenschaft B notwendig ist für die in der Voraussetzung stehende Eigenschaft A, also:

(1c) Die gleiche Größe von zwei Winkeln (B) ist notwendig dafür, daß diese Winkel zueinander Scheitelwinkel sind (A).

An diesem Beispiel wird deutlich, daß man den gleichen Sachverhalt auf drei verschiedene Weisen ausdrücken kann: (a) in der „Wenn-so"-Form, (b) mit Hilfe von *hinreichend*, (c) mit Hilfe von *notwendig*. Fassen wir zusammen:

Ist der Sachverhalt in der Form

(a) „Wenn A, so B" beschrieben, so verwendet der Mathematiker dafür auch die folgenden Sprechweisen:

(b) A ist eine hinreichende Bedingung für B

(c) B ist eine notwendige Bedingung für A.

In (1b) wurde gesagt, daß die im Satz (1a) angegebene Eigenschaft A hinreichend ist für die Eigenschaft B. Ist die Eigenschaft A aber auch notwendig für die Eigenschaft B? Mit anderen Worten: Ist die Aussage „Die Eigenschaft, daß zwei Winkel zueinander Scheitelwinkel sind, ist notwendig dafür, daß diese Winkel gleich groß sind" richtig? Das läßt sich ganz leicht entscheiden, wenn man eine gleichwertige „Wenn-so"-Formulierung benutzt: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie Scheitelwinkel". Dieser Satz ist natürlich falsch. Die Eigenschaft A ist also nur hinreichend, nicht notwendig für die Eigenschaft B. Ob du wohl jetzt auch selbst begründen kannst, warum Jürgen vorhin unrecht hatte, als er meinte, 50 Mark seien für den Kauf des Fußballs notwendig? Überleg dir außerdem noch selbst, warum die in (2c) angegebene Eigenschaft A (Teilbarkeit einer Zahl durch 7) nicht auch hinreichend für die Eigenschaft B (Teilbarkeit der Zahl durch 14) ist.

Aus den letzten Beispielen sieht man, daß eine hinreichende Bedingung (Eigenschaft) nicht notwendig, eine notwendige Bedingung nicht hinreichend sein muß. Anschaulich gesagt, verlangt eine hinreichende Bedingung oft etwas zu viel, eine notwendige dagegen oft etwas zu wenig. Ideal wäre also eine Bedingung, die sowohl notwendig als auch hinreichend ist. Ob es wohl solche „idealen" Bedingungen gibt? Betrachten wir dazu ein Beispiel!

Den Inhalt des Satzes

(3a) Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist,
so ist die Zahl durch 3 teilbar

kann man auch auf die folgenden beiden Arten wiedergeben:

(3b) Die Teilbarkeit der Quersumme einer Zahl durch 3 ist eine hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

(3c) Die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 ist eine notwendige Bedingung für die Teilbarkeit der Quersumme der Zahl durch 3.

Nun ist aber auch (die Umkehrung des Satzes (3a)) richtig:

(4a) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar.

Dafür kann man wiederum sagen:

(4b) Die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 ist eine hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit der Quersumme der Zahl durch 3, oder:

(4c) Die Teilbarkeit der Quersumme einer Zahl durch 3 ist eine notwendige Bedingung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

Vergleicht man nun (3b) und (4c), so stellt man fest:

(5) Die Teilbarkeit der Quersumme einer Zahl durch 3 ist eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3.

Vergleiche selbst auch noch (3c) und (4b)! Vergleiche dann auch noch deine so gewonnene Feststellung mit dem Satz (5)!

Man sieht also, eine Bedingung kann manchmal sowohl notwendig als auch hinreichend für eine bestimmte Eigenschaft sein. Willst du eine hinreichende Sicherheit in der richtigen Verwendung von *notwendig* und *hinreichend* erlangen, mußt du notwendigerweise viel üben. Benutze dazu Sätze, die in deinem Lehrbuch stehen.

M. Rehm

Aufgaben

1. Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

1.1. Es ist notwendig und hinreichend, ein 10-Pf-Stück in einen Süßwarenautomaten zu werfen, um eine Rolle Drops zu erwerben.

1.2. Dafür, daß ein Oberhemd knitterfrei ist, ist hinreichend, daß es aus Dederon besteht.

1.3. Dafür, daß Klaus in dieselbe Klasse wie Jürgen geht, ist hinreichend, daß beide denselben Mathematiklehrer haben.

1.4. Um in der DDR wählen zu können, ist notwendig und hinreichend, daß man älter als 18 Jahre ist.

1.5. Zum Fotografieren ist Sonnenschein notwendig.

2. 21 t Kartoffeln sind durch 3-t-LKW von A-Dorf nach B-Stadt zu transportieren. Wieviel Fahrten sind dazu notwendig? Wieviel Fahrten sind dazu hinreichend? — Klaus und Jürgen unterhalten sich darüber. Es treten folgende Aussagen auf:

2.1. Es sind dazu 7 LKW-Fahrten notwendig.

2.2. Es sind dazu 3 LKW-Fahrten notwendig.

2.3. Es sind dazu 10 LKW-Fahrten notwendig.

2.4. Es sind dazu 7 LKW-Fahrten hinreichend.

2.5. Es sind dazu 3 LKW-Fahrten hinreichend.

2.6. Es sind dazu 10 LKW-Fahrten hinreichend.

Welche der Aussagen sind wahr?

Wie hätte die Frage heißen können, damit als einzige Antwort „7 LKW-Fahrten" richtig ist?

3. Sprich den Sachverhalt der nachfolgenden Sätze mit Hilfe von *notwendig* bzw. *hinreichend* aus!

3.1. Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es auch gleichschenklig.

3.2. Wenn jeder Summand durch eine bestimmte Zahl teilbar ist, so ist auch die Summe dieser Summanden durch diese Zahl teilbar.

3.3. Wenn in ein und demselben Kreis zwei Zentriwinkel gleich groß sind, so sind auch die zugehörigen Bogen gleich groß.

3.4. Wenn in ein und demselben Kreis zwei Bogen gleich groß sind, so sind auch die zugehörigen Zentriwinkel gleich groß.

4. Gib den Sachverhalt nachfolgender Sätze in einer „Wenn-so"-Formulierung wieder!

4.1. Dafür, daß ein Parallelogramm ein Quadrat ist, ist notwendig, daß ein Innenwinkel des Parallelogramms 90° beträgt.

4.2. Dafür, daß ein Parallelogramm ein Rechteck ist, ist hinreichend, daß ein Innenwinkel des Parallelogramms 90° beträgt.

4.3. Damit $a^2 - 36 \neq 0$ (a rational) erfüllt werden kann, ist hinreichend, daß a ungerade ist.

4.4. Die Kongruenz zweier Dreiecke ist hinreichend für ihre Ähnlichkeit.

5. Ergänze die Textlücken durch *notwendig* oder *hinreichend* oder *notwendig und hinreichend* so, daß eine wahre Aussage entsteht!

5.1. Damit $a^2 - 25 = 0$ (a rational) erfüllt werden kann, ist ...., daß $a = 5$ ist.

5.2. Damit das Quadrat einer gebrochenen Zahl a kleiner ist als 4, ist ...., daß $a < 2$ ist.

5.3. Die Ähnlichkeit zweier Dreiecke ist .... für ihre Kongruenz.

5.4. Dafür, daß ein Viereck ein Quadrat ist, ist ...., daß alle Seiten die Länge 1 haben.

M. Rehm

An unsere neuen Leser!
Durch die Deutsche Post (zuständiges Postamt) oder den Verlag Volk und Wissen, 108 Berlin, Lindenstraße 54a, Abtlg. Vertrieb, können noch die Hefte 3/67, 4/67, 5/67, 6/67 bezogen werden.
Redaktion *alpha*

Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen

In Heft 6/1967 haben wir die Darstellung einer Geraden in zugeordneten Normalrissen kennengelernt. Neben der Geraden spielt die Ebene als Konstruktionselement eine wichtige Rolle. Deshalb wollen wir uns nun mit der zeichnerischen Darstellung der Ebene in zugeordneten Normalrissen vertraut machen.
Zunächst fragen wir nach der Mindestzahl von Punkten, die eine Ebene im Raum festlegen. Wie bereits in Heft 6 gezeigt wurde, kann man durch zwei voneinander verschiedene Punkte eine und nur eine Gerade legen. Nimmt man nun außerhalb dieser Geraden einen weiteren Punkt an, so läßt sich durch diese Gerade eine und nur eine Ebene legen, die auch den zusätzlich angenommenen Punkt enthält.
Wir können daher festhalten: *Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte des Raumes ist genau eine Ebene festgelegt.* Diese Aussage läßt sich an anschaulichen Beispielen illustrieren. Stative für Meßgeräte und Fotoapparate haben in der Regel drei Beine, deren Spitzen eine Ebene, die Standebene, festlegen. Stühle, Tische und Hocker von spezieller Bauart weisen nur drei Beine auf und geben den Möbeln eine hinreichende Standfestigkeit auf ebenem Fußboden.
Wir betrachten nun drei in zugeordneten Normalrissen vorgegebene Punkte A, B und C, die nicht in einer Geraden liegen sollen. Die Punkte A, B und C legen also eine Ebene (ABC) fest. Hierbei wollen wir fünf wesentliche Fälle der Lage von (ABC) bezüglich der Bildebenen π_1 und π_2 herausarbeiten.
In Bild 1 ist der Umlaufsinn der Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ in beiden Rissen positiv. Nun ist zu beachten, daß eine Ebene stets zwei Seiten hat. Bei einer Ebene allgemeiner Lage ist eine dieser Seiten dem Betrachter zugewendet (sichtbar) und die andere ist abgewendet (nicht sichtbar). Da in Bild 1 Grund- und Aufriß des Dreiecks ABC gleichen Umlaufsinn besitzen, ist auch in beiden Rissen die gleiche Seite der Ebene sichtbar. Man sagt, sie ist *gleichwendig.*
In Bild 2 ist der Umlaufsinn des Dreiecks $A'B'C'$ positiv und der des Dreiecks $A''B''C''$ negativ. Folglich sind in Grund- und Aufriß dem Betrachter die zwei verschiedenen Seiten der Ebene zugewendet. Nimmt eine Ebene eine derartige Lage bezüglich der Bildebenen ein, sagt man, sie ist *wechselwendig.*
In Bild 3 liegen $A'B'C'$ in einer Geraden, während die Punkte $A''B''C''$ ein Dreieck bilden. Umläuft man in diesem Fall das Dreieck ABC in dem angegebenen Sinn, so läßt sich nur dem Aufriß des Dreiecks die entsprechende Orientierung entnehmen, im Grundriß ist keine Entscheidung über den Umlaufsinn möglich. Die Ebene ist also weder wechselwendig noch gleichwendig. Da für den Grundriß nicht entscheidbar ist, welche Seite der Ebene man sieht, steht die Ebene senkrecht auf der Grundrißebene π_1. Man sagt, die Ebene ist *erstprojizierend.*

In Bild 4 liegen $A''B''C''$ in einer Geraden, während $A'B'C'$ ein Dreieck bilden. Auch in diesem Fall ist die Ebene weder gleich- noch wechselwendig. Da der Umlaufsinn eines in dieser Ebene liegenden Dreiecks im Aufriß nicht erkennbar ist, steht die Ebene offenbar senkrecht auf der Aufrißtafel, sie ist *zweitprojizierend.*

Erstprojizierende oder zweitprojizierende Ebenen führt man häufig als Hilfsebenen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben, z. B. bei der Durchdringung ebenflächig be-

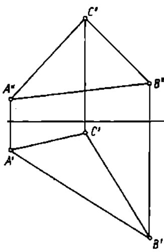


Bild 1

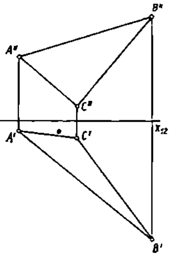


Bild 2

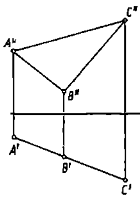


Bild 3

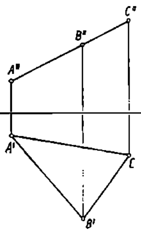


Bild 4

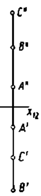


Bild 5

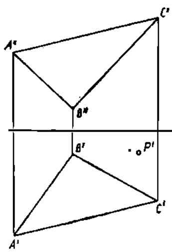


Bild 6

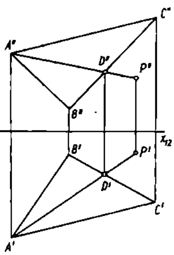
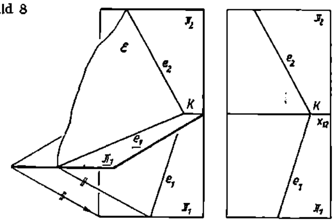


Bild 7

Bild 8



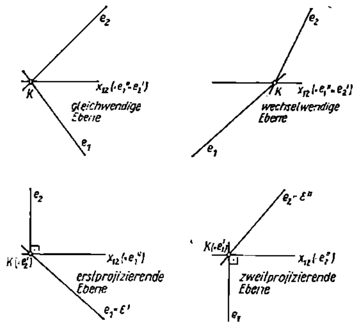


Bild 9

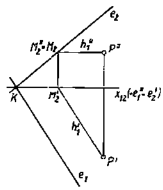


Bild 10

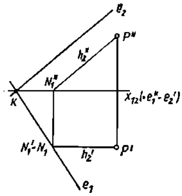


Bild 11

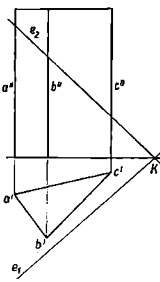


Bild 12

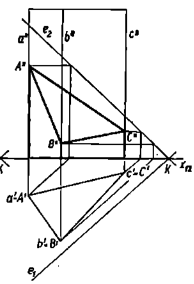


Bild 13

grenzter Körper, ein. Auch als zusätzliche Bildebenen (Seitenrisse) finden die projizierenden Ebenen vielfach Verwendung. Liegen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ in einer Geraden, dann müssen auch A, B und C selbst Punkte einer Geraden sein (vgl. Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen). Dieser Fall ist daher für unsere Betrachtung ohne Bedeutung.
Es ist lediglich noch der Fall zu untersuchen, daß die Punkte $A'B'C'$ und $A''B''C''$ auf einer gemeinsamen Ordnungslinie liegen (Bild 5). Dann steht die Ebene (ABC) senkrecht auf beiden Bildebenen, sie ist erst- und zweitprojizierend. Ebenen dieser Lage verwendet man bei Einführung von *Kreuzrissen*, was aber zunächst noch zurückgestellt werden soll.
Wir stellen uns eine wichtige Grundaufgabe: In einer durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene liege ein Punkt P, von dem nur der Grundriß P' bekannt ist. Bestimme den Aufriß P'' von P (Bild 6)! Vor einer ähnlichen Aufgabe steht etwa ein Tischler, der an einem schadhaften Tisch ein viertes Bein wieder so anfügen muß, daß der Tisch auf einem ebenen Fußboden nicht kippelt.
Zur Lösung dieser Aufgabe mit Bleistift, Zirkel und Lineal verbinden wir zunächst A' mit P' (Bild 7). Die Verbindungsgeraden (AP) und (BC) liegen nach Voraussetzung in der Ebene (ABC). Sie schneiden sich daher auch im Raum in einem Punkt, den wir mit D bezeichnen. Wir finden den Aufriß D'' von D, indem wir durch D' die Ordnungslinie legen. Diese schneidet $(B''C'')$ in D''. Der Aufriß P'' von P liegt nach unseren Überlegungen auf $(A''D'')$ und auf der Ordnungslinie durch P'. (Grund- und Aufriß eines Punktes liegen in Mongescher Lage.) Wir haben die Aufgabe somit durch Einführung einer Hilfsgeraden gelöst, die in der vorgegebenen Ebene (ABC) liegt. Das hier beschriebene Verfahren bezeichnet man als „*Angittern eines Punktes*". Man wendet das Verfahren z. B. an, wenn der Schnitt eines geraden Prismas mit einer Ebene zu konstruieren ist. (Wie vereinfacht sich die Lösung der gestellten Aufgabe, wenn die Ebene (ABC) zweitprojizierend ist?)
Bei den vorangehenden Untersuchungen sind wir davon ausgegangen, daß eine Ebene durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte eindeutig bestimmt ist. Es handelt sich also nicht um eine Abbildung dieser Ebene, sondern nur um eine Darstellung der Ebene durch drei ihrer Punkte. Legen wir nun durch zwei Punktepaare der drei vorgegebenen Punkte je eine Gerade, so erhalten wir ein sich im Raum schneidendes Geradenpaar. Die Gesamtheit jener Geraden, die die Geraden des sich schneidenden Paares trifft, spannt dann gleichfalls die Ebene (ABC) auf. Daher kann man auch sagen: *Eine Ebene ist durch ein Paar sich schneidender Geraden eindeutig bestimmt.*
Von diesem Sachverhalt geht man aus, wenn man eine Ebene durch ihre „*Spuren*" darstellt.

Es gelten die folgenden Definitionen:

Die Spuren einer Ebene ε sind die Schnittgeraden von ε mit den Bildebenen π_1 und π_2.
Die Schnittgerade von ε mit π_1 heißt *erste Spur.* Sie wird mit e_1 bezeichnet.
Die Schnittgerade von ε mit π_2 heißt *zweite Spur.* Sie wird mit e_2 bezeichnet.
Der Schnittpunkt von ε mit der Rißachse x_{12} heißt *Knotenpunkt.* Er wird mit K bezeichnet.

K ist nach diesen Definitionen der Schnittpunkt der Geraden e_1 und e_2. Liegt eine Ebene in dieser Darstellung vor, lassen sich viele Aufgaben, wie z. B. das Bestimmen der wahren Gestalt einer ebenen Figur, bequem lösen. Hierbei ist vor allem zu beachten, daß e_1 in der Bildebene π_1 und e_2 in π_2 liegen. Somit fallen der Aufriß von e_1 und der Grundriß von e_2 in die Rißachse. Dies wird in der Bezeichnung i. a. nicht berücksichtigt, sondern im stillen als bekannt vorausgesetzt (Bild 8).
Ist eine Ebene durch ihre Spuren vorgegeben, so kann man unmittelbar aus der Zeichnung ablesen, ob die Ebene gleichwendig, wechselwendig, erstprojizierend oder zweitprojizierend ist. Bild 9.

Die Art der Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren versagt jedoch für alle Ebenen, die die Rißachse enthalten. Liegt eine Ebene parallel zur Rißachse, so sind auch die Spuren dieser Ebene parallel zur Rißachse. Ebenen dieser Lage bezeichnet man als *Pultebenen.* Hierbei ist zu bemerken, daß eine Ebene im Raum auch durch zwei zueinander parallele Geraden eindeutig bestimmt ist. Das Angittern eines Punktes P in einer Ebene soll nun für den Fall durchgeführt werden, daß die Ebene durch ihre Spuren vorgegeben ist. Bei der Konstruktion ist es vorteilhaft, mit den sogenannten *Spurparallelen* zu arbeiten.

In Bild 10 ist die Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2 dargestellt. Außerdem ist der Grundriß P' des in ε liegenden Punktes P bekannt. Gesucht ist der Aufriß P'' von P. Diese Aufgabe läßt sich im Prinzip mittels jeder beliebigen in ε liegenden Hilfsgeraden durch P lösen. Wir wollen P mit der zu e_1 parallelen Geraden h_1 angittern. Der Grundriß h_1' von h_1 schneidet die Rißachse in einem Punkt M_2'. Dies ist der Grundriß des zweiten Spurpunktes M_2 von h_1. Der Aufriß dieses zweiten Spurpunktes liegt auf e_2, da h_1 in ε liegt. Die Ordnungslinie durch M_2' schneidet also e_2 in $M_2'' = M_2$. Da h_1 parallel e_1 ist, muß h_1'' parallel zu e_1'', d. h. parallel zur Rißachse sein. Die Parallele zur Rißachse durch M_2 schneidet die Ordnungslinie durch P' in P''.

Im vorliegenden Fall haben wir den Punkt P mit einer *ersten Spurparallelen* h_1 angegittert. Völlig analog gestaltet sich das Angittern von P durch eine Parallele h_2 zur zweiten Spur e_2. Bild 11. Das hier abgeleitete Verfahren wollen wir zur Lösung einer einfachen Durchdringungsaufgabe anwenden.

Anwendung

Gegeben ist eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2 und ein auf π_1 senkrecht stehendes dreiseitiges Prisma durch die Kanten a, b, c. Gesucht ist der zwischen ε und π_1 liegende Abschnitt des Prismas (Bild 12).

Lösung: Bezeichnet man die Durchstoßpunkte der Prismenkanten a, b, c durch ε beziehentlich mit A, B, C, so gilt für die Grundrisse dieser Punkte $a' = A'$, $b' = B'$, $c' = C'$. Da A, B und C in ε liegen, erhält man ihre Aufrisse in bekannter Weise durch Angittern mittels der ersten oder zweiten Hauptlinien. Verbindet man die Punkte A'', B'' und C'' miteinander, ergibt sich der Aufriß des gesuchten Prismenabschnittes. Der Grundriß des gesuchten Körpers ist mit dem Dreieck $A'B'C'$ identisch (Bild 13).

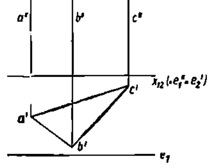
E. Schröder

Aufgaben

□ Übertrage die in Bild 1 bis 4 dargestellten Ebenen $\varepsilon = (ABC)$ auf ein Zeichenblatt (DIN A 4) und suche die Spuren zu jeder der vier Ebenen auf!

Anleitung: Bestimme z. B. zunächst die ersten Spurpunkte von zwei Dreieckseiten. Die Verbindungsgerade dieser Punkte ergibt die erste Spur e_1 und den Knotenpunkt K von ε. Ermittle anschließend den zweiten Spurpunkt von einer Dreieckseite und verbinde diesen mit K. Dies ergibt die zweite Spur e_2.

□ Die durch ihre Spuren e_1 und e_2 vorgegebene Pultebene ε ist mit dem auf π_1 normalstehenden dreiseitigen Prisma zum Schnitt zu bringen (vgl. Bild 14). Der zwischen π_1 und ε liegende Abschnitt des Prismas ist unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit darzustellen.



Nichts Einfacheres als ein Quadrat!

(trotzdem erst für Schüler ab Klasse 8)

2. Teil

(3) Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratdiagonale ergibt?
Schauen wir uns also die Seite s und die Diagonale d eines Quadrats einmal etwas genauer an! (Figur 5)
Das schraffierte Dreieck ist doch rechtwinklig (s. Aufgabe 1)! Kennen wir nicht Sätze, die in rechtwinkligen Dreiecken gelten?

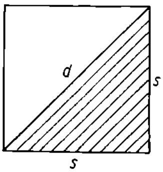


Fig. 5

Aufgabe 11: Formuliere wenigstens drei Sätze, die in rechtwinkligen Dreiecken gelten!

Aufgabe 12: Wer schon weiß, was die Umkehrung eines Satzes ist, formuliert die Umkehrungen der drei Sätze aus Aufgabe 11. Sind diese Umkehrungen wahr?

Ganz gewiß ist unter euren Sätzen der Satz des Pythagoras vorgekommen: **Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.** Figur 6 zeigt eine Veranschaulichung dieses Satzes für ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

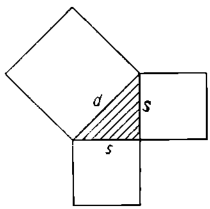


Fig. 6

Merkt ihr etwas? Das ist doch genau unser Problem, das uns nun schon so lange die Köpfe heiß macht! Das große Quadrat hat den doppelten Flächeninhalt eines kleinen Quadrats. Das ist eine Bestätigung unserer auf andere Weise gefundenen Erkenntnis, daß die Seite des neuen Quadrats die Diagonale des alten Quadrats sein muß. Ja, wie lang ist denn aber diese Diagonale, wenn zum Beispiel $s = 1$ cm ist? Wir wenden den Satz des Pythagoras auf unser schraffiertes rechtwinkliges Dreieck an und nehmen zusätzlich zur Vereinfachung an, daß s die Maßzahl 1 hat:

$$d^2 = s^2 + s^2 = 1^2 + 1^2$$
$$\underline{\underline{d^2 = 2}}$$

Wenn s die Maßzahl 1 hat, muß d eine Maßzahl haben, deren Quadrat gleich 2 ist! Das muß doch herauszukriegen sein:

(a) Wir setzen für d die Maßzahl 1,5 oder $\frac{3}{2}$ ein und wollen sehen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \qquad \frac{9}{4} = 2$$

$2{,}25 = 2$; das ist eine falsche Aussage!

(b) Wir versuchen es mit 1,4, da 1,5 sich als zu groß herausgestellt hat:

$$1{,}4^2 = 2$$
$$1{,}96 = 2;$$

wieder entsteht eine falsche Aussage!

Diesmal war die eingesetzte Zahl etwas zu klein.

(c) Wir setzen für d die Zahl 1,45 ein:

$$1{,}45^2 = 2$$
$$2{,}1025 = 2; \text{ falsche Aussage!}$$

Kommt ihr euch auch vor wie ein Mensch mit verbundenen Augen, der mal links, mal rechts mit dem Hammer neben den Nagel haut? Vielleicht haben einige von euch auch schon ein dumpfes Gefühl wie: bei solchen Multiplikationen wie $1{,}45 \cdot 1{,}45$ kann doch niemals 2 herauskommen! Schreiben wir das einmal genau auf:

```
1,45 · 1,45
-----------
145
 580
  725
-----------
2,1025
```

Seht euch die letzte Ziffer des Produkts, die 5, genau an! Wie entsteht sie beim üblichen Verfahren der schriftlichen Multiplikation? Zu ihr wird garantiert keine andere Zahl addiert! Sie kann also bei solchen Zahlen wie 1,45 gar nicht gleich Null werden, und das müßte sie ja, wenn das Produkt 2 werden soll. Gibt es aber vielleicht andere natürliche Zahlen von 1 bis 9, deren Quadrat auf eine Null endet? Nein! (Habt ihr nachgeprüft?)

Ja, was denn nun? Sollte es gar keine Zahl geben, deren Quadrat gleich 2 ist? Gewiß haben viele von euch die Gleichung $d^2 = 2$ „aufgelöst" und gesagt: „d ist gleich $\sqrt{2}$." Was ist denn „$\sqrt{2}$"? In der Zahlentafel steht

$$\sqrt{2} = 1{,}414$$

Überprüfen wir auch das! Ist „$1{,}414^2 = 2$" eine wahre Aussage? 1,414 ist gleich 1,999396, aber nicht gleich 2. Jetzt erinnert ihr euch auch, daß euer Mathematiklehrer sagte, 1,414 wäre ein *Näherungswert* für $\sqrt{2}$. Was bedeutet $\sqrt{2}$ denn aber *genau*? Welche Zahl hat die 2. Potenz 2?

Ihr kennt natürliche Zahlen 0, 1, 2, . . . , gebrochene Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{10}{7}, \ldots$ und rationale Zahlen $-4, -\frac{7}{8}, 0, +7, +\frac{13}{6}, \ldots$. Vielleicht wißt ihr, daß alle natürlichen und gebrochenen Zahlen auch rationale Zahlen sind und alle natürlichen Zahlen auch gebrochene Zahlen. Vielleicht kennt ihr die Zeichnung im neuen Lehrbuch der 7. Klasse, Seite 30 (siehe Figur 7). Also fragen wir wohl am besten: Welche *rationale* Zahl hat die 2. Potenz 2? Vorhin hatten wir die merkwürdige, dunkle Vermutung, daß das mit dem Multiplizieren mit sich selbst nicht gut geht. So viele Versuche, und nun scheint irgend ein Haken an der Sache zu sein! Wir haben bisher keine rationale Zahl gefunden, die uns die Seite eines Quadrates angibt, das den doppelten Flächeninhalt des *Einheitsquadrats* hat (wir hatten für s zur Vereinfachung die Maßzahl 1 gewählt).

H. Wiesemann

(Fortsetzung folgt in Heft 3/68.)

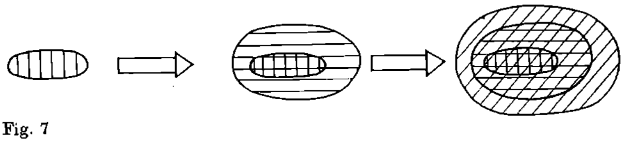


Fig. 7

Bereich der natürlichen Zahlen — Bereich der gebrochenen Zahlen — Bereich der rationalen Zahlen

„Zur Rationalisierung der Planungs- und Leitungsprozesse und der geistigen Arbeit gewinnt die elektronische Datenverarbeitung ständig an Bedeutung. Die Einführung und Anwendung der Datenverarbeitung und der Aufbau des Netzes der Rechenstationen muß mit großer Sachkenntnis geleistet und verbreitet werden, um einen maximalen volkswirtschaftlichen Nutzeffekt zu erzielen."

(Aus Materialien des VII. Parteitages der SED)

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (20./21.1.1968)

7 1. Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert. Wieviel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

2. Beweise folgende Behauptung: Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

3. Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu „bezahlen“. Wie müßten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

4. Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}.$$

In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, daß $x = 11$ die Gleichung erfüllt. Wie lautet diese Zahl?

5. Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen. Beweise, daß das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 läßt!

6. Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$ und $\overline{AA'} = \overline{CA}$ abgetragen. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$!

8 1. Konstruiere das Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\sphericalangle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, daß der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

2. Unter der Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: Z. B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$. Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

3. Es seien a und b positive ganze Zahlen. Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{a}{b}$ ist.

4. Es sei a eine positive ganze Zahl. Zeige, daß der Bruch $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a - 1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

5. Beweise: Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$, sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d. h., ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

6. Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.

b) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

1. Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils einander gleich sind! 9

2. Auf einem (rechteckigen) Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel. Nach welchem Punkte von AB muß diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

3. Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben. Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314 \ldots 979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, daß die rest-

lichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden. Wie lautet diese?
4. Man ermittle alle Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c), für die $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ gilt!
Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.
5. Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Seitenlängen a, b und c bekannt. Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalb. derSeite AB!
6. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$ erfüllen!

10 1. Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedesDreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.
2 .Es ist zu beweisen, daß $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ist! (Sogenannte Kettenregel für Logarithmen.)
3. Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika: „Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten. Ich weiß zwar noch, daß alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren. kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauteten." „Welche Maßzahlen meintest du, als du *alle Maßzahlen* sagtest?" „Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide." „Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren also z. B. die Längen in cm, der Oberflächeninhalt in cm² und das Volumen in cm³ angegeben?" „Ja, so war es." Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?
4. Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$(*)\ \sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leqq a_i \leqq 10$ gilt.
5. Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?
6. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm! Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

1. Drei gleichgroße Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise be- **11|12**
rühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte. Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?
2. Es ist das Produkt
$\sin 5° \cdot \sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 45° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 75° \cdot \sin 85°$ in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
(Beispiel dafür: $\sin 30° \cdot \sin 60° = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$.)
3. Wie lauten (in dekadischer Darstellung) die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$7^{7^{7^{7}}} - 7^{7^{7}}\ ?$$

4. Es sei $y = f(x)$ eine für alle positiven reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle x folgende Gleichungen erfüllt:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \qquad (1).$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle positiven reellen x definierte Funktion.
Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie: Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle positiven reellen x die Gleichung

$$\varphi(x+1) = (x+1) \cdot \varphi(x), \qquad (2)$$

wenn $g(x) = g(x+1)$ ist.
5. In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.) Beweisen Sie, daß man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, daß in ihnen sechs Farben auftreten!
6. Beweisen Sie, daß es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d. h.. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, daß diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!

Eine Aufgabe von
Prof. Dr. habil. Günter Asser

Direktor der Abteilung Mathematische Kybernetik
an der Sektion Mathematik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

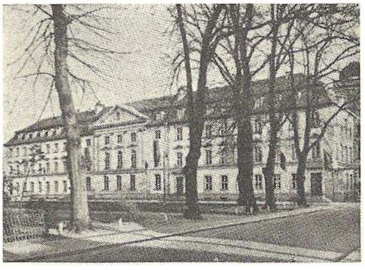
195 Für die Auszeichnung der 1. und 2. Plätze einer Mathematikolympiade stehen insgesamt M Mark zur Verfügung. Es ist festgelegt, daß ein Gewinner eines 2. Platzes ein Drittel dessen erhalten soll, was er erhalten hätte, wenn er einen 1. Platz erreicht hätte. Wie sind die M Mark aufzuteilen, wenn es a Gewinner eines 1. Platzes und b Gewinner eines 2. Platzes gibt?

7 a) Wie groß ist die Auszahlung an die Gewinner des 1. und des 2. Platzes, wenn $M = 226{,}80$, $a = 4$ und $b = 3$ ist?

9 b) Stelle eine allgemeine Formel für die Auszahlungen $\alpha(a, b)$ und $\beta(a, b)$ an die Gewinner des 1. und 2. Platzes auf!

c) Versuche die Überlegungen auf den Fall auszudehnen, daß die M Mark für die Auszeichnung der 1., 2. und 3. Plätze vorgesehen sind und zusätzlich festgelegt ist, daß ein Gewinner eines 3. Platzes ein Drittel dessen erhalten soll, was er erhalten hätte, wenn er einen 2. Platz erreicht hätte! (Wie groß sind in diesem Fall die Auszahlungen $\alpha(a, b, c)$, $\beta(a, b, c)$ und $\gamma(a, b, c)$ an die Gewinner des 1. bis 3. Platzes, wenn a, b, c die Anzahl der Gewinner eines 1., 2. bzw. 3. Platzes bezeichnet?)

Hinweis: Hätte bei a Gewinnern eines 1. Platzes einer der b Gewinner eines 2. Platzes einen 1. Platz erreicht, so hätte es $a + 1$ Gewinner eines 1. Platzes und nur $b - 1$ Gewinner eines 2. Platzes gegeben!



Die im Jahre 1456 gegründete *alma mater Gryphiswaldensis,* die heute den ehrenvollen Namen des Greifswalder Geschichtsprofessors Ernst Moritz Arndt trägt, gehört zu den ältesten Universitäten in Deutschland. Dem Mut und der Besonnenheit des ehemaligen Greifswalder Stadtkommandanten Rudolf Petershagen („Gewissen in Aufruhr") ist es zu verdanken, daß 1945 die Stadt und damit auch die Universität nicht der sinnlosen Zerstörung zum Opfer fiel. In den kommenden Jahren wird Greifswald einer der Schwerpunkte des industriellen Aufbaus in unserer Republik sein. Bereits in diesem Jahr beginnt der VEB Schiffselektronik in einem hochmodernen Werk mit der Produktion von hydroakustischen Geräten für den Fischfang. In unmittelbarer Nähe von Greifswald wird mit dem Bau eines der größten Kernkraftwerke der Welt begonnen.

An der Universität wird insbesondere die Sektion Mathematik erheblich erweitert. Es werden dort (in den kommenden Jahren in bedeutend steigender Anzahl) Diplom-Mathematiker der Spezialrichtungen *Analysis* und *Mathematische Kybernetik* (5jähriges Studium) und Lehrer der Fachkombination Mathematik/Geographie (4jähriges Studium) ausgebildet.

alpha - Wettbewerb 1967

Das sind sie, die 5101 Lösungen, die im Laufe des Jahres 1967 an die Redaktion eingesandt wurden. Sie zeigen großen Fleiß und Ausdauer. Die Besten (Preisträger) konnten wir mit Büchern, die der Verlag Volk und Wissen sowie der Verlag B. G. Teubner zur Verfügung stellten, auszeichnen. Die Namen weiterer fleißiger Wettbewerbsteilnehmer veröffentlichen wir ebenfalls (in der Reihenfolge ihrer gezeigten Leistungen). Die Jury teilt in Auswertung der Korrekturen mit: Wer 1968 für die Lösungen der Aufgaben seiner Klassenstufe mindestens 7 Karten mit dem Prädikat *gut* bzw. *vorbildlich gelöst* von der Redaktion erhält und diese zwischen dem 15. und 31. 1. 1969 einsendet, bekommt eine Anerkennungsurkunde. Die Besten werden wiederum prämiiert bzw. ihre Namen veröffentlicht. (Natürlich freuen wir uns auch über die Einsendung von Lösungen aus höheren Klassenstufen; siehe Ausschreibung Heft 1/68). Nachdem sich unser Wettbewerb eingespielt hat, werden wir bei der Bewertung der Lösungen besonders auf Vollständigkeit und Übersichtlichkeit der Lösungswege bzw. Beweise, ebenso auch auf die Sauberkeit in der Ausführung achten. Aus technischen Gründen können korrigierte Lösungen nicht zurückgesandt werden. Wir empfehlen daher das Anlegen von Durchschlägen. Aus Platzgründen erscheinen unsere Lösungen oft in Kurzform und sind deshalb nicht immer Richtlinie für Einsendungen unserer Leser. Die Jury wünscht allen *alpha*-Lesern für den Wettbewerb 1968 viel Freude und Erfolg.

Leserstimmen:

Helga Rühlicke, Brandenburg:
... Ich möchte auch weiterhin fleißig mitarbeiten, weil mir *alpha* für den Unterricht sehr geholfen hat ... Meine Eltern rechnen auch gern die Wettbewerbsaufgaben mit. Besonders viel Spaß und Freude bringt uns „*alpha*-heiter". Es fängt bei der Oma an (die Freude) und endet bei unserem 7jährigen Wölfi ...

Ehrenfried Zschech, Bautzen (Klasse 6):
... Mir gefällt *alpha* sehr gut. Bei den Knobelaufgaben lerne ich sehr viel, da bei den Lösungen der Lösungsweg mit enthalten ist. Mir hat *alpha* auch schon sehr viel geholfen, denn ich belegte im Kreisausscheid der Mathematikolympiade den 1. Platz ...

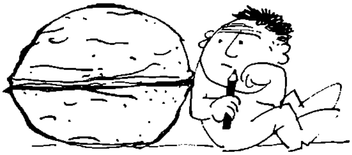
Monika Bartels, Schwerin:
... Das Lösen der Aufgaben macht mir viel Freude, und ich werde mich auch in diesem Jahr wieder am *alpha*-Wettbewerb beteiligen.

Margit Graßnick, Pastow, Kr. Rostock (Kl. 6):
... Mir hat das Lösen dieser Aufgaben viel Freude bereitet. Im Mathematikzirkel unserer Schule benutzten wir Aufgaben aus *alpha* zur Übung ...

Lotti Suchert (Lehrerin), Gottleuba:
... Ich leite einen Mathematikzirkel für Schüler der 6. Klasse. Alle Zirkelteilnehmer möchten auch Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb 1968 werden ...

Jutta Kratzsch, Zeitz (Klasse 8):
(im Auftrage von 13 Mitgliedern des Mathematikzirkels, Kl. 8 bis 10)
... Wir alle sind Leser von *alpha*. Wir treffen uns jede Woche, um die Satzgruppe des Pythagoras zu erforschen. Gleichzeitig sprechen wir über Themen aus *alpha* und lösen einige Aufgaben ... Wir haben an unserer Schule 33 neue Leser für *alpha* geworben. Dadurch gelang es uns, noch mehr Schüler für die Mathematik zu gewinnen ...

Wer löste mit?
alpha-Wettbewerb



Preisträger

Klassenstufe 5/6: Pawel Kröger, 7031 Leipzig, Bamberger Str. 24a — Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen, W.-Fiebiger-Str. 42 — Frank Ihlenburg, 22 Greifswald, Goethestr. 10 — Ulf Brüstel, 7401 Ziegelheim (Kr. Altenburg) — Udo Winkler, 829 Kamenz, Geschw.-Scholl-Str. 25.

Klassenstufe 6/7: Jörg Lehnert, 2034 Tutow — Gernot Spiewok, 22 Greifswald, Grimmerstr. 69 — Bärbel Schulz, 75 Cottbus, Finsterwalder Str. 1 — Hans-Herbert Luchtmann, 2405 Neukloster — Lutz Ranke, 59 Eisenach, Wernickstr. 6.

Klassenstufe 7/8: Jürgen Schefter, 795 Bad Liebenwerda, E.-Thälmann-Pl. 5 — Harald Englisch, 7022 Leipzig, Otto-Nuschke-Str. 40 — Steffen Kossert 1136 Berlin-Friedrichsfelde, Friedenhorster Str. 7 — Frank Täubner, 745 Calau — Claudia Asser, 22 Greifswald, L.-Jahn-Str. 6 — Petra Wußing, 7022 Leipzig, Braunschweiger Str. 39.

Klassenstufe 8/9: Arnulf Möbius, 7124 Holzhausen bei Leipzig — Bernd Oldenburger, 7261 Merkwitz (Kr. Oschatz) — Reinhard Wobst, 806 Dresden, Bautzener Str. 71 — Steffi Lorenz, 703 Leipzig, Am Bogen 36 — Uwe-Peter Sandberg, 28 Ludwigslust, Schweriner Str. 47 — Bernd Nikutowski, 2032 Jarmen.

Klassenstufe 9/10: Ludwig Paditz, 826 Lommatzsch, Kornstr. 4 — Peter Oswald, 8027 Dresden, F.-C.-Weißkopfstr. 73 — Martin Horatschek, 402 Halle, Goethestr. 34 — Eberhard Paschkowski, 48 Naumburg/Saale, Karl-Marx-Str. 10 — Detlef Schulz, 211 Torgelow — Jürgen Hopfe, 42 Merseburg, Siegfriedstr. 1b.

Folgende Schulen nahmen im Rahmen ihrer außerunterrichtlichen Tätigkeit am *alpha*-Wettbewerb teil: OS Bergwitz (Krs. Bitterfeld) — John-Brinkmann-OS Goldberg (Krs. Lübz) — OS Parkentin (Krs. Bad Doberan) — OS Ebersbrunn (Bez. Karl-Marx-Stadt) — OS Heinrich Schiemann, Neubukow (Krs. Bad Doberan) — OS Rüdnitz (Krs. Bernau) — OS Zeitz (Bergsiedlung) — OS Steinbach-Hallenberg (Krs. Schmalkalden) — OS Berlin-Pankow — OS Käthe-Kollwitz, Schönebeck/Elbe — OS Georg-Schumann Mokrehna (Krs. Eilenburg) — OS Andershof (Krs. Stralsund) — OS Tutow (Krs. Demmin) — Ernst-Moritz-Arndt-OS Greifswald — OS Brodersdorf (Krs. Rostock) — OS Gottleuba (Krs. Pirna) — OS Meiningen — OS Alt-Töplitz (Bez. Potsdam) — Ernst-Thälmann-OS Karl-Marx-Stadt — OS Culitzsch (Krs. Zwickau-Land).

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5/6: Claus-Detlev Bauermeister, 8019 Dresden — Sabine Anders, 75 Cottbus — Rolf Böllmann, 5505 Ilfeld — Christoph Scheurer, 9611 Glauchau-Gesau — Stephan Poller, 9533 Wilkau-Haßlau — Bernd Singer, 99 Plauen — Beate Werner, 9906 Syrau — Jürgen Schulze, 793 Herzberg — Gerd Petzold, 9501 Cunersdorf — Hendrik Ladwesen, 63 Ilmenau — Regina Müller, 8027 Dresden — Angelika Jagusch, 1281 Rüdnitz — Reinhold Müller, 9151 Pfaffenhain — Bernd Winkelmann, 1405 Glienicke — Gerald Bach, 90 Karl-Marx-Stadt — Holger Weißgerber, 36 Halberstadt —

Uwe Lewandowski, 705 Leipzig — Kerstin Bachmann, 402 Halle — Wolfgang Cott, 5705 Menteroda — Eberhard Manske, 6088 Steinbach-Hallenberg — Thomas Förster, 23 Stralsund — Doris Rothe, 4332 Sandersleben — Margit Graßnick, 2551 Pastow — Sarina Lietz, 1281 Rüdnitz — Hans-Joachim Wolf, 89 Görlitz — Lutz Bernsdorf, 2862 Goldberg — Monika Schöne, 1281 Rüdnitz.

Klassenstufe 6/7: Tilo Stöckert, 99 Plauen — Steffen Oswald, 8027 Dresden — Karin Krüger, 453 Roßlau — Renate Schulze, 793 Herzberg — Klaus-Jürgen Kreul, 88 Zittau — Jörg Polzehl, 1157 Berlin-Karlshorst — Antje-Christine Keller, 23 Stralsund — Reinhard Liesigk, 44 Bitterfeld — Tilo Kempa, 8361 Ottendorf — Beate Weise, 48 Naumburg — Carmen Hauptmann, 8245 Glashütte — Ingolf Kunath, 825 Meißen — Manfred Riemer, 9306 Elterlein — Jürgen Zabel, 57 Mühlhausen — Iris Zöllner, 1211 Lebus — Erika Heuer, 2301 Neulüdershagen — Andreas Heß, 794 Jessen — Jürgen Niendorf, 7913 Schweinitz — Uwe Schröder, 2806 Conow — Helma Erfuth, 4321 Freckleben — Marina Schulz, 89 Görlitz — Stefan Katzmann, 925 Mittweida — Elke Wiemann, 8245 Glashütte — Gisela Engel, 25 Rostock — Annerose Lehmann, 7027 Leipzig — Lutz Hameister, 3271 Möser — Joachim Selle, 5401 Großfurra — Gabriele Winter, 5401 Großfurra — Wolfgang Fiedler, 57 Mühlhausen — Erwin Grund, 1824 Niemegk — Ingo Runge, 5401 Großfurra — Eveline Günther, 1631 Dabendorf — Monika Heiner, 90 Karl-Marx-Stadt.

Klassenstufe 7/8: Felicitas Bartusch, 79 Falkenberg — Jürgen Reichard, 301 Magdeburg — Rainer Staudte, 9501 Culitzsch — Manfred Schreiter, 7254 Machern — Bernd Hofmann, 8808 Niederoderwitz — Josef Kaufhold, 5601 Silberhausen — Franziska Steinke, 111 Berlin — Frank Kretzschmar, 7043 Leipzig — Peter Hoffmann, 4308 Thale — Renate Reckziegel, 5808 Tabarz — Petra Schönwälder, 703 Leipzig — Regina Oberwinter, 1503 Potsdam-Bornstedt — Roswitha Thommes, 3602 Badersleben — Christiane Stelter, 2551 Lüsewitzer Krug (Kr. Rostock) — Renate Siegert, 9372 Wolkenstein — Gerhard Hoborn, 2861 Wendisch Priborn (Kr. Lübz) — Jutta Geißler, 829 Kamenz — Wolfgang Riedel, 90 Karl-Marx-Stadt — Renate Zimmermann, 8036 Dresden — Dietmar Lein, 521 Arnstadt — Ullrich Galle, 962 Werdau — Wolfgang Zahn, 532 Appolda — Norbert Köppe, 1801 Glienecke — Rautgundis Queisler, 8808 Niederoderwitz — Ursula Gebauer, 6404 Rauenstein — Sabine Kinzel, 7024 Leipzig — Christa Kirsten, 8301 Liebstadt — Arnold Jahnke, 9275 Lichtenstein — Wolfgang Puhlmann, 1824 Niemegk — Frank-Uwe Simon, 801 Dresden — Wolfgang Keller, 923 Brand-Erbisdorf — Stephan Günther, 705 Leipzig.

Klassenstufe 8/9: Gudrun Bohn, 7022 Leipzig — Beate Täubner, 754 Calau — Jürgen Marx, 728 Eilenburg — Ralf Stephan, 809 Dresden — Karl-Heinz Breitmoser, 20 Neubrandenburg — Evelyn Bach, 90 Karl-Marx-Stadt — Dietmar Tanzer, 7202 Böhlen — Karl-Heinz Müller, 9501 Weißbach — Karin Nowatzki, 1631 Klausdorf (Kr. Zossen) — Annemarie Pötzsch, 7901 Battin (Kr. Jessen) — Jürgen Leyh, 5906 Ruhla — Wolfgang Haase, 1711 Lynow (Kr. Luckenwalde) — Klaus-Dieter Lochotzke, 15 Potsdam — Hans-Jürgen Grundmann, 6508 Weida — Volker Schwandt, 5701 Seebach — Dietmar Wegner, 3601 Dardesheim — Gerd Morgner, 9701 Werda (Kr. Auerbach) — Uwe Treß, 703 Leipzig — Regina Senst, 1823 Görzke — Ulf Weigend, 6503 Gera-Langenberg — Ralf-Dieter Doleschal, 89 Görlitz.

Klassenstufe 9/10: Andreas Swoboda, 9101 Herrenhaide — Wolfgang Weise, 9112 Burgstädt — Ulrike Schmidt, 8027 Dresden — Friedhard Bauer, 6405 Schalkau — Reinhard Scheller, 328 Genthin — Wolfgang Gallinat, 1502 Babelsberg — Helga Persdorf, 729 Torgau — Karl Paul, 1544 Elstal — Manfred Wunderlich, 992 Oelsnitz — Gerd Philipp, 8504 Großhartau — Christoph Clauß, 9163 Gornsdorf — Waltraud Kühne, 701 Leipzig — Christian Philipp, 8506 Ohorn — Thomas Schindler, 75 Cottbus — Jürgen Klix, 1546 Staaken — Andreas Wichmann, 4011 Halle — Gudrun Zschocke, 9112 Burgstädt — Cornelia Burkholdt, 88 Zittau — Matthias Schulz, 8020 Dresden — Wolfgang Kernchen, 402 Halle — Klaus Kerkow, 1546 Staaken.

alpha-Wettbewerb 1967 – Statistik

1. Einsendung von Lösungen (gegliedert nach Aufgaben und Schuljahren):

Heft	Klassenstufe 5				Klassenstufe 6				Klassenstufe 7				Klassenstufe 8				Klassenstufe 9				Klassenstufe 10			
	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Jungen	Mädchen	gesamt
α_1	12	89	99	188	18	81	66	147	24	121	96	217	32	54	30	84	38	33	6	39	45	35	4	39
	13	75	86	161	19	94	106	200	25	74	60	134	33	108	54	162	39	54	21	75	46	42	5	47
α_2	50	48	37	85	54	30	46	82	58	26	19	45	61	29	14	43	64	23	7	30	67	70	19	89
	51	45	36	81	55	41	46	87	Bez. Oly.	26	24	50	Bez. Oly.	61	43	104	Bez. Oly.	39	12	51	Bez. Oly.	37	2	39
α_3	68	27	16	43	69	27	12	39	70	21	6	27	71	11	6	17	72	29	6	35	73	8	0	8
	81	24	16	40	84	24	13	37	87	7	4	11	90	13	5	18	93	16	4	20	96	16	2	18
	82	14	12	26	85	21	12	33	88	12	8	20	91	9	4	13	94	0	0	0	97	0	4	4
	83	15	8	23	86	10	6	16	89	13	12	25	92	4	3	7	95	0	0	0	98	7	1	8
α_4	106	68	68	136	107	71	54	125	108	69	70	139	109	151	74	225	110	92	55	147	111	56	8	64
	112	60	52	112	113	62	46	108	114	29	25	54	115	53	16	69	116	29	3	32	117	9	0	9
α_5	135	34	30	64	141	63	50	113	147	73	42	115	152	45	31	76	158	69	26	95	164	49	7	56
	136	32	25	57	142	65	42	107	148	55	39	94	153	47	24	71	159	78	32	110	165	116	40	156
ges.		531	485	1016		595	499	1094		526	405	931		585	304	889		462	172	634		445	92	537

2. Beteiligung (eingesandte Lösungen, gegliedert nach Bezirken):

Berlin	141	Schwerin	227	Gera	91
Frankfurt	137	Magdeburg	177	Leipzig	495
Potsdam	331	Halle	370	Cottbus	306
Neubrandenburg	159	Erfurt	358	Dresden	801
Rostock	621	Suhl	232	Karl-Marx-Stadt	655

3. Beteiligung (eingesandte Lösungen, gegliedert nach Schuljahren):

Klassenstufe	Jungen	Mädchen	gesamt
5	531	485	1016
6	595	499	1094
7	526	405	931
8	585	304	889
9	462	172	634
10	445	92	537
zusammen	3144	1957	5101

Von den 5101 eingesandten Lösungen wurden nur 386 als falsch bewertet.

An die Redaktion wurden zwischen dem 15. und 31. 1. 1968 zur Bewertung 521 Briefe eingesandt. Sie enthielten 3383 Karten. Im Durchschnitt enthielten die Briefe aus Klassenstufe 5/6 6,5 Karten, aus Kl. 6/7 6,7 Karten, aus Klasse 7/8 7,6 Karten, aus Kl. 8/9 6,8 Karten und aus Kl. 9/10 4,4 Karten. Der beste Schüler in Klassenstufe 5/6 legte 51 Karten, in Kl. 6/7 21 Karten, in Kl. 7/8 38 Karten, in Kl. 8/9 28 Karten und in Kl. 9/10 17 Karten vor. Die genannten Schüler lösten neben Aufgaben ihrer Klassenstufe die höherer Klassenstufen.

Berufsbild

Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur

Inhalt und Umfang des Arbeitsgebietes

Herstellen und Bearbeiten von Einzelteilen aus metallischen Werkstoffen und Zusammenfügen der gefertigten Bauelemente zur chemischen Anlage; Bedienen und Warten von Druckluft- und elektrisch getriebenen Werkzeugen; Anfertigen von Behältern aller Art, Rohren und Rohrleitungssystemen sowie aller Aggregate für Industrieanlagen; Durchführen von Dichtigkeitsproben; Lesen von Kesselbauzeichnungen und Montagezeichnungen; Ausführung von Schweiß- und Brennschneidearbeiten; Anreißen von Werkstattzeichnungen; Bedienung und Wartung von Bohrmaschinen aller Art, Schneidbrennern, E- und A-Schweißanlagen, Abkantbänken, Walzen, Meß- und Kontrollgeräten; Verarbeitung von Plasten. Der Chemieanlagenbauer stellt her und montiert Ausrüstungen für die chemische Industrie und artverwandte Industriezweige. Dazu gehören komplette Anlagen zur Gewinnung und Verarbeitung von anorganischen und organischen Stoffen. Auch Einzelausrüstungen wie Destillationskolonnen, Reaktionsgefäße, Hochdruckapparate, Zentrifugen werden vom Facharbeiter gefertigt und sachgemäß aufgestellt.

Voraussetzungen zum Erlernen des Berufes

Gesunder, kräftiger Körperbau, Widerstandsfähigkeit gegenüber Witterungseinflüssen und Temperaturschwankungen, Schwindelfreiheit und gute Sehschärfe; gute Leistungen in den mathem.-naturwissenschaftlichen Fächern.

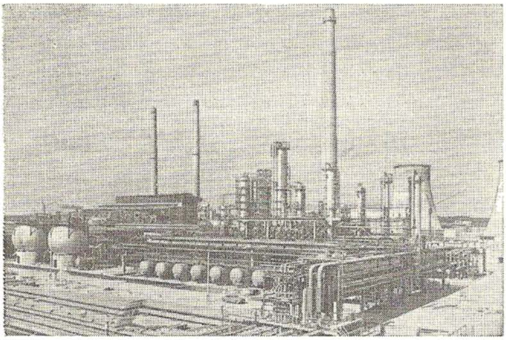
Möglichkeiten der Spezialisierung und Qualifizierung

Die umfassende Ausbildung während der Lehrzeit ermöglicht den Einsatz in allen Betrieben des chemischen Apparatebaus. Nach Bewährung in der Produktion ist die Qualifizierung zum Meister, Ingenieur und Diplomingenieur möglich, weiterhin zum Auslandsmonteur (Meisterqualifikation mit Sprachkenntnissen), Montageleiter (Ingenieurqualifikation mit Sprachkenntnissen), Chefmonteur (Diplomingenieur m. Sprachkenntnissen).

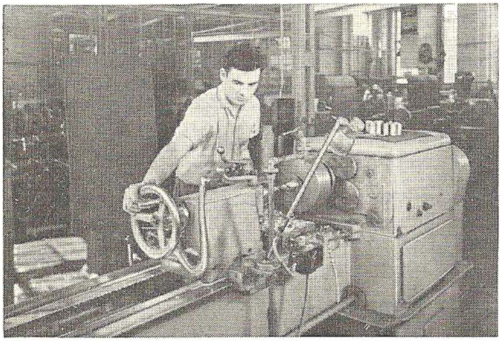
Patenschaft zwischen VEB MAG und 1. Oberschule Grimma

Viele Abgänger der 1. OS Grimma nehmen nach erfolgter Abschlußprüfung eine Lehre als Chemieanlagenbauer, Betriebsschlosser, Dreher, Lichtbogenschweißer, Maschinenbauzeichner oder Stenotypistin in dem VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma auf. Verschiedene Jahrgänge haben im Klassenverband eine berufliche Grundausbildung Chemieanlagenbau erfahren. Für alle Schüler der Schule erfolgt der Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion im VEB MAG.
Unser Patenbetrieb ist Hauptauftragnehmer für den Bau kompletter Chemieanlagen für das In- und Ausland. Neben Anlagen für unsere modernen Chemiebetriebe, z. B. Erdölverarbeitungswerk Schwedt, gehen Erzeugnisse in viele Länder des Erdballs. Erst vor kurzem fanden die Reisextraktionsanlagen, die in Burma installiert wurden, den Beifall der Fachwelt.
Die Berufsausbildung im VEB MAG fordert besonders gute Kenntnisse in den Fächern Mathematik, Physik und Chemie. In Mathematik erwarten die Ausbilder neben guten Grundkenntnissen besonders in der Gleichungslehre, der Trigonometrie und der Stereometrie sehr gute Leistungen. Um den interessierten Schülern einen Einblick in die sie später auf mathematischem Gebiet zu erwartenden Anforderungen zu geben, hat unser Patenbetrieb in vorbildlicher Weise in einer Broschüre über Entwicklung, Aufgaben, Berufsbilder des Betriebes herausgegeben und eine umfassende Aufgabensammlung aus ihrer betrieblichen Praxis angefügt. Sie entstand in Zusammenarbeit zwischen dem Fachzirkel der Mathematiklehrer unserer Schule und Mitarbeitern des Betriebes. Für die Leser von *alpha* wurde eine Auswahl dieser Aufgaben (von insgesamt 48) zusammengestellt. Wir würden uns freuen, entsprechende Aufgabensammlungen aus anderen Berufszweigen zu unserer Information zu erhalten.

J. Pönisch, Stellv. Direktor der 1. OS, 724 Grimma



Rohöldestillationsanlage im Erdölverarbeitungswerk Schwedt



Jungarbeiter an der Drehmaschine

Hinweis: Die zweite Wettbewerbsaufgabe des *alpha*-Wettbewerbs befindet sich auf den Seiten 54/55.

Aufgaben

5 **208** Wenn man die Maßzahlen der Austauschflächen zweier Kondensatoren A und B miteinander multipliziert, so ergibt das 12. Wieviel Quadratmeter Austauschfläche besitzt jeder der beiden Kondensatoren, wenn der Kondensator B eine um 4 m^2 größere Austauschfläche als der Kondensator A hat?

209 In einer Gießerei fertigen zwei Gießer zusammen 280 Gußstücke. Der erste Gießer stellt 50 Stück mehr her als der zweite. Wieviel Stücke gießt jeder? 115

W(5)210 Eine Werkstatt ist in einem Raum mit den lichten Abmessungen von 11 m Breite und 36 m Länge untergebracht. In dieser Werkstatt stehen 6 Maschinen. Die Maschinen und die sie bedienenden Arbeiter benötigen zusammen jeweils folgenden Platz:

Maschine 1 15 m^2,
Maschine 2 5 m^2,
Maschine 3 18 m^2,
Maschine 4 60 m^2,
Maschine 5 18 m^2,
Maschine 6 50 m^2.

Der Platz für die Lagerung und Bereitstellung der Werkstücke an den Maschinen beträgt:

Maschine 1 14 m^2,
Maschine 2 6 m^2,
Maschine 3 15 m^2,
Maschine 4 21 m^2,
Maschine 5 13 m^2,
Maschine 6 17 m^2.

Die restliche Fläche wird für Transportwege benötigt.

a) Wieviel Quadratmeter Bodenfläche verbleiben für die Transportwege?

b) Wie breit können die Transportwege angelegt werden, wenn ihre gesamte Länge 48 m beträgt? (Wir nehmen an, daß eine solche Anordnung der Maschinen und Lagerplätze möglich ist, die es erlaubt, die Transportwege stets gleich breit anzulegen.)

6 **211** Ein Kompressor drückt die Luft in einen Behälter. Damit der Druckluftbehälter und die gesamte Druckluftanlage vor Überlastung geschützt wird, muß der Druckluftbehälter nach den gesetzlichen Bestimmungen mit einem Sicherheitsventil versehen sein. Der einarmige Hebel des Sicherheitsventils ist 40 cm lang. Am Ende des Hebels ist ein Gewicht von 5 kp befestigt. Welche Kraft drückt auf das Ventil, wenn es 8 cm vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist?

212 Ein angerissenes Blech ist 6 cm länger als breit. Verlängert man Länge und Breite dieses rechteckigen Bleches um jeweils 4 cm, so nimmt sein Flächeninhalt um 72 cm² zu. Berechne Länge und Breite des rechteckigen Bleches!

W(6)213 Bei einem Fußpunktabstand von 250 m erscheint der Schornstein des Kesselhauses im VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 11{,}3°$.

a) Wie hoch ist der Schornstein, wenn die Messung des Erhebungswinkels unmittelbar über dem Erdboden in einem ebenen Gelände erfolgte?

b) Um welche Strecke muß man sich dem Fußpunkt des Schornsteins nähern, damit er dem Beobachter unter dem doppelten Erhebungswinkel erscheint?

(Die Aufgabe ist mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung zu lösen!)

7 **214** Ein Werkzeugstahl enthält:

0,9% Kohlenstoff,
2% Silizium,
0,2% Mangan,
0,015% Phosphor,
0,005% Schwefel
und den Rest Eisen.

Wieviel Kilogramm von jedem Stoff sind in 18 kg dieses Werkzeugstahls enthalten?

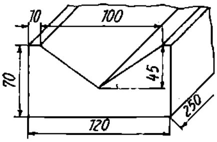
215 Ein Apparatebauer schneidet aus einer 2 m langen und 1 m breiten Blechtafel sechs Rohrmäntel parallel zur kürzeren Seite für Rohrstutzen. Vom Umfang jedes Mantels gehen 1,5 cm für die Schweißnaht ab. Wie groß ist der Durchmesser eines Rohres?

W(7)216 Für eine chemische Anlage sollen vier Behälter gebaut werden mit einem Gesamtinhalt von 10000 Liter. Welchen Rauminhalt haben die einzelnen Behälter (A, B, C und D), wenn die Maßzahlen ihrer Rauminhalte folgende Verhältnisse bilden:
$A : B = 1 : 3$; $C : D = 4 : 13$; $B : C = 3 : 2$?

8 **217** Nach der Eichordnung sollen Meßzylinder innen bis zum Eichstrich doppelt so hoch wie weit sein. In welcher Höhe über dem Boden muß deshalb der Eichstrich eines Fünfliter-Meßzylinders angebracht werden?

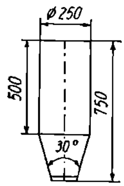
W(8)218 Eine Legierung besteht aus 57,5 g Blei und 114,0 g Zinn. Wie groß ist die Dichte der Legierung, wenn die Dichte von Blei 11,34 kg/dm³ und die Dichte von Zinn 7,28 kg/dm³ beträgt?

219 Wie groß ist die Masse des abgebildeten prismatischen Werkstückes aus 9
Grauguß? Die Dichte von Grauguß beträgt 7,3 kg/dm³.

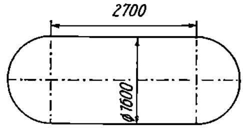


W(9)220 Durch eine konstruktive Verbesserung kann eine Welle aus Stahl von 650 mm Länge schwächer ausgeführt werden. Der Durchmesser für das (zylindrische) Rohrmaterial kann von 80 mm auf 75 mm verringert werden. Wie groß ist die Materialeinsparung in Prozent des ursprünglich benötigten Materials? Warum wird für die Lösung dieser Aufgabe die Angabe der Dichte des Stahls nicht benötigt? Welche Angabe ist außerdem noch überflüssig?

221 Es ist das Volumen des abgebil- 10
deten zylindrischen Behälters mit trichterförmigem Auslauf zu berechnen.



W(10/12)222 Der in der Zeichnung abgebildete Behälter besteht aus einem zylindrischen Teil und zwei halbkugelförmigen Teilen von dem gleichen Radius. Dabei sind die Innenmaße in mm angegeben.



a) Wie groß ist das Volumen des Behälters?

b) Wie groß ist seine Oberfläche?

c) Wie groß sind Durchmesser und Oberfläche eines kugelförmigen Behälters, der dasselbe Volumen hat?

d) Warum ist die Oberfläche im Falle c) kleiner als im Falle b)?

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

letzter Einsendetermin 1. Juli 1968

(Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe befindet sich auf der S. 52/53.)

Liebe Freunde!

An Aufgaben in *alpha* kann es nicht genug geben, das beweisen die zahlreichen Leserbriefe. Diejenigen Leser, welche noch mehr Futter haben möchten, empfehlen wir, sich Aufgabensammlungen anzufertigen. Zahlreiche Tageszeitungen und Zeitschriften veröffentlichen regelmäßig mathematische Probleme. In der Redaktion liegt eine umfassende Dokumentation vor. Als Anreiz zum selbständigen Sammeln (Anfertigen von Karteien) bieten wir 12 Beispiele:

NEUES DEUTSCHLAND

5 **196** Jemand schreibt zuerst alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000, als zweites alle Zahlen von 1 bis 10000 hintereinander auf. Muß er beim zweitenmal mehr oder weniger Nullen schreiben als beim erstenmal Ziffern?

W(5)197 An fünfzehn Arbeiter eines Betriebes wurden Prämien zu 100 M, 200 M, 300 M, 400 M und 500 M ausgegeben. Insgesamt wurden 2500 M vergeben. Wieviel Beschäftigte erhielten je 100 M?

FÜR DICH

Hier wird's knifflig!

6 **198** In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Winkel viermal so groß wie die beiden übrigen zusammen. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

W(6)199 Zur Uraufführung des Puppenspiels „Der gestiefelte Kater" waren viele Zuschauer gekommen. Die Hälfte und einer davon waren Kinder. Ein Viertel und zwei der Anwesenden waren Mütter, und ein Sechstel und drei waren Väter dieser Kinder. Wieviel Frauen, Männer und Kinder waren es?

neues leben

In Mathe eine „Vier"?

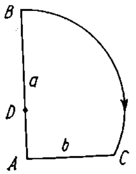
200 Bei einem Fahrrad betrage der Durchmesser des Hinterrades 70 cm, das vordere Kettenrad habe 46 Zähne, das hintere 16 Zähne. Wie oft muß ein Radfahrer (ohne Verwendung des Freilaufes) die Pedalen durchtreten, um 120 km zurückzulegen? 7

W(7)201 Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 21mal so groß wie die Summe dieser Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich?

Junge Welt

Unsere Mathematikaufgabe

202 Ein rechtwinklig gebogener Stab mit den Schenkellängen $\overline{AB} = a = 3100$ mm und $\overline{AC} = b = 2700$ mm soll in D so abgebogen werden, daß B nach C kommt. Wie groß ist die verbleibende Schenkellänge $\overline{AD}$? 8



W(8)203 Ein Trapez $ABCD$ ist so beschaffen, daß sich die beiden Kreise, die die Schenkel $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ des Trapezes zum Durchmesser haben, von außen berühren. Es ist zu beweisen, daß in diesem Trapez die Summe der Maßzahlen der parallelen Grundseiten gleich der Summe der Maßzahlen der Schenkel des Trapezes ist!

technikus

9 **204** Fritz hat 1,12 M in seiner Geldbörse, und zwar Zehn-, Fünf- und Einpfennigstücke. Insgesamt sind es 40 Münzen. Wieviel von jeder Sorte befinden sich in seiner Geldbörse?

W(9)205 In einer Klasse werden die Fächer Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Deutsch und Geschichte von den Lehrern Altmann, Brendel und Clausner erteilt. Jeder Lehrer unterrichtet genau zwei Fächer. Der Chemielehrer wohnt in demselben Haus wie der Mathematiklehrer. Herr Altmann ist von den drei Lehrern der jüngste. Der Mathematiklehrer und Herr Clausner spielen häufig Schach miteinander. Der Physiklehrer ist älter als der Biologielehrer, aber jünger als Herr Brendel. Der älteste der drei Lehrer hat einen längeren Heimweg als seine beiden Kollegen. Welche Lehrer unterrichten welche Fächer?

NBI

Arithmetische Gymnastik

206 Im Saal, in welchem eine Gesellschaft ihren Jahreskongreß abhalten wollte, 10 waren mehr als 90, jedoch weniger als 100 Stühle aufgestellt worden. Doch es erschienen mehr Kongreßteilnehmer, als sich angemeldet hatten. Die Anzahl der Stühle mußte deshalb verdoppelt werden. Allerdings blieb nunmehr ein Zwölftel der Plätze unbesetzt. Wieviel Teilnehmer hatten sich zu dem Jahreskongreß eingefunden?

W(10/12)207 A ist eine 1966 stellige natürliche Zahl, die durch 9 teilbar ist. B ist die Quersumme der Zahl A, und C ist die Quersumme der Zahl B. Finden Sie die Quersumme der Zahl C!

alpha berichtet

□ **Moskau** Vom 7. bis 21. Juli 1968 findet in der Hauptstadt der Sowjetunion die X. Internationale Mathematikolympiade statt.

□ **Rostock** Die Wissenschaftliche Jahrestagung 1968 der Mathematischen Gesellschaft der DDR wurde vom 12. bis 17. Februar in Rostock durchgeführt. Wir werden in H. 3/68 darüber berichten.

□ **Cottbus** Ende August eröffnete Bezirksschulrat Oberstudienrat Dr. Fuhrich den *Bezirksklub Junger Mathematiker* in Herzberg.

□ **Dresden** Wer Mitglied des *Klubs Junger Mathematiker* (Klassenstufe 8) am Institut für Unterrichtsmethodik der Mathem. und Naturw. der TU Dresden werden wollte, mußte eine Aufnahmeprüfung bestehen (Herbst 1967). Seine Teilnehmer kommen alle 14 Tage zusammen, um ihre mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Cornelia Wunderlich, 53. OS Dresden, sandte unseren Lesern eine Aufgabe:

Bilde die Produktmenge $M \times N$!

a) $M = \{a; b; c\}$ $N = \{x; y; z\}$
b) $M = \{1; 2; 3; 4\}$ $N = \{1\}$
c) $M = \{4; 5; 6; 7\}$ $N = \emptyset$

□ **Budapest** Die Klasse IVb (das entspricht unserem 12. Schlj.) des Móricz Zsigmond Gymnasiums grüßt die Leser von *alpha* herzlich. An dieser Schule bestehen vier Mathematikzirkel, die alle zwei Wochen zusammen kommen, um über die Lösung von Aufgaben, die zu Hause bearbeitet wurden, zu sprechen. Im Programm standen weiterhin: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, algebraische Gleichungen ersten und zweiten Grades, einfache Probleme der Graphentheorie, lineare Optimierung u. a.
Die ungarischen Freunde sandten uns eine Aufgabe und würden sich über Einsendungen direkt nach Budapest freuen:
Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks. Man zeichne die Gerade, die AC im Punkt X und BC im Punkt Y so schneidet, daß gilt: $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YB}$.

Lösungen

105 Lösung der Aufgabe
von Prof. Dr. habil. L. Görke

Für die Lösbarkeit der Aufgabe ist es notwendig, daß das gegebene Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Parallelogramm ist. Begründung:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges konvexes Viereck (Abb. 1). Seine Seitenmittelpunkte bilden dann die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten den Viereckdiagonalen AC bzw. BD parallel sind (Umkehrung des Strahlen-

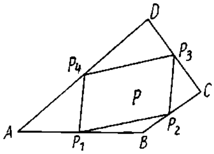


Abb. 1

satzes, angewandt auf die Strahlenbüschel mit den Scheiteln A, bzw. B, C, D). Die nachfolgende Konstruktion mit Beweis zeigt, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, um ein Viereck $ABCD$ der gewünschten Art zu konstruieren.

Konstruktion: Gegeben ist das Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$. Wir wählen einen Punkt A beliebig in derjenigen von der Geraden P_1P_4 gebildeten Halbebene, die das Parallelogramm nicht enthält, verbinden ihn mit P_1, verlängern die Strecke $\overline{AP_1}$ über P_1 hinaus um sich selbst und nennen den so entstandenen Punkt B. Punkt B verbinden wir mit P_2, verlängern wideer BP_2 über P_2 hinaus um sich selbst und erhalten einen Punkt C, den wir mit P_3 verbinden. Die entsprechende Verlängerung führt auf den Punkt D (Abb. 2). Wir verbinden D noch mit A und erhalten ein Viereck, das P_1, P_2, P_3, P_4 zu Seitenmitten hat.

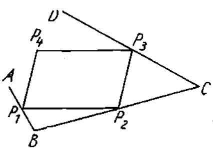


Abb. 2

Beweis:

Nach Konstruktion sind P_1, P_2, P_3 Seitenmitten des Vierecks $ABCD$. Es ist nur noch zu zeigen, daß P_4 auf der Seite $\overline{DA}$ liegt und sie halbiert.

Nehmen wir an, P_4 läge nicht auf $\overline{DA}$. Dann wird $\overline{DA}$ durch die Geraden P_3P_4 und P_1P_4 in den beiden Punkten P' und P'' geschnitten (Abb. 3). Wir haben zu zeigen, daß diese beiden Punkte zusammenfallen.

Wir zeichnen die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und betrachten zunächst das Büschel mit dem Scheitel B und den Strahlen BA und BC. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt aus der Konstruktion, daß $\overline{AC}$ parallel zu $\overline{P_1P_2}$, also auch parall. zu der Geraden P_3P' ist. Auf das Bündel mit dem Scheitel D, den Strahlen DC und DA und den Parallelen AC und P_3P' wenden wir den Strahlensatz an und finden:

$|\overline{DP'}| : |\overline{P'A}| = |\overline{DP_3}| : |\overline{P_3C}| = 1 : 1.$

(Unter $|XY|$ ist die Länge der Strecke $|\overline{XY}|$ zu verstehen.) Der Punkt P' halbiert also die Strecke $\overline{AD}$.

Dasselbe behaupten wir von dem Punkt P'': Auch er halbiert die Strecke $\overline{AD}$. Um dies einzusehen, betrachten wir das Bündel mit dem Scheitel C und den Strahlen CB und CD. Aus der Konstruktion folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes, daß $\overline{BD}$ parallel zu $\overline{P_2P_3}$, also auch parallel zu der Geraden P_1P'' ist. Wir suchen jetzt wieder das gegenüberliegende Bündel mit dem Scheitel A, den Strahlen AB und AD und den Parallelen P_1P'' und BD auf und finden nach dem Strahlens.:

$|\overline{AP''}| : |\overline{P''D}| = |\overline{AP_1}| : |\overline{P_1B}| = 1 : 1.$

Also halbiert auch P'' die Strecke $\overline{AD}$, wie soeben behauptet wurde.

Eine Strecke kann aber nur in einem einzigen Punkt halbiert werden. Daher müssen die Punkte P' und P'' zusammenfallen, also mit P_4 identisch sein. Wäre die Konstruktion in

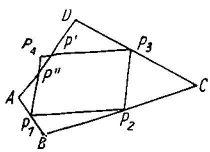


Abb. 3

Abb. 3 korrekt ausgeführt worden, so hätten von vornherein nicht zwei verschiedene Punkte P' und P'' entstehen können. Damit ist gezeigt, daß P_4 auf der Strecke $\overline{AD}$ liegt und sie halbiert. Das Viereck $ABCD$ erfüllt die Forderungen der Aufgabe, die anfangs genannte Bedingung ist hinreichend für die Existenz einer Lösung. Nachbetrachtung: Aus der Konstruktion geht hervor, daß es unendlich viele Vierecke $ABCD$ der verlangten Art gibt, sofern nur das gegebene konvexe Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Parallelogramm ist. Vielleicht findet ihr noch einen anderen Lösungsweg?

Aufgaben aus sowjetischen Mathematiklehrbüchern

131 Die Kosten für 6 Lampen betragen bei einer Brenndauer von 15 Minuten genau 2 Kopeken. Sie betragen für 210 Lampen in der gleichen Zeit 35mal so viel, das heißt 70 Kopeken. Brennen diese 210 Lampen 30 Tage lang täglich 15 Minuten, erhöhen sich die Kosten auf 2100 Kopeken, das sind 21 Rubel. Bei einer unnützen Brenndauer von 5 Minuten täglich ergibt sich demnach für die Schule eine Mehrausgabe von 7 Rubel.

132 Die geordneten Teiler der Zahl 84 sind 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.
Es gilt $1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12 = 84$.

133 Die Quelle liefert in 4 Sekunden 2 Liter Wasser, also in 2 Sekunden 1 Liter Wasser. Ein Tag hat $60 \cdot 60 \cdot 24 = 86400$ Sekunden. Aus $86400 : 2 = 43200$ folgt, daß die Quelle an einem Tag 43200 Liter Wasser liefert.

134 80 Eulen vertilgen in 15 Jahren $80 \cdot 1000 \cdot 15 = 1200000$ Feldmäuse. Durch die Eulen werden also in 15 Jahren 1200000 kg bzw. 1200 t Korn erhalten.

W(5)135 Durch $2 \cdot 30 + 20 = 80$ ermitteln wir die Höhe des Glockenturms (80 m), dann beträgt die Höhe der Universität $3 \cdot 80\,\text{m} = 240\,\text{m}$. Die Höhe der Gebäude über dem Spiegel der Moskwa beträgt also für den Glockenturm 110 m, für die Universität 318 m.

W(5)136 Aus $9 \cdot (31 + 37) = 612$ folgt, daß beide Züge in 9 Stunden zusammen eine Strecke von 612 km zurücklegen.
Aus $892 - 612 = 280$ folgt, daß diese Züge nach 9 Stunden Fahrzeit noch 280 km voneinander entfernt sind.

137 Wir nehmen an, die Brigade mußte täglich nach dem Plan x m³ Holz bereitstellen. Es gilt dann

$$\begin{aligned}(x+14) + (x-2) + (x+16) &= 184,\\ 3x + 28 &= 184,\\ 3x &= 156,\\ x &= 52.\end{aligned}$$

52 m^3 Holz betrug das tägliche Plansoll.

138 Die erste zweistellige natürliche Zahl sei $10a + b$; die durch Vertauschen der Ziffern erhaltene Zahl ist dann $10b + a$. Aus $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11\,(a + b)$ folgt, daß die Summe aus beiden Zahlen durch 11 teilbar ist.

139 Der erste Summand sei n, dann ist der zweite Summand $132 - n$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}n &= \frac{1}{6}(132 - n),\\ \frac{6}{5}n &= 132 - n,\\ \frac{11}{5}n &= 132,\\ n &= 60.\end{aligned}$$

Die Summanden sind demnach die Zahlen 60 und 72.

140 Das k. g. V. der Zahlen 28, 16 und 12 beträgt 336; $336 : 7 = 48$. Nach 48 Wochen und zwar wieder an einem Dienstag treffen alle Züge gleichzeitig in Moskau ein.

W(6)141 Das k. g. V. der Zahlen 16 und 18 ist 144. Nach 144 Tagen, also am 6. September (bzw. 5. September), begegnen sich die Fahrgastschiffe in Moskau wieder.

W(6)142 Die zu ermittelnde gebrochene Zahl finden wir durch Erweitern des Bruches $\frac{4}{7}$ mit der Zahl n; der erweiterte Bruch ist $\frac{4n}{7n}$.
Ferner gilt $7n - 4n = 21$, also $n = 7$.
Die Zahl $\frac{28}{49}$ finden wir als Lösung.

143 $(1695 - 45) : 2 = 825$; $825 + 45 = 870$.
1. Brigade: Es wurden in 225 Tagen 870 m geschafft, davon in den ersten 25 Tagen 70 m, also in den verbleibenden 200 Tagen 800 m.
2. Brigade: Es wurden in 225 Tagen 825 m geschafft, davon in den ersten 25 Tagen 65 m, also in den verbleibenden 200 Tagen 760 m.
Die erste Brigade schaffte in den ersten 25 Tagen täglich 2,8 m, danach täglich 4 m; das bedeutet eine Steigerung um etwa 42,9 %.
Die zweite Brigade schaffte in den ersten 25 Tagen täglich 2,6 m, danach täglich 3,8 m; das bedeutet eine Steigerung um etwa 46,2 %.

144 Es sei x die Anzahl der Schüler, die an der ersten Stufe der Mathematik-Olympiade teilnehmen; dann gilt

$$x \cdot \frac{35}{100} \cdot \frac{2}{9} = 1 + 2 + 5 + 20;\ x = 360.$$

Es nahmen 360 Schüler an der ersten Stufe teil.

145 Die Kosten nach Umstellung auf örtlich anfallende Kohle betragen $\frac{7}{3} : \frac{28}{3} = \frac{1}{4}$ der ursprünglichen Kosten. Somit wurden 75 % Kosten eingespart.

146 4 Tage und 14 Stunden sind 110 Stunden. Die Geschwindigkeit des Zuges sei v_1, die des Dampfers v_2, die des Pferdes v_3; dann gilt:

$v_3 = \frac{1}{8} v_1$; $v_3 = \frac{1}{4} v_1 : v_2 : v_3 = 8:4:1$.

Die Zeiten sind umgekehrt proportional den zugehörigen Geschwindigkeiten, es gilt also
$s_1 : s_2 = 4:8 = 1:2$;
$s_2 : s_3 = 1:4 = 2:8$; $s_1 : s_2 : s_3 = 1:2:8$;
$110:11 = 10$; also $s_1 = 10$ Std., $s_2 = 20$ Std., $s_3 = 80$ Std.
Die Geologen fuhren 10 Std. mit dem Zug, 20 Std. mit dem Dampfer, und 80 Std. ritten sie zu Pferde.

W(7)147 $27{,}2 : 8 = 3{,}4$; 3,4 t Schrott zu 4 Rubel je Tonne bringen den Erlös von 13,6 Rubel;
$27{,}2 - 3{,}4 = 23{,}8$; 23,8 t Schrott verbleiben, sie werden im Verhältnis 3 : 4 geteilt;
$x : (23{,}8 - x) = 3:4$; $x = 10{,}2$. 10,2 t zu 12,5 Rubel je Tonne bringen 127,5 Rubel, 13,6 t zu 15 Rubel je Tonne bringen 204 Rubel. Der Gesamterlös beträgt demnach 345,1 R.

W(7)148 Die Geschwindigkeit des Minutenzeigers sei v_1, die des Stundenzeigers v_2; dann gilt:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2\pi r_1}{t_1} = \frac{2\pi \cdot 2}{1} = 4\pi;$$
$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{2\pi r_2}{t_2} = \frac{2\pi \cdot 1{,}5}{12} = \frac{1}{4}\pi;$$
$$v_1 : v_2 = (4\pi) : \left(\frac{1}{4}\pi\right) = 16:1.$$

Die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers ist 16mal so groß wie die der Spitze des Stundenzeigers.

149 Die Maßzahl des Volumens des Eisberges (in m³) sei x. Dann ist die Maßzahl seiner Masse (in t) $0{,}9x$. Ferner beträgt die Maßzahl der Masse (in t) des verdrängten Wassers $1{,}03\,(x - 2000)$. Man erhält also die Gleichung

$$1{,}03\,(x - 2000) = 0{,}9x\,,$$
$$0{,}13x = 2060\,,$$
$$x = \frac{2060}{0{,}13} \approx 15800\,.$$

Das Volumen des Eisberges beträgt rund 15800 m³.

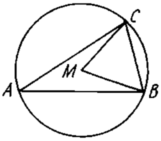
150 Die Bodenfläche des Behälters hat die Form eines Kreisrings und daher den Flächeninhalt

$$A = \left(\frac{\pi}{4}78^2 - \frac{\pi}{4}36^2\right)\text{cm}^2$$
$$\approx (4778 - 1018)\ \text{cm}^2 = 3760\ \text{cm}^2\,.$$

Da der Behälter ein Gewicht von $G = 752$ kp hat, beträgt der Druck, den er auf das Fundament ausübt,

$$p = \frac{G}{A} \approx \frac{752}{3760}\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{5}\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 0{,}200\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}\,.$$

151 Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, so daß $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ ist. Dann ist $\sphericalangle\, CMB = 60°$ als Zentriwinkel, der zu derselben Sehne $\overline{BC}$ gehört wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle\, CAB = 30°$.
Das Dreieck CMB ist nun nicht nur gleichschenklig, sondern wegen $\sphericalangle\, CMB = 60°$ sogar gleichseitig; d. h., es ist auch $\overline{BC} = r$, w. z. b. w.

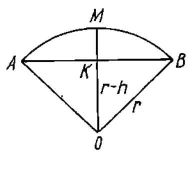


W(8)152 Benötigt der erste Bagger für die Aushebung der Baugrube allein x Tage, so benötigt der zweite Bagger allein $1{,}5x$ Tage. Ferner gilt $\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}5x} = \frac{1}{24}$, also $36 + 24 = 1{,}5x$, d. h. $1{,}5x = 60$, $x = 40$.
Der erste Bagger könnte also allein die Arbeit in 40 Tagen, der zweite Bagger allein in 60 Tagen ausführen.

W(8)153 Es sei x die Maßzahl der Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ der Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden, dann ist $2x$ die Maßzahl der Geschwindigkeit der Fahrstühle in den Hochhäusern. Man erhält die Gleichung
$\frac{81}{2x} = \frac{33}{x} + 5$ und hieraus wegen $x \neq 0$
$81 = 66 + 10x$, d. h., $10x = 15$, $x = 1{,}5$.
Die Geschwindigkeit der Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden beträgt daher $1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und in Hochhäusern $3{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

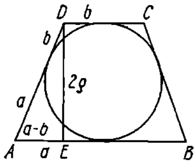
154 In dem rechtwinkligen Dreieck KOB ist $\overline{OB} = r = 8{,}5$ m, $\overline{OK} = r - h = 5{,}5$ m, und es sei $\overline{KB} = x$ m. Dann gilt

$$x^2 = 8{,}5^2 - 5{,}5^2 = 72{,}25 - 30{,}25 = 42.$$



Daraus folgt $x \approx 6{,}48$ und $2x \approx 12{,}96$. Die Spannweite $\overline{AB}$ der Brücke beträgt also rund 13 m.

155 Es seien $ABCD$ das dem Kreise (mit der Maßzahl ϱ des Radius) umschriebene Trapez und $2a$ die Maßzahl der Grundseite $\overline{AB}$, $2b$ die Maßzahl der Grundseite $\overline{CD}$.

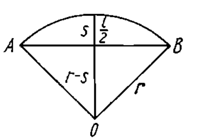


Ferner sei E der Fußpunkt des von D auf $\overline{AB}$ gefällten Lotes. Dann ist $a + b$ die Maßzahl der Strecke $\overline{AD}$, $a-b$ die Maßzahl der Strecke $\overline{AE}$ und 2ϱ die Maßzahl der Strecke $\overline{DE}$. Da das Dreieck AED rechtwinklig ist, folgt

$$(a+b)^2 = (2\varrho)^2 + (a-b)^2\,,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 4\varrho^2 + a^2 - 2ab + b^2,$$
$$4ab = 4\varrho^2\,,$$
$$ab = \varrho^2\,,$$
$$a : \varrho = \varrho : b\,.$$

156 Es sei $2r$ der zu messende Durchmesser. Dann gilt

$$r^2 = (r-s)^2 + \frac{l^2}{4},$$
$$r^2 = r^2 - 2rs + s^2 + \frac{l^2}{4},$$
$$2rs = s^2 + \frac{l^2}{4},$$
$$2r = \frac{s^2 + \frac{l^2}{4}}{s} = \frac{l^2 + 4s^2}{4s} = \frac{40000 + 2500}{100}\ \text{mm}$$
$$= 425\ \text{mm}.$$



Der Durchmesser der Scheibe beträgt 425 mm; die Formel lautet

$$2r = \frac{l^2 + 4s^2}{4s}.$$

157 Die Entfernung von Moskau bis Kiew sei gleich a. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges betrage bei Windstille v, bei dem Flug von Moskau nach Kiew (also mit dem Wind) $v + x$ und bei dem Rückflug (also gegen den Wind) $v - x$. Unter normalen Flugbedingungen kann man dabei stets $x < v$ annehmen. Dann ist die Zeit für den Hin- und Rückflug

bei Windstille $t_0 = \frac{a}{v} + \frac{a}{v} = \frac{2a}{v}$,

bei einem mit konstanter Stärke in Richtung Moskau — Kiew wehenden Wind

$$t_1 = \frac{a}{v+x} + \frac{a}{v-x} = a \cdot \frac{v - x + v + x}{v^2 - x^2}$$
$$= \frac{2av}{v^2 - x^2} = \frac{2a}{v - \frac{x^2}{v}}.$$

Nun ist $v > v - \frac{x^2}{v}$, also $\frac{1}{v} < \frac{1}{v - \frac{x^2}{v}}$, d. h., $t_0 < t_1$.

Der Hin- und Rückflug wird also bei Windstille schneller zurückgelegt.

W(9)158 Aus der der Aufgabe beigefügten Zeichnung erkennen wir, daß sich die Figur angenähert aus einem Viertelkreisring mit den Radien $R + t$ und R sowie zwei Rechtecken, die jeweils die Seitenlängen $a - t$ und t haben, zusammensetzt. Daher gilt für den Flächeninhalt

$$A \approx \frac{\pi}{4}(R+t)^2 - \frac{\pi}{4}R^2 + 2(a-t)t,$$
$$A \approx \frac{\pi}{4}2Rt + \frac{\pi}{4}t^2 + 2at - 2t^2$$
$$A \approx \left(\frac{\pi}{2}R + 2a\right)t - \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)t^2,$$
$$A \approx (1{,}571\,R + 2a)t - 1{,}215\,t^2.$$

W(9)159 Das Volumen des Zylinders beträgt

$$V_1 = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Das Volumen des Kegels beträgt

$$V_2 = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

und das Volumen der Kugel $V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Daher gilt

$$V_2 + V_3 = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi r^3 = V_1,$$

w. z. b. w.

160 Ist x die Maßzahl der Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) der *Rakete*, so ist $x - 50$ die Maßzahl der Geschwindigkeit des Dampfschiffes. Man erhält die Gleichung

$$\frac{210}{x} + 7{,}5 = \frac{210}{x - 50},$$
$$210(x-50) + 7{,}5x(x-50) = 210x\,,$$
$$28(x-50) + x(x-50) = 28x\,,$$
$$28x - 1400 + x^2 - 50x = 28x\,,$$
$$x^2 - 50x - 1400 = 0\,.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich
$x_1 = 25 + \sqrt{625 + 1400} = 25 + \sqrt{2025} = 25 + 45 = 70$.
Die Geschwindigkeit der *Rakete* beträgt daher $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

161 Setzt man $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ und $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, so folgt $a^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ und $b^2 = 8 + 2\sqrt{12}$,
also $a^2 - b^2 = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{12} > 0$,
da $15 > 12$ ist.
Daher gilt $a^2 > b^2$ und wegen $a > 0$, $b > 0$ auch $a > b$.

162 Aus $\sin\alpha + \cos\alpha = m$ folgt
$m^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.
Daher gilt $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$.

163 Wegen $\sin\alpha \neq 0$ erhält man

$$\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1 + \cot^2\alpha}{1 - \cot^2\alpha}.$$

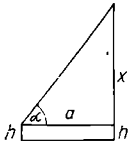
W(10)164 Angenommen, es sei x_1 eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen.

Dann gilt $x_1^2 + ax_1 + 1 = 0$ (1)
und $x_1^2 + x_1 + a = 0$ (2),
also $ax_1 + 1 - x_1 - a = 0$,
$x_1(a - 1) - (a - 1) = 0$,
$(x_1 - 1)(a - 1) = 0$. (3)

Die Gleichung (3) ist in den folgenden beiden Fällen erfüllt:

1. $\boldsymbol{a = 1}$. In diesem Fall lauten die Gleichungen $x^2 + x + 1$ (1) und $x^2 + x + 1$ (2). Sie haben, da sie identisch sind, zwei gemeinsame, jedoch nicht reelle Lösungen.
2. $\boldsymbol{x_1 = 1}$. In diesem Fall erhält man aus (1) $a = -2$, und die Gleichungen lauten $x^2 - 2x + 1 = 0$ (1) und $x^2 + x - 2 = 0$ (2) mit der gemeinsamen Lösung $x_1 = 1$.

W(10)165 Es sei $x + h$ die Höhe des Turmes, dann gilt $\tan\alpha = \frac{x}{a}$, also



$x = a\tan\alpha \approx 180 \cdot \tan 53° \text{ m}$,
$x \approx 180 \cdot 1{,}327 \text{ m} \approx 238{,}9 \text{ m}$,
also $x + h \approx 240{,}1 \text{ m}$.

Die Höhe des Turmes des Hauptgebäudes der Lomonossow-Universität in Moskau beträgt also rund 240 m.

166 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. N. Tschajkovskyj

Wir führen „Schachbrettkoordinaten" ein: längs der Horizontalen die Buchstaben *a*, *b*, ..., bis *h*, längs der Vertikalen die Zahlen 1 bis 8. Wir haben zuerst 64 1-feldrige Quadrate. Um alle 4-feldrigen Quadrate zu finden, betrachten wir je zwei Nachbarspalten. Wir haben: *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, *gh* — insgesamt 7 Paare. Wenn wir alle diese Quadrate aufwärts verschieben, müssen wir folgende Zeilenpaare nehmen: 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, also auch 7 Paare. Daher beträgt die Anzahl der 4-feldrigen Quadrate $7 \cdot 7 = 49$. Dann suchen wir alle 9-feldrigen Quadrate, bilden also 6 Spaltentripel: *abc*, *bcd*, *cde*, *def*, *efg*, *fgh* und ebensoviele Zeilentrippel: 123, 234, 345, 456, 567, 678. Wir erhalten also $6 \cdot 6 = 36$ 9-feldrige Quadrate. Ganz analog erhalten wir $5 \cdot 5 = 25$ 16-feldrige Quadrate, $4 \cdot 4 = 16$ 45-feldrige Quadrate, $3 \cdot 3 = 9$ 36-feldrige Quadrate, $2 \cdot 2 = 4$ 49-feldrige Quadrate und endlich $1 \cdot 1 = 1$, also ein 64-feldriges Quadrat.
$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$
Auf dem Schachbrett gibt es 204 Quadrate.

167 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. S. Brehmer

Aufgabe a: Für $A \neq 0$, $y \neq 0$ ist
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ay^2\left(z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}\right)$
$\left(z = \frac{x}{y}\right)$.

Der Faktor $z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}$ läßt sich genau dann in Linearfaktoren $z - z_1$, $z - z_2$ zerlegen, wenn $\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A} \geqq 0$ oder, was gleichbedeutend ist, wenn

$$\boxed{B^2 - 4AC \geqq 0} \qquad (1)$$

ist, d. h., wenn die sogenannte *Diskriminante* $B^2 - 4AC$ der quadratischen Form nichtnegativ ist. Wir zeigen, daß (1) die gesuchte Bedingung ist.

Es gelte (1). Im Falle $A \neq 0$, $y \neq 0$ ist dann $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ay^2\,(z-z_1)\,(z-z_2) = (Azy-Az_1y)\,(zy-z_2y)$, d. h., wegen $zy = x$ ist

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (Px + Qy)\,(Rx + Sy)} \qquad (2)$$

mit $P = A$, $Q = -Az_1$, $R = 1$, $S = -z_2$. Die Gleichung (2) gilt dann offenbar auch für $y = 0$, also für alle reellen Zahlen x, y. Im Falle $A = 0$ gilt ebenfalls (2) mit $P = 0$, $Q = 1$, $R = B$, $S = C$. Ist umgekehrt (2) erfüllt, so ist $A = PR$, $B = PS + QR$, $C = QS$ und es folgt

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (PS + QR)^2 - 4\,PRQS \\ &= P^2S^2 + Q^2R^2 - 2\,PRQS \\ &= (PS - QR)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

d. h., (1) ist erfüllt.

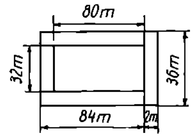
Aufgabe 197 b siehe Heft 3/68.

Lösungen der Aufgaben zu:
Als Mathematiklehrer in Tansania

1. Der Zeichnung entnehmen wir:

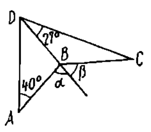
$$36 \cdot 84 - 32 \cdot 80 = 3024 - 2560 = 464;$$

der Flächeninhalt der gepflasterten Fläche beträgt 464 m².



2. Es sei n die zu ermittelnde dritte Zahl; dann gilt
$n \cdot 19 \cdot 26 = 6422$; $n = 6422 : (19 \cdot 26)$;
$n = 13$.

3. Aus $\overline{AB} = \overline{BD}$ folgt, daß das Dreieck ABD gleichschenklig ist. Der Winkel α ist als Außenwinkel des Dreiecks ABD doppelt so groß wie ein Basiswinkel, also $\alpha = 80°$.

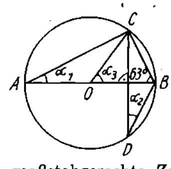


Aus $\overline{BC} = \overline{BD}$ folgt, daß das Dreieck BCD gleichschenklig ist. Der Winkel β ist als Außenwinkel des Dreiecks BCD doppelt so groß wie ein Basiswinkel, also $\beta = 54°$.

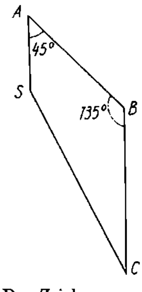
4. $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{6+3+1}{42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$;

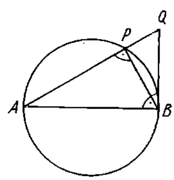
$$\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} = \frac{29 + 12 + 4 + 3}{696} = \frac{48}{696} = \frac{2}{29}.$$

5. Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein rechter Winkel; also gilt $\sphericalangle\, ACB = 90°$. Dann gilt weiterhin $\alpha_1 = 90° - 63° = 27°$. Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises sind untereinander kongruent; also gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = 27°$. Aus $\overline{OB} = \overline{OC} = r$ folgt, daß das Dreieck OBC gleichschenklig ist; deshalb gilt $\alpha_3 = 180° - 2 \cdot 63° = 54°$.



6. Die maßstabgerechte Zeichnung könnte wie folgt aussehen: (8 sm $\triangleq$ 1 cm).
Meßergebnis: $\overline{SC} = 3{,}5$ cm. Das Boot hat vom Standort S die Entfernung $\overline{SC} = 28$ sm.

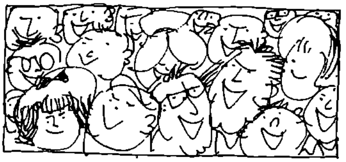




7. Der Zeichnung entnehmen wir: $\sphericalangle\, APB = \sphericalangle\, BPQ = \sphericalangle\, ABQ = 90°$.
Wir zeichnen die Strecke $\overline{BQ} = 3$ cm und konstruieren über $\overline{BQ}$ als Durchmesser den Thaleskreis. Der Kreis um Q mit dem Radius $r = 1$ cm schneidet den ersten Kreis in den Punkten P bzw. P'. Durch den Punkt B zeichnen wir nun eine Senkrechte auf $\overline{BQ}$; sie schneidet die Geraden QP bzw. QP' in den Punkten A bzw. A'. Die Kreise k bzw. k' über $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BA'}$ als Durchmesser sind die zu konstruierenden Kreise; es gibt also zwei Lösungen.

Lösungen zu *alpha*-heiter 1/68: 36 : 9 = 4; 36 + 3 = 39; 4 + 9 = 13; 39 : 3 = 13 — Junge Gärtner: Es gibt 13 verschiedene Möglichkeiten — Durchschnittlich schoß jeder Jäger genau zwei Hasen. Das sind bei k Schützen $2k$ Hasen; 3mal $2k$ Hasen = $6k$ Hasen; Verhältnis 1 : 6 — Es gibt 44 Möglichkeiten, die Briefe falsch einzustecken — Bildrätsel: FREUNDSCHAFT.

In freien Stunden
alpha heiter



Zauberkunststück!?

Versucht folgende „Konzentrationsübung". Gebt einem Freund ein Kartenspiel (32 Blatt) mit der Aufforderung, er möge eine Karte verdeckt herausnehmen. Dann versucht nach zweimaligem Durchblättern der restlichen 31 Karten, die fehlende zu bestimmen. Das ist normalerweise unmöglich! Die Mathematik macht dieses „Kunststück" möglich. Beachte, daß die Summe aller Kartenwerte 176 beträgt (7, 8, 9, 10, Bube: 2, Dame: 3, König: 4, As: 1). Beim ersten Durchblättern addiert man alle Werte so, daß volle Zehner unberücksichtigt bleiben. ($7 + 8 \rightarrow 5$ oder $9 + 4 \rightarrow 3$). Man erhält zum Schluß eine einstellige Zahl a. Nun ist $176 = 160 + 16$, das bedeutet, da die 16 Zehner unberücksichtigt blieben, daß a und der Wert der fehlenden Karte zusammen 16 ergeben. Eure Rechnung: $16 - a = x$. (Beachte bei $a = 4(5)$, daß dann $x = 12(11)$ wird. In diesem Falle muß man von 12(11) noch 10 subtrahieren.) Das zweite Durchblättern ergibt dann schnell die Lösung, da man schon weiß, ob eine 8, ein Bube (2) usw. fehlt.
Für diejenigen, die schon mit Zahlenkongruenzen vertraut sind, ist der mathematische Gehalt dieses „Kunststücks" völlig klar ($176 \equiv 16 \pmod{10}$).

H. Pätzold, OS Waren/Müritz

Vorsicht bei der Antwort!

Sind die folgenden Aussagen uneingeschränkt richtig, oder müssen bestimmte Einschränkungen gemacht werden?

1. Die Hälfte einer Zahl ist stets kleiner als die Zahl selbst!
2. Eine Zahl, die nicht positiv ist, ist stets negativ!
3. Jedes Viereck läßt sich in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegen!
4. Wenn die Differenz zweier Zahlen Null ist, dann ist die Summe dieser beiden Zahlen stets positiv!
5. Das Quadrat einer Zahl ist stets größer als die Zahl selbst!
6. Wenn ein Drittel einer Zahl um 20 kleiner ist als die Hälfte dieser Zahl, dann ist die Zahl größer als 100!

H. Pätzold, OS Waren/Müritz

Kusi - kusi

Die Spielregeln dieses sich in letzter Zeit in Leningrad wachsender Beliebtheit erfreuenden Spiels auf einem Schachbrett sind sehr einfach:
Die Weißen stellen acht Damesteine auf die erste Horizontale, die Schwarzen dagegen auf die achte, wonach abwechselnd gezogen wird. Jeder Zug besteht aus der Bewegung eines eigenen Damesteines in der Vertikalen nach vorn oder zurück über eine beliebige Anzahl von Feldern, jedoch nur bis zu einem feindlichen Damestein. Der Spieler, der keine Möglichkeit mehr hat, den nächstfolgenden Zug auszuführen, hat verloren. (Eine Gewinnmethode für das Spiel ist kompliziert, kann aber bei aufmerksamer, genauer Analyse ebenfalls gefunden werden.)
Dieses Spiel fand ich beim Lesen des soeben erschienenen Buches des sowjetischen Wissenschaftlers N. N. Vorobjoff: Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967, 6,80 M, in deutscher Sprache.

J. Lehmann, 29. OS, Leipzig

Aufgepaßt!

- Wieviel Pluszeichen muß man zwischen die Ziffern 9 8 7 6 5 4 3 2 1 setzen, um a) die Summe 99 und b) die Summe 100 zu erhalten? (Die Reihenfolge der Ziffern darf nicht verändert werden!)
- Setze die Operationszeichen +, —, · oder : an Stelle der Fragezeichen so ein, daß eine wahre Aussage entsteht!
5? (5 ? 5 ? 5) ? 5 = 8.
- Was ist größer: Die Summe aller Ziffern einer Zahl oder ihr Produkt?
- Die Summe zweier ganzer Zahlen beträgt 7, ihr Produkt ist größer als 10. Wie heißen die Zahlen?

● Großmutter, wie alt ist Ihr Urenkel, mit dem Sie gerade spielen?
— Es ist so viele Monate alt wie ich Jahre zähle!
— Und wie alt sind Sie?
— Wir beide, mein Urenkel und ich, sind zusammen 91 Jahre alt.
Das Alter meines Urenkels kannst Du nun selbst bestimmen!

Prof. Dr. N. Tschajkovskyj, Lvov (UdSSR)

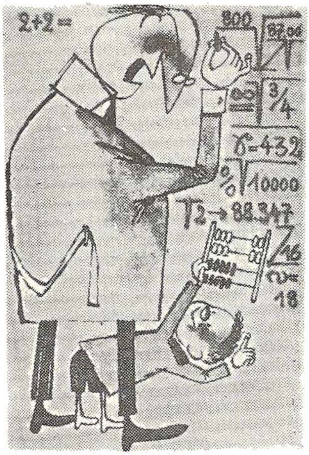
Nachgedacht!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

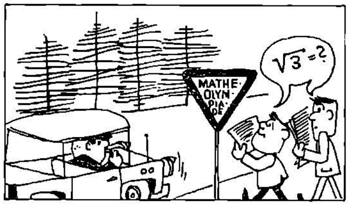
In die (senkrechten) Spalten sind Wörter mit der folgenden Bedeutung einzuordnen (Jedes Wort hat fünf Buchstaben; ö ist als oe zu schreiben): 1. Maßeinheit der Länge, 2. Teil des Koordinatensystems, 3. Maßeinheit der Masse, 4. besondere Linie im Dreieck, 5. Stellenwert, 6. Maßeinheit der Zeit, 7. griechischer Buchstabe, 8. Zusammenstellung von bestimmten Zahlenwerten (oder wichtiger Teil eines Klassenzimmers), 9. zusätzliches Unterscheidungsmerkmal bei Variablen (z. B. $a_1, a_2, \ldots$), 10. geometrischer Körper.
Die Buchstaben in der ersten (waagrechten) Zeile ergeben den Namen einer Wissenschaft.

K. Lehmann, 8. OS, Berlin

Mitgelacht!

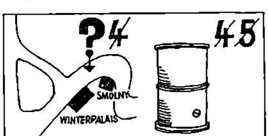


„Still, so einfach und billig machen wir's uns nicht!" Zeichnung: Schrader, Text: H. Hüttner. Aus: „Eulenspiegel"

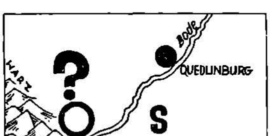


Ohne Worte!

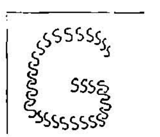
Mitgemacht!



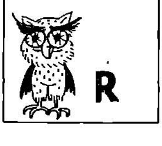
englischer Mathematiker und Physiker (1643 bis 1727), Mitbegründer der Differentialrechnung



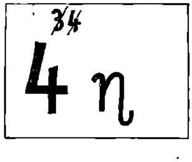
griechischer Mathematiker (um 600v.u.Z.), galt als einer der sieben Weisen Griechenl., nach ihm ein Satz der Kreislehre benannt



deutscher Mathematiker (1777 bis 1855)



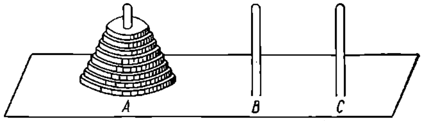
schweizer Mathematiker (1707 bis 1783)



französischer Mathematiker (1540 bis 1603), nach ihm sind Sätze über quadratische Gleichungen benannt

K. Lehmann, 8. OS, Berlin

Der Lucassche Turm



Wir wollen uns heute mit einem Spiel beschäftigen, das, von dem französischen Mathematiker *E. Lucas* erfunden, schon im vorigen Jahrhundert bekannt war. Es besteht aus einem Brett mit drei Pflöcken A, B, C und einer Anzahl verschieden großer durchbohrter Scheiben. Statt der in der Abbildung gezeichneten acht Scheiben können es auch weniger oder mehr sein. Der Spieler hat die Aufgabe, den dargestellten „Turm" vom Pflock A auf einen der beiden anderen Pflöcke umzusetzen, wobei folgende Regeln zu beachten sind:

1. Es darf immer nur eine Scheibe gleichzeitig umgesetzt werden. 2. Beim Umsetzen darf keine Scheibe aus der Hand gelegt, sondern immer nur auf einen der Pflöcke gesteckt werden. 3. Es darf immer nur eine kleinere Scheibe auf eine größere gesetzt werden, niemals umgekehrt.

Selbstverständlich kann das Spiel auch mit anderen verschieden großen Gegenständen, die sich stapeln lassen, durchgeführt werden, etwa mit Büchern, Münzen usw. Die Pflöcke ersetzt man dann einfach durch drei vorgeschriebene Plätze auf dem Tisch, die belegt werden dürfen. Daß man das Spiel mit möglichst wenig Zügen (wir wollen das Umsetzen einer jeden Scheibe einen Zug nennen) erreichen soll, versteht sich von selbst. Anstatt blind zu probieren, gehen wir systematisch vor. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Züge durch eine Zahl und einen Buchstaben. $3B$ heißt z. B.: Scheibe 3 wird auf Pflock B gesetzt, wobei wir die Scheiben von oben nach unten numerieren.

Wir spielen zunächst mit einem Turm aus nur zwei Scheiben. Diesen umzusetzen ist kein Kunststück. Es genügen drei Züge: $1B$, $2C$, $1C$. (Es ist klar, daß das Zurücksetzen des Turmes ebensoviele Züge erfordert und in genau umgekehrter Reihenfolge zu geschehen hat.) Gehen wir nun zu einem Dreierturm über. Um an die dritte Scheibe heranzukommen und diese umsetzen zu können, muß erstens der darüberstehende Zweierturm entfernt und zweitens ein Pflock frei sein. Das bedeutet unter Beachtung der Spielregeln, daß die vorige Aufgabe, das Umsetzen eines Zweierturmes, schon gelöst sein muß. Anschließend sind folgende Züge nötig: $3B$, $1A$, $2B$, $1B$. Wie man sieht, stellen die letzten Züge wiederum das Umsetzen eines Zweierturmes dar. Insgesamt sind also 7 Züge erforderlich. Entsprechend geschieht das Umsetzen eines Viererturmes in folgenden Abschnitten:

Umsetzen des darüberstehenden Dreierturmes: 7 Züge, Umsetzen der vierten Scheibe auf den leeren Pflock: 1 Zug, nochmaliges Umsetzen des Dreierturmes: 7 Züge.

Das sind insgesamt 15 Züge. Geht man schrittweise so weiter, so erkennt man: Um von einem Turm aus n Scheiben zu einem Turm aus $n + 1$ Scheiben überzugehen, sind soviele Züge **mehr** nötig, wie man zum Umsetzen eines Turmes aus n Scheiben braucht, und noch ein weiterer Zug. Dieser etwas umständliche Satz läßt sich mit mathematischen Symbolen einfacher und klarer formulieren: Sind zum Umsetzen eines „n-Turmes" x Züge nötig, so braucht man zum Umsetzen eines $(n + 1)$-Turmes $x + 1$ Züge mehr. Nennen wir die Gesamtzahl der Züge für den $(n + 1)$-Turm y, so ist also

$$y = x + x + 1 \qquad y = 2x + 1\,.$$

Mit dieser Formel können wir nun schrittweise, angefangen mit $n = 2$, die Anzahl der jeweils nötigen Züge berechnen:

Anzahl d.	2	Anzahl d.	3
Scheiben	3	Züge	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
	4		$2 \cdot 7 + 1 = 15$
	5		$2 \cdot 15 + 1 = 31$
	6		$2 \cdot 31 + 1 = 63$ usw.

Der mathematisch geübte Leser merkt, daß es sich bei der Anzahl der Züge um die jeweils um 1 verminderten Potenzen der Zahl 2 handelt. Um n Scheiben umzusetzen, sind $(2^n - 1)$ Züge nötig. Die Anzahl der Züge wächst schnell mit der Anzahl der Scheiben. Auf jeden Fall haben wir jetzt die Gesetzmäßigkeiten erfaßt, sind nicht mehr auf willkürliches Probieren angewiesen und somit dem unerfahrenen Spieler überlegen. J. Frormann

Für den Bücherfreund

FRIEDRICH HERNECK

Albert Einstein

Buchverlag der Morgen, Berlin 1967, 6,80 M
(Für Schüler ab Klasse 9)

Der Name des Nobelpreisträgers für Physik Albert Einstein ist jedem geläufig. Über das Leben des berühmten Physikers, Humanisten und Friedenskämpfers gab es in deutscher Sprache bisher jedoch kaum eine zuverlässige, von legendenhaftem Beiwerk freie Schrift. Gestützt auf die Ergebnisse einer jahrelangen, quellenmäßig betriebenen Einstein-Forschung versucht der Verfasser des vorliegenden Buches, ein wahrheitsgetreues, dokumentarisch gesichertes Bild Einsteins und seiner weltweiten Wirksamkeit zu zeichnen.

OSTROVSKI/KORDEMSKI

Zeichnen hilft rechnen

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1964, 8,50 M
(Für Schüler ab Klasse 8)

In diesem Buch wird die Anwendung einiger geometrischer (graphischer und graphisch-rechnerischer) Verfahren zur Lösung verschiedener arithmetischer und algebraischer Aufgaben betrachtet. Die Lösung der Aufgaben geschieht mit Hilfe von Zeichnungen, von Diagrammen und graphischen Darstellungen. Die Konstruktion dieser Zeichnungen gibt die Möglichkeit, die Aufgaben zu „sehen", also die Beziehungen festzustellen und zu verfolgen, die zwischen den Größen, die zur Aufgabe gehören, bestehen, und den kürzesten Lösungsweg zu wählen (Annotation der russischen Ausgabe).

AUTORENKOLLEKTIV

Von Anton bis Zylinder

Das Lexikon für Kinder
Kinderbuchverlag, Berlin 1968, etwa 1000 mehrfarbige Illustrationen, 336 S., Pappbd. m. Folie etwa 27,50 M
(Für Schüler ab Klasse 4)

Ein Buch, das Wissensdurst löscht und Wißbegierde weckt, ein Nachschlagwerk, das etwa 850 alphabetisch geordnete Stichworttexte enthält. Es hilft Kindern, die Umwelt, die sie während des Übergangs zum Fachunterricht mit Riesenschritten zu erobern haben, schneller und besser zu begreifen. Das Lexikon führt an die Benutzung des Nachschlagewerks als eine Form der selbständigen geistigen Arbeit heran. Die Beiträge aus Naturwissenschaft, Mathematik, Technik, Produktion, Geschichte, Kultur, Sport und dem gesellschaftlichen Leben geben auch erste Auskunft über Begriffe, denen die Kinder im Unterricht begegnet sind.

DIETER HAUPT

Mengenlehre leicht verständlich

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967, 3. Verbesserte Auflage, 61 Bilder, 84 Beispiele, 48 Aufgaben mit Lösungen, 4.80 M
(Für Schüler ab Klasse 9)

Die vorliegende Schrift will dem Leser einen Einblick in die Grundlagen der Mengenlehre geben. Sie erläutert in Verbindung mit einfachen, lebensnahen Beispielen, für die keine großen Vorkenntnisse nötig sind, die grundlegenden Beziehungen, die zwischen Mengen gelten. An Hand von Übungen, die den Abschnitten angeschlossen sind und deren Lösungen im Anhang zu finden sind, kann der Leser prüfen, ob er den Stoff verstanden hat.

WERTH/GRÖLL

Nomographie

Wegweiser zur vereinfachten Ausführung von Berechnungen
B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig 1964, 18,50 M, 190 S., 118 Abbildungen und Lösungen zu den Aufgaben.
(Für Schüler ab Klasse 9)

Die Methoden der Nomographie und ihre Möglichkeit auf dem Gebiet der Naturwissenschaften sind noch viel zu wenig bekannt. So werden Logarithmentafeln und Rechenschieber nicht selten auch dort herangezogen, wo die gestellten Aufgaben rascher und einfacher mit Hilfe von Nomogrammen zu lösen sind. Das Buch will seinem Leserkreis einen Überblick geben, wie Nomogramme verschiedener Art anzuwenden sind und wie sie entworfen werden.

PETER KLEMM

Automaten, Forscher und Raketen

Kinderbuchverlag, Berlin 1968, 240 S. Leinen mit Schutzumschlag, etwa 12,80 M.
(Für Schüler ab Klasse 7)
Dies ist der dritte Band der Geschichten aus 100000 Jahren Technik. An der Entwicklung der Atomphysik, der Elektronik, der Raketenphysik und an zahlreichen anderen Beispielen zeigt der Autor, wie heute die wissenschaftlich-technischen Grundlagen für die Welt von morgen geschaffen werden. Am meisten spricht sicher die Jungen Mathematiker der Beitrag „künstliche Gehirne“ an (Rechenbrett und Zahlrahmen, elektronische Rechenautomaten, der Vater der Kybernetik u. a.). Aber auch sonst wird die Wechselbeziehung zwischen Mathematik und gesellschaftlicher Praxis immer wieder offenbar.

W. NAUNDORF

Abbildungstreue

Kleine Naturwissenschaftliche Bibliothek B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig 1963, 54 S. mit 27 Abb., Broschur, 3,20 M.
(Für Schüler ab Klasse 6)

Manche Menschen meinen, daß es sich nicht lohne, für die Optik besonderes Interesse aufzubringen. Gerade die den optischen Instrumenten zugrunde liegende geometrische Optik birgt manche interessante und wissenschaftliche Seite, die zu verstehen auch im Alltag von Nutzen sein kann. Wer sich nun entschlossen hat, sich mit der Wirkungsweise solcher Instrumente etwas näher zu befassen, dem will das Bändchen in leicht verständlicher Weise helfen, die Grundlagen der optischen Abbildung auf der Basis der geometrischen Optik zu verstehen.

HELMAR LEHMANN

Der Rechenstab

und seine Verwendung
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1966, 5,80 M, mit 156 Bildern und 4 Tafeln, 282 durchgerechneten Beispielen und 121 Übungsaufgaben mit Lösungen.
(Für Schüler ab Klasse 7)

HANS SIMON

Elementare Vektoralgebra

VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967, 11,00 M, mit 148 Bildern und 47 Beispielen sowie 220 Aufgaben und Lösungen.

(Für Schüler ab Klasse 10)

Das Buch wurde bewußt als elementare Vektoralgebra bezeichnet. Es will jedem, der mit der Vektorrechnung Neuland betritt, eine Einführung lediglich in die Grundbegriffe, in die Symbolik und in die additive und multiplikative Verknüpfung von Vektoren vermitteln. Die Anwendungen und Aufgaben beschränken sich deshalb ebenfalls bewußt auf einige ausgewählte Gebiete, nämlich auf einfache Probleme aus der Planimetrie, der Stereometrie und der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Mit diesem Buch wird eine Grundlage für das Studium weiterführender Literatur zur Vektorrechnung geschaffen.

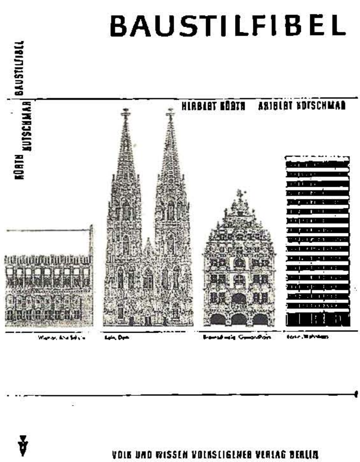
HERBERT KÜRTH und
ARIBERT KUTSCHMAR

Baustilfibel

Bauwerke und Baustile von der Antike bis zur Gegenwart

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin,

240 Seiten, 20,00 M, Bestellnummer 172536-3



Index 31059